



**HAL**  
open science

# Etude de la turbulence d'ondes élastiques et gravito-capillaires : de l'idéal théorique aux conditions réelles ?

Roumaïssa Hassaini

► **To cite this version:**

Roumaïssa Hassaini. Etude de la turbulence d'ondes élastiques et gravito-capillaires : de l'idéal théorique aux conditions réelles ?. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAI064 . tel-01961656

**HAL Id: tel-01961656**

**<https://theses.hal.science/tel-01961656v1>**

Submitted on 20 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : MEP : Mécanique des fluides Energétique, Procédés

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Roumaïssa HASSAINI**

Thèse dirigée par **Nicolas MORDANT**, Professeur, UGA

préparée au sein du **Laboratoire des Ecoulements  
Géophysiques et Industriels**  
dans l'**École Doctorale I-MEP2 - Ingénierie - Matériaux,  
Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés,  
Production**

**Etude de la turbulence d'ondes élastiques et  
gravito-capillaires : de l'idéal théorique aux  
conditions réelles ?**

**Study of turbulence of elastic and gravity-  
capillary waves : beyond the weak  
turbulence theory ?**

Thèse soutenue publiquement le **15 octobre 2018**,  
devant le jury composé de :

**Monsieur NICOLAS MORDANT**

PROFESSEUR, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES, Directeur de thèse

**Monsieur FREDERIC MOISY**

PROFESSEUR, UNIVERSITE PARIS 11, Rapporteur

**Monsieur ERIC FALCON**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION PARIS,  
Rapporteur

**Monsieur ERIC BARTHELEMY**

PROFESSEUR, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES, Président

**Monsieur GUSTAVO DURING**

MAITRE DE CONFERENCES, UNIVERSITE PONT. CATHOLIQUE DU  
CHILI, Examineur

**Monsieur SERGEY NAZARENKO**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, UNIVERSITE COTE D'AZUR,  
Examineur





## Résumé

La théorie de la turbulence faible (TTF) est une théorie statistique appliquée à un ensemble d'ondes aléatoires non cohérentes et dispersives. En supposant un domaine infini et une nonlinéarité infinitésimale, une prédiction sur la cascade d'énergie entre échelles par le biais d'interactions résonantes des échelles d'injection aux échelles dissipatives est alors possible. La théorie semble souvent mise en défaut par la confrontation expérimentale pour les ondes de surface. Une explication potentielle de cette divergence entre expérience et théorie est l'aspect fortement restrictif des hypothèses nécessaires à la validité de la théorie. Nous proposons dans cette thèse d'explorer l'impact du non-respect de certaines de ces hypothèses sur les propriétés statistiques de la turbulence. Des expériences à l'interface de deux liquides non-miscibles ont été entreprises afin d'étudier l'impact de l'augmentation de la dissipation visqueuse et donc de la réduction du temps dissipatif sur la mise en place de la cascade d'énergie. Une expérience à la surface de l'eau avec un confinement progressif de la largeur de la cuve a été effectuée afin d'observer une potentielle coexistence de la turbulence discrète, dans la direction confinée, et continue, dans la direction non confinée. Une analyse expérimentale des ondes gravito-capillaires où la dispersion a été réduite a permis de mettre en lumière une transition d'un régime de TTF vers un régime contenant des structures cohérentes localisées que sont les solitons. Afin de vérifier si une telle transition peut être visible sur un système physique différent, une étude expérimentale et numérique ont été conduites sur les ondes dans une plaque élastique précontrainte. Dans ce milieu l'effet de dispersion des ondes de flexion est en compétition avec le caractère non-dispersif des ondes de tension. Nous nous intéresserons par ailleurs numériquement aux régimes faiblement et fortement non-linéaires des ondes purement non-dispersives dans la membrane.

## Abstract

Weak turbulence theory (WTT) is a statistical theory applied to a large number of incoherent and dispersive waves. Based on the hypotheses of small non-linearity and infinite domain the theory predicts an energy cascade from the forcing scales to the dissipative scales. The confrontation of WTT to experiment for surface waves raises many inconsistencies. The strong hypotheses on which is developed the WTT may be the explanation of such disparity between experiment and theory. The aim of this Thesis is to investigate the impact of the invalidation of some of these conditions on the statistical properties of turbulence. Experiments of interfacial waves between two non-miscible fluids with different viscosities have been carried out to characterize the effect of the increase of viscous dissipation on the energy cascade. An experiment at the surface of water with an increasing confinement of the width of the vessel has been done in order to possibly observe a coexistence between discrete turbulence and classical turbulence. An experimental study of gravity-capillary waves with a decrease of dispersion led us to the observation of a transition to a solitonic regime. In order to verify whether such a transition can be observed in a different physical system, an experimental and numerical study were conducted on the waves in a prestressed elastic plate. In this medium, the effect of dispersion of bending waves is competing with the non-dispersive aspect of stretching waves. We also studied weakly and strongly non-linear regimes of purely stretching waves in a membrane.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Théorie des ondes</b>	<b>5</b>
1.1 Ondes à la surface de l'eau	5
1.1.1 Equations de Navier-Stokes	5
1.1.2 Equations des ondes gravito-capillaires	7
1.1.3 Ondes progressives gravito-capillaires sur une topographie de profondeur constante	9
1.1.3.1 Le potentiel de vitesse	9
1.1.3.2 Relation de dispersion linéaire	10
1.1.3.3 Le champ d'écoulement	13
1.1.3.4 Energie, transport d'énergie et spectres de puissance	15
1.1.3.5 Spectres de puissances	16
1.2 Ondes à l'interface de deux fluides non-miscibles	17
1.3 Ondes non-linéaires : solitons Korteweg-de Vries	21
1.4 Ondes dans une plaque élastique mince	24
1.4.1 Les relations déformation-déplacement pour les plaques	24
1.4.2 Détermination des lois de comportement	29
1.4.3 Equations Föppl-von Karman dynamiques	32
1.4.4 Relations de dispersion linéaire	35
1.4.5 Effet de la précontrainte	35
<b>2 Turbulence d'ondes</b>	<b>37</b>
2.1 Théorie	37
2.1.1 Equation cinétique	37
2.1.2 Solutions de Zakharov	40
2.1.3 Interactions à $N$ ondes	42
2.1.4 Prédiction des spectres Kolmogorov-Zakharov	43
2.1.4.1 Cascade directe	43
2.1.4.2 Cascade inverse	45
2.1.5 Temps non-linéaire et élargissement spectral	47
2.1.5.1 Interactions à 3 ondes	47
2.1.5.2 Interactions à 4 ondes	48
2.1.6 Dissipation	49
2.1.6.1 Ondes élastiques	49
2.1.6.2 Ondes à la surface de l'eau	50
2.2 Etat de l'art	52
2.2.1 Ondes à la surface de l'eau	52
2.2.1.1 Ondes de gravité	52

2.2.1.2	Ondes capillaires	57
2.2.1.3	Ondes gravito-capillaires	60
2.2.2	Ondes dans une plaque fine	66
2.3	Objectifs de la thèse	71
<b>3</b>	<b>Méthodes expérimentales</b>	<b>75</b>
3.1	Profilométrie par transformée de Fourier	75
3.1.1	Analyse géométrique	75
3.1.2	Post-traitement des images : démodulation de phase	76
3.2	Méthode numérique	78
3.3	Dispositifs expérimentaux	79
3.3.1	Ondes à la surface de l'eau	80
3.3.1.1	Effets de confinement	80
3.3.1.2	Effets de profondeur finie	82
3.3.2	Ondes dans une plaque précontrainte	82
<b>4</b>	<b>Ondes gravito-capillaires à l'interface de deux fluides : tendre vers le régime capillaire pur</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction	88
4.2	Paramètres expérimentaux	91
4.3	Régime faiblement non-linéaire	95
4.3.1	Ondes capillaires	95
4.3.1.1	Analyse spatiale	95
4.3.1.2	Analyse spectrale	96
4.3.2	Effets de la dissipation visqueuse	101
4.3.2.1	Analyse spatiale	101
4.3.2.2	Analyse spectrale	106
4.4	Régime fortement non-linéaire : structures localisées	112
4.5	Conclusion	118
<b>5</b>	<b>Effets de confinement sur les ondes gravito-capillaires</b>	<b>121</b>
5.1	Introduction	122
5.1.1	Régime de turbulence d'onde faible classique	122
5.1.2	Régime de turbulence d'onde faible discrète	123
5.1.3	Régime de turbulence d'onde gelée : "frozen wave turbulence"	124
5.1.4	Régime de turbulence d'onde en avalanche : "sandpile behaviour"	125
5.1.5	Objectifs	126
5.2	Article (accepté pour publication dans Physical Review Fluids)	126
<b>6</b>	<b>Transition entre Turbulence Faible d'ondes gravito-capillaires et turbulence solitonique</b>	<b>143</b>
6.1	Introduction	144
6.2	Article ([23] publié dans Physical Review Fluids)	152

<b>7</b>	<b>Turbulence d'ondes élastiques : de la plaque à la membrane</b>	<b>165</b>
7.1	Introduction . . . . .	166
7.2	Turbulence faible d'ondes élastiques : de la plaque vibrée au tambour (article soumis à Physical Review E) . . . . .	169
7.3	Ondes purement non-dispersives : régime fortement non-linéaire . . . . .	186
7.3.1	Régime fort : brisure de la turbulence d'onde faible? . . . . .	186
7.3.2	Comparaison avec les cônes développables . . . . .	193
7.3.3	Ouverture : mesures expérimentales de turbulence d'onde faible à la surface d'un tambour . . . . .	196
7.4	Conclusion . . . . .	197
	<b>Conclusion</b>	<b>199</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>239</b>



# Introduction

Les ondes décrivent de nombreux phénomènes avec lesquels l'homme est en constante interaction. En effet deux de nos sens sont des détecteurs d'ondes. Les ondes électromagnétiques dans la gamme de la "lumière blanche" permettent la vision. Les ondes acoustiques ont rendu possible la communication et la musique. On date de 45 000 ans le plus ancien instrument de musique découvert : une flûte en os d'ours. Cependant ce n'est que bien plus tard que le concept d'onde fut théorisé aboutissant à des ouvrages classiques comme celui de Rayleigh (1877) [1], de Lamb (1910) [2] et de Jeans (1968) [3].

Jusqu'à aujourd'hui la compréhension générale des ondes par le grand public est basée sur la linéarité. Ainsi une onde a une forme sinusoïdale et lorsque elle croise une seconde onde nous appliquons la théorie linéaire des ondes d'Airy regroupant notamment les principes de superposition et de proportionnalité. Ceci n'est valable que dans le cas où l'amplitude des vagues est très petite comparée à leur longueur d'onde. Nous pouvons citer dans ce cas certains instruments de musique où seules quelques harmoniques sont excitées ou lorsque un enfant s'amuse à voir les ondes capillaires créées par l'impact d'un caillou à la surface d'un lac. En réalité assez souvent la pente des vagues ne peut être considérée comme petite, le principe de superposition n'est alors plus valable et les ondes ont un comportement complexe. Le terme mathématique caractérisant un tel phénomène est "non-linéarité". Une prise en compte des nonlinéarités dans l'équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution des ondes devient alors essentielle. Aujourd'hui il existe plusieurs équations décrivant l'évolution temporelle et spatiale de certaines ondes non-linéaires, telles l'équation Korteweg-de Vries (KdV) pour les solitons en eau peu profonde [4], les équations Schrödinger Non-Linéaires (NLS) pour les solitons dans les fibres optiques [5] et les équations hyperboliques nonlinéaires pour les ondes de choc [6].

Cependant la description fournie par ces équations ne concerne que la propagation d'une ou quelques ondes dans le milieu, ce qui est loin de décrire convenablement les systèmes réels où une multitude d'ondes sont présentes. Certains instruments de musique tels les gongs sont réputés pour leur richesse acoustique caractérisée par un son regroupant des fréquences allant des basses fréquences, auxquelles ils ont été excités, à des milliers de Hertz. Des systèmes naturels présentent également une telle richesse d'échelles comme nous pouvons le voir à la surface de l'océan où des vagues de différentes tailles se chevauchent et où pour de fortes non-linéarités des déferlements et des structures localisées peuvent apparaître.

Pour ce genre de système où le nombre d'ondes en interaction devient important une description déterministe n'est alors plus pertinente, une description



statistique est alors plus appropriée. C'est dans ce cadre que s'inscrit la Théorie de la Turbulence Faible (TTF) dont le nom vient de l'analogie avec la turbulence hydrodynamique où les tourbillons remplacent les ondes. La TTF étudie la dynamique des ondes incohérentes dispersives depuis les travaux pionniers de Zakharov, Benney et Newell dans les années 60 [7, 8] (voir chapitre 2 pour une revue bibliographique sur les ondes à la surface de l'eau et les ondes élastiques dans une plaque). Elle est basée sur des hypothèses fortes qui sont :

- La non-linéarité dans le système est infinitésimale
- Le domaine d'étude est infini
- Les ondes sont dispersives sans structures localisées
- Le forçage ainsi que la dissipation agissent localement et sont fortement séparés dans l'espace des  $k$

En respectant ces hypothèses la théorie prédit un transfert d'énergie en échelle grâce à des interactions résonantes. Cela se manifeste par une cascade d'énergie des grandes échelles excitées jusqu'aux petites échelles où la dissipation agit. La TTF fournit des prédictions analytiques des propriétés statistiques de la turbulence telles que les spectres stationnaires des ondes : les solutions de Zakharov. Une des applications directes de l'étude de la turbulence des ondes à la surface de l'eau en laboratoire, à laquelle participe cette thèse, est l'étude de la houle océanique [9]. Elle permet les prévisions météorologiques et les prédictions climatiques à destination notamment des transports maritimes et des nouvelles formations de plages. Le rayonnement de cette théorie dans la communauté scientifique ne s'arrête pas aux spécialistes des vagues à la surface de l'eau puisqu'elle couvre un large panel de domaines physiques tels l'optique [10], les plaques élastiques fines [11], les écoulements atmosphériques et astrophysiques ainsi que les plasmas [12]. La turbulence de plasmas magnétisés est au coeur du projet ITER qui est certainement l'un des plus grands défis énergétique de notre époque visant à montrer que l'énergie solaire et celle des étoiles est l'ultime source d'énergie "propre" à notre disposition. L'application de la TTF aux vagues se propageant à la surface d'eau profonde a été effectuée numériquement dans le code météorologique de la houle Wavewatch III. Ce dernier est cependant basé sur des modèles simplifiés qui gagneraient en précision grâce à des études expérimentales. Si des études théoriques, numériques et expérimentales ont été menées sur la turbulence des ondes à la surface de l'eau, un autre système physique, qu'est celui de la plaque fine élastique, est particulièrement intéressant pour comprendre les mécanismes de la turbulence d'ondes en plus de son potentiel d'application aux instruments de musique à percussion. En effet pour ce système les ondes peuvent être modélisées par l'équation Föppl-Von Karman du fait de son caractère bidimensionnel, une étude numérique est alors possible afin de la confronter aux résultats expérimentaux et théoriques [11, 13, 14].

Les principaux résultats des études expérimentales et numériques (avec des paramètres expérimentaux) des ondes élastiques dans une plaque fine et des ondes à la surface de l'eau ont mis en lumière plusieurs points de divergence avec la TTF. En effet une modification des exposants spectraux a été observée lorsque le domaine d'étude était fortement limité spatialement [15]. Lorsque la dissipation dans le milieu n'est plus localisée au delà d'une petite échelle mais présente à toutes

les échelles comme cela est le cas dans la réalité, la forme et la pente du spectre d'énergie des ondes n'est alors plus en accord avec les prédictions théoriques [16]. Une brisure de la turbulence faible a également été notée dans les régimes fortement non-linéaires où des structures localisées à grande échelle se sont développées [17]. Il devient alors important de comprendre ces points de divergence afin que l'utilisation de la TTF soit correctement intégrée dans les modèle de prédiction. Nous pouvons donc regrouper les sources potentielles de disparité entre expérience et théorie comme suit :

- Dissipation "réelle" agissant à toutes les échelles
- Effets de taille finie importants
- Faible dispersion des ondes
- Forte non-linéarité

Par ailleurs pour les études expérimentales dans le régime gravito-capillaire et capillaire qui ont reporté des spectres d'énergie proches des solutions de Zakharov, les mesures étant uniquement locales aucune vérification sur le type d'ondes dans le milieu n'était possible [18, 19, 20]. Une présence de structures localisées cohérentes est potentiellement envisageable ce qui invaliderait la TTF. En effet pour des vagues à la fois faiblement dispersives et faiblement non-linéaires, des solitons peuvent éventuellement apparaître dans le milieu, ce sont des structures localisées se propageant à une vitesse constante sans changer de forme [21]. Ces structures ont été découvertes par Russel [22] et modélisées par les équations Korteweg-de Vries(KdV) [4]. Plusieurs phénomènes océanographiques importants qui correspondent à la propagation non linéaire des ondes de surface ou à la propagation des vagues en eau profonde ont été expliqués en termes de propagation de solitons. Les tsunamis en font partie, en particulier ceux générés par les tremblements de terre. Cependant, ces phénomènes sont des phénomènes à grande échelle, souvent difficiles à mesurer expérimentalement. Ils reposent principalement sur l'observation par satellite et d'autres observations indirectes.

Toutes ces observations révèlent une question primordiale quant à l'utilisation de la TTF pour décrire des systèmes réels : Est-ce que les conditions de validité de la TTF sont trop restrictives ? et si c'est le cas peut-on caractériser l'effet du non respect de chacune de ces conditions sur les propriétés statistiques de la turbulence ou sur le champ des vagues ?

Nous proposons dans cette thèse de répondre à ces questions en réalisant des études expérimentales résolues en temps et en espace dans le régime gravito-capillaire afin de caractériser l'effet du confinement, de la variation de la dispersion et de la dissipation visqueuse du milieu sur les propriétés statistiques de la turbulence. En parallèle une étude expérimentale et numérique pour les ondes dans une plaque précontrainte participeront également à la compréhension des effets de la réduction de la dispersion des ondes élastiques et de l'augmentation des non-linéarités.

### **Le plan de la thèse :**

- Dans le chapitre 1 nous présenterons des éléments de la théorie non-linéaire

et linéaire des ondes étudiées, à savoir les ondes gravito-capillaires à la surface de l'eau, les ondes à l'interface de deux liquides non miscibles, les solitons KdV et les ondes dans une plaque/membrane.

- Au chapitre 2 les bases du formalisme de la turbulence faible d'onde sera abordée. L'équation cinétique et les solutions de Zakharov de chaque type d'onde étudié seront abordées. Une seconde partie regroupera une revue bibliographique de la turbulence d'ondes à la surface de l'eau et dans une plaque fine. Les objectifs de cette thèse seront par la suite soulignés.
- Le chapitre suivant 3 détaillera la méthode de mesure expérimentale (profilométrie par transformée de Fourier) et numérique (code pseudo-spectral) ainsi que les différents dispositifs expérimentaux.
- Nous trouverons au chapitre 4 les résultats des expériences concernant les ondes à l'interface de deux fluides non-miscibles de densités proches (eau/huile silicone). Une analyse du régime capillaire sera effectuée en première partie suivie par une analyse sur les effets de la dissipation visqueuse grâce aux huiles silicones de viscosités différentes testées. Enfin une présentation rapide des régimes fortement non-linéaires sera effectuée.
- L'étude expérimentale de l'effet du confinement sur la turbulence des ondes gravito-capillaires sera faite au chapitre 5 avec une introduction générale du problème puis la présentation d'un article accepté pour publication regroupant l'ensemble des résultats.
- Les effets de la variation de la dispersion et de la non-linéarité sur la turbulence des ondes gravito-capillaires avec la transition entre les régimes de TTF et les régimes solitoniques seront expliqués dans le chapitre 6 au travers d'un article publié [23].
- Enfin nous étudierons expérimentalement et numériquement dans la première partie du chapitre 7 la turbulence des ondes élastiques dans une plaque précontrainte. Une analyse numérique du régime faiblement non linéaire des ondes de tension pure dans une membrane élastique sera également montrée dans un article récemment soumis. Dans la seconde partie de ce chapitre nous nous concentrerons sur les régimes fortement non-linéaires des ondes de tension pure et une comparaison avec le cas des ondes de flexion pure sera faite.

# Chapitre 1

## Théorie des ondes

Les études expérimentales et numériques effectuées lors de cette thèse concernent la turbulence faible des ondes à la surface de l'eau (interface eau/gaz), les ondes interfaciales entre deux liquides non miscibles ainsi que les ondes élastiques dans une plaque mince. Nous allons dans ce chapitre présenter des éléments de la théorie non-linéaire des ondes étudiées puis nous nous attarderons sur la théorie linéaire. La rédaction de cette partie a été faite notamment grâce à la thèse de Q. Aubourg [24], la thèse de B. Miquel [13], le livre de S. Nazarenko [7] et celui de T. Dauxois et M. Peyrard [21].

### 1.1 Ondes à la surface de l'eau

L'étude des ondes à la surface d'un fluide est basée sur les équations fondamentales de l'hydrodynamique eulérienne connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes. Ces équations sont non-linéaires ce qui complique beaucoup leur résolution. Nous commençons par énoncer les différents éléments qui conduisent à leur expression.

Les équations de Navier-Stokes peuvent être calculées à partir des équations fondamentales de conservation de la quantité de mouvement appliquées aux propriétés des fluides.

#### 1.1.1 Equations de Navier-Stokes

Nous utilisons le principe fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{b} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \quad (1.1)$$

Avec  $\mathbf{b}$  une force volumique et  $\rho$  la densité du fluide.

Nous supposons que la force volumique qui s'exerce sur le fluide est due à deux composantes, les contraintes qui s'exercent sur le fluide et les forces externes.

$$\mathbf{b} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (1.2)$$

soit

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

$\sigma$  est le tenseur des contraintes et  $\mathbf{f}$  représente les forces externes. Le tenseur des contraintes  $\sigma$  est souvent décomposé en deux termes dans la forme générale de l'équation de Navier-Stokes. Les deux termes sont la pression isostatique, qui tend à changer le volume du corps, et le déviateur, qui tend à déformer le corps. En appelant le déviateur  $T$ ,  $\sigma$  est décomposé en

$$\sigma = -pI + T \quad (1.4)$$

Avec  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En remplaçant  $\sigma$  par son expression (1.4) dans l'équation (1.3) nous obtenons la forme la plus générale de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + \mathbf{f} \quad (1.5)$$

Nous devons à présent expliciter l'expression du déviateur  $T$  ainsi que les forces extérieures volumiques pour notre problème physique. Tout d'abord la force extérieure pour notre cas correspond uniquement à la gravité, nous avons donc  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ , avec  $\mathbf{g}$  le vecteur gravité.

Le tenseur déviateur quant à lui est décomposé en une composante  $T_i$  qui concerne l'interface, on y regroupe les effets de la tension de surface, et en une composante  $T_v$  qui concerne l'ensemble du fluide, on y retrouve les effets de viscosité.

La contribution de l'interface s'écrit :

$$\nabla \cdot T_i = \gamma \nabla \cdot K \mathbf{n} + \nabla \cdot \frac{d\gamma}{dS} \mathbf{t} \quad (1.6)$$

avec  $\gamma$  la tension de surface eau/air,  $K$  la courbure moyenne à l'interface,  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface du fluide,  $\mathbf{t}$  le vecteur unitaire tangent à la surface du fluide. Le premier terme, faisant intervenir  $K$ , correspond à l'effet de courbure. On peut le réécrire tel que :

$$\gamma \nabla \cdot K \mathbf{n} = \gamma \nabla \cdot \left\{ \frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \right\} \quad (1.7)$$

avec  $\zeta$  l'amplitude de la perturbation de la surface telle que représentée sur la figure 1.1.

Le second terme, faisant intervenir le gradient de la tension de surface le long de l'interface, illustre l'effet Marangoni. Afin de se détacher de cet effet il sera primordial lors de nos expériences de veiller à la propreté de l'eau pour ne pas avoir de film visco-élastique à sa surface et pouvoir ainsi négliger  $\nabla \cdot \frac{d\gamma}{dS} \mathbf{t}$ . Pour le restant de nos calculs nous considérerons une surface propre et négligerons cet effet.

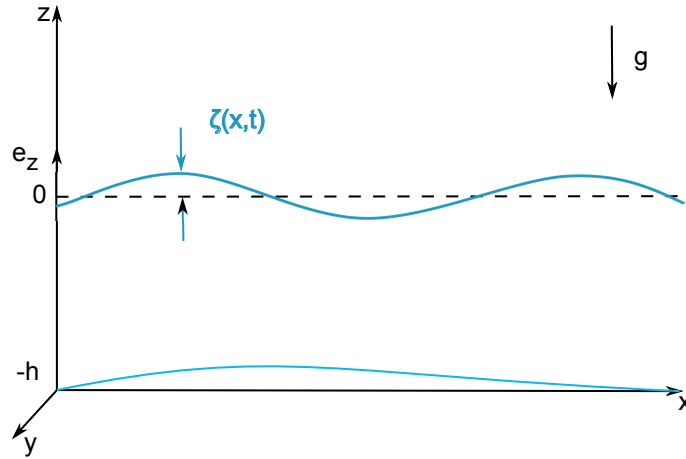


FIGURE 1.1 – Schéma d'une onde de surface avec une topographie non plane

Le second terme du tenseur déviateur,  $T_v$  s'écrit :

$$\nabla \cdot T_v = \nabla \cdot \left\{ \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) I] \right\} \quad (1.8)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique. Ce terme représente les effets visqueux d'un fluide newtonien. Ces derniers se manifestent par la présence de couches limites au niveau des parois et une dissipation de l'énergie sous forme de chaleur.

En remplaçant le tenseur des contraintes et le vecteur force extérieure dans l'équation de NS (1.5) et en considérant un fluide homogène à viscosité constante nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{-1}{\rho} \nabla (p - \frac{\mu}{3} \nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\gamma}{\rho} \nabla \cdot \left\{ \frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \right\} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1.9)$$

avec  $\nu = \mu/\rho$  étant la viscosité cinématique.

Nous rajoutons à cette équation, l'équation de continuité qui découle de la conservation de la masse pour un fluide de masse volumique constante :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.10)$$

*Dans ce qui suit nous allons simplifier et linéariser (1.9) et (1.10). Nous commencerons par considérer un fluide parfait sans tension de surface. Les effets de la tension de surface seront introduits dans les équations ultérieurement.*

### 1.1.2 Equations des ondes gravito-capillaires

Lorsqu'un fluide est irrotationnel nous pouvons définir un potentiel de vitesse  $\Phi$  tel que :

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (1.11)$$

Si ce fluide de masse volumique  $\rho$  est incompressible, alors nous pouvons écrire grâce à l'équation (1.10) :

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1.12)$$

Ceci est l'équation de Laplace.

La surface libre de l'eau est notée  $z = \zeta(x, y, t)$  telle que représentée sur la figure 1.1. Pour une surface libre faiblement pentue la vitesse verticale du fluide sur la surface libre doit être égale à la vitesse de la surface libre elle même :

$$\frac{D\zeta}{Dt} = u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \text{en } z = \zeta. \quad (1.13)$$

Dans la limite linéaire cette expression devient :

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \text{en } z = 0. \quad (1.14)$$

Cette condition portant sur la vitesse uniquement, est appelée la condition cinématique.

Pour des mouvements de faible amplitude, l'équation linéarisée de mouvement (1.9) pour un fluide non visqueux incompressible sans tension de surface s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P - \rho g \mathbf{e}_z \quad (1.15)$$

La pression totale  $P$  peut être décomposée en une partie statique et une partie dynamique :

$$P = p_o + p \quad (1.16)$$

En considérant le cas statique, (1.15) devient :

$$0 = -\nabla p_o - \rho g \mathbf{e}_z \quad (1.17)$$

où  $p_o$  est la pression statique et vaut :

$$p_o = -\rho g z \quad (1.18)$$

En remplaçant  $p_o$  dans (1.15) nous obtenons :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} = -\nabla p \quad (1.19)$$

de manière à ce que

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.20)$$

ce qui relie la pression dynamique au potentiel de vitesse.

Du fait de la faible densité de l'air, nous négligeons son effet dynamique et supposons que sa pression est constante (qu'on prendra comme ayant une valeur nulle) :

$$p_o + p = 0 \quad (1.21)$$

Nous introduisons à présent les effets de la tension de surface avec  $\gamma$  la tension de surface par unité de longueur. La continuité de la contrainte verticale sur une surface unitaire impose :

$$p_o + p + \gamma \nabla \cdot \left\{ \frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \right\} = 0 \quad (1.22)$$

Soit en linéarisant la courbure :

$$p_o + p + \gamma \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.23)$$

d'où

$$-\rho g \zeta + g \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \gamma \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad z=0. \quad (1.24)$$

qui peut-être combiné avec l'équation cinématique (1.14) pour donner :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\gamma}{\rho} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z=0 \quad (1.25)$$

Par ailleurs la vitesse normale du fluide est nulle sur la limite inférieure de l'eau (fond de la mer/océan ou fond de la cuve typiquement dans nos expériences en laboratoire) :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (1.26)$$

Avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal au fond de la cuve.

La limite inférieure de l'eau est fixée à  $z=-h(x,y)$ ,  $h$  étant la hauteur totale de la colonne d'eau, le vecteur normal unitaire au fond peut alors s'écrire :

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y, 1)}{\sqrt{1 + \mathbf{h}_x^2 + \mathbf{h}_y^2}} \quad (1.27)$$

En linéarisant  $\mathbf{n}$ , on obtient alors :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \text{en } z=-h(x,y) \quad (1.28)$$

### 1.1.3 Ondes progressives gravito-capillaires sur une topographie de profondeur constante

#### 1.1.3.1 Le potentiel de vitesse

Nous considérons le cas le plus simple avec une profondeur  $h$  constante et des ondes sinusoïdales en 2D. Le mouvement est dans le plan vertical ( $Ox, Oz$ ). Nous cherchons une solution représentant un train d'ondes avançant le long de la direction  $x$  avec une pulsation  $\omega$  et un nombre d'onde horizontal  $k$  sous la forme :

$$\Phi(x, z, t) = f(z) e^{ikx - i\omega t} \quad (1.29)$$



Afin de satisfaire (1.10), (1.25) et (1.28) il faut

$$\begin{cases} f'' + k^2 f = 0, & -h < z < 0 \\ -\omega^2 f + g f' + \frac{\gamma}{\rho} k^2 f' = 0, & z = 0 \\ f' = 0, & z = -h \end{cases} \quad (1.30)$$

Les solutions à la première équation et la dernière équation du système (1.30) sont

$$f(z) = B \cosh(k(z + h)). \quad (1.31)$$

Ce qui signifie que

$$\Phi(x, z, t) = B \cosh(k(z + h)) e^{ikx - i\omega t} \quad (1.32)$$

Afin de satisfaire la seconde équation du système (1.30) il faut alors

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh) \quad (1.33)$$

C'est la relation de dispersion entre  $\omega$  et  $k$  des ondes gravito-capillaires en profondeur finie.

A partir de (1.14) on obtient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = Bk \sinh(kh) e^{ikx - i\omega t} \quad (1.34)$$

Après intégration,

$$\zeta(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = \frac{Bk \sinh(kh)}{-i\omega} e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.35)$$

où A est l'amplitude de l'onde de surface, il en suit que

$$B = \frac{-i\omega A}{k \sinh(kh)} \quad (1.36)$$

et

$$\Phi(x, z, t) = \frac{-i\omega A}{k \sinh(kh)} \cosh(k(z+h)) e^{ikx - i\omega t} = \frac{igA}{\omega} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx - i\omega t} \quad (1.37)$$

### 1.1.3.2 Relation de dispersion linéaire

En examinant la relation de dispersion linéaire (1.33) nous observons que trois échelles y sont présentes : la profondeur  $h$ , la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  et la

longueur capillaire  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  qui marque l'égalité entre les effets capillaires et les effets de gravité. Les échelles capillaires valent,

$$k_c = \sqrt{\frac{g\rho}{\gamma}}, \quad \text{ou} \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}} \quad (1.38)$$

Pour de l'eau pure à l'interface eau/air nous avons  $\gamma/\rho = 74 \text{ cm}^3/\text{s}^2$  et l'accélération gravitationnelle  $g = 980 \text{ cm}/\text{s}^2$ , ce qui donne une longueur d'onde capillaire appelée échelle capillaire  $\lambda_c = 1,73 \text{ cm}$ .

Introduisons le paramètre  $\omega_c$  qui est la pulsation capillaire,

$$\omega_c^2 = 2gk_c = 2g\sqrt{\frac{g\rho}{\gamma}} \quad (1.39)$$

Normalisons (1.33) par  $\omega_c^2$  :

$$\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = \frac{1}{2} \frac{k}{k_c} \left( 1 + \frac{k^2}{k_c^2} \right) \tanh(kh) \quad (1.40)$$

Considérons d'abord des longueurs d'ondes de taille comparable à  $\lambda_c$ . Pour des eaux profondes  $h \gg \lambda$  ou  $kh \gg 1$  donc  $\tanh(kh) \approx 1$ , on peut écrire,

$$\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = \frac{1}{2} \frac{k}{k_c} \left( 1 + \frac{k^2}{k_c^2} \right) \quad (1.41)$$

ou sous la forme dimensionnelle

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \quad (1.42)$$

La vitesse de phase s'écrit alors :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g} \right)} \quad (1.43)$$

Ceci nous permet de définir une célérité capillaire

$$c_c = \frac{\omega_c}{k_c} \quad (1.44)$$

On peut donc normaliser la vitesse de phase par  $c_c$  :

$$\frac{c}{c_c} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{k_c}{k} + \frac{k}{k_c} \right)} \quad (1.45)$$

Nous pouvons approximer la vitesse de phase par

$$c \approx \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \quad \text{si} \quad \lambda/\lambda_c \ll 1.$$

Cela signifie que pour des longueurs d'ondes bien plus petites que 1.7 cm la tension de surface est prédominante en effet c'est la définition des ondes capillaires. Dans la limite opposée, la vitesse de phase vaut

$$c \approx \sqrt{\frac{g}{k}} \text{ si } \lambda/\lambda_c \gg 1.$$

Ce qui signifie que pour des ondes de taille bien plus grandes que 1.73 cm seule la gravité prédomine, ces ondes sont appelées ondes de gravité.

Dans les deux limites traitées, la vitesse de phase diverge. Il doit donc y avoir un minimum pour un nombre d'onde  $k$  intermédiaire. Une étude de la variation de la vitesse de phase  $c$  permet alors de déterminer qu'elle atteint son minimum lorsque

$$k = \sqrt{\frac{g\rho}{\gamma}} = k_c, \text{ ou } \lambda = \lambda_c. \quad (1.46)$$

La vitesse de phase minimale est donc égale à la vitesse capillaire. Cela est illustré sur la figure 1.2 où est représentée la vitesse de phase normalisée  $c/c_c$  en fonction de la longueur d'onde normalisée  $\lambda/\lambda_c$ .

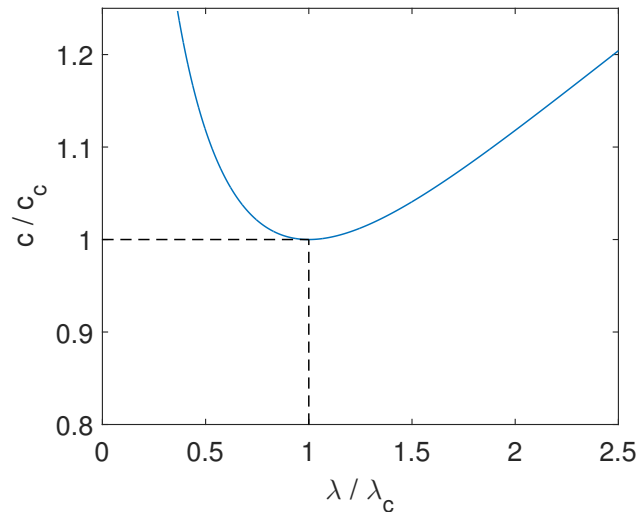


FIGURE 1.2 – Evolution de la vitesse de phase normalisée par la vitesse capillaire en fonction de la longueur d'onde normalisée par la longueur d'onde capillaire.

Pour les échelles intermédiaires appelées gravito-capillaires la relation de dispersion est représentée sur la figure 1.3 ainsi que pour les ondes de gravité et les ondes capillaires. Nous voyons clairement que les effets de gravité sont prédominants pour des fréquences inférieures à 5 Hz alors que la tension de surface est plus importante à petite échelle pour des fréquences supérieures à 50 Hz. Pour les échelles intermédiaires ( $5 \text{ Hz} < \text{fréquence} < 50 \text{ Hz}$ ), la contribution des deux effets est à prendre en compte.

Les expériences à la surface de l'eau dans cette thèse sont effectuées dans des cuves d'une taille de quelques dizaines de centimètres, nous sommes donc dans ce

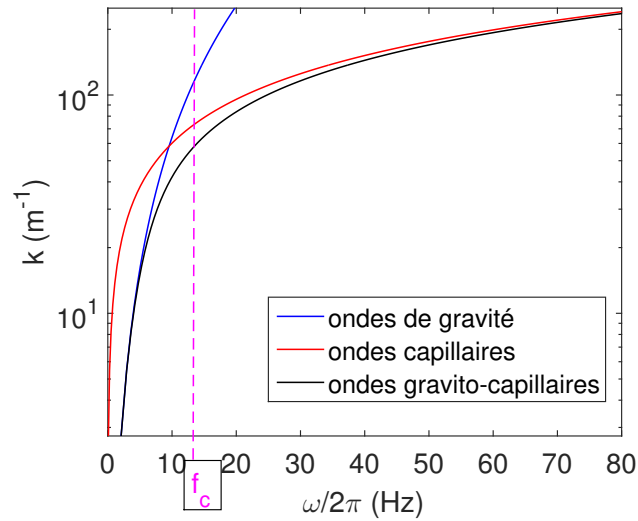


FIGURE 1.3 – Relations de dispersion linéaires en eau profonde des ondes de gravité (courbe bleue), capillaires (courbe rouge) et gravito-capillaires (courbe noire). La fréquence capillaire  $f_c = 13.4$  Hz est tracée en tirets magenta et a été calculée en considérant une longueur capillaire  $\lambda = 1.73$  cm. (cas de l'eau pure)

régime gravito-capillaire.

Si l'on considère maintenant les ondes de gravité en profondeur finie, la relation de dispersion devient :

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} \quad (1.47)$$

Pour les ondes de gravité en eau profonde  $kh \gg 1$ ,  $\tanh(kh)$  tend vers 1. Nous pouvons donc approximer  $\omega \approx \sqrt{gk}$ , et  $c \approx \sqrt{g/k}$ . Ces ondes sont appelées ondes de gravité courtes.

Si par contre les ondes sont très longues ou que la profondeur est petite telle que  $kh \ll 1$  alors  $\tanh(kh) \sim kh$  et  $\omega \approx k\sqrt{gh}$ , alors la vitesse de phase s'écrit  $c \approx \sqrt{gh}$ .

Pour des valeurs intermédiaires de  $kh$ , la vitesse de phase décroît de manière monotone lorsque  $kh$  croît. Cette évolution est représentée sur la figure 1.4 où nous avons tracé la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires en profondeur finie normalisée  $c/\sqrt{gh}$  avec  $h = 6$  cm en fonction de  $kh$ . Nous voyons effectivement pour des échelles intermédiaires  $1 < kh < 6$  la vitesse de phase décroît. Toutes les longues ondes avec  $kh \ll 1$  se propagent quant à elles à la même vitesse maximale  $\sqrt{gh}$  limitée par la profondeur, elles sont donc non-dispersives.

### 1.1.3.3 Le champ d'écoulement

Pour des valeurs arbitraires de  $k/k_c$  et  $kh$ , les vitesses et la pression dynamique peuvent être explicités grâce à l'expression du potentiel (1.37) comme si dessous :

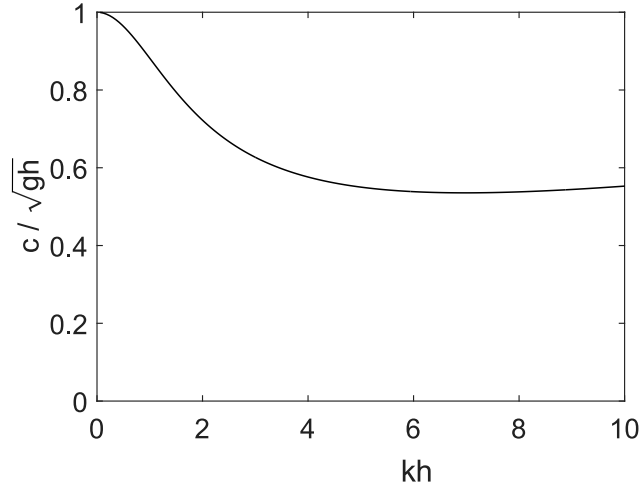


FIGURE 1.4 – Vitesse de phase des ondes gravito-capillaires en profondeur finie,  $h = 6$  cm, normalisée par la vitesse des ondes longues, en fonction de  $kh$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{gkA}{\omega} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx-i\omega t} \\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{-igkA}{\omega} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \frac{\sinh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx-i\omega t} \\ p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho gA \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx-i\omega t} \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Notons que toutes ces quantités décroissent de manière monotone en profondeur. En eau profonde,  $kh \gg 1$ , ce qui donne pour le champ d'écoulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{gkA}{\omega} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) e^{kz} e^{ikx-i\omega t} \\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{-igkA}{\omega} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) e^{kz} e^{ikx-i\omega t} \\ p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho gA \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) e^{kz} e^{ikx-i\omega t} \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Toutes les quantités dynamiques tendent exponentiellement vers 0 lorsque  $kz \rightarrow -\infty$ . Ceci résulte en un mouvement du fluide qui est limité à la couche de surface de profondeur  $O(\lambda)$ . Les ondes gravitaires et gravito-capillaires sont donc des ondes de surface.

En eau peu profonde,  $kh \ll 1$ , le champ d'écoulement devient alors :

$$\begin{cases} u = \frac{gkA}{\omega} \left(1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho}\right) e^{ikx - i\omega t} \\ w = 0 \\ p = \rho g A \left(1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho}\right) e^{ikx - i\omega t} = \rho g \zeta \left(1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho}\right) \end{cases} \quad (1.50)$$

Notons que la vitesse horizontale est uniforme en profondeur tandis que la vitesse verticale est négligeable. Le mouvement du fluide est donc essentiellement horizontal. La pression totale vaut :

$$P = p_o + p = \rho g \left( \zeta + \frac{\gamma k^2}{g\rho} - z \right) \quad (1.51)$$

Elle est hydrostatique et augmente linéairement avec la profondeur depuis la surface libre.

#### 1.1.3.4 Énergie, transport d'énergie et spectres de puissance

La densité d'énergie cinétique moyennée dans le temps est :

$$\bar{E}_k = \frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 dz (\bar{u}^2 + \bar{w}^2) \quad (1.52)$$

alors que la densité d'énergie potentielle instantanée est :

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 + \gamma \left( \sqrt{1 + \zeta_x^2} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 + \sigma \zeta_x^2 \quad (1.53)$$

En moyennant dans le temps cela donne

$$\bar{E}_p = \frac{1}{2} \rho g \bar{\zeta}^2 + \frac{\gamma}{2} \bar{\zeta}_x^2 \quad (1.54)$$

Réécrivons  $u$  et  $w$  (1.48) dans (1.54)

$$\begin{cases} u = \Re \left\{ \frac{gkA}{\omega} \left(1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho}\right) \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx} e^{-i\omega t} \right\} \\ w = \Re \left\{ \frac{-igkA}{\omega} \left(1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho}\right) \frac{\sinh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{ikx} e^{-i\omega t} \right\} \end{cases} \quad (1.55)$$

En remplaçant  $u$  et  $w$  dans l'expression de l'énergie cinétique (1.52), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{E}_k &= \frac{\rho}{4} \left( \frac{gkA}{\omega} \right)^2 \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(kh)} \int_{-h}^0 dz [\cosh^2(k(z+h)) + \sinh^2(k(z+h))] \\ &= \frac{\rho}{4} \left( \frac{gkA}{\omega} \right)^2 \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right)^2 \frac{\sinh(2kh)}{2k \cosh^2(kh)} = \frac{\rho}{4} \left( \frac{gkA}{\omega} \right)^2 \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right)^2 \frac{\sinh(kh)}{k \cosh^2(kh)} \\ &= \frac{\rho g A^2}{4} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right)^2 \frac{gk \tanh(kh)}{\omega^2} \quad \text{En utilisant la relation de dispersion (1.33) cela donne} \\ &= \frac{\rho g A^2}{4} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \end{aligned} \right. \quad (1.56)$$

De même pour l'énergie potentielle :

$$\overline{E}_p = \frac{\rho g A^2}{4} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \quad (1.57)$$

La densité d'énergie totale devient alors

$$\overline{E} = \overline{E}_k + \overline{E}_p = \frac{\rho g A^2}{2} \left( 1 + \frac{\gamma k^2}{g\rho} \right) \quad (1.58)$$

Notons que l'énergie totale est répartie de manière égale entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (équipartition d'énergie).

### 1.1.3.5 Spectres de puissances

En projetant l'expression de l'énergie totale dans l'équation (1.58) et on sommant sur toutes les échelles, on peut alors obtenir une expression de l'énergie simplifiée :

$$E = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\gamma}{\rho} \|\mathbf{k}\|^2 + \rho g \right) |\hat{\zeta}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad (1.59)$$

où  $\hat{\zeta}(\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier. Il est possible de réduire le nombre de degrés de liberté en réalisant une intégration spatiale du spectre. Ainsi, pour un système isotrope en  $\mathbf{k}$  nous avons :  $\int |\hat{\zeta}(k)|^2 dk = \int |\hat{\zeta}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$ . On peut finalement écrire :

$$E = \int E_k dk = \int \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\rho} k^2 + \rho g \right) |\hat{\zeta}(k)|^2 dk \quad (1.60)$$

Il est possible de relier le spectre de puissance mesuré avec le spectre d'énergie :

$$E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\rho} k^2 + \rho g \right) E^\zeta(k) \quad (1.61)$$

Par ailleurs, en utilisant  $E_k dk = E_\omega d\omega$ , on obtient dans le domaine fréquentiel :

$$E_\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\rho} k^2 + \rho g \right) E^\zeta(\omega) \quad (1.62)$$

Ce changement se fait en utilisant la relation de dispersion linéaire, il n'est donc valable que pour des ondes faiblement non-linéaires.

## 1.2 Ondes à l'interface de deux fluides non-miscibles

Considérons le système stratifié à deux couches et délimité en haut et en bas par des parois rigides comme représenté sur la figure 1.5. Pour notre analyse nous faisons les hypothèses suivantes :

- Les deux fluides sont immiscibles.
- Les limites supérieure et inférieure sont rigides.
- L'analyse sera en 2D.
- La viscosité est nulle.
- L'écoulement dans chaque couche est irrotationnel.
- Les ondes interfaciales sont des ondes de faible amplitude qui peuvent être approximées par des ondes linéaires (cette hypothèse est détaillée plus loin dans la discussion des conditions aux limites).

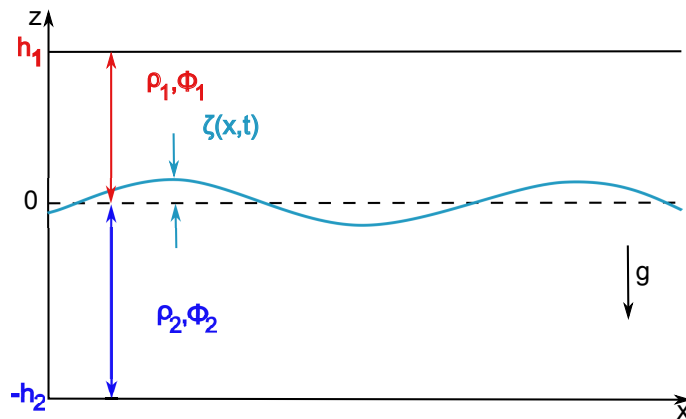


FIGURE 1.5 – Schéma d'une onde interfaciale avec parois rigides supérieure et inférieure

Notre première étape consiste à définir les équations de mouvement. Nous utilisons ici l'approche traditionnelle (voir le travail d'Acheson [25] et Drazin [26]).



Nous supposons que chaque couche est irrationnelle, définissons donc des potentiels de vitesse indépendants dans chaque couche ; tels que :

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi_1 = 0 \\ \nabla^2 \Phi_2 = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$

L'étape suivante consiste à définir les conditions initiales et les conditions aux limites. Puisque nos équations (1.63) sont du deuxième ordre en deux coordonnées spatiales, nous avons quatre conditions aux limites dans chaque couche. Nous devons également satisfaire la conservation de la quantité de mouvement, qui introduit une dérivée du premier ordre dans le temps. Par conséquent, nous avons également une condition initiale pour chaque couche.

L'énoncé de la condition aux limites est : la solution doit être périodique dans l'espace et dans le temps. Cette condition est satisfaite implicitement en choisissant une solution générale périodique. Deux autres conditions aux limites sont obtenues à partir des parois supérieure et inférieure : la vitesse verticale doit être nulle aux bords supérieur et inférieur. Cela se traduit par une condition aux limites pour chaque couche, à savoir

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=+h_1} = 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h_2} = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Les deux conditions limites restantes proviennent de la condition cinématique à l'interface : les particules de fluide ne peuvent se déplacer que tangentiellement à l'interface fluide. Pour exprimer mathématiquement cette condition, il faut considérer plus en détails l'interface entre les deux fluides. A l'interface nous avons  $z = \zeta$ , l'emplacement de l'interface  $z_i$  est donc défini par la fonction

$$F(x, z, t) = z_i - \zeta(x, z, t) = 0 \quad (1.65)$$

où  $\zeta(x, z, t)$  est la perturbation de l'interface (se reporter à la figure 1.5). L'interface elle-même est une ligne de courant, ce qui donne en description Eulérienne :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (1.66)$$

pour  $z = \zeta$ .

Nous appliquons à présent la condition de la vitesse verticale du fluide à l'interface linéarisée à  $z = 0$  au lieu de  $z = \zeta$ , ce qui donne pour les deux couches :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{z=0} \end{cases} \quad (1.67)$$

La contrainte normale du fluide doit être continue à travers l'interface. Pour un fluide sans tension de surface ce la donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.68)$$

En intégrant l'équation ci-dessus en  $z$  nous obtenons

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g z = C_0 \quad (1.69)$$

où  $C_0$  est une constante d'intégration. Cette équation est également connue sous le nom d'équation de Bernoulli instationnaire et doit être constante le long d'une ligne de courant. En sélectionnant l'interface des fluides comme ligne de courant et en posant  $p_1 = p_2$  à l'interface, nous avons

$$\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} = \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} + g \zeta (\rho_2 - \rho_1) \quad (1.70)$$

à l'interface linéarisée à  $z = 0$  au lieu de  $z = \zeta$ .

Cette équation détermine la relation entre la périodicité spatiale et temporelle dans les conditions aux limites mixtes. En d'autres termes, notre condition aux limites mixte ne peut pas avoir de périodicité arbitraire dans l'espace et le temps. Il est maintenant possible de résoudre les équations (1.63) en utilisant les conditions initiales et aux limites ci-dessus. Nous cherchons l'évolution de l'interface telle que

$$\zeta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (1.71)$$

où  $k$  et  $\omega$  sont le nombre d'ondes interfaciale et la pulsation respectivement. Puisque nous avons linéarisé les équations, la réponse du système doit avoir la même périodicité ; donc, en utilisant la méthode de séparation des variables, nous cherchons des solutions de la forme

$$\Phi_j(x, z, t) = Z_j(z) e^{kx - \omega t} \quad (1.72)$$

où  $j = 1, 2$  est la couche du fluide. En introduisant (1.72) dans l'équation de Laplace, on obtient l'équation différentielle suivante pour  $Z_j$  :

$$\frac{\partial^2 Z_j}{\partial z^2} - k^2 Z_j = 0 \quad (1.73)$$

La solution générale de l'équation (1.73) est

$$Z_j(z) = C_j e^{kz} + D_j e^{-kz} \quad (1.74)$$

où  $k$  est positif par définition.

Nous n'allons pas rentrer dans les détails des calculs qui mènent à la détermination de  $Z_1$  et  $Z_2$  mais cela a été fait en remplaçant l'expression de  $Z_j$  dans les conditions aux limites aux bords fixes puis dans les conditions aux limites cinématiques. Cela a donné un système de 4 équations à 4 inconnues qui a débouché

sur l'explicitation de l'expression de  $Z_1$  et de  $Z_2$  :

$$\begin{cases} Z_1(z) = \frac{ia\omega \cosh(k(z - h_1))}{k \sinh(kh_1)} \\ Z_2(z) = -\frac{ia\omega \cosh(k(z + h_2))}{k \sinh(kh_2)} \end{cases} \quad (1.75)$$

Ainsi les potentiels de vitesse deviennent

$$\begin{cases} \Phi_1(x, z, t) = \frac{ia\omega \cosh(k(z - h_1))}{k \sinh(kh_1)} \cos(kx - \omega t) \\ \Phi_2(x, z, t) = -\frac{ia\omega \cosh(k(z + h_2))}{k \sinh(kh_2)} \cos(kx - \omega t) \end{cases} \quad (1.76)$$

Comme mentionné ci-dessus, la condition aux limites dynamique auxiliaire donne la relation entre  $k$  et  $\omega$ . La substitution de  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\zeta$  dans l'équation (1.70) donne :

$$\rho_1 \frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\tanh(kh_1)} + \rho_2 \frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\tanh(kh_2)} - g(\rho_2 - \rho_1) = 0. \quad (1.77)$$

C'est la relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales de gravité. Lorsque la tension interfaciale n'est pas négligeable, ses effets sont alors à additionner dans la relation de continuité de la pression à l'interface de même comme cela a été introduit dans la première partie de ce chapitre pour l'interface eau/air.

Cela donne une nouvelle relation de dispersion

$$\rho_1 \frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\tanh(kh_1)} + \rho_2 \frac{\omega^2}{k} \frac{1}{\tanh(kh_2)} - g(\rho_2 - \rho_1) - \gamma_I k^2 = 0 \quad (1.78)$$

$\gamma_I$  est la tension interfaciale.

Lorsque les deux couches de fluides sont profondes alors  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers l'infini et la relation de dispersion (1.78) se simplifie en :

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma_I k^3}{\rho_2 + \rho_1} \quad (1.79)$$

Le premier terme dans le membre de droite correspond aux ondes de gravité et le second terme correspond aux ondes capillaires. En réduisant la quantité  $\rho_2 - \rho_1$  le terme gravitaire est diminué. Le but de notre travail sur ces ondes interfaciales a été de réduire au maximum ce terme gravitaire en utilisant des fluides de densité très proches afin d'observer essentiellement le régime capillaire. Nous avons utilisé des huiles silicones de différentes viscosités en couche supérieure (voir chapitre 4 pour les propriétés précises des huiles utilisées) et de l'eau déminéralisée en couche inférieure.

Pour illustrer la réduction du régime gravitaire nous avons tracé sur la figure 1.6 l'évolution de la fréquence de transition capillaire en fonction de la masse volumique du fluide supérieur (huile silicone) puisque pour nos expériences le fluide inférieur n'a pas été changé.

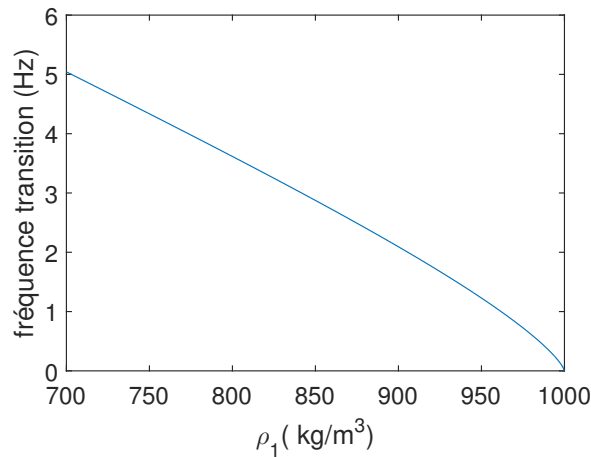


FIGURE 1.6 – évolution de la fréquence de transition entre le régime gravitaire et capillaire en fonction de la masse volumique du fluide supérieur  $\rho_1$ . Le fluide inférieur (eau) reste inchangé avec une masse volumique  $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Nous rappelons que la fréquence de transition gravito-capillaire pour l'interface eau pure/air, avec une tension de surface de  $74 \text{ mN/m}$ , est  $13.8 \text{ Hz}$ .

Nous observons une diminution de la fréquence capillaire lorsque  $\rho_1 \rightarrow \rho_2$ , qui correspond à la réduction du régime gravitaire, qui devient même inexistant lorsque  $\rho_1 = \rho_2$ . Notons que pour nos expériences à l'interface eau/air la masse volumique de l'air  $\rho_1 \ll \rho_2$  c'est pour cela qu'elle est négligée.

### 1.3 Ondes non-linéaires : solitons Korteweg-de Vries

Dans cette partie nous développerons brièvement les équations qui décrivent le comportement d'un type d'onde non-linéaire localisée qui se propage à vitesse constante que sont les solitons Korteweg-de Vries (KdV). En effet l'équation KdV est un modèle mathématique pour la description de la propagation d'ondes longues ( ou en eau peu profonde ) faiblement non-linéaires dans des milieux dispersifs. Cette équation possède un certain nombre de familles de solutions analytiques. Parmi ces familles il y a les ondes progressives périodiques mais également les solitons. C'est cette dernière catégorie qui nous intéresse. L'équation KdV est déterminée à partir des équations hydrodynamiques (équations d'Euler) utilisées dans la première partie de ce chapitre.

Nous rappelons les hypothèses effectuées précédemment et qui sont encore valables dans cette partie :

- Le fluide considéré est incompressible :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ,
- La densité :  $\rho(x, y, z, t) = \rho$ ,
- La viscosité est nulle,
- L'écoulement est irrotationnel.

Il en résulte les équations hydrodynamiques suivantes (équations d'Euler, conditions aux limites inférieure et supérieure et l'équation de Laplace) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{pour } z = \zeta(x, y, t) \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g\zeta = \frac{\gamma}{\rho} \nabla \cdot \left\{ \frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2}} \right\} \quad \text{pour } z = \zeta(x, y, t) \quad (1.81)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{pour } -h(x, y) < z < \zeta(x, y, t) \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla \Phi \cdot \nabla h = 0 \quad z = -h(x, y). \quad (1.83)$$

Nous avons maintenant l'ensemble complet des équations auquel il faut rajouter les hypothèses nécessaires et spécifiques à l'établissement de l'équation KdV :

- La propagation se fait uniquement le long de l'axe  $x$ , les dérivées en  $y$  sont donc nulles.
- La topographie est plane :  $h = \text{constante}$
- L'approximation d'eau peu profonde (ou longue onde ou dispersion faible) est applicable : L'échelle horizontale des ondes  $L$  est grande comparée à la profondeur d'eau au repos  $h$ . On définit le paramètre de dispersion  $\mu = (h/L)^2 \ll 1$ .
- La non-linéarité est faible : la pente des vagues est très faible devant 1. On définit le paramètre de non-linéarité  $\epsilon$  qui correspond à la pente rms des vagues moyennée sur la surface,  $\epsilon = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \|\nabla \zeta(x, y, t)\|^2 dx dy} \ll 1$ .
- Les effets de la non-linéarité et les effets de la dispersion se contre-balancent, dans le cas KdV cela se traduit par :  $\epsilon \approx \mu$

Le dernier point nécessite quelques éclaircissements. La procédure décrite ci-dessus introduit deux paramètres petits,  $\mu$  et  $\epsilon$ . Les deux sont sans dimension et supposés être petits par rapport à 1, mais on ne sait a priori pas leur rapport de taille. Une procédure rigoureuse à partir d'ici serait d'effectuer un développement multi-échelle des équations d'origine, rappelées ci-dessus, dans les deux paramètres  $\mu, \epsilon$  et en déduire la mise à l'échelle correcte entre les deux nombres pour lesquels les effets faiblement non linéaires et faiblement dispersifs sont de taille comparable au premier ordre non linéaire. Cette méthode est malheureusement mathématiquement fastidieuse. Par souci de synthèse, nous utilisons des résultats antérieurs qui ont donné les échelles correctes, à savoir  $\epsilon \approx \mu$ .

Il faut par la suite introduire cette égalité dans les équations hydrodynamiques et effectuer un développement limité afin de les résoudre approximativement d'un ordre à l'autre.

Le détails des calculs peut être trouvé dans le livre de T. Dauxois et M. Peyrard [21]. Il en résulte, après développement limité à l'ordre 4, l'équation KdV pour les

ondes gravito-capillaires :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{3c_0}{2h} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial X} + \frac{h^2 c_0}{2} \left( \frac{1}{3} - Bo \right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial X^3} = 0 \quad (1.84)$$

La variable  $X = x - c_0 t$  et  $T = t$ , qui correspond au repère se déplaçant à la vitesse  $c_0$ ,  $c_0$  correspond à la célérité des ondes linéaires dans la limite des ondes longues ( $k \rightarrow 0$ ),  $c_0 = \sqrt{gh}$ . Nous rappelons la longueur capillaire  $l_c$  telle que  $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ . Nous introduisons le nombre de Bond,  $Bo = l_c^2/h^2$ , qui caractérise le rapport des effets de la tension de surface sur les effets de la gravité.

L'équation KdV possède dans le régime gravito-capillaire des solutions à profil constant, appelées solitons :

$$\zeta = \zeta_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - ct}{L} \right) \quad (1.85)$$

Avec  $c$  la célérité des solitons telle que :

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{\zeta_0}{2h} \right). \quad (1.86)$$

et  $L$  leur longueur caractéristique :

$$L = \sqrt{\frac{4(1 - 3Bo)h^3}{3\zeta_0}} \quad (1.87)$$

En fonction de l'importance de la tension de surface par rapport aux effets de la gravité dans le milieu nous pouvons classer les solitons en trois catégories :

- $0 \leq Bo \ll 1/3$  : Nous sommes dans la limite gravitaire ; les effets de capillarité sont négligeables. Les solitons sont des ondes d'élevation avec des ailes infinies d'amplitude nulle. Leur célérité correspond à celle des ondes longues dans le milieu  $\approx \sqrt{gh}$ .
- $0 \ll Bo \leq 1/3$  : Nous sommes dans la limite gravito-capillaire ; les effets de capillarité ne sont plus négligeables. La prise en compte de l'ordre supérieur, le 5ème ordre, du terme de dispersion dans l'équation (1.84) devient nécessaire. Les solutions dans ce cas n'ont plus réellement la forme d'un soliton dans le sens strict du terme. Elles sont appelées "solitons généralisés". En effet les solitons sont des ondes d'élevation,  $\zeta_0 > 0$ , avec une célérité constante supersonique, à savoir supérieure à la célérité  $c_0$  des ondes longues linéaires dans le milieu. Cependant ils possèdent des ailes oscillantes qui s'étendent indéfiniment loin de la bosse centrale. On parle éventuellement de solitons qui décroissent par radiation "radiatively decaying solitons". L'étude théorique de ces solutions est toujours d'actualité (voir [27, 28, 29, 30, 31]).
- $Bo > 1/3$  : Nous sommes dans la limite capillaire ; les solitons sont des ondes de dépression,  $\zeta_0 < 0$ , avec une célérité constante subsonique à savoir inférieure à la célérité  $c_0$  des ondes longues linéaires dans le milieu (voir

[32, 33].

Dans ce travail, on se placera dans le cas  $Bo < 1/3$ .

## 1.4 Ondes dans une plaque élastique mince

*Nous présenterons dans cette partie les équations non-linéaires qui décrivent la propagation des ondes de flexion dans une plaque fine précontrainte, ce sont les équations Föppl-von Karman (FvK) dynamiques. Nous développerons d'abord le cas sans dissipation ni forçage puis prendrons en compte ces deux effets. Ce système représente en effet l'un de ceux étudiées expérimentalement ainsi que numériquement dans le cadre de cette thèse. Les hypothèses qui mènent aux équations FvK seront écrites en italique pour plus de visibilité.*

### Plan

- Expliciter les relations entre déformation et déplacement
- Expliciter les relations entre contrainte et déformation
- Déterminer l'expression de la densité surfacique Lagrangienne du système
- Expliciter les équations d'Euler-Lagrange qui vont donner les équations Föppl-von Karman dynamiques

### 1.4.1 Les relations déformation-déplacement pour les plaques

Nous détaillons les bases de la théorie de l'élasticité. Dans cette partie nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein par ailleurs un indice après une virgule signifiera la différentiation spatiale suivant la coordonnée correspondante et la dérivation temporelle sera notifiée par un point sur la quantité dérivée.

#### A. Opérateur de la déformation en 3D

##### Opérateur des déformations de Green-Lagrange pour les plaques

Nous devons d'abord définir les éléments qui vont nous permettre de repérer la position d'une particule d'un milieu continu, comme représenté sur la figure 1.7 :

- $\mathbf{a} = [a_i]$  : vecteur donnant la position d'un point M dans la configuration de référence. Il fait intervenir les variables lagrangiennes  $a_i$ .
- $\mathbf{x} = [x_i]$  : vecteur donnant la position d'un point  $M_t$  à l'instant t, qui dans la configuration de référence (t=0) était identifié par  $\mathbf{a}$ .  $x_i$  sont les variables eulériennes.
- $\mathbf{u} = [u_i]$  : vecteur déplacement qui part du point M au point  $M_t$ .

L'index  $i = 1, 2, 3$  correspond aux 3 dimensions x,y,z.

Les relations entre ces quantités sont :

$$x_i = a_i + u_i \quad , \quad dx_i = da_i + du_i \quad (1.88)$$

Ceci est représenté géométriquement sur la figure 1.8. Le vecteur matériel  $d\mathbf{a} = \vec{MM'}$  devient après déformation locale  $d\mathbf{x} = \vec{M_tM'_t}$ .

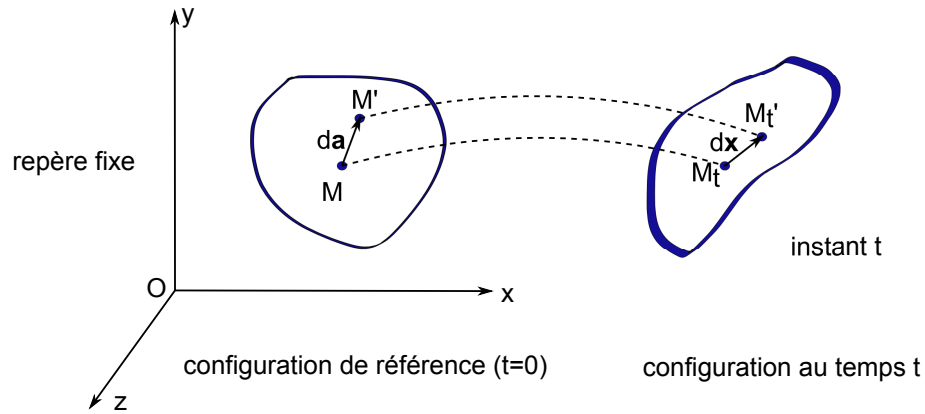


FIGURE 1.7 – Représentation des positions des points dans le milieu continu après déformation locale selon la configuration initiale et la configuration actuelle.

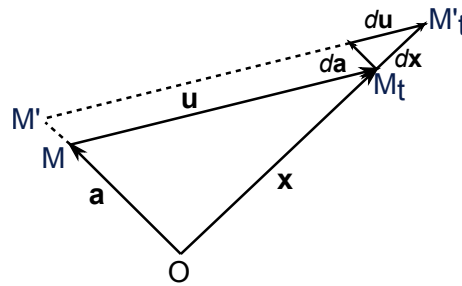


FIGURE 1.8 – Schéma des vecteurs matériels et eulériens.

Nous devons définir les déformations en fonction des déplacements, pour cela nous commençons par calculer les changements de longueur. Les variations des longueurs initiales et actuelles peuvent s'écrire respectivement :

$$dl_0^2 = da_i da_j \delta_{ij} \tag{1.89}$$

$$dl^2 = dx_i dx_j \delta_{ij} = (da_i + du_i)(da_j + du_j) \delta_{ij} \tag{1.90}$$

où  $\delta_{ij}$  correspond au symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \tag{1.91}$$

En mécanique des structures la description Lagrangienne est privilégiée, nous définissons alors :

$$u_i = u_i(a_i), \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_k} da_k = u_{i,k} da_k, \quad du_j = \frac{\partial u_j}{\partial a_l} da_l = u_{j,l} da_l \tag{1.92}$$



La déformation découlant de la différence des carrés des longueurs, cela donne :

$$dl^2 - dl_0^2 = (da_i + du_i)(da_j + du_j)\delta_{ij} - da_i da_j \delta_{ij} \quad (1.93)$$

Soit en utilisant la description Lagrangienne (1.92) et la définition de  $\delta_{i,j}$ , (1.93) devient :

$$\begin{aligned} (u_{j,l} da_l da_i + u_{i,k} da_k da_j + u_{i,k} da_k u_{j,l} da_l) \delta_{ij} &= (u_{j,i} + u_{i,j} + u_{i,k} u_{j,k}) da_i da_j \\ &= 2 E_{ij} da_i da_j \quad (1.94) \end{aligned}$$

où E correspond à l'opérateur des déformations de Green-Lagrange :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (1.95)$$

Il est symétrique par construction. On voit apparaître un terme nonlinéaire d'origine géométrique  $u_{k,i} u_{k,j}$ .

Dans le cas où les déflexions ne sont pas négligeables, le second terme nonlinéaire dans E est important.

Afin de pouvoir identifier plus aisément les composantes de  $E_{ij}$  dans le plan (Ox,Oy), nous définissons les indices suivant :

- Les lettres grecques :  $\alpha, \beta \dots = 1, 2$
- Les lettres latines :  $i, j \dots = 1, 2, 3$

en suivant cette convention, nous pouvons également écrire :

$$i = \alpha, 3 \quad j = \beta, 3 \quad (1.96)$$

Le tenseur de déformation E est alors décomposé en :

- $E_{\alpha\beta}$  qui sont les composantes dans le plan du tenseur de déformation
- $E_{\alpha 3}$  et  $E_{3\beta}$  qui sont les composantes, hors du plan, de cisaillement
- $E_{33}$  qui est la composante du tenseur de déformation à travers l'épaisseur de la plaque.

De la même manière le vecteur déplacement peut être décomposé comme suit :

$$u_i = \begin{cases} u_\alpha \\ \zeta \end{cases} \quad (1.97)$$

où  $u_\alpha$  sont les composants du déplacement dans le plan et  $u_3 = \zeta$  est le déplacement transversal appelé "flèche".

## B. Déflexions modérément grandes

Dans le cas des plaques avec déflexions modérées, à savoir une déflexion de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de plaque, plusieurs simplifications peuvent être faites. Cette hypothèse fait partie des hypothèses de la théorie de von-Karman. Nous représentons la plaque ainsi que la déformée sur la figure 1.9.

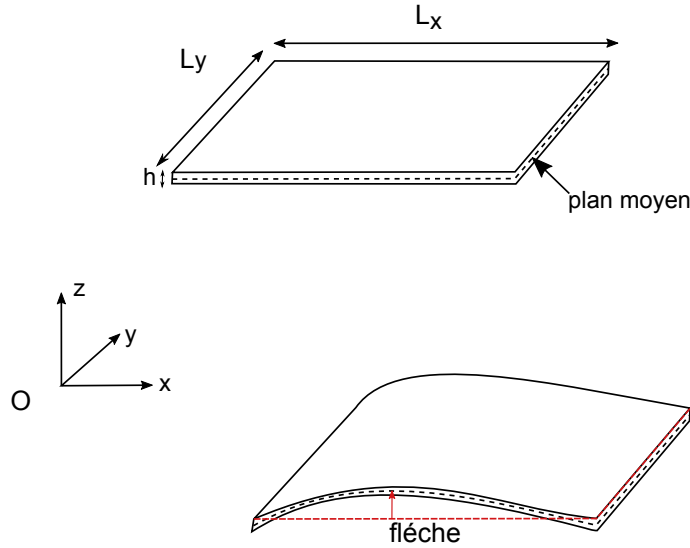


FIGURE 1.9 – Schéma de la plaque mince considérée et définition de la flèche  $\zeta$  après déformation.

A partir de l'expression générale du tenseur de déformation de Green-Lagrange (1.95), nous pouvons écrire ses composantes 2D tels que :

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{k,\alpha}u_{k,\beta}) \quad (1.98)$$

Le terme non-linéaire vaut :

$$u_{k,\alpha}u_{k,\beta} = u_{1,\alpha}u_{1,\beta} + u_{2,\alpha}u_{2,\beta} + u_{3,\alpha}u_{3,\beta} + u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta} + u_{3,\alpha}u_{3,\beta} \quad (1.99)$$

Une des hypothèses de la théorie von-Karman est que les gradients des déplacements dans le plan  $u_{\alpha,\beta}$  sont petits de manière à ce que leur produit ou leur carré soient négligeables par rapport aux termes hors du plan. Ainsi le terme  $u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta} \gg \zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta}$ . Les composantes dans le plan du tenseur de déformation s'écrivent donc :

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta}) \quad (1.100)$$

La seconde hypothèse de la théorie von-Karman est la satisfaction de l'hypothèse Love-Kirchhoff qui stipule que les déplacements dans le plan sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ . On peut donc écrire :

$$u_{\alpha} = u_{\alpha}^{\circ} - zu_{3,\alpha} \quad (1.101)$$

où  $u_{\alpha}^{\circ}$  est le déplacement du plan moyen qui est indépendant de  $z$ , une visualisation de la plaque et de ce plan sont sur la figure 1.9.

En remplaçant (1.101) dans (1.100), on obtient :

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(u_{\alpha}^{\circ} - z\zeta_{,\alpha}),\beta + (u_{\beta}^{\circ} - z\zeta_{,\beta}),\alpha + \zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta}] = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^{\circ} + u_{\beta,\alpha}^{\circ}) - z\zeta_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta} \quad (1.102)$$

A partir de l'expression de la courbure  $\kappa$  :

$$\kappa_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad (1.103)$$

on obtient :

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\zeta_{,\alpha\beta}. \quad (1.104)$$

A présent nous pouvons ré-écrire (1.102) :

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{\circ} + z\kappa_{\alpha\beta} \quad (1.105)$$

où le tenseur de déformation de la surface moyenne  $E_{\alpha\beta}^{\circ}$  est composé d'un terme linéaire et d'un terme non-linéaire :

$$E_{\alpha\beta}^{\circ} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^{\circ} + u_{\beta,\alpha}^{\circ}) + \frac{1}{2}\zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta} \quad (1.106)$$

Le terme linéaire dans (1.106) correspond aux déformations dues à la traction dans les deux directions (Ox),(Oy) ainsi que la déformation due au cisaillement. Le terme non-linéaire quant à lui représente les allongements de la plaque dus aux rotations. Il représente les non-linéarités géométriques prises en compte dans l'établissement des équations FvK.

### Composantes en dehors du plan du tenseur déformation

Il nous reste à expliciter les composantes en dehors du plan du tenseur de déformation  $E_{3\beta}$ ,  $E_{\alpha 3}$  et  $E_{33}$ . En utilisant l'expression générale des composantes du tenseur de contraintes (1.95) ainsi que l'hypothèse de Love-Kirchhoff et celle du déplacement en dehors du plan indépendant de  $z$  ( $u_{3,3} = 0$ ), nous obtenons :

$$E_{3\beta} = -\frac{1}{2}\zeta_{,\gamma}u_{\gamma,\beta} \quad (1.107)$$

$$E_{\alpha 3} = -\frac{1}{2}\zeta_{,\gamma}u_{\gamma,\alpha} \quad (1.108)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}\zeta_{,\gamma}\zeta_{,\alpha} \quad (1.109)$$

L'expression des composantes du tenseur de déformation en fonction des déplacements dans la plaque étant connue nous passons à la détermination des relations entre contrainte et déformation. En effet le tenseur contrainte nous permettra d'établir l'expression de l'énergie potentielle, nécessaire à la détermination de la densité surfacique Lagrangienne du système.

### 1.4.2 Détermination des lois de comportement

Le tenseur des déformations résulte des contraintes extérieures qui génèrent des contraintes intérieures dans le matériau. Ces contraintes correspondent à la force par unité de surface exercée dans la direction  $i$  sur une surface orientée selon  $j$ . Le tenseur des contraintes associé à la pression  $p$  dans le cadre de la mécanique des fluides en est un exemple, il est isotrope et diagonal  $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$ . Les deux champs de tenseurs que nous venons de définir sont des variables thermodynamiques conjuguées, ce qui nous permet de donner une définition du tenseur des contraintes en fonction de l'énergie libre d'un corps élastique :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial E_{ij}} \quad (1.110)$$

Le tenseur des contraintes est par construction symétrique comme le tenseur des déformations.

#### A. Loi de Hooke

Afin d'explicitier la relation entre contrainte et déformation nous nous plaçons dans la limite de faibles déformations pour calculer l'énergie libre d'un corps élastique. Le corps étant à l'équilibre lorsque  $E_{ij} = 0$ , cela correspond au minimum de l'énergie libre. En développant  $F$  autour de ce point à l'ordre le plus bas en  $E_{ij}^2$  :

$$F = F^\circ + \frac{\lambda}{2} (\sum E_{kk})^2 + \mu \sum E_{kl}^2 \quad (1.111)$$

Avec  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. En réécrivant la première somme en une somme double et en dérivant le tout par rapport à  $E_{ij}$ , cela donne :

$$\sigma_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda \delta_{ij} E_{kk} \quad (1.112)$$

En utilisant la loi de Hooke sur un petit volume cubique du matériau orthotrope sur lequel les seules forces qui agissent sont des pressions antagonistes de part et d'autre dans la direction  $z$ , nous pouvons définir le module de Young  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$  en fonction des coefficients de Lamé. Cela nous permet de ré-écrire finalement (1.112) :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)E_{ij} + \nu E_{kk} \delta_{ij}] \quad (1.113)$$

*La troisième hypothèse que nous allons utiliser concerne la faible épaisseur de la plaque couplée aux conditions aux limites. En effet pour une plaque d'épaisseur constante  $h$  excitée dans un fluide dont l'effet dynamique est négligeable, les contraintes sur ses faces sont considérées nulles, ainsi pour  $z = \pm h/2$ ,  $\sigma_{iz} = \sigma_{zi} = 0$ .  $h$  étant très petit devant les dimensions  $L_x$  et  $L_y$ , les composantes du tenseur de contraintes  $\sigma_{i3}$  sont nulles dans tout le volume de la plaque. Seules les composantes  $\sigma_{\alpha\beta}$  sont non nulles. En utilisant la loi de Hooke (1.113) :*

$$E_{\alpha 3} = 0, \quad E_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \quad (1.114)$$

On peut exprimer  $E_{33}$  en fonction des déformations dans le plan grâce à l'équation de la trace :

$$E_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}E_{\alpha\alpha} \quad (1.115)$$

Finalement la loi de Hooke se réduit à la contrainte dans le plan :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}[(1-\nu)E_{\alpha\beta} + \nu E_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (1.116)$$

où le tenseur des déformations est obtenu à partir de la relation (1.105) :

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{\circ} + z\kappa_{\alpha\beta} \quad (1.117)$$

Nous définissons le tenseur du moment fléchissant :

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} z dz \quad (1.118)$$

et le tenseur des efforts de membrane :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz \quad (1.119)$$

## B. Densité surfacique Lagrangienne

Nous cherchons à expliciter l'expression de la densité surfacique Lagrangienne du système  $\mathcal{L}$  car celle-ci nous conduira aux équations Föppl-von Karman dynamiques.  $\mathcal{L}$  représente la différence entre les densités d'énergie cinétique  $\bar{U}_k$  et d'énergie potentielle  $\bar{U}_p$  :

$$\mathcal{L} = \bar{U}_k - \bar{U}_p \quad (1.120)$$

Nous allons donc dans un premier temps déterminer l'énergie potentielle du système puis l'énergie cinétique. Dans le reste de cette partie lorsque nous emploierons le terme "densité" ce sera sous-entendu densité surfacique étant donnée la bidimensionnalité de notre système.

La densité d'énergie potentielle du système correspond à :

$$\bar{U}_p = \bar{U}_b + \bar{U}_m \quad (1.121)$$

Avec  $\bar{U}_b$  la densité d'énergie de flexion et  $\bar{U}_m$  la densité d'énergie de membrane.  $\bar{U}_b$  et  $\bar{U}_m$  font intervenir respectivement le tenseur des moments fléchissants et le tenseur des efforts de membrane.

### Energie de flexion

Afin de calculer les moments fléchissants, nous posons  $E_{\alpha\beta}^{\circ} = 0$ . (1.118) devient alors :

$$M_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [(1-\nu)E_{\alpha\beta} + \nu E_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)\kappa_{\alpha\beta} + \nu\kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.122)$$

Nous définissons le coefficient de rigidité de flexion D tel que :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.123)$$

Ce qui nous permet de ré-écrire le tenseur des moments fléchissants :

$$M_{\alpha\beta} = D[(1-\nu)\kappa_{\alpha\beta} + \nu\kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.124)$$

Ce tenseur est symétrique.

Définissons la densité de l'énergie de flexion :

$$\bar{U}_b = \oint M_{\alpha\beta} d\kappa_{\alpha\beta} \quad (1.125)$$

Ce qui donne après intégration :

$$\bar{U}_b = \frac{D}{2} \left\{ (\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - 2(1-\nu)[\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2] \right\} \quad (1.126)$$

### Energie de membrane

Afin de calculer le tenseur des efforts de membrane nous posons  $\kappa_{\alpha\beta} = 0$ , (1.119) s'écrit alors :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [(1-\nu)E_{\alpha\beta} + \nu E_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] dz \quad (1.127)$$

Ce qui donne après intégration

$$N_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)E_{\alpha\beta}^{\circ} + \nu E_{\gamma\gamma}^{\circ} \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.128)$$

Nous définissons le coefficient de rigidité de tension K tel que :

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (1.129)$$

Le tenseur  $N_{\alpha\beta}$  s'écrit alors :

$$N_{\alpha\beta} = K[(1-\nu)E_{\alpha\beta}^{\circ} + \nu E_{\gamma\gamma}^{\circ} \delta_{\alpha\beta}] \quad (1.130)$$

N est également symétrique par construction.

En procédant de la même manière que pour la densité d'énergie de flexion, nous pouvons définir la densité d'énergie de membrane :

$$\bar{U}_m = \oint N_{\alpha\beta} dE_{\alpha\beta}^{\circ} \quad (1.131)$$

Ce qui donne après intégration :

$$\bar{U}_m = \frac{K}{2} \left\{ (E_{11}^{\circ} + E_{22}^{\circ})^2 - 2(1 - \nu)[E_{11}^{\circ} E_{22}^{\circ} - E_{12}^{\circ 2}] \right\} \quad (1.132)$$

## Energie cinétique

La densité d'énergie cinétique s'écrit comme suit :

$$\bar{U}_k = \frac{h\rho}{2} (\dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} + \dot{\zeta}^2) \quad (1.133)$$

Avec  $\rho$  la masse volumique du matériau constituant la plaque.

Nous utilisons l'hypothèse selon laquelle l'inertie dans le plan est très petite devant l'inertie selon la direction normale à la plaque :

$$\dot{u}_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} \ll \dot{\zeta}^2 \quad (1.134)$$

Cela nous permet de ré-écrire (1.133) telle que :

$$\bar{U}_k = \frac{h\rho}{2} \dot{\zeta}^2 \quad (1.135)$$

### 1.4.3 Equations Föppl-von Karman dynamiques

#### A. Forme générale

La densité d'énergie cinétique et potentielle ayant été déterminées, nous pouvons à présent écrire la densité Lagrangienne  $\mathcal{L}$  en utilisant (1.120) :

$$\mathcal{L} = \frac{h\rho}{2} \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} N_{\alpha\beta} \bar{E}_{\alpha\beta}^{\circ} \quad (1.136)$$

Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe de moindre action, qui stipule que la variation de l'intégrale de la densité Lagrangienne s'annule sur la trajectoire suivie :

$$\delta \int_S \mathcal{L} dS \quad (1.137)$$

En développant la variation de la densité Lagrangienne, on obtient :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} \quad (1.138)$$

Après une intégration par parties, nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{d}{dj} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \right) = 0 \quad (1.139)$$

En décomposant la densité Lagrangienne en fonction des densités d'énergie potentielle et cinétique, nous pouvons décomposer (1.139) sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \dot{u}_\alpha} \right) = -\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial u_\alpha} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \dot{\zeta}} \right) = -\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (1.140)$$

Considérons d'abord la seconde équation du système (1.140) qui va nous donner l'équation de FvK dynamique :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \dot{\zeta}} \right) = -\frac{\partial (\bar{U}_b + \bar{U}_m)}{\partial \zeta} \quad (1.141)$$

Ce qui se simplifie en :

$$\rho h \dot{\zeta} = -\frac{\delta (\bar{U}_b + \bar{U}_m)}{\delta \zeta} \quad (1.142)$$

L'explicitation de la variation de la densité d'énergie de flexion et de l'énergie de membrane est une étape calculatoire lourde, nous nous contentons de donner leur expression finale :

$$\begin{cases} \delta \bar{U}_b = D \Delta^2 \zeta \delta \zeta \\ \delta \bar{U}_m = h [\delta u_\alpha^\circ \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \delta \zeta (\sigma_{\alpha\beta} \zeta_{,\alpha})_{,\beta}] \end{cases} \quad (1.143)$$

La somme des variations de densité d'énergie de flexion et de membrane peut alors s'écrire :

$$\delta (\bar{U}_b + \bar{U}_m) = \delta \zeta [h (\sigma_{\alpha\beta} \zeta_{,\alpha})_{,\beta} + D \Delta^2 \zeta] + \delta u_\alpha^\circ [\sigma_{\alpha\beta,\beta}] \quad (1.144)$$

La seconde équation (1.142) du système s'écrit finalement :

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\rho} [( \sigma_{\alpha\beta} \zeta_{,\alpha} )_{,\beta} + D \Delta^2 \zeta] \quad (1.145)$$

Passons à présent à la première équation du système (1.140). L'inertie dans le plan étant négligée :

$$\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \dot{u}_\alpha} \approx 0 \quad (1.146)$$



La première équation de (1.140) devient alors :

$$\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial u_\alpha} = 0 \quad (1.147)$$

En remplaçant  $\bar{U}_p$  par les expressions de  $\bar{U}_m$  et  $\bar{U}_b$ , (1.147) s'écrit finalement :

$$\frac{\delta(\bar{U}_b + \bar{U}_m)}{\delta u_\alpha} = 0 \quad (1.148)$$

En utilisant (1.144), nous obtenons

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad (1.149)$$

Nous introduisons la fonction D'Airy  $\chi$  telle que :

$$\sigma_{11} = \chi_{,22} \quad \sigma_{22} = \chi_{,11} \quad \sigma_{12} = -\chi_{,12} \quad (1.150)$$

Nous définissons également l'opérateur de Monge-Ampère tel que :

$$\{f, g\} = f_{,11}g_{,22} + f_{,22}g_{,11} - 2f_{,12}g_{,12} \quad (1.151)$$

Grâce à ces deux opérateurs nous pouvons réécrire les deux équations d'Euler-Lagrange (1.149) (1.145) :

$$\begin{cases} \Delta^2 \chi = -\frac{E}{2} \{\zeta, \zeta\} \\ \dot{\zeta} = -\frac{D}{\rho h} \Delta^2 \zeta + \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\} \end{cases} \quad (1.152)$$

Ce système correspond aux équations de Föppl-von Karman dynamiques qui décrivent la dynamique des ondes de flexion dans une plaque élastique fine sans forçage ni dissipation.

### B. Equations Föppl-von Karman forcées amorties

Dans les systèmes réels hors équilibre il y a un forçage qui permet l'injection de l'énergie et une dissipation qui amortit les ondes. Afin de tenir compte de ces phénomènes nous rajoutons un terme dissipatif  $-\mathcal{D}$  et un terme de forçage  $\mathcal{F}$  à l'équation (1.152) (plus de détails sur l'expression de ces termes seront donnés dans le chapitre 3). Nous obtenons les équation FvK forcées amorties :

$$\begin{cases} \Delta^2 \chi = -\frac{E}{2} \{\zeta, \zeta\} \\ \dot{\zeta} = -\frac{D}{\rho h} \Delta^2 \zeta + \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\} - \mathcal{D} + \mathcal{F} \end{cases} \quad (1.153)$$

### 1.4.4 Relations de dispersion linéaire

Dans la limite de faibles amplitude  $\zeta \ll 1$  nous pouvons linéariser les équations FvK sans forçage ni dissipation (1.152). Nous retrouvons alors l'équation donnée par le modèle Kirchhoff-Love.

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + D \Delta^2 \zeta = 0, \quad (1.154)$$

L'équation (1.154) permet de décrire la propagation des ondes de flexion dans un milieu idéal continu infini. L'équation de dispersion suivant l'axe  $Ox$  s'obtient en supposant une solution de type onde plane. Pour ce type d'onde le terme non-linéaire est nul. La substitution de  $\zeta = Ae^{i(\omega t - kx)}$  dans l'équation (1.154) donne :

$$\omega^2 = k^4 C^2, \quad \text{avec} \quad C^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}, \quad (1.155)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $k$  le nombre d'onde et  $C^2$  le paramètre de propagation de l'onde dans la plaque que l'on nommera dans la suite du manuscrit facteur de dispersion. Cette relation constitue la relation de dispersion linéaire des ondes de flexion.

### 1.4.5 Effet de la précontrainte

Lors de nos expériences une tension a été appliquée à la plaque, il faut tenir compte de cette précontrainte en l'additionnant dans l'expression de la densité d'énergie de membrane (1.131). Ceci débouche sur une nouvelle expression des équations FvK dynamiques :

$$\begin{cases} \Delta^2 \chi = -\frac{E}{2} \{\zeta, \zeta\} \\ \dot{\zeta} = -\frac{D}{\rho h} \Delta^2 \zeta + \frac{1}{\rho} (T_1 \zeta_{,11} + T_2 \zeta_{,22}) + \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\} - \mathcal{D} + \mathcal{F} \end{cases} \quad (1.156)$$

avec  $T_1$  et  $T_2$  les tensions selon l'axe  $x$  et  $y$  respectivement.

Le modèle de vibrations linéaires de flexion des plaques (1.154) s'écrit alors en considérant une tension homogène dans toute la plaque :

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - T \Delta \zeta + D \Delta^2 \zeta = 0 \quad (1.157)$$

où  $T$  est la tension appliquée. L'équation de dispersion des ondes de flexion dans une plaque précontrainte s'écrit alors :

$$\omega^2 = C^2 \left( k^4 + \frac{T k^2}{\rho h C^2} \right) \quad (1.158)$$

On souhaite étudier l'influence de l'addition de la tension sur la propagation des ondes de flexion. D'après (1.158) la tension peut être interprétée comme une partie non-dispersive de l'équation de dispersion des plaques sans précontrainte. Ainsi le

cas de la plaque précontrainte présente une intermédiaire entre le cas de la flexion pure où les ondes sont dispersives et le cas de la tension pure, correspondant au cas de la membrane avec  $h$  qui tend vers 0, où les ondes sont purement non-dispersives. La transition entre le régime purement dispersif et le régime purement non-dispersif, est caractérisée par l'échelle :

$$k_t = \sqrt{\frac{T}{\rho h C^2}}. \quad (1.159)$$

La transition que nous étudierons d'un régime dominé par des ondes de flexion à un régime dominé par des ondes de tension est particulièrement intéressante car pourrait permettre l'observation de structures non-linéaires localisées non-dispersives tels les solitons par analogie avec le cas des ondes à la surface de l'eau développé à la partie 1.3, lorsque la couche d'eau devient faible.

# Chapitre 2

## Turbulence d'ondes

Dans ce chapitre nous allons aborder dans un premier temps les bases mathématiques de la turbulence d'onde. En effet nous présenterons la description statistique de la dynamique d'un système d'ondes faiblement non-linéaires. L'équation cinétique décrivant l'évolution de l'énergie du système dans l'espace de Fourier sera développée à partir d'une analyse sur les cumulants. Les solutions stationnaires hors équilibre à cette équation, appelées solutions de Zakharov, seront présentées et appliquées aux systèmes non-linéaires étudiés. Une description des effets dissipatifs négligés par la théorie mais présents dans les expériences sera effectuée. Cette partie est importante car pourrait expliquer la différence entre théorie et expérience souvent observée en laboratoire. Nous passerons dans un second temps à une revue bibliographique de la turbulence d'onde observée dans les systèmes physiques étudiés dans cette thèse, à savoir les ondes à la surface d'un liquide et les ondes élastiques à la surface d'une plaque fine. Ces deux parties permettront de mettre en lumière les objectifs de cette thèse.

### 2.1 Théorie

Nous allons présenter rapidement dans cette partie le développement mathématique de la théorie de la turbulence faible. La première étape consistera à déterminer l'équation d'évolution du spectre des ondes puis à lui trouver des solutions stationnaires avec conservation de flux, ces solutions sont les fameuses solutions de Zakharov. Une analyse dimensionnelle est par la suite présentée pour déterminer la solution générale des spectres de Zakharov pour la cascade directe et la cascade inverse. Une application de ces solutions sera ensuite effectuée sur les systèmes abordés lors de cette thèse.

#### 2.1.1 Equation cinétique

Nous devons d'abord obtenir l'équation cinétique pour un système d'ondes non-linéaires dispersives. Pour cela nous commençons par déterminer les équations non-linéaires de nos systèmes, il est souvent plus facile d'utiliser l'équation du Hamilton dans l'espace de Fourier :

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} \quad (2.1)$$

$H$  est le Hamiltonien du système et  $a_{\mathbf{k}}$  les variables canoniques associées aux amplitudes complexes des vagues dans l'espace de Fourier. Nous effectuons ensuite l'hypothèse de faible non-linéarité, dont l'intensité est représentée par le paramètre  $\epsilon$ , afin de séparer l'échelle de temps linéaire  $t_L$  supposée bien plus faible que l'échelle de temps non-linéaire  $t_{NL}$ .  $t_L$  et  $t_{NL}$  sont définis tels que :

$$\begin{cases} t_L = \frac{2\pi}{\omega} \\ t_{NL} = \frac{2\pi}{\epsilon^{2(N-2)}\omega} \end{cases} \quad (2.2)$$

$N$  correspond au nombre d'ondes en interaction. Avec  $t_L \ll t_{NL}$  il est alors possible d'effectuer un développement perturbatif du Hamiltonien :

$$H = H_1 + \epsilon H_2 + \epsilon^2 H_3 + \dots \quad (2.3)$$

En remplaçant (2.3) dans (2.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \\ & + \epsilon \int V_{k,k_1,k_2} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ & + \epsilon^2 \int V_{k,k_1,k_2,k_3} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le premier terme de droite correspond à la dynamique linéaire.  $V_{k,k_1,k_2}$  représente le coefficient d'interaction à trois ondes et  $V_{k,k_1,k_2,k_3}$  représente le coefficient d'interaction à quatre ondes. Nous pourrions continuer le développement perturbatif aux ordres supérieurs mais comme  $\epsilon \ll 1$  nous nous limiterons en général au premier terme non nul. Pour les ondes capillaires et gravitaires  $N = 3$ , pour les ondes élastiques  $N = 4$ , on expliquera plus loin plus en détails ce point. Dans les régimes turbulents, une approche statistique est pertinente du fait du caractère stochastique de l'évolution du système. La théorie de la turbulence faible intervient alors afin de proposer, sous certaines hypothèses, des équations statistiques plutôt que dynamiques. Deux démarches existent avec des résultats équivalents. L'une est effectuée avec l'hypothèse des phases aléatoires avec donc une distribution quasi-gaussienne en amplitude et en phase [34, 7]. La seconde est basée sur la hiérarchie des cumulants des variables canoniques [35]. Nous rappelons que pour les ondes de surface le cumulatif d'ordre 1 est nul. Nous pouvons ainsi introduire

la hiérarchie des cumulants conjugués d'amplitudes complexe telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\mathbf{k}_1}^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) = \langle \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2} \rangle \\ Q_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \langle \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2} \rangle \\ Q_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^4 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) Q_{\mathbf{k}_1}^2 \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) Q_{\mathbf{k}_3}^2 \\ + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2) Q_{\mathbf{k}_2}^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) Q_{\mathbf{k}_3}^2 + \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) Q_{\mathbf{k}_3}^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) Q_{\mathbf{k}_2}^2 = \langle \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{a}_{\mathbf{k}_3} \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{etc} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Les crochets représentent une moyenne statistique sur les réalisations. Celle-ci est équivalente à une moyenne spatiale conséquence de l'hypothèse d'homogénéité du système. En partant de l'équation d'amplitude (2.4), nous cherchons les équations d'évolution des cumulants. La dérivée temporelle du cumulant d'ordre  $m$  fait forcément intervenir le cumulant d'ordre supérieur  $n$  telle que :

$$\frac{\partial Q_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m}^m}{\partial t} = f(\{Q^n\}, t) \quad (2.6)$$

La dynamique au temps long peut-être déterminée avec une séparation d'échelle entre le temps d'oscillations linéaires rapides et le temps des interactions non-linéaires lentes, cela nous permet s'effectuer un développement du cumulant  $Q^m$  en une série de fonctions de  $\epsilon$  :

$$Q_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m}^m = q_0^m + \epsilon q_1^m + \epsilon^2 q_2^m + \dots \quad (2.7)$$

Contrairement à la turbulence hydrodynamique, le système (2.6) possède une fermeture asymptotique naturelle grâce au petit paramètre  $\epsilon$ . Le développement du moment (2.7) est introduit dans l'équation (2.6) afin de l'explicitier. Cela est possible après un calcul fastidieux (voir détails dans [11]) en effectuant les deux hypothèses principales de la théorie de la turbulence faible :

- le domaine dans lequel évoluent les ondes tend vers l'infini, ainsi le vecteur d'onde dans l'espace de Fourier n'est pas discret et les conditions de résonance exactes sont satisfaites.
- $\epsilon \rightarrow 0$  : la non-linéarité est infinitésimale

Les amplitudes suivent alors une distribution quasi-gaussienne de sorte que les moments d'ordre pair soient fonction du moment d'ordre deux  $Q^2$  et que les moments d'ordre impair soient nuls à l'ordre le plus bas. Ce dernier permet de définir le spectre d'action d'ondes tel que :

$$n_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* \rangle = Q^2 \quad (2.8)$$

Il vient alors l'équation cinétique, qui décrit l'évolution temporelle de  $n_{\mathbf{k}}$  :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = S_t(n_{\mathbf{k}}) \quad (2.9)$$

Avec  $S_t(n_{\mathbf{k}})$  l'intégrale de collision, elle illustre l'évolution du spectre pour un vecteur d'onde donnée  $\mathbf{k}$  sous l'effet des collisions au sein d'une triade ou quadriade résonante, pour respectivement  $N=3$  et  $N=4$ , contenant  $\mathbf{k}$ .

Pour les systèmes où les interactions à 3 ondes sont autorisées (2.9) s'écrit :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi\epsilon^2 \int |V_{k,k_1,k_2}|^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} \mathbf{F}(\omega, \omega_1, \omega_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} F(\omega, \omega_1, \omega_2) &= \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} \right) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \\ &+ \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} \right) \delta(\omega_1 - \omega - \omega_2) \\ &+ \left( \frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} \right) \delta(\omega_2 - \omega - \omega_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notons que dans l'expression de  $F$  réside la condition de résonance en temps et en espace pour 3 ondes :

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\ \omega = \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Pour les cas où les résonances à 3 ondes n'ont pas de solution il faut considérer l'ordre supérieur, c'est le cas pour les ondes gravitaires où on considère alors  $N = 4$ . Pour les ondes élastiques dans une plaque ou une membrane les non-linéarités étant cubiques cela donne  $N = 4$ . Notons que pour les interactions à quatre ondes, les non-linéarités engendrent également un décalage fréquentiel des modes  $\delta\omega$ . Il faut alors effectuer une renormalisation de la pulsation  $\omega$  qui devient  $\tilde{\omega}$  et remplacer  $\omega$  par  $\tilde{\omega} = \omega + \delta\omega$  dans l'équivalent de (2.11). De manière générale nous pouvons écrire l'équation cinétique dont le processus majeur met en interaction  $N$  ondes telle que :

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} \approx \int L_N^2 n_{\mathbf{k}}^{N-1} \delta(\omega) \delta(\mathbf{k}) d\mathbf{k}^{N-1} \quad (2.13)$$

avec  $L_N$  le terme de collision à  $N$  ondes.

### 2.1.2 Solutions de Zakharov

Il existe tout d'abord une solution à l'équation cinétique à flux d'énergie nulle, on parle d'équipartition de l'énergie (spectre de Rayleigh-Jeans [36]). Cette solution n'est pas celle à laquelle on s'intéresse. Les autres solutions sont des stationnaires à flux constant, c'est à dire des solutions annulant l'intégrale de collision. Ces solutions nécessitent une source et un puit d'énergie et ont été découvertes par Zakharov [37]. Par proximité aux spectres de Kolmogorov pour la turbulence hydrodynamique, ces solutions sont appelées spectres de Kolmogorov-Zakharov.

Ces solutions décrivent un système faiblement non-linéaire où les interactions s'effectuent par résonance. Ces résonances permettent le transfert d'énergie des échelles de forçage aux échelles dissipatives. Ils existent donc dans le système des termes sources et des termes puits qui ont une très large séparation d'échelle dans l'espace de Fourier, nous permettant ainsi d'encadrer le temps non linéaire par le temps linéaire et le temps dissipatif :

$$t_L \ll t_{NL} \ll t_D \quad (2.14)$$

Entre ces échelles il existe un régime inertiel, insensible à l'effet du forçage et de la dissipation, où les solutions conservatives sont valides permettant ainsi une cascade d'énergie conservative à flux constant.

Deux quantités peuvent être conservées par l'équation cinétique en fonction du nombre d'ondes en interaction ; si  $N$  est impair alors seule l'énergie totale du système  $E$  est conservée :

$$E = \frac{1}{2} \int \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \text{cte} \quad (2.15)$$

On parle alors de cascade d'énergie directe des grandes échelles de forçage aux petites échelles dissipatives. Lorsque  $N$  est pair, l'action d'onde totale du système peut être également conservée, et une seconde cascade est possible. C'est la cascade d'action d'onde inverse des petites échelles de forçage aux grandes échelles, ceci est le cas pour les ondes de gravité à 2D ou les ondes élastiques dans une membrane.

Il est possible d'obtenir rapidement la forme des solutions de Zakharov par analyse dimensionnelle pour les ondes de gravité et les ondes capillaires. Pour les ondes à la surface de la plaque la situation est différente, l'expression de  $E_k$  fait intervenir deux paramètres dimensionnels ; l'un qui découle de la relation de dispersion linéaire et un second spécifique aux ondes élastiques qui dépend de l'épaisseur effective de la plaque. Dans ce cas l'analyse dimensionnelle ne permet pas de trouver les solutions de Zakharov, il faut alors résoudre explicitement l'équation cinétique, cette démarche est fastidieuse c'est pour cela que seule le résultat des spectres sera présenté mais les détails des calculs peuvent être trouvés dans le manuscrit de thèse de G. Düring [11]. Dans ce qui suit nous allons nous concentrer sur l'analyse dimensionnelle applicable pour les ondes à la surface d'un liquide. Nous considérons un système isotrope de sorte qu'en effectuant une intégration angulaire sur toutes les directions de  $\mathbf{k}$  nous obtenons  $\int E_k dk = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ . La conservation de l'énergie donne :

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \quad (2.16)$$

Il existe un lien entre l'action d'onde et l'énergie par définition des variables canoniques

$$E_k = n_k \omega_k \quad (2.17)$$



Ceci nous permet de donner une estimation sur le flux  $\phi_k$  :

$$\phi_k \propto \frac{\partial E_k}{\partial t} dk \propto \frac{\partial n_k \omega_k}{\partial t} dk. \quad (2.18)$$

En utilisant l'équation cinétique généralisée (2.13) pour un processus d'interaction à  $N$  ondes, on a :

$$\frac{\partial n_k \omega_k}{\partial t} dk \propto n_k^{N-1}. \quad (2.19)$$

Par analyse dimensionnelle il vient :

$$E_k \propto \phi^{\frac{1}{N-1}} f(k) \quad (2.20)$$

avec  $f(k)$  une fonction de  $k$ . Les solutions stationnaires à l'équation (2.13) à flux d'énergie constant, appelées solutions de Zakharov, sont cherchées sous la forme :

$$n_k = A \phi^{\frac{1}{N-1}} k^{-x}. \quad (2.21)$$

$C$  et  $\alpha$  sont des constantes qui dépendent du système étudié.

### 2.1.3 Interactions à $N$ ondes

Afin d'explicitier la forme finale des solutions de Zakharov il est impératif de déterminer le nombre d'ondes  $N$  en interaction puisque seul ce terme sera considéré par la suite. Le mécanisme de résonance permettant la transmission de l'énergie entre les ondes de surface fait intervenir à l'ordre le plus bas trois ondes, on parle alors de triade résonante. Les conditions de résonance en temps et en espace peuvent être généralisées pour une interaction à  $N$  ondes sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=N} s \mathbf{k}_i = \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{i=N} s \omega_i = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Avec  $s = \pm 1$ ,  $\omega_i$  et  $\mathbf{k}_i$  sont reliés par la relation de dispersion linéaire. La satisfaction des deux conditions de résonance explique pourquoi cette théorie n'est applicable qu'aux ondes dispersives afin d'avoir des solutions non triviales.  $N$  dépend en premier lieu de l'ordre des non-linéarités dans le système, ainsi si les non-linéarités sont quadratiques alors  $N=3$  et si les non-linéarités sont cubiques  $N = 4$ . Par ailleurs lorsque les ondes suivent une relation de dispersion en loi de puissance :

$$\omega = \lambda k^\alpha, \quad (2.23)$$

Vedenov a démontré géométriquement dans [38] que les interactions à 3 ondes n'étaient possibles en 2D que si  $\alpha \geq 1$ . Ainsi dans le cas où la partie cubique du Hamiltonien est nulle ou si les résonances à trois ondes sont interdites, le couplage non-linéaire fait intervenir les interactions d'ordre supérieur à savoir entre 4 ondes, comme c'est le cas pour les ondes de gravité à 2D à la surface de l'eau [39] ou encore les modèles NLS dans l'optique non-linéaire [40] et les condensats de Bose-Einstein [41]. Certains systèmes font intervenir des interactions à des ordres supérieurs

comme pour les ondes de gravité à 1D [42, 34, 43] qui font intervenir 5 ondes ou les ondes de Kelvin dans les lignes de tourbillons quantiques [44, 45] qui font intervenir les interactions à 6 ondes. Ces interactions sont bien évidemment très rares, nous aborderons uniquement le cas des résonances entre 3 et 4 ondes dans cette étude étant donné que les ondes étudiées sont gravito-capillaires et élastiques.

## 2.1.4 Prédiction des spectres Kolmogorov-Zakharov

Nous montrons à présent l'une des méthodes d'obtention des solutions de Zakharov, qui est l'analyse dimensionnelle. Cette méthode est présentée dans le livre de S.Nazarenko [7]. Nous cherchons des solutions stationnaires dans la zone inertielle sous la forme de fonction auto-similaire de l'échelle  $k$  du flux de la quantité conservée et de la quantité dimensionnelle du milieu de propagation  $C$ . Nous allons exprimer le résultat sur le spectre d'énergie  $E_k$ , le passage au spectre d'action d'onde se fait en utilisant  $n_k = E_k/\omega_k$ .

### 2.1.4.1 Cascade directe

Nous devons d'abord définir la dimension de l'énergie, en suivant la définition de [46]. Cette dernière est normalisée par unité de surface et de densité, ce qui donne :

$$[E_k] = \frac{[l]^{6-d}}{[t]^2} = \frac{[l]^4}{[t]^2} \quad (2.24)$$

En utilisant l'équation (1.37) nous obtenons la dimension du flux d'énergie :

$$[\phi] = \frac{[l]^3}{[t]^3} \quad (2.25)$$

Par ailleurs la dimension du paramètre dimensionnel  $\lambda$  en utilisant (2.23) vaut :

$$[\lambda] = \frac{[l]^\alpha}{[t]} \quad (2.26)$$

Finalement en combinant les dimensions des quantités précédemment calculées et (2.20) nous obtenons la prédiction sur le spectre d'énergie pour la cascade directe :

$$E_k \propto \lambda^\xi \phi^{\frac{1}{N-1}} k^\Xi \quad (2.27)$$

avec :

$$\xi = 2 - \frac{3}{N-1}, \quad \Xi = d - 6 + 2\alpha + \frac{5 - d - 3\alpha}{N-1} \quad (2.28)$$

### Ondes de gravité

Pour les ondes de gravité en eau profonde  $\omega = \sqrt{gk}$  donc  $\lambda = \sqrt{g}$  et  $\alpha = 1/2 < 1$  donc  $N = 4$ . Nous rappelons selon la formule (1.61) que pour les ondes de gravité  $E_k = \frac{1}{2}gS_k^\zeta$ . La cascade d'énergie directe suit alors :

$$\begin{cases} E_k \propto \phi^{1/3}g^{1/2}k^{-5/2} \\ S_k^\zeta \propto \phi^{1/3}g^{-1/2}k^{-5/2} \\ S_\omega^\zeta \propto \phi^{1/3}g\omega^{-4} \end{cases} \quad (2.29)$$

$S_k^\zeta$  correspond au spectre de puissance en  $k$  de l'amplitude  $\zeta$  des ondes, le passage au spectre fréquentiel  $S_\omega^\zeta$  se fait grâce à la relation de dispersion linéaire. Les prédictions sur le spectre de puissance sont essentielles car il sera mesuré lors de nos expériences et simulations numériques.

### Ondes capillaires

Pour les ondes capillaires en eau profonde  $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}k^3}$  donc  $\lambda = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}$  et  $\alpha = 3/2 > 1$ . Les non-linéarités dans les équations de Navier-Stokes sont quadratiques donc  $N = 3$ . Nous rappelons que  $E_k = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\rho}k^2S_k^\zeta$ . La cascade d'énergie directe suit alors :

$$\begin{cases} E_k \propto \phi^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4} \\ S_k^\zeta \propto \phi^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4} \\ S_\omega^\zeta \propto \phi^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} \omega^{-17/6} \end{cases} \quad (2.30)$$

### Ondes de flexion dans une plaque fine élastique

Comme il a été montré dans le chapitre 1, le champ de déformation d'une plaque élastique est régi par les équations dynamiques de Föppl-von Karman qui contiennent une non-linéarité cubique. Les ondes de flexion sont donc un système d'interaction à quatre ondes, auquel le formalisme de la turbulence d'ondes a été appliqué par G.Düring [11]. En cherchant la solution stationnaire en loi de puissance (2.21), nous obtenons une solution unique avec  $\alpha = -2$ . Soit le spectre en fréquence  $n_\omega = A\phi^{1/3}\omega^{-1}$ . Cette solution est dite dégénérée, c'est à dire qu'elle correspond à la fois au système sans flux d'énergie, et à celui avec conservation du flux d'énergie. Il faut alors chercher une solution avec un flux conservé non nul et lever la dégénérescence grâce à une correction logarithmique, la solution (2.21) s'écrit alors :

$$n_\omega = \frac{AP^{1/3}}{\omega_k} [\log(\omega_c/\omega)]^\xi \quad (2.31)$$

avec  $\omega_c$  une pulsation de coupure, dont le sens physique n'est pas pleinement compris mais qui a été associé dans de nombreux travaux à l'échelle dissipative

[47, 16]. Le point le plus important à retenir est que la correction logarithmique est valable peu importe l'échelle de cette coupure. Il a été trouvé que  $\xi = 1/3$  [11] ce qui donne le spectre de Kolmogorov-Zakharov suivant :

$$\left\{ E_\omega^v \propto \phi^{1/3} \ln(\omega_c/\omega)^{1/3} \right. \quad (2.32)$$

### Ondes de tension dans une membrane élastique

Tous comme les ondes de flexion, les ondes de tension dans une membrane élastique font intervenir à l'ordre le plus bas des interactions à quatre ondes. Nous avons donc  $N = 4$  par ailleurs la relation de dispersion des ondes élastiques étant  $\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho h}} k$ , cela donne  $\alpha = 1$ . Les ondes sont donc non-dispersives, ce qui est problématique car la dérivation de l'équation cinétique exigeait la dispersion des ondes. Il a été toute fois montré que pour des ondes non dispersives une équation cinétique similaire en 3D pouvait être trouvée mais avec la condition restrictive d'interaction résonante uniquement entre vecteurs colinéaires, ceci est le cas pour les ondes acoustiques [48]. La redistribution angulaire de l'énergie n'est donc plus possible. Pour le cas particulier de la plaque/membrane en 2D le coefficient de collision à 4 ondes est nul pour les ondes colinéaires, ce qui veut dire qu'au développement limité d'ordre 2 au moins, l'intégrale de collision de l'équation cinétique est triviale. Il existe une seconde solution permettant la satisfaction des conditions de résonances en  $k$  des ondes non-dispersives mais avec uniquement des interactions  $2 \leftrightarrow 2$ . Cette solution permet alors de retrouver la même équation cinétique que (2.13) mais en ne prenant plus en considération les interactions  $3 \leftrightarrow 1$  (voir article au chapitre 7).

Les spectres de la cascade directe s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_k^\zeta \propto \phi^{1/3} k^{-7/3} \\ S_k^\zeta \propto \phi^{1/3} k^{-10/3} \\ S_\omega^\zeta \propto \phi^{1/3} \omega^{-10/3} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

#### 2.1.4.2 Cascade inverse

Lorsque le nombre d'ondes en résonance  $N$  est pair l'action d'onde est également conservée, en plus de l'énergie, si et seulement si seules les interactions  $N/2 \leftrightarrow N/2$  sont possibles. Cette conservation donne lieu à une cascade inverse. Nous définissons l'action d'onde telle que :

$$\mathcal{N} = \int n_k dk \quad (2.34)$$

Cela nous permet de définir le flux d'action d'onde  $Q$ , de la même manière que le flux d'énergie précédemment, tel que :

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial k} \quad (2.35)$$

$Q$  peut donc être assimilé au flux d'énergie divisé par la pulsation :

$$[Q] = \frac{[\phi]}{[\omega]} = \frac{[l]^{-5-d}}{[t]^2} \quad (2.36)$$

La solution stationnaire à flux d'action constant à cette équation donne le spectre d'énergie de la cascade inverse et s'écrit :

$$E_k \propto \lambda^\xi Q^{\frac{1}{N-1}} k^\Xi \quad (2.37)$$

avec

$$\xi = 2 - \frac{2}{N-1}, \quad \Xi = d - 6 + \frac{5 - d - 2\alpha(N-2)}{N-1} \quad (2.38)$$

Elle illustre un transfert d'énergie des échelles d'injection, supposées petites, aux plus grandes échelles. La cascade inverse peut-être stoppée soit par une accumulation de l'énergie à grande échelle dans un mode cohérent, on parle de "condensat d'ondes", soit par la présence d'une dissipation à grande échelle. Il est important de souligner que dans ce genre de système lorsque l'échelle de forçage est située au milieu du régime inertiel et qu'il existe une grande séparation d'échelle entre l'échelle d'injection et les échelles dissipatives haute et basse alors une double cascade peut avoir lieu, une directe vers les petites échelles et une inverse vers les grandes échelles. Il est toutefois compliqué d'atteindre ce régime car la double séparation d'échelle est extrêmement difficile à satisfaire en laboratoire et dans les simulations numériques.

### Ondes de gravité

De même pour la cascade directe, la cascade inverse pour les ondes gravitaires en 2D existe car la partie de collision des interactions  $3 \leftrightarrow 1$  s'annule, cela donne les spectres suivants :

$$\begin{cases} E_k^\zeta \propto Q^{1/3} g^{2/3} k^{-7/3} \\ S_k^\zeta \propto Q^{1/3} g^{-1/3} k^{-7/3} \\ S_\omega^\zeta \propto Q^{1/3} g \omega^{-11/3} \end{cases} \quad (2.39)$$

### Ondes de flexion dans une plaque élastique fine

Pour les ondes de flexion dans la plaque, le nombre d'ondes en interaction est quatre et est donc pair, une cascade inverse d'action d'onde pourrait éventuellement exister. Si l'on applique la solution de Zakharov à ce système on obtient le spectre :

$$n_k \propto \omega_k^{-2/3} \quad (2.40)$$

or ce spectre permet l'annulation de la partie de collision des interactions  $2 \leftrightarrow 2$  mais pas des interactions  $3 \leftrightarrow 1$ , ne satisfaisant pas ainsi la conservation de l'action d'onde du système. Seule la conservation de l'énergie est alors assurée et seule la cascade directe est possible.

### Ondes de tension dans une membrane élastique

Comme dit précédemment les ondes de tension dans une membrane élastique permettent la conservation du nombre d'onde, en plus de l'énergie, car seules les interactions  $2 \leftrightarrow 2$  sont possibles. Les spectres de la cascade inverse s'écrivent donc :

$$\begin{cases} E_k^\zeta \propto Q^{1/3} k^{-2} \\ S_k^\zeta \propto Q^{1/3} k^{-3} \\ S_\omega^\zeta \propto Q^{1/3} \omega^{-3} \end{cases} \quad (2.41)$$

### 2.1.5 Temps non-linéaire et élargissement spectral

La théorie de la turbulence faible a été développée sous l'hypothèse de grande séparation d'échelle entre le temps linéaire, caractéristique des oscillations rapides linéaires, et le temps non linéaire, caractéristique des modulations lentes des amplitudes. A cela vient s'ajouter la condition du temps dissipatif très grand devant le temps non linéaire, cela nous avait permis de poser :

$$t_L \ll t_{NL} \ll t_D \quad (2.42)$$

Nous rappelons l'expression du  $t_L \approx 1/\omega_k$  et celle du temps non-linéaire, selon Newell et al. [8],  $t_{NL} \approx \frac{n_k}{\frac{\partial n_k}{\partial t}}$ .

Le temps linéaire et le temps non-linéaire dépendant de l'échelle du système, il devient essentiel d'estimer l'évolution de ces quantités en fonction de  $k$  afin de s'assurer que leur valeur pourra toujours satisfaire le système (2.42) et garantir ainsi le respect de l'hypothèse de séparation d'échelles.

#### 2.1.5.1 Interactions à 3 ondes

Pour un système qui met en interaction à l'ordre le plus bas 3 ondes avec un spectre en loi de puissance :  $n_k \approx Ck^{-x}$ , on peut définir le rapport suivant :

$$\frac{t_L}{t_{NL}} \approx Ck^{\beta-2\alpha} \ll 1 \quad (2.43)$$

Avec  $\beta$  le degré d'homogénéité du terme de collision à 3 ondes et  $\alpha$  la puissance en  $k$  pour la relation de dispersion linéaire.

En définissant (2.43) il vient alors clair que deux systèmes existent :

$$\begin{cases} \text{si } \beta - 2\alpha > 0 \text{ alors l'hypothèse de turbulence faible est brisée à petite échelle} \\ \text{si } \beta - 2\alpha < 0 \text{ alors l'hypothèse de turbulence faible est brisée à grande échelle} \end{cases} \quad (2.44)$$

Le rapport entre le temps linéaire et le temps non-linéaire est une mesure de l'intensité de la non-linéarité dans le milieu, il devient donc intéressant de l'estimer dans nos expériences. Une manière d'estimer cette quantité est de mesurer l'élargissement spectral  $\Delta\omega$  du spectre d'énergie autour de la relation de dispersion en  $\omega$ , qui est équivalent à l'inverse du temps non-linéaire, et de normaliser cette quantité par  $\omega$ , nous avons ainsi :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{t_L}{t_{NL}} \quad (2.45)$$

En appliquant (2.43) aux ondes capillaires, cela donne :

$$\frac{t_L}{t_{NL}} \approx Ck^{-3/4}, \quad \text{pour les ondes capillaires puisque } \alpha = 3/2, \beta = 9/4. \quad (2.46)$$

L'hypothèse de la turbulence faible ne peut donc être brisée à petite échelle.

### 2.1.5.2 Interactions à 4 ondes

Pour un système qui met en interaction à l'ordre le plus bas 4 ondes le même raisonnement peut être effectué. L'expression de  $t_L/t_{NL}$  change et devient :

$$\frac{t_L}{t_{NL}} \approx C^2 k^{2\gamma/3-2\alpha} \ll 1, \quad (2.47)$$

Avec  $\gamma$  le degré d'homogénéité du terme de collision à 4 ondes.

De même que pour les systèmes à 3 ondes, lorsque :

$$\begin{cases} 2\gamma/3 - 2\alpha > 0 \text{ L'hypothèse de turbulence faible est brisée à petite échelle} \\ 2\gamma/3 - 2\alpha < 0 \text{ L'hypothèse de turbulence faible est brisée à grande échelle} \end{cases} \quad (2.48)$$

Ainsi en appliquant la condition sur la séparation d'échelle (2.47) aux systèmes à 4 ondes, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{t_L}{t_{NL}} \approx C^2 k^{-4} \text{ pour la plaque puisque } \alpha = 2 \text{ et } \gamma = 0 \\ \frac{t_L}{t_{NL}} \approx C^2 k^{-2/3} \text{ pour la membrane puisque } \alpha = 1 \text{ et } \gamma = 2 \\ \frac{t_L}{t_{NL}} \approx C^2 k^1 \text{ pour les ondes gravitaires puisque } \alpha = 1/2 \text{ et } \gamma = 3 \end{cases} \quad (2.49)$$

Nous pouvons ainsi regrouper les ondes capillaires, les ondes de tension et les ondes de flexion dans la même catégorie. En effet  $\frac{t_L}{t_{NL}}$  évolue en une puissance négative en  $k$ , la non-linéarité décroît avec  $k$ , ce qui veut dire que la rupture

de l'hypothèse de la turbulence faible a lieu à grande échelle. Contrairement aux ondes gravitaires pour lesquelles la non-linéarité augmente avec  $k$ , ce qui se traduit par un breakdown aux petites échelles et donc potentiellement une transition vers un régime fortement non linéaire.

On peut estimer l'échelle  $k_{NL}$  à laquelle cette rupture aura lieu en considérant qu'elle corresponde à une séparation d'échelle spatiale plus valable, soit pour  $\frac{t_L}{t_{NL}} \approx 1$ . En posant cette approximation dans les équations (2.46 et 2.49) et avec  $C = \lambda\phi^{1/3}$  pour la plaque, membrane et ondes de gravité et  $C = \lambda\phi^{1/2}$  pour les ondes capillaires, nous obtenons :

$$\begin{cases} k_{NL} \propto \phi^{1/6} & \text{pour la plaque} \\ k_{NL} \propto \phi^1 & \text{pour la membrane} \\ k_{NL} \propto \phi^{2/3} & \text{pour les ondes capillaires} \\ k_{NL} \propto \phi^{-2/3} & \text{pour les ondes gravitaires} \end{cases} \quad (2.50)$$

## 2.1.6 Dissipation

Les effets de la dissipation dans la turbulence d'onde sont d'une extrême importance car si dans la théorie on estime qu'ils interviennent uniquement au delà de l'échelle dissipative il en est autrement dans les expériences où ils sont présents à de nombreuses échelles notamment dans le régime inertiel. Il devient donc essentiel d'identifier les différents mécanismes dissipatifs afin d'estimer leur impact sur les cascades d'énergie.

### 2.1.6.1 Ondes élastiques

Je vais présenter rapidement les sources de dissipation les plus importantes dans les plaques minces mais une étude plus complète peut-être trouvée dans le manuscrit de thèse de T. Humbert [49] où il a étudié expérimentalement et numériquement l'effet de l'amortissement dans les plaques fines vibrées.

#### Amortissement thermoélastique

L'amortissement thermoélastique est la conséquence des interactions dans la plaque entre les ondes thermiques et les ondes élastiques. Cet amortissement dans les cas simples de flexion des poutres est un phénomène bien étudié par la théorie de Zener datant des années 40 [50]. Selon cette théorie la raideur instantanée de la poutre relaxe à une valeur isotherme en raison de la diffusion de la chaleur produite par les compressions et extensions successives des faces opposées de la poutre. Son modèle suppose que la diffusion de la chaleur est prédominante dans l'épaisseur de la poutre mais négligeable dans les directions du plan neutre de la poutre. La modélisation des pertes thermoélastiques dans les plaques fines est plus compliquée en raison de la bi-dimensionnalité du problème. Ce sujet a été traité avec différentes approches dans la littérature [51, 52, 53, 49]. Le point de départ de toutes ces théories est de prendre en compte les effets thermiques dans l'équation de Kirchhoff-Love (1.154). Ces modèles dépendent des propriétés du matériau et



de l'épaisseur de la plaque. La contribution à l'amortissement total de l'amortissement thermoélastique est souvent importante à basse fréquence.

### Amortissement par rayonnement

Lors de la mise en vibration d'une structure, une partie de l'énergie vibratoire est transférée au fluide environnant par rayonnement acoustique. Ce transfert d'énergie produit un amortissement des vibrations. La modélisation fine de cet amortissement doit être basée sur les modèles de rayonnement acoustique des plaques qui font intervenir le facteur de rayonnement et la fréquence de coïncidence. Le facteur de rayonnement est caractérisé par la puissance rayonnée par la structure et la puissance mécanique qui excite celle-ci. La fréquence de coïncidence  $f_c$  quant à elle indique l'échelle à partir de laquelle l'amortissement par rayonnement intervient. En effet à cette fréquence la vitesse de phase des ondes élastiques dans la plaque est identique à celle du son dans le fluide environnant, en utilisant la relation de dispersion des ondes purement de flexion dans la plaque (1.155) et la définition de la vitesse de phase  $\omega/k$ ,  $f_c$  s'écrit donc :

$$f_c = \frac{c_s^2}{2\pi C} \quad (2.51)$$

Si l'on considère notre problème physique, la vitesse du son dans l'air  $c_s \approx 340$  m/s et le coefficient de dispersion de notre plaque  $C \approx 0.78$  m<sup>2</sup>/s, ce qui donne une fréquence de coïncidence qui vaut à peu près 24 kHz. L'amortissement par rayonnement intervient donc à très haute fréquence, des fréquences par ailleurs qui ne seront jamais atteintes dans nos régimes expérimentaux où la fréquence maximale à partir de laquelle les effets dissipatifs amortissent la cascade d'énergie est de l'ordre de quelques kHz (4 kHz pour un régime de turbulence d'onde faible).

### Transmission mécanique

La contribution des pertes de transmission mécanique aux supports à l'amortissement total ne peut pas être généralisée car elle dépend de la construction du système. Une modélisation fine de ces pertes, comme celles des amortissements thermoélastiques et par rayonnement acoustique, n'est pas possible. On se contente alors d'en estimer la contribution à partir des mesures totales d'amortissement et grâce à la connaissance de la contribution des autres mécanismes dissipatifs obtenue par leur modélisation. En ce qui concerne notre dispositif expérimental la plaque vibrante est vissée sur le long de son bord supérieur et fixée par deux attaches ponctuelles à son bord inférieur à un cadre massif. Ces liaisons ne sont pas idéales, dans le sens où de l'énergie vibratoire est transmise au cadre lors de la mise en vibration de la plaque mais cette énergie reste du moins très faible de part la rigidité du support.

#### 2.1.6.2 Ondes à la surface de l'eau

Les principales sources de dissipation pour les ondes à la surface de l'eau sont la dissipation visqueuse, intrinsèque à la nature du fluide utilisée, les couches

limites sur le fond et les parois de la cuve, dépendant de la géométrie de cette dernière, et enfin la pollution de l'interface fluide/fluide. La dissipation visqueuse agit principalement sur les petites échelles tandis que les couches limites concernent les grandes échelles. Elles correspondent à un modèle de dissipation linéaire et ont été étudiées par L. Deike [54]. La dissipation "réelle" agit donc à toutes les échelles et ce même sur le régime inertiel, supposé loin des effets dissipatifs.

Lors des expériences, une fois le choix du fluide et de la géométrie effectués il devient très difficile de faire varier les effets visqueux et les couches limites. Seul l'état de l'interface est alors sujet à modification. La pollution de l'interface se manifeste par la présence d'un film fin extensible à sa surface. Ce dernier détériore localement la tension interfaciale, un gradient de tension le long de l'interface existe alors, dû à une inhomogénéité en concentration de tensio-actifs. Un écoulement à grande échelle se met en place afin d'homogénéiser l'interface. Ce phénomène est accompagné par une forte diminution de la tension de surface moyenne sur l'interface, ce qui pousse l'échelle capillaire  $\lambda_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$  vers l'échelle dissipative. Par ailleurs les couches limites sont modifiées dues à la condition aux limites à l'interface changée par les contraintes dues au film visco-élastique. La cascade d'énergie vers les petites échelles est alors stoppée. Q. Aubourg caractérise cet effet [24] en déposant du savon, un surfactant, à la surface de l'eau et observe une chute de la tension de surface et une cascade d'énergie qui est arrêtée à des échelles proches de celle du forçage.

L'amortissement maximal pour les ondes à la surface de l'eau a été observé expérimentalement aux basses fréquences sur une large bande [1-10 Hz] [55]. Or c'est à ces échelles que la cascade d'énergie des ondes gravitaires est sensée prendre place. Il devient donc primordial de caractériser les conséquences de cet amortissement sur la mise en place des transferts non-linéaires entre les ondes. Pour le cas des ondes élastiques dans une plaque fine les chercheurs ont identifié un raidissement des pentes théoriques des spectres à cause de la dissipation agissant sur une large bande [16, 56], le même constat avait également été fait pour les ondes gravito-capillaires. Dans l'article [57] (mis en annexe 7.4) nous rapportons des expériences dédiées à l'observation de l'impact de la contamination de surface sur la turbulence des ondes gravito-capillaires. Nous discutons aussi plus généralement de l'impact de la dissipation sur le développement de la cascade d'énergie due à la turbulence des ondes de gravité. Il a été observé que le développement de la cascade d'énergie est fortement limité par la coupure visqueuse et encore plus restreint si la surface est contaminée. En effet comme représenté sur la figure 2.1 les spectres fréquentiels du champ d'élévation des vagues au cours du temps compensés par  $f^6$ , nous voyons clairement que la pente des spectres se raidit au cours du temps et donc au cours de la pollution de surface et s'éloigne ainsi des prédictions théoriques.

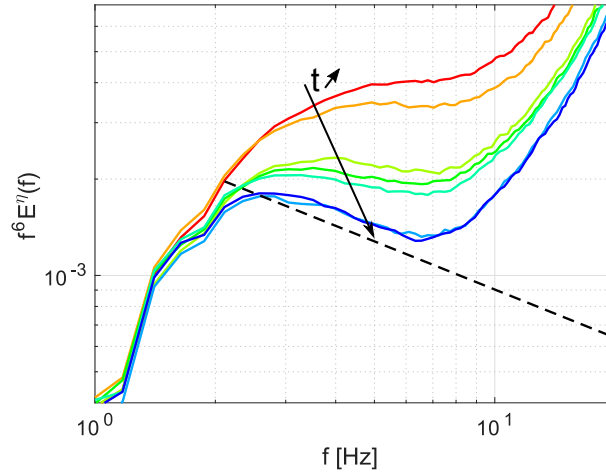


FIGURE 2.1 – Spectres des hauteurs des vagues en fonction de la fréquence. Chaque courbe correspond au champ de hauteur moyenné sur 10 sondes capacitatives pendant une heure. Les différentes courbes correspondent à des intervalles de temps consécutifs, le temps augmente en allant vers le bas. Figure extraite de [57].

Par ailleurs des mesures de stéréo-PIV a permis de reconstituer le champ d'élévation des vagues en temps et en espace. Ces mesures ont permis le calcul des spectres spatio-temporels qui ont été primordiaux à la compréhension des spectres fréquentiels. En effet ces derniers semblaient indiquer une cascade d'énergie avec la présence de la fameuse transition gravito-capillaire pour les régimes forts or les spectres spatio-temporels ont révélé que l'énergie visible à partir de l'échelle capillaire et au delà était du non pas aux ondes libres mais aux ondes liées. Cela souligne l'importance des mesures résolues en temps et en espace qui sont indispensables afin d'avoir accès à la relation de dispersion des vagues et de pouvoir identifier les différents types d'ondes présentes dans le milieu. Il est également à retenir qu'afin d'espérer observer une cascade turbulence faible d'ondes de gravité il faut effectuer des mesures dans des structures de plus grandes tailles qui permettraient des forçage à de plus grandes échelles engendrant une séparation d'échelle entre la coupure dissipative plus importante pour laisser place à la construction de la cascade d'énergie.

## 2.2 Etat de l'art

### 2.2.1 Ondes à la surface de l'eau

#### 2.2.1.1 Ondes de gravité

L'étude de la dynamique des vagues dans les océans n'a cessé d'intriguer les scientifiques depuis plusieurs décennies. Ce sujet est d'une grande importance de par son rôle majeur dans les prévisions météorologiques et climatiques. La compréhension des échanges d'énergies entre les vagues et l'apparition d'un grand nombre

de vagues de tailles très variées sous l'effet du vent devient alors un sujet de recherche capital pour les scientifiques contemporains. En effet les états de mers faiblement non-linéaires, sont caractérisés par un grand nombre de vagues aléatoires et dispersives en interaction. Il faut attendre les années 60 avec les travaux pionniers de Hasselmann et Zakharov [58, 59] afin d'avoir une explication théorique quant à ces échanges d'énergie. En effet Zakharov parle de turbulence d'ondes faible qui se manifesterait par un transfert d'énergie entre ondes dispersives de l'échelle d'injection, supposée grande, à l'échelle dissipative, supposée petite. Bien que Hasselmann ait trouvé l'équation cinétique pour les ondes de gravité en début des années 60 [58] et que Zakharov et Filonenko aient trouvé les solutions à flux constants en fin des années 60 [60] il a fallu attendre les années 80 afin d'avoir des premières mesures expérimentales en adéquation avec les prédictions théoriques. Donelan et al. [61] ont mesuré au lac Ontario grâce à plusieurs sondes capacitatives le spectre de puissance fréquentiel des ondes sur un régime inertiel assez restreint, un tiers de décade. Ce spectre n'était pas compatible avec le spectre Jonswap  $\propto \omega^{-5}$  mais plutôt avec le spectre de Zakharov  $S_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-4}$ . Plus tard en 2000 et en 2010 [62, 63] des mesures effectuées par une plate-forme laser (lidar) aéroportée sur les ondes à la surface de l'océan ont permis la mesure des spectres en nombre d'onde sur deux décades selon plusieurs directions, l'une correspondant à la direction de propagation du vent et l'autre lui étant transversale. Une différence majeure sur l'évolution des spectres de l'élévation des vagues a alors été observée, en effet le spectre selon la direction du vent semble suivre le spectre de Phillips,  $S_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-5}$  qui est indépendant du flux [64], tandis que le spectre selon la direction transversale au vent semble évoluer selon la prédiction de la turbulence d'onde faible à large échelle puis devenir à petite échelle proche du spectre de Phillips. Une explication à cette observation basée sur la théorie de la turbulence faible est possible. En effet la TTF prédit une augmentation de la non-linéarité des ondes gravitaires lorsque l'échelle diminue, on peut donc avoir une non-linéarité faible à petit  $k$  qui satisfait la TTF puis augmente en fonction de  $k$  jusqu'à la rupture de la turbulence faible et passer ainsi en régime de turbulence forte caractérisée par le spectre de Phillips. Plus récemment des mesures locales et de stéréo-PIV dans la Mer Noire effectuées par Leckler et al. [65] ont permis de reconstituer le champ des vagues en 3D et de calculer le spectre fréquentiel et spatio-temporel des ondes purement gravitaires représentés sur la figure 2.2. Le spectre fréquentiel intégré confirme une évolution du spectre des vagues en suivant celui de Zakharov à faible fréquence puis celui de Phillips à grande fréquence. Le spectre spatio-temporel, représenté sur la figure 2.2, dans la direction  $y$ , direction proche de la direction moyenne du vent, permet de relier l'énergie à basse fréquence à la relation de dispersion linéaire des ondes de gravité avec la prise en compte du courant moyen tandis que l'énergie à plus haute fréquence est identifiée comme étant due à la première harmonique à cette relation de dispersion.

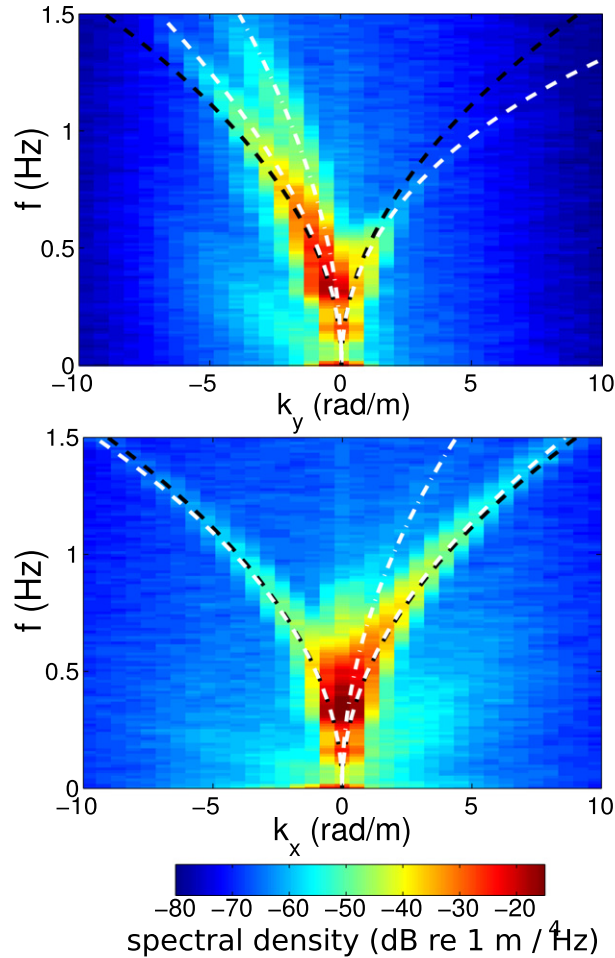


FIGURE 2.2 – En haut : spectre spatio-temporel des ondes se propageant dans la direction du vent moyen. En bas spectre spatio-temporel dans la direction transversale à celle du vent moyen. Les courbes en tirets noirs représentent la relation de dispersion linéaire des ondes de gravité, les courbes en tirets blancs sont les relations de dispersion linéaires prenant en compte le courant moyen et les courbes en tirets-points blancs représentent les harmoniques de ces dernières. Les spectres ont été calculés à partir des champs des vagues dans la Mer Noire en 3D grâce à des mesures de stéréo-PIV. Figures extraites de [65].

Les coupes des spectres en  $k_x - k_y$  à des fréquences données ont montré l'aspect anisotrope de l'énergie. Ceci est du à l'anisotropie du forçage. En effet le mécanisme d'excitation des vagues à la surface de la mer est généré par le vent grâce à l'instabilité de Miles [66], cette dernière fournit un forçage anisotrope à large bande qui est en opposition à l'hypothèse de forçage isotrope localisé à une grande échelle de la TTF rendant ainsi difficile la comparaison avec la théorie. C'est alors qu'interviennent des mesures en laboratoire où il est plus facile de contrôler la stationnarité ainsi que les paramètres des expériences notamment le forçage. Les premières expériences en laboratoire validant la TTF pour les ondes de gravité

ont été effectuées par Toba [67] dans un canal étroit où le système était donc anisotrope et où le forçage était fait par le vent. Un spectre fréquentiel a été mesuré mais sur un régime inertiel plus petit qu'une décade rendant difficile de savoir avec certitude si la pente des données suivait le  $-4$  propre à la cascade directe ou le  $-11/3$  caractéristique de la cascade inverse. Par la suite le travail de Nazarenko et al. [68] a permis la reconstitution simultanée des spectres fréquentiel et en nombre d'onde grâce à des mesures par sondes capacitatives et par nappe laser. Le forçage s'effectuait par des batteurs sur le bord entier d'un canal excitant deux ondes monochromatiques avec un faible angle entre elles. Les réflexions sur les autres bords ont permis une assez bonne redistribution angulaire de l'énergie du forçage. Ces mesures ont permis d'identifier un aplatissement des spectres en fonction de la non-linéarité comme représenté sur la figure 2.3. S'il n'est pas étonnant de voir une dépendance des pentes en fonction de la non-linéarité comme observée sur les mesures *insitu*, l'évolution de cette dépendance est par contre surprenante car opposée aux mesures en mer. En effet contrairement à ce qui avait été vu à la surface de la mer, lorsque les non-linéarités augmentent les spectres passent d'une pente trop raide  $\approx -5.5$  à une pente plus faible en adéquation avec la TTF, le spectre de Phillips n'est pas observé.

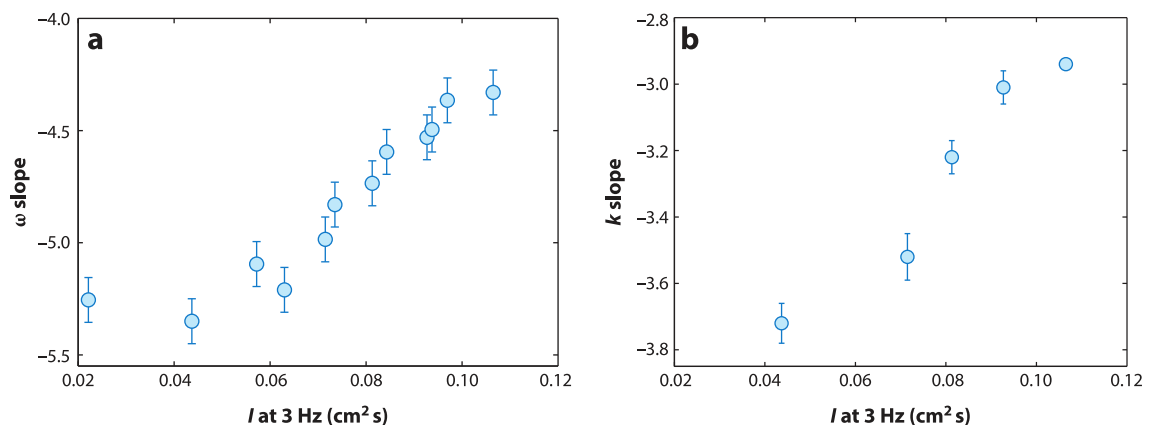


FIGURE 2.3 – Evolution des exposants des spectres en fréquence a) et en nombre d'onde b) en fonction de l'intensité du forçage. Figures extraites de [68].

Une explication à ce phénomène réside dans les effets de taille finie du canal utilisé, en effet de par le confinement du canal la séparation des modes devient importante dans la direction de la plus petite dimension, le système tend alors à être discret et la description classique de la turbulence d'onde faible n'est plus valable. S. Nazarenko parle d'un effet de "sandpile" dans ce genre de système où la cascade d'énergie est construite par des effets "d'avalanches" intermittentes [15] et présentant un exposant spectral de  $-6$ . En augmentant la non-linéarité dans le système l'élargissement spectral autour des modes augmente jusqu'à atteindre un régime continu propre à la TTF d'où la reconstitution de la pente  $-4$  pour les forçages forts. Plus récemment Deike et al. [69] ont effectué des expériences dans une large cuve qui corroborent les résultats précédents et qui abordent également les effets des conditions aux limites. En effet en face du bord où était généré le forçage

ils pouvaient soit disposer une plage qui absorbe les ondes ou alors un mur réfléchissant. Contrairement au mur réfléchissant qui permettait une bonne répartition angulaire de l'énergie, la plage absorbante rendait le système plus anisotrope et donc la focalisation de l'énergie plus forte ce qui se manifestait par la présence de structures très fortement non-linéaires. Cela a résulté en un spectre plus proche de la solution de Zakharov pour les expériences avec la plage, contrairement à l'utilisation du mur réfléchissant pour le même forçage.

Une fois les spectres calculés il devient intéressant d'identifier les mécanismes à l'origine de la transmission de l'énergie sur les échelles et de les comparer aux prédictions théoriques qui attribuent cela aux phénomènes de résonances. Aubourg et al. ont effectué de mesures de stéréo-PIV, résolues donc en temps et en espace, dans une grande cuve ronde (diamètre de 13 m), la plate-forme Coriolis [70]. L'objectif était d'étudier la nature des interactions non-linéaires résonantes permettant la cascade d'énergie des ondes de gravité. L'analyse de corrélation qui avait été effectuée par les outils statistiques de bicohérence et tri-cohérence confirme la présence d'interactions résonantes entre les ondes de surface de gravité pure. Cependant, les premiers résultats ne correspondent pas aux prédictions théoriques des interactions à quatre ondes. Bien que les interactions à trois ondes soient interdites théoriquement pour le régime linéaire gravitaire, ils ont observé un couplage à trois ondes entre la composante linéaire et l'harmonique des ondes. Ces types de couplage sont généralement connus sous le nom d'ondes liées où une onde interagit avec elle-même pour former sa propre harmonique. Cependant les résonances ne sont pas restreintes aux harmoniques strictes et ils observent aussi des interactions quasi-résonnantes qui semblent être très actives. De manière surprenante, l'analyse de corrélation du 4<sup>ème</sup> ordre dans leur expérience ne montre pas de traces d'interactions à quatre ondes, censées être au coeur des transferts d'énergie pour les ondes de gravité, contrairement aux données mesurées en mer par Leckler et al. [65] où les interactions résonantes à quatre ondes semblent être présentes. En résumé, les interactions à 4 ondes semblent exister, mais leur probabilité d'apparition très faible et leur échelle de temps longue les rendent très sensibles à la présence de dissipation dans la gamme inertielle. C'est notamment le cas des régimes très faiblement non linéaires où le temps d'interaction non linéaire devient très élevé. Leurs observations suggèrent un mécanisme de couplage à trois ondes supplémentaire, plus rapide et donc plus efficace pour les transferts d'énergie (voir en annexe 7.4 un article en fin de rédaction sur cet aspect par Campagne et al.)

Pour les simulations numériques, le contrôle des paramètres est bien plus aisé, on peut ainsi définir le forçage et la dissipation aux échelles localisées qui nous intéressent afin d'observer soit la cascade directe d'énergie ou la cascade inverse d'action d'onde. C'est pour cela que de manière générale elles valident les prédictions de la TTF. Soulignons qu'il est cela dit coûteux numériquement d'effectuer des simulations avec une grande résolution afin d'avoir une grande séparation d'échelle entre le forçage et la dissipation. On peut pour cela citer les travaux d'Onorato et Osborne [71, 72], ceux de Tanaka [73] ainsi que Badulin et al. [74].



### 2.2.1.2 Ondes capillaires

Les premières expériences en laboratoire permettant l'observation de la turbulence faible des ondes capillaires ont été effectuées dans les années 90 avec une génération de vagues par instabilité de Faraday [75]. En effet des mesures locales optiques ont été notamment effectuées sur des bulles liquides millimétriques en lévitation par un champ ultrasonique par Holt et al. [75]. Pour des bulles à parois fines et des pressions acoustiques élevées un champ aléatoire de vagues à très petite échelle est observé et caractérisé par un spectre fréquentiel suivant la prédiction de la TTF  $S_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-17/6}$ . Notons que les non-linéarités lors de ce régime ne sont pas faibles puisque l'on rapporte des éjections de micro-gouttelettes de la bulle.

Par la suite les expériences des ondes capillaires ont été essentiellement effectuées par l'équipe d'E. Falcon et d'A. Kolmakov où la réponse des vagues à une excitation large-bande et bande-étroite à des échelles supérieures à l'échelle capillaire a été analysée [76]. L'un des challenges a été d'augmenter l'intervalle des ondes capillaires afin d'espérer une visualisation des spectres sur une large plage d'échelles pour mieux se prononcer sur leur pentes. Cela est possible soit en réduisant le régime gravitaire soit en repoussant la coupure dissipative à des plus petites échelles en réduisant la viscosité du fluide utilisé. E. Falcon a eu recours à des couches d'éthanol et d'eau en micro-gravité [77]. Les spectres fréquentiels à forçage large-bande et bande-étroite résultant de ces mesures sont représentés sur la figure 2.4. Les deux courbes bleue et rouge correspondent respectivement à un forçage monochromatique et un forçage aléatoire à large bande entre [0 6] Hz. On voit que les spectres en fréquence décroissent en suivant des pentes  $\approx -3$  en accord avec les solutions de Zakharov  $S_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-17/6}$ . On note clairement sur les spectres que seul le régime capillaire est visible, en effet le régime gravitaire habituellement visible à faible fréquence pour les expériences en gravité, comme représenté sur l'insert de la figure 2.4 a été extrêmement réduit.



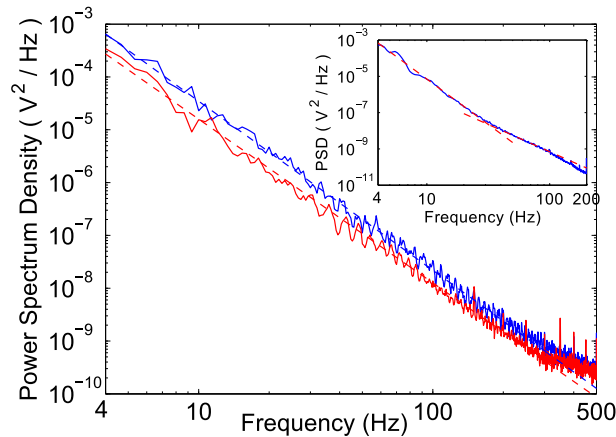


FIGURE 2.4 – spectres de densité de puissance du champs d'élevation des ondes en micro-gravité. Le spectre en haut bleu correspond à un forçage monochromatique à 3Hz et le spectre rouge correspond à un forçage aléatoire entre [0 6] Hz. Les lignes en tirets de chaque spectre correspondent respectivement à une pente en  $-3.1$  et  $-3.2$ . Le spectre en insert correspond à une expérience avec gravité, les lignes en tirets rouges correspondent à la pente du spectre des ondes de gravité  $-5$  à faible fréquence et la pente des ondes capillaires  $-17/6$  à grandes fréquence. Figure extraite de [77].

Cette tendance fut confirmée lors de la thèse de L. Deike [78] où il a également mis en évidence le rôle de la dissipation. En effet il a été observé que les grandes échelles du système sont amorties par la couche limite visqueuse. Il semblerait que ces échelles servent de source d'énergie au système ce qui permet à l'énergie de cascader jusqu'aux échelles capillaires en suivant les pentes théoriques.

Kolmakov et al. ont utilisé certains fluides de faible viscosité, en effet ils ont étudié la turbulence des ondes capillaires à la surface de fluides quantiques [79], d'hydrogène liquide [80] et d'hélium [81] dans leur état normal et superfluide. Contrairement aux résultats précédents, les spectres fréquentiels des champs d'élevation semblent varier en fonction du type de forçage, ainsi pour le forçage large-bande les spectres suivent les spectres de Zakharov tandis que à forçage bande-étroite les pentes deviennent de l'ordre de  $-3.7$ .

Les mesures locales constituent une première approche afin d'identifier une décroissance en loi de puissance des spectres et de pouvoir calculer leur pente et les comparer aux prédictions théoriques. Il est cependant nécessaire de les compléter par des mesures résolues en temps et en espace afin d'identifier les relations de dispersion des structures présentes dans le milieu car celles-ci ne sont pas toujours des ondes libres aléatoires faiblement non-linéaires comme supposées par la TTF. En effet comme cité dans la partie sur les ondes gravité, des branches harmoniques signe de forte non-linéarité peuvent apparaître. Des mesures spatio-temporelles des ondes capillaires ont été effectuées par M. Berhanu et al. [82] grâce à la méthode optique de Diffusing Light Photography combinée à une caméra rapide dans une cuve de  $16.5\text{ cm} \times 16.5\text{ cm}$  avec une profondeur d'eau de 3 cm. Le forçage est effectué par un batteur à des fréquences aléatoires entre 4 et 6 Hz. Les spectres en fréquence et en nombre d'onde semblent indiquer en haute fréquence/grand nombre

d'onde une loi de puissance proche de la pente théorique des spectres des ondes capillaires pour les grands forçages, sans toute fois la présence de la transition-capillaire. Les spectres spatio-temporels confirment la présence d'énergie autour de la relation de dispersion linéaire des ondes capillaires à faible forçage mais un élargissement spectral et un décalage de l'énergie par rapport à la relation de dispersion est notée lorsque les non-linéarités augmentent. Des coupes du spectres en  $k_x - k_y$  à des fréquences données montrent un système assez anisotrope. Une telle anisotropie pourrait être la conséquence de structures localisées très non-linéaires qui se propagent dans une direction préférentielle, souvent celle du forçage. Cela semble être confirmé par leur article récent reprenant le même dispositif expérimental [83]. En effet comme représenté sur la figure 2.5 des structures localisées fortement non-linéaires apparaissent sur la reconstitution de surface.

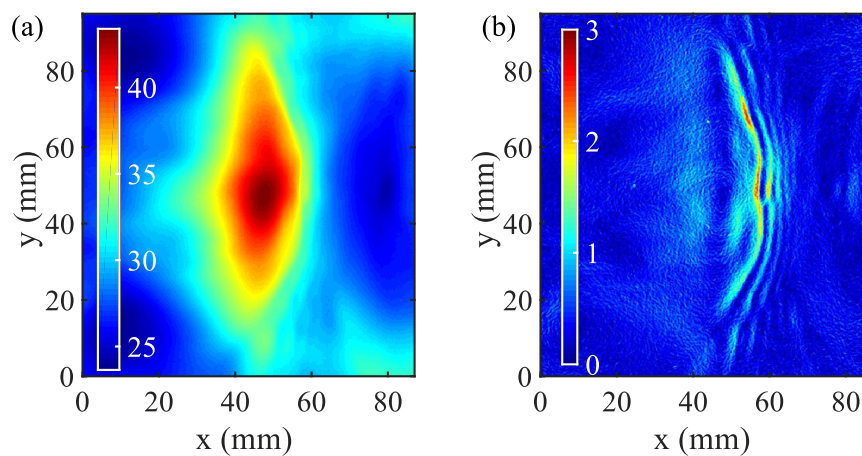


FIGURE 2.5 – a) Instantané du champ d'élévation des vagues. L'échelle de couleur est en mm. Le batteur est parallèle à l'axe  $y$  et est positionné à  $x=-12$  mm. b) Instantané du gradient spatial du champs d'élévation au même instant que pour a). L'échelle de couleur est sans dimension. Le champ d'élévation a été mesuré par DLP (Diffusing Ligh Photography) à la surface d'une couche de 3 cm d'eau dans une cuve de dimension  $16.5 \times 16.5$  cm<sup>2</sup>. Le forçage a été effectué par un batteur fournissant un bruit blanc filtré entre 4 et 6 Hz. Figure extraite de [83].

Le profil de ces structures affiché sur la figure 2.6 n'est pas sans rappeler celui des ondes de choc dispersives [84]. En effet avec une faible profondeur d'eau et une accélération importante du batteur, ce type de structures serait facilement généré.

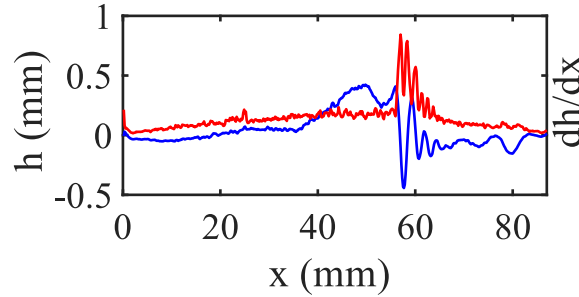


FIGURE 2.6 – En bleu : profil des vagues après un filtre passe-haut afin d’extraire uniquement les échelles capillaires. En rouge est représenté le profil des pentes correspondant. Ces mesures correspondent à celles présentées sur la figure 2.5. Figure extraite de [83].

Une autre manière de réduire le régime gravitaire est de suivre l’évolution des ondes interfaciales entre deux liquides de densités proches. Ce point sera expliqué plus amplement dans l’introduction du chapitre 4 qui traite de ce type d’expérience.

Des études numériques ont été réalisées sur la turbulence des ondes capillaires. Celles-ci étaient menées soit en simulant l’équation cinétique [48, 85] ou alors les dynamiques hamiltoniennes faiblement non-linéaires [86, 87] en restant dans la limite faiblement non-linéaire. Les résultats décrivent des spectres des hauteurs de vagues en fréquence qui rejoignent les spectres théoriques. Plus récemment Deike et al. ont effectué des simulations numériques de la turbulence d’ondes capillaires en résolvant les équations Navier-Stokes 3D pour un écoulement diphasique [88]. Les spectres en fréquence et en nombre d’ondes calculés présentent des décroissances en loi de puissance en accord avec les solutions de Zakharov. Par ailleurs ils ont également eu accès aux spectres spatio-temporels. Le spectre  $k - \omega$  montre une concentration de l’énergie autour de la relation de dispersion linéaire des ondes capillaires et les coupes en  $(k_x - k_y)$  montrent une répartition de l’énergie assez isotrope, ce qui est signe de turbulence faible. Par ailleurs l’un des avantages des simulations numériques est d’avoir accès à des quantités qui seraient extrêmement difficiles à mesurer expérimentalement, comme le flux d’énergie injectée. En effet dans leur article l’estimation du flux d’énergie moyen à partir de la puissance dissipée leur a permis de calculer la constante Kolmogorov-Zakharov à partir du spectre des vagues  $S_k^\zeta = C_k^{ZK} \phi^{1/2} (\sigma/\rho)^{-3/4} k^{-15/4}$ . Ils ont mesuré un  $C_k^{ZK}/2\pi \approx 5 \pm 1$  qui était du même ordre de grandeur avec la solution exacte théorique  $\approx 9.85$  [87, 78].

### 2.2.1.3 Ondes gravito-capillaires

Lorsque les échelles d’ondes à la surface de l’eau sont de l’ordre de quelques centimètres nous parlons d’ondes gravito-capillaires. Si la théorie de la turbulence faible propose des prédictions sur les spectres des hauteurs des vagues à la surface de l’eau cela n’est valable que pour des régimes purement gravitaires, à grande échelle, ou pour des régimes purement capillaires à petite échelle. Le passage de l’un à l’autre à travers l’échelle capillaire (transition gravito-capillaire), est jusqu’à

aujourd'hui une question ouverte pour les théoriciens. En effet le raccord entre le régime gravitaire et capillaire peut être problématique car selon la TTF la non-linéarité augmente en fonction du nombre d'onde pour les ondes gravitaires, la non-linéarité à la transition capillaire peut être alors forte et déclencher une cascade de turbulence forte, qui n'est alors plus dans le cadre de la TTF [68]. Les ondes gravito-capillaires sont par ailleurs importantes à la surface de la mer où le forçage par le vent excite initialement des ondes de l'ordre de quelques centimètres avant que l'instabilité de Miles ne génère des grandes échelles. Leur étude expérimentale a également l'avantage d'être plus facilement mise en place puis qu'elle nécessite des cuves de l'ordre de quelques dizaines de centimètres. Le contrôle sur les paramètres du forçage et la propreté de la surface du fluide peut être plus accomplie que sur des plate-formes de plusieurs dizaines de mètres. On peut également accéder à une grande partie de la surface de la cuve et avoir une vision plus complète du champ des vagues.

Les premières expériences de turbulence d'ondes gravito-capillaires ont été faites par le groupe d'E. Falcon. Sa première expérience [18] consistait à générer des vagues par deux batteurs dans une bassine de 20 cm × 20 cm à la surface du mercure, un métal liquide très dense et possédant une tension de surface très élevée (près de 6 fois supérieure à celle de l'eau pure à 20°C). Les mesures étaient locales par des sondes capacitives et elles ont permis la reconstitution des spectres en fréquence de la hauteur des vagues comme représenté sur la figure 2.7. Sur cette figure nous pouvons clairement voir la transition gravito-capillaire à des fréquences qui sont proches des valeurs théoriques [46]. Pour des forçages d'amplitude et de fréquences différentes la partie du spectre aux échelles capillaires semble inchangée et en bon accord avec la solution de Zakharov  $S_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-17/6}$  alors que la pente de la partie gravitaire semble être sensible au forçage et tendre vers les prédictions théoriques uniquement pour des forçages forts.

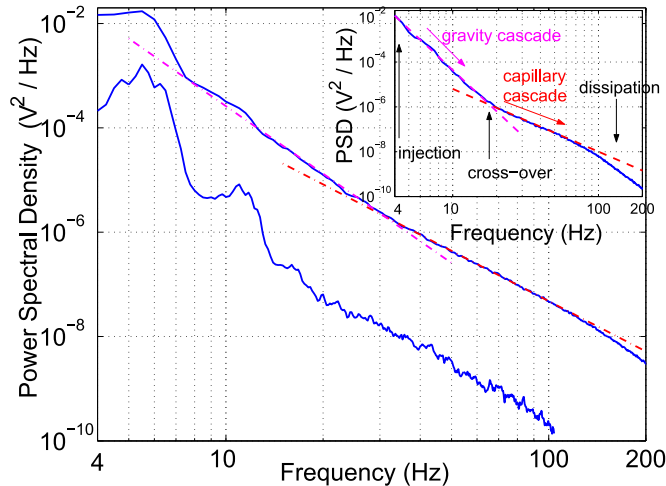


FIGURE 2.7 – Spectres de puissance de la hauteur des vagues pour une amplitude de forçage croissante sur la gamme de fréquence  $[0; 6]$  Hz, du bas vers le haut. Les lignes en tirets ont une pente de  $-4.3$  et  $-3.2$ . En insert : spectre de puissance des vagues pour une expérience avec l’amplitude de forçage la plus élevée représentée sur la figure principale mais sur une gamme de fréquence plus basse  $[0; 4.5]$  Hz. Les lignes en tirets ont une pente de  $-6.1$  et  $-2.8$ . La hauteur des vagues a été mesurée localement par une sonde capacitive à la surface de  $18 \text{ mm}$  de mercure dans une cuve de dimension  $20 \times 20 \text{ cm}^2$ . Le forçage a été effectué par deux batteurs délivrant un signal aléatoire de fréquence comprise entre  $0$  et  $6 \text{ Hz}$ .

Figure extraite de [18]

Herbert et al. [89] ont effectué une expérience avec un système de forçage identique mais dans une cuve plus grande,  $46 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$  remplie d’eau. La nouveauté pour ces mesures est l’implémentation d’une méthode de reconstitution de la surface de l’eau en temps et en espace appelée profilométrie par transformée de Fourier [90]. Ceci leur a permis de calculer les spectres spatio-temporels du champ d’élévation des vagues qui a mis en évidence la présence de l’énergie sur des branches harmoniques en plus de la relation de dispersion linéaire des ondes gravito-capillaires. Les spectres en nombre d’onde quant à eux montrent une décroissance en loi de puissance avec des pentes différentes des pentes théoriques. En effets les pentes varient entre  $-4.6$   $-4.2$  pour des forçages respectivement de plus en plus forts. Cette méthode utilisant la projection d’un motif à la surface de l’eau nécessite l’augmentation de la diffusivité optique de cette dernière, qui s’est faite au cours de ces expériences par l’ajout d’un colorant donnant une tension de surface de  $32 \text{ mN/m}$  bien en dessous de celle de l’eau propre  $73 \text{ mN/m}$ . Ce colorant contenant des surfactants crée un film extensible à la surface de l’eau qui augmente la dissipation et auquel la cascade d’énergie est très sensible [57] (voir la partie sur la dissipation en début de ce chapitre et en annexe 7.4). Afin de contrer la forte dissipation il a fallu utiliser des forçages forts et c’est cela qui explique la présence d’harmoniques sur les spectres  $k - \omega$  signe de grande non-linéarité. Dans cette optique il fallait donc trouver un pigment qui ne détériore pas la tension de surface de l’eau. Ceci a été le résultat du travail de Przada et al. [91] qui en

utilisant des particules de dioxyde de titane avec une concentration volumique de quelques pourcents donnait une apparence opaque à l'eau sans en changer ses propriétés physico-chimiques.

Cobelli et al. [92] ont alors refait les expériences de Herbert et al. avec ce nouveau pigment et une cuve plus grande et ont observé deux différents régimes. L'un avec un forçage large bande fréquentielle pour lequel l'amplitude du forçage influe grandement sur la pente des spectres des vagues dans le régime gravitaire, comme vu pour les expériences à grande échelle [93] et celles de Falcon et. al [18], alors que le régime capillaire garde une pente en adéquation avec la solution de Zakharov. Lorsque l'intensité du forçage devient importante et que les pentes des spectres tendent vers la pente théorique du régime gravitaire cela s'accompagne par l'apparition des harmoniques sur les spectres spatio-temporels. Par contre pour un forçage à bande étroite l'augmentation de l'intensité ne semble pas générer d'harmoniques, en effet le spectre spatio-temporel montre une énergie qui reste concentrée sur la relation de dispersion linéaire. Les spectres en fréquence montrent également un régime gravitaire avec une pente proche de la pente théorique -4. Notons tout de même que pour ces régimes la transition gravito-capillaire n'est pas visible sur les spectres, seul le régime gravitaire est en effet accessible. L'un des points importants pour la transition du premier régime, avec forçage à large bande, au second régime, forçage à bande étroite est l'apparition de structures localisées pour de grandes intensités de forçage comme représenté sur la figure 2.8. En effet on voit que pour le premier type de forçage, le champ de vitesse verticale instantanée des vagues montre des structures localisées à grande échelle entourées par des échelles capillaires contrairement au champ de vitesse du second type de forçage où on voit un champ aléatoire sans structures cohérentes. La densité de probabilité du champ de vitesse normalisée par sa variance montre une aile plus large à grande vitesse en cas de structures localisées contrairement à une distribution gaussienne pour le champ de vitesse aléatoire.



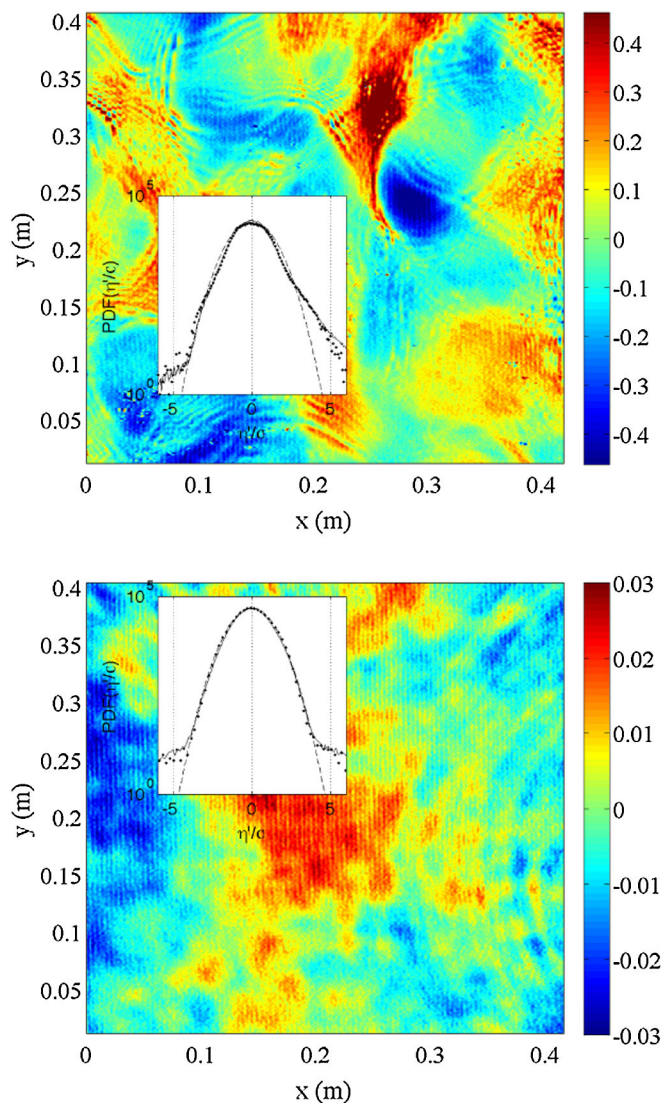


FIGURE 2.8 – Représentation du champ de vitesse verticale instantanée avec l'échelle de couleur en m/s. La figure du haut représente une expérience avec un forçage à large bande fréquentielle et une amplitude importante. La figure du bas représente une expérience avec un forçage à bande fréquentielle étroite et une amplitude légèrement plus grande que celle de la figure du haut. Les inserts correspondent à la densité de probabilité du champ de vitesse associée normalisée par sa variance, les courbes en tirets correspondent à la distribution gaussienne. Figure extraite de [92].

Cette observation est à relier à celle faite pour la turbulence des ondes capillaires dans [83] où des structures localisées étaient également présentes malgré un spectre de hauteur des vagues proche du spectre de Zakharov. Rappelons que la TTF n'est censée être valable que pour des ondes fortement dispersives et faiblement non-linéaires, cette séparation entre dispersion et non-linéarité semble être une condition importante à satisfaire pour la mise en place d'une cascade de turbulence faible. Le développement de certaines structures localisées dans le milieu peut être dû à la non-satisfaction de cette condition.

L'équipe de N. Mordant a également travaillé sur la turbulence des ondes à la surface de l'eau avec des mesures résolues en temps et en espace. Dans leurs articles récents, Aubourg et Mordant [94, 39] s'intéressent à la turbulence des ondes gravito-capillaires. Ils ont recours à la profilométrie par transformée de Fourier pour reconstituer la surface des vagues dans une cuve de 37 cm×57 cm remplie d'eau mélangée de particules de dioxyde de titane. Le forçage est généré par une table oscillante, sur laquelle repose la cuve, et qui a un mouvement sinusoïdal modulé en fréquence. Les spectres espace-temps montrent une répartition de l'énergie autour de la relation de dispersion à des fréquences bien plus hautes que celle du forçage. Par ailleurs les coupes des spectres  $(k_x, k_y)$  rendent compte de l'isotropie de l'énergie. Le système semble donc bien être dans le cadre de la turbulence d'onde faible. L'originalité de leur travaux repose sur l'étude des corrélations d'ordre trois du champ de vitesse des ondes. En effet les interactions dans la TTF des ondes capillaires sont supposées se faire par triade résonante. Une mesure du terme de corrélation du 3<sup>ème</sup> ordre normalisé par le spectre de puissance, appelée bicohérence, est alors possible à partir du champ de vitesse des vagues telle que définie ci-dessous :

$$B(\omega_2, \omega_3) = \frac{|\langle\langle v^*(x, y, \omega_2 + \omega_3)v(x, y, \omega_2)v(x, y, \omega_3) \rangle\rangle|}{[E^v(\omega_2 + \omega_3)E^v(\omega_2)E^v(\omega_3)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.52)$$

Avec \* qui désigne le complexe conjugué et la moyenne  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  désigne une moyenne sur les fenêtres temporelles successives et une moyenne spatiale en  $(x, y)$  sur l'image (voir [23]).  $E^v(\omega) = \langle\langle |v(x, y, \omega)|^2 \rangle\rangle$  est le spectre de puissance fréquentiel du champ de vitesse. Une représentation de la bicohérence en fonction de  $\omega_2$  et  $\omega_3$  est montrée sur la figure 2.9. Pour une triade résonante telle que :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \end{cases} \quad (2.53)$$

on peut trouver géométriquement un  $\omega_2$  et un  $\omega_3$  minimaux qui satisfont la relation de dispersion linéaire des ondes gravito-capillaires. Ces solutions correspondent à des interactions résonantes entre ondes de même direction et sont représentées en trait plein noir sur la figure 2.9. La zone au dessus de cette ligne correspond à des interactions résonantes entre ondes de directions différentes.



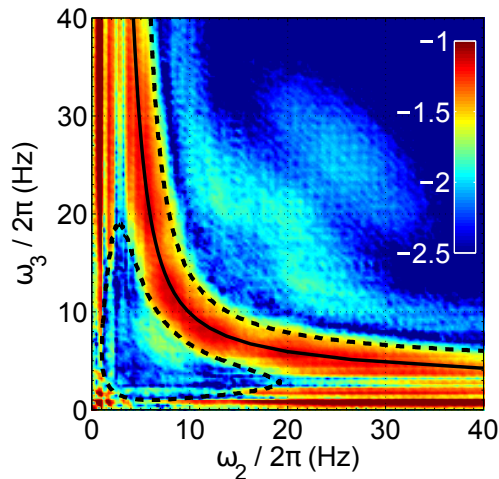


FIGURE 2.9 – Représentation de la bicoherence  $B(\omega_2, \omega_3)$  en échelle de couleur logarithmique pour des mesures de champs de vagues gravito-capillaires par profilométrie par transformée de Fourier. La ligne noire correspond aux valeurs minimales de  $\omega_3$ ,  $\omega_2$  qui satisfont les conditions de résonances des ondes gravito-capillaires, ces solutions correspondent à des vecteurs d'onde colinéaires. Figure extraite de [94].

Cette figure 2.9 montre que la turbulence faible des ondes à la surface de l'eau à proximité de la transition gravito-capillaire,  $\approx 14Hz$ , repose sur une interaction entre ondes quasi-1D essentiellement alors que rien n'interdit les interactions 2D.

## 2.2.2 Ondes dans une plaque fine

Lors de cette thèse nous nous sommes également intéressés à un autre système physique que sont les ondes élastiques dans des structures fines telles les plaques fines et les membranes. La turbulence d'onde élastique de flexion est connue du grand public car très utilisée au théâtre ou au cinéma pour mimer le bruit de l'orage. En effet on met en mouvement une plaque fine, appelée plaque tonnerre, à la main donc à des faibles fréquences et on entend un bruit riche en hautes fréquences se mettre en place. C'est la fameuse cascade d'énergie de Zakharov qui est entendue, ce qui fait de la tôle un milieu très intéressant à étudier car il est l'un des seuls où l'on peut percevoir directement la transmission de l'énergie des grandes échelles excitées aux petites échelles dissipatives. La turbulence d'ondes élastiques de flexion est également un sujet très riche de par les nombreux travaux théoriques, numériques et expérimentaux qu'elle suscite, ce qui en fait un cadre idéal pour identifier les limites de la théorie. La compréhension de la dynamique vibratoire de structures avec des plaques est d'une importance majeure dans de nombreux domaines, tels l'étude de plaques dans l'aéronautique [95], la récupération d'énergie de plaques de faible rigidité [95], ainsi que leur couplage avec des champs électromagnétiques et thermiques [96]. Lorsque les plaques sont fines, les amplitudes de vibration atteignent aisément l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque. Dans ce cas, l'approximation linéaire n'est plus valable. Une prise

en compte des effets géométriques non-linéaires s'impose alors puisque ces derniers changent grandement la dynamique des ondes [97, 98]. On peut alors lister des systèmes qui s'inscrivent dans ce contexte avec une non-linéarité croissante en partant des vibrations non-linéaires de plaques avec une non-linéarité modérée [99] jusqu'au passage de vibrations chaotiques [100, 101]. Outre les problèmes d'ingénierie, la dynamique chaotique des plaques fines excitées à de grandes amplitudes trouve une application dans le domaine de l'acoustique musicale, car elle rend compte du son incroyablement riche de certaines percussions telles les gongs [102, 103]. N. Mordant a fait récemment l'acquisition d'un grand gong de 1.2 m de diamètre dont la photo est sur la figure 2.10b), et a mesuré grâce à un accéléromètre le spectre fréquentiel d'accélération des ondes à la surface du gong. Le spectre résultant de ces mesures préliminaires est représenté sur la figure 2.10a), où il n'est pas sans rappeler le spectre habituellement observé pour les plaques ; en effet un transfert de l'énergie des petites fréquences du forçage aux grandes fréquences dissipatives est visible avec une loi de décroissance non exponentielle.

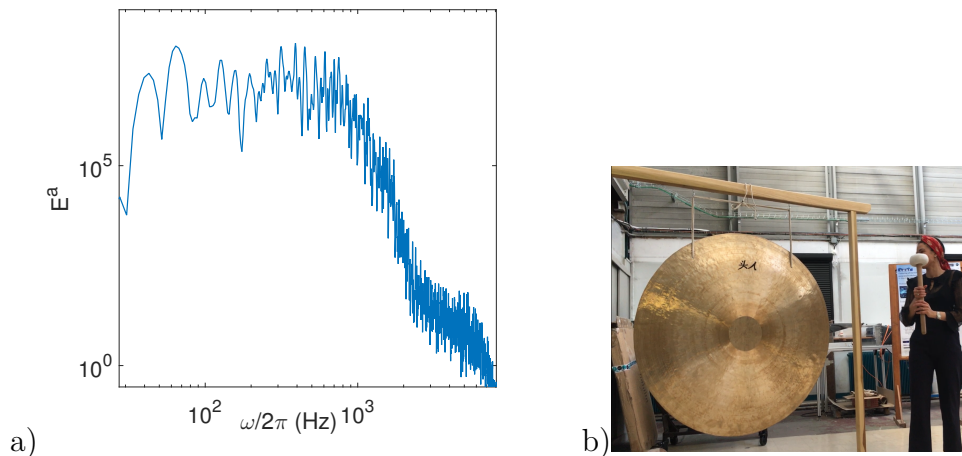


FIGURE 2.10 – a) Spectre de fréquence du champ d'accélération local mesuré par un accéléromètre sur un gong d'1 m 20 de diamètre. b) Photo du gong sur lequel s'est effectuée la mesure du spectre

Il a été souligné récemment, à partir de la théorie, des travaux numériques et expérimentaux que la dynamique complexe des plaques minces vibrantes à grande amplitude montre des caractéristiques semblables à celles des systèmes de turbulence d'ondes, et donc, elle devrait s'inscrire dans ce cadre [13, 49].

Comme montré au paragraphe 2.1.4, le spectre d'énergie suit  $\langle |\zeta_k|^2 \rangle = \alpha k^{-4} \log(k_d/k)^{1/3}$  avec  $k_d$  une échelle de coupure, souvent assimilée à l'échelle dissipative. Ce spectre est confirmé pour la première fois numériquement dans la figure 2.11 extraite de l'article [47] où l'évolution du spectre de déformation suit la prédiction théorique.

Des études de plaques carrées forcées par des paramètres paramétriques ont été menées [104], présentant une résonance interne. Tous ces travaux se concentrent sur la dynamique modérément non linéaire des plaques où seul un ou quelques

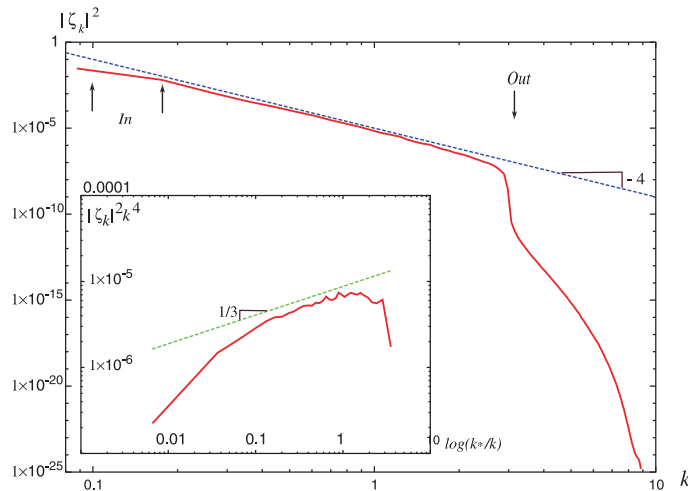


FIGURE 2.11 – Spectre de puissance moyen de la plaque  $\langle |\zeta_k|^2 \rangle$  en fonction de  $k$  pour une cascade d'énergie dans le cadre de la turbulence faible. Le forçage est effectué à des échelles  $k \in [0.1; 0.25]$ . La dissipation agit à partir d'une échelle  $k = 3$ . La ligne en tiret représente la loi de puissance  $k^{-4}$ . Insert : représentation de  $k^4 \langle |\zeta_k|^2 \rangle$  en fonction de  $\log(k_d/k)$ . La ligne en tiret a une pente  $1/3$ . Figure extraite de [47]

modes sont en interaction. Dans ces cas, les équations de Föppl-Von Karman sont projetées sur les modes linéaires, et les coefficients de couplage sont calculés avec des hypothèses ad hoc qui semblent difficiles à généraliser. Des méthodes d'éléments finis ont également été employées, (voir par exemple le travail de Ribeiro et al. [105]), pour étudier la réponse forcée non linéaire à proximité d'une fréquence propre. Récemment, des simulations numériques de solutions dynamiques plus complexes, impliquant un très grand nombre de modes dans le régime stationnaire, ont été menées, afin de simuler le régime de turbulence d'ondes et de reproduire les sons typiques des cymbales et des gongs. Pour cela, Bilbao a développé un schéma conservateur d'énergie pour l'approximation par différence finie de l'équation Föppl-Von Karman [106], qui permet l'étude de la transition vers la turbulence [107] et la simulation de sons réalistes de plaques et de percussion [108]. Les méthodes spectrales avec un très un grand nombre de degrés de liberté ont également été utilisées dans [47] pour comparer les spectres de turbulences d'ondes théoriques et numériques.

Les chercheurs se sont également intéressés aux mécanismes de transferts d'énergie dans ce milieu, C. Touzé et al. [109] ont ainsi trouvé numériquement que pour les plaques parfaitement plates les non-linéarités sont d'ordre cubique et se manifestent par des relations de résonances internes mettant en jeu 4 ondes, comme prédit par la TTF. Expérimentalement il a été observé que les non-linéarités d'ordre quadratique dues aux imperfections géométriques inévitables de la plaque dominent les non-linéarités d'ordre supérieur et cela s'est manifesté par des résonances impliquant des triades [109].

B. Miquel et N. Mordant [110, 36] se sont intéressés numériquement et expérimentalement à mesurer les spectres spatio-temporels du champ de vitesse des

ondes dans une plaque fine et les ont confrontés à la théorie. Dans l'article [16] les résultats de leurs simulations numériques avec des paramètres physiques pertinents des plaques réelles, notamment un taux d'amortissement expérimentalement mesuré  $\gamma_k = a + bk^2$ , montrent un accord extrêmement bon avec les observations expérimentales. Ceci est représenté sur la figure 2.12a) où le spectre de puissance fréquentiel de la densité du champ de vitesse expérimental en rouge présente la même évolution que le spectre de puissance fréquentiel de la densité du champ de vitesse numérique en bleu. Cela confirme le fait que les équations de Fopplvon Karman constituent un cadre théorique adéquat pour étudier la turbulence des ondes dans les plaques élastiques minces vibrées. Lorsque la dissipation expérimentale est réglée artificiellement de manière à tendre vers la configuration théorique en multipliant la dissipation expérimentale par une fenêtre de transparence qui impose une dissipation localisée au delà d'une certaine échelle dissipative, on retrouve les prédictions théoriques à la fois pour la forme du spectre ainsi que la puissance spectrale comme indiqué sur la figure 2.12b). Bien que les variations spectrales de la dissipation aient un impact majeur sur le spectre des ondes dans des systèmes variés [69, 111, 56], cet influence n'est pas encore prise en compte dans la théorie de la turbulence faible. L'introduction d'une dissipation réaliste dans le formalisme de la turbulence faible n'est pas simple car elle a une influence directe sur le traitement mathématique des résonances. Néanmoins, les formes empiriques des équations cinétiques qui sont utilisées dans les outils opérationnels des prédictions maritimes prennent en compte divers termes de source et de dissipation [112]. Cela suggère qu'en dépit de la difficulté mathématique, l'introduction des termes empiriques dans l'équation cinétique peut être physiquement raisonnable. L'influence de tels termes empiriques sur les solutions théoriques est encore une question ouverte et on voit ici une forte influence à la fois en termes de forme spectrale et de puissance spectrale.

Les régimes forts ont été particulièrement intéressants car ils ont permis d'identifier une dynamique des ondes qui n'est plus celle attendue par la TTF. En effet, pour les ondes de flexion des travaux expérimentaux et numériques [17] ont révélé la présence de ce qu'on appelle des cônes développables qui sont des grandes structures localisées similaires à du papier froissé comme représenté sur la figure 2.13b), alors qu'un champ de vagues aléatoire de faible amplitude est observable en régime de turbulence faible comme indiqué sur la figure 2.13a).

La signature spectrale des deux régimes est par ailleurs très différente. En effet pour le régime en turbulence faible le spectre spatio-temporel des ondes est concentré autour de la relation de dispersion linéaire alors que le spectre spatio-temporel des régimes forts montre une énergie essentiellement localisée entre les relations de dispersion en fréquence négative et positive (plus de détails sur ces spectres sont donnés dans le chapitre 7).

Yokoyama et Takaoka [113] ont proposé une représentation analytique afin d'évaluer la séparation d'échelle entre régime fort et régime faible d'un point de vue d'échelles de temps. Ils ont montré que les fréquences nonlinéaires estimées par les extensions d'interactions auto-similaires sont en bon accord avec les fréquences nonlinéaires obtenues par les séries temporelles dans leur simulation. Il ont par la suite mis en évidence que les échelles spatiales critiques pour lesquelles le décalage

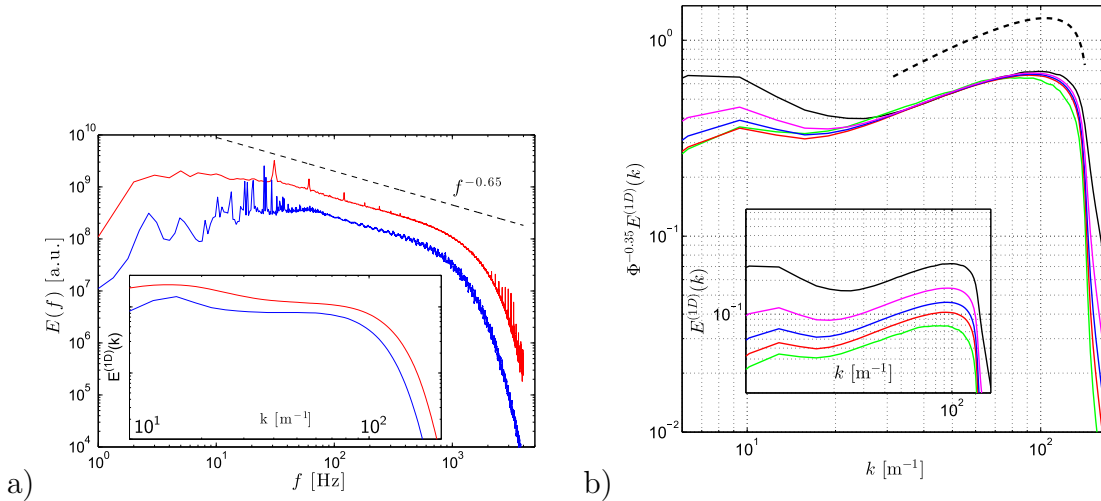


FIGURE 2.12 – a) Spectres de puissance en fonction de la fréquence du champ de vitesse des ondes. Courbe du haut : spectre expérimental. Courbe du bas : spectre d'une simulation numérique avec une dissipation expérimentale. Insert : spectres en fonction du nombre d'onde associés aux spectres fréquentiels. b) Insert : Spectres intégrés du champ de vitesse en fonction du nombre d'onde obtenus pour cinq forçages d'amplitude croissante respectivement du bas vers le haut. La dissipation est idéale avec une fenêtre de transparence. La figure principale correspond aux spectres multipliés par la loi de puissance du flux  $\phi^{0.35}$ . La courbe en tirets noirs indique la solution de Zakharov  $S_k^\zeta \propto k \log(k_d/k)^{1/3}$  avec  $k_d$  l'échelle dissipative. Figures extraites de [16].

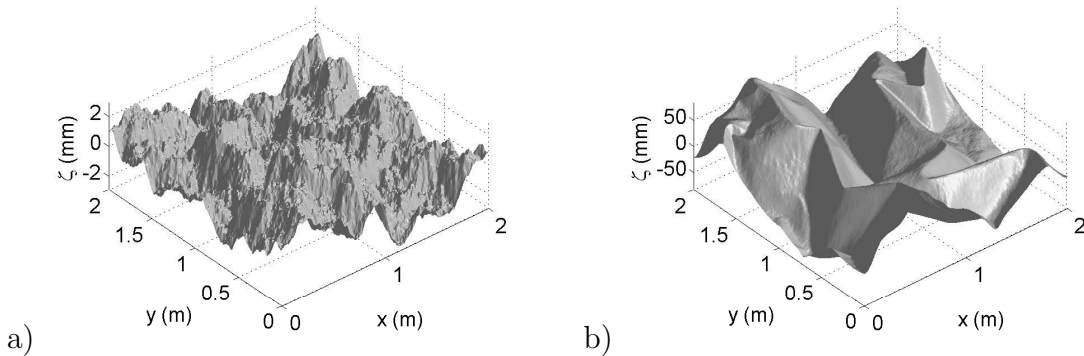


FIGURE 2.13 – a) Reconstitution de surface de la plaque pour une simulation numérique avec un forçage de faible amplitude. b) Reconstitution de surface de la plaque pour une simulation numérique avec un forçage fort. Figures extraites de [17].

fréquentiel dans la fréquence nonlinéaire est comparable avec la fréquence linéaire est en accord avec la séparation d'échelles.

Une représentation de la séparation d'échelles pour des régimes faiblement non-linéaires à fortement non-linéaires est sur la figure 2.14. On y voit que la transition vers la brisure de la TTF s'accompagne par un raidissement des spectres à grande

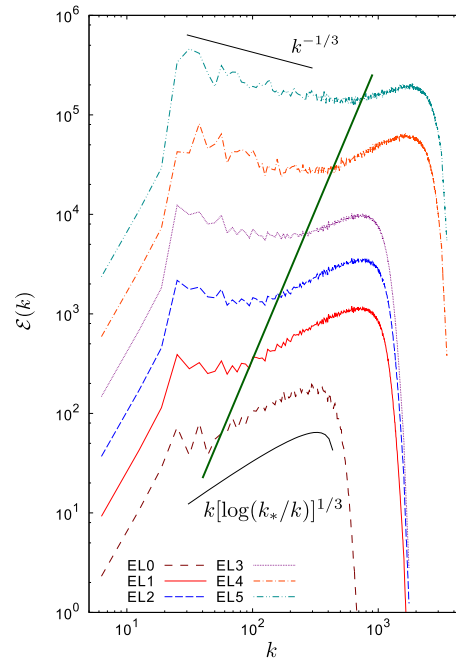


FIGURE 2.14 – Spectres d'énergie avec des niveaux d'énergie croissant, EL0 à EL5, dans des régimes statistiquement stationnaires. Le tiret plein indique la séparation entre le régime de turbulence faible et fort sur les spectres. Le spectre de turbulence faible  $k[\log(k_*/k)]^{1/3}$  où  $k_* = 144\pi$ , et le spectre en loi de puissance  $k^{-1/3}$  sont montrés comme référence. Figure extraite de [114].

échelle, tandis que les spectres à petite échelle conservent une évolution en accord avec la TTF. On parle alors de spectres intermittents.

## 2.3 Objectifs de la thèse

Le but de cette thèse est dans un premier temps d'essayer d'apporter une comparaison plus fine entre expérience et théorie pour la turbulence faible pour les ondes capillaires. En effet comme cela a été présenté dans la revue bibliographique les expériences montrant des spectres de puissance très proches des prédictions théoriques sont uniquement fait en se basant sur des mesures locales. Lorsque des mesures spatio-temporelles sont par la suite effectuées, on se rend compte que les spectres se rapprochant des solutions de Zakharov sont associés à la présence de structures localisées [83]. Ces structures sont signe de forte non-linéarité et sont en contradiction avec l'hypothèse de champ d'onde aléatoire faiblement non-linéaire essentielle à la mise en place de la TTF. Nous proposons donc au chapitre 4 une étude expérimentale spatio-temporelle des régimes faiblement non-linéaires des ondes interfaciales entre deux liquides de densités proches, de manière à réduire très fortement le régime gravitaire et garder essentiellement le régime capillaire. Une analyse spectrale détaillée sera effectuée afin d'identifier la distribution de l'énergie dans le système et la comparer aux prédictions théoriques.



La seconde partie de cette thèse va quant à elle se concentrer à étudier les limites de la TTF. En effet la théorie de la turbulence faible est construite sur des hypothèses très fortes, la première consiste à supposer un domaine tendant vers l'infini or dans la nature tout a une taille finie. Comme évoqué en première partie de ce chapitre les mesures effectuées en laboratoire souffrent d'une limitation spatiale sur les cuves utilisées. Cela avait été d'autant plus remarqué sur des expériences effectuées dans des canaux où le confinement dans la plus petite direction affectait grandement la cascade d'énergie. Pour ces régimes le formalisme de la TTF n'est même plus valable car une discrétisation dans l'espace  $k$  de Fourier est notée, on utilise alors la turbulence discrète ou la turbulence en "avalanches" pour les ondes à la surface de l'eau et des nouvelles prédictions sur les spectres d'énergie sont alors énoncées. Afin de s'assurer que les différences entre expérience et théorie sont bien dues aux effets de taille finie nous proposons au chapitre 5 une étude expérimentale des ondes gravito-capillaires où l'effet de confinement sera progressivement augmenté le long d'une seule dimension de notre cuve. Nous passerons ainsi de manière progressive d'une configuration 2D à une configuration 1D. Les récents travaux sur les interactions résonantes proches de la transition gravito-capillaire ont mis en évidence un mécanisme prédominant de transfert entre ondes quasi-1D. Ainsi nous étudierons les corrélations d'ordre 3 en fonction du confinement pour voir si éventuellement un nouveau mécanisme d'échange d'énergie se mette en place.

La seconde forte hypothèse sur laquelle est construite la TTF est la grande dispersion et la faible non-linéarité des ondes. Dans de nombreuses expériences concernant les ondes à la surface de l'eau on semblait apercevoir la transition gravito-capillaire dans des régimes dits fortement non-linéaires avec apparition de structures localisées. Pour ces régimes nous pouvons penser que le paramètre réellement pertinent à étudier est non pas la non-linéarité seule, mais le rapport entre non-linéarité et dispersion. C'est dans cette optique que dans le chapitre 6 nous nous intéresserons expérimentalement à la transition entre régime de forte dispersion/faible non-linéarité au régime faible dispersion/faible non-linéarité des ondes gravito-capillaires. La transition d'un régime à l'autre sera étudiée afin de voir si la TTF reste valable le long de cette évolution.

C'est ainsi dans la continuité d'observer les effets de diminution de la dispersion mais dans un système physique différent, que sont les ondes élastiques à la surface d'une plaque fine, qu'a été mis en place le chapitre 7. En première partie de ce chapitre nous nous sommes focalisés sur les régimes faiblement non-linéaires. Nous avons d'abord étudié les effets de la précontrainte, qui correspond à un effet non-dispersif, sur une plaque fine et ce de manière expérimentale et numérique. Puis nous avons étudié numériquement la diminution de la dispersion de la plaque précontrainte jusqu'à tendre au système limite purement non-dispersif qu'est celui de la membrane. En effet pour ce système une équation cinétique équivalente à celle des plaques est possible en ne prenant en compte que les interactions  $2 \leftrightarrow 2$ . Des solutions de Zakharov sont alors calculés avec cette fois-ci, contrairement au cas de la plaque, en plus d'une cascade directe d'énergie la possibilité d'observer une cascade inverse d'action d'onde. Est-il possible d'observer ces deux régimes de turbulence faible numériquement? C'est à cette question qu'on essayera de

réponde. En fin de ce chapitre les régimes fortement non-linéaires de la membrane élastique seront traités. Ces derniers ont fait l'objet d'étude théorique avec une prédiction sur les pentes des spectres des déformations. Nous étudierons si la turbulence faible reste valable même pour ces régimes ou si une rupture de la TTF aura lieu. Dans l'hypothèse de ce dernier cas, une comparaison éventuelle avec la brisure de la TTF dans les plaques pourrait être faite.





# Chapitre 3

## Méthodes expérimentales

*Nous allons dans ce chapitre présenter dans une première partie la méthode de mesure utilisée au cours de cette thèse pour reconstituer en 3D le champ des ondes. En seconde partie nous nous attarderons sur les paramètres du code numérique utilisé dans les simulations numériques de la plaque/membrane élastique. Enfin en dernière partie nous montrerons les différents dispositifs expérimentaux utilisés que ce soit dans le cadre des ondes à la surface de l'eau ou dans la plaque. Ce chapitre a été rédigé en faisant appel entre autres à la thèse de Q. Aubourg et B. Miquel. [24, 13]*

### 3.1 Profilométrie par transformée de Fourier

La méthode utilisée afin de mesurer dans l'espace (2D) et dans le temps l'élévation des ondes est la profilométrie par transformée de Fourier. Cette méthode a été développée par Cobelli et. al [115, 116] en 2009 et consiste à projeter un motif sinusoïdal de gris sur la surface qui va se déformer. A partir de la déformation du motif la déformation de la surface peut-être reconstruite. Afin d'expliquer plus précisément les étapes de cette reconstitution un schéma de la mesure est représenté sur la figure 3.1a). Le motif constitué de lignes horizontales dont la longueur d'onde est  $\lambda_0$  soit  $2\pi/k_0$  est projeté grâce à un vidéoprojecteur soit sur la surface d'eau au repos, comme représenté sur la figure 3.1b), soit sur la plaque immobile. Lorsque les ondes sont générées et se propagent, le motif est déformé. Cette déformation est enregistrée grâce à une caméra rapide. Un post-traitement des images est alors effectué grâce à un code matlab dont nous allons définir plus bas les grandes lignes.

#### 3.1.1 Analyse géométrique

Nous définissons d'abord les paramètres nécessaires à l'analyse géométrique qui permet la démodulation de la déformation du motif : les axes optiques de la caméra et du vidéoprojecteur sont perpendiculaires à la surface mesurée au repos, ils sont alignés par rapport à l'axe horizontal  $x$  et séparés d'une distance  $D$ . Les centres optiques de la caméra et du vidéoprojecteur sont éloignés d'une distance  $L$  de la surface au repos comme représenté sur la figure 3.1a).

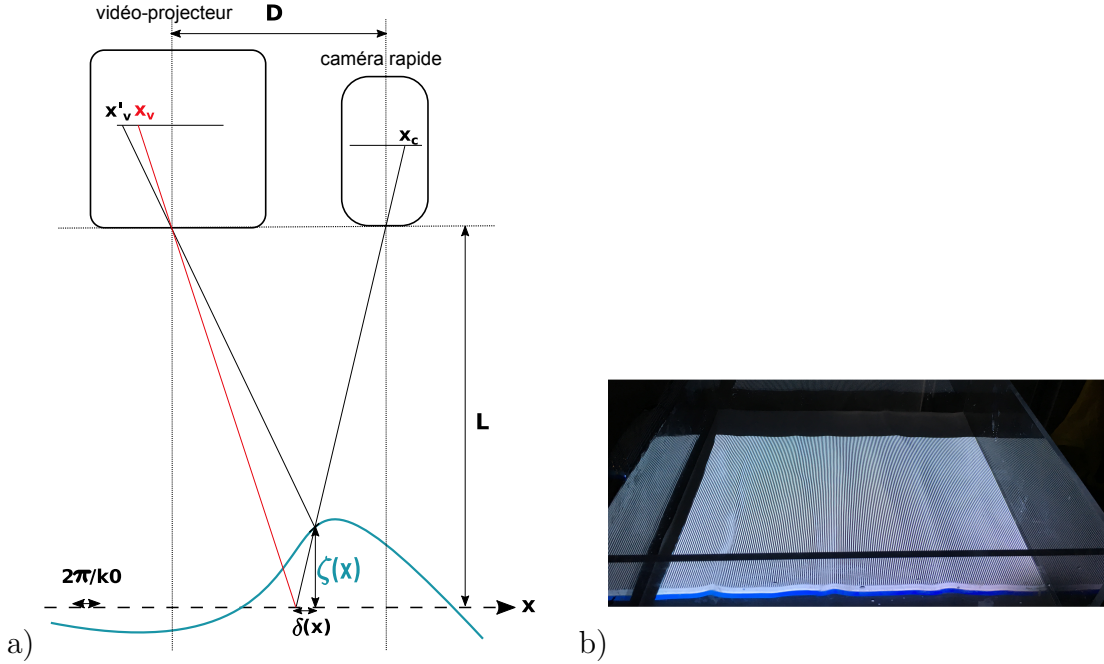


FIGURE 3.1 – a) Schéma représentatif de la mesure de la profilométrie par transformée de Fourier. b) Photo du motif projeté à la surface de l'eau lors d'une expérience en eau peu profonde.

Au passage d'une onde, le motif est défocalisé par rapport au plan au repos. La phase de ce dernier vue par la caméra  $\phi(x)$  est différente alors de la phase du motif au repos  $\phi_0(x)$ . Une relation géométrique nous permet alors de déduire la hauteur  $\zeta$  de la surface en un point  $x$  en fonction de la variation de la phase  $\delta\phi(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$  telle que :

$$\zeta(x) = -\frac{L\delta\phi}{\frac{2\pi D}{\lambda_0} - \delta\phi} \quad (3.1)$$

Afin d'arriver à cette expression nous faisons l'hypothèse que la longueur d'onde du motif est petite devant des longueurs d'onde des vagues. La solution géométrique exacte, comme expliqué dans [116], consisterait à prendre en compte le terme  $\delta(x)$  dû à l'écart à l'axe optique afin de corriger la position  $x$ . La correction s'écrirait alors  $x = x' + \delta(x) = x' - x'\zeta(x')/L$  avec  $x'$  la coordonnée apparente.

### 3.1.2 Post-traitement des images : démodulation de phase

L'extraction de la phase se fait à partir d'un traitement des images du motif. Les étapes sont comme indiquées sur le schéma 3.2 :

- La point de départ est le signal  $I_s$  qui contient les franges déformées multipliées par la modulation d'intensité du vidéoprojecteur. Ce signal est multiplié par une fonction porte  $\exp(-ik_0 \cdot \mathbf{R})$ .

- Un filtre spatial passe bas de nombre d'onde de coupure  $2\pi/L_c$  avec  $L_c$  plus grande que la longueur d'onde du motif mais plus petite que les échelles de déformation caractéristiques de la plaque.
- On filtre ensuite le balayage lumineux du vidéoprojecteur qui correspond à des grandes échelles associées à des hautes fréquences ( $> 60 Hz$ ) dans l'espace de Fourier.
- Un déroulement de la phase  $\delta\phi$  est alors effectué en nous assurant de l'absence de saut de  $2\pi$  entre les phases.
- Le champ de hauteur des ondes  $\zeta$  est alors retrouvé grâce à l'équation (3.1).

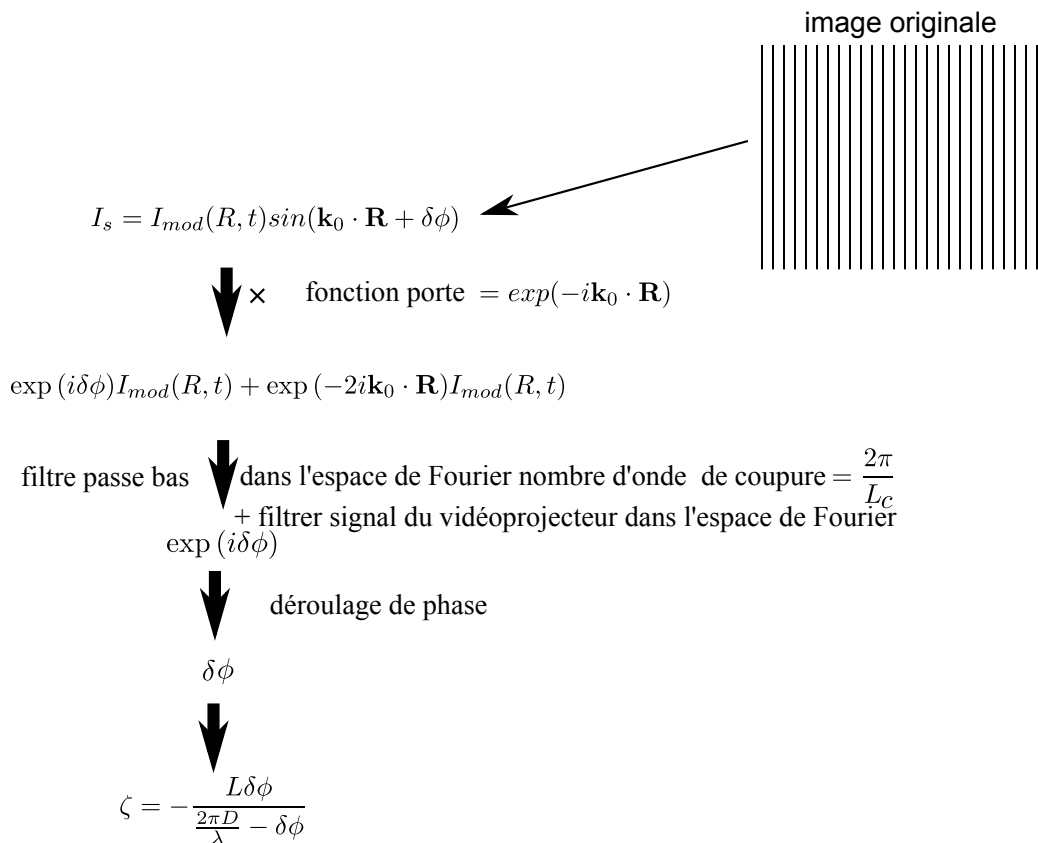


FIGURE 3.2 – Etapes du traitement des images du motif déformé jusqu'à l'inversion de phase donnant la hauteur des vagues  $\zeta$

L'ensemble de ces étapes se fait en utilisant Matlab. Les algorithmes de transformée de Fourier étant bien optimisés sur Matlab, le temps de calcul en est assez court (moins de 1 s/image pour toutes les étapes). Ceci explique le grand intérêt de cette méthode. En effet avec plusieurs dizaines de films de 20000 images chacun, le temps de calcul devient une variable importante.

La précision verticale peut-être estimée en utilisant les dérivées partielles dans l'équation (3.1). Les détails des calculs peuvent être trouvés dans [24]. Avec les mêmes paramètres que ceux de nos expériences à la surface de l'eau, l'erreur verticale a été estimée à  $\approx 300 \mu m$ . La résolution horizontale quant à elle a été estimée à  $\approx 4.2 mm$ .

Les champs des hauteurs des ondes seront par la suite utilisés lors d'une analyse spectrale en temps et en espace afin d'accéder à la distribution de l'énergie dans l'espace de Fourier.

## 3.2 Méthode numérique

Pour les expériences de la plaque tendue nous complétons les mesures par des solutions numériques aux équations de Föppl-Von Karman (FVK). Nous écrivons la projection de l'équation (1.156) dans un espace de Fourier pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :

$$\partial_{tt}\zeta_{\mathbf{k}} = -C^2 k^4 \zeta_{\mathbf{k}} - (T_x k_x^2 + T_y k_y^2) \zeta_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\}_{\mathbf{k}} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}} + \mathcal{D}_{\mathbf{k}} \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}$  sont les termes de forçage et de dissipation dans l'espace spectral, respectivement. Nous précisons que la tension peut-être anisotrope ( $T_x \neq T_y$ ) comme cela est effectué sur le montage expérimental. Cette équation est étudiée au moyen d'un algorithme pseudo-spectral. Le code de la plaque tendue/membrane utilise une décomposition de Fourier de la variable  $\zeta$  et implémentent des conditions aux limites périodiques différentes des conditions limites expérimentales. Cependant, il a été démontré que l'impact des conditions aux limites sur l'état de l'onde est marginal, à condition que la taille du domaine soit nettement plus grande que la longueur d'onde de forçage. Nous avons donc confiance dans la capacité des simulations rapportées dans cette thèse au chapitre 7 à capturer les propriétés statistiques significatives du champ d'onde expérimental.

Le code évalue les termes non linéaires dans l'espace physique et un filtre anti-repliement spectral est appliqué aux champs. Nous présentons ci-dessous les particularités du code utilisé. Ce code a été développé par B. Miquel et est une évolution du code utilisé précédemment dans ces travaux de thèse [17, 16, 117]. Le schéma du pas de temps de l'équation (3.2) se fait au moyen d'une méthode exponentielle linéaire multivaluée qu'est "l'Exponential Time Differencing (ETD)", nous utilisons en l'occurrence le schéma du second ordre ETD2RK de Cox et Matthews [118]. Le code a été développé en vue de fournir un moyen de combler le fossé entre les réalisations expérimentales de la turbulence d'ondes et les hypothèses idéales de la théorie de la turbulence faible.

Entre autre le code implémente la possibilité de modifier indépendamment la tension le long des deux directions  $T_x$  et  $T_y$ . Cela offre la possibilité de reproduire la tension anisotrope présente dans les expériences où la tension transversale disparaît :  $T_y = 0$ .

Une approche similaire est adoptée avec la dissipation. Comme rapporté par Miquel et Mordant [117], la dissipation expérimentale peut être modélisée de manière empirique avec un amortissement linéaire  $\mathcal{D}_{\mathbf{k}} = -\gamma_k \partial_t \zeta_{\mathbf{k}}$ , où  $\gamma_k$  a la forme

analytique :

$$\gamma_k^{exp} = \gamma_1 + \gamma_2 k^2. \quad (3.3)$$

En l'absence de tension, Miquel et al. [16] ont rapporté que cette expression de la dissipation, où les paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont obtenus en ajustant les données expérimentales, pourrait reproduire qualitativement les spectres expérimentaux de la turbulence des ondes élastiques. On peut parler alors de "dissipation expérimentale". Cette dissipation est très différente de la dissipation idéale considérée dans la théorie de la turbulence faible, qui suppose l'existence d'une fenêtre de transparence en nombre d'onde où l'amortissement est nul et, par conséquent, que l'énergie y est transférée de manière conservatrice. En effet, il a été montré dans [16] que la cascade d'énergie prédite par la théorie est retrouvée lorsque le taux de dissipation est mis à zéro dans un intervalle de nombre d'ondes  $[k_l, k_h]$ . On parle dans ce cas de "dissipation idéale" où on utilise le coefficient d'amortissement suivant l'équation (3.3), sauf entre  $k_l = 5 \text{ m}^{-1}$  et  $k_h = 240 \text{ m}^{-1}$  où il est mis à zéro.

Nous adoptons un forçage qui diffère du forçage expérimental, harmonique et localisé. On force une couronne de modes  $\mathbf{k}$  à leur fréquence linéaire  $\omega_k$  :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}}(t) = F_0 e^{-\frac{k-k_0}{2\nu_k^2}} e^{i\varphi_k} \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (3.4)$$

La couronne des nombres d'ondes forcés est centrée autour de  $k_0 = 5\pi \text{ m}^{-1}$ , avec une largeur  $\sigma_k = 2\pi \text{ m}^{-1}$ . Les phases aléatoires  $\phi_k$  et  $\varphi_k$  sont introduites pour obtenir un forçage désordonné.

La résolution spatiale est modérée ( $288^2$ ) afin que les simulations puissent être exécutées pour obtenir de longues séries temporelles, jusqu'à l'équivalent de 300 secondes d'expériences pour les plus longues. Comme dans les expériences, la déformation et la vitesse verticale sont enregistrées dans le temps pour une analyse spectrale ultérieure.

Ce point a nécessité le stockage d'une quantité importante de données. On compte à près de 60 *To* les données numériques que nous avons enregistré pour l'ensemble des régimes de plaque tendue et de membrane. Il faut donc disposer d'un espace disque prépondérant sur la baie de stockage. Le temps du traitement des données en est fortement impacté.

### 3.3 Dispositifs expérimentaux

Les dispositifs expérimentaux peuvent être regroupés en deux types : ceux qui concernent l'interface eau/air et eau/huile silicone et celui de la plaque vibrée. Nous présenterons ci-dessous les dispositifs expérimentaux des chapitres intégrant un article (5,6 et 7) afin de donner plus de détails sur la méthodologie. Le dispositif expérimental de l'étude des ondes à l'interface eau/huile silicone sera présentée au chapitre 4 qui lui est consacré.

### 3.3.1 Ondes à la surface de l'eau

Les dispositifs expérimentaux dans cette partie sont très proches de ceux utilisés par Q. Aubourg. Pour l'ensemble des expériences à l'interface de deux fluides, la projection du motif s'est faite par un vidéoprojecteur EPSON EH-TW7200 possédant une résolution de  $1920 \times 1080$  px<sup>2</sup>, une grande luminosité (2000 lumens) ainsi qu'un contraste important (120000 :1). Il possède également un système de décalage de l'objectif qui est indispensable pour pouvoir projeter le motif sur le champ de vision de la caméra. La caméra rapide utilisée dans cette partie est la Photron FASTCAM SA1.1 avec un objectif à focale fixe NIKON 85 mm. Les images sont enregistrées avec une pleine résolution de  $1024 \times 1024$  px<sup>2</sup> à une fréquence de 250 Hz puisque le régime gravito-capillaire est en dessous de 100 Hz.

Afin de permettre la visualisation du motif à la surface de l'eau il a été nécessaire d'augmenter sa diffusivité optique. Pour cela nous avons mélangé des particules de dioxyde de titane à l'eau. L'utilisation de ces particules a été initiée par Przadka et al. [91] et elle offre un avantage considérable à l'étude des ondes car elle augmente la diffusivité de l'eau sans altérer ses propriétés physico-chimiques. En effet la tension de surface reste inchangée contrairement aux effets des peintures contenant des tensioactifs. Nous avons utilisé une concentration volumique d'1% de ce pigment afin d'obtenir un bon niveau de contraste du motif projeté. Leur suspension se fait de manière homogène après un mélange vigoureux de l'eau. Les effets de sédimentation commencent cependant à altérer le contraste du motif à partir de 5 min d'expérience, ce qui n'est pas problématique pour notre cas puisque les films enregistrés concernent moins de 3 min d'expérience.

On précise qu'un soin particulier a été apporté pour éviter toute contamination de surface et éviter la dissipation par conversion en ondes de Marangoni [119]. En effet comme observé dans [24] la contamination de l'eau par des tensio-actifs stoppe la cascade d'énergie aux grandes échelles. Il faut ainsi nettoyer tout le matériel qui sera en contact avec la surface étudiée avec du dégraissant et de l'anti-calcaire. Avant l'enregistrement de chaque film un nettoyage de l'eau se fait en repoussant les particules à sa surface avec l'air comprimé et en les aspirant. Après chaque film, la cuve est recouverte d'un film plastique pour empêcher toute pollution. Le changement d'eau et le nettoyage de l'ensemble du matériel sont faits après une journée d'expérience.

#### 3.3.1.1 Effets de confinement

Les expériences traitant des effets de confinement sur les propriétés statistiques de la turbulence dans le régime gravito-capillaire (chapitre 5) ont été faites sur deux configurations. La première est une cuve en plexiglas de dimension identique à celle utilisée dans la thèse de Q. Aubourg [24] soit  $37 \times 57$  cm<sup>2</sup>. Une représentation du banc expérimental est faite dans la figure 3.3a). La profondeur d'eau au repos était de 6 cm, ce qui pour des ondes gravito-capillaires inférieures à 10 cm correspond à un régime d'eau profonde. Dans cette configuration une paroi en plexiglas mobile a permis de réduire la largeur de 37 cm à 7 cm permettant ainsi d'augmenter le rapport d'aspect longueur/largeur de 1.5 jusqu'à 8.1.

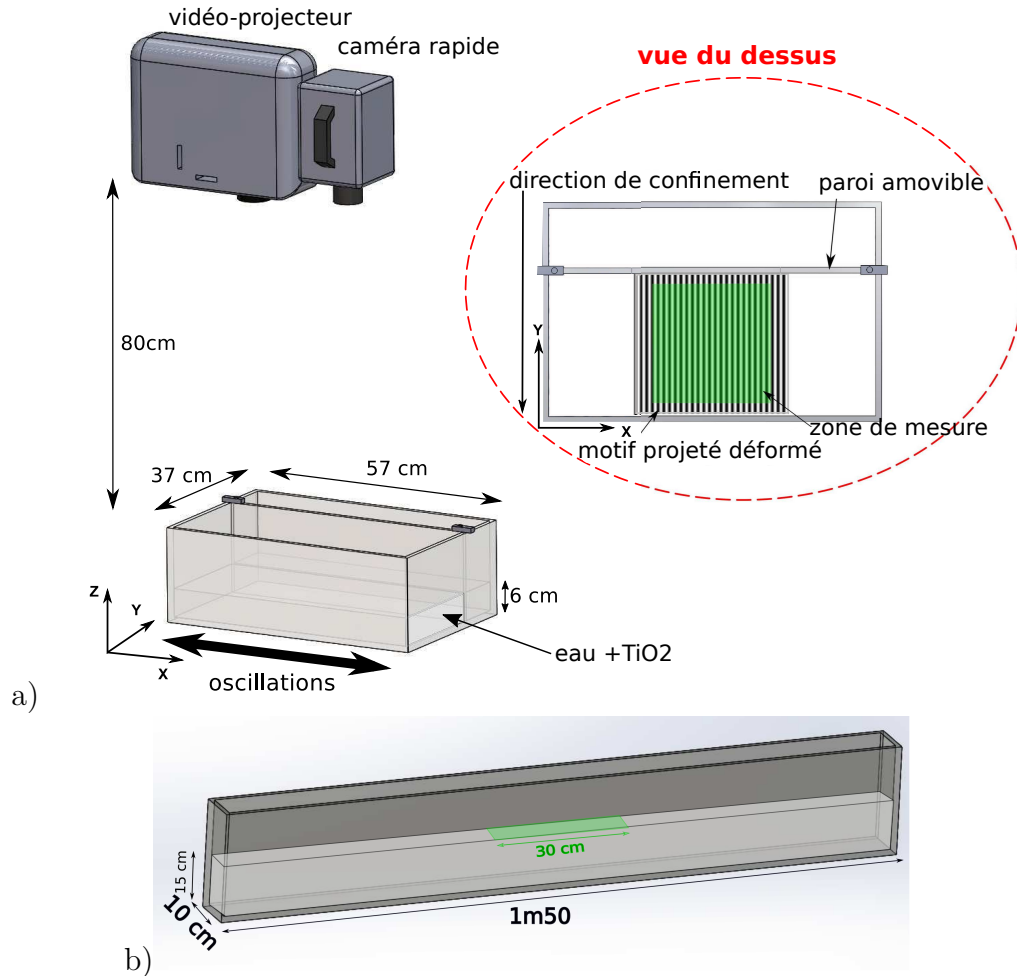


FIGURE 3.3 – a) Représentation du banc expérimental pour l'étude des effets de confinement ainsi qu'une vue du dessus de la cuve. b) Représentation du canal utilisé comme seconde configuration d'étude.

Le forçage est généré par une table oscillant le long de l'axe longitudinal  $x$  sur laquelle est posée la cuve. Celle-ci est contrôlée par une tension sinusoïdale d'amplitude constante modulée autour d'une fréquence centrale de  $2 \text{ Hz}$  avec une modulation aléatoire de  $\pm 0.5 \text{ Hz}$ . Les images sont enregistrées à  $250 \text{ images/s}$  avec une résolution de  $1024 \times 1024 \text{ pixels}^2$  couvrant une zone de  $20 \times 20 \text{ cm}^2$  au centre de la cuve en absence de confinement. Lorsque la largeur de la cuve est réduite, la résolution est adaptée à la largeur de la cuve. Le nombre de pixels sur l'axe  $y$  est réduit en conséquence jusqu'à une résolution de  $360 \text{ px}$ , tout en conservant  $1024 \text{ px}$  sur l'axe  $x$ .

La seconde configuration est un canal d' $1\text{m}50$  de long et  $10 \text{ cm}$  de large comme représenté sur 3.3b). L'utilisation de ce canal est intéressante car nous fournit le plus grand rapport d'aspect longueur/largeur qui est de  $15$ . Les images ont été enregistrées à la même fréquence avec une résolution de  $1024 \times 325 \text{ pixels}^2$  couvrant une zone de  $30 \times 10 \text{ cm}^2$  au centre du canal. Le forçage est identique à celui de la cuve (voir la figure 3.4 pour une photo du banc expérimental).



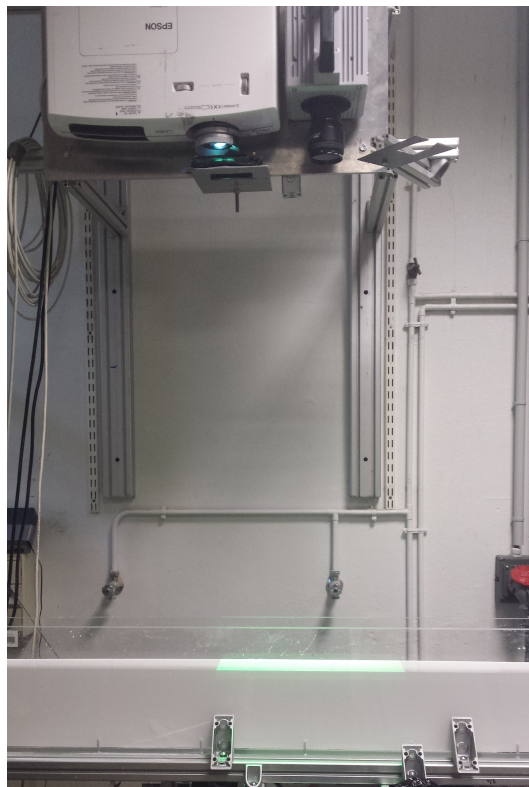


FIGURE 3.4 – Photo du banc expérimental permettant l'étude des effets de confinement dans un canal à fort rapport d'aspect longueur/largeur  $\approx 15$ .

### 3.3.1.2 Effets de profondeur finie

Dans cette partie le dispositif expérimental avait pour but l'étude de l'effet de la réduction de la profondeur d'eau sur les propriétés statistiques de la turbulence (chapitre 6). Le banc expérimental est identique à celui utilisant la cuve (même fréquence de forçage). Nous avons utilisé également la même cuve. La profondeur de l'eau au repos est modifiée dans la plage de  $[6,60]$  mm, allant des régimes de profondeur finie aux régimes d'eau profonde, considérant des longueurs d'onde centimétriques. L'amplitude du forçage est par ailleurs variée afin de changer les intensités des non-linéarités. Les images sont enregistrées à 250 images/s avec une résolution de  $1024 \times 1024$  px<sup>2</sup> couvrant une zone de  $20 \text{ cm}^2$  au centre de la cuve.

### 3.3.2 Ondes dans une plaque précontrainte

La méthode de profilométrie par transformée de Fourier a été appliquée aux expériences de la plaque vibrée. Cette dernière est en acier inoxydable et est d'1 m 90 de long, 1 m de large avec une épaisseur de 0.5 mm. Les propriétés du matériau données par le fournisseur sont : un module de Young  $\approx 2.10^{11} \text{ Pa}$ , un coefficient de poisson  $\approx 0.3$  et une masse volumique  $\approx 7800 \text{ kg/m}^3$ . Une représentation du banc expérimental est visible sur la figure 3.5. La surface de la plaque a été peinte en blanc au pistolet afin de pouvoir visualiser le motif projeté. Le motif a été projeté avec le vidéoprojecteur EPSON EH-TW7300, qui possède une luminosité et

un contraste légèrement améliorée par rapport au EH-TW7200 utilisé à la surface de l'eau. L'enregistrement de la déformation de la surface s'est fait avec la caméra rapide Photon v2511 avec un objectif NIKON 50 mm permettant un angle de vue assez grand. Contrairement aux ondes gravito-capillaires les ondes élastiques à la surface de la plaque ont des fréquences très élevées qui atteignent plusieurs kilo-Hertz. La fréquence d'acquisition de la caméra a donc été de 8000 Hz, à cette fréquence la résolution était de  $704 \times 1024 \text{ px}^2$  permettant la visualisation d'une zone de  $0.8 \text{ m} \times 1.4 \text{ m}$  au centre de la plaque. Ce dispositif expérimental est proche de celui étudié par B. Miquel [13].

Le forçage se fait par une tige fixée à 30 cm du bas de la plaque reliée à un vibreur modal électromagnétique TIRA 51140-MOSP. L'excitation est dans l'axe de l'épaisseur de la plaque. Le pot vibrant reçoit un signal sinusoïdal monochromatique à 30 Hz à travers l'amplificateur BAA 1000. Un système de ventilation relié au vibreur permet à ce dernier de fournir une force axiale de 400 N.

L'aspect original de cette expérience est l'application d'une tension en bas de la tôle. Une représentation du système de tension est visible sur la figure 3.5 et la figure 3.6.

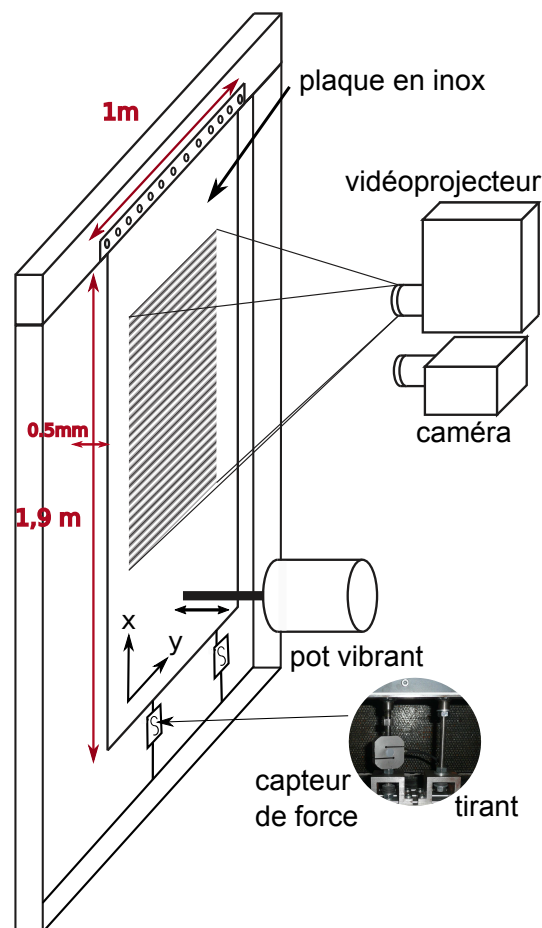


FIGURE 3.5 – Dispositif expérimental pour l'étude de la plaque précontrainte vibrée

Ce système consiste en deux tirants attachés en bas de la tôle à 25 cm de son bord droit et gauche. La tension appliquée est donc uniquement longitudinale selon l'axe  $x$  aucune tension n'est appliquée transversalement. Les tirants sont composés de deux goujons filetés droite/gauche. Deux capteurs de force en S TE connectivity FN9620 pouvant mesurer jusqu'à 10kN sont également attachés par des tiges à 10 cm de chaque tirant. La mise en tension de la plaque se fait en deux temps. Nous mettons d'abord en traction les capteurs à la tension souhaitée (une lecture de la tension électrique à leur sortie avec la courbe de calibration fournit par le fournisseur permet d'obtenir la force en fonction de la tension électrique). Nous vissons ensuite les deux goujons tirant la plaque jusqu'à ce que la tension électrique affichée par les jauges soit exactement nulle. Les capteurs sont ensuite détachés afin d'éviter leur sollicitation pendant la vibration de la plaque.

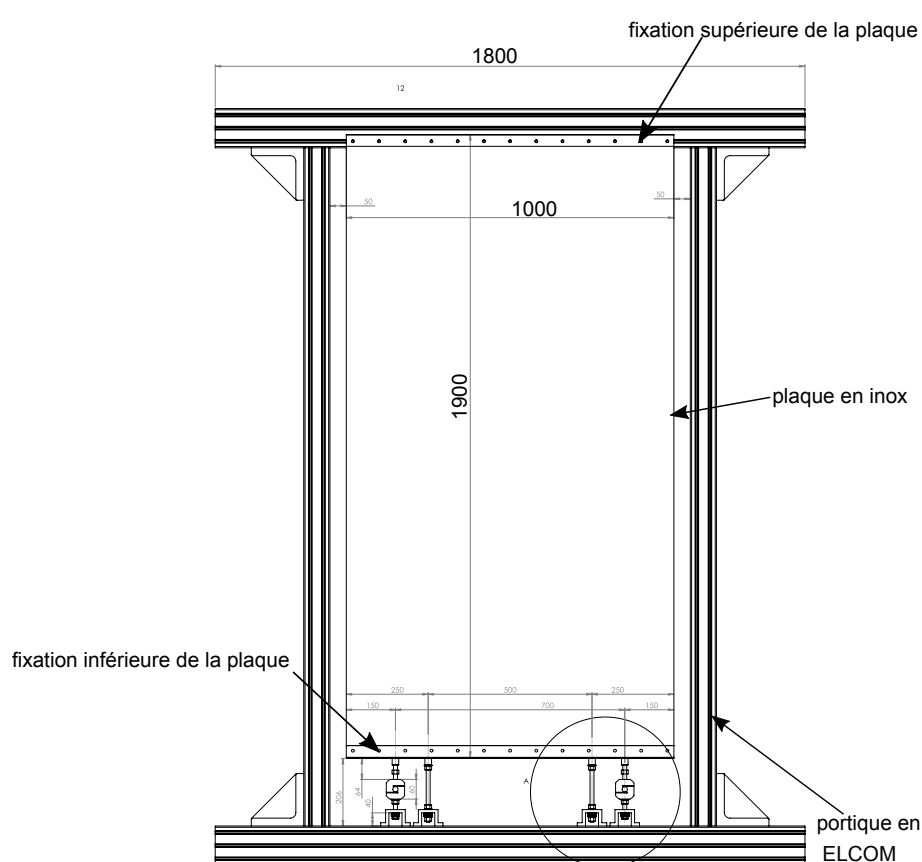


FIGURE 3.6 – Schéma de l'assemblage qui permet la fixation et la tension de la plaque

L'ensemble de la plaque avec les tirants et les capteurs de force est attaché à un portique en ELCOM (voir figure 3.6) qui est encastré au sol de la pièce dans laquelle se déroule l'expérience. La plaque est vissée le long de son bord supérieur au portique.

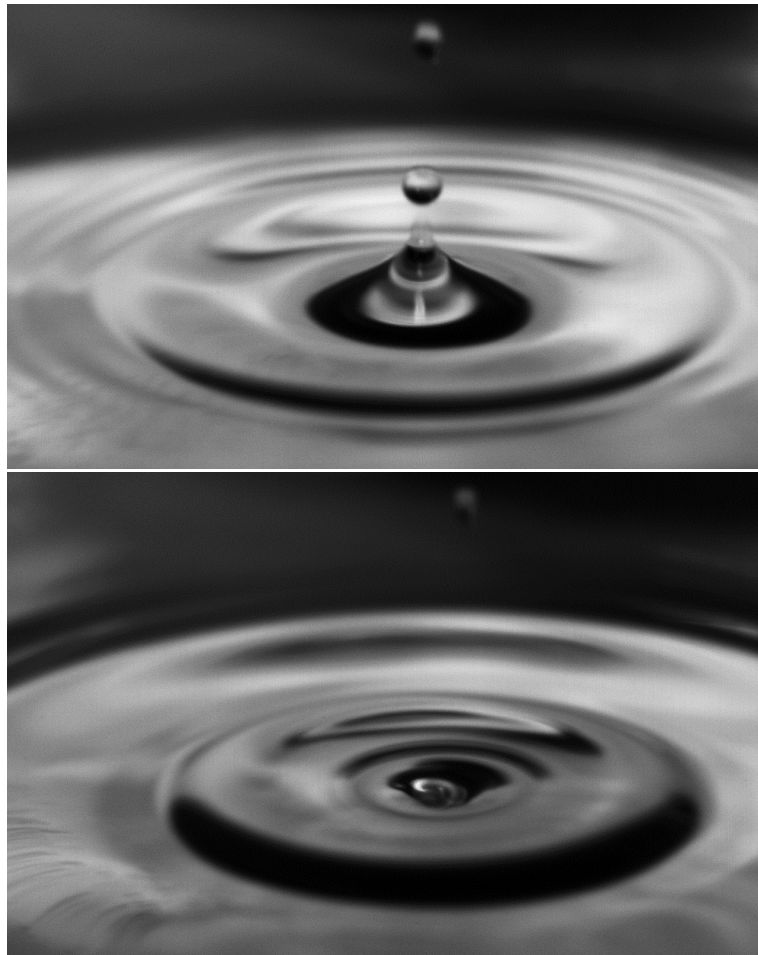
Un programme Labview permet la synchronisation grâce à une carte d'acquisition National Instruments de l'amplificateur et la caméra permettant ainsi un enregistrement automatisé de longues séries de films.

Plusieurs séries de mesures consistant à étudier l'effet de l'augmentation de la tension appliquée à la tôle ont été faites (1 kN, 2 kN, 4 kN et 10 kN). Pour une tension donnée nous avons utilisé 3 amplitudes de forçage différentes nous permettant de tendre progressivement d'un régime faiblement non-linéaire vers un régime fortement non-linéaire.



## Chapitre 4

# Ondes gravito-capillaires à l'interface de deux fluides : tendre vers le régime capillaire pur



Ondes capillaires créées par l'impact d'une goutte à la surface de l'eau.  
*Photos prises dans le cadre d'un stage d'initiation à la recherche au LEGI avec Lou Balavoine.*

## 4.1 Introduction

L'étude des ondes gravito-capillaires a poussé les chercheurs à considérer ces ondes comme une combinaison entre ondes capillaires et ondes de gravité avec comme séparation l'échelle de transition entre les deux régimes. La théorie de la turbulence faible ne donne en effet aucune prédiction quant à l'évolution de la combinaison des deux types d'ondes ce qui complique le travail d'interprétation des résultats dans ce régime transitoire. Nous avons donc voulu expérimentalement nous rapprocher de l'un des régimes pour lequel la TTF fournit une solution exacte, à savoir le régime capillaire. Pour les ondes gravito-capillaires interfaciales entre deux fluides non-miscibles de profondeur importante, sans interface eau/air comme représenté sur la figure 4.1, la relation de dispersion linéaire (4.1) relie le terme gravitaire à la différence de densité entre les deux fluides superposés ( $\rho_1 - \rho_2$ ).

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma_I k^3}{\rho_2 + \rho_1} \quad (4.1)$$

Avec  $\gamma_I$  la tension interfaciale,  $\rho_1$  la masse volumique du fluide le plus dense et  $h_1$  sa profondeur,  $\rho_2$  est donc la masse volumique du fluide le moins dense et  $h_2$  sa profondeur.

En diminuant la différence ( $\rho_1 - \rho_2$ ) nous élargissons la gamme du régime capillaire, c'est dans l'optique de réduire au maximum le régime gravitaire que cette partie a été effectuée.

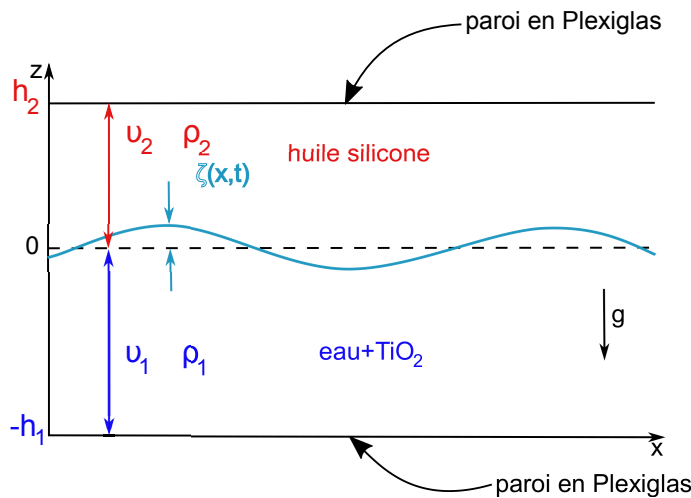


FIGURE 4.1 – Schéma de l'expérience à l'interface eau/huile silicone. La couche inférieure correspond à une épaisseur  $h_1$  d'eau mélangée avec des particules de dioxyde de titane. La couche supérieure est composée d'une couche d'épaisseur  $h_2$  d'huile silicone.  $\rho$  et  $\nu$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique. La cuve utilisée lors de cette série d'expériences est de dimension  $29.5 \times 29.5 \text{ cm}^2$ . Une paroi supérieure en Plexiglas est vissée sur les bords de la cuve de manière à ne pas avoir d'interface eau/air.

Récemment des mesures par vibromètre laser, dans une cuve circulaire de 22 cm de diamètre contenant deux fluides non-miscibles à surface libre, 4.3 cm de profondeur d'eau et une profondeur variable pour l'huile silicone, ont permis d'extraire localement la hauteur des ondes à l'interface [20]. L'huile silicone utilisée ayant une densité proche de celle de l'eau, 0.93, une visualisation du régime capillaire sur une à deux décades a pu être effectuée. Durant cette série d'expériences la tension interfaciale entre l'huile silicone et l'eau mélangé à des particules de dioxyde de titane et à un colorant a été estimée selon la littérature à 25 mN/m [120]. Une reconstitution des spectres fréquentiels du champ d'élevation des ondes a pu être effectuée comme représentée sur la figure 4.2. On y retrouve l'évolution des spectres pour une profondeur de la couche d'huile silicone variant de 0 à 0.9 cm. Tous les spectres évoluent en loi de puissance très proche des prédictions théoriques pour les ondes capillaires  $E_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-17/6}$ . On peut également noter sur cette figure 4.2 que la fréquence de transition gravito-capillaire diminue en fonction de la profondeur de la couche d'huile silicone à l'inverse de la coupure de dissipation visqueuse, ainsi pour disposer d'un grand régime inertiel il semblerait plus judicieux d'avoir une couche d'huile silicone importante.

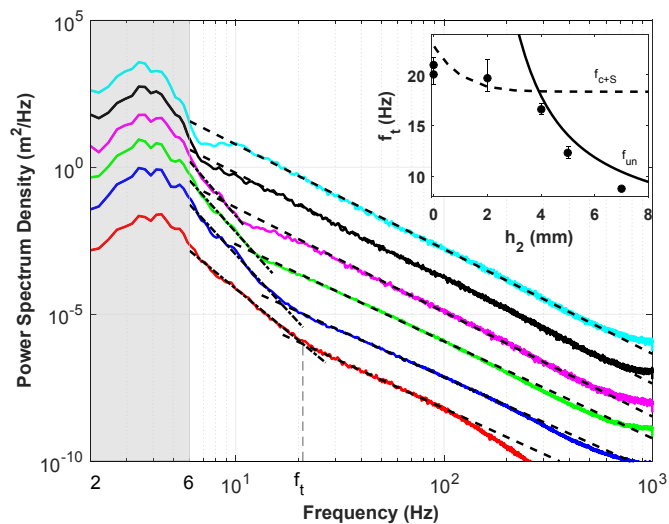


FIGURE 4.2 – Spectres fréquentiels des hauteurs des ondes interfaciales en fonction de la hauteur  $h_2$  d'huile silicone. Dans l'insert en haut à droite est représentée l'évolution de la fréquence capillaire en fonction de  $h_2$ . Figure extraite de [20].

Une étude théorique et expérimentale dans une configuration similaire à la notre, ont été effectuées par G.During et C.Falcn [121]. Ils ont en effet étudié la propagation des ondes interfaciales entre de l'eau et de l'huile silicone de densités proches dans une cuve rectangulaire de dimension  $6 \times 10$  cm<sup>2</sup>. La différence importante par rapport aux expériences de B. Issenmann et al. [20] réside dans la profondeur des couches des fluides qui est identique et importante  $\approx 4$  cm. En effet en considérant deux fluides de densité et de profondeur identiques, la symétrie  $z \rightarrow -z$  ( $z$  étant la profondeur) est rajoutée au problème initial qu'est celui des ondes entre deux fluides quelconques. Cette symétrie augmente le degré de non-linéarité du système N de 3 à 4. Le mécanisme principal de transmission



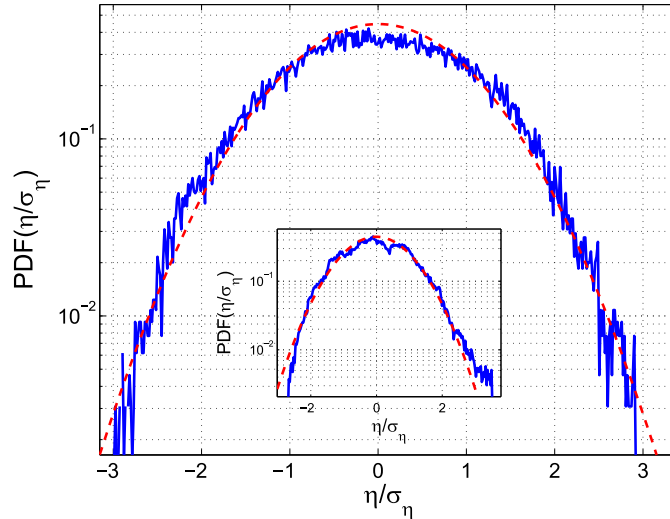


FIGURE 4.3 – Fonction de densité de probabilité de l’amplitude des ondes interfaciales entre huile silicone/eau normalisée par sa variance. La courbe en tirets correspond à une distribution gaussienne. Insert : Fonction de densité de probabilité de l’amplitude des ondes à l’interface eau/air, la courbe en tirets correspond à une distribution gaussienne. Figure extraite de [121].

de l’énergie au degré le plus bas implique alors 4 ondes et non plus une triade. Le système devient également indépendant de la gravité. Ce changement sur les interactions non-linéaires implique une ré-écriture du Hamiltonien du système qui résulte par une nouvelle prédiction du spectre des hauteurs des ondes interfaciales :  $E_{\omega}^{\zeta} \propto \omega^{-8/3}$ . Notons que ce changement est minime par rapport à la prédiction du spectre des ondes capillaires puisque la pente de ce dernier est  $-17/6 \approx -2.8$  or  $-8/3 \approx -2.7$ . Par ailleurs la densité de l’huile silicone n’est pas exactement égale à celle de l’eau mais en est très proche, la fréquence de transition gravito-capillaire vaut  $\approx 3 - 4$  Hz, il reste donc une certaine dépendance à la gravité. Afin de savoir si cette contribution, quand bien même petite, briserait la symétrie  $z \rightarrow -z$  et rétablirait les interactions au sein des triades, il faudrait éventuellement calculer les corrélations entre ondes résonantes dans le milieu et vérifier la symétrie du champ d’élévation des vagues. A partir de leur mesures locales, on retrouve dans [121] la fonction de densité de probabilité (PDF) de l’amplitude des ondes interfaciales normalisée par sa variance comme représenté sur la figure 4.3.

La PDF des ondes à l’interface huile silicone/eau affiche une symétrie par rapport à  $\eta = 0$  en suivant la distribution gaussienne contrairement aux ondes gravito-capillaires à l’interface eau/air dont la PDF du champ d’élévation affiche une branche asymétrique, comme rapporté dans la littérature [24, 18]. Cela semble indiquer que la symétrie  $z \rightarrow -z$  est bien présente lorsque la gravité n’intervient plus dans la relation de dispersion des ondes. Cet argument est à considérer avec précaution car l’asymétrie affichée par la distribution des hauteurs des ondes gravito-capillaires est souvent associée à la forte non-linéarité du milieu. En effet pour de très faibles non-linéarités la distribution des ondes gravito-capillaires tend vers une distribution normale comme rapporté expérimentalement [24]. Par

ailleurs ils ont également calculé les spectres des hauteurs des vagues en fonction de la fréquence et ils présentent une décroissance en loi de puissance avec une pente  $\approx -2.75$  qui est en accord avec leur prédiction théorique.

Toutes les mesures présentées ci-dessus sont des mesures locales qui ne permettent pas d'identifier la relation de dispersion des ondes dans le milieu ni la répartition angulaire de l'énergie, ces points sont pourtant fondamentaux quant à la comparaison à la TTF. Des structures localisées, signe de turbulence forte, peuvent également apparaître tout en engendrant des spectres proches des prédictions théoriques de la TTF [83, 23]. Des mesures spatio-temporelles seraient essentielles afin d'identifier le type d'ondes présentes à l'interface et de pouvoir identifier le type de régime présent. C'est dans ce but qu'a été effectuée l'étude expérimentale de ce chapitre. La série d'expériences présentée dans ce qui suit concerne les ondes à l'interface eau/huile silicone.

## 4.2 Paramètres expérimentaux

Les expériences réalisées dans ce chapitre ont été faites dans une cuve en plexiglas de dimension  $29.5 \times 29.5 \text{cm}^2$  et de 10 cm de profondeur, voir le schéma de l'expérience sur la figure 4.4 et une image du dispositif expérimental sur la figure 4.5. La cuve était complètement fermée à l'aide d'un couvercle en Plexiglas vissé aux bords de la cuve. La couche inférieure contient 6 cm d'eau déminéralisée mélangée avec des particules de dioxyde de titane afin d'augmenter sa diffusivité optique. Il a fallu mélanger l'eau avant chaque expérience afin d'homogénéiser la suspension des particules. Cela s'est fait en mettant en mouvement deux barreaux d'agitation cylindriques au fond de la cuve grâce à un aimant positionné à l'extérieur de celle-ci. La couche supérieure contient 4 cm d'huile silicone.

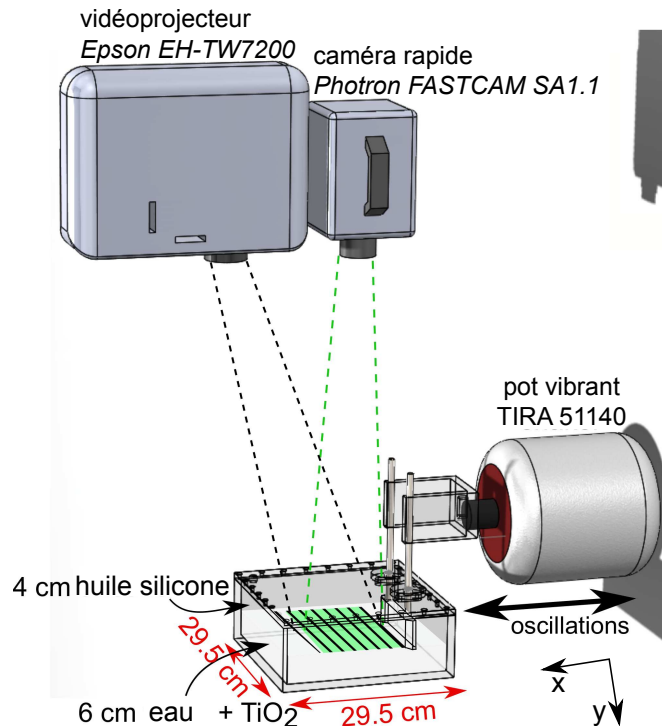


FIGURE 4.4 – schéma du dispositif expérimental pour les ondes à l'interface eau/huile silicone. Le pot vibrant permet un déplacement du batteur le long de l'axe X. La méthode de profilométrie par transformée de Fourier [115, 116] est utilisée afin de reconstruire le champ des vagues sur une zone de 20 cm<sup>2</sup>. Elle nécessite l'utilisation d'un vidéoprojecteur et d'une caméra rapide (voir détails de la méthode de mesure au chapitre 3).

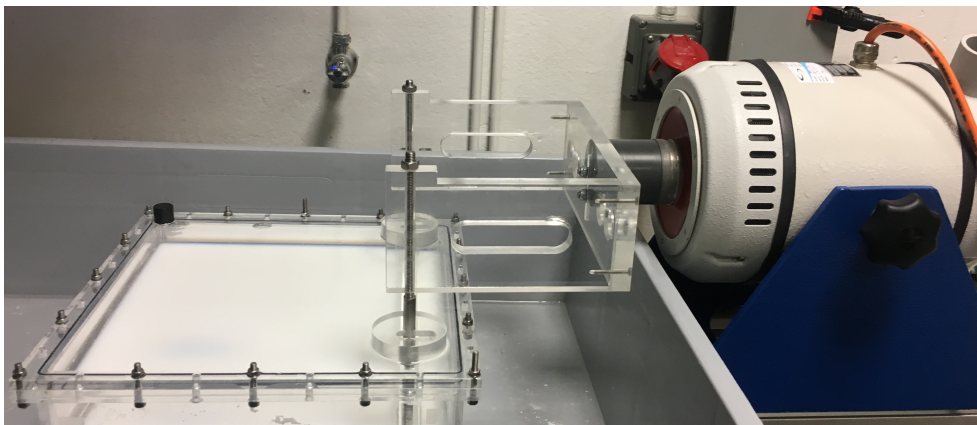


FIGURE 4.5 – Photo du dispositif expérimental pour les ondes à l'interface eau/huile silicone. Le pot vibrant relié au batteur est sur la droite de l'image. La plaque en Plexiglas qui fait office de batteur est immergée dans les fluides et est reliée au batteur à l'aide de deux tiges vissées. Sur la gauche se trouve la cuve fermée dans laquelle étaient disposées les fluides étudiés.

Nous rappelons l'expression de la relation de dispersion linéaire des ondes gravito-capillaires à l'interface de deux couches de fluides de profondeur finie :

$$\omega^2 \frac{\rho_2 \tanh(kh_1) + \rho_1 \tanh(kh_2)}{k \tanh(kh_1) \tanh(kh_2)} = g(\rho_1 - \rho_2) + \gamma_I k^2 \quad (4.2)$$

Les deux couches dans nos expériences peuvent être considérées comme profondes ce qui nous permet de nous affranchir des  $\tanh kh_1 \approx \tanh kh_2 \approx 1$  dans (4.2).

Cela donne la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma_I k^3}{\rho_2 + \rho_1} \quad (4.3)$$

Quatre huiles silicone de viscosités différentes ont été utilisées, allant de 10 fois la viscosité de l'eau à une viscosité identique à celle de l'eau. Les densités respectives des huiles augmentent en fonction de la viscosité, nous avons listé dans le tableau 4.1 les viscosités, les densités, la fréquence de transition gravito-capillaire et la tension à l'interface eau/huile pour chacun des fluides utilisés.

Densité de l'huile silicone	820	873	935	973
Viscosité de l'huile silicone (cSt)	1	2	5	10
Tension interfaciale eau/huile silicone (mN/m)	35	35	34	33
Fréquence de transition gravito-capillaire (Hz)	3.3	2.5	1.5	0.76

TABLE 4.1 – Valeur de la viscosité, de la densité, de la tension interfaciale entre l'eau et l'huile silicone et la fréquence de transition gravito-capillaire pour les différentes huiles utilisées.

Les tensions interfaciales ont été mesurées avec le tensiomètre de Lecomte du Nouy. Cet appareil est composé d'un anneau qui est placé sous l'interface liquide/liquide ou liquide/gaz, surface à étudier. L'anneau est tiré vers le haut jusqu'à ce qu'il traverse la surface du liquide. La force nécessaire pour retirer l'anneau de la surface du liquide est mesurée et liée à la tension de surface de ce dernier qui est affichée sur une platine graduée. L'erreur de mesure de cet instrument peut-être estimée à  $\pm 3$  mN/m sachant que j'ai refait les mesures plusieurs fois sur différents échantillons afin de vérifier la reproductibilité de la mesure et que l'anneau n'est pas parfaitement plat. Une vérification de la tension de surface de l'eau propre a été également effectuée pour s'assurer de la certitude des mesures et a été mesurée à 74 mN/m ce qui correspond aux valeurs attendues pour de l'eau pure sans pollution de surface à une température de 20°C. Les tensions mesurées à l'interface eau/fluide silicone sont comprises entre 34 mN/m et 35 mN/m ce qui est en accord avec les valeurs rapportées par la littérature pour une interface eau/huile silicone non polluée [122, 123]. Nous montrons par ailleurs que ces valeurs sont supérieures à ce qui a été rapporté dans [20, 121].

Le forçage a été effectué par une plaque en plexiglas, de 15 cm de long 5 cm de large et 1.5 cm d'épaisseur, qui se déplace horizontalement enfoncée sur 2 cm dans l'eau. Ce batteur est fixé à un pot vibrant dont la consigne de déplacement était pilotée par un programme Labview. L'amplitude du déplacement est constante mais la fréquence du mouvement est modulée autour d'une fréquence centrale. La

fréquence de forçage utilisée dans les résultats qui seront présentés correspond à une fréquence centrale  $f_c = 0.7$  Hz avec une modulation  $\pm 0.5$ Hz. La méthode de mesure du champ d'élévation des vagues est la profilométrie par transformée de Fourier, comme cela sera utilisé dans les différentes expériences au cours de cette thèse. Les mesures ont été faites sur une zone de  $20 \times 20$  cm<sup>2</sup> à 4 cm du batteur. Les détails de la méthode de mesure sont disponibles dans le chapitre 3. Plusieurs précautions ont été nécessaires au bon déroulement de cette série d'expériences :

- Le dégazage de l'eau par ébullition a été nécessaire afin d'éviter la génération de bulles d'air, lors du re-mélange des particules, qui migreraient en dessous du couvercle en Plexiglas rendant impossible l'exploitation des images enregistrées. Cette étape était suivie du refroidissement de l'eau à la température ambiante. La turbulence d'ondes étant très sensible à la propreté du fluide utilisée, il a donc fallu apporter un soin particulier lors de ces manipulations pour éviter toute pollution.
- L'utilisation de l'huile silicone 1 cSt a nécessité le respect de plusieurs consignes de sécurité :
  - L'installation d'une Ventilation Mécanique Contrôlée (VMC) dans la pièce où se déroulent les expériences à cause de sa volatilité. Le port d'un masque complet respiratoire avec cartouche de type EN148-1 a été obligatoire (voir une photo de la mise en place de l'expérience 4.6).
  - Le refroidissement de la pièce à 17°C puisque son point d'éclair est  $\approx 30^\circ\text{C}$ .
  - La mise à la terre de la cuve car l'huile accumule les charges électrostatiques.
  - Le port de gants et d'une combinaison contre le risque chimique.



FIGURE 4.6 – Photo de la mise en place de l'expérience avec l'huile silicone 1 cSt qui a nécessité le port d'un équipement de sécurité.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux régimes faiblement non-linéaires. Dans cette partie une analyse spectrale sera effectuée sur les résultats des expériences avec l'huile silicone de plus faible viscosité, 1 cSt. Les résultats permettront de nous prononcer sur l'existence ou non d'un régime de turbulence faible d'ondes capillaires. Une étude sur l'impact de la dissipation visqueuse sera par la suite présentée avec les différents huiles silicones utilisées. Enfin une description brève des régimes fortement non-linéaires sera effectuée.

## 4.3 Régime faiblement non-linéaire

Dans cette partie les pentes *rms* moyennes des vagues sont de l'ordre de 3%, ce qui est considéré comme représentatif d'une faible non-linéarité.

### 4.3.1 Ondes capillaires

#### 4.3.1.1 Analyse spatiale

Pour cette partie nous présentons les résultats obtenus avec l'huile silicone de viscosité égale à celle de l'eau. Pour cette huile la fréquence de transition gravito-capillaire vaut 3.3 Hz ce qui est bien inférieur à la valeur de 14 Hz habituelle en interface eau/air, le régime gravitaire est donc très fortement décalé vers les basses fréquences. Par ailleurs le forçage consiste en un mouvement sinusoïdal d'amplitude constante mais avec une modulation en fréquence telle que la fréquence vaut  $0.7 \pm 0.5$  Hz. L'intervalle entre le forçage et l'échelle capillaire est donc assez réduit, en effet la modulation minimale sur la fréquence est de 0.5 Hz afin d'obtenir un spectre continu. La profilométrie par transformée de Fourier permet la reconstitution de l'interface dans le temps. Nous représentons dans la figure 4.7a) un instantané de l'interface. Nous pouvons voir un champ aléatoire d'ondes faiblement pentues sans structures localisées.

Nous observons par ailleurs un mouvement à grande échelle dans la direction X, ceci est dû au forçage puisque X est la direction du déplacement du batteur, mais de plus petites échelles sont également présentes dans la direction transversale Y. Ceci correspond à un champ d'ondes aléatoires caractéristique d'un régime de turbulence faible.

La fonction de densité de probabilité de l'amplitude normalisée par sa variance est représentée sur la figure 4.7b) en trait plein tandis que la distribution gaussienne est représentée en tirets rouges. Nous voyons une évolution de la PDF assez proche de la distribution gaussienne, ceci confirme l'observation d'ondes aléatoires non cohérentes sur l'instantané. Par ailleurs une symétrie entre la branche positive et la branche négative est à noter comme rapporté par [121], ceci est différent de l'asymétrie habituellement observée des PDF des ondes gravito-capillaires [24, 19].



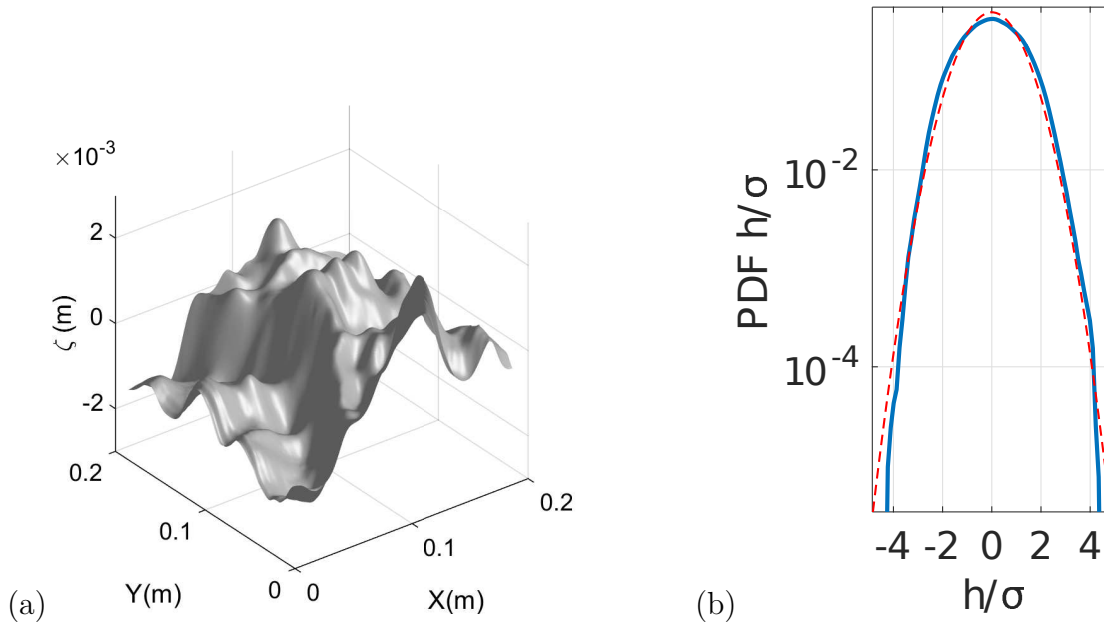


FIGURE 4.7 – (a) Instantané de l'interface reconstruite par la profilométrie par transformée de Fourier pour une expérience avec de l'huile silicone 1 cSt et de l'eau déminéralisée. La pente *rms* moyenne des ondes vaut 2.8%. (b) Fonction de densité de probabilité de la hauteur des vagues normalisée par sa variance correspondant à l'instantané (a). Le trait en tirets rouges correspond à la distribution gaussienne.

#### 4.3.1.2 Analyse spectrale

Nous effectuons une analyse spectrale en temps et en espace sur le champ de vitesse verticale de l'interface afin d'étudier la répartition de l'énergie dans le milieu. Nous représentons sur la figure 4.8 le spectre de vitesse spatio-temporel intégré sur toutes les directions de  $\mathbf{k}$  associé aux expériences de la figure 4.7. La relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales avec les paramètres spécifiques aux deux fluides utilisés est représenté en noir. Tout comme pour les expériences en régime gravito-capillaire nous observons une concentration de l'énergie autour de la relation de dispersion linéaire, en utilisant la valeur de la tension interfaciale mesurée précédemment, signe de turbulence faible. Notons que la répartition de l'énergie dans l'espace  $k - \omega$  nous permet également de valider la valeur de la tension interfaciale puisque celle-ci intervient dans le calcul de la relation de dispersion linéaire. Nous pouvons également souligner la présence d'énergie à des fréquences 10 fois supérieure à celle de la transition gravito-capillaire  $f_c = 3.3Hz$  et d'autant plus importante que la fréquence du forçage, ce qui rend compte de la transmission de l'énergie des grandes échelles d'injection aux plus petites échelles dissipatives.

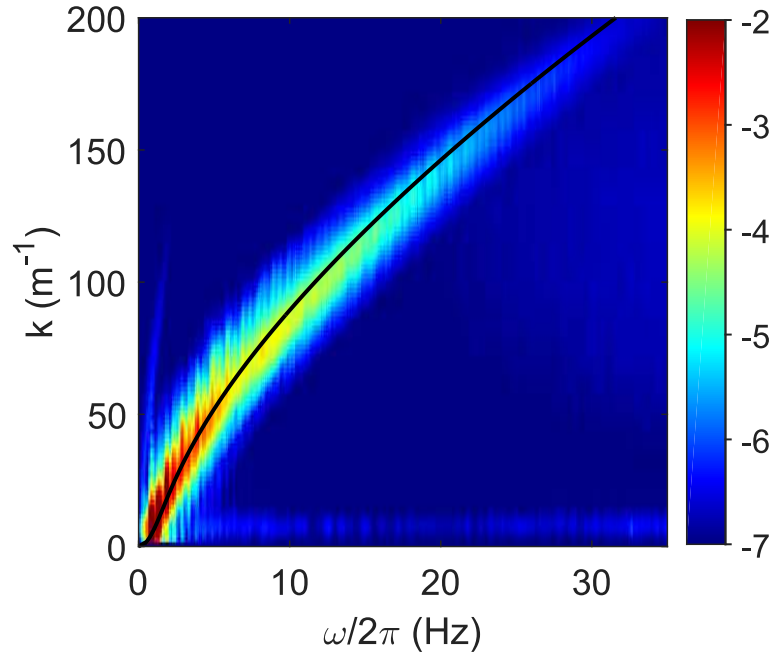


FIGURE 4.8 – Spectre spatio-temporel de la vitesse  $E^v(k, \omega/2\pi)$  intégré sur toutes les direction de  $\mathbf{k}$  d'une série d'expériences avec de l'huile silicone 1 cSt/eau en régime faiblement non-linéaire (pente *rms* des vagues  $\epsilon \approx 2.8\%$ ).

Le spectre précédent étant intégré sur tous les angles de  $\mathbf{k}$  il ne peut nous renseigner sur la distribution angulaire de l'énergie dans le système. Pour cela nous effectuons des coupes en  $k_x$  et  $k_y$  du spectre  $E^v(k_x, k_y, \omega/2\pi)$  à des fréquences données. Ces coupes sont présentées sur la figure 4.9.

Les spectres affichés sur la figure 4.9 montrent une assez bonne répartition de l'énergie en  $k_x$  et  $k_y$  et ce à des fréquences bien supérieures à celle du forçage. Rappelons également que le forçage opère selon  $k_x$ , la turbulence d'onde répartit donc efficacement angulairement l'énergie. Ce point est important car il est l'une des signatures des régimes de turbulence d'onde faible comme observé dans le chapitre 6 et dans les travaux de Q. Aubourg et N. Mordant [94, 24]. Il permet également de s'assurer que l'énergie observée n'est pas uniquement la trace spectrale du forçage. Nous notons tout de même sur la figure 4.9 que l'énergie est légèrement décalée par rapport à la relation de dispersion linéaire pour  $k_x > 0$ , soit dans le sens du forçage.

Ceci est dû à un écoulement moyen (de "streaming") créé par le faisceau d'ondes déplacées par le batteur le long de son axe de mouvement  $x$ . Des phénomènes similaires ont été observés par Berhanu et al. dans le régime gravito-capillaire à la surface de l'eau avec un batteur ayant un déplacement horizontal [83]. Pour ces expériences l'effet du courant était négligeable sur la propagation des ondes. Des mesures expérimentales dans le régime gravito-capillaire ont été également faites par l'équipe de Shats avec un batteur cylindrique se déplaçant verticalement [124]. Dans ce cas le courant semblait prédominer puisque des objets flottants à la surface de l'eau finissaient par rejoindre le piston grâce aux lignes de circulation. Leckler et al. [125] ont également mesuré à la surface de la Mer Noire des spectres



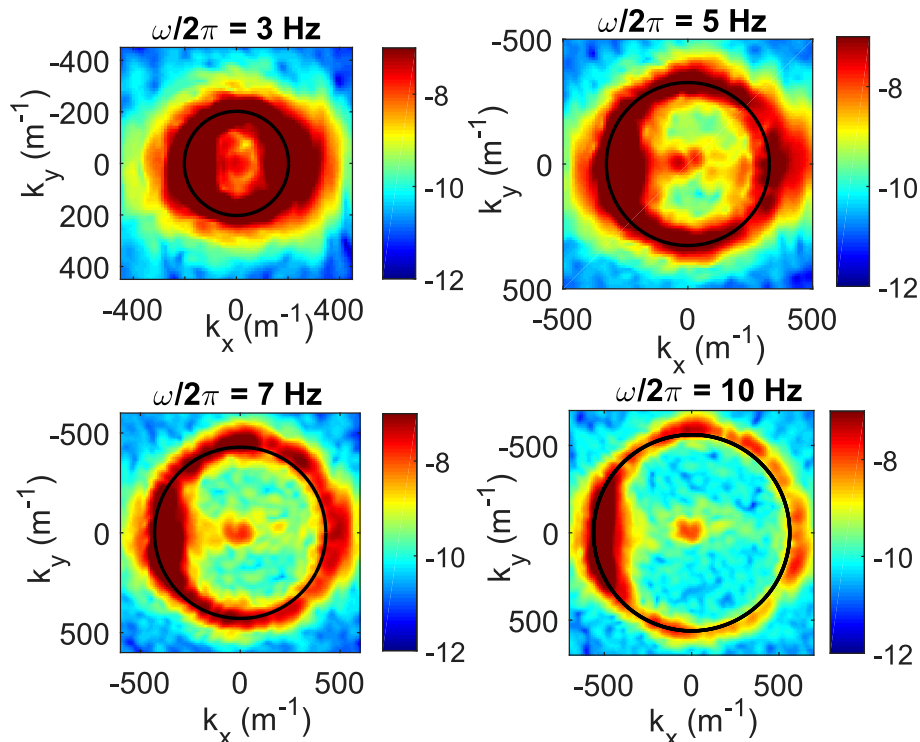


FIGURE 4.9 – Représentations du spectre  $E^v(k_x, k_y, \omega/2\pi)$  pour les fréquences  $\omega/2\pi = [3 \ 5 \ 7 \ 10]$  Hz. Les lignes en trait plein noir correspondent à la relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales.

de turbulence d'ondes de gravité avec un courant généré par le vent. Ce dernier s'illustre par un décalage de l'énergie sur les spectres  $k - \omega$  par rapport à la relation de dispersion linéaire sans vitesse moyenne du fluide. La présence d'un courant avec une vitesse moyenne  $U$  modifie la relation de dispersion linéaire des ondes telle que :

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma_I k^3}{\rho_2 + \rho_1} + kU \cos(\theta - \theta_U) \quad (4.4)$$

Avec  $U$  la vitesse moyenne du courant,  $\theta$  est la direction de propagation d'une onde donnée à l'interface et  $\theta_U$  la direction du courant généré par le batteur. Ainsi les ondes qui se propagent dans le sens du courant seront plus rapides que les ondes linéaires sans "streaming". Nous représentons sur la figure 4.10a) et 4.10b) respectivement le spectre spatiotemporel de vitesse des ondes se propageant dans la direction du courant et donc du forçage et le spectre spatiotemporel des ondes se propageant dans la direction transversale au courant.

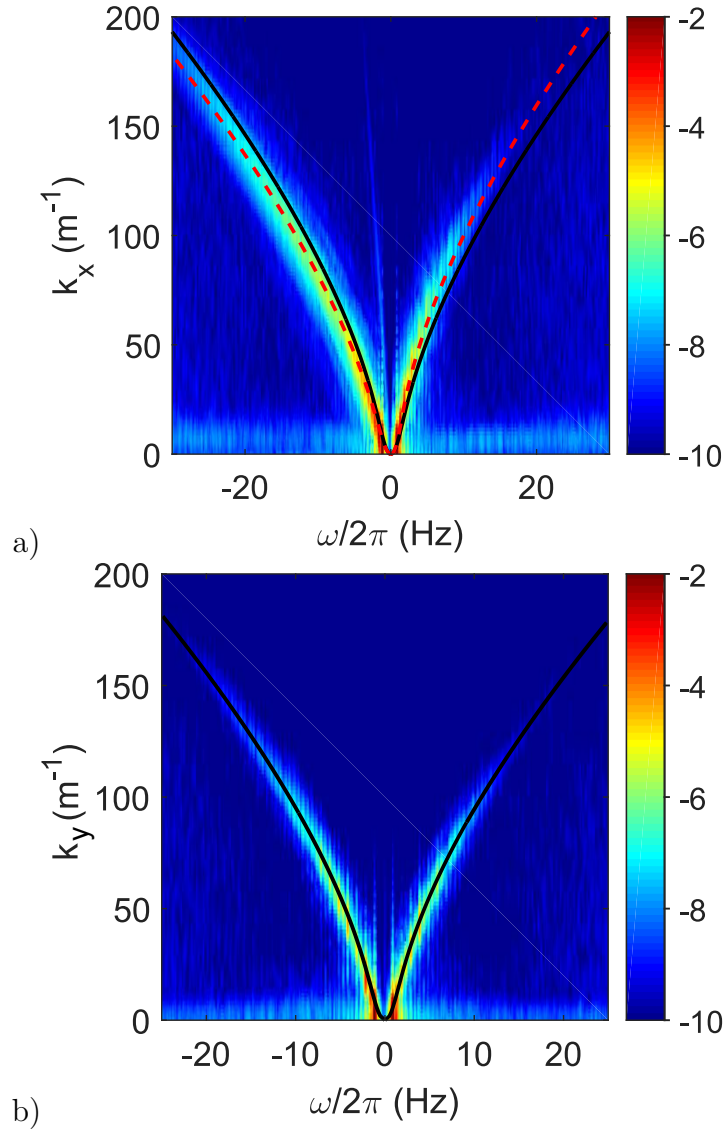


FIGURE 4.10 – a) Spectre spatio-temporel de vitesse des ondes longitudinales. Ces ondes sont dans la direction du streaming créé par le batteur.  $\omega/2\pi < 0$  correspond aux ondes se propageant dans le sens du courant créé par le batteur et  $\omega/2\pi > 0$  correspond aux ondes se propageant dans le sens opposé au courant du batteur. b) Spectre spatio-temporel de vitesse des ondes transversales, se propageant dans la direction transversale au forçage. Les lignes en trait plein noir représentent la relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales sans courant. Les lignes en tirets rouges représentent la relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales avec l'effet du courant.

Pour les ondes transversales nous voyons que l'énergie (figure 4.10b)) ne présente aucun décalage par rapport à la relation de dispersion sans courant. Cette observation est en accord avec l'expression de (4.10) puisque  $\cos(\theta - \theta_U)$  est nulle dans ce cas et l'effet du courant n'est pas ressenti sur les ondes. Cependant pour le spectre des ondes longitudinales (figure 4.10a)) nous avons bien un décalage de

l'énergie qui suit les nouvelles relations de dispersion corrigée par la vitesse  $U$  du courant. Les ondes se déplaçant dans le sens du courant sont accélérées et celles se propageant dans le sens opposé sont ralenties. La valeur de  $U$  est  $\approx 1.5$  cm/s et a été mesurée à l'aide des images enregistrées par caméra rapide de l'interface en suivant le déplacement du fluide du au déplacement du batteur (une visualisation du déplacement du fluide était possible en début de forçage avant le régime stationnaire). La correction induite par le courant est assez faible, en effet le décalage est peu marqué, le streaming ne semble pas perturber la turbulence d'ondes. Cet effet du courant n'est par ailleurs visible que sur les coupes des spectres en  $k_x$ .

Ayant vérifié que nos expériences s'inscrivent bien dans le cadre de la turbulence d'onde faible nous calculons le spectre de puissance des ondes interfaciales en fonction de la fréquence afin de le confronter à la prédiction de la TTF. Ce spectre est représenté sur la figure 4.11. La loi de puissance théorique pour les ondes capillaires  $E_\omega \propto \omega^{-17/6}$  est tracée en tirets noirs.

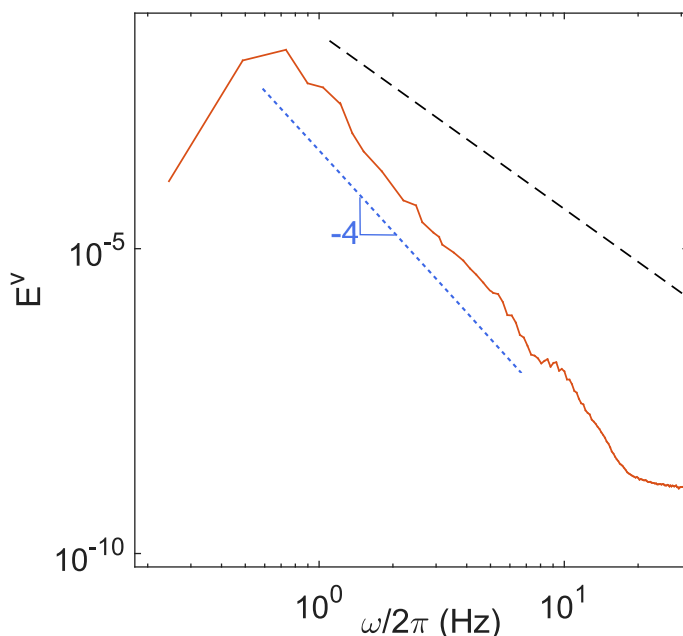


FIGURE 4.11 – Spectre de puissance de la vitesse verticale en fonction de la fréquence pour la série d'expériences avec l'huile silicone 1 cSt/eau à faible non-linéarité (pente *rms* des ondes  $\approx 2.8\%$ ). La ligne en tirets noirs représente la loi de puissance pour les ondes capillaires prédite par la TTF.

Le spectre mesuré décroît en loi de puissance  $\omega^{-4}$ , cette valeur est inférieure à la valeur de la pente théorique  $-17/6 \approx -3$ , mais elle est proche de celle mesurée expérimentalement par B. Issenmann et al. -3.6 [20] pour une couche d'huile silicone  $h_2$  non faible (1 cm). Toutefois cette différence entre pente expérimentale et pente théorique est en adéquation avec toutes les mesures expérimentales spatio-temporelles des ondes à la surface de l'eau. En effet pour les ondes gravitaires ainsi que les ondes gravito-capillaires les spectres mesurés présentent des pentes plus raides que les pentes théoriques en régime faiblement non-linéaire [94, 126, 57]. Cette différence n'est pas encore pleinement comprise mais des arguments sur

l'effet de la dissipation agissant à toutes les échelles [16] ainsi que les effets de taille finie [15] sont avancés pour expliquer ce désaccord entre expérience et théorie. Notons tout de même que la pente mesurée dans nos expériences, -4, reste proche de la valeur théorique de la pente du spectre des ondes capillaires et surtout qu'elle est bien supérieure aux pentes mesurées précédemment (mesures spatio-temporelles), -5 pour de fortes non-linéarités, dans les régimes gravito-capillaires [94, 24]. Ceci confirme le fait que nous sommes bien dans un régime capillaire différent du régime gravito-capillaire.

### 4.3.2 Effets de la dissipation visqueuse

#### 4.3.2.1 Analyse spatiale

Comme évoqué précédemment une grande source de disparité entre expérience et théorie est la dissipation. L'hypothèse de séparation d'échelle entre le temps linéaire, le temps non-linéaire et le temps dissipatif tel que  $T_L \ll T_{NL} \ll T_d$  est essentielle pour le développement de la théorie de la turbulence faible. En effet cette dernière est basée sur une interaction non-linéaire entre les ondes qui doit se mettre en place durant un temps plus long que les fluctuations linéaires des ondes mais plus rapide que le temps au bout duquel la dissipation agirait et amortirait l'ensemble des vagues. La dissipation a donc une influence importante sur la mise en place de la cascade d'énergie. Notons également que contrairement à ce qui est énoncé par la TTF, dans la réalité la dissipation agit à toutes les échelles. Cela est représenté pour les ondes à la surface de l'eau par principalement la dissipation visqueuse à laquelle vient s'ajouter éventuellement la pollution de surface par des tensioactifs ou des particules contenues dans l'air environnant qui forment un film visco-élastique à l'interface fluide/fluide et qui amortit fortement les ondes interfaciales (voir l'article [57] en annexe de ce manuscrit 7.4 pour plus de détails sur ce point pour les ondes de gravité). Afin d'évaluer les effets de la dissipation visqueuse nous avons entrepris une série d'expériences dans la même configuration que dans la partie précédente mais avec les différentes huiles silicones de viscosités différentes. En effet le taux de dissipation visqueuse  $\gamma_d(\omega)$ , qui est l'inverse du temps dissipatif  $T_d$ , peut-être relié à la viscosité pour une surface "propre", sans contamination, pour un fluide de profondeur grande comme cela a été utilisé dans [57, 54]. Pour le cas d'une interface entre deux fluides nous définissons une viscosité cinématique  $\nu_I$  équivalente à l'interface telle que suggéré dans [20] :

$$\nu_I = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.5)$$

en cas de couches d'huile et d'eau profondes, avec  $\mu_1$  la viscosité dynamique du fluide le plus dense et  $\mu_2$  celle du fluide le moins dense. Nous pouvons alors définir le taux et le temps de dissipation visqueuse à l'interface tels que :

$$\begin{cases} \gamma_d(\omega) = 2\nu_I k^2 \\ T_d(\omega) = \frac{1}{2\nu_I k^2} \end{cases} \quad (4.6)$$

Viscosité cinématique de l'huile silicone (cSt)	1	2	5	10
Densité de l'huile silicone	820	873	935	973
Viscosité cinématique interfaciale (cSt)	1	1.5	2.9	5.4
Nombre d'Atwood (%)	9.9	6.7	3.4	1.4

TABLE 4.2 – Nombre d'Atwood et viscosité cinématique à l'interface huile/eau pour chaque huile silicone utilisée

Nous voyons donc bien que le taux de dissipation visqueuse augmente en fonction de la viscosité dynamique de l'huile silicone.

Afin de mener une étude comparative efficace entre les différents huiles silicones nous devons d'abord définir une grandeur qui rend compte de la réduction du régime gravitaire, pour cela nous faisons appel au nombre d'Atwood défini tel que :

$$A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.7)$$

Nous pouvons alors écrire l'échelle et la fréquence capillaire telles que :

$$\begin{cases} l_c = 2\pi\sqrt{\frac{A\gamma_I}{g(\rho_1 + \rho_2)}} \\ f_c = \pi\sqrt{\frac{Ag}{2l_c}} \end{cases} \quad (4.8)$$

Lorsque  $A \rightarrow 0$ ,  $l_c$  et  $f_c \rightarrow 0$  le régime gravitaire tend à disparaître. Nous devons également définir un paramètre qui rend compte de l'importance de la dissipation, pour cela nous faisons appel à la viscosité dynamique équivalente de l'interface eau/huile  $\nu_I$ . Les valeurs de  $A$  et  $\nu_I$  pour chaque fluide silicone utilisé sont regroupées dans le tableau 4.2.

Nous remarquons sur le tableau 4.2 que plus le nombre d'Atwood tend vers 0 plus la densité interfaciale et donc la dissipation visqueuse est importante, il semble exister une compétition entre la dissipation, qui tendrait à éloigner les spectres d'énergie des prédictions théoriques, et la réduction de la gravité effective du milieu, qui tendrait à rapprocher les spectres d'énergie de celui prédit par la TTF pour les ondes purement capillaires. Nous allons dans ce qui suit essayer d'identifier l'importance des effets respectifs de chacun de ces deux phénomènes. Pour cela nous procédons à des expériences avec les différents type de fluide silicone en conservant les paramètres suivants :

- la fréquence de forçage =  $0.7 \text{ Hz} \pm 0.5 \text{ Hz}$
- le batteur possède 2 cm de sa hauteur dans la couche inférieure d'eau
- l'amplitude du déplacement du batteur est déterminée de manière à garder une pente *rms* moyenne des ondes  $\approx 3\%$  afin de garder l'intensité des non-linéarités fixe.

Nous représentons d'abord la reconstitution de l'interface pour les différents types de fluides silicone sur la figure 4.12. Les échelles visibles sur les reconstitutions de surface sont extrêmement différentes d'un fluide à l'autre. En effet pour

la viscosité interfaciale la plus élevée nous semblons voir sur la figure 4.12a) uniquement le forçage à grande échelle, aucune autre échelle plus petite n'est visible. Plus la viscosité interfaciale diminue, soit de la figure 4.12b) à la figure 4.12d), plus les échelles présentes à l'interface sont de plus en plus variées et contiennent de plus petites échelles.

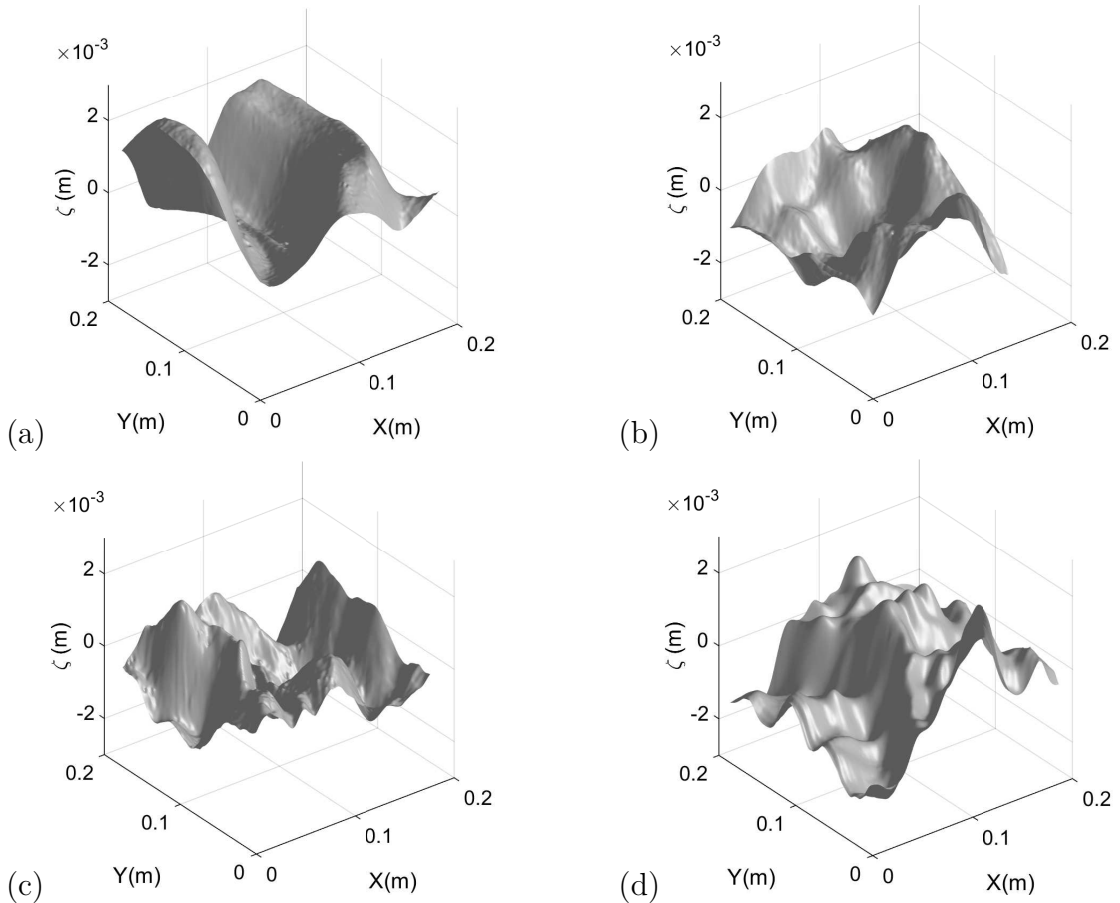


FIGURE 4.12 – Reconstitution de l'interface huile/eau pour les fluides silicones de viscosité cinématique respective (a) 10 cSt, (b) 5 cSt, (c) 2 cSt, (d) 1 cSt.

Ceci est d'autant plus visible sur la figure 4.13 où sont représentés les champs de vitesse dans l'espace (X-Y) associés aux reconstitutions de l'interface de la figure 4.12. En effet on voit clairement sur la figure correspondant à l'expérience avec le fluide silicone le plus visqueux 4.13 a) le mouvement à grande échelle du batteur, tandis que les plus petites échelles apparaissent progressivement en diminuant la viscosité jusqu'au cas de la viscosité de 1 cSt sur la figure 4.13 d) où on semble voir un champ aléatoire de différentes échelles qui ne sont plus dominées par le forçage. Pour cette viscosité le champ d'élévation de vagues représenté sur la figure 4.12 d) est semblable à celui mesuré à l'interface eau/ air puisque la tension eau/air vaut également 1 cSt (voir chapitre 6 pour les expériences de TTF à la surface de l'eau).

Une comparaison entre la distribution des amplitudes des ondes normalisées par la variance est également importante afin d'identifier ou non la symétrie  $z \rightarrow$

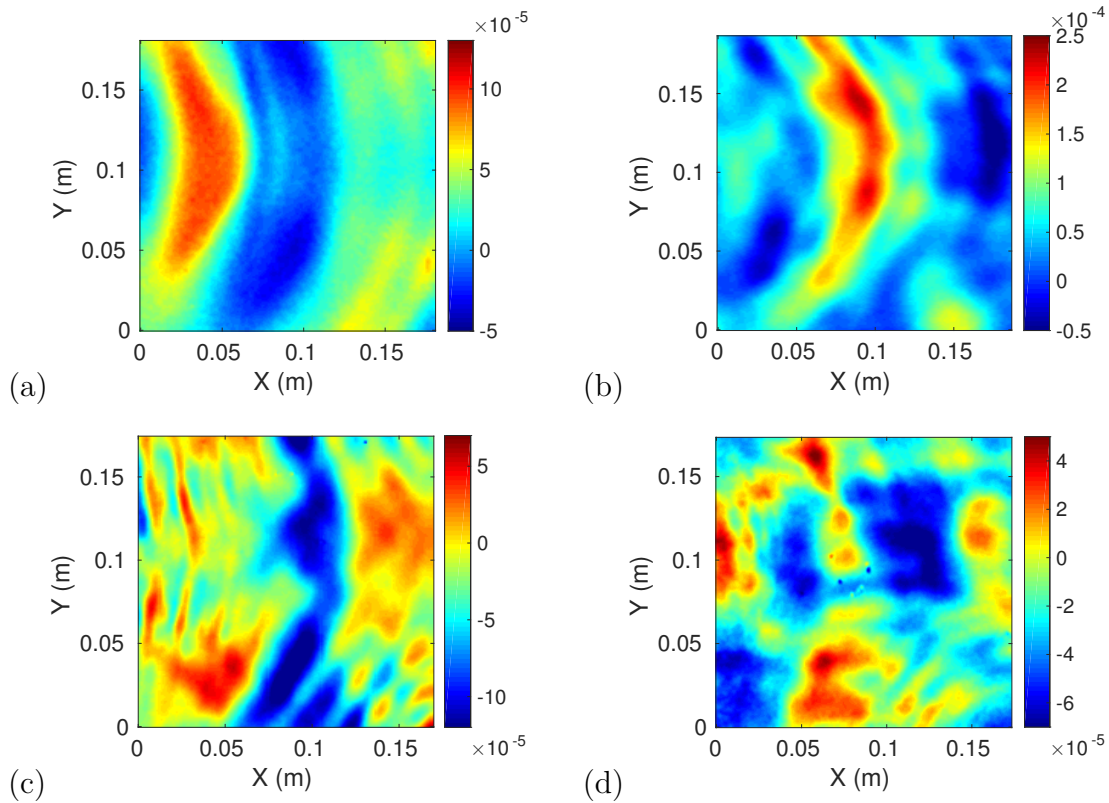


FIGURE 4.13 – Champs de vitesse verticale de l'interface huile/eau pour les fluides silicones de viscosité cinématique respective (a) 10 cSt, (b) 5 cSt, (c) 2 cSt, (d) 1 cSt.

–z. Nous traçons sur la figure 4.14 les fonctions de densité de probabilité des ondes pour les quatre viscosités.



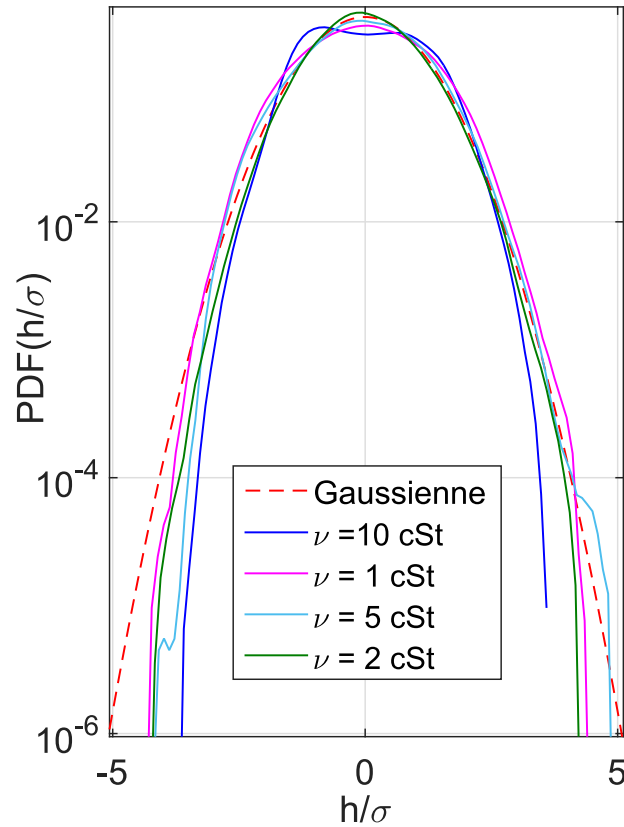


FIGURE 4.14 – Fonction de densité de probabilité des amplitudes des ondes interfaciales normalisées par la variance pour les différents fluides silicones en régime faiblement non-linéaire  $\epsilon \approx 3$ . La ligne en tirets rouges représente la distribution normale.

Nous observons d'abord que la distribution des vagues pour l'expérience avec le fluide silicone le plus visqueux est très différente de la Gaussienne. En effet nous voyons deux bosses quasi-symétriques par rapport à 0 qui dépassent de la Gaussienne et des ailes qui sont en dessous de la Gaussienne. Cet aspect est à relier au forçage largement prédominant que nous avons observé pour les expériences avec des fluides de grande viscosité. En effet le forçage correspond à un mouvement sinusoïdal modulé en fréquence or la distribution d'un mouvement sinusoïdal correspond exactement à deux bosses symétriques au dessus de la distribution normale. Lorsque la viscosité diminue l'allure des PDF rejoint de plus en plus celle de la Gaussienne. Notons qu'une asymétrie entre la branche positive et négative de la distribution de ondes de l'expérience avec un fluide silicone 5 cSt est notée. Cette asymétrie est réduite pour les huiles silicone 2 cSt et 1cSt pour lesquelles les ondes affichent une quasi-symétrie par rapport à 0. Cette observation confirme bien la mise en place de la turbulence faible dans le milieu lorsque la viscosité diminue puisque la TTF s'applique à un champ aléatoire d'ondes sans structure localisée. Notons tout de même que plus la viscosité augmente plus le nombre d'Atwood tend vers 0 donc on devrait tendre vers un régime purement capillaire où la symétrie  $z \rightarrow -z$  est préservée or c'est l'évolution inverse qui est notée ici.



### 4.3.2.2 Analyse spectrale

L'ensemble des résultats de l'analyse spatiale rend compte de l'importance de la dissipation visqueuse, qui pour le cas le plus visqueux, amortit fortement toute échelle plus petite que celle du forçage. Cela devrait à priori entraîner des changements importants sur la cascade d'énergie dans le milieu. Nous nous intéressons d'abord à l'efficacité de la cascade d'énergie en traçant les spectres spatio-temporels intégrés de la vitesse sur la figure 4.15.

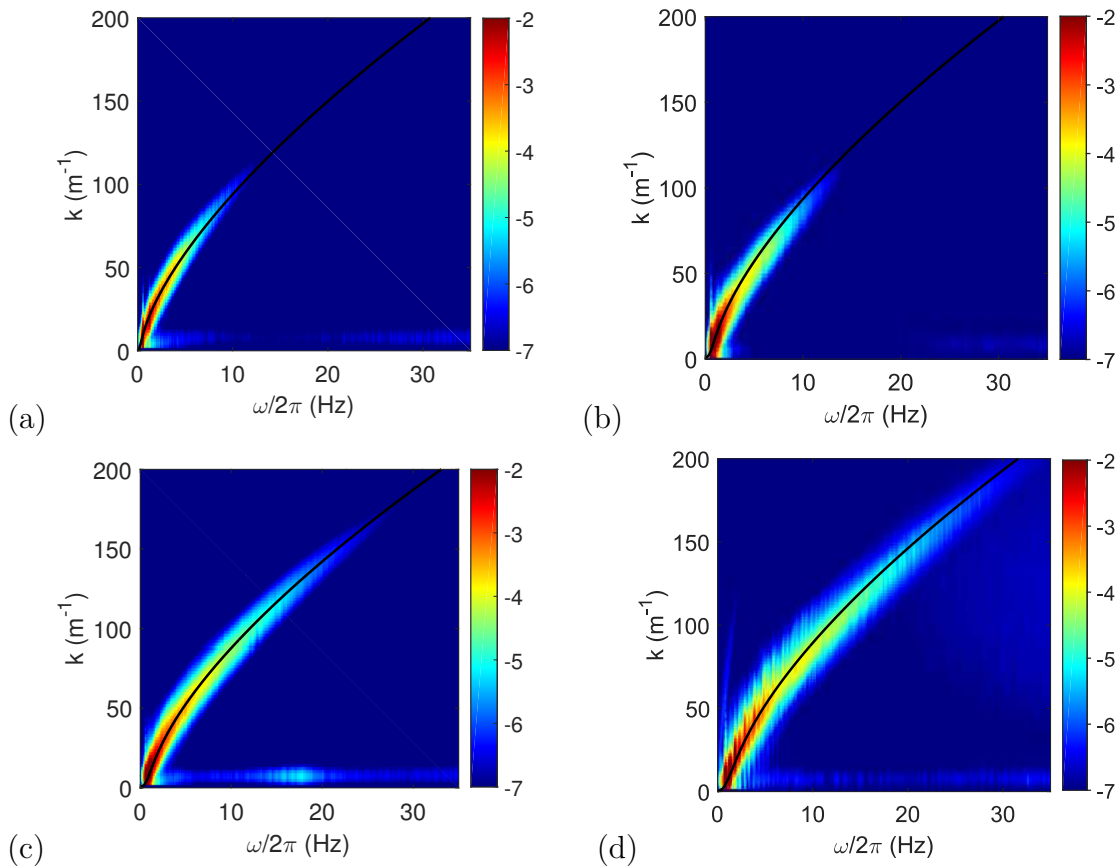


FIGURE 4.15 – Spectres spatio-temporels de vitesse intégrés pour les différents types de fluides silicone utilisés. Ils sont associés respectivement au fluide de viscosité (a) 10 cSt, (b) 5 cSt, (c) 2 cSt et (d) 1 cSt. Les lignes noires représentent les relations de dispersion linéaire des ondes interfaciales.

Nous observons que quand bien même le forçage effectif est identique pour chaque expérience l'énergie est moins efficacement transmises aux petites échelles en fonction de la viscosité. La non-linéarité,  $\epsilon$ , étant identique pour toutes nos expériences, on s'attendrait à ce que le temps non-linéaire soit le même au moins aux échelles proches du forçage. A plus petite échelle la dissipation visqueuse a fortement atténué les vagues et cela est d'autant plus marqué lorsque la viscosité augmente. Ce résultat est en accord avec la définition du temps dissipatif en (4.6), en effet ce dernier diminue lorsque la viscosité interfaciale augmente, réduisant ainsi l'intervalle de temps pendant lequel les interactions non-linéaires se

développement. La dissipation vient alors prématurément stopper la transmission de l'énergie.

Un autre aspect de l'efficacité de la cascade d'énergie est la distribution angulaire de l'énergie. En effet la turbulence d'onde tend à redistribuer l'énergie injectée dans toutes les directions de l'espace des vecteurs d'onde [8]. Nous traçons des coupes en  $k_x$  et  $k_y$  du spectre de la vitesse pour les différents types de fluides silicone à deux fréquences données : 5 Hz et 10 Hz, respectivement sur la figure 4.16 et sur la figure 4.17. Nous pouvons clairement voir sur la figure 4.16 qu'à 5 Hz le spectre  $E^v(k_x, k_y)$  se remplit angulairement progressivement en fonction de la viscosité interfaciale. En effet à partir du fluide silicone de viscosité 2 cSt le système peut-être considéré comme relativement isotrope à 5 Hz.

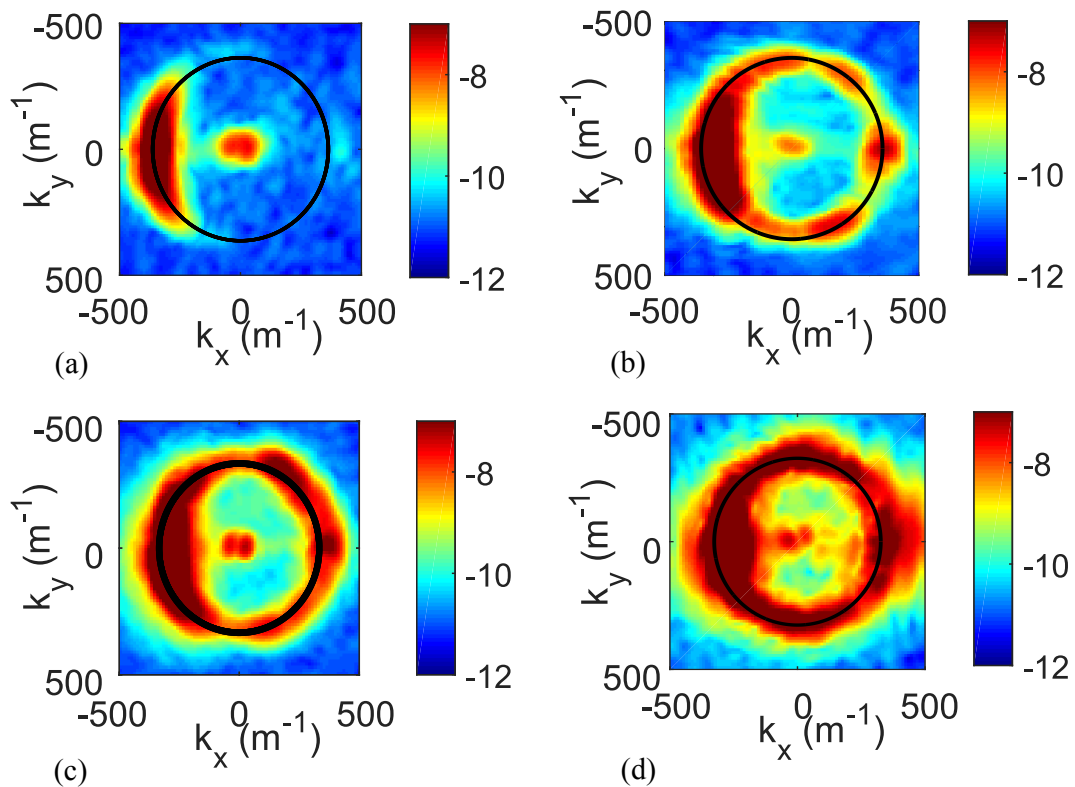


FIGURE 4.16 – Représentations du spectre  $E^v(k_x, k_y, 5Hz)$  pour les fluides silicones de viscosité cinématique valant (a) 10 cSt, (b) 5 cSt, (c) 2 cSt et (d) 1 cSt. Les lignes en trait plein noir correspondent à la relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales.

Cette évolution est moins développée à 10 Hz comme nous pouvons le voir sur la figure 4.17, en effet à cette fréquence seule l'expérience avec une tension interfaciale de 1 cSt semble présenter une distribution énergétique isotrope.

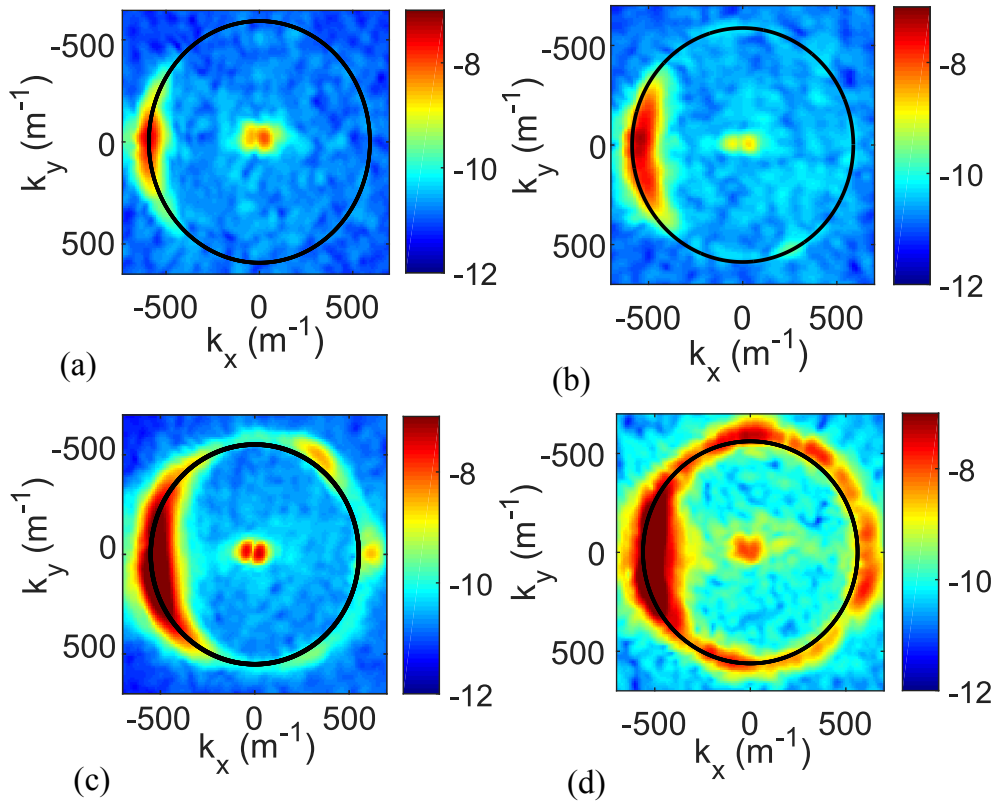


FIGURE 4.17 – Représentations du spectre  $E^v(k_x, k_y, 10Hz)$  pour les fluides silicones de viscosité cinématique valant (a) 10 cSt, (b) 5 cSt, (c) 2 cSt et (d) 1 cSt. Les lignes en trait plein noir correspondent à la relation de dispersion linéaire des ondes interfaciales.

La distribution angulaire de l'énergie est donc également d'autant plus limitée lorsque la viscosité des fluides est grande.

Les résultats présentés jusque là sont en accord avec les hypothèses de séparation des échelles de temps sur lesquelles est fondée la TTF, ils sont par ailleurs intuitifs, en effet il semble raisonnable que pour une non-linéarité constante les ondes soient plus amorties à une interface dont la viscosité est plus importante. Un raisonnement similaire peut-être être fait quant au raidissement de la pente du spectre de puissance des ondes interfaciales en fonction de la viscosité des fluides. Cette évolution se confronte à l'effet inverse induit par l'augmentation de la densité (lorsque  $\nu$  augmente) qui fait tendre le nombre d'Atwood vers 0 et qui rapprocherait la pente des spectres d'énergie vers le régime purement capillaire  $E_\omega^v \propto \omega^{-17/6}$ .

Afin d'identifier quel effet est prédominant dans nos expériences nous traçons sur la figure 4.18 les spectres de puissance des vagues en fonction du nombre d'onde pour les quatre types d'huiles silicone. Nous constatons que lorsque la viscosité du fluide silicone diminue (et que simultanément  $A$  augmente) le spectre devient de moins en moins raide. Notons également que la fréquence capillaire qui est de 0.3 Hz pour le fluide silicone de viscosité 1cSt augmente à 3 Hz pour l'huile 10 fois plus visqueuse.

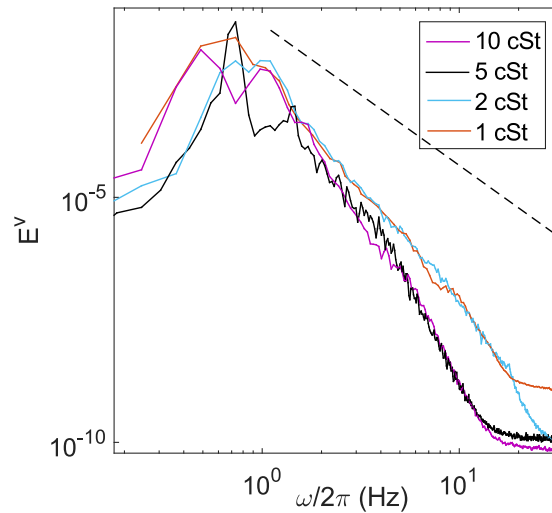


FIGURE 4.18 – Superposition des spectres de puissance de la vitesse en fonction de la fréquence pour les différents types de fluide silicone. La ligne en tirets noirs représente la pente théorique du spectre des ondes capillaires  $-17/6$ .

Les effets de la viscosité sont clairement prédominants au vu de la nette diminution de la pente des spectres lorsque celle-ci augmente. Pour quantifier cette évolution nous représentons sur la figure 4.19 a) la valeur des pentes des spectres en fonction de la viscosité de la couche de silicone et sur la figure 4.19 b) son évolution en fonction du nombre d'Atwood. Nous voyons clairement que la pente des spectres va de  $-6$  pour la plus forte densité jusqu'à  $-4$  pour la plus faible densité, nous avons donc une tendance à se rapprocher de la pente théorique du spectres des ondes capillaires  $-17/6$ , sans l'atteindre néanmoins.

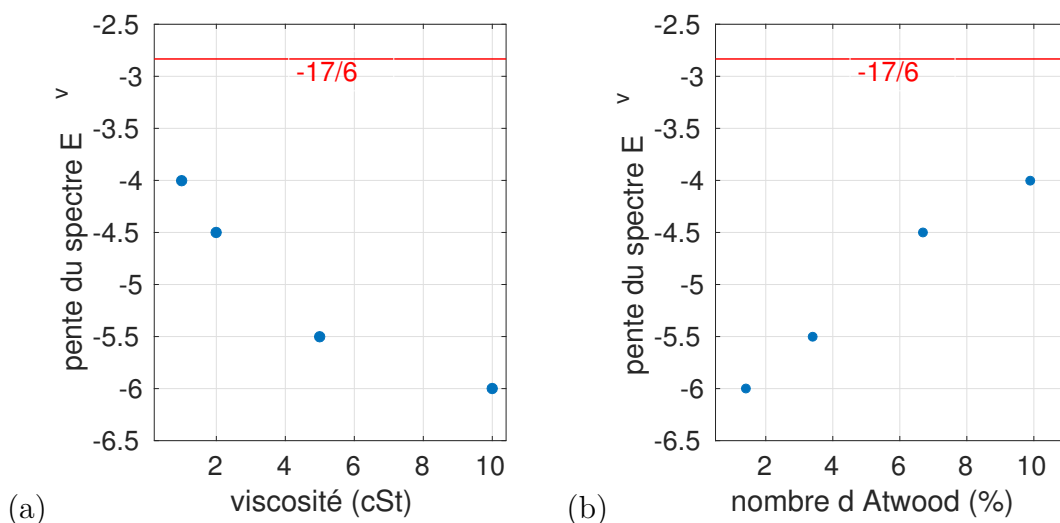


FIGURE 4.19 – (a) Evolution de la pente des spectre de puissance des ondes interfaciales, mesurée sur l’intervalle [1.5 10] Hz, en fonction de la viscosité cinématique de la couche de silicone.(b) Evolution de la pente des spectre de puissance des ondes interfaciales en fonction du nombre d’Atwood du milieu. La ligne rouge représente la pente théorique du spectre des ondes capillaires.

Sur la figure 4.19 b) nous pouvons constater que les spectres se raidissent lorsque le nombre d’Atwood diminue ce qui est assez surprenant. En effet en tendant vers  $A=0$  on tend vers un régime purement capillaire et un spectre  $E_{\omega}^v \propto \omega^{-17/6}$  mais cette tendance semble être complètement contrebalancée par celle de la dissipation visqueuse.

Afin de mieux comprendre l’impact de la dissipation visqueuse nous examinons la séparation d’échelle essentielle au développement de la TTF  $T_L \ll T_{NL} \ll T_d$ . Pour cela nous traçons sur la figure 4.20 l’évolution du rapport entre le temps dissipatif comme défini en (4.6) et le temps linéaire  $T_L$ , défini comme  $1/\omega$  avec  $\omega$  la pulsation linéaire des ondes interfaciales.

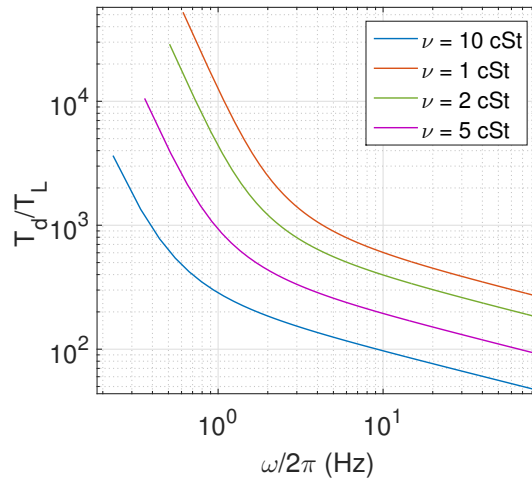


FIGURE 4.20 – Evolution du rapport du temps dissipatif sur le temps linéaire pour les ondes interfaciales en fonctions de  $\omega$  pour toutes les huiles silicones étudiées. La viscosité cinématique des fluides augmente du haut vers le bas.

Nous voyons clairement que le rapport  $T_d/T_L$  diminue lorsque la viscosité diminue, on note même une décroissance de plus d'une décade pour ce rapport entre les viscosités 1 cSt et 10 cSt. Afin que la cascade d'énergie puisse se mettre correctement en place nous devons avoir la séparation d'échelle la plus grande possible entre le temps dissipatif et le temps linéaire afin que les transferts d'énergie puissent avoir lieu. En réduisant ce rapport les transferts d'énergie sont de moins en moins efficaces et la coupure dissipative intervient plus rapidement ce qui explique le raidissement des spectres lorsque la viscosité augmente.

La séparation d'échelle entre le temps non-linéaire  $T_{NL}$  et le temps linéaire  $T_L$  doit être également grande afin que les transferts non-linéaires puissent se mettre en place. Pour les transferts à  $N$  ondes, la TTF prédit une évolution du rapport  $T_{NL}/T_L$  en  $\epsilon^{4-2N}$ , comme définit dans [127] avec  $\epsilon$  le degré de non-linéarité dans le milieu et représenté par la pente *rms* des vagues dans nos travaux. Pour les ondes capillaires les interactions font intervenir à l'ordre le plus bas 3 ondes ce qui donne  $T_{NL}/T_L \propto \epsilon^{-2}$  soit  $T_{NL}/T_L \approx 1000$  pour  $\epsilon = 0.03$ . La séparation d'échelle attendue par la TTF ne peut donc être atteinte dans nos expériences qu'en dessous de 5 Hz pour une interface eau/huile silicone 1 cSt comme représenté sur la figure 4.20 et en dessous de 0.4 Hz pour l'interface eau/huile silicone 10 cSt et donc proche de la transition gravito-capillaire. Ces fréquences sont dramatiquement réduites si l'on considère la limite  $A=0$  où les transferts se font entre 4 ondes et  $T_{NL}/T_L \approx 1000000$  pour  $\epsilon = 0.03$ .

Ceci explique certaines expériences dans la littérature [83, 20] rapportant des spectres proches des prédictions théoriques mais avec une forte non-linéarité dans le système. En effet en augmentant la non-linéarité, le rapport  $T_{NL}/T_L$  est diminué. Par contre à partir d'un certain forçage des structures localisés finissent par apparaître dans le milieu et la TTF n'est alors plus valable, comme cela a pu être observé dans les régimes forts par P. Cobelli et al. [92]. De même dans les expériences de bicouche eau/huile silicone d'Issenman et al. [20], les couches de

silicone étant très fines ( de 4 à 9 mm) il est assez probable que des solitons aient pu se développer. Cela pourrait expliquer les spectres mesurés qui atteignent de très hautes fréquences (100-1000 Hz) où la viscosité est censé avoir dissipé la majorité des vagues. Des expériences complémentaires spatio-temporelles sont alors indispensables afin de vérifier ces points.

Afin d'observer certaines de ces structures, signe de turbulence forte, je vais présenter brièvement dans ce qui suit un régime fortement non-linéaire à l'interface eau/huile silicone 10 cSt.

## 4.4 Régime fortement non-linéaire : structures localisées

Dans cette partie nous nous sommes intéressés à quelques régimes fortement non-linéaires à l'interface eau/huile silicone 10 cSt. Le choix du fluide le plus visqueux pour ces expériences a été motivé par de potentielles comparaisons avec les expériences en bicouche reportées en [20, 121] où un fluide similaire a été utilisé. Ce choix a également était fait afin de montrer que les structures localisées sont plus facilement générées lorsque le rapport  $T_d/T_L$  est faible, ce qui est le cas lorsque la viscosité est grande. Le dispositif expérimental est identique à celui utilisé dans la partie précédente ainsi que la profondeur de chaque couche de fluide. La fréquence centrale de forçage est 1 Hz avec une modulation de  $\pm 0.5$  Hz, ce qui est supérieur à celle utilisée pour les expériences en TTF ( $0.7 \pm 0.5$  Hz). L'amplitude du forçage est également supérieure à celle des expériences en régime faiblement non-linéaire . En effet avec une fréquence et une amplitude élevées du forçage l'accélération du batteur devient telle que des ondes de choc se forment. Une pente *rms* des ondes de l'ordre de 6% a été mesurée pour ces régimes, soit le double de ce qui était observable en régime de TTF. Les ondes de chocs qui se forment au moment de l'impact du batteur sont dans nos expériences de bicouche non stables. En effet l'onde de choc développe rapidement sur tout son front de propagation des ondes à petites échelles, comme cela est visible sur la reconstitution du champ de vitesse sur la figure 4.21. Ces ondes rayonnent de l'énergie qui est puisée dans l'onde de choc, qui finit alors par se désagréger complètement. Dans ce sens on ne peut pas réellement parler d'onde de choc puisque cette dernière est sensée être cohérente par définition mais peut-être pouvons nous parler de quasi-onde de choc au même titre que Zakharov parle de quasi-soliton lorsque le soliton n'est pas stable et finit également par perdre de l'amplitude au cours de sa propagation [128]. Ces structures sont très semblables à ce qui est observé durant les expériences à l'interface eau/air de Berhanu et al. [83] dans les régimes fortement non-linéaires.

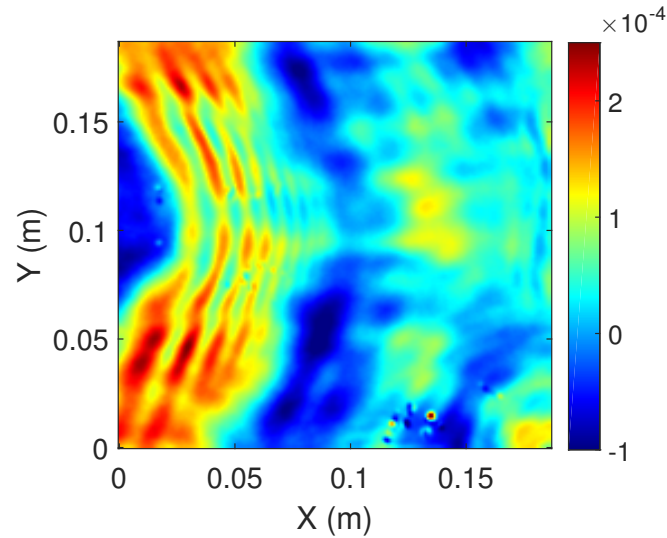


FIGURE 4.21 – Champ de vitesse en 2D de l’onde de choc, localisée à gauche de l’image, lors d’une expérience bicouche eau/huile silicone 10 cSt avec une fréquence de forçage  $1Hz \pm 0.5Hz$ . La pente *rms* moyenne des vagues est de l’ordre de 6%.

Afin de caractériser l’apport énergétique de la structure générée au moment du forçage dans le système nous effectuons une analyse spectrale sur le champ de vagues proche du batteur puis sur la partie éloignée du batteur où le forçage est le moins marqué. Les spectres spatio-temporels de la vitesse verticale des deux situations respectives sont représentés sur les figures 4.22a) et 4.22b). On peut noter qu’avec l’apport de la structure générée par le forçage l’énergie atteint une fréquence quasi-double,  $\approx 40$  Hz, que ce qui est mesuré loin du batteur. L’énergie est par ailleurs bien localisée sur la relation de dispersion linéaire des ondes gravito-capillaires ce qui nous permet d’affirmer que les échelles capillaires sur le front de l’onde de choc sont des ondes dispersives et non pas des précurseurs non-dispersifs qui se propageraient à la vitesse constante de l’onde de choc. Nous notons toutefois un léger décalage de l’énergie en dessous de la relation de dispersion au delà de 10 Hz, comme cela a été observé par Berhanu et al. [83]. Ceci peut-être attribué à la forte non-linéarité dans le milieu, puisqu’une observation similaire a été noté par Q. Aubourg [24] pour les ondes gravito-capillaires avec un forçage fort.



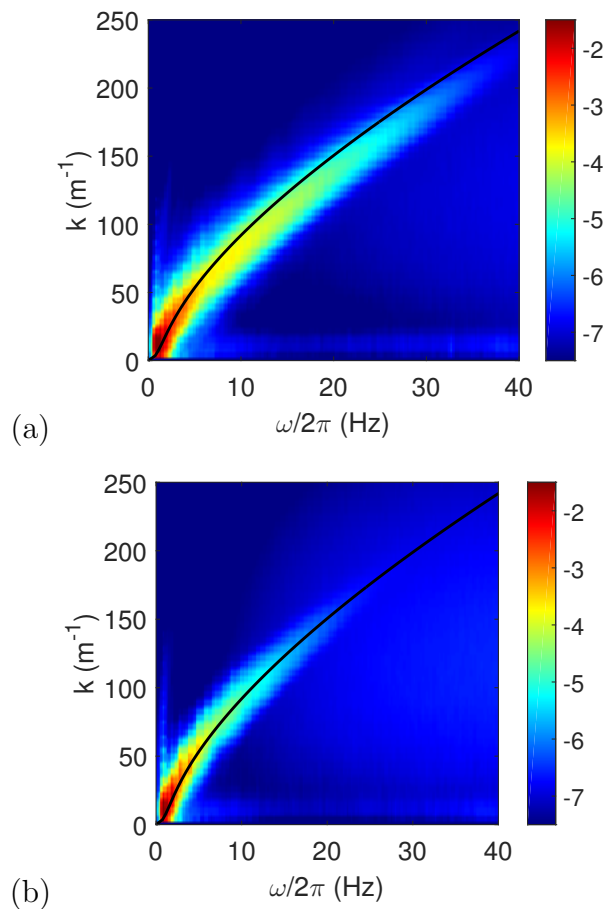


FIGURE 4.22 – a) spectre spatio-temporel de la vitesse verticale du champ de vague contenant la quasi-onde de choc du forçage dans une expérience de bicouche eau/huile silicone 10 cSt avec une pente *rms* moyenne de 6 %. b) spectre spatio-temporel de la vitesse vertical du champ de vague loin du batteur pour la même expérience qu'en a). La ligne noire correspond à la relation de dispersion linéaire.

Les spectres en fréquence de la vitesse sur la figure 4.23 révèlent l'évolution moins pentue de la cascade d'énergie dans le cas où le champ d'onde contient l'onde de choc du batteur et une transition aux alentours d'une fréquence de  $\approx 5$  Hz vers un régime nettement moins pentue mais qui décroît et atteint le bruit statistique assez rapidement (sur 1/3 de décade). Cette transition peut-être être reliée à l'échelle des structures dispersives présentes sur le front de propagation de la discontinuité créée au niveau du batteur.

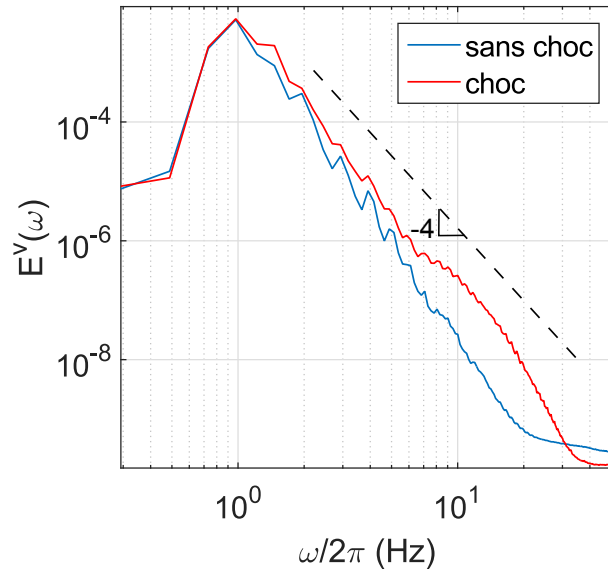


FIGURE 4.23 – Spectres de la vitesse verticale en fonction de  $\omega$  pour le champ de vague proche du batteur avec la quasi onde de choc, en trait plein rouge, et loin du batteur sans la quasi onde de choc en trait plein bleu. La ligne en tirets noirs représente une pente de  $-4$ .

L'analyse spectrale énoncée ci-dessus met en lumière la proximité avec les prédictions de la TTF de la cascade d'énergie dans le cas où le champ d'ondes contient une structure non-linéaire non-dispersive que nous appelons quasi-onde de choc. Cette structure injecte de l'énergie à large bande dans le milieu de part l'existence des échelles capillaires sur son aile de propagation et nous nous interrogeons alors sur la validité de la TTF dans ce cas et même sur la notion de turbulence si ce que l'on observe n'est autre que ce que l'on injecte. En effet l'une des hypothèses majeure de la TTF est la séparation d'échelle entre injection et dissipation d'énergie, ces échelles sont supposés localisées or le forçage dans ce cas ne l'est clairement pas. Les échelles les plus petites dans le milieu sont la trace directe du forçage et non le résultat d'une interaction non-linéaire entre différentes ondes libres. Seule la dispersion semble agir en décomposant l'onde de choc jusqu'à sa dissipation totale. Cette étude brève nous permet d'apporter une importance primordiale à l'analyse spatio-temporelle dans les expériences de turbulence d'ondes. En effet la reconstitution de l'interface est nécessaire afin de s'assurer que les cascades d'énergie mesurées sont bien dues aux interactions faiblement non-linéaires dans le milieu et non la trace du forçage. Nous soulignons tout de même qu'il est très difficile de s'affranchir de la signature du forçage pour les expériences mais des précautions sont tout de même réalisables et nécessaires afin de la minimiser comme la mesure des ondes assez loin du batteur.

Nous finissons cette partie par une présentation rapide d'une "véritable" onde de choc dispersive, qui reste donc cohérente et dont les précurseurs sur son front de propagation gardent la vitesse constante du corps du choc. Ce type d'onde

a été observé au cours d'une série d'expériences à l'interface eau/air avec une topographie du fond de la cuve non plane. En effet sur la moitié du fond de la cuve une marche d'une hauteur de 5 cm était présente. La profondeur d'eau était de 6 cm côté sans marche et donc de 1 cm au dessus de la marche. Le forçage a été réalisé sur la partie eau profonde avec une plaque en Plexiglas reliée à un pot vibrant dont le signal était un sinus d'amplitude constante et une fréquence centrale de 1 Hz modulée par  $\pm 0.5$  Hz. La pente *rms* moyenne des ondes au dessus de la marche était de l'ordre de 4% ce qui est assez faible.

Une reconstitution de la surface de l'eau est présente sur la figure 4.24a) et le profil de la hauteur des ondes au milieu de la largeur de la cuve le long de leur axe de propagation est visible sur la figure 4.24b). Nous voyons que l'onde de choc apparaît au niveau de la discontinuité de la topographie avec un front très raide qui est chevauché par des petites échelles. Ces ondes de choc sont très semblables à ce qui a été observé par de mesures locales dans le régime gravitaire en eau peu profonde dans un canal de 90 m de long par l'équipe de M. Onorato [84]. Dans notre cas, de par notre configuration, les ondes de choc dispersives sont stables et se propagent le long de la partie en eau peu profonde au dessus de la marche sans modification notable de leur forme, elles sont réfléchies sur le bord de la cuve et laissent la place à un ensemble d'ondes aléatoires dispersives non localisées une fois la partie eau profonde atteinte.

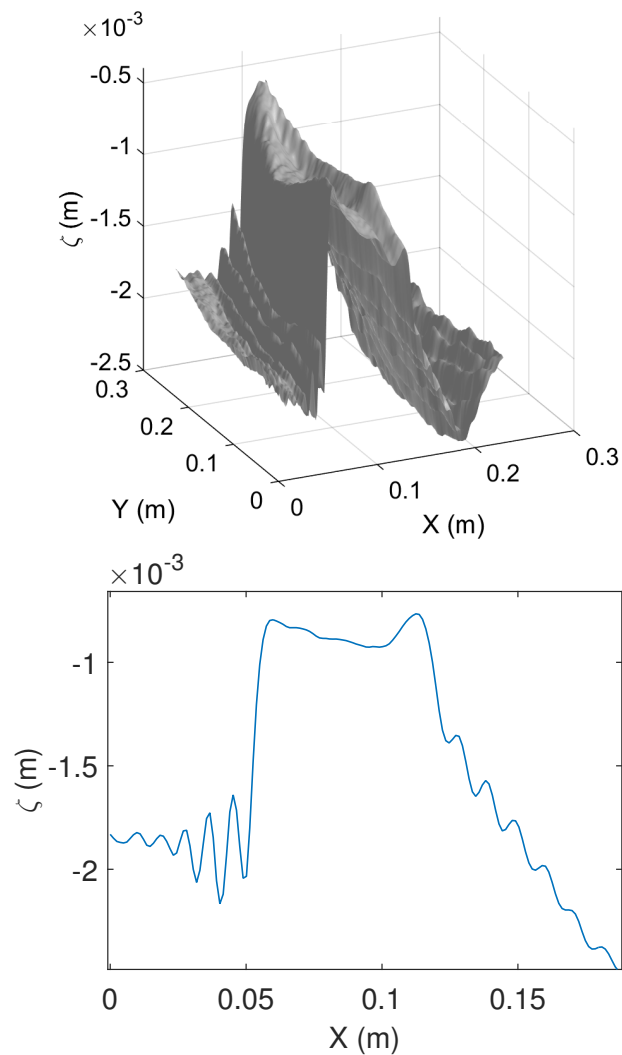


FIGURE 4.24 – a) Reconstitution de la surface des ondes pour une expérience en interface eau/air avec une marche au fond de la cuve localisée à  $X=5$  cm. A gauche de la marche se trouve un régime d'eau profonde avec  $h=6$  cm et au dessus de la marche se trouve un régime d'eau peu profonde avec  $h=1$ cm. b) Profil des ondes au milieu de la largeur de la cuve le long de l'axe de propagation  $x$  des ondes.

Une analyse spectrale des ondes au dessus de la marche dans l'espace  $k - \omega$  a été essentielle afin de confirmer que ces structures sont bien des ondes de choc. En effet comme représenté sur le spectre spatio-temporel de ces ondes, sur la figure 4.25, la majorité de l'énergie est concentrée autour d'une ligne au dessus de la relation de dispersion confirmant que toutes les échelles qui composent l'onde de choc se propagent bien à la même vitesse constante.

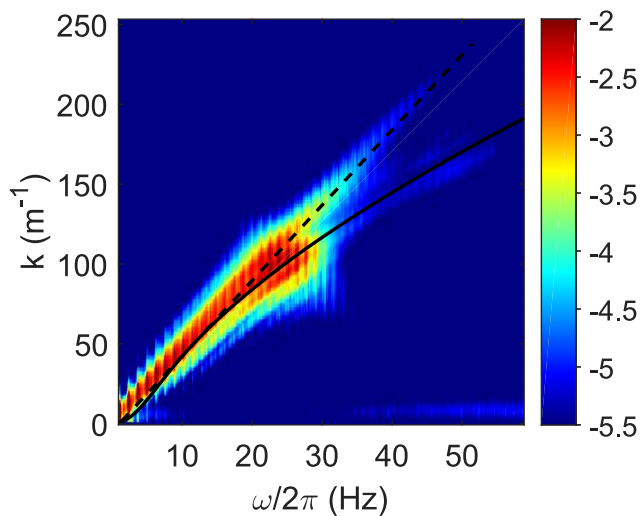


FIGURE 4.25 – Spectre spatiotemporel de la vitesse des ondes observées lors d’une expérience à l’interface eau/air avec une discontinuité topographie séparant une régime eau profonde (6 cm) d’un régime eau peu profonde (1 cm). Des ondes de choc dispersives se développent au dessus de la marche et le spectre spatio-temporel a été calculé en ne considérant que le champ des ondes au dessus de la marche. La ligne en trait plein noir correspond à la relation de dispersion linéaire des ondes gravito-capillaires. La ligne en tirets noirs a été faite à la main afin d’estimer la vitesse de l’onde de choc.

## 4.5 Conclusion

L’ensemble des résultats présentés dans ce chapitre a permis de caractériser l’effet de la dissipation visqueuse sur la turbulence d’onde.

En effet comme présenté dans la revue bibliographique au chapitre 2, des études numériques et expérimentales ont relevé des spectres d’ondes différents des prédictions de la TFF dans des systèmes où la dissipation agit à toute les échelles, comme cela est le cas dans la réalité, et non pas au delà d’une certaine échelle [16, 13, 57].

L’analyse spatiale et spectrale lors de cette partie ont mis en lumière une mise en place d’une cascade d’énergie qui gagne en efficacité et qui évolue de manière plus étroite de la TFF lorsque la dissipation visqueuse diminue. Pour une intensité de non-linéarité constante, la diminution de la dissipation visqueuse permet l’augmentation du temps dissipatif et améliore ainsi la séparation d’échelle entre le temps dissipatif et le temps non-linéaire nécessaire au développement des interactions non-linéaires.

Cependant quand bien même nous tendons vers les prédictions théoriques, elles ne sont jamais atteintes. En effet on reporte une pente pour le spectre de puissance des ondes de l’ordre de -4, pour la viscosité la plus basse, contrairement à la pente attendue de -17/6. Une analyse de l’évolution du rapport du temps non-linéaire sur

le temps linéaire nous permet de comprendre qu'afin d'être dans le cadre de la TFF les études doivent avoir lieu dans des domaines de grandes tailles, de l'ordre de plusieurs mètres pour les systèmes où les interactions se font par triades. Lorsque les domaines d'étude sont de plus petite taille on peut avoir recours à l'augmentation de la non-linéarité. Une analyse de régimes fortement non-linéaires a révélé alors la présence de structures localisées : des quasi-ondes de choc dispersives créées par les fortes accélérations du batteur. Pour ces régimes l'énergie observée semble être la signature spectrale du forçage et l'utilisation du terme turbulence ne semble même plus adaptée puisque les interactions non-linéaires entre les ondes sont inexistantes. Une étude fine des régimes contenant d'autres types de structures localisées (telles les solitons) pourrait s'avérer fructueuse afin de mieux quantifier leur impact sur la turbulence d'ondes.



# Chapitre 5

## Effets de confinement sur les ondes gravito-capillaires



Photo de la rivière Neuse en Caroline du Nord, USA.  
<https://soundrivers.org>

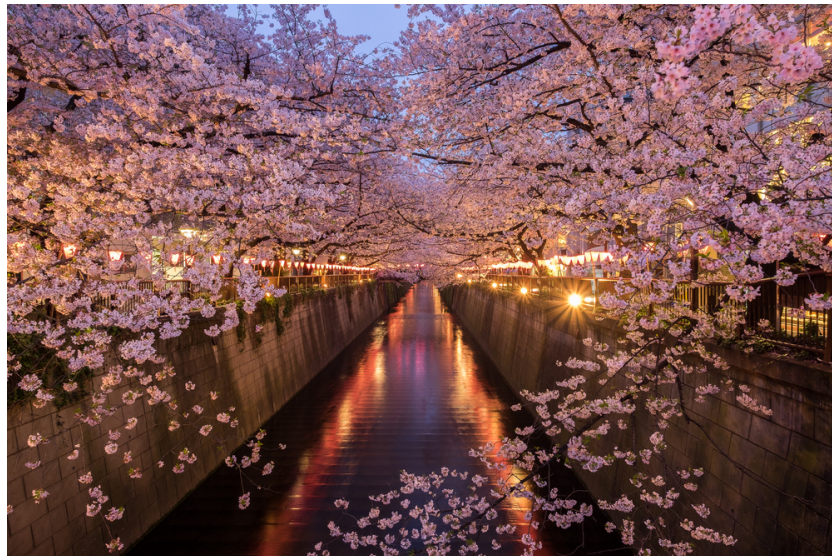


Photo de la rivière Meguro à Tokyo, Japan.  
<https://fastjapan.com/en/p125506>



## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Régime de turbulence d'onde faible classique

Comme énoncé dans le chapitre 1, la TTF est basée sur deux hypothèses qui sont un forçage infinitésimal et un domaine infini. Ces hypothèses se traduisent respectivement par un transfert d'énergie qui se fait uniquement par résonance entre les différentes échelles et une absence de modes discrets. Basée sur ces conditions la prédiction de l'évolution des spectres stationnaires est possible grâce à la transformation de Zakharov. Les expériences ainsi que les simulations numériques avec des paramètres réalistes présentent des différences par rapport à la théorie [16, 57] qui sont attribuées à deux phénomènes. Le premier est la dissipation qui dans la théorie n'agit qu'au delà d'une certaine échelle supposée très petite où l'énergie est fortement pompée or dans la réalité celle-ci agit sur toutes les échelles (nous avons évoqué ce point en détails dans le chapitre 1). La seconde raison à cette divergence correspond aux effets de taille finie qui sont inévitables en laboratoire et en simulations numériques. Des comportements similaires sont également observés dans la nature comme par exemple les ondes planétaires de Rossby liées à la rotation qui sont limitées par le diamètre fini des planètes[129].

Dans des systèmes finis l'ensemble des longueurs d'ondes devient discret. Pour une cuve à surface libre où les ondes se propagent dans la direction de dimension  $L$ , les modes propres de cette direction suivent la relation :

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

Le mécanisme de résonance permettant la transmission de l'énergie entre les ondes fait intervenir à l'ordre le plus bas trois ondes, on parle alors de triade résonante. Les conditions de résonance exacte pour une triade sont écrites dans le système d'équations (5.2), l'une concerne le temps et l'autre concerne l'espace.

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3) \quad \& \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \quad (5.2)$$

Il existe des conditions simples afin de satisfaire le système (5.2) pour des relations de dispersion en loi en de puissance  $\omega \propto k^\alpha$  avec  $\alpha = \text{constant}$ . En 2D il a été montré géométriquement dans l'article [38] que ces interactions étaient possibles si et seulement si  $\alpha \geq 1$  pour le cas continu,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ . Naturellement cette condition devient nécessaire si  $\mathbf{k}$  est réduit à des valeurs discrètes.

La question à laquelle nous essayons de répondre dans ce chapitre est : que se passe-t-il lorsque, à cause des effets de taille finie, le nombre de résonances exactes ou quasi exactes est fortement diminué voire même absent ? Les effets de taille finie en turbulence d'onde peuvent être caractérisés en considérant l'élargissement non-linéaire en fréquence  $\Gamma$  (inverse du temps caractéristique non-linéaire  $T_{NL}$ ) et en le comparant à la séparation fréquentielle  $\Delta_\omega$  entre les modes propres. On définit  $\Delta_\omega$  comme étant :

$$\Delta_\omega = \left| \frac{\partial \omega_k}{\partial \mathbf{k}} \right| \frac{\pi}{L} \approx \frac{\omega_k}{kL} \quad (5.3)$$

L'équation cinétique est valable lorsque  $\Gamma \gg \Delta_\omega$ . C'est le régime cinétique de la turbulence faible. Un autre comportement est attendu à la limite opposée  $\Gamma \leq \Delta_\omega$  ; on parle de régime de turbulence discrète. Ces 2 régimes sont réalisables lorsque le forçage est relativement fort ( tout en étant assez faible pour considérer la non-linéarité comme faible) et faible respectivement.

### 5.1.2 Régime de turbulence d'onde faible discrète

Lorsque  $\Gamma \leq \Delta_\omega$  seuls les termes dans les équations dynamiques qui correspondent à des fréquences et des longueurs d'onde de résonance exactes contribuent à la dynamique non-linéaire des ondes. Tous les autres termes oscillent rapidement et leur effet sur les temps longs est nul. Dans certains cas la relation de dispersion des ondes ne permet pas de résonance exacte avec un espace  $\mathbf{k}$  discret. Dans ce cas l'effet de la non-linéarité moyennée sur les oscillations linéaires rapides est négligeable et la cascade turbulente sur les échelles est stoppée. La question de l'existence de solutions pour le système (5.2) est un problème de théorie des nombres non trivial. Le travail de Kartashova [130] a permis la classification de l'existence de solutions pour ce système pour un grand nombre de relations de dispersion. En particulier il a été montré que le système (5.2) n'a pas de solution dans le cas de la relation de dispersion des ondes capillaires à la surface de l'eau :

$$\omega_k = \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} k^{3/2} \quad (5.4)$$

ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les modes de Fourier en domaine fini. Si l'on prend en compte par contre l'élargissement  $\delta_k$  de la relation de dispersion due à la non-linéarité dans le milieu, (5.4) devient alors :

$$\omega_{NL}(k) = \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} k^{3/2} + \delta_k \quad (5.5)$$

En remplaçant  $\omega(\mathbf{k})$  par  $\omega_{NL}(\mathbf{k})$  dans les relations (5.2) :

$$\omega_{NL}(\mathbf{k}_1) + \omega_{NL}(\mathbf{k}_2) = \omega_{NL}(\mathbf{k}_3) \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \quad (5.6)$$

Cela donne des nouvelles équations (5.7) appelées conditions de quasi-résonance :

$$\begin{cases} \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3) = \Delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} & \& \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \\ \Delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \delta_{\mathbf{k}_3} - \delta_{\mathbf{k}_1} - \delta_{\mathbf{k}_2}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Pour un soucis de simplification nous écrivons par la suite uniquement  $\Delta_{\mathbf{k}}$ .  $\Delta_{\mathbf{k}}$  est l'élargissement non-linéaire de résonance et la cascade d'énergie est alors possible uniquement lorsque :

$$\Delta_{\mathbf{k}} \geq \Delta_\omega \quad (5.8)$$

Nous pouvons constater que les solutions quasi-exactes sont plus nombreuses que les solutions exactes du système (5.2) dues aux fluctuations de  $\Delta_{\mathbf{k}}$  dans le

temps. Ces nouvelles interactions peuvent donc se révéler plus efficaces pour transférer de l'énergie. Ceci est d'autant plus vrai lorsque les résonances exactes sont interdites.

Pan et Yue ont quantifié précisément l'effet de l'élargissement non-linéaire de résonance  $\Delta_k$  sur la cascade d'énergie des ondes capillaires dans [131]. Pour cela ils définissent le paramètre  $\hat{L}_b$  qui est une mesure de la largeur caractéristique de  $\Delta_k$ . Ils mesurent également la pente spectrale  $\alpha$  du spectre :

$$n(k) = 2\pi C P^{1/2} k^\alpha \quad (5.9)$$

$P$  étant le flux d'énergie à travers les échelles,  $C$  est la constante de Kolmogorov et  $\alpha = \alpha_0 = -17/4$  en domaine infini. Une représentation de l'évolution de  $\hat{L}_b$  et de  $\alpha$  est alors possible en fonction de  $P$  qui est une mesure de l'intensité de la non-linéarité. Comme représenté sur la figure 5.1 nous voyons que  $\hat{L}_b$  et  $\alpha$  augmentent en fonction de la non-linéarité jusqu'à atteindre une valeur critique permettant de retrouver la pente  $\alpha_0 = -17/4$  du spectre continu.

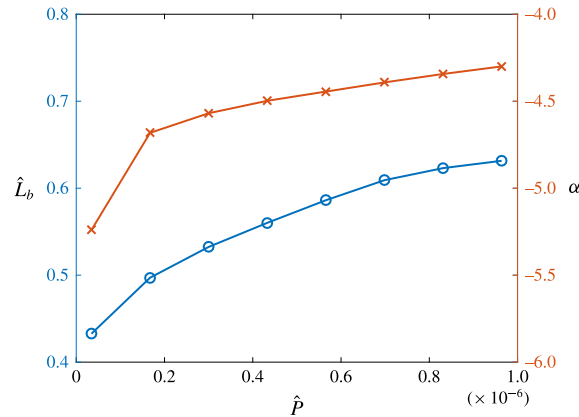


FIGURE 5.1 – Evolution de la pente spectrale  $\alpha$  ( courbe en haut en orange ) et le NLR  $\hat{L}_b$  (courbe en bas en bleu ) comme des fonctions du flux d'énergie adimensionnée  $\hat{P}$ . Figure prise de l'article [131]

La valeur critique de  $\Delta_k$  normalisée par la séparation modale du système, appelée  $\kappa_0$ , a été estimée à 0.02. Pour  $\kappa > \kappa_0$  les effets de taille fini ne sont plus ressenties sur l'évolution des spectres.

### 5.1.3 Régime de turbulence d'onde gelée : "frozen wave turbulence"

Lorsque le niveau de non-linéarité dans le système est trop faible de manière à ce que  $\Delta_k \ll \Delta_\omega$ , il existe un régime stationnaire de turbulence 'gelée' aux basses fréquences pompées avec un spectre décroissant exponentiellement vers les hautes fréquences. Ce spectre consiste en plusieurs harmoniques à grande échelle excitées, échangeant de l'énergie entre elles mais sans générer de cascade d'énergie vers les petites échelles. La signature spectrale d'une telle turbulence a été identifiée numériquement par Pushkarev et Zakharov [86] et elle correspond à des anneaux concentriques autour de  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  comme illustré dans la figure 5.2. Ils ont en effet

observé un régime dans lequel malgré le grand nombre d'ondes en interaction (de l'ordre de 100) il n'y avait pas de flux d'énergie vers les petites échelles.

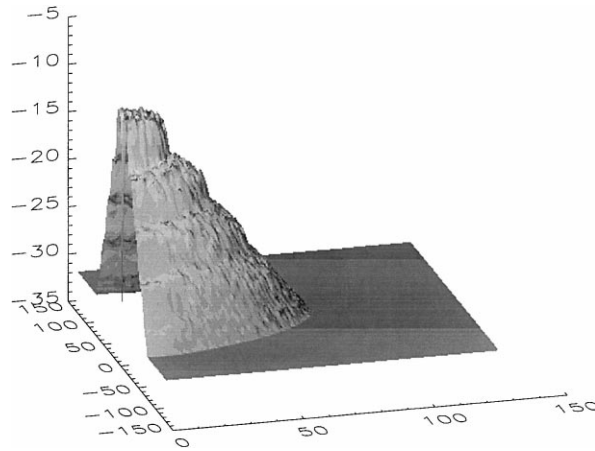


FIGURE 5.2 – Moitié du spectre d'élevation  $E^\zeta(k_x \geq 0, k_y)$  des ondes capillaires dans le cas de la turbulence 'gelée', extrait de l'article [132])

On pourrait éventuellement observer un tel régime dans la nature dans les systèmes finis tels les lacs. Son observation en laboratoire serait par contre plus compliquée où le forçage nécessaire à basse fréquence viendrait masquer les fameux anneaux concentriques. Il est important de préciser que la turbulence gelée pour les ondes à la surface de l'eau ne concerne que les ondes capillaires [131] car pour les ondes de gravité même les niveaux de non-linéarité les plus faibles peuvent entraîner une cascade d'énergie [133]. Ceci est dû à l'évolution de la non-linéarité en fonction du nombre d'onde qui est différente dans les 2 systèmes. En effet comme abordé dans le chapitre 1 la non-linéarité augmente en fonction du nombre d'onde pour les ondes de gravité, l'élargissement spectral pourrait donc toujours augmenter en fonction de  $k$  de manière à ce que  $\Delta_{\mathbf{k}} \geq \Delta_\omega$  soit maintenu et ainsi continuer le transfert d'énergie aux petites échelles.

Par contre pour les ondes capillaires la non-linéarité diminue en fonction de  $k$ . L'élargissement spectral va donc décroître en fonction de  $k$  jusqu'à éventuellement ne plus satisfaire les conditions de quasi-résonance (5.8) et stopper ainsi la cascade d'énergie. Il est aussi clair que si au départ  $\Delta_{\mathbf{k}} \leq \Delta_\omega$  le système restera ainsi figé.

#### 5.1.4 Régime de turbulence d'onde en avalanche : "sand-pile behaviour"

Un régime intermédiaire à la turbulence faible et à la turbulence discrète est le régime appelé mésoscopique qui a été étudié par L'vov et Nazarenko [134]. Cette appellation fait référence aux observations faites en [15] et [135] selon lesquelles des régimes où une coexistence entre un régime de turbulence classique faible et un régime de turbulence discrète est possible. Le comportement des ondes n'est alors pas purement cinétique ou discret. Nazarenko donne une description intermittente de cet état pour les ondes de gravité [15], où le spectre d'énergie initialement nul est

construit par une série d'avalanches plus ou moins fortes. Une façon de comprendre ce mécanisme est de considérer un système de turbulence très faible,  $\Delta_{\mathbf{k}} \ll \Delta_{\omega}$ , avec un flux quasi-nul de manière à être proche du régime de turbulence gelée. Durant ce régime la cascade d'énergie est fortement réduite voire arrêtée et le système accumule de l'énergie à grande échelle grâce au forçage continu jusqu'à ce que l'élargissement spectral soit de l'ordre de l'espacement modal  $\Delta_{\mathbf{k}} \simeq \Delta_{\omega}$ . Cela est aidé par l'augmentation de la non-linéarité en fonction de  $k$  pour les ondes gravitaires et déclenche alors la cascade d'énergie sous la forme d'une faible avalanche. Durant le transfert d'énergie la non-linéarité  $\epsilon$  diminue localement à l'échelle du forçage jusqu'à ce que  $\Delta_{\mathbf{k}} < \Delta_{\omega}$ . Le système revient alors à son état de départ en accumulant de l'énergie à l'échelle du forçage et le cycle se répète jusqu'à remplissage du spectre. Avec cette description Nazarenko établit une nouvelle expression du spectre d'élévation des ondes gravitaires dans la limite  $\Delta_{\mathbf{k}} \simeq \Delta_{\omega}$  :

$$E^{\zeta}(\omega) \propto g^{7/2} \Gamma_k^{1/2} \omega^{-6} \quad (5.10)$$

$\Gamma_k$  est l'espacement entre les modes dans l'espace des  $k$ . Si le forçage est faible de manière à ce que l'élargissement spectral n'excède jamais l'espacement entre les modes alors le spectre (5.10) occupera toute la partie inertielle. Si le forçage est par contre assez fort de manière à ce que  $\Delta_{\mathbf{k}} > \Delta_{\omega}$  tout en n'ayant pas  $\Delta_{\mathbf{k}} \gg \Delta_{\omega}$ , la cascade d'énergie est alors reconstruite par de fortes avalanches qui séparent deux zones. La première à grande échelle suivant  $\omega^{-6}$  et la seconde à petite échelle suivant  $\omega^{-4}$  (régime cinétique).

### 5.1.5 Objectifs

Dans ce qui suit nous proposons une étude expérimentale de l'effet de confinement dans une seule dimension sur les ondes gravito-capillaires. En effet nous allons réduire progressivement uniquement la largeur de notre cuve tout en gardant la longueur de celle-ci inchangée. Le but étant de voir si une turbulence discrète peut se mettre en place dans une dimension tout en coexistant avec une turbulence continue dans la dimension non-confinée. Une étude spectrale en temps et en espace sera effectuée sur les vagues dans un premier temps. Par la suite une identification des types de transferts résonants entre les ondes sera caractérisé grâce aux mesures de bicohérence.

## 5.2 Article (accepté pour publication dans *Physical Review Fluids*)

# Confinement effects on gravity-capillary wave turbulence

Roumaissa Hassaini<sup>1</sup> and Nicolas Mordant<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels,  
Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, F-38000 Grenoble, France*

The statistical properties of a large number of weakly nonlinear waves can be described in the framework of the Weak Turbulence Theory. The theory is based on the hypothesis of an asymptotically large system. In experiments, the systems have a finite size and the predictions of the theory may not apply because of the presence of discrete modes rather than a continuum of free waves. Our study focuses on the case of waves at the surface of water at scales close to the gravity-capillarity crossover (of order 1 cm). Wave turbulence has peculiar properties in this regime because 1D resonant interactions can occur as shown by Aubourg & Mordant. Here we investigate the influence of the confinement on the properties of wave turbulence by reducing gradually the size of our wave tank along one of its axis, the size in the other direction being unchanged. We use space-time resolved profilometry to reconstruct the deformed surface of water. We observe an original regime of coexistence of weak wave turbulence along the length of the vessel and discrete turbulence in the confined direction.

---

\* nicolas.mordant@univ-grenoble-alpes.fr

## I. INTRODUCTION

The dynamics of nonlinear random dispersive waves are involved in many physical systems such as magnetized plasmas [1], optics [2], thin elastic plates [3], capillary waves [4] or geophysical flows [5, 6]. In the case of nonlinear interactions involving a large number of modes, such systems can evolve into a turbulent state. By ‘turbulent’ we mean generically a system involving a large number of degrees of freedom and driven out of equilibrium. In this state, the natural approach is statistical. In the very specific limit of an asymptotically large system and of a weak nonlinearity, the statistical properties of such systems have been studied in the framework of the Weak Turbulence Theory (WTT) since the pioneering work of Zakharov, Benney and Newell in the 60’s (see [7, 8] for recent reviews). The former hypothesis implies that no discrete modes exist and the latter means that only resonant waves can exchange a significant amount of energy over a finite time. Based on these hypotheses, predictions of the evolution of statistical quantities such as probability distribution or wave spectrum can be derived. For forced and statistically stationary turbulence, the WTT predicts in most cases a direct cascade of energy from the forced scales down to small scales at which dissipation is the most efficient. In many cases, the calculation of the stationary wave spectrum is enabled by the use of the Zakharov transformation [7, 9].

In this article, we focus on the case of waves at the surface of water. Two asymptotic regimes exist: at large scales the dynamics of the waves is ruled by gravity and at small scales by capillarity. For water, the former is relevant for oceanic waves and the latter is relevant at submillimetric scales. An open question is if and how the energy cascade in the gravity range can connect with a possible energy cascade in the capillary range. Here, we focus on the intermediate scales at the crossover between gravity and capillarity i.e. at centimetric scales. Previous work in this regime by Aubourg & Mordant [10, 11] reported that wave turbulence at these scales was specific in the fact that 3-wave resonant interactions are possible among unidirectional wave packets. This is due to the fact that the dispersion relation of the linear waves is not a pure power law (as opposed to the asymptotic regimes). Indeed the dispersion relation relating the wavenumber  $k$  and the angular frequency  $\omega$  is

$$\omega = \left( gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right)^{1/2} \quad (1)$$

where  $\gamma$  is the surface tension,  $\rho$  is the water density and  $g$  is the acceleration of gravity. It evolves from  $k^{1/2}$  at low  $k$  to  $k^{3/2}$  at high  $k$  and it is changing its curvature at the capillary-gravity crossover. Furthermore the unidirectional interactions appear to be dominating the nonlinear activity as compared to interactions between waves propagating at an angle from each other [11]. Thus it opens the possibility of a unidirectional wave turbulence. We stress that such a ‘1D’ wave turbulence involving 3-wave coupling is somewhat exotic. Indeed theoretical works consider most often dispersive waves with dispersion relations that are power laws ( $\omega \propto k^\alpha$  with  $\alpha > 1$  for resonant 3-wave coupling) that have interesting scaling properties. For such dispersive waves, non trivial 3-wave resonant coupling must involve waves that have distinct propagation directions.

In order to test experimentally if such a ‘1D’ turbulence could exist we reduce the size of our wave tank along one of its axis, keeping the other size unchanged so that to confine progressively the turbulence towards a 2D channel. Thus we are clearly at odds with the hypotheses of the kinetic regime described in the WTT because of the confinement but we remain in the limit of weak nonlinearity. Thus we expect that the nonlinear interaction will remain dominated by resonant or quasi-resonant interactions.

The direct consequence of finite size is the presence of discrete linear modes that may reduce or even prevent the presence of solutions of the resonance equations such as

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad , \quad \omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \quad (2)$$

for the case of 3-wave interaction. For instance, Kartashova noted that for pure capillary waves in a square box, no exactly resonant solutions exist [12]. For confined gravity waves (4-wave coupling), the number and the size of clusters of interacting waves is strongly depleted [13]. This effect can be overcome if the level of nonlinearity is increased. Indeed due to nonlinearity a spectral widening exists when  $T_{NL}$  is finite. The nonlinear spectral width  $\Delta\omega^{NL} \propto 1/T_{NL}$  increases with the level of nonlinearity. If the mode separation  $\delta\omega$  is small enough then one can have  $\Delta\omega^{NL} \gtrsim \delta\omega$  and the energy exchange would not be sensitive anymore to the discreteness of the modes. Thus for a large enough size and a large enough level of nonlinearity one may recover a continuous regime. This transition was analyzed numerically in details by Pan & Yue [14] in the case of pure capillary waves.

The situation in which the discrete character can not be discarded is called Discrete Wave Turbulence (DWT). Recent works have focused on DWT numerically either in the gravity regime or in the capillary regime [13–15] and experimentally for gravity waves [16, 17]. In such a situation, Nazarenko proposed a sandpile scenario: the energy piles up at large scales until the nonlinearity is large enough and triggers an avalanche of energy across scales [18]. Then the systems calms down and starts accumulating energy again. If the level of nonlinearity is too weak then



a regime of frozen turbulence was observed numerically for capillary waves [19]. Because our confinement concerns only one axis of the tank, the question is whether our system can still develop a state of continuous interaction in the unconfined direction.

In large enough systems (in all directions) and for weak nonlinearity, the WTT should apply. Let us review shortly observations in the asymptotic regimes : pure gravity waves or pure capillary waves. The WTT predictions for gravity waves are not consistent with the laboratory experiments: The observed spectral exponent of the gravity waves is seen to change strongly with the forcing magnitude and to be close to the WTT predictions only at the highest forcing amplitudes, which appears to be at odds with the hypothesis of weak nonlinearity [17, 20, 21]. By contrast, in the ocean, at very large scales, observation of the spectra appear compatible with the theoretical predictions (see for instance recent observations [22, 23]). For capillary waves, experiments seem to follow better the predictions of the WTT especially at strong forcing [24–28] but much less at weak forcing [11].

The reasons invoked to explain the mismatch between theory and experiments are dissipation and finite size. Indeed the theory largely discards the presence of dissipation. The wave equation is usually supposed to be inviscid and dissipation is only used to absorb the energy flux at small scales. In real life, dissipation is usually broadband i.e. not only concentrated at vanishingly small scales. A kinetic regime assumed in the WTT would occur only under the assumption of scale separation: the nonlinear timescale of interaction  $T_{NL}$  must be large compared to the wave period  $T$  and the dissipation time  $T_d$  must be even larger so that:

$$T \ll T_{NL} \ll T_d. \quad (3)$$

In water experiments, this may not be the case because of viscous dissipation as shown in [29] or it may require to increase the level of non linearity at the risk of breaking the scale separation  $T \ll T_{NL}$ . Even if a true scale separation is observed, dissipation may still have an impact on the scaling properties of the wave spectrum as has been shown in [30, 31] for the case of a vibrating elastic plate.

We first describe briefly our experiment (part II) and then show the evolution of the Fourier spectrum of the wave field (part III) when the confinement is increased. We then perform a bicoherence analysis to detail the nonlinear coupling among the waves (part IV). Part V is made of a discussion of the results.

## II. EXPERIMENTAL SET-UP

case	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
width (cm)	37	32.5	18.5	11	7
aspect ratio	1.5	1.8	3.1	5.2	8.1

TABLE I: Values of the confinement that have been used for the variable width tank. Its length is 57 cm and the configurations that we consider in the following (labelled case  $l_0$  to  $l_4$ ) correspond to decreasing the width of the from  $l_0 = 37$  cm down to 7 cm. The corresponding aspect ratio is changing from 1.5 up to 8.1.

We performed experiments in two configurations. The first one is a wave tank whose width can be tuned continuously from 37 cm down to 7 cm (see table I for actual values). The length of the tank is 57 cm (along the  $x$  axis) so that the aspect ratio of the wave tank increases from 1.5 up to 8.1. At the lowest confinement it is similar to the one used by Aubourg & Mordant [10]. The depth of water at rest is 6 cm, corresponding to deep water regimes considering wavelengths of gravity-capillary waves that are less than 10 cm ( $kh > 1$  where  $k$  is the wavenumber and  $h$  the depth of water at rest). Great care is taken to prevent surface contamination in order to avoid dissipation by conversion to Marangoni waves [32]. The waves are generated by exciting continuously horizontally the container (along its long axis  $x$ ) using an oscillating table controlled by a sinusoidal tension modulated around a central frequency equal to 2 Hz with a random modulation in an interval  $\pm 0.5$  Hz around the central frequency. The deformation of the water surface is reconstructed using the Fourier Transform Profilometry [33, 34] (see fig. 1 and [11] for more details of the set-up). The water is mixed with Kronos 1001 titanium dioxide particles with a volume fraction of 1% to improve its optical diffusivity making possible to project on its very surface a sinusoidal grayscale pattern. These particles are chemically neutral and do not alter the surface tension of water as stated by Przadka et al [32]. As the waves propagate the pattern seen by a high speed camera is deformed. The deformation of the pattern can be inverted to provide the elevation field of the waves. In this way we obtain a full space-time resolved measurement of the wave field. The images are recorded at 250 frames/s with a resolution of  $1024 \times 1024$  pixels<sup>2</sup> covering a  $20 \times 20$  cm<sup>2</sup> area at the center of the tank in the case  $l_0$ . When the width of the channel is reduced the resolution is adapted to the width of the channel. The number of pixels along the  $y$  axis is reduced accordingly down to a resolution of 360 pixels keeping 1024 pixels along the  $x$  axis.



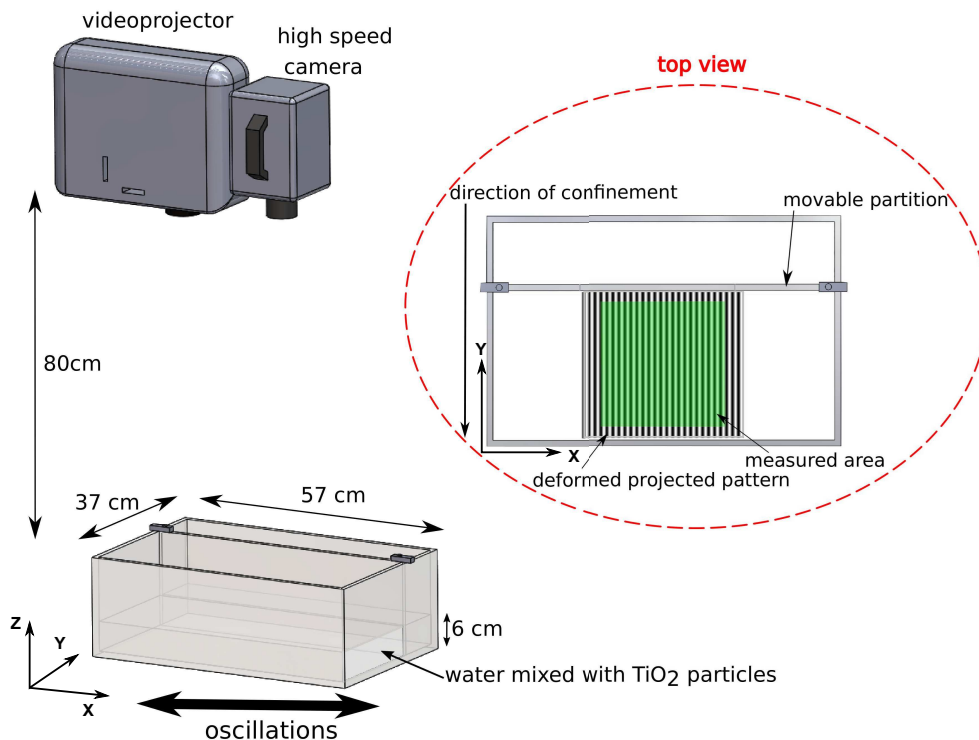


FIG. 1: Sketch of the experimental setup. Waves are generated by oscillating horizontally the container. The width of the wave tank can be tuned by a mobile wall so that to modify the horizontal confinement. The wave height is measured by using a Fourier Transform Profilometry technique. See text for details.

The second configuration is a high aspect ratio channel of length 1.5 m and a given width of 10 cm. Its aspect ratio is thus 15. The major interest of this configuration is the much higher length, thus with even less confinement along the  $x$  axis. The water depth is the same as well as the measurement method. The images were recorded at the same frequency with a resolution of  $1024 \times 325$  pixels<sup>2</sup> covering a  $31 \times 10$  cm<sup>2</sup> area around the center of the channel.

For all experiments, the average slope of the waves is kept at a value of close to 3% in order to remain in a weakly nonlinear regime. We expect that this regime corresponds to the weak regime identified by [35].

### III. FOURIER SPECTRA

In a first attempt to identify the effect of confinement, we show in fig. 2(a) the frequency spectrum of the wave field for all confinements (averaged over all positions). For convenience, we actually compute the spectrum of the vertical velocity  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  noted  $E^v(\omega)$  ( $\eta(x, y, t)$  is the instantaneous height of the free surface). Except for the case of the strongest confinement the decay of the full spectrum is only weakly affected by the confinement. In a frequency band near the forcing (roughly between 1 and 4 Hz) a collection of peaks is visible. It corresponds to a range of development of the cascade. Indeed in the phenomenology of the WTT, the kinetic regime is supposed to occur at frequencies much higher than the forcing ones. This is due to the fact that the phases have to become random due to nonlinear interactions [7] whereas the phases in the forcing range are imposed by the shaker. This development of the cascade may occur through the modulational instability of the forcing modes as suggested by Xia *et al.* [27]. At frequencies higher than about 5 Hz the spectrum is smooth for the weakest confined case. This corresponds to an ‘inertial’ range. At frequencies higher than 40 Hz the signal reaches the noise level of the measurement technique. The evolution of the spectrum in the inertial range does not follow a power law decay in contrast with the WTT predictions. It has been discussed in [29] that, for water waves, the viscous dissipation does not allow for a wide enough scale separation between the forcing range and the viscous scales (and the issues is even worse when surface contamination is present). Thus the wave spectrum is affected by dissipation and deviates from the theoretical predictions. This impact of dissipation was also investigated for elastic wave turbulence in a vibrating plate [30, 31]. The power law spectra reported previously by Falcon *et al.* [20] correspond most likely to the strong regime identified by Cobelli *et al.* [35]

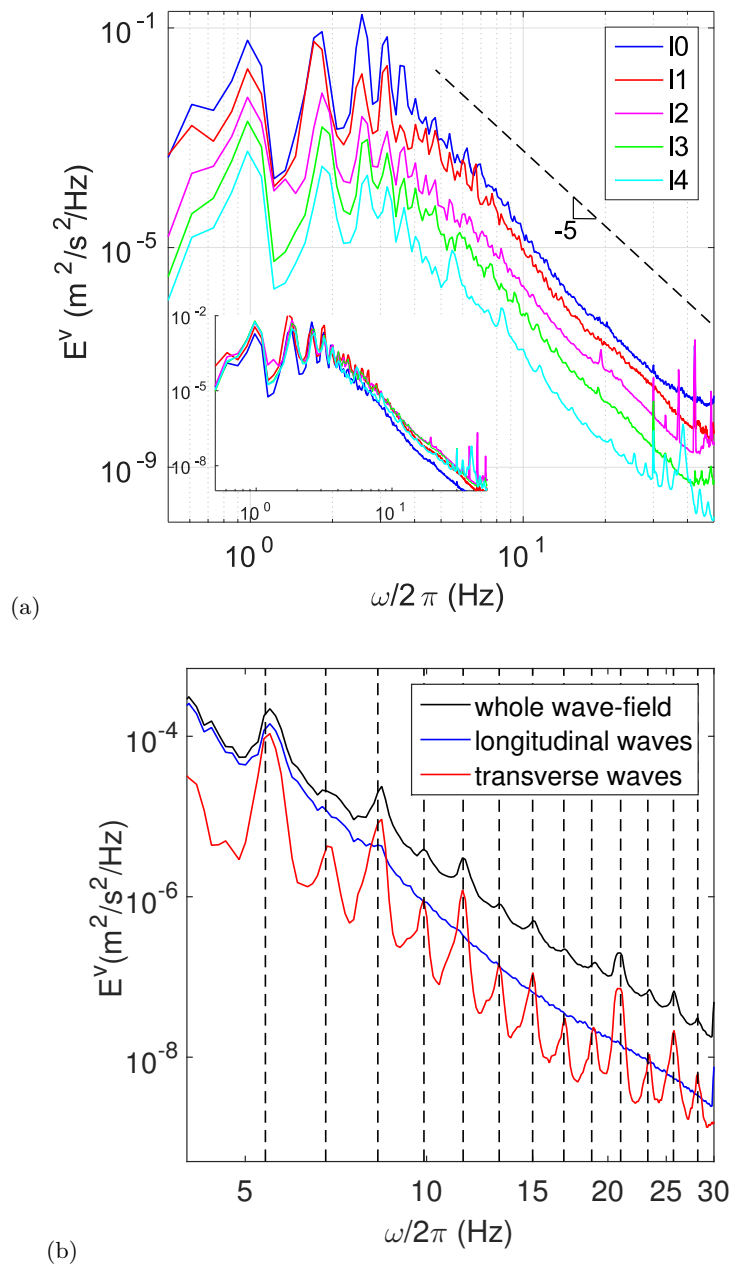


FIG. 2: (a) Frequency spectra of the vertical velocity field  $E^v(\omega)$  for all confinements. The spectra have been shifted vertically for clarity in the main figure. The non shifted spectra are shown in the insert. (b) Frequency spectra for the  $l_4 = 7$  cm case. The three curves correspond to the full spectrum (black), the spectrum of the purely longitudinal waves (blue) and the purely transverse waves (red). The vertical dashed lines correspond to the frequency of the transverse modes (table III).

in which coherent structures are present as discussed by Berhanu *et al.* [36]. Here we keep the steepness of the waves very low and, as previously reported in [10], no power law decay is observed. Nevertheless, as investigated previously in [10, 11], we trust that we are in a sort of kinetic turbulent regime altered by dissipation.

A difference is visible between the weakest confined cases and the most confined one ( $l_4$ ): in the latter some peaks are visible in inertial range emerging from the continuous spectrum (better seen in fig. 2(b), black curve). In order to have a deeper analysis of this observation we compute the spectrum of the purely longitudinal waves (that propagate along the long axis of the tank,  $x$  direction) and the purely transverse ones (along the short axis,  $y$  direction). We

average the measured wave field  $\eta(x, y, t)$  over  $y$  to obtain the purely longitudinal part and we average over  $x$  for the transverse waves. The corresponding frequency spectra for the case  $l_4$  are shown in fig. 2(b). The longitudinal spectrum (blue curve) remains continuous and monotonous in the inertial range whereas the spectrum of the transverse waves (red curve) shows strongly pronounced peaks that corresponds to the ones visible in the full spectrum (black curve). These peaks correspond to the transverse modes expected from the confinement. Their frequencies can be computed using the discrete wavenumbers  $k_y = \frac{n\pi}{l_4}$  and the dispersion relation (1):

$$\omega_n = \sqrt{\left(g \frac{n\pi}{l_4} + \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{n\pi}{l_4}\right)^3\right)} \quad (4)$$

$n$  being an integer related to the order of the mode. The corresponding values are shown in table II and shown as vertical dashed lines in fig. 2(b). Thus we observe an original mixed state of a continuous kinetic-like regime in the longitudinal direction and a discrete regime in the transverse direction.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\omega_n/2\pi$ (Hz)	5.4	6.8	8.3	9.9	11.5	13.2	15.0	16.9	18.8	21	23.3	25.7	28.2	30.7	33.3

TABLE II: Theoretical frequency of the purely transverse eigen-modes of the tank with the confinement  $l_4 = 7$  cm computed using (4) and shown in fig. 2(b).

In order to investigate more precisely the spectral content of the wave field, we compute the full frequency-wavenumber Fourier spectrum noted  $E^v(\mathbf{k}, \omega)$ . Similarly to the previous analysis, we distinguish the spectrum  $E^v(k_x, k_y = 0, \omega)$  of purely longitudinal waves (that propagate along the long axis of the tank,  $x$ -axis, which is the direction of the forcing as well) from the spectrum of purely transverse waves  $E^v(k_x = 0, k_y, \omega)$ . The spectra of the longitudinal waves for the unconfined experiment and the  $l_4$  case are shown in fig. 3. In the unconfined case (fig. 3(a)& (c)) the spectra of transverse and longitudinal waves are quite similar: the energy is continuously spread along the dispersion relation of deep water waves (1) with  $\gamma = 72$  mN/m the surface tension of pure water,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> and  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. The fact that the forcing is along the  $x$  axis shows up in the fact that the energy of transverse waves is smaller but a directional redistribution of energy is operating as observed in our previous work [10, 11, 37]. These observations are qualitatively compatible with the direct cascade of energy predicted by the theory [4] and these spectra are consistent with observations reported in [35, 38] for instance. By contrast, the longitudinal and transverse spectra observed in the confined case (fig. 3(b)& (d)) are very different. The spectrum of longitudinal waves is almost unchanged but the transverse spectrum is now made of well separated peaks corresponding to the modes of the container. It should be noted as well that a broadening of the spectrum is observed in this case of strong confinement due to a reduced resolution in  $k_y$  related to a smaller width of the images that are bounded by the walls in the  $y$  direction. The resolution in the  $k_x$  direction is not altered as the size of the image is unchanged along the  $x$ -axis.

To observe more progressively the emergence of the discretization of the spectra, we display in fig. 4 the frequency spectra  $E^v(\omega)$  of longitudinal and transverse waves for all values  $l_i$  of the width of the channel. For longitudinal waves the frequency spectra are continuous and similar in all cases, as previously shown in fig. 3. Only the most confined case shows a slightly distinct decay of the energy but even for this configuration, the spectrum remains continuous.

For transverse waves (fig. 4(b)) we observe a transition from a continuous spectrum (for  $l_0$  and  $l_1$ ) to a discrete spectrum for the more confined cases. The peaks of the spectrum become more and more separated as the confinement increases as expected from (4). The spectrum becomes discrete when the spectral width between peaks becomes larger than the width of a single peak. This observation is qualitatively consistent with the predictions of [13, 18] although the exact qualification of our state between ‘discrete’, ‘frozen’ or ‘sandpile’ is unclear thus we use the word ‘discrete’ as generic term. In particular the interactions of transverse waves and oblique or longitudinal ones makes the phenomenology more complex.

In the framework of the Weak Turbulence Theory, for simple dispersion relations behaving as  $\omega \propto k^\beta$ , the predicted energy spectrum  $E(k)$  can often be written as:

$$E(k) = CP^{1/(N-1)}k^{-\alpha} \quad (5)$$

where  $k = \|\mathbf{k}\|$  is the wave number,  $P$  the energy flux,  $C$  a dimensional constant and  $\alpha$  the spectral exponent [7].  $N$  is the number of waves taking part in the resonances: Indeed one of the hypotheses of WTT is that energy is transmitted among resonant waves. At the lowest order, it involves 3 waves that have then to satisfy the resonance conditions (2).

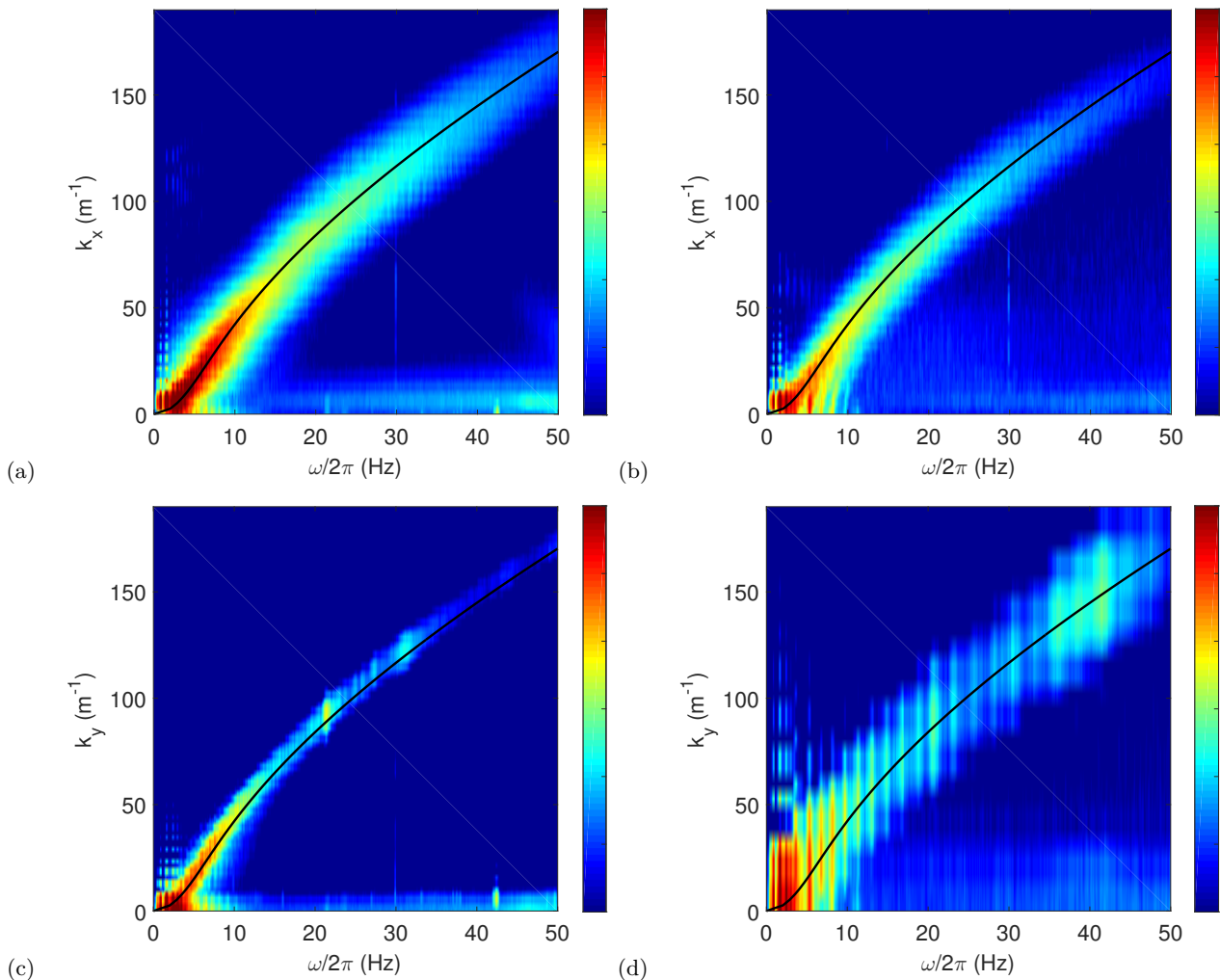


FIG. 3: Space-time Fourier spectrum of the vertical velocity field of the longitudinal waves  $E^v(k_x, k_y = 0, \omega)$  ((a) & (b)) and transverse waves  $E^v(k_x = 0, k_y, \omega)$  ((c) & (d)). In (a) & (c) the width of the tank is equal to  $l_1 = 32.5$  cm. In (b) & (d) the width of the tank is equal to  $l_4 = 7$  cm. In all cases, the solid black line is the theoretical deep water linear dispersion relation for gravity-capillary waves in pure water (1). The energy magnitude is displayed in a logarithmic scale.

In the case of gravity waves the resonance conditions do not admit solutions for 3 waves because of the negative curvature of the dispersion relation in deep water  $\omega = \sqrt{gk}$ . One needs to consider the next order which involves 4 waves. For the capillary domain the dispersion relation for infinite depth is  $\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/2} k^{3/2}$  and 3-wave resonances exist. The predicted spectra for water waves are thus expected to be  $E(\omega) \propto P^{1/3} g \omega^{-4}$  for gravity waves and  $E(\omega) \propto P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} \omega^{-17/6}$  for capillary waves [4]. In our experiment, we do not observe power laws but a decay which is faster than  $f^{-5}$  (fig. 4) as is often observed in experiments (due to finite size or dissipation as discussed above)[17, 20, 21, 29, 39] and the steepness of the spectrum is not depending on the confinement.

Let us focus now on the directional properties of the wave field. We show in fig. 5 a cut of the spectrum  $E^v(\mathbf{k}, \omega)$  for two given values of the frequency in the case of strongest confinement. In (a) the frequency has been chosen in between the frequencies corresponding to two successive transverse modes. In (b) the given frequency is that of a transverse mode. As expected from fig. 3 the energy is located on a circle that corresponds to the linear dispersion relation (black circle). For both (a) and (b) the energy is quite isotropically distributed except near the purely transverse waves corresponding to small values of  $k_x$ . In (a) a strong dip is observed at  $k_x = 0$  related to the fact that there is no purely transverse mode at that frequency. A peak of energy is observed at a position slightly turned from the  $k_y$

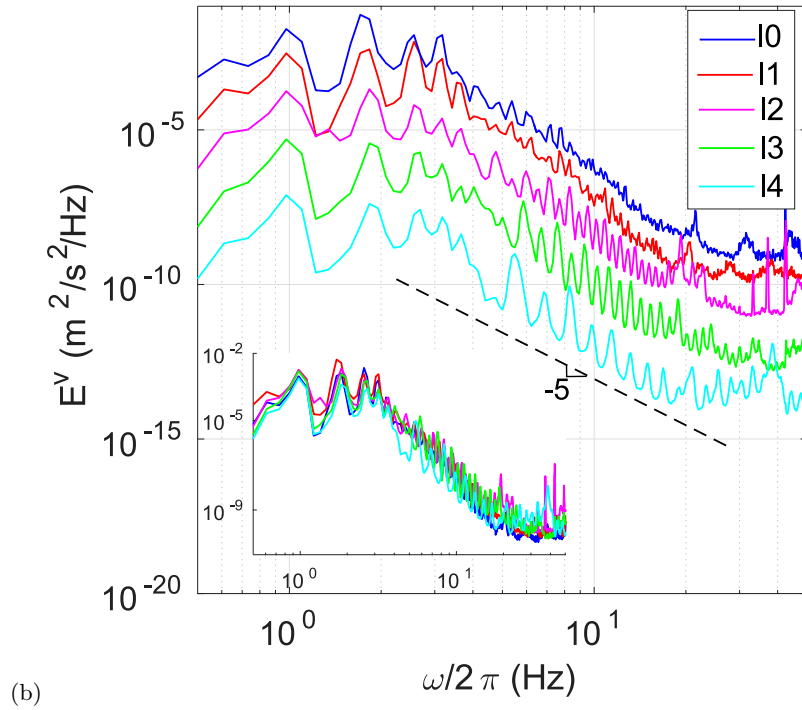
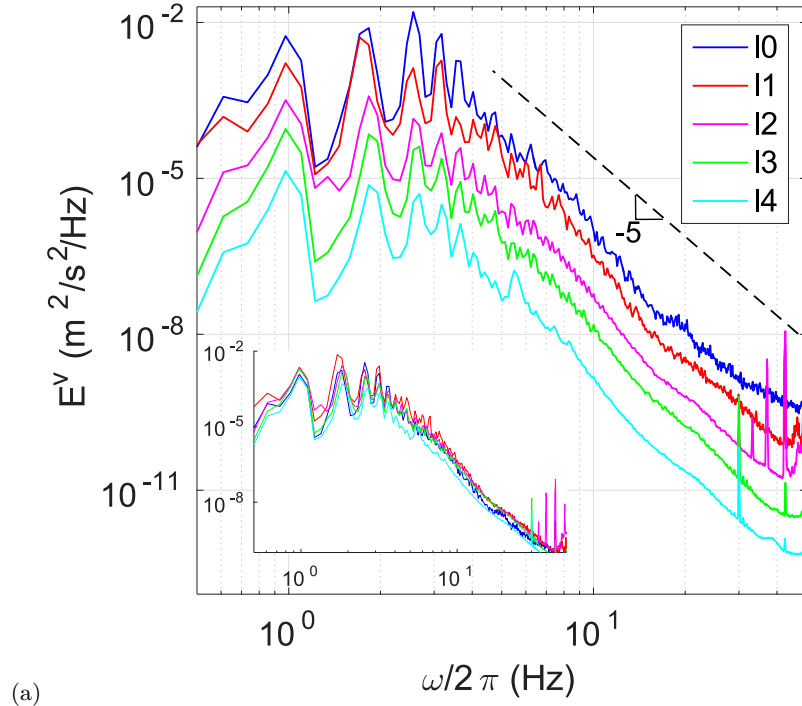


FIG. 4: Frequency spectra of the longitudinal (a) and transverse (b) waves for all confinements. The width of the vessel is indicated in the legend. The spectra have been shifted vertically for a better visualization, with confinement increasing from the top to the bottom. The inserts show the unshifted curves. The dashed line is a  $f^{-5}$  as an eye guide.

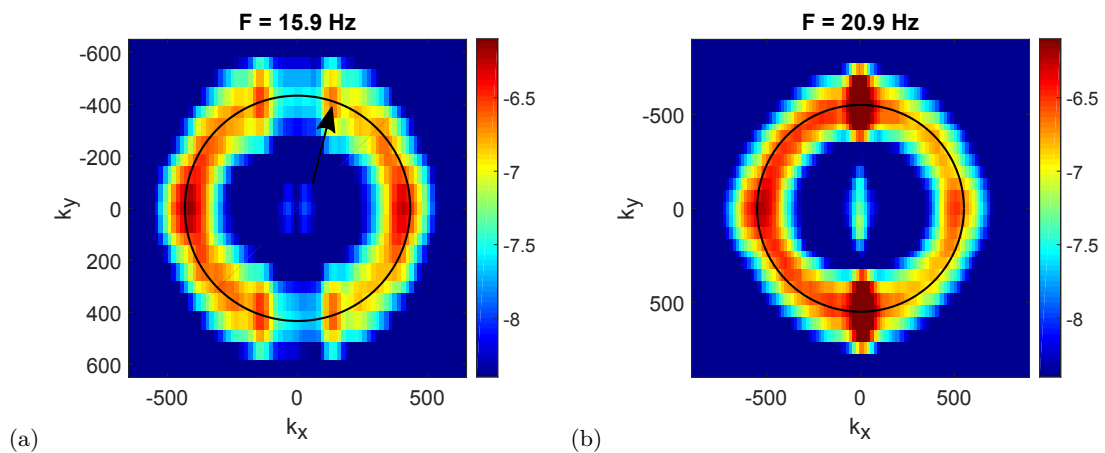


FIG. 5: (a) cut of the spectrum for the full wave field for the maximum confinement at a frequency which lies in between two successive transverse eigenmodes of the vessel  $E^v(k_x, k_y, \frac{\omega}{2\pi} = 15.9Hz)$ . (b) cut of the spectrum for the full wave field for the maximum confinement at a frequency which corresponds to a transverse eigenmode of the vessel  $E^v(k_x, k_y, \frac{\omega}{2\pi} = 20.9Hz)$ . In both (a) and (b), the solid black circle is the theoretical deep water linear dispersion relation for gravity-capillary waves in pure water. The energy magnitude is in a logarithmic scale.

axis that corresponds to a discrete oblique mode (black arrow). Modes that would be more oblique are not visible as the spectrum is then continuous for directions closer to the  $k_x$  axis. In (b) a strong peak is observed at  $k_x = 0$  corresponding to the transverse mode that resonates across the channel.

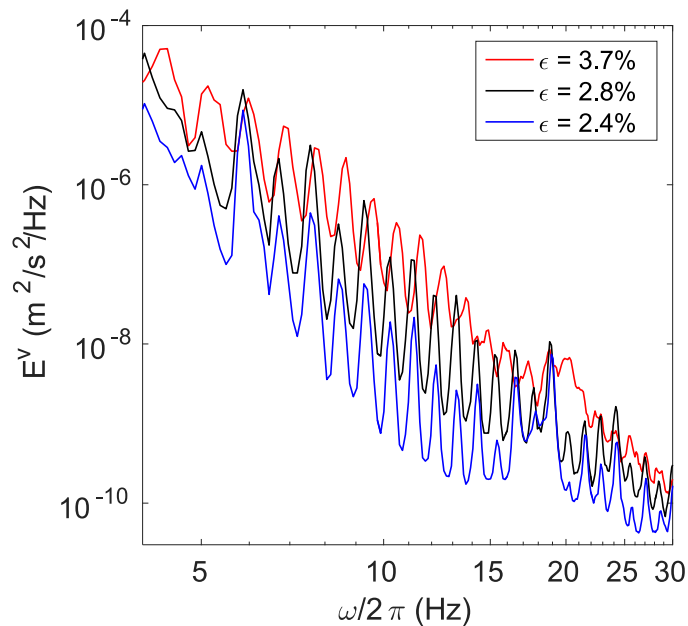


FIG. 6: Frequency spectra of the transverse waves in the case  $l_3$  with nonlinearity (average slope)  $\epsilon$  increasing from the bottom to the top.

Figure 6 shows the effect of the amplitude of the forcing on the transverse spectrum of the waves in case  $l_3$ . Increasing the nonlinearity induces two effects. First the height of the peaks is lowest (or the trough between adjacent peaks is less deep) at strongest forcing due to a widening of the peaks. Second, the frequency of the peaks is slightly modified most likely due to non linear corrections on the dispersion relation as that reported by Berhanu *et al.* [38]. A similar feature was also reported for wave turbulence in an elastic plate [40]. The widening of the peak is due to

a decrease of the non-linear timescale. For close enough peaks or strong enough a nonlinearity one expects that the peaks will merge and the spectrum will evolve into a continuous spectrum (as seen for capillary waves by Pan & Yue [14] and for elastic waves by Mordant [40]). This may not happen if it requires a too strong level of nonlinearity so that other phenomena such as drop ejection may occur that would change significantly the underlying physics.

Thanks to the Fourier spectra, we were able to identify that when the confinement increases in one direction, we still have a weak turbulent regime for the waves that propagate in the unconfined direction with a typical continuous aspect whereas the energy spectra of the waves propagating in the confined direction are distributed only on the discrete transverse eigenmodes of the vessel. A coexistence between weak turbulence and discrete turbulence is clearly observed.

We will focus in the next part on the nonlinear interactions between resonant waves.

#### IV. 3-WAVE INTERACTION

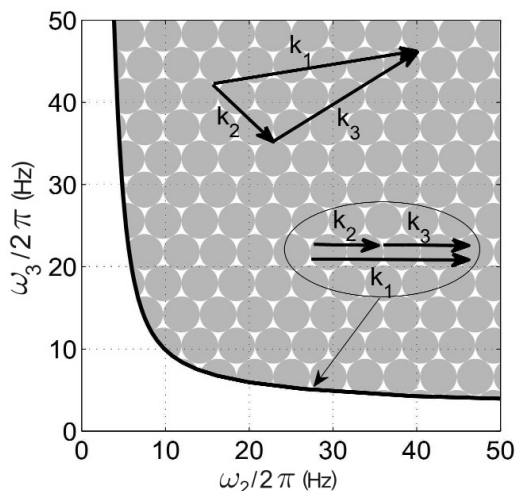


FIG. 7: Domain of existence of resonant waves (2) in the frequency domain for gravity-capillary waves. The solid black line is the border of this domain and corresponds to interactions between three copropagating waves. The gray pattern area above the solid black line represents solutions where the directions of the three waves are no longer the same. In the white area below the solid black line, no resonant solutions exist.

As briefly discussed in the previous paragraph, one of the outcomes of WTT is that energy is transmitted among resonant waves. At the lowest order, for pure capillary waves [4], it involves 3 waves that have then to satisfy the resonance conditions (2). It is possible to find geometrical solutions to this system using the linear dispersion relation of gravity-capillary waves. Fig. 7 shows the domain of existence of resonant waves in  $(\omega_2, \omega_3)$  variables. For too small values of either frequency, no 3-wave resonant solution can exist. This is related to the fact that no resonance can exist among 3 purely gravity waves due to the curvature of the dispersion relation. For large enough values of  $\omega_2$  and  $\omega_3$  solutions exist as is the case for purely capillary waves. A border exists (black line) above which resonant solutions can exist that correspond to 3 wave propagating in distinct directions [10, 41]. At the border, waves propagate in the same direction.

To investigate the 3-wave coupling in our data, we compute third order correlations of the velocity field. From  $v(x, y, t)$ , we compute the Fourier transform in time over 4 s time windows so that to obtain  $v(x, y, \omega)$ . 3-wave bispectra or rather bicoherences (i.e. dimensionless bispectra) are then computed as

$$B(\omega_2, \omega_3) = \frac{|\langle\langle v^*(x, y, \omega_2 + \omega_3)v(x, y, \omega_2)v(x, y, \omega_3) \rangle\rangle|}{[E^v(\omega_2 + \omega_3)E^v(\omega_2)E^v(\omega_3)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

where \* stands for complex conjugation and the average  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  stands for an average over successive time windows and a space average over  $(x, y)$  positions on the image.  $E^v(\omega) = \langle\langle |v(x, y, \omega)|^2 \rangle\rangle$  is the frequency spectrum.

Fig. 8(a) displays the bicoherence map of the full velocity field for experiments for the weakest confinement (case  $l_0$ ). We can see a line of strong correlation along the line of unidirectional coupling (black line) as well as some significant



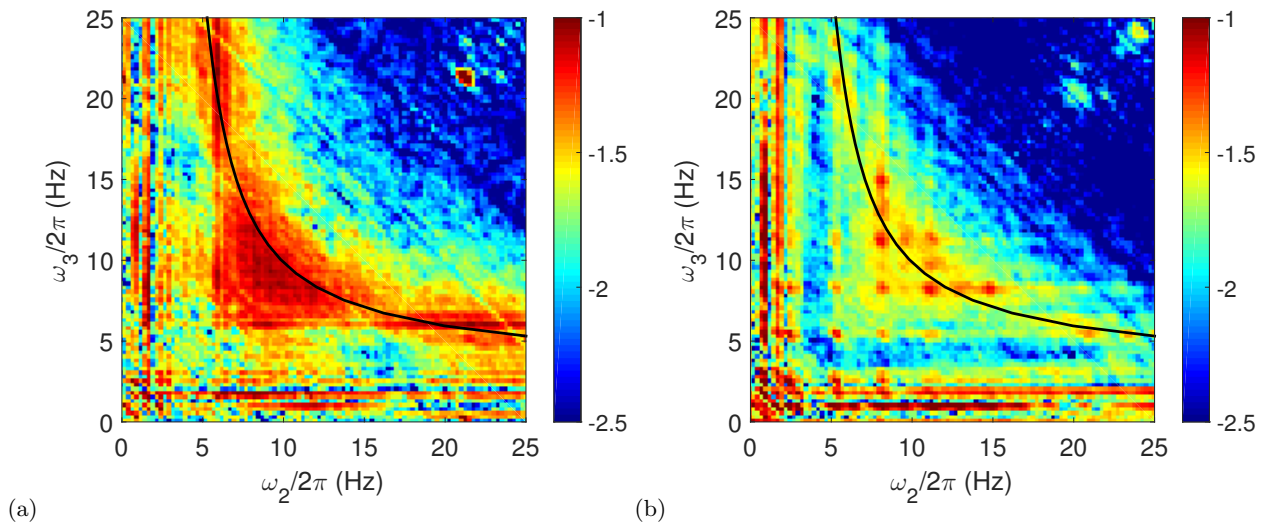


FIG. 8: Bicoherence (6) of the velocity field for (a) the experiment with the weakest confinement  $l_1 = 32.5$  cm and (b) for the experiment with the strongest confinement  $l_4 = 7$  cm. The black line corresponds to the 1D 3-wave resonant solutions.

correlations in the region where supposedly no correlations are possible (below the black line). These features have been reported and discussed in a previous article by Aubourg & Mordant [10]. In particular the correlations observed in the “forbidden region” are due to quasi-resonances allowed by the finite level of nonlinearity. The bicoherence measured for the strongest confinement  $l_4 = 7$  cm is shown in fig. 8(b). It shows a quite different organization of the signal with a dotted pattern rather than a continuous line as observed in (a).

To better understand this observation we compute separately the bicoherence of the velocity of longitudinal and transverse waves. Both cases are shown in fig 9. As it was observed for the spatiotemporal spectra where the longitudinal spectrum was not affected by the confinement, the same observation is seen for the bicoherence of the longitudinal waves which looks similar to the bicoherence of the unconfined case. Note that the statistical convergence of the bicoherence is lower than that of the full field as less wave configurations are averaged. By contrast, the bicoherence of the transverse waves shows only interactions among the scattered transverse eigenmodes of the vessel. For some unclear reasons, only even order modes appear in the bicoherence.

We show, in fig. 10 similar pictures of the bicoherence of the full field as well as the transverse and longitudinal waves in the case of the high aspect ratio channel (the second configuration with a 1.5 m long channel). The difference between the longitudinal waves and the transverse ones is even more striking in this configuration. The longitudinal waves have a continuous spectrum with dominant almost 1D interactions similar to the one reported in the unconfined case at weak nonlinearity. By contrast, the transverse waves show only a few discrete peaks.

All these observations confirm that the energy cascade for discrete turbulence transfers energy essentially from one eigenmode to another but with a whole different scheme from the weak turbulence theory.

## V. DISCUSSION

The weak turbulence theory has been developed for dispersive waves. For a simple dispersion relation  $\omega \propto k^\beta$  with  $\beta > 1$  as is the case for pure capillary waves, only trivial solutions exist for the resonance of unidirectional waves. 1D 3-wave resonances are allowed for non dispersive waves ( $\beta = 0$ ) but in that case it could lead to the formation of shocks [8]: As all wavetrains travel at the same velocity, they have an infinite time to interact in a ray and exchange energy. For gravity-capillary waves the dispersion relation (1) is more complex and its change of curvature enables non trivial 1D resonances. These waves are dispersive so that the interaction time remains finite but possibly much longer than that of waves that would travel in different directions. Indeed near the gravity-capillary crossover, the waves are only weakly dispersive as a minimum of phase and group velocity is observed. This is most likely the reason why the bicoherence corresponding to 1D resonances is seen to be the strongest in our experiments. Note that the dominance of 1D nonlinear coupling does not mean that 2D interactions are not present. Their coupling is much weaker but most likely they play a major role in the angular redistribution of energy which is clearly operating in our experiments. The total flux of energy is due to subtle global balances of all interactions. Note also that the 2D



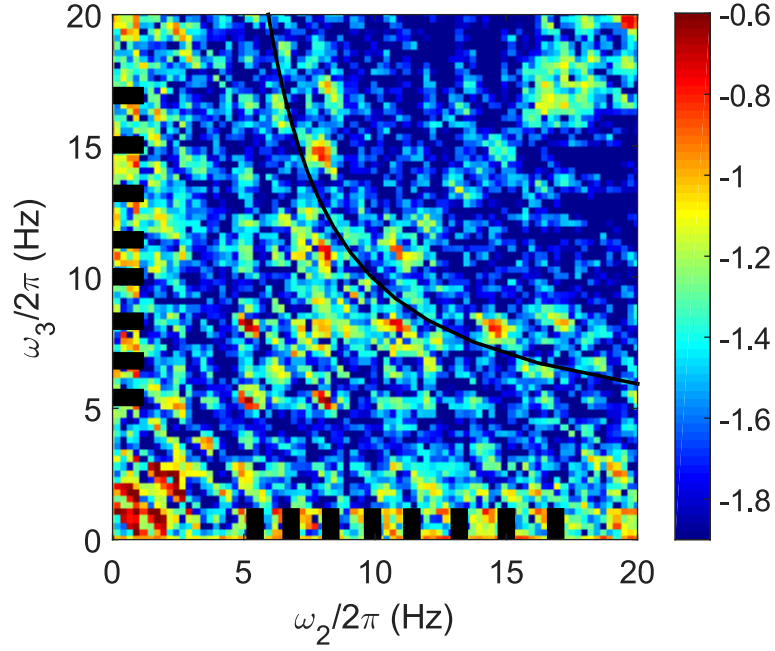
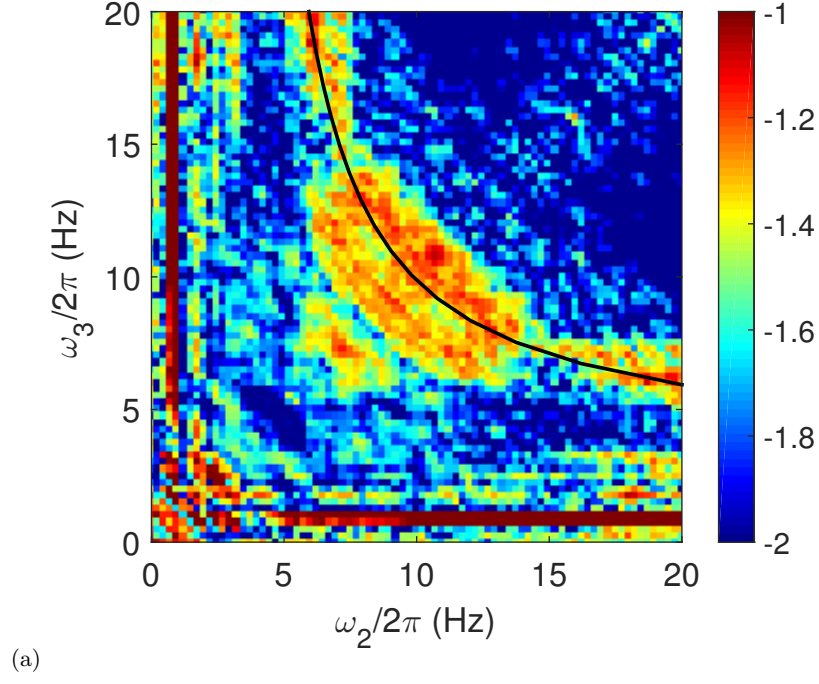


FIG. 9: Bicoherence of the longitudinal waves (a) and transverse waves (b) for the experiment with the most important confinement corresponding to a width of the vessel equal to 7 cm. The black line corresponds to the 1D solutions. The frequencies associated with the discrete transverse modes appear as black rectangle in (b).

interactions are more numerous than the 1D interactions so that their role in the global budget can be significant even though individual interactions are much weaker.

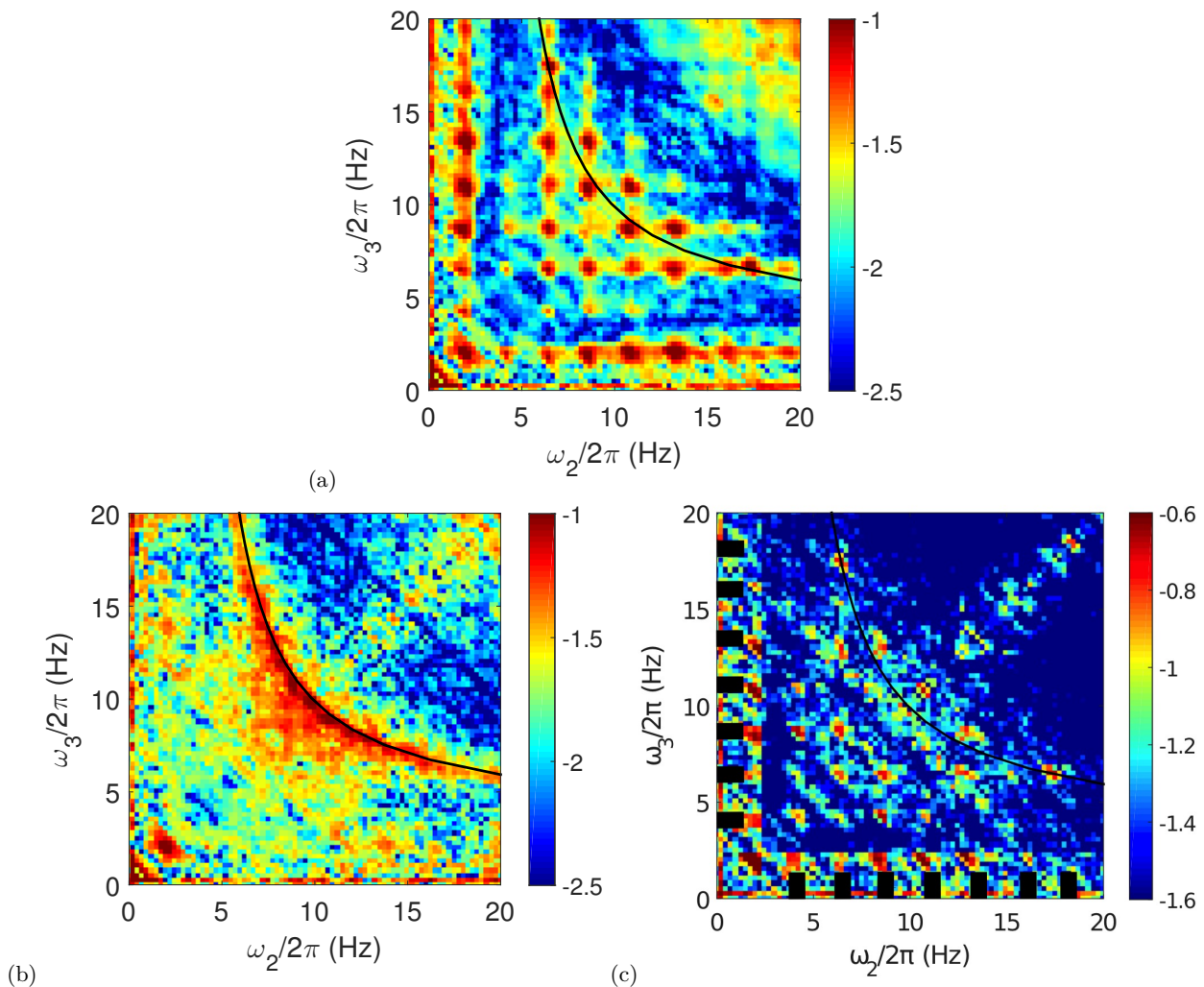


FIG. 10: Bicoherence of the wave field for experiments carried out in a high aspect ratio channel of size  $1.5 \text{ m} \times 10 \text{ cm}$  with an rms slope of 3%. The black line corresponds to the 1D solutions. (a) full wave field, (b) longitudinal waves (c) transverse waves. The frequencies associated with the discrete transverse modes appear as black rectangle in (c).

Our observations show that due to this peculiar property of gravity-capillary waves, a mixed state of kinetic weak turbulence and discrete weak turbulence can be observed in our channel. Wave turbulence remains continuous in the unconfined direction and discrete in the transverse direction. In the case of strong confinement, the transverse modes become widely separated in frequency so that the linear coupling between modes must be extremely weak. One could then observe several states of weakly coupled kinetic 1D wave turbulence along the unconfined direction but involving distinct transverse modes. The experimental difficulty would be that for a very narrow channel, dissipation by the walls will become very strong and possibly prevent the development of a purely 1D wave turbulence with a single transverse mode.

Our system shares some similarities with nonlinear propagation of light in a multimode fiber although the integrable turbulence observed in optical fibers is very distinct to weak turbulence. Our case is also reminiscent of that of inertial waves of a rotating fluid in a vertically confined channel studied by Scott [42]: Discrete modes are considered in the vertical direction and continuous 2D wave spectrum in the horizontal plane.

## ACKNOWLEDGMENTS

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 647018-WATU). We thank Vincent Govart for his technical assistance. We thank Kronos Worldwide, Inc. for kindly providing us with the titanium oxide pigment.

- 
- [1] R.Z. Sagdeev, “The 1976 oppenheimer lectures: Critical problems in plasma astrophysics. i. turbulence and nonlinear waves,” *Rev. Mod. Phys.* **51**, 1 (1979).
  - [2] A. Picozzi, J. Garnier, T. Hansson, P. Suret, S. Randoux, G. Millot, and D.N. Christodoulides, “Optical wave turbulence: Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics,” *Phys. Rep.* **542**, 1–132 (2014).
  - [3] G. During, C. Josserand, and S. Rica, “Weak Turbulence for a Vibrating Plate: Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?” *Phys. Rev. Lett.* **97**, 025503 (2006).
  - [4] V.E. Zakharov and N.N. Filonenko, “Weak turbulence of capillary waves,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **4**, 506 (1967).
  - [5] K. Hasselmann, “On the non-linear energy transfer in gravity-wave spectrum. part 1. general theory,” *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500 (1962).
  - [6] S. Galtier, “Weak inertial-wave turbulence theory,” *Phys. Rev. E* **68**, 015301 (2003).
  - [7] S. Nazarenko, *Wave turbulence*, Vol. 825 (Springer Science & Business Media, 2011).
  - [8] A.C. Newell and B. Rumpf, “Wave Turbulence,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59–78 (2011).
  - [9] V. E. Zakharov, V. S. L’vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
  - [10] Q. Aubourg and N. Mordant, “Nonlocal resonances in weak turbulence of gravity-capillary waves,” *Phys. Rev. Lett.* **114**, 144501 (2015).
  - [11] Q. Aubourg and N. Mordant, “Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence,” *Phys. Rev. Fluids* **1**, 023701 (2016).
  - [12] E. Kartashova, “Weakly nonlinear theory of finite size effects in resonators,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2013–2016 (1994).
  - [13] E. Kartashova, “Discrete wave turbulence,” *EPL* **87**, 44001 (2009).
  - [14] Yulin Pan and Dick K P Yue, “Understanding discrete capillary-wave turbulence using a quasi-resonant kinetic equation,” *Journal Of Fluid Mechanics* **816**, 96 (2017).
  - [15] V.S. L’vov and S. Nazarenko, “Discrete and mesoscopic regimes of finite-size wave turbulence,” *Phys. Rev. E* **82**, 056322 (2010).
  - [16] P. Denissenko, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, “Gravity wave turbulence in a laboratory flume,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 014501 (2007).
  - [17] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denissenko, “Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains,” *J. Fluid Mech.* **642**, 395–420 (2010).
  - [18] S. Nazarenko, “Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence,” *J. Stat. Mech.* **2006**, L02002 (2006).
  - [19] A.N. Pushkarev, “On the kolmogorov and frozen turbulence in numerical simulation of capillary waves,” *Eur. J. Mech. B* **18**, 345–351 (1999).
  - [20] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, “Observation of gravity-capillary wave turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
  - [21] Q. Aubourg, Campagne A., Peureux C., Arduin F., Sommeria J., Viboud S., and Mordant N., “Three-wave and four-wave interactions in gravity wave turbulence,” *Phys. Rev. Fluids* **2**, 114802 (2017).
  - [22] F. Leckler, F. Arduin, C. Peureux, A. Benetazzo, F. Bergamasco, and V. Dulov, “Analysis and Interpretation of Frequency-Wavenumber Spectra of Young Wind Waves,” *J. Phys. Ocean.* **45**, 2484–2496 (2015).
  - [23] L. Lenain and W. K. Melville, “Measurements of the directional spectrum across the equilibrium saturation ranges of wind-generated surface waves,” *J. Phys. Ocean.* **47**, 2123–2138 (2017).
  - [24] W.B. Wright, R. Budakian, D.J. Pine, and S.J. Putterman, “Imaging of intermittency in ripple-wave turbulence,” *Science* **278**, 1609–1612 (1997).
  - [25] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, “Decay of capillary wave turbulence,” *Phys. Rev. E* **85**, 066311 (2012).
  - [26] G V Kolmakov, A A Levchenko, M Brazhnikov, L P Mezhov-Deglin, A Silchenko, and P Mcclintock, “Quasiadiabatic Decay of Capillary Turbulence on the Charged Surface of Liquid Hydrogen,” *Physical Review Letters* **93**, 074501 (2004).
  - [27] H Xia, M G Shats, and H Punzmann, “Modulation instability and capillary wave turbulence,” *Epl* **91**, 14002 (2010).
  - [28] H Punzmann, M G Shats, and H Xia, “Phase Randomization of Three-Wave Interactions in Capillary Waves,” *Physical Review Letters* **103**, 064502 (2009).
  - [29] A. Campagne, R. Hassaini, I. Redor, J. Sommeria, T. Valran, S. Viboud, and N. Mordant, “Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves,” *Phys. Rev. Fluids* **3**, 044801 (2018).
  - [30] B. Miquel, A. Alexakis, and N. Mordant, “Role of dissipation in flexural wave turbulence: from experimental spectrum to kolmogorov-zakharov spectrum,” *Phys. Rev. E* **89**, 062925 (2014).
  - [31] T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, and C. Touzé, “Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping,” *EPL* **102**, 30002 (2013).
  - [32] A. Przadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans, “Fourier transform profilometry for water waves:

- how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface?” *Experiments In Fluids* **52**, 519–527 (2011).
- [33] P. J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry,” *Exp. Fluids* **46**, 1037–1047 (2009).
- [34] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry,” *Applied Optics* **48**, 380–392 (2009).
- [35] P. Cobelli, A. Prasadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux, and A. Maurel, “Different Regimes for Water Wave Turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 214503 (2011).
- [36] M. Berhanu, E. Falcon, and L. Deike, “Turbulence of capillary waves forced by steep gravity waves,” submitted to *J. Fluid Mech.* (2018).
- [37] R. Hassaini and N. Mordant, “Transition from weak wave turbulence to soliton gas,” *Phys. Rev. Fluids* **2**, 094803 (2017).
- [38] M. Berhanu and E. Falcon, “Space-time-resolved capillary wave turbulence,” *Phys. Rev. E* **89**, 033003 (2013).
- [39] L. Deike, B. Miquel, P. Gutierrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy, “Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence,” *J. Fluid Mech.* **781**, 196–225 (2015).
- [40] N. Mordant, “Fourier analysis of wave turbulence in a thin elastic plate,” *Eur. Phys. J. B* **76**, 537–545 (2010).
- [41] Q. Aubourg, *Etudes expérimentales de la turbulence d’ondes à la surface d’un fluide. La théorie de la Turbulence Faible à l’épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité*, Ph.D. thesis, Université Grenoble Alpes (2016).
- [42] J.F. Scott, “Wave turbulence in a rotating channel,” *J. Fluid Mech.* **741**, 316–349 (2014).



## Chapitre 6

# Transition entre Turbulence Faible d'ondes gravito-capillaires et turbulence solitonique



Photo d'un soliton près d'une plage à Maui, Hawaii.  
<https://physics.aps.org/articles/v6/15>

## 6.1 Introduction

La turbulence faible considère théoriquement des ondes dispersives qui sont largement incohérentes mais cela n'est pas toujours le cas expérimentalement. Pour la turbulence des ondes de gravité, des mesures in situ où la séparation d'échelle entre injection d'énergie et dissipation est assez grande ont permis de reconstituer le spectre de puissance des ondes qui s'est révélé être en bon accord avec le spectre de KZ pour les plus faibles non-linéarités  $E^v \propto \omega^{-4}$  [125]. Les mesures des ondes de gravité en laboratoire sont par contre un peu plus nuancées, en effet les spectres de puissance mesurés en fonction de  $\omega$  et  $k$  se rapprochent du spectre théorique uniquement lorsque la non-linéarité est importante dans le milieu [93, 136, 24]. Or les cas de fortes non-linéarités ont été accompagnés soit par des déferlements soit par l'apparition d'ondes liées. Pour les expériences des ondes gravito-capillaires des mesures spatio-temporelles ont permis d'identifier des régimes où quand bien même les spectres de puissance sont en adéquation avec les prédictions théoriques des structures localisées, qui peuvent être apparentées à des ondes de choc dispersives ou des solitons radiatifs, sont visibles dans le milieu [83, 92]. Par ailleurs des calculs numériques massifs sur un modèle unidimensionnel d'interactions d'ondes (MMT) [137] ont montré dans certains cas des spectres différents des solutions de Zakharov de turbulence faible. Ces résultats peuvent s'expliquer par l'interférence de structures non linéaires cohérentes qui invalident alors l'application de la TTF au système. La dérivation de l'équation cinétique dans la TTF repose sur l'hypothèse du caractère aléatoire de la phase des ondes. Or à l'intérieur des structures localisées cohérentes la corrélation de phase est très forte. La présence de ces structures rompt dans une certaine mesure l'hypothèse du caractère aléatoire de la phase et peut entraîner des déviations des spectres des solutions de Zakharov. En général, la turbulence d'ondes n'est pas totalement faible et s'accompagne par des structures cohérentes. La décomposition dynamique de l'approximation de la turbulence faible par des événements intermittents associés à des structures cohérentes non linéaires a récemment été abordée dans [138, 127]. La théorie des structures cohérentes possibles est loin d'être complète. On y retrouve essentiellement les solitons et les ondes de choc.

Les solitons sont des structures localisées cohérentes qui se déplacent à vitesse constante et apparaissent lorsque la dispersion contre-balance la non-linéarité dans le milieu. À la fin des années 50, le concept de soliton s'est immiscé dans la physique des plasmas [139]. Puis les solitons ont commencé à être utilisés dans toutes les branches de la physique. À la fin des années soixante, l'intérêt pour les solitons a largement augmenté avec la découverte de l'Inverse Scattering Transform (IST) [140]. Cette méthode y a été appliquée pour intégrer l'équation KdV. Cette équation, comme mentionné dans le chapitre 1, peut être appliquée aux ondes de gravité en eau peu profonde. Les solitons dans l'équation KdV étudiés dans [140] se présentent comme des structures stables : ils interagissent de manière élastique entre eux ainsi qu'avec la partie non-solitonique du spectre. La seconde équation de grande importance physique à laquelle l'IST peut être appliquée est l'équation Schrödinger Non Linéaire 1D (NLS) qui a été intégrée par Zakharov et Shabat au

début des années 70 [141]. Comme l'équation KdV, l'équation NLS est un modèle universel applicable à différents systèmes physiques. Il décrit la propagation d'enveloppes d'ondes dans des milieux non linéaires avec des non linéarités cubiques ; en particulier, il peut être utilisé pour la description de la propagation d'impulsions dans les fibres optiques non linéaires lorsque la non-linéarité principale est liée à l'effet Kerr. L'intérêt pour les solitons optiques a énormément augmenté ces dernières décennies, stimulé par les applications pratiques de l'utilisation des solitons dans les systèmes de communication modernes [142]. La dynamique des solitons joue également un rôle central dans la dynamique de propagation non linéaire de la génération de supercontinuum et d'autres phénomènes dans les fibres optiques de nouvelle génération [143]. Malgré l'énorme progrès lié au développement de l'IST ainsi que les applications des solitons, leur théorie est loin d'être complète. Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur les solitons 1D à la surface de l'eau. Différentes familles de solitons existent en fonction de l'effet de la tension de surface et de la profondeur d'eau. Les effets de tension de surface et de gravité intervenant pour ce type d'onde, nous rappelons donc la définition du nombre de Bond  $Bo = \gamma/(\rho h g)$  qui va nous permettre de distinguer les régimes gravitaires :  $Bo \approx 0$ , les régimes capillaires :  $Bo > 1/3$  et enfin les régimes gravito-capillaires  $0 \ll Bo \leq 1/3$ . Nous donnons également la définition du nombre de Froude  $Fr = c_s/\sqrt{gh}$  avec  $c_s$  la célérité du soliton. Ce nombre va permettre de caractériser la célérité des solitons par rapport à la vitesse linéaire des ondes longues dans le milieu  $\sqrt{gh}$ , lorsque  $Fr > 1$  on parle de régime supercritique et lorsque  $Fr < 1$  on parle de régime subcritique. Les premiers types de solitons étudiés expérimentalement et numériquement [22, 144, 145] sont les solitons KdV en eau peu profonde dans le régime gravitaire donc avec  $Bo \approx 0$  dans la limite de faible non-linéarité. Ces solitons sont composés d'une élévation positive avec des ailes infinies d'amplitude nulle. Ils se propagent dans une unique direction avec une vitesse égale à la vitesse des ondes longues dans le milieu et ont des collisions élastiques. Ce type de soliton a été étudié intensément de par son application directe géophysique. Plus tard l'équation Boussinesq a été utilisée afin de décrire un train de solitons qui peuvent se propager dans deux directions opposées et qui rentrent en collision de manière non-élastique [146, 147, 148]. Un échange d'énergie opère alors entre les solitons ce qui induit des changements dans leur taille et amplitude [149].

Dans la limite capillaire  $Bo > 1/3$  l'équation KdV possède comme solution un soliton de dépression, c'est à dire ayant une amplitude négative avec des ailes dont l'amplitude est nulle et ayant un nombre de Froude  $< 1$ . Des études expérimentales rapportent l'existence de ces structures [32, 150]. Des études numériques dès les années 80 s'intéressant aux régimes avec  $Bo > 1/3$  confirment également leur aspect localisé, dans le sens où ils sont composés d'une crête centrale et des ailes plates [151, 152].

Lorsque l'effet de la tension de surface n'est pas prédominant sur la gravité mais n'est pas négligeable, typiquement dans le régime proche de la transition gravito-capillaire, nous avons  $Bo \leq 1/3$  et non pas  $Bo \ll 1/3$ . Un développement limité de la dispersion au 5<sup>me</sup> ordre doit être alors pris en compte dans l'équation KdV qui n'a alors plus de solution sous forme de soliton exacte. En effet les solutions sont alors des solitons d'élévation avec un nombre de Froude  $\geq 1$  mais ne sont plus



isolés, on parle alors de "*solitons généralisés*". Ces solutions sont caractérisées par la présence d'ondulations de très faible amplitude au loin des ailes se propageant à la même vitesse que la bosse centrale. L'existence de solitons exacts dans ce régime gravito-capillaire particulier a concentré au fil des années de nombreux travaux analytiques [153, 154, 155, 156, 157, 27] ainsi que numériques [151, 158, 27]. S'ils rapportent tous uniquement l'existence de solitons aux ailes oscillantes, il semble y avoir une différence sur la localisation de ces ondulations en fonction du flux d'énergie dans le système : s'il existe un flux d'énergie localisé aux limites à l'infini du soliton soit en  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \rightarrow +\infty$  alors les oscillations sont symétriques de part et d'autre du coeur du soliton, si par contre le flux d'énergie dans le système est localisé à une échelle donnée alors les oscillations seront uniquement présentes à l'arrière du coeur du soliton. L'explication physique de l'existence de ces structures semble être liée à la résonance entre le soliton classique et les ondes linéaires dispersives dans le milieu. En effet cette résonance a lieu lorsque la relation de dispersion du soliton classique coupe la relation de dispersion linéaire des ondes dans le milieu à un nombre d'onde appelé nombre d'onde critique. Sur la figure 6.1(a) nous avons représenté en trait noir la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires linéaires avec une hauteur d'eau de 4.4 mm, ce qui correspond à  $Bo = 0.07$ , et en trait plein rouge la célérité d'un soliton d'élévation d'une amplitude maximale  $A = 1\text{mm}$  soit  $Fr > 1$ , nous voyons qu'en effet il y a croisement entre les deux courbes en  $k=k_c$ . Pour les solitons d'élévation avec  $Fr \geq 1$  il y aura toujours un nombre d'onde critique pour lequel la célérité du soliton et la vitesse de phase des ondes linéaires sont égales. Le phénomène de résonance sera donc toujours présents d'où le développement des oscillations sur les ailes du soliton "classique". A l'inverse comme représenté sur la figure 6.1(b), lorsque  $Bo = 0.36$  soit  $> 1/3$  et  $Fr < 1$  soit pour un soliton de dépression d'une amplitude minimale  $A = -1\text{mm}$ , il n'y aura jamais égalité entre la célérité du soliton et la vitesse de phase des ondes linéaires, aucune résonance entre ces deux branches n'est donc possible ce qui explique pourquoi les solutions "soliton exact" sont admises analytiquement et numériquement dans ce cas.

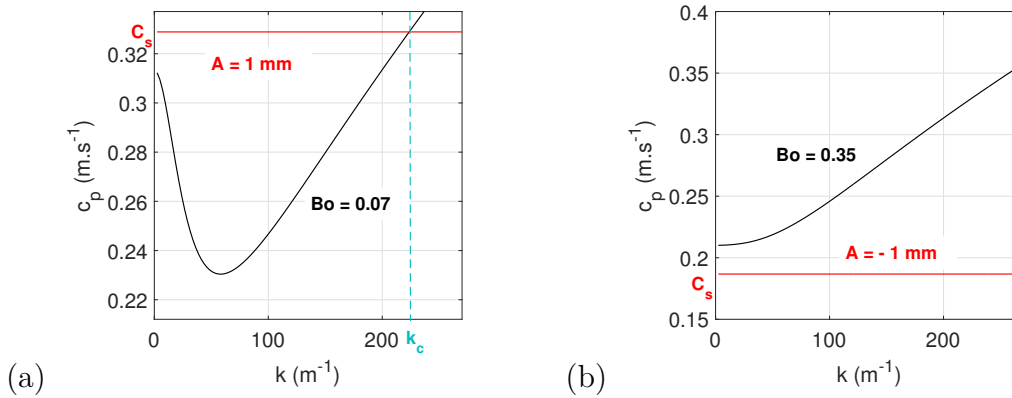


FIGURE 6.1 – (a) évolution de la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires linéaires  $c_p$  (trait plein noir) avec une profondeur d'eau  $h = 1 \text{ cm}$  donnant un nombre de Bond  $= 0.1 < 1/3$ . La vitesse du soliton  $c_s$  d'élévation avec une amplitude  $A = 1 \text{ mm}$  est représentée en trait plein rouge. Le nombre d'onde critique  $k_c$  correspond à l'intersection entre  $c_s$  et  $c_p$ . (b) évolution de la vitesse de phase des ondes gravito-capillaires linéaires  $c_p$  (trait plein noir) avec une profondeur d'eau  $h = 4.6 \text{ mm}$  donnant un nombre de Bond  $= 0.35 > 1/3$ . La vitesse du soliton  $c_s$  de dépression avec une amplitude  $A = -1 \text{ mm}$  est représentée en trait plein rouge. Aucune intersection n'est possible entre  $c_s$  et  $c_p$ .

Les observations expérimentales des solitons KdV dans les régimes subcritiques et supercritiques ne sont pas nombreuses, cela est d'autant plus difficilement observable pour le cas subcritique car il nécessite des couches de fluides très fines, de l'ordre de 5 mm pour de l'eau propre. E. Falcon a observé la transition entre des solitons de dépression et d'élévation dans un canal d'1 m 50 de long et 7 cm de largeur rempli d'une fine couche de mercure allant de 2.12 mm à 8.5 mm correspond à des nombres de Bond allant de 0.04 à 0.67 [32]. Les mesures des hauteurs des vagues s'est faite par deux capteurs de déplacement sans contact à courant de Foucault. Lorsque  $\text{Bo} < 1/3$  des solitons d'élévation ont été mesurés puis en diminuant la profondeur de Mercure le nombre de Bond a augmenté jusqu'à dépasser le nombre de Bond critique  $\text{Bo} = 1/3$  et ce sont des solitons de dépression qui se sont alors développés dans le milieu. Une représentation des profils de ces deux types de solitons est visible sur la figure 6.2, on y remarque la présence de petites oscillations sur le front de propagation du soliton d'élévation qui semblent moins marquées sur le soliton de dépression et présentes sur ses deux ailes.

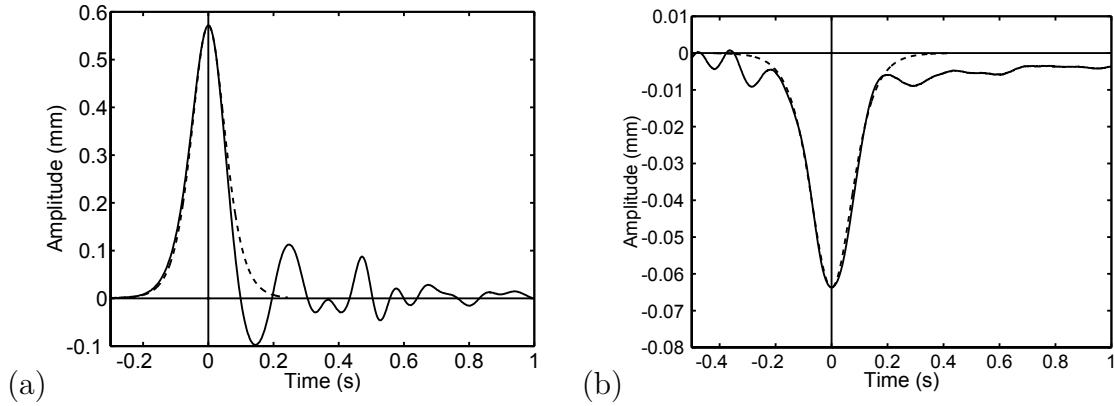


FIGURE 6.2 – (a) profil de la surface libre au cours du temps d'un soliton d'élevation pour une profondeur de mercure  $h=5.6$  mm, une amplitude maximale du soliton  $A_0=0.57$ mm et  $Bo = 0.1$ . (b) profil au cours du temps d'un soliton de dépression pour une profondeur de mercure  $h=2.12$  mm, une amplitude minimale du soliton  $A_0=-0.064$  mm et  $Bo = 0.67$ . Les lignes en tirets sont les profils théoriques des solitons selon la solution de l'équation KdV (6.1). Figures extraites de [32].

L'évolution théorique de la hauteur du soliton  $\zeta$  en fonction du temps peut être calculée en utilisant la solution de l'équation KdV (6.1), dont nous rappelons l'expression :

$$\zeta = \zeta_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - ct}{L} \right) \quad (6.1)$$

$\zeta_0$  correspond à l'extremum de la hauteur du soliton,  $L$  sa largeur caractéristique et  $c$  sa célérité. Grâce aux mesures de  $\zeta_0$  il a pu confronter les profils théoriques des solitons KdV aux profils mesurés, ce qui a résulté en une bonne concordance confirmant ainsi que les structures localisées observées sont bien des solitons gravito-capillaires KdV. Perrard et al. [150] ont également étudié expérimentalement les solitons de dépression KdV dans un dispositif expérimental assez original. Ce dernier se compose d'un cylindre d'eau en lévitation grâce à l'effet de Leidenfrost sur un canal Dural de 4 cm de largeur et 45 cm de long chauffé à une température comprise entre 270 et 290 °C. Le système est forcé avec un pot vibrant mécanique avec des pulses afin de générer les solitons. La hauteur des ondes se propageant sur le cylindre le long du canal est mesurée par une détection du contour de l'interface sur des images enregistrées par une caméra rapide à une fréquence de 50 Hz. Sur la figure 6.3 est représenté le profil du soliton mesuré le long de son axe de propagation et en rouge se trouve le profil théorique des solitons KdV de dépression.

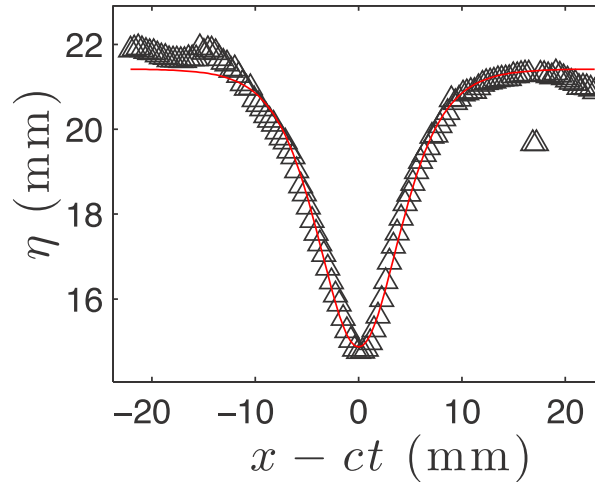


FIGURE 6.3 – Profil mesuré expérimentalement d'un soliton de dépression au cours du temps. La ligne rouge correspond à l'évolution théorique du soliton KdV de dépression ayant la même amplitude extrême que celle mesurée expérimentalement. Les mesures ont été effectuées expérimentalement par Perrard et al. à la surface d'un cylindre d'eau en lévitation sur un canal chauffé à une température entre 270 et 290 °C. Une méthode de détection du contour de l'interface par imagerie rapide a été implémentée. Le forçage est délivré par un pot vibrant attaché à l'une des extrémités du cylindre. Des pulses rapides sont exécutés par le pot vibrant afin de générer les solitons. Figure extraite de [150].

Le profil mesuré semble en bon accord avec le profil théorique, ce qui confirme que ce sont bien des solitons KdV, par ailleurs aucune oscillation ne semble présente sur les ailes du soliton de dépression comme cela est prédit par la théorie.

Dans le cadre de cette thèse les structures localisées observées sont des solitons KdV d'élévation, pour s'en assurer on a entre autre comparé l'évolution temporelle du profil des solitons à une position  $(x,y)$  donnée ( typiquement le milieu de notre cuve ) et l'évolution prédite par l'équation (1.85). Nous présentons dans la figure 6.4 la comparaison entre expérience et théorie pour une expérience avec  $h=1.5$  cm. Le champ des vagues a été reconstruit en utilisant la profilométrie par transformée de Fourier. Nous pouvons clairement voir que le soliton, qui est entouré de vagues aléatoires, est très bien approximé par le profil de l'équation (1.85). Les ondes aléatoires qui sont également présentes dans le milieu sont dues au forçage qui ne consiste pas à générer un soliton exact, comme cela peut être fait par un piston, mais plutôt un forçage aléatoire centré sur une fréquence de 2 Hz et modulé par  $\pm 0.5$  Hz. Les solitons qui se développent alors à la surface de l'eau baignent dans un champ de vagues aléatoires non cohérentes.

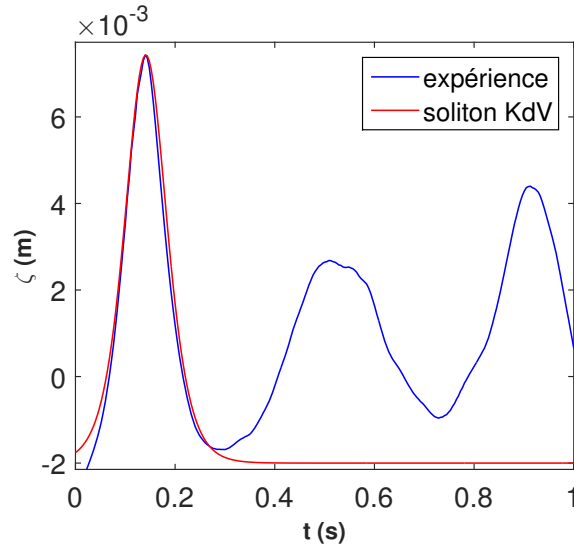


FIGURE 6.4 – Comparaison entre le profil expérimental d'un soliton et sa prédiction théorique avec l'équation KdV (1.85). Le profil affiché est mesuré au centre de la cuve. L'expérience concernée a été effectuée avec une profondeur d'eau au repos de 1.5 cm. Le champ des vagues a été reconstruit par la méthode de profilométrie par transformée de Fourier dans une cuve de dimension  $37 \times 57 \text{ cm}^2$ . Les ondes sont générées par la mise en mouvement horizontale de la cuve grâce à une table oscillante ayant un déplacement sinusoïdal à une fréquence centrale de 2 Hz modulée par  $\pm 0.5 \text{ Hz}$ .

Nous faisons une remarque assez brève sur une catégorie de solitons à la surface de l'eau différente de celles des solitons KdV : les solitons NLS. En effet ces solitons concernent des régimes d'eau profonde et des non-linéarités qui ne sont pas faibles. Ce type de solitons gravito-capillaires a été découvert par Longuet-Higgins [159, 160] dans ses expériences numériques en eau profonde. La forme générale de ces structures est composée d'une oscillation lente d'un ensemble d'oscillations plus rapides et est semblable aux solitons "focusing" mesurés en optique non-linéaire [10].

Lorsqu'un grand nombre de solitons évoluent dans un milieu, ils développent un état statistique différent de celui de la turbulence faible, appelé gaz de soliton. Si les gaz de soliton ont été expérimentalement observés pendant longtemps en optique [161, 162, 163], leur observation à la surface des fluides n'a été rapportée que récemment. Dans le régime capillaire évoqué précédemment, Perrad et al. [150] ont mesuré le spectre de puissance fréquentiel de la hauteur des solitons KdV de dépression, représenté sur la figure 6.5. Le spectre semble afficher en basse fréquence une loi de puissance différente de celle du régime de turbulence d'onde faible, en effet le spectre évolue en suivant  $\omega^{-1.5}$ . Toute fois cette loi de puissance est à considérer avec précaution car elle est estimée sur moins d'une décade en pulsation d'onde, ce qui est d'autant plus réduit en fréquence, avec un spectre présentant des pics ce qui élargit la barre d'erreur de la pente estimée. Par ailleurs la tension de surface mesurée est 30% inférieure à celle de l'eau à  $100^\circ\text{C}$ , ce qui

peut être relié à un état de surface pollué et dans ce cas des études expérimentales font état d'un changement sur la pente des spectres des vagues [111].

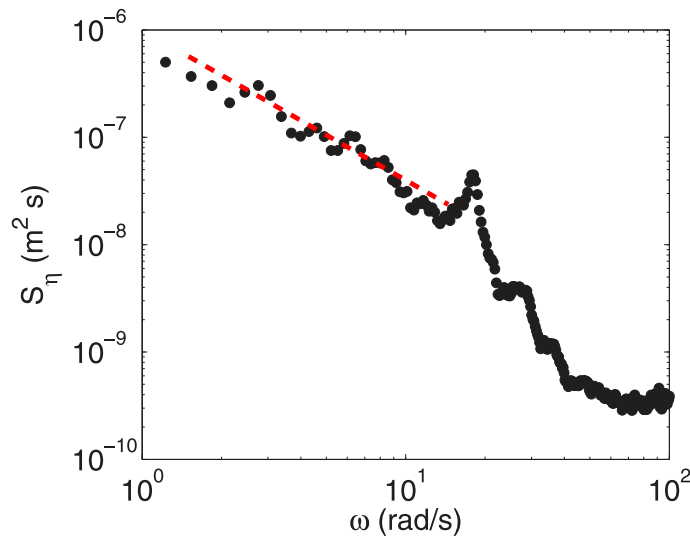


FIGURE 6.5 – Evolution du spectre de puissance du champ d'élévation des ondes en fonction de la pulsation d'onde. La ligne en tirets rouge correspond à la loi de puissance  $\omega^{-1.5}$  et "fit" la décroissance du spectre à basse fréquence. Une transition est visible à  $\omega = 18$  rad/s qui correspond au mode de sloshing. Le régime à basse fréquence peut-être assimilé à la signature spectrale de la turbulence de solitons. Figure extraite de [150].

Une évolution similaire a été observée pour des solitons de gravité par des mesures locales in situ [164] avec cette fois-ci une grande séparation d'échelle propre aux mesures en océan. Dans cet article Costa et al. ont pu reconstruire le spectre de hauteur des vagues et ont ainsi identifié la coexistence d'un régime solitonique à basse fréquence évoluant selon  $\omega^{-1.5}$  tandis qu'un régime de turbulence faible d'onde de gravité était observable à des plus hautes fréquences. Nous précisons que pour la turbulence de gaz de solitons il n'y a pas en réalité de cascade d'énergie, ceci est dû à l'intégrabilité de l'équation, dont le soliton est solution, pour laquelle il existe en plus de l'énergie un nombre infini d'invariants. Aucune prédiction théorique n'est par ailleurs possible dans ce cas sur la pente des spectres d'énergie et reste une question ouverte qui semble pour l'instant être au delà du rayon d'étude de la communauté des théoriciens qui s'intéresse plutôt aux interactions au sein du gaz de soliton et à la possible émergence de vagues scélérates [165, 166, 167]. L'étude de ce chapitre concerne uniquement les effets sur la turbulence d'onde faible de la présence de solitons dans le milieu.

En effet nous proposons dans ce chapitre d'étudier la transition entre les régimes de turbulence faible d'ondes gravito-capillaires, caractérisés par un champ d'ondes aléatoires non-localisées, et les régimes de turbulence solitonique, caractérisés par la présence de solitons d'élévation KdV. Les signatures spectrales de chaque régime seront analysées. Une étude fine de l'évolution d'un état à l'autre en modifiant soit la dispersion soit la non-linéarité, en changeant respectivement

soit la profondeur d'eau au repos soit l'amplitude du forçage, permettra la détermination d'un "diagramme de phase". Le nombre de Bond dans nos expériences est compris entre 0.04 et 0.21, on tend donc vers le régime subsonique. Les effets d'une telle transition sur les propriétés statistiques de la turbulence seront rapportés. On note entre autre un changement drastique sur la distribution angulaire de l'énergie dans le système en passant d'un état à l'autre.

## 6.2 Article ([23] publié dans *Physical Review Fluids*)

# Transition from Weak Wave Turbulence to Soliton-Gas

Roumaïssa Hassaini<sup>1</sup> and Nicolas Mordant<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels,  
Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, F-38000 Grenoble, France*

We report an experimental investigation of the effect of finite depth on the statistical properties of wave turbulence at the surface of water in the gravity-capillary range. We tune the wave dispersion and the level of nonlinearity by modifying the depth of water and the forcing respectively. We use space-time resolved profilometry to reconstruct the deformed surface of water. When decreasing the water depth, we observe a drastic transition between weak turbulence at the weakest forcing and a solitonic regime at stronger forcing. We characterize the transition between both states by studying their Fourier Spectra. We also study the efficiency of energy transfer in the weak turbulence regime. We report a loss of efficiency of angular transfer as the dispersion of the wave is reduced until the system bifurcates into the solitonic regime.

arXiv:1709.04637v1 [physics.flu-dyn] 14 Sep 2017

---

\* nicolas.mordant@univ-grenoble-alpes.fr



## I. INTRODUCTION

Wave turbulence and solitonic turbulence are two major faces of the propagation of random and weakly nonlinear waves. The dynamics of incoherent dispersive waves has been studied in the framework of the statistical theory of Weak Turbulence since the pioneering work of Zakharov, Benney and Newell in the 60's (see [1, 2] for recent reviews). Based on the hypothesis of weak nonlinearity, the theory predicts an energy transfer through resonant interactions among waves. For forced turbulence it leads most often to a direct energy cascade from the forced large scales to small scales at which dissipation is acting. The Weak Turbulence Theory (WTT) provides analytical predictions of the statistical properties of turbulence such as the stationary wave spectrum. This theory has been applied to many physical systems such as plasmas [3], optics [4], thin elastic plates [5] or geophysical flows [6, 7]. In particular, it was applied to wave propagating at the surface of deep water either in the gravity regime [6] or the capillary regime [8]. In the last decades wave turbulence at the surface of a fluid has been the object of several detailed experimental investigations in either regimes or at the gravity-capillary crossover [9–12] that triggered a new dynamics in the field.

For weakly non dispersive waves, weakly non linear waves may also develop into solitons i.e. localized structures that propagate at a constant velocity while keeping their shape unchanged [13]. They have been discovered by Russell [14] and modeled by the Korteweg-de Vries (KdV) equation [15]. The interaction between solitons is elastic and appears as a phase shift between pre- and post- collision solitons. When a large number of solitons evolves in a medium, they develop a statistical state called soliton gas. If soliton gases have been experimentally observed for a long time in optics [16, 17], their observation at the surface of fluids has been reported only recently [18, 19]. Soliton gases develop a quite different turbulent state than weak turbulence due to the integrability of the KdV equation [20] for which an infinite number of invariants exist in addition to energy.

Here we report the observation of a transition between both weak turbulence and a solitonic regime. We focus on the case of weakly nonlinear waves propagating at the surface of a water layer at scales typical of the gravity-capillary crossover (i.e. wavelengths at centimeter scale). In this configuration weak wave turbulence has been unambiguously reported for a deep enough layer and weak enough forcing using space and time resolved measurements [10, 12, 21]. Such measurements are required to accurately characterize the wave propagation and identify the nonlinear regimes. At stronger forcing another wave turbulence regime has been identified that is more strongly nonlinear and involves coherent structures [22, 23]. Shallow water weak wave turbulence was also observed numerically by di Leoni *et al.* [24] for gravity waves. Furthermore at finite depth gravity-capillary solitons are known to propagate [25]. We report an investigation of the influence of the water depth and the intensity of the forcing on the statistical properties of wave turbulence. Changing the water depth alters the dispersivity of the waves. We observe and characterize the transition between a weak turbulence regime (low forcing and/or large depth) and a solitonic regime (larger forcing and/or small depth) that may evolve into a soliton gas.

## II. EXPERIMENTAL SET-UP

The experimental set-up is similar to that of Aubourg & Mordant [12]. It consists in a rectangular  $57 \times 37$  cm<sup>2</sup> Plexiglas tank filled with water. The depth of water at rest is changed in the range [0.6, 6] cm, going from finite depth regimes to deep water regimes considering the centimetric wavelengths. Great care is taken to prevent surface contamination in order to avoid dissipation by conversion to Marangoni waves [26]. The waves are generated by exciting continuously horizontally the container (along its longest axis) using an oscillating table controlled by a sinusoidal tension modulated around a central frequency equal to 2 Hz with a random modulation in an interval  $\pm 0.5$  Hz around the central frequency. The deformation of the free surface is reconstructed using the Fourier Transform Profilometry [27, 28] (see reference [21] for more details of the set-up). The water is mixed with titanium dioxide particles at a volume fraction of 1% to improve its optical diffusivity making possible to project on its very surface a grayscale sinusoidal pattern. These particles are chemically neutral and do not alter the surface tension of water as stated by Prasadka et al [26]. As the waves propagate the pattern seen by a high speed camera is deformed. The deformation of the pattern can be inverted to provide the elevation field of the waves. In this way we obtain a full space-time resolved measurement of the wave field. The images are recorded at 250 frames/s with a resolution of  $1024 \times 1024$  pixels<sup>2</sup> covering a 20 cm<sup>2</sup> area at the center of the tank.

We perform experiments with various magnitudes of the forcing and several values of the water depth at rest. Figure 1 shows the surface reconstruction in the case of a weak and a strong forcing amplitude. At weak forcing, fig. 1(a) shows a random distribution of the waves. The deformation seems to involve waves coming from all directions. At stronger forcing (fig 1(b)) we observe a localized coherent structure. These soliton-like, coherent structures are only propagating along the direction of the oscillation of the table ( $x$  axis). Note that there is about a factor ten between the amplitudes of the reconstructed waves in both cases. In this regime the system contains actually several solitons which propagate in both directions along the  $x$ -axis and collide as represented in a time space representation in fig. 2.

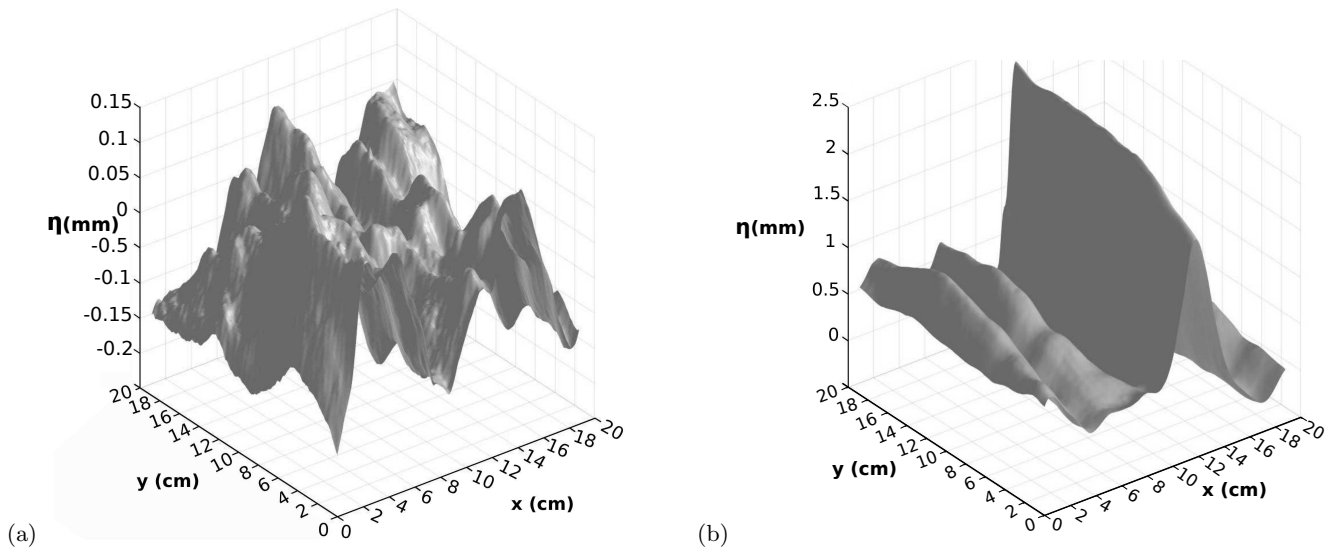


Figure 1. Elevation field of the waves for a height of water at rest equal to 1 cm. The excitation central frequency is 2 Hz. (a) amplitude of forcing equal to 0.9 mm. The *rms* slope is 1.6% and this regime corresponds to wave turbulence. (b) amplitude of forcing equal to 2.5 mm. The *rms* slope is 4.1% and a soliton can clearly be identified. In both cases the magnitude of the waves has been magnified strongly vertically.

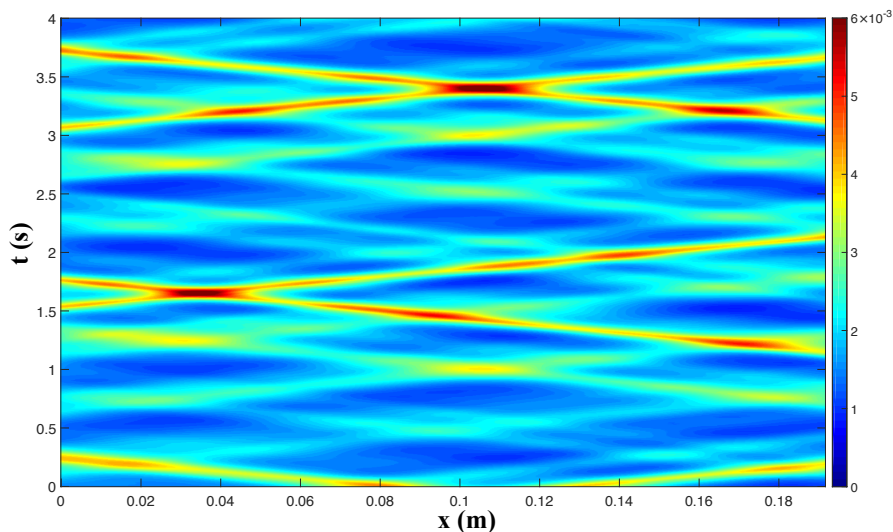


Figure 2. Space-time plot of the solitonic regime of fig. 1(b). The excitation central frequency is 2 Hz and the amplitude of forcing equal to 2.5 mm. The colormap is the wave height in meters.

### III. SPATIO-TEMPORAL SPECTRAL ANALYSIS

In order to identify the spectral content of the wave field, we compute the full frequency-wavenumber Fourier spectrum. For a better visualization of the spectra, we actually compute the spectrum of  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ , which can be interpreted as the vertical velocity due to the weak magnitude of the nonlinearity ( $\eta(x, y, t)$  is the instantaneous height of the free surface). The spectrum is noted  $E^v(\mathbf{k}, \omega)$  and is shown in fig. 3 for the two experiments of fig. 1. At weak forcing (fig. 3(a)), the energy is concentrated on the dispersion relation of gravity-capillary waves at finite depth:

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \tanh(kh)} \quad (1)$$

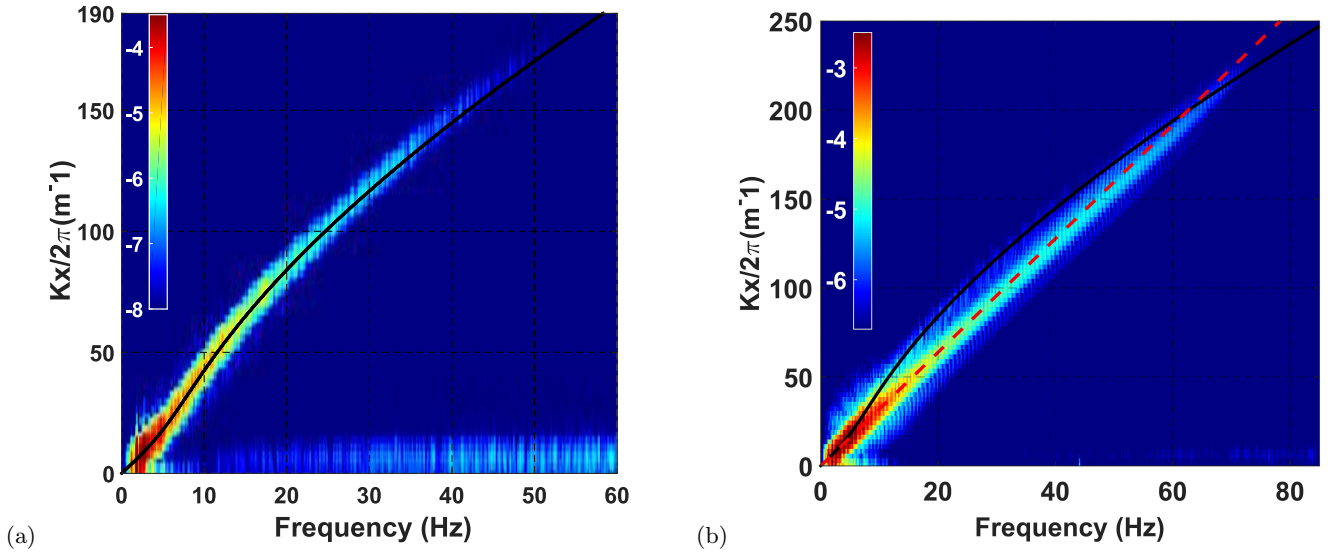


Figure 3. Space-time Fourier spectrum  $E^v(\mathbf{k}, \omega) = \langle |v(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle$  of the velocity field  $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$  of the waves. The height of water at rest is 1 cm. The forcing frequency is centered around 2 Hz. (a)  $E^v(k_x, k_y = 0, \omega)$  for an amplitude of forcing equal to 0.9 mm. (b) same quantity for an amplitude of forcing equal to 2.5 mm. In both (a), (b), the solid black line is the theoretical finite depth linear dispersion relation for gravity-capillary waves in pure water with surface tension  $\gamma = 72$  mN/m. In (b) the dashed red line is a straight line of slope  $1/c_s$  with  $c_s = \sqrt{gh}$  the celerity of long waves. In both subfigures the color is the log of  $E^v(\mathbf{k}, \omega)$ .

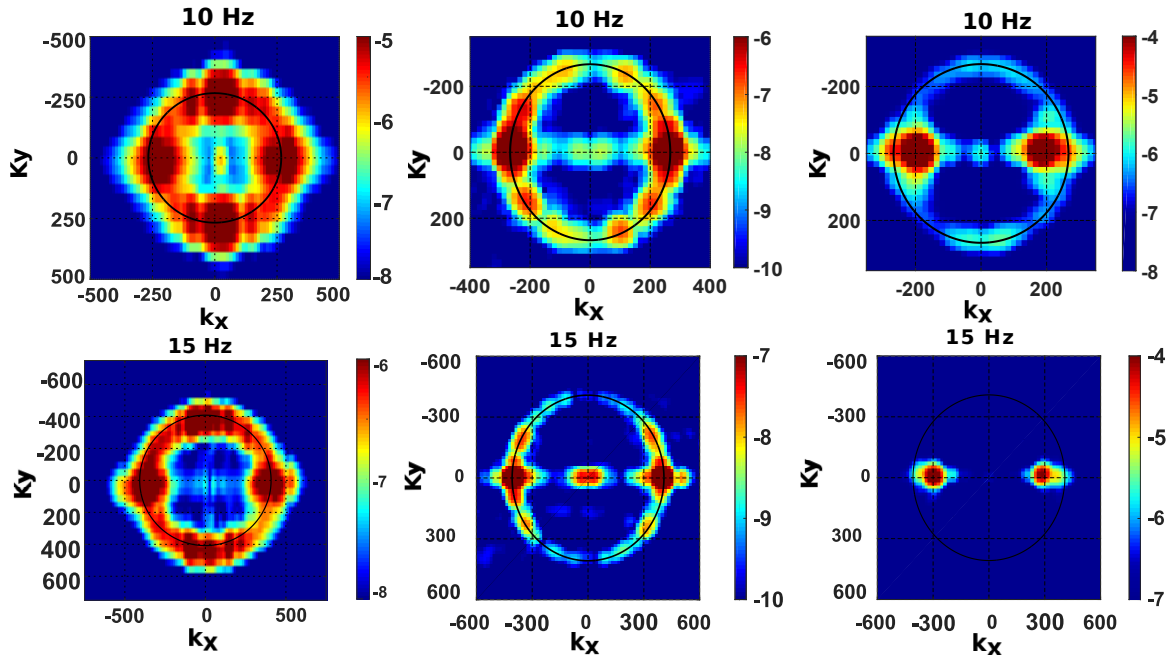


Figure 4. Cut of the energy spectrum  $E^v(k_x, k_y, \omega)$  at a given value of the frequency  $F = \omega/2\pi$  and shown as a function of  $(k_x, k_y)$ . The solid black line corresponds to the finite depth water gravity-capillary dispersion relation (1). The top line corresponds to  $F = 10$  Hz and the bottom line corresponds to  $F = 15$  Hz. The left column comes from a weakly non-linear regime in deep water  $h = 6$  cm where the system is quite isotropic, the central column comes from the WTT experiment in fig. 3(a) and the right column corresponds to the soliton experiment of fig. 3(b).

where  $\gamma = 72$  mN/m is the surface tension of pure water,  $\rho$  is the water density  $= 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, and  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> is the acceleration of gravity. At large wavelength  $kh \ll 1$ ,  $\omega \approx \sqrt{ghk}$  and the waves are weakly dispersive. The

concentration of energy on this linear dispersion relation is the clear indication of the presence of weak turbulence as reported in [12, 21].

At stronger forcing (fig. 3(b)), when localized structures are present, the energy is concentrated around a straight line of slope  $1/c_s$  where  $c_s = \sqrt{gh}$ .  $c_s$  is the velocity expected for solitons. A similar spectral signature has been also reported for solitons in nonlinear optics [29]. In our case the energy is concentrated mostly at large wavelengths ( $\lambda \gtrsim 2$  cm, corresponding to the size of the core of the soliton  $\approx 5$  cm) but it extends down to millimeter wavelengths due to the capillary precursors (reported for gravity-capillary solitons by Falcon *et al.* [25]) that are expected when the Bond number  $Bo = \frac{\gamma}{\rho gh^2}$  lies between 0 and 1/3 (which is the case for all our experiments) [30]. At low frequency the spectrum is tangent to the shallow water non dispersive part of the linear dispersion relation but departs clearly from it at smaller wavelengths.

Figure 4 displays cuts of the spectrum  $E^v(\mathbf{k}, \omega)$  at constant frequency. For deep water ( $h = 6$  cm, left column), the spectrum is quite isotropic although the forcing is acting along the  $x$  axis. This case is very similar to the one previously reported by Aubourg & Mordant [12, 21]. It shows a strong angular redistribution of energy. At lower depth and weak forcing ( $h = 1$  cm, weak turbulence regime, central column, shown in fig. 1(a) & 3(a)), the spectra are more anisotropic with energy mostly in the  $x$  direction with a much weaker angular spreading. At the same depth but stronger forcing (soliton regime, right column, shown in fig. 1(b) & 3(b)), energy is only visible on the  $x$  axis, along the direction of propagation of the solitons. Furthermore the peak of energy is clearly out of the linear dispersion as already observed in fig. 3. A first consequence of reducing the dispersivity of the waves seems to make the angular transfer of energy less efficient until the transition to the soliton regime at which no angular transfer is observed.

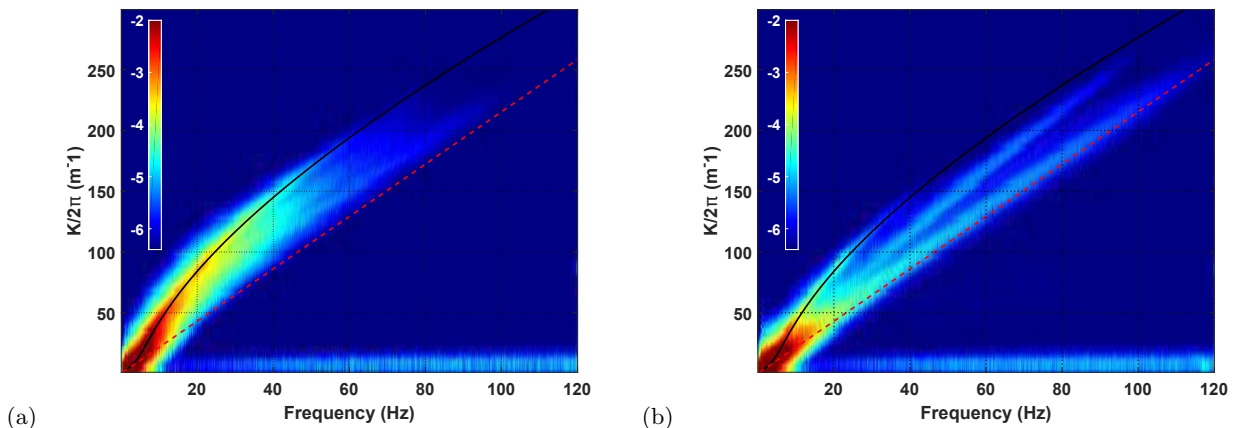


Figure 5. Space-time Fourier spectrum  $E^v(k, \omega)$  of the velocity field of the waves for experiments where the height of water at rest  $h = 3$  cm with a forcing centered around 0.7 Hz in an intermediate regime between weak turbulence and solitonic regime. (a) amplitude of table oscillation equal to 6.6 mm. The *rms* slope is 6% (b) amplitude of table oscillation equal to 9.2 mm. The *rms* slope is 6.9%. The solid black line corresponds to the gravity-capillary linear dispersion relation in finite depth for pure water. The red dashed line corresponds to the celerity of the soliton  $c_s = \sqrt{gh}$ .

We also observe intermediate states between the WTT and the ST represented in fig. 5 where some energy is observed in between the linear dispersion relation and the solitonic straight dispersion at the celerity  $c_s = \sqrt{gh}$ . This intermediate stage could be seen only for experiments with finite depths higher than 1 cm and a frequency of forcing lower than 2 Hz. In fig. 5(a) energy is observed on the linear dispersion relation and below but not yet on the soliton line. Extra energy lines can be seen notably in fig. 5(b) that correspond to non dispersive structures that propagate at a different velocity. This state corresponds to the beginning of the development of solitons that may not enough stable to resist the influence of the large scale stationary modes of the tank that possibly tend to make them lose their coherence very quickly. When the amplitude of the forcing is increased the solitonic state is then reached and energy is concentrated around the expected soliton dispersion relation.

As shown in the previous paragraph, the spectral signature of solitons in  $(k_x, \omega)$  space corresponds to a straight line that goes through the origin and is tangent to the shallow water gravity-capillary dispersion relation at the lowest frequencies. For a water depth equal to 1 cm (fig. 3(b)) the line is located below the dispersion relation (for frequencies lower than 60 Hz). For a water depth equal to 6 mm, the energy line representing the soliton is above the dispersion relation as shown in fig. 6. This represents a transition between a soliton that has a higher celerity than linear waves to a soliton that is slower than linear waves. This is called the bifurcation between the subcritical branch and the supercritical branch as explained by Kuznetsov & Dias in their review [31]. Analytically the inflection point

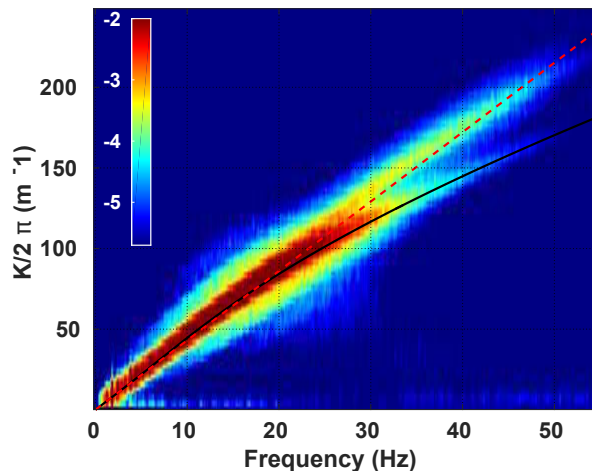


Figure 6. Space-time Fourier spectrum  $E^v(k, \omega)$  of the velocity field of the waves for experiments where the height of water at rest is  $h = 6\text{mm}$  with a forcing centered around 2 Hz and an amplitude of forcing is 3 mm. The rms slope is measured to be 6.4%. The solid black line corresponds to finite depth water gravity-capillary linear dispersion relation. The red dashed line corresponds to the celerity of the soliton  $c_s = \sqrt{g'h}$ .

disappears when the Bond number reaches 1/3, i.e. when  $h = \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho g}} = 4.7\text{ mm}$  for pure water). In fig. 6 the Bond number is slightly below 1/3 so that the inflection point is barely visible (compared to the spread of energy around the dispersion relation). The dispersion relation is close to linear in a large interval up to about 12Hz. The soliton energy line is superimposed with the dispersion relation in this interval and then lies above it at higher frequencies. In the previous case of fig. 3(b) the soliton energy is above the dispersion relation only above 60 Hz. In this configuration we are still in the subcritical case but we clearly see the evolution to the supercritical case.

#### IV. FREQUENCY SPECTRA

For pure power law dispersion relations, the Weak Turbulence Theory predicts the expression of the energy spectrum  $E(k)$  as :

$$E(k) = CP^{1/(N-1)}k^{-\alpha} \quad (2)$$

where  $k = \|\mathbf{k}\|$  is the wave number,  $P$  the energy flux,  $C$  a dimensional constant that can be calculated and  $\alpha$  the spectral exponent.  $N$  is the number of waves taking part in the non linear coupling [1]. Using the dispersion relation, one can translate the expression of  $k$  spectra into  $\omega$  spectra that are often easier to measure. One of the outcomes of WTT is that energy is transmitted among resonant waves. At the lowest order it involves 3 waves that have then to satisfy the resonance conditions such as  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  and  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ . This is the case for pure capillary waves on infinite depth water [8]. In the case of gravity waves the 3-wave resonance conditions do not admit solutions because of the negative curvature of the dispersion relation in infinite depth  $\omega = \sqrt{gk}$ . One must take into account the next order that involves 4 waves. The predicted spectra of the surface deformation  $\eta$  are thus expected to be

$$E(k) \propto P^{1/3}gk^{-5/2} \quad (3)$$

for deep water pure gravity waves and

$$E(k) \propto P^{1/2}k^{-7/4} \quad (4)$$

for deep water pure capillary waves [1]. Using the dispersion relations for gravity waves and capillary waves in finite depth one can change the variable from  $k$  to  $\omega$  in the predicted spectra and obtain

$$E(\omega) \propto P^{1/3}g\omega^{-4} \quad (5)$$



for gravity waves and

$$E(\omega) \propto P^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/6} \omega^{-17/6} \quad (6)$$

for capillary waves. Laboratory experiments fail to reproduce this predictions for the gravity waves. In large or small waves tanks, the spectral exponent of the gravity waves is seen to vary strongly with the forcing intensity and to be close to the WTT predictions only at the highest forcing magnitude, in opposition to the weak nonlinearity hypothesis [32, 33]. For capillary waves, experiments seem to follow better the predictions of the WTT [34, 35].

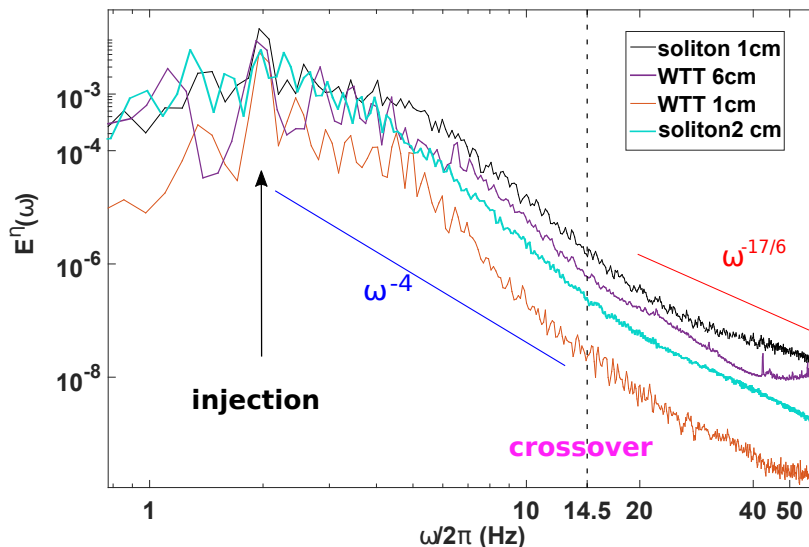


Figure 7. Time Fourier spectrum  $E^v(\omega)$  of the surface deformation for experiments where the height of water at rest is 1 cm with a forcing centered around 2 Hz and an amplitude of forcing equal to 2.5 mm. The vertical dashed line corresponds to the frequency of the crossover between the gravity and the capillary regime for pure water. The injection scale corresponds to the frequency of the forcing.

Figure 7 shows the frequency spectra for various experimental configurations. The spectra corresponding to a weak turbulence regime (at 1 cm and 6 cm depth) are very similar to that of Aubourg & Mordant [21]. At frequencies below the gravity-capillary crossover (at 14.5 Hz) and thus corresponding to gravity waves the spectra are steeper than the WTT prediction, the steepest being observed at low depth. In the capillary range, the spectra are also steeper than the WTT prediction consistently with Aubourg & Mordant [21] but at odds with observation by Falcon *et al.* [11] who observed a  $\omega^{-3}$  scaling close to the WTT prediction. In the solitonic regime, the spectrum is not changed much in the gravity range. In the capillary range the spectra are changed and are closer to the WTT prediction and even less steep at 1 cm depth. This may suggest that the  $\omega^{-3}$  scaling observed by Falcon *et al.* may correspond to the strong regime reported by Cobelli *et al.* [22]. In their figure 1 (top, strong regime) the surface velocity shows coherent structures that may be some sort of gravity-capillary solitons generated by the paddles even if their water depth is not that small (5 cm). The  $\omega^{-3}$  scaling may be due to the solitons as it is the case in our experiment at 2 cm water depth rather than being due to a fulfillment of the WTT prediction.

## V. PHASE DIAGRAM

The solitons that have been observed in our work are expected to follow the Korteweg-de Vries equation:

$$\eta_t + \frac{3c_s}{2h}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}c_s h^2 \left( \frac{1}{3} - Bo \right) \eta_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (7)$$

with  $c = c_s(1 + \frac{\eta_0}{2h})$  and  $\xi = x - ct$ . Note that  $\eta_0 < 0$  when  $Bo > \frac{1}{3}$ ,  $\eta_0 > 0$  when  $0 \leq Bo < \frac{1}{3}$ . Equation (7) can be derived only if nonlinear effects are small and have the same order of magnitude as dispersive ones. Dispersion is

quantified by  $\mu = (\frac{h}{L})^2$  and the non-linearity is quantified using the typical *rms* steepness of the waves

$$\epsilon \equiv \sigma = \left\langle \sqrt{\frac{1}{S} \int_S \|\nabla\eta(x, y, t)\|^2 dx dy} \right\rangle. \quad (8)$$

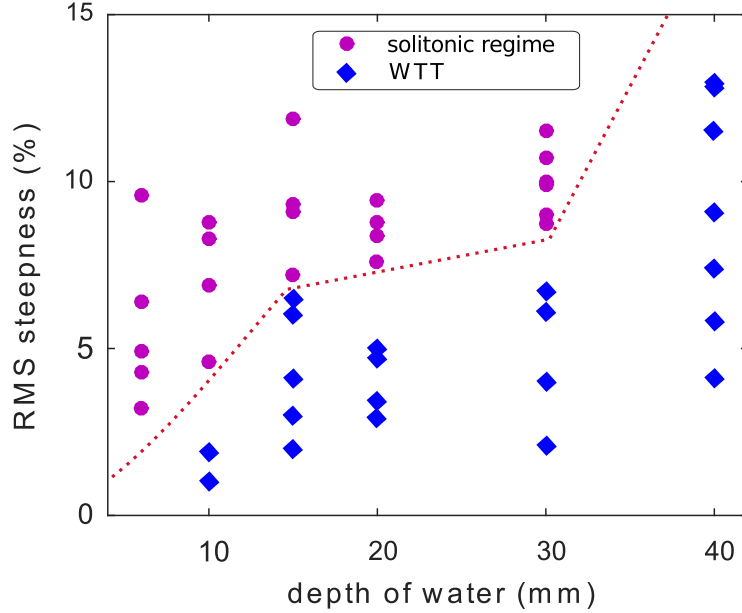


Figure 8. Solitonic transition phase diagram represented as a function of the *rms* steepness of the waves and the depth of water at rest, for experiments where the central frequency of excitation is 2 Hz. The dashed red line delimits the area where localized structures are predominant from the one where random waves are predominant

Figure 1 and 3 pointed out major changes in the spatial and spectral signatures of the studied states where only the amplitude of the forcing was tuned. Figure 8 displays a phase diagram of the weak turbulence regime and the solitonic one as a function of the water depth and the measured steepness of the waves. The central frequency is kept constant equal to 2 Hz for all the experiments. At a given water depth, the central frequency imposes indirectly the size of the soliton although predicting the actual size involves computing the inverse scattering transform of the excitation [36]. This computation is beyond the scope of this article but we observe that the size of the soliton changes only weakly with the experimental parameters. Thus the water depth is a measure of the dispersivity of the waves while the steepness is a measure of the nonlinearity. Each case is categorized as either solitonic or weakly turbulent by the observation of the Fourier spectrum. A border is clearly observed between both regimes. The border is increasing with the water depth: for deeper water it requires to force stronger waves to observe solitons. Equality between nonlinearity and dispersion is expected at the border, since it is the required condition to the development of solitary waves. To verify this condition we display in the table I the minimal values of non-linearity and dispersion for which solitary waves were observed for different values of the water depth. Globally we observe that the balance between nonlinearity and dispersion is fulfilled at each depth of water. Dispersion is defined as  $\mu = (\frac{h}{L})^2$  where  $L$  is the length of the core of the soliton. As  $L$  is weakly changing it means that when the depth of water is increased the dispersion is stronger. The condition of balance of dispersion and nonlinearity imposes that the nonlinearity should be stronger as well in order to observe the solitons. In the deepest case ( $h = 4$  cm) it was not possible to observe solitons as the nonlinearity was becoming very high and the waves were close to overturning.

h (cm)	0.6	1	1.5	2	3	4
$\epsilon$ (%)	3.2	4.6	7.3	7.6	8.8	#
$\mu$ (%)	3.8	4	7.2	7.3	9	#

Table I. Values of the nonlinearity  $\epsilon$  and the dispersion  $\mu$  for different depths of water with a frequency of excitation  $\in [1.5 \text{ } 2.5]$  Hz.  $\epsilon$  is estimated by directly measuring the surface averaged *rms* steepness of the waves.  $\mu = (\frac{h}{L})^2$  is computed by measuring the depth of water at rest  $h$  and  $L$  the typical size of the core of the soliton

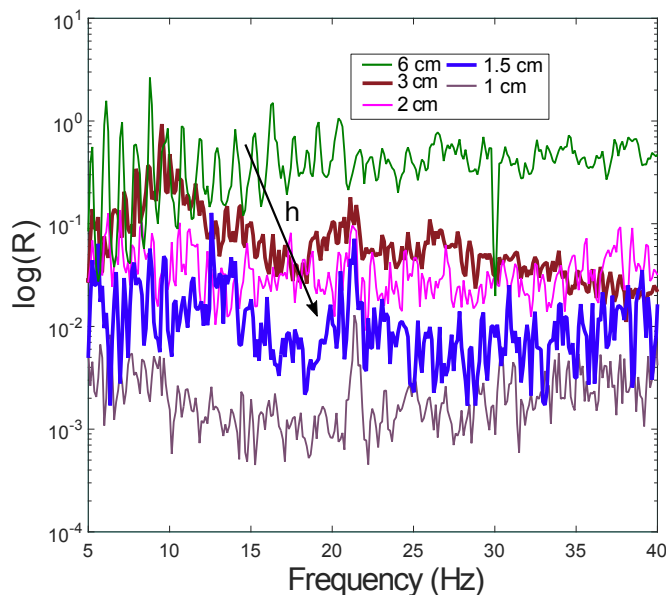


Figure 9. Evolution of the ratio  $R(\omega) = \frac{E^v(k_x=0, k_y(\omega))}{E^v(k_x(\omega), k_y=0)}$  of the energy perpendicular to the direction of the forcing oscillation over the energy in the direction of the forcing and for different depths  $h$  of water. The energy level is taken on the linear dispersion relation  $k(\omega)$ . The central frequency of excitation is equal to 2 Hz. The *rms* steepness of the surface for values of the water depth  $h = [6, 3, 2, 1.5, 1]$  cm are respectively  $[4.4, 6.5, 5, 6.4, 4.1]\%$ . In all cases the wave steepnesses are thus close to 5%.

## VI. ANGULAR ENERGY TRANSMISSION

Although the transition between the two regimes seems very abrupt, the observation of the wave spectrum showed a progressive change in the angular transfer of energy in the weak turbulence regime when decreasing the water depth. For truly non dispersive waves (acoustic waves), the resonant manifold involves only waves propagating in the same direction. Thus Newell & Rumpf asked the question of the evolution of an initially anisotropic distribution of waves [2]. Would higher order terms lead to angular transfer of energy or would the energy be condensed on rays that would evolve into shocks? Here we decrease progressively the dispersion of the waves and we clearly see that the efficiency or angular transfer is altered. In order to be more quantitative we define  $R$  as the ratio of the energy of the waves transverse to the forcing ( $k_x = 0$ ) divided by the energy of longitudinal waves propagating in the direction of the forcing ( $k_y = 0$ ):

$$R(\omega) = \frac{E^v(k_x = 0, k_y(\omega))}{E^v(k_x(\omega), k_y = 0)} \quad (9)$$

where  $k(\omega)$  is the linear dispersion relation. Aubourg & Mordant [12] reported for deep water that, although the energy injection is strongly anisotropic by forcing mostly waves in the  $x$  direction, the nonlinear interactions between the waves redistribute isotropically this energy in a very efficient way. We show the evolution of  $R(\omega)$  in fig. 9. We chose datasets for which the wave steepness (measure of the nonlinearity) is almost the same and close to 5% in order to show only the effect of changing the dispersion of the waves. Consistently with the observation of Aubourg & Mordant,  $R$  is close to one in the deepest case.  $R$  decays strongly when the water depth evolves from 6 down to 1 cm. This decay is roughly the same at all frequencies. When the water depth is 1.5 cm, the ratio  $R$  decayed by a factor 100. At 1 cm water depth the system transitioned into the soliton regime. In that regime the ratio is down to  $10^{-3}$  showing that almost no directional transfer of energy is occurring. Answering Newell & Rumpf, for finite depth gravity-capillary waves no angular transfer is induced by higher order closure but the system develops solitons rather than shocks as a weak dispersion remains present in our case.



## VII. CONCLUSIONS

In summary, we investigated the impact of nonlinearity and wave dispersion on wave turbulence. For strong dispersion of the waves (large water depth) and weak nonlinearity we observe a state of weak turbulence. When the dispersion of the waves is weak, the strength of nonlinearity can match that of dispersion. In these conditions, we observe the generation of solitons and thus a change of statistical regime from weak turbulence to soliton gas. The fate of energy is thus expected to be quite different. For weak turbulence, through resonant interactions, energy cascades to very small scales at which it is dissipated. In absence of dissipation, solitons are propagating without changing their shape and their interaction is elastic. An ensemble of solitons evolves into a state of integrable turbulence [20, 37] which properties are distinct from that of weak turbulence. Although in fiber optics the soliton gas is restricted to 1D propagation, for gravity-capillary waves solitons can have a 2D propagation and this maybe the case of the state observed by Cobelli *et al.* [10] at their strongest forcing. Note that Zakharov *et al.* predicted in [38] that for unidirectional propagation of gravity waves in deep water, weak turbulence should be unstable and coexist with soliton-like structures. In our case no coexistence of solitons and weak turbulence has been observed except very near the transition. We observe two very distinct regimes.

## ACKNOWLEDGMENTS

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 647018-WATU). We thank V. Govart for his technical assistance.

- 
- [1] S. Nazarenko, *Wave turbulence*, Vol. 825 (Springer Science & Business Media, 2011).
  - [2] A.C. Newell and B. Rumpf, "Wave Turbulence," *Annual Review of Fluid Mechanics* **43**, 59–78 (2011).
  - [3] R.Z. Sagdeev, "The 1976 oppenheimer lectures: Critical problems in plasma astrophysics. i. turbulence and nonlinear waves," *Reviews of Modern Physics* **51**, 1 (1979).
  - [4] A. Picozzi, J. Garnier, T. Hansson, P. Suret, S. Randoux, G. Millot, and D.N. Christodoulides, "Optical wave turbulence: Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics," *Physics Reports* **542**, 1–132 (2014).
  - [5] G. During, C. Josserand, and S. Rica, "Weak Turbulence for a Vibrating Plate: Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?" *Physical Review Letters* **97**, 025503 (2006).
  - [6] K. Hasselmann, "On the non-linear energy transfer in gravity-wave spectrum. part 1. general theory," *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500 (1962).
  - [7] S. Galtier, "Weak inertial-wave turbulence theory," *Physical Review E* **68**, 015301 (2003).
  - [8] V.E. Zakharov and N.N. Filonenko, "Weak turbulence of capillary waves," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **4**, 506 (1967).
  - [9] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denissenko, "Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains," *J. Fluid Mech.* **642**, 395 (2009).
  - [10] P. Cobelli, A. Przadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux, and A. Maurel, "Different Regimes for Water Wave Turbulence," *Physical Review Letters* **107**, 214503 (2011).
  - [11] E. Falcon, "Laboratory experiments on wave turbulence," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* **13**, 819–840 (2010).
  - [12] Q. Aubourg and N. Mordant, "Nonlocal resonances in weak turbulence of gravity-capillary waves," *Physical review letters* **114**, 144501 (2015).
  - [13] M. Peyrard and T. Dauxois, *Physique des Solitons* (EDP Sciences, 2004).
  - [14] J.S. Russell, *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43* (1845).
  - [15] D.J. Korteweg and G. De Vries, "Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **39**, 422–443 (1895).
  - [16] A. Schwache and F. Mitschke, "Properties of an optical soliton gas," *Physical Review E* **55**, 7720 (1997).
  - [17] F. Mitschke, I. Halama, and A. Schwache, "Soliton gas," *Chaos Solitons and Fractals* **10**, 913–920 (1999).
  - [18] A. Costa, A.R. Osborne, D.T. Resio, S. Alessio, E. Chrivi, E. Saggese, K. Bellomo, and C.E. Long, "Soliton turbulence in shallow water ocean surface waves," *Physical review letters* **113**, 108501 (2014).
  - [19] S. Perrard, L. Deike, C. Duchêne, and C.-T. Pham, "Capillary solitons on a levitated medium," *Physical Review E* **92**, 011002 (2015).
  - [20] V.E. Zakharov, "Turbulence in integrable systems. studies in applied mathematics," *Studies in Applied Mathematics* **122**, 219–234 (2009).

- [21] Q. Aubourg and N. Mordant, “Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence,” *Physical Review Fluids* **1**, 023701 (2016).
- [22] P. Cobelli, A. Przadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux, and A. Maurel, “Different Regimes for Water Wave Turbulence,” *Physical Review Letters* **107**, 214503 (2011).
- [23] M. Berhanu and E. Falcon, “Space-time-resolved capillary wave turbulence,” *Physical Review E* **89**, 033003 (2013).
- [24] P. Clark di Leoni, P.J. Cobelli, and P.D. Mininni, “Wave turbulence in shallow water models,” *Physical Review E* **89**, 063025 (2014).
- [25] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, “Observation of Sommerfeld Precursors on a Fluid Surface,” *Physical Review Letters* **91** (2003), 10.1103/PhysRevLett.91.064502.
- [26] A. Przadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans, “Fourier transform profilometry for water waves: how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface?” *Experiments In Fluids* **52**, 519–527 (2011).
- [27] P.J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry,” *Experiments in Fluids* **46**, 1037–1047 (2009).
- [28] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry,” *Applied optics* **48**, 380–392 (2009).
- [29] J. Laurie, U. Bortolozzo, S. Nazarenko, and S. Residori, “One-dimensional optical wave turbulence: experiment and theory,” *Physics Reports* **514**, 121–175 (2012).
- [30] R. Grimshaw, “Solitary waves with oscillatory tails and exponential asymptotics,” *Geophysical fluid dynamics: WHOI* **34**, 292 (1993).
- [31] E.A. Kuznetsov and F. Dias, “Bifurcations of solitons and their stability,” *Physics Reports* **507**, 43–105 (2011).
- [32] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denissenko, “Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains,” *Journal of Fluid Mechanics* **642**, 395–420 (2010).
- [33] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, “Observation of gravity-capillary wave turbulence,” *Physical review letters* **98**, 094503 (2007).
- [34] W.B. Wright, R. Budakian, D.J. Pine, and S.J. Putterman, “Imaging of intermittency in ripple-wave turbulence,” *Science* **278**, 1609–1612 (1997).
- [35] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, “Decay of capillary wave turbulence,” *Physical Review E* **85**, 066311 (2012).
- [36] S. Trillo, G. Deng, G. Biondini, M. Klein, G.F. Clauss, A. Chabchoub, and M. Onorato, “Experimental observation and theoretical description of multisoliton fission in shallow water,” *Physical Review Letters* **117**, 144102 (2016).
- [37] Randoux S., P. Walczak, M. Onorato, and P. Suret, “Intermittency in integrable turbulence,” *Physical Review Letters* **113**, 113902 (2014).
- [38] V. Zakharov, F. Dias, and A. Pushkarev, “One-dimensional wave turbulence,” *Physics Reports* **398**, 1–65 (2004).



## Chapitre 7

# Turbulence d'ondes élastiques : de la plaque à la membrane



The gong is one of the most effective of instruments for Sound Therapy. Its sound is very complex and contains a wide variety of tones and harmonics. In fact, it is said that the sound of a single gong, played well, can incorporate every sound that it is possible to hear.

*<https://soundingrainbows.co/one-to-one-treatments/>*

## 7.1 Introduction

La turbulence d'onde a toujours été considérée comme la "soeur" de la turbulence hydrodynamique. En effet similairement à la TTF, la turbulence hydrodynamique étudie les transferts d'énergie entre les grandes échelles d'injection jusqu'aux petites échelles dissipatives dans les fluides. Les transferts d'énergie se font dans ce contexte entre des tourbillons dans le volume du fluide et un spectre d'énergie cinétique est alors prédit par les travaux pionniers de Kolmogorov [168] en suivant  $E_k^v \propto k^{-5/3}$ , c'est la fameuse cascade de Kolmogorov. Contrairement à la turbulence d'onde la turbulence hydrodynamique ne concerne pas l'évolution statistique d'un système et quand bien même ces deux domaines présentent beaucoup de similitudes concernant leur bases, les prédictions des spectres d'énergie sont bien différentes d'un cas à l'autre. Mais ces dernières années l'observation d'un comportement intermittent pour des expériences de turbulence d'onde gravito-capillaires [18] et des simulations de plaques élastiques [169] ont suggéré un lien potentiellement proches de la turbulence hydrodynamique lorsque la non-linéarité des ondes est forte [127]. G.Düring et G.Krstulovic se sont intéressés théoriquement et numériquement aux régimes forts des ondes flexion en regardant plus particulièrement la limite épaisseur de la plaque nulle. La limite  $h \rightarrow 0$  représente un défi intéressant pour la théorie de la turbulence faible. En effet dans ces régimes les ondes sont non-dispersives ( $\omega = \sqrt{T/(\rho h)}k$ ) il y a donc proportionnalité entre pulsation d'onde linéaire et  $k$ . Ainsi lorsque  $h \rightarrow 0$  l'échelle de temps linéaire diverge, ce qui rend la limite asymptotique de la TTF mal définie. La version sans dimension de l'équation impliquant des échelles de longueur et de temps divergeant lorsque  $h \rightarrow 0$  peut être vue comme celle d'une plaque infinie avec une échelle de temps infinie. Un spectre présentant les mêmes propriétés que la turbulence hydrodynamique a ainsi été prédit pour cette limite lorsque le module de Young n'intervient plus dans la dynamique du milieu [170]. Dans l'article récent de Düring et Krstulovic [171] un résultat exact concernant les transferts d'énergie entre les ondes non-linéaires dans une plaque fine élastique est reporté.

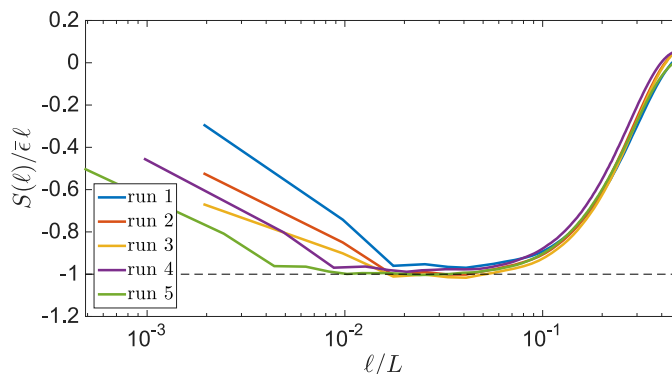


FIGURE 7.1 – Fonctions de structures  $S(l)$  normalisées en fonction de l'échelle  $l$ .  $\epsilon$  est mesuré pour chaque simulation numérique mesurant le flux dans l'intervalle inertiel.  $L$  est la taille du domaine. La prédiction théorique est représentée par la ligne horizontale en tirets. Figure extraite de [170].

En utilisant les idées pionnières de Kolmogorov pour la turbulence hydrodynamique mais appliquées aux équations Föppl-von Karman pour les plaques fines, la relation correspondante Karman-Howarth-Morin et un équivalent pour la loi de Kolmogorov en  $4/5$  est trouvé. En effet une fonction de structure du 3<sup>ème</sup> ordre impliquant les incréments de l'amplitude, de la vitesse et de la fonction d'Airy de la contrainte d'une plaque est prouvée être égale à  $-\epsilon l$ , où  $l$  est l'échelle spatiale de l'intervalle inertiel pour lequel les incréments sont estimés et  $\epsilon$  est le taux de dissipation de l'énergie. Les simulations numériques qu'ils ont effectuées confirment cette loi comme on le voit sur la figure 7.1. Toutes ces études ont été effectuées en considérant que les limites  $h \rightarrow 0$  et  $h = 0$  étaient toutes les deux associées à de la turbulence forte. Si cela est bien le cas dans la limite  $h = 0$  puisque seul le terme non linéaire est non nul dans l'équation FVK, il en est autrement dans la limite  $h \rightarrow 0$ , correspondant au cas de la membrane élastique. La partie linéaire associée aux ondes de tension pure est non nulle. Cette dernière peut être prédominante sur la partie non-linéaire si le forçage dans le milieu est faible comme cela est supposé en théorie de turbulence faible. G. Düring évoque dans son manuscrit de thèse [11] la turbulence faible des ondes de tension dans une membrane et fournit une prédiction théorique quant à l'évolution du spectre d'énergie dans ce contexte  $E^\zeta \propto \omega^{-10/3}$ .

Dans les chapitres précédents nous nous sommes intéressés à repousser les limites de la théorie de la turbulence faible appliquée aux ondes à la surface d'un fluide. En effet la théorie de la turbulence faible concerne des ondes dispersives, ainsi diminuer la dispersion dans le milieu étudié tend à aller au delà de la théorie afin de voir si des nouveaux régimes différents de ceux dans la cadre de la théorie sont observables. Pour les ondes gravito-capillaires la diminution de la dispersion s'est manifestée par une transition vers des états solitoniques, nous étudions dans cette partie la diminution progressive de la dispersion dans le cadre des ondes élastiques dans une plaque fine tendue.

Le but final de cette partie est de voir l'effet de la diminution de la dispersion dans le système. En effet le cas de la plaque tendue présente de la dispersion liée au terme de flexion mais également de la non-dispersion liée au terme de tension comme indiqué dans l'équation 7.1.

$$\omega^2(k) = C^2 k^4 + \frac{T}{\rho h} k^2 \quad \text{avec} \quad C^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)} \quad (7.1)$$

avec  $T$  la tension appliquée à la plaque.

Dans la première partie de ce chapitre nous nous intéresserons à la transition entre la plaque tendue à la membrane élastique dans le contexte des régimes faiblement non-linéaires. Nous évoquerons d'abord la confrontation entre expérience et simulation numérique, avec une dissipation expérimentale, ainsi que les prédictions théoriques de la turbulence faible des ondes de flexion avec tension. Etant limité expérimentalement par la plasticité de la plaque, la tension appliquée ne pouvait pas indéfiniment être augmentée. Nous avons donc décidé de diminuer numériquement la dispersion en diminuant le terme  $C^2$  et tendre vers le régime  $C^2 = 0$  qui correspond au cas de la membrane avec uniquement de la tension dans le milieu et donc des ondes purement non-dispersives. Pour ce cas une étude

du régime faiblement non-linéaire avec un forçage localisé à grande échelle ou à petite échelle pour éventuellement voir respectivement une cascade directe ou une cascade indirecte sera effectuée. Cette partie a fait l'objet d'un article soumis à *Physical Review E*. (joint ci-dessous) en collaboration avec G. Düring, G. Krstulovic et B. Miquel (qui a écrit le code utilisé dans ce chapitre).

Dans la seconde partie de ce chapitre nous rapporterons les résultats numériques des régimes fortement non-linéaires des ondes dans la membrane. Nous étudierons d'abord si la théorie de la turbulence d'onde faible est brisée dans le milieu et si l'évolution statistique des ondes se rapproche des deux évolutions théoriques proposées par G.Düring et al [172] pour la turbulence forte dans la limite  $h = 0$ . Une comparaison sera ensuite effectuée avec les régimes de turbulence forte dans les plaques caractérisés par la présence de structures localisés que sont les cônes développables [17].

Enfin nous présenterons comme perspectives en fin de ce chapitre des mesures expérimentales préliminaires qui permettent la reconstitution pour la première fois à notre connaissance du spectre spatio-temporel des ondes élastique à la surface d'une membrane.

## **7.2 Turbulence faible d'ondes élastiques : de la plaque vibrée au tambour (article soumis à Physical Review E)**



# Elastic Weak Turbulence : from the vibrating plate to the drum

Roumaïssa Hassaini,<sup>1</sup> Nicolas Mordant,<sup>1,\*</sup> Benjamin Miquel,<sup>2</sup> Giorgio Krstulovic,<sup>3</sup> and Gustavo Düring<sup>4,†</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels,  
Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, F-38000 Grenoble, France*

<sup>2</sup>*Department of Applied Mathematics, University of Colorado, Boulder*

<sup>3</sup>*Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS,  
Laboratoire Lagrange, Bd de l'Observatoire, CS 34229, 06304 Nice cedex 4, France.*

<sup>4</sup>*Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 306, Santiago, Chile.*

Weak wave turbulence has been observed on a thin elastic plate in previous work. Here we report theoretical, experimental and numerical studies of wave turbulence in a thin elastic plate submitted to increasing tension. When increasing the tension (or decreasing the bending stiffness of the plate) the plate evolves progressively from a plate into an elastic membrane as in drums. We start from the plate and increase the tension in experiments and numerical simulations. We observe that the system remains in a state of weak turbulence of weakly dispersive waves. This observation is in contrast with what has been observed in water waves when decreasing the water depth, which also changes the waves from dispersive to weakly dispersive. The weak turbulence observed in the deep water case evolves into a solitonic regime. Here no such transition is observed for the stretched plate. We then apply the weak turbulence theory to the membrane case and show with numerical simulations that indeed the weak turbulence framework remains valid for the membrane and no formation of singular structures (shocks) should be expected in contrast with acoustic wave turbulence.

## I. INTRODUCTION

Wave turbulence is a generic class of systems in which a large number of waves coupled through nonlinearity evolve into a complex statistical state. The most natural physical system in which wave turbulence occurs is that of water waves at the surface of the ocean: Waves are forced by the wind and once their amplitude is large enough they develop a wideband spectrum. Depending on the strength of nonlinearity, various scaling behaviors of the spectrum have been reported (see for instance recent field measurements in [1, 2]). In the limit of weak nonlinearity a statistical theory named Weak Turbulence Theory (WTT) has been developed by Hasselmann [3] that allows to predict the evolution equation of the wave spectrum and to exhibit its stationary solutions (following works of Zakharov in particular [4–6]). The WTT has been applied to a large number of other systems such as inertial waves in astrophysical or geophysical flows, magnetized plasmas, optics in non linear media, superfluid turbulence, among others [4, 7–10]. In all these systems waves are dispersive which means that waves at different frequencies propagate at different velocities. As in the WTT the non linear coupling is assumed to occur through N-wave resonances ( $N \geq 3$ ), the dispersive character of the waves enables non trivial solutions of the resonance equations such as

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (1)$$

in the case  $N = 3$  ( $\omega_i$  are angular frequencies and  $\mathbf{k}_i$  are wavevectors). The question of what may happen for non

dispersive waves is largely open and depends most likely on the details of the nonlinear coupling. Indeed for non dispersive waves, the only resonant solutions for 3-wave coupling is through waves propagating in the same direction. Thus the waves may develop shocks by a cumulative effect of the nonlinearity as is the case for acoustic waves for instance [11, 12]. In the case of water waves at the surface of shallow water, when the waves are both weakly dispersive and weakly nonlinear, solitons can be observed rather than the interplay of free dispersive waves that is expected in the WTT. When reducing the depth of water, a transition from WTT to a solitonic regime could be observed experimentally [13]. A question is whether a similar transition would occur for other systems. Weak turbulence was predicted for instance for gravitational waves in the early universe [14]. In that case waves are non dispersive and the coupling occurs through 4-wave interaction. A regime of weak turbulence is predicted nonetheless although no validation through numerical simulations (let alone experiments !) has been reported to our knowledge.

Here we focus on a distinct physical system which provides a paradigm for studying the transition non dispersive wave turbulence by means of both experimental realizations and computational studies: the elastic plate under tension. The elastic plate is a rich physical system for wave turbulence which has been the object of a growing interest [15–24]. A shaken metal plate has been used for centuries to mimic the thunder noise in theaters [25] and in the first half of the 20th century as a reverberator for analog signal processing [26]. Beyond these somewhat specialized applications, the vibrating plate has become recently a privileged model for wave turbulence. Indeed, advanced measurement resolved in both space and time are possible experimentally [17] and its 2D character facilitates long numerical simulations [15, 21, 27] (by con-

\* nicolas.mordant@univ-grenoble-alpes.fr

† gduring@fisica.puc.cl

trast with substantially more challenging 3D fluid systems, for instance). It was used to validate numerically the WTT prediction [15, 27], to investigate the effect of wideband dissipation [20, 27], the impact of finite size [28] or the strongly nonlinear regime [18, 19, 23, 29]. Thereafter, we consider the addition of tension to elastic plates as a tuning parameter for the dispersive character of the waves. When tension is increased to the point that it dominates over bending stiffness as a restoring force for wave motions, the plate starts to behave like a membrane for which the waves are non dispersive.

A thin elastic plate without tension can be modeled by the Föppl-von Karman equations [30–32] for the amplitude of the deformation  $\zeta(x, y, t)$  of the plate and for the Airy stress function  $\chi(x, y, t)$ :

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\}; \quad (2)$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{E}{2} \{\zeta, \zeta\}, \quad (3)$$

where  $h$  is the thickness of the elastic sheet. The material has a mass density  $\rho$ , a Young modulus  $E$  and its Poisson ratio is  $\mu$ .  $h$  is the thickness of the plate.  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  is the usual Laplacian and the bracket  $\{\cdot, \cdot\}$  is defined by  $\{f, g\} \equiv f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$ . Equation (3) for the Airy stress function  $\chi(x, y, t)$  may be seen as the compatibility equation for the in-plane stress tensor: In the derivation the inertia of the in-plane modes of oscillations is neglected, or, in other words, it is assumed that the in-plane displacements are negligible, hence equation (3) follows the dynamics.

An isotropic external tension can be added to the elastic plate considering an isotropic in plane stress given via a boundary condition for the Airy function  $\chi(x, y) = \frac{T}{2h}(x^2 + y^2)$ , where  $T$  is the tension per unit length at infinity ( $T$  is applied at the boundaries in practice). Then the Airy function can be separated in two terms  $\chi \rightarrow \frac{T}{2h}(x^2 + y^2) + \chi(x, y)$  in which the first comes from the external tension while the second comes from the amplitude deformation. The Föppl-von Kármán equations (2) for a plate under tension then reads

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\} + \frac{T}{h} \Delta \zeta, \quad (4)$$

and equation (3) remains unchanged. In the linear limit, waves follow the dispersion relation

$$\omega_{\mathbf{k}} = \left( \frac{h^2 E}{12(1-\mu^2)\rho} k^4 + \frac{T}{\rho h} k^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

This reasoning can be generalized to the case of anisotropic tension, which we study experimentally. Denoting  $T_x$  and  $T_y$  the tension per unit length at infinity along the  $x$  and  $y$  direction, respectively, the governing equation (4) yields:

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\} + \frac{1}{h} (T_x \partial_{xx} + T_y \partial_{yy}) \zeta, \quad (6)$$

and the corresponding dispersion relation becomes:

$$\omega_{\mathbf{k}} = \left( \frac{h^2 E}{12(1-\mu^2)\rho} k^4 + \frac{1}{\rho h} [T_x k_x^2 + T_y k_y^2] \right)^{1/2}. \quad (7)$$

For zero tension ( $T = 0$ ), i.e. for pure bending, the dispersion relation simplifies into

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{h^2 E}{12(1-\mu^2)\rho}} k^2 = C k^2, \quad (8)$$

with  $C^2 = \frac{h^2 E}{12(1-\mu^2)\rho}$ . These waves are dispersive, thus the WTT formalism could be used and yielded predictions for the wave spectra [15]. These predictions have been verified numerically [15] but not experimentally due to the presence of wideband dissipation that alters the predicted scaling as dissipation is not taken into account in the theory [16, 17, 20, 27].

In the opposite limit of no bending stiffness ( $E = 0$ ), and in the case of isotropic tension, the dispersion relation changes into

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{T}{\rho h}} k. \quad (9)$$

This dispersion relation is now non dispersive but the nonlinear term remains the same. Thus by tuning the value of the tension  $T$  and/or the thickness  $h$  one can change the system into pure flexion wave or into a membrane without rigidity as in drums and study the evolution of the statistical properties of this new system.

The crossover between both extreme cases occurs when both contributions are equal, i.e.

$$k_c = \sqrt{\frac{12T(1-\mu^2)}{h^3 E}} \text{ or } \omega_c = \sqrt{\frac{24T^2(1-\mu^2)}{\rho h^4 E}} \quad (10)$$

This is somehow analogous to the transition between shallow to deep water regimes for water surface waves that occurs when  $kd \approx 1$  ( $d$  being the water depth) [33].

Our goal is to investigate if the system remains into a regime of weak turbulence when increasing the effect of tension (i.e. when  $k_c$  increases). Indeed, the waves being weakly non dispersive to non dispersive the system could evolve into a distinct state involving localized structures such as solitons (as for water waves) or shocks (as for acoustics). Note that we remain in a weakly nonlinear regime so that to avoid the creation of singular structures such as developable cones that have been reported in plates at strong level of nonlinearity [23, 29]. Thus we try to answer the question of Newell and Rumpf[6]: by aiming towards a non dispersive system, will the nonlinear interactions redistribute the energy isotropically or will it be focused in shock waves?

In the next section we describe the experiment and the numerical simulations used in this article. In section III we first investigate the effect of adding a tension to a

plate. As weak wave turbulence has been reported in a vibrating plate, thus we start from such a state and analyse the effect of increasing the tension in a plate either experimentally or numerically. In section IV, we report the application of WTT to the case of a pure membrane with strictly no bending stiffness and finally we use numerical simulations to compare the statistics of a vibrating membrane to the theoretical predictions.

## II. METHODS

### A. Description of the experiment

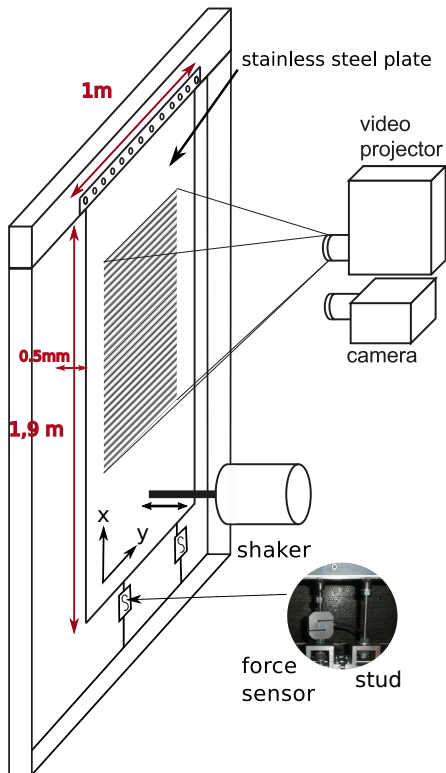


FIG. 1. Experimental set-up. A  $1.9 \times 1 \text{ m}^2$ , 0.5 mm-thick steel plate is stretched vertically. Vibrations are generated by an electromagnetic shaker at the bottom of the plate. The deformation is measured by the Fourier Transform Profilometry technique in which a pattern is projected on the plate and recorded by a high speed camera (see text for details).

The experimental set-up is composed of a  $1 \times 1.9 \text{ m}^2$  stainless steel plate,  $h = 0.5 \text{ mm}$ -thick. The physical parameters are  $E \approx 210^{11} \text{ Pa}$ ,  $\mu \approx 0.3$ ,  $\rho \approx 7800 \text{ kg/m}^3$ . The plate is attached at its top to a rigid frame (fig. 1). Tension can be added by using left-right threaded studs at the bottom. The tension is thus only along the long axis of the plate for reasons of simplicity: in other words, we may vary the tension along the vertical direction  $T_x$  while the transverse tension  $T_y$  stays zero. The tension

$T_x$  is tuned by first stretching the plate to some level given by two force gauges. A second set of studs is then tightened so that to vanish exactly the tension from the force gauges. The gauges are then uncoupled from the plate to preserve them from the strong vibrations of the plate during experiments. Vibrations are generated by an electromagnetic shaker oscillating sinusoidally at a 30 Hz frequency in the direction normal to the plate and bolted to the plate 30 cm above its bottom.

Fourier transform profilometry is used to measure the deformation of the plate with both space and time resolution following the scheme developed by Cobelli et al. [34]. It consists in projecting a sinusoidal grayscale pattern with a video-projector on a  $0.8 \times 1.40 \text{ m}^2$  region centered in the plate (painted in white). When the waves propagate, the initial pattern is deformed. This distortion is recorded by a high speed camera at a frequency of 8000 frames/s and with a resolution of  $704 \times 1024 \text{ pixels}^2$ . A geometrical analysis permits a phase inversion of the images and the reconstruction of the wave field [35, 36]. The images are recorded once a statistically stationary regime is reached which takes only a few seconds. Experiments are repeated to increase the amount of data and to achieve a good convergence in the statistical properties measured.

### B. Numerical simulations

We complement the experimental measurements with numerical solutions to the augmented Föppl-Von Karman equations (aFVKE). We write down the projection of Eq. (6) in Fourier space for a wave vector  $\mathbf{k}$ :

$$\partial_{tt}\zeta_{\mathbf{k}} = -C^2 k^4 \zeta_{\mathbf{k}} - (T_x k_x^2 + T_y k_y^2) \zeta_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\}_{\mathbf{k}} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}} + \mathcal{D}_{\mathbf{k}} \quad (11)$$

where  $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$  and  $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}$  are the forcing and dissipative terms in spectral space, respectively. We recall the reader that we allow for anisotropic tension ( $T_x \neq T_y$ ) which pertains to the experimental setup. This equation is studied by means of two distinct pseudo-spectral algorithms, documented in this section, depending on the presence of rigidity (i.e., the case of stretched plates with finite  $k_c$ ) or its absence (i.e., the case of membranes with  $k_c \rightarrow \infty$ ). Both the Stretched Plate Code (SPC below) and the Membrane Code (MC below) employ a Fourier decomposition of the variables  $\zeta$  and  $\chi$  and implement periodic boundary conditions, which differ from the experimental boundary conditions. However, the impact of boundary conditions on the wave state has been shown to be marginal [27], provided that the size of the domain is significantly larger than the forcing wavelength. We thus have confidence in the ability of the simulations reported thereafter to capture the meaningful statistical properties of the experimental wave field. Both codes evaluate the non linear terms in physical space, and fields are fully dealiased. We present below the particulars of

the SPC and MC codes which differ in their time-stepping method, and in the forcing and dissipation employed.

### 1. The Stretched Plate code

The Stretched Plate Code (SPC) is an evolution of the code previously used in [27, 29, 37]. The timestepping of Eq. 11 is done by means of the second order exponential time-differencing ETD2RK scheme of Cox and Matthews [38]. The code has been developed in view of providing a way to bridge the gap between imperfect experimental realizations of wave turbulence and the ideal hypotheses of the weak turbulence theory.

For instance, the code implements the possibility to modify independently the tension along the two directions  $T_x$  and  $T_y$ . This offers the possibility to reproduce the anisotropic tension present in the experiments where the transverse tension vanishes:  $T_y = 0$ .

A similar approach is adopted with dissipation. As reported by Miquel and Mordant [37], the experimental dissipation can be modelled with a linear damping  $\mathcal{D}_{\mathbf{k}} = -\gamma_k \partial_t \zeta_{\mathbf{k}}$ , where  $\gamma_k$  has the analytic form:

$$\gamma_k^{exp} = \gamma_1 + \gamma_2 k^2. \quad (12)$$

In absence of tension, Miquel et al. [27] reported that this expression of the dissipation, where the parameters  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  are obtained by fitting the experimental data, could reproduce qualitatively the experimental spectra of elastic wave turbulence. Thereafter, we refer to this case as the ‘‘experimental dissipation’’. This dissipation is much different from the ideal dissipation considered in the weak turbulence theory, which assumes the existence of a transparency window of wave numbers where damping vanishes and, consequently, energy is conservatively transferred. Indeed, it has been shown in [27] that the theoretical scaling predicted by the theory is recovered when the dissipation rate is set to zero within a wave number interval  $[k_l, k_h]$ . In the following, ‘‘ideal dissipation’’ refers to a damping coefficient following Eq. 12, except between  $k_l = 5 \text{ m}^{-1}$  and  $k_h = 240 \text{ m}^{-1}$  where it is set to zero.

We adopt a forcing that differs from the spatially localized, harmonic, experimental forcing. We force resonantly a crown of modes  $\mathbf{k}$  at their linear frequency  $\omega_k$ :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}}(t) = F_0 e^{-\frac{k-k_0}{2\nu_k^2}} e^{i\varphi_k} \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (13)$$

The crown of forced wave numbers is centered around  $k_0 = 5\pi \text{ m}^{-1}$ , with a width  $\sigma_k = 2\pi \text{ m}^{-1}$ . Random phases  $\phi_k$  and  $\varphi_k$  are introduced to obtain a disordered forcing.

The spatial resolution is moderate ( $288^2$ ) so that the simulations can be run to obtain long time series, up to the equivalent of 300 seconds of experiments for the longest ones. As in experiments, the deformation and the vertical velocity are recorded in time for subsequent spectral analysis.

### 2. The Membrane code

We complement the previous numerical simulation with simulations at higher resolution from a second pseudo-spectral code, parallelized using GPU computing. We integrate the Föppl–von Kármán equations (6) in their dimensionless form and in the limit of pure tension ( $E=0$ ) which corresponds to a non dispersive membrane. By contrast with the Stretched Plane code described above, the Membrane code implements a random forcing and some hyperviscous dissipation. In Fourier space, Eq. (11) becomes:

$$\partial_{tt} \zeta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{4} k^2 \zeta_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\}_{\mathbf{k}} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}} - \nu_0 k^\alpha \partial_t \zeta_{\mathbf{k}} \quad (14)$$

where  $\nu_0$  and  $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}(t)$  are the rescaled damping coefficient and rescaled external forcing, respectively. We supply the system with periodic boundary conditions in a square domain of size  $2\pi$ . The forcing  $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$  is white-noise in time of variance  $f_0^2$  and its Fourier modes are non-zero only for wave-vectors  $k_i < |\mathbf{k}| \leq k_f$ . A standard second-order Runge-Kutta time-stepping scheme is implemented. Dealiasing is made by using the standard 2/3-rule [39], that is applied after computing each quadratic term. The largest wavenumber is  $k_{\max} = N/3$ , where  $N$  is the resolution. In numerics we set an hyperviscous dissipation with  $\alpha = 6$ . Two resolutions were used;  $N = 1024^2$  and  $N = 512^2$ .

The main parameters of experiments and numerical simulations are given in table I.

## III. INVESTIGATION OF THE STRETCHED PLATE

### A. Experimental results

In this part, experiments were carried out with two values of the applied tension  $T_x = 4 \text{ kN/m}$  (E1) and  $T_x = 10 \text{ kN/m}$  (E2). These values of  $T$  correspond to a crossover frequency  $\omega_c/2\pi$  equal to 290 Hz and 725 Hz respectively. A numerical simulation (N1) was also performed using parameters close to the experiment E1 so that to permit a qualitative comparison between the two.

In order to study the energy distribution in the media, a Fourier analysis is applied to the deformation and normal velocity ( $v = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ ) of the waves in the  $x - y$  space and in time. This yields a frequency-wavenumber spectra of the normal velocity noted  $E^v(k_x, k_y, \omega)$ . We use the spectrum of the normal velocity rather than the one of the deformation  $E^\zeta$  for convenience. Indeed the decay of  $E^v(k_x, k_y, \omega)$  with the frequency or wavenumber is slower than that of  $E^\zeta$ . The relation between the two spectra is simply  $E^v(k_x, k_y, \omega) = \omega^2 E^\zeta(k_x, k_y, \omega)$ . In the following, we often show the spectrum summed over the direction of the wavevector  $\mathbf{k}$  which is noted  $E^v(k, \omega)$ .

Figure 2(a) shows the spectrum  $E^v(k_x, 0, \omega)$  of the wave propagating along the direction of stretching for



description	name	$C^2$	$T(\text{kN/m})$	$\omega_c$	$k_c$	$N$	dissipation	forcing scale
exp. stretched plate	E1	$C_{exp}^2$	$T_x = 4, T_y = 0$	290 Hz, $10 \omega_f$	$7k_f$			large
exp. stretched plate	E2	$C_{exp}^2$	$T_x = 10, T_y = 0$	725 Hz, $25 \omega_f$	$17k_f$			large
DNS stretched plate	N1	$C_{exp}^2$	$T_x = 4, T_y = 0$	290 Hz, $3.5 \omega_f$	$2.6k_f$	288 <sup>2</sup>	experimental	large
DNS stretched plate	N2	$C_{exp}^2$	4	$3.5 \omega_f$	$2.6k_f$	288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS stretched plate	N3	$C_{exp}^2/2$	4	$5 \omega_f$	$3.7k_f$	288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS stretched plate	N4	$C_{exp}^2/5$	4	$8 \omega_f$	$5.8k_f$	288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS stretched plate	N5	$C_{exp}^2/10$	4	$12 \omega_f$	$8.3k_f$	288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS stretched plate	N6	$C_{exp}^2/100$	4	$37 \omega_f$	$26k_f > k_d$	288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS stretched plate	N7	$C_{exp}^2/1000$	4	$117 \omega_f$	$83k_f > k_d$	288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS membrane	N8	0				288 <sup>2</sup>	ideal	large
DNS membrane	N9	0				1024 <sup>2</sup>	hypervisc.	small
DNS membrane	N10	0				512 <sup>2</sup>	hypervisc.	small
DNS membrane	N11	0				288 <sup>2</sup>	ideal	small

TABLE I. Description of the various experiments (exp) and numerical simulations (DNS).  $C^2$  is such that the dispersion relation is  $\omega_k = \left(C^2 k^4 + \frac{T}{\rho h} k^2\right)^{1/2}$ . It corresponds to the dispersive part. The experimental value has been estimated to be  $C_{exp}^2 = 0.6084$  from the observed dispersion relation.  $T$  is the tension per unit length (when not specified  $T_x = T_y$ ).  $\omega_c$  and  $k_c$  are the crossover frequency and wavenumber between dispersive and non dispersive waves (eq. (10)). They are expressed as a function of the forcing frequency  $\omega_f$  and forcing wavenumber  $k_f = 5\pi$  rad/m respectively.  $N$  is the number of grid point in numerical simulations. “dissipation” is the dissipative scheme that is used in the DNS (see part II B).  $k_d = 240$  rad/m is the dissipative cutoff of the “ideal” dissipation scheme. “forcing” specifies whether the forcing acts at large scale to investigate the direct cascade or at small scale to study the inverse cascade.

experiment E1. Figure 2(b) shows the spectrum in the  $y$  direction orthogonal to the stretching, along which no tension is applied. In both cases the energy is localized along a curved line. In (a) the energy is localized on the linear dispersion relation (5) that takes into account the tension. By contrast in (b), the energy is localized on the dispersion relation without tension (8). In fig. 2(c), we show the experiment E2 with a value of the tension which is 2.5 times higher. Due to the increased tension, the energy falls on a dispersion relation that is more shifted from the one with  $T = 0$ . No sign of a qualitative change of behavior can be seen. For instance in [13] the change from weak turbulence to soliton was visible in the fact that the energy was lying on a straight line over the whole range of frequencies. Here the energy remains on the predicted dispersion relation which is now anisotropic due to the stretching which is applied only in the  $x$  direction. The energy cascades to higher frequencies in a way consistent with the phenomenology of the WTT. For E2 (highest tension), the cascade seems to stop at lower frequencies. Due to the strong stretching the shaker cannot operate at large amplitude and it may affect the injection. It is also possible that dissipation is altered as well.

The numerical simulation N1 shown in fig. 2(d) is also qualitatively consistent with the WTT picture. Note that the energy lies also on a line that is actually even below the linear dispersion relation with tension for intermediate values of the frequency (around 400 Hz). This extra shift is actually predicted by the WTT and was also observed in plates without tension [28]. In the simulation, the non linearity must be stronger than in the experiment, possibly due to distinct forcing and boundary con-

ditions.

The experimental and numerical results shown in this part do not show hints of any qualitative change of dynamics of the vibrations of the plate. The spectra remain qualitatively consistent with what is expected from the WTT. No hint of localized structures such as shocks or solitons can be observed. In comparison with the unstretched case, the only difference is the change of the dispersion relation due to the contribution of the tension in (7).

In experiments, the only parameter that can be tuned is the strength of stretching  $T$ . In order to gradually evolve towards the pure membrane, we would rather change the  $C^2$  parameter by changing the thickness of the plate. This cannot be achieved experimentally as no plate thinner than 0.5 mm could be found when keeping the same size. Thus in next part we use numerical simulations to investigate the limit  $C^2$  going to zero.

## B. Numerical investigation of the transition to the pure membrane: $C^2 \rightarrow 0$

We examine the effects of dispersion on wave turbulence by running numerical simulations with a constant tension and decreasing gradually the value of  $C^2$  from the experimental value  $C_{exp}^2 = 0.6084$  down to  $C^2 = C_{exp}^2/1000$  (N2 to N7). The wavenumber of the forcing is kept constant so that in the range of resolved wavenumbers, the waves are less and less dispersive when  $C^2$  is reduced. The amplitude of the forcing is kept constant and the resulting *rms* steepness of the plate is also almost constant close to the value  $2.3 \pm 0.3\%$ . The tension

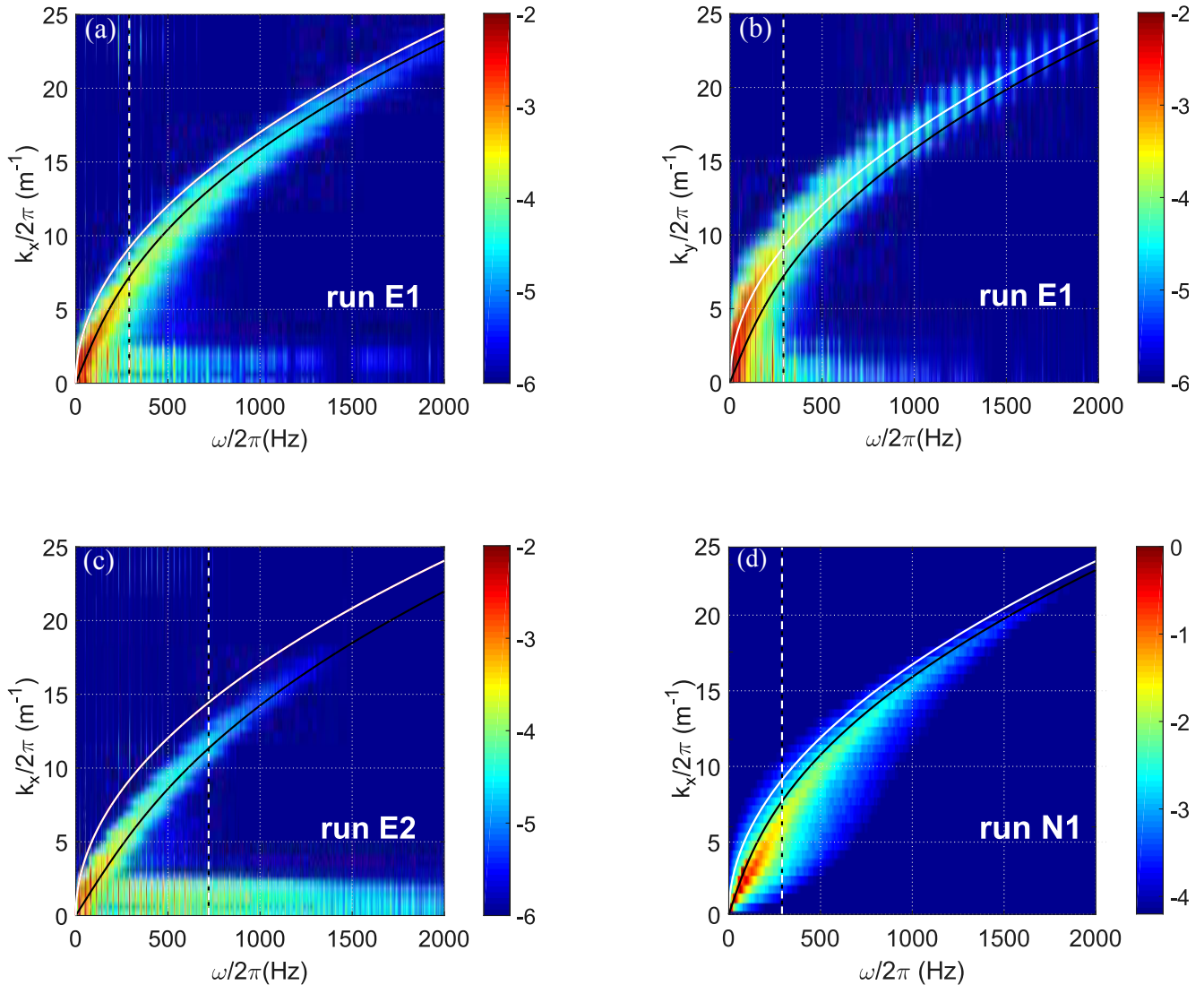


FIG. 2. (a) normalized spatio-temporal spectrum  $E^v(k_x, 0, \omega)/E^v(k_f, 0, \omega_f)$  of the velocity field in the stretching direction for experiment E1 with  $T_x = 4$  kN/m and  $T_y = 0$ . The crossover frequency  $\omega_c/2\pi = 290$  Hz is shown as a vertical dashed line. (b) same dataset but the spectrum  $E^v(0, k_y, \omega)/E^v(0, k_f, 0, \omega_f)$  is shown. (c)  $E^v(k_x, 0, \omega)/E^v(k_f, 0, \omega_f)$  for experiment E2 with a larger value of the tension  $T_x = 10$  kN/m and the maximum amplitude forcing permitted by the electromagnetic shaker. The crossover frequency  $\omega_c/2\pi = 725$  Hz is shown as a vertical dashed line. (d)  $E^v(k_x, 0, \omega)/E^v(k_f, 0, \omega_f)$  for a numerical simulation N1 with  $T_x = 4$  kN/m and  $C_{exp}^2$  indented to reproduce qualitatively the experiment E1. In all cases the black line corresponds to the dispersion relation taking into account the tension (5) and the red line corresponds to the dispersion relation without tension (rdnotens).

is now applied isotropically in the  $x$  and in the  $y$  direction and we use the “ideal dissipation” scheme in order to remove the impact of wideband dissipation in the inertial range and to be in the theoretical framework.

We compare the spatio-temporal spectra  $E^v(k, \omega)$  for the case of the experimental  $C_{exp}^2$  down to  $C_{exp}^2/1000$  in fig. 3 (for a given value of the isotropic tension  $T$ ). We observe that in all cases, the energy is concentrated around the dispersion relation taking into account the tension such as stated in (5). This means that even though the media is being less and less dispersive, for all the values

of  $C^2$  tested, the vibration of the plates remains in a state of weak turbulence.

Snapshots of the surface elevation of the same numerical simulations shown in fig. 3 are represented in fig. 4. At all values of  $C^2$ , the snapshots show a random wave distribution and no extreme events seem to appear.

In order to have a quantitative information of the decay of the spectrum with the wavenumber, we extract the wavenumber-only spectrum of the normal velocity  $E^v(k)$  for the DNS N2 to N7 (fig. 5). The spectrum is seen to steepen when  $C^2$  is reduced. At the highest

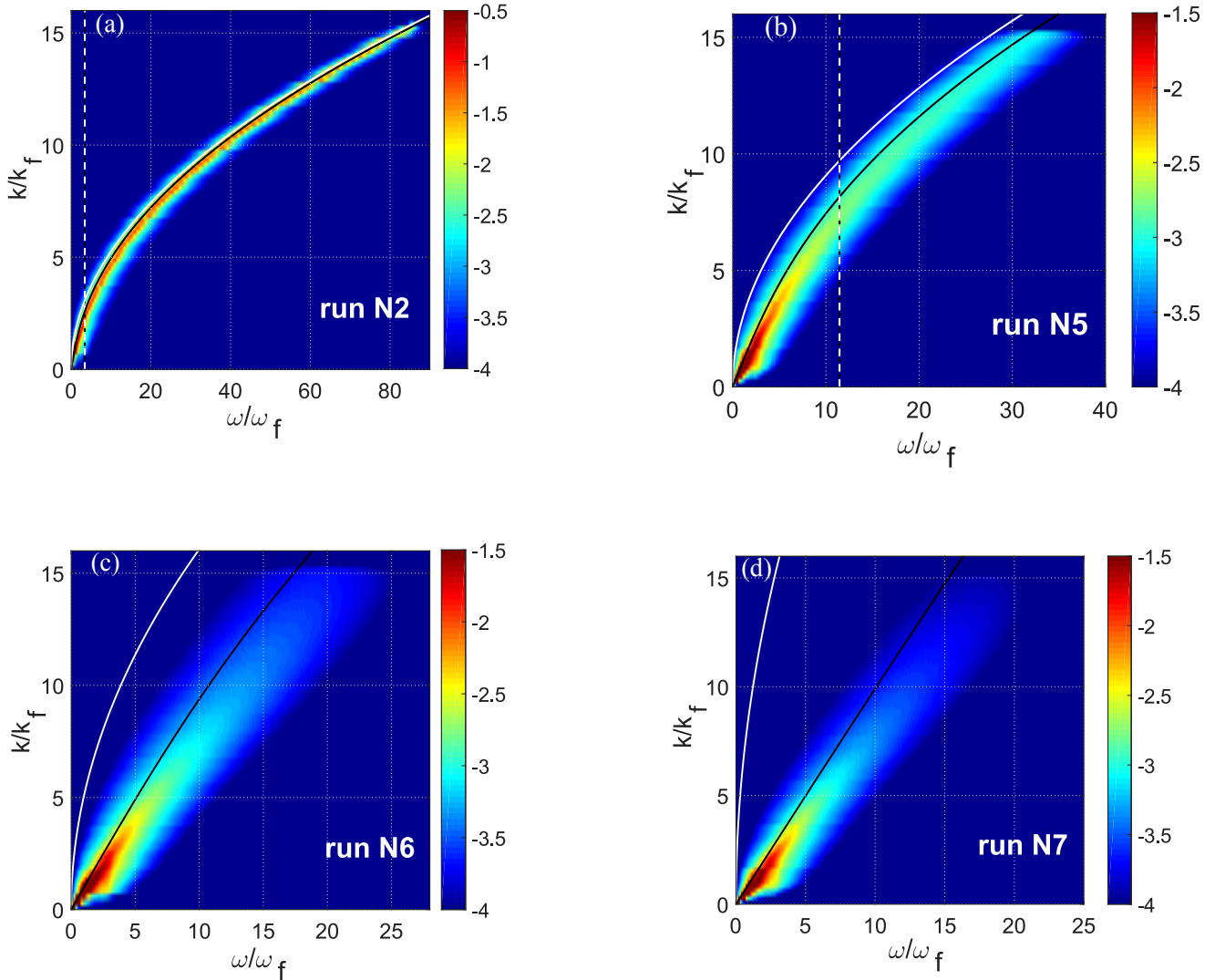


FIG. 3. Normalized spatio-temporal spectrum of the velocity field  $E^v(k, \omega)/E^v(k_f, \omega_f)$  for the DNS: (a) N2 with  $C_{exp}^2$  (b) N5,  $C_{exp}^2/10$  (c) N6,  $C_{exp}^2/100$  and (d) N7,  $C_{exp}^2/1000$ . In all cases the black line corresponds to the dispersion relation (5) and the red line corresponds to the dispersion relation without tension (8). In (a) and (b) the vertical dashed line shows the crossover frequency  $\omega_c$  (which is not in the displayed range for (c) and (d)).

value of  $C^2$  comparable to the one of the experimental steel plate, the spectrum is consistent at high wavenumber with the prediction of the WTT for a plate without tension. When decreasing  $C^2$ , the shape of the spectrum evolves by developing a steeper region at  $k$  below  $k_c$ . In the three larger values of  $C^2$  for which  $k_c$  remains moderate, the spectrum at  $k > k_c$  is qualitatively consistent with the prediction for the non-stretched plate. Indeed at  $k > k_c$  the correction to the no-tension dispersion relation is negligible and this explains why the spectrum keeps a shape compatible with the theory without tension. At the lowest value of  $C^2$  (lowest curve), the spectrum is

significantly steeper compatible with a  $k^{-4/3}$  decay at intermediate values of  $k$ . This scaling is actually consistent with the WTT prediction of the pure membrane with  $C^2 = 0$  (see IV B 1 below). At high  $k$  a departure from the  $k^{-4/3}$  scaling is observed which is probably a reminiscent effect of dispersion as  $k_c$  remains finite (although larger than the dissipative cutoff).

Thus we have experimental and numerical support of the fact that a pure membrane with  $C^2 = 0$  should still exhibit a regime of weak turbulence. These observations must be contrasted with the case of surface water waves for which a transition to a solitonic regime was observed

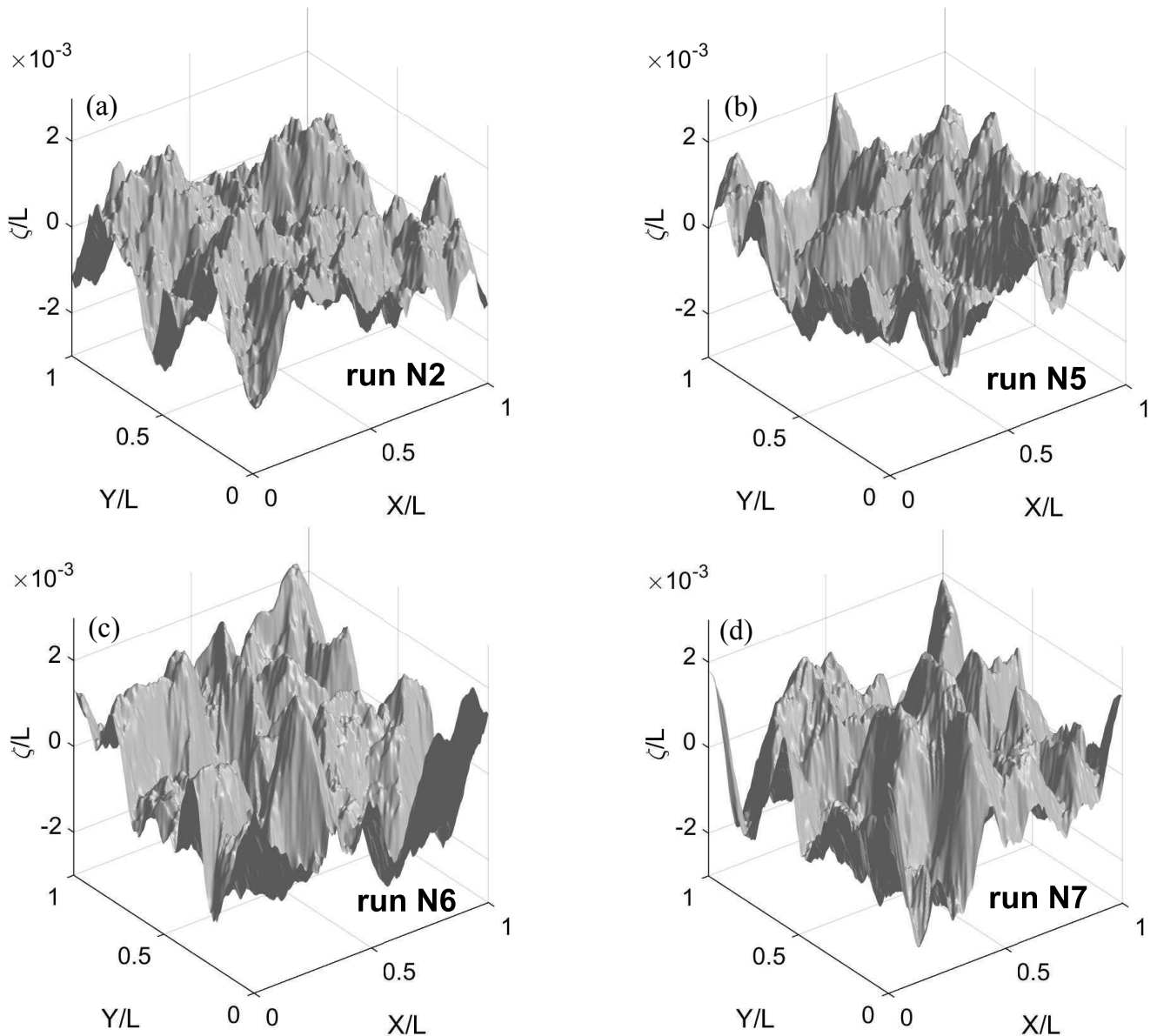


FIG. 4. Snapshots of the deformation of the plate for the DNS: (a) N2 with  $C_{exp}^2$  (b) N5,  $C_{exp}^2/10$  (c) N6,  $C_{exp}^2/100$  and (d) N7,  $C_{exp}^2/1000$ .

when reducing the dispersion of the waves (by reducing the water depth) [13]. In the next section, we focus on the asymptotic case of the pure membrane for which  $C^2 = 0$ . We first apply the WTT formalism to this case. Then we compare its predictions with numerical simulations.

#### IV. THE VIBRATING NON LINEAR ELASTIC MEMBRANE

##### A. Application of the WTT to the membrane

###### 1. Kinetic equation

From the modified Föppl-von Kármán equations (3) and (4), one notices that only the linear term differs from the well studied case of elastic plates without tension. Furthermore, one can show that the so-called kinetic equation (equation for the slow temporal evolution of the wave spectrum) obtained for elastic plates under



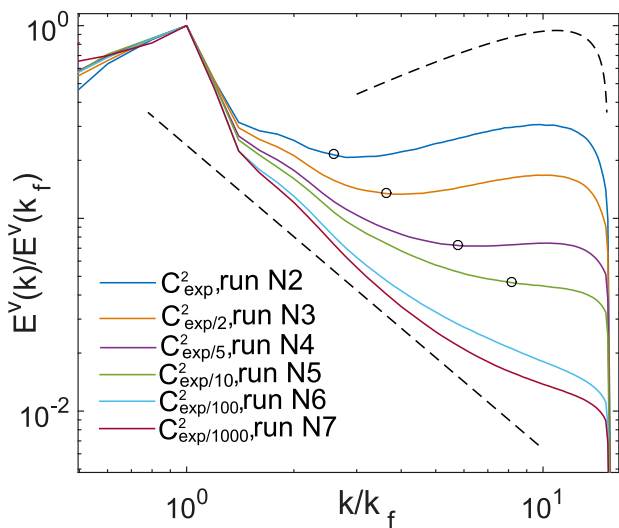


FIG. 5.  $E^v(k)/E^v(k_f)$  for DNS N2 to N7 i.e. for  $C^2$  decreasing from  $C_{exp}^2$  to  $C_{exp}^2/1000$  with a constant tension. The slope of the deformation is kept roughly constant equal to about 2%. The circles correspond to the crossover wavenumber  $k_c$  for the corresponding DNS (when it is small than the dissipative cutoff  $k_d = 15k_f$ ). The bottom dashed line shows the theoretical scaling predicted by WTT applied to the pure membrane ( $C^2 = 0$ )  $E^v(k) \propto k^{-4/3}$ . The top dashed line shows the theoretical shape  $k \log^{1/2}(k_d/k)$  expected from the WTT applied to the plate [15].

tension only differs in the dispersion relation with the one obtained for  $T = 0$  in [15]. We shall consider the Fourier transform

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \zeta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

and the canonical transformation

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \frac{X_k}{\sqrt{2}} (A_{\mathbf{k}} + A_{-\mathbf{k}}^*) \quad (15)$$

with  $X_k = 1/\sqrt{\omega_k \rho h}$ . In the weakly non-linear limit, a kinetic equation for the evolution of the wave action spectrum  $n_{\mathbf{k}} = \langle A_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^* \rangle / L^2$  can be obtained. The mean value  $\langle \cdot \rangle$  represents an ensemble average and  $L$  is the size of the plate. Formally, the kinetic equation is given by (for a detailed derivation see [22])

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\mathbf{p}}}{dt} = & 12\pi \sum_{s_1 s_2 s_3 = \pm 1} \int |J_{-\mathbf{p}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} n_{\mathbf{p}} \\ & \times \left( \frac{1}{n_{\mathbf{p}}} - \frac{s_1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{s_2}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{s_3}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{p}) \\ & \times \delta(s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + s_2 \omega_{\mathbf{k}_2} + s_3 \omega_{\mathbf{k}_3} - \omega_{\mathbf{p}}) d\mathbf{k}_{123}, \quad (16) \end{aligned}$$

where the scattering matrix introduced in [15] is given by

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{p}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = & \left( \frac{1}{|\mathbf{p} + \mathbf{k}_1|^4} + \frac{1}{|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|^4} \right) \frac{|\mathbf{p} \times \mathbf{k}_1|^2 |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3|^2}{48\rho^2 h^2 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3}}} \\ & + \text{permutations of indices } 1, 2, 3. \quad (17) \end{aligned}$$

In order to derive the kinetic equation above, the existence of a resonant manifold is assumed. Namely, a manifold in wave-vector space that satisfies

$$h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = s_1 \omega(\mathbf{k}_1) + s_2 \omega(\mathbf{k}_2) + s_3 \omega(\mathbf{k}_3) - \omega(\mathbf{p}) = 0, \quad (18)$$

with  $s_1 \mathbf{k}_1 + s_2 \mathbf{k}_2 + s_3 \mathbf{k}_3 + \mathbf{p} = 0$ . In general, an extra technical condition needed to perform a saddle-point like approximation is required. It is assumed that gradients of  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  have to be different from zero on the resonant manifold. Under these assumptions, the multi-scale asymptotic expansion used to derive the kinetic equation remains bounded [22, 40] (see Appendix A). The kinetic equation contains two different groups of terms depending on the type of resonance: the  $2 \leftrightarrow 2$  interaction (eg.  $s_1 = -1$  and  $s_2 = s_3 = 1$ ) and the  $3 \leftrightarrow 1$  interaction (eg.  $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ ). The  $2 \leftrightarrow 2$  interaction is common in systems that are phase invariant (e.g Non Linear Schrödinger equation) or have a non-decay dispersion relation ( $\omega_{\mathbf{k}} \sim k^\alpha$  with  $\alpha < 1$ ), such systems have an extra conserved quantity named the wave action  $N = \int n_{\mathbf{p}} d\mathbf{p}$ . The  $3 \leftrightarrow 1$  type of interaction is less common, since require a decay dispersion relation  $\alpha \geq 1$  and the symmetry of the Hamiltonian under reflection  $\zeta \rightarrow -\zeta$ . Such interaction prevents the wave action conservation, thus *a priori* wave action is not conserved for the membrane.

As it was first shown by Zakharov, stationary out-of-equilibrium solutions of the kinetic equation can be found [4]. Whenever the dispersion relation and the scattering matrix are homogeneous functions, such solutions, known as Kolmogorov-Zakharov spectra, can be obtained analytically. The limit  $T \rightarrow 0$  (no tension) corresponds to the case of elastic plates, for which the kinetic equation with  $\omega_{\mathbf{k}} = Ck^2$  was derived in [15]. In the other limit,  $h^3 E \ll T$ , that corresponds to a non-linear membrane, the linear term becomes non dispersive with  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{T}{\rho h}} k$ . Special care needs to be taken in this limit as the gradient of  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  can identically vanish on the resonant manifold for some type of interactions (see Appendix B). Such interactions seem to be the responsible for the growth of strong non-linearities that can lead to the formation of shock waves and the breakdown of the wave turbulence theory [11, 12]. It remains as an open question under which circumstance non dispersive non-linear wave systems either focalize energy into rays leading to shock wave formation, or redistribute angularly the energy through nonlinearity so that shock wave formation is suppressed.

In general, a non dispersive system with a cubic non-linearity contains  $2 \leftrightarrow 2$  and  $3 \leftrightarrow 1$  wave interactions. We

can show that for  $2 \leftrightarrow 2$  interactions, the resonant manifold contains collinear train waves (parallel or antiparallel waves) but also non-trivial solutions (see appendix B and Fig.10). In this case, the multi-scale expansion leading to the kinetic equation remains bounded and its derivation is justified. In the case of  $3 \leftrightarrow 1$  interactions, the resonant manifold only contains collinear solutions and special care is needed. The behavior of collinear interactions seems to be case dependent and will be addressed elsewhere. In the particular case of an elastic membrane, eventual divergences in the multi-scale expansion are healed by the scattering matrix (17). Indeed, collinear interactions of waves are completely suppressed by the vector products in  $J_{\mathbf{p}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ . It follows that only  $2 \leftrightarrow 2$  non-collinear interactions contribute to the kinetic equation (16), what ensures its validity (see Appendix B). The kinetic equation then simplifies to:

$$\begin{aligned} \frac{dn_{\mathbf{p}}}{dt} = & 36\pi \int |J_{-\mathbf{p}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} n_{\mathbf{p}} \\ & \times \left( \frac{1}{n_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{p}) \\ & \times \delta(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}) d\mathbf{k}_{123}. \end{aligned} \quad (19)$$

An important consequence of the fact that in (19) only  $2 \leftrightarrow 2$  interactions are present, is the conservation of the wave action  $N = \int n_{\mathbf{p}} d\mathbf{p}$ . Associated to this (weak) invariant, a new cascade is expected to emerge. Note that  $N$  is not an invariant of the full Föppl-von Kármán equations (4), and such a cascade can be expected only within the validity of the weak wave turbulence theory.

## 2. Stationary out-of-equilibrium spectra

Considering the standard Zakharov transformation two different out-of-equilibrium solutions can be found [4, 5]. The first one corresponds to a constant energy flux  $P$  and leads to a direct cascade. It reads  $n(\mathbf{k}) = C_p P^{1/3} k^{-10/3}$  with  $C_p$  a constant that could be in principle calculated numerically from the kinetic equation. In terms of the amplitude deformation spectrum, it becomes  $\langle |\zeta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \sim P^{1/3} k^{-13/3}$ . If one consider the sum over the angles, it becomes

$$E^{\zeta}(k) \sim \langle |\zeta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle k \sim P^{1/3} k^{-10/3}. \quad (20)$$

The second out of equilibrium solution corresponds to a constant flux of wave action  $Q$ . It leads to an inverse cascade and it reads  $n(\mathbf{k}) = C_q Q^{1/3} k^{-3}$ .  $C_q$  is also a constant that can be calculated from the kinetic equation. Summing over the angles, we obtain for the spectrum of  $\zeta$

$$E^{\zeta}(k) \sim \langle |\zeta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle k \sim Q^{1/3} k^{-3}. \quad (21)$$

## 3. Stationary equilibrium solutions

Let us also remind that another statistical steady state exists that corresponds to thermodynamic equilibrium (with no flux). The exact solution in thermodynamic equilibrium has two asymptotes : one corresponding to energy equipartition and the second one corresponding to wave action equipartition. The expected spectra for both cases are:

$$E_k^{\xi} \propto k^{-1} \quad \text{for energy equipartition} \quad (22)$$

$$E_k^{\xi} \propto k^{-2} \quad \text{for wave action equipartition.} \quad (23)$$

## B. Direct energy cascade

### 1. Results

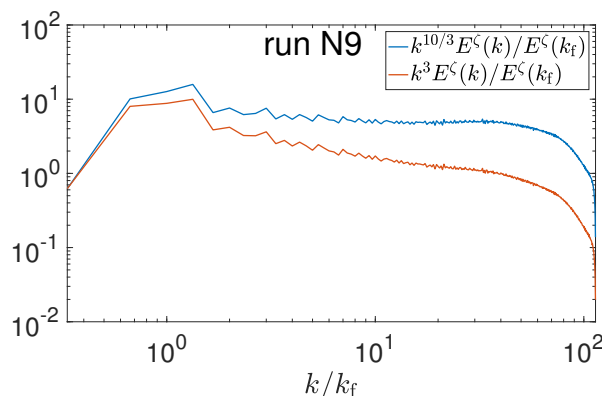


FIG. 6. Wavenumber spectrum of the deformation  $E^{\zeta}(k)$  for the high resolution DNS N9 of the pure membrane. The spectrum has been compensated either by  $k^{10/3}$ , (which is the WTT prediction) or by  $k^3$  (WTT prediction for a plate with  $C^2 > 0$  and  $T = 0$ , discarding the logarithmic corrections). Forcing acts in modes  $k \in (1, 4)$ .

As shown in the previous section the WTT prediction for the spectrum of the direct energy cascade is  $E^{\zeta}(k) \propto k^{-10/3}$  while the case of the tensionless plate is  $E^{\zeta}(k) \propto k^{-3} \ln^{1/3}(k^*/k)$ . Discarding the logarithmic corrections, it means that the distinction between the two spectra is quite small. Figure 6 shows the spectrum for the high resolution DNS N9 of the pure membrane. It is consistent with the  $-10/3$  spectral exponent expected from the direct cascade in the membrane. The DNS shows unambiguously that the scaling is distinct from the plate one with spectral exponent  $-3$ . Figure 7(a) shows the wavenumber-frequency spectrum of the moderate resolution run N11. As expected in weak turbulence, the energy is localized around the linear dispersion relation. The snapshot of the deformation shows that the deformation is totally disordered with no visible localized singular structures. If the spectrum of the deformation is  $E^{\zeta}(k) \propto k^{-10/3}$  and the frequency is linear in  $k$  then, if

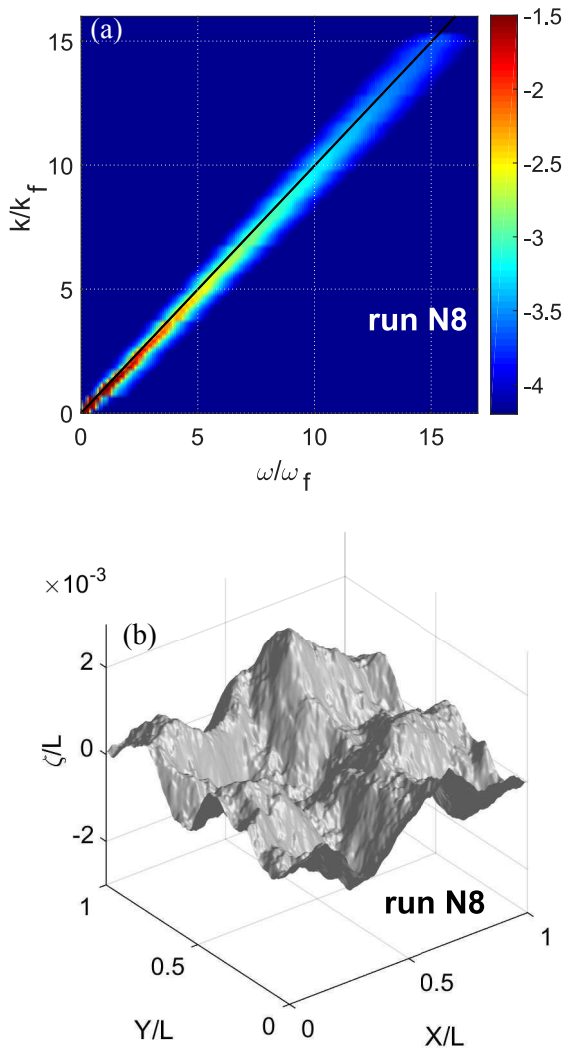


FIG. 7. (a) Wavenumber-frequency spectrum  $E^\zeta$  spectrum of the height of the waves for the same moderate resolution simulation shown in fig. 6(a). The black line is the linear dispersion. (b) snapshot of the deformation of the membrane for the same simulation.

the motion is made only of waves, the velocity spectrum should follow:  $E^v(k) = \omega(k)^2 E^\zeta(k) \propto k^{-\frac{4}{3}}$ . This is the scaling observed in fig. 5 at the lowest value of  $C^2$ .

### C. Inverse energy cascade

In an elastic plate the presence of  $3 \leftrightarrow 1$  wave resonances prevents the conservation of wave action and thus that of a true inverse cascade [15]. Note that a seemingly inverse cascade was nonetheless reported in numerical simulations [41] but its physical origin remains largely to

be explained. For the membrane, as mentioned above, no such  $3 \leftrightarrow 1$  interaction exists so that an inverse cascade related to the conservation of wave action is predicted corresponding to a deformation spectrum  $E_k^\zeta \propto k^{-3}$ .

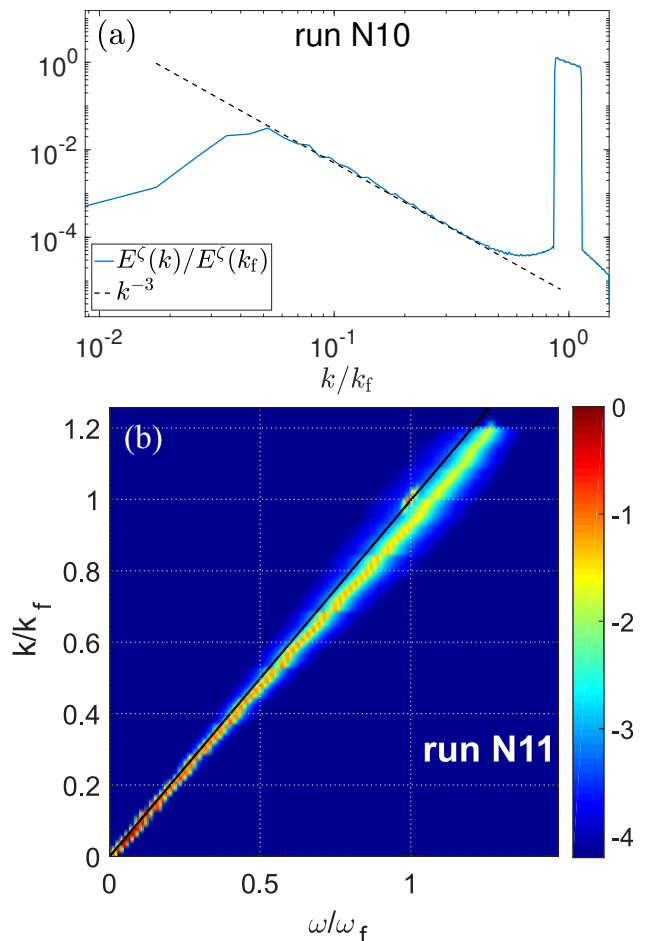


FIG. 8. (a) DNS N10 forced at small scale. The dashed line shows the  $k^{-3}$  scaling expected from the WTT predictions. (b) Wavenumber-frequency spectrum of the deformation for a moderate resolution simulation N11 forced at  $k_f = 200$  rad/m. The solid black line is the linear dispersion relation.

To check the presence of an inverse cascade, we perform numerical simulations by forcing at high wavenumbers. As shown in fig. 8(a) the high resolution DNS N10 shows the development of an inertial range at scales larger than the forcing one. The scaling observed in the inertial range is fully compatible with the WTT prediction for the inverse cascade of wave action. Figure 8(b) shows the frequency-wavenumber spectrum of a moderate resolution DNS N11. Again, the energy is localized in the vicinity of the linear dispersion relation in agreement with the phenomenology of WTT.

#### D. Evolution of the non-linearity with the scale

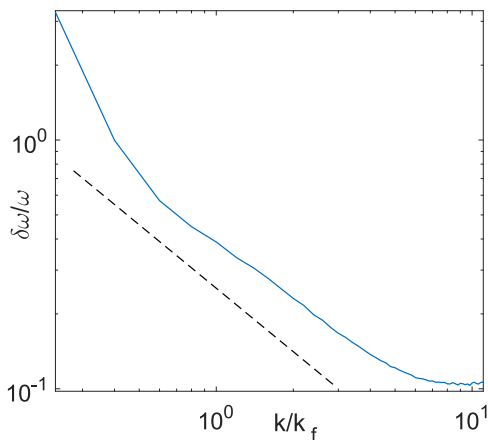


FIG. 9. Evolution of the normalized spectral widening  $\delta\omega/\omega$  as a function of  $k$  for the pure membrane (DNS N8). The dashed line is the WTT prediction  $\delta\omega/\omega \propto k^{-2/3}$ .

The hypothesis underlying the WTT is the scale separation between the slow nonlinear time scale  $t_{NL}$  of the evolution of the wave spectrum and the fast oscillation of the linear time scale  $t_L = 2\pi/\omega_k$ . Following Newell et al. [42], in the framework of WTT, the ratio  $t_{NL}/t_L$  is supposed to behave as  $t_{NL}/t_L \propto P^{-2/3}k^{-2\gamma/3+2\alpha}$  where  $\gamma$  is the degree of homogeneity in  $k$  of the scattering matrix  $J_{-\mathbf{p}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{-1s_1s_2s_3}$  and  $\alpha$  is the degree of homogeneity of the dispersion relation. Here  $\gamma = 2$  and  $\alpha = 1$  for the membrane so that:

$$t_{NL}/t_L \propto P^{-2/3}k^{2/3} \quad (24)$$

It means that the nonlinearity is getting weaker with  $k$ . Thus no breakdown of the weak nonlinearity hypothesis should be expected at high  $k$  if the nonlinearity is weak at low  $k$ . The nonlinear time scale appears as a widening  $\delta\omega_{NL} \propto 1/t_{NL}$  of the energy concentration around the dispersion relation. Thus the ratio  $\delta\omega_{NL}/\omega_k$  should behave as

$$\delta\omega_{NL}/\omega_k \propto P^{2/3}k^{-2/3} \quad (25)$$

The widening  $\delta\omega$  can be extracted from the wavenumber-frequency spectrum  $E(k, \omega)$ . At a given value of  $k$ , a Gaussian profile in  $\omega$  can be fitted to  $E(k, \omega)$  (of fig. 7(b)) around the maximum of energy (which corresponds to the dispersion relation). The result is shown in fig. 9. The observed decay for the spectral width of the membrane is indeed following the scaling  $1/k^{2/3}$  which supports the fact that the observed turbulence in the membrane is consistent with the WTT.

#### V. CONCLUSION

In this article, we compared experimentally and numerically the statistical properties of wave turbulence in

a vibrating membrane to that of weak turbulence in a vibrating plate that had been studied before. The fundamental difference between the membrane and the plate is that the waves are not dispersive in the membrane as opposed to the case of the plate. Other systems such as acoustics or shallow water surface waves show that weak turbulence is no longer present but coherent structures such as shocks or solitons are observed. Here no such structures are observed when evolving continuously from the plate to the membrane and a state of weak turbulence is observed numerically in the membrane. This comes from the fact that the nonlinear coupling vanishes for collinear waves so that to prevent a strong cumulative effect of nonlinearity along rays yielding shocks for instance. Here only  $2 \leftrightarrow 2$  interactions are possible that cause an angular redistribution of energy so that the system remains weakly turbulent. A difference between the membrane and the plate is thus the presence of an inverse cascade for the membrane that should not exist for the plate (which is actually the object of a controversy [41]). Thus there is a class of such systems that can develop weak turbulence of non dispersive waves. The case of weak gravitational waves is similar, the nonlinear coupling also vanishes for  $3 \leftrightarrow 1$  interactions [14] so that weak turbulence should also exist for such waves.

#### Appendix A: Saddle-point like approximation

Wave turbulence theory is based on a multi-scale perturbation expansion, in which the kinetic equation emerges as a condition to keep bounded the long time limit behavior of the expansion. The general formalism can be found in several works [40, 42], in particular for elastic plates in [22]. The wave turbulence formalism requires the understanding of the long time behavior of the integrals

$$I(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \frac{e^{it h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} - 1}{ih(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (A1)$$

and

$$E(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \int_0^t \frac{e^{i\tau h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} - 1}{ih(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\tau d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 \quad (A2)$$

where  $F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  is a regular function and as a shorthand notation one defines

$$h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = s_1\omega(\mathbf{k}_1) + s_2\omega(\mathbf{k}_2) + s_3\omega(\mathbf{k}_3) + s\omega(\mathbf{p})$$

with  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ . In general for non dispersive waves the later expression  $I(\mathbf{p})$  and  $E(\mathbf{p})$  has a well established asymptotic behaviors given by

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(\mathbf{p}) = \int \text{sign}(t) \pi F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \delta(h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 + iP \int \frac{F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 \quad (\text{A3})$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(\mathbf{p})}{t} = \int \text{sign}(t) \pi F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \delta(h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})) d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 + iP \int \frac{F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 \quad (\text{A4})$$

with  $P$  the principal value of the integral. A good comprehension of these asymptotic behaviors are crucial for studying the non dispersive limit. Therefore in this Appendix we give a detailed derivation of the asymptotic behaviors (A3) and (A4).

The long time limit of the integral (A1) is dominated by the behavior near the manifold defined by  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = 0$ , namely the resonant manifold. If no resonant manifold exist i.e.  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \neq 0$  the Riemann-Lebesgue lemma implies that the oscillatory term vanish in the limit  $t \rightarrow \infty$ , hence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(\mathbf{p}) = i \int \frac{F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (\text{A5})$$

and no evolution of the wave amplitude exists since only the real part of  $I(\mathbf{p})$  contributes to it. If a resonant manifold exists the integral  $I(\mathbf{p})$  is dominated by the region close to such manifold. Generically one can consider that for each  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{k}_1$  exist a vector  $\mathbf{k}_2^*(\alpha)$  parametrized by a single parameter  $\alpha$  which satisfies  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) = 0$  (we will omit unless necessary  $\alpha$  in  $\mathbf{k}_2^*$ ). Considering that the resonant manifold is contained in a small  $2d$  dimensional volume  $\Omega$  the integral  $I(\mathbf{p})$  can be rewritten as

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \frac{e^{it h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} - 1}{ih(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1 + i \int_{\mathbb{R}^{2d}/\Omega} \frac{F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1, \quad (\text{A6})$$

where in the region  $\mathbb{R}^{2d}/\Omega$  we made use of the Riemann-Lebesgue lemma. Close to the resonant manifold (i.e.  $\mathbf{k}_2 \in \Omega$ )

$$h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \approx \nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{k}_2 + \dots \quad (\text{A7})$$

with

$$\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) = s_2 \omega'(k_2^*) \frac{\mathbf{k}_2^*}{|k_2^*|} - s_3 \omega'(k_3^*) \frac{\mathbf{k}_3^*}{|k_3^*|}$$

and  $\delta \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2^*$ . If the gradient  $\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})$  vanishes at the resonant manifold, the approximation (A7) is not correct and the asymptotic behaviors (A4) and (A3) are not longer valid. Such is the case for most non dispersive systems, and is the main cause for the breakdown of the standard wave turbulence theory on these

systems. The particular case of an elastic membrane will be discussed in Appendix B. Using one more time the Riemann-Lebesgue lemma in (A6) in the limit  $\lim t \rightarrow \infty$  one gets

$$I(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \frac{e^{it \nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{k}_2} - 1}{ih(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1. \quad (\text{A8})$$

One can easily corroborate that  $\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k}_2^{\parallel} = \partial_{\alpha} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) = 0$  where  $\mathbf{k}_2^{\parallel} \equiv \partial_{\alpha} \mathbf{k}_2^*$  is the tangent vector of the resonant manifold. Therefore, defining the orthogonal vector  $\mathbf{k}_2^{\perp}$  such  $\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k}_2^{\perp} = \|\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})\| k_2^{\perp}$ , one can perform a change of variable which leads to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \times \frac{e^{it \|\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})\| k_2^{\perp}} - 1}{ih(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} dk_2^{\perp} d\alpha d\mathbf{k}_1 \quad (\text{A9})$$

where  $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \mathcal{J}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  and  $\mathcal{J}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  is the determinant of the Jacobian of the change of variable. We shall consider that  $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  is a regular function.

The integral in the variable  $dk_2^{\perp}$  is of the type

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{e^{ih'(0)xt} - 1}{ih(x)} dx,$$

where  $h(x) \approx h'(0)x$  for  $|x| \approx 0$  and  $h'(0) > 0$ . The integrand is regular in 0 hence

$$\tilde{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} g(x) \frac{e^{ih'(0)xt}}{ih(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} g(x) \frac{e^{ih'(0)xt}}{ih(x)} dx \right) + iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{h(x)} dx \quad (\text{A10})$$

and a simple contour integrations leads to

$$\tilde{I} = \text{sign}(t) \pi \frac{g(0)}{h'(0)} + iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{h(x)} dx. \quad (\text{A11})$$

Therefore the expression (A9) is given by

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(\mathbf{p}) = \int \text{sign}(t) \pi \frac{G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})}{\|\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})\|} \delta(k_2^\perp) dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1 + iP \int \frac{G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1 \quad (\text{A12})$$

The first term is evaluated at  $k_2^\perp = 0$  which correspond to the resonant manifold given by the solutions of  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = 0$ , hence we can rewrite the last expression as

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(\mathbf{p}) = \int \text{sign}(t) \pi G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \delta(h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})) dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1 + iP \int \frac{G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1. \quad (\text{A13})$$

Finally coming back to the original variables  $dk_2^\perp d\alpha \rightarrow d\mathbf{k}_2$  one leads to the desired result (A3).

The second class of integral (A4) can be rewritten as

$$E(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \frac{1 - e^{it h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} + it h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})^2} d\tau d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_1. \quad (\text{A14})$$

The same procedure that was used to obtain (A9) leads in the long time limit to the expression

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) \frac{1 - e^{it \|\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})\| k_2^\perp} + it h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})^2} dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1 \quad (\text{A15})$$

The integral in the variable  $dk_2^\perp$  is of the type

$$\tilde{E} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{1 - e^{ih'(0)xt} + it h(x)}{h(x)^2} dx,$$

where  $h(x) \approx h'(0)x$  for  $|x| \approx 0$  and  $h'(0) > 0$ . Integrating by part once and considering  $\partial_x h \neq 0$  one gets

$$\tilde{E} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g(x)}{\partial_x h} \right) \frac{e^{ih'(0)xt} - 1}{ih(x)} dx + t \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{\frac{h'(0)}{\partial_x h} e^{ih'(0)xt} - 1}{ih(x)} dx \quad (\text{A16})$$

and a simple contour integrations leads to

$$\tilde{E} = t \left( \text{sign}(t) \pi \frac{g(0)}{h'(0)} + iP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{h(x)} dx \right) - i \text{sign}(t) \pi \frac{1}{h'(0)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g(x)}{\partial_x h} \right)_{x=0} + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g(x)}{\partial_x h} \right) dx. \quad (\text{A17})$$

Therefore the expression (A15) is given by

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(\mathbf{p})}{t} = \int \text{sign}(t) \pi \frac{G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})}{\|\nabla_{\mathbf{k}_2} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})\|} \delta(k_2^\perp) dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1 + iP \int \frac{G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})}{h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})} dk_2^\perp d\alpha d\mathbf{k}_1 \quad (\text{A18})$$

and following the same procedure as for  $I(\mathbf{p})$  we obtain the desired result (A4).

## Appendix B: Non-dispersive waves

For dispersive waves the long time behavior of the integrals (A3) and (A4) are guaranteed since the gradients  $|\nabla_{\mathbf{k}_i} h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p})|$  are non zero over the resonant manifold. For non dispersive waves the situation is more subtle. In particular, for acoustic waves [11, 12], where the non-linearity is quadratic, the local behavior of the associated function  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  near the resonant manifold is not linear but quadratic. Indeed, it is easy to show that the gradients of  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  are exactly zero on the manifold. In such cases the long time limit behavior of the

integral strongly depends on the space dimension. It has been shown that for the 3 dimensional case, it is possible to find a similar kinetic equation, but with a restriction that only allows resonant interactions between collinear waves. Therefore no angular energy redistribution is possible.

The elastic plate under a strong tension corresponds to a two-space dimensional system with linear dispersion relation  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{T/\rho h} |\mathbf{k}|$  and a cubic non-linearity. The resonant manifold is given by

$$h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}) = c(s_1 |\mathbf{k}_1| + s_2 |\mathbf{k}_2| + s_3 |\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| - |\mathbf{p}|) = 0. \quad (\text{B1})$$



where  $c = \sqrt{T/\rho h}$ . For the sake of simplicity we have chosen  $s = -1$ . Two different solutions (or manifolds) exist. The first solution is similar to the one found for the acoustic problem, which represents a collinear interaction, that is  $\mathbf{k}_1^* = \alpha_1 \mathbf{p}$  and  $\mathbf{k}_2^* = \alpha_2 \mathbf{p}$ . Then, the resonant condition reduces to:

$$s_1|\alpha_1| + s_2|\alpha_2| + s_3|1 - \alpha_1 - \alpha_2| - 1 = 0 \quad (\text{B2})$$

For the  $3 \leftrightarrow 1$  interaction ( $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ ) one has that the manifold is given for any  $(\alpha_1, \alpha_2)$  with  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  and  $1 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ . For the  $2 \leftrightarrow 2$  interaction ( $s_1 = s_2 = 1$  and  $s_3 = -1$ ) the solution is given for any  $(\alpha_1, \alpha_2)$  while  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  and  $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 > 0$ . It is easy to see that near the resonant manifold the first contribution to  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  is quadratic in  $\mathbf{k}$  because

$$\nabla_{\mathbf{k}_i} h(\mathbf{k}_1^*, \mathbf{k}_2^*, \mathbf{p}) = c \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left( s_i \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} - s_3 \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{|1 - \alpha_1 - \alpha_2|} \right) = 0$$

Then, the long time limit of integrals (A1) and (A2) are not given by the expressions (A3) and (A4). In general the asymptotic behavior of (A1) and (A2) is not well established, but fortunately for the particular case of an elastic plates the scattering coefficient (17) strongly vanishes for collinear wave vectors. Therefore, at least up to the second order expansion, the collisional integral is trivial.

Remarkably, as we said at the beginning, there exist another solution to (B1) which corresponds to  $2 \leftrightarrow 2$  interaction of non-collinear waves. This solution can be expressed in polar coordinates as:

$$k_2 = \frac{k_1 p (1 - \cos(\theta_p - \theta_1))}{k_1 (1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) - p (1 - \cos(\theta_2 - \theta_p))} \quad (\text{B3})$$

$$k_1 + k_2 > p. \quad (\text{B4})$$

The resonant manifold is displayed in Fig.10 for different values of  $k_2/p$ . We have set  $\theta_p = \pi$  by choosing the system of reference. The trivial collinear resonant manifold is given by curve  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ . One can easily verify that over the manifold described by such solution the gradient of  $h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p})$  is not zero and the standard weak wave turbulence description can be applied. Finally one gets the same kinetic equation (16) keeping in mind that the  $3 \leftrightarrow 1$  interaction does not contribute.

## ACKNOWLEDGMENTS

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 647018-WATU). GD acknowledge support from FONDECYT grant N° 1181382 and N° 1150463. We thank V. Govart, M. Kusulja and J. Virone for their technical assistance with the experiment.

- 
- [1] F. Leckler, F. Ardhuin, C. Peureux, A. Benetazzo, F. Bergamasco, and V. Dulov, "Analysis and Interpretation of Frequency-Wavenumber Spectra of Young Wind Waves," *J. Phys. Ocean.* **45**, 2484–2496 (2015).
  - [2] L. Lenain and W. K. Melville, "Measurements of the directional spectrum across the equilibrium saturation ranges of wind-generated surface waves." *J. Phys. Ocean.* **47**, 2123–2138 (2017).
  - [3] K. Hasselmann, "On the non-linear energy transfer in gravity-wave spectrum. part 1. general theory," *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500 (1962).
  - [4] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
  - [5] S. Nazarenko, *Wave turbulence*, Vol. 825 (Springer Science & Business Media, 2011).
  - [6] A.C. Newell and B. Rumpf, "Wave Turbulence," *Ann. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59–78 (2011).
  - [7] S. Galtier, "Weak inertial-wave turbulence theory," *Phys. Rev. E* **68**, 015301 (2003).
  - [8] J.F. Scott, "Wave turbulence in a rotating channel," *J. Fluid Mech.* **741**, 316–349 (2014).
  - [9] J. Laurie, U. Bortolozzo, S. Nazarenko, and S. Residori, "One-dimensional optical wave turbulence: experiment and theory," *Physics Reports* **514**, 121–175 (2012).
  - [10] L. Boué, R. Dasgupta, J. Laurie, V. L'vov, S. Nazarenko, and I. Procaccia, "Exact solution for the energy spectrum of kelvin-wave turbulence in superfluids," *Phys. Rev. B* **84**, 064516 (2011).
  - [11] A.C. Newell and Aucoin P.J., "Semidispersive wave systems," *J. Fluid Mech.* **49**, 593–609 (1971).
  - [12] V.S. Lvov, Y. Lvov, A. C. Newell, and V. Zakharov, "Statistical description of acoustic turbulence," *Phys. Rev. E* **56**, 390–405 (1997).
  - [13] R. Hassaini and N. Mordant, "Transition from weak wave turbulence to soliton gas," *Phys. Rev. Fluids* **2**, 094803 (2017).
  - [14] S. Galtier and S.V. Nazarenko, "Turbulence of Weak Gravitational Waves in the Early Universe," *Physical Review Letters* **119**, 688 (2017).
  - [15] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica, "Weak Turbulence for a Vibrating Plate: Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?" *Physical Review Letters* **97**, 025503 (2006).
  - [16] A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille, and C. Touzé, "Observation of wave turbulence in vibrating plates," *Phys. Rev. Lett.* **100**, 234504 (2008).
  - [17] P. Cobelli, P. Petitjeans, A. Maurel, V. Pagneux, and N. Mordant, "Space-time resolved wave turbulence in a vibrating plate," *Phys. Rev. Lett.* **103**, 204301 (2009).
  - [18] N. Yokoyama and M. Takaoka, "Weak and strong wave turbulence spectra for elastic thin plates," *Phys. Rev. Lett.* **110**, 105501 (2013).
  - [19] N. Yokoyama and M. Takaoka, "Identification of a separation wave number between weak and strong turbulence spectra for a vibrating plate," *Phys. Rev. E* **89**, 012909 (2014).
  - [20] T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica,

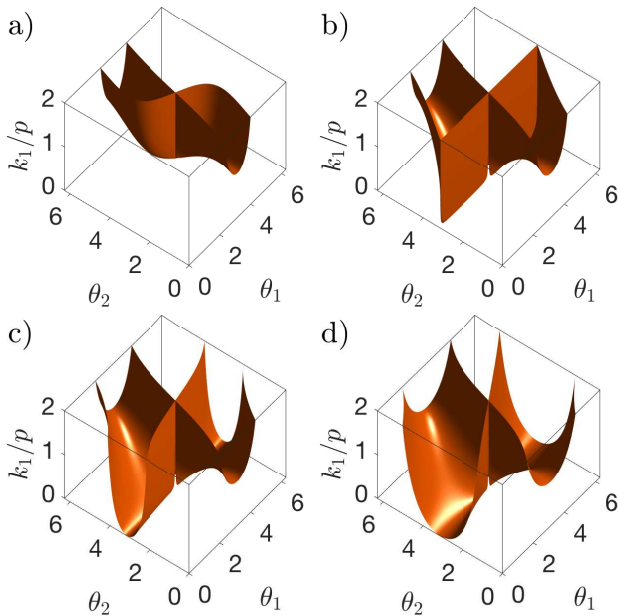


FIG. 10. The resonant manifold for  $k_2/p = .5$  (a),  $k_2/p = 1$  (b),  $k_2/p = 1.5$  (a) and  $k_2/p = 100$  (b).  $\theta_p = \pi$  by choosing the system of coordinates.

and C. Touzé, “Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping,” *EPL* **102**, 30002 (2013).

- [21] M. Ducceschi, O. Cadot, C. Touzé, and S. Bilbao, “Dynamics of the wave turbulence spectrum in vibrating plates: A numerical investigation using a conservative finite difference scheme,” *Physica D* **280-281**, 73–85 (2014).
- [22] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica, “Wave turbulence theory of elastic plates,” *Physica D* **347**, 42–73 (2017).
- [23] N. Mordant and B. Miquel, “Intermittency and emergence of coherent structures in wave turbulence of a vibrating plate,” *Physical Review E* **96**, 042204 (2017).
- [24] G. Düring and G. Krstulovic, “PhysRevE.97.020201,” , 1–5 (2018).
- [25] R. L. Mott, *Radio sound effects* (McFarland & co, 1993).
- [26] K. Arcas, “Physical modelling and measurements of plate reverberation,” in *19th International Congress on Acoustics*, Proceedings of the International Congresses on Acoustics (Madrid, 2007).
- [27] B. Miquel, A. Alexakis, and N. Mordant, “Role of dissipation in flexural wave turbulence: From experimental spectrum to Kolmogorov-Zakharov spectrum,” *Physical Review E* **89**, 062925 (2014).
- [28] N. Mordant, “Fourier analysis of wave turbulence in a thin elastic plate,” *Eur. Phys. J. B* **76**, 537–545 (2010).
- [29] B. Miquel, A. Alexakis, C. Josserand, and N. Mordant, “Transition from wave turbulence to dynamical crumpling in vibrated elastic plates,” *Physical review letters* **111**, 054302 (2013).
- [30] A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd. 5, Leipzig , 132 (1907).
- [31] T. von Kármán, “Festigkeitsprobleme im maschinenbau,” *Ency. d. math. Wiss.*, Bd. IV. 27, Leipzig , 311 (1910).
- [32] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon, New York, 1959).
- [33] E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit, and C.D. Mitescu, *Physical Hydrodynamics* (Oxford University Press, 2015).
- [34] P. Cobelli, P. Petitjeans, A. Maurel, V. Pagneux, and N. Mordant, “Space-Time Resolved Wave Turbulence in a Vibrating Plate,” *Physical Review Letters* **103** (2009).
- [35] P. J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry,” *Exp. Fluids* **46**, 1037 (2009).
- [36] A. Maurel, P. Cobelli, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry,” *Appl. Optics* **48**, 380–392 (2009).
- [37] B. Miquel and N. Mordant, “Nonlinear dynamics of flexural wave turbulence,” *Physical Review E* **84**, 066607 (2011).
- [38] S.M. Cox and P.C. Matthews, “Exponential time differencing for stiff systems,” *Journal of Computational Physics* **176**, 430–455 (2002).
- [39] David Gottlieb and Steven A Orszag, *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*, Vol. 26 (Siam, 1977).
- [40] D.J. Benney and P.G. Saffman, *Proc. Roy. Soc. London A* **289**, 301 (1966).
- [41] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica, “Self-similar formation of an inverse cascade in vibrating elastic plates,” *Physical Review E* **91**, 1292 (2015).
- [42] A.C.Newell, S. Nazarenko, and L. Biven, “Wave turbulence and intermittency,” *Physica D* **152-153**, 520 (2001).



### 7.3 Ondes purement non-dispersives : régime fortement non-linéaire

Dans cette partie nous allons étudier numériquement les régimes fortement non-linéaires de turbulence d'ondes de tension pure dans la membrane élastique. Nous allons commencer par effectuer une analyse spatiale et spectrale afin de déterminer si la turbulence faible est toujours valable ou si un nouveau régime où la turbulence faible est brisée est observable. Une comparaison avec les prédictions théoriques de G.Düring et al. [170] pour les régimes forts de turbulence d'ondes dans une plaque dans la limite  $h = 0$ , correspondant au cas vers lequel nous tendons, sera effectuée. Enfin en dernière partie nous nous intéresserons à comparer ces régimes forts à ceux de la plaque où des cônes développables étaient observés [17].

#### 7.3.1 Régime fort : brisure de la turbulence d'onde faible ?

Nous présentons dans cette partie des simulations numériques avec une dissipation idéale, c'est à dire avec fenêtre de transparence, et un forçage des ondes linéaires de nombre d'onde  $k_f/2\pi = 2.5\text{m}^{-1}$  avec une largeur de bande excitée de  $\pm 1\text{m}^{-1}$ . Afin de voir l'évolution progressive des régimes faiblement non-linéaires aux régimes fortement non-linéaires nous augmentons l'amplitude du forçage par paliers. L'intensité des non-linéarités  $\epsilon$  est souvent quantifiée par la pente rms des vagues en turbulence d'onde, nous regroupons donc au tableau 7.1 les différentes intensités de non-linéarité testées dans nos simulations numériques. Il est important de souligner que la pente rms n'est pas vraiment le bon paramètre quantifiant le degré de non-linéarité dans le système lorsque la dispersion n'est pas la même dans le milieu. En effet pour le cas de la plaque, lorsque le coefficient de dispersion  $C^2$  était diminué le système devenait de plus en plus non-linéaire quand bien même la pente rms moyenne des ondes restait constante. Ce qui nous permet d'affirmer que le système était plus fortement non-linéaire est l'observation directe des spectres spatio-temporels où la croissance de la non-linéarité est caractérisée par l'augmentation de la largeur de l'énergie autour de la relation de dispersion ainsi que le décalage de celle-ci à basse fréquence, pour la cas de la plaque, par rapport à la relation de dispersion comme rapporté dans la littérature [8, 46]. Pour les simulations de la membrane élastique, le coefficient de dispersion étant nul et la tension appliquée étant constante  $T = 4 \text{ kN}$  il devient raisonnable de considérer la pente rms des vagues comme indicateur de l'intensité de la non-linéarité.

numéro du run	19	20	21	27	22	28	4	5
amplitude du forçage	2	3	10	30	100	300	900	1500
pente rms moyenne (%)	0.9	1.1	1.7	2.3	5.7	13.0	29.8	43.7

TABLE 7.1 – Amplitude du forçage et pente rms moyenne pour les simulations numériques de la membrane utilisées avec une amplitude de forçage croissante.

Nous commençons par une analyse spatiale afin de caractériser la surface de la membrane, pour cela nous représentons sur la figure 7.2 (a) et (b) respectivement un régime faible avec une pente rms 1.1% et un régime fort avec une pente rms 43.7%. Si l'observation de la surface de la membrane ne permet qu'une caractérisation qualitative du type de régime visible elle est néanmoins primordiale car les régimes de la TTF ne sont applicable que sur un champ de vagues non localisées aléatoires comme observé sur la figure 7.2b). Pour le régime fortement non-linéaire des structures localisées sont visibles, ces structures sont des plis à grande échelle mais dont la surface est chevauchée par des petites échelles qui ressemblent à des "rides". Nous appellerons ces structures des structures "montagneuses" de par leur ressemblance aux profils montagneux. Ces rides sont également observées par Vanderparre [173] pour les feuilles minces sous confinement aux bords et elles sont séparées du cas du comportement du papier froissé où des cônes développables ont été observés par Miquel et al dans [17] (une comparaison plus détaillée avec ce régime sera faite dans la seconde section de ce chapitre). Afin de visualiser la concentration des contraintes et les points de plis nous traçons le laplacien de la hauteur des vagues à un instant donné :

$$\Delta(\zeta) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad (7.2)$$

Nous représentons sur la figure 7.2c) et d)  $\Delta(\zeta)$  pour le régime respectivement faible et fort et nous remarquons une répartition aléatoire homogène spatialement du laplacien du champ de déformation pour le régime de la TTF tandis que le laplacien du champ de déformation du régime fort révèle des lignes qui sont des crêtes et des creux des plis observés sur la reconstitution de surface. Autour de ces structures un grand nombre de ridules est présent qui concentre les contraintes. Nous semblons donc voir un champ de vagues contenant des structures localisées, ce qui est en dehors du contexte de la TTF où les ondes doivent être aléatoires et non localisées.

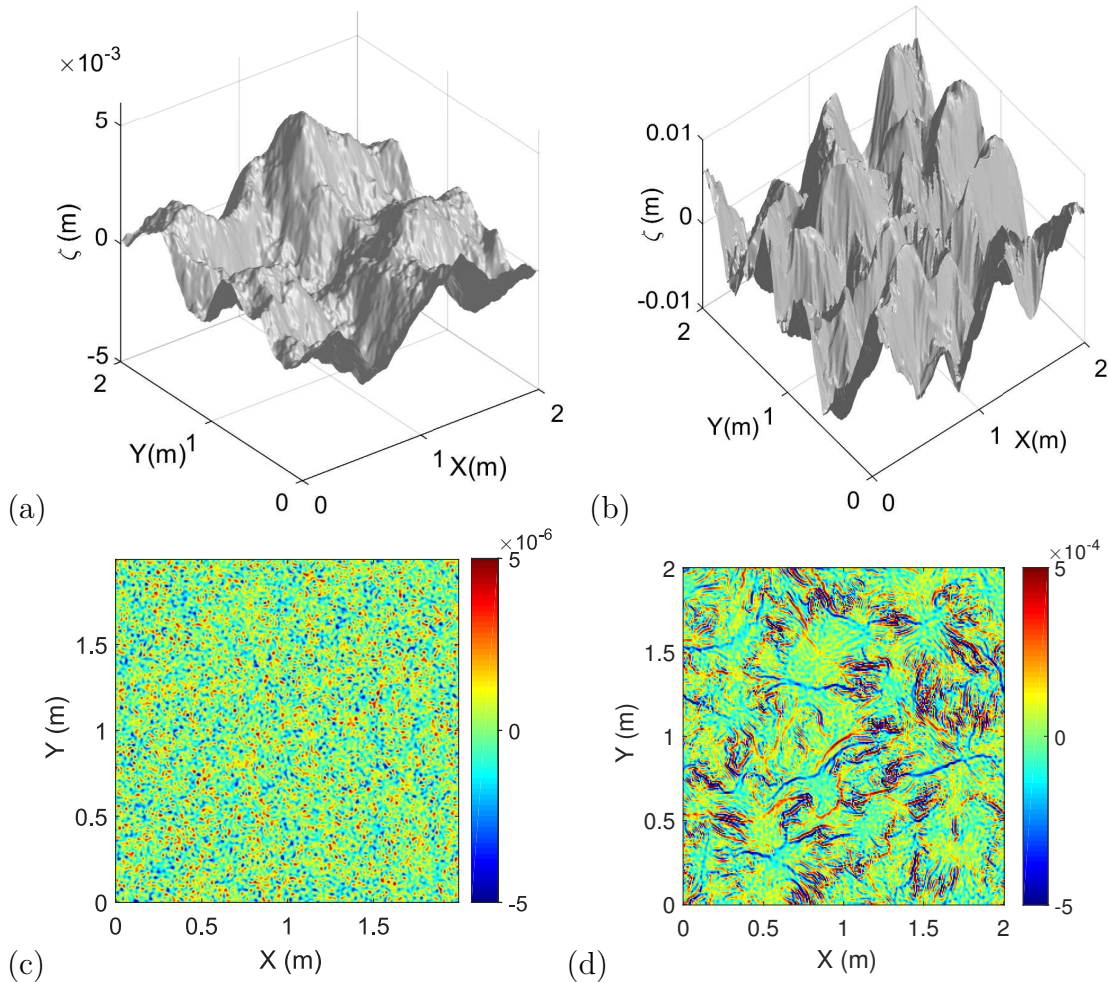


FIGURE 7.2 – a) Reconstitution de surface de la membrane pour un régime faiblement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 1.1\%$ . b) Reconstitution de surface de la membrane pour un régime fortement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 43.7\%$ . c) Le champ du laplacien de la hauteur des vagues associé à la reconstitution de surface sur la figure a). d) Le champ du laplacien de la hauteur des vagues associé à la reconstitution de surface sur la figure b).

Afin de vérifier si les spectres des vagues pointent également vers ce changement nous montrons sur les figures 7.3a) et 7.3b) le spectre spatio-temporel intégré en  $\mathbf{k}$  respectivement du régime faible et du régime fort. Nous voyons une distribution de l'énergie très différente du régime de la TTF. En effet l'énergie semble être autour de la relation de dispersion en  $\omega$  positif et négatif à très faible  $k$ , en dessous de  $k/2\pi \approx 6m^{-1}$ , puis les deux branches se rejoignent et un pic d'énergie se forme entre les deux relations de dispersion allant à de très hauts nombre d'onde soit à des très petites échelles. Cette signature spectrale, extrêmement différente du régime de TTF, est due en partie faible  $k$  aux grands plis observés sur la plaque mais la pointe remontant à de très hauts  $k$  à basse fréquence est clairement la conséquence de la présence des ridules sur les ailes des grands plis. Ces structures sont très lentes par rapport aux ondes linéaires dans le milieu. La signature spectrale exotique

du régime de turbulence fort dans la membrane ayant été identifiée nous nous intéressons aux effets de cette dernière sur la cascade de l'énergie dans le milieu.

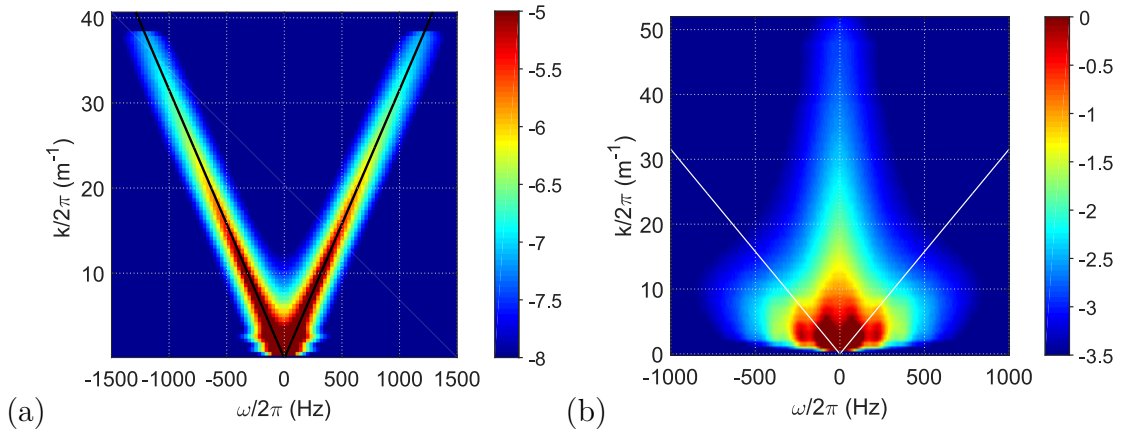


FIGURE 7.3 – a) Spectre spatio-temporel intégré de la hauteur des ondes dans la membrane pour un régime faiblement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 1.1\%$ . b) Spectre spatio-temporel intégré de la hauteur des ondes dans la membrane pour un régime fortement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 43.7\%$ . Ces spectres sont associés respectivement aux instantanés sur la figure 7.2a) et 7.2b). Les lignes en trait plein noir et blanc représentent la relation de dispersion linéaire des ondes de tension pure dans la membrane.

Ce point est d'autant plus intéressant qu'une étude théorique très récente a été effectuée par G. Düring et al. [172, 174] sur les régimes fortement non-linéaires dans les plaque dans la limite  $h = 0$ . Dans cette limite, le terme non linéaire devient dominant sur le terme linéaire, conduisant à une dynamique purement non-linéaire des ondes, les équations FvK (1.156) utilisées pour la plaque élastique sont ainsi réduites à :

$$\begin{cases} \Delta^2 \chi = -\frac{E}{2} \{\zeta, \zeta\} \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{\rho} \{\zeta, \chi\} - \mathcal{D} + \mathcal{F} \end{cases} \quad (7.3)$$

Étant donné qu'aucun terme linéaire n'est présent, la dynamique turbulente dans cette limite peut être considéré comme une turbulence forte de plaque/membrane. Après l'analyse dimensionnelle, deux situations peuvent être envisagées. Tout d'abord, le cas général, pour lequel le spectre est indépendant de  $h$ , conduisant au spectre d'énergie de la vitesse suivant :

$$E_k^v = \frac{E}{\rho h} \Phi_2 \left( \frac{P}{(E/\rho)^{3/2} k} \right) \quad (7.4)$$

Dans cette formule, le module de Young  $E$  est toujours présent en raison de la relation de la fonction d'Airy avec la courbure gaussienne. Par contre si le

module de Young n'intervient pas dans le spectre, indiquant que le spectre est indépendant du matériau, le spectre de Kolmogorov habituel pour la turbulence hydrodynamique est alors attendu :

$$E_k^v = CP^{2/3}k^{-5/3} \quad (7.5)$$

Le régime décrit ci-dessus correspond à la limite vers laquelle nous tendons, en effet contrairement aux travaux de G. Düring et al nous ne considérons pas  $h = 0$ , ce qui résulte à garder uniquement le terme non-linéaire dans les équations FvK, mais nous tendons vers cette limite en ne considérant que les ondes de tension pures linéaires avec le terme non-linéaire qui est très fortement augmenté. En effet comme expliqué dans l'analyse spatio-temporelle de ce régime les ondes qui se développent dans le milieu ne sont plus des ondes quasi-linéaires donc nous pouvons raisonnablement considérer que le terme non-linéaire est prédominant dans le système. L'analyse de la cascade d'énergie dans nos régimes forts est alors primordiale afin d'observer quelle solution parmi les deux spectres prédits (7.4) et (7.5) est sélectionné par la dynamique du système. De plus, la non-linéarité étant ici cubique, alors qu'elle est quadratique dans la turbulence hydrodynamique, cette limite pourrait aider à caractériser le rôle de la non-linéarité dans le régime de forte turbulence. La prédiction du spectre de Kolmogorov est donnée sur le spectre de vitesse en  $k$  mais nous allons considérer comme pour la turbulence hydrodynamique également la même évolution pour le spectre en fréquence, soit  $E_\omega^v$ . Les deux spectres de la déformation  $\zeta$  en fonction du nombre d'onde et de la pulsation donnent alors en utilisant  $E^v = E^\zeta/\omega^2$  :

$$\begin{cases} E_k^\zeta \propto k^{-11/3} \\ E_\omega^\zeta \propto \omega^{-11/3} \end{cases} \quad (7.6)$$

Nous traçons les spectres de déformation  $\zeta$  en fréquence compensés pour le régime faible et fort sur la figure 7.4. Le spectre du régime de la turbulence d'onde faible et celui du régime fort décroissent en lois de puissance différentes, en effet la TTF prédit une évolution du spectre de puissance de la déformation dans la membrane telle que  $E_\omega^\zeta \propto \omega^{-10/3}$  tandis que le spectre du régime fort semble évoluer selon  $\omega^{-11/3}$ . Nous avons donc représenté sur la figure 7.4 les spectres du régime faible et du régime fort compensés par la loi de puissance opposée de leur évolution en lignes pleines soit respectivement  $\omega^{10/3}$  et  $\omega^{11/3}$ . Les pentes respectives de chaque régime étant assez proches nous avons également représenté en tirets les spectres compensés par la loi de puissance du régime opposé.

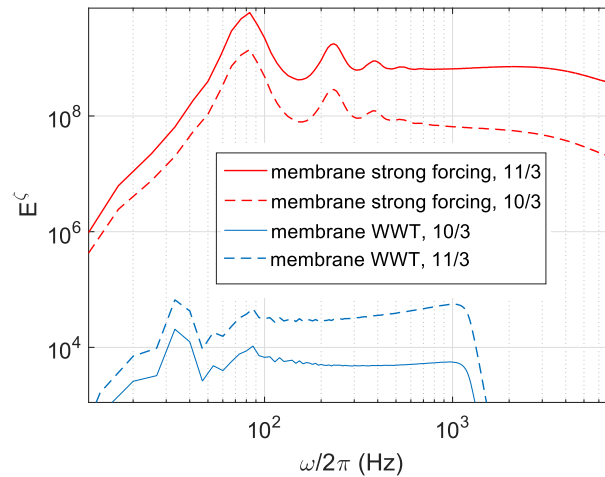


FIGURE 7.4 – Le trait plein bleu représente le spectre de la déformation de la membrane en fonction de  $\omega$  pour un régime faible compensé par  $\omega^{10/3}$ ,  $-10/3$  étant la pente prédite par la TTF pour le spectre des ondes. En tirets bleu le même spectre est compensé par  $\omega^{11/3}$ ,  $-11/3$  étant la pente attendue du spectre en cas de spectre hydrodynamique de Kolmogorov. Le trait plein rouge représente le spectre de la déformation de la membrane en fonction de  $\omega$  pour un régime fort compensé par  $\omega^{11/3}$ . En tirets rouge le même spectre est compensé par  $\omega^{10/3}$ .

Nous observons que les spectres affichent clairement un plateau lorsqu'ils sont compensés par leur loi de puissance correcte, ce plateau n'est plus maintenu lorsque les spectres sont compensés par la mauvaise loi de puissance. Ceci nous permet donc d'affirmer que le spectre du régime fort est clairement différent du régime faible, la cascade d'énergie de la TTF est brisée lorsque la non-linéarité est importante dans le milieu et est remplacée par une cascade ayant la même évolution que la cascade hydrodynamique de Kolmogorov. La dynamique du système en turbulence forte semble donc suivre la seconde prédiction de G. Düring (7.5) avec indépendance du spectre du module de Young.

Afin d'illustrer l'évolution progressive du spectre de la TTF au spectre de Kolmogorov de la turbulence forte nous représentons sur la figure 7.5a) les spectres de vitesse en fonction de  $\omega$  compensés par  $\omega^{5/3}$ , pour toutes les simulations numériques regroupées dans le tableau 7.1 correspondant à une pente rms moyenne comprise entre 0.9% et 43.7%. Sur la figure 7.5b) sont représentés les spectres de vitesse en fonction de  $k$  des mêmes simulations numériques compensés par  $k^{5/3}$ . La valeur de la pente des spectres de vitesse est représentée en fonction de l'intensité de la non-linéarité  $\epsilon$  sur la figure 7.6.

Nous observons grâce aux figures 7.5 et 7.6 que l'évolution du régime de turbulence d'onde faible au régime de Kolmogorov n'est pas brutale puisqu'à partir d'une non-linéarité de 1.7% jusqu'à 5.7% les spectres des ondes évoluent selon une pente comprises entre celles des deux régimes extrêmes, soit  $-4/3$  pour la turbulence faible et  $-5/3$  pour la turbulence forte. La dynamique du système évolue selon le spectre de Kolmogorov à partir d'une non-linéarité de l'ordre de 13%. La



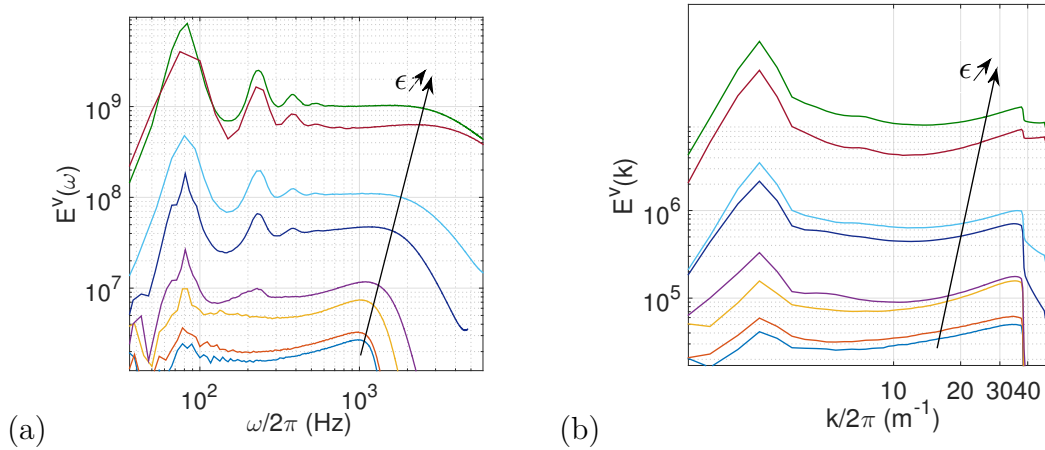


FIGURE 7.5 – a) Evolution des spectres de fréquence de la vitesse pour toutes les simulations numériques du tableau 7.1 compensés par  $\omega^{5/3}$ ,  $-5/3$  étant la pente du spectre  $E_\omega^v$  prédite pour le régime de turbulence forte pour la membrane. Le forçage est augmenté du bas vers le haut résultant en une augmentation de la pente rms  $\epsilon$ . b) Evolution des spectres de vitesse en fonction du nombre d'onde compensés par  $k^{5/3}$  associés aux spectres de la figure a).

pente des spectres de vitesse de fréquence et du nombre d'onde sont identiques et sont affichées sur la figure 7.6 en fonction de  $\epsilon$ .

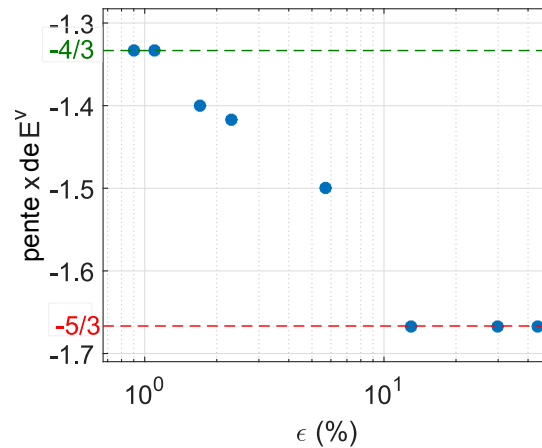


FIGURE 7.6 – Evolution de la pente des spectres de vitesse des simulations numériques de la membrane élastique en fonction de la pente rms  $\epsilon$ . Les pentes rms des simulations numériques effectuées sont indiquées sur le tableau 7.1.

Notons par ailleurs que les pentes des spectres en fréquence sont également les mêmes des spectres en nombre d'onde. Or théoriquement la prédiction d'une pente de  $-5/3$  pour le spectre de vitesse de Kolmogorov n'est valable normalement que pour les spectres en nombre d'onde mais comme il a été également observé pour la turbulence hydrodynamique les spectres de vitesse en fréquence suivent également

une pente en  $-5/3$ . Ceci semble être expliqué en hydrodynamique par l'hypothèse de random sweeping comme cela a été abordé dans ces articles [175, 176], il serait intéressant d'étudier l'origine d'un tel comportement pour la membrane élastique.

### 7.3.2 Comparaison avec les cônes développables

Ayant confirmé et caractérisé la rupture de la TTF dans la membrane élastique, une comparaison avec la rupture de la TFF dans la plaque s'impose afin de distinguer ou non les deux régimes. La rupture de la TTF sur les plaques élastiques a été étudiée finement par B. Miquel et N. Mordant [17]. Dans cette partie nous avons utilisé nos simulations numériques de la plaque tendue en imposant une tension nulle et un coefficient de dispersion  $C^2 = C_{exp}^2$ , nous avons ainsi une modélisation de la plaque élastique classique avec des ondes de flexion pures. Nous avons imposé le même type de forçage que pour les simulations numériques de la membrane mais avec une amplitude qui donnerait une pente rms moyenne des ondes équivalente à la pente rms la plus élevée engendrée dans les simulations de la membrane, à savoir  $\epsilon \approx 44\%$ . L'une des caractéristiques majeures des régimes fortement nonlinéaires dans la plaque est l'apparition de cônes développables (D-cônes) à sa surface comme représenté sur la figure 7.7b). En effet nous observons l'apparition de déformations à grande échelle composées de plis et de crêtes pointues qui relient ce qu'on appelle des cônes développables. Par ailleurs en les comparant aux structures localisées observables dans les régimes de turbulence forte de la membrane sur la figure 7.7a) nous constatons que les D-cônes ont des surfaces latérales très lisses sans les petites ridules qui font la spécificité des structures "montagneuses" sur la membrane. Une représentation du laplacien du champ de déformation des deux régimes est également présentée sur les figures 7.7c) et 7.7d) respectivement pour la membrane et la plaque. Nous voyons que les contraintes sont essentiellement localisées sur les crêtes et les creux des cônes développables pour la plaque avec très peu de petites structures sur leurs flancs à l'opposé de la membrane où une multitude de petites échelles apparaissent au croisement des grandes déformations et qui concentrent les contraintes.



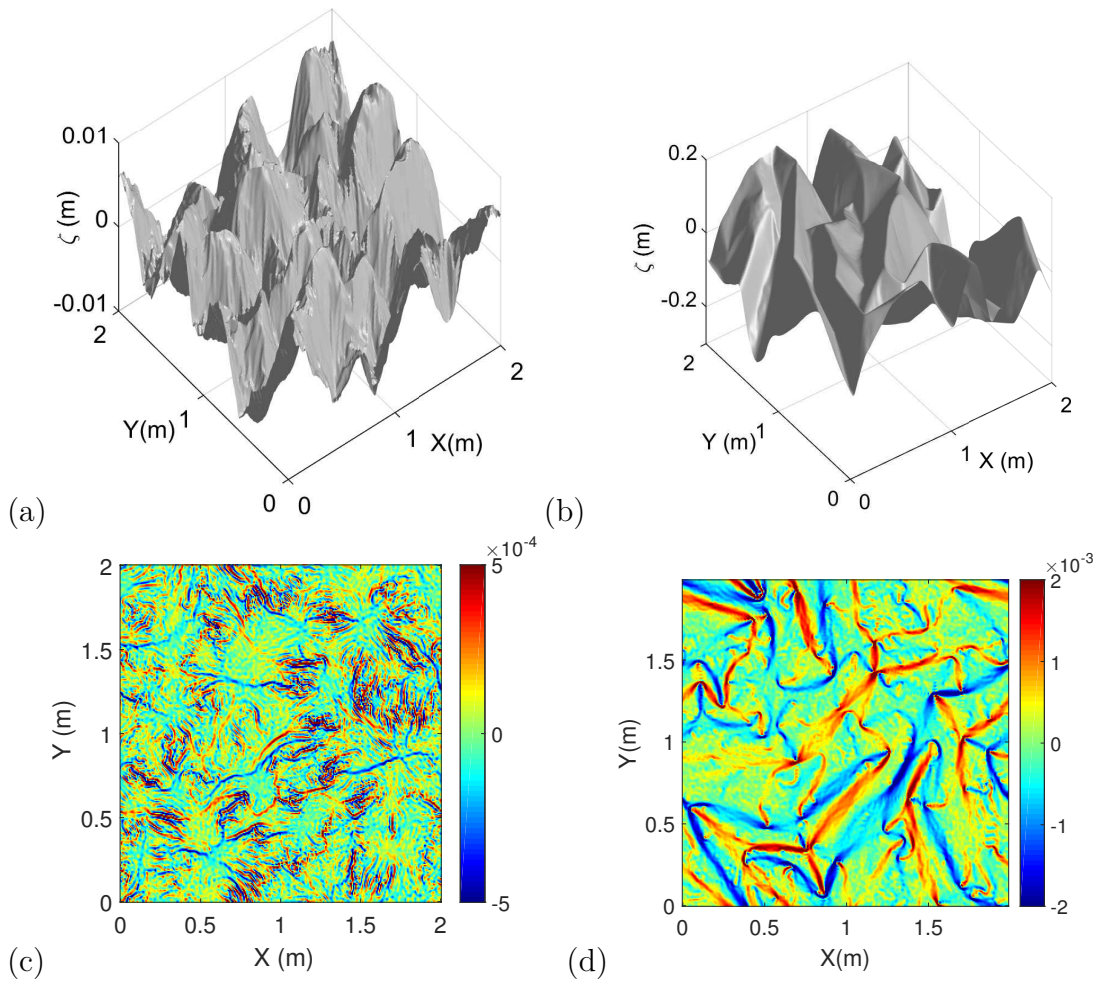


FIGURE 7.7 – a) Reconstitution de surface de la membrane pour un régime fortement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 43.7\%$ . b) Reconstitution de surface de la plaque pour un régime fortement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 44\%$ . c) Le champ du laplacien de la hauteur des vagues associé à la reconstitution de surface sur la figure a). d) Le champ du laplacien de la hauteur des vagues associé à la reconstitution de surface sur la figure b).

Les signatures spectrales des deux régimes sont par ailleurs différentes comme affiché sur la figure 7.8. En effet si nous mettons les mêmes dynamiques pour l'échelle de couleur des spectres spatio-temporels des déformations pour la membrane, figure 7.8a), et la plaque, figure 7.8b), nous voyons que l'énergie reste majoritairement localisée à grande échelle pour la plaque. En élargissant la dynamique de la gamme de couleur du spectre de la plaque sur la figure 7.9 nous nous rendons compte qu'il apparaît à très faible fréquence et grand nombre d'onde un pic semblable à celui observé sur la membrane, mais ce dernier est extrêmement moins marqué à petite échelle. Ceci explique certainement le caractère intermittent des spectres en nombre d'onde du régime de D-cônes sur la plaque où une évolution à grande échelle est caractérisée par une pente en  $k^{-5}$  de par la présence des singularités tandis que le spectre à petite échelle suit l'évolution habituelle du spectre

de ZK avec la correction logarithmique (voir [17] pour l'évolution des spectres en  $k$  des régimes de turbulence forte dans la plaque).

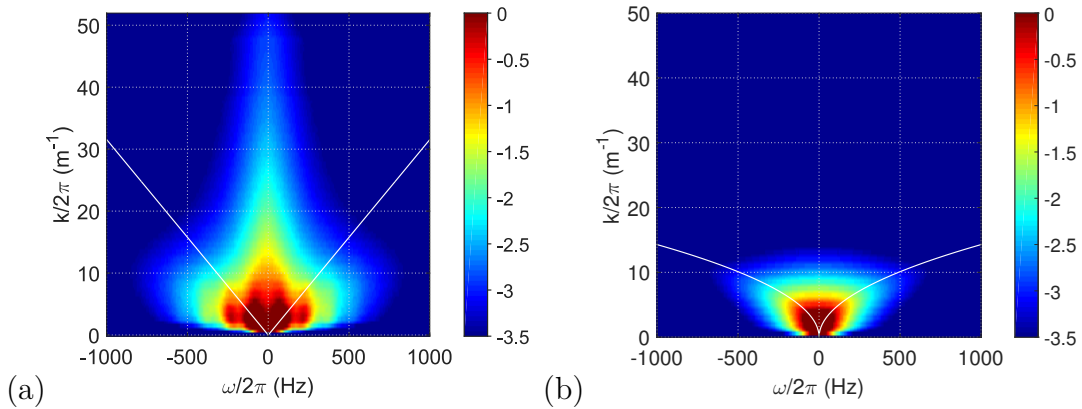


FIGURE 7.8 – a) Spectre spatio-temporel intégré de la hauteur des ondes dans la membrane pour un régime fortement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 43.7\%$ . Les lignes en trait plein blanc représentent la relation de dispersion linéaire des ondes de tension pure b) Spectre spatio-temporel intégré de la hauteur des ondes dans la plaque pour un régime fortement non-linéaire avec une pente  $rms \approx 44\%$ . Les lignes en trait plein blanc représentent la relation de dispersion linéaire des ondes de flexion pure. Ces spectres sont associés respectivement aux instantanés sur la figure 7.7a) et 7.7b).

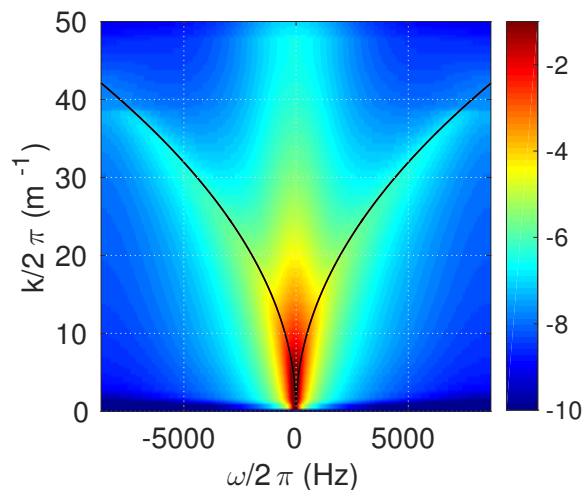


FIGURE 7.9 – Spectre spatio-temporel intégré de la hauteur des ondes pour une simulation numérique en régime fort d'une plaque sans tension, et une pente rms moyenne  $\approx 44\%$ . Ce spectre correspond à la figure 7.8b) mais avec une palette de couleur plus large.

Une comparaison sur les spectres de vitesse est par ailleurs essentielle pour dissocier les deux types de brisure de la TTF puisque c'est l'évolution de ces derniers qui a permis de caractériser le type de turbulence forte dans la membrane.

Nous représentons sur la figure 7.10a) et 7.10b) respectivement les spectres de vitesse de la membrane et de la plaque en fonction du nombre d'onde compensé par  $k^{5/3}$  ainsi que les spectres de vitesse de la membrane et de la plaque en fonction de la pulsation compensé par  $\omega^{5/3}$ .

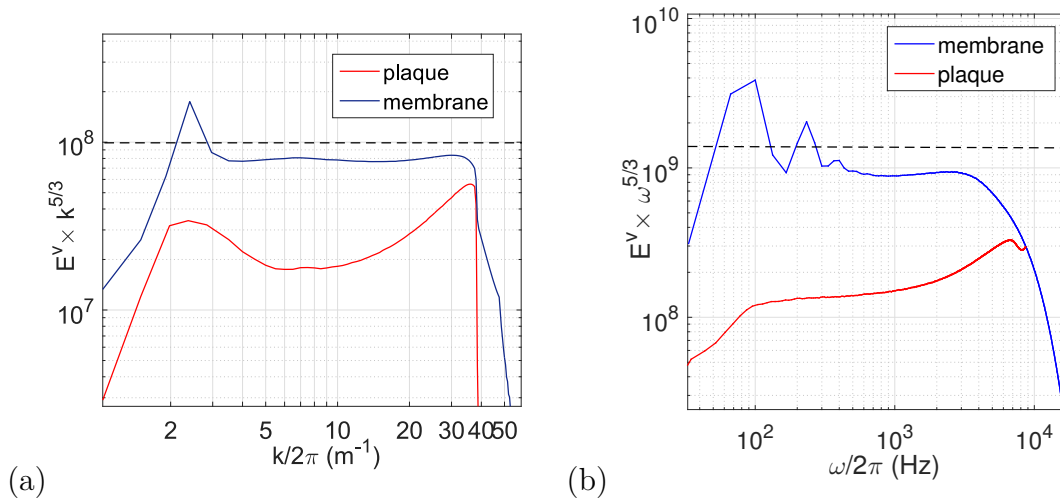


FIGURE 7.10 – a) spectres de vitesse en fonction du nombre d'onde pour la simulation en régime fort de la membrane, trait plein bleu, et de la plaque, trait plein rouge, compensés par  $k^{5/3}$ ,  $-5/3$  étant la pente attendue pour le spectre de vitesse de la membrane en turbulence forte. b) spectres de vitesse en fonction de la pulsation pour la simulation en régime fort de la membrane, trait plein bleu, et de la plaque, trait plein rouge, compensés par  $k^{5/3}$ .

Comme expliqué dans la première partie de ce chapitre nous avons des spectres de turbulence hydrodynamique pour nos régimes forts sur la membrane donc nous avons comme attendu l'apparence de plateau pour les spectres de vitesse de la membrane compensés par  $k^{5/3}$  et  $\omega^{5/3}$ . Ces plateaux ne sont pas visibles toute fois sur les spectres de vitesse compensés de la plaque confirmant que la dynamique des D-cônes et des "structures montagneuses" sont bel est bien différentes. En effet il semblerait que l'énergie cascade de manière totalement différente lorsque la turbulence faible est rompue dans la plaque et la membrane. De manière très surprenante les régimes de turbulence fortes dans la membrane évoluent comme la turbulence hydrodynamique où seul le terme non-linéaire est présent.

### 7.3.3 Ouverture : mesures expérimentales de turbulence d'onde faible à la surface d'un tambour

La suite à ces travaux numériques de la turbulence d'onde dans une membrane élastique serait le passage à des mesures expérimentales des propriétés statistiques de la turbulence dans un tambour. Cette démarche peut se heurter à certaines difficultés des membranes réelles dont la plus importante est la dissipation. En

effet la dissipation est très forte dans les membranes, un amortissement important peut donc empêcher la cascade d'énergie de se développer.

Des mesures préliminaires très récentes ont été faites par N.Mordant sur une grosse caisse d'orchestre d'un mètre de diamètre. Le forçage est généré par un pot vibrant qui est fixé ponctuellement sur la membrane. La méthode de profilométrie par transformée de Fourier y a été implémentée et une première reconstitution du spectre spatio-temporel des ondes est présente sur la figure 7.11.

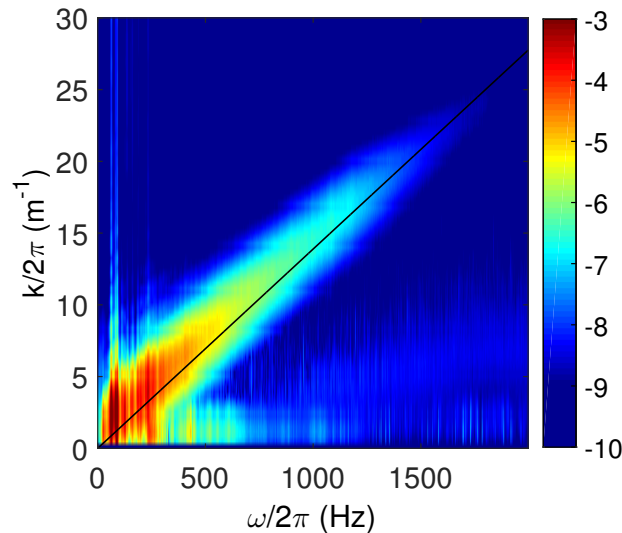


FIGURE 7.11 – spectre spatio-temporel intégré de la vitesse des ondes dans une caisse d'orchestre d'un mètre de diamètre. La ligne noire représente la relation de dispersion linéaire des ondes dans la membrane. Le forçage est effectué à basse fréquence (autour de 90 Hz). Les mesures ont été réalisées par la méthode de profilométrie par transformée de Fourier.

Nous pouvons voir que l'énergie est bien concentrée autour de la relation de dispersion. L'énergie évolue bien en forme de ligne droite comme cela est attendu pour les ondes non-dispersives. La cascade d'énergie est également bien mise en place puisque de l'énergie est présente à des fréquences bien plus élevées que celle du forçage (autour de 90 Hz). A notre connaissance c'est le premier spectre spatio-temporel de turbulence faible dans une membrane. Des mesures complémentaires sont en prévision afin de caractériser d'avantage la turbulence dans ce milieu.

## 7.4 Conclusion

Nous avons étudié dans la première partie de ce chapitre numériquement et expérimentalement les régimes faiblement non-linéaires des ondes élastiques dans une plaque précontrainte. La tension appliquée à la plaque résulte en une addition d'un terme non-dispersif qui est alors en compétition avec la dispersion des ondes de flexion. L'utilisation d'une dissipation "expérimentale", agissant à toutes les échelles, dans la simulation numérique a permis de retrouver un bon accord

avec les résultats expérimentaux. Ces derniers ont révélé un régime de turbulence d'ondes où l'énergie suivait la relation de dispersion linéaire corrigée par le terme de tension. L'addition du terme non-dispersif ne semble pas avoir engendré de structures localisées comme cela avait été vu pour les ondes gravito-capillaires au chapitre 6.

Une étude numérique, avec une dissipation idéale, s'est concentrée ensuite sur les ondes purement non-dispersives dans la membrane élastique en faible non-linéarité. Les spectres des déformations dans l'espace des nombres d'onde ont une pente de  $-10/3$  qui est en accord avec les prédictions théoriques de la TTF dans la membrane [11]. D'autres systèmes non-dispersifs tels les ondes acoustiques ou les ondes à la surface d'une fine couche d'eau montrent des régimes où la turbulence faible n'est plus valable et où des structures cohérentes telles les ondes de choc et les solitons apparaissent. Un tel comportement n'a pas été observé pour les ondes dans la membrane élastique. Ceci est dû aux types d'interactions mises en jeu dans ce milieu. En effet les ondes de tension, tout comme les ondes de flexion, font intervenir à l'ordre le plus bas des interactions à 4 ondes. Seulement pour les ondes de tension le coefficient de collision à quatre ondes est nul pour les ondes colinéaires. Une accumulation de l'énergie et donc une augmentation de la non-linéarité dans une direction donnée engendrant des chocs n'est donc pas possible. En effet seules les interactions  $2 \leftrightarrow 2$  existent et ces dernières permettent la redistribution angulaire de l'énergie. Ces interactions garantissent également la conservation de l'action d'onde en plus de l'énergie. Une cascade inverse d'action d'onde est donc prédite par la théorie. Des simulations numériques avec des forçages localisées à petite échelle ont été effectuées et une reconstitution d'une cascade inverse a pu être possible. Le spectre des déformations en fonction du nombre d'onde évolue en  $k^{-3}$  et confirme ainsi une évolution en accord avec la prédiction de la TTF.

Une étude des régimes fortement non-linéaires dans la membrane a été menée. Une brisure de la turbulence faible a été observée. Cette dernière s'est illustrée par la présence de structures localisées à grandes échelles sous forme de plis affichant une multitude de ridules sur leurs flancs. L'analyse spectrale a pu mettre en lumière un spectre de Kolmogorov. Ce dernier a été prédit théoriquement par les travaux de Düring et al. [170] pour les régimes de turbulence forte dans la limite épaisseur de la membrane  $= 0$  avec un module de Young sans effet sur la physique du système.

Une comparaison avec les régimes fortement non-linéaires pour la plaque a permis de distinguer ces deux régimes. En effet la brisure de la turbulence faible dans la plaque s'accompagne par la présence de cônes développables qui sont des structures localisées à grande échelle. L'impact de ces structures n'est alors visible sur les spectres d'énergie qu'à grande échelle tandis que le spectre à petite échelle affiche une évolution selon les prédictions de la TTF.

# Conclusion

## Résultats

Nous nous sommes intéressés au cours de cette thèse aux régimes de turbulence de deux systèmes physiques que sont les ondes gravito-capillaires ou capillaires à l'interface de deux fluides et les ondes dans une plaque/membrane élastique.

L'ensemble des analyses effectuées a été résolu en surface et en temps et ce, soit expérimentalement grâce à la méthode de profilométrie par transformée de Fourier à la surface d'un fluide ou d'une plaque élastique, soit numériquement en résolvant les équations FvK en 2D modélisant les ondes élastiques dans une plaque/membrane en enregistrant les champs dans l'espace de Fourier  $k - \omega$  sur de grandes séries de temps. Ce type d'analyse s'est révélé être absolument indispensable pour :

- vérifier la présence ou non de structures localisées ou cohérentes.
- identifier le type d'ondes dans le milieu grâce à leur signature spectrale dans l'espace  $(k - \omega)$ .

Les résultats "originaux" de cette thèse peuvent être regroupés comme suit :

Nous avons mesuré l'évolution spatio-temporelle des solitons KdV à la surface d'une fine couche d'eau dans le régime gravito-capillaire au chapitre 6. La signature spectrale dans l'espace  $(k - \omega)$  de ces structures a été identifiée comme étant une droite caractérisée par leur vitesse. Leur spectres en fréquence affichent étonnamment une proximité avec les solutions de la TTF avec notamment la présence d'une transition autour de l'échelle capillaire et un exposant spectral sur le régime capillaire en accord avec la solution de Zakharov. Ceci confirme que les mesures locales sont insuffisantes, voire trompeuses et que l'évolution des spectres selon une seule "dimension" dans l'espace de Fourier n'est pas suffisante pour caractériser la turbulence d'ondes.

Nous avons par ailleurs mesuré spatio-temporellement l'évolution des ondes à l'interface de deux liquides de densités proches tendant ainsi vers un régime capillaire pur au chapitre 4. Pour ces régimes la littérature semblait reporter des évolutions statistiques très proches des prédictions de la TTF mais ce uniquement pour des mesures locales. Nos mesures nous permettent d'avancer que pour des systèmes faiblement non-linéaires le spectre des ondes capillaires est plus raide que la solution de Zakharov avec une dépendance de l'exposant spectral à l'échelle dissipative visqueuse.

Une observation de la coexistence entre un régime de turbulence faible avec un spectre continu et un régime de turbulence discrète est reportée dans cette thèse au chapitre 5 pour les ondes à la surface de l'eau dans le régime gravito-capillaire. En effet le confinement important de la largeur d'une cuve a entraîné une grande séparation entre les modes de cette dimension et une discrétisation du spectre des



ondes se propageant dans cette direction alors qu'une cascade d'énergie continue a été observée dans la direction non-confinée.

La reconstitution numériquement d'une cascade d'énergie directe et d'une cascade d'action d'onde indirecte en accord avec la TTF a pu être effectuée pour les ondes de tension pure dans une membrane élastique au chapitre 7. Ces ondes sont purement non-dispersives et aucune onde de choc ou soliton n'ont été rapportés dans les régimes faiblement non-linéaires. Ce résultat a été l'un des plus originaux de cette thèse car en transitant de la plaque précontrainte vers la membrane on s'attendait à une transition vers un régime d'ondes cohérentes. L'absence d'un tel comportement est expliquée par l'absence d'interactions résonantes entre ondes colinéaires pour les ondes de tension pure. En effet le terme de collision pour les interactions entre ondes colinéaire est nul. Seules les interactions  $2 \leftrightarrow 2$  existent, ce qui permet une distribution angulaire de l'énergie et une impossibilité de toute accumulation énergétique le long d'une seule direction. Aucune onde de choc ou soliton ne peut se développer. Ceci nous permet donc de nous prononcer sur l'impact de la diminution de la dispersion sur la turbulence d'onde faible : la condition de forte dispersion (dispersion supérieure à la non-linéarité) n'est indispensable que pour les systèmes où les interactions résonantes entre ondes colinéaires sont autorisées. Une brisure de la TTF dans la membrane pour une non-linéarité forte a été notée avec le développement de structures localisées "montagneuses" avec des spectres de vitesse en  $k$  et en  $\omega$  évoluant comme le spectre de Kolmogorov.

A partir de ces études nous pouvons lister les conditions de validité de la TTF et nous prononcer quant à la pertinence de la modélisation des systèmes réels par cette théorie.

Le premier type de condition étudié est le type de dissipation dans le milieu :

- Si la dissipation est localisée dans l'espace spectral en n'agissant qu'au delà d'une certaine échelle, comme cela a été étudié numériquement pour les ondes faiblement non-linéaires dans une membrane élastique au chapitre 7, alors l'évolution du système suit bien les spectres de Zakharov et ce pour la cascade directe d'énergie mais également la cascade inverse d'action d'onde.
- Si la dissipation agit à toute les échelles, comme cela est le cas dans les systèmes réels, alors les spectres des ondes faiblement non-linéaires ne sont pas en accord avec les solutions de Zakharov. Cette observation a été faite expérimentalement pour toutes les études des ondes gravito-capillaires sans structures localisées aux chapitres 4,5 et 6 avec des spectres évoluant bien en loi de puissance mais avec une pente plus raide que les prédictions de la TTF.

La même observation est également faite pour l'étude expérimentale et numérique, avec une dissipation expérimentale, des ondes élastiques dans une plaque précontrainte au chapitre 7. Dans ce cas le spectre des ondes n'a ni la forme ni l'exposant spectral de la solution de Zakharov.

- Pour cette dissipation agissant à toutes les échelles une précision peut être apportée pour le cas de la dissipation visqueuse. En effet l'étude expérimentale des ondes capillaires à l'interface eau/huile silicone avec une variation

de la viscosité du fluide silicone (chapitre 4) a permis une caractérisation de l'effet de la diminution de la viscosité. La diminution de la viscosité correspond à une augmentation du temps dissipatif. A pente constante cela correspond à l'élargissement de la séparation d'échelle entre le temps non-linéaire et le temps dissipatif. Une cascade d'énergie plus efficace est alors notée et le spectre devient moins raide en tendant vers l'exposant spectral de la solution de Zakharov sans jamais toutefois l'atteindre. Une étude du rapport du temps non-linéaire sur le temps linéaire permet alors d'identifier que la turbulence faible ne peut pas être visible dans ce système à des échelles supérieures au  $Hz$  et ce même pour des viscosités faibles et une surface propre. Deux possibilités peuvent alors exister pour satisfaire cette séparation d'échelle : augmenter la taille du domaine d'étude ou augmenter l'intensité des non-linéarités.

L'augmentation de la non-linéarité peut faire apparaître des structures localisées ou cohérentes. Ce qui nous ramène à la compréhension de l'influence de la présence de telles structures sur la turbulence d'ondes :

- Si la dispersion et la non-linéarité des ondes sont du même ordre de grandeur, tout en étant faibles, et que le système autorise des interactions résonnantes entre ondes colinéaires alors une accumulation d'énergie le long d'une direction préférentielle est possible. Cette accumulation a permis le développement de solitons KdV observés dans le chapitre 6. De telles structures ont été visibles dans les régimes d'eau peu profonde. Les spectres en  $k$  et en  $\omega$  mesurés affichent des lois de puissance proches des solutions de Zakharov mais sont pourtant le résultat d'une dynamique toute différente qu'est celle de la turbulence intégrable.
- Nous avons observé au chapitre 4 pour l'étude expérimentale des ondes à l'interface eau/huile silicone un régime fortement non-linéaire. En effet la forte accélération du batteur a généré une structure très large bande : on a appelée cette structure une "quasi-onde de choc dispersive" car elle a la forme de cette structure, comme celle observé par Berhanu et al. [83] mais elle est instable ce qui entraîne la perte de sa cohérence. Les spectres  $k - \omega$  semblent indiquer une cascade d'énergie capillaire efficace pour ces régimes or une reconstitution de la surface des ondes proches du batteur permet l'identification de ces structures comme étant la trace du forçage. Aucune cascade d'énergie n'est en réalité observée.
- L'étude numérique des ondes de tension pure en régime fortement non-linéaire avec une dissipation idéale au chapitre 7 nous a permis l'observation d'importants plis localisés à grande échelle avec la présence de ridules sur leurs flancs. Ces structures ont entraîné la brisure de la TTF et le développement d'un spectre de Kolmogorov.

L'une des caractéristiques des systèmes réels est le fait qu'ils possèdent une taille finie. Nous avons étudié au chapitre 5 l'impact de la taille sur les ondes gravito-capillaires en ne considérant un confinement que sur la largeur de la cuve, la longueur restant non-confinée. Nous avons ainsi observé une discrétisation des



spectres des ondes se propageant dans la direction confinée. En effet l'énergie est alors transmise par quasi-résonance entre les modes de la largeur et cela grâce à l'élargissement spectral dû à la non-linéarité finie dans le milieu. Nous ne sommes alors plus dans un système continu dans l'espace des  $k$  et la turbulence d'onde classique n'est plus valable. Les propriétés statistiques des ondes transversales relèvent alors de la turbulence discrète.

### Perspectives

L'ensemble des observations effectuées sur des systèmes réels au cours de cette thèse ont mis à défaut la théorie de la turbulence faible et ce essentiellement à cause de la non satisfaction de la double séparation d'échelles  $T_L \ll T_{NL} \ll T_D$ . En effet la satisfaction de cette double condition est très compliquée en laboratoire de par la nécessité de cuves de grandes tailles, pour de tels systèmes la propreté de la surface devient alors difficilement contrôlable. La pollution de la surface peut être causée par l'accumulation de poussière environnante, de la peinture contenant des tensioactifs sur la parois de la cuve. Ce type de pollution forme un film visco-élastique à la surface de l'eau qui augmente alors considérablement la dissipation en plus de la dissipation visqueuse (voir article en annexe 7.4 sur l'effet de ce type de dissipation sur les ondes gravitaires).

La prise en compte d'une dissipation à toutes les échelles devient par ailleurs une nécessité dans la théorie de la turbulence faible afin de décrire les systèmes réels.

L'application directe des études expérimentales à la surface de l'eau en laboratoire est la compréhension des mécanismes de transfert d'énergie à la surface des océans. Une observation simple de la surface de la mer nous permet de voir très souvent l'apparition de structures localisées, de structures cohérentes, de déferlements, d'une direction de propagation privilégiée. La compréhension de tous ces phénomènes qui invalident la TTF sont d'une grande importance pour la compréhension des systèmes réels et dans ce sens leur étude en laboratoire est pertinente.

En perspective nous pouvons ainsi lister une série d'expériences qui permettraient une meilleure compréhension des phénomènes qui sortent du cadre de la TTF étudiés au cours de cette thèse :

- L'étude d'un régime contenant un champ de solitons gravito-capillaires aléatoires dans une cuve de quelques mètres permettrait l'interaction entre les différents solitons. Une analyse des éventuelles interactions serait intéressante ainsi qu'une comparaison avec l'évolution statistique des gaz de solitons observée sur l'océan [164] ou dans le régime capillaire [177].
- Une étude spatio-temporelle des solitons de dépression dans le régime gravito-capillaire en eau profonde serait intéressante afin de vérifier leur signature spectrale mais également leur évolution spatiale. L'équipe de M. Onorato a observé la génération d'ondes de choc dispersives par des solitons de dépressions dans un canal de près de 90 m de long [84]
- La turbulence gelée pour la turbulence discrète des ondes capillaires a pu

être observée numériquement [86, 132]. En effet la diminution de la non-linéarité en fonction de  $k$  pour les ondes capillaires entraîne une diminution de l'élargissement spectral jusqu'à ce qu'il soit inférieur à l'espacement modal. La cascade d'énergie s'en trouve stoppée. C'est un régime exotique assez intrigant qu'il serait éventuellement possible d'observer en augmentant le confinement sur l'expérience à l'interface eau/huile silicone.

- Pour les expériences à l'interface eau/huile silicone une étude avec une réduction de la profondeur du fluide silicone entraînerait peut-être l'apparition de solitons. L'existence de solitons internes est possible théoriquement en régime gravitaire [178]. Leur existence en régime capillaire ne semble pas avoir été étudiée.

Une étude expérimentale de la turbulence à la surface d'un tambour (membrane) est en cours par N. Mordant. Les premiers spectres spatio-temporaux en régime faiblement non-linéaire semblent montrer une énergie qui cascade efficacement le long de la relation de dispersion, ce qui est agréablement surprenant au vu des importantes dissipations dans ce milieu. Une étude des spectres en fréquence plus pentues que les solutions de Zakharov permettrait éventuellement la caractérisation de l'effet de la dissipation.

Enfin une étude expérimentale du régime fortement non-linéaire dans la limite de la membrane  $h = 0$  permettrait peut-être la mesure d'un spectre de Kolmogorov. On pourrait éventuellement imaginer l'implémentation de la méthode de profilométrie par transformée de Fourier sur une membrane très fine avec un forçage par haut parleur afin d'éviter toute rupture ou déformation irréversible du matériau. Le choix d'un matériau où la dissipation n'est pas très importante ainsi que la manipulation d'une structure aussi fine seront certainement problématiques.

# Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves

Antoine Campagne, Roumaïssa Hassaini, Ivan Redor, Joël Sommeria, Thomas Valran, Samuel Viboud, Nicolas Mordant<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, F-38000 Grenoble, France*

We discuss the impact of dissipation on the development of the energy spectrum in wave turbulence of gravity surface waves with emphasis on the effect of surface contamination. We performed experiments in the Coriolis facility which is a 13-m diameter wave tank. We took care of cleaning surface contamination as well as possible considering that the surface of water exceeds 100 m<sup>2</sup>. We observe that for the cleanest condition the frequency energy spectrum shows a power law decay extending up to the gravity capillary crossover (14 Hz) with a spectral exponent that is increasing with the forcing strength and decaying with surface contamination. Although slightly higher than reported previously in the literature, the exponent for the cleanest water remains significantly below the prediction from the Weak Turbulence Theory. By discussing length and time scales, we show that weak turbulence cannot be expected at frequencies above 3 Hz. We observe with a stereoscopic reconstruction technique that the increase with the forcing strength of energy spectrum beyond 3 Hz is mostly due to the formation and strengthening of bound waves.

The effect of an oil film spread on the sea to calm the waves has been reported since Antiquity. This phenomenon is used in practice to detect remotely oil spills by radar probing the roughness of the sea surface [1]. Experiments show that the maximum damping occurs usually for frequencies between 1 and 10 Hz (i.e. for wavelengths between 1 cm to 1 m) [2–4]. In the laboratory, the dedicated wave tanks are of typical size equal to a few times 10 m. In order to fit enough wavelengths in the tank to observe significant phenomena, the typical excitation of waves occurs most often at wavelengths of the order of 1 m (about 1 Hz for deep water waves) or slightly larger. In the wave turbulence framework, energy is expected to cascade in wavelength space from forcing scales to small dissipative scales [5–7]. It means that the range of wavelengths over which the cascade occurs is precisely the one in which the damping by surface contamination is supposed to be the most efficient. This damping is most likely impacting significantly the nonlinear cascade and it maybe one of the reasons that explain the discrepancy between laboratory observations and theoretical predictions from the weak turbulence theory [8, 9]. Indeed considering the surface of wave tanks covering several hundreds square meter, it is very challenging to achieve a perfect control of the quality of the water surface, so that surface contamination is hard to avoid. Dissipation is known to cause a steepening of turbulent wave elevation spectra as was reported for elastic waves in a thin plate [10, 11] and for capillary-gravity waves [12, 13].

Here we report experiments dedicated to observe the impact of surface contamination on wave turbulence of surface gravity-capillary waves. We also discuss more generally the impact of dissipation on the development

of the energy cascade due to wave turbulence of gravity surface waves.

## I. WAVE DAMPING BY MOLECULAR FILMS AT THE SURFACE OF WATER

The physical mechanism hidden behind this spectacular phenomenon is the modification of the tangential stress boundary condition at the air/water interface. For a perfectly clean interface, the tangential stress should vanish due to the much lower density of air. When a monomolecular film is present at the interface, the tangential stress does not vanish anymore due to concentration gradients resulting from the elongation or compression of the film. In the presence of a film, the boundary layer can sustain longitudinal waves (referred to as Marangoni waves) due to the viscoelastic properties of the film [4, 14, 15]. The consequence of the modification of the boundary condition is the appearance of strong velocity gradients in the boundary layer which are maximum when the Marangoni waves are resonant with the gravity-capillary waves. This resonance leads to a much stronger dissipation than the one of a perfectly clean surface. Following Alpers & Hühnerfuss [4], let us write the wave vector as  $\kappa = k + i\Delta$ .  $\kappa$  is complex due to the attenuation ( $k$  and  $\Delta$  are real numbers). For a perfectly clean surface, the damping coefficient  $\Delta_0$  is equal to

$$\Delta_0 = \frac{4k^2\eta\omega}{\rho g + 3\gamma k^2}, \quad (1)$$

where  $\eta$  is the dynamic viscosity,  $\rho$  is the density of the fluid,  $\gamma$  is the surface tension of pure water,  $g$  is the acceleration of gravity and  $\omega$  is the angular temporal frequency. Alpers & Hühnerfuss reports the calculation of the extra dissipation factor  $y(\omega) = \frac{\Delta}{\Delta_0}$  due to the surface

---

\* nicolas.mordant@univ-grenoble-alpes.fr

film:

$$y = \frac{1 + X(\cos\theta - \sin\theta) + XY - Y\sin\theta}{1 + 2X(\cos\theta - \sin\theta) + 2X^2} \quad (2)$$

$$X = \frac{|E|k^2}{(2\rho\eta\omega^3)^{1/2}}, \quad Y = \frac{|E|k}{4\omega\eta} \quad (3)$$

where the complex dilational modulus of the film is  $E = |E|e^{-i\theta}$  (see fig. 1 for an example). Alpers & Hühnerfuss investigated the variation of  $y$  for various contaminants and they observed typically that the peak of the resonance occurs at frequencies between 3 and 7 Hz and that the maximum overdamping reaches easily a factor 10 or even higher. This frequency range corresponds to wavelengths between 4 and 20 centimeters. At lower frequencies, for these surfactants,  $y$  goes back to one at about 1 Hz (i.e. for metric wavelengths). The existence

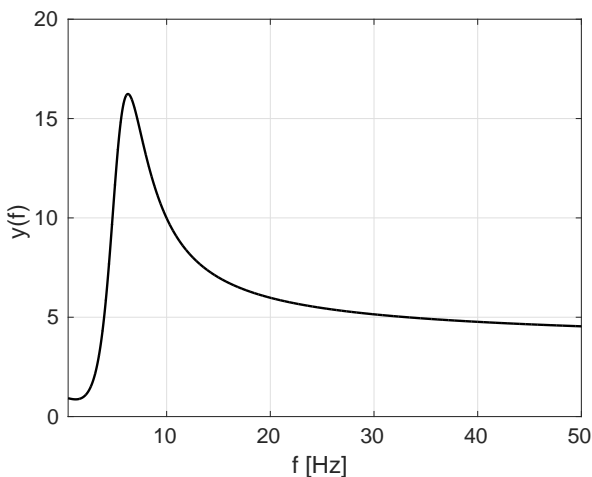


Figure 1. Additional dissipation factor  $y(f)$  as a function of frequency using Przadka *et al.* parameters in equation (2) for a commercial paint pigment [16]. A maximum is observed at about 4 Hz with a peak value close to 15.

of the resonance was confirmed experimentally by Cini & Lombardini [3]. The variation of interfacial surfactant concentration due to the interaction of surface waves with the surfactant layer was directly observed by Strickland *et al.* [17]. Note that dissipation occurs also through boundary layers at the bottom and at the vertical walls of the tank [18]. This contribution is expected to be significant for large wavelength and to be independent of the surface contamination.

## II. THE ISSUE OF SPECTRA IN EXPERIMENTAL WAVE TURBULENCE

The weak turbulence theory (WTT) is aimed at describing the statistical properties of a wave assembly, notably in the out of equilibrium case in which waves are forced at relatively large scale and dissipated at the smallest scales [5–7, 19]. It is based on the hypothesis of weak

nonlinearity such that a scale separation exists between the period  $T$  of the wave and  $T_{NL}$  the time scale of the slow evolution of the wave energy due to the nonlinear coupling with the ensemble of all the other waves.  $T_{NL}$  can be seen as the timescale of the correlation of the wave amplitude modulation (see [20]). Under this hypothesis, a multiscale analysis can be developed that predicts the occurrence of an energy cascade. For waves propagating on a 2D surface, the energy cascade is direct i.e. it transfers energy to small scales. The WTT also provides estimates of the surface deformation spectrum  $E^\eta(k)$  in either gravity or capillary regimes:

$$E^\eta(k) \propto g^{1/2} P^{1/3} k^{-5/2} \quad (\text{gravity waves}), \quad (4)$$

$$E^\eta(k) \propto \gamma^{1/4} P^{1/2} k^{-7/4} \quad (\text{capillary waves}), \quad (5)$$

where  $g$  is the gravity acceleration and  $P$  is the energy flux in the cascade. Using the dispersion relation

$$\omega_{LDR}^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \quad (6)$$

at either small or large  $k$  one can translate the  $k$  spectra prediction into frequency spectra as

$$E^\eta(\omega) \propto g P^{1/3} \omega^{-4} \quad (\text{gravity waves}), \quad (7)$$

$$E^\eta(\omega) \propto \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} P^{1/2} \omega^{-17/6} \quad (\text{capillary waves}). \quad (8)$$

Concerning gravity waves, some field measurements seem compatible with the theoretical prediction [21–25] but the natural conditions may not be matched to the theoretical hypotheses notably that of stationarity and isotropy. Several experiments have been aimed at confronting these predictions to well controlled experiments in the laboratory notably in the last decade [9, 26–28]. The measured spectra “look” turbulent i.e. they show a wide range of excited scales down the forcing scale but the spectral exponent fitted to the data are significantly lower than the theoretical prediction [9, 27, 28] both for  $E^\eta(k)$  and  $E^\eta(\omega)$ . An example is shown in fig. 2 which is a compilation of exponents from Aubourg *et al.* [28] and Deike *et al.* [9] as a function of the wave steepness  $\epsilon$ .  $\epsilon$  is defined as  $\epsilon = 2k_p\sigma_\eta$  where  $k_p$  is the wavenumber of the main peak of the spectrum and  $\sigma_\eta$  is the standard deviation of the surface height. This definition is quite usual in oceanography and has been shown in [30] to be indeed a good estimate of the slopes of the water surface. In the data from Aubourg [28], two sets of exponents are visible. In red, the data correspond to a strongly contaminated water surface. The blue set of exponents corresponds to a case for which the surface was cleaned up to some extent by using a skimmer. The impact of surface contamination is very strong: for instance for a typical steepness of 0.1, the exponent is reduced by more than 2 between the filtered case and the cleaner case. Note that the distinction between the two sets reduces when the steepness of the wave (i.e. the nonlinearity) is increased. For very steep waves, the exponent reaches the theoretical value of  $-4$  but in a strongly nonlinear regime at odds with the

range of validity of the theoretical prediction for weak turbulence. Nazarenko *et al.* [8] report that it neither fits with the  $k$  and  $\omega$  spectra proposed by Philips [31] or Kuznetsov [32] for singular or overturning waves respectively.

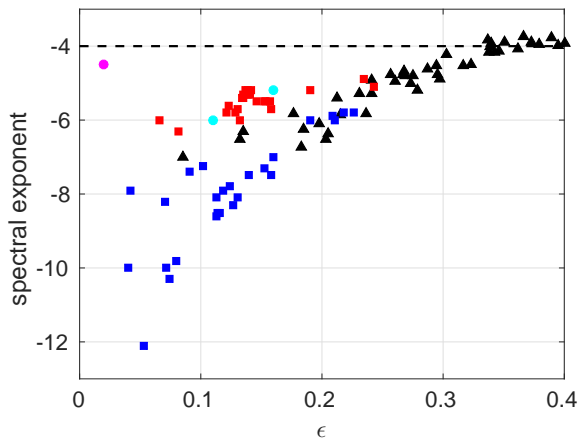


Figure 2. Measured spectral exponent  $\alpha$  of the temporal spectrum as function of the typical steepness of the waves  $\epsilon$  (changed by tuning the magnitude of the forcing and dependent as well on the surface contamination). Dark triangles are previous measurements reported by Deike *et al.* [9]. The blue and red squares are measurements by Aubourg [28, 30] with and without filtration. The single purple point is an in-situ measurement of gravity waves in the Black sea [21]. Our present data for the cleanest case are the two cyan dots.

### III. EXPERIMENTS IN THE CORIOLIS FACILITY

#### A. Experimental setup

The setup is very similar to that of Aubourg *et al.* (fig. 3)[28, 30]. The wave tank is circular with a diameter equal to 13 m and the water depth is  $h = 0.9$  m. The water surface is maintained as clean as possible by pumping the surface through a skimmer located near the wall and by flowing the pumped water through an active carbon filter. The water is then reinjected near the wall at a location diametrically opposite to the skimmer. Wave are generated by two wedge wavemakers oscillating vertically at a randomly modulated frequency (fig. 3(b)). The wavemakers have been upgraded compared to Aubourg *et al.*. They keep their wedge geometry but with round ends so that to have a less directional generation. Two conditions of forcing were studied: a center frequency  $f_0$  either equal to  $0.585 \pm 0.15$  Hz (called “weak” case, steepness  $\epsilon = 0.11$ ) or  $0.78 \pm 0.15$  Hz (called “strong” case,  $\epsilon = 0.16$ ) with the same amplitude (2 cm) of vertical oscillation of the wavemaker. The filtration is not operating during the experiments so that it does not induce a spurious current

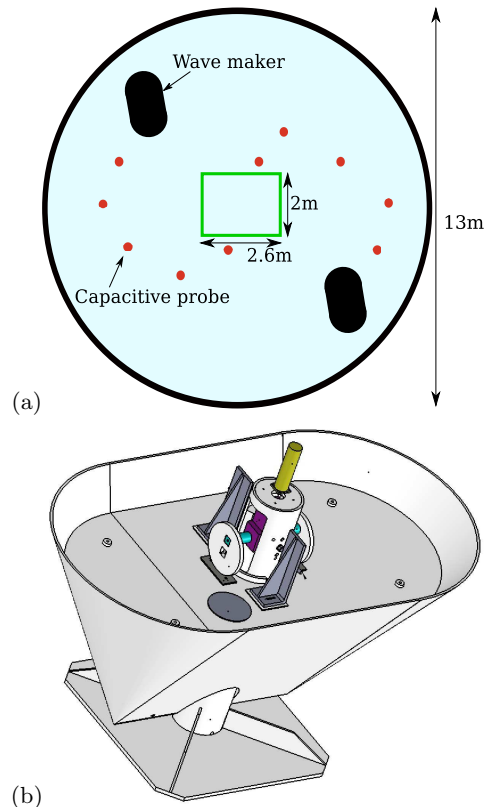


Figure 3. (a) Global schematics of the setup in the Coriolis facility (seen from above). The tank is 13m in diameter and the water is 0.9 m deep. The position of the two wavemakers is shown (black ovals) and that of the 10 capacitive probes is shown as red dots. The field of view of the stereoscopic reconstruction (see section V) is the green rectangle at the center. (b) schematics of a wavemaker. It is a wedge wavemaker (horizontal size  $2\text{m} \times 1\text{m}$  at the top) set into vertical oscillation by an eccentric cam. The off-center distance is 20 mm in the two experiments reported here. The rotation frequency is changed randomly in a given interval  $0.585 \pm 0.15$  Hz and  $0.78 \pm 0.15$  Hz for the two experiments.

in the tank. The surface elevation is recorded by using 10 capacitive wave gauges (their positions are shown in fig. 3). Surface tension is known to be very sensitive to surface contamination. Thus we measure surface tension by sampling the water surface regularly before and after the record once waves are damped. For reasons of convenience, the sample is taken at the periphery of the tank. The measured surface tension displays some variability due to sample collection and also due to a possible inhomogeneity of the surface contamination when waves are present. Indeed a weak but visible surface current is induced by the waves that can advect patches of surface films. Nevertheless our protocol allowed us to achieve a reasonable repeatability of the measurement. We estimate the confidence of the measurement close to  $\pm 5\text{mN/m}$ . After several days of filtration the measured surface tension was  $74\text{mN/m}$  which was the value mea-

sured from fresh tap water at the same temperature. For clean water the repeatability of the measurement was actually significantly better ( $\pm 2mN/m$ ).

### B. Frequency spectra

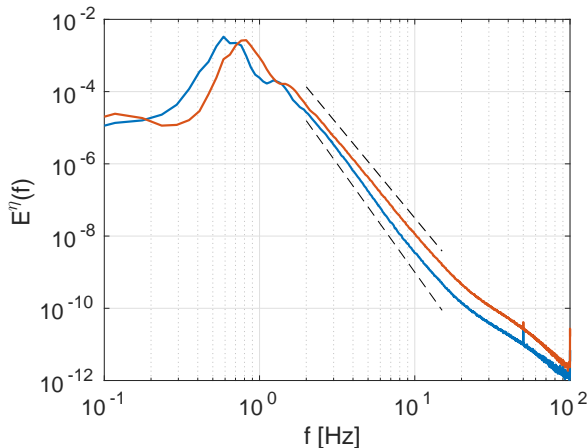


Figure 4. Spectra after several days of almost continuous filtration. Top: “strong” case, bottom: “weak” case. The spectra have been averaged over several capacitive probes. The dashed lines correspond to a decay  $1/f^{5.2}$  (top) and  $1/f^6$  (bottom). The gravity-capillarity crossover occurs at 14Hz which corresponds to the observed change of slope of the spectrum. The signal reaches the noise level at about 100 Hz.

Figure 4 shows typical spectra obtained after several days of almost continuous filtration of the surface. The weakest case displays a spectral exponent close to  $-6$  and the strongest case an exponent close to  $-5$ . Although the duration of filtration was much longer than in Aubourg *et al.* [28, 30] the spectral exponents do not exceed the upper limit of the previous data (fig. 2).

In a first experiment, after a long cleaning of the surface, we stop the filtration and record the wave elevation over several hours (each record being one hour long). The evolution of the spectra with time is shown in fig. 5. In fig. 5(b) the spectra have been compensated by  $f^6$  in order to highlight the change of the slope. The spectra exponent is seen to decay continuously with time from  $-6$  to  $-6.5$ . At the same time the surface tension decayed monotonously from 74 mN/m to 57 mN/m. The final value of the surface tension is typical of that observed for water exposed to air [16]. The spectrum of the wave elevation is thus sensitive to the surface condition and is a good indicator of surface contamination for a given forcing condition.

In order to highlight the variation of attenuation as a function of frequency, we take the initial spectrum  $E_0''(f)$  as a reference and plot the ratio of the spectra divided by this initial value (Fig. 6). The frequencies up to about 2 Hz are unaffected by the extra damping but higher

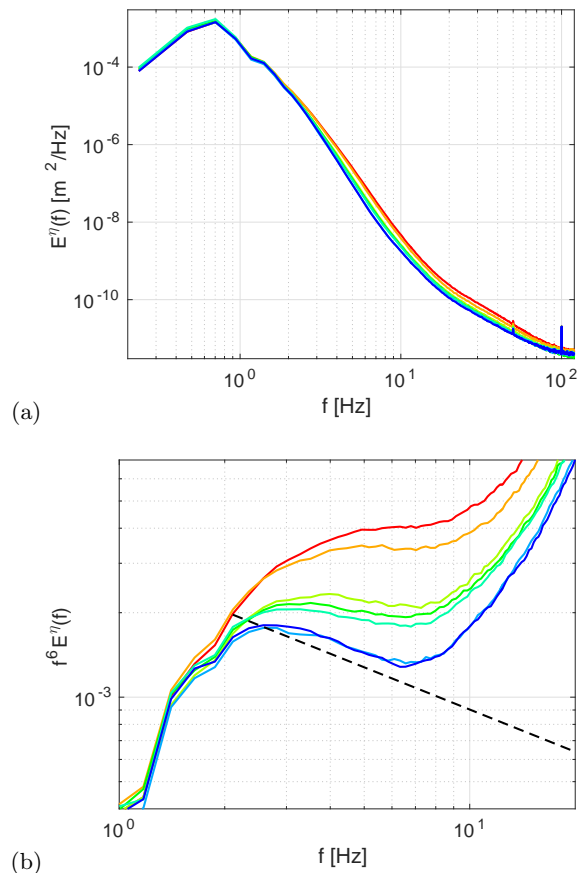


Figure 5. Evolution of the wave spectrum versus time for weakest forcing. Each curve corresponds to an average over the 10 probes and a time average over one hour of continuous recording (7 successive records from red to blue). (a) Wave elevation spectrum  $E''(f)$ . (b) compensated spectrum  $f^6 E''(f)$  in the low frequency range. The dashed line is  $\propto f^{-0.5}$ .

frequencies are strongly diminished. A maximum damping efficiency is observed at about 6.5 Hz that can reach 60% for the latest spectra. The black curve is the variation of  $1/y(f)$  for oleic acid with parameters taken from Alpers *et al.* [4] that happens to have a maximum at the same frequency. This is mostly a coincidence as no oleic acid has been added to the water surface. The physico-chemical nature of the contamination is unknown as the contamination comes from dust falling on the surface and solvents from paint and plastic parts immersed in the water. Nevertheless the shape of  $y(f)$  for oleic acid is quite typical and this comparison supports the fact that the increasing damping of our spectra comes from surface contamination. The shape of the normalized spectra is actually qualitatively similar to that of  $1/y(f)$  for oleic acid. Nevertheless the impact of surface damping is more complex than just filtering as it affects the nonlinear cascade that provides energy to waves. Damping at a given frequency must impact the waves at higher frequencies as the flux that feeds them must be reduced. Thus, in place



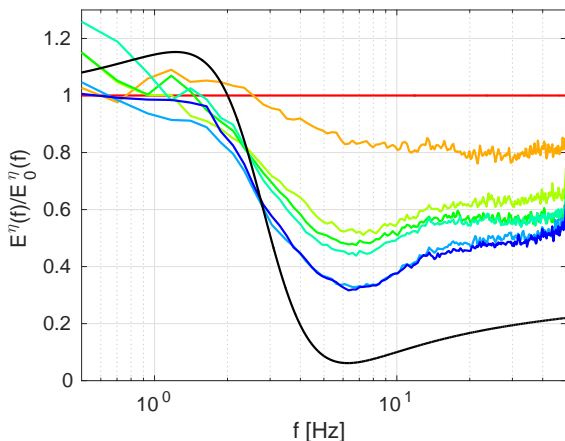


Figure 6. Temporal evolution of the wave spectrum for weak forcing relative to the initial spectrum (same colors as Fig. 5). This representation highlights the deficit of energy in the spectrum as the surface becomes contaminated. The solid black curve represents the extra dissipation factor  $1/y(f)$  for oleic acid (taken from Alpers et al. [4]). For this dataset the forcing occurs at a central frequency of 0.585 Hz.

of having a constant energy flux, the flux is progressively reduced as the frequency increases.

Figure 7 shows a collection of spectra for either weak or strong forcing in a stationary configuration. Each curve corresponds to a one hour record of the surface elevation. The typical experimental sequence is 1 hour-long filtration, then two successive 1 hour-long records then filtration again. After a day of recording the filtration is then operated overnight and the sequence restarts. We see that a quite strong variability of the spectra of the weak case is seen in spite of our efforts to cleanup the surface. By contrast, the variability of the spectra is much reduced in the strong case (although the cleaning sequence is the same) which is much less sensitive to the surface condition. This is reminiscent of the dispersion of the exponents in fig. 2 which is much more pronounced for low steepness than for the strongest ones.

#### IV. DISCUSSION OF TIME SCALES

The core of the Weak Turbulence Theory is the hypothesis of scale separation between the linear period of the wave  $T$  and the nonlinear time scale  $T_{NL}$  over which the non linearity operates. In the theory the dissipation is supposed to occur only at vanishing scales so that the dynamics is conservative over most scales leading for gravity waves to the theoretical prediction:

$$E(\omega) = C \frac{gP^{1/3}}{\omega^4} \quad (9)$$

where  $C$  is a constant,  $g$  is the gravity acceleration and  $P$  is the energy flux [6].

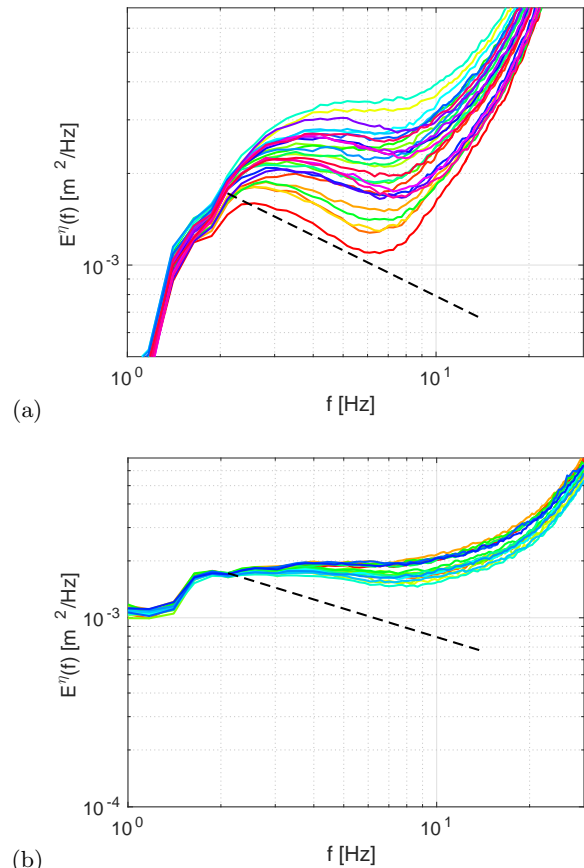


Figure 7. Variability of spectra measured in similar conditions over time. (a) & (b) weak and strong forcing respectively. In (a) we show 28 spectra (averaged over the 10 probes) corresponding each to a 1 hour long record. In (b) we show 19 similar spectra. The spectra have been compensated by  $f^6$  and  $f^5$  respectively. The dashed line shows a  $f^{-1/2}$  decay. The variability is less at stronger forcing.

In actual physical systems, viscosity operates at any scale but is most efficient at the smallest scales. One may expect the predictions of the Weak Turbulence theory to be valid if an additional scale separation exists between  $T_{NL}$  and the dissipative time scale  $T_d$  so that

$$T \ll T_{NL} \ll T_d \quad (10)$$

at least in an inertial range of scales.

If one assumes that the dissipative time is much larger than the nonlinear time scale, the energy flux is progressively but only slightly depleted as the cascade proceeds to small scales. In that case the overall structure of the KZ spectrum should be preserved so that the energy spectrum may keep the form:

$$E(\omega) = C \frac{gP(\omega)^{1/3}}{\omega^4} \quad (11)$$

where the energy flux  $P(\omega)$  is slowly decaying with  $\omega$ . If the nonlinear coupling is very local in scale then the

kinetic equation can be written in frequency space (see Ref. [6] for instance) and for frequencies higher than that of the forcing as

$$\frac{\partial E(\omega)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \omega} - 2\gamma(\omega)E(\omega), \quad (12)$$

with the inclusion of dissipation.  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  is the kinematic viscosity and  $\gamma(\omega) = 2\nu k^2 = 2\nu\omega^4/g^2$  is the dissipation rate. With the above shape of the energy spectrum, this equation can be rewritten in the stationary case as

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = -4\nu C P^{1/3}/g \quad (13)$$

The flux is thus obviously decaying with  $\omega$ . This equation can be integrated as

$$P(\omega) = \left( P(\omega_f)^{2/3} - \frac{8\nu C}{3g}(\omega - \omega_f) \right)^{3/2} \quad (14)$$

with  $\omega_f$  being the frequency of the energy injection (supposed to be narrow band around  $\omega_f$ ). Using Eqs. (11) and (14), the spectrum is then

$$E(\omega) = C \frac{g}{\omega^4} \left( P(\omega_f)^{2/3} - \frac{8\nu C}{3g}(\omega - \omega_f) \right)^{1/2}. \quad (15)$$

The spectrum is thus expected to be slightly steeper than the KZ prediction in the limit  $T_d \gg T_{NL}$ . Unfortunately we cannot test directly this prediction as  $P$  is unknown in our experiments as it is extremely difficult to measure it.

Figure 8(a) shows the dissipative length scale expressed in terms of the wavelength i.e. the ratio  $k/\Delta$ . In the frequency interval [1, 10] Hz, for a perfectly clean surface, the ratio decays from  $10^5$  wavelengths down to about 400. In terms of time scales, the imaginary part of the angular frequency is  $2\nu k^2$  ( $\Delta_0$  is actually computed by multiplying this value by the group velocity [4]). Figure 8(b) shows the ratio  $T_d/T = \omega/2\nu k^2$ . The variation of the time scale ratio takes naturally similar values to that of length scales. When the surface contamination is taken into account, the scale ratio is unchanged up to 2 Hz but may decay by more than one order of magnitude at the peak of  $y(f)$  (the actual value depends on the pollutant) and falls below 100.

In the framework of the WTT, due to the 4-wave interactions of gravity waves, the ratio  $T_{NL}/T$  is expected to scale as  $\epsilon^{-4}$  i.e. should be of order 10000 for  $\epsilon = 0.1$  [33]. This can be achieved for frequencies below 2 Hz but not for higher frequencies even for a perfectly clean surface. For instance at 5 Hz ( $\lambda \approx 7$  cm), the waves can propagate only over 1000 periods (with clear water) before being damped and over less than 100 periods for contaminated water. Thus one expects a very strong impact of dissipation over most frequencies even for very clean water and thus even the corrected spectrum (15) should not be valid.

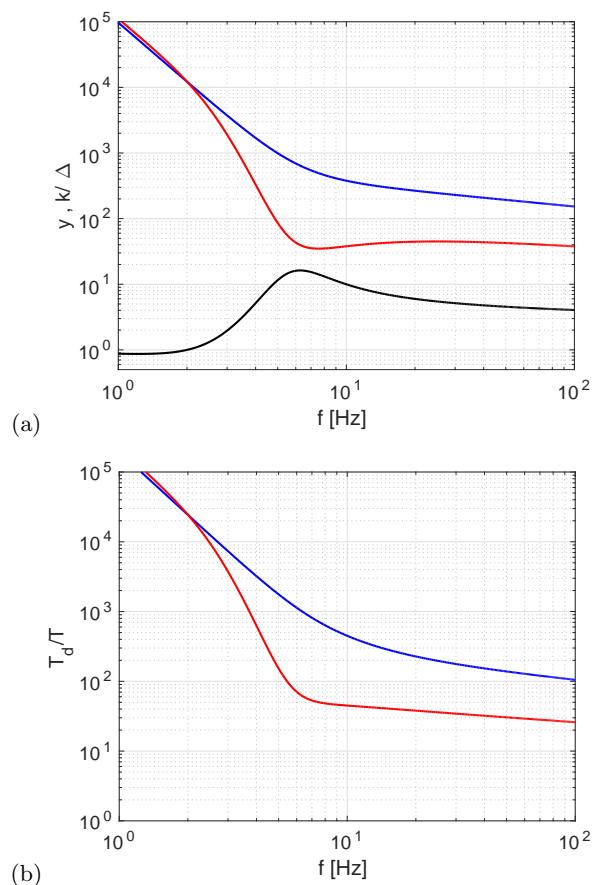


Figure 8. (a) Ratio  $\Delta/k$  which provides the dissipation length scale in terms of wavelengths. Blue: case of perfectly clean surface. Red: case of contaminated surface with oleic acid. Black:  $y(f)$  for oleic acid (b) Timescale ratio of the dissipation scale  $T_d$  over the period of the wave  $T$ . Same color code.

The ratio  $T/T_{NL}$  actually depends on the frequency. In the gravity range and in the kinetic regime, if the wave spectrum follows the Kolmogorov-Zakharov spectrum, then following Newell *et al.* ([33], p. 544) one should have:

$$\frac{T}{T_{NL}} \approx \frac{1}{\omega n_k} \frac{\partial n_k}{\partial t} = C P^{2/3} k/g \quad (16)$$

where  $n_k$  is the wave action spectrum.  $\frac{\partial n_k}{\partial t}$  is estimated with the kinetic equation (see [33] for details). The ratio  $\frac{T}{T_d}$  should be in the gravity range

$$\frac{T}{T_d} = \frac{4\pi\eta}{\rho g^{1/2}} k^{3/2} \quad (17)$$

so that the ratio  $T_{NL}/T_d$  is

$$\frac{T_{NL}}{T_d} = \frac{4\pi\eta g^{1/2}}{C\rho P^{2/3}} k^{1/2} \quad (18)$$

This ratio must remain much smaller than one but is increasing a  $k^{1/2}$  so that at a given value of the nonlin-



earity the second inequality maybe broken at a critical wavenumber or frequency

$$k_c = \left( \frac{C\rho P^{2/3}}{4\pi\eta g^{1/2}} \right)^2 \quad (19)$$

$$\omega_c = \frac{C\rho g^{1/2} P^{2/3}}{4\pi\eta} . \quad (20)$$

$P^{2/3}$  is actually proportional to  $\epsilon^4$  so the critical frequency is decaying very fast when  $\epsilon$  is reduced ( $k_c \propto \epsilon^8$ ,  $\omega_c \propto \epsilon^4$ ) and can be very low for weak waves. Even for our cleanest conditions the spectral exponent is strongly reduced as compared to the KZ prediction. Furthermore it should be very sensitive to a slight contamination of the water surface that further reduces the dissipative time scale. These observations suggest that the frequencies of the waves in our experiment are beyond the critical frequency. The above scaling suggests that one should recover the KZ spectrum when increasing the nonlinearity. This appears consistent with the observation of spectral exponent becoming closer to the KZ prediction at larger steepness (Fig. 2). The issue is then that the steepness may become so large that the hypothesis of small nonlinearity is broken and the waves are whitecapping. In this case one has  $T \sim T_{NL}$  and the theory is not established in this limit.

At frequencies above the gravity-capillarity crossover the issue of time scale separation will be present as well. The pure capillary cascade is then a 3-wave process so that, in the kinetic regime and for the KZ spectrum,

$$\frac{T}{T_{NL}} \approx \frac{1}{\omega n_k} \frac{\partial n_k}{\partial t} \propto P^{1/2} k^{-3/4} \quad (21)$$

and

$$\frac{T_{NL}}{T_d} \propto k^{5/4} P^{-1/2} \quad (22)$$

Although the ratio  $T/T_{NL}$  is getting smaller with  $k$  (the cascade is getting less nonlinear as it proceeds), the ratio  $T_{NL}/T_d$  is increasing faster with  $k$ . The critical wavenumber is thus

$$k_c \propto P^{2/5} \quad (23)$$

$P^{1/2}$  is scaling as  $\epsilon^2$  [33] so that  $k_c \propto \epsilon^{8/5}$ . Thus, as for the case of gravity waves,  $k_c$  is also decaying (although not as fast) when the nonlinearity is decreased.

When the nonlinear time scale estimated from the kinetic equation (equations (16) & (21)) becomes comparable to  $T_d$ , the hypotheses underlying the computation of the collision term are not valid. Indeed, the obtention of the collision term involves taking a limit of large times that cannot be operated anymore if there is no scale separation. The frequency resonance condition results from the fact that only resonant waves can exchange a significant amount of energy, by a cumulative process, as  $\epsilon$  goes to zero. Here we see that at weak enough a nonlinearity, the energy exchange can operate at most over a time

$T_d$  which strongly reduces the efficiency of the energy transfers and thus should steepen the spectra. A distinct statistical theory must be developed. Based on the still existing scale separation  $T/T_d \ll 1$  a multiscale development may be relevant. For the kinetic theory to be valid one must have  $T \ll T_{NL} \ll T_d$  which is possible in laboratories only with very large flumes and most likely over a very narrow range of frequencies up to a few Hz (even with a clean water surface). Note that another limit exists which is the size of the wave tank which should be much larger than the wavelength which is not the case for meter wavelengths. We take advantage of reflexions on the walls to increase the effective propagation length at the expense of the presence of discrete modes (see [20] and references therein for a discussion of finite size effects in another system supporting wave turbulence).

Another observation in fig. 6 is that the attenuation is not as strong for frequencies higher than 10 Hz i.e. for capillary waves. If the cascade would be strongly local in wavenumber space, one would expect that the attenuation is a decaying function of the scale which is not what is observed. A non local nonlinear coupling mechanism has been reported by Aubourg & Mordant [34] at the gravity-capillary crossover. This crossover occurs at  $f = 13.5$  Hz ( $\lambda = 1.7$  cm). This coupling has been observed to be quite strong because it involves only 3 waves. It is also nonlocal and couples short gravity waves (1 – 2 Hz) and capillary waves. The increase of the observed attenuation at frequencies larger than 7 Hz is most likely due to this mechanism that pumps energy directly from gravity waves. Note that being a 3-wave process, the nonlinear time of this mechanism is expected to be much shorter than that of the 4-wave process (scaling as  $\epsilon^2$  rather than  $\epsilon^4$ ). Thus the 3-wave crossover coupling is likely to remain efficient even for contaminated water. Actually the next section reports space and time resolved measurements that show a very different explanation.

It must be noted also that another feature is operating in laboratory experiments which is the effect of the finite size of the flume. As mentioned in [8, 26], in finite basins, the linear modes are discrete. In order for a truly kinetic regime to develop (i.e. with continuous frequencies and wavenumbers) the nonlinear spectral widening must compensate for the mode separation. Thus the nonlinearity must be large enough, typically  $\epsilon \geq 1/k_p L$  where  $L$  is the size of the flume and  $k_p$  is the value of the wavenumber at the peak of the spectrum. In our case the values are similar to that of refs. [8, 26] i.e.  $\epsilon \geq 0.4$ . We obviously do not reach such high values of the nonlinearity and this explains most likely that the spectral exponent does not reach the kinetic prediction as predicted in [35] even in the cleanest conditions.

## V. $k$ - $\omega$ SPECTRUM

In order to check in more details the structure of the wave field, we use a stereoscopic technique to obtain a

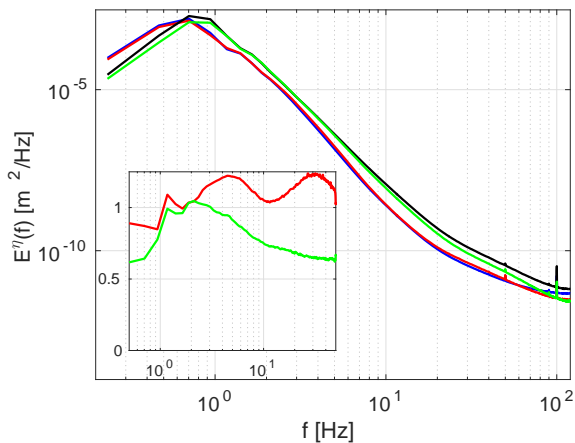


Figure 9. Variation of spectra when floating particles are present or not. Blue/Red weak case, without/with particles resp. Black/Green strong forcing without/with particles resp. Inset: the spectra with particles have been normalized by the spectra without particles.

fully resolved (in space and time) measurement of the water surface (see [30, 36] for information on the technique). We seed the surface of water with small ( $700 \mu\text{m}$ ) buoyant particles to make the surface visible. The first question is the impact of the particles on the wave statistics. Strickland *et al.* [17] suggested that a mechanism similar to Marangoni damping could be operating when particles are floating at the surface. Figure 9 displays the comparison between surface elevation spectra obtained with clean water and with floating particles (at a surface concentration about  $10 \text{ particles/cm}^2$ ). At the weakest forcing the spectrum seems actually slightly amplified. By contrast it is very weakly damped at the strongest forcing. This damping is weaker than that due to surface contamination and occurs at higher frequencies. Thus the mechanism of surface alteration due to floating particles seems quite distinct to that of chemical surface contamination. The weakness of the effect of adding the particles makes us confident that the particles do not alter the wave dynamics for scales much larger than the particle size.

The space-time spectrum  $E^\eta(k, \omega)$  is shown in Fig. 10(a). The spectrum is obtained by performing a Fourier transform in both space and time (over time window of duration 125 s) providing  $\eta(\mathbf{k}, \omega)$ . The squared modulus of the Fourier transform is averaged over successive time windows (Welch method) and integrated over directions of the wavevector  $\mathbf{k}$  to give  $E^\eta(k, \omega)$ . The main energy component is a continuous line of energy on the dispersion relation that extends up to 4 Hz as expected for weak turbulence. Secondary energy lines are also visible on each side of the dispersion relation (highlighted by dashed lines) that correspond to so-called bound waves, which are not freely propagating waves following the quasilinear dispersion relation. They result from a triadic interaction between freely propagat-

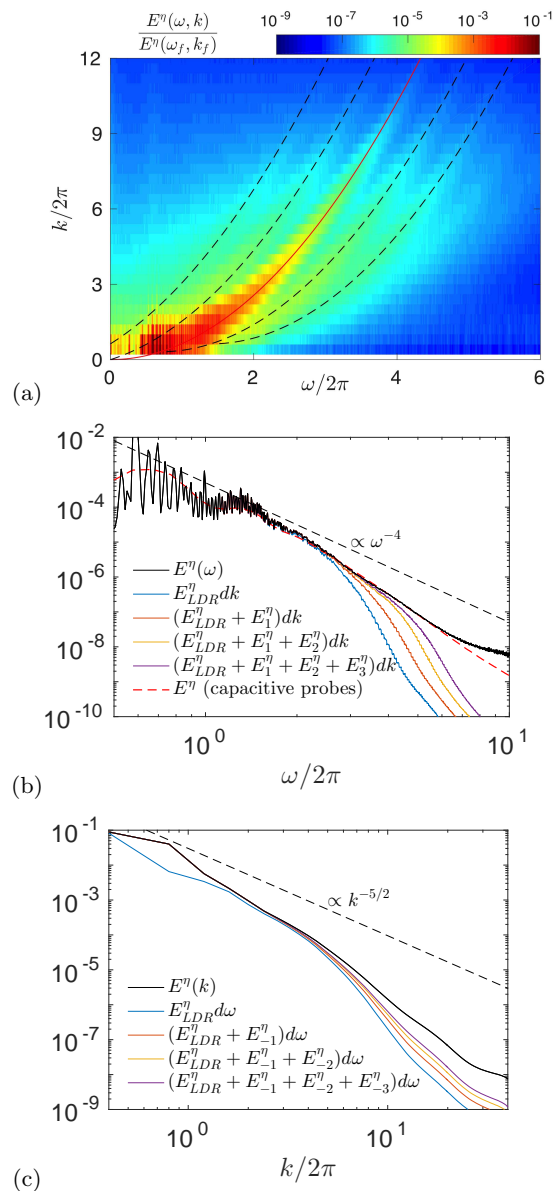


Figure 10. (a)  $k - \omega$  spectrum  $E^\eta(k, \omega)$  for  $\epsilon = 0.11$  (“weak” case). The spectrum has been normalized by its maximum value and is displayed in  $\log_{10}$  scale. The red line is the linear dispersion relation (6). Dotted lines correspond to bound waves made from successive harmonics of the forcing peak and waves on the dispersion relation. (b) frequency spectrum constructed by adding successively the spectral contributions  $E_n^\eta$  of the bound waves following  $\omega^{(\pm n)} = \omega_{LDR}(k \mp nk_0) \pm n\omega_0$  with  $n > 0$  (see text).  $E^\eta(\omega)$  is the full spectrum,  $E_{LDR}^\eta(\omega)$  is the contribution on the linear dispersion relation and  $E_n^\eta(\omega)$  is the contribution of the  $n$ -th bound waves as described in the text. The red dashed line is the spectrum obtained from the local probes. The divergence of the black and dashed red curves at about 7 Hz on the black line is due to the noise level of the stereoscopic measurement. (c) similar construction for the wavenumber spectrum  $E^\eta(k)$ .

ing waves. In our case, the observed lines can be ob-

tained by assuming that the forcing peak at  $(\mathbf{k}_f, \omega_f)$  is interacting with all free waves on the dispersion relation propagating in the same direction. The equation of the first line on the right of the dispersion relation in Fig. 10(a) is thus:  $\omega^{(1)} = \omega_{LDR}(k - k_0) + \omega_0$  where  $\omega(k)$  is the dispersion relation (6). The line on the left follows  $\omega^{(-1)} = \omega_{LDR}(k + k_0) - \omega_0$ . The lines further from the dispersion relation can be obtained assuming a similar interaction with successive harmonics of the forcing peak:  $\omega^{(\pm n)} = \omega_{LDR}(k \mp nk_0) \pm n\omega_0$ . It is worth noting that at frequencies higher than 4 Hz, almost all the energy lies in the bound waves. Fig. 10(b) shows the construction of the full frequency spectrum when adding progressively the energy lying on the bound waves (for  $n > 0$ ). It confirms that the contribution to the spectrum at frequencies higher than 4 Hz comes from those bound waves and not from an extension of the weakly non linear cascade to higher frequencies. The wave cascade seems to stop at 4 Hz in agreement with the above discussion on time scales. Fig. 10(c) shows a similar construction for the wavenumber spectrum when adding the bound waves (with  $n < 0$ ). It can be seen that the  $k$ -spectrum is much less sensitive to the bound waves than

the frequency spectrum. This is due to the fact that the extension in  $k$  of the bound waves is about the same than the main energy line lying on the linear dispersion relation and the energy of the bound waves remains smaller than that of the dispersion relation.

In summary, the development of the weak energy cascade along the dispersion relation is strongly restricted by the viscous cutoff and even more restricted if the surface is contaminated. The extension of the frequency spectrum at higher frequencies observed for stronger forcing intensities is actually due to development of bound waves. In order to observe a weak turbulent cascade of gravity waves, one has to use much wider wave tanks in very large scale facilities in which a forcing could be achieved at lower frequency.

## ACKNOWLEDGMENTS

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 647018-WATU).

- 
- [1] V. Wismann, M. Gade, W. Alpers, and H. Huhnerfuss, "Radar signatures of marine mineral oil spills measured by an airborne multi-frequency radar," *International Journal of Remote Sensing* **19**, 3607–3623 (1998).
  - [2] W G Van Dorn, "Boundary dissipation of oscillatory waves," *Journal Of Fluid Mechanics* **24**, 769 (1966).
  - [3] R. Cini and P.P. Lombardini, "Experimental evidence of a maximum in the frequency domain of the ratio of ripple attenuation in monolayered water to that in pure water," *Journal of Colloid and Interface Science*, 125–131 (1981).
  - [4] W. Alpers and H. Huhnerfuss, "The Damping of Ocean Waves by Surface Films: A New Look at an Old Problem," *Journal of Geophysical Research* **94**, 6251–6265 (1989).
  - [5] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
  - [6] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 2011).
  - [7] A. C. Newell and B. Rumpf, "Wave turbulence," *Ann. Rev. Fluid Mech.* **43** (2011).
  - [8] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland, and P. Denisenko, "Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains," *J. Fluid Mech.* **642**, 395 (2009).
  - [9] L. Deike, B. Miquel, P. Gutierrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy, "Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence," *J. Fluid Mech.* **781**, 196–225 (2015).
  - [10] B. Miquel, A. Alexakis, and N. Mordant, "Role of dissipation in flexural wave turbulence: from experimental spectrum to kolmogorov-zakharov spectrum," *Phys. Rev. E* **89**, 062925 (2014).
  - [11] T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, and C. Touzé, "Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping," *EPL* **102**, 30002 (2013).
  - [12] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, "Decay of capillary wave turbulence," *Phys. Rev. E* **85**, 066311 (2012).
  - [13] L. Deike, M. Berhanu, and E. Falcon, "Energy flux measurement from the dissipated energy in capillary wave turbulence," *Phys. Rev. E* **89**, 023003 (2014).
  - [14] JW Miles, "Surface-wave damping in closed basins," *Proc. Roy. Soc. A* **297**, 459 (1967).
  - [15] D M Henderson and H Segur, "The role of dissipation in the evolution of ocean swell," *Journal Of Geophysical Research-Oceans* **118**, 5074–5091 (2013).
  - [16] A. Przadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans, "Fourier transform profilometry for water waves: how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface?" *Exp. Fluids* **52**, 519–527 (2011).
  - [17] M. Strickland, S.L. and Shearer and K.E. Daniels, "Spatiotemporal measurement of surfactant distribution on gravity-capillary waves," *Journal Of Fluid Mechanics* **777**, 523–543 (2015).
  - [18] D M Henderson and John W Miles, "Single-mode Faraday waves in small cylinders," *Journal Of Fluid Mechanics* **213**, 95 (1990).
  - [19] K. Hasselmann, "On the non-linear energy transfer in gravity-wave spectrum. part 1. general theory," *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500 (1962).
  - [20] B. Miquel and N. Mordant, "Non linear dynamics of flexural wave turbulence," *Phys. Rev. E* **84**, 066607 (2011).
  - [21] F. Leckler, F. Ardhuin, C. Peureux, A. Benetazzo, F. Bergamasco, and V. Dulov, "Analysis and Interpretation of Frequency-Wavenumber Spectra of Young Wind Waves," *J. Phys. Ocean.* **45**, 2484–2496 (2015).
  - [22] P.A. Hwang, D.W. Wang, E.J. Walsh, W.B. Krabill, and R.N. Swift, "Airborne Measurements of the Wavenumber Spectra of Ocean Surface Waves. Part I:

- Spectral Slope and Dimensionless Spectral Coefficient,” *J. Phys. Ocean.* **30**, 2753–2767 (2000).
- [23] L. Romero and W K Melville, “Airborne Observations of Fetch-Limited Waves in the Gulf of Tehuantepec,” *Journal Of Physical Oceanography* **40**, 441–465 (2010).
- [24] W. K. Melville, L. Lenain, D. R. Cayan, M. Kahru, J. P. Kleissl, P. F. Linden, and N. M. Statom, “The modular aerial sensing system. journal of atmospheric and oceanic technology,” *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* **33**, 1169–1184 (2016).
- [25] L. Lenain and W. K. Melville, “Measurements of the directional spectrum across the equilibrium saturation ranges of wind-generated surface waves.” *Journal of Physical Oceanography* **47**, 2123– 2138 (2017).
- [26] P. Denissenko, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, “Gravity wave turbulence in a laboratory flume,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 014501 (2007).
- [27] S V Nazarenko and S Lukaschuk, “Wave Turbulence on Water Surface,” *Annual Review of Condensed Matter Physics* **7**, 61–88 (2016).
- [28] Q. Aubourg, Campagne A., C. Peureux, F. Ardhuin, J. Sommeria, S. Viboud, and N. Mordant, “3-wave and 4-wave interactions in gravity wave turbulence,” *Phys. Rev. Fluids* **2**, 114802 (2017).
- [29] M. Onorato, L. Cavaleri, S. Fouques, O. Gramstad, P.A.E.M. Janssen, J. Monbaliu, A. R. Osborne, C. Pakozdi, M. Serio, C. T. Stansberg, a. Tofoli, and K. Trulsen, “Statistical properties of mechanically generated surface gravity waves: a laboratory experiment in a three-dimensional wave basin,” *J. Fluid Mech.* **627**, 235 (2009).
- [30] Q. Aubourg, *Etude expérimentale de la turbulence d’ondes à la surface d’un fluide. La théorie de la Turbulence Faible à l’épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité*, Ph.D. thesis, Université Grenoble Alpes (2016).
- [31] O.M. Phillips, “The equilibrium range in the spectrum of wind generated waves,” *Journal Of Fluid Mechanics* **4**, 426–434 (1958).
- [32] E.A. Kuznetsov, “Turbulence spectra generated by singularities,” *JETP Lett.* **80**, 83–89 (2004).
- [33] A.C. Newell, S.V. Nazarenko, and L. Biven, “Wave turbulence and intermittency,” *Physica D-Nonlinear Phenomena* **152**, 520–550 (2001).
- [34] Quentin Aubourg and N. Mordant, “Nonlocal resonances in weak turbulence of gravity-capillary waves,” *Phys. Rev. Lett.* **114**, 1–5 (2015).
- [35] Sergey Nazarenko, “Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence,” *J. Stat. Mech.: Theory and Experiment* **02002**, 1–8 (2013), 0510054 [nlin].
- [36] Q. Aubourg, J. Sommeria, S. Viboud, and N. Mordant, “Combined stereoscopic wave mapping and particle image velocimetry,” submitted to *Exp. Fluids* (2017).

# Fourth order correlation in a surface gravity wave turbulence at finite non linearity.

Antoine Campagne, Roumaïssa Hassaini, Ivan Redor, Thomas  
Valran, Samuel Viboud, Joël Sommeria, Nicolas Mordant<sup>1, \*</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels,  
Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, F-38000 Grenoble, France*

We discuss wave-wave interactions in a gravity wave turbulence at finite non-linearity. A statistically stationary gravity wave turbulence of averaged steepness of 10% is maintained by 2 wedge wave makers in the Coriolis platform. Wave-wave interactions are analyzed through third and fourth order correlation of the temporal Fourier transform of wave elevation. We show that correlations between bound and free waves dominates the third and fourth order correlation. This kind of dominant interactions are actually expected even for very small non linearity but do not contribute to the net energy transfers. We then propose a spatiotemporally fourth order correlation which is able to separate the contribution of bound and free waves to the total fourth order correlation. This new tool is then able to dig up, among other contributions, the four free wave interactions which are at the core of the weak wave turbulence theory.

---

\* antoine.campagne@univ-grenoble-alpes.fr

## I. INTRODUCTION

Hasselmann made the first developments of the Weak Turbulence Theory (WTT) in the 1960's to describe the statistical properties of the deformation of the sea surface due to surface gravity waves [8]. The main hypothesis underlying the WTT is that of weak nonlinearity. The nonlinearity enables energy transfers among waves. Its weakness implies that only resonant waves can have a long term cumulative effect to transfer significant amounts of energy. These resonances imply  $N$ -tuples of waves with  $N \geq 3$  where 3 is the lowest order for a quadratic non linearity. For  $N = 3$ , resonant waves of frequency  $\omega$  and wavevector  $\mathbf{k}$  should follow:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad (2)$$

where  $\mathbf{k}_i$  and  $\omega_i$  are related by the linear dispersion relation (LDR)  $|\mathbf{k}_i| = k_{LDR}(\omega_i)$ . Using the additional hypothesis of very large systems, it is then possible to derive an equation for the slow evolution of the wave spectrum [27] for dispersive waves. The nonlinear transfer terms is the core of operational models of prediction of the evolution of the sea state such as Wavewatch III [23]. Weak turbulence concerns potentially any kind of dispersive waves and was actually applied to many systems in addition to surface waves: inertial waves in rotating fluids [7], Kelvin waves in quantum vortices [14], vibrating plates [6], Bose Einstein condensates [18], magnetized plasmas [26], optics in nonlinear media [2],...

Four-wave interaction is the elemental process of energy transfers in the framework of Weak Turbulence Theory (WTT) [17, 27] applied to surface gravity wave turbulence. The weak nonlinearity hypothesis implies that the linear time  $T^L = 2\pi/\omega$  is much smaller than the typical non-linear time  $T^{NL}$  related to the non-linear wave interactions. Since the non-linearity is quadratic, resonant interactions should involve 3-wave interactions at the lowest order which impose the following resonant conditions (1) and (2). For surface gravity waves, the LDR is

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (3)$$

where  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $h$  is the water depth (here  $h = 0.9$  m) and  $g$  is the acceleration of gravity. For  $kh < 1$  (i.e. wavelength shorter than 5 m) the equation reduces to

$$\omega^2 = gk. \quad (4)$$

However, this set of resonance equations (1) (2) (4) do not have solutions due to the negative curvature of the linear dispersion relation  $\omega_{LDR}(k) = \sqrt{gk}$ . Hence higher order terms i.e. four-wave interactions have to be considered with the following resonant conditions:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \quad (5)$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4. \quad (6)$$

This set of equations can be reduced to

$$k_{LDR}(-\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)\mathbf{e}_1 + k_{LDR}(\omega_2)\mathbf{e}_2 = k_{LDR}(\omega_3)\mathbf{e}_3 + k_{LDR}(\omega_4)\mathbf{e}_4. \quad (7)$$

where  $\mathbf{e}_i = \cos \theta_i \mathbf{e}_x + \sin \theta_i \mathbf{e}_y$ .

In the situation of an out of equilibrium and stationary forced system, solutions of the wave spectrum can be analytically computed. It leads to the so-called Kolmogorov-Zakharov (KZ) power spectrum. For surface gravity waves, the prediction for the 1D spatial spectrum of the surface elevation is given by  $E^\eta(k) \propto g^{-1/2} P^{1/3} k^{-5/2}$  where  $g$  is the acceleration of gravity and  $P$  the averaged injected power. The use of the linear dispersion relation of gravity waves makes straightforward the deduction of its temporal spectrum  $E^\eta(\omega) \propto g P^{1/3} \omega^{-4}$ .

In situ measurement of ocean surface waves [10, 12, 21] have shown a good agreement with the predicted  $\omega^{-4}$  decay of the spectrum. Such observations suffers however from weakly controlled parameters. The forcing, which is mainly due to the wind, is most often strongly directional and intermittent. In addition, the range of scales of injection of energy is not well known. A fine characterization or validation of the WTT with those datasets remains very challenging since it requires large datasets of well resolved measurements in a quasi-stationary state. Experiment provides then an interesting way to thoroughly investigate surface gravity waves.

Experimental studies of weak gravity wave turbulence [1, 3–5, 9, 15] report a strong variability of surface elevation spectrum which stand steeper than the theoretical prediction. For technical reasons, experimental facilities have sizes



of the order of a couple times 10 meters and the forced wavelengths are of the order of a few meters. At these scales, the ratio between the dissipative time scale  $T^d \propto \nu^{-1}k^{-2} = \nu^{-1}g^2\omega^{-4}$  and the period of the waves  $T^L$  is not very large and decreases dramatically as  $\omega^{-3}$ . The development of an inertial range is then hardly achievable at such scales (REFS). We then expect a non negligible dissipation which steepens the spectrum. An other justification for the steep observed spectrum is the effect finite size. The resulting discretization in the space of wavevectors makes the number of solutions of resonant conditions (5)-(6) considerably lower than in the infinite case. The energy flux towards smaller scales is hence strongly reduced which leads to a steepening of the spectrum. On the other hand, it has been shown that the spectral exponent increases with increasing non-linearity. Moreover, the theoretical prediction for the spectral exponent is observed at a finite and quite strong non-linearity (steepness greater than 0.3). However, it is a violation of the major hypothesis of weak non-linearity of the WTT. To this day an agreement between the WTT and experimental observations, both in terms of spectrum and hypothesis of the theory, has not been achieved, probably due to the limited size of the existing experimental resources [5, 13, 16].

Is the framework of WTT still relevant to describe gravity wave turbulence at finite non-linearity? Aubourg *et al.* [1] addressed the question of the relevance of four-wave interactions as the elemental mechanism of transfer in gravity wave turbulence. The authors investigated experimentally four-wave interactions in a surface gravity wave turbulence with fourth order correlations of the vertical velocity. At their degree of convergence, no clear trace of a significant correlation appears. The authors proposed the dissipation as the cause of the absence of four-wave correlation. The dissipation time scale  $T^d$  is of the same order of the non linear time  $T^{NL}$  which should reduce the efficiency of the energy transfers. Nonetheless, the lack of convergence do not permit to draw any definite conclusion.

In the present article, we probe four-wave interactions with a large dataset from a surface gravity wave turbulence experiment. We first describe the experimental setup and the energy content of the generated flow. After a brief recall of the WTT formalism, we discuss third order correlation of surface elevation and its link with bound waves. We then turn to the discussion of the time fourth order correlation of surface elevation. The multiplicity of contributions to this correlation makes difficult to draw robust conclusions. We finally remove the degeneracy of this tool with an original filtered time fourth order correlation.

## II. EXPERIMENTAL SETUP

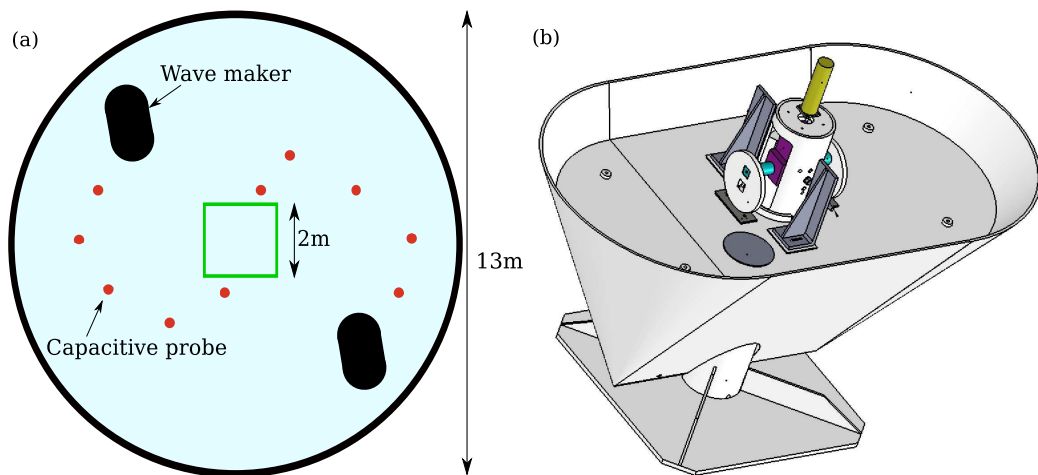


Figure 1. (a) Global schematics of the setup in the Coriolis facility. A 13m diameter circular tank is filled with 0.9 m of water. Surface gravity waves are generated by two wedge wavemakers. Surface elevation is recorded by 10 capacitive wave gauges (red points) and by a stereoscopic reconstruction on a  $2 \times 2 \text{ m}^2$  area at the center of the tank. (b) Perspective view of a wedge wavemaker. It is oscillating vertically at a randomly modulated frequency  $\omega_f/2\pi = 0.59 \pm 0.15 \text{ Hz}$  with an amplitude of 2 cm.

The setup is the same as in [3] and similar to the one described in [1] (fig. 1). The wave tank is circular with a diameter equal to 13 m and the water depth is  $h = 0.9 \text{ m}$ . The water surface is maintained as clean as possible by pumping the surface through a skimmer located near the wall and by flowing the pumped water through an active carbon filter. The water is then reinjected near the wall at a location diametrically opposite to the skimmer. Waves are generated by two wedge wavemakers of  $2 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$  oscillating vertically with an amplitude of 2 cm at a randomly modulated frequency  $\omega_f/2\pi = 0.59 \pm 0.15 \text{ Hz}$  (fig. 1(b)). Surface tension is known to be very sensitive to surface

contamination. Thus we measure surface tension by sampling the water regularly during the experiment. After several days of filtration the measured surface tension was  $74 \pm 5$  mN/m which was the value measured from fresh tap water at the same temperature.

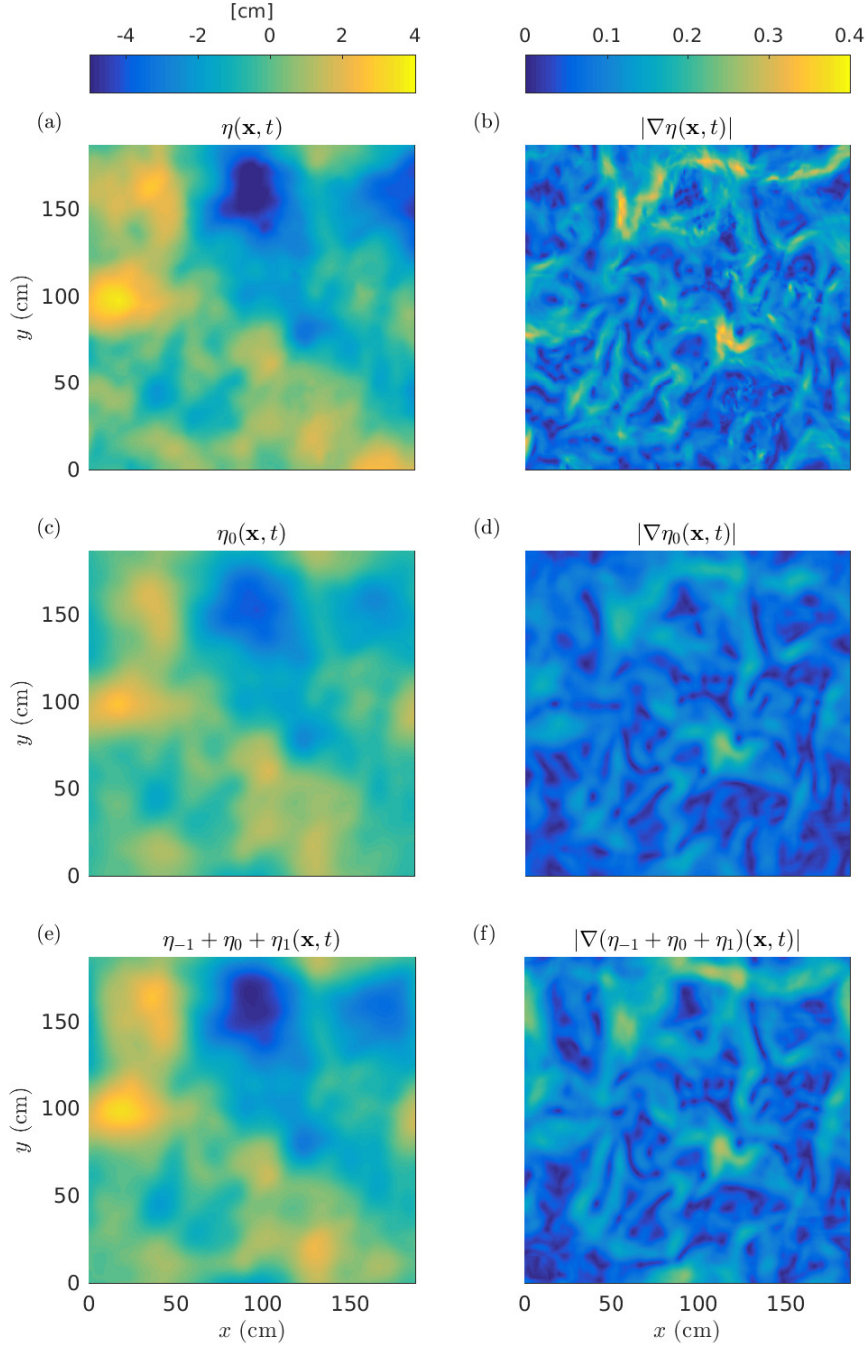


Figure 2. Instantaneous surface elevation  $\eta$  (a-c-d) and norm of its spatial gradient  $|\nabla\eta|$  (b-d-f) for raw data  $\eta$  (a-b) and filtered data  $\eta_0$  (c-d) and  $\eta_{-1} + \eta_0 + \eta_1$  (e-f).



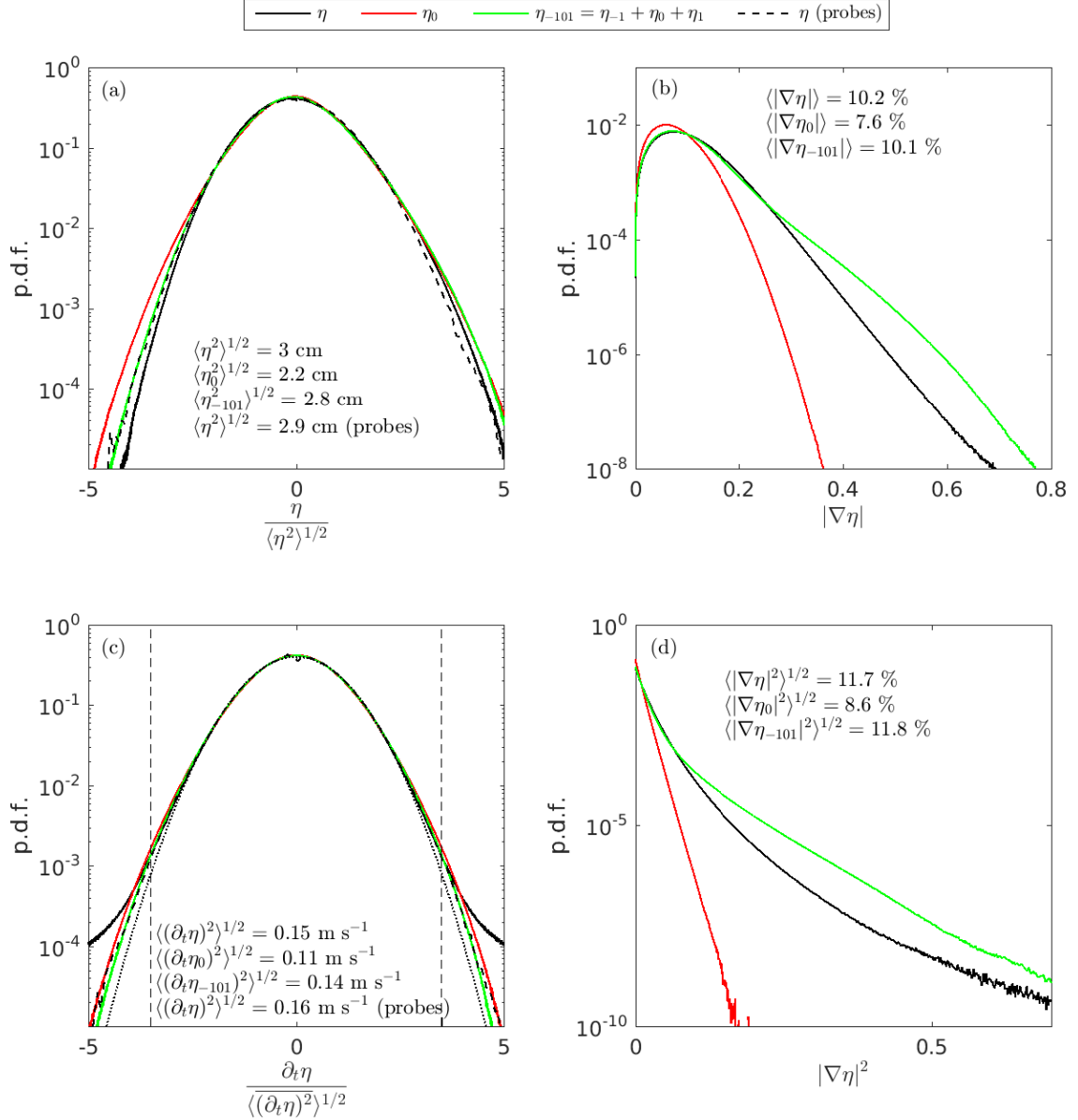


Figure 3. Probability density function of the norm of the surface elevation  $\eta$  (a), of local slope  $|\nabla \eta|$  (b), of the time derivative of surface elevation  $\partial_t \eta$  (c) and of the squared local slope  $|\nabla \eta|^2$  (d). Raw data  $\eta$ , filtered data  $|\nabla \eta_0|$  and  $|\nabla(\eta_{-1} + \eta_0 + \eta_1)|$  and data from probes are represented by black, red, green and black dashed lines respectively.

The surface elevation is recorded using two different methods. The first one is performed by 10 capacitive wave gauges (their positions are shown in fig. 1(a)). The second one is a stereoscopic reconstruction, called Stereo-PIV in the following. Buoyant particles (700  $\mu\text{m}$ ) are seeded at the surface in order to form a random pattern which is recorded simultaneously by three cameras (5 Mpixel, PCO Edge). A cross-correlation between the three images taken at the same time is computed to reconstruct surface elevation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  in a rectangular area of  $L \times L = 2 \times 2$  m $^2$  with a resolution of  $\Delta x = 1$  cm at the center of the tank using a stereoscopic algorithm [REF]Joel, ou en est le papier sur la reconstruction stereo?. More than 10 hours of image acquisition at a frequency of 40 Hz have been collected which corresponds to more than 100 terabyte of raw images.

Instantaneous surface elevation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  and its PDF are shown in the Fig. 2(a) and 3(a) respectively. The wave elevation is typically of the order of few centimeters with an energetic length scale of the order of one meter. This

is smaller than the wavelength associated to the central forcing frequency  $2\pi/k_{LDR}(\omega_f) \simeq 4$  m. A relatively good concordance between probes (dashed line) and stereoscopic (black) measurements is observed. A slight asymmetry with larger tails for positive elevations is observed. This asymmetry is usually related to the presence of Stokes or bound waves [22]. Furthermore, the PDF of the time derivative of elevation  $\partial_t\eta$  (Fig. 3(c)) is symmetric with a good agreement between probes and stereoscopic measurements up to  $3.5v_{rms}$  with  $v_{rms} = \langle (\overline{\partial_t\eta})^2 \rangle^{1/2}$ . Here, the angular brackets is the spatial average and the overline the temporal average. The over representation for larger values for stereoscopic measurement is due to a lower signal-to-noise and to the presence of false elevation reconstruction associated to poor correlations. We stress that events such that  $|\partial_t\eta| > 3.5v_{rms}$  represents less than 0.2% of the whole statistics. Instantaneous local slope  $|\nabla\eta(\mathbf{x}, t)|$  is represented in the Fig. 2(b) (top) The average slope  $\varepsilon_p = \langle |\nabla\eta(\mathbf{x}, t)| \rangle$  is evaluated to be 10 %. We observe that the local slope shows small scale structures (about few centimeters) with a local slope much larger than  $\varepsilon_p$ . This is confirmed by the probability density function (PDF) of the local slope (see Fig. 3(a)). The PDF of  $|\nabla\eta|^2$  (Fig. 3(d) blue curve) displays a very wide tail corresponding to extreme events of the slope (that can reach values of order 1 i.e. about ten times larger than the average). The presence of such high local slopes highlights the fact that strong non-linear events occur in a bath of wave turbulence of finite non-linearity. The presence of such singularities seems to be an important violation of the hypothesis of weak non-linearity of the WTT. However, the possible role of such singularities on the dynamics cannot be discussed at this stage since their structure and their coupling with linear waves are unknown. The next section is then dedicated to describe the spatiotemporal structure of the flow.

### III. STRUCTURE OF THE FLOW

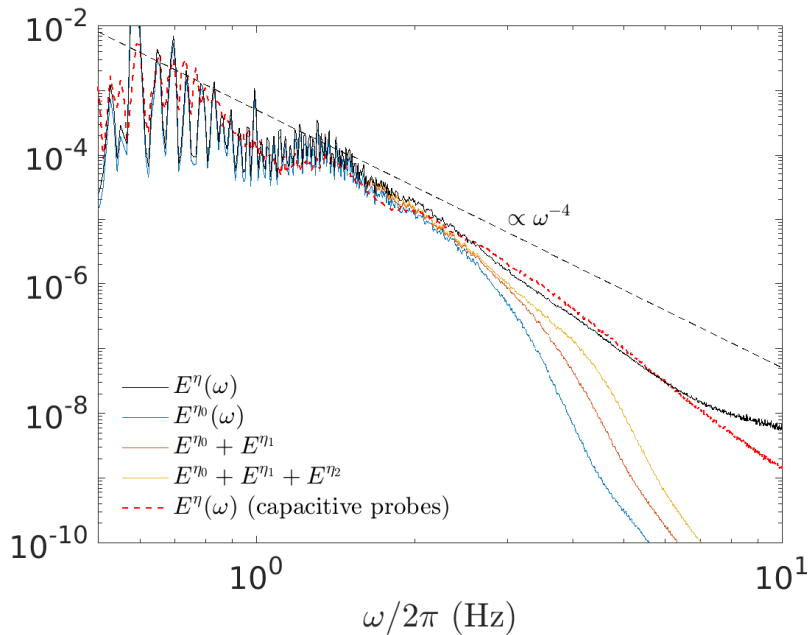


Figure 4. Frequency spectrum of the surface elevation from stereoscopic measurements and capacitive probes.

In this section, we report general features of the statistical properties of the surface elevation.

#### 1. Frequency spectrum

We first consider the energy distribution of wave elevation as a function of angular frequency  $\omega$ . This temporal energy spectrum is defined as

$$E^\eta(\omega) = \frac{2}{T} \langle |\tilde{\eta}(\mathbf{x}, \omega)|^2 \rangle, \quad (8)$$

where

$$\tilde{\eta}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \eta(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} dt \quad (9)$$

is the temporal Fourier transform of the wave elevation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  over a time window of finite duration  $T$ . The normalization is such that  $\langle \eta^2 \rangle = \int_0^\infty E^\eta(\omega) d\omega$ . The angular brackets corresponds here to the space average and the use of the standard Welch method with a time window of  $T = 125$  s. Figure 4 shows the temporal spectrum  $E^\eta(\omega)$  evaluated from stereoscopic reconstruction and from capacitive probes. A good correspondance of the spectra is observed for the two measurement methods up to 7 Hz. At higher frequencies, the stereoscopic measurement is dominated by noise. The spectral exponent slope is of about  $-6$  which is significantly steeper than the theoretical prediction  $-4$ . This value is compatible with other experimental studies at the same average wave steepness  $\varepsilon_p$  [4]. This has been related to the important effect of the dissipation at  $\approx 1$  Hz scale which strongly decreases the energy content at these scales [3].

## 2. Wavenumber-frequency spectrum

To go further in the characterization of the energy content of the flow in terms of waves, we now turn to a spatio-temporal analysis. We define the spatio-temporal energy spectrum as

$$E^\eta(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2}{TL^2} \langle |\tilde{\eta}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle, \quad (10)$$

where

$$\tilde{\eta}(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^{-3/2} \int_0^T \int_0^L \int_0^L \eta(\mathbf{x}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} dt dx dy \quad (11)$$

is the spatio-temporal Fourier transform of the wave elevation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  and  $L$  the spatial size of the measured field. We use the standard Welch method to improve the statistical convergence of the power spectrum with a time window of 125 s. The normalization is such that  $\langle \eta^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E^\eta(\mathbf{k}, \omega) d\omega dk_x dk_y$ .

Figure 5 (a) shows the normalized spatio-temporal spectrum  $E^\eta(k, \omega)/E^\eta(k_{LDR}(\omega_f), \omega_f)$  summed over the direction angle:  $E^\eta(k, \omega) = \int_0^{2\pi} E^\eta(\mathbf{k}, \omega) k d\theta$  and  $\mathbf{k} = k \cos \theta \mathbf{e}_x + k \sin \theta \mathbf{e}_y$ . We observe that most of the energy is concentrated around the linear dispersion of gravity waves (solid red line) up to 4 Hz. This is what is expected for weak gravity waves turbulence. Energy is also present out of the LDR. In particular secondary lines of energy can be distinguished on both sides of the LDR that are highlighted by the black dashed lines. These lines are defined as

$$k_n(\omega) = k_{LDR}(|\omega| - n\omega_0) + nk_{LDR}(\omega_0), \quad (12)$$

with  $\omega_0/2\pi = 0.7$  Hz and  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\omega_0$  is within the range of forced frequencies and also corresponds roughly to the peak of energy at large scales i.e. the most energetic waves in the tank. These lines corresponds to so-called bound waves. These not freely propagating waves result from a triadic interaction between freely propagating waves. In our case, the observed lines can be obtained by assuming that the very energetic linear gravity wave at  $(k_{LDR}(\omega_0), \omega_0)$  is interacting with all free waves on the linear dispersion relation propagating in the same direction. This corresponds to  $n = \pm 1$ . Higher values correspond to triadic interactions of free waves with the harmonics of the forcing peak  $(|n|k_{LDR}(\omega_0), |n|\omega_0)$ . Note that weak energy components are also present in addition to the highlighted lines, notably at frequencies  $\omega/2\pi$  larger than 5 Hz or wavenumbers  $k/2\pi$  larger than  $10 \text{ m}^{-1}$ .

Figure 5 (b) displays a cut of  $E^\eta(\mathbf{k}, \omega)$  for  $\omega/2\pi = 2.3$  Hz. The energy distribution is seen to be quite isotropic. The contribution of bound waves  $\eta_1$  and  $\eta_{-1}$  are clearly visible. The contribution of  $\eta_1$  is isotropic as well, that of  $\eta_{-1}$  seems more anisotropic.

## 3. Space-time filtered field

In order to evaluate the contribution of each spatio-temporal structure in the temporal spectrum  $E^\eta(\omega)$ , we introduce a filtration of the spatio-temporal signal [20]. We define the filtered spatio-temporal Fourier transform

$$\tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\eta}(\mathbf{k}, \omega) f_n(\mathbf{k}, \omega). \quad (13)$$

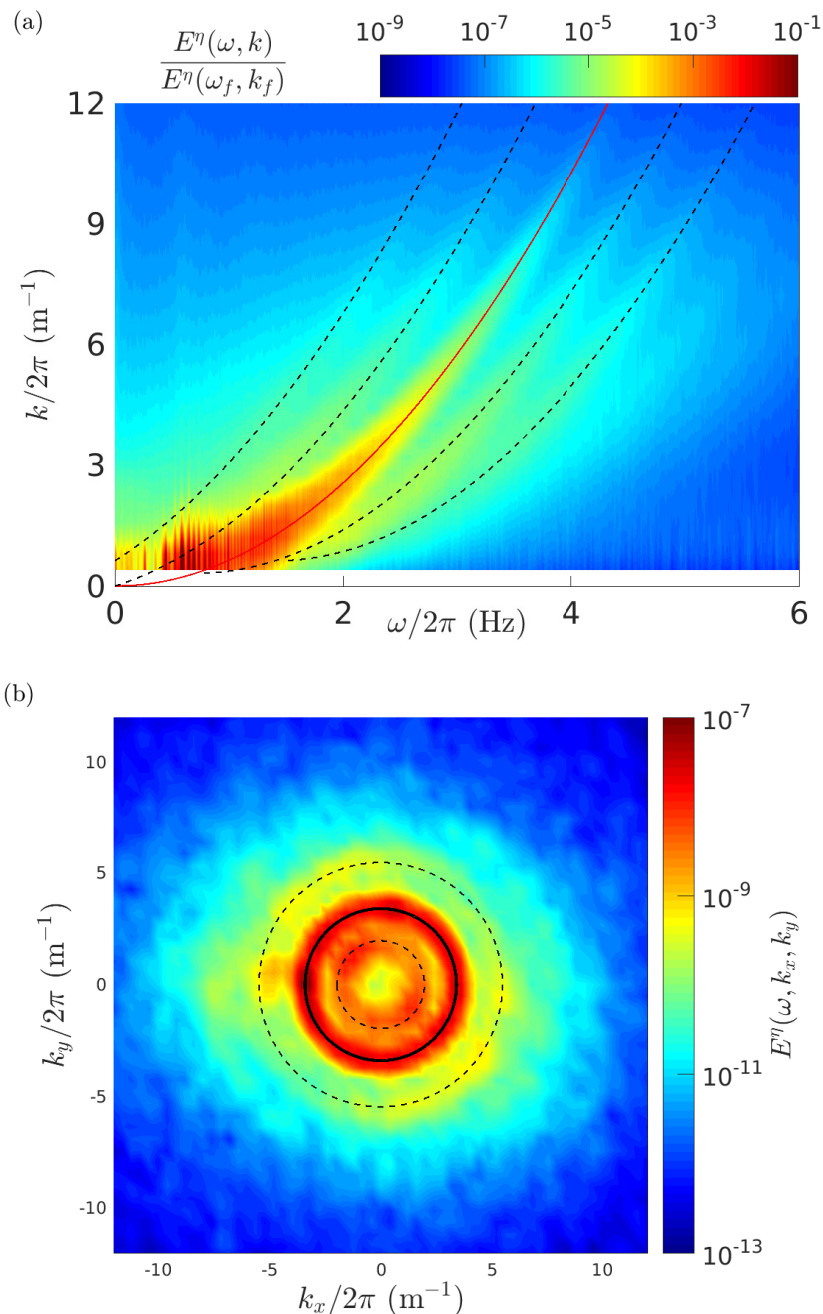


Figure 5. (a) Normalized angular average of the spatio-temporal spectrum of the surface elevation. Red line corresponds to the linear dispersion relation of gravity waves  $k_{LDR}(\omega)$  and dotted lines correspond to  $k_n(\omega)$ , with  $n \in [-2, -1, 1, 2]$ . (b) Spatio-temporal spectrum of the surface elevation for  $\omega/2\pi = 2.3$  Hz. Solid and dashed lines represent the expected wavenumber for free and bound waves (with  $n = \pm 1$ ) respectively.

The matrix  $f_n(\mathbf{k}, \omega_0)$  filters the signal around the bound wave of order  $n$ :

$$\begin{aligned} f_n(\mathbf{k}, \omega) &= 1 - dk, & \text{if } dk \in [0, 1], \\ f_n(\mathbf{k}, \omega) &= 0, & \text{if } dk \notin [0, 1], \end{aligned} \quad (14)$$

with

$$dk = \frac{(k_n(\omega) - |\mathbf{k}|)}{1.5\Delta_k}, \quad (15)$$

and  $\Delta_k = 0.5 \times 2\pi$  the spatial spectral resolution of our measurement (restricted by the size of our images). We emphasize that  $\eta_0(\omega)$  is the temporal Fourier transform filtered around the linear dispersion relation of gravity waves

and thus it corresponds to free waves only.

Fig. 2 shows a snapshot of the water elevation and the local slope of the filtered  $\eta_0(\mathbf{x}, t)$  as well as  $\eta_0(\mathbf{x}, t) + \eta_1(\mathbf{x}, t) + \eta_{-1}(\mathbf{x}, t)$  where  $\eta_i(\mathbf{x}, t)$  is the spatio-temporal inverse Fourier transform of  $\tilde{\eta}_i(\mathbf{k}, \omega)$ . We see that  $\eta_0$  captures the coarse features of the total surface elevation  $\eta$  ( $\langle \eta_0^2 \rangle^{1/2} = 2.2$  cm  $\sim \langle \eta^2 \rangle^{1/2} = 2.9$  cm).

The PDF of  $\eta_0$  and of its time derivative are displayed in fig. 3(a) and (c) (red curve). The filtered field has a more symmetric distribution than for the total field  $\eta$  with a time derivative statistics comparable with the probe measurements. We now include the bound waves, i.e. we consider the filtered field  $\eta_{-101} = \eta_{-1} + \eta_0 + \eta_1$  (green curve). The PDF of wave elevation recovers its asymmetry and is comparable to the probes measurements ( $\langle \eta_{-101}^2 \rangle^{1/2} = 2.8$  cm  $\simeq \langle \eta^2 \rangle^{1/2} = 2.9$  cm). We note also that no significative change occurs in the statistics of the time derivative with  $\langle (\partial_t \eta_{-101})^2 \rangle^{1/2} = 14$  cm s $^{-1} \simeq \langle (\partial_t \eta)^2 \rangle^{1/2} = 16$  cm s $^{-1}$ .

The PDF of the local slope of  $\eta_0$  is displayed in fig. 3 (red curve). It shows a much narrower tail than that of the total surface elevation, with an averaged slope which is reduced to 7.6% (i.e. 25 % smaller than the average slope of the full field). The PDF of  $|\nabla \eta_0|^2$  (bottom) is decaying exponentially while the PDF of  $|\nabla(\eta_0 + \eta_1 + \eta_{-1})|^2$  is very close to that of the full field and is decaying with much wider tails. These wide tails can clearly be associated to the bound waves. An exponential PDF of  $|\nabla \eta_0|^2$  is consistent with a Rayleigh distribution, i.e. Gaussian statistics of the gradient. This strongly suggests that the part of the wave field that corresponds to free waves could be consistent with Weak Turbulence, which assumes the wave field to be very close to Gaussian statistics.

We then define the filtered frequency spectrum

$$E^{\eta_n}(\omega) = \langle |\tilde{\eta}_n(\mathbf{x}, \omega)|^2 \rangle, \quad (16)$$

with  $\tilde{\eta}_n(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, \omega) dk_x dk_y$ . We observe in fig. 4 that the temporal spectrum  $E^\eta(\omega)$  is well reproduced by that of freely propagating gravity waves  $E^{\eta_0}(\omega)$  up to 2-3 Hz. The energy associated to higher frequencies is the combination of freely propagating linear gravity waves and bound waves and is actually dominated by bound waves at frequencies greater than 4 Hz.

#### IV. HAMILTONIAN FORMULATION OF THE WEAK TURBULENCE THEORY

We recall here the theoretical background of the WTT applied to surface gravity waves (following [25]). We consider an inviscid, homogeneous and incompressible fluid in which potential gravity waves propagates on the free surface. The Hamiltonian formulation in spatial Fourier space that describes this system is

$$i \frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*(\mathbf{k})}, \quad (17)$$

with  $a(\mathbf{k})$  being the canonical complex variable defined as

$$\tilde{\eta}(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{k}{2\omega_{LDR}(|\mathbf{k}|)}} [a(\mathbf{k}, t) + a^*(\mathbf{k}, t)], \quad (18)$$

and  $\mathcal{H}$  the non linear Hamiltonian. The Hamiltonian is classically presented in a power expansion of  $a(\mathbf{k})$  as

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{lin} + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots, \quad (19)$$

with  $\mathcal{H}_{lin} = \int \omega_{LDR}(|\mathbf{k}|) |a(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$  being the part of the Hamiltonian associated to the linear dynamics. The non linear part is splitted into  $l$ -wave interactions contributions defined by

$$\mathcal{H}_l = \sum_{n \leq l} \frac{1}{n!(l-n)!} \int d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_l [V^{n,l} \delta_n^l c_n^l(a)] \quad (20)$$

with  $c_n^l(a) = a^*(\mathbf{k}_1) \dots a^*(\mathbf{k}_n) a(\mathbf{k}_{n+1}) \dots a(\mathbf{k}_l)$  and  $\delta_n^l = \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n+1} - \dots - \mathbf{k}_l)$  the Dirac delta function. The coefficients  $V^{n,l}$  are expressed in the reference [11, 25] by Zakharov and are not recalled here. This formulation highlights the fact that energy transfers are strongly linked to the correlations  $c_n^l(a)$  for  $l$ -tuples satisfying the spatial resonance ( $\delta_n^l=1$ ). By definition of  $\delta_n^l$ , the contributions labeled with  $(n, l)$  are related to interactions of the type  $n$  waves  $\longleftrightarrow l - n$  waves.

In the limit of weak non-linearity, we expect  $c_n^3 \ll c_n^4 \ll c_n^5 \ll \dots$ . The negative curvature of the linear dispersion of surface gravity waves makes impossible for a triplet  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  of free waves satisfying the spatial resonance  $\pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 = 0$  to verify also the time resonance  $\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0$ . The consequence, for statistically stationary

turbulence, will be a scrambling with time of  $\mathcal{H}_3$  which will vanish on average and will not contribute to a net energy transfer. This term expresses the non linear coupling between free waves and bound waves.

Exclusion of the cubic term in the Hamiltonian can be made by a canonical nonlinear transformation  $a(\mathbf{k}, t) \rightarrow b(\mathbf{k}, t)$  of general structure:

$$a(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}) + b^{(2)}(\mathbf{k}) + b^{(3)}(\mathbf{k})\dots \quad (21)$$

where the terms  $b^{(n)}(\mathbf{k})$  are of order  $n$  in  $b(\mathbf{k})$  (see Krasitskii [11] for details). In the limit of vanishing non linearity  $a(\mathbf{k}) \approx b(\mathbf{k})$ . The terms of order  $n > 1$  are chosen so that to cancel the cubic contribution in the Hamiltonian, i.e. such that eq. (17) has the following structure

$$i \frac{\partial b(\mathbf{k})}{\partial t} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta b^*(\mathbf{k})} \quad (22)$$

with the non linear Hamiltonian expressed as

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_{lin} + \tilde{\mathcal{H}}_4 + \tilde{\mathcal{H}}_5 \dots \quad (23)$$

with  $\tilde{\mathcal{H}}_{lin} = \int \omega_{LDR}(\mathbf{k}) |b(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$ . The first non linear contribution  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  which appears is related to 4-wave interactions

$$\tilde{\mathcal{H}}_4(\mathbf{k}_1) = \frac{1}{4} \int T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) b^*(\mathbf{k}_1) b^*(\mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}_3) b(\mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_4. \quad (24)$$

Here, only the  $2 \leftrightarrow 2$  interactions contributions of  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  are kept since other combinations ( $0 \leftrightarrow 4$ ,  $1 \leftrightarrow 3 \dots$ ) can not satisfy the temporal resonance for the same reasons as for 3-wave interactions. The coefficients  $T$  are expressed in [11, 25] and are not recalled here. These coefficients have the interesting property to cancel out [24] for unidimensional 4-wave interactions, i.e. for  $\mathbf{k}_1 \propto \mathbf{k}_2 \propto \mathbf{k}_3 \propto \mathbf{k}_4$ . In this formulation, the contribution of bound waves through triple correlations is no more explicitly visible but is actually hidden in the canonical transformation  $a(\mathbf{k}, t) \rightarrow b(\mathbf{k}, t)$  as well as in the terms  $\tilde{\mathcal{H}}_4, \tilde{\mathcal{H}}_5 \dots$ .

From a practical point of view, the characterization of the net energy transfers from experimental measurements is very challenging. The evaluation of  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  requires to compute a multiple integral over the whole range of wave vectors  $\mathbf{k}_i$  which is barely accessible in experiments. Moreover, the variable  $b(\mathbf{k})$  is not a direct observable of the flow. Its evaluation necessitate to compute the canonical transformation which involve a multiple integral over the whole range of wave vectors  $\mathbf{k}_i$  (and expressed in an implicit way in the literature). It requires a very accurate knowledge of the parameters. Furthermore the experimental resolution in  $\mathbf{k}$  is strongly reduced by the size of the images and measurement noise can not be avoided. Thus it appears totally unrealistic to us to perform such a change of variable from experimental data to remove the contribution of bound waves.

In this paper, we then consider the first formulation (17) and describe the energy transfers through correlations of the observable variable  $\eta$ . We first describe the bound waves contributions to the non linear Hamiltonian through the third order correlation in the temporal frequency space. The correlated spatio-temporal structures are then clearly identified thanks to the third order correlation both in temporal and spatial frequency spaces. In the next section we analyze the 4-wave interactions through the fourth order correlation in the temporal frequency space. The identified bound waves are expected to contribute to the fourth order correlations and are not related to the net energy transfers discussed by the WTT. We then propose, in the second part, a spatio-temporally filtered fourth order correlation as a surrogate of the canonical change of variable  $a(\mathbf{k}) \rightarrow b(\mathbf{k})$  in order to separate the contributions of free and bound waves to the total fourth order correlation.

## V. THIRD ORDER CORRELATION

We now investigate the three waves resonances i.e. such that resonant conditions (1) and (2) are satisfied. As previously discussed, we recall that those conditions cannot be satisfied for three free waves (with the additional condition  $|\mathbf{k}_i| = k_{LDR}(\omega_i)$ ). This section is then a matter of evaluating the contribution of bound waves to the non linear Hamiltonian. Nonetheless, since bound waves bring also their contributions to the four waves resonances, its description is necessary for the purpose of a physical interpretation of the energy transfers in the next section.

### A. Third order frequency correlation

We investigate the 3-wave resonant interactions using the 3th-order correlation defined as

$$c_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{x}, \omega_1) \tilde{\eta}(\mathbf{x}, \omega_2) \tilde{\eta}(\mathbf{x}, \omega_3) \rangle. \quad (25)$$

Using eqs. (9), (11) and the hypotheses of an infinite size domain and spatial homogeneity, the third order correlation can be rewritten as

$$c_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle \delta^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \quad (26)$$

where  $\delta^2$  is the dirac delta function which is coming from the equality  $\int e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$ . This formulation highlights the fact that the correlation associated to the 3-tuple  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  probes all spatial resonances such that  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ . Nevertheless it should be noted that the correlation incorporates all resonant 3-tuples  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  including those with  $|\mathbf{k}_i| \neq k_{LDR}(\omega_i)$ . Thus it includes the contribution of bound waves into the correlation  $c_3$  but possibly other structures as well as noise. In the case of finite size domain, the Dirac  $\delta$ -function would be replaced by the following product of cardinal sine function  $L^2 \text{sinc}(L\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)) \text{sinc}(L\mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3))$  which relaxes to some extent the resonant condition  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ . Hence quasi-resonances may also contribute to the correlation  $c_3$ . By definition of the cardinal sine function, the largest contributions are for  $|(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{e}_i| \lesssim \pi/L = \Delta_k$  ( $i = (x, y)$ ) which corresponds to our spatial spectral resolution. Hence eq. (26) remains a good approximation of the measured correlation.

We define the normalized third order correlation

$$C_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{|c_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|}{\langle |\tilde{\eta}(\omega_1)|^2 \rangle^{1/2} \langle |\tilde{\eta}(\omega_2) \tilde{\eta}(\omega_3)|^2 \rangle^{1/2}}, \quad (27)$$

which is by construction in the range  $[0, 1]$ . The figure 6 (a) represents the third order correlation  $C_3$  in the  $(\omega_2, \omega_3)$  plane for  $\omega_1/2\pi = 2.13$  Hz. The resonant line  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$  with a correlation of the order  $10^{-1}$  emerges from the background noise up to  $\omega_3/2\pi = 6$  Hz. Figure 4 shows a the departure at this frequency of the temporal spectrum with the one measured from probes measurements. This departure is due to a poorer signal-to-noise ratio of the stereoscopic reconstruction compared to the probes measurements. The signature of the noise clearly arises in the time derivative of wave elevation as seen in fig. 3(c). Events associated to  $|\partial_t \eta| > 3.5v_{rms}$  likely corresponds to unphysical signal. We then apply a conditionnal average on data satisfying the condition  $|\partial_t \eta| \leq 3.5v_{rms}$  which removes 0.2% of the total volume of data. In practice, for each time window, positions  $(x, y)$  for which the condition is not respected are detected and removed from the average. The conditionnally averaged third order correlation  $C_3$  is represented in figure 6 (b). The resonant line is this time two order of magnitude larger than the background correlation and is extended to the whole range of frequencies. This illustrate the extreme sensitivity of these correlations to the quality of data. This conditionnal average will then be systematically adopted in the following of the paper.

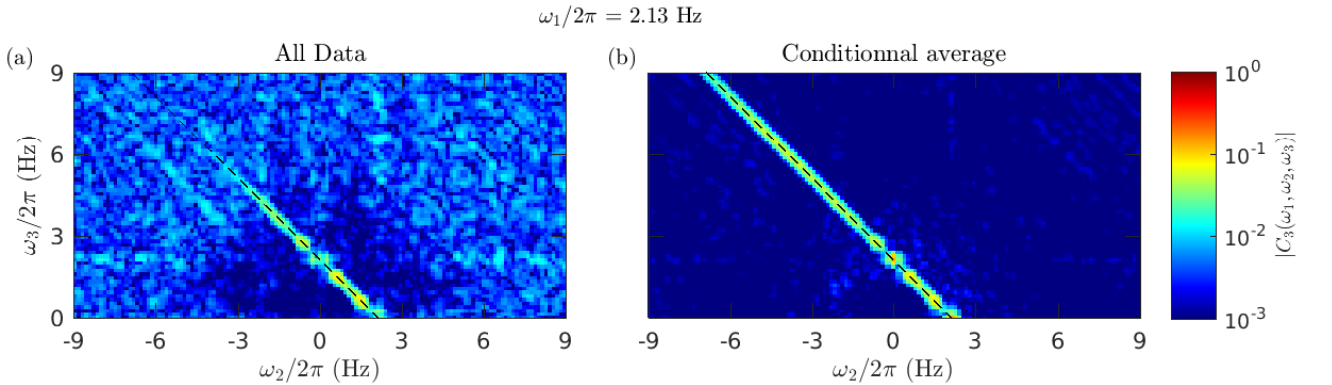


Figure 6. Normalized third order correlation of the temporal Fourier transform of the wave elevation  $C_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  for  $\omega_1/2\pi = 2.13$  Hz. Left: averaged on all data. Right: conditionnally averaged on data for which  $\partial\eta/\partial t \leq 3.5v_{rms}$  (99.8% of total data).

We now focus on this resonant condition through the bicoherence

$$B(\omega_2, \omega_3) = C_3(\omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3). \quad (28)$$



The bicoherence owns the following obvious symmetries

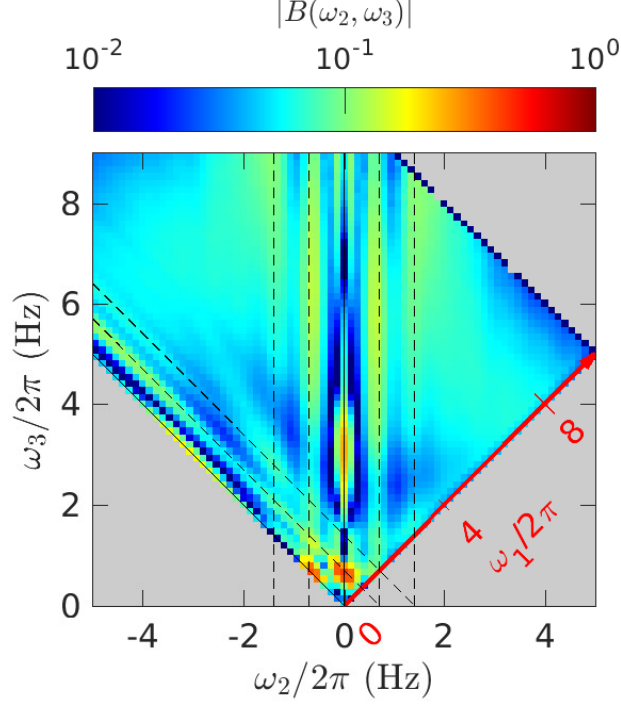


Figure 7. (Top Left) Bicoherence of the temporal Fourier transform of the wave elevation  $B(\omega_2, \omega_3)$ . This correlation intrinsically have symmetries. For sake of simplicity, the minimalistic part of the correlation is represented here. Dotted lines indicate  $\omega_1, \omega_2 = \pm n\omega_0$  with  $n = 1, 2$ .

$$B(\omega_2, \omega_3) = B(\omega_3, \omega_2) = B(-\omega_2, -\omega_3). \quad (29)$$

The Fig. 7 represents the minimalistic part of the bicoherence in the plane  $(\omega_2, \omega_3)$ . We observe a diffuse region for  $\omega_3/2\pi > 3$  Hz with a correlation slightly lower than  $10^{-1}$ . The more significative signature is however for identified frequencies  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \pm n\omega_0$  with  $n = 1, 2$  with a correlation larger than  $10^{-1}$ . This signature gives a first clue of the correlation between free and bound waves. However, at this stage, we are not able to discriminate the contribution of free waves, bound waves, singularities or correlated noise to the observed level of coherence. Indeed, as previously discussed, any Fourier modes verifying the resonance conditions would contribute to  $C_3$ .

### B. Third order spatio-temporal correlation

The natural next step to go further is then to look at the spatio-temporal third order correlation

$$C_3^{k\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{\langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle}{\langle |\tilde{\eta}(\mathbf{k}_1, \omega_1)|^2 \rangle^{1/2} \langle |\tilde{\eta}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3)|^2 \rangle^{1/2}} \quad (30)$$

with  $\langle \rangle$  corresponding to the use of the usual Welch method. This correlation have the advantage to separate the correlations between well distinguished spatio-temporal structures  $(\omega, \mathbf{k})$ . We focus on temporal and spatial resonant conditions through the bicoherence

$$\mathcal{B}(\omega_2, \omega_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = C_3^{k\omega}(\omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3). \quad (31)$$

Figure 8 represents the bicoherence for  $\omega_2/2\pi = 3$  Hz and  $\mathbf{k}_2 = k_{LDR}(\omega_2)\mathbf{e}_x$  in the planes  $k_{1,y} = k_{3,y} = 0$  (a),  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 = -0.7$   $2\pi$  rad.s $^{-1}$  (b) and  $\omega_3 = 1.4$   $2\pi$  rad.s $^{-1}$  (c). The red curve is given by  $k_{2,x} \pm k_{LDR}(\omega_3)$  and the green curves are given by  $k_n(\omega_2 + \omega_3)$ , with  $n = \pm 1, 2$ . The points at the crossing between red and green curves



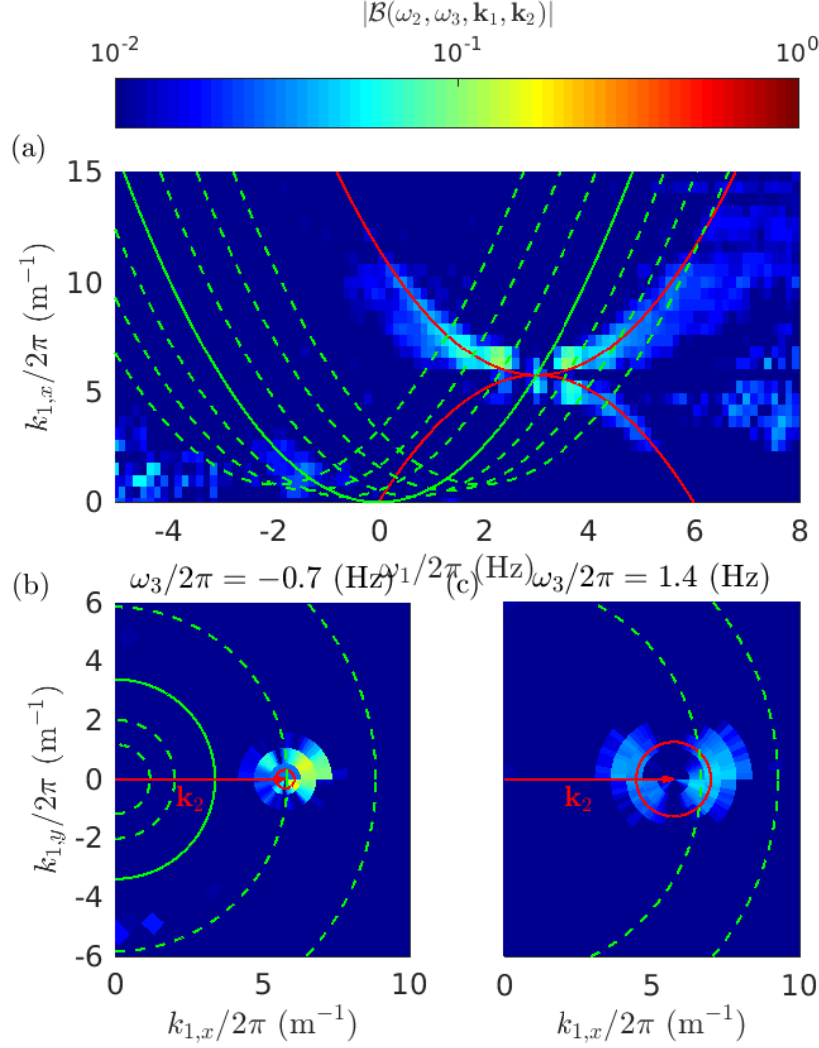


Figure 8. Cut of the bicoherence  $\mathcal{B}$  for  $\omega_2/2\pi = 3$  Hz and  $\mathbf{k}_2 = k_{LDR}(\omega_2)\mathbf{e}_x$  in the planes defined by  $k_{1,y} = k_{3,y} = 0$  (a),  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 = -0.7$   $2\pi$  rad.s<sup>-1</sup> (b) and  $\omega_3 = 1.4$   $2\pi$  rad.s<sup>-1</sup> (c).

indicate graphically solutions of equations (1) and (2). We observe significant correlation far above the background correlation at the vicinity of those solutions. We turn back to the total third order bicoherence  $B$  (figure. 7). We are now able to claim that the observed coherence is dominated by correlations of the type bound-free-free waves. We notice however that correlations larger than the background noise for  $\mathcal{B}$  are observed outside the predicted solutions which means that non-identified structure would also contribute to  $B$ .

### C. Filtered third order time correlation

In the previous section we have seen that the main contributions to the third order correlation involve well identified spatio-temporal structures: free waves and bound waves. In addition, as discussed in the section III, it is reasonable to approximate the spatio-temporal signal by  $\tilde{\eta}(\mathbf{k}, \omega) \approx \sum_n \tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, \omega)$  as most of the energy (although not all of it) lies on these lines. We recall that  $\eta_0$  corresponds to free waves and the other contributions to bound waves involving the forcing peak. We then rewrite the third order correlation as follows:

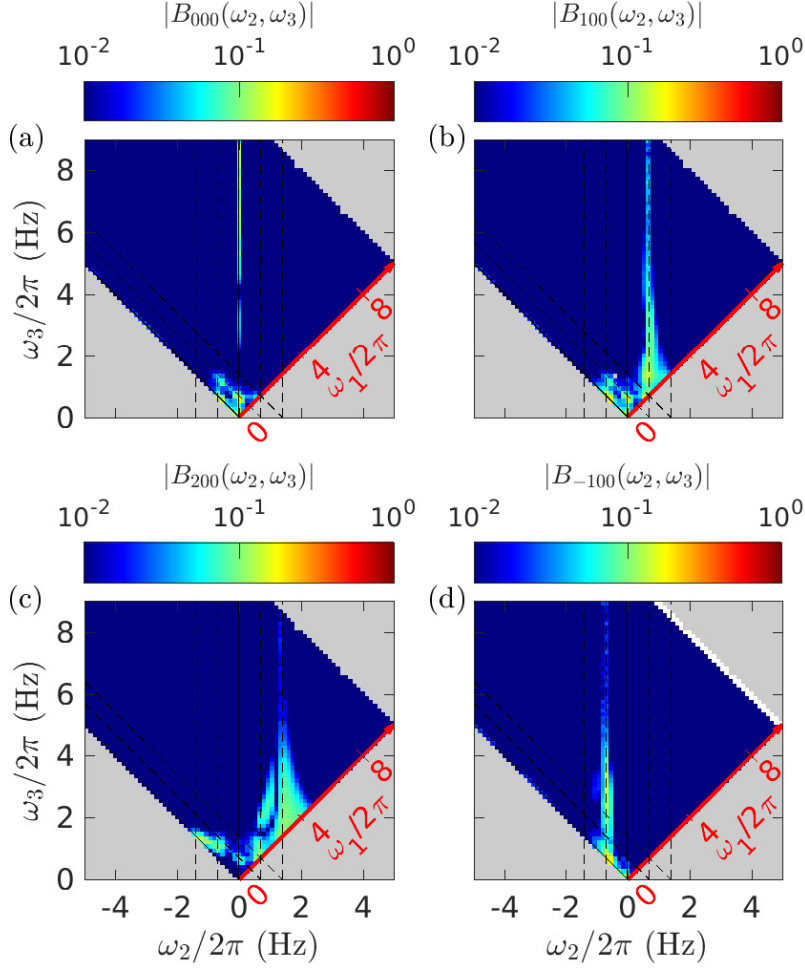


Figure 9. (Top Left) Bicoherence of the temporal Fourier transform of the wave elevation  $B(\omega_2, \omega_3)$ . This correlation intrinsically have symmetries (see text). For sake of simplicity, the minimalistic part of the correlation is represented here. Dotted lines indicate  $\omega_1, \omega_2 = \pm n\omega_0$  with  $n = 1, 2$ .

$$c_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} c_{n_1 n_2 n_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + MT(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (32)$$

$$\text{with } c_{n_1 n_2 n_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \langle \tilde{\eta}_{n_1}^*(\mathbf{x}, \omega_1) \tilde{\eta}_{n_2}(\mathbf{x}, \omega_2) \tilde{\eta}_{n_3}(\mathbf{x}, \omega_3) \rangle \quad (33)$$

being the third order correlation between the components  $(n_1, n_2, n_3)$ .  $MT$  corresponds to missing terms involving other non-identified spatio-temporal contributions. Similarly to the correlation  $c_3$ , the correlation  $c_{n_1 n_2 n_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  relates to the  $n_1 \longleftrightarrow (n_2, n_3)$  interactions, i.e. it probes only the spatial resonances such that

$$k_{n_1}(\omega_2 + \omega_3)\mathbf{e}_1 = k_{n_2}(\omega_2)\mathbf{e}_2 + k_{n_3}(\omega_3)\mathbf{e}_3 \quad (34)$$

that involve only waves on the specific free or bound waves dispersion relations characterized by the integers  $(n_1, n_2, n_3)$ .

We note that the specific case  $c_{000}$  ( $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ ), probes the three free waves interactions. In the case of one or more non-zero  $n_i$ ,  $c_{n_1 n_2 n_3}$  probes the correlation involving one or more identified bound waves.

We define accordingly the  $(n_1, n_2, n_3)$  bicoherence

$$B_{n_1 n_2 n_3}(\omega_2, \omega_3) = C_{n_1 n_2 n_3}(\omega_2 + \omega_3, \omega_2, \omega_3), \quad (35)$$

with

$$C_{n_1 n_2 n_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{c_{n_1 n_2 n_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\langle |\tilde{\eta}_{n_1}(\mathbf{x}, \omega_1)|^2 \rangle^{1/2} \langle |\tilde{\eta}_{n_2}(\mathbf{x}, \omega_2) \tilde{\eta}_{n_3}(\mathbf{x}, \omega_3)|^2 \rangle^{1/2}}, \quad (36)$$

defined in the range  $[0, 1]$ .

These bicoherences actually offer a compact but also a partial way (along the red and green curves of the figure 8) to represent the spatio-temporal bicoherence  $\mathcal{B}$ . However, we will see in the next section that a generalization of this tool to the fourth order correlation will bring an elegant way to discuss clearly the energy transfers. Figure 9 represents  $B_{n_1 0 0}$ , for  $n_1 = 0, 1, 2, -1$  in the  $(\omega_2, \omega_3)$  plane. As expected,  $B_{000}$  is zero and significant correlations are concentrated along  $\omega_2 = n_1 \omega_0$ .

The three-wave correlations discussed above, even if they are significant, are not expected to contribute to the global energy fluxes. In the following we investigate four-wave interactions through fourth order correlations since they are explicitly linked by the weak turbulence theory.

## VI. FOURTH ORDER FREQUENCY CORRELATION

### A. Definitions

We now investigate the 4-wave resonant interactions using the 4th-order correlation defined as

$$c_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{x}, \omega_1) \tilde{\eta}^*(\mathbf{x}, \omega_2) \tilde{\eta}(\mathbf{x}, \omega_3) \tilde{\eta}(\mathbf{x}, \omega_4) \rangle. \quad (37)$$

For the same reasons that those expressed in the previous section we precise that the correlation associated to the 4-tuple  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  probes all spatial resonances such that  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ . It should be noted that the correlation incorporates all resonant 4-tuples  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  including those with  $|\mathbf{k}_i| \neq k_{LDR}(\omega_i)$ . Thus it includes the contribution of bound waves into the correlation  $c_4$  but possibly other structures as well as noise.

We define the normalized fourth order correlation

$$C_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \frac{|c_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)|}{\langle |\tilde{\eta}(\omega_1) \tilde{\eta}(\omega_2)|^2 \rangle^{1/2} \langle |\tilde{\eta}(\omega_3) \tilde{\eta}(\omega_4)|^2 \rangle^{1/2}}, \quad (38)$$

which is by construction in the range  $[0, 1]$ .

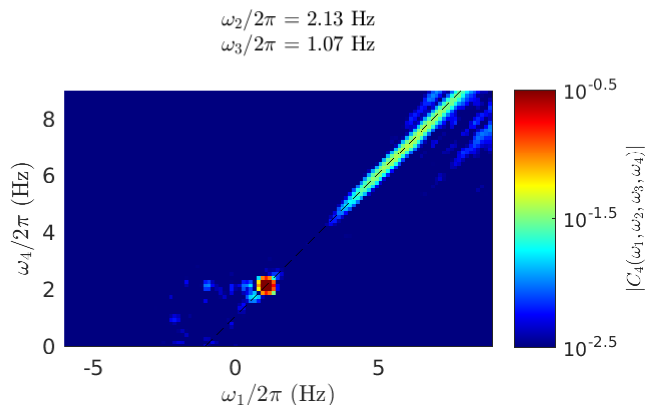


Figure 10. Normalized fourth order correlation of the temporal Fourier transform of the wave elevation  $C_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  for  $\omega_2/2\pi = 2.13$  Hz and  $\omega_3/2\pi = 1.07$  Hz.

The figure 10 represents the fourth order correlation  $C_4$  in the  $(\omega_1, \omega_4)$  plane for  $\omega_2/2\pi = 2.13$  Hz and  $\omega_3/2\pi = 1.07$  Hz. We observe that the resonant line  $\omega_4 = \omega_2 - \omega_3 + \omega_1$  clearly emerges from the noise level.

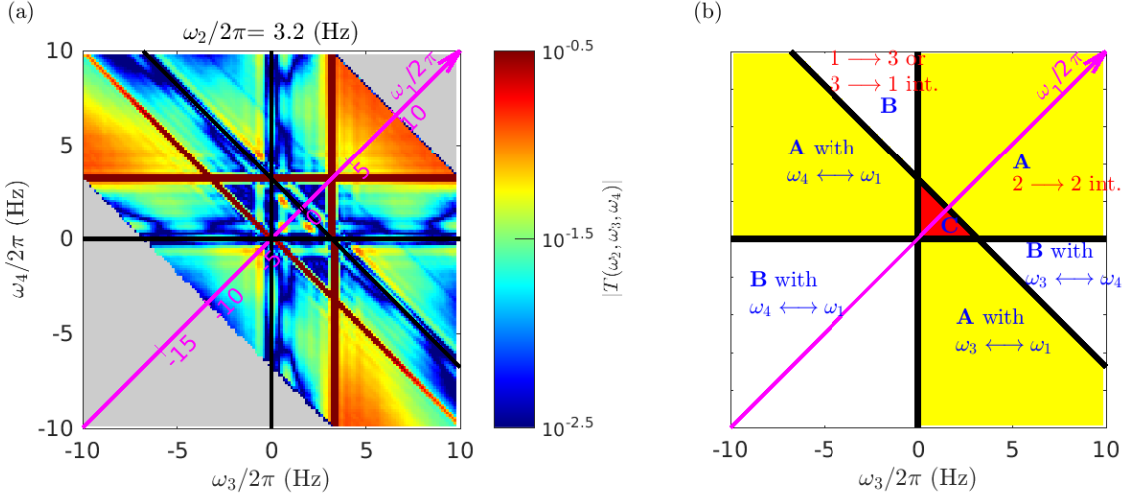


Figure 11. (a) Tricoherence of the temporal Fourier transform of the wave elevation  $T(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$  for  $\omega_2/2\pi = 3.2$  Hz.

In the following we then focus on this resonant condition through the tricoherence

$$T(\omega_2, \omega_3, \omega_4) = C_4(-\omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4). \quad (39)$$

The tricoherence shows several symmetries (fig. 11). By construction, obvious symmetries are

$$T(\omega_2, \omega_4, \omega_3) = T(\omega_2, \omega_3, \omega_4) \quad (40)$$

$$T(-\omega_2, -\omega_4, -\omega_3) = T(\omega_2, \omega_3, \omega_4). \quad (41)$$

A less obvious symmetry is the following. Let us consider the region  $\omega_2 > 0, \omega_3 < 0, \omega_4 < \omega_2 - \omega_3$  (i.e.  $\omega_1 < 0$ ). In this region  $T(\omega_2, \omega_3, \omega_4) = T(\omega_2, \omega_2 - \omega_4 - \omega_3, \omega_4)$ . This is due to the symmetry of the correlation  $c_4(-\omega_1, \omega_2, -\omega_3, \omega_4) = c_4(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega_4)$ . Thus the full map of tricoherence is highly redundant as seen in fig. 11. Due to a combination of all mentioned symmetries there is a 3-fold symmetry that can be obtained by permutations over specific pairs of frequency in  $c_4$ . Consequently the 3 regions labelled A (in yellow at the bottom of fig. 11) are equivalent as well as the three regions labeled B. Region A corresponds to  $2 \leftrightarrow 2$  interactions and regions B and C to  $3 \leftrightarrow 1$  interactions. In the following only a reduced part of the tricoherence map will be shown that contains the part above the main diagonal of the image made of half of region A located at the top-right, top region B and region C.

## B. Structure of the full correlation map

Figure 12 represents the tricoherence  $T(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$  in the  $(\omega_3, \omega_4)$  plane for 4 distinct values of  $\omega_2/2\pi = 1.6, 2.13, 3.2$  &  $5.2$  Hz. We stress that the level of statistical convergence is about  $3 \cdot 10^{-2}$  so that the range of shown magnitude of correlations corresponds to converged statistics. Thus the observed level of coherence is quite high in some regions of the frequency space (over 0.1).

A first feature is an horizontal line and a vertical line at a level of coherence very close to 1 (saturated red color). They correspond to the cases  $\omega_3 = \omega_2$  and  $\omega_4 = \omega_2$  for which the tricoherence is trivially equal to 1. The fact that these lines are well dominating over the background of coherence is a support for the relevance of weak turbulence. Indeed it suggests that the correlation  $c_4$  can be written as a development in cumulants

$$c_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \langle |\tilde{\eta}(\omega_1)|^2 \rangle \langle |\tilde{\eta}(\omega_2)|^2 \rangle \delta(\omega_1 - \omega_3) \delta(\omega_2 - \omega_4) + \langle |\tilde{\eta}(\omega_1)|^2 \rangle \langle |\tilde{\eta}(\omega_2)|^2 \rangle \delta(\omega_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 - \omega_3) + Q \quad (42)$$

where  $Q$  is a cumulant which is much weaker than the product  $\langle |\tilde{\eta}(\omega_1)|^2 \rangle \langle |\tilde{\eta}(\omega_2)|^2 \rangle$ . This constitutes the first step of the development of the WTT[19, 27]. Thus this observation supports that although the steepness of the waves is not that small, the WTT framework may remain relevant.

We distinguish three other regions of the frequency space for which a significant correlation is visible:

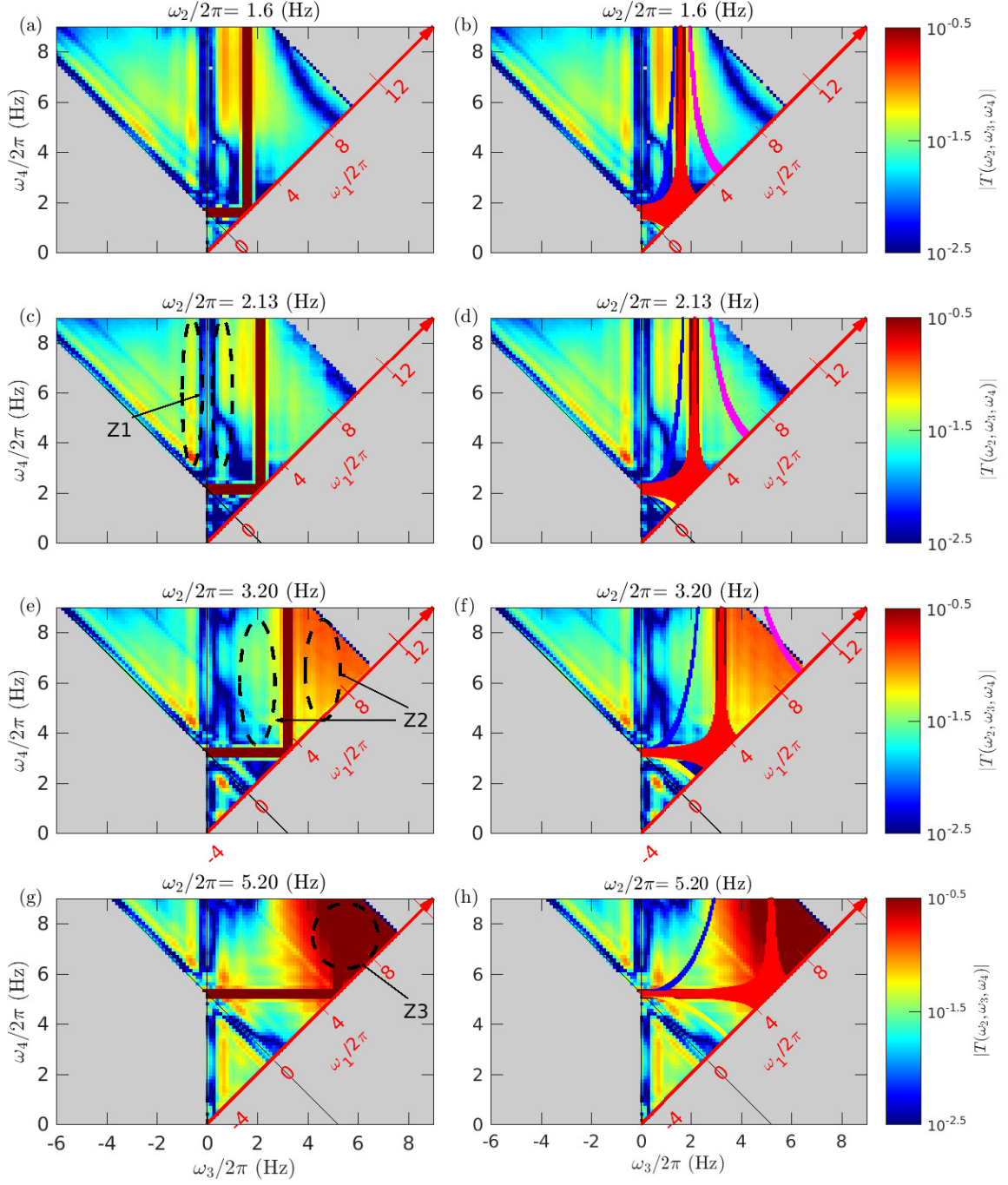


Figure 12. (Left)Tricoherence of the temporal Fourier transform of the wave elevation  $T(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$  for  $\omega_2/2\pi = (1.6, 2.13, 3.2, 5.2)$  Hz. This correlation intrinsically have symmetries. For sake of simplicity, the minimalistic part of the correlation is represented here. Black lines indicate  $\omega_1, \omega_3 = 0$ . Dotted lines indicate  $\omega_1, \omega_3, \omega_4 = \pm\omega_0$ .(Right) Same as left figures. Colored dots are the 1D solutions of the resonant equations 44 with the same colors as figure 13.

- zone Z1: a correlation  $T \simeq 10^{-1}$  or more for  $\omega_1 = \pm\omega_0$  or  $\omega_3 = \pm\omega_0$  with  $n = 1, 2$  whatever the value of  $\omega_2$ .
- zone Z2: a correlation larger than  $10^{-1}$  larger than the diffuse background for  $\omega_3 = \omega_2 \pm n\omega_0$  or  $\omega_4 = \omega_2 \pm n\omega_0$  with  $n = 1, 2$ .

- zone Z3: a correlation of about  $10^{-1.5}$  or larger for large values of  $\omega_3$  and  $\omega_4$ .

The appearance of the forcing frequency in the highlighted zones is consistent with the expected dominance of bound wave to the fourth order correlation. However, a thorough interpretation of these correlation maps cannot be achieved without a prior knowledge of solutions of the resonant eqs. (5) and (6).

### C. Free waves resonances

We consider the generalisation of eq. (7) for quasi-resonances,

$$|k_{LDR}(-\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)\mathbf{e}_1 + k_{LDR}(\omega_2)\mathbf{e}_2 - (k_{LDR}(\omega_3)\mathbf{e}_3 + k_{LDR}(\omega_4)\mathbf{e}_4)| \leq \Delta_k. \quad (43)$$

Here, the threshold has been arbitrarily chosen equal to the spatial spectral resolution  $\Delta_k$  of our spatial Fourier transform. This equation depends on 7 dimensions  $(\omega_2, \omega_3, \omega_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  which makes uneasy the visualisation of its solutions. For sake of simplicity, we first look at the 1D case such that  $\theta_i = \theta_2 \pmod{\pi}$  with  $i \in (1, 3, 4)$  and set values of 2 frequencies  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . Although these resonances are not supposed to contribute to energy transfer, the explanation of their computation is much easier to explain. The research of 1D solutions is reduced to find the frequency  $\omega = \omega_4$  satisfying the equation

$$|\pm k_{LDR}(-\omega_2 + \omega_3 + \omega) \pm k_{LDR}(\omega_2) - (\pm k_{LDR}(\omega_3) \pm k_{LDR}(\omega))| \leq \Delta_k. \quad (44)$$

Figure 13 (top) graphically represents examples of these solutions for  $\omega_2/2\pi = 3.2$  Hz and  $\omega_3/2\pi = (2, 7)$  Hz. Different solutions are highlighted by coloured dots (red, blue, yellow and magenta). By varying the value of  $\omega_3$ , all 1D solutions in the plane  $(\omega_3, \omega_4)$  are collected at a given  $\omega_2$  and plotted on top of the correlations in fig. 12 (right) with the same colours as for fig. 13.

We observe that the solutions of 1D quasi-resonances are strongly limited in the whole  $(\omega_3, \omega_4)$  space. We distinguish 4 different branches:

- the red branch with  $\omega_3, \omega_4 \simeq \omega_2$  and  $\omega_4, \omega_3 \simeq \omega_1$ ,
- the magenta branch with  $\omega_1, \omega_3, \omega_4 > \omega_2$ ,
- the yellow branch with  $\omega_1, \omega_3, \omega_4 < \omega_2$ ,
- the blue branch with  $\omega_3 < \omega_2$  and  $\omega_4 > \omega_2$ .

We now turn to the resolution of full 2D case of quasi resonances. This can be done by setting the values of  $(\omega_2, \omega_3, \omega_4, \theta_2, \theta_3)$  and searching for couples  $(\theta_1, \theta_4)$  that satisfy eq. (43). Figure 13 (bottom) graphically represents an example of these solutions in the  $\mathbf{k}$  space for  $(\omega_2, \omega_3, \omega_4)/2\pi = (3.2, 4, 2.5)$  Hz and  $(\theta_2, \theta_3) = (0, \pi/6)$ . Two parts of left hand side of eq. (43),  $k_{LDR}(-\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)\mathbf{e}_1 + k_{LDR}(\omega_2)\mathbf{e}_2$  and  $k_{LDR}(\omega_3)\mathbf{e}_3 + k_{LDR}(\omega_4)\mathbf{e}_4$  are represented by circles, the solutions being trivially at the crossing of those two circles. By varying the value of  $\omega_3$  and  $\theta_3$ , all 2D solutions are collected at a given  $(\omega_2, \theta_2)$  in the plane  $(\omega_3, \omega_4, \theta_3)$ . Figure 14 (bottom), represents in the  $(\omega_2, \omega_3)$  plane the fraction of angle  $\theta_3$  for which a 2D solution exists for  $\omega_2/2\pi = 3.2$  Hz and  $\theta_2 = 0$ . We first see that the region for which many solutions (red colors, i.e. a fraction close to 1) exists correspond also to the regions of 1D approximate solutions. As the fraction of  $\theta_3$  is close to one, it means that all angles actually contribute to resonances and not only quasi 1D ones. Note also that the border of the region of existence of 2D solutions corresponds to 1D solutions. Thus we plot the lines of 1D quasiresonances in figs. 12 and 15 as eye guides for convenience but one has to remember that these actually displayed regions correspond to regions with a high number of fully 2D resonances.

### D. Resonances and correlations

Turning back to the correlation maps, we now see that the large correlation levels observed in region Z1 corresponds to 4-tuples  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  which do not have any solutions for the quasi-resonant equation (43) between free waves. On the contrary, the 4-tuples of frequency in regions Z2 and Z3 are located in zones for which four free waves interactions are possible. This discussion have to be tempered since that the fourth order correlation probes the spatial resonances with wavenumbers not necessarily defined by the linear dispersion relation as discussed in the previous section. At this stage, we are then not able to discriminate if the observed level of coherence is due to only free waves, free and bound waves, singularities or correlated noise. Indeed, as previously discussed, any Fourier modes verifying the resonance conditions would contribute to  $C_4$ .

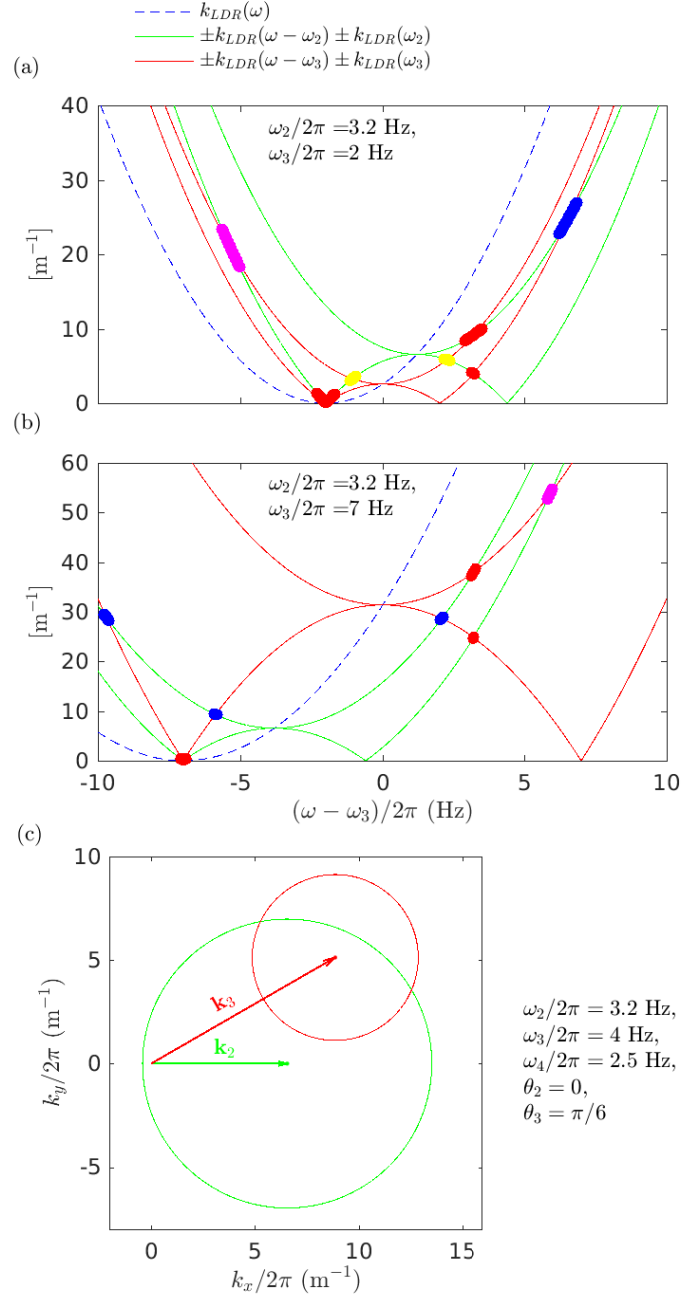


Figure 13. (Top) Graphical representation of solutions for quasi resonant eq. (43) in the colinear wave-vectors case, i.e.  $\theta_i = \theta_2 \pmod{\pi}$  with  $i \in (1, 3, 4)$ , for  $\omega_2/2\pi = 3.2$  Hz and  $\omega_3 = (2, 7)$  Hz. Solutions are localized at the crossing between the green and red curves and are highlighted by colored dots. (Bottom) Graphical representation of 2D solutions for quasi resonant equations for  $(\omega_2, \omega_3, \omega_4)/2\pi = (3.2, 4, 2.5)$  Hz and  $(\theta_2, \theta_3) = (0, \pi/6)$ . Green and red curves are defined by  $k_{LDR}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_2) \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} + k_{LDR}(\omega_2) \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$  and  $k_{LDR}(\omega_3) \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) \end{pmatrix} + k_{LDR}(\omega_4) \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) \\ \sin(\theta_4) \end{pmatrix}$  respectively. The 2D solutions are localized at the crossing between green and red circles.



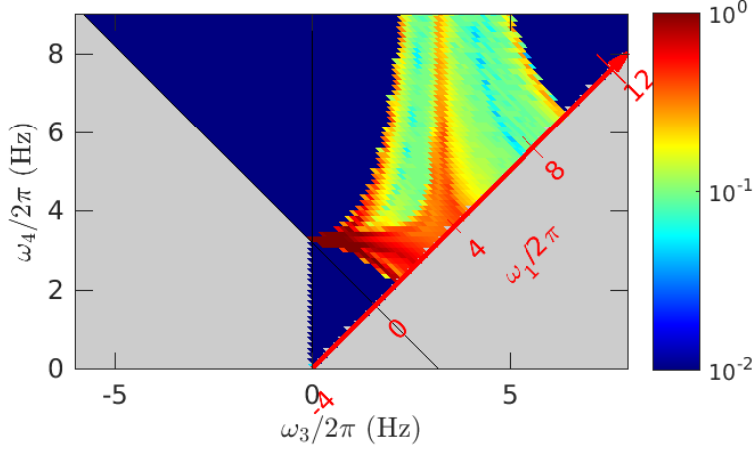


Figure 14. (Bottom) Fraction of angle  $\theta_3$  for which solutions of quasi resonant equations 43 exist with  $\omega_2/2\pi = 3.2$  and  $\theta_2 = 0$

The natural next step to go further would be to look at the spatio-temporal fourth order correlation

$$c_4^{k\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \langle \tilde{\eta}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \tilde{\eta}^*(\mathbf{k}_2, \omega_2) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \tilde{\eta}(\mathbf{k}_4, \omega_4) \rangle \quad (45)$$

with  $\langle \rangle$  corresponding to the use of the usual Welch method. This correlation have the advantage to separate the correlations between well distinguished spatio-temporal structures  $(\omega, \mathbf{k})$ . Nevertheless, its visualisation is made difficult by its huge dimensionality. Moreover, its convergence is strongly reduced compared to  $c_4$  by the absence of spatial average and thus would require a tremendous amount of data. For these reasons, we decided to adopt an alternative strategy to circumvent this difficulty as shown in the next section.

## VII. FILTERED FOURTH ORDER TIME CORRELATION

### A. Definitions

Justified by the spatio-temporal structure discussed in the section III and by the dominance of identified bound waves to the third order correlation, we propose to rewrite the fourth order correlation as follows:

$$c_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} c_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) + MT(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \quad (46)$$

$$\text{with } c_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \langle \tilde{\eta}_{n_1}^*(\mathbf{x}, \omega_1) \tilde{\eta}_{n_2}^*(\mathbf{x}, \omega_2) \tilde{\eta}_{n_3}(\mathbf{x}, \omega_3) \tilde{\eta}_{n_4}(\mathbf{x}, \omega_4) \rangle \quad (47)$$

being the fourth order correlation between the components  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ .  $MT$  corresponds to missing terms involving other non-identified spatio-temporal contributions. Similarly to the correlation  $c_4$ , the correlation  $c_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$  relates to the  $(n_1, n_2) \longleftrightarrow (n_3, n_4)$  interactions, i.e. it probes only the spatial resonances such that

$$k_{n_1}(-\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)\mathbf{e}_1 + k_{n_2}(\omega_2)\mathbf{e}_2 = k_{n_3}(\omega_3)\mathbf{e}_3 + k_{n_4}(\omega_4)\mathbf{e}_4, \quad (48)$$

that involve only waves on the specific free or bound waves dispersion relations characterized by the integers  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ .

We note that the specific case  $c_{0000}$  ( $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$ ), for which the latter equation is strictly equivalent to eq. (7), probes the four free waves interactions. In the case of one or more non-zero  $n_i$ ,  $c_{n_1 n_2 n_3 n_4}$  probes the correlation involving one or more identified bound waves.

We define accordingly the  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  tricoherence

$$T_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega_2, \omega_3, \omega_4) = C_{n_1 n_2 n_3 n_4}(-\omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \quad (49)$$



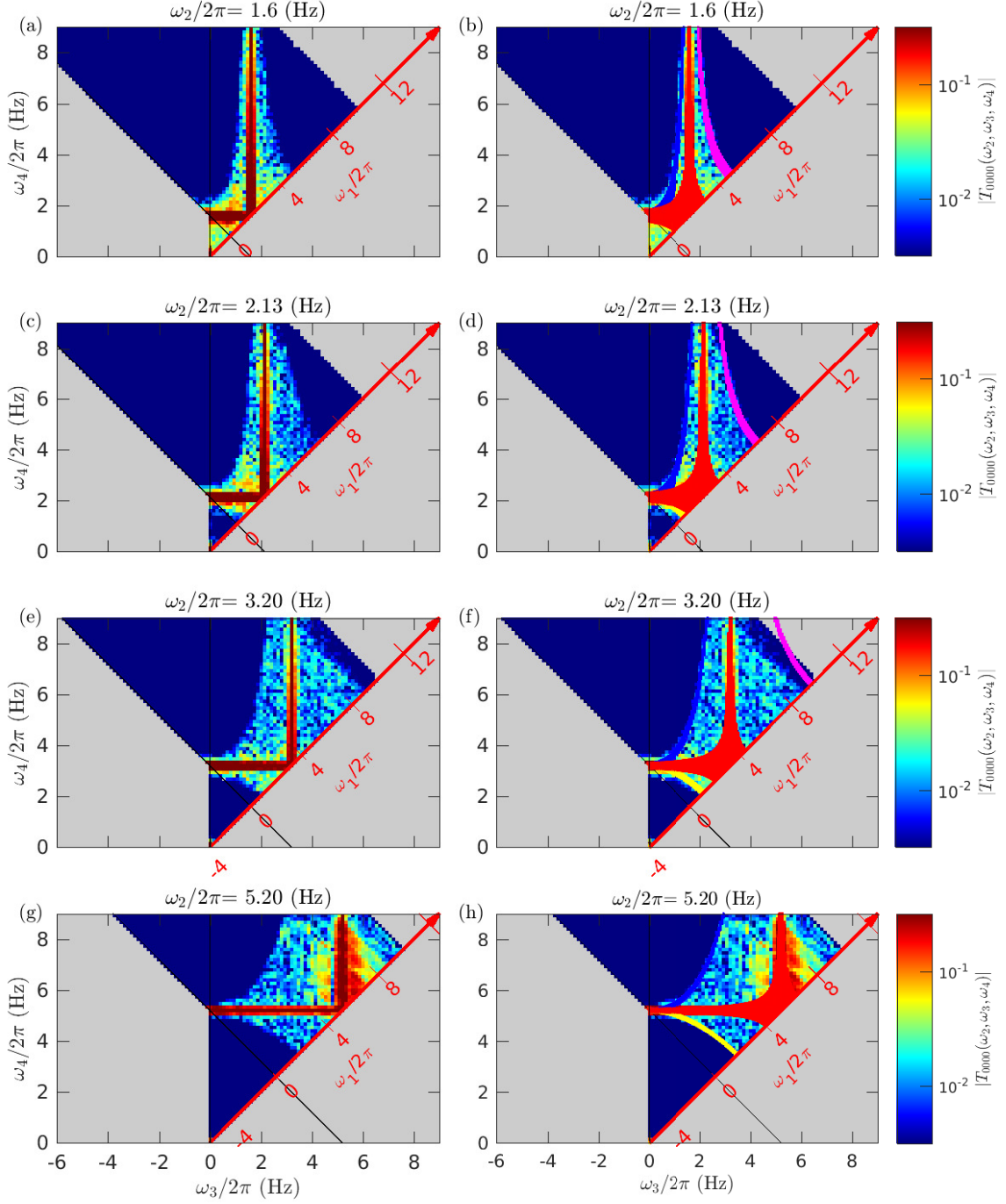


Figure 15. (Left) Tricoherence of the filtered temporal Fourier transform of the wave elevation  $T_{0000}(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$  for  $\omega_2/2\pi = (1.6, 2.13, 3.2, 5.2)$  Hz. This correlation intrinsically have symmetries. For sake of simplicity, the minimalistic part of the correlation is represented here. Black lines indicate  $\omega_1, \omega_3 = 0$ . Dotted lines indicate  $\omega_1, \omega_3, \omega_4 = \pm\omega_0$ . (Right) Same as left figures. Colored dots are the 1D solutions of the resonant equations 44.

with

$$C_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \frac{c_{n_1 n_2 n_3 n_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\langle |\tilde{\eta}_{n_1}(\mathbf{x}, \omega_1) \tilde{\eta}_{n_2}(\mathbf{x}, \omega_2)|^2 \rangle^{1/2} \langle |\tilde{\eta}_{n_3}(\mathbf{x}, \omega_3) \tilde{\eta}_{n_4}(\mathbf{x}, \omega_4)|^2 \rangle^{1/2}}, \quad (50)$$

defined in the range  $[0, 1]$ .

### B. Free waves

Figure 15 shows  $T_{0000}(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$  for  $\omega_2/2\pi = (1.6, 2.13, 3.2, 5.2)$  Hz. As expected, the tricoherence  $T_{0000}$  is exactly equal to zero for  $(\omega_3, \omega_4)$  couples for which no solution of the resonant equations exists. We observe a converged level of coherence larger than  $10^{-3}$  around couples  $(\omega_3, \omega_4)$  for which resonant free waves exists. Except for the trivial lines  $\omega_3, \omega_4 = \omega_2$  we identify a significative correlation of the order of  $10^{-1}$  for  $\omega_3, \omega_4 \sim \omega_2$  for  $\omega_2/2\pi \leq 2.13$  Hz. This is actually the range of frequency where the free waves are dominant in the temporal spectrum (see Fig. 4). It means that the dominant interactions seem to be local in frequency. We then observe a significative correlation for  $\omega_3 \sim \omega_2$  for  $\omega_2/2\pi = 5.2$  Hz. This correlation should be most likely due to noise since free waves are negligible at such high frequency.

The level of coherence  $T_{0000}$  is relatively weak (order of 0.1 at its maximum) which shows that indeed free waves are in weak nonlinear interaction compatible with weak turbulence. The much higher level of coherence observed in the full tricoherence  $T$  suggests that it is due in majority to other contributions, namely bound waves.

### C. Bound waves

We now turn to the fourth order correlation involving at least one bound wave. Figure 16 represents  $T_{1000}, T_{1010}, T_{-1010}$  and  $T_{2020}$  for  $\omega_2/2\pi = 3.2$  Hz. In the same manner as for fig. 15, solutions of eq. (48) in the 1D case ( $\mathbf{e}_1 \propto \mathbf{e}_2 \propto \mathbf{e}_3 \propto \mathbf{e}_4$ ) are represented by coloured dots on the right side of the figure. We note that, as for quasi resonant conditions (43) of free waves, the density of 2D solutions of condition (48) is larger in the vicinity of 1D solutions. We observe in fig. 16 correlations of the order of  $10^{-1}$  (and larger than the background noise) located around 1D solutions especially for  $T_{1010}$  and  $T_{2020}$ . Such correlations do not explicitly appear in the WTT formalism since they do not contribute to the net energy transfers in the limit of vanishing non-linearity (but they are actually hidden in the canonical transformation as mentioned above).

We now turn back to the total fourth order tricoherence  $T$  (figure 12) and reanalyze the three significative zones of significant levels. The correlation  $T \simeq 10^{-1}$  or more in region Z1 is incompatible with a wave-wave correlation since correlations patterns of  $T_{n_1 n_2 n_3 n_4}$  are changing with the value  $\omega_2$ . This correlation should then be due to singularities or correlated noise. The correlation larger than  $10^{-1}$  in region Z3 are observed for 4-tuples at which correlations  $T_{n_1 n_2 n_3 n_4}$  are small. It is thus most likely due to non-identified structures. Thus it confirms that a significant part of the full tricoherence  $T$  is due to contributions of bound waves or even other structures.

## VIII. COMPARISON WITH FIELD DATA

Let us finally consider the relatively high correlation located in region Z2 corresponding roughly to  $\omega_3 = \omega_2 \pm n\omega_0$  with  $n = 1, 2$ . Such 4-tuple is a solution of eqs. (5) and (6) whatever  $\omega_4$  if two of these frequencies are associated to bound waves  $|\mathbf{k}_1| = k_{\pm n}(\omega_4 \pm n\omega_0)$  and  $|\mathbf{k}_3| = k_{\pm n}(\omega_2 \pm n\omega_0)$  and the two others to free waves  $|\mathbf{k}_2| = k_0(\omega_2)$  and  $|\mathbf{k}_4| = k_0(\omega_4)$ . A non negligible fourth order correlation for this particular 4-tuples would actually be a reminiscence of the presence of third order correlation due to the presence of bound waves  $k_{\pm 2}(\omega_3) + k_0(\omega_2) = k_0(\omega_f) = k_{\pm 2}(\omega_1) + k_0(\omega_4)$ . In region Z2, indeed both the correlations  $T$  and  $T_{n0n0}$  are significant. This is consistent with the dominance of  $(2, 0) \longleftrightarrow (n, 0)$  or  $(n, 0) \longleftrightarrow (0, n)$  interactions involving twice the bound wave associated to  $n = 1$  or  $2$  for those 4-tuples of frequencies.

Figure 17 shows the tricoherence  $T$  computed from field data of wave reconstruction from the Black Sea [12] originally published in [1]. It corresponds to young waves of very low steepness ( $\epsilon \approx 2\%$ ). The image of  $T$  is mostly made of horizontal and vertical lines shifted by multiples of  $\pm 0.35 \times 2\pi$  Hz from  $\omega_2$ . This frequency corresponds to the peak frequency of the spectrum. These features are reminiscent of the images of  $T_{1010}$  or  $T_{2020}$  in fig. 16 and thus can most likely be associated to interactions between bound waves with  $n = 1$  or  $n = 2$  in

$$k_n(\omega) = k_{LDR}(|\omega| - n\omega_p) + nk_{LDR}(\omega_p). \quad (51)$$

The genuine free wave interactions are most likely at a much smaller level of coherence and are hidden below the bound wave contribution as for our laboratory data. Considering the level of non linearity, the fraction of the tricoherence due to free wave interaction is most likely beyond reach considering the level of statistical convergence.

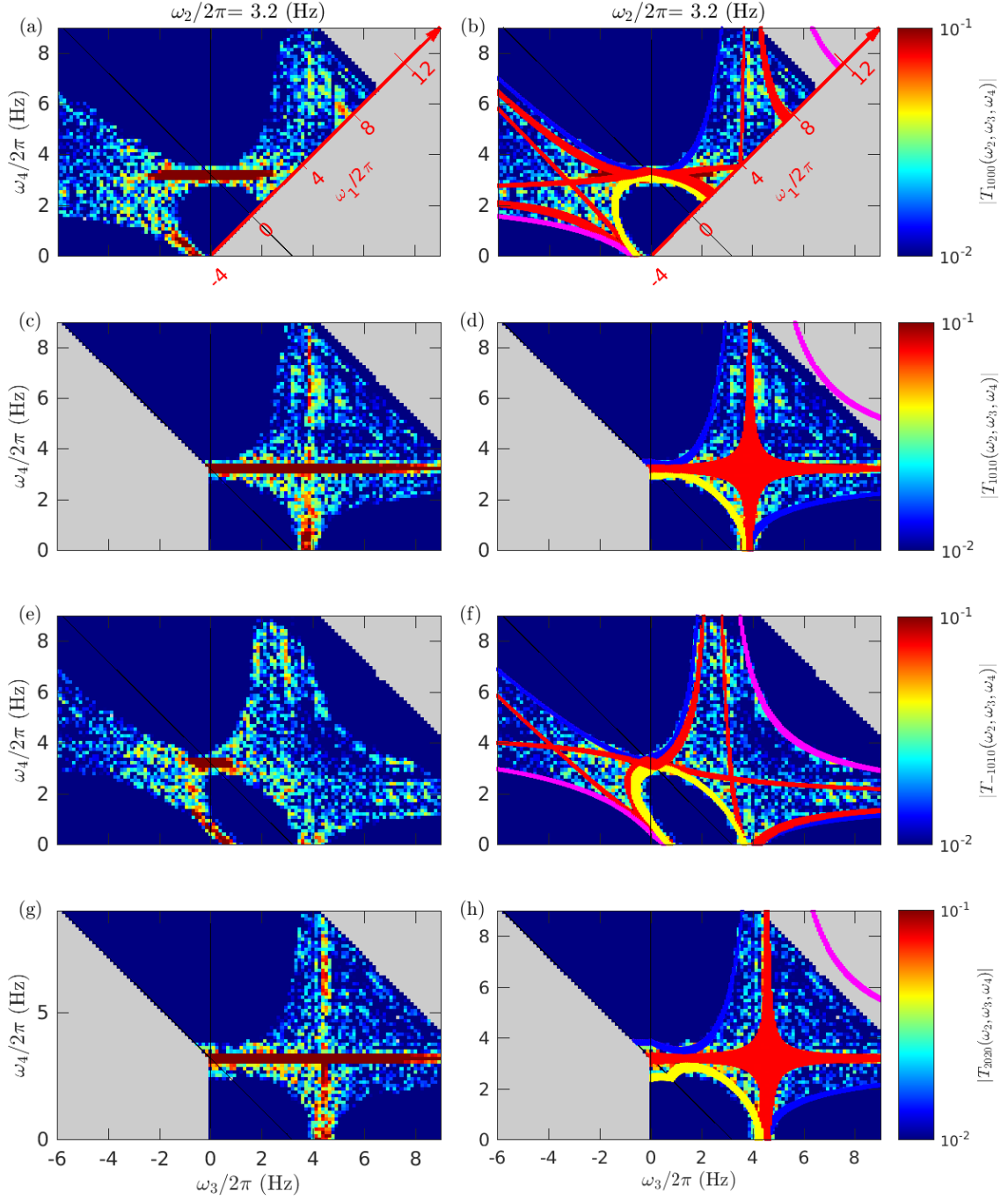


Figure 16. (Left) Tricoherence of the filtered temporal Fourier transform of the wave elevation  $T_{1000}$ ,  $T_{1010}$ ,  $T_{-1010}$  and  $T_{2020}$  for  $\omega_2/2\pi = 3.2$  Hz. This correlation intrinsically have symmetries. For sake of simplicity, the minimalistic part of the correlations are represented here. Black lines indicate  $\omega_1, \omega_3 = 0$ . Dotted lines indicate  $\omega_1, \omega_3, \omega_4 = \pm\omega_0$ . (Right) Same as left figures. Colored dots are the 1D exact solutions of the resonant equations 48 .

## IX. CONCLUSION

In summary, we report laboratory investigations of gravity wave turbulence in a relatively strong regime with a steepness equal to 10%. This strong level of nonlinearity can be seen in the wide tail distribution of the surface

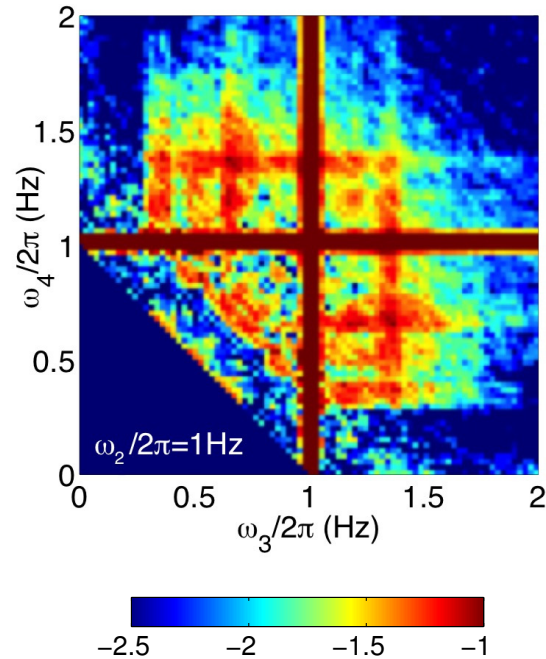


Figure 17. Bicoherence computed from field data measured in the Black Sea [12] and reproduced from ref. [1]. For this dataset the peak of the spectrum occurs at  $\omega/2\pi \approx 0.35$  Hz.

gradient. By operating a space-time filtering of the data we could separate free and bound waves. The bound waves are seen to dominate the wave field at frequencies higher than 4 Hz.

With a nonlinear analysis performed through the use of tricoherence estimators, we were able to exhibit for the first time the nonlinear coupling between free waves, which is at the core of the Weak Turbulence Theory. At the scales present in our experiments (wavelengths comparable or shorter than a meter), the nonlinear contribution of bound waves is very strong and dominant in the 4-wave correlations. Nevertheless the use of our space-time filter to extract free waves together with a very large database (required to converge the coherence estimators), enabled us to visualize the nonlinear coupling among them which is actually contributing to the energy flux in scale. We observed that the level of bicoherence is actually quite low although the steepness of the full field is relatively high due to a significant contribution of bound waves. It supports the fact that the interaction of free waves can nonetheless be described by the WTT even at moderate steepness. Bound waves do not contribute to the energy cascade through the term  $\mathcal{H}_3$  of the development of the Hamiltonian. Nonetheless they contribute at the 4th order through contributions in  $\mathcal{H}_4$ . The WTT development involving the variables  $b(\mathbf{k}, t)$  is supposed to be valid for vanishing nonlinearity. The contribution of approximate resonances involving bound waves at finite nonlinearity is far from clear. This may have some importance for operational models of sea state predictions at the smallest scales of the gravity wave spectrum, which is actually the one accessible in our experiments.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge V. I. Shrira and M. Berhanu for fruitful discussions. This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 647018-WATU).

---

[1] Quentin Aubourg, Antoine Campagne, Charles Peureux, Fabrice Ardhuin, Joel Sommeria, Samuel Viboud, and Nicolas Mordant. Three-wave and four-wave interactions in gravity wave turbulence. *Physical Review Fluids*, 2(11):114802, November 2017.

- [2] Umberto Bortolozzo, Jason Laurie, Sergey Nazarenko, and Stefania Residori. Optical wave turbulence and the condensation of light. *Journal of the Optical Society of America B*, 26(12):2280, December 2009.
- [3] Antoine Campagne, Roumaissa Hassaini, Ivan Redor, Jol Sommeria, Thomas Valran, Samuel Viboud, and Nicolas Mordant. Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves. *Physical Review Fluids*, 3(4):044801, April 2018.
- [4] L. Deike, B. Miquel, P. Gutierrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon, and F. Bonnefoy. Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 781:196–225, October 2015.
- [5] Petr Denissenko, Sergei Lukaschuk, and Sergey Nazarenko. Gravity Wave Turbulence in a Laboratory Flume. *Physical Review Letters*, 99(1):014501, July 2007.
- [6] Gustavo Dring, Christophe Josserand, and Sergio Rica. Weak Turbulence for a Vibrating Plate: Can One Hear a Kolmogorov Spectrum? *Physical Review Letters*, 97(2):025503, July 2006.
- [7] Sbastien Galtier. Weak inertial-wave turbulence theory. *Physical Review E*, 68(1):015301, July 2003.
- [8] K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part 1. General theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 12(4):481–500, April 1962.
- [9] Henderson Diane M. and Segur Harvey. The role of dissipation in the evolution of ocean swell. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 118(10):5074–5091, October 2013.
- [10] Paul A. Hwang, David W. Wang, Edward J. Walsh, William B. Krabill, and Robert N. Swift. Airborne Measurements of the Wavenumber Spectra of Ocean Surface Waves. Part I: Spectral Slope and Dimensionless Spectral Coefficient. *Journal of Physical Oceanography*, 30(11):2753–2767, November 2000.
- [11] Vladimir P. Krasitskii. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 272:1–20, August 1994.
- [12] Fabien Leckler, Fabrice Ardhuin, Charles Peureux, Alvise Benetazzo, Filippo Bergamasco, and Vladimir Dulov. Analysis and Interpretation of FrequencyWavenumber Spectra of Young Wind Waves. *Journal of Physical Oceanography*, 45(10):2484–2496, July 2015.
- [13] Sergei Lukaschuk, Sergey Nazarenko, Stuart McLelland, and Petr Denissenko. Gravity Wave Turbulence in Wave Tanks: Space and Time Statistics. *Physical Review Letters*, 103(4):044501, July 2009.
- [14] V. S. Lvov, V. Nazarenko, and G. E. Volovik. Energy spectra of developed superfluid turbulence. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 80(7):479–483, October 2004.
- [15] J. W. Miles. Surface-wave damping in closed basins. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 297(1451):459–475, March 1967.
- [16] Benjamin Miquel and Nicolas Mordant. Nonlinear dynamics of flexural wave turbulence. *Physical Review E*, 84(6):066607, December 2011.
- [17] Sergey Nazarenko. *Wave Turbulence*. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [18] Sergey Nazarenko and Miguel Onorato. Wave turbulence and vortices in BoseEinstein condensation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 219(1):1–12, July 2006.
- [19] Alan C. Newell, Sergey Nazarenko, and Laura Biven. Wave turbulence and intermittency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 152-153:520–550, May 2001.
- [20] Charles Peureux. *Observation et modélisation des propriétés directionnelles des ondes de gravité courtes*. phdthesis, Université de Bretagne occidentale - Brest, November 2017.
- [21] Leonel Romero and W. Kendall Melville. Airborne Observations of Fetch-Limited Waves in the Gulf of Tehuantepec. *Journal of Physical Oceanography*, 40(3):441–465, March 2010.
- [22] George G Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1880.
- [23] HL Tolman, M Accensi, H Alves, F Ardhuin, J Bidlot, N Booij, AC Bennis, T Campbell, DV Chalikov, and JF Filipot. User manual and system documentation of wavewatch iii version 4.18. 2014.
- [24] D. J. Webb. Non-linear transfers between sea waves. *Deep Sea Research*, 25(3):279–298, March 1978.
- [25] V Zakharov. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 18(3):327–344, May 1999.
- [26] V. E. Zakharov, S. L. Musher, and A. M. Rubenchik. Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena. *Physics Reports*, 129(5):285–366, December 1985.
- [27] Vladimir E. Zakharov, Victor S. L’vov, and Gregory Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

# Bibliographie

- [1] Lord RAYLEIGH. « Theory of Sound f 109 ». In : *Ed 1* (1877), p. 93.
- [2] H LAMB. « H. Lamb, Proc. R. Soc. London Ser. A 34, 551 (1910). » In : *Proc. R. Soc. London Ser. A 34* (1910), p. 551.
- [3] James Hopwood JEANS. *Science & music*. Courier Corporation, 1968.
- [4] Diederik Johannes KORTEWEG et Gustav DE VRIES. « XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves ». In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 39.240 (1895), p. 422–443.
- [5] Hermann A HAUS. « Optical fiber solitons, their properties and uses ». In : *Proceedings of the IEEE* 81.7 (1993), p. 970–983.
- [6] A LICHNEROWICZ. « Ondes Des Choc, Ondes Infinitesimales et Rayons. En Hydrodynamique et Magnetohydrodynamique Relativistes ». In : *Relativistic fluid dynamics*. Springer, 2011, p. 87–203.
- [7] Sergey NAZARENKO. *Wave turbulence*. T. 825. Springer Science & Business Media, 2011.
- [8] Alan C. NEWELL et Benno RUMPF. « Wave Turbulence ». en. In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 43.1 (jan. 2011), p. 59–78. ISSN : 0066-4189, 1545-4479. DOI : [10 . 1146 / annurev - fluid - 122109 - 160807](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160807). URL : [http : / / www . annualreviews . org / doi / 10 . 1146 / annurev - fluid - 122109 - 160807](http://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev-fluid-122109-160807) (visité le 16/11/2016).
- [9] Chuan Jiang HUANG et Fangli QIAO. « Wave-turbulence interaction and its induced mixing in the upper ocean ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 115.C4 (2010).
- [10] A. PICOZZI et al. « Optical wave turbulence : Towards a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics ». en. In : *Physics Reports* 542.1 (sept. 2014), p. 1–132. ISSN : 03701573. DOI : [10 . 1016 / j . physrep . 2014 . 03 . 002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.03.002). URL : [http : / / linkinghub . elsevier . com / retrieve / pii / S0370157314001203](http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157314001203) (visité le 09/01/2017).
- [11] GUSTAVO DURING. « Non-equilibrium dynamics of nonlinear wave systems : Turbulent regime, breakdown and wave condensation ». In : (2010). URL : [https : / / dspace . conicyt . cl / handle / 10533 / 76574](https://dspace.conicyt.cl/handle/10533/76574) (visité le 05/09/2016).
- [12] Roald Z SAGDEEV. « The 1976 Oppenheimer lectures : Critical problems in plasma astrophysics. I. Turbulence and nonlinear waves ». In : *Reviews of Modern Physics* 51.1 (1979), p. 1.



- [13] Benjamin MIQUEL. « Etudes expérimentales et numériques de la turbulence d'ondes de flexion ». Thèse de doct. Paris 6, 2013.
- [14] Cyril TOUZÉ, Olivier THOMAS et Marco AMABILI. « Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates ». In : *International Journal of non-linear Mechanics* 46.1 (2011), p. 234–246.
- [15] Sergey NAZARENKO. « Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2006.02 (2006), p. L02002. URL : <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/2006/02/L02002/meta> (visité le 03/07/2017).
- [16] Benjamin MIQUEL, Alexandros ALEXAKIS et Nicolas MORDANT. « Role of dissipation in flexural wave turbulence : From experimental spectrum to kolmogorov-zakharov spectrum ». In : *Physical Review E* 89.6 (2014), p. 062925. URL : <http://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.89.062925> (visité le 02/10/2015).
- [17] Benjamin MIQUEL et al. « Transition from wave turbulence to dynamical crumpling in vibrated elastic plates ». In : *Physical review letters* 111.5 (2013), p. 054302.
- [18] Eric FALCON, Claude LAROCHE et Stéphan FAUVE. « Observation of gravity-capillary wave turbulence ». In : *Physical review letters* 98.9 (2007), p. 094503.
- [19] Eric FALCON, Stéphan FAUVE et Claude LAROCHE. « Observation of intermittency in wave turbulence ». In : *Physical review letters* 98.15 (2007), p. 154501. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.98.154501> (visité le 02/11/2015).
- [20] Bruno ISSENMANN, Claude LAROCHE et Eric FALCON. « Wave turbulence in a two-layer fluid : coupling between free surface and interface waves ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 116.6 (2017), p. 64005. URL : <http://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/116/64005/meta> (visité le 30/08/2017).
- [21] Thierry DAUXOIS et Michel PEYRARD. *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [22] John Scott RUSSELL. *Report on Waves : Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. 1845.
- [23] Roumaïssa HASSAINI et Nicolas MORDANT. « Transition from weak wave turbulence to soliton gas ». In : *Physical Review Fluids* 2.9 (2017), p. 094803.
- [24] Quentin AUBOURG. « Etudes expérimentales de la turbulence d'ondes à la surface d'un fluide. La théorie de la Turbulence Faible à l'épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité ». PhD Thesis. Université Grenoble Alpes, 2016.
- [25] David J ACHESON. *Elementary fluid dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [26] PG DRAZIN. *Introduction to Hydrodynamic Stability, Cambridge Uni.* 2002.

- [27] ES BENOLOV, R GRIMSHAW et EP KUZNETSOVA. « The generation of radiating waves in a singularly-perturbed Korteweg-de Vries equation ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 69.3-4 (1993), p. 270–278.
- [28] Paul A MILEWSKI et al. « Three-dimensional localized solitary gravity-capillary waves ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 3.1 (2005), p. 89–99.
- [29] T Brooke BENJAMIN. « The solitary wave with surface tension ». In : *Quarterly of Applied Mathematics* 40.2 (1982), p. 231–234.
- [30] Alan JEFFREY et Tsunehiko KAKUTANI. « Weak nonlinear dispersive waves : a discussion centered around the Korteweg–de Vries equation ». In : *Siam Review* 14.4 (1972), p. 582–643.
- [31] Holger R DULLIN, Georg A GOTTWALD et Darryl D HOLM. « Camassa–Holm, Korteweg–de Vries-5 and other asymptotically equivalent equations for shallow water waves ». In : *Fluid Dynamics Research* 33.1-2 (2003), p. 73–95.
- [32] Éric FALCON, Claude LAROCHE et Stéphan FAUVE. « Observation of Depression Solitary Surface Waves on a Thin Fluid Layer ». en. In : *Physical Review Letters* 89.20 (oct. 2002). ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.89.204501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.204501). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.204501> (visité le 22/09/2016).
- [33] Boguk KIM et TR AKYLAS. « On gravity–capillary lumps ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 540 (2005), p. 337–351.
- [34] Vladimir Evgenevich ZAKHAROV. *Nonlinear waves and weak turbulence*. T. 182. American Mathematical Soc., 1998.
- [35] Alan C NEWELL, Sergey NAZARENKO et Laura BIVEN. « Wave turbulence and intermittency ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 152 (2001), p. 520–550.
- [36] Nicolas MORDANT. « Are there waves in elastic wave turbulence? » In : *Physical review letters* 100.23 (2008), p. 234505. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.100.234505> (visité le 02/10/2015).
- [37] Vladimir E. ZAKHAROV, Victor S. L'VOV et Gregory FALKOVICH. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : wave turbulence*. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Berlin ;Göttingen ; Springer, 1992. ISBN : 978-3-540-54533-0.
- [38] AA VEDENOV. « Theory of a weakly turbulent plasma ». In : *Reviews of plasma physics*. Springer, 1967, p. 229–276.
- [39] Quentin AUBOURG et Nicolas MORDANT. « Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence ». In : *Physical Review Fluids* 1.2 (2016), p. 023701.
- [40] S DYACHENKO et al. « Optical turbulence : weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 57.1-2 (1992), p. 96–160.



- [41] VE ZAKHAROV, SL MUSER et AM RUBENCHIK. « Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena ». In : *Physics reports* 129.5 (1985), p. 285–366.
- [42] AI DYACHENKO, YV LVOV et VE ZAKHAROV. « Five-wave interaction on the surface of deep fluid ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 87.1-4 (1995), p. 233–261.
- [43] YV LVOV. « Effective five-wave Hamiltonian for surface water waves ». In : *Physics Letters A* 230.1-2 (1997), p. 38–44.
- [44] Victor S LVOV, Sergei V NAZARENKO et Oleksii RUDENKO. « Bottleneck crossover between classical and quantum superfluid turbulence ». In : *Physical Review B* 76.2 (2007), p. 024520.
- [45] Evgeny KOZIK et Boris SVISTUNOV. « Kelvin-wave cascade and decay of superfluid turbulence ». In : *Physical review letters* 92.3 (2004), p. 035301.
- [46] Colm CONNAUGHTON, Sergey NAZARENKO et Alan C. NEWELL. « Dimensional analysis and weak turbulence ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 184.1 (2003), p. 86–97.
- [47] Gustavo DÜRING, Christophe JOSSEMAND et Sergio RICA. « Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum ? » en. In : *Physical Review Letters* 97.2 (juil. 2006). ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.97.025503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.025503). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.025503> (visité le 20/09/2017).
- [48] Vladimir E ZAKHAROV, Victor S L’VOV et Gregory FALKOVICH. *Kolmogorov spectra of turbulence I : Wave turbulence*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [49] Thomas HUMBERT. « Turbulence d’ondes dans les plaques minces en vibration : étude expérimentale et numérique de l’effet de l’amortissement ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2014. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01146965/> (visité le 20/09/2017).
- [50] Clarence ZENER. « Internal friction in solids II. General theory of thermoelastic internal friction ». In : *Physical Review* 53.1 (1938), p. 90.
- [51] Andrew N NORRIS et Douglas M PHOTIADIS. « Thermoelastic relaxation in elastic structures, with applications to thin plates ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 58.1 (2005), p. 143–163.
- [52] Enrico SERRA et Michele BONALDI. « A finite element formulation for thermoelastic damping analysis ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78.6 (2009), p. 671–691.
- [53] Antoine CHAIGNE et Christophe LAMBOURG. « Time-domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 109.4 (2001), p. 1422–1432.
- [54] Luc DEIKE. « Etudes expérimentales et numériques de la turbulence d’ondes de surface ». Thèse de doct. Paris 7, 2013.

- [55] Werner ALPERS et Heinrich HÜHNERFUSS. « The damping of ocean waves by surface films : A new look at an old problem ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 94.C5 (1989), p. 6251–6265.
- [56] T. HUMBERT et al. « Wave turbulence in vibrating plates : the effect of damping ». In : *EPL* 102 (2013), p. 30002.
- [57] Antoine CAMPAGNE et al. « Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves ». In : *arXiv :1803.07663 [physics]* (mar. 2018). arXiv : 1803.07663. URL : <http://arxiv.org/abs/1803.07663> (visité le 22/03/2018).
- [58] Klaus HASSELMANN. « Weak-interaction theory of ocean waves ». In : (1967).
- [59] Vladimir E ZAKHAROV. « Weak turbulence in media with a decay spectrum ». In : *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 6.4 (1965), p. 22–24.
- [60] VE ZAKHAROV et NN FILONENKO. « Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a liquid ». In : *Soviet Physics Doklady*. T. 11. 1967, p. 881.
- [61] Mark A DONELAN et al. « On the dependence of sea surface roughness on wave development ». In : *Journal of physical Oceanography* 23.9 (1993), p. 2143–2149.
- [62] Paul A HWANG et al. « Airborne measurements of the wavenumber spectra of ocean surface waves. Part I : Spectral slope and dimensionless spectral coefficient ». In : *Journal of Physical Oceanography* 30.11 (2000), p. 2753–2767.
- [63] Leonel ROMERO et W Kendall MELVILLE. « Airborne observations of fetch-limited waves in the Gulf of Tehuantepec ». In : *Journal of Physical Oceanography* 40.3 (2010), p. 441–465.
- [64] OM PHILLIPS. « On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part 1. The elementary interactions ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 9.2 (1960), p. 193–217.
- [65] F. LECKLER et al. « Analysis and Interpretation of Frequency-Wavenumber Spectra of Young Wind Waves ». In : *J. Phys. Ocean.* 45.10 (2015), p. 2484–2496. ISSN : 0022-3670. DOI : [10.1175/JPO-D-14-0237.1](https://doi.org/10.1175/JPO-D-14-0237.1).
- [66] John W MILES. « On the generation of surface waves by shear flows. Part 4 ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 13.3 (1962), p. 433–448.
- [67] Yoshiaki TOBA et Momoki KOGA. « A parameter describing overall conditions of wave breaking, whitecapping, sea-spray production and wind stress ». In : *Oceanic whitecaps*. Springer, 1986, p. 37–47.
- [68] Sergey NAZARENKO et Sergei LUKASCHUK. « Wave turbulence on water surface ». In : *Annual Review of Condensed Matter Physics* 7 (2016), p. 61–88.

- [69] L. DEIKE et al. « Role of the basin boundary conditions in gravity wave turbulence ». In : *J. Fluid Mech.* 781 (2015), p. 196–225. DOI : [10.1017/jfm.2015.494](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.494).
- [70] Q. AUBOURG et al. « Three-wave and four-wave interactions in gravity wave turbulence ». In : *Phys. Rev. Fluids* 2.11 (2017), p. 114802.
- [71] Miguel ONORATO et al. « Freely decaying weak turbulence for sea surface gravity waves ». In : *Physical review letters* 89.14 (2002), p. 144501.
- [72] M ONORATO, AR OSBORNE et M SERIO. « On the relation between two numerical methods for the computation of random surface gravity waves ». In : *European Journal of Mechanics/B Fluids* 26.1 (2007), p. 43–48.
- [73] Mitsuhiro TANAKA. « A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation ». In : *Fluid Dynamics Research* 28.1 (2001), p. 41.
- [74] Sergei I BADULIN et al. « Weakly turbulent laws of wind-wave growth ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 591 (2007), p. 339–378.
- [75] R Glynn HOLT et Eugene H TRINH. « Faraday wave turbulence on a spherical liquid shell ». In : *Physical review letters* 77.7 (1996), p. 1274.
- [76] Eric FALCON. « Laboratory experiments on wave turbulence ». In : *arXiv preprint arXiv :1001.0754* (2010). URL : <https://arxiv.org/abs/1001.0754> (visité le 05/07/2017).
- [77] Claudio FALCON et al. « Capillary wave turbulence on a spherical fluid surface in low gravity ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 86.1 (2009), p. 14002.
- [78] Luc DEIKE, Michael BERHANU et Eric FALCON. « Decay of capillary wave turbulence ». In : *Physical Review E* 85.6 (2012), p. 066311.
- [79] German Valentinovich KOLMAKOV et al. « Capillary turbulence on the surfaces of quantum fluids ». In : *Progress in Low Temperature Physics*. T. 16. Elsevier, 2009, p. 305–349.
- [80] GV KOLMAKOV et al. « Quasiadiabatic decay of capillary turbulence on the charged surface of liquid hydrogen ». In : *Physical review letters* 93.7 (2004), p. 074501.
- [81] AN GANSHIN et al. « Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium ». In : *Physical review letters* 101.6 (2008), p. 065303.
- [82] M. BERHANU et E. FALCON. « Space-time-resolved capillary wave turbulence ». In : *Physical Review E* 89 (2013), p. 033003.
- [83] M. BERHANU, E. FALCON et L. DEIKE. « Turbulence of capillary waves forced by steep gravity waves ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 850 (2018), 803843. DOI : [10.1017/jfm.2018.467](https://doi.org/10.1017/jfm.2018.467).
- [84] S TRILLO et al. « Observation of dispersive shock waves developing from initial depressions in shallow water ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 333 (2016), p. 276–284.

- [85] D RESIO et W PERRIE. « A numerical study of nonlinear energy fluxes due to wave-wave interactions Part 1. Methodology and basic results ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 223 (1991), p. 603–629.
- [86] AN PUSHKAREV et VE ZAKHAROV. « Turbulence of capillary wavestheory and numerical simulation ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 135.1-2 (2000), p. 98–116.
- [87] Yulin PAN et Dick K. P. YUE. « Decaying capillary wave turbulence under broad-scale dissipation ». en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 780 (oct. 2015). ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : [10.1017/jfm.2015.487](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.487). URL : [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112015004875](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112015004875) (visité le 13/10/2015).
- [88] Luc DEIKE et al. « Direct numerical simulations of capillary wave turbulence ». In : *Physical review letters* 112.23 (2014), p. 234501.
- [89] Eric HERBERT, Nicolas MORDANT et Eric FALCON. « Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid ». In : *Physical review letters* 105.14 (2010), p. 144502. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.105.144502> (visité le 04/11/2015).
- [90] Pablo COBELLI et al. « Space-Time Resolved Wave Turbulence in a Vibrating Plate ». en. In : *Physical Review Letters* 103.20 (nov. 2009). ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.103.204301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.204301). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.204301> (visité le 30/01/2017).
- [91] Adam PRZADKA. « Mesures spatio-temporelles d'ondes à la surface de l'eau : retournement temporel et turbulence d'onde. » Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2012. URL : <http://hal.upmc.fr/pastel-00790720> (visité le 06/11/2015).
- [92] Pablo COBELLI et al. « Different Regimes for Water Wave Turbulence ». In : *Physical Review Letters* 107.21 (nov. 2011), p. 214503.
- [93] Petr DENISSENKO, Sergei LUKASCHUK et Sergey NAZARENKO. « Gravity wave turbulence in a laboratory flume ». In : *Physical review letters* 99.1 (2007), p. 014501.
- [94] Quentin AUBOURG et Nicolas MORDANT. « Nonlocal resonances in weak turbulence of gravity-capillary waves ». In : *Physical review letters* 114.14 (2015), p. 144501. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.114.144501> (visité le 02/10/2015).
- [95] Earl H DOWELL. « Nonlinear oscillations of a fluttering plate. » In : *AIAA journal* 4.7 (1966), p. 1267–1275.
- [96] Richard COURANT, Kurt FRIEDRICHS et Hans LEWY. « Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik ». In : *Mathematische annalen* 100.1 (1928), p. 32–74.

- [97] M AMABILI. « Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions : theory and experiments ». In : *Computers & Structures* 82.31-32 (2004), p. 2587–2605.
- [98] Jerry H GINSBERG. *Mechanical and structural vibrations : theory and applications*. Sirsi) i9780471370840. 2001.
- [99] Ernst HAIRER, Christian LUBICH et Gerhard WANNER. *Geometric numerical integration : structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. T. 31. Springer Science & Business Media, 2006.
- [100] Gunay ANLAS et Ozer ELBEYLI. « Nonlinear vibrations of a simply supported rectangular metallic plate subjected to transverse harmonic excitation in the presence of a one-to-one internal resonance ». In : *Nonlinear Dynamics* 30.1 (2002), p. 1–28.
- [101] J YANG et Hui-Shen SHEN. « Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates ». In : *Composite Structures* 54.4 (2001), p. 497–508.
- [102] Michele DUCCESCHI, Cyril TOUZÉ et Stefan BILBAO. « Nonlinear plate vibrations : A modal approach with application to cymbals and gongs ». In : *Acoustics 2012*. 2012.
- [103] TE CARMICHAEL. « The vibration of a rectangular plate with edges elastically restrained against rotation ». In : *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 12.1 (1959), p. 29–42.
- [104] XL YANG et PR SETHNA. « Local and global bifurcations in parametrically excited vibrations of nearly square plates ». In : *International journal of Non-linear Mechanics* 26.2 (1991), p. 199–220.
- [105] P RIBEIRO. « Nonlinear vibrations of simply-supported plates by the p-version finite element method ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 41.9-10 (2005), p. 911–924.
- [106] Stefan BILBAO. « A family of conservative finite difference schemes for the dynamical von Karman plate equations ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 24.1 (2008), p. 193–216.
- [107] Cyril TOUZÉ, Stefan BILBAO et Olivier CADOT. « Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 331.2 (2012), p. 412–433.
- [108] Stefan BILBAO. « Percussion synthesis based on models of nonlinear shell vibration ». In : *IEEE transactions on audio, speech, and language processing* 18.4 (2010), p. 872–880.
- [109] Cyril TOUZÉ, Stefan BILBAO et Olivier CADOT. « Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates ». In : *Journal of Sound and Vibration* 331.2 (2012), p. 412–433. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X11007565> (visité le 28/03/2017).
- [110] Benjamin MIQUEL et Nicolas MORDANT. « Nonstationary wave turbulence in an elastic plate ». In : *Physical review letters* 107.3 (2011), p. 034501.



- [111] Campagne A et al. « Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves ». In : *submitted to Phys. Rev. Fluids* (2018).
- [112] Jose-Henrique ALVES et al. « Wave modelling - The state of the art ». In : 75 (sept. 2007), p. 603–674.
- [113] Naoto YOKOYAMA et Masanori TAKAOKA. « Weak and strong wave turbulence spectra for elastic thin plate ». In : *Physical review letters* 110.10 (2013), p. 105501.
- [114] Naoto YOKOYAMA et Masanori TAKAOKA. « Identification of Separation Wavenumber between Weak and Strong Turbulence Spectra for Vibrating Plate ». In : *Physical Review E* 89.1 (jan. 2014). arXiv : 1312.7211. ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : [10.1103/PhysRevE.89.012909](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.012909). URL : <http://arxiv.org/abs/1312.7211> (visité le 10/04/2018).
- [115] Pablo Javier COBELLI et al. « Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry ». en. In : *Experiments in Fluids* 46.6 (juin 2009), p. 1037–1047. ISSN : 0723-4864, 1432-1114. DOI : [10.1007/s00348-009-0611-z](https://doi.org/10.1007/s00348-009-0611-z). URL : <http://link.springer.com/10.1007/s00348-009-0611-z> (visité le 12/10/2015).
- [116] Agnès MAUREL et al. « Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in Fourier transform profilometry ». In : *Applied optics* 48.2 (2009), p. 380–392. URL : <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?uri=ao-48-2-380> (visité le 13/12/2016).
- [117] Benjamin MIQUEL et Nicolas MORDANT. « Nonlinear dynamics of flexural wave turbulence ». In : *Physical Review E* 84.6 (2011), p. 066607. URL : <http://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.84.066607> (visité le 02/10/2015).
- [118] Steven M COX et Paul C MATTHEWS. « Exponential time differencing for stiff systems ». In : *Journal of Computational Physics* 176.2 (2002), p. 430–455.
- [119] A. PRZADKA et al. « Fourier transform profilometry for water waves : how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface? » en. In : *Experiments in Fluids* 52.2 (fév. 2012), p. 519–527. ISSN : 0723-4864, 1432-1114. DOI : [10.1007/s00348-011-1240-x](https://doi.org/10.1007/s00348-011-1240-x). URL : <http://link.springer.com/10.1007/s00348-011-1240-x> (visité le 03/04/2017).
- [120] Hongbo ZHOU et al. « A facile microfluidic strategy for measuring interfacial tension ». In : *Applied Physics Letters* 103.23 (2013), p. 234102.
- [121] Gustavo DÜRING et Claudio FALCÓN. « Symmetry induced four-wave capillary wave turbulence ». In : *Physical review letters* 103.17 (2009), p. 174503.

- [122] F. PETERS et D. ARABALI. « Interfacial tension between oil and water measured with a modified contour method ». en. In : *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects* 426 (juin 2013), p. 1–5. ISSN : 09277757. DOI : [10.1016/j.colsurfa.2013.03.010](https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2013.03.010). URL : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0927775713001994> (visité le 11/12/2017).
- [123] E. RICCI, R. SANGIORGI et A. PASSERONE. « Density and surface tension of dioctylphthalate, silicone oil and their solutions ». In : *Surface and Coatings Technology* 28.2 (1986), p. 215–223.
- [124] Horst PUNZMANN et al. « Generation and reversal of surface flows by propagating waves ». In : *Nature Physics* 10.9 (2014), p. 658.
- [125] Fabien LECKLER et al. « Analysis and interpretation of frequency–wavenumber spectra of young wind waves ». In : *Journal of Physical Oceanography* 45.10 (2015), p. 2484–2496.
- [126] Quentin AUBOURG. « Etudes expérimentales de la turbulence d’ondes à la surface d’un fluide. La théorie de la Turbulence Faible à l’épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité ». PhD Thesis. Université Grenoble Alpes, 2016.
- [127] Alan C NEWELL, Sergey NAZARENKO et Laura BIVEN. « Wave turbulence and intermittency ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 152 (2001), p. 520–550.
- [128] V ZAKHAROV, F DIAS et A PUSHKAREV. « One-dimensional wave turbulence ». en. In : *Physics Reports* 398.1 (août 2004), p. 1–65. ISSN : 03701573. DOI : [10.1016/j.physrep.2004.04.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.04.002). URL : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157304002212> (visité le 02/09/2016).
- [129] EA KARTASHOVA, LI PITERBARG et GM REZNIK. « Weakly nonlinear interactions between Rossby waves on a sphere ». In : *Oceanology* 29 (1990), p. 405–411.
- [130] Elena KARTASHOVA. « Wave resonances in systems with discrete spectra ». In : *AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY TRANSLATIONS* (1998), p. 95–130.
- [131] Yulin PAN et Dick KP YUE. « Understanding discrete capillary-wave turbulence using a quasi-resonant kinetic equation ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 816 (2017).
- [132] AN PUSHKAREV. « On the Kolmogorov and frozen turbulence in numerical simulation of capillary waves ». In : *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 18.3 (1999), p. 345–351.
- [133] Mitsuhiro TANAKA et Naoto YOKOYAMA. « Effects of discretization of the spectrum in water-wave turbulence ». In : *Fluid Dynamics Research* 34.3 (2004), p. 199–216.



- [134] V. S. LVOV et Sergey NAZARENKO. « Discrete and mesoscopic regimes of finite-size wave turbulence ». In : *Physical Review E* 82.5 (2010), p. 056322. URL : <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.82.056322> (visité le 03/07/2017).
- [135] Vladimir Evgen'evich ZAKHAROV et al. « Mesoscopic wave turbulence ». In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 82.8 (2005), p. 487–491.
- [136] S. NAZARENKO et al. « Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains ». In : *J. Fluid Mech.* 642 (2009), p. 395.
- [137] AJ MAJDA, DW MCLAUGHLIN et EG TABAK. « A one-dimensional model for dispersive wave turbulence ». In : *Journal of Nonlinear Science* 7.1 (1997), p. 9–44.
- [138] L BIVEN, SV NAZARENKO et AC NEWELL. « Breakdown of wave turbulence and the onset of intermittency ». In : *Physics Letters A* 280.1-2 (2001), p. 28–32.
- [139] A NICHOLAS. « THEORY OF SHOCK WAVES AND PLASMA WAVE-EMISSION ». In : *Symposium*. 57. International Astronomical Union by D. Reidel. 1953, p. 365.
- [140] Clifford S GARDNER et al. « Method for solving the Korteweg-deVries equation ». In : *Physical review letters* 19.19 (1967), p. 1095.
- [141] VE ZAKHAROV et al. « Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *i. í j ksp* ». In : *Teoret. Fiz. v61 i1* (1971), p. 118–134.
- [142] Alan NEWELL. *Nonlinear optics*. CRC Press, 2018.
- [143] John M DUDLEY et James Roy TAYLOR. *Supercontinuum generation in optical fibers*. Cambridge University Press, 2010.
- [144] NJ ZABUSKY et CJ GALVIN. « Shallow-water waves, the Korteweg-deVries equation and solitons ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 47.4 (1971), p. 811–824.
- [145] Vladan D DJORDJEVIĆ et Larry G REDEKOPP. « On the development of packets of surface gravity waves moving over an uneven bottom ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 29.6 (1978), p. 950–962.
- [146] Engui FAN et YC HON. « A series of travelling wave solutions for two variant Boussinesq equations in shallow water waves ». In : *Chaos, Solitons & Fractals* 15.3 (2003), p. 559–566.
- [147] Roberto CAMASSA, Darryl D HOLM et James M HYMAN. « A new integrable shallow water equation ». In : *Advances in Applied Mechanics*. T. 31. Elsevier, 1994, p. 1–33.
- [148] Per A MADSEN, HB BINGHAM et Hua LIU. « A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 462 (2002), p. 1–30.

- [149] De-Xin MENG et al. « N-fold Darboux transformation and solitonic interactions of a variable-coefficient generalized Boussinesq system in shallow water ». In : *Applied Mathematics and Computation* 218.8 (2011), p. 4049–4055.
- [150] S. PERRARD et al. « Capillary solitons on a levitated medium ». en. In : *Physical Review E* 92.1 (juil. 2015). ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : [10.1103/PhysRevE.92.011002](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.011002). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.011002> (visité le 09/01/2017).
- [151] JK HUNTER et J-M VANDEN-BROECK. « Solitary and periodic gravity-capillary waves of finite amplitude ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 134 (1983), p. 205–219.
- [152] F DIAS. « Numerical study of capillary-gravity solitary waves ». In : *Eur. J. Mech. B/Fluids* 15 (1996), p. 17–36.
- [153] J Thomas BEALE. « Exact solitary water waves with capillary ripples at infinity ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 44.2 (1991), p. 211–257.
- [154] Roger GRIMSHAW. « Solitary waves with oscillatory tails and exponential asymptotics ». In : *Geophysical fluid dynamics : WHOI*. 34 (1993), p. 292.
- [155] Charles J AMICK et Klaus KIRCHGÄSSNER. « A theory of solitary water-waves in the presence of surface tension ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 105.1 (1989), p. 1–49.
- [156] Gérard IOOSS et Klaus KIRCHGÄSSNER. « Water waves for small surface tension : an approach via normal form ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* 122.3-4 (1992), p. 267–299.
- [157] Frédéric DIAS et Gérard IOOSS. « Capillary-gravity solitary waves with damped oscillations ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 65.4 (1993), p. 399–423.
- [158] AR CHAMPNEYS, J-M VANDEN-BROECK et GJ LORD. « Do true elevation gravity-capillary solitary waves exist? A numerical investigation ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 454 (2002), p. 403–417.
- [159] Michael S. LONGUET-HIGGINS. « Capillary-gravity waves of solitary type and envelope solitons on deep water ». en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 252.-1 (juil. 1993), p. 703. ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : [10.1017/S0022112093003945](https://doi.org/10.1017/S0022112093003945). URL : [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112093003945](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112093003945) (visité le 19/10/2016).
- [160] Michael LONGUET-HIGGINS et Xin ZHANG. « Experiments on capillary-gravity waves of solitary type on deep water ». In : *Physics of Fluids (1994-present)* 9.7 (1997), p. 1963–1968. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/9/7/10.1063/1.869315> (visité le 12/01/2017).

- [161] Jason LAURIE et al. « One-dimensional optical wave turbulence : Experiment and theory ». en. In : *Physics Reports* 514.4 (mai 2012), p. 121–175. ISSN : 03701573. DOI : [10.1016/j.physrep.2012.01.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.004). URL : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157312000130> (visité le 08/01/2017).
- [162] A SCHWACHE et F MITSCHKE. « Properties of an optical soliton gas ». In : *Physical Review E* 55.6 (1997), p. 7720.
- [163] F MITSCHKE, I HALAMA et A SCHWACHE. « Soliton gas ». In : *Chaos Solitons and Fractals* 10.4 (1999), p. 913–920.
- [164] Andrea COSTA et al. « Soliton turbulence in shallow water ocean surface waves ». In : *Physical review letters* 113.10 (2014), p. 108501. URL : <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.113.108501> (visité le 18/10/2016).
- [165] G. A. EL, R. H. J. GRIMSHAW et M. V. PAVLOV. « Integrable Shallow-Water Equations and Undular Bores ». en. In : *Studies in Applied Mathematics* 106.2 (fév. 2001), p. 157–186. ISSN : 00222526. DOI : [10.1111/1467-9590.00163](https://doi.org/10.1111/1467-9590.00163). URL : <http://doi.wiley.com/10.1111/1467-9590.00163> (visité le 03/11/2016).
- [166] Gennady A. EL. « Critical density of a soliton gas ». In : *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26.2 (2016), p. 023105. URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/chaos/26/2/10.1063/1.4941372> (visité le 06/12/2016).
- [167] Stéphane RANDOUX et al. « Nonlinear random optical waves : integrable turbulence, rogue waves and intermittency ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 333 (2016), p. 323–335.
- [168] Andrey Nikolaevich KOLMOGOROV. « The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. T. 30. 4. 1941, p. 299–303.
- [169] Sergio CHIBBARO et Christophe JOSSEMAND. « Elastic wave turbulence and intermittency ». In : *Physical Review E* 94.1 (2016), p. 011101.
- [170] Gustavo DÜRING et Giorgio KRSTULOVIC. « Exact result in strong wave turbulence of thin elastic plates ». In : *Physical Review E* 97.2 (2018), p. 020201.
- [171] Gustavo DÜRING et Giorgio KRSTULOVIC. « An exact result in strong wave turbulence of thin elastic plates ». In : *arXiv preprint arXiv :1703.06159* (2017). URL : <https://arxiv.org/abs/1703.06159> (visité le 20/09/2017).
- [172] Gustavo DÜRING, Christophe JOSSEMAND et Sergio RICA. « Wave turbulence theory of elastic plates ». en. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 347 (mai 2017), p. 42–73. ISSN : 01672789. DOI : [10.1016/j.physd.2017.01.002](https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.01.002). URL : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167278916303852> (visité le 20/09/2017).

- [173] Hugues VANDEPARRE et al. « Wrinkling Hierarchy in Constrained Thin Sheets from Suspended Graphene to Curtains ». en. In : *Physical Review Letters* 106.22 (juin 2011). ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.106.224301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.224301). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.224301> (visité le 13/10/2017).
- [174] G. DÜRING et al. « A Kolmogorov spectrum for strongly vibrating plates ». In : *ArXiv e-prints* (août 2018). arXiv : [1808.02025 \[nlin.CD\]](https://arxiv.org/abs/1808.02025).
- [175] M. WILCZEK et Y. NARITA. « Wave-numberfrequency spectrum for turbulence from a random sweeping hypothesis with mean flow ». en. In : *Physical Review E* 86.6 (déc. 2012). ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : [10.1103/PhysRevE.86.066308](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.066308). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.86.066308> (visité le 02/11/2017).
- [176] P. K. YEUNG et Brian L. SAWFORD. « Random-sweeping hypothesis for passive scalars in isotropic turbulence ». en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 459 (mai 2002). ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : [10.1017/S0022112002008248](https://doi.org/10.1017/S0022112002008248). URL : [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112002008248](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112002008248) (visité le 02/11/2017).
- [177] S PERRARD et al. « Capillary solitons on a levitated medium ». In : *Physical Review E* 92.1 (2015), p. 011002.
- [178] EA KUZNETSOV et Frederic DIAS. « Bifurcations of solitons and their stability ». In : *Physics Reports* 507.2 (2011), p. 43–105.