



HAL
open science

Les enseignements de la micro-économie de la production face aux enjeux environnementaux : étude des productions jointes théorie et applications

Arnaud Abad

► **To cite this version:**

Arnaud Abad. Les enseignements de la micro-économie de la production face aux enjeux environnementaux : étude des productions jointes théorie et applications. Economies et finances. Université de Perpignan, 2018. Français. NNT : 2018PERP0035 . tel-01963415

HAL Id: tel-01963415

<https://theses.hal.science/tel-01963415>

Submitted on 21 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par
UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA

Préparée au sein de l'école doctorale
544 INTER-MED

Et de l'unité de recherche
LAMPS (EA UPVD 4217)

Spécialité :
Sciences économiques

Présentée par
ABAD Arnaud

TITRE DE LA THESE

Les Enseignements de la Micro-économie de la Production face aux
Enjeux Environnementaux :
Etude des Productions Jointes
Théorie et Applications

Soutenue le 18 septembre 2018 devant le jury composé de

M. Stéphane BLANCARD , Professeur à Agrosup Dijon	Examineur
M. Jean-Philippe BOUSSEMART , Professeur à l'Université de Lille 3	Examineur
M. Walter BRIEC , Professeur à l'Université de Perpignan	Directeur
M. Jean-Paul CHAVAS , Professeur à l'Université de Wisconsin-Madison	Rapporteur
M. Charles HORVATH , Professeur à l'Université de Perpignan	Examineur
M. Hervé LELEU , Directeur de Recherche CNRS - Lille	Rapporteur

L'Université n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans la thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à l'auteur.

Remerciements

Je dédie cette thèse à la mémoire de mon père Alain Abad.

Je tiens à adresser mes plus profonds remerciements à Monsieur le Professeur Walter Bricc pour son encadrement doctoral. Sa disponibilité, sa rigueur et son exemplarité scientifique, ont été des guides précieux dans la réalisation de ces travaux.

J'adresse des remerciements appuyés à Monsieur le Professeur Stéphane Blancard qui a accepté de participer à ce jury.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur Jean-Philippe Boussebart pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Je tiens à remercier très chaleureusement Monsieur le Professeur Jean-Paul Chavas pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ces travaux.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Charles Horvath pour avoir accepté de participer à ce jury.

J'exprime ma plus profonde gratitude à Monsieur le Professeur Hervé Leleu, Directeur de Recherche au CNRS pour avoir accepté de rapporter cette thèse.

Je remercie également Monsieur le Professeur Jacques Percebois initiateur de mes activités de recherche et membre de mon Comité de Suivi de Thèse. Pareillement, j'adresse de vifs remerciements à Monsieur le Professeur Nicolas Peypoch pour nos échanges et pour sa participation à mon Comité de Suivi de Thèse.

Je remercie le Docteur Bertrand Carlander pour son soutien médical qui m'a permis de mener à bien ces travaux.

J'adresse un remerciement appuyé à Paola Ravelojaona pour le temps qu'elle m'a accordé durant mes activités de recherche. Ces moments ont été une source d'inspiration et d'entrain notoire.

Je remercie ma mère, Céline Giagnorio, et mes grands-parents, Marie et Marcel Abad, sans qui le travail entrepris durant ces dernières années n'aurait pu aboutir. De plus, pour nos échanges amicaux et nos moments de distractions, j'adresse des remerciements à Stephane, Guillaume, Florent, Pierre, Marlène, Florent, Marion, Marie-Claire, Faouzi...

Sommaire

Introduction Générale	1
I Structure de la Technologie de Production	22
1 Schéma Usuel en Théorie de la Production	23
1 Introduction	23
2 Ensemble des Possibilités Productives : Définition et Hypothèses Conventionnelles	24
2.1 Le graphe de la technologie de production	24
2.2 La correspondance en inputs	26
2.3 L'ensemble en outputs	28
2.4 Relâchement des hypothèses de disponibilité et de convexité	29
3 Identification des Points Efficaces	33
3.1 Les points efficaces et faiblement efficaces dans T	33
3.2 Les points efficaces et faiblement efficaces dans l'ensemble en inputs . . .	33
3.3 Les points efficaces et faiblement efficaces dans la correspondance en out- puts	35
4 Les Rendements d'Échelle	36
4.1 Les rendements d'échelle constants	36
4.2 Les rendements d'échelle non décroissants ou non croissants	37
4.3 Les rendements d'échelle décroissants et croissants	37
5 Modélisation de la Technologie de Production	38
5.1 Ensemble de production polyédrique	38

SOMMAIRE

5.2	Les différents types de rendements d'échelle	39
5.2.1	Rendements d'échelle constants	40
5.2.2	Rendements d'échelle variables	41
5.2.3	Rendements d'échelle non croissants	42
5.2.4	Rendements d'échelle non décroissants	42
5.3	Relâchement des hypothèses de disponibilité et de convexité	43
5.3.1	Ensemble de production polyédrique et hypothèse de disponibilité faible	43
5.3.2	Le modèle FDH	45
6	Conclusion	48
2	Structure des Technologies de Production Polluante	49
1	Introduction	49
2	Partitionnement des Intrants et des Extrants en Composantes Polluantes et Non Polluantes	50
3	Ensemble de Production Usuel et Activités Productives Polluantes	51
3.1	La technologie de production et ses correspondances productives	51
3.2	Les correspondances Q et Z	52
3.3	Ensemble de production usuel et partitionnement des outputs : limites	55
4	Ensemble de Production Non Conventionnel et Activités Productives Polluantes	55
4.1	Les productions polluantes considérées comme des inputs	55
4.1.1	L'ensemble des possibilités productives : hypothèses et définition	55
4.1.2	Les principales critiques concernant cette approche axiomatique	57
4.2	Technologies de production jointe	57
4.2.1	L'ensemble des possibilités productives : hypothèses et définition	57
4.2.2	La technologie de production jointe et ses correspondances productives	59
4.2.3	Les principales critiques relatives à cette approche axiomatique	60
5	Ensemble de Production avec Partitionnement des Intrants et des Extrants : les Principales Avancées	61

SOMMAIRE

5.1	Les approches basées sur les principes physiques élémentaires	61
5.1.1	Les principes de la thermodynamique	62
5.1.2	L'approche axiomatique proposée par Rödseth (2017)	63
5.1.3	Les principales critiques relatives à cette approche axiomatique .	66
5.2	Technologies de coproduction	67
5.2.1	L'ensemble des possibilités productives : hypothèses et définition	67
5.2.2	La technologie de coproduction et ses correspondances produc- tives	69
5.2.3	Les principales critiques concernant cette approche axiomatique	72
6	Spécification Non Paramétrique des Technologies de Production Polluante	74
6.1	Les approches directes et indirectes	74
6.1.1	Les approches indirectes	75
6.1.2	Les approches directes	76
6.2	Spécification non paramétrique du modèle proposée par Rödseth (2017) . .	80
6.3	Modélisation non paramétrique des technologies de coproduction	81
7	Conclusion	82
3	Technologie de Production Polluante : l'Hypothèse de B-Disponibilité	84
1	Introduction	84
2	Ensemble de Production B -Congestionné avec Partitionnement des Outputs	85
2.1	Ensemble en outputs B -disponibles : Hypothèses et Définition	85
2.2	Correspondance en outputs B -disponibles	87
2.3	Identification et catégorisation de la frontière inférieure de $P(x)$	92
2.4	Ensemble en outputs B -congestionné non convexe	94
3	Technologie de Production B -Congestionnée avec Partitionnement des Intrants et des Extrants	95
3.1	Généralisation de l'hypothèse de B -disponibilité : Hypothèses et Définition	95
3.2	La technologie de production B -disponible et ses correspondances pro- ductives	97
3.3	Identification et catégorisation des frontières B -congestionnées dans T . .	103

SOMMAIRE

3.4	Technologie de production B -congestionnée non convexe	104
4	Technologie de Production Polluante Convexe et Non Convexe : Spécification Non Paramétrique	105
4.1	Ensemble de production B -disponible et partitionnement des extrants : spécification non paramétrique	106
4.1.1	Technologie de production polluante convexe	106
4.1.2	Technologie de production polluante non convexe	109
4.2	Technologie de production B -disponible et partitionnement des intrants et des extrants : spécification non paramétrique	111
4.2.1	Technologie de production polluante convexe	111
4.2.2	Technologie de production polluante non convexe	114
5	Conclusion	116

II Fonctions de Distance et Caractérisation des Technologies de Production **119**

4	Fonctions de Distance et Technologie de Production Usuelle	120
1	Introduction	120
2	La Fonction de Distance de Shephard	121
2.1	Orientations en input et en output	122
2.2	Extension de la mesure de Shephard	128
2.3	Théorie de la dualité	129
3	La Fonction de Distance Directionnelle	133
3.1	Définition et propriétés	133
3.2	Équivalence avec les mesures radiales	138
3.3	Principe de la dualité	139
4	Les Fonctions de Distance : Spécification Non Paramétrique	142
4.1	Les mesures multiplicatives	142
4.2	Les mesures additives	144
5	Conclusion	148

5	Fonctions de Distance et Technologie de Production Polluante	149
1	Introduction	149
2	Technologie de Production Polluante et Mesures de l'Effici- ence Technique : Cadre d'Analyse	150
3	Fonctions de Distance Multiplicatives et Technologie de Production Polluante . . .	151
3.1	Fonctions de distance de Shephard	152
3.2	Les mesures d'efficience technique dans le graphe de la technologie de production polluante	154
4	Fonctions de Distance Additives et Technologie de Production Polluante	157
4.1	Fonctions de distance directionnelle	158
4.2	Fonction de distance proportionnelle pondérée	164
5	Technologie de Production Polluante, Mesures de l'Effici- ence et Dualité	166
5.1	Fonction de distance de Shephard en output B -disponible et fonction de revenu : un résultat de dualité	166
5.2	Fonctions de distance directionnelle et dualité	171
6	Fonctions de Distance : Spécification Non Paramétrique	176
6.1	Fonction de distance multiplicative généralisée	176
6.2	Fonction de distance additive généralisée	179
7	Conclusion	184
6	Technologie de Production Polluante : Tests de Congestion et de Convexité	186
1	Introduction	186
2	Test de Congestion en Outputs Non Polluants	187
2.1	Structure multiplicative	187
2.2	Structure additive	190
3	Test de Convexité	192
3.1	Structure multiplicative	192
3.2	Structure additive	196
4	Tests de Congestion en Outputs Non Polluants et de Convexité : Spécification Non- Paramétrique	198

SOMMAIRE

4.1	Structure multiplicative	198
4.2	Structure additive	203
5	Illustration Empirique	207
5.1	Présentation des données	207
5.2	Implémentation des tests de congestion en outputs non polluants et de convexité	207
6	Conclusion	208
 III Les Mesures de Productivité		211
 7 Les Mesures de Productivité Multiplicatives et Additives		212
1	Introduction	212
2	Indices et Indicateurs de Productivité : Définition Usuelle	213
2.1	Indice de Malmquist et indicateur de Luenberger	213
2.2	Indice de Hicks-Moorsteen et indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen .	216
3	Les Mesures d'Eco-Productivité	218
3.1	Mesure de Malmquist-Luenberger et indicateur d'éco-productivité de Luenberger	219
3.2	Les mesures d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen et de Luenberger-Hicks-Moorsteen	221
3.2.1	Indices d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen	221
3.2.2	Indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen .	228
4	Illustration Empirique	236
4.1	Mesures d'éco-Productivité : spécification Non-Paramétrique	236
4.2	Une analyse de l'éco-productivité : le secteur aéroportuaire français	242
5	Conclusion	246
 8 Indices et Indicateurs d'Eco-Productivité : Généralisation		247
1	Introduction	247
2	Indice d'Eco-Productivité Généralisée	248
3	Indicateur d'Eco-Productivité Généralisé	252

SOMMAIRE

4	Connexions avec les Mesures Existantes	257
4.1	Structure multiplicative	257
4.2	Structure additive	263
5	Mesures d'Eco-Productivité Généralisées : spécification Non-Paramétrique	268
6	Conclusion	275
	Conclusion Générale	278
	Annexe 1	284
	Annexe 2	289
	Annexe 3	303
	Annexe 4	305
	Annexe 5	311
	Références Bibliographiques	324

Table des figures

1	Graphe de la Technologie	27
2	Correspondance en inputs	28
3	Correspondance en outputs	30
4	Disponibilité des inputs	30
5	Disponibilité des outputs	31
6	Correspondance en inputs non convexe	32
7	Correspondance en outputs non convexe	32
8	Ensembles efficient et faiblement efficient dans $L(y)$	34
9	Ensembles efficient et faiblement efficient dans $P(x)$	35
10	Graphe de la Technologie (CRS)	36
11	Graphe de la Technologie (NDRS)	37
12	Graphe de la Technologie (NIRS)	37
13	Graphe de la Technologie (IRS)	38
14	Graphe de la Technologie (DRS)	38
15	Ensemble en inputs de type polyédrique	40
16	Correspondance en outputs de type polyédrique	40
17	DEA-Rendements d'échelle constants (CRS)	41
18	DEA-Rendements d'échelle variables (VRS)	42
19	DEA-Rendements d'échelle non croissants (NIRS)	43
20	DEA-Rendements d'échelle non décroissants (NDRS)	44
21	Ensemble en inputs de type polyédrique et disponibilité faible	44
22	Correspondance en outputs de type polyédrique et disponibilité faible	44

TABLE DES FIGURES

23	Ensemble de production non convexe (FDH)	46
24	Correspondance en inputs non convexe (FDH)	47
25	Ensemble en outputs non convexe (FDH)	47
1	Correspondance en outputs désirables et indésirables (P1-P8)	53
2	Correspondance en intrants et en productions résiduelles	54
3	Correspondance en intrants et en productions désirables	54
4	Pseudo correspondance en inputs $\tilde{L}(y^{np})$	56
5	Correspondance en outputs désirables et indésirables (PJ1-PJ8)	59
6	Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^{wd}(y^{np})$	60
7	Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^{wd}(y^p)$	60
8	Correspondance en outputs désirables et indésirables (MBP1-MBP6)	65
9	Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^{mb}(y^{np})$	66
10	Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^{mb}(y^p)$	66
11	Sous-technologies de production T_1 et T_2 (CRS)	69
12	Correspondance en outputs désirables et indésirables (P^{bp})	70
13	Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^{bp}(y^{np})$	71
14	Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^{bp}(y^p)$	71
15	Pseudo ensemble en outputs $\tilde{P}_1^{bp}(x)$ dans l'espace des productions d'abattements et des produits désirables	73
16	Pseudo correspondance en outputs $\tilde{P}_2^{bp}(x)$ dans l'espace des productions d'abatte- ments et des produits indésirables	73
17	Pseudo ensemble en outputs $\tilde{P}_3^{bp}(x)$ dans l'espace des productions désirables et des produits indésirables	73
1	Correspondance en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	87
2	Correspondance en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	88
3	Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	89
4	Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^J(y_2)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	89

TABLE DES FIGURES

5	Sous-ensemble $(P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap \mathbb{R}_+^m$	90
6	Sous-ensemble $(P(x) - K^B) \cap \mathbb{R}_+^m$ avec $B = \{2\}$	90
7	Correspondance en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	90
8	Frontière B -congestionnée et frontière faiblement B -congestionnée	93
9	Remarque 3.5	93
10	Correspondance en outputs B -disponible non convexe $P_{nc}^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	94
11	Ensemble en outputs B -disponible hybride $P_{h-}^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	95
12	Ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	98
13	Correspondance en inputs B -disponible $L^J(y)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	98
14	Ensemble en intrants et en productions résiduelles B -disponible $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	100
15	Correspondance en intrants et en productions désirables B -disponible $Z^J(y_2)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	100
16	Correspondance en inputs et en productions polluantes B -disponible $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	101
17	Ensemble en outputs B -disponible non convexe $P_{nc}^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	104
18	Ensemble en outputs B -disponible hybride $P_{h-}^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	105
1	Mesure de Debreu-Farrell en input	124
2	Mesure de Debreu-Farrell en output	124
3	Fonctions de distance Shephard en input et en output	126
4	Fonction de distance hyperbolique	128
5	Fonction de distance directionnelle	135
6	Fonction de distance directionnelle orientée en input	137
7	Fonction de distance directionnelle orientée en output	137

TABLE DES FIGURES

1	Schémas S1, S2 et S3 dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	151
2	$\psi_{P^J S1}^{-1}, \psi_{P^J S3}^{-1}, \psi_{P^J S2}$ dans l'ensemble $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$.	154
3	Fonctions de distance multiplicatives dans l'ensemble $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	157
4	Fonctions de distance additives dans l'ensemble $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$	161
5	Fonctions de distance directionnelle dans l'ensemble $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	163
6	Proposition 5.22	168
7	Fonction de distance de Shephard en output B -disponible et dualité, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	170
1	Test de congestion dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	188
2	Test global de convexité dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	193
3	Test spécifique de convexité dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$	194
1	Mesure d'efficience technique en composantes indésirables dans l'ensemble $Q_t^J(y_t^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$	230
2	Mesure d'efficience technique en composantes indésirables orientée en output polluant dans l'ensemble $Q_t^J(y_t^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$	234
1	Fonctions de distance additives dans l'ensemble $Q_t^J(y_t^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$	312

Liste des tableaux

2.1	Caractérisation des inputs et des outputs	51
5.1	Fonctions de distance directionnelle et proportionnelle pondérée : schéma S1 . . .	165
5.2	Fonctions de distance directionnelle et proportionnelle pondérée : schéma S2 . . .	166
6.1	Caractérisation de l'ensemble $P^{J,DEA}$	203
6.2	Caractérisation de l'ensemble $P^{J,DEA}$	206
6.3	Caractéristiques des inputs et des outputs	207
6.4	Tests de congestion en outputs non polluants et de convexité	209
6.5	Tests de congestion en outputs non polluants et de convexité (suite)	210
7.1	Indice d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger (2007-2011)	244
7.2	Indicateur d'éco-productivité de Luenberger (2007-2011)	245
7.3	Indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen orienté en output (2007-2011)	245
8.1	EGHM et EGLHM : connexions avec les mesures de productivité existantes	269
8.2	Decomposition de l'indice d'éco-productivité ML (2007-2011)	303
8.3	Decomposition de l'indicateur d'éco-productivité EL (2007-2011)	303
8.4	Indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen (2007-2011)	304
8.5	Decomposition dans la direction des extrants non polluants de l'indicateur d'éco- productivité ELHM orienté en output (2007-2011)	307
8.6	Moyenne des déterminants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM (orientation output) en direction des extrants non polluants (2007-2011)	308

LISTE DES TABLEAUX

8.7	Decomposition dans la direction des extrants polluants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM orienté en output (2007-2011)	309
8.8	Moyenne des déterminants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM (orientation output) en direction des extrants polluants (2007-2011)	310

Introduction Générale

L'avènement des échanges marchands à la fin du Moyen-Age puis, l'essor des activités industrielles (XIXe siècle) permis par la révolution industrielle (XVIIIe siècle), s'accompagnent d'une évolution comportementale majeure. Les individus participant à ces échanges prennent, en fonction des circonstances, le rôle de consommateur ou de producteur. Dès 1776, A. Smith fait remarquer que les agents économiques (producteurs et consommateurs) déterminent leurs actions comme s'ils étaient guidés par une main invisible : "Ce n'est pas de la bienveillance du boucher, du brasseur ou du boulanger que nous attendons notre dîner, mais plutôt du soin qu'ils apportent à la recherche de leur propre intérêt. Nous ne nous en remettons pas à leur humanité, mais à leur égoïsme.". En d'autres termes, la recherche par chacun de son propre intérêt concourt à l'intérêt général. Les agents économiques ont individuellement, intérêt à identifier et à obtenir les avantages permis par l'échange. Les producteurs souhaitent réaliser des gains monétaires et les consommateurs désirent un plus grand niveau de satisfaction. La notion de surplus (Encadré 1) est un concept économique permettant de se référer à ces avantages.

Encadré 1 : le concept de surplus en économie

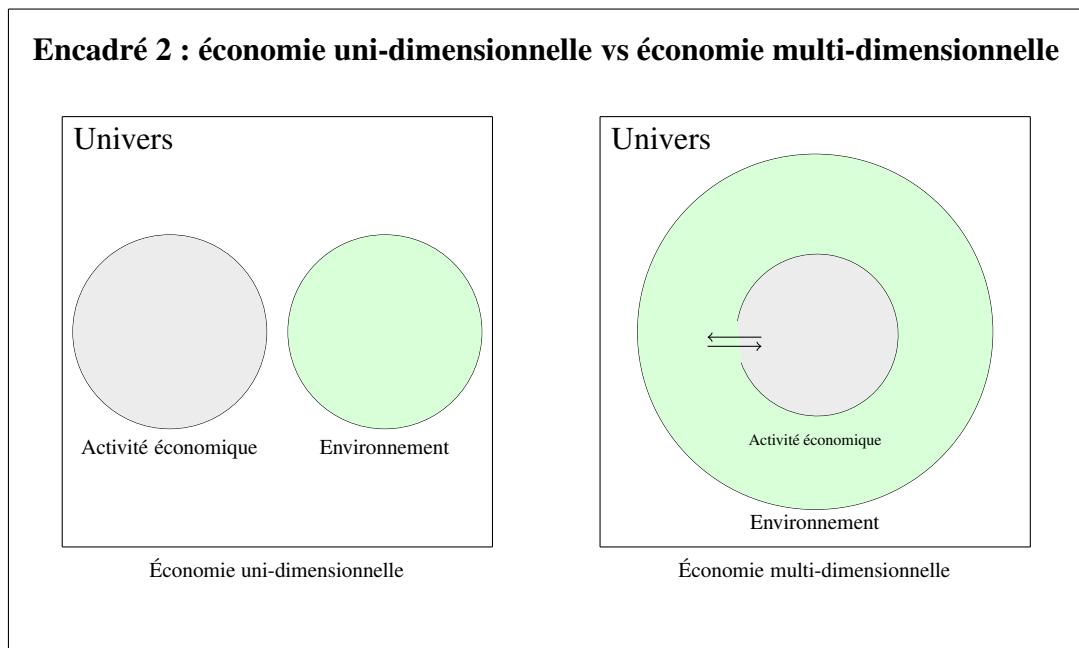
"Une longue approche qui s'étend depuis plus d'un siècle a permis de cerner d'une manière de plus en plus précise le concept vague et flou des "avantages" retirés du fonctionnement de l'économie. Le concept des surplus convenablement élaboré permet de donner une définition opérationnelle qui n'implique aucun recours au concept d'utilité cardinale, et qui est affranchie de toute considération de prix et de toute hypothèse de continuité, de dérivabilité et de convexité." Allais (1989)

M. Allais, prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel (1988), construit la théorie générale des surplus (1989). Cette théorie propose une analyse des situations d'efficacité maximale et d'équilibre général à travers le concept de surplus. Selon Allais (1989) : *"le concept de surplus convenablement élaboré constitue probablement l'instrument d'analyse le plus puissant de l'activité économique."* Dupuit et Pareto apparaissent comme des précurseurs dans l'oeuvre de M. Allais. Tout au long de ses écrits, il s'efforce d'inscrire ses travaux dans une dimension historique. Ainsi, il offre une vaste revue de littérature sur le concept des surplus (voir sixième partie dans Allais (1989)).

Au sein d'une économie marchande, les agents économiques souhaitent capturer les surplus existants (Allais, 1989). La répartition de ces avantages constitue un enjeu essentiel. En cas de situation conflictuelle, la compétition dans la quête du surplus peut conduire à différents types d'affrontements (guerre (économique, militaire, etc.), insurrection, etc.). L'identification, la réalisation et la répartition des avantages à l'échange vont constituer les trois piliers de l'activité économique. A la suite de l'école de pensée néo-classique, cette théorie tend à se définir comme une science axiomatique et déductive. A l'image des sciences exactes, un formalisme mathématique rigoureux s'applique à la science économique. Deux échelles d'analyse sont considérées : la micro-économie et la macro-économie. La première étudie les interactions entre agents économiques (producteurs et consommateurs). La seconde s'intéresse à l'étude des relations entre agrégats économiques (par exemple, revenu national et chômage). La science économique va chercher à identifier les besoins des agents économiques : quelles sont leurs attentes en termes de consommation et de production ? Elle va également analyser la capacité de l'économie à répondre, plus ou moins bien, à ces besoins : comment examiner l'efficacité de l'économie ? Enfin, la science économique va s'intéresser à la nature de cette efficacité : est-elle purement technique ? Qu'en est-il de l'éthique ?

Une interrogation demeure : selon quel paradigme la science économique apporte-t-elle des ré-

ponses à ces différentes problématiques ? Deux paradigmes antagonistes peuvent être identifiés. Le premier consiste à analyser l'activité économique en elle-même : paradigme de l'économie uni-dimensionnelle (Encadré 2). L'activité économique constitue un ensemble fermé et auto-régulé dans lequel opèrent des agents économiques. La science économique établit les lois régissant cet ensemble, sans se soucier du milieu extérieur dans lequel elle se définit. La théorie de l'équilibre général (Walras, 1874) et celle de l'équilibre général partiel (Marshall, 1890) s'inscrivent dans ce paradigme. Il est possible que des éléments externes à l'activité économique viennent altérer son fonctionnement (par exemple, la pollution atmosphérique). Cette anomalie sera résolue au sein de l'activité économique via des outils spécifiques obéissant aux lois régissant son fonctionnement. Selon le second paradigme (Encadré 2), l'activité économique ne peut pas se définir de façon isolée : paradigme de l'économie multi-dimensionnelle. Elle est comprise comme un sous-ensemble en interaction continue avec son ensemble d'appartenance : l'environnement ou plus globalement la biosphère (Encadré 3). L'activité économique ne peut ni ignorer ni s'affranchir des principes fondamentaux qui régissent le milieu dans lequel elle se définit.



Encadré 3 : Environnement, Écologie, Écosystème et Biosphère

Dans ces travaux, nous retenons les définitions suggérées par R. Passet (1990). *"L'environnement, dit Larousse, est "ce qui entoure ; l'ensemble des éléments naturels et artificiels où se déroule la vie humaine". [...] Le cybernéticien Louis Couffignal (1960) précise : "un être humain, une société humaine, un mécanisme quelconque ne peuvent agir que sur une partie, [...] ne subissent l'influence que d'une partie du milieu extérieur. Ces deux parties du milieu extérieur constituent l'environnement de cet être, de cette société, de ce mécanisme". L'idée d'interaction se trouve au coeur de cette définition. L'écologie est précisément la science qui étudie, comme le dit R. Dajoz (1974) "les conditions d'existence des êtres vivants et les interactions de toutes natures qui existent entre ces êtres vivants et leur milieu" [...] "l'ensemble du milieu physique, le biotope, et des espèces qui le peuplent, la biocénose, constitue un écosystème [...] ; la biosphère réunit l'ensemble des écosystèmes" ajoute enfin Dajoz. Si l'environnement évoque "l'entour", c'est-à-dire un ensemble de choses et de phénomènes localisés dans l'espace, la biosphère en revanche, souligne le caractère global des relations qui s'étendent à l'ensemble de la planète et des régulations qui président à la reproduction de cette dernière."*

L'Évaluation des écosystèmes pour le Millénaire (EM), initiée par les Nations Unies (2001), s'est attachée à évaluer, selon une démarche scientifique transdisciplinaire, les conditions et les perspectives d'évolution des écosystèmes et de leurs fonctions. Elle se réfère à la notion de services écosystémiques : *"biens et services que les hommes peuvent tirer des écosystèmes, directement ou indirectement, pour assurer leur bien-être"* (MEA : Millenium Ecosystem Assessment, 2005). Cette étude répond à un objectif global visant à évaluer les conséquences des modifications écosystémiques sur le bien-être humain. D'autres études se référant à la notion de services écosystémiques ont été proposées : TEEB (The Economics of Ecosystem and Biodiversity, 2010). Elles proposent une classification des écosystèmes et des services écosystémiques (voir Annexe 1 et 2 dans TEEB (2010)).

L'école de pensée néo-classique inscrit l'économie de l'environnement dans le paradigme unidimensionnel. Elle admet l'existence de conflits entre l'activité économique et son milieu extérieur. Les activités de consommation ou de production peuvent s'accompagner d'effets externes qui seront corrigés grâce à des instruments spécifiques obéissant aux lois régissant le fonctionnement de l'activité économique (taxe, norme etc.). La théorie des externalités apparaît comme le socle de référence de la théorie économique de l'environnement. Elle trouve ses origines dans les

travaux de Marshall (1890) et Pigou (1932)¹. En opposition à l'approche orthodoxe, l'économie écologique, ou bio-économie, (Boulding, 1966 ; Georgescu-Roegen, 1971) se définit suivant le paradigme multi-dimensionnel. Elle propose de mettre en relation les enseignements de la science économique et ceux issus des sciences physiques, biologiques, écologiques etc.. L'économie écologique s'inscrit dans une démarche transdisciplinaire. Cette approche accorde une place essentielle aux principes de la thermodynamique (S. Carnot) dans l'analyse de l'activité économique.

Les fondements de ces travaux reposent sur les enseignements et les outils de l'école de pensée néo-classique en micro-économie de la production. En effet, nous proposons d'étendre son champ d'analyse à un cadre multi-dimensionnel et transdisciplinaire selon une approche axiomatique. Notre objectif est ainsi, de construire une démarche écologique dans le cadre de la micro-économie de la production². Cette méthodologie nous amènera à étudier des processus productifs particuliers dont les intrants et/ou les extrants sont partitionnés selon des attributs de qualité. Plusieurs interrogations surviennent alors. Comment définir la structure des technologies de production associées à ce type de processus productif ? Quelles en sont les incidences sur la mesure de l'efficacité technique ? Comment analyser sa variation dans le temps ? Conjuguant apports théoriques et empiriques, nous nous efforcerons, tout au long de ces travaux, d'éclairer le lecteur sur ces différentes problématiques.

Des principes de la thermodynamique au concept de production-jointe

Antoine Laurent de Lavoisier (1743-1794) propose d'associer à la matière, un poids. La masse de la matière peut être mesurée avant et après sa transformation. Il existe une équivalence entre le poids des éléments issus de la transformation et la masse initiale de la matière. Sa pensée peut être résumée à travers la maxime : "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme.". Quelle relation existe-t-il entre ce principe et l'analyse de l'activité économique ?

La thermodynamique permet de répondre à cette question. La matière et l'énergie peuvent être considérées comme des facteurs de production essentiels, s'inscrivant dans la genèse de toute acti-

1. Une revue de littérature sur la théorie des externalités peut être trouvée dans Cropper et Oates (1992).

2. Tout au long de ces travaux, nous utiliserons le préfixe "éco" pour se référer à cette approche.

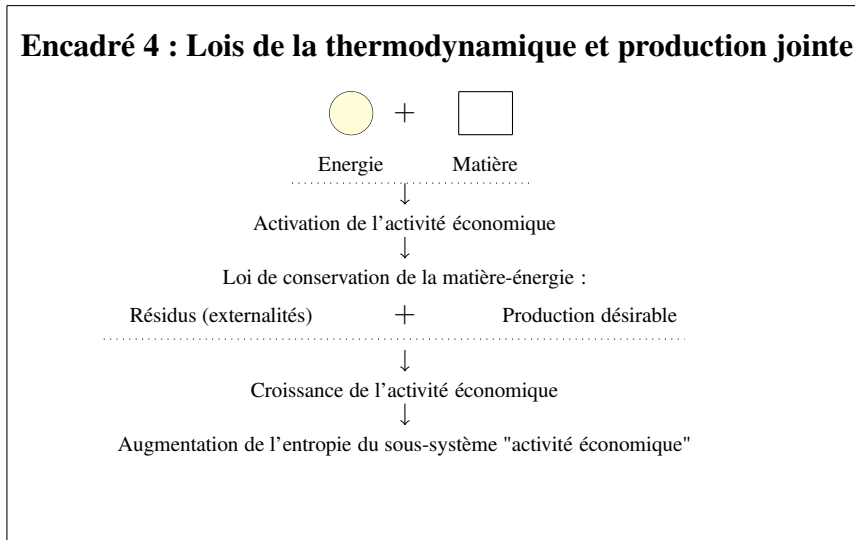
tivité économique. L'ensemble des processus productifs transforment ces intrants en vue de stimuler l'activité économique et ainsi, obéissent aux principes de la thermodynamique (Ayres et Kneese, 1969 ; Georgescu-Roegen, 1971). Deux lois fondamentales s'y appliquent :

1. Principe de conservation de la matière-énergie
2. Principe d'entropie ou de Carnot

D'après la loi de conservation de la matière-énergie, l'être humain participant à l'activité économique ne peut créer la matière ou l'énergie. Il peut uniquement les transformer pour produire des outputs. A l'issue du processus productif, la masse de la matière-énergie transformée sera identique à son poids initial. La maxime inspirée des travaux de Lavoisier, illustre le premier principe de la thermodynamique.

L'économie écologique (Georgescu-Roegen, 1971 ; Boulig, 1966) apporte un éclairage sur l'application de la loi de Carnot dans l'analyse économique. Selon cette approche, l'activité économique est considérée comme un sous-système en interaction continu avec son système d'appartenance (l'environnement ou plus globalement la biosphère). L'entropie correspond à la mesure d'état de ces systèmes. Lorsque les parties prenantes de l'activité économique se mettent en action et consomment de la matière-énergie, elles concourent à la réalisation et à la consommation de produits finis. L'activité économique croît et l'état de ce sous-système est moins ordonné, en d'autres termes son niveau d'entropie augmente. La matière-énergie directement utilisable par les agents économiques diminue tandis que les productions désirables et résiduelles augmentent. Les quantités de productions résiduelles constituent une énergie indirectement utilisable par les agents économiques. L'activité économique et son développement, en transformant la matière-énergie, contribuent à accroître l'entropie. Que retenir de la prise en compte des principes de la thermodynamique dans l'analyse de l'activité économique ?

Les lois de la thermodynamique mettent en lumière l'existence de productions jointes (Encadré 4). La masse des intrants (inputs) transformés au sein du processus productif est identique à la masse des extrants (premier principe). Une quantité minimale d'extrants (outputs) résiduels est obtenu suite au processus de transformation (deuxième principe). La transformation des facteurs de production au sein du processus productif conduit à la création simultanée de produits désirables et résiduels (coproduction). Deux cas de figures peuvent être envisagés :



1. Les résidus sont associés à des effets externes nuls ou positifs. Ils sont considérés comme des outputs neutres ou désirables.
2. Les résidus sont associés à des effets externes négatifs. Ils sont jugés comme des productions indésirables (néfastes).

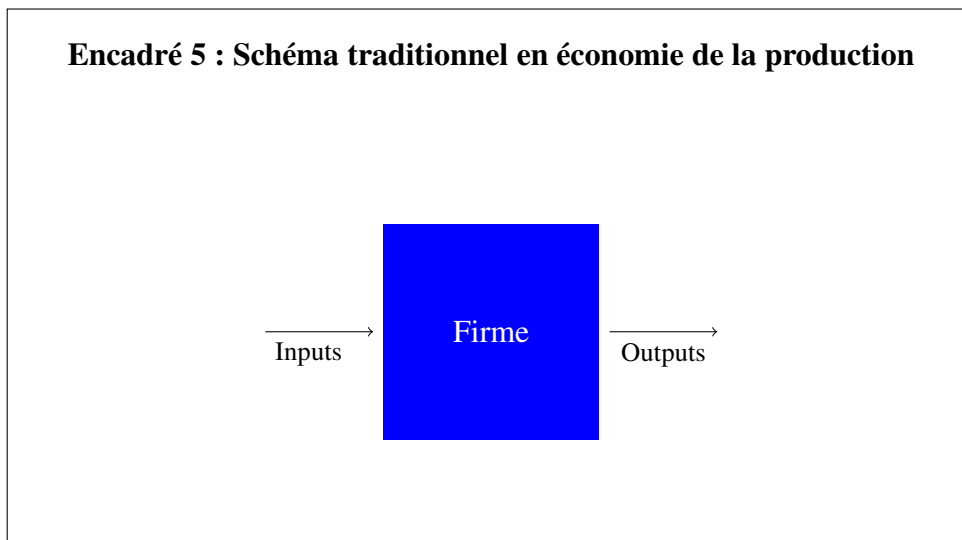
Dans ces travaux, nous nous intéressons à la situation dans laquelle les résidus sont associés à des effets externes négatifs. Dans ce cas, le processus de transformation conduit à la coproduction de produits désirables (souhaitables) et indésirables. Cette situation intervient toujours dans le cadre d'une activité productive polluante (ex : centrale électrique fonctionnant au charbon ou au fioul), qui est l'objet de notre étude.

A ce stade, nous observons qu'il existe des liens étroits entre (i) les principes de la thermodynamique, (ii) la notion de production jointe, et (iii) la théorie des externalités dont nous proposons l'analyse.

La notion de production jointe dans la théorie micro-économique de la production

L'analyse néo-classique considère qu'une firme transforme des intrants en extrants selon une technologie de production (Encadré 5). Le schéma traditionnellement retenu en théorie de la production s'inscrit dans un cadre d'analyse uni-dimensionnel. L'activité productive des firme se dé-

finit indépendamment des influences du milieu extérieur dans lequel elles évoluent (l'environnement ou plus globalement la biosphère); voir Encadré 2. Selon ce schéma, les intrants et/ou les extrants du processus productif ne sont pas catégorisés en composantes polluantes et non polluantes. L'entrepreneur choisit une technique de production parmi un ensemble de production. Ce dernier représente l'ensemble des contraintes technologiques auxquelles doit faire face l'entrepreneur. L'ensemble de production conditionne l'éventail des choix possibles pour le producteur. La frontière de l'ensemble de production détermine les techniques de production efficaces. Celles-ci correspondent aux choix optimaux qui s'offrent à une firme parmi l'ensemble des possibles. Elles déterminent la frontière entre le réel et l'irréel. En micro-économie de la production, l'étendu de l'ensemble de production est défini selon une approche axiomatique répondant à des règles relevant de l'intuition économique. Nous exposerons les propriétés usuelles d'une technologie de production et de ses correspondances productives lors du premier chapitre. La présentation de ces hypothèses élémentaires constitue le point de départ de notre analyse du concept de production jointe.



L'étude de ce concept sera menée selon une approche axiomatique permettant de définir et de caractériser des technologies de production polluante³. Le deuxième chapitre sera consacré à l'exposition des différents apports théoriques présentés dans la littérature économique au sujet de la définition et de la caractérisation des technologies de production polluante. Une évolution métho-

3. Durant ces travaux, nous utiliserons successivement les termes "technologie de production jointe", "technologie de coproduction" et "technologie de production *B*-disponible" pour désigner des technologies de production polluante.

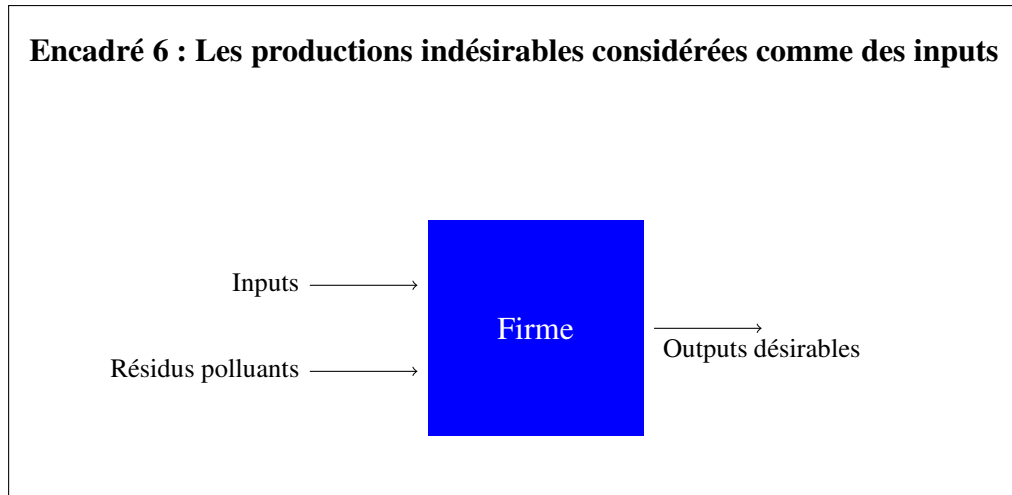
dologique, s'inscrivant dans un processus de mutation du cadre d'analyse uni-dimensionnel vers un schéma multi-dimensionnel, pourra être observée. Selon ce processus, une place de plus en plus importante est accordée à l'analyse multi-dimensionnelle dans la définition des activités productives. A cet égard, une procédure de partitionnement des intrants et des extrants en composantes polluantes et non polluantes sera introduite. Cette démarche a pour objectif de catégoriser les différentes approches exposées dans la littérature économique selon les schémas de partitionnement adoptés.

Les premières approches présentées dans le deuxième chapitre se définissent selon une structure de partitionnement limitée. Celle-ci apparaît comme limitée dans la mesure où, le partitionnement en composantes polluantes et non polluantes concerne spécifiquement les extrants. Dans cette perspective, nous commencerons par mettre en lumière les incohérences de l'approche axiomatique usuelle lorsque le processus productif de la firme l'amène à coproduire des productions désirables et indésirables (Färe et Grosskopf, 2003, 2004a). Par la suite, les modèles présentés introduiront de nouvelles hypothèses pour définir et caractériser la structure des technologies de production polluante.

Tout d'abord, nous exposerons la méthodologie consistant à traiter les productions résiduelles comme des inputs (Cropper et Oates, 1992 ; Reinhard, Lovell et Thijssen, 2000 ; Hailu et Veeman, 2001 ; Sahoo, Luptacik et Mahlberg, 2011 ; Mahlberg, Luptacik et Sahoo, 2011) ; voir Encadré 6. Färe et Grosskopf (2003) montrent que cette méthode est incohérente relativement aux lois physiques élémentaires. Selon Pethig (2003, 2006), cette approche ne permet pas de satisfaire le premier principe de la thermodynamique. De plus, elle ne considère aucun liens entre la génération des productions résiduelles et l'utilisation des inputs (Försund, 2009). Ainsi, Färe, Grosskopf, Lovell, et Pasurka (1989) proposent un cadre théorique alternatif.

Plus précisément, ces auteurs introduisent une approche axiomatique basée sur l'axiome de disponibilité faible en outputs (Shephard, 1970) et sur l'hypothèse de nullité jointe des productions souhaitables et indésirables. La première propriété signifie que les productions désirables et résiduelles peuvent uniquement être réduites proportionnellement. La seconde met en lumière le problème associé à la pollution : aucune production non polluante ne peut être produite sans production indésirable. Suivant ces deux hypothèses, les productions polluantes et non polluantes apparaissent conjointement à l'issue du processus productif (Encadré 7). Dans ces conditions, la

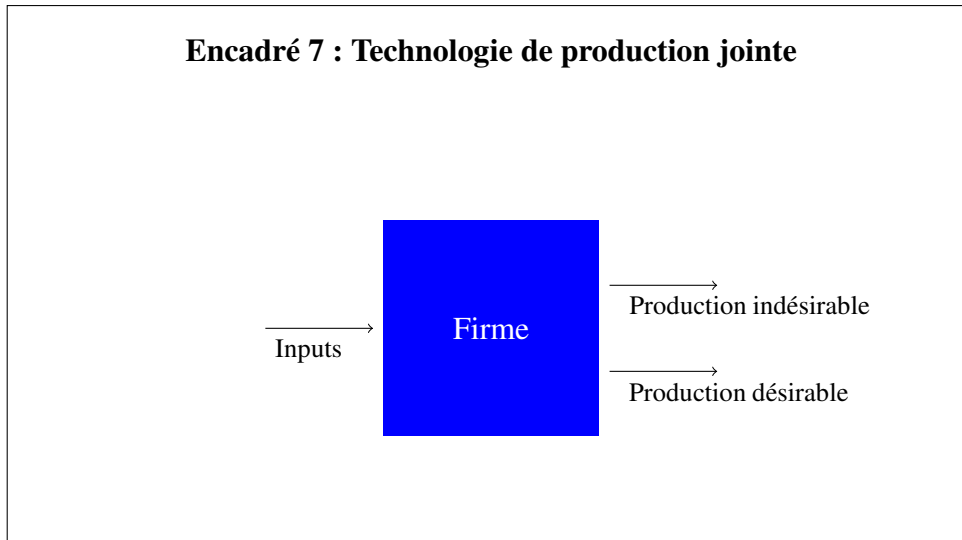
Encadré 6 : Les productions indésirables considérées comme des inputs



cessibilité des productions résiduelles ne peut plus être considérée comme libre. En effet, la réduction des productions polluantes engendre un coût car elle s'accompagne d'une diminution des produits désirables. Dans ce cas, une partie des intrants de la firme est affectée à la contraction des productions polluantes ce qui engendre une diminution des productions désirables et donc, une perte de revenu. Le cadre axiomatique introduit par Färe, Grosskopf, Lovell, et Pasurka (1989) fait apparaître une situation de congestion dans la dimension des productions désirables.

Les modèles construits à partir de cette approche axiomatique présentent plusieurs limites. Premièrement, ils considèrent un facteur d'abattement unique pour définir la disponibilité faible des outputs (polluants et non polluants). Kuosmanen (2005) propose d'améliorer ces modèles en introduisant un facteur d'abattement non uniforme. L'objectif de cet apport théorique est de capturer l'ensemble des plans de production. En effet, les modèles retenant un facteur d'abattement unique tendent à réduire l'ensemble des possibilités de production et ainsi, à accroître le nombre de combinaisons productives appartenant à la frontière de l'ensemble de production. Ainsi, ce type de méthodologie apparaît limité dans le cadre d'une analyse en terme de benchmark ; c'est-à-dire, lorsqu'il s'agit d'identifier les firmes les plus efficaces afin de définir les meilleures pratiques managériales. Deuxièmement, Kuosmanen et Podinovski (2009) montrent que l'utilisation d'un facteur d'abattement unique dans la définition de la disponibilité faible conduit à des situations ne respectant pas l'axiome de convexité. Enfin, Hampf et Rødseth (2015) signalent que le modèle de disponibilité faible ne respecte pas les principes de la thermodynamique.

Parmi les approches précédentes, le modèle de disponibilité faible est largement utilisé dans la



littérature économique pour définir et caractériser des technologies de production polluante (Zhou, Ang et Poh, 2008a ; Försund, 2009, 2016). En réponse aux limites qui lui incombent, plusieurs approches axiomatiques ont été développées (Dakpo, Jeannaux et Latruffe, 2016). Ces dernières considèrent un partitionnement complet des intrants et des extrants en composantes polluantes et non polluantes. La première approche étudiée est basée sur les principes de la thermodynamique (Lauwers et Van Huylenbroeck, 2003 ; Coelli, Lauwers et Van Huylenbroeck, 2007 ; Lauwers, 2009 ; Rödseth, 2017). Dans ces travaux, nous examinerons plus en détail le modèle proposé par Rödseth (2017). D’après les lois de la thermodynamique, Rödseth (2017) construit une approche axiomatique structurant l’ensemble de production. Ce cadre axiomatique propose plusieurs propriétés permettant de satisfaire les lois physiques élémentaires. En particulier, une nouvelle hypothèse de disponibilité des intrants et des extrants au sein de l’ensemble de production est proposée. Plus précisément, Rödseth (2017) introduit l’axiome de G -disponibilité. D’après cette hypothèse, la disposition des intrants et des extrants au sein de la technologie de production est contrainte selon le premier principe de la thermodynamique.

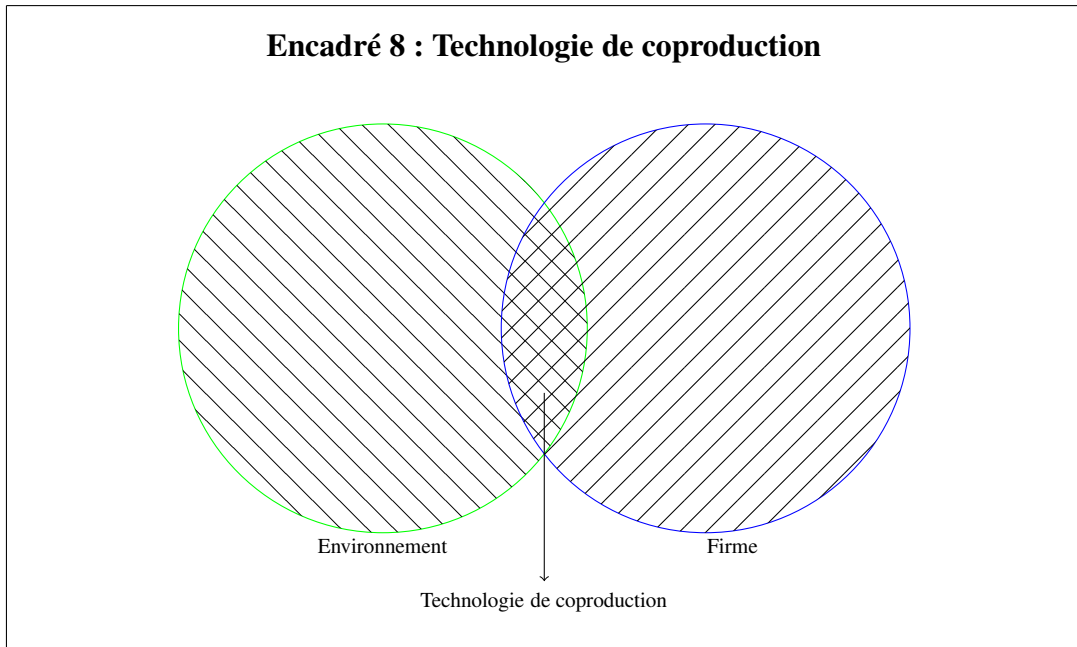
Dans le cadre axiomatique introduit par Rödseth (2017), la cessibilité des productions indésirables et l’accroissement des intrants polluants ne peuvent plus être considérés comme libres. Dans ces conditions, la technologie de production est congestionnée simultanément dans les intrants polluants et les productions désirables. Pour définir une telle situation, le modèle suggéré par Rödseth (2017) retient des paramètres exogènes. En effet, la définition de la G -disposition des intrants et des extrants dans l’ensemble de production nécessite d’identifier des facteurs d’émissions

et de récupération (Hoang et Prasada Rao, 2010).

Murty, Russell et Levkoff (2012) définissent les technologies de production polluante selon une nouvelle méthodologie. Celles-ci sont construites selon une intersection entre deux sous-technologies (Encadré 8) : la sous-technologie de production de la firme et la sous-technologie de production résiduelle. Cette dernière s'apparente au processus de transformation s'opérant dans l'environnement (ou plus globalement la biosphère). La sous-technologie de production de la firme satisfait les propriétés traditionnellement retenues en théorie de la production. La sous-technologie de production résiduelle vérifie l'hypothèse de disponibilité "coûteuse" dans les composantes polluantes (inputs et outputs). Ainsi, la cessibilité des productions polluantes et l'accroissement des intrants polluants ne sont pas libres (Murty, 2010). Les technologies de production polluante sont congestionnées simultanément dans la dimension des intrants polluants et dans celle des outputs désirables.

Les principales critiques concernant l'approche axiomatique proposée par Murty, Russell et Levkoff (2012) proviennent de la définition de l'occurrence d'une telle situation. En effet, ces auteurs supposent que les sous-technologies, formant la technologie de coproduction, opèrent indépendamment l'une de l'autre. Ainsi, la sous-technologie de production de la firme transforme des intrants (polluants et non polluants) afin de créer exclusivement des produits désirables. De même, la sous-technologie de production résiduelle génère des résidus polluants suite à la transformation d'inputs polluants. Dans ces conditions, le couplage des productions polluantes et non polluantes disparaît (Dakpo, 2016). De plus, les deux types de productions (désirables et indésirables) ne dépendent pas des mêmes intrants (Försund, 2016). Dans ces conditions, la caractérisation des technologies de production polluante peut conduire à des situations incohérentes. Nous pourrions observer que, dans le cadre de l'approche axiomatique introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012), il n'existe pas de frontière supérieure dans les correspondances en outputs, associées à ce type de technologie.

Dans un troisième chapitre, une nouvelle approche axiomatique en lien avec celle proposée par Murty, Russell et Levkoff (2012), et plus généralement avec l'ensemble de celles citées précédemment, sera proposée (Abad et Briec, 2016). Cette nouvelle technologie de production polluante se définit, elle aussi, comme une intersection de sous-technologies (Murty, Russell et Levkoff, 2012 ; Rödseth, 2013). Cette approche est fondée sur la congestion de l'ensemble de production pour



lequel une nouvelle hypothèse de disponibilité est considérée (Briec, Kertens et Van de Woeystyne, 2016) : l'axiome de B -disponibilité. En ce sens, elle s'inscrit dans les pas de l'approche axiomatique proposée par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). Cette nouvelle hypothèse de disponibilité est introduite pour mettre à jour un manque de disponibilité dans une ou plusieurs dimensions de l'ensemble de production. Ainsi l'approche axiomatique proposée dans ces travaux permet d'identifier une situation de congestion concernant spécifiquement les outputs ou, plus généralement l'ensemble des intrants et des extrants de la firme.

Dans la première partie de ces travaux, nous proposerons une procédure permettant de spécifier les technologies de production polluante. Les économistes disposent de plusieurs outils pour modéliser les ensembles de production. Traditionnellement, les techniques économétriques fondées sur l'estimation des paramètres de la fonction de production, sont privilégiées dans la théorie économique (Chambers, 1988). Les techniques économétriques permettent d'identifier les paramètres de la fonction de production dont la forme fonctionnelle est fixée *a priori* (par exemple, Cobb-Douglas, Translog ou Constant Elasticity of Substitution). L'intérêt est d'introduire un aléa dans la procédure d'estimation des technologies de production. Dans ces travaux, nous suggérons de caractériser l'ensemble de production à travers une spécification polyédrique⁴.

4. Plusieurs travaux empiriques, basés sur des modèles économétriques (Pittman 1983 ; Coggins et Swinton, 1996 ; Hetemäki 1996 ; Murty et Kumar, 2003) et non-paramétriques (Zhou, Ang, Poh 2008a), se sont intéressés à la modélisation des technologies de production polluante afin d'étudier l'efficacité technique ou les variations de productivité

Suivant cette approche, les technologies de production seront estimées selon des méthodes de programmation mathématiques. Nous retiendrons la méthode par enveloppement des données⁵ (Charnes, Cooper et Rhodes, 1978 ; Banker, Charnes et Cooper, 1984). Celle-ci, issue de la recherche opérationnelle, s'appuie sur la programmation linéaire. Elle permet de modéliser les technologies de production à partir de l'enveloppe convexe des vecteurs inputs-outputs selon une coupe instantanée. Ainsi, elle décrit la technologie de production d'un secteur économique donné à un instant précis. Cette méthode ne nécessite pas la spécification d'une forme fonctionnelle *a priori* pour caractériser l'ensemble de production. Pour cette raison, elle est souvent qualifiée de méthode non-paramétrique.

Une approche multi-dimensionnelle de l'efficacité : l'éco-efficience

Face à des contraintes techniques spécifiques, l'entrepreneur est efficace d'un point de vue économique dès lors qu'il maximise son profit. Une condition nécessaire pour que l'entrepreneur réalise le plus grand profit possible, est qu'il opère sur la frontière de l'ensemble de production.

En présence d'effets externes (positifs et/ou négatifs) la réalisation des intérêts privés ne concourt pas à celle de l'intérêt public. Les producteurs surproduisent en présence d'effets externes négatifs. Ils sous-produisent face à une externalité positive. Les prix de marché de ces productions sont erronés. Ils ne conduisent pas à la réalisation de l'optimum social. Face à une telle situation, la référence au concept d'efficacité économique est inappropriée. Il est préférable d'utiliser la notion d'efficacité technique. Celle-ci ne prend pas en considération les prix pour déterminer si une allocation des ressources est efficace. Le critère d'efficacité technique considère une allocation comme efficace à condition qu'elle s'accompagne d'une exploitation optimale des facteurs de production. A l'intérieur de l'ensemble de production, les allocations sont techniquement inefficaces. Celles situées sur la frontière de l'ensemble de production respectent le critère d'efficacité technique. Les productions jointes auxquelles nous nous référons dans ces travaux sont associées à des effets externes négatifs. Ainsi, nous nous intéresserons essentiellement au critère d'efficacité technique.

dans différents secteurs économiques. Ces concepts seront étudiés dans la deuxième et la troisième parties de ces travaux.

5. Selon la terminologie anglo-saxonne, cette méthode est connue sous le nom de Data Envelopment Analysis (DEA).

L'introduction des fonctions de distance à partir des années 1950 va jouer un rôle déterminant dans l'analyse de l'efficacité technique (Debreu, 1951 ; Shephard, 1953 ; Farrell, 1957)⁶. Les économistes vont initialement caractériser les mesures d'efficacité technique selon des fonctions de distance radiale. Ces dernières permettent de déterminer la contraction proportionnelle maximale des inputs qu'une firme peut réaliser compte tenu de la technologie de production. Un raisonnement symétrique peut être proposé pour les outputs. La fonction de distance hyperbolique (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985) se définit exclusivement dans le graphe de l'ensemble de production. Elle permet de réaliser un ajustement simultané et equi-proportionnel en inputs et en outputs. Dans la littérature, la mesure radiale d'efficacité technique est connue sous le nom de mesure de Debreu-Farrell⁷. La fonction de distance de Shephard est l'inverse de la mesure de Debreu-Farrell. Färe et Lovell (1978) présente une mesure d'efficacité technique qui n'impose plus une contraction proportionnelle des inputs. La première mesure d'efficacité technique non radiale est introduite. Färe, Grosskopf et Lovell (1985) présentent une extension de cette mesure en output. A partir des travaux de Luenberger (1992, 1994, 1995, 1996), Chambers, Chung et Färe (1996, 1998) introduisent une nouvelle mesure d'efficacité technique non radiale : la fonction de distance directionnelle. Elle se définit en input, en output ou dans le graphe de la technologie. La fonction de distance directionnelle permet de projeter les inputs, et/ou les outputs, sur la frontière de l'ensemble de production suivant une direction pré-établie. Le choix de la direction, fixée *a priori*, limite les possibilités interprétatives de cette fonction. En ce sens, Briec (1997) présente la fonction de distance proportionnelle. Cette dernière suggère une direction spécifique, réduisant la subjectivité et favorisant l'interprétation des mesures non radiales.

Les mesures d'efficacité technique précédentes sont adaptées à une analyse conventionnelle de l'efficacité. Dans ce cas, il s'agit de réduire l'ensemble des inputs, et/ou d'accroître l'ensemble des outputs, afin d'atteindre la frontière de l'ensemble de production. En présence de productions jointes, le processus productif conduit à la réalisation simultanée de productions désirables et indésirables. Ainsi, des mesures spécifique d'efficacité technique sont adoptées afin de répondre au caractère multi-dimensionnel des intrants et/ou des extrants (désirables et indésirables). Les mesures

6. Il est à noter que Koopmans (1951) fut le premier à définir le concept d'efficacité technique. Son approche s'appuie sur la notion d'optimum au sens de Pareto.

7. Debreu propose de mesurer l'efficacité technique à partir du "coefficient d'utilisation des ressources". Farrell reprend cette idée et suggère d'introduire cette mesure dans des technologies de production.

d'éco-efficience permettent d'atteindre cet objectif⁸. Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) présentent une extension de la mesure hyperbolique afin d'évaluer l'efficacité technique dans le cas particulier des productions jointes. Elle permet d'effectuer un ajustement equi-proportionnel des productions désirables et résiduelles. Les premières sont accrues et les secondes sont réduites afin d'atteindre la frontière de l'ensemble de production selon une variation équi-proportionnelle. Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho (2004) proposent une orientation spécifique pour la mesure de Shephard en output. La mesure de Shephard orientée en production désirable permet d'accroître proportionnellement cette catégorie d'output, pour des vecteurs donnés d'inputs et de productions résiduelles. Un raisonnement symétrique permet de définir la mesure de Shephard orientée en production indésirable. La première mesure non radiale d'éco-efficience a été suggérée par Chung, Färe et Grosskopf (1997). Elle évalue l'efficacité technique en définissant l'accroissement maximal des productions désirables et la plus grande contraction possible des productions résiduelles compte tenu de la technologie de production et d'un vecteur directionnel pré-établi. Plus récemment, Murty, Russell et Levkoff (2012) proposent une nouvelle mesure d'éco-efficience suivant l'approche suggérée par Färe, Grosskopf et Lovell (1985). Cette méthode permet d'identifier pour chaque firme un point de référence globalement efficient. Il est à la fois efficace dans la dimension des productions désirables et dans celle des productions résiduelles. Depuis le début des années 90, les études d'éco-efficacité ont connu un essor considérable. Zhou, Ang et Poh (2008a) ont recensé plus de 100 applications fondées sur la méthode DEA⁹.

Le chapitre 4 de cette thèse présente les mesures usuelles (radiales et non radiales) d'efficacité technique. Le chapitre 5 introduit l'hypothèse de B -disponibilité dans la définition de ces fonctions de distance. Suivant cette démarche, des mesures de distance additives et multiplicatives généralisées sont introduites. Celles-ci permettent d'analyser le concept d'efficacité technique dans des ensembles de production B -disponibles selon l'ensemble des schémas existants dans la littérature économique. Selon cet apport théorique, un nouveau test de disponibilité dans la dimension des productions résiduelles est proposé dans le chapitre 6. Ainsi, nous montrons que la structure des technologies de production jointe présentée dans cette thèse permet d'identifier une situation

8. La littérature au sujet des productions indésirables est en grande partie associée aux problématiques environnementales. Ainsi, nous parlerons d'éco-efficience pour se référer à une vision écologique de l'efficacité.

9. Il est à noter que des analyses économétriques de l'éco-efficience ont également été présentés dans la littérature : Hetemäki (1996) ou Murty et Kumar (2003).

de congestion dans la dimension des productions non polluantes. De plus, un nouveau test de convexité est proposé dans ce champ théorique. Face à des enjeux environnementaux de plus en plus pressants, ces apports théoriques contribuent à affiner les études empiriques d'éco-efficacité (Azad, Ancev et Hernandez-Sancho, 2017). Les domaines d'applications sont variés. Ils concernent l'ensemble des secteurs d'activité pouvant être confronté à la mise en place simultanée de productions désirables et indésirables (secteur de l'énergie, secteur du transport etc.). Une illustration empirique concernant le secteur aéroportuaire français est présentée dans la dernière section de ce chapitre.

La valorisation des intrants et des extrants indésirables : un résultat de dualité

Les outils de référence utilisés dans ces travaux afin de caractériser les technologies de production sont les fonctions de distance (radiales ou non-radiales). Étant duales avec les fonctions de coût, de revenu et de profit, elles offrent un cadre général à l'analyse économique. Shephard (1953, 1970) établit les premiers résultats de dualité entre les fonctions de distance multiplicatives et, les fonctions de coût et de revenu. Mc Fadden (1978), et plus tard Färe et Primont (1995), mettent à jour ses travaux. Les travaux fondateurs de Luenberger (1992) vont permettre de définir des relations de dualité entre les fonction de distance non radiale et les fonctions de coût, de revenu et de profit (Chambers, Chung et Färe, 1996, 1998). L'hypothèse de convexité de la technologie de production, et de ses images en termes de correspondances (en inputs et en outputs), va jouer un rôle déterminant dans la définition de ces relations duales¹⁰. Le chapitre 4 recense les principales relations de dualités entre les mesures de distance additives et multiplicatives et, les fonctions de coût, de revenue et de profit.

La valorisation des productions résiduelles soulève un certain nombre de problèmes en économie. Les productions indésirables représentent un coût pour la collectivité et il convient de leur associer des prix négatifs (Baumol et Oates, 1975 ; Cropper et Oates, 1992). Depuis le début des années 2000, il existe un débat important en théorie de la production à ce sujet (Hailu et Veeman,

10. Briec, Kerstens et Vanden Eeckaut (2004) propose de relâcher l'hypothèse de convexité afin de définir un nouveau résultat de dualité.

2001 ; Hailu, 2003 ; Kuosmanen, 2005 ; Försund, 2009 ; Kuosmanen et Matin, 2011 ; Murty, Russell et Levkoff, 2012 ; Leleu, 2013 ; Rödseth, 2013). Cette controverse est à mettre en relation avec les différentes tentatives de modélisation des technologies de production polluante. Dans le cadre de la théorie de la dualité, les prix auxquels nous faisons référence ne correspondent pas aux prix réels. En effet, ces derniers sont fixés sur les marchés et ne peuvent être déterminés de façon endogène au sein d'un modèle économique. Il s'agit ici de prix virtuels assurant la maximisation de la fonction revenu (orientation output).

En considérant les productions néfastes comme des inputs, ces dernières sont nécessairement valorisées à des prix négatifs. Ainsi, ce résultat de dualité permet de considérer la génération des productions résiduelles comme un coût. Néanmoins, nous avons évoqué précédemment (cf. supra) que cette méthodologie soulève un certain nombre de critiques sur le plan théorique qui rendent son application limitée. Au contraire, la modélisation des technologies de production jointe à partir de l'hypothèse de disponibilité faible en outputs ne garantit pas que les productions résiduelles soient valorisées selon des prix négatifs. En effet, l'approche axiomatique de Färe, Grosskopf, Lovell, et Pasurka (1989) n'exclue pas l'existence de prix positifs pour les productions indésirables (Hailu et Veeman, 2001 ; Hailu, 2003). Ce résultat ne semble pas réaliste hormis dans certains cas particuliers. Certains auteurs envisagent des prix positifs pour les productions indésirables dès lors qu'elles peuvent contribuer à soutenir les capacités de productions désirables (Rödseth, 2013). Nous avons vu précédemment que ce type de modélisation était également sujet à un certain nombre de limites.

Dans le chapitre 5 nous définissons de nouveaux résultats de dualité. Ceux-ci sont construits dans des ensembles de production B -disponibles. Ainsi, cet apport méthodologique accorde un rôle déterminant à l'hypothèse de B -disponibilité. De ce fait, l'importance des propriétés usuelles de disponibilité dans l'établissement de ces résultats, est atténuée. Plus précisément, ils prennent en considération les interactions entre les différentes catégories d'inputs et d'outputs (polluants vs non polluants). Cette démarche permet de mettre en lumière à la fois des prix positifs et négatifs pour les intrants et les extrants polluants. Des prix positifs apparaissent en direction des frontières non B -congestionnées. Inversement, des prix négatifs s'établissent en direction des frontières B -congestionnées. De plus, des fonctions de demande conditionnelle en inputs (polluants vs non polluants) et des fonctions d'offre conditionnelle en outputs (polluants vs non polluants) sont pro-

posées.

Les mesures d'éco-productivité

Dans la littérature économique, les mesures de productivité sont définies selon deux approches. D'après les travaux fondateurs de Solow (1957), la croissance de la productivité sur une période de temps continu peut être détectée à travers l'étude de la dérivée de la fonction de production. Les indices et indicateurs de productivité¹¹ permettent quant à eux, de définir des mesures de productivité sur des périodes de temps consécutives (discret). Caves, Christensen et Diewert (1982), à partir des travaux fondateurs de Malmquist (1953), proposent une méthode d'analyse de la productivité. Les outils privilégiés pour mettre en lumière les mesures de productivité sont les fonctions de distance (radiale et non radiale). En hommage à Malmquist, les premiers indices de productivité introduits dans la littérature sont connus sous le nom d'indices de Malmquist. Ils peuvent être définis en input ou en output. Ces mesures de productivité, suggérées par Caves, Christensen et Diewert (1982), ont été implémentées par Pittman (1983) et Nishimizu et Page (1982), qui proposent pour la première fois, une décomposition de la productivité en termes de variations de l'efficacité technique et de changements technologiques. Ces derniers résultent de la modification de la frontière de production sur des périodes de temps consécutives. A partir des fonctions de distance de Shephard, Färe, Grosskopf, Lindgren et Roos (1995) proposent une spécification non-paramétrique permettant d'implémenter les indices de Malmquist. Celle-ci intègre les deux composantes identifiées par Nishimizu et Page (1982), grâce à des méthodes non-paramétriques.

Bjurek (1996) définit des indices de productivité de Hicks-Moorsteen. Tout comme ses prédécesseurs, ils ne nécessitent pas d'information sur les prix pour définir des mesures de productivité¹². Ils se présentent sous la forme d'un ratio entre des indices de quantité de Malmquist en output et en input. A l'inverse des indices de Malmquist, l'implémentation de ces indices ne s'accompagne pas d'infaisabilités. Chambers (2002) introduit l'indicateur de productivité de Luenber-

11. Durant ces travaux, nous utilisons le terme "indicateur" afin de désigner des mesures de productivité construites selon des différences. Le terme "indice" sera quant à lui, utilisé pour définir des mesures de productivité élaborées à l'aide de ratios. Chambers (1998, 2002) ou encore Diewert (1998) proposent une comparaison des indices et des indicateurs de productivité.

12. Au contraire, les indices de Tornqvist et de Fischer permettent de mesurer la productivité à condition de disposer d'informations sur les prix. O'Donnell (2010, 2012, 2014, 2016) montre que les indices de Hicks-Moorsteen présentent une structure multiplicative complète, au même titre que les indices de Tornqvist et de Fisher.

ger. Ce dernier est construit comme une différence entre des fonctions de distance directionnelle. Tout comme l'indice de Malmquist, il est possible de le décomposer en plusieurs composantes afin de faire apparaître les changements technologique et les variations d'efficacité technique. Cet indicateur présente également des infaisabilités. Briec et Kerstens (2004) proposent une extension de l'indice de productivité de type Hicks-Moorsteen. L'indicateur proposé est connu sous le nom de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Il est défini comme une différence entre des indicateurs de quantité de Luenberger en output et en input. Au même titre que l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen, son implémentation n'est pas sujette à des infaisabilités.

Les approches précédentes permettent de mener des analyses de productivité conventionnelles (Färe, Grosskopf, Norris et Zhang, 1994 ; Bjurek, Førsund et Hjalmarsson (1998) ; Boussemart, Briec, Kerstens et Poutineau, 2003 ; Kerstens et Van de Woestyne, 2014). Ces méthodes ne prennent pas en considération l'impact des productions résiduelles dans l'étude de la productivité. Plus précisément, elles apparaissent limitées dès lors qu'il s'agit de tenir compte de l'impact des productions indésirables dans l'analyse des changements technologiques et des variations d'efficacité technique. Une alternative à l'analyse conventionnelle de la productivité consiste à considérer des indicateurs et des indices d'éco-productivité. Depuis les travaux fondateurs de Pittman (1983), une littérature de plus en plus importante a été proposée sur les indicateurs et les indices d'éco-productivité (Tyteca, 1996 ; Aiken et Pasurka, 2003).

Azad et Ancev (2014) et Picazo-Tadeo, Castillo-Gimenez et Beltran-Esteve (2014) présentent des indicateurs d'éco-productivité reprenant la structure des mesures de Luenberger. Ces méthodes proposent de catégoriser les outputs (désirables et indésirables) afin d'étudier la productivité. Partant d'une structure multiplicative, Chung, Färe et Grosskopf (1997) introduisent un indice d'éco-productivité de type Malmquist-Luenberger. Dong-huyn Oh (2010) définit un indice global d'éco-productivité de type Malmquist-Luenberger afin d'éviter les problèmes d'infaisabilités inhérents aux indices de type Malmquist ou Luenberger. Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho (2004) présentent un indice d'éco-productivité reprenant la structure de l'indice de productivité de type Hicks-Moorsteen. Il est construit à partir du rapport entre des indices de quantité de Malmquist dans la dimension des outputs désirables et ceux dans la dimension des extrants indésirables.

Dans le chapitre 7, une nouvelle mesure d'éco-productivité est présentée (Abad, 2015). Elle prend la forme de l'indice de productivité de type Hicks-Moorsteen et de l'indicateur de produc-

tivité de type Luenberger-Hicks-Moorsteen. Cette mesure permet de s'affranchir des problèmes d'infaisabilités associés aux mesures d'éco-productivité de type Malmquist ou Luenberger¹³. Une illustration empirique sera proposée dans la dernière section de ce chapitre afin d'implémenter les mesures d'éco-productivité exposées dans ces travaux. A cette occasion, une spécification non paramétrique sera retenue. Une généralisation des mesures d'éco-productivité possédant des structures additives et multiplicatives complètes, est présentée dans le chapitre 8.

13. Abad et Ravelojaona (2017) ont introduit une étude comparée des mesures d'éco-productivité usuelles dans un cadre dynamique. Cette analyse apporte un éclairage sur les problèmes d'infaisabilités associées à ces mesures de productivité.

Première partie

Structure de la Technologie de Production

Chapitre 1

Schéma Usuel en Théorie de la Production

1 Introduction

Interrogations : comment définir et caractériser l'ensemble des possibilités productives ? Quelles sont les stratégies de production les plus efficaces ? Comment identifier différents types de rendements d'échelle ? Quelle méthode retenir pour spécifier l'ensemble de production ?

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les hypothèses qui permettent de définir et de caractériser des technologies de production multi-inputs multi-outputs, dans la deuxième section. Celles-ci représentent le processus par lequel les intrants se transforment en produits finis. Elles sont au cœur de l'analyse de l'activité productive. Les technologies de production permettent d'identifier l'ensemble des choix techniques du producteur. Suivant une approche axiomatique (Shephard 1970, 1974 ; Färe, Grosskopf et Lovell, 1985), nous exposerons sa définition générale.

Parmi l'ensemble des plans de production réalisables, nous identifierons dans la troisième section ceux qui peuvent être considérés comme efficaces. Nous distinguerons différents ensembles parmi les choix techniquement efficaces. Plus précisément, nous indiquerons l'ensemble des points qui sont faiblement efficaces et ceux qui sont fortement efficaces.

Dans la quatrième section, nous étudierons la nature des rendements d'échelle. Selon la structure de la technologie de production, nous montrerons que ces derniers peuvent prendre différentes formes (constants, non croissants, non décroissants, croissants, décroissants, variables).

Enfin dans une dernière section, nous proposerons une procédure permettant de modéliser l'en-

semble de production. Nous retiendrons une spécification polyédrique de cet ensemble. En ce sens, nous nous appuyerons sur la méthode par enveloppement des données (DEA). Nous montrerons que cette modélisation non-paramétrique permet de considérer différents types de rendements d'échelle.

2 Ensemble des Possibilités Productives : Définition et Hypothèses Conventionnelles

2.1 Le graphe de la technologie de production

Commençons par préciser les notations utilisées dans ces travaux. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur d'inputs, appartenant à \mathbb{R}_+^n , et $y = (y_1, \dots, y_m)$ un vecteur d'outputs prenant ses valeurs dans \mathbb{R}_+^m . Soit, $T : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m}}$, l'ensemble de production :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, y) \text{ est réalisable}\}.$$

La technologie de production regroupe l'ensemble des intrants ($x \in \mathbb{R}_+^n$) qui permettent de réaliser des biens ou services ($y \in \mathbb{R}_+^m$). En théorie de la production, cet ensemble est défini selon une approche axiomatique. L'étendue de celui-ci est limitée par des hypothèses élémentaires relevant de l'intuition économique. Plus précisément, la technologie de production doit satisfaire les axiomes suivants (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985) :

T1 : $(0, y) \in T \Rightarrow y = 0$.

T2 : $(x, 0) \in T, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

T3 : T est compact (fermé et borné).

T4 : T est convexe.

T5 : $\forall (x, y) \in T$ et $\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $(x, -y) \leq (u, -v)$ alors, $(u, v) \in T$.

T6 : Soit θ , si $(x, y) \in T$ alors, $(\theta x, y) \in T, \forall \theta \geq 1$.

T7 : Soit λ , si $(x, y) \in T$ alors, $(x, \lambda y) \in T, \forall \lambda \in [0, 1]$.

Le premier axiome (T1) stipule qu'il n'y a pas de repas gratuit. En d'autres termes, il est impossible de produire une quantité positive d'outputs en n'utilisant aucun input. La deuxième hypothèse (T2) signifie qu'il est possible d'être inactif. En d'autres termes, il est toujours possible de ne rien produire. T1 et T2 impliquent que $(0, 0) \in T$. La propriété 3 (T3) postule que l'ensemble T est compact. T3 permet d'exclure l'existence de trous ou de sauts dans T . La fermeture de l'ensemble de production T est une hypothèse usuelle en microéconomie de la production (Debreu, 1959). L'axiome 4 (T4) suppose que T est un ensemble convexe. L'hypothèse 5 (T5) stipule que les inputs et les outputs sont librement disponibles. Quel que soit le vecteur input-output appartenant à l'ensemble de production T , il est toujours possible d'accroître les inputs et/ou de réduire les outputs tout en restant dans cet ensemble. Soit le cône de libre disposition dans le graphe $K^G = \mathbb{R}_+^n \times (-\mathbb{R}_+^m)$, un ensemble de production librement disponible satisfaisant les axiomes T1-T3 et T5, peut être défini comme suit : $T = (T + K^G) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m)$. Les axiomes 6 et 7 (T6 et T7) sont la version faible de l'hypothèse 5. T6 signifie que les inputs sont faiblement disponibles. T7 postule que les outputs sont faiblement disponibles. Lorsque T5 est vérifié alors, T6 et T7 sont nécessairement vérifiés. La réciproque n'est pas vraie (voir infra).

L'ensemble de production peut être défini de façon équivalente en terme de correspondance en inputs, $L : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$, ou de correspondance en outputs, $P : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$. La correspondance en inputs représente l'ensemble des intrants (x) qui peuvent produire l'extrant (y).

$$\begin{aligned} L(y) &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : y \text{ est productible par } x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : (x, y) \in T\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La correspondance en outputs regroupe l'ensemble des produits (y) qui peuvent être produit par le facteur (x).

$$\begin{aligned} P(x) &= \{y \in \mathbb{R}_+^m : y \text{ est produit par } x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+^m : (x, y) \in T\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Il vient immédiatement :

$$x \in L(y) \Leftrightarrow y \in P(x).$$

L'analyse en terme de correspondance nécessite de fixer une quantité donnée d'outputs, $L(y)$, ou une quantité donnée d'inputs, $P(x)$. Si on considère une analyse en terme de graphe, les quantités d'outputs ou d'inputs ne sont pas fixées (Figure 1). Le graphe de l'ensemble de production peut se définir à partir de la correspondance en intrants ou de la correspondance en extrants.

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \in L(y), y \in \mathbb{R}_+^m\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : y \in P(x), x \in \mathbb{R}_+^n\}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est immédiat :

$$x \in L(y) \Leftrightarrow (x, y) \in T \Leftrightarrow y \in P(x). \quad (1.3)$$

Ce résultat est illustré dans la Figure 1. Le graphe de la technologie de production correspond à l'ensemble des vecteurs d'inputs et d'outputs, contenus entre la frontière de l'ensemble de production (ligne courbée noire) et l'axe des abscisses (axe des x). L'isoquant du graphe (frontière de l'ensemble de production) est défini par : $\text{IsoqT} = \left\{ (x, y) : (x, y) \in T, (\alpha x, \frac{1}{\alpha} y) \notin T, \alpha \in]0, 1[\right\}$. La correspondance en outputs associée à l'input x^0 est le segment $[0, y^0]$. L'ensemble en inputs associé à l'output y^0 est la demi droite $[x^0, +\infty)$.

2.2 La correspondance en inputs

Les axiomes usuels de la correspondance en inputs sont (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985) :

L1 : $\forall y \geq 0$ et $y \neq 0, 0 \notin L(y)$.

L2 : $L(0) = \mathbb{R}_+^n$.

L3 : $L(y)$ est fermée et $\bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^m} L(y) = \emptyset, \forall y \in \mathbb{R}_+^m$.

L4 : $L(y)$ est un ensemble convexe.

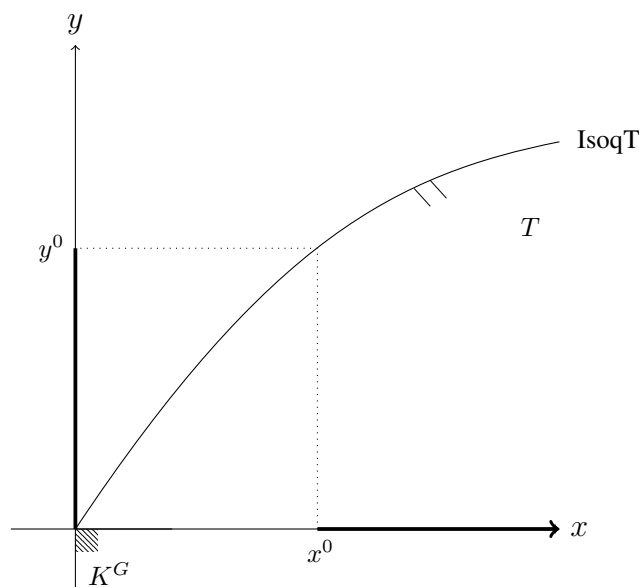


FIGURE 1 – Graphe de la Technologie

L5 : $\forall x \in L(y)$, si $u \geq x \Rightarrow u \in L(x)$.

L6 : Si $v \geq y \Rightarrow L(v) \subseteq L(y)$.

L7 : Si $x \in L(y)$, $\lambda x \in L(y)$, $\forall \lambda \geq 1$.

L8 : $L(\theta y) \subseteq L(y)$, $\forall \theta \geq 1$.

Le premier axiome (L1) stipule qu'il n'y a pas de repas gratuit. Il est impossible de produire un output non nul à partir d'un niveau d'inputs nul. La deuxième propriété (L2) correspond à la condition d'inactivité. Il est toujours possible de ne produire aucun output à partir d'inputs positifs ou nuls. Les hypothèses L1 et L2 impliquent que $(0, 0) \in T$. Les axiomes 3 et 4 (L3 et L4) précisent que la correspondance en inputs est un ensemble fermé, borné et convexe. Ainsi, il n'admet pas de trous ou de sauts. Une quantité finie d'outputs ne peut être produite que selon une quantité finie d'inputs. La fermeture de la correspondance en inputs résulte de la topologie de l'ensemble de production (Shephard, 1970). De plus, toute combinaison linéaire d'inputs appartenant à cet ensemble appartient également à la correspondance en inputs. Les axiomes 5 et 6 (L5 et L6) postulent respectivement que les inputs et les outputs sont librement disponibles. Soit le cône de libre disposition dans la correspondance en intrants $K^L = \mathbb{R}_+^n$, sous les hypothèses L1-L3 et L5, un ensemble en inputs librement disponible se définit comme suit : $L(y) = L(y) + K^L$. Les propriétés 7 et 8 (L7 et L8) correspondent respectivement à la version faible de L5 et L6.

L7 signifie que si l'on augmente les inputs suivant une proportion λ alors, ces inputs pourront au moins produire la quantité d'output qu'ils produisaient avant l'accroissement des facteurs. L8 stipule que si l'on accroît l'output selon une proportion θ alors, il sera produit par un ensemble d'intrants nécessairement plus petit que l'ensemble initial. La figure suivante propose une illustration de la définition de la correspondance en inputs (1.1). L'isoquant en input de $L(y)$ est défini par : $\text{IsoqL}(y) = \{x : x \in L(y), \beta x \notin L(y), \beta \in]0, 1[\}$. Il représente la frontière de l'ensemble en inputs (ligne courbée noire).

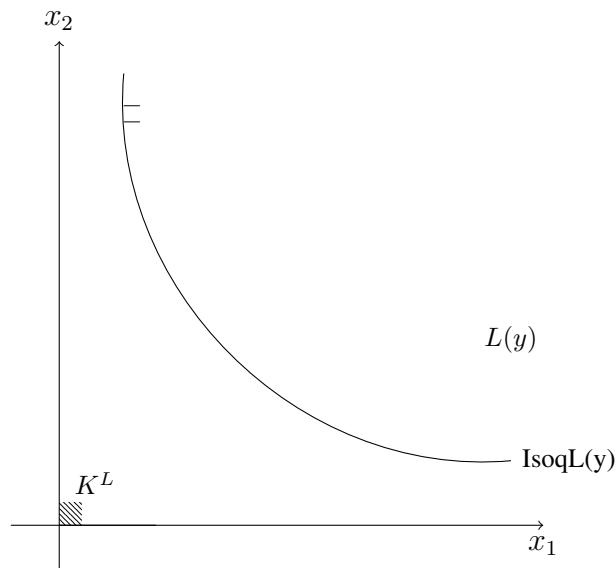


FIGURE 2 – Correspondance en inputs

2.3 L'ensemble en outputs

Les hypothèses usuelles de la correspondance en outputs sont définies à travers les hypothèses P1-P8 (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985).

P1 : $y \notin P(0)$ si $y \geq 0$ et $y \neq 0$.

P2 : $0 \in P(x), \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

P3 : $P(x)$ est compact (fermée et bornée), $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

P4 : $P(x)$ est un ensemble convexe.

P5 : $\forall y \in P(x)$, if $0 \leq v \leq y \Rightarrow v \in P(x)$.

P6 : Si $u \geq x \Rightarrow P(x) \subseteq P(u)$.

P7 : Si $y \in P(x)$, $\lambda y \in P(x) \forall \lambda \in [0, 1]$.

P8 : $P(\theta x) \supseteq P(x), \forall \theta \geq 1$.

Les axiomes P1 et P2 stipulent qu'il n'y a pas de repas gratuit et qu'il est toujours possible d'être inactif. En effet, il est impossible de produire une quantité non nulle d'extrants en n'utilisant aucun intrant (P1). De plus, il est toujours possible de ne produire aucun output (P2). P1 et P2 garantissent que $(0, 0) \in T$. L'hypothèse 3 (P3) indique qu'il ne peut exister de trous ou de sauts dans la correspondance en outputs $P(x)$. Ainsi, une quantité finie d'inputs peut seulement produire une quantité finie d'outputs. La fermeture de cet ensemble est une conséquence immédiate de la nature topologique de l'ensemble de production T . L'axiome 4 (P4) précise que l'ensemble $P(x)$ est convexe. Les propriétés 5 et 6 (P5 et P6) signifient respectivement que les extrants et les intrants sont librement disponibles. Soit le cône de libre disposition dans la correspondance en outputs $K^P = \mathbb{R}_+^m$, sous les axiomes P1-P3 et P5 un ensemble librement disponible en outputs se définit comme suit : $P(x) = (P(x) - K^P) \cap \mathbb{R}_+^m$. Les hypothèses 7 et 8 (P7 et P8) correspondent à la version faible des axiomes P5 et P6. Lorsqu'un niveau donné d'outputs est réalisé, il peut être produit dans une proportion inférieure en utilisant la même quantité d'intrants (P7). Si on accroît les inputs selon une proportion θ , alors l'ensemble des extrants pouvant être produits est au moins aussi grand que l'ensemble initial (P8). La figure suivante offre une représentation de la définition de la correspondance en outputs (1.2). L'isoquant en output de $P(x)$ est défini par : $\text{Isoq}P(x) = \{y : y \in P(x), \gamma y \notin P(x), \gamma \in]1, +\infty)\}$. Il représente la frontière de l'ensemble en outputs (ligne courbée noire).

2.4 Relâchement des hypothèses de disponibilité et de convexité

Les figures suivantes illustrent la différence entre l'hypothèse de libre disposition usuelle (forte) et sa version faible. La figure 4 propose une représentation géométrique de la différence entre L5 et L7 dans le cadre d'une analyse en terme de correspondance en inputs. L'illustration 5 présente la différence entre P5 et P7 à travers une analyse en terme de correspondance en outputs.

La zone quadrillée dans la figure 4 caractérise une correspondance en inputs faiblement disponibles ($L^{wd}(y)$). Dans ce cas, les inputs permettant de produire l'output y ne peuvent être disposés

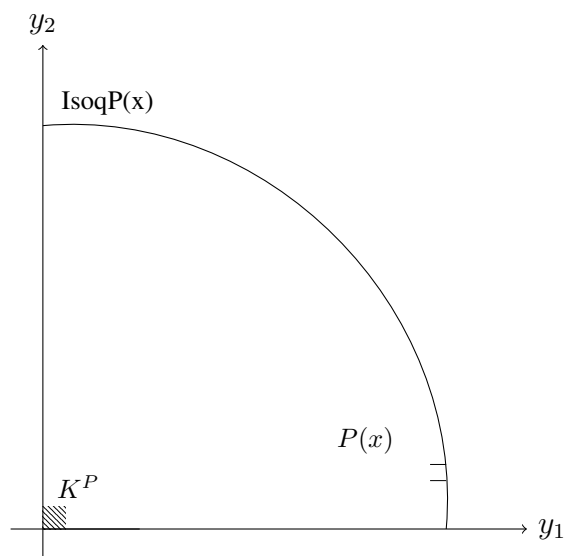


FIGURE 3 – Correspondance en outputs

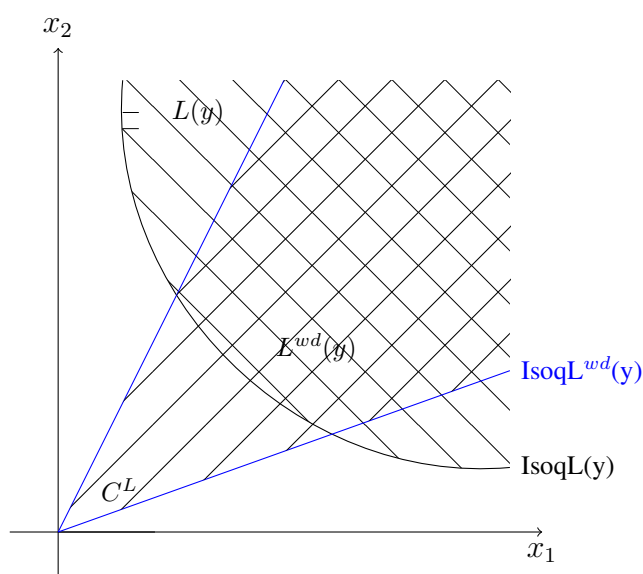


FIGURE 4 – Disponibilité des inputs

que dans le cône convexe C^L . Ainsi, ils ne sont pas librement disponibles : $C^L \subset K^L$. La correspondance en inputs faiblement disponible est un sous-ensemble de l'ensemble en inputs librement disponible : $L^{wd}(y) \subset L(y)$. La frontière de l'ensemble $L^{wd}(y)$ correspond à l'isoquant en input faiblement disponible ($\text{IsoqL}^{wd}(y)$)¹.

Lorsque les outputs satisfont la version faible de l'hypothèse de disponibilité, la correspon-

1. L'isoquant en input faiblement disponible est représenté dans la figure 4 par les lignes bleues appartenant à $L(y)$ et la ligne courbée noire reliant les deux lignes bleues.

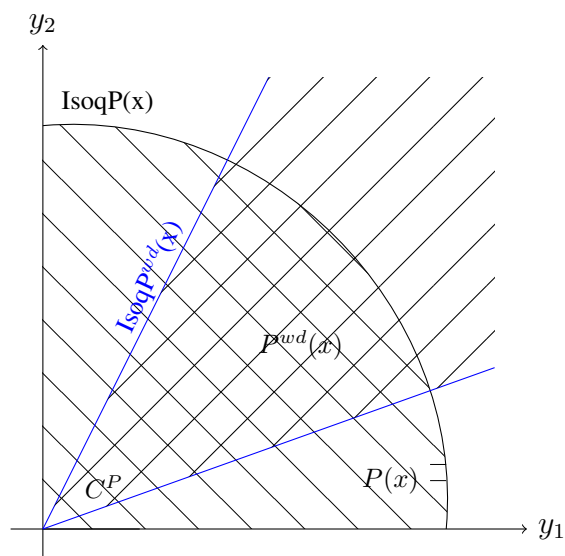


FIGURE 5 – Disponibilité des outputs

dance en outputs est représentée à travers la zone quadrillée dans la figure 5 ($P^{wd}(y)$). Ici, les outputs pouvant être produits par un vecteur d'inputs x ne peuvent être disposés que dans le cône convexe C^P . Ils ne sont donc pas librement disponibles : $C^P \subset K^P$. La correspondance en outputs faiblement disponibles est un sous ensemble de l'ensemble en outputs librement disponible : $P^{wd}(y) \subset P(y)$. La frontière de l'ensemble $P^{wd}(y)$ correspond à l'isoquant en output faiblement disponible ($\text{Isoq}P^{wd}(y)$)².

Outre l'axiome de disponibilité (faible ou forte), l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production et de ses images en terme de correspondance (inputs et outputs) peut être relâchée. Notons que la convexité des correspondances en inputs et en outputs n'impliquent pas nécessairement la convexité de l'ensemble de production.

Dans une analyse en terme de correspondance (inputs), la figure 6 offre une représentation géométrique qui ne tient pas compte de l'axiome de convexité (L4). L'isoquant en input non convexe ($\text{Isoq}L_{nc}(y)$) représente la frontière de la correspondance en inputs non convexe (ligne noire en escalier).

La correspondance en outputs non convexe est illustré à travers la représentation géométrique exposée dans la figure 7. L'isoquant en output non convexe ($\text{Isoq}P_{nc}(x)$) correspond à la frontière de l'ensemble $P_{nc}(x)$.

2. L'isoquant en output faiblement disponible est représenté dans 5 par les lignes bleues appartenant à $P(x)$ et la

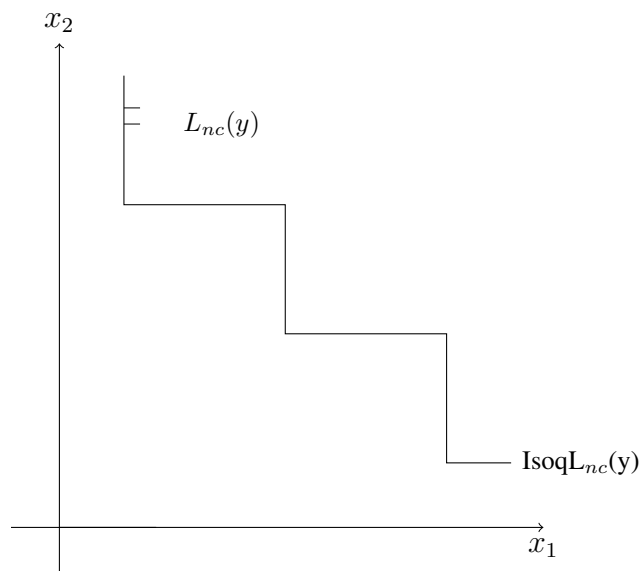


FIGURE 6 – Correspondance en inputs non convexe

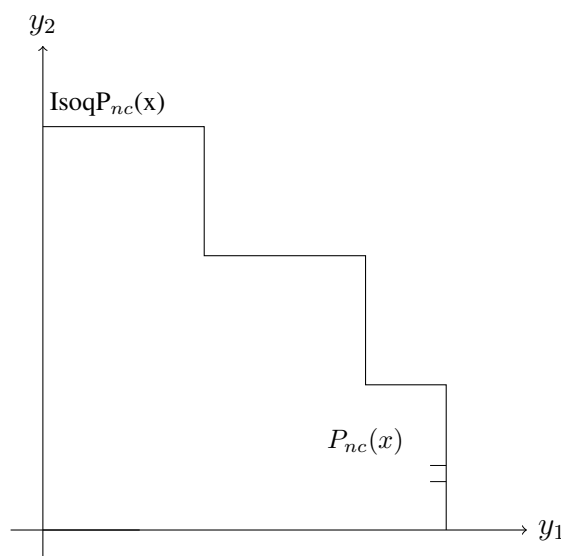


FIGURE 7 – Correspondance en outputs non convexe

Dans le cadre d'une approche axiomatique, nous venons de définir et de caractériser l'ensemble des choix technologiques de la firme. Le graphe de la technologie de production identifie l'ensemble des inputs et des outputs réalisables. L'analyse en terme de correspondance (L ou P) met en lumière l'ensemble des inputs autorisant la réalisation d'un vecteur d'outputs donné (correspondance en inputs) ou l'ensemble des outputs pouvant être produit par un vecteur d'inputs

ligne courbée noire reliant le deux lignes bleues.

donné (correspondance en outputs). Les isoquants de ces différents ensembles constituent la frontière entre le réel et l'irréel. Ces approches permettent de définir et de caractériser des technologies de production multi-inputs multi-outputs sans recourir à une forme fonctionnelle fixée *a priori*.

3 Identification des Points Efficaces

3.1 Les points efficaces et faiblement efficaces dans T

L'ensemble des allocations appartenant à la frontière de la technologie de production (IsoqT) sont techniquement efficaces³. Deux sous-ensembles appartenant à IsoqT peuvent être distingués.

1. L'ensemble faiblement efficient,

$$W = \{(x, y) : (x, y) \in T, (u, -v) \leq (x, -y) \wedge (u, -v) < (x, -y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}.$$

2. L'ensemble efficient,

$$E = \{(x, y) : (x, y) \in T, (u, -v) \leq (x, -y) \wedge (u, -v) \neq (x, -y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}.$$

L'ensemble efficient E regroupe l'ensemble des vecteurs inputs-outputs tel qu'aucune allocation extérieure à E ne domine en inputs ou en outputs un vecteur inputs-outputs appartenant à E. L'ensemble faiblement efficient W est moins restrictif. Il s'ensuit la relation suivante (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985) :

$$E \subset W \subset \text{IsoqT}.$$

3.2 Les points efficaces et faiblement efficaces dans l'ensemble en inputs

La frontière de l'ensemble en inputs (IsoqL(y)) regroupe l'ensemble des vecteurs d'inputs techniquement efficaces. Deux sous-ensembles appartenant à IsoqL(y) peuvent être identifiés :

3. Dans la deuxième partie de ces travaux, nous montrerons que les fonctions de distance radiales et non radiales permettent de définir des mesures d'efficacité technique et de caractériser la technologie de production.

1. L'ensemble faiblement efficient,

$$W(y) = \{x \in L(y) : u \leq x \wedge u < x \Rightarrow u \notin L(y)\}.$$

2. L'ensemble efficient,

$$E(y) = \{x \in L(y) : u \leq x \wedge u \neq x \Rightarrow u \notin L(y)\}.$$

La figure 8 présente une caractérisation géométrique de ces différents ensembles.

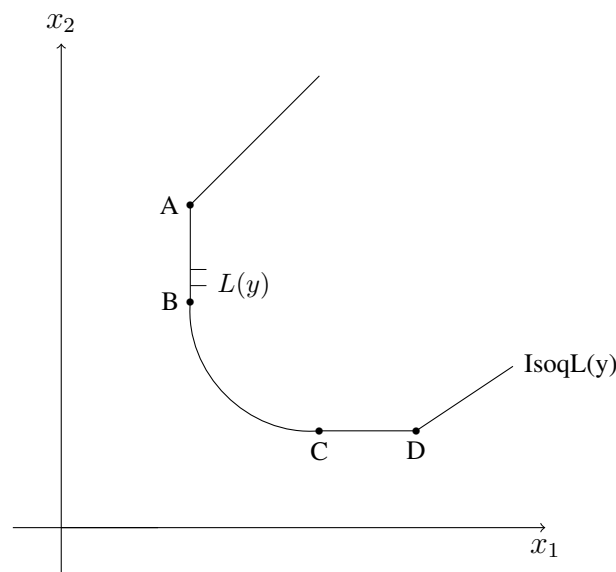


FIGURE 8 – Ensembles efficient et faiblement efficient dans $L(y)$

Dans la figure ci-dessus, l'ensemble efficient ($E(y)$) est représenté par ligne courbée noire allant du point B au point C. L'ensemble des vecteurs d'inputs appartenant à la ligne courbée B-C représente les meilleures combinaisons d'inputs permettant de produire un niveau donné d'outputs. La ligne courbée noire allant du point D au point A correspond à l'ensemble faiblement efficace ($W(y)$). Entre les points B et A la quantité d'input 2 s'accroît alors que la quantité de facteur 1 est constante. La situation inverse se met en place entre les points C et D. On peut établir la relation suivante (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985) :

$$E(y) \subset W(y) \subset \text{IsoqL}(y).$$

3.3 Les points efficaces et faiblement efficaces dans la correspondance en outputs

Dans le cadre d'une analyse en terme de correspondance en outputs, l'isoquant en output ($\text{IsoqP}(x)$) regroupe l'ensemble des allocations techniquement efficaces. Deux sous-ensembles appartiennent à $\text{IsoqP}(x)$:

1. L'ensemble faiblement efficace,

$$W(x) = \{y \in P(x) : v \geq y \wedge v > y \Rightarrow v \notin P(x)\}.$$

2. L'ensemble efficace,

$$E(x) = \{y \in P(x) : v \geq y \wedge v \neq y \Rightarrow v \notin P(x)\}.$$

Les sous-ensembles $E(x)$ et $W(x)$ peuvent être représentés comme suit :

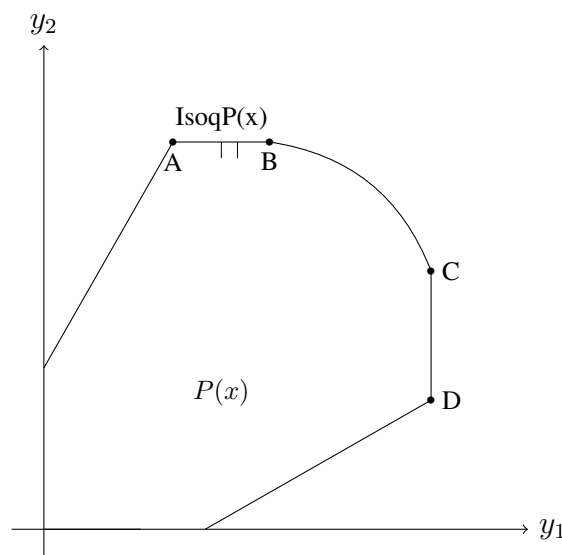


FIGURE 9 – Ensembles efficace et faiblement efficace dans $P(x)$

L'ensemble efficace ($E(x)$) correspond à la ligne courbée comprise entre les points B et C. L'ensemble des vecteurs d'outputs appartenant à la ligne courbée B-C représente les meilleures combinaisons productives pouvant être produites par une quantité donnée d'inputs. La ligne courbée comprise entre les points A et D constitue l'ensemble faiblement efficace ($W(x)$). Entre les

points C et D, la quantité d'output 2 se réduit alors que le niveau d'output 1 reste constant. La situation inverse se rencontre entre les points A et B. La relation d'emboîtement suivante peut être établie (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985) :

$$E(x) \subset W(x) \subset \text{IsoqP}(x).$$

4 Les Rendements d'Échelle

Dans cette section, nous allons définir la nature des rendements d'échelle à partir des technologies de production multi-inputs multi-outputs.

4.1 Les rendements d'échelle constants

Soit \mathcal{C} le cône convexe définie par : $\mathcal{C} = \{\theta(x, y) : \theta \geq 0, (x, y) \in T \subset \mathbb{R}_+^{n+m}\}$. Lorsque la technologie de production satisfait des rendements d'échelle constants (CRS) alors, $\forall \theta \geq 0 (x, y) \in T \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in T$. Elle se définit et se caractérise à partir de \mathcal{C} comme suit :

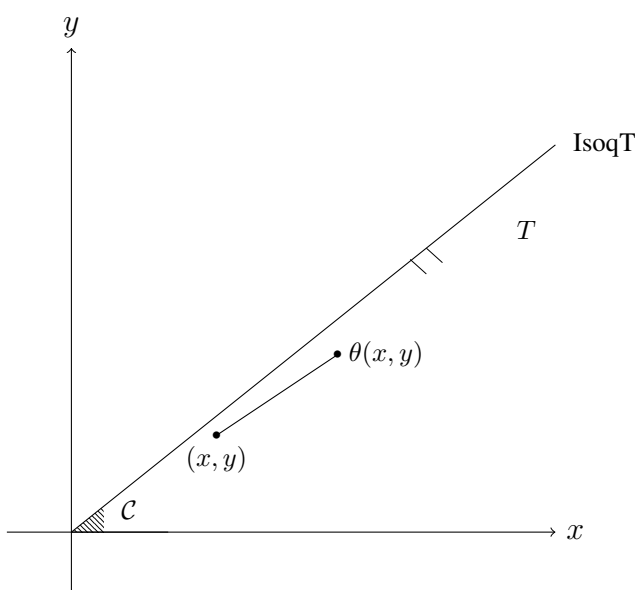


FIGURE 10 – Graphe de la Technologie (CRS)

La technologie de production satisfait des rendements d'échelle de type CRS dès lors qu'une modification proportionnelle des inputs s'accompagne d'une variation des outputs selon une pro-

portion similaire.

4.2 Les rendements d'échelle non décroissants ou non croissants

Lorsqu'en présence d'une hausse (ou d'une baisse) proportionnelle des inputs, si la technologie de production vérifie partiellement des rendements d'échelle de type CRS alors, elle satisfait des rendements d'échelle non décroissants (NDRS) (ou non croissants (NIRS)). Les rendements d'échelle de type NDRS se définissent comme suit : $\forall \theta \geq 1, (x, y) \in T \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in T$ (Figure 11). Les rendements d'échelle de type NIRS se manifestent dès lors que : $\forall \theta \in]0, 1], (x, y) \in T \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in T$ (Figure 12).

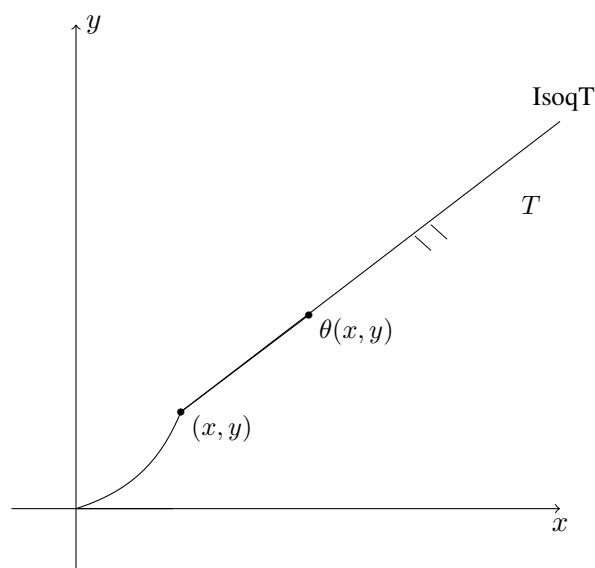


FIGURE 11 – Graphe de la Technologie (NDRS)

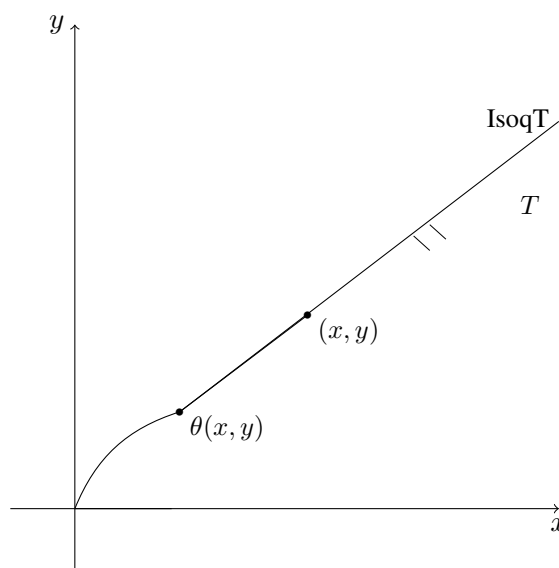


FIGURE 12 – Graphe de la Technologie (NIRS)

Nous pouvons constater que lorsque la technologie de production satisfait simultanément des rendements d'échelle de type NDRS et NIRS alors, elle présente des rendements d'échelle constants.

4.3 Les rendements d'échelle décroissants et croissants

Si la technologie de production admet toujours une hausse (une baisse) plus que proportionnelle des inputs alors, elle vérifie des rendements d'échelle croissants (IRS) (décroissants (DRS)). Les rendements d'échelle de type DRS se définissent comme suit : $\forall \theta \in]0, 1[, (x, y) \in T \wedge (x, y) \neq$

$0 \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in T \setminus W$ (Figure 14). Les rendements d'échelle de type IRS se manifestent dès lors que : $\forall \theta > 1, (x, y) \in T \wedge (x, y) \neq 0 \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in T \setminus W$ (Figure 13).

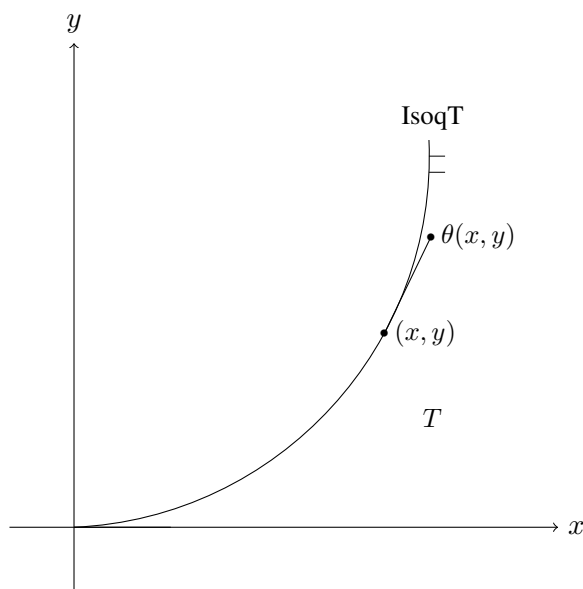


FIGURE 13 – Graphe de la Technologie (IRS)

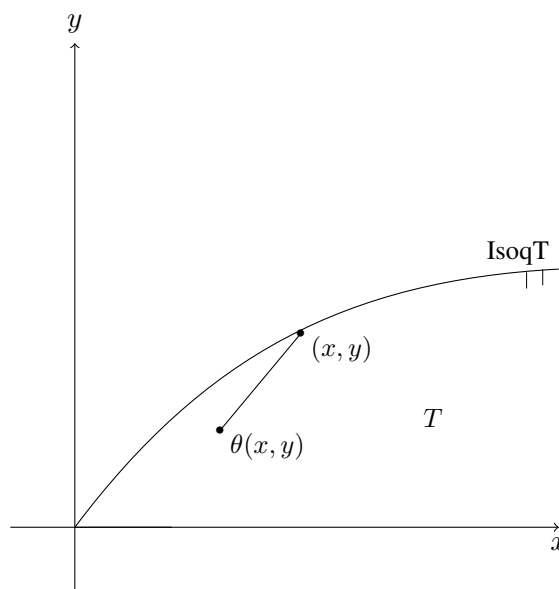


FIGURE 14 – Graphe de la Technologie (DRS)

Lorsque la technologie de production satisfait des rendements d'échelle croissants (NIRS ou IRS) alors l'ensemble de production ne vérifie plus l'axiome de convexité. Celui-ci est toujours satisfait lorsque la technologie de production opère sous l'hypothèse de rendements d'échelle décroissants (NDRS ou DRS). Lorsque la technologie de production satisfait localement des rendements d'échelle croissants, constants et décroissants, ses rendements d'échelle sont qualifiés de variables (VRS).

5 Modélisation de la Technologie de Production

5.1 Ensemble de production polyédrique

Il est d'usage de se référer à des fonctions de production pour caractériser le processus de transformation productif (Chambers, 1988). Les paramètres inconnus de ces fonctions sont estimés selon des techniques économétriques. Dans ces travaux, nous suggérons de caractériser l'ensemble de production à travers une spécification polyédrique. Dans ce contexte, nous nous référons à des

modélisations non-paramétriques (par exemple, méthode DEA). Ce type de spécification permet d'identifier le plus petit ensemble de vecteurs inputs-outputs qui :

1. contient l'ensemble des intrants et des extrants observés et
2. satisfait un ensemble d'axiomes.

Soit, $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$, l'ensemble des unités de production observées sur un secteur de l'économie. Sous les axiomes usuels de la théorie de la production, un ensemble de production polyédrique peut être caractérisé par ses correspondances L ou P. Quelle que soit l'unité de production observée (x_j, y_j) , $j \in \mathcal{Z}$, les correspondances en inputs (L) et en outputs (P) de type polyédrique se définissent comme suit :

$$L(y_j) = \left\{ x : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \geq 0 \right\}$$

et

$$P(x_j) = \left\{ y : x_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \geq 0 \right\}.$$

Les poids μ_z , $z \in \mathcal{Z}$, représentent le niveau d'activité des unités productives observées. Ces ensembles polyédriques en inputs et en outputs sont respectivement décrits à travers les figures 15 et 16. Dans ces caractérisations, les points A et B correspondent à des points extrêmes appartenant respectivement aux ensembles polyédriques en inputs et en outputs.

5.2 Les différents types de rendements d'échelle

La prise en compte des rendements d'échelle dans des ensembles de production polyédriques a été permise par le développement des modèles non-paramétriques basés sur l'identification de l'enveloppe convexe des unités de production observables : $\{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$. La méthode par enveloppement des données (DEA) permet de déterminer le sous-ensemble des unités de production qui forment la surface enveloppe de l'ensemble de production polyédrique, selon différents types de rendements d'échelle. Un ensemble de production polyédrique satisfaisant différents types de rendements d'échelle peut être défini comme suit :

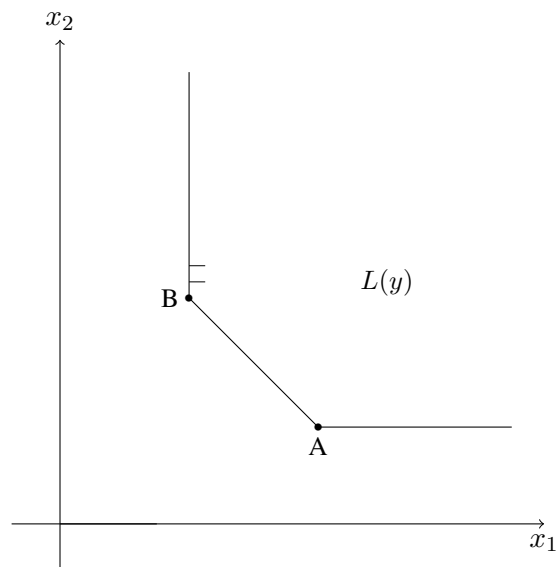


FIGURE 15 – Ensemble en inputs de type polyédrique

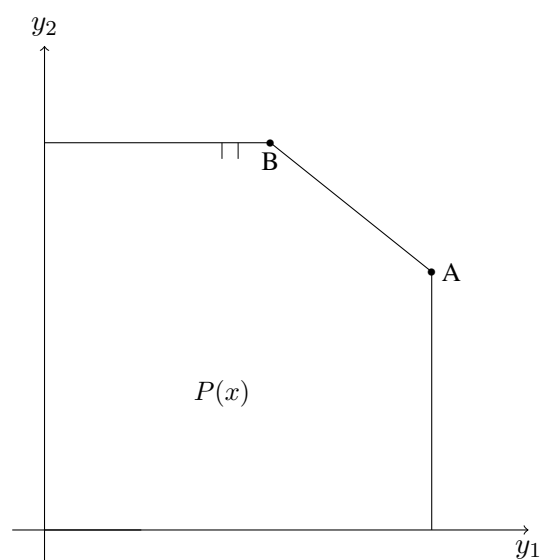


FIGURE 16 – Correspondance en outputs de type polyédrique

$$T = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Gamma \right\}. \quad (1.4)$$

Selon la définition de l'ensemble Γ plusieurs types de rendements d'échelle peuvent être identifiés.

5.2.1 Rendements d'échelle constants

L'apport de Charnes, Cooper et Rhodes (1978) introduit dans un ensemble de production de type polyédrique des rendements d'échelle constants selon la méthode DEA. Formellement :

$$T_{crs}^{DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Gamma_{crs} \right\}, \quad (1.5)$$

avec

$$\Gamma_{crs} = \{ \mu_z : \mu_z \geq 0, \forall z \in \mathcal{Z} \}. \quad (1.6)$$

Dans la figure 17, T_{crs}^{DEA} représente le plus petit cône convexe polyédrique, regroupant l'ensemble des unités de production observées⁴.

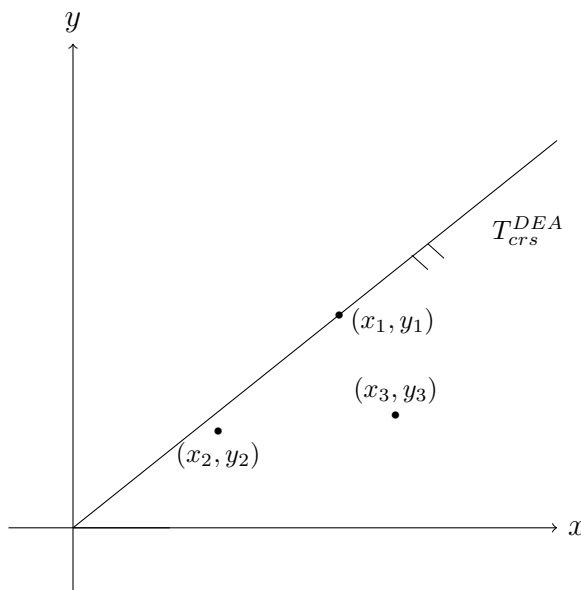


FIGURE 17 – DEA-Rendements d'échelle constants (CRS)

5.2.2 Rendements d'échelle variables

Suite aux travaux de Banker, Charnes et Cooper (1984), un ensemble de production polyédrique satisfaisant des rendements d'échelle variables a été défini à l'aide de la méthode DEA.

Formellement,

$$T_{vrs}^{DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Gamma_{vrs} \right\}, \quad (1.7)$$

avec

$$\Gamma_{vrs} = \left\{ \mu_z : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \mu_z \geq 0, \forall z \in \mathcal{Z} \right\}. \quad (1.8)$$

Dans la figure 18, T_{vrs}^{DEA} représente le plus petit ensemble polyédrique regroupant l'ensemble des unités de production observées⁵. L'ensemble de production polyédrique T_{vrs}^{DEA} admet locale-

4. Dans l'illustration 17, $\mathcal{A} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

5. Dans l'illustration 18, $\mathcal{A} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$.

ment des rendements d'échelle croissants, constants et décroissants.

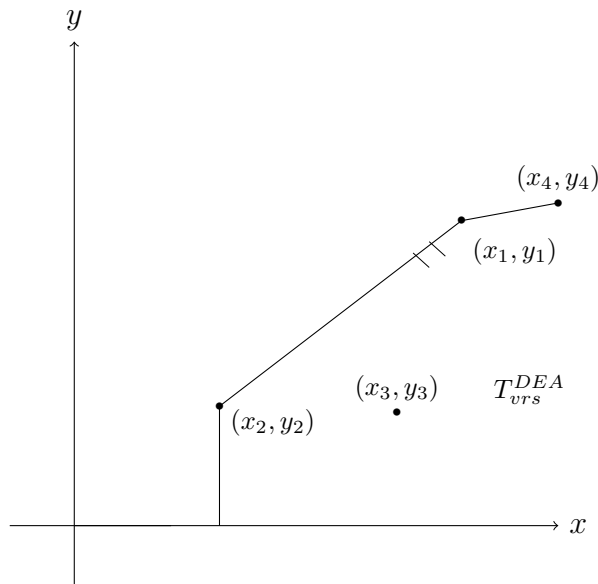


FIGURE 18 – DEA-Rendements d'échelle variables (VRS)

5.2.3 Rendements d'échelle non croissants

Les rendements d'échelle non croissants d'un ensemble de production polyédrique sont spécifiés comme suit (Seidford, 1990) :

$$T_{nirs}^{DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Gamma_{nirs} \right\}, \quad (1.9)$$

avec

$$\Gamma_{nirs} = \left\{ \mu_z : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \leq 1, \mu_z \geq 0, \forall z \in \mathcal{Z} \right\}. \quad (1.10)$$

Ici, les rendements d'échelle sont au plus constants.

5.2.4 Rendements d'échelle non décroissants

Les rendements d'échelle non décroissants d'un ensemble de production polyédrique sont spécifiés comme suit (Grosskopf, 1986) :

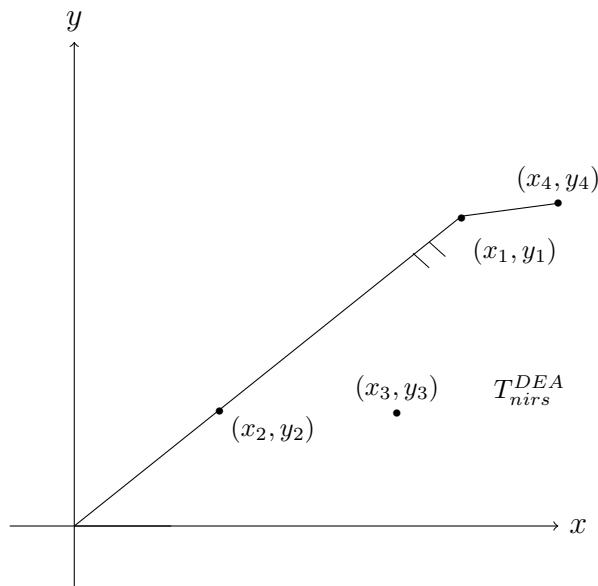


FIGURE 19 – DEA-Rendements d'échelle non croissants (NIRS)

$$T_{ndrs}^{DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Gamma_{ndrs} \right\}, \quad (1.11)$$

avec

$$\Gamma_{ndrs} = \left\{ \mu_z : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \geq 1, \mu_z \geq 0, \forall z \in \mathcal{Z} \right\}. \quad (1.12)$$

Ici, les rendements d'échelle sont au moins constants.

5.3 Relâchement des hypothèses de disponibilité et de convexité

5.3.1 Ensemble de production polyédrique et hypothèse de disponibilité faible

Lorsque l'hypothèse de disponibilité forte est relâchée, les correspondances en inputs (L) et en outputs (P) de type polyédrique se définissent de la façon suivante :

$$L^{wd}(y) = \left\{ x : \theta x = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \theta, \gamma \in]0, 1], \mu \geq 0 \right\} \quad (1.13)$$

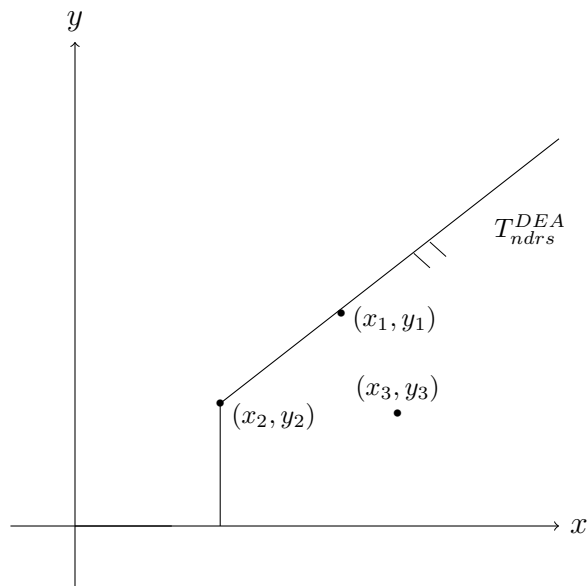


FIGURE 20 – DEA-Rendements d'échelle non décroissants (NDRS)

et

$$P^{wd}(x) = \left\{ y : \theta x = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \theta, \gamma \in]0, 1], \mu \geq 0 \right\}. \quad (1.14)$$

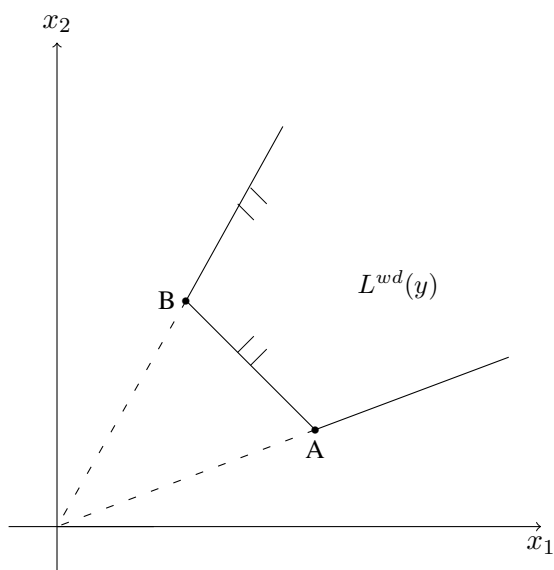


FIGURE 21 – Ensemble en inputs de type polyédrique et disponibilité faible

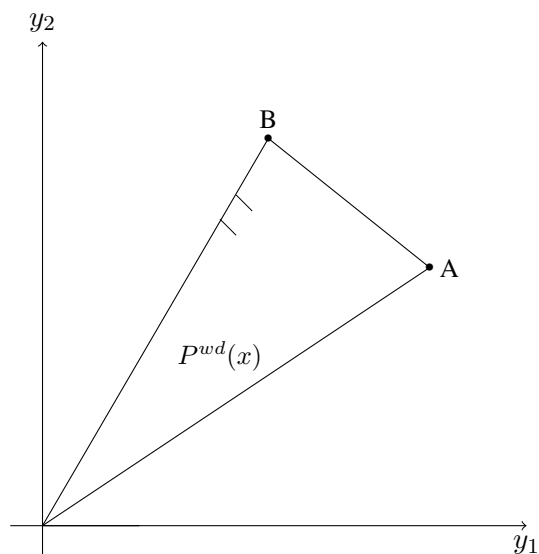


FIGURE 22 – Correspondance en outputs de type polyédrique et disponibilité faible

Selon les types de rendements d'échelle, les correspondances de type polyédrique (L^{wd} et P^{wd}) se définissent comme suit :

$$L^{wd}(y) = \left\{ x : \theta x = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \theta, \gamma \in]0, 1], \mu \in \Gamma \right\}$$

et

$$P^{wd}(x) = \left\{ y : \theta x = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \theta, \gamma \in]0, 1], \mu \in \Gamma \right\}.$$

L'ensemble Γ représente les différents types de rendements d'échelle (CRS, VRS, NIRS, NDRS).

5.3.2 Le modèle FDH

Tulkens (1993) introduit la spécification FDH (sigle anglo-saxon pour "Free Disposal Hull"). Ce modèle consiste à identifier le plus petit ensemble de production satisfaisant l'hypothèse usuelle de libre disposition. Ainsi, cette approche est indépendante de l'hypothèse de convexité. La spécification FDH (non convexe) de l'ensemble de production se définit de la façon suivante :

$$T^{FDH} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Gamma_{FDH} \right\}, \quad (1.15)$$

avec

$$\Gamma_{FDH} = \left\{ \mu_z : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \mu_z \in \{0, 1\}, \forall z \in \mathcal{Z} \right\}. \quad (1.16)$$

Un ensemble de production construit grâce à la méthode FDH se définit comme une réunion finie de sous-ensembles de production individuels respectant l'ordre de disposition forte. Soit,

$$S^{SD}(x_z, y_z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq x_z, y \leq y_z \right\} \quad (1.17)$$

un sous-ensemble de production individuel, avec $z \in \mathcal{Z}$, respectant l'axiome de disponibilité forte. Une technologie de production non convexe (FDH) construite à partir des observations appartenant à $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$ s'écrit comme suit :

$$T^{FDH} = \left\{ (x, y) : (x, y) \in \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z) \right\}. \quad (1.18)$$

L'ensemble T^{FDH} est représenté de manière géométrique dans la figure 23, nous avons :

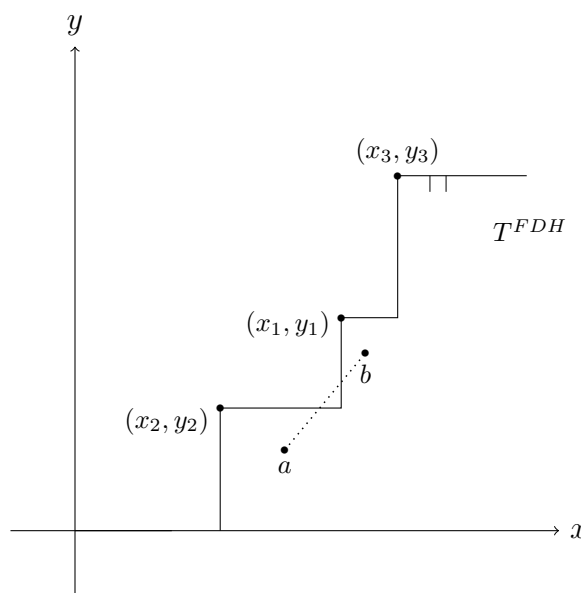


FIGURE 23 – Ensemble de production non convexe (FDH)

Dans l'approche FDH, la frontière de l'ensemble des possibilités de production à une forme en escalier. L'ensemble T^{FDH} ne vérifie pas l'axiome de convexité. Si l'on considère deux points appartenant à T^{FDH} , la combinaison linéaire de ces deux points n'appartiendra pas nécessairement à T^{FDH} (voir a et b dans la figure 23). De manière analogue, l'ensemble de production non convexe (T^{FDH}) peut être représenté grâce à une analyse en termes de correspondances productives (L ou P). Ainsi, il vient :

$$L^{FDH}(y) = \left\{ x : (x, y) \in \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z) \right\} \quad (1.19)$$

et

$$P^{FDH}(x) = \left\{ y : (x, y) \in \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z) \right\}. \quad (1.20)$$

Géométriquement, ces ensembles sont caractérisés dans les figures 24 et 25

Dans la définition de l'ensemble de production FDH, (1.15), aucune hypothèse sur la nature des rendements d'échelle n'est imposée. En ce sens, Briec, Kerstens et Vanden Eeckaut (2004) pro-

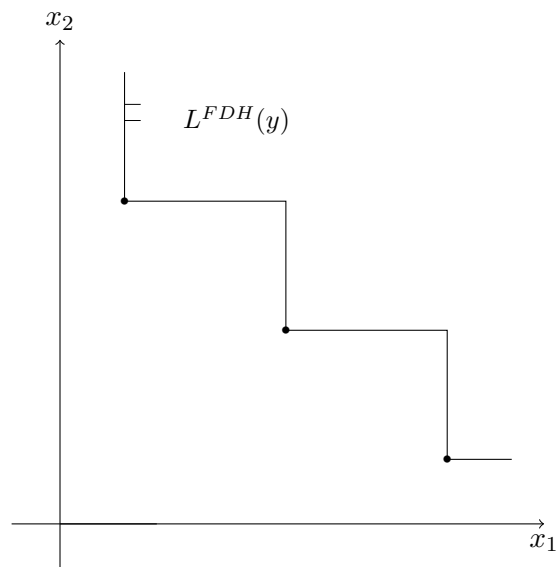


FIGURE 24 – Correspondance en inputs non convexe (FDH)

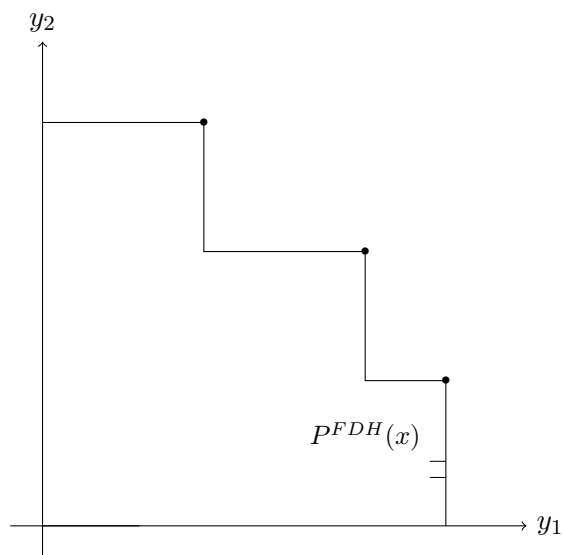


FIGURE 25 – Ensemble en outputs non convexe (FDH)

posent une définition générale de l'ensemble de production (convexe ou non convexe), admettant différents types de rendements d'échelle :

$$T_{\Omega, \Delta} = \left\{ (x, y) : x \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \mu \in \Omega, \delta \in \Delta \right\}. \quad (1.21)$$

Où $\Omega \in \{c, nc\}$, avec $c = \{\mu : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \mu \geq 0\}$ et $nc = \{\mu : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \mu \in \{0, 1\}\}$. De plus, $\Delta \in \{\{\delta : \delta = 1\}; \{\delta : \delta \geq 0\}; \{\delta : \delta \in [0, 1]\}; \{\delta : \delta \geq 1\}\}$ permet de considérer plusieurs rendements d'échelle (VRS, CRS, NIRS et NDRS).

Si on suppose que l'ensemble de production est non convexe ($\Omega = nc$), $T_{\Omega, \Delta}$ se définit comme une réunion finie de sous-ensembles de production individuels respectant l'ordre de disponibilité forte et différents types de rendements d'échelle. Soit

$$S^{SD, \delta}(x_z, y_z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq \delta x_z, y \leq \delta y_z, \delta \in \Delta\}, \quad (1.22)$$

un sous-ensemble de production individuel, avec $z \in \mathcal{Z}$, respectant l'axiome de disponibilité forte et tenant compte de différents types de rendements d'échelle. Il vient :

$$T_{nc, \Delta} = \left\{ (x, y) : (x, y) \in \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD, \delta}(x_z, y_z) \right\}. \quad (1.23)$$

Si l'ensemble de production est supposé convexe ($\Omega = c$) alors, $T_{\Omega, \Delta}$ se définit comme suit :

$$T_{c, \Delta} = \left\{ (x, y) : (x, y) \in Co \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD, \delta}(x_z, y_z) \right) \right\}. \quad (1.24)$$

Où $Co \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD, \delta}(x_z, y_z) \right)$ représente le cône convexe de la réunion finie des sous-ensembles de production individuels respectant l'ordre de disponibilité forte et différents types de rendements d'échelle.

6 Conclusion

Au terme de ce premier chapitre, nous avons une vision d'ensemble de la structuration de l'ensemble des possibilités productives. Les axiomes traditionnellement retenus en théorie de la production pour définir et caractériser l'ensemble de production, ainsi que ses correspondances (L ou P), ont été exposés.

Parmi l'éventail des choix techniquement réalisables, ces derniers peuvent être regroupés selon leur degrés d'efficacité. Cette procédure permet de distinguer plusieurs sous-ensemble au sein de la frontière de la technologie de production et de ses images, en termes de correspondances.

Plusieurs hypothèses concernant la nature des rendements d'échelle ont été introduites. La structure de la technologie de production étant directement altérée par la nature des rendements d'échelle, une présentation des différents types de rendements a été proposée.

Enfin, selon une modélisation polyédrique de l'ensemble de production, une procédure de spécification non-paramétrique de l'ensemble de production a été présentée (méthode DEA). Dans ce contexte, nous avons indiqué les conséquences d'un relâchement des hypothèses usuelles de disponibilité et de convexité.

Chapitre 2

Structure des Technologies de Production Polluante

1 Introduction

Questionnements : Peut-on définir et caractériser des technologies de production polluante selon les axiomes traditionnellement retenus en théorie de la production ? Si tel n'est pas le cas, quelles propriétés additionnelles doit-on introduire pour définir et caractériser ce type d'ensemble ? Selon quelle procédure les technologies de production polluante peuvent-elles être spécifiées ?

Dans ce chapitre, nous étudions différentes approches axiomatiques permettant de définir et de caractériser l'ensemble des possibilités productives de la firme lorsque celle-ci est engagée dans des activités productives polluantes. La deuxième section présente les notations retenues dans ces travaux.

Dans la troisième section, nous proposons de définir et de caractériser les technologies de production polluante selon les axiomes traditionnellement retenus en théorie de la production. Nous observerons que, lorsque les extrants sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes, ce schéma est inopérant.

Ceci nous amènera à modifier les hypothèses usuelles dans une quatrième section. Les productions polluantes seront successivement considérées comme des intrants et comme des productions apparaissant conjointement avec les produits désirables.

Partant du constat que ces axiomes modifiés ne répondent que partiellement aux limites de l'approche traditionnelle, les dernières avancées rencontrées dans la littérature seront exposées dans une cinquième section. Les modèles récemment suggérés par Rødseth (2017) et Murty, Russell et Levkoff (2012) seront successivement présentés.

Enfin, la dernière section propose une procédure permettant de spécifier les technologies de production polluante. Une spécification non-paramétrique par enveloppement des données (méthode DEA) sera adoptée.

2 Partitionement des Intrants et des Extrants en Composantes Polluantes et Non Polluantes

Commençons par préciser les notations retenues dans ces travaux pour définir et caractériser les technologies de production polluante. Nous supposons que le vecteur d'outputs $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m$ est partitionné en composantes polluantes (indésirables) et non polluantes (désirables). Soit $O^{np} \subset [m]$ et $O^p \subset [m]$ les sous-ensembles regroupant les productions désirables et les résidus polluants, tel que l'ensemble des outputs est $O = O^{np} \cup O^p \subseteq [m]$ avec $[m] = \text{Card}(O^{np}) + \text{Card}(O^p)$ ¹. Ainsi, le vecteur d'outputs s'écrit comme suit² : $y = (y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^m$.

De même, le vecteur d'input $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ est partitionné en composantes polluantes et non polluantes. Soit $I^{np} \subset [n]$ et $I^p \subset [n]$ les sous-ensembles regroupant les intrants non polluants et polluants, tel que l'ensemble des inputs est $I = I^{np} \cup I^p \subseteq [n]$ avec $[n] = \text{Card}(I^{np}) + \text{Card}(I^p)$ ³. Dans ces conditions, le vecteur d'intrants s'écrit de la façon suivante : $x = (x^{np}, x^p) \in \mathbb{R}_+^n$.

Ces notations permettent d'introduire une plus grande flexibilité dans la définition des intrants et des extrants intervenant dans le processus productif. Dans la littérature, les partitions suivantes sont envisagées :

-
1. Ici, $\text{Card}(O^{np}) = [m^{np}]$ et $\text{Card}(O^p) = [m^p]$.
 2. Dans ces travaux, les sigles "np" et "p" sont utilisés pour désigner respectivement le caractère non polluant ou polluant des éléments qui leurs sont associés.
 3. Ici, $\text{Card}(I^{np}) = [n^{np}]$ et $\text{Card}(I^p) = [n^p]$.

Partition	Définition des intrants et des extrants
(i) $I = I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} = O^p = \emptyset$	Ici, les inputs et les outputs ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes. Ce schéma correspond à celui qui est traditionnellement retenu en théorie de la production : $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$.
(ii) $I = I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$	Dans ce cas, les inputs ne sont pas partitionnés et les outputs sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes : $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m^{np}+m^p}$.
(iii) $I = I^p \cup I^{np}$ et $O = O^p \cup O^{np}$	Ici, les intrants et les extrants sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes : $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}+n^p+m^{np}+m^p}$. Ce schéma correspond à celui qui est envisagé dans les dernières avancées proposées dans la littérature (Rødseth, 2017 ; Murty, Russel et Levkoff, 2012).

TABLE 2.1 – Caractérisation des inputs et des outputs

3 Ensemble de Production Usuel et Activités Productives Polluantes

Dans cette section, nous retenons le partitionnement suivant : (ii) $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$.

3.1 La technologie de production et ses correspondances productives

Soit, $T : \mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m}}$, l'ensemble de production de la firme :

$$T = \{(x, y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, y^{np}, y^p) \text{ est réalisable}\}. \quad (2.1)$$

Ici, la technologie de production T regroupe l'ensemble des inputs, $x \in \mathbb{R}_+^n$, qui contribuent à produire des produits désirables et indésirables, $(y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^m$. L'ensemble de production T peut être défini, de façon équivalente, en terme de correspondance en facteurs, $L : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$, ou de correspondance en produits (désirables et indésirables), $P : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$. La correspondance en inputs représente l'ensemble des intrants, x , qui concourent à la réalisation du coproduit (non polluant et polluant), (y^{np}, y^p) .

$$\begin{aligned} L(y^{np}, y^p) &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : (y^{np}, y^p) \text{ est productible par } x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : (x, y^{np}, y^p) \in T\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La correspondance en outputs regroupe l'ensemble des productions désirables et indésirables, (y^{np}, y^p) , qui peuvent être produites par l'input, x .

$$\begin{aligned} P(x) &= \{(y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^m : (y^{np}, y^p) \text{ est produit par } x\} \\ &= \{(y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^m : (x, y^{np}, y^p) \in T\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dans la chapitre précédent, nous avons constaté qu'il existe une équivalence entre les analyses en termes de graphe et de correspondances (L et P). Il s'ensuit :

$$x \in L(y^{np}, y^p) \Leftrightarrow (x, y^{np}, y^p) \in T \Leftrightarrow (y^{np}, y^p) \in P(x) \quad (2.4)$$

Suivant l'approche axiomatique traditionnellement retenue en théorie de la production, l'ensemble T est supposé satisfaire les hypothèses T1-T7. Ainsi, les correspondances en inputs et en outputs vérifient respectivement les axiomes L1-L8 et P1-P8. La figure 1 présente une représentation géométrique de la correspondance en outputs désirables et indésirables (2.3). L'isoquant en output de $P(x)$ est défini par :

$$\text{IsoqP}(x) = \{(y^{np}, y^p) : (y^{np}, y^p) \in P(x), \gamma(y^{np}, y^p) \notin P(x), \gamma \in]1, +\infty)\}.$$

Il représente la frontière de la correspondance en outputs désirables et résiduels (ligne courbée grise).

3.2 Les correspondances Q et Z

La figure 1 représente la correspondance en outputs dans un repère à trois dimensions (input, production désirable et indésirable). Cette illustration fait apparaître une correspondance dans l'es-

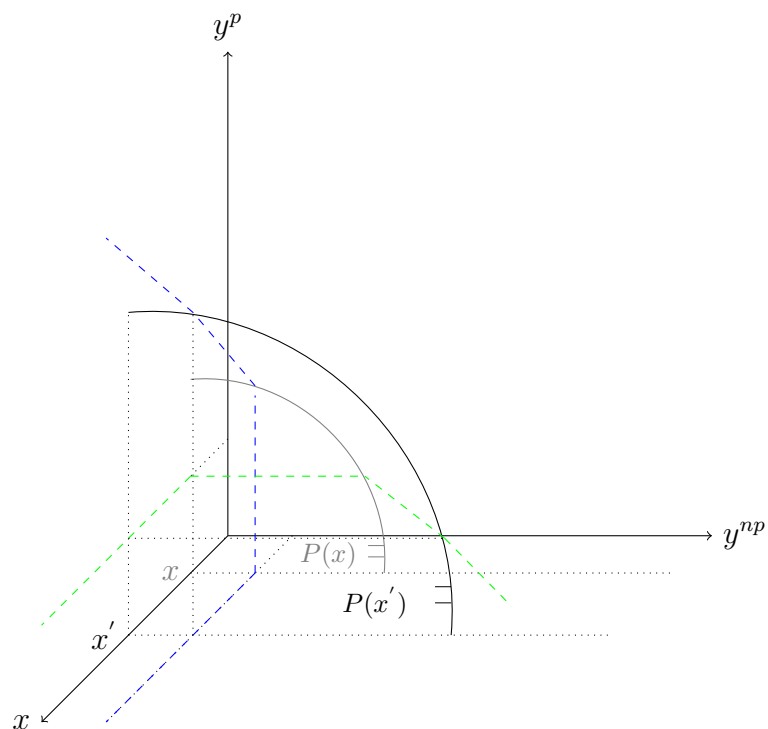


FIGURE 1 – Correspondance en outputs désirables et indésirables (P1-P8)

pace des intrants et des productions résiduelles (ensemble compris entre les lignes en pointillées bleues). Cette correspondance, $Q : \mathbb{R}_+^{m^{np}} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m^p}}$, regroupe l'ensemble des intrants et des productions polluantes, (x, y^p) , qui garantissent la production de l'output désirable, y^{np} . Formellement,

$$Q(y^{np}) = \{(x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m^p} : (x, y^{np}, y^p) \in T\}. \quad (2.5)$$

La figure 1 met également en lumière une correspondance dans l'espace des inputs et des productions désirables (ensemble compris entre les lignes en pointillées vertes). Cette correspondance, $Z : \mathbb{R}_+^{m^p} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m^{np}}}$, regroupe l'ensemble des inputs et des productions non polluantes, (x, y^{np}) , qui concourent à la réalisation de l'output indésirable, y^p . Formellement,

$$Z(y^p) = \{(x, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+m^{np}} : (x, y^{np}, y^p) \in T\}. \quad (2.6)$$

D'après le résultat (2.4), il vient immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in L(y^{np}, y^p) \\ (y^{np}, y^p) \in P(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y^p) \in Q(y^{np}) \\ (x, y^{np}) \in Z(y^p) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x, y^{np}, y^p) \in T \quad (2.7)$$

Notons que les ensembles $Q(y^{np})$ et $Z(y^p)$ s'inscrivent dans le cadre des axiomes usuels de la technologie de production (T1-T7). La figure 2 propose une illustration de l'ensemble $Q(y^{np})$. L'isoquant en intrant et en production résiduelle de $Q(y^{np})$ est défini par :

$$\text{Isoq}Q(y^{np}) = \left\{ (x, y^p) : (x, y^p) \in Q(y^{np}), (\phi x, \frac{1}{\phi} y^p) \notin Q(y^{np}), \phi \in]0, 1[\right\}.$$

Il représente la frontière de la correspondance en inputs et outputs indésirables (ligne courbée noire).

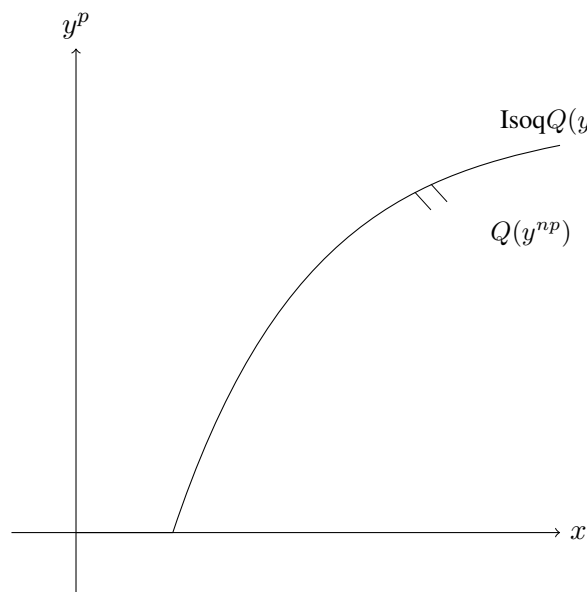


FIGURE 2 – Correspondance en intrants et en productions résiduelles

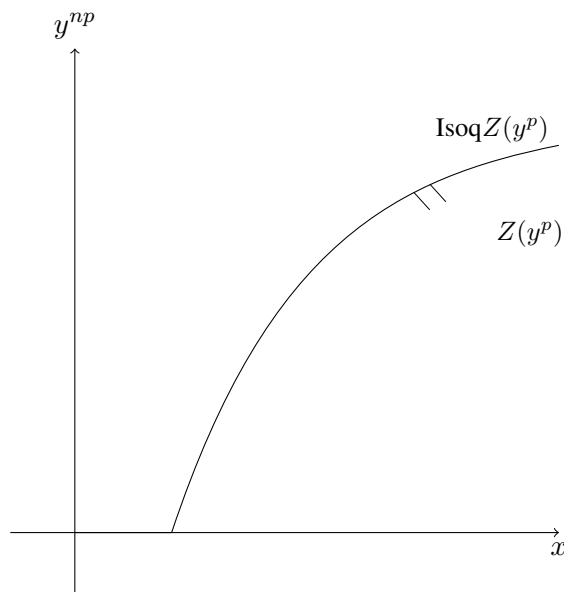


FIGURE 3 – Correspondance en intrants et en productions désirables

La figure 3 propose une représentation géométrique de la correspondance $Z(y^p)$. L'isoquant en intrants et en productions désirables de $Z(y^p)$ est défini par :

$$\text{Isoq}Z(y^p) = \left\{ (x, y^{np}) : (x, y^{np}) \in Z(y^p), (\sigma x, \frac{1}{\sigma} y^{np}) \notin Z(y^p), \sigma \in]1, +\infty[\right\}.$$

Il représente la frontière de la correspondance en intrants et en produits désirables (ligne courbée noire).

3.3 Ensemble de production usuel et partitionnement des outputs : limites

L'approche axiomatique usuelle ne respecte pas les lois physiques élémentaires (Färe et Grosskopf, 2003, 2004a). Ce constat peut être illustré à travers les figures 1, 2 et 3. D'après ces différentes représentations, pour une quantité donnée d'inputs, il est possible de produire un niveau positif d'outputs désirables en ne générant aucun output résiduel. Ainsi, il n'existe aucune relation entre les productions désirables et indésirables. Or, en présence d'une activité productive polluante, il est impossible de créer, suite à la transformation d'une quantité donnée d'intrants, un niveau positif d'outputs désirables sans générer une quantité minimale de résidus polluants.

De plus, selon les figures 1, 2 et 3, un niveau donné d'outputs (polluants et non polluants) peut être produite par une quantité infinie d'intrants. De fait, la relation entre la transformation des intrants et la génération des produits indésirables n'est pas prise en considération dans ce modèle.

Face aux limites de cette approche, il est alors nécessaire d'identifier une structure de la technologie de production, satisfaisant simultanément un ensemble de propriétés relevant de l'intuition économique et respectant les principes physiques élémentaires.

4 Ensemble de Production Non Conventionnel et Activités Productives Polluantes

Dans cette section, nous retenons le partitionnement suivant : (ii) $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$.

4.1 Les productions polluantes considérées comme des inputs

4.1.1 L'ensemble des possibilités productives : hypothèses et définition

La première approche alternative exposée dans ces travaux consiste à traiter les productions néfastes comme des inputs (Cropper et Oattes, 1992 ; Reinhard, Lovell et Thijssen, 2000 ; Hailu et

Veeman, 2001 ; Sahoo, Luptacik et Mahlberg, 2011 ; Mahlberg, Luptacik et Sahoo, 2011). L'ensemble de production 2.1 satisfait une nouvelle hypothèse de disponibilité \bar{T}_5 : si $(x, y^{np}, y^p) \in T$ et $y^{np} \geq y^{np'}$, $x' \geq x$, $y^{p'} \geq y^p$ alors $(x', y^{np'}, y^{p'}) \in T$. La technologie de production peut ainsi être représentée selon un pseudo ensemble en inputs, $\tilde{L} : \mathbb{R}_+^{m_a} \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m_b}}$. Il représente l'ensemble des inputs et des produits indésirables, (x, y^p) , qui peuvent produire le produit désirable, y^{np} (figure 4). Formellement,

$$\begin{aligned} \tilde{L}(y^{np}) &= \{(x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m_b} : y^{np} \text{ est productible par } (x, y^p)\} \\ &= \{(x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m_b} : (x, y^{np}, y^p) \in T\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'isoquant en input et en production résiduelle de $\tilde{L}(y^{np})$ est défini par :

$$\text{Isoq}\tilde{L}(y^{np}) = \{(x, y^p) : (x, y^p) \in \tilde{L}(y^{np}), \beta(x, y^p) \notin \tilde{L}(y^{np}), \beta \in]0, 1[\}.$$

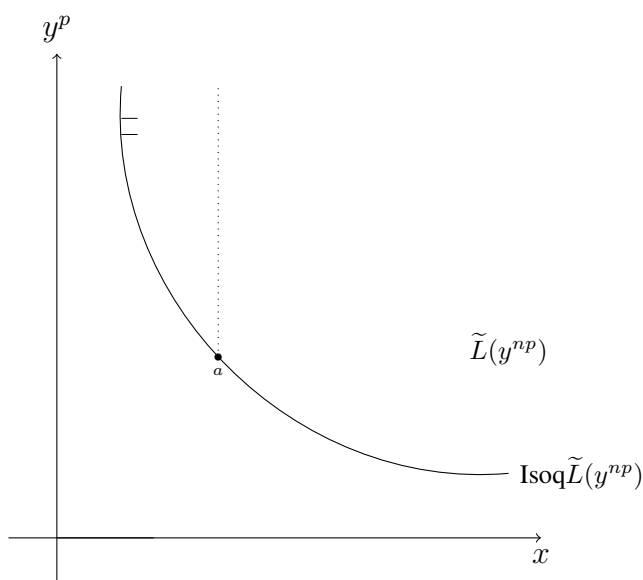


FIGURE 4 – Pseudo correspondance en inputs $\tilde{L}(y^{np})$

4.1.2 Les principales critiques concernant cette approche axiomatique

Pethig (2003, 2006) fait remarquer que cette approche ne permet pas de satisfaire les lois physiques élémentaires. Plus précisément, elle ne vérifie pas le premier principe de la thermodynamique. En effet, suivant cette loi, la masse des intrants transformés au sein du processus productif doit être identique à celle des extrants. Dans le cadre d'une activité productive polluante, les facteurs de production utilisés se transforment en produits désirables et en résidus polluants. La matière contenue dans les facteurs de production doit donc être égale à celle contenue dans les produits non polluants et polluants.

De plus, quand les productions indésirables sont traitées comme des inputs, il est toujours possible d'accroître les produits résiduels pour une quantité donnée d'input (x) et d'output désirable (y^{np}). Ce résultat peut être vérifié à partir de la figure 4 ; voir la demi droite $[a, +\infty)$. Ainsi, cette approche ne considère aucune relation entre la génération des productions résiduelles et l'utilisation des inputs (Försund, 2009).

Les limites mentionnées précédemment mettent en lumière les difficultés de cette approche axiomatique à définir des technologies de production polluante selon des hypothèses relevant de l'intuition économique et respectant les principes physiques élémentaires.

4.2 Technologies de production jointe

4.2.1 L'ensemble des possibilités productives : hypothèses et définition

Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) introduisent une approche axiomatique basée sur l'hypothèse de disponibilité faible des outputs (Shephard, 1970) et, sur la propriété de nullité jointe des productions désirables et indésirables. Le premier concept signifie que les productions non polluantes et les résidus polluants peuvent uniquement être réduits proportionnellement. Cette approche axiomatique fait apparaître une situation de congestion dans la dimension des productions désirables (Färe et Svenson, 1980 ; Färe et Grosskopf, 1983 ; Färe, Grosskopf et Lovell, 1985). Dans ce cas, l'ensemble de production (2.1) est supposé satisfaire les propriétés suivantes :

$$\mathbf{TJ1} : (0, y^{np}, y^p) \in T^{wd} \Rightarrow (y^{np}, y^p) = 0.$$

$$\mathbf{TJ2} : (x, 0, 0) \in T^{wd}, \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

TJ3 : T^{wd} est compact (fermé et borné).

TJ4 : T^{wd} est convexe.

TJ5 : $\forall (x, y^{np}, y^p) \in T^{wd}$ et $\forall u \geq x$ alors, $(u, y^{np}, y^p) \in T^{wd}$.

TJ6 : $\forall (x, y^{np}, y^p) \in T^{wd}$ et $\forall v_d \leq y_d$ alors, $(x, v^{np}, y^p) \in T^{wd}$.

TJ7 : Soit θ , si $(x, y^{np}, y^p) \in T^{wd}$ alors, $(x, \theta y^{np}, \theta y^p) \in T^{wd}, \forall \theta \in [0, 1]$.

TJ8 : Si $(x, y^{np}, y^p) \in T^{wd}$ et $y^p = 0$, alors $y^{np} = 0$.

Les principales différences entre l'ensemble d'axiomes TJ1-TJ8, et celui qui est traditionnellement retenu en théorie de la production sont (Färe et Grosskopf, 2004b)⁴ :

1. L'axiome 7 (TJ7) stipule que les produits désirables et indésirables sont faiblement disponibles. Dans ces conditions, la réduction des productions résiduelles engendre un coût car les productions désirables sont réduites dans la même proportion. Une partie des facteurs de production permettant de réaliser les productions non polluantes est affectée à la contraction des produits indésirables. Il s'ensuit une perte de revenu.
2. L'hypothèse 8 (TJ8) est un axiome additionnel inhérent à la technologie de production jointe. Cette hypothèse met en évidence le concept de pollution : aucune production non polluante ne peut être produite sans production résiduelle.

Lorsque la technologie de production satisfait les axiomes TJ1-TJ8 alors, l'ensemble en outputs (désirables et indésirables) (2.3) est supposé vérifier les propriétés suivantes :

PJ1 : $(y^{np}, y^p) \notin P^{wd}(0)$ si $(y^{np}, y^p) \geq 0$ et $(y^{np}, y^p) \neq 0$.

PJ2 : $(0, 0) \in P^{wd}(x), \forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

PJ3 : $P^{wd}(x)$ est compact (fermée et bornée), $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

PJ4 : $P^{wd}(x)$ est un ensemble convexe.

PJ5 : Si $u \geq x \Rightarrow P^{wd}(x) \subseteq P^{wd}(u)$.

PJ6 : $\forall (y^{np}, y^p) \in P^{wd}(x)$, si $0 \leq v_d \leq y_d \Rightarrow (v^{np}, y^p) \in P^{wd}(x)$.

PJ7 : Soit θ , si $(y^{np}, y^p) \in P^{wd}(x)$ alors, $(\theta y^{np}, \theta y^p) \in P^{wd}(x), \forall \theta \in [0, 1]$.

4. Nous utilisons le sigle "wd" pour distinguer la technologie de production suggérée par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) et celle traditionnellement retenue en théorie de la production.

PJ8 : Si $(y^{np}, y^p) \in P^{wd}(x)$ et $y^p = 0$, alors $y^{np} = 0$.

Les axiomes PJ1-PJ6 renvoient à des hypothèses traditionnellement retenues en théorie de la production (voir Hackman, 2008 ; Jacobsen, 1970 ; McFadden, 1978). Les propriétés PJ7-PJ8 correspondent aux propriétés additionnelles introduites dans le cadre de l'approche axiomatique fondée sur l'hypothèse de disponibilité faible des outputs (Shephard, 1970) et sur l'hypothèse de nullité jointe des productions désirables et résiduelles. Les hypothèses PJ1-PJ8 définissent un ensemble en outputs convexe satisfaisant les axiomes usuels de libre disposition dans la dimension des inputs et des productions désirables et, les hypothèses de disponibilité faible des outputs et de nullité jointe des productions désirables et indésirables. La figure 5 présente une caractérisation géométrique de cette correspondance en outputs (non polluants et polluants).

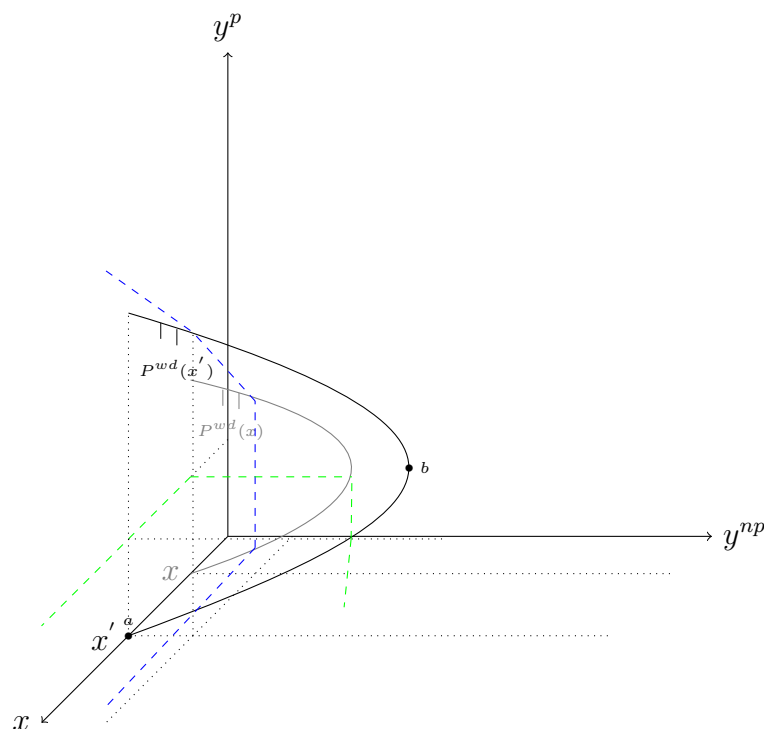


FIGURE 5 – Correspondance en outputs désirables et indésirables (PJ1-PJ8)

4.2.2 La technologie de production jointe et ses correspondances productives

La figure 5 fait apparaître un manque de disponibilité dans la dimension des productions résiduelles. La correspondance en outputs est bornée inférieurement ; voir courbe noire reliant les

points a et b dans $P(x')$ ⁵. Cette représentation met en lumière une situation de congestion dans la dimension des productions désirables (Färe et Svenson, 1980 ; Färe et Grosskopf, 1983). La contraction des productions indésirables s'accompagne d'un coût car elle suppose une réduction proportionnelle des productions non polluantes. Il s'ensuit (figures 1 et 5) : $P^{wd}(x) \subset P(x)$.

Sous les hypothèses TJ1-TJ8, nous retrouvons les correspondances Q et Z (figure 5) telles que :

$$Q^{wd}(y^{np}) \subset Q(y^{np}) \text{ et } Z^{wd}(y^p) \subset Z(y^p).$$

Notons que les nouvelles correspondances $Q^{wd}(y^{np})$ et $Z^{wd}(y^p)$ sont décrites respectivement dans les figures 6 et 7.

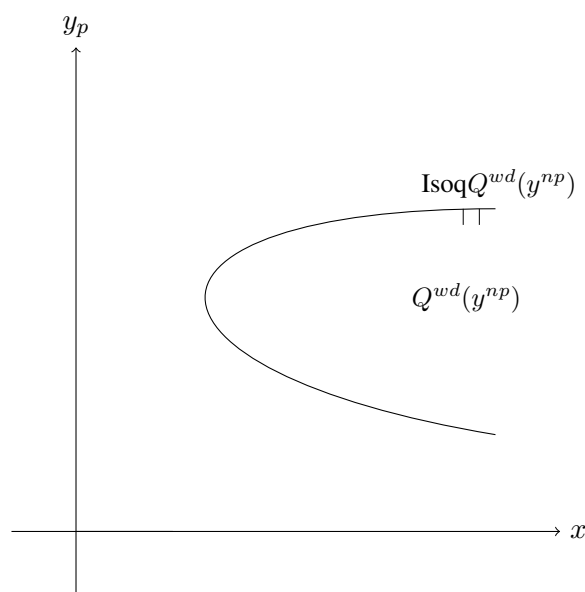


FIGURE 6 – Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^{wd}(y^{np})$

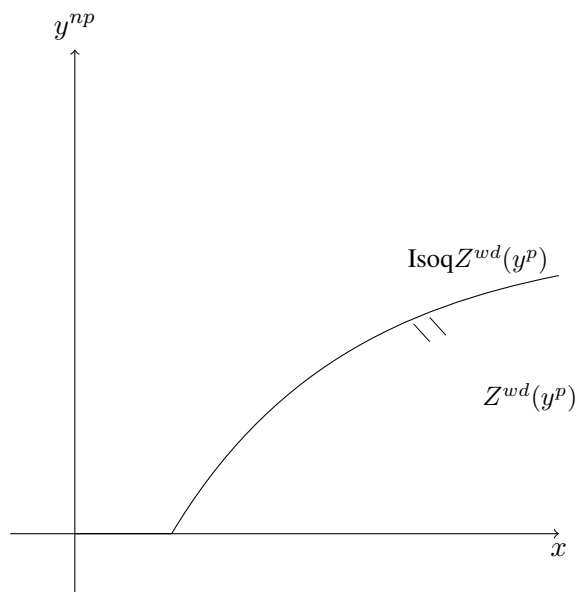


FIGURE 7 – Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^{wd}(y^p)$

4.2.3 Les principales critiques relatives à cette approche axiomatique

Plusieurs limites relatives aux technologies de production obéissant aux axiomes TJ1-TJ8 ont été signalées dans la littérature. Parmi celles-ci on peut citer :

(i) Kuosmanen (2005) constate que l'existence d'un facteur d'abattement unique pour définir la

5. La correspondance en outputs est toujours bornée inférieurement par l'axe des abscisses (voir figure 1). Néanmoins, dans la figure 5 la courbe noire reliant les points a et b est plus contraignante.

disponibilité faible des outputs (désirables et indésirables) tend à réduire artificiellement l'ensemble des possibilités productives des firmes. Dans ce cas, le nombre d'observations appartenant à la frontière de l'ensemble de production est anormalement élevé.

- (ii) De plus, Kuosmanen et Podinovski (2009) montrent que l'utilisation d'un facteur d'abattement unique conduit à des situations ne respectant pas l'axiome de convexité (TJ4). En ce sens, Kuosmanen et Podinovski suggèrent de relâcher cette hypothèse.
- (iii) Enfin, Hampf et Rödseth (2015) indiquent que l'approche axiomatique basée sur les hypothèses de disponibilité faible et de nullité jointe des productions polluantes et non polluantes ne respecte pas les principes élémentaires de la thermodynamique.

Malgré les critiques exposées précédemment, l'approche axiomatique introduite par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) peut être considérée comme l'une des premières tentatives visant à définir les activités productives polluantes dans un cadre d'analyse multi-dimensionnel. Ainsi, elle s'inscrit dans une dynamique visant à conjuguer un ensemble d'hypothèses relevant de l'intuition économique et des lois physique élémentaires. Les principales avancées exposées dans le point suivant vont venir s'inscrire dans cette dynamique.

5 Ensemble de Production avec Partitionnement des Intrants et des Extrants : les Principales Avancées

Dans cette section, les intrants et les extrants sont partitionnés de la façon suivante : (iii) $I = I^p \cup I^{np}$ et $O = O^p \cup O^{np}$.

5.1 Les approches basées sur les principes physiques élémentaires

Parmi les approches précédentes, celle définissant la technologie de production jointe selon les axiomes TJ1-TJ8, est largement utilisée dans la littérature (Försund, 2009, 2016). En réaction aux limites de celle-ci, plusieurs approches innovantes ont été développées. La première est fondée sur les principes de la thermodynamique (Lauwers et Van Huylenbroeck, 2003 ; Coelli, Lauwers et Van Huylenbroeck, 2007 ; Lauwers, 2009 ; Rödseth 2017).

5.1.1 Les principes de la thermodynamique

Selon le premier principe de la thermodynamique, la quantité de matière-énergie contenue dans les intrants doit être identique à la quantité de matière comprise dans les extrants du processus productif (produits désirables plus résidus polluants). La loi de conservation de la matière-énergie peut être représentée comme suit :

$$y^p = \rho_{x^p} x^p - \rho_{y^{np}} y^{np}. \quad (2.9)$$

Dans cette équation, les paramètres $\rho_{x^p} \in \mathbb{R}_+^{m^p}$ et $\rho_{y^{np}} \in \mathbb{R}_+^{m^{np}}$ représentent respectivement les facteurs d'émissions des intrants polluants et les facteurs de récupération des produits désirables. Les paramètres ρ_{x^p} et $\rho_{y^{np}}$ mettent en lumière les impacts environnementaux générés par le processus de transformation de la matière-énergie⁶. Lorsque le processus productif concourt à la réalisation de productions permettant un abattement des résidus polluants⁷, $y^a \in \mathbb{R}_+^{m^a}$, l'expression de la loi de conservation de la matière-énergie peut être affinée :

$$y^p = \rho_{x^p} x^p - \rho_{y^{np}} y^{np} - y^a. \quad (2.10)$$

Le second principe de la thermodynamique stipule que le processus de transformation de la firme génère une quantité minimale de productions indésirables (résidus polluants). Autrement dit, la transformation d'intrants au sein du processus productif ne peut conduire à la réalisation exclusive de productions désirables. Il s'ensuit :

$$\frac{dy^p}{dx^p} > 0. \quad (2.11)$$

6. La quantité de CO₂ contenue dans un kWh d'électricité produit en France est de 85g contre 404g pour un kWh réalisé en Allemagne (Base Carbone ADEME, 2016). Cet écart dépend du parc de production d'électricité national. La France réalise la plupart de sa production d'électricité à l'aide de ses centrales nucléaires alors que l'Allemagne recourt essentiellement à des centrales thermiques (gaz naturel et charbon). La combustion d'un kWh de gaz naturel génère 201g de CO₂ (Base Carbone ADEME, 2016). La réaction en chaîne permise par le combustible uranium des centrales nucléaires, ne génèrent aucune émission de CO₂.

7. Par exemple, la production de biogaz par méthanisation des boues d'abattoir (ADEME, 2011). Dans ce cas le partitionnement des intrants et des extrants est le suivant : $I = I^p \cup I^{np}$ et $O = O^p \cup O^{np} \cup O^a$. Ici, le sous-ensemble $O^a \subset [m]$ regroupe les productions d'abattement, tel que l'ensemble des outputs est $O = O^{np} \cup O^p \cup O^a \subseteq [m]$ avec $[m] = \text{Card}(O^{np}) + \text{Card}(O^p) + \text{Card}(O^a)$ et $\text{Card}(O^a) = [m^a]$.

5.1.2 L'approche axiomatique proposée par Rödseth (2017)

A partir des lois de la thermodynamique (2.9)-(2.11), Rödseth (2017) suppose que l'ensemble de production (2.1)⁸ satisfait les axiomes suivants :

MBT1 : $(0, y^{np}, y^p) \in T^{mb} \Rightarrow (y^{np}, y^p) = 0$.

MBT2 : T^{mb} est compact (fermé et borné).

MBT3 : T^{mb} est convexe.

MBT4 : Si $(x, y^{np}, y^p) \in T^{mb}$ et $y^p = 0$, alors $x^p = 0$.

MBT5 : Si $(x, y^{np}, y^p) \in T^{mb}$ et $x^p = 0$, alors $y^p = 0$.

MBT6 : Si $(x, y^{np}, y^p) \in T^{mb}$ et $\rho_{x^p} g_{x^p} + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \Rightarrow (x^{np}, x^p + g_{x^p}, y^{np} - g_{y^{np}}, y^p + g_{y^p}) \in T^{mb}$.

Les axiomes MBT1-MBT3 sont équivalents aux hypothèses TJP1, TJP3 et TJP4⁹. Les principales divergences entre l'approche axiomatique de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) et celle de Rödseth (2017) peuvent être distinguées à travers les propriétés MBT4-MBT6. Les hypothèses MBT4 et MBT5 permettent de vérifier le deuxième principe de la thermodynamique (2.11). Selon ces deux hypothèses, l'utilisation d'intrants polluants, x^p , au sein du processus productif génère une quantité minimale de production indésirables (résidus polluants), y^p . L'axiome MBT6¹⁰ introduit une nouvelle hypothèse de disponibilité : la G -disponibilité. Rödseth (2017) montre que l'hypothèse de disponibilité faible des outputs (désirables et indésirables) (TJ7) proposée par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) ne respecte pas la loi de conservation de la matière-énergie lorsque les processus productifs ne permettent pas de réaliser des productions d'abattement. En effet, en considérant TJ7 et (2.9) il vient : $\theta(y^p + \rho_{y^{np}} y^{np}) = \rho_{x^p} x^p - y^a$, $\theta \in [0, 1]$. Lorsqu'il n'y a pas de production d'abattement c'est-à-dire $y^a = 0$, le principe de conservation de la matière-énergie tient à condition d'imposer $\theta = 1$. Si $\theta \in [0, 1]$, alors l'égalité est vérifiée si et seulement si,

8. Dans la définition de (2.1), y^a est supposé égal à 0. Si $y^a \neq 0$ alors, l'ensemble de production (2.1) devient

$$T = \{(x, y^{np}, y^p, y^a) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, y^{np}, y^p, y^a) \text{ est réalisable}\}. \quad (2.12)$$

9. Nous utilisons le sigle "mb" pour distinguer la technologie de production suggérée par Rödseth (2017) de celle traditionnellement retenue en théorie de la production.

10. Ici nous supposons $y^a = 0$. Si $y^a \neq 0$, l'hypothèse MBT6 devient : Si $(x, y^{np}, y^p, y^a) \in T^{mb}$ et $\rho_{x^p} g_{x^p} + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} + g_{y^a} - g_{y^p} = 0 \Rightarrow (x^{np}, x^p + g_{x^p}, y^{np} - g_{y^{np}}, y^a - g_{y^a}, y^p + g_{y^p}) \in T^{mb}$.

$y^a \neq 0$. Selon l'axiome de G -disponibilité (MBT6), les intrants et les extrants peuvent être disposés suivant une direction $g = (g_{x^p}, g_{y^{np}}, g_{y^p})$, en accord avec l'égalité $\rho_{x^p} g_{x^p} + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0$. Cette dernière garantit que la disposition des intrants et des extrants est conforme au premier principe de la thermodynamique. De ce fait, la disposition des intrants et des extrants dans l'ensemble de production est analysée de façon globale contrairement à l'approche de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) où elle se définit séparément en input (disponibilité forte) et en output (disponibilité faible). L'hypothèse de G -disponibilité tient compte des interactions entre l'utilisation d'intrants polluants et la génération de productions indésirables. Dans ces conditions, l'hypothèse de libre disposition des inputs (TJ5) n'est plus admissible.

Lorsque la technologie de production satisfait les axiomes MBT1-MBT6 alors, l'ensemble en outputs (désirables et indésirables) (2.3) est supposé vérifier les propriétés suivantes :

MBP1 : $(y^{np}, y^p) \notin P^{mb}(0)$ si $(y^{np}, y^p) \geq 0$ et $(y^{np}, y^p) \neq 0$.

MBP2 : $P^{mb}(x)$ est compact (fermée et bornée), $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$.

MBP3 : $P^{mb}(x)$ est un ensemble convexe.

MBP4 : Si $(y^{np}, y^p) \in P^{mb}(x)$ et $y^p = 0$, alors $x^p = 0$.

MBP5 : Si $(y_d, y_b) \in P^{mb}(x)$ et $x^p = 0$, alors $y_b = 0$.

MBP6 : Si $(y^{np}, y^p) \in P^{mb}(x)$ et $\rho_{x^p} g_{x^p} + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \Rightarrow (y^{np} - g_{y^{np}}, y^p + g_{y^p}) \in P^{mb}(x^{np}, x^p + g_{x^p})$.

Les axiomes MBP1-MBP3 sont identiques aux hypothèses TJP1, TJP3 et TJP4. Les propriétés MBP4-MBP6 correspondent aux axiomes MBT4-MBT6 dans une analyse en terme de correspondance en outputs. Les axiomes MBP4 et MBP5 permettent de satisfaire le second principe de la thermodynamique. L'hypothèse de G -disponibilité (MBP6) lie la disponibilité des intrants et des extrants selon le principe de conservation de la matière-énergie. Les hypothèses MBP1-MBP6 définissent des technologies de production polluante convexes satisfaisant les lois élémentaires de la thermodynamique. La figure 8 offre une représentation géométrique de la correspondance en outputs (polluants et non polluants) associée à ce type de technologie ¹¹.

11. Dans cette représentation, il est supposé que lorsque le vecteur d'intrants augmente de x à x' , le rapport entre les inputs polluants et non polluants utilisés reste inchangé. De plus, la qualité des inputs polluants utilisés est supposée demeurer identique.

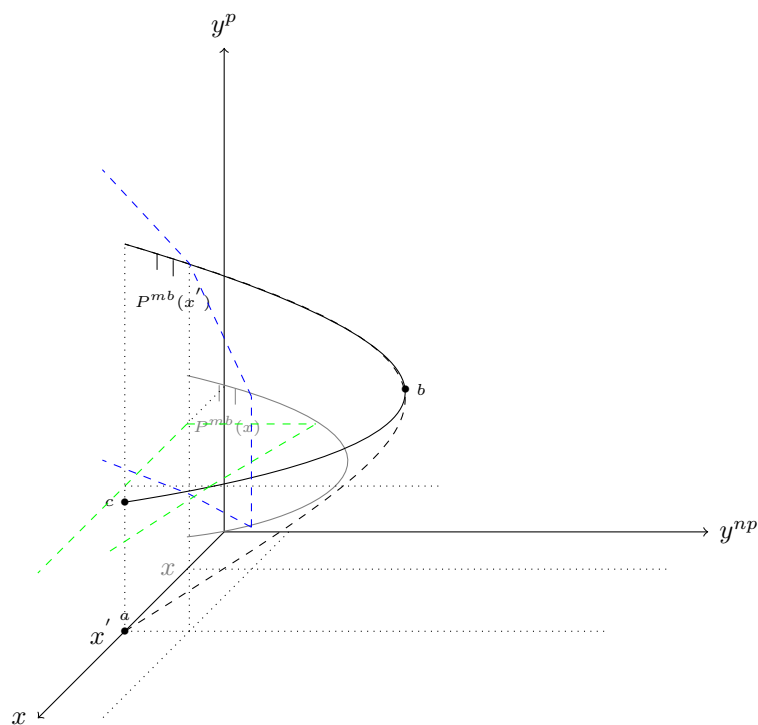


FIGURE 8 – Correspondance en outputs désirables et indésirables (MBP1-MBP6)

La figure 8 fait apparaître un manque de disponibilité dans la dimension des productions résiduelles et dans celle des intrants. La correspondance en outputs est bornée inférieurement ; voir ligne courbée noire $[c, b]$ dans $P^{mb}(x')$. Par ailleurs, si $(y^{np}, y^p) \in P^{mb}(x)$ et $u > x$, il est possible que $(y^{np}, y^p) \notin P^{mb}(u)$. Cette représentation met en lumière une situation de congestion simultanée des inputs et des outputs (Färe et Svenson, 1980 ; Färe et Grosskopf, 1983 ; Briec, Kerstens et Van de Woestyne, 2016). La frontière inférieure de la correspondance en outputs $P^{mb}(x')$ (ligne courbée noire $[c, b]$) est plus restrictive que celle issue du modèle de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) (ligne en pointillée courbée noire $[a, b]$), qui est elle-même plus contraignante que l'axe des abscisses (voir figure 8). Ainsi, la congestion des productions désirables est plus importante dans le cadre de l'approche proposée par Rödseth (2017) que dans celle issue du modèle de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). Ainsi, la cessibilité des productions indésirables est plus coûteuse dans l'approche suggérée par Rödseth (2017).

Notons que sous les hypothèses MBT1-MBT6 les correspondances Q et Z sont décrites respectivement dans les figures 9 et 10.

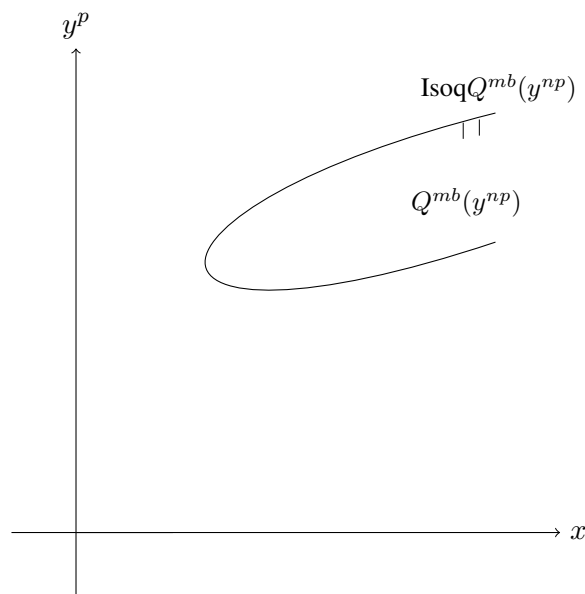


FIGURE 9 – Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^{mb}(y^{np})$

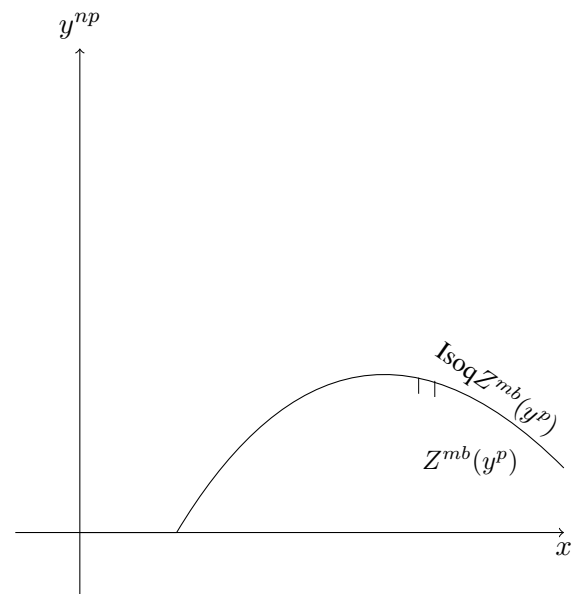


FIGURE 10 – Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^{mb}(y^p)$

5.1.3 Les principales critiques relatives à cette approche axiomatique

La principale limitation de l'approche axiomatique fondée sur les principes élémentaires de la thermodynamique (Rödseth, 2017), est sa dépendance vis-à-vis des paramètres ρ_{x^p} et $\rho_{y^{np}}$, dans la définition et la caractérisation des technologies de production polluante. Ces paramètres ont une influence sur la disposition des intrants et des extrants au sein de l'ensemble de production or, il n'existe pas de consensus dans la détermination des facteurs d'émission des intrants polluants et des facteurs de récupération des produits désirables (Hoang et Prasada Rao, 2010). En effet, plusieurs procédures de calcul sont identifiées dans la littérature (voir le rapport de l'ADEME : "Typologie des facteurs d'émission").

Cependant, notons que l'approche axiomatique basée sur les principes de la thermodynamique (Rödseth, 2017), constitue une tentative de réponse aux critiques associées à celle introduite par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). Ainsi, elle s'inscrit dans la dynamique initié par les travaux de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) en théorie de la production, consistant à conjuguer des axiomes relevant de l'intuition économique et des principes physiques.

5.2 Technologies de coproduction

5.2.1 L'ensemble des possibilités productives : hypothèses et définition

Murty, Russell et Levkoff (2012) proposent une autre procédure pour définir et caractériser les technologies de production polluante. Celle-ci s'inscrit dans la logique des modèles à équations multiples (Frisch, 1965 ; Försund, 2009, 2016). Leur technologie de production polluante est considérée comme une intersection de deux sous-technologies. L'une conduit à la réalisation des productions désirables. Elle correspond à la sous-technologie de production de la firme. L'autre est en rapport avec la génération des résidus polluants. Elle correspond à la sous-technologie de production résiduelle et s'apparente au processus de transformation de la nature. L'intersection de ces deux sous-technologies détermine une technologie de coproduction (désirables et indésirables).

L'approche axiomatique introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012) s'appuie sur l'hypothèse de disponibilité "coûteuse" dans la dimension des productions indésirables et dans celle des intrants polluants. Cet axiome stipule que la cessibilité des résidus polluants et l'accroissement des intrants polluants n'est pas libre (Murty, 2010). La sous-technologie de production de la firme satisfait les hypothèses traditionnelles de disponibilité des intrants et des extrants. Soit, $T_1 : \mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m^{np}}}$, l'ensemble de production de la firme :

$$T_1 = \{(x, y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, y^{np}) \text{ est réalisable}\}. \quad (2.13)$$

L'ensemble de production T_1 ¹² est indépendant du niveau de production résiduelle, y^p . Ainsi, si $(x, y^{np}, y^p) \in T_1$ alors, $(x, y^{np}, y^{p'}) \in T_1, \forall y^{p'} \in \mathbb{R}_+^{m^b}$. Le niveau de produits désirables n'est pas influencé par la génération des résidus polluants dans l'ensemble de production T_1 . En plus de l'hypothèse d'indépendance de T_1 relativement à y^p , l'ensemble T_1 est supposé satisfaire les axiomes usuels T1-T7.

La sous-technologie de production résiduelle (T_2) vérifie la propriété de disponibilité "coûteuse" pour les produits indésirables et les intrants polluants. Soit, $T_2 : \mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n^p+m^p}}$,

12. Dans (2.13) les productions d'abattement sont supposées nulles ($y^a = 0$). Si tel n'est pas le cas,

$$T_1' = \{(x, y^{np}, y^a, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, y^{np}, y^a) \text{ est réalisable}\}. \quad (2.14)$$

$$T_2 = \{(x, y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x^p, y^p) \text{ est réalisable}\}. \quad (2.15)$$

L'ensemble de production T_2 ¹³ est indépendant des productions désirables, y^{np} , et des intrants non polluants, x^{np} . Ainsi, si $(x, y^{np}, y^p) \in T_2$ alors, $(x^p, x^{np'}, y^{np'}, y^p) \in T_2$, $\forall (x^{np'}, y^{np'}) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}+m^{np}}$. Le processus de transformation des intrants non polluants en produits désirables n'est pas pris en compte dans la sous-technologie de production résiduelle (2.15). En plus des axiomes usuels T3-T4 et de l'hypothèse d'indépendance de T_2 relativement à x^{np} et à y^{np} , l'ensemble T_2 est supposé satisfaire l'hypothèse de nullité, $(x^{np}, 0, y^{np}, 0) \in T_2 \forall (x^{np}, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}+m^{np}}$, et l'axiome de disponibilité "coûteuse" pour les productions indésirables et les intrants polluants¹⁴ : $(x, y^{np}, y^p) \in T_2$, $x^{p'} \leq x^p$ and $y^{p'} \geq y^p \Rightarrow (x^{np'}, x^{p'}, y^{np'}, y^{p'}) \in T_2$. Cette propriété stipule que la cessibilité des résidus polluants et l'accroissement des intrants polluants n'est pas libre (voir figure 11).

Sous l'hypothèse usuelle de rendements d'échelle constants¹⁵, les sous-technologies de production T_1 et T_2 sont représentées géométriquement dans la figure 11. La frontière de l'ensemble de production de la firme est définie par :

$$\text{Isoq}T_1 = \left\{ (x, y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, y^{np}) \in T_1, (\alpha x, \frac{1}{\alpha} y_d) \notin T_1, \alpha \in]0, 1[\right\}.$$

L'isoquant du graphe de la sous-technologie de production résiduelle est définie par :

$$\text{Isoq}T_2 = \left\{ (x, y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x^p, y^p) \in T_2, (\gamma x^p, \frac{1}{\gamma} y_b) \notin T_2, \gamma \in]1, +\infty[\right\}.$$

L'intersection des deux sous-technologies de production T_1 et T_2 détermine la technologie de coproduction¹⁶ : $T^{bp} = T_1 \cap T_2$. La technologie de production polluante T^{bp} est supposée

13. Dans 2.15 les productions d'abattement sont supposées nulles ($y^a = 0$). Si tel n'est pas le cas,

$$T_2' = \{(x, y^{np}, y^a, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x^p, y^p, y^a) \text{ est réalisable}\}. \quad (2.16)$$

14. Lorsque $y^a \neq 0$, l'hypothèse de nullité devient : $(x^{np}, 0, y^{np}, y^a, 0) \in T_2' \forall (x^{np}, y^{np}, y^a) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}+m^{np}+m^a}$. De plus, T_2 est supposée satisfaire l'hypothèse de disponibilité "coûteuse" dans la dimension des produits d'abattement : $(x, y^{np}, y^a, y^p) \in T_2$, $x^{p'} \leq x^p$, $y^{a'} \geq y^a$, and $y^{p'} \geq y^p \Rightarrow (x^{np'}, x^{p'}, y^{np'}, y^{a'}, y^{p'}) \in T_2$.

15. Bien entendu, d'autres types de rendements d'échelle peuvent être considérés (voir supra).

16. Nous utilisons le sigle "bp" pour distinguer la technologie de coproduction suggérée par Murty, Russell et Levkoff (2012) de celle traditionnellement retenue en théorie de la production.

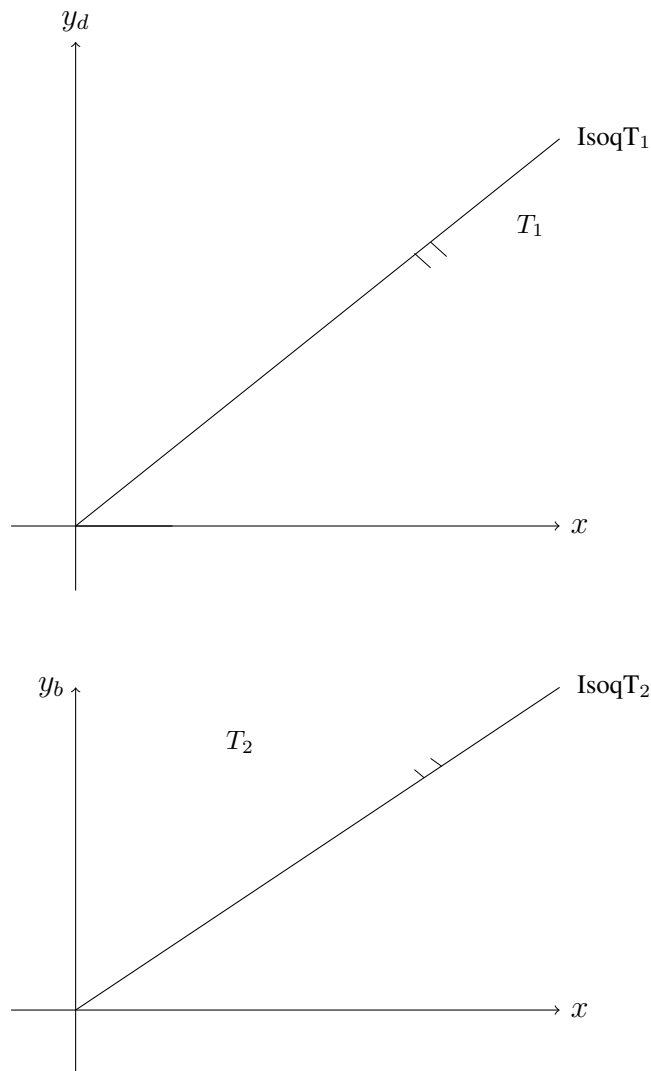


FIGURE 11 – Sous-technologies de production T_1 et T_2 (CRS)

satisfaire simultanément les axiomes de l'ensemble de production de la firme (T_1) et ceux de la sous-technologie de production résiduelle (T_2). Dans ces conditions, l'ensemble T^{bp} ne vérifie pas l'hypothèse de libre disposition dans la dimension des productions indésirables et dans celle des inputs polluants.

5.2.2 La technologie de coproduction et ses correspondances productives

La technologie de production T^{bp} peut être caractérisée à partir d'une analyse en terme de correspondance (inputs et outputs). La figure 12 offre une représentation de la correspondance en outputs (désirables et indésirables) associée à ce type de technologie.

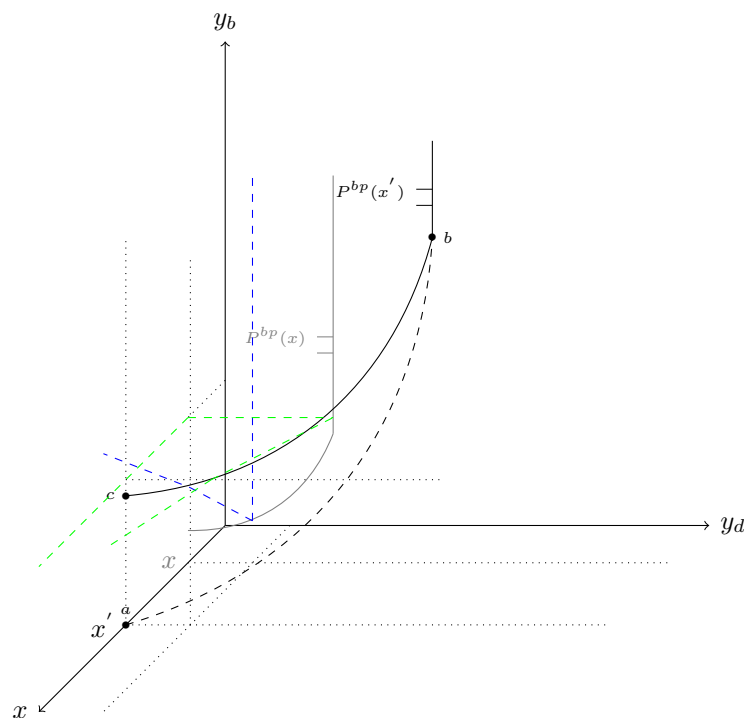


FIGURE 12 – Correspondance en outputs désirables et indésirables (P^{bp})

Dans la figure 12¹⁷, la correspondance en outputs regroupe l'ensemble des productions désirables et indésirables (y^{np}, y^p) , qui peuvent être produites par l'input, x .

$$\begin{aligned}
 P^{bp}(x) &= P_1(x) \cap P_2(x) \\
 &= \{y^{np} \in \mathbb{R}_+^{m_d} : (x, y^{np}, y^p) \in T_1\} \cap \{y^p \in \mathbb{R}_+^{m_b} : (x, y^{np}, y^p) \in T_2\} \\
 &= \{(y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^m : (x, y^{np}, y^p) \in T^{bp}\}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

La correspondance en outputs de la technologie de coproduction T^{bp} (2.17) se définit comme une intersection entre l'ensemble en outputs de la firme ($P_1(x)$) et la correspondance en outputs résiduels ($P_2(x)$). L'ensemble $P^{bp}(x)$ vérifie simultanément l'hypothèse de libre disposition dans la dimension des produits désirables et l'axiome de disponibilité "coûteuse" dans celle des productions résiduelles¹⁸ et des intrants polluants. Ces hypothèses additionnelles mettent en lumière

17. Dans cette représentation, il est supposé que lorsque le vecteur d'intrants augmente de x à x' , le rapport entre inputs polluants et non polluants utilisés reste inchangé. De plus, la qualité des inputs polluants utilisés est supposée identique.

18. Murty, Russell et Levkoff (2012) précisent qu'il existe toujours dans la réalité une borne supérieure dans $P^{bp}(x)$.

une borne inférieure dans la correspondance en outputs (ligne courbée noire [c,b]) qui est plus contraignante que celle issue du modèle de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) ; courbe en pointillée noire [a,b].

Les figures 13 et 14 montrent que la technologie de coproduction T^{bp} peut également être caractérisée selon une analyse en termes de correspondances dans l'espace des intrants et des produits polluants ($Q^{bp}(y^{np})$)¹⁹ et, dans l'espace des intrants et de productions désirables ($Z^{bp}(y^p)$).

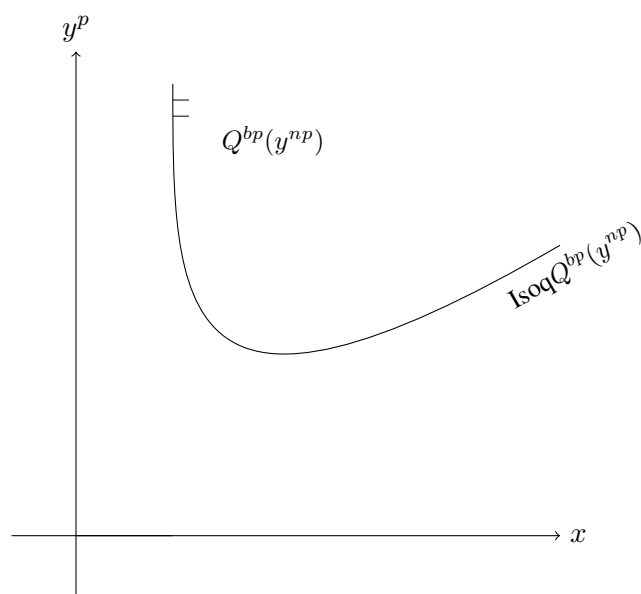


FIGURE 13 – Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^{bp}(y^{np})$

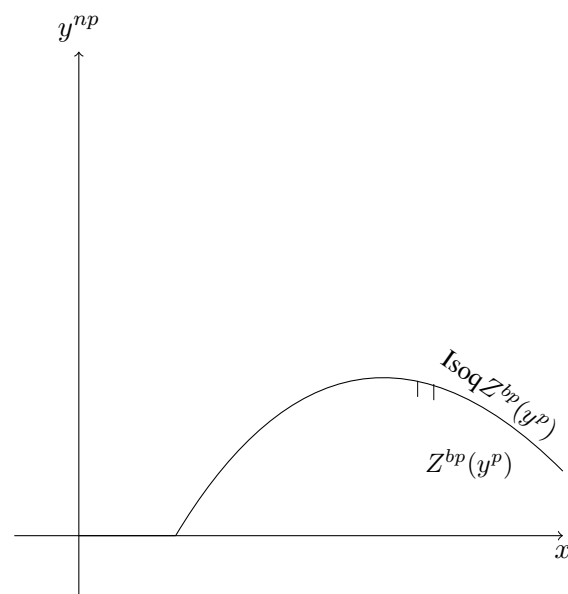


FIGURE 14 – Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^{bp}(y^p)$

Notons que lorsque le processus productif conduit à la réalisation de productions permettant un abattement des résidus polluants ($y^a \neq 0$), la correspondance (2.17) se définit comme suit,

$$P^{bp'}(x) = \{(y^{np}, y^a, y^p) \in \mathbb{R}_+^m : (x, y^{np}, y^a, y^p) \in T^{bp}\}. \quad (2.18)$$

La correspondance en outputs $P^{bp'}$ peut être caractérisée selon des pseudo ensembles en outputs ($\tilde{P}_1^{bp}(x)$, $\tilde{P}_2^{bp}(x)$ et $\tilde{P}_3^{bp}(x)$) respectivement définis dans l'espace des productions d'abatte-

Néanmoins, l'approche axiomatique proposée ne permet pas d'identifier cette limite supérieure. Selon ces auteurs, l'identification de la frontière supérieure de $P^{bp}(x)$ présente un intérêt limité dans les études empiriques à destination des décideurs économiques (public ou privé).

19. Il n'existe pas de borne supérieure dans la représentation de $Q^{bp}(y^{np})$ (figure 13) car l'approche axiomatique suggérée par Murty, Russell et Levkoff (2012) ne permet pas d'identifier de limite supérieure dans $P^{bp}(x)$.

ment et des produits désirables dans l'espace des productions d'abattement et des produits indésirables et, dans l'espace des productions polluantes et non polluantes. Avec :

$$\tilde{P}_1^{bp}(x) = \left\{ (y^{np}, y^a) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}+m^a} : (y^{np}, y^a, y^p) \in P^{bp'}(x), y^p \in \mathbb{R}_+^{m^p} \right\}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{P}_2^{bp}(x) = \left\{ (y^a, y^p) \in \mathbb{R}_+^{m^p+m^a} : (y^{np}, y^a, y^p) \in P^{bp'}(x), y^{np} \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \right\} \quad (2.20)$$

et

$$\tilde{P}_3^{bp}(x) = \left\{ (y^{np}, y^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}+m^p} : (y^{np}, y^a, y^p) \in P^{bp'}(x), y^a \in \mathbb{R}_+^{m^a} \right\} \quad (2.21)$$

Il vient immédiatement (figures 15, 16 et 17) :

$$\left. \begin{array}{l} (y^a, y^{np}) \in \tilde{P}_1^{bp}(x) \\ (y^a, y^p) \in \tilde{P}_2^{bp}(x) \\ (y^{np}, y^p) \in \tilde{P}_3^{bp}(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (y^{np}, y^a, y^p) \in P^{bp'}(x)$$

5.2.3 Les principales critiques concernant cette approche axiomatique

L'approche axiomatique de Murty, Russell et Levkoff (2012) définit la technologie de production polluante comme une intersection de deux sous-technologies de production. La sous-technologie de production de la firme (T_1) conduit à la réalisation des produits désirables. Elle est supposée indépendante de y^p . La sous-technologie de production résiduelle (T_2) concourt à la génération des produits polluants. Elle se définit indépendamment de y^{np} et de x^{np} . Dans ces conditions, la génération des produits désirables et des résidus polluants se définit séparément l'une de l'autre. Tout se passe ici, comme si les deux sous-technologies de production opèrent de façon indépendantes. Dans ces conditions, le couplage dans la génération des produits désirables et des résidus polluants disparaît (Dakpo, 2016).

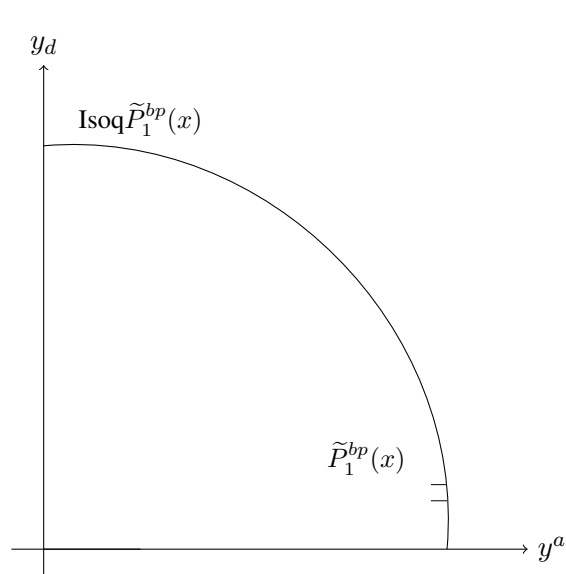


FIGURE 15 – Pseudo ensemble en outputs $\tilde{P}_1^{bp}(x)$ dans l'espace des productions d'abattements et des produits désirables

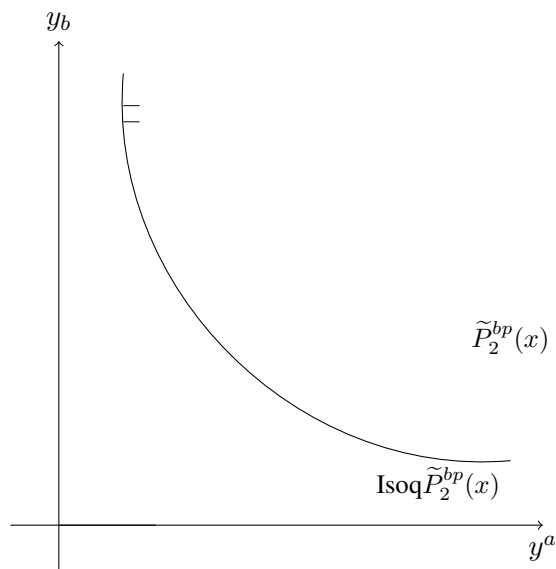


FIGURE 16 – Pseudo correspondance en outputs $\tilde{P}_2^{bp}(x)$ dans l'espace des productions d'abattements et des produits indésirables

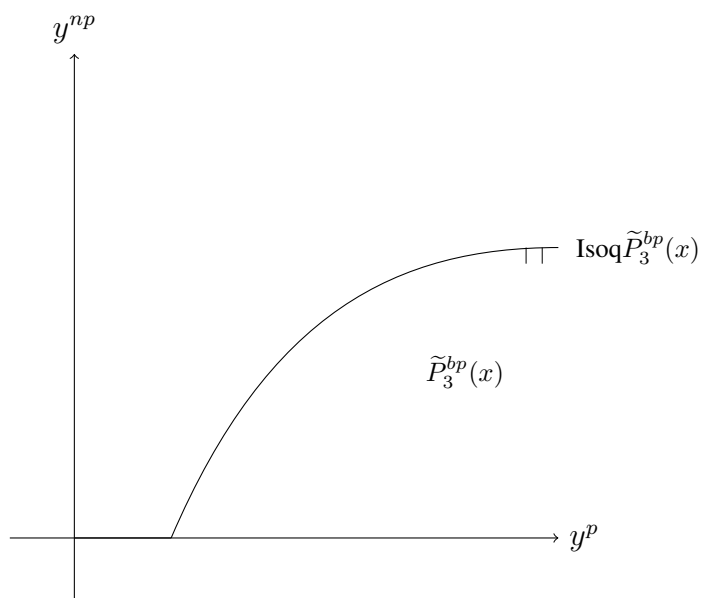


FIGURE 17 – Pseudo ensemble en outputs $\tilde{P}_3^{bp}(x)$ dans l'espace des productions désirables et des produits indésirables

Lorsque l'on retient une spécification polyédrique de l'ensemble des possibilités de coproduction (polluantes et non polluantes), la modélisation de la technologie de coproduction par la méthode DEA, peut conduire à des incohérences dans la caractérisation des correspondances pro-

ductives. Sous les axiomes retenus dans le cadre l’approche axiomatique proposée par Murty, Russell et Levkoff (2012), l’ensemble en outputs de type polyédrique n’admet pas de borne supérieure (2.17)²⁰.

Enfin, il est à souligner que le modèle de Murty, Russell et Levkoff (2012) ne peut se définir que lorsqu’il est possible de partitionner les intrants en composantes polluantes et non polluantes (Dakpo, Jeanneaux et Latruffe, 2016). Dans certaines situations, il se peut que ce partitionnement soit difficile à mettre en place.

Malgré ces critiques, l’approche axiomatique introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012) apporte des réponses aux limites associées à l’approche de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). En effet, elle cherche à identifier un ensemble d’axiomes conciliant l’intuition économique et le respect des principes physiques élémentaires.

6 Spécification Non Paramétrique des Technologies de Production Polluante

Dans cette section, nous retenons une spécification polyédrique des technologies de production polluante. Suivant différentes approches axiomatiques, nous proposons une procédure de modélisation de l’ensemble des possibilités productives par enveloppement des données (méthode DEA).

A cet égard, nous considérons l’ensemble des unités de production observées sur un secteur de l’économie : $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$. De plus, il est supposé que les firmes s’inscrivant dans ce secteur sont engagées dans des activités productives polluantes.

6.1 Les approches directes et indirectes

Scheel (2001) fait remarquer qu’il existe différentes approches dans la littérature permettant de spécifier des technologies de production polluante selon une modélisation non-paramétrique par enveloppement des données (DEA). Il distingue des approches indirectes et directes.

Dans les premières, les productions indésirables sont transformées en produits désirables suite à une modification de la valeur qui leur est affectée avant d’être prises en compte dans les modèles

20. Le même constat peut être fait pour la correspondance dans l’espace des intrants et des résidus polluants.

DEA. Certains auteurs considèrent une transformation additive²¹ (Koopmans, 1951), et la propriété de translation invariante (Ali et Seidford, 1990 ; Seidford et Zhu, 2002), tandis que d'autres auteurs utilisent une transformation multiplicative (Golany et Roll, 1989). Les approches indirectes ne s'intéressent pas à la définition de la structure de l'ensemble des possibilités productives lorsqu'il s'agit de spécifier les technologies de production polluante. Elles supposent que ces technologies de production peuvent se définir et se caractériser suivant les axiomes habituellement utilisés en théorie de la production (voir section 3).

Les approches directes proposent de spécifier la technologie de production polluante en altérant les axiomes qui définissent l'ensemble des possibilités productives. Les productions polluantes seront successivement considérées comme des intrants et comme des productions jointes. Nous retiendrons les approches axiomatiques présentées dans la section 4 afin de proposer une modélisation non paramétrique (DEA) des technologies de production polluante.

Dans le cadre des approches directes et indirectes (Scheel, 2001), les intrants et les outputs sont partitionnés selon le schéma suivant : $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$.

6.1.1 Les approches indirectes

Notons les productions indésirables après transformation (additive ou multiplicative) \bar{y} . Dans ce cas, à l'aide de la méthode DEA, nous pouvons spécifier le sous-ensemble des unités de production formant la surface enveloppe comme suit :

$$\begin{aligned}
 T^{DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \right. \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 \bar{y}_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \bar{y}_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma \right\} \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

21. La transformation additive consiste à multiplier chaque production néfaste par -1 . Cette approche définit la même technologie de production que celle considérant les productions indésirables comme des inputs. Cependant, elle modifie le signe des productions indésirables.

Suivant la caractérisation de $\Gamma \in \{\Gamma_{crs}, \Gamma_{vrs}, \Gamma_{nirs}, \Gamma_{ndrs}\}$, différents types de rendements d'échelle peuvent être envisagés. Dans la spécification (2.22), le sens des inégalités sur les contraintes associées aux intrants, aux productions désirables et aux productions indésirables transformées permet de satisfaire les propriétés usuelles de disponibilité.

Il est également possible de définir les correspondances L, P, Q et Z, dans le cadre du modèle DEA. Dans ce cas, nous fixons les inputs et/ou les outputs. Soit une unité de production observée (x_0, y_0) . Partant de la spécification (2.22), pour chaque correspondance L, P, Q et Z, nous posons ²² :

- $L^{DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^{np}$ et $\bar{y}_j = \bar{y}_{0,j}, j \in O^p$.
- $P^{DEA} : x_i = x_{0,i}, i = 1, \dots, n$.
- $Q^{DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^{np}$.
- $Z^{DEA} : \bar{y}_j = \bar{y}_{0,j}, j \in O^p$.

Scheel (2001) fait remarquer qu'il est difficile de trouver *a priori* la "bonne" transformation à affecter aux productions indésirables. En effet, certains auteurs proposent d'utiliser une transformation additive (Koopmans, 1951), et la propriété de translation invariante (Ali et Seidford, 1990 ; Seidford et Zhu, 2002), pendant que d'autres suggèrent l'utilisation d'une transformation multiplicative (Golany et Roll, 1989). Ainsi, une interrogation demeure : dans quelles situations doit on privilégier la première ou la seconde altération ?

6.1.2 Les approches directes

6.1.2.1 Les productions polluantes considérées comme des intrants : spécification non paramétrique

Ici, le sous-ensemble des unités de production qui forme la surface enveloppe peut être estimé selon la méthode DEA, comme suit :

22. Une analyse détaillée est exposée en Annexe 1.

$$\begin{aligned}
 T^{DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \right. \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma \right\} \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Selon la spécification de $\Gamma \in \{\Gamma_{crs}, \Gamma_{vrs}, \Gamma_{nirs}, \Gamma_{ndrs}\}$, différentes hypothèses sur la nature des rendements d'échelle peuvent être envisagées. Dans la spécification (2.23), le sens des inégalités sur les contraintes associées aux intrants et aux productions désirables permet de vérifier les propriétés usuelles de disponibilité (forte). Le sens de l'inégalité relative aux productions indésirables permet de considérer les productions résiduelles comme des inputs.

Soit une unité de production observée (x_0, y_0) , les pseudo correspondances en inputs (\tilde{L}) et en outputs (\tilde{P}) peuvent être spécifiées par la méthode par enveloppement des données (DEA) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}^{DEA}(y_0^{np}) = \left\{ (x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m^p} : \right. \\
 x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma \right\} \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}^{DEA}(x_0, y_0^p) = \left\{ y^{np} \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} : \right. \\
 x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_{0,j} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma \right\}. \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

6.1.2.2 Estimation non paramétrique des technologies de production jointe

Dans ce cas, le sous-ensemble des unités de production formant la surface enveloppe est spécifié à l'aide de la méthode par enveloppement des données (DEA) comme suit :

$$\begin{aligned}
 T^{wd,DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \right. \\
 y_j \leq \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \right\} \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Suivant la spécification de $\Gamma \in \{\Gamma_{crs}, \Gamma_{vrs}, \Gamma_{nirs}, \Gamma_{ndrs}\}$, différents types de rendements d'échelle peuvent être considérés. Dans la spécification (2.26), le sens des inégalités dans les contraintes associées aux intrants et aux productions désirables permet de vérifier les propriétés usuelles de disponibilité. La contrainte d'égalité associée aux productions indésirables garantit que ces dernières ne sont pas librement disponibles. Elle ne permet pas, à elle seule, de satisfaire la propriété de disponibilité faible des outputs. Pour cette raison, un paramètre d'abattement γ est introduit dans les contraintes relatives aux productions désirables et indésirables²³. Färe et Grosskopf (2009) montrent que, lorsque $\Gamma \in \{\Gamma_{crs}, \Gamma_{nirs}\}$, l'hypothèse de disponibilité faible est nécessairement vérifiée. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'introduire le paramètre γ dans (2.26) pour respecter l'hypothèse de disponibilité faible des outputs désirables et indésirables. Plusieurs auteurs ont signalés que la spécification (2.26) ne constitue plus un programme linéaire lorsque $\Gamma = \Gamma_{vrs}$ (voir Leleu, 2013). En effet, lorsque les rendements d'échelle sont variables, il est nécessaire d'intégrer le paramètre γ dans (2.26) pour mettre en lumière la disponibilité faible des outputs. Dans ce cas, le paramètre γ et les poids $\mu_z, z \in \mathcal{Z}$, se multiplient. Or, γ et $\mu_z, z \in \mathcal{Z}$, sont des variables dans la spécification (2.26). Une procédure permettant de linéariser (2.26), lorsque $\Gamma = \Gamma_{vrs}$, est exposée dans les travaux de Zhou, Ang et Poh (2008b), Sahoo, Luptacik et Malhberg (2011) ou Leleu (2013).

D'après Leleu (2013),

23. Lorsque le paramètre γ n'est pas pris en compte dans (2.26), les productions résiduelles ne vérifient aucune hypothèse de disponibilité (faible ou forte). Dans ces conditions, il n'existe pas de directions dans lesquelles ces productions peuvent être disposées.

$$\begin{aligned}
 T_L^{wd,DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : \theta x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \right. \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z = \theta, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \right\} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

La spécification (2.27) repose sur un changement de variable dans (2.26) : $\lambda_z = \gamma \mu_z$.

Kuosmanen (2005) introduit un facteur d'abattement non uniforme pour définir la disponibilité faible des extrants désirables et indésirables. Il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
 T_K^{wd,DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : \right. \\
 x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \gamma_z \theta_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \gamma_z \theta_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \theta \in \Gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \right\} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_K^{wd,DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : \right. \\
 x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} (\lambda_z + \mu_z) x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \sum_{z \in \mathcal{Z}} (\lambda_z + \mu_z) = 1, \quad \lambda, \mu \geq 0 \right\} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Dans (2.28), γ_z , $z \in \mathcal{Z}$, représente l'ensemble des facteurs d'abattement spécifiques aux différentes observations. La spécification (2.28) n'est pas linéaire. Kuosmanen (2005) propose la linéarisation (2.29). Celle-ci est construite à partir d'une modification des variables dans (2.28) : $\theta_z = \lambda_z + \mu_z$, $\mu_z = (1 - \gamma_z)\theta_z \wedge \lambda_z = \gamma_z\theta_z$.

Il est également possible de définir les correspondances L, P, Q et Z, dans le cadre du modèle DEA. Dans ce cas, nous fixons les inputs et/ou les outputs. Soit une unité de production observée (x_0, y_0) . Partant de la spécification (2.26), pour chaque correspondance L, P, Q et Z, nous posons ²⁴ :

- $L^{wd,DEA}$: $y_j = y_{0,j}$, $j \in O^{np}$ et $y_j = y_{0,j}$, $j \in O^p$.
- $P^{wd,DEA}$: $x_i = x_{0,i}$, $i = 1, \dots, n$.

24. Une analyse détaillée est exposée en Annexe 1.

- $Q^{wd,DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^{np}$.
- $Z^{wd,DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^p$.

6.2 Spécification non paramétrique du modèle proposée par Rødseth (2017)

Le sous-ensemble des unités de production qui forme la surface enveloppe peut être estimé par la méthode DEA comme suit (Hampf et Rødseth, 2015) :

$$\begin{aligned}
 T^{mb,DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x_i = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i} + g_x, \quad i = 1, \dots, n \right. \\
 y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} - g_{y^{np}}, \quad j \in O^{np} \\
 y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} + g_{y^p}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma, \quad \rho_x g_x + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \right\} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Suivant la définition de $\Gamma \in \{\Gamma_{crs}, \Gamma_{vrs}, \Gamma_{nirs}, \Gamma_{ndrs}\}$, différents types de rendements d'échelle peuvent être envisagés. Dans la spécification (2.30), les contraintes d'égalité associées aux intrants et aux outputs garantissent que ces derniers ne sont pas librement disponibles. A elles seules, ces contraintes d'égalité ne permettent pas de vérifier que les intrants et les extrants respectent l'hypothèse de G -disponibilité. L'introduction de cet axiome dans la spécification (2.30) est réalisée en intégrant une direction dans la disposition des intrants et des extrants, $g = (g_x, g_{y^{np}}, g_{y^p})$, qui est compatible avec le premier principe de la thermodynamique, $\rho_x g_x + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0$.

Il est également possible de définir les correspondances L, P, Q et Z, dans le cadre du modèle DEA. Dans ce cas, nous fixons les inputs et/ou les outputs. Soit une unité de production observée (x_0, y_0) . Considérons la spécification (2.30) telle que nous modifions les premiers membres des inégalités afin de définir les ensembles L, P, Q et Z. Pour chaque correspondance L, P, Q et Z, nous posons²⁵ :

- $L^{mb,DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^{np}$ et $y_j = y_{0,j}, j \in O^p$.
- $P^{mb,DEA} : x_i = x_{0,i}, i = 1, \dots, n$.

25. Une analyse détaillée est exposée en Annexe 1.

- $Q^{mb,DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^{np}$.
- $Z^{mb,DEA} : y_j = y_{0,j}, j \in O^p$.

6.3 Modélisation non paramétrique des technologies de coproduction

Les sous-ensembles des unités de production qui forment la surface enveloppe des ensembles de production polyédrique T_1 et T_2 pouvant être estimés par la méthode DEA comme suit :

$$T_1^{DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : \right.$$

$$x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np}$$

$$\left. \mu \in \Gamma \right\} \quad (2.31)$$

$$T_2^{DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : \right.$$

$$x_i \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i \in I^p$$

$$y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p$$

$$\left. \lambda \in \Gamma \right\}. \quad (2.32)$$

L'estimation de la technologie de coproduction par la méthode DEA est définie par :

$$T^{bp,DEA} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \right.$$

$$x_i \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i \in I^p$$

$$y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np}$$

$$y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p$$

$$\left. \lambda, \mu \in \Gamma \right\} \quad (2.33)$$

Selon la caractérisation de $\Gamma \in \{\Gamma_{crs}, \Gamma_{vrs}, \Gamma_{nirs}, \Gamma_{ndrs}\}$, différents types de rendements d'échelle peuvent être considérés. La technologie de coproduction non-paramétrique est définie par : $T^{bp,DEA} = T_1^{DEA} \cap T_2^{DEA}$. Pour cette raison, il co-existe deux variables de poids λ et μ dans (2.33). Le sens des inégalités dans les contraintes relatives aux intrants non polluants et aux outputs désirables dans (2.33), garantit que ces composantes satisfont l'hypothèse de disponibilité forte. Le sens des inégalités dans les contraintes relatives aux intrants polluants et aux outputs indésirables dans (2.33), met en lumière l'hypothèse de disponibilité "coûteuse" dans ces dimensions.

Si $y^a \neq 0$, il convient d'ajouter les contraintes suivantes dans (2.33) : $y_j \leq \sum_{z \in Z} \mu_z y_{z,j}$, $j \in O^a$, et $y_j \geq \sum_{z \in Z} \lambda_z y_{z,j}$, $j \in O^a$.

Il est également possible de définir les correspondances L, P, Q et Z, dans le cadre du modèle DEA. Dans ce cas, nous fixons les inputs et/ou les outputs. Soit une unité de production observée (x_0, y_0) . Considérons la spécification (2.30) telle que nous modifions les premiers membres des inégalités afin de définir les ensembles L, P, Q et Z. Pour chaque correspondance L, P, Q et Z, nous posons²⁶ :

- $L^{bp,DEA} : y_j = y_{0,j}$, $j \in O^{np}$ et $y_j = y_{0,j}$, $j \in O^p$.
- $P^{bp,DEA} : x_i = x_{0,i}$, $i = 1, \dots, n$.
- $Q^{bp,DEA} : y_j = y_{0,j}$, $j \in O^{np}$.
- $Z^{bp,DEA} : y_j = y_{0,j}$, $j \in O^p$.

7 Conclusion

Au terme de ce deuxième chapitre, nous avons une vue d'ensemble des différentes approches axiomatiques délimitant l'étendue des technologies de production polluante. Ces approches peuvent être catégorisées selon les règles de partitionnement adoptées pour les intrants et les extrants.

A cet égard, lorsque les firmes sont engagées dans des activités productives polluantes, les axiomes traditionnellement retenus en théorie de la production sont inadaptés. Ainsi, plusieurs approches axiomatiques alternatives ont été présentées. Les nouvelles propriétés introduites dans ces approches permettent de mieux appréhender la structure des technologies de production polluantes. Dans cette perspective, les dernières approches axiomatiques proposées dans la littérature économique ont été exposées.

Une ligne directrice dans la définition des approches axiomatiques présentées dans ce chapitre, a pu être observée. Celle-ci consiste à définir des technologies de production polluante par un ensemble d'hypothèses relevant de l'intuition économique et, respectant les principes physiques élémentaires.

Enfin, suivant une modélisation polyédrique de l'ensemble de production, une procédure de spécification non paramétrique (méthode DEA) des différentes technologies de production pol-

26. Une analyse détaillée est exposée en Annexe 1.

luante a été exposée.

Chapitre 3

Technologie de Production Polluante : l'Hypothèse de B -Disponibilité

1 Introduction

Problèmes : Existe-t-il un cadre axiomatique général dans lequel, la structure des technologies de production polluante peut être proposée selon un ensemble réduit d'hypothèses ? Si cette approche axiomatique peut être définie, quelles sont les relations entre cette méthodologie et celles déjà existantes ? Quelle procédure adopter pour spécifier ce type de technologie ?

Dans ce chapitre, la structure des technologies de production polluante est étudiée à travers une nouvelle approche axiomatique (Abad et Briec, 2016) fondée sur le principe de congestion (Briec, Kerstens et Van de Woestyne, 2016 ; Färe et Svenson, 1980). Dans cette perspective, une nouvelle hypothèse de disponibilité est introduite : la B -disponibilité. Le principal objectif de cette contribution méthodologique est de définir les technologies de production polluante selon un nombre réduit d'hypothèses. En ce sens, les technologies de production introduites peuvent se définir dans un univers convexe et/ou non convexe.

Dans une deuxième section, nous analysons la structure des technologies de production polluante, lorsque les intrants et les extrants ne sont pas totalement partitionnés. Plus précisément, nous supposons que les inputs ne sont pas séparés en composantes polluantes et non polluantes et que les extrants sont partitionnés selon ces attributs. Dans ce contexte, les productions polluantes

et non polluantes satisfont l'hypothèse de B -disponibilité. Ainsi, les technologies de production font apparaître une situation de congestion dans la dimension des productions désirables. La cessibilité des productions polluantes n'est pas libre. Ainsi, l'approche axiomatique proposée dans cette section s'inscrit dans la lignée du modèle de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989).

Dans la troisième section, un partitionnement global est adopté et, l'hypothèse de B -disponibilité est étendue à l'ensemble des intrants et des extrants. Dans ce cas, les technologies de production font apparaître une situation de congestion généralisée dans la dimension des intrants polluants et dans celle des productions désirables. La cessibilité des productions polluantes et l'accroissement des intrants polluants ne peuvent être considérés comme libres. L'approche axiomatique proposée dans cette section s'inscrit dans les pas des modèles suggérés par Murty, Russell et Levkoff (2012) et, Rödseth (2017).

Enfin, dans une dernière section une spécification non-paramétrique, par enveloppement des données (méthode DEA), des technologies de production B -disponibles est introduite. Une modélisation spécifique est également suggérée lorsque l'hypothèse de convexité est relâchée. Ainsi, nous proposons une modélisation non-paramétrique, convexe et/ou non convexe, des technologies de production polluante.

2 Ensemble de Production B -Congestionné avec Partitionnement des Outputs

Dans cette section, le partitionnement suivant est adopté : (ii) $I = I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$. Nous proposons d'identifier la structure de la technologie de production polluante lorsque les extrants de la firme sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes. Pour ce faire, nous supposons que les outputs appartenant à l'ensemble de production satisfont une nouvelle hypothèse de disponibilité : la B -disponibilité.

2.1 Ensemble en outputs B -disponibles : Hypothèses et Définition

Notons $B \subset [m]$ le sous-ensemble regroupant les productions indésirables de la firme. Nous introduisons le symbole suivant :

$$y \geq^B v \iff \begin{cases} y_j \leq v_j & \text{si } j \in B \\ y_j \geq v_j & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

De plus :

$$y >^B v \iff \begin{cases} y_j < v_j & \text{si } j \in B \\ y_j > v_j & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

Notons que si $-y \geq^B -v$ alors, $y \leq^B v$. De plus, si $B = \emptyset$ alors :

$$y \geq^B v \iff y_j \geq v_j. \quad (3.3)$$

Lorsque le sous-ensemble contenant les résidus polluants est vide ($B = \emptyset$) alors, $y \geq^B v$ correspond à une inégalité standard. De plus, si $J \in \{\emptyset, B\}$ alors, $y \geq^J v$ vérifie simultanément (3.1) et (3.3).

Pour tout $\{y^J\}_{J \in \{\emptyset, B\}}$ tel que, $\{y^\emptyset\}$ et $\{y^B\}$ sont des points arbitraires appartenant à $P(x)$, nous supposons que les outputs satisfont l'hypothèse de B -disponibilité définie ci-dessous.

Définition 3.1 Soit P une correspondance en outputs satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^m$, la correspondance en outputs $P(x)$ satisfait l'hypothèse de B -disponibilité si et seulement si, quel que soit $J \in \{\emptyset, B\}$, pour tout ensemble de vecteurs d'outputs $\{y^J\}_{J \in \{\emptyset, B\}} \subset P(x)$ avec $y \leq^J y^J$ implique que $y \in P(x)$.

Si $B = \emptyset$ (les outputs ne sont pas partitionnés) et ainsi, $J = \emptyset$ alors, l'hypothèse de B -disponibilité est identique à l'hypothèse usuelle de disponibilité forte en outputs. Autrement dit, dans une correspondance en outputs \emptyset -disponible les extrants sont librement disponibles.

Suivant la définition ci-dessus, l'hypothèse de libre disposition usuelle en outputs est limitée. En effet, le cône de libre disposition standard est combiné avec un cône de libre disposition qui lui est partiellement opposé. Sous l'hypothèse de B -disponibilité, la libre disposition des outputs se définit localement et non plus globalement (Lau, 1974). D'après la définition 3.1, l'axiome de libre disposition est d'autant plus affaibli que les dimensions dans lesquelles s'appliquent la libre disposition modifiée sont importantes. Dans ce cas, la libre disposition se définit de plus en plus localement. En effet, la définition 3.1 implique que plus la collection des partitions de $[m]$ est importante, plus il est difficile de disposer les outputs dans P . L'hypothèse de B -disponibilité peut

être généralisée afin de mettre en lumière un manque de disponibilité simultané dans l'ensemble des outputs et/ou des inputs. Dans la définition 3.1, nous introduisons un manque de disponibilité en outputs qui est spécifique aux productions résiduelles. A partir de cette nouvelle hypothèse de disponibilité des outputs dans P , nous introduisons une nouvelle approche axiomatique définissant la structure des technologies de production polluante.

2.2 Correspondance en outputs B -disponibles

La définition 3.1 est illustrée à travers la figure 1.

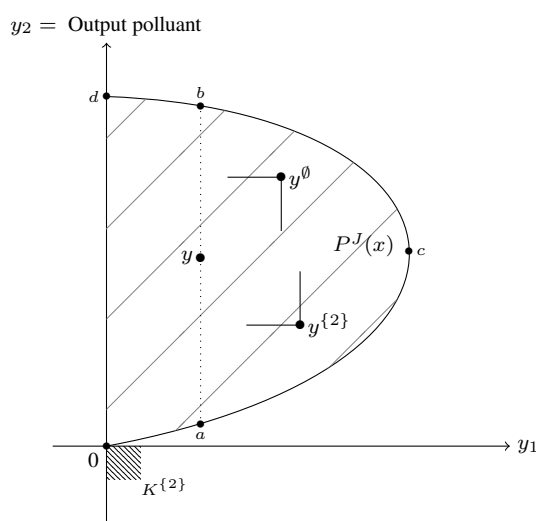


FIGURE 1 – Correspondance en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

Dans la figure 1, nous supposons $B = \{2\}$. Pour chaque y , s'il existe un point $\{y^0\}$ qui domine classiquement y et un point $\{y^2\}$ qui " $\{2\}$ -domine" y , alors $y \in P^J(x)$. Pour une configuration donnée d'observation, ceci permet de construire une correspondance en outputs présentant un manque de disponibilité dans la dimension des productions indésirables. Dans ce cas, il existe une frontière inférieure dans la dimension des productions polluantes (ligne courbée noire $[0,c]$). Ainsi, la cessibilité des productions résiduelles est coûteuse (Murty, 2010) et les productions désirables sont congestionnées. La correspondance en outputs B -disponible présente également une borne supérieure (ligne courbée noire $[d,c]$). Dans ces conditions, pour une quantité donnée d'intrants et de produits désirables, il existe une limite supérieur et inférieur dans la génération des productions résiduelles (segment en pointillé $[a,b]$).

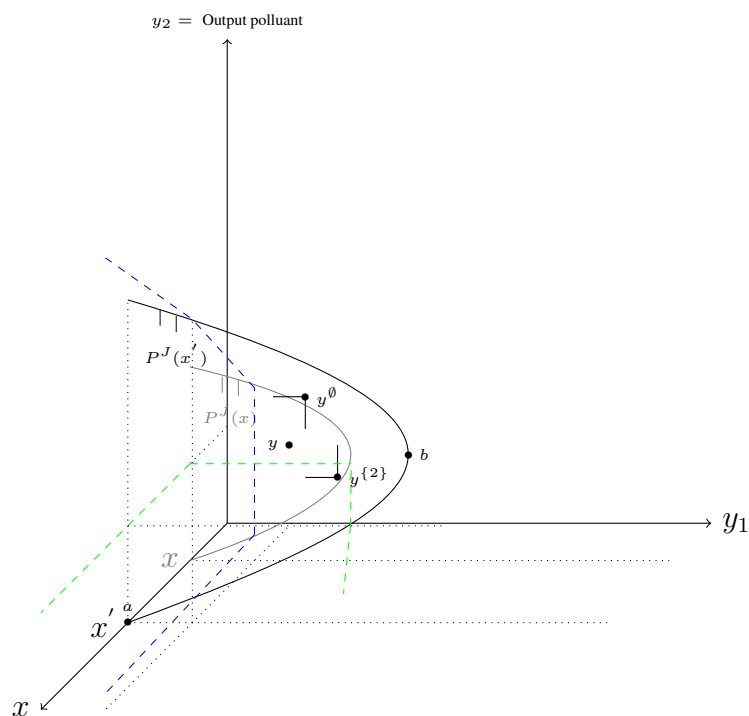


FIGURE 2 – Correspondance en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

La correspondance en outputs B -disponible peut être représentée dans un repère à trois dimensions (x, y_1, y_2) ; voir figure 2. Cette représentation est similaire à celle obtenue dans le cadre de la caractérisation des technologies de production jointe (Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka, 1989).

Ce résultat n'est pas étonnant dans la mesure où, l'approche axiomatique structurant l'ensemble de production dans les travaux de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) et, celle proposée dans cette section sont construites selon un ensemble de production congestionné dans la dimension des productions désirables. La seule différence intervient dans la définition de la notion de congestion. Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) utilisent l'hypothèse de disponibilité faible dans les outputs. Ici, nous introduisons une nouvelle hypothèse de disponibilité dans les outputs : la B -disponibilité.

L'approche axiomatique reposant sur les axiomes P1-P3 et P6 et, sur l'hypothèse de B -disponibilité peut être caractérisée selon une analyse en termes de correspondances dans l'espace des intrants et des productions indésirables et, dans l'espace des inputs et des produits désirables ; respectivement $Q^J(y_1)$ et $Z^J(y_2)$ dans les figures 3 et 4.

Soit le cône convexe suivant :

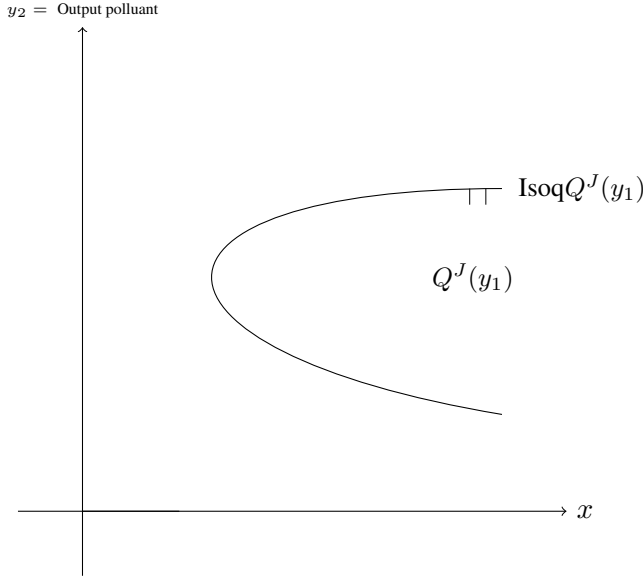


FIGURE 3 – Correspondance en intrants et en productions résiduelles $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

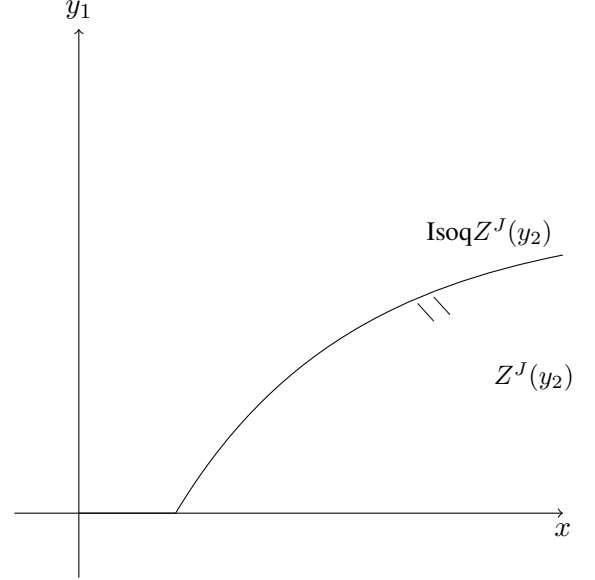


FIGURE 4 – Correspondance en intrants et en productions désirables $Z^J(y_2)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

$$K^B = \{y \in \mathbb{R}^n : y \geq^B 0\}. \quad (3.4)$$

D'après ces notations, on peut déduire que $K^\emptyset = \mathbb{R}_+^m$. La proposition suivante caractérise la correspondance en outputs B -disponible comme une intersection de cônes convexes (3.4).

Proposition 3.2 *Soit P une correspondance en outputs satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, $P(x)$ satisfait l'hypothèse de B -disponibilité si et seulement si :*

$$P(x) = \left((P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap (P(x) - K^B) \right) \cap \mathbb{R}_+^m.$$

Preuve de la Proposition 3.2 : Tout d'abord, supposons que $P(x)$ satisfait l'hypothèse de B -disponibilité. Pour tout ensemble de vecteurs d'outputs $\{y^J\}_{J \in \{\emptyset, B\}} \subset P(x)$ avec $y \in \mathbb{R}_+^m$, $\forall J \in \{\emptyset, B\}$ $y \leq^J y^J$ implique que $y \in P(x)$. Ainsi, nous pouvons en déduire que $(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} P(x) - K^J) \cap \mathbb{R}_+^m \subset P(x)$. De plus, nous avons nécessairement $P(x) \subset (\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} P(x) - K^J) \cap \mathbb{R}_+^m$. Par conséquent, la première implication est vérifiée. A présent, supposons que $P(x) = (\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} P(x) - K^J) \cap \mathbb{R}_+^m$. Quel que soit $J \in \{\emptyset, B\}$, si $y^J \in P(x)$ et $y \leq^J y^J$, alors $y \in (P(x) - K^J) \cap \mathbb{R}_+^m$. Ainsi, pour tout ensemble de vecteurs d'outputs $\{y^J\}_{J \in \{\emptyset, B\}} \subset P(x)$, $y \in (P(x) - K^J) \cap \mathbb{R}_+^m =$

$P(x)$. Ainsi, $P(x)$ satisfait l'hypothèse de B -disponibilité. \square

Notons que si $B = \emptyset$ alors, l'hypothèse de B -disponibilité correspond à l'axiome usuel de libre disposition en outputs. Dans ce cas, $(P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap \mathbb{R}_+^m$.

Géométriquement, la proposition 3.2 peut être illustrée à travers les figures 5, 6 et 7.

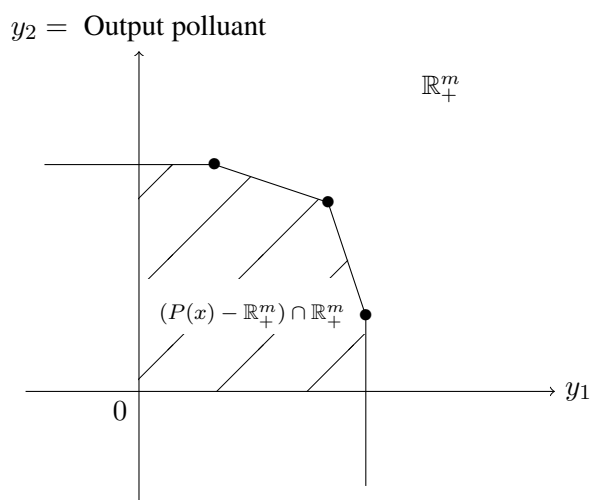


FIGURE 5 – Sous-ensemble $(P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap \mathbb{R}_+^m$

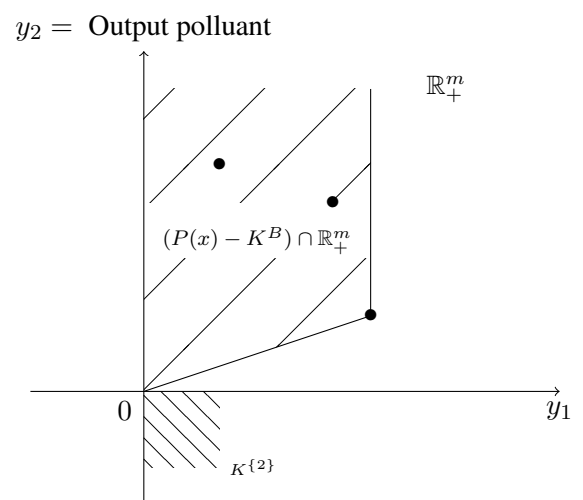


FIGURE 6 – Sous-ensemble $(P(x) - K^B) \cap \mathbb{R}_+^m$ avec $B = \{2\}$

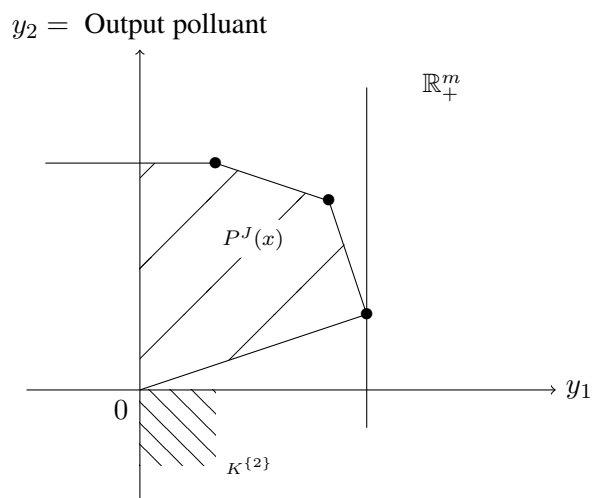


FIGURE 7 – Correspondance en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

D'après les figures 5, 6 et 7, la technologie de production B -disponible en outputs peut être comprise comme une intersection de deux sous-technologies. La première respecte l'axiome usuel

de libre disposition des outputs dans P . La seconde vérifie une hypothèse de disponibilité partiellement opposée et fait apparaître une frontière inférieure dans P . Selon la dénomination introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012), la première correspond à la sous-technologie de production de la firme et la seconde à la sous-technologie de production résiduelle¹. Les extrants sont librement disponibles au sein de la sous-technologie de production de la firme. Les productions indésirables vérifient l'hypothèse de disponibilité "coûteuse" dans la sous-technologie de production résiduelle. Dans cette représentation, les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes et, sont supposés satisfaire la propriété de disponibilité forte. Pour cette raison le modèle de Murty, Russell et Levkoff (2012) semble plus général que celui proposé dans cette section.

Nous pouvons à présent définir une nouvelle notion de congestion dans la dimension des productions désirables :

Définition 3.3 *Soit P une correspondance en outputs satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6 et soit B un sous-ensemble de $[m]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, $P(x)$ est congestionnée dans la dimension des productions non polluantes (B -congestionnée) s'il ne vérifie pas l'axiome de libre disposition mais satisfait l'hypothèse de B -disponibilité.*

D'après la définition 3.3, une correspondance en outputs B -congestionnée est telle que :

$$(P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap \mathbb{R}_+^m \neq \left((P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap (P(x) - K^B) \right) \cap \mathbb{R}_+^m. \quad (3.5)$$

Ainsi, une correspondance en outputs est B -congestionnée dès qu'elle ne vérifie pas une propriété de disponibilité plus forte que celle de la B -disponibilité.

$$P(x) \neq (P(x) - \mathbb{R}_+^m) \cap \mathbb{R}_+^m. \quad (3.6)$$

Ce résultat peut être vue comme une transposition de la notion de congestion en outputs, introduite dans les travaux de Färe et Grosskopf (1983). Notons qu'une correspondance en outputs ne peut être \emptyset -congestionnée.

1. Notons qu'ici, les sous-technologies ne sont pas supposées être indépendantes ce qui garantit la fermeture de la correspondance en outputs.

2.3 Identification et catégorisation de la frontière inférieure de $P(x)$

Comment détecter la présence de productions indésirables à partir de la structure de la correspondance en outputs ? Pour répondre à cette interrogation, nous introduisons le concept de frontière B -congestionnée. Ainsi, la définition suivante identifie un sous-ensemble qui n'est pas efficient, mais qui constitue une partie de l'isoquant en output B -congestionné.

Définition 3.4 Soit P une correspondance en outputs satisfaisant les axiomes $P1$ - $P3$ et $P6$ et soit $B \subset [m]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, nous appelons frontière B -congestionnée le sous-ensemble :

$$E^B(x) = \{y \in P(x) : v \geq^B y \text{ et } v \neq y \Rightarrow v \notin P(x)\}.$$

Nous appelons frontière faiblement B -congestionnée le sous-ensemble :

$$W^B(x) = \{y \in P(x) : v >^B y \Rightarrow v \notin P(x)\}.$$

Dans ces conditions, $E^\emptyset(x)$ correspond à la frontière efficiente usuelle de $P(x)$; c'est-à-dire $E(x)$. De plus, notons que $y \in E^B(x)$ si et seulement si :

$$(P(x) \setminus \{y\}) \cap (y + K^B) = \emptyset. \quad (3.7)$$

La frontière B -congestionnée et la frontière faiblement B -congestionnée sont représentées géométriquement dans l'espace des outputs à travers la figure 8. La frontière B -congestionnée ($E^B(x)$) correspond au segment $[F, D]$. Les segments $[F, D]$ et $[D, C]$ constituent la frontière faiblement B -congestionnée ($W^B(x)$). Ainsi,

$$E^B(x) \subset W^B(x) \subset \text{Isoq}P(x).$$

Remarque 3.5 Il peut exister des correspondances en outputs qui ne sont pas congestionnées dans la dimension des productions désirables et pour lesquelles il existe un point appartenant à $E^B(x) \setminus E(x)$. Par exemple, si $P(x)$ est un carré défini par $P(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 : y_1 \leq 1, y_2 \leq 1\}$. Ainsi, $y^{B=\{2\}} = (1, 0) \in E^{\{2\}} \setminus E$. Cependant, les productions indésirables peuvent être librement disposées dans $P(x)$.

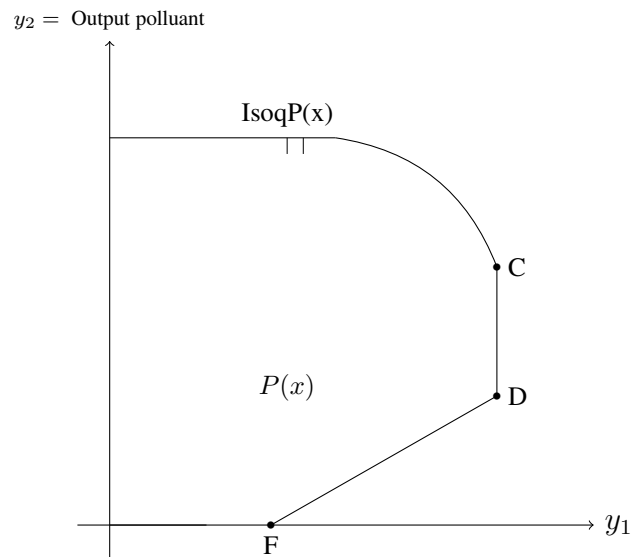


FIGURE 8 – Frontière B -congestionnée et frontière faiblement B -congestionnée

Géométriquement, ce résultat est illustré dans la figure 9.

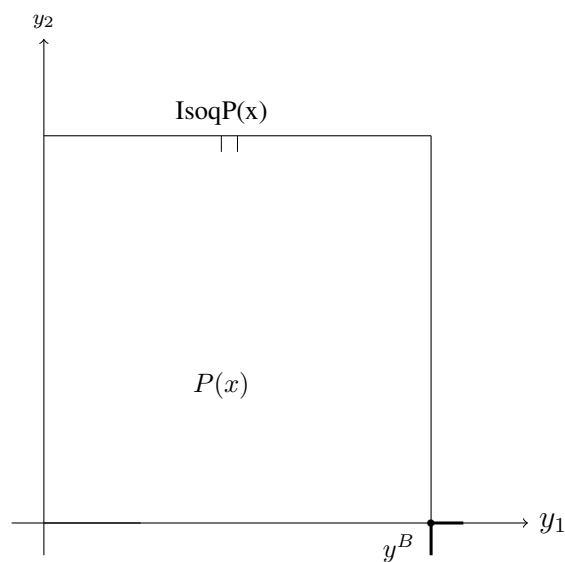


FIGURE 9 – Remarque 3.5

L'identification et la catégorisation de la frontière B -congestionnée présentent un intérêt particulier pour les décideurs économiques (public ou privés) engagés dans des stratégies globales, conciliant enjeux économiques et environnementaux. Nous reviendrons plus en détail sur ces considérations dans la deuxième partie de ces travaux.

2.4 Ensemble en outputs B -congestionné non convexe

La définition 3.1 se réfère uniquement aux axiomes P1-P3 et P6 pour définir l'hypothèse de B -disponibilité dans P . Ainsi, une correspondance en outputs B -disponible peut être convexe ou non convexe (figure 10).

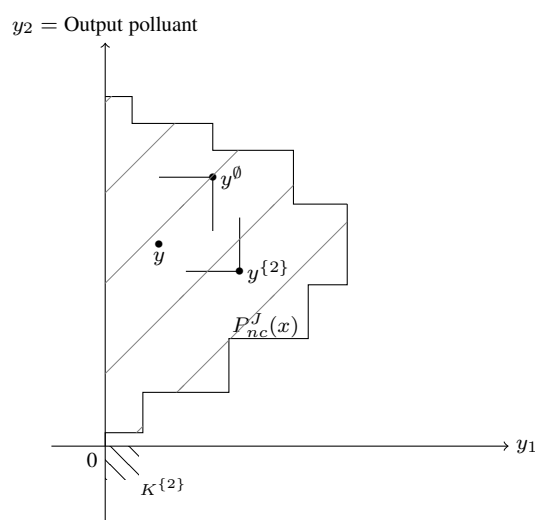


FIGURE 10 – Correspondance en outputs B -disponible non convexe $P_{nc}^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

De plus, selon la proposition 3.2 la correspondance en outputs B -disponible correspond à une intersection de sous-technologies. Ainsi, la correspondance en outputs B -disponible peut posséder une structure hybride, à la fois convexe et non convexe (figure 11).

Dans la figure 11, la sous-technologie de production résiduelle ne vérifie pas l'axiome de convexité et ainsi, la frontière B -congestionnée est non convexe. La sous-technologie de production de la firme satisfait l'hypothèse de convexité et donc la frontière supérieure est convexe². D'après Murty, Russell et Levkoff (2012), la sous-technologie de production résiduelle peut être comprise comme la sous-technologie de production de la "nature". Ici, la technologie de production B -disponible en outputs identifie une situation de non convexité au sein de cette sous-technologie (Dasgupta et Mäler, 2003).

2. Une situation inverse peut également être envisagée.

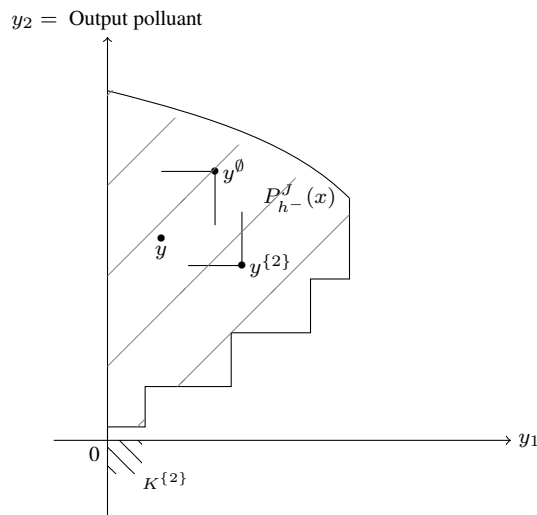


FIGURE 11 – Ensemble en outputs B -disponible hybride $P_h^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

3 Technologie de Production B -Congestionnée avec Partitionnement des Intrants et des Extrants

Dans cette section, le partitionnement suivant est adopté : (iii) $I = I^{np} \cup I^p$ et $O = O^{np} \cup O^p$. Ainsi, nous supposons que les intrants et les extrants sont partitionnés en composantes non-polluantes et polluantes tels que, $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$. A partir de ces partitions, nous analysons la structure de l'ensemble de production. Pour ce faire, nous introduisons une généralisation de l'hypothèse de B -disponibilité. Cette dernière met simultanément en lumière un manque de disponibilité dans la dimension des intrants polluants et dans celle des résidus polluants.

3.1 Généralisation de l'hypothèse de B -disponibilité : Hypothèses et Définition

Commençons par définir les notations utilisées dans cette section. Soit $B = (B_{in}, B_{out}) \subset [n] \times [m]$, le sous-ensemble regroupant les intrants polluants et les productions indésirables. D'après (3.1) et (3.2) :

$$(x, y) \leq^B (u, v) \iff \begin{cases} x_i \geq u_i & \text{if } i \in B_{\text{in}} \\ x_i \leq u_i & \text{if } i \notin B_{\text{in}} \\ y_j \geq v_j & \text{if } j \in B_{\text{out}} \\ y_j \leq v_j & \text{if } j \notin B_{\text{out}} \end{cases} \quad (3.8)$$

De plus :

$$(x, y) <^B (u, v) \iff \begin{cases} x_i > u_i & \text{if } i \in B_{\text{in}} \\ x_i < u_i & \text{if } i \notin B_{\text{in}} \\ y_j > v_j & \text{if } j \in B_{\text{out}} \\ y_j < v_j & \text{if } j \notin B_{\text{out}} \end{cases} \quad (3.9)$$

Ainsi, si $(-x, -y) \leq^B (-u, -v)$ il s'ensuit $(x, y) \geq^B (u, v)$. De plus, si $B = B_{\text{in}} = B_{\text{out}} = \emptyset$ alors :

$$(x, y) \leq^B (u, v) \iff x_i \leq u_i \wedge y_j \leq v_j. \quad (3.10)$$

Lorsque le sous-ensemble contenant les intrants polluants et les productions indésirables est vide ($B = B_{\text{in}} = B_{\text{out}} = \emptyset$) alors, $(x, y) \leq^B (u, v)$ correspond à une inégalité conventionnelle. De plus, si $J \in \{\emptyset, B\}$ alors, $(x, y) \leq^J (u, v)$ vérifie simultanément (3.8) et (3.10).

Pour tout $\{(x^J, y^J)\}_{J \in \{\emptyset, B\}}$ tel que, $\{(x^\emptyset, y^\emptyset)\}$ et $\{(x^B, y^B)\}$ sont des points arbitraires appartenant à T , nous supposons que les inputs et les outputs satisfont l'hypothèse de B -disponibilité définie ci-dessous.

Définition 3.6 Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes T1-T3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$, l'ensemble de production T satisfait l'hypothèse de B -disponibilité si et seulement si, pour tout ensemble de vecteurs inputs-outputs $\{(x^J, y^J)\}_{J \in \{\emptyset, B\}} \subset T$, $(-x, y) \leq^J (-x^J, y^J)$, quel que soit $J \in \{\emptyset, B\}$, implique que $(x, y) \in T$.

Remarquons que, si $B = \emptyset$ (les intrants et les extrants de la firme ne sont pas partitionnés) et ainsi, $J = \emptyset$ alors, l'hypothèse de B -disponibilité des intrants et des outputs au sein de la technologie de production est identique à l'axiome usuel de libre disposition. De ce fait, lorsque la technologie de production est \emptyset -disponible, les intrants et les extrants sont librement disponibles dans T .

D'après la définition 3.6, l'hypothèse de disponibilité forte en inputs et en outputs est limitée. En effet, le cône de libre disposition usuel est combiné avec un cône de libre disposition qui lui est partiellement opposé. Ainsi, la libre disposition se définit localement plutôt que globalement (Lau, 1974). Selon la définition 3.6, la disponibilité forte des inputs et des outputs dans T est d'autant plus faible que les dimensions dans lesquelles s'appliquent la libre disposition modifiée, sont importantes. En effet, la définition 3.6 implique que plus la collection des partitions de $[n] \times [m]$ est importante, plus il est difficile de disposer les intrants et les outputs dans T . Dans ces conditions, la définition de la libre disposition devient locale. La généralisation de l'hypothèse de B -disponibilité, exposée dans la définition 3.6, permet d'envisager un manque de disponibilité simultané dans les inputs et dans les outputs. A partir de cette généralisation, nous introduisons une nouvelle approche axiomatique définissant la structure des technologies de production polluante.

3.2 La technologie de production B -disponible et ses correspondances productives

D'après la définition 3.6, pour tout (x, y) , s'il existe une observation $\{(x^\theta, y^\theta)\}$ qui domine de manière classique (x, y) et un point $\{(x^{\{2\}}, y^{\{2\}})\}$ qui " $\{2\}$ -domine" (x, y) , alors $(x, y) \in T$. Pour une configuration donnée d'observation, ceci permet de construire une technologie de production présentant un manque de disponibilité dans la dimension des intrants polluants et des productions indésirables. Selon une analyse en termes de correspondances productives (en outputs et en inputs), il existe une frontière inférieure dans la dimension des productions polluantes et une frontière supérieure dans celle des inputs polluants. Ainsi, la cessibilité des productions résiduelles est coûteuse (Murty, 2010) et, l'accroissement des intrants polluants ne peut être considéré comme libre (figures 12 et 13).

Dans la figure 12, les intrants et les extrants satisfont l'hypothèse de B -disponibilité. La correspondance en outputs présente à la fois une borne supérieure et une borne inférieure dans la dimension des productions résiduelles (lignes courbée noire $[b, c]$ et $[b, d]$). Ainsi, pour une quantité donnée d'intrants partitionnés (polluants et non polluants) et de production désirable, il existe une production minimale et maximale de résidus polluants. Lorsque l'hypothèse de B -disponibilité est uniquement vérifiée dans la dimension des extrants alors, la frontière inférieure de la correspon-

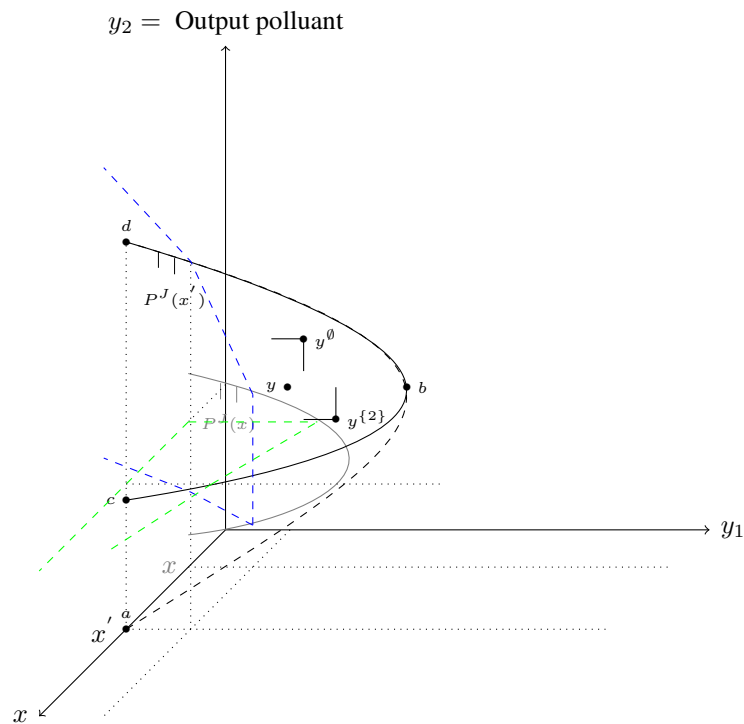


FIGURE 12 – Ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

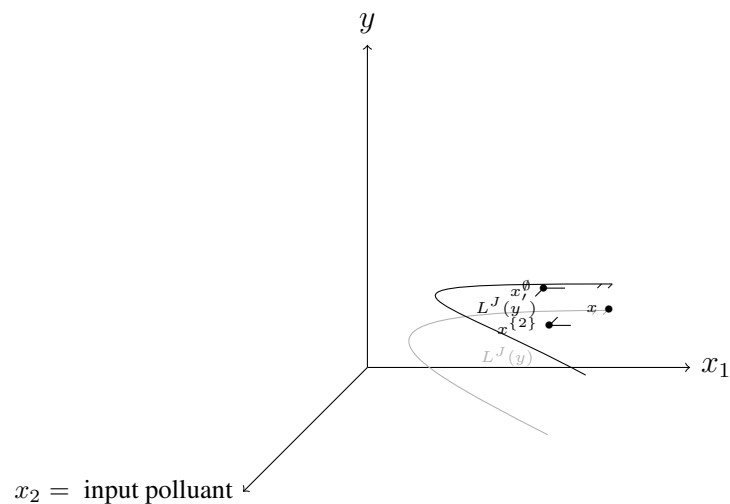


FIGURE 13 – Correspondance en inputs B -disponible $L^J(y)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

dance en outputs est moins restrictive. Dans ce cas, la borne inférieure de l'ensemble en outputs est représentée par la ligne en pointillée $[a, b]$. Par conséquent, lorsque les intrants et les extrants de la firme sont partitionnés (en composantes polluantes et non polluantes) et, satisfont l'hypothèse

de B -disponibilité dans T , la correspondance en outputs est plus étroite. La frontière supérieure de la correspondance P^J garantit la fermeture de l'ensemble en outputs. Ainsi, pour un niveau donné de production désirable, une quantité infinie de résidus polluants ne peut être créée à partir d'un niveau fixe de facteurs.

Lorsque la technologie de production satisfait l'axiome de B -disponibilité dans les intrants et les outputs, ses représentations en termes de correspondances productives (figure 12 ou 13) sont en accord avec les principes physiques élémentaires. D'après la première loi de la thermodynamique, la quantité de matière contenue dans les intrants ne peut disparaître à l'issue du processus productif. Dans notre analyse, la matière contenue dans les inputs (polluants et non polluants) est récupérée dans les productions désirables et indésirables (figure 12). De plus, les intrants polluants génèrent nécessairement une quantité minimale de résidus polluants (figure 12). Ainsi, s'il existe des intrants polluants dans le processus de production alors, les résidus polluants produits sont positifs (seconde loi de la thermodynamique).

Dans ces conditions, la représentation de la technologie de production B -disponible est semblable à celle définie par les modèles basés sur les lois de la thermodynamique (Rødseth, 2017) dans la dimension des outputs. Notons que la disposition des intrants et des extrants est indépendante de la valeur attribuée aux facteurs d'émission et de récupération. De plus, la caractérisation de l'ensemble en outputs est quasiment similaire à celle issue des travaux de Murty, Russell et Levkoff (2012). La seule différence intervient au niveau de la fermeture supérieure de cette correspondance.

Remarquons que l'approche axiomatique reposant sur les axiomes T1-T3 et, sur l'hypothèse de B -disponibilité des intrants et des extrants, peut être retranscrite dans une analyse en termes de correspondances dans l'espace des inputs et des productions indésirables ($Q^J(y_1)$) et, dans l'espace des inputs et produits désirables ($Z^J(y_2)$) (voir figures 14 et 15). Les intrants étant partitionnés en composantes polluantes et non polluantes, il est possible de représenter les correspondances Q et Z dans un repère à trois dimensions. Dans ce cas, la correspondance en inputs et en productions polluantes peut être décrite à travers la figure 16.

La figure 16 nous permet de constater que, pour une quantité donnée d'intrants (polluants et non polluants), il existe une borne inférieure et une borne supérieure dans la dimension des productions résiduelles. De plus, pour une quantité donnée d'outputs (désirables et indésirables),

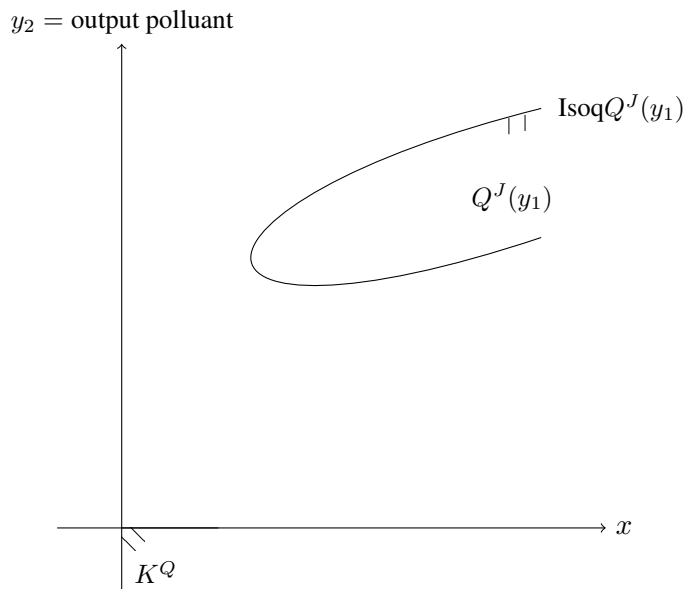


FIGURE 14 – Ensemble en intrants et en productions résiduelles B -disponible $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

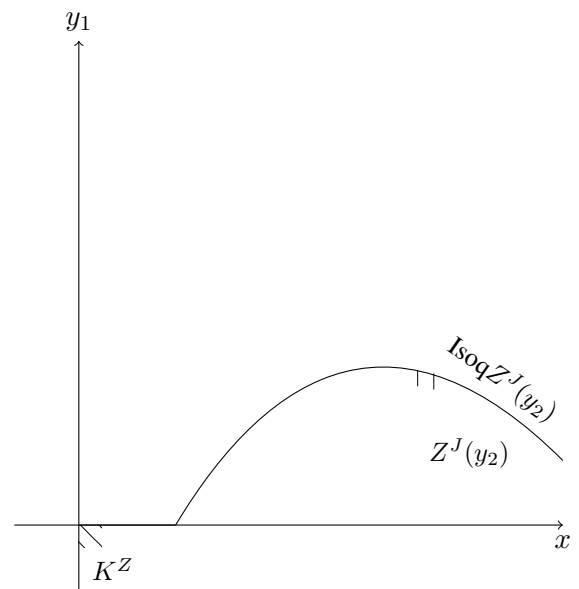


FIGURE 15 – Correspondance en intrants et en productions désirables B -disponible $Z^J(y_2)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

nous pouvons observer que les inputs non polluants sont librement disponibles et *a contrario* les intrants polluants ne peuvent être augmentés librement.

Introduisons le cône convexe suivant :

$$\begin{aligned} K^B &= K^{B_{in}} \times (-K^{B_{out}}) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times -(\mathbb{R}^m) : x \geq^{B_{in}} 0 \text{ et } y \leq^{B_{out}} 0\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Notons que :

$$K^\emptyset = \mathbb{R}_+^n \times (-\mathbb{R}_+^m). \quad (3.12)$$

La proposition suivante présente une caractérisation de la technologie de production.

Proposition 3.7 Soit T une technologie de production satisfaisant les hypothèses T1-T3. T satis-

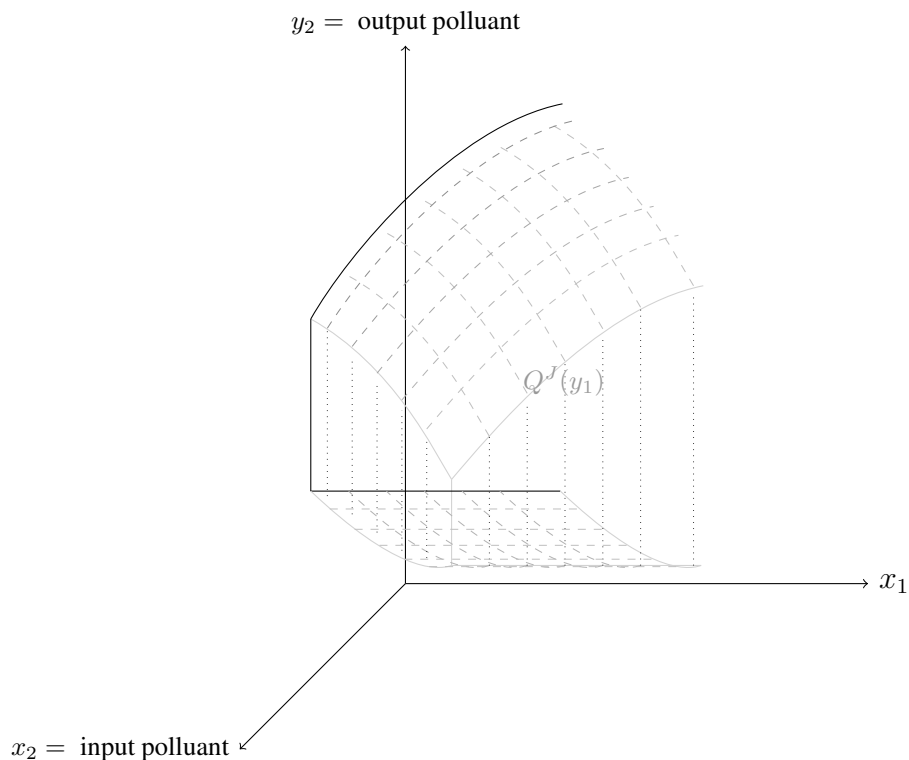


FIGURE 16 – Correspondance en inputs et en productions polluantes B -disponible $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

fait l'axiome de B -disponibilité si et seulement si :

$$T = \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m).$$

La proposition 3.7 permet de caractériser la technologie de production B -disponible selon une intersection de cônes convexes (3.11). Notons que si $B = \emptyset$, alors l'hypothèse de B -disponibilité des intrants et des extrants dans T correspond à l'axiome usuel de libre disposition :

$$T = (T + (\mathbb{R}_+^n \times (-\mathbb{R}_+^m))) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m).$$

Preuve de la Proposition 3.7 : Tout d'abord, supposons que T satisfait l'hypothèse de B -disponibilité. Soit un ensemble de vecteurs inputs-outputs $\{x^J, y^J\}_{J \in \{\emptyset, B\}} \subset T$. Par définition, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$, $\forall J \in \{\emptyset, B\}$ $(-x, y) \leq^J (-x^J, y^J)$ implique que $(x, y) \in T$. Ainsi, quel que soit $J \in \{\emptyset, B\}$, $(x, y) \in \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m) \subset T$. De plus,

nous avons nécessairement $T \subset \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m)$. Inversement, supposons que $T = \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m)$. Quel que soit $J \in \{\emptyset, B\}$, si $(x^J, y^J) \in T$ et $(-x, y) \leq (-x^J, y^J)$, alors $(x, y) \in \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m)$. Ainsi, pour tout ensemble de vecteurs d'inputs et d'outputs $\{x^J, y^J\}_{J \in \{\emptyset, B\}} \subset T$, $(x, y) \in \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m)$. Ainsi, T satisfait l'hypothèse de B -disponibilité. \square

La technologie de production B -disponible peut être considérée comme une intersection de deux sous-technologies. La première respecte l'axiome usuel de libre disposition des inputs et des outputs dans T . La seconde vérifie une hypothèse de disponibilité partiellement opposée dans T . Selon la dénomination introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012), la première correspond à la sous-technologie de production de la firme et la seconde à la sous-technologie de production résiduelle. Les extrants sont librement disponibles au sein de la sous-technologie de production de la firme. Les productions indésirables vérifient l'hypothèse de disponibilité "coûteuse" et les intrants polluants ne sont pas librement disponibles dans la sous-technologie de production résiduelle. Dans cette représentation, ces deux sous-technologies ne sont pas supposées opérer indépendamment l'une de l'autre³ ce qui garantit notamment, la fermeture de la correspondance en outputs de la technologie de production B -disponible.

A présent, nous pouvons introduire une nouvelle notion de congestion dans T :

Définition 3.8 Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes T1-T3 et soit $B = (B_{\text{in}}, B_{\text{out}}) \subset [n] \times [m]$. T est B -congestionnée si elle ne vérifie pas l'axiome de libre disposition mais satisfait l'hypothèse de B -disponibilité.

D'après la définition 3.8, une technologie de production est B -congestionnée dès que :

$$\left(T + (\mathbb{R}_+^n \times (-\mathbb{R}_+^m)) \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m) \neq \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m). \quad (3.13)$$

Ainsi, une technologie de production est B -congestionnée dès qu'elle ne vérifie pas une hypothèse de disponibilité plus forte que celle de la B -disponibilité. Dans ce cas,

3. En effet, dans notre analyse nous ne considérons pas les axiomes d'indépendances introduits dans les travaux Murty, Russell et Levkoff (2012).

$$T \neq \left(T + (\mathbb{R}_+^n \times (-\mathbb{R}_+^m)) \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m). \quad (3.14)$$

Ce résultat peut être vu comme une transposition de la notion de congestion en outputs introduite dans les travaux de Färe et Grosskopf (1983). Ici la congestion est généralisée dans T . Elle concerne simultanément les intrants et les extrants de la technologie de production. Notons qu'une technologie de production ne peut être \emptyset -congestionnée.

3.3 Identification et catégorisation des frontières B -congestionnées dans T

Comment détecter la présence d'intrants polluants et de productions indésirables à partir de la structure de la technologie de production ? Pour répondre à cette interrogation, nous introduisons le concept de frontière B -congestionnée. Ainsi, la définition suivante identifie un sous-ensemble qui n'est pas efficient, mais qui constitue une partie de l'isoquant de l'ensemble de production B -congestionné.

Définition 3.9 Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes $T1$ - $T3$ et soit $B \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, nous appelons frontière B -congestionnée le sous-ensemble :

$$E^B(T) = \{(x, y) \in T : (-u, v) \geq^B (-x, y) \text{ et } (u, v) \neq (x, y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}.$$

Nous appelons frontière faiblement B -congestionnée le sous-ensemble :

$$W^B(T) = \{(x, y) \in T : (-u, v) >^B (-x, y) \Rightarrow (u, v) \notin T\}.$$

Dans ces conditions, $E^\emptyset(T)$ correspond à la frontière efficiente usuelle de T ; c'est-à-dire E . De plus notons que $(x, y) \in E^B(T)$ si et seulement si :

$$\left(T \setminus \{(x, y)\} \right) \cap \left((x, y) + K^B \right) = \emptyset. \quad (3.15)$$

La frontière B -congestionnée et la frontière faiblement B -congestionnée de T vérifient la condition suivante :

$$E^B(T) \subset W^B(T) \subset \text{Isoq}T.$$

3.4 Technologie de production B -congestionnée non convexe

D'après la définition 3.6, l'hypothèse de B -disponibilité des intrants polluants et des résidus polluants dans T , ne dépend pas de l'axiome de convexité. Ainsi, une technologie de production B -disponible peut être convexe ou non convexe. De même, les correspondances en inputs ou en outputs de cette technologie de production ne sont pas nécessairement convexes (figure 17).

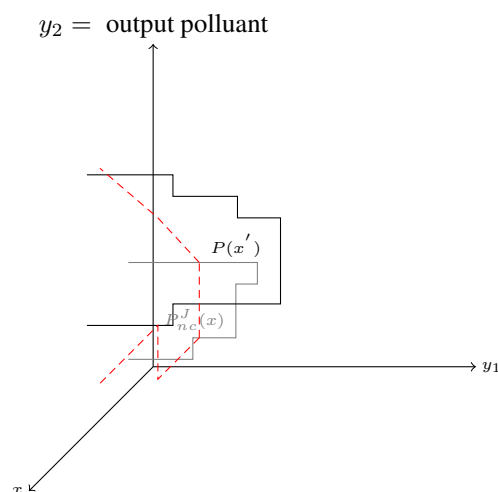


FIGURE 17 – Ensemble en outputs B -disponible non convexe $P_{nc}^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

D'après la proposition 3.7, lorsque les intrants et les extrants satisfont l'hypothèse de B -disponibilité alors, les technologies de production (respectivement leurs correspondances productives) peuvent être caractérisées selon des intersections de sous-technologies (respectivement de sous-correspondances productives). Ainsi, les technologie de production et leurs correspondances productives peuvent avoir une structure hybride, à la fois convexe et non convexe (figure 18).

Dans la figure 18, la sous-technologie de production résiduelle ne vérifie pas l'axiome de convexité et ainsi, la frontière inférieure de l'ensemble en outputs de la technologie B -disponible est non convexe. La sous-technologie de production de la firme satisfait l'hypothèse de convexité et ainsi, la frontière supérieure de la correspondance en outputs est convexe⁴. D'après Murty, Rus-

4. Une situation inverse peut également être envisagée.

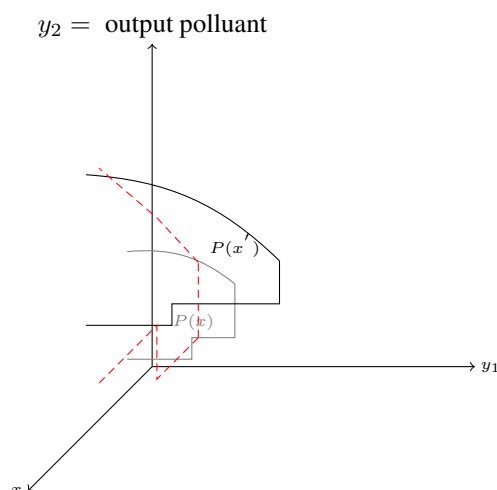


FIGURE 18 – Ensemble en outputs B -disponible hybride $P_h^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

sell et Levkoff (2012), la sous-technologie de production résiduelle peut être comprise comme le processus de transformation de la "nature". Dans notre analyse, la technologie de production B -disponible en inputs et en outputs identifie une situation de non convexité au sein de cette sous-technologie (Dasgupta et Mäler, 2003).

4 Technologie de Production Polluante Convexe et Non Convexe : Spécification Non Paramétrique

Dans cette section nous considérons un ensemble de production B -disponible de type polyédrique. Dans ce contexte, nous introduisons une procédure de spécification non-paramétrique, par enveloppement des données (méthode DEA). Plus précisément, nous considérons la modélisation proposée par Banker, Charnes et Cooper (1984). De plus, nous introduisons une spécification FDH (Tulkens, 1993). Dans ce cas, l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production B -disponible est relâchée. Bien entendu, nous étudierons successivement les différentes structures de partitionnement présentées dans les sections précédentes. Par ailleurs, nous essaierons de mettre en relation les modélisations de la technologie de production polluante exposées dans cette section avec celles préalablement présentées dans la littérature.

4.1 Ensemble de production B -disponible et partitionnement des extrants : spécification non paramétrique

Soit $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$, l'ensemble des unités de production observées sur un secteur de l'économie. Nous supposons que les firmes s'inscrivant dans ce secteur, sont engagées dans des activités productives polluantes. Ainsi, leurs extrants sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

4.1.1 Technologie de production polluante convexe

Supposons que la technologie de production présente des rendements d'échelle variables (VRS). Dans ce cas, la modélisation usuelle par enveloppement des données (méthode DEA) de l'ensemble de production est définie par :

$$T^{DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \mu \geq 0 \right\}. \quad (3.16)$$

Quelle que soit l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$, la spécification non-paramétrique de la correspondance en outputs de T^{DEA} se définit comme suit :

$$P^{DEA}(x_0) = \left\{ y : x_0 \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \mu \geq 0 \right\}.$$

Le sous-ensemble suivant permet d'identifier des situations de congestion dans la dimension des productions désirables appartenant à P^{DEA} .

$$P^{B,DEA}(x_0) = \left\{ y : x_0 \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_z, y \leq^B \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_z, \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = 1, \theta \geq 0 \right\}. \quad (3.17)$$

Considérons la collection $J = \{\emptyset, B\} \subset [m]$. Il s'ensuit :

$$P^J(x_0) = P^\emptyset(x_0) \cap P^B(x_0) = \left((P(x_0) - \mathbb{R}_+^m) \cap (P(x_0) - K^B) \right) \cap \mathbb{R}_+^m.$$

Ainsi, nous avons :

$$P^{J,DEA}(x_0) = P^{DEA}(x_0) \cap P^{B,DEA}(x_0). \quad (3.18)$$

Le sous-ensemble (3.18), propose une caractérisation de la spécification non-paramétrique de la correspondance en outputs B -disponible. Ce sous-ensemble est construit comme une intersection de sous-correspondances en outputs non-paramétriques. L'ensemble en outputs de la sous-technologie de production de la firme, formant la frontière supérieure de $P^{J,DEA}$, est défini par P^{DEA} . La correspondance en outputs de la sous-technologie de production résiduelle, formant la frontière B -congestionnée (inférieure) de $P^{J,DEA}$, est défini par $P^{B,DEA}$. Ainsi, nous avons :

$$P^{J,DEA}(x_0) = \left\{ y : x_0 \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_z, x_0 \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z \right. \\ \left. y \leq^B \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_z, y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z \right. \\ \left. \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \theta, \mu \geq 0 \right\} \quad (3.19)$$

$P^{J,DEA}(x_0)$ présente une caractérisation non paramétrique des technologies de production polluante, selon une analyse en terme de correspondance en outputs. L'ensemble $P^{J,DEA}(x_0)$ admet, pour une quantité donnée d'intrants et de productions désirables, une borne supérieure et une borne

inférieure dans la dimension des productions résiduelles. Nous pouvons à présent proposer les résultats suivants :

Proposition 3.10 *La spécification non-paramétrique de l'ensemble en outputs convexe $P^{J,DEA}$ satisfait les propriétés suivantes.*

- (a) $P^{J,DEA}$ est convexe ;
- (b) $P^{J,DEA}$ satisfait l'hypothèse de B -disponibilité ;
- (c) $P^{J,DEA}$ est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}_+^m .

Preuve de la Proposition 3.10 :

(a) Le sous-ensemble $P^{J,DEA}$ est une intersection finie d'ensembles convexes. Ainsi, il constitue un ensemble convexe. (b) tient d'après la définition de $P^{J,DEA}$. (c) $P^{J,DEA}$ est une intersection finie d'ensembles fermés. Par définition, il forme un ensemble fermé. \square

Le système d'inéquations linéaires (3.19) peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
 P^{J,DEA}(x_0) = \left\{ y : x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \right. \\
 x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \left. \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0 \right\} \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Notons que, si $\theta = \mu$ alors, les productions indésirables ne vérifient aucune hypothèses de disponibilité dans (3.20) ; voir Kuosmanen (2005). Cette spécification ne permet pas de modéliser

de manière correcte la propriété de rendements d'échelle variables quand les outputs désirables et indésirables sont faiblement disponibles (Leleu, 2013). Cette modélisation a largement été utilisée dans la littérature (voir par exemple Picazo-Tadeo, Reig-Martinez et Hernandez-Sancho, 2005 ; Bilsel et Davutyan, 2014). Ainsi, cette contribution apporte une référence axiomatique à la modélisation erronée des rendements d'échelle variables dans les modèles issus des travaux de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989).

Par ailleurs, si nous considérons un ensemble d'unités de production observées $\mathcal{A}' = \{(x_z, y_z), (x_z, 0) : z \in \mathcal{Z}\}$ alors, le système (3.20) permet de retrouver la spécification introduite par Kuosmanen (2005). Dans ce cas, un facteur d'abattement non uniforme est considéré pour définir la disponibilité faible des extrants désirables et indésirables. Kuosmanen et Podinovski (2009), suivant les travaux de Podinovski (2004), précisent que la technologie proposée par Kuosmanen (2005) constitue le plus petit ensemble convexe satisfaisant les axiomes suggérés par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). Ainsi, l'approche axiomatique introduite dans la deuxième section de ce chapitre offre un cadre axiomatique à la technologie introduite par Kuosmanen (2005).

De plus, si nous retenons un ensemble d'unités de production observées $\mathcal{A}'_0 = \{(x_z, y_z), (x_0, 0) : z \in \mathcal{Z}\}$, le système (3.20) permet de retrouver la spécification introduite par Leleu (2013). Ainsi, l'approche axiomatique présentée dans la deuxième section de ce chapitre permet également d'introduire un cadre axiomatique à la technologie proposée par Leleu (2013).

4.1.2 Technologie de production polluante non convexe

Dans la sous-section 2.4, nous avons montré qu'il est possible d'introduire des correspondances en outputs B -disponibles non convexes. Soit,

$$S^{SD}(x_z, y_z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq x_z, y \leq y_z \right\} \quad (3.21)$$

et

$$S^B(x_z, y_z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq x_z, y \leq^B y_z \right\}, \quad (3.22)$$

des ensembles de production individuels, avec $z \in \mathcal{Z}$, respectant respectivement l'hypothèse de disponibilité forte en outputs et un ordre de disposition qui lui est partiellement opposé. L'intersection des réunions non convexes de (3.21) et de (3.22) permet de définir un ensemble en outputs

B -disponible de type FDH (non convexe) :

$$P_{nc}^{J,DEA}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : (x, y) \in \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z) \right) \cap \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^B(x_z, y_z) \right) \right\}. \quad (3.23)$$

Dans la spécification (3.23) l'hypothèse de rendements d'échelle variables est privilégiée. D'autres types de rendements d'échelle peuvent être introduits en incorporant des hypothèses additionnelles dans (3.21) et (3.22). Plus précisément,

$$S^{SD,\delta}(x_z, y_z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq \delta x_z, y \leq \delta y_z \right\} \quad (3.24)$$

et

$$S^{B,\delta}(x_z, y_z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq \delta x_z, y \leq^B \delta y_z \right\}, \quad (3.25)$$

avec $\delta \geq 0$ (hypothèse CRS), $\delta \in [0, 1]$ (hypothèse NIRS) et $\delta \geq 1$ (hypothèse NDRS).

D'après Bricc, Kerstens et Vanden Eeckaut (2004), il est possible d'introduire une spécification généralisée de l'ensemble en outputs B -disponible :

$$P_{\Omega,\Delta}^{J,DEA}(x) = \left\{ y : x \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_z, x \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z \right. \\ \left. y \leq^B \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_z, y \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z \right. \\ \left. \theta, \mu \in \Omega, \delta \in \Delta \right\}.$$

Ici, $\Omega \in \{c, nc\}$, avec $c = \{(\theta, \mu) : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \theta, \mu \geq 0\}$ et $nc = \{(\theta, \mu) : \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \theta, \mu \in [0, 1]\}$. De plus, $\Delta \in \{\{\delta : \delta = 1\}; \{\delta : \delta \geq 0\}; \{\delta : \delta \in [0, 1]\}; \{\delta : \delta \geq 1\}\}$ permet de considérer différentes hypothèses sur la nature des rendements d'échelle ; respectivement VRS, CRS, NIRS et NDRS.

Par ailleurs, dans la mesure où la technologie de production B -disponible peut se définir comme une intersection de sous-technologies, nous pouvons introduire une spécification hybride (à la fois convexe et non convexe) de la correspondance en outputs B -disponibles :

$$\begin{aligned}
 P_{h^-}^{J,DEA}(x) = \left\{ y : x \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_z, x \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z \right. \\
 y \leq^B \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_z, y \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z \\
 \left. \theta \in nc, \mu \in c, \delta \in \Delta \right\}. \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Dans la spécification (3.26), la frontière supérieure de la correspondance en outputs B -disponibles satisfait l'axiome de convexité alors que, la frontière B -congestionnée ne vérifie pas cette hypothèse. Dans ce cas, la spécification hybride de la correspondance en outputs B -disponible correspond à l'intersection entre la réunion convexe de (3.21) et la réunion non convexe de (3.22).

$$P_{h^-}^{J,DEA}(x) = \left\{ y : (x, y) \in Co\left(\cup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z)\right) \cap \left(\cup_{z \in \mathcal{Z}} S^B(x_z, y_z)\right) \right\}. \tag{3.27}$$

4.2 Technologie de production B -disponible et partitionnement des intrants et des extrants : spécification non paramétrique

Soit $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$, l'ensemble des unités de production observées sur un secteur de l'économie. Nous supposons que les firmes s'inscrivant dans ce secteur sont engagées dans des activités productives polluantes. De plus, leurs intrants et leurs extrants sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

4.2.1 Technologie de production polluante convexe

Supposons que la technologie de production satisfait des rendements d'échelle variables. Ainsi, nous retenons la spécification non-paramétrique proposée par Banker, Charnes et Cooper (1984). Pour établir une situation de congestion généralisée dans les intrants polluants et les productions désirables, nous identifions le sous-ensemble suivant :

$$T^{B,DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq^{B_{in}} \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_z, y \leq^{B_{out}} \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_z, \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = 1, \theta \geq 0 \right\} \quad (3.28)$$

Considérons la collection $J = \{\emptyset, B\} \subset [n] \times [m]$. Dans ces conditions, nous avons :

$$T^J = T^\emptyset \cap T^B = \left((T + (\mathbb{R}_+^m \times (-\mathbb{R}_+^n))) \cap (T + (K^{B_{in}} \times (-K^{B_{out}}))) \right) \cap (\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n).$$

Selon une spécification non-paramétrique,

$$T^{J,DEA} = T^{DEA} \cap T^{B,DEA}. \quad (3.29)$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} T^{J,DEA} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_z, x \geq^{B_{in}} \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_z \right. \\ \left. y \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_z, y \leq^{B_{out}} \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_z \right. \\ \left. \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \theta, \mu \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le système (3.30) représente une spécification non-paramétrique de la technologie de production B -disponible. Cette modélisation est construite selon une intersection de sous-technologies de production non-paramétriques (T^{DEA} et $T^{B,DEA}$). La première (T^{DEA}) détermine la frontière supérieure de la technologie de production B -disponible. La seconde ($T^{B,DEA}$) détermine la frontière inférieure de $T^{J,DEA}$. Cette estimation de la technologie de production polluante permet d'identifier une situation de congestion généralisée dans la dimension des intrants polluants et dans celle

des productions désirables.

D'après la dénomination introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012), $T^{B,DEA}$ peut être comprise comme la technologie de production résiduelle. T^{DEA} représente quant à elle la technologie de production de la firme. Dans notre analyse, l'intersection de ces deux sous-technologies de production définit une technologie de production polluante. Cette technologie satisfait l'hypothèse de B -disponibilité dans les intrants et les extrants. Dans le cadre de cette représentation $T^{B,DEA}$ et T^{DEA} sont construites à partir du même ensemble d'intrants (Försund, 2016). De plus, $T^{B,DEA}$ et T^{DEA} ne vérifient pas les propriétés d'indépendance relativement aux différentes catégories d'intrants et d'extrants. Ainsi, les deux sous-technologies de production n'opèrent pas indépendamment l'une de l'autre.

Le système linéaire d'inéquations (3.30) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 T^{J,DEA} = \left\{ (x, y) : \right. & x_i \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 & x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 & x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 & y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 & y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 & \left. \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = 1, \mu \geq 0, \theta \geq 0 \right\} \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Dans la spécification (3.31), les productions d'abattement sont nulles. De tels outputs peuvent aisément être introduits dans la modélisation (3.31). Pour ce faire, nous devons ajouter la contrainte suivante dans le système (3.31) : $y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}$, $j \in B'_{\text{out}}$. Dans ce cas, $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}, B'_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$, regroupe l'ensemble des intrants polluants, des résidus polluants et des productions

d'abattement.

De plus, si l'on suppose que la sous-technologie de production T^{DEA} est indépendante vis-à-vis des $\{y_j\}_{j \in B_{out}}$ et, si l'on ajoute les contraintes additionnelles ((3.32) et (3.33)) dans (3.31),

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{in} \quad (3.32)$$

et

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{out}, \quad (3.33)$$

alors, la technologie de production polluante définie dans (3.31), peut s'écrire comme la technologie de coproduction (Murty, Russell et Levkoff, 2012)⁵.

4.2.2 Technologie de production polluante non convexe

Dans la sous-section 3.4, nous avons montré qu'il est possible d'introduire une technologie de production B -disponible non convexe. Soit,

$$S^{B_{in}, B_{out}}(x_z, y_z) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x \geq^{B_{in}} x_z, y \leq^{B_{out}} y_z \right\} \quad (3.34)$$

un ensemble de production individuel, avec $z \in \mathcal{Z}$, vérifiant un axiome de disponibilité qui est partiellement opposé à la libre disposition des inputs et des outputs. L'intersection des réunions non convexes de (3.21) et de (3.34) permet de définir une technologie de production B -disponible de type FDH (non convexe) :

$$T_{nc}^{J, DEA} = \left\{ (x, y) : (x, y) \in \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z) \right) \cap \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{B_{in}, B_{out}}(x_z, y_z) \right) \right\}. \quad (3.35)$$

D'après les travaux de Briec, Kerstens et Vanden Eeckaut (2004), une spécification généralisée de la technologie de production B -disponible peut être proposée :

5. En considérant des contraintes additionnelles nommées "contraintes de dépendances" dans la littérature, nous retrouvons l'extension de la technologie de coproduction suggérée par Dakpo (2016).

$$\begin{aligned}
 T_{\Omega, \Delta}^{J, DEA} = & \left\{ (x, y) : x_i \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \right. \\
 & x_i \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 & x_i \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & y_j \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 & y_j \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 & y_j \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 & \left. \theta, \mu \in \Omega, \quad \delta \in \Delta \right\} \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Notons que, si nous ajoutons les contraintes (3.32) et (3.33) et, si nous supposons que T_{nc}^{DEA} est indépendante des $\{y_j\}_{j \in B_{\text{out}}}$ dans (3.36) alors, nous pouvons introduire une version non convexe de la technologie de coproduction.

De plus, une technologie de production B -disponible hybride peut être définie comme suit,

$$\begin{aligned}
 T_{h^-}^{J,DEA} = & \left\{ (x, y) : x_i \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \right. \\
 & x_i \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 & x_i \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & y_j \geq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 & y_j \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 & y_j \leq \delta \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 & \left. \theta \in nc, \mu \in c, \delta \in \Delta \right\} \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$T_{h^-}^{J,DEA} = \left\{ (x, y) : (x, y) \in Co\left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{SD}(x_z, y_z)\right) \cap \left(\bigcup_{z \in \mathcal{Z}} S^{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}}(x_z, y_z)\right) \right\}. \tag{3.38}$$

Selon la dénomination introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012), la technologie de production polluante (3.37) permet de considérer une absence de convexité dans la sous-technologie de production résiduelle (Dasgupta et Mäler, 2003).

5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle approche axiomatique, définissant la structure des technologies de production polluante, est introduite. Celle-ci se distingue des approches antérieures, en proposant une nouvelle hypothèse de disponibilité : la B -disponibilité. Dans ce cadre axiomatique, la structure des technologies de production polluante peut être analysée suivant un ensemble réduit

d'axiomes. Ainsi, il est possible de définir des technologies de production polluante convexes et/ou non convexes.

Cette nouvelle approche axiomatique, permet de retenir plusieurs stratégies de partitionnement dans les intrants et les extrants. De ce fait, lorsque seuls les outputs sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes, la B -disposition des extrants dans l'ensemble de production fait apparaître une situation de congestion dans la dimension des productions désirables. A cet égard, l'approche axiomatique proposée dans ce chapitre est semblable à celle introduite par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). En effet, ces deux approches reposent sur le principe de congestion des productions non polluantes. Leur point de divergence intervient dans la définition de la notion de congestion. Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) supposent que les extrants (polluants et non polluants) sont faiblement disponibles dans la technologie de production polluante. Dans ce chapitre, nous considérons que les outputs désirables et indésirables sont B -disponibles. Dans ces conditions, nous montrons que la technologie de production B -disponible peut se définir selon une intersection de sous-technologies. Ainsi, l'approche axiomatique introduite dans ces travaux peut être mise en parallèle avec celle proposée par Murty, Russell et Levkoff (2012). Du fait des règles de partitionnement adoptées, l'approche de Murty, Russell et Levkoff (2012) demeure plus générale que le cadre axiomatique introduit dans la première section de ce chapitre.

Partant de ce constat, un nouveau schéma de partitionnement dans les intrants et les extrants est adopté. Dans ces conditions, une généralisation de l'hypothèse de B -disponibilité est introduite. Cette dernière permet de définir une situation de congestion généralisée, concernant à la fois les intrants polluants et les productions désirables, dans l'ensemble de production. De plus, nous montrons que cette technologie peut être comprise comme une intersection de sous-technologies comme dans le cadre du modèle de Murty, Russell et Levkoff (2012).

L'approche axiomatique suggérée dans ce chapitre semble s'inscrire dans la lignée des références axiomatiques introduites dans les travaux de Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989) et, de Murty, Russell et Levkoff (2012)⁶. D'après une spécification non-paramétrique de l'ensemble de production B -disponible, nous montrons qu'il est possible de connecter cette modélisation avec

6. Nous avons également constaté, dans ce chapitre, que le cadre axiomatique proposé, est en accord avec celui se référant aux principes physiques élémentaires (Rödseth, 2017).

les estimations non paramétriques des technologies de production polluante relevant de ces apports. Enfin, nous élargissons le champs des possibles dans la spécification non-paramétriques des technologies de production polluante, en proposant une modélisation non convexe.

Deuxième partie

Fonctions de Distance et Caractérisation des Technologies de Production

Chapitre 4

Fonctions de Distance et Technologie de Production Usuelle

1 Introduction

Interrogations : Dans un ensemble de production répondant aux axiomes usuels de la théorie de la production, comment analyser l'écart existant entre un plan de production donné et ceux constituant la frontière de la technologie de production ? Comment caractériser l'isoquant de cet ensemble ? Comment spécifier ces mesures de distance ?

Dans ce chapitre, nous introduisons plusieurs mesures d'efficacité technique. Ces dernières permettent de mesurer l'écart existant entre un plan de production appartenant à la technologie de production, ou à ses images en termes de correspondances (inputs ou outputs), et sa projection (radiale ou non radiale) optimale située sur la frontière de ces ensembles. De plus, d'après la définition des fonctions de profit, de revenu et de coût nous montrons qu'il existe des relations duales entre ces fonctions et les mesures d'efficacité technique.

Dans la deuxième section de ce chapitre, les fonctions de distance de Shephard orientées en input et en output sont présentées. A partir de ces fonctions de distance, les mesures d'efficacité technique de Debreu-Farrell en input et en output sont introduites. Ces fonctions de distance possèdent une structure multiplicative. De plus, elles constituent des mesures radiales d'efficacité technique permettant de caractériser les technologies de production. Une extension dans le graphe

de la mesure d'efficience de Shephard est ensuite exposée. Des relations duales entre la fonction de distance de Shephard en input, respectivement en output, et la fonction de coût, respectivement de revenu, sont ensuite proposées. D'après ces relations duales, les fonctions de coût et de revenu peuvent respectivement être déterminées à partir des fonctions de distance de Shephard en input et en output. Inversement, la procédure permettant de déterminer ces mesures de distance peut être établie à partir des fonctions de coût et de revenu. Selon ces résultats de dualité, le lemme de Shephard (en input et output) et son dual sont exposés.

Dans la troisième section, nous introduisons les fonctions de distance directionnelle dans le graphe de la technologie de production et dans ses images, en termes de correspondances (inputs et outputs). Ces fonctions de distance possèdent une structure additives. Elles constituent des mesures non radiales d'efficacité technique permettant de caractériser les technologies de production et leurs correspondances (inputs et outputs). De plus, nous montrons que les fonctions de distance directionnelle correspondent à des généralisations des mesures de distance de Shephard (input et output). En effet, lorsque les fonctions de distance directionnelle sont équivalentes aux fonctions de distance proportionnelle au sens de Farrell, des résultats d'équivalence entre ces fonctions de distance et les mesures de distance de Shephard (input et output) peuvent être établis. Par ailleurs, des relations de dualité entre les fonctions de distance directionnelle et les fonctions de profit, de revenu et de coût sont introduites. Ces résultats permettent de mettre en lumière des fonctions de prix ajustés en input et en output. Ces dernières correspondent à des prix implicites garantissant respectivement la minimisation des coûts et la maximisation du revenu.

Dans la dernière section, nous présentons une spécification non-paramétrique des fonctions de distance présentées dans ce chapitre. Ainsi, la méthode par enveloppement des données (DEA) est utilisée afin d'estimer ces mesures d'efficacité technique.

2 La Fonction de Distance de Shephard

La mesure d'efficacité de Debreu-Farrell correspond à l'inverse de la fonction de distance de Shephard (1953). Ces dernières se définissent selon une orientation en input ou en output. Dans le cadre d'une orientation en output, la fonction de distance de Shephard mesure l'expansion maximale d'un vecteur d'outputs, selon un scalaire λ , permettant d'atteindre la frontière de la techno-

logie de production. Suivant une orientation en input, un raisonnement symétrique s'applique.

2.1 Orientations en input et en output

Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes T1-T3 et T6-T7¹. La fonction de distance de Shephard en input, $D^i : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup 0$, se définit comme suit :

$$D^i(x, y) = \begin{cases} \sup_{\lambda} \{ \lambda > 0 : \left(\frac{x}{\lambda}, y \right) \in T \} & \text{si } \left(\frac{x}{\lambda}, y \right) \in T, \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

L'orientation en output, $D^o : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, est caractérisée de la façon suivante :

$$D^o(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \{ \lambda > 0 : \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \in T \} & \text{si } \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \in T, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$D^i(x, y) = \begin{cases} \sup_{\lambda} \{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in L(y) \} & \text{si } \frac{x}{\lambda} \in L(y), \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

et

$$D^o(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \{ \lambda > 0 : \frac{y}{\lambda} \in P(x) \} & \text{si } \frac{y}{\lambda} \in P(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans l'équation (4.3), nous supposons que $D^i(x, y) = 0$, s'il n'existe pas de $\lambda > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in L(y)$. De même, dans l'équation (4.4) nous supposons que $D^o(x, y) = +\infty$, s'il n'existe pas $\lambda > 0$ tel que $\frac{y}{\lambda} \in P(x)$. Ces formulations mettent en lumière d'éventuelles infaisabilités.

1. L'hypothèse de convexité de l'ensemble de production T4 n'est pas nécessaire pour définir les fonctions de distance de Shephard en input et en output. Cet axiome sera intégré dans la sous-section concernant la dualité.

Sous l'hypothèse de disponibilité faible des outputs, l'ensemble de production peut être caractérisé comme suit :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : D^o(x, y) \leq 1\} \quad (4.5)$$

De même, sous l'hypothèse de disponibilité faible des inputs, il est possible de caractériser la technologie de production de la façon suivante :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : D^i(x, y) \geq 1\} \quad (4.6)$$

Lorsque les inputs et les outputs sont faiblement disponibles dans l'ensemble de production, la relation d'équivalence suivante est immédiate :

$$D^i(x, y) \geq 1 \Leftrightarrow D^o(x, y) \leq 1$$

Notons que par construction, pour tout $\theta > 0$ on a : $D^i(\theta x, y) = \theta D^i(x, y)$ et $D^o\left(x, \frac{y}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta} D^o(x, y)$.

La mesure d'efficacité de Debreu-Farrell en input ou en output peut immédiatement être déterminée à partir des fonctions de distance de Shephard (en input ou en output). La mesure de Debreu-Farrell en input, $E^i : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \infty$, se définit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E^i(x, y) &= \inf_{\lambda \geq 0} \{\lambda : (\lambda x, y) \in T\} \\ &= \inf_{\lambda \geq 0} \{\lambda : \lambda x \in L(y)\} \\ &= \frac{1}{D^i(x, y)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

De même, la mesure de Debreu-Farrell en output, $E^o : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \infty$, se présente comme suit :

$$\begin{aligned}
 E^o(x, y) &= \sup_{\lambda \geq 0} \{ \lambda : (x, \lambda y) \in T \} \\
 &= \sup_{\lambda \geq 0} \{ \lambda : \lambda y \in P(x) \} \\
 &= \frac{1}{D^o(x, y)}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Notons que lorsque la fonction de distance de Shephard en input tend vers 0, alors la mesure de Debreu-Farrell en input tend vers l'infini. De même lorsque la fonction de distance de Shephard en output tend vers l'infini, alors la mesure de Debreu-Farrell en output tend vers 0. Ces résultats sont évidents car la mesure d'efficacité de Debreu-Farrell est l'inverse de la fonction de distance de Shephard.

Géométriquement, les mesures de Debreu-Farrell en input et en output peuvent être décrites à travers les figures 1 et 2.

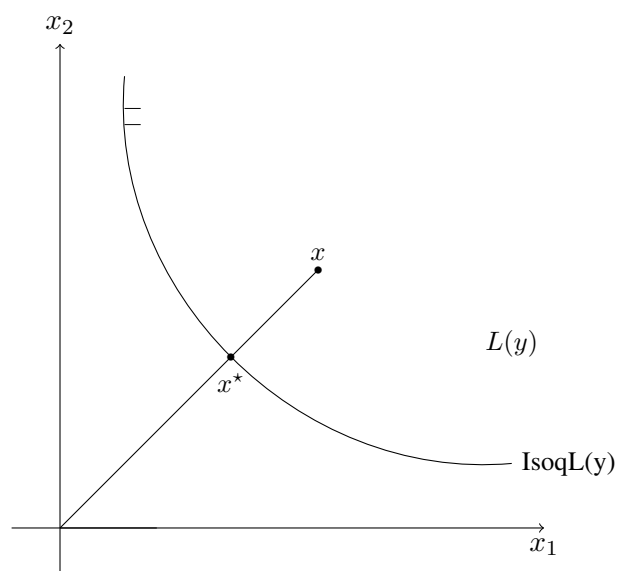


FIGURE 1 – Mesure de Debreu-Farrell en input

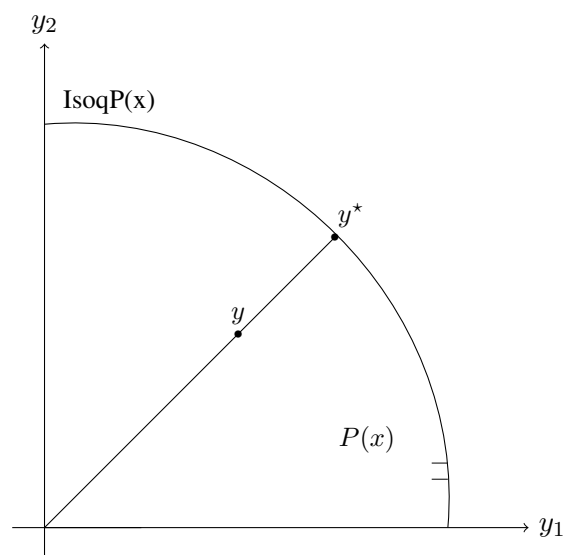


FIGURE 2 – Mesure de Debreu-Farrell en output

D'après la figure 1, la mesure de Debreu-Farrell en input (4.7) correspond à la proportion λ selon laquelle la quantité utilisée d'intrants x doit être réduite radialement pour atteindre l'isoquant en input. Ainsi, la mesure

$$\begin{aligned} E^i(x, y) &= \frac{1}{D^i(x, y)} \\ &= \frac{\|x\|}{\|x^*\|} \end{aligned} \quad (4.9)$$

représente une mesure d'efficacité technique en input. Elle correspond à la distance radiale entre x et x^* . Par construction, cette distance est égale 1 lorsque $x \in \text{IsoqL}(y)$.

De même, selon la figure 2, la mesure de Debreu-Farrell en output (4.8) correspond à la proportion λ selon laquelle la quantité produite d'outputs y doit être augmentée radialement pour atteindre la frontière de l'ensemble en outputs. Ainsi, la mesure

$$\begin{aligned} E^o(x, y) &= \frac{1}{D^o(x, y)} \\ &= \frac{\|y^*\|}{\|y\|} \end{aligned} \quad (4.10)$$

caractérise une mesure d'efficacité technique en output. Elle correspond à la distance radiale entre y et y^* . Par construction, cette distance est égale à 1 dès lors que $y \in \text{IsoqP}(x)$.

Lorsque la technologie de production satisfait des rendements d'échelle constants, les fonctions de distance de Shephard en input et en output sont réciproques (figure 3). Dans ce cas, s'il n'existe pas d'infaisabilité, on peut écrire :

$$D^o(x, y) = \frac{1}{D^i(x, y)}$$

Si l'ensemble de production et ses images, en termes de correspondances en inputs et en outputs, satisfont les axiomes T1-T3 et T6-T7 alors, les mesures d'efficacité de Debreu-Farrell en input et en output vérifient plusieurs propriétés (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985). Si la correspondance en intrants satisfait les axiomes L1-L3 et L7-L8 alors, la mesure de Debreu-Farrell en input vérifie les propriétés suivantes :

Eⁱ1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, on a $E^i(x, 0) = 0$.

Eⁱ2 : $\forall (x, y) \in T$, $0 \leq E^i(x, y) \leq \infty$.

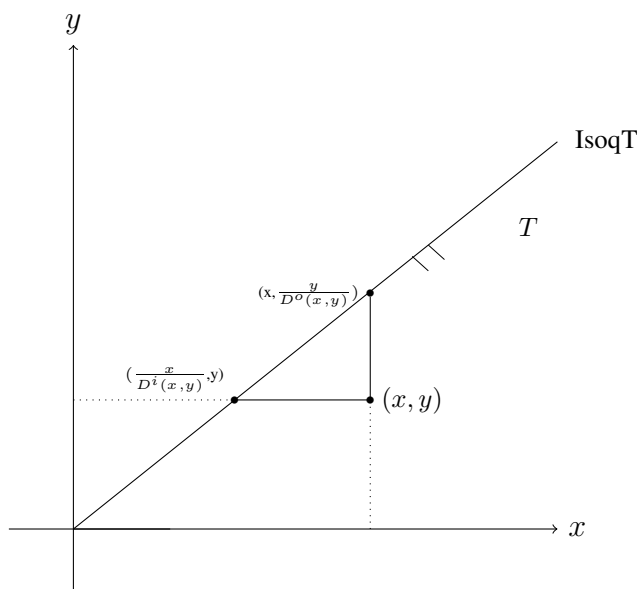


FIGURE 3 – Fonctions de distance Shephard en input et en output

Eⁱ³ : $\forall \theta > 0$, on a $E^i(\theta x, y) = \frac{1}{\theta} E^i(x, y)$.

Eⁱ⁴ : $\forall \gamma \geq 1$, on a $E^i(x, \gamma y) \geq E^i(x, y)$.

Eⁱ⁵ : $\forall y \in \mathbb{R}_+^m$, on a $L(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : 0 \leq E^i(x, y) \leq 1\}$ si et seulement si, les inputs sont faiblement disponibles.

Eⁱ⁶ : $\forall y \in \mathbb{R}_+^m$, on a $\text{IsoqL}(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : E^i(x, y) = 1\}$.

Eⁱ⁷ : $\forall y \in \mathbb{R}_+^m$ et $\forall u, x \in \mathbb{R}_+^n$ avec $u \geq x \geq 0$, on a $E^i(x, y) \geq E^i(u, y)$.

La première propriété, **Eⁱ¹**, précise que la mesure de Debreu-Farrell en input est nulle lorsque les outputs sont nuls. En effet, d'après la condition d'inactivité (axiome L2), il est toujours possible de ne produire aucun output à partir d'intrants positifs ou nuls. Quel que soit le plan de production appartenant à l'ensemble productif, la deuxième propriété stipule que la mesure de Debreu-Farrell en input appartient à l'intervalle $[0, \infty)$. Cette propriété indique le domaine de définition de cette mesure en input. La troisième hypothèse signifie que si l'on augmente (réduit) proportionnellement la quantité d'intrants alors, la mesure de Debreu-Farrell en input décroît (augmente) dans la même proportion. En effet, la mesure de Debreu-Farrell en input correspond à une mesure d'efficacité technique radiale. Dans ces conditions, elle est homogène de degré -1. Le quatrième axiome signale qu'elle est non décroissante en outputs. Sous l'hypothèse de disponibilité faible des intrants, la cinquième propriété caractérise la technologie de production à partir de la mesure de Debreu-

Farrell. Cette dernière est égale à 1 lorsque la quantité d'intrant utilisée appartient à l'isoquant en input. Ainsi, la sixième hypothèse présente une caractérisation de IsoqL(y) à partir de la mesure de Debreu-Farrell en input. La dernière propriété (**E¹⁷**) est relative à la monotonicité faible de la mesure en input. Elle est à mettre en relation avec l'axiome de libre disposition.

Selon un raisonnement symétrique, lorsque l'ensemble en outputs satisfait les axiomes P1-P3 et P7-P8, la mesure de Debreu-Farrell en output satisfait les propriétés suivantes :

E⁰¹ : $\forall y \in \mathbb{R}_+^m$, on a $E^o(0, y) = \infty$.

E⁰² : $\forall (x, y) \in T$, si $y \neq 0$ alors, $0 \leq E^o(x, y) \leq \infty$.

E⁰³ : $\forall \gamma > 0$ et $\forall (x, y) \in T$, si $y \neq 0$ alors, $E^o(x, \gamma y) = \frac{1}{\gamma} E^o(x, y)$.

E⁰⁴ : $\forall \theta \geq 1$, on a $E^o(\theta x, y) \geq E^o(x, y)$.

E⁰⁵ : $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, on a $P(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^m : E^o(x, y) \geq 1\}$, $P(x) \neq \{0\}$, si et seulement si les outputs sont faiblement disponibles.

E⁰⁶ : $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, on a $\text{IsoqP}(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^m : E^o(x, y) = 1\}$.

E⁰⁷ : $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall v, y \in \mathbb{R}_+^m$ avec $v \geq y \geq 0$, on a $E^o(x, v) \leq E^o(x, y)$.

La première propriété stipule que la mesure de Debreu-Farrell est égale à l'infini lorsque les inputs sont nuls. En effet, d'après l'axiome P1, il n'est pas possible de produire une quantité positive d'extrait à partir d'inputs nuls. La deuxième hypothèse précise le domaine de définition de la mesure de Debreu-Farrell en output. Elle est une mesure d'efficacité technique radiale, ce qui permet d'établir le troisième axiome. La mesure de Debreu-Farrell en output est non décroissante en inputs selon la quatrième propriété. La cinquième propriété caractérise l'ensemble de production à partir de la mesure de Debreu-Farrell en output lorsque les extrants sont faiblement disponibles. La mesure d'efficacité technique en output est égale à 1 lorsque l'unité de production est techniquement efficiente. Dans ce cas, elle appartient à la frontière de l'ensemble en outputs. Ainsi, la sixième propriété caractérise l'isoquant en output à partir de la mesure de Debreu-Farrell en output. Enfin, la dernière hypothèse traduit la monotonicité faible de la mesure. Elle est à mettre en relation avec l'hypothèse de libre disposition.

2.2 Extension de la mesure de Shephard

La fonction de distance hyperbolique (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985), contrairement à la mesure de Debreu-Farrell, se définit exclusivement dans le graphe de l'ensemble de production. Elle mesure une variation simultanée et equi-proportionnelle des intrants et des extrants afin d'atteindre la frontière de la technologie de production. Ainsi, elle met simultanément en lumière la réduction et l'augmentation equi-proportionnelle des intrants et des extrants qui permet d'atteindre l'isoquant de l'ensemble de production (figure 4). En ce sens, elle constitue une extension de la mesure de Debreu-Farrell dans le graphe de la technologie de production. Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes T1-T3 et T6-T7, la mesure hyperbolique, $H : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, se définit comme suit :

$$H(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x, \frac{y}{\lambda} \right) \in T \right\} & \text{si } \left(\lambda x, \frac{y}{\lambda} \right) \in T, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.11)$$

S'il n'existe pas de $\lambda > 0$ tel que $\left(\lambda x, \frac{y}{\lambda} \right) \in T$ alors, la mesure hyperbolique est supposée égale à plus l'infini. Cette formulation met en lumière d'éventuelle infaisabilité.

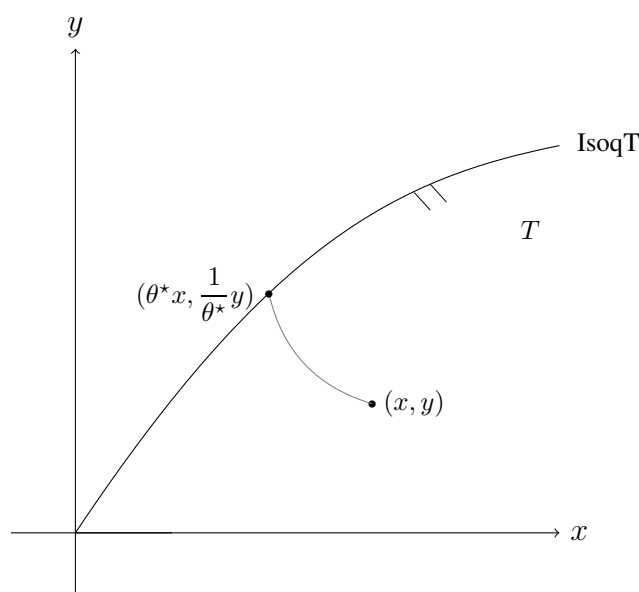


FIGURE 4 – Fonction de distance hyperbolique

La fonction de distance hyperbolique est supposée satisfaire les propriétés suivantes :

H1 : $H(0, 0) = 0$.

H2 : $\forall \alpha > 0$, on a $H(\alpha x, \frac{1}{\alpha} y) = \frac{1}{\alpha} H(x, y)$.

H3 : $\forall \theta \geq 1$, on a $H(\theta x, y) \leq H(x, y)$.

H4 : $\forall \gamma \in [0, 1]$, on a $H(x, \gamma y) \leq H(x, y)$.

H5 : $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : 0 \leq H(x, y) \leq 1\}$ si et seulement si, les inetrants et les outputs sont faiblement disponibles.

H6 : IsoqT = $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : H(x, y) = 1\}$.

H7 : $\forall x, u \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall v, y \in \mathbb{R}_+^m$ avec $(u, -v) \geq (x, -y)$, on a $H(x, y) \geq H(u, v)$.

Selon la première propriété, la frontière de l'ensemble de production passe par l'origine. Lorsque les intrants sont nuls, les outputs seront toujours nuls (T1 et T2). D'après l'hypothèse H2, la fonction de distance hyperbolique est homogène de degrés -1 en input et homogène de degrés 1 en output. Suivant les axiomes trois et quatre, la fonction de distance hyperbolique est non croissante en inputs et non décroissante en outputs. La propriété 5 caractérise l'ensemble de production sous l'hypothèse de disponibilité faible des inputs et des outputs. L'hypothèse 6 présente l'isoquant de la technologie de production à partir de la fonction de distance hyperbolique. Enfin, la dernière propriété est à mettre en relation avec la libre disposition des intrants et des extrants.

D'après Färe, Grosskopf et Lovell (1985), lorsque la technologie de production présente des rendements d'échelle constants, il est possible d'établir la relation suivante entre la fonction de distance hyperbolique et les mesures de Debreu-Farrell en input et en output :

$$H(x, y) = \sqrt{E^i(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{E^o(x, y)}} \quad (4.12)$$

2.3 Théorie de la dualité

Lorsque les correspondances (L et P) de la technologie de production satisfont les propriétés L1-L6 et P1-P6 alors, la fonction de coût et la fonction de distance de Shephard en input sont duales (Shephard, 1953, 1970 ; Mc Fadden, 1978). De même, la fonction de revenu et la fonction de distance de Shephard en output sont duales (Shephard, 1953, 1970 ; Jacobsen, 1970 ; Mac Fadden, 1978). Deux hypothèses jouent un rôle déterminant dans la mise évidence de ces résultats de dualité. Il s'agit de la propriété de convexité et de celle de disponibilité forte.

La fonction de coût permet de mettre à jour le coût minimal de production pour un vecteur d'outputs $y \in \mathbb{R}_+^m$ et un vecteur de prix $w \in \mathbb{R}_+^n$ associé aux intrants. Formellement, la fonction de coût, $C : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, se définit comme suit :

$$C(w, y) = \begin{cases} \inf_x \{wx : x \in L(y)\} & \text{si } L(y) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Si la fonction de coût est définie par (4.13), que les intrants sont librement disponibles dans la correspondance en inputs $L(y)$, que celle-ci est fermée et satisfait l'axiome de convexité alors, l'ensemble en inputs peut être caractérisé à partir de la fonction de coût. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} L(y) &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : wx \geq C(w, y), w \in \mathbb{R}_+^n\} \\ &= \bigcap_{w \in \mathbb{R}_+^n} \{x \in \mathbb{R}_+^n : wx \geq C(w, y)\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dans le résultat précédent, la correspondance en inputs, $L(y)$, est enveloppée par des fonctions de coût $C(w, y)$, avec $w \in \mathbb{R}_+^n$. La deuxième égalité fait référence au théorème de séparation des convexes. Elle précise que l'ensemble en inputs (ensemble convexe) correspond à l'intersection de tous les hyperplans supports (fonctions de coût, avec $w \in \mathbb{R}_+^n$) qui contiennent cet ensemble. Une illustration de ce résultat est proposée dans Färe et Primont (1995).

Réciproquement, si la correspondance en inputs est définie par (4.14) alors, la fonction de coût correspond à (4.13). A partir de ces résultats il est possible d'établir une relation de dualité entre la fonction de coût et la fonction de distance de Shepard en input. Cette démarche se distingue de celle proposée précédemment. En effet, dans la sous-section précédente nous avons mis en lumière des relations entre la fonction de distance de Shepard en input et l'ensemble en inputs. La proposition (4.1) présente la relation de dualité entre la fonction de distance de Shepard en input et la fonction de coût.

Proposition 4.1 *Soit L une correspondance en inputs satisfaisant les axiomes L1 – L6. Dans ce cas, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$,

$$D^i(x, y) = \inf_{w \geq 0} \{wx : C(w, y) = 1\}. \quad (4.15)$$

(ii) Soit $w \in \mathbb{R}_+^n$ un vecteur prix non négatif associé aux inputs,

$$C(w, y) = \inf_x \{wx : D^i(x, y) = 1\}. \quad (4.16)$$

Preuve de la Proposition 4.1 :

Les preuves des propriétés (i) et (ii) peuvent être déduites à partir des travaux de Färe et Primont (1995). \square

D'après le résultat (4.16), aux points où la fonction de coût est différentiable alors, en se référant au théorème de l'enveloppe, il vient :

$$\nabla_w C(w, y) = x(w, y), \quad (4.17)$$

avec $x(w, y) = \arg \min_x \{wx : D^i(x, y) = 1\}$. Le résultat (4.17) correspond au lemme de Shephard. Les n équations présentes dans (4.17) stipulent que les fonctions de demande conditionnelle en inputs sont égales aux différentielles de la fonction de coût par rapport aux prix w_i , avec $i = 1, \dots, n$.

D'après le résultat (4.15), aux points où la fonction de distance de Shepard en input est différentiable alors, en appliquant le théorème de l'enveloppe on obtient :

$$\nabla_x D^i(x, y) = w(x, y), \quad (4.18)$$

avec $w(x, y) = \arg \min_w \{wx : C(w, y) = 1\}$. Le résultat (4.18) correspond au lemme dual de Shephard. Les m équations présentes dans (4.18) indiquent que les prix implicites des intrants sont égaux aux différentielles de la fonction de distance de Shepard en input par rapport aux inputs x_i , avec $i = 1, \dots, n$. Notons que ces prix ne correspondent pas à des prix du marché. Ils ne sont pas déterminés par la confrontation de l'offre et de la demande sur un marché mais, par la dualité entre la fonction de distance de Shepard en input et la fonction de coût. En ce sens, ils présentent un intérêt particulier en présence d'effets externes.

Selon un raisonnement analogue, il est possible d'obtenir des résultats similaires pour la fonc-

tion de distance de Shephard en output. Pour ce faire, introduisons la fonction de revenu, R :

$$\mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup -\infty,$$

$$R(p, x) = \begin{cases} \sup_y \{py : y \in P(x)\} & \text{si } P(x) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Si la fonction de revenu est définie par (4.19), que les outputs sont librement disponibles dans l'ensemble en outputs, que celui-ci est un compact et satisfait l'axiome de convexité alors, la correspondance en outputs peut être déterminée à partir de la fonction de revenu. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= \{y \in \mathbb{R}_+^m : py \leq R(p, x), p \in \mathbb{R}_+^m\} \\ &= \bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^m} \{y \in \mathbb{R}_+^m : py \leq R(p, x)\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La proposition 4.2 présente la relation de dualité entre la fonction de distance de Shephard en output et la fonction de revenu.

Proposition 4.2 *Soit P une correspondance en outputs satisfaisant les axiomes P1 – P6. Dans ce cas, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$,

$$D^o(x, y) = \sup_{p \geq 0} \{py : R(p, x) = 1\}. \quad (4.21)$$

(ii) Soit $p \in \mathbb{R}_+^m$ un vecteur prix non négatif associé aux outputs,

$$R(p, x) = \sup_y \{py : D^o(x, y) = 1\}. \quad (4.22)$$

Preuve de la Proposition 4.2 :

En se référant aux travaux de Färe et Primont (1995), les preuves des propriétés (i) et (ii) sont immédiates. \square

D'après le résultat (4.22), aux points où la fonction de revenu est différentiable alors, en appliquant le théorème de l'enveloppe :

$$\nabla_p R(p, x) = y(p, x), \quad (4.23)$$

avec $y(p, x) = \arg \min_y \{py : D^o(x, y) = 1\}$. Le résultat (4.23) correspond à la version en output du lemme de Shephard.

D'après le résultat (4.21), aux points où la fonction de distance de Shepard en output est différentiable alors, en se référant au théorème de l'enveloppe :

$$\nabla_y D^o(x, y) = p(x, y), \quad (4.24)$$

avec $p(x, y) = \arg \min_p \{py : R(p, x) = 1\}$. Le résultat (4.24) correspond au lemme dual de Shephard en output.

3 La Fonction de Distance Directionnelle

Les premières mesures non radiales sont apparues à la suite des travaux de Färe et Lovell (1978) et de Färe, Grosskopf et Lovell (1985). Plus récemment, Luenberger (1992, 1995, 1996) a proposé une représentation directionnelle des préférences à travers la définition de la fonction de bénéfice². Chambers, Chung et Färe (1996, 1998), en exploitant les liens étroits existant entre la fonction de bénéfice et la fonction de distance de Shephard, ont introduit la fonction de distance directionnelle³ en théorie de la production.

3.1 Définition et propriétés

La fonction de distance directionnelle dans le graphe de l'ensemble de production permet d'identifier une variation simultanée des intrants et des extrants vers la frontière de cet ensemble,

2. Les travaux de Luenberger s'inscrivent dans les pas des théories de Dupuit (1848) et Allais (1989), fondées sur la notion de surplus.

3. Dans le même temps, Briec (1997) a proposé une fonction de distance proportionnelle. Cette dernière présente une définition qui est étroitement liée à celle de la fonction de distance directionnelle. Nous étudierons les liens entre ces deux mesures dans les prochaines sous-sections.

selon une direction préalablement fixée. En ce sens, cette mesure d'efficacité technique constitue une mesure non radiale. Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes T1-T3 et T5⁴, la fonction de distance directionnelle dans le graphe de la technologie de production, $\vec{D} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, se définit comme suit :

$$\vec{D}(x, y; h, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y + \beta k) \in T \} & \text{si } (x - \beta h, y + \beta k) \in T, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.25)$$

Dans l'équation (4.25), le vecteur $(h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ détermine la direction dans laquelle la fonction de distance directionnelle est définie. Ainsi, cette fonction permet simultanément de réduire les inputs et d'accroître les outputs jusqu'à atteindre la frontière de l'ensemble de production. Notons que s'il n'existe pas de nombre réel β , tel que $(x - \beta h, y + \beta k) \in T$ alors, par construction $\vec{D}(x, y; h, k) = -\infty$. Cette formulation met en lumière d'éventuelles infaisabilités.

Avant de présenter les propriétés élémentaires de la fonction de distance directionnelle, intéressons nous à la figure 5. Cette dernière offre une représentation géométrique de la fonction de distance directionnelle lorsque le vecteur directionnel g est défini par : $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$. Dans cette description, l'unité de production (x, y) est projetée dans la direction (h, k) jusqu'à atteindre la frontière de la technologie de production : $(x - \beta^* h, y + \beta^* k)$. Ainsi, le nombre réel β^* représente la contraction optimale des intrants et l'expansion optimale des extrants. Il permet d'atteindre l'isoquant de l'ensemble de production selon la direction (h, k) .

La fonction de distance directionnelle vérifie les propriétés suivantes (Chambers, Chung et Färe, 1998) :

D1 : $\vec{D}(x - \gamma h, y + \gamma k; h, k) = \vec{D}(x, y; h, k) - \gamma, \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

D2 : $\vec{D}(x, y; \alpha h, \alpha k) = \frac{1}{\alpha} \vec{D}(x, y; h, k), \forall \alpha > 0$.

D3 : Soit $(h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $(h, k) \neq 0$ alors, $\vec{D}(x, y; h, k) \geq 0$ si et seulement si, $(x, y) \in T$.

D4 : $\forall x, u \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall v, y \in \mathbb{R}_+^m$ si $(u, -v) \geq (x, -y)$ alors, $\vec{D}(u, v; h, k) \geq \vec{D}(x, y; h, k)$.

4. L'hypothèse de convexité de l'ensemble de production T4 n'est pas nécessaire pour définir la fonction de distance directionnelle. Cet axiome sera intégré dans la sous-section concernant la dualité.

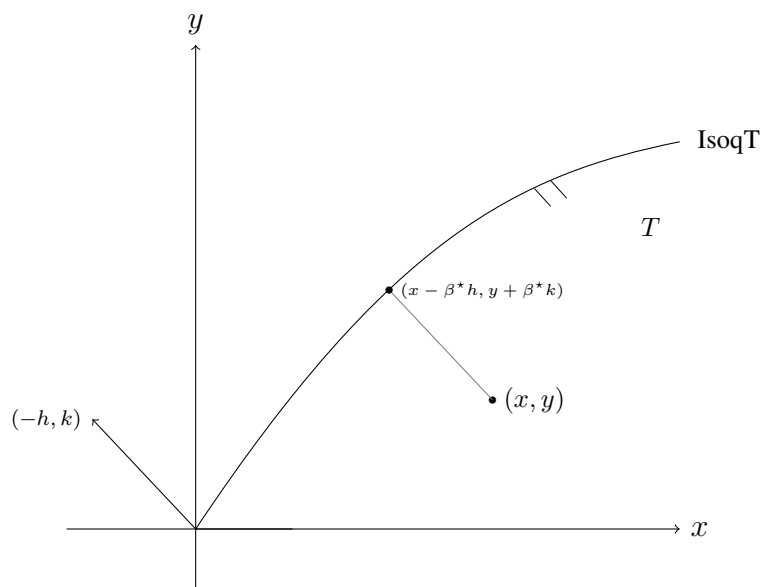


FIGURE 5 – Fonction de distance directionnelle

$\vec{D}5$: En présence de rendements d'échelle constants, $\vec{D}(\alpha x, \alpha y; h, k) = \alpha \vec{D}(x, y; h, k), \forall \alpha > 0$.

D'après la première propriété, lorsque l'unité de production (x, y) se modifie et devient $(x - \gamma h, y + \gamma k)$ alors, la fonction de distance directionnelle diminue de α . Contrairement à la fonction de distance de Shephard qui présente une structure multiplicative, la fonction de distance directionnelle possède une structure additive. La deuxième hypothèse signifie que la fonction de distance directionnelle est homogène de degré -1 relativement au vecteur directionnel $g = (h, k)$. D'après la troisième axiome, la fonction de distance directionnelle permet de caractériser la technologie de production. La quatrième propriété précise que la fonction de distance directionnelle est non décroissante en input et non croissante en output. La dernière propriété est uniquement vérifiée lorsque les rendements d'échelle sont constants. Dans ces conditions, elle précise que la fonction de distance directionnelle est homogène de degré 1 relativement au vecteur inputs-outputs. En ce sens, Chambers (2002) propose la propriété de translation homothéticité dans le graphe de la technologie de production.

La prise en compte de conditions particulières dans la définition du vecteur directionnel g permet de considérer une version orientée en input et une spécification orientée en output de la fonction de distance directionnelle. Si l'on prend $k = 0$ alors, la fonction de distance directionnelle s'établit dans la direction $g = (h, 0) \in \mathbb{R}_+^n \times 0$. Dans ce cas, on obtient une fonction de distance

directionnelle orientée en input, $\vec{D}^i : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^n \times 0 \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, définie par (Chambers, Chung et Färe, 1996) :

$$\vec{D}^i(x, y; h, 0) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{\beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y) \in T\} & \text{si } (x - \beta h, y) \in T, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.26)$$

Réciproquement, si l'on pose $h = 0$ alors, la fonction de distance directionnelle s'établit dans la direction $g = (0, k) \in 0 \times \mathbb{R}_+^m$. Dans ce cas, on obtient une fonction de distance directionnelle orientée en output, $\vec{D}^o : \mathbb{R}_+^{n+m} \times 0 \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, représentée par :

$$\vec{D}^o(x, y; 0, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{\beta \in \mathbb{R} : (x, y + \beta k) \in T\} & \text{si } (x, y + \beta k) \in T, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.27)$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\vec{D}^i(x, y; h, 0) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{\beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h) \in L(y)\} & \text{si } (x - \beta h) \in L(y), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.28)$$

et

$$\vec{D}^o(x, y; 0, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{\beta \in \mathbb{R} : (y + \beta k) \in P(x)\} & \text{si } (y + \beta k) \in P(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.29)$$

La fonction de distance directionnelle orientée en input consiste, pour une quantité donnée

d'outputs, à projeter un vecteur d'inputs selon un vecteur directionnel préalablement établi, $g = (h, 0)$ avec $h \in \mathbb{R}_+^n$, en direction de l'isoquant de la technologie de production ou de son image en terme de correspondance en inputs. Ainsi, $\vec{D}^i(x, y; h, 0) \geq 0$ implique que $x \in L(y)$. Inversement, la fonction de distance directionnelle orientée en output consiste, pour une quantité donnée d'input, à projeter un vecteur d'outputs selon un vecteur directionnel préalablement fixé, $g = (0, k)$ avec $k \in \mathbb{R}_+^m$, en direction de la frontière de la technologie de production ou de son image en terme de correspondance en outputs. Ainsi, $\vec{D}^o(x, y; 0, k) \geq 0$ implique que $y \in P(x)$. Dans le premier cas, l'altération de l'unité de production en direction de la frontière de production s'effectue uniquement par une modification des inputs alors que dans la deuxième spécification, elle se réalise uniquement selon une variation des outputs. Les figures 6 et 7 offrent une représentation géométrique des fonctions de distance directionnelle orientées en input et en output.

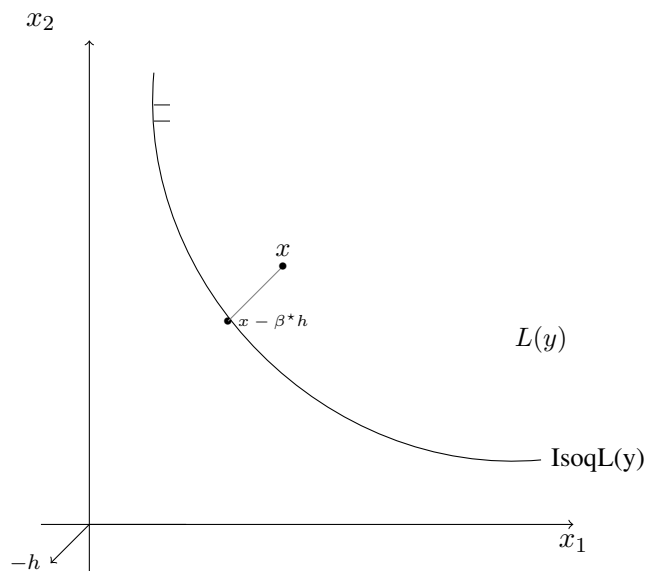


FIGURE 6 – Fonction de distance directionnelle orientée en input

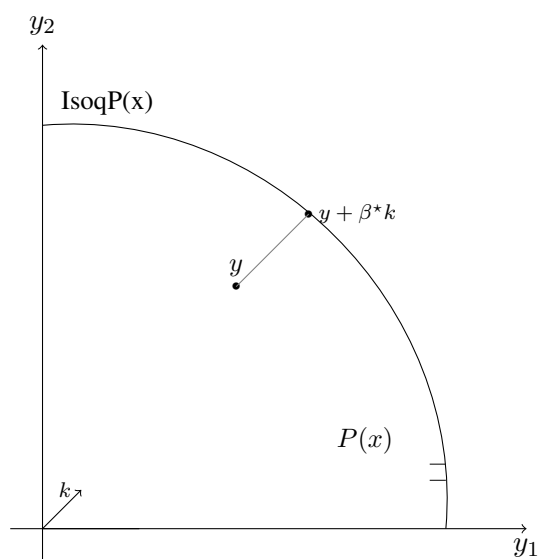


FIGURE 7 – Fonction de distance directionnelle orientée en output

Lorsque la technologie de production satisfait l'hypothèse de translation homothéticité dans le graphe pour la direction $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ alors, il est possible d'établir les relations suivantes entre la fonction de distance directionnelle et ses spécifications orientées en input et en output (Chambers, 2002) :

$$\vec{D}(x, y; h, k) = \frac{1}{2} \vec{D}^i(x, y; h, 0) = \frac{1}{2} \vec{D}^o(x, y; 0, k).$$

3.2 Équivalence avec les mesures radiales

La fonction de distance directionnelle (4.25), retient une définition générale du vecteur directionnel : $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$. Lorsque l'on considère $h = x \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = y \in \mathbb{R}_+^m$, on obtient une spécification particulière de la fonction de distance directionnelle qui correspond à la fonction de distance proportionnelle au sens de Farrell (Briec, 1997). Cette dernière, $\vec{D}^F : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, se présente comme suit :

$$\vec{D}^F(x, y) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : ((1 - \beta)x, (1 + \beta)y) \in T \} & \text{si } ((1 - \beta)x, (1 + \beta)y) \in T, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Immédiatement, nous pouvons remarquer que lorsque $g = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ alors, $\vec{D}^F(x, y) = \vec{D}(x, y; x, y)$. La fonction de distance proportionnelle met en lumière la variation proportionnelle simultanée des intrants et des extrants qui permet d'atteindre la frontière de la technologie de production. En ce sens, elle permet de généraliser la mesure d'efficacité de Debreu-Farell.

La fonction de distance proportionnelle au sens de Farrell orientée en input, $\vec{D}^i : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, se définit comme suit :

$$\vec{D}^i(x, y) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (1 - \beta)x \in L(y) \} = 1 - E^i(x, y) & \text{si } (1 - \beta)x \in L(y), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.31)$$

Notons que lorsque $g = (x, 0) \in \mathbb{R}_+^n \times 0$ alors, $\vec{D}^i(x, y) = \vec{D}^i(x, y; x, 0)$. La dernière partie de la première égalité met en lumière la relation entre la fonction de distance proportionnelle orientée en input, ou de façon équivalente la fonction de distance directionnelle dans la direction $g = (x, 0)$, et la mesure d'efficacité de Debreu-Farell en input.

Selon un raisonnement symétrique, l'orientation en output de la fonction de distance proportionnelle au sens de Farrell, $\vec{D}^o : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, peut être définie comme suit :

$$\vec{D}^o(x, y) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{\beta \in \mathbb{R} : (1 + \beta)y \in P(x)\} = E^o(x, y) - 1 & \text{si } (1 + \beta)y \in P(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.32)$$

Remarquons que lorsque $g = (0, y) \in 0 \times \mathbb{R}_+^m$ alors, $\vec{D}^o(x, y) = \vec{D}^o(x, y; 0, y)$. La dernière partie de la première égalité met en lumière la relation entre la fonction de distance proportionnelle orientée en output, ou de façon équivalente la fonction de distance directionnelle dans la direction $g = (0, y)$, et la mesure d'efficacité de Debreu-Farrell en output.

3.3 Principe de la dualité

Chambers, Chung et Färe (1996, 1998) ont transposés en économie de la production les résultats de dualité proposés par Luenberger (1992) en théorie du consommateur. Luenberger (1992) a présenté des résultats de dualité entre la fonction de dépense et la fonction de bénéfice. Plus tard, Chambers, Chung et Färe (1998) montrent que la fonction de distance directionnelle dans la direction $g = (h, k)$ et la fonction de profit sont duales. Soit un vecteur prix inputs-outputs $(w, p) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, la fonction de profit, $\Pi : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$, se définit comme suit :

$$\Pi(w, p) = \begin{cases} \sup_{(x,y)} \{py - wx : (x, y) \in T\} & \text{si } T \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.33)$$

Si les intrants et les extrants sont librement disponibles au sein de la technologie de production et, que cette dernière satisfait l'axiome de convexité alors, il est possible de caractériser la technologie de production à partir de la fonction de profit :

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : py - wx \geq \Pi(w, p), (w, p) \in \mathbb{R}_+^{n+m}\} \\ &= \bigcap_{(w,p) \in \mathbb{R}_+^{n+m}} \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : py - wx \geq \Pi(w, p)\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La deuxième égalité dans (4.34) permet de caractériser la technologie de production comme une intersection. Elle suit la même logique que les résultats proposés dans les équations (4.14) et (4.20). Ce résultat permet d'établir la dualité entre la fonction de distance directionnelle et la fonction de profit.

Chambers, Chung et Färe (1998) démontrent les résultats suivants⁵ :

$$\Pi(w, p) = \sup_{(x, y)} \left\{ py - wx + \vec{D}(x, y; h, k)(pk + wh) \right\} \quad (4.35)$$

et

$$\vec{D}(x, y; h, k) = \inf_{(w, p) \geq 0} \left\{ \Pi(w, p) - (py - wx) : pk + wh = 1 \right\}. \quad (4.36)$$

Le premier résultat (4.35) définit la fonction de profit à partir de la fonction de distance directionnelle. Le second (4.36) montre comment la fonction de distance directionnelle peut être définie à partir de la fonction de profit. Ces résultats établissent la dualité entre la fonction de distance directionnelle et la fonction de profit.

La fonction de distance directionnelle en input (en output) et la fonction de coût (de revenu) présente également une relation duale. Chambers Chung et Färe (1996) montrent que la fonction de coût et la fonction de distance directionnelle en input sont duales. Plus précisément, ces auteurs démontrent que :

$$C(w, y) = \inf_x \left\{ wx - \vec{D}^i(x, y; h, 0)(wh) \right\} \quad (4.37)$$

et

$$\vec{D}^i(x, y; h, 0) = \inf_{w \geq 0} \left\{ wx - C(w, y) : wh = 1 \right\}. \quad (4.38)$$

Le premier résultat (4.37) définit la fonction de coût à partir de la fonction de distance directionnelle en input. Le second (4.38) montre comment la fonction de distance directionnelle en input peut être définie à partir de la fonction de coût.

Des résultats similaires peuvent être proposés pour la fonction de distance directionnelle en output et la fonction de revenu. Dans ce cas, nous avons :

5. Les conditions de normalisation retenues dans les équations (4.36), (4.38) et (4.40) ne sont pas exactement identiques à celles présentées dans Chambers, Chung et Färe (1998). Dans ces travaux, nous retenons la formulation proposée par Luenberger (1996).

$$R(p, x) = \sup_y \left\{ py + \vec{D}^o(x, y; 0, k)(pk) \right\} \quad (4.39)$$

et

$$\vec{D}^o(x, y; 0, k) = \inf_{p \geq 0} \{ R(p, x) - py : pk = 1 \}. \quad (4.40)$$

En se référant au théorème de l'enveloppe nous pouvons obtenir l'expression des prix implicites en inputs et en outputs grâce aux mesures de distance duales (4.36) (Luenberger, 1996).

$$\nabla_x \vec{D}(x, y; h, k) = w(x, y; h, k), \quad (4.41)$$

et

$$-\nabla_y \vec{D}(x, y; h, k) = p(x, y; h, k), \quad (4.42)$$

Si la fonction de distance directionnelle est orientée en input ou en output, ces résultats restent valides. Dans ce cas, nous avons :

$$\nabla_x \vec{D}(x, y; h, 0) = w(x, y; h, 0), \quad (4.43)$$

et

$$-\nabla_y \vec{D}(x, y; 0, k) = p(x, y; 0, k), \quad (4.44)$$

La fonction de distance directionnelle conduit à la définition d'une fonction de demande inverse en input, qui assigne un vecteur prix à chaque intrant x . Elle conduit également à la définition d'une fonction d'offre inverse en output, qui affecte un vecteur prix à chaque extrant y . Ces fonctions sont respectivement connues comme la fonction de prix ajusté en input et la fonction de prix ajusté en output. D'après Luenberger (1996), la fonction de prix ajusté en input, $w : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$, se caractérise comme suit :

$$w(x, y; h) = \arg \min_{w \geq 0} \{ wx - C(w, y) : wh = 1 \}. \quad (4.45)$$

De même, la fonction de prix ajustés en output, $p : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^m \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$, se définit comme suit :

$$p(x, y; k) = \arg \min_{p \geq 0} \{R(p, x) - py : pk = 1\}. \quad (4.46)$$

Les fonctions de prix ajustés (4.45) et (4.46) déterminent l'ensemble des prix implicites (shadow prices dans la terminologie anglo-saxonne) qui réalisent le programme dual de la fonction de distance directionnelle. Lorsque les prix du marché correspondent aux prix implicites alors, les mesures d'efficacité technique et économiques sont identiques.

4 Les Fonctions de Distance : Spécification Non Paramétrique

Dans la première partie de ces travaux, nous avons proposé une procédure de modélisation de la technologie de production suivant une spécification non-paramétrique (méthode DEA). Dans ce cadre d'analyse, nous proposons une estimation non-paramétrique des fonctions distances présentées dans les sections précédentes. Pour ce faire, nous notons $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$, l'ensemble des unités de production observées sur un secteur de l'économie.

4.1 Les mesures multiplicatives

Les mesures de Debreu-Farrell (en input (4.47) et en output(4.48)) peuvent être déterminées à travers la résolution des programmes linéaires suivants.

$$\begin{array}{ll}
 E^{i,DEA}(x_0, y_0) = \min \lambda & E^{o,DEA}(x_0, y_0) = \max \lambda \\
 \text{s.c. :} & \text{s.c. :} \\
 \lambda x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n & x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m & \lambda y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \mu \in \Gamma & \mu \in \Gamma
 \end{array} \quad (4.47) \qquad (4.48)$$

Les modèles de programmation linéaire (4.47) et (4.48), mettent respectivement en lumière la mesure d'efficacité technique de Debreu-Farrell en input et en output pour l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. Bien entendu, selon la caractérisation de l'ensemble Γ , différentes hypothèses concernant la nature des rendements d'échelle peuvent être envisagées. Lorsque l'on souhaite relâcher l'hy-

pothèse de convexité de l'ensemble de production alors, la dernière contrainte des programmes (4.47) et (4.48) doit être remplacée par $\mu \in \Gamma_{FDH}$. Connaissant les valeurs de $E^{i,DEA}(x_0, y_0)$ et $E^{o,DEA}(x_0, y_0)$, nous pouvons immédiatement déterminer celles des fonctions de distance de Shephard en input et en output :

$$D^{i,DEA}(x_0, y_0) = \frac{1}{E^{i,DEA}(x_0, y_0)} \quad (4.49)$$

et

$$D^{o,DEA}(x_0, y_0) = \frac{1}{E^{o,DEA}(x_0, y_0)}. \quad (4.50)$$

Les programmes duaux de la fonction de distance de Shephard en input (4.15) et de sa version orientée en output (4.21) sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} D^{i,DEA}(x_0, y_0) = \min \lambda \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i=1}^n w_i x_{0,i} \geq \lambda \\ \sum_{i=1}^n w_i x_{z,i} = 1, \quad z \in \mathcal{Z} \\ w \geq 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} D^{o,DEA}(x_0, y_0) = \max \lambda \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{j=1}^m p_j y_{0,j} \leq \lambda \\ \sum_{j=1}^m p_j y_{z,j} = 1, \quad z \in \mathcal{Z} \\ p \geq 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

La fonction de distance hyperbolique de l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ peut être déterminée à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned} H^{DEA}(x_0, y_0) = \min \lambda \\ \text{s.c. :} \\ \lambda x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{1}{\lambda} y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\ \mu \in \Gamma \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le programme (4.53) permet de calculer la fonction de distance hyperbolique pour l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. A l'inverse des programmes précédents, celui-ci n'est pas linéaire. Néanmoins, il peut aisément être transformé en un programme linéaire (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985). Selon la spécification de l'ensemble Γ , différents types de rendements d'échelle peuvent être considérés. Lorsque $\Gamma = \Gamma_{crs}$, la fonction de distance hyperbolique non paramétrique de l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ peut être calculée à partir des mesures de Debreu-Farrell en input ou en output comme suit :

$$H^{DEA}(x_0, y_0) = \sqrt{E^{i,DEA}(x_0, y_0)} = \frac{1}{\sqrt{E^{o,DEA}(x_0, y_0)}}. \quad (4.54)$$

Remarque 4.3 Dans les programmes précédents, il est supposé que $(x_0, y_0) \in \mathcal{T}$. Notons que si cette condition n'est pas respectée alors, la fonction de distance de Shephard en output peut être strictement supérieure à 1 et la fonction de distance de Shephard en input, strictement inférieure à 1. Ce cas de figure se rencontre notamment dans les modèles de super-efficiency (Abad et Kongmanwatana, 2015).

4.2 Les mesures additives

La fonction de distance directionnelle de l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ peut être déterminée à travers la résolution du programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \vec{D}(x, y; h, k) = \max \quad & \beta \\ \text{s.c. :} \quad & \\ & x_{0,i} - \beta h \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\ & y_{0,j} + \beta k \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\ & \mu \in \Gamma \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dans le programme (4.55), la fonction de distance directionnelle de l'observation (x_0, y_0) est établie dans la direction $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$. Selon la spécification de l'ensemble Γ , plusieurs

hypothèses concernant la nature des rendements d'échelle peuvent être envisagées. Lorsque l'on souhaite relâcher l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production alors, la dernière contrainte du programme (4.55) doit être remplacée par $\mu \in \Gamma_{FDH}$. Le programme dual de la fonction de distance directionnelle dans la direction $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ (4.36) est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{D}^{DEA}(x_0, y_0; h, k) = \min \lambda \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{j=1}^m p_j y_{z,j} - \sum_{i=1}^n w_i x_{z,i} - \left(\sum_{j=1}^m p_j y_{0,j} - \sum_{i=1}^n w_i x_{0,i} \right) \leq \lambda, \quad z \in \mathcal{Z} \\ pk + wh = 1, \\ w \geq 0, \quad p \geq 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Les versions orientées en input et en output de la fonction de distance directionnelle (4.55) sont respectivement déterminées à travers la résolution des programmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} \vec{D}^{i,DEA}(x_0, y_0; h, 0) = \max \beta \\ \text{s.c. :} \\ x_{0,i} - \beta h \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\ y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\ \mu \in \Gamma \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \vec{D}^{o,DEA}(x_0, y_0; 0, k) = \max \beta \\ \text{s.c. :} \\ x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\ y_{0,j} + \beta k \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\ \mu \in \Gamma \end{aligned} \quad (4.58)$$

Les programmes (4.57) et (4.58), permettent de calculer les fonctions de distance directionnelle de l'observation (x_0, y_0) dans les directions $g = (h, 0) \in \mathbb{R}_+^n \times 0$ (orientation input) et $g = (0, k) \in 0 \times \mathbb{R}_+^m$ (orientation output). Les programmes duaux de la fonction de distance directionnelle en input (4.38) et de sa version orientée en output (4.40) sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \vec{D}^{i,DEA}(x_0, y_0; h, 0) &= \min \lambda \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{i=1}^n w_i x_{0,i} - \sum_{i=1}^n w_i x_{z,i} &\leq \lambda, \quad z \in \mathcal{Z} \\ wh &= 1 \\ w &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}^{o,DEA}(x_0, y_0; 0, k) &= \max \lambda \\ \text{s.c. :} \\ \sum_{j=1}^m p_j y_{z,j} - \sum_{j=1}^m p_j y_{0,j} &\leq \lambda, \quad z \in \mathcal{Z} \\ pk &= 1 \\ p &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

De façon similaire, les fonctions de distance proportionnelle au sens de Farrell dans le graphe de la technologie de production et dans ses images en termes de correspondances (L et P) peuvent être déterminées à travers la résolution des programmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}
 \vec{D}^{F,DEA}(x_0, y_0) &= \max \beta \\
 \text{s.c. :} \\
 x_{0,i}(1 - \beta) &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j}(1 + \beta) &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \mu &\in \Gamma
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{D}^{i,DEA}(x_0, y_0) &= \max \beta \\
 \text{s.c. :} \\
 x_{0,i}(1 - \beta) &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \mu &\in \Gamma
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{D}^{o,DEA}(x_0, y_0) &= \max \beta \\
 \text{s.c. :} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j}(1 + \beta) &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \mu &\in \Gamma
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Notons que la différence entre ces trois programmes et ceux présentés précédemment provient uniquement de la définition du vecteur directionnel. Ici, nous considérons $g = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$, $g = (x_0, 0) \in \mathbb{R}_+^n \times 0$ et $g = (0, y_0) \in 0 \times \mathbb{R}_+^m$.

Remarque 4.4 *Dans les programmes précédents, il est supposé que $(x_0, y_0) \in \mathcal{T}$. Notons que si cette condition n'est pas respectée alors, la fonction de distance directionnelle peut prendre une valeur négative ($\beta < 0$). Ce cas de figure se rencontre notamment dans les modèles de super-efcience (Abad et Kongmanwatana, 2015).*

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons successivement présenté des mesures d'efficacité technique multiplicatives (fonctions de distance de Shephard, de Farrell et hyperbolique) et additives (fonctions de distance directionnelle et proportionnelle au sens de Farrell) dans des ensembles de production vérifiant les hypothèses usuelles. Ces mesures permettent de caractériser la technologie de production et ses images en termes de correspondances productives.

A partir de la définition des fonctions de profit, de revenu et de coût, nous avons pu constater que des relations duales entre ces fonctions et les mesures de distance pouvaient être établies. Ces résultats de dualité permettent de mettre en lumière les fonctions de demande conditionnelle en inputs et les fonctions d'offre conditionnelle en outputs. Par ailleurs, ils déterminent des fonctions de prix ajustés en inputs et en outputs. Ces dernières définissent les prix implicites des intrants et des extrants. Ces prix ne correspondent pas aux prix du marché et, leur détermination revêt un intérêt particulier lorsqu'il s'avère impossible de valoriser les inputs et les outputs sur un marché. Ce cas de figure se rencontre notamment en présence d'effets externes.

Enfin, dans une dernière section, une procédure de spécification non-paramétrique a été introduite afin d'estimer les fonctions de distances présentées dans ce chapitre. Pour ce faire, la méthode par enveloppement des données (DEA) a été utilisée.

Chapitre 5

Fonctions de Distance et Technologie de Production Polluante

1 Introduction

Questionnements : Selon quels schémas apprécier l'efficacité technique dans des ensembles de production B -disponibles ? Suivant ces schémas, peut-on définir des fonctions de distance multiplicatives et additives généralisées ? Quelles sont les principales relations de dualité entre ces fonctions de distance et les fonctions de coût, de revenu et de profit ? Comment spécifier ces mesures de distance ?

Dans la première partie de ces travaux, une nouvelle approche axiomatique visant à définir et caractériser les technologies de production polluante a été introduite. Cette dernière se distingue des approches antérieures, en introduisant une nouvelle hypothèse de disponibilité : la B -disponibilité. Suivant différentes stratégies de partitionnement dans les intrants et les extrants, ce cadre théorique permet de retrouver les principales approches axiomatiques existant dans la littérature économique. Dans ce chapitre, des fonctions de distance additives et multiplicatives vont être définies au sein de ces nouvelles technologies de production polluantes. Ainsi, des mesures d'efficacité technique alternatives seront exposées (Ancev, Azad et Hernandez-Sancho, 2017).

La section suivante est consacrée à l'étude de l'efficacité technique dans des ensembles de production B -disponibles. Ainsi, un cadre d'analyse identifiant plusieurs schémas est exposé. Dans

les sections 3 et 4, des fonctions de distance multiplicatives et additives généralisées sont respectivement introduites. Le terme "généralisées" est utilisé car les mesures de distance présentées se définissent dans l'ensemble des schémas identifiés. La section 5 propose des résultats de dualité. Enfin, la dernière section révèle une procédure de spécification non-paramétrique des fonctions de distance multiplicatives et additives introduites dans ce chapitre.

2 Technologie de Production Polluante et Mesures de l'Effici- ence Technique : Cadre d'Analyse

L'objectif de ce chapitre est de définir des fonctions distance (additives et multiplicatives) dans des technologies de production polluante. Plus précisément, nous considérerons des technologies de production vérifiant l'hypothèse de B -disponibilité afin d'introduire ces mesures d'efficacité technique (radiales et non radiales). Dans la littérature économique, leurs définitions sont établies suivant différentes orientations. Trois schémas distincts peuvent être répertoriés :

S1 Les productions polluantes et non polluantes sont traitées de façon symétrique afin d'atteindre un état techniquement efficace (Färe et Grosskopf, 1983 ; Färe, Grosskopf et Pasurka, 1986). Dans ce cas, $\forall y \in P^J(x)$ les mesures d'efficacité technique en output (radiales et non radiales) se définissent dans le cône $y + \mathbb{R}_+^m$ (voir figure 1)¹.

S2 Les productions polluantes et non polluantes sont traitées de façon asymétrique afin d'atteindre un état techniquement efficace (Färe, Grosskopf et Pasurka, 2001 ; Chung, Färe et Grosskopf, 1997). Dans ce cas, $\forall y \in P^J(x)$ les mesures d'efficacité technique en output (radiales et non radiales) se définissent dans le cône $y + K^B$ (voir figure 1).

S3 Les productions polluantes sont maintenues constantes et les outputs non polluants augmentés afin d'atteindre un état techniquement efficace (Färe, Grosskopf et Pasurka, 2007 ; Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho, 2004 ; Abad, 2015). Ce schéma correspond à l'intersection des schémas S1 et S2. Dans ce cas, $\forall y \in P^J(x)$ les mesures d'efficacité technique en output (radiales et non radiales) sont définies dans $(y + \mathbb{R}_+^m) \cap (y + K^B)$ (voir figure 1).

1. La figure 1 représente une correspondance en extrants associée à une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$. Bien entendu, une illustration similaire peut être proposée pour une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$.

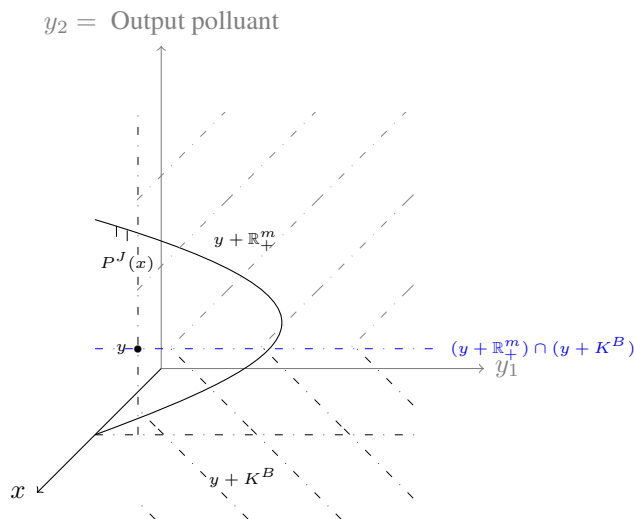


FIGURE 1 – Schémas S1, S2 et S3 dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

Dans les sections suivantes, nous proposons une spécification généralisée des fonctions de distance additives et multiplicatives au sein des technologies de production polluante. Celles-ci permettent de définir des mesures d'efficience technique selon l'ensemble des schémas identifiés précédemment (S1, S2 et S3). L'analyse de l'efficience technique dans des technologies de production polluante selon le schéma S2, a connu un essor considérable depuis les années 1990 (Zhou, Ang et Pho, 2008a). Cette analyse permet d'établir des mesures d'éco-efficacité technique, en réponse aux caractères multidimensionnels des intrants et/ou des extrants.

3 Fonctions de Distance Multiplicatives et Technologie de Production Polluante

Partant d'une technologie de production B -disponible, la définition suivante introduit une spécification généralisée des mesures d'efficacité technique multiplicatives.

Définition 5.1 Soit T^J , une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance multiplicative généralisée, ψ :

$\mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$, se définit comme suit :

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : (\lambda^{\alpha^p} x^p, \lambda^{\alpha^{np}} x^{np}, \lambda^{\beta^p} y^p, \lambda^{\beta^{np}} y^{np}) \in T^J \right\} \\ \text{si } (\lambda^{\alpha^p} x^p, \lambda^{\alpha^{np}} x^{np}, \lambda^{\beta^p} y^p, \lambda^{\beta^{np}} y^{np}) \in T^J, \lambda > 0 \\ \infty \quad \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $\alpha^p = \{0, 1\}$, $\alpha^{np} = \{0, 1\}$, $\beta^p = \{-1, 0, 1\}$ et $\beta^{np} = \{-1, 0, 1\}$.

3.1 Fonctions de distance de Shephard

Les conditions sous lesquelles la fonction de distance généralisée, $\psi(x, y)$, prend la forme d'une fonction de distance de Shephard en output sont présentées dans la proposition suivante (voir Annexe 2).

Proposition 5.2 *Pour toute technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3 avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$ et, quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance de Shephard en output est définie :*

- Selon le schéma S_1 : $\psi_{PJ}|_{S_1}(x, y) = \psi(x, y)$ tel que $\alpha^p = \alpha^{np} = 0$ et, $\beta^p = \beta^{np} = -1$.
- Selon le schéma S_2 : $\psi_{PJ}|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y)$ avec $\alpha^p = \alpha^{np} = 0$, $\beta^p = 1$ et, $\beta^{np} = -1$.
- Selon le schéma S_3 : $\psi_{PJ}|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y)$ pour $\alpha^p = \alpha^{np} = \beta^p = 0$ et, $\beta^{np} = -1$.

Remarque : $\psi_{PJ}|_{S_2}$ prend la forme d'une fonction de distance hyperbolique dans l'ensemble en outputs P^J .

Par construction, les fonctions de distance de Shephard en output exposées dans la proposition 5.2 sont égales à 1 dès que, les extrants (désirables et indésirables) appartiennent à l'isoquant de l'ensemble en outputs associé à la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$.

Dans le cadre d'une analyse en sous-vecteurs, les fonctions de distance exposées dans la Proposition 5.2 peuvent être définies spécifiquement en composante polluante ou non-polluante. Ainsi, nous avons les corollaires ci-dessous.

Corollaire 5.3 Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :

$$\psi_{P^J}^{np}(x, y) = \psi_{P^J}|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y)$$

tel que $\alpha^p = \alpha^{np} = \beta^p = 0$ et $\beta^{np} = -1$.

Corollaire 5.4 Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous obtenons :

- Selon S_1 : $\psi_{P^J}^p|_{S_1}(x, y) = \psi(x, y)$ pour $\alpha^p = \alpha^{np} = \beta^{np} = 0$ et, $\beta^p = -1$.
- Selon S_2 : $\psi_{P^J}^p|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y)$ avec $\alpha^p = \alpha^{np} = \beta^{np} = 0$ et, $\beta^p = 1$.
- Selon S_3 : $\psi_{P^J}^p|_{S_3}(x, y) = \emptyset$.

La proposition suivante expose les conditions sous lesquelles la fonction de distance généralisée $\psi(x, y)$, prend la forme d'une fonction de distance de Shephard en input.

Proposition 5.5 Soit une technologie B -disponible, T^J , satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance en input est définie par :

$$\psi_{L^J}|_{S_1}(x, y) = \psi_{L^J}|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y) \Rightarrow \psi_{L^J}|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y)$$

tels que $\alpha^p = \alpha^{np} = 1$ et $\beta^p = \beta^{np} = 0$.

Par construction, les fonctions de distance de Shephard en input exposées dans la proposition 5.5 sont égales à 1 dès que, les intrants (polluants et non polluants) appartiennent à la frontière de la correspondance en inputs associée à la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$.

Des analyses en sous-vecteurs peuvent être réalisées tel que la Proposition 5.5 est définie de manière spécifique en composante polluante ou non polluante. Nous obtenons ainsi, le corollaire ci-après.

Corollaire 5.6 Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et tout $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, on a :

- $\psi_{L^J}^p|_{S_1}(x, y) = \psi_{L^J}^p|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y) \Rightarrow \psi_{L^J}^p|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y)$ pour $\alpha^p = 1$ et, $\alpha^{np} = \beta^p = \beta^{np} = 0$.

$$- \psi_{L^J|S_1}^{np}(x, y) = \psi_{L^J|S_2}^{np}(x, y) = \psi(x, y) \Rightarrow \psi_{L^J|S_3}^{np}(x, y) = \psi(x, y) \text{ avec } \alpha^{np} = 1 \text{ et } \alpha^p = \beta^p = \beta^{np} = 0.$$

Remarque : Si P^J est une correspondance en outputs B -disponible satisfaisant les axiomes $P1 - P3$ et $P6$, $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance exposées précédemment restent valides. Ces dernières représentent des cas particuliers dans lesquels les intrants ne sont pas partitionnées en composantes polluantes et non-polluantes. Dans ce cas, les fonctions de distance relatées dans la Proposition 5.2 sont décrites dans la Figure 2. Cette caractérisation tient compte de la relation d'équivalence suivante :

$$\frac{1}{\psi_{P^J|S_1}(x, y)} \equiv E^o(x, y)$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$.

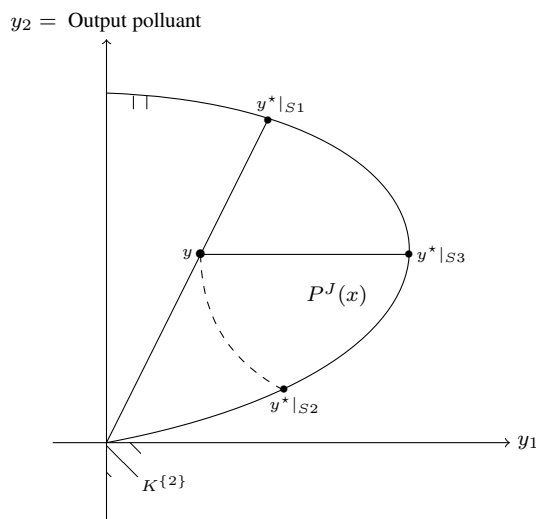


FIGURE 2 - $\psi_{P^J|S_1}^{-1}$, $\psi_{P^J|S_3}^{-1}$, $\psi_{P^J|S_2}$ dans l'ensemble $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

3.2 Les mesures d'efficacité technique dans le graphe de la technologie de production polluante

La proposition suivante signale les conditions sous lesquelles la fonction de distance généralisée $\psi(x, y)$, correspond à une mesure d'efficacité technique dans le graphe de la technologie de

production polluante (voir Annexe 2).

Proposition 5.7 Soit T^J , un ensemble de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3, où $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la mesure de l'efficience technique dans le graphe T^J est définie :

- Selon le schéma S_1 : $\psi_{T^J}(x, y)|_{S_1} = \psi(x, y)$ pour $\alpha^p = \alpha^{np} = 1$ et $\beta^p = \beta^{np} = -1$.
- Selon le schéma S_2 : $\psi_{T^J}(x, y)|_{S_2} = \psi(x, y)$ tels que $\alpha^p = \alpha^{np} = 1$, $\beta^p = 1$ et, $\beta^{np} = -1$.
- Selon le schéma S_3 : $\psi_{T^J}(x, y)|_{S_3} = \psi(x, y)$ pour $\alpha^p = \alpha^{np} = 1$, $\beta^p = 0$ et, $\beta^{np} = -1$.

Par construction, les mesures d'efficience technique exposées dans la Proposition 5.7 sont égales à 1 dès que les composantes polluantes et non polluantes appartiennent à l'isoquant de la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$. Pour toute étude en sous-vecteurs, les fonctions de distance décrites dans la Proposition 5.7 peuvent être définies de manière spécifique en composantes polluantes ou non polluantes.

Corollaire 5.8 D'après la Proposition 5.7, pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :

- Selon S_1 : $\psi_{T^J}^p|_{S_1}(x, y) = \psi(x, y)$ tels que $\alpha^p = 1$, $\alpha^{np} = 0$, $\beta^p = -1$ et, $\beta^{np} = 0$.
- Selon S_2 : $\psi_{T^J}^p|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y)$ avec $\alpha^p = 1$, $\alpha^{np} = 0$, $\beta^p = 1$ et, $\beta^{np} = 0$.
- Selon S_3 : $\psi_{T^J}^p|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y)$ avec $\alpha^p = 1$ et, $\alpha^{np} = \beta^p = \beta^{np} = 0$.

Remarque : Quel que soit le schéma dans lequel elle s'inscrit, la fonction de distance en composantes polluantes peut être définie de manière analogue dans le graphe T^J ou dans la correspondance Q^J (voir Figure 3).

Corollaire 5.9 D'après la proposition 5.7, quels que soient $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, on constate que :

$$\psi_{T^J}^{np}|_{S_1}(x, y) = \psi_{T^J}^{np}|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y) \Rightarrow \psi_{T^J}^{np}|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y),$$

avec $\alpha^p = 0$, $\alpha^{np} = 1$, $\beta^p = 0$ et, $\beta^{np} = -1$.

Remarque : Pour tout schéma dans lequel la fonction de distance en composantes non polluantes se définit, celle-ci peut être représentée de façon similaire dans le graphe de la technologie

T^J ou dans la correspondance Z^J .

Dans la Proposition 5.7, des fonction de distance conciliant composantes polluantes et non polluantes peuvent être également définies.

Corollaire 5.10 *Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :*

– Selon S_1 :

$$\begin{aligned} \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_1}(x, y) &= \psi(x, y) \text{ avec } \alpha^p = 1, \alpha^{np} = 0, \beta^p = 0 \text{ et } \beta^{np} = -1 \\ \text{et, } \psi_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S_1}(x, y) &= \psi(x, y) \text{ pour } \alpha^p = 0, \alpha^{np} = 1, \beta^p = -1 \text{ et } \beta^{np} = 0. \end{aligned}$$

– Selon S_2 :

$$\begin{aligned} \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_2}(x, y) &= \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_1}(x, y) \text{ et, } \psi_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S_2}(x, y) = \psi(x, y) \\ \text{pour } \alpha^p &= 0, \alpha^{np} = 1, \beta^p = 1 \text{ et } \beta^{np} = 0. \end{aligned}$$

– Selon S_3 :

$$\begin{aligned} \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_3}(x, y) &= \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_1, S_2}(x, y) \text{ et, } \psi_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S_3}(x, y) = \psi(x, y) \\ \text{tels que } \alpha^p &= 0, \alpha^{np} = 1, \beta^p = 0 \text{ et } \beta^{np} = 0. \end{aligned}$$

Remarque : La fonction de distance $\psi^{I^p \cup O^{np}}$ peut être définie de manière similaire dans T^J ou dans Z^J quel que soit le schéma retenu. De façon symétrique, la mesure $\psi^{I^{np} \cup O^p}$ peut être décrite de manière analogue dans T^J ou dans Q^J (voir Figure 3).

Si T^J est une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ et, si les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tels que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, les fonctions de distance définies précédemment restent valides. Ces dernières seront des cas particuliers des mesures spécifiées précédemment dans lesquelles les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

La figure 3 représente une correspondance en inputs et en extrants polluants, $Q^J(y^{np})$, associée à une technologie de production polluante T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}^2$. Les fonctions de distance en composantes polluantes sont représentées en rouge. Selon le schéma S1, cette mesure d'efficience correspond à la distance hyperbolique séparant les points a et b . Suivant

2. La technologie de production polluante est ici représenté selon une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

le schéma S2, elle est représentée par le segment reliant les points a et d . Selon le schéma S3, elle est définie par la distance comprise entre les points a et c . Les fonctions de distance en intrants non polluants et en extrants polluants sont représentées en bleu. Dans le schéma S1, cette mesure d'efficacité correspond à la distance hyperbolique séparant les points a et e . Dans le schéma S2, elle est caractérisée par le segment reliant les points a et g . Selon le schéma S3, elle est définie par la distance comprise entre les points a et f .

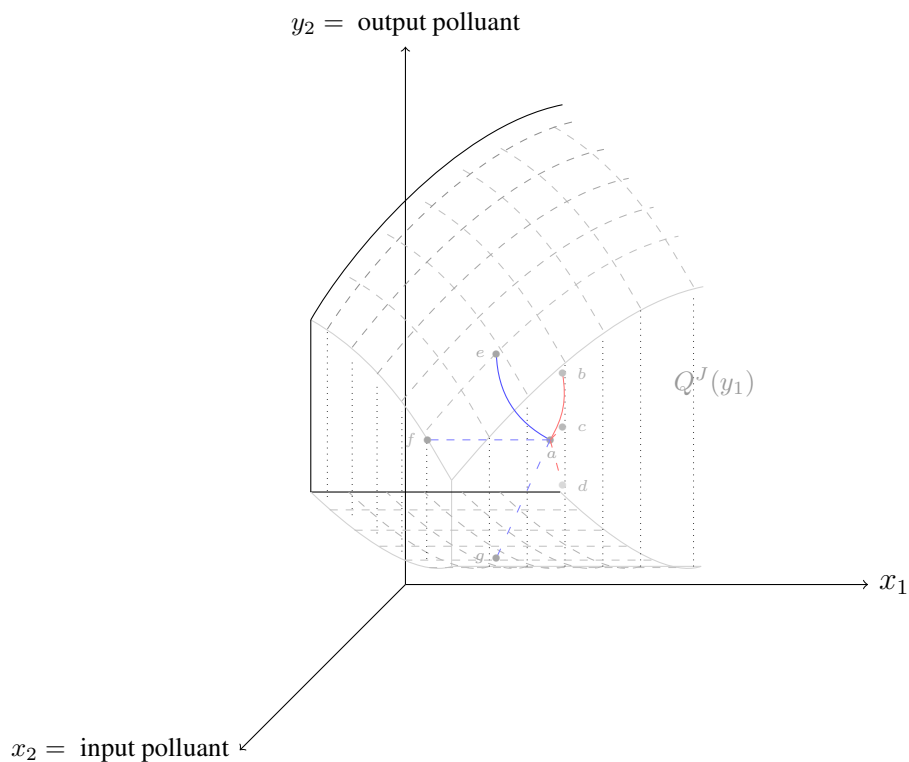


FIGURE 3 – Fonctions de distance multiplicatives dans l'ensemble $Q^J(y_1)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

4 Fonctions de Distance Additives et Technologie de Production Polluante

Selon une technologie de production B -disponible, la définition suivante introduit une spécification généralisée des mesures d'efficacité technique additives.

Définition 5.11 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance additive généralisée, $\vec{\psi} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^{n^{np}+n^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, se définit comme suit :

$$\vec{\psi}(x, y; h^{np}, h^p, k^{np}, k^p) = \begin{cases} \sup_{\beta} \left\{ \beta \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} (x^{np} - \beta h^{np}, x^p - \beta h^p, y^{np} + \beta k^{np}, y^p + \beta k^p) \in T^J \\ \text{si } (x^{np} - \beta h^{np}, x^p - \beta h^p, y^{np} + \beta k^{np}, y^p + \beta k^p) \in T^J, \\ \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ -\infty \quad \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2)$$

où $g = (h^{np}, h^p, k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}+n^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$.

Par définition $[n] = [n^{np}] + [n^p]$ et $[m] = [m^{np}] + [m^p]$. Ainsi, dans la suite de ces travaux nous notons $g = (h, k)$, avec $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$.

4.1 Fonctions de distance directionnelle

La proposition suivante présente les conditions sous lesquelles la fonction de distance additive généralisée $\vec{\psi}(x, y)$, se définit comme une fonction de distance directionnelle dans le graphe de la technologie de production polluante (voir Annexe 2).

Proposition 5.12 Soit T^J , un ensemble de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3, où $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la mesure de l'efficience technique dans le graphe T^J est définie :

- Selon le schéma S_1 : $\vec{\psi}_{T^J}(x, y; h, k)|_{S_1} = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ pour $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}_+^{m^p}$.
- Selon le schéma S_2 : $\vec{\psi}_{T^J}(x, y; h, k)|_{S_2} = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ tels que $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}_-^{m^p}$.
- Selon le schéma S_3 : $\vec{\psi}_{T^J}(x, y; h, k)|_{S_3} = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ pour $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times 0$.

Par construction, les mesures d'efficience technique exposées dans la Proposition 5.12 sont égales à 0 dès que les composantes polluantes et non polluantes appartiennent à la frontière de

la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$. Selon une analyse en sous-vecteurs, les fonctions de distance relatées dans la Proposition 5.12 peuvent être définies de manière spécifique en composantes polluantes ou non polluantes.

Corollaire 5.13 *D'après la Proposition 5.12, pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :*

- Selon S_1 : $\vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_1}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ tels que $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{np}$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{mp}$.
- Selon S_2 : $\vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ avec $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{np}$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_-^{mp}$.
- Selon S_3 : $\vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ avec $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{np}$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times 0$.

Remarque : Quel que soit le schéma retenu, les fonctions de distance directionnelle en composantes polluantes présentées dans le corollaire précédent, peuvent être définies de manière similaire dans le graphe T^J ou dans la correspondance Q^J (voir Figure 4).

Corollaire 5.14 *D'après la proposition 5.12, pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :*

$$\vec{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_1}(x, y; h, k) = \vec{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k) \Rightarrow \vec{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k),$$

avec $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^{np} \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{mp} \times 0$.

Remarque : Les fonctions de distance directionnelle en composantes non polluantes présentées dans le corollaire précédent peuvent être définies de façon similaire dans le graphe de la technologie T^J ou dans la correspondance Z^J .

D'après la Proposition 5.12, des fonctions de distance directionnelle conciliant composantes polluantes et non polluantes, peuvent être également introduites.

Corollaire 5.15 *Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :*

– Selon S_1 :

$$\vec{\psi}_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_1}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k) \text{ avec } h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{np} \text{ et } k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times 0$$

$$\text{et, } \vec{\psi}_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S_1}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k) \text{ pour } h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}} \times 0 \text{ et } k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^p.$$

– Selon S_2 :

$$\vec{\psi}_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_1}(x, y; h, k) \text{ et, } \vec{\psi}_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k) \text{ pour } h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}} \times 0 \text{ et } k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_-^p.$$

– Selon S_3 :

$$\vec{\psi}_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S_1, S_2}(x, y; h, k) \text{ et, } \vec{\psi}_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k) \text{ tels que } h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^{n^{np}} \times 0 \text{ et } k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times 0.$$

Remarque : Quel que soit le schéma retenu, la fonction de distance directionnelle $\vec{\psi}^{I^p \cup O^{np}}$ peut être définie de manière similaire dans T^J ou dans Z^J . De même, la mesure $\vec{\psi}^{I^{np} \cup O^p}$ peut être caractérisée dans T^J ou dans Q^J (voir Figure 4).

Si T^J est une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ et si les inputs sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tels que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, les fonctions de distance directionnelle définies précédemment restent valides. Ces dernières seront des cas particuliers des mesures spécifiées précédemment dans lesquelles les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non-polluantes.

La figure 4 représente une correspondance en inputs et en extrants polluants $Q^J(y^{np})$, associé à une technologie de production polluante T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$ ³. Dans l'ensemble $Q^J(y^{np})$, les fonctions de distance directionnelle en composantes polluantes sont représentées en rouge. Selon le schéma S1, cette mesure d'efficience correspond à la distance séparant les points a et b . Suivant le schéma S2, elle est caractérisée par le segment reliant les points a et d . Selon le schéma S3, elle est décrite par la distance comprise entre les points a et c . Les fonctions de distance directionnelle en intrants non polluants et en extrants polluants sont représentées en

3. La technologie de production polluante est représentée selon une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} = \{\{2\}, \{2\}\}$

- Selon le schéma S_2 : $\vec{\psi}_{PJ}|_{S_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ avec $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}_-^{m^p}$.
- Selon le schéma S_3 : $\vec{\psi}_{PJ}|_{S_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ pour $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times 0$.

Par construction, les fonctions de distance directionnelle en output exposées dans la proposition 5.16 sont égales à 0 dès que, les outputs (non polluants et polluants) appartiennent à l'isoquant de l'ensemble en outputs P^J associé à la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$.

Dans le cadre d'une analyse en sous-vecteurs, les fonctions de distance directionnelle décrites dans la Proposition 5.16 peuvent être définies spécifiquement en composante polluante ou non-polluante. Ainsi, nous avons les corollaires ci-dessous.

Corollaire 5.17 Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons :

$$\vec{\psi}_{PJ}^{np}(x, y; h, k) = \vec{\psi}_{PJ}|_{S_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$$

tel que $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times 0$.

Corollaire 5.18 Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous obtenons :

- Selon S_1 : $\vec{\psi}_{PJ}^p|_{S_1}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ pour $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{m^p}$.
- Selon S_2 : $\vec{\psi}_{PJ}^p|_{S_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$ avec $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_-^{m^p}$.
- Selon S_3 : $\vec{\psi}_{PJ}^p|_{S_3}(x, y; h, k) = \emptyset$.

Remarque : Si T^J est une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ et, si les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance directionnelle relatées précédemment restent valides. Ces dernières sont des cas particuliers dans lesquels les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non-polluantes. Dans ce cas, les fonctions de distance de la Proposition 5.16 sont décrites dans la Figure 5.

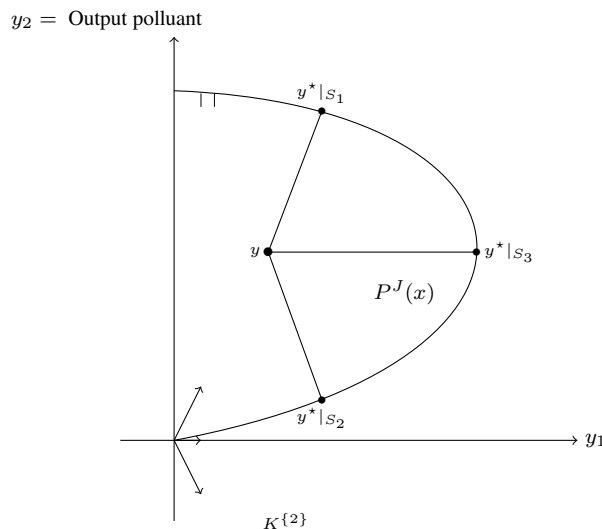


FIGURE 5 – Fonctions de distance directionnelle dans l'ensemble $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

La proposition suivante expose les conditions sous lesquelles la fonction de distance additive généralisée $\vec{\psi}(x, y; h, k)$, prend la forme d'une fonction de distance directionnelle en input.

Proposition 5.19 Soit une technologie B -disponible, T^J , satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance directionnelle en input est définie par :

$$\vec{\psi}_{L^J|s_1}(x, y; h, k) = \vec{\psi}_{L^J|s_2}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k) \Rightarrow \vec{\psi}_{L^J|s_3}(x, y; h, k) = \vec{\psi}(x, y; h, k)$$

tels que $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}_+^{m^p}$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times 0$.

Par construction, les fonctions de distance directionnelle exposées dans la proposition 5.19 sont égales à 0 dès que, les intrants (polluants et non polluants) appartiennent à la frontière de la correspondance en inputs L^J associée à la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$.

Des analyses en sous-vecteurs peuvent être réalisées tel que la Proposition 5.19 est définie de manière spécifique en composante polluante ou non polluante. Ainsi, Nous obtenons le corollaire ci-après.

Corollaire 5.20 Pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et tout $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, on a :

- $\vec{\psi}_{LJ}^p|_{S_1}(x, y) = \vec{\psi}_{LJ}^p|_{S_2}(x, y) = \vec{\psi}(x, y) \Rightarrow \vec{\psi}_{LJ}^p|_{S_3}(x, y) = \vec{\psi}(x, y)$ pour $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{m^p}$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times 0$.
- $\vec{\psi}_{LJ}^{np}|_{S_1}(x, y) = \vec{\psi}_{LJ}^{np}|_{S_2}(x, y) = \vec{\psi}(x, y) \Rightarrow \vec{\psi}_{LJ}^{np}|_{S_3}(x, y) = \vec{\psi}(x, y)$ avec $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times 0$.

4.2 Fonction de distance proportionnelle pondérée

Briec (1997) propose une spécification de la fonction de distance proportionnelle au sens de Farrell dans laquelle des pondérations sont affectées aux inputs et aux outputs. De ce fait, selon les valeurs prises par ces pondérations, la fonction de distance proportionnelle se définit selon différentes orientations. Dans ces travaux, nous allons introduire une fonction de distance proportionnelle pondérée en composantes polluantes et non polluantes.

Définition 5.21 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance proportionnelle pondérée en composantes polluantes et non polluantes, $\psi^{\gamma, \sigma} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times [0, 1]^{n+m^{np}} \times [-1, 1]^{m^p} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, se définit comme suit :

$$\psi^{\gamma, \sigma}(x, y) = \begin{cases} \sup_{\beta} \left\{ \beta \in \mathbb{R} : \left((1 - \beta \odot \gamma)x, (1 + \beta \odot \sigma^{np})y^{np}, (1 + \beta \odot \sigma^p)y^p \right) \in T^J \right\} \\ \text{si } \left((1 - \beta \odot \gamma)x, (1 + \beta \odot \sigma^{np})y^{np}, (1 + \beta \odot \sigma^p)y^p \right) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty \quad \text{sinon} \end{cases} \quad (5.3)$$

où $(\gamma, \sigma) \in [0, 1]^n \times [0, 1]^{m^{np}} \times [-1, 1]^{m^p}$, avec $\gamma = (\gamma^{np}, \gamma^p) \in [0, 1]^n$ et $\sigma = (\sigma^{np}, \sigma^p) \in [0, 1]^{m^{np}} \times [-1, 1]^{m^p}$.

Les tableaux 5.1 et 5.2 présentent l'ensemble des orientations possibles pour la fonction de distance proportionnelle pondérée (5.3). De plus, ils mettent en lumière les relations d'équivalence entre la fonction de distance proportionnelle pondérée et les fonctions de distance directionnelle exposées précédemment, selon les schémas S1 et S2.

La prise en compte des pondérations $\gamma = (\gamma^{np}, \gamma^p)$ et $\sigma = (\sigma^{np}, \sigma^p)$ dans (5.3) permet d'accorder un poids plus ou moins important à certaines composantes (polluantes ou non polluantes) dans

l'analyse de l'efficience en intrants et/ou en extrants. De plus, lorsque la pondération dans les intrants, respectivement les extrants, est nulle alors, la fonction de distance proportionnelle pondérée peut être spécifiquement définie dans l'ensemble en inputs, respectivement en outputs.

Pondérations	Equivalences
(i) $\gamma = 1$ $\sigma = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ S_1}(x, y; x, y)$
(ii) $\gamma^p = 1, \gamma^{np} = 0$ $\sigma^p = 1, \sigma^{np} = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^p _{S_1}(x, y; x^p, y^p)$
(iii) $\gamma^p = 0, \gamma^{np} = 1$ $\sigma^p = 0, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^{np} _{S_1}(x, y; x^{np}, y^{np})$
(iv) $\gamma^p = 1, \gamma^{np} = 0$ $\sigma^p = 0, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^{I^p \cup O^{np}} _{S_1}(x, y; x^p, y^{np})$
(v) $\gamma^p = 0, \gamma^{np} = 1$ $\sigma^p = 1, \sigma^{np} = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^{I^{np} \cup O^p} _{S_1}(x, y; x^{np}, y^p)$
(vi) $\gamma = 1$ $\sigma = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ} _{S_1}(x, y; x)$
(vii) $\gamma^p = 0, \gamma^{np} = 1$ $\sigma = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ}^{np} _{S_1}(x, y; x^{np})$
(viii) $\gamma^p = 1, \gamma^{np} = 0$ $\sigma = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ}^p _{S_1}(x, y; x^p)$
(ix) $\gamma = 0$ $\sigma = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ} _{S_1}(x, y; y)$
(x) $\gamma = 0$ $\sigma^p = 0, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ}^{np} _{S_1}(x, y; y^{np})$
(xi) $\gamma = 0$ $\sigma^p = 1, \sigma^{np} = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ}^p _{S_1}(x, y; y^p)$

TABLE 5.1 – Fonctions de distance directionnelle et proportionnelle pondérée : schéma S1

Rappelons qu'il est possible de mettre en relation les fonctions de distance proportionnelle pondérée, les fonctions de distance directionnelle, et les mesures d'efficacité technique de Shephard (Chambers, Chung et Färe 1996, 1998 ; Briec, 1997). Ainsi, d'après les résultats (vi) et (ix) dans la table 5.1, nous pouvons écrire :

$$\psi^{1,0}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ}|_{S_1}(x, y; x) = 1 - \left[\psi_{LJ}|_{S_1}(x, y) \right]^{-1} \quad (5.4)$$

et

$$\psi^{0,1}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ}|_{S_1}(x, y; y) = \left[\psi_{PJ}|_{S_1}(x, y) \right]^{-1} - 1. \quad (5.5)$$

Pondérations	Equivalences
(i) $\gamma = 1$ $\sigma^p = -1, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ} _{S_2}(x, y; x, -y^p, y^{np})$
(ii) $\gamma^p = 1, \gamma^{np} = 0$ $\sigma^p = -1, \sigma^{np} = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^p _{S_2}(x, y; x^p, -y^p)$
(iii) $\gamma^p = 0, \gamma^{np} = 1$ $\sigma^p = 0, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^{np} _{S_2}(x, y; x^{np}, y^{np})$
(iv) $\gamma^p = 1, \gamma^{np} = 0$ $\sigma^p = 0, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^{I^p \cup O^{np}} _{S_2}(x, y; x^p, y^{np})$
(v) $\gamma^p = 0, \gamma^{np} = 1$ $\sigma^p = -1, \sigma^{np} = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{TJ}^{I^{np} \cup O^p} _{S_2}(x, y; x^{np}, -y^p)$
(vi) $\gamma = 1$ $\sigma = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ} _{S_2}(x, y; x)$
(vii) $\gamma^p = 0, \gamma^{np} = 1$ $\sigma = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ}^{np} _{S_2}(x, y; x^{np})$
(viii) $\gamma^p = 1, \gamma^{np} = 0$ $\sigma = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{LJ}^p _{S_2}(x, y; x^p)$
(ix) $\gamma = 0$ $\sigma^p = -1, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ} _{S_2}(x, y; -y^p, y^{np})$
(x) $\gamma = 0$ $\sigma^p = 0, \sigma^{np} = 1$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ}^{np} _{S_2}(x, y; y^{np})$
(xi) $\gamma = 0$ $\sigma^p = -1, \sigma^{np} = 0$	$\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \overrightarrow{\psi}_{PJ}^p _{S_2}(x, y; -y^p)$

TABLE 5.2 – Fonctions de distance directionnelle et proportionnelle pondérée : schéma S2

5 Technologie de Production Polluante, Mesures de l'Efficiace et Dualité

5.1 Fonction de distance de Shephard en output B -disponible et fonction de revenu : un résultat de dualité

Dans le chapitre précédent, nous avons constaté qu'il existe une relation duale entre la fonction de revenu et la fonction de distance de Shephard en output (Jacobsen ,1970 ; Mc Fadden, 1978). Ce résultat a été établi dans un cadre général prenant en considération les hypothèses P1-P6. Un autre résultat de dualité a été proposé lorsque l'axiome de disponibilité en outputs (P5) est affaibli (Shephard, 1974). Ainsi, lorsque la propriété de disponibilité forte en outputs (P5) est remplacé par sa version faible (P7), la dualité entre la fonction de revenu et la fonction de distance de Shephard

en output est défini pour des prix pouvant être positifs, nuls ou négatifs.

Afin d'étudier l'hypothèse de B -disponibilité sous le prisme de la dualité, introduisons la fonction de revenu, $R : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup -\infty$,

$$R(p, x) = \begin{cases} \sup_y \{py : y \in P(x)\} & \text{si } P(x) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Le résultat suivant introduit une caractérisation duale de la propriété de B -disponibilité. L'hypothèse de convexité (P4) joue un rôle déterminant dans l'établissement de ce résultat qui est directement connecté à la proposition 3.2. Rappelons que celle-ci définit une correspondance en outputs B -disponible comme une intersection de cônes convexes (voir Partie 1, Chapitre 3).

Proposition 5.22 *Soit P un ensemble en outputs satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. De plus, supposons que l'hypothèse de convexité de cet ensemble (P4) soit vérifiée. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, $P(x)$ satisfait la propriété de B -disponibilité si et seulement si :*

$$P(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : p \cdot y \leq R(p, x), p \in \mathbb{R}_+^m \cup K^B \right\}.$$

En se référant au théorème de séparation des convexes, le résultat précédent peut être reformulé comme suit :

$$P(x) = \bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^m \cup K^B} \{y \in \mathbb{R}_+^m : py \leq R(p, x)\}. \quad (5.7)$$

Preuve de la Proposition 5.22 :

Nous avons démontré précédemment que $P(x) = (\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} P(x) - K^J) \cap \mathbb{R}_+^m$. De plus, quel que soit $J = \{\emptyset, B\}$, dans la mesure où l'hypothèse de convexité (P4) tient, nous avons :

$$P(x) - K^J = \bigcap_{p \in K^J} \{y \in \mathbb{R}_+^m : p \cdot y \leq R(p, x)\}.$$

Ainsi,

$$P(x) = \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} \bigcap_{p \in K^J} \{y \in \mathbb{R}_+^m : p \cdot y \leq R(p, x)\} \right) \cap \mathbb{R}_+^m.$$

En utilisant le résultat (5.7), il vient immédiatement :

$$P(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : p \cdot y \leq R(p, x), p \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J \right\}.$$

Le résultat énoncé dans la proposition 3.2 termine la preuve. \square

La proposition 5.22 stipule qu'une correspondance en outputs convexe, satisfaisant l'hypothèse de B -disponibilité, peut être enveloppée par des fonctions de revenu $R(p, x)$, avec $p \in \mathbb{R}_+^m \cup K^B$. Autrement dit, un ensemble en outputs convexe respectant l'axiome de B -disponibilité est déterminé par l'intersection de tous les hyperplans supports (fonctions de revenu), avec $p \in \mathbb{R}_+^m \cup K^B$ (Figure 6).

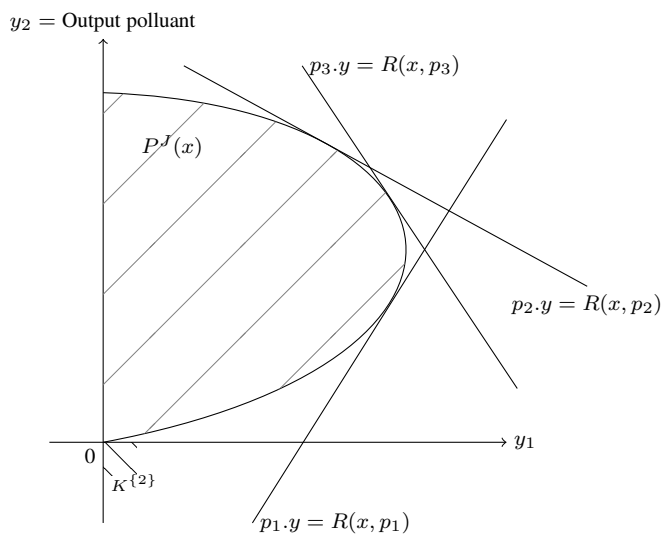


FIGURE 6 – Proposition 5.22

Dans la proposition suivante, un nouveau résultat de dualité entre la fonction de revenu et la fonction de distance de Shephard en output B -disponible est instauré.

Proposition 5.23 Soit P^J un ensemble en outputs B -disponible satisfaisant les axiomes P1-P4 et P6, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Ainsi, nous avons :

(a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$:

$$\psi_{P^J|_{S_1}}(x, y) = \sup_{p \in K^B \cup \mathbb{R}_+^m} \left\{ \frac{p \cdot y}{R(p, x)} : R(p, x) \neq 0 \right\}. \quad (5.8)$$

(b) Soit $p \in K^B \cup \mathbb{R}_+^m$ un vecteur prix ayant certaines composantes négatives alors :

$$R(p, x) = \sup_y \left\{ \frac{p \cdot y}{\psi_{P^J|S_1}(x, y)} : y \in \mathbb{R}_+^m \right\}. \quad (5.9)$$

Preuve de la Proposition 5.23 :

(a) Nous avons :

$$\psi_{P^J|S_1}(x, y) = \begin{cases} \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}y \in P^J(x)\} & \text{si } \frac{1}{\lambda}y \in P^J(x), \lambda > 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, selon la proposition 5.22 :

$$\begin{aligned} P^J(x) &= \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : p \cdot y \leq R(p, x), p \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J \right\} \\ &= \bigcap_{p \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : p \cdot y \leq R(p, x) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi_{P^J|S_1}(x, y) &= \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}y \in P^J(x)\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \frac{py}{\lambda} \leq R(p, x), p \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \frac{py}{R(p, x)} \leq \lambda, p \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J\} \\ &= \sup_{p \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \left\{ \frac{py}{R(p, x)} : R(p, x) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

(b) Ce résultat peut être vérifié de façon similaire à celui exposé dans les travaux de Färe et Primont (1995). □

Dans le cas d'une correspondance en outputs ne satisfaisant pas les hypothèses de disponibilités usuelles (P5 ou P7), les propriétés (a) et (b) présentent un résultat de dualité entre la fonction de

distance de Shephard en output et la fonction de revenu (Shephard, 1953, 1970 ; Jacobsen, 1970 ; Mc Fadden, 1978). Celui-ci contribue à élargir les schémas existants en théorie de la dualité. En effet, ces derniers se réfèrent spécifiquement aux hypothèses de disponibilités forte ou faible (P5 ou P7). Par ailleurs, l'hypothèse de B -disponibilité des outputs apparaît comme une condition nécessaire et suffisante afin de caractériser la technologie de production, à l'aide de la fonction de distance de Shephard en output. Ainsi, ce résultat atténue l'importance de l'axiome de disponibilité faible en outputs afin de caractériser la technologie de production grâce à l'orientation en extrant de la fonction de distance de Shephard.

Ce nouveau résultat de dualité est illustré dans la Figure 7. Étant donné que le premier output (non polluant) est congestionné dans cette illustration, le second (extrant polluant) est associé à un prix négatif. Ainsi, la fonction de revenu a une pente positive. Si la propriété de convexité (P6) est relâchée alors, le résultat de dualité présenté dans la proposition 5.23 est vérifié localement (voir résultat local de dualité dans Briec, Kerstens et Vanden Eeckaut (2004).

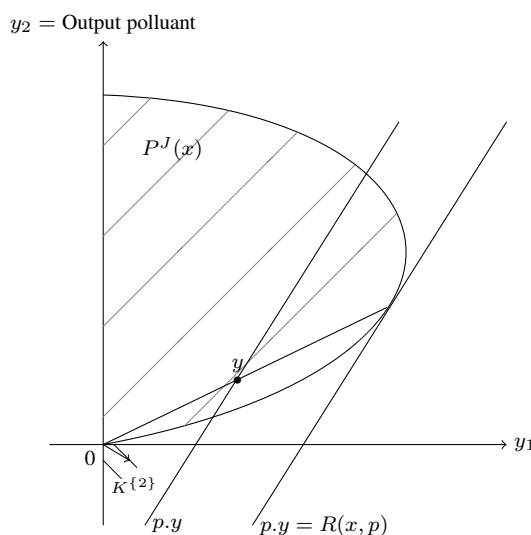


FIGURE 7 – Fonction de distance de Shephard en output B -disponible et dualité, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

D'après le lemme dual de Shephard, aux points où $\psi_{P^J|_{S_1}}(x, y)$ est différentiable nous avons :

$$\nabla_y \psi_{P^J|_{S_1}}(x, y) = \frac{p(x, y)}{R(p, x)} \quad (5.10)$$

et ainsi,

$$\nabla_y \psi_{P^J|S_1}(x, y)R(p, x) = p(x, y), \quad (5.11)$$

avec $p(x, y) = \arg \min_{p \in K^B \cup \mathbb{R}_+^m} \left\{ \frac{py}{R(p, x)} : R(p, x) \neq 0 \right\}$. Ce résultat est obtenu en se référant au théorème de l'enveloppe dans l'équation (5.8). Il détermine les prix implicites des extrants, dont certains peuvent être négatifs dans la dimension des productions résiduelles. Ces prix négatifs résultent de l'existence d'une frontière B -congestionnée dans l'ensemble P^J . Dans ce cas, on retrouve l'idée selon laquelle les productions polluantes sont associées à des effets externes négatifs pouvant altérer les capacités productives. En ce sens, la détermination des prix implicites des productions polluantes trouve un intérêt particulier en économie. En effet, ces productions ne possèdent pas nécessairement de prix de marché. Notons qu'en l'absence de tels prix, il n'existe aucune possibilité pour que ces derniers soient identiques à leurs prix implicites et donc, pour que les mesures d'efficacité technique correspondent aux mesures d'efficacité économique sur la frontière B -congestionnée de l'ensemble P^J .

5.2 Fonctions de distance directionnelle et dualité

Dans le chapitre précédent, nous avons remarqué que les fonctions de distance directionnelle sont une généralisation des fonctions de distance de Shephard (en input et en output), et ainsi des mesures d'efficacité technique de Debreu-Farrell (Chambers, Chung et Färe 1996, 1998 ; Briec, 1997). Par conséquent, elles offrent un cadre d'analyse général dans lequel la relation duale entre la fonction de profit et la fonction de distance directionnelle (Chambers, Chung et Färe, 1998) peut être analysée. Cette relation a été exposée précédemment sous les hypothèses usuelles T1-T5.⁴ A présent, nous allons étendre ce résultat au cas d'une technologie de production satisfaisant l'hypothèse de B -disponibilité dans les intrants et les extrants.

Soit la fonction de profit, $\Pi : \mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$,

4. Lorsque la propriété de disponibilité forte dans le graphe (T5) est remplacé par sa version faible (T6 et T7), la dualité entre la fonction de profit et la fonction de distance directionnelle est également vérifiée (Shephard, 1974 ; Mc Fadden, 1978).

$$\Pi(w, p) = \begin{cases} \sup_{(x,y)} \{py - wx : (x, y) \in T\} & \text{si } T \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Sous l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production (T4), une caractérisation duale de la propriété de B -disponibilité généralisée est introduite dans la proposition ci-après. La présentation de ce résultat est étroitement liée à la proposition 3.7. Cette dernière caractérise la technologie de production B -disponible comme une intersection de cônes convexes (voir Partie 1, Chapitre 3).

Proposition 5.24 *Soit T une technologie de production satisfaisant les axiomes T1-T3. De plus, supposons que l'hypothèse de convexité de cet ensemble (T4) est vérifiée. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, T vérifie la propriété de B -disponibilité, avec $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$, si et seulement si :*

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : p \cdot y - w \cdot x \leq \Pi(w, p), (w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J \right\}.$$

En se référant au théorème de séparation des convexes, le résultat précédent peut être reformulé comme suit :

$$T = \bigcap_{(w,p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : py - wx \leq \Pi(w, p) \right\}. \quad (5.13)$$

Preuve de la Proposition 5.24 :

Nous avons démontré précédemment que $T = \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} T + K^J \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m)$. De plus, quel que soit $J = \{\emptyset, B\}$, avec $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$, si la propriété de convexité (T4) est vérifiée alors,

$$T + K^J = \bigcap_{(w,p) \in K^J} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : py - wx \leq \Pi(w, p) \right\}.$$

Par conséquent,

$$T = \left(\bigcap_{J \in \{\emptyset, B\}} \left(\bigcap_{(w,p) \in K^J} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : py - wx \leq \Pi(w, p) \right\} \right) \right) \cap (\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m).$$

En utilisant le résultat (5.13), il vient immédiatement :

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : p.y - w.x \leq \Pi(w, p), (w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J \right\}.$$

Le résultat énoncé dans la proposition 3.7 termine la preuve. \square

D'après la proposition 5.24, un ensemble de production convexe satisfaisant l'hypothèse de B -disponibilité dans les intrants et les extrants, peut être enveloppé par des fonctions de profit $\Pi(w, p)$, avec $(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J$. Ainsi, une technologie de production convexe respectant l'axiome de B -disponibilité est déterminé par l'intersection de tous les hyperplans supports (fonctions de profits), avec $(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J$.

La proposition suivante présente un nouveau résultat de dualité entre la fonction de profit et la fonction de distance directionnelle.

Proposition 5.25 *Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T4, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. De plus, supposons que $(h, k) \neq (0, 0)$ et que $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $\vec{\psi}_{T^J|_{S_1}}(x, y; h, k) > -\infty$. Ainsi, nous avons :*

(a) *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$:*

$$\vec{\psi}_{T^J|_{S_1}}(x, y; h, k) = \inf_{(w,p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \{ \Pi(w, p) - p.y + w.x : w.h + p.k = 1 \}. \quad (5.14)$$

(b) *Soit $(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J$ un couple de vecteurs prix ayant certaines composantes négatives :*

$$\Pi(w, p) = \sup_{x,y} \{ p.y - w.x - (w.h + p.k) \vec{\psi}_{T^J|_{S_1}}(x, y; h, k) : (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \}. \quad (5.15)$$

Preuve de la Proposition 5.25 :

(a) Nous avons :

$$\vec{\psi}_{T^J|_{S_1}}(x, y; h, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y + \beta k) \in T^J \} & \text{si } (x - \beta h, y + \beta k) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, selon la proposition 5.24 :

$$\begin{aligned} T^J &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : p.y - w.x \leq \Pi(w, p), (w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J \right\} \\ &= \bigcap_{(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : py - wx \leq \Pi(w, p) \right\}. \end{aligned}$$

Notons,

$$\vec{\psi}_{\Pi|S_1}(x, y; h, k) = \sup_{\beta} \left\{ \beta \in \mathbb{R} : p.(y + \beta k) - w.(x - \beta h) \leq \Pi(w, p), (w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J \right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{T^J|S_1}(x, y; h, k) &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y + \beta k) \in T^J \} \\ &= \inf_{(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : p.(y + \beta k) - w.(x - \beta h) \leq \Pi(w, p) \} \\ &= \inf_{(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \vec{\psi}_{\Pi|S_1}(x, y; h, k). \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{T^J|S_1}(x, y; h, k) &= \inf_{(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : \beta \leq \Pi(w, p) - (py - wx), w.h + p.k = 1 \} \\ &= \inf_{(w, p) \in \bigcup_{J \in \{\emptyset, B\}} K^J} \{ \Pi(w, p) - p.y + w.x : w.h + p.k = 1 \}. \end{aligned}$$

(b) Ce résultat peut être vérifié de façon similaire à celui exposé dans les travaux de Luenberger (1992). \square

Les propriétés (a) et (b) étendent les résultats de dualité exposés par Luenberger (1992) et Chambers, Chung et Färe (1998) au cas d'un ensemble de production ne respectant pas les axiomes

de disponibilité usuels. Ainsi, elles atténuent l'importance des axiomes de disponibilité faible ou forte en théorie de la dualité. En effet, ces propriétés montrent que l'hypothèse de B -disponibilité généralisée est une condition nécessaire et suffisante afin de caractériser la technologie de production polluante T^J selon la fonction de distance directionnelle $\vec{\psi}_{T^J|S_1}(x, y; h, k)$.

En se référant au théorème de l'enveloppe nous pouvons obtenir l'expression des prix implicites en input et en output grâce à la mesure de distance duale (5.14) (Luenberger, 1996). Ainsi, nous avons :

$$\nabla_x \vec{\psi}_{T^J|S_1}(x, y; h, k) = w(x, y; h, k) \quad (5.16)$$

et

$$-\nabla_y \vec{\psi}_{T^J|S_1}(x, y; h, k) = p(x, y; h, k). \quad (5.17)$$

Bien entendu, le résultat précédent implique que la fonction de distance directionnelle, $\vec{\psi}_{T^J|S_1}(x, y; h, k)$, est différentiable relativement à x et y .

Notons que les résultats (5.16) et (5.17) restent valides lorsque la fonction de distance directionnelle est spécifiquement orientée en input ou en output. En effet, nous avons montré dans le chapitre précédent que la fonction de distance directionnelle orientée en input, respectivement en output, est duale avec la fonction de coût, respectivement de revenu. Ainsi,

$$\nabla_x \vec{\psi}_{T^J}(x, y; h, 0) = w(x, y; h, 0), \quad (5.18)$$

et

$$-\nabla_y \vec{\psi}_{T^J}(x, y; 0, k) = p(x, y; 0, k). \quad (5.19)$$

De ce fait, la fonction de distance directionnelle B -disponible conduit à la définition d'une fonction de demande inverse en input, qui assigne à chaque intrant un vecteur prix. De même, elle conduit à la définition d'une fonction d'offre inverse en output, qui affecte à chaque output un vecteur prix. Par conséquent, elle permet de déterminer les prix implicites des intrants et des extrants, dont certains peuvent être négatifs dans la dimension des inputs et des outputs polluants. Ces prix négatifs sont à mettre en relation avec l'existence de frontières B -congestionnées dans l'ensemble T^J . Dans ce cas, on retrouve l'idée selon laquelle les inputs et les productions polluants

sont associés à des effets externes négatifs pouvant altérer les capacités productives.

6 Fonctions de Distance : Spécification Non Paramétrique

Dans la première partie de ces travaux, une spécification non-paramétrique des technologies de production B -disponible a été introduite. A présent, selon le même cadre d'analyse nous allons définir les fonctions de distances additives et multiplicatives dans ces ensembles. Pour ce faire, nous notons $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$, l'ensemble des unités de production observées sur un secteur de l'économie engagé dans activités productives polluantes.

6.1 Fonction de distance multiplicative généralisée

Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T4, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance multiplicative généralisée (5.1) peut être déterminée, selon la spécification des paramètres α^p , α^{np} , β^p et β^{np} , à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \psi^{DEA}(x_0, y_0) = \inf \lambda \\
 \text{s.t. } \lambda^{\alpha^p} x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\alpha^{np}} x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\alpha^p} x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\alpha^{np}} x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\beta^p} y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \lambda^{\beta^{np}} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \lambda^{\beta^p} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \lambda^{\beta^{np}} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

avec $\alpha^p = \{0, 1\}$, $\alpha^{np} = \{0, 1\}$, $\beta^p = \{-1, 0, 1\}$ et $\beta^{np} = \{-1, 0, 1\}$.

Selon la spécification des paramètres α^p , α^{np} , β^p et β^{np} , le programme (5.20) permet de déterminer l'ensemble des fonctions de distance multiplicatives exposées dans ce chapitre. Par exemple, si on pose $\alpha^p = \alpha^{np} = 0$ et, $\beta^p = \beta^{np} = -1$ alors, le programme (5.20) permet d'estimer la fonction de distance de Shephard en output dans la correspondance en outputs de T^J . Dans ce cas, $\psi^{DEA}(x_0, y_0) = \psi_{PJ,DEA|S_1}(x_0, y_0)$.

$$\begin{aligned}
 \psi_{PJ,DEA}|_{S_1}(x_0, y_0) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Le programme (5.21) met en lumière la mesure d'efficacité technique de Shephard en output (polluants et non polluants)⁵ pour l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{Z}$. Dans ce modèle les rendements d'échelle sont supposés variables. D'autres hypothèses concernant la nature des rendements d'échelle peuvent être envisagées (voir définition de l'ensemble Γ). Lorsque la propriété de convexité (P4) est relâchée, l'inverse de la fonction de distance de Shephard en output (polluants et non polluants) est :

$$[\psi_{PJ,DEA}(x, y)]^{-1} = \begin{cases} \sup\{\lambda > 0 : \lambda y \in P_{nc}^{J,DEA}(x)\} & \text{si } \lambda y \in P_{nc}^{J,DEA}(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.22}$$

Briec, Kerstens et Vanden Eeckaut (2004) proposent une procédure d'estimation basée sur le principe d'énumération, pour (5.22). Nous reviendrons plus en détail sur cette procédure dans le

5. Remarquons que, si $\theta = \mu$ et si les intrants ne sont pas partitionnés alors, la fonction de distance (5.25) prend la forme d'une fonction de distance de Shephard en output faiblement disponible en présence de rendements d'échelle variables. De plus, la mesure $\psi_{PJ,DEA}|_{S_1}(x_0, y_0)$ peut être également calculée selon les ensembles \mathcal{A}' ou \mathcal{A}'_0 . Le premier cas met en lumière la fonction de distance de Shephard en output faiblement disponible au sens de Kuosmanen. Le second permet d'estimer la fonction de distance de Shephard en output faiblement disponible au sens de Leleu.

prochain chapitre où un test de convexité est introduit.

Remarque 5.26 Si la technologie de production B -disponible T^J satisfait les axiomes T1-T4 et si les inputs sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance multiplicative généralisée (5.1) peut être déterminée, selon la spécification des paramètres α , β^p et β^{np} , à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \psi^{DEA}(x_0, y_0) = \inf \lambda \\
 \text{s.t. } \lambda^\alpha x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \lambda^\alpha x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \lambda^{\beta^p} y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \lambda^{\beta^{np}} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \lambda^{\beta^p} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \lambda^{\beta^{np}} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

avec $\alpha = \{0, 1\}$, $\beta^p = \{-1, 0, 1\}$ et $\beta^{np} = \{-1, 0, 1\}$.

Le programme (5.23) correspond à un cas particulier du programme (5.20) dans lequel les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

6.2 Fonction de distance additive généralisée

Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T4, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance additive généralisée (définition 5.11) peut être

déterminée, selon la spécification du vecteur directionnel $g = (h, k)$, avec $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$, à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}^{DEA}(x_0, y_0; h^{np}, h^p, k^{np}, k^p) = \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} - \beta h^p \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} - \beta h^{np} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} - \beta h^p \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} - \beta h^{np} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 y_{0,j} + \beta k^p \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^p \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0 \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

Selon la spécification de la direction $g = (h, k)$, avec $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$, le programme (5.24) permet de déterminer l'ensemble des fonctions de distance additives exposées dans ce chapitre. Par exemple, si on pose $h = (h^{np}, h^p) \in 0 \times 0$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}_+^{m^p}$ alors, le programme (5.24) permet d'évaluer la fonction de distance directionnelle en output⁶ dans la correspondance en extrants de T^J . Dans ce cas, $\vec{\psi}^{DEA}(x_0, y_0; 0, 0, k^{np}, k^p) = \vec{\psi}^{PJ, DEA}|_{S_1}(x_0, y_0; 0, 0, k^{np}, k^p)$. Formellement,

6. Rapelons que, si $\theta = \mu$ et si les inputs ne sont pas partitionnés alors, la fonction de distance directionnelle en output $\psi^{PJ, DEA}|_{S_1}(x_0, y_0)$ correspond à une version faiblement disponible au sens de Kuosmanen ou de Leleu, selon qu'elle est définie dans les ensembles \mathcal{A}' ou \mathcal{A}_0' .

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{P^J, DEA|S_1}(x_0, y_0; 0, 0, k^{np}, k^p) = \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} + \beta k^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0 \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Soit un vecteur de paramètres $(\gamma, \sigma) \in [0, 1]^n \times [0, 1]^{m^{np}} \times [-1, 1]^{m^p}$, avec $\gamma = (\gamma^{np}, \gamma^p) \in [0, 1]^n$ et $\sigma = (\sigma^{np}, \sigma^p) \in [0, 1]^{m^{np}} \times [-1, 1]^{m^p}$, une spécification non-paramétrique de la fonction de distance proportionnelle pondérée en composantes polluantes et non polluantes de l'observation $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ est définie à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \psi_{TJ,DEA}^{\gamma,\sigma}(x_0, y_0) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } (1 - \beta \odot \gamma^p)x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 (1 - \beta \odot \gamma^{np})x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 (1 - \beta \odot \gamma)x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 (1 + \beta \odot \sigma^p)y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 (1 + \beta \odot \sigma^{np})y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 (1 + \beta \odot \sigma)y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Selon la spécification des paramètres $(\gamma, \sigma) \in [0, 1]^n \times [0, 1]^{m^{np}} \times [-1, 1]^{m^p}$, la formulation (5.26) permet d'estimer l'ensemble des fonctions de distance proportionnelle exposées dans ce chapitre (voir les tableaux 5.1 et 5.2). Ainsi, si on prend $\gamma = 1$ et $\sigma = 1$ alors, nous avons $\psi^{\gamma,\sigma}(x, y) = \vec{\psi}_{TJ|S_1}(x, y; x, y)$.

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{T^J|S_1}(x_0, y_0; x_0, y_0) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } (1 - \beta)x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 (1 - \beta)x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 (1 - \beta)x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 (1 + \beta)y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 (1 + \beta)y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 (1 + \beta)y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Remarque 5.27 Si la technologie de production B -disponible T^J satisfait les axiomes T1-T4 et si les inputs sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance additive généralisée (définition 5.11) peut être déterminée, selon la spécification de la direction $g = (h, k)$, avec $h \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$, à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}^{DEA}(x_0, y_0) = \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} - \beta h &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 x_{0,i} - \beta h &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} + \beta k^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 y_{0,j} + \beta k^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Le programme (5.28) correspond à un cas particulier du programme (5.24) dans lequel les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

7 Conclusion

Dans ce chapitre, une généralisation des mesures d'efficacité technique (additives et multiplicatives) dans des ensembles de production B -disponibles a été introduite. Ces nouvelles fonctions de distance permettent d'étudier les mesures d'efficacité technique selon plusieurs schémas identifiés dans littérature économique. De plus, selon les règles de partitionnement adoptées, elles permettent de retrouver des mesures d'efficacité technique existant.

Par ailleurs, de nouveaux résultats de dualité ont été introduits. Ces derniers sont construits sous l'hypothèse de B -disponibilité, ce qui atténue l'importance des axiomes usuels de disponibilité dans la mise en évidence de ces résultats. Plus précisément, nous présentons des relations duales entre des fonctions de profit et de revenu et, des mesures de distance B -disponibles additives et multiplicatives. Ainsi, des fonctions de demande conditionnelle en inputs (polluants et

non polluants) et des fonctions d'offre conditionnelle en outputs (polluants et non polluants) sont proposées. De plus, des fonctions de prix ajustés des intrants (polluants et non polluants) et des extrants (polluants et non polluants) sont également déterminées. Ces dernières définissent les prix implicites des facteurs (polluants et non polluants) et des produits (polluants et non polluants), dont certains peuvent être négatifs dans les dimensions des intrants polluants et des outputs polluants. Ces prix négatifs sont directement liés à l'existence de frontières B -congestionnées dans les technologies de production.

Enfin, une spécification non-paramétrique des fonctions de distance additives et multiplicatives généralisées a été proposée. A cette occasion, nous avons pu constater que la modélisation non-paramétrique introduite, admet comme cas particulier l'ensemble des fonctions de distance additives et multiplicatives exposées dans ce chapitre.

Chapitre 6

Technologie de Production Polluante : Tests de Congestion et de Convexité

1 Introduction

Problèmes : Comment définir des tests additifs et multiplicatifs de congestion des output non polluants et de convexité dans des ensembles en outputs B -disponibles ? Ces tests peuvent-ils être implémentés dans des études empiriques ?

Dans ce chapitre, nous introduisons un test de congestion des outputs non polluants. Ce dernier permet d'évaluer le manque de disponibilité dans la dimension des outputs polluants. Ainsi, il vise à vérifier le caractère polluant de la technologie de production dans laquelle il évolue. Pour réaliser ce test, nous nous référons à des fonctions de distance définies dans des ensembles de production B - et librement disponibles. De plus, nous proposons également un test de convexité des outputs. Le croisement des résultats obtenus à ces différents tests, permet de définir une procédure de caractérisation des ensembles en outputs B -disponibles.

Partant d'une technologie de production B -disponible, la prochaine section introduit un test de congestion des outputs non polluants. Lorsque ce test est défini selon des fonctions de distance multiplicatives, il se présente sous la forme d'un ratio. Inversement, lorsqu'il est défini selon des fonctions de distance additives, il prend la forme d'une différence.

L'axiome de convexité des outputs B -disponibles est testé dans la troisième section. Ce test

est construit selon des fonctions de distance définies dans des ensembles en outputs B -disponibles convexes et non-convexes. Bien entendu, selon le caractère additif ou multiplicatif des fonctions de distance utilisées, ce test se construit comme une différence ou un ratio.

Finalement, une illustration empirique est introduite dans la dernière section afin de mettre en lumière les différents tests exposés dans ce chapitre ainsi que leur analyse croisée.

2 Test de Congestion en Outputs Non Polluants

2.1 Structure multiplicative

Considérons les fonctions de distance de Shephard en output $\psi_{P^J|S_1}(x, y)$ et $\psi_{P^\emptyset|S_1}(x, y)$ afin d'établir une mesure de congestion en outputs non polluants.¹ Rappelons que la première se définit dans une correspondance en outputs B -disponible et, que la seconde s'établit dans un ensemble en outputs librement disponible. En effet, nous avons montré, dans la première partie de ces travaux, que si $J = \emptyset$ alors, l'hypothèse de B -disponibilité est identique à la propriété usuelle de disponibilité forte en outputs. Ainsi, nous avons :

$$\psi_{P^J|S_1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.1)$$

et

$$\psi_{P^\emptyset|S_1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^\emptyset(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^\emptyset(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.2)$$

1. La fonction de distance considérée, est définie dans un ensemble en outputs P^J associé à une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B \subset [m]$. De façon similaire, la congestion en outputs non polluants peut être appréciée selon une fonction de distance de Shephard en output $\psi_{P^J|S_1}(x, y)$ définie dans un ensemble en outputs P^J associé à une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$.

Les fonctions de distance (6.1) et (6.2) sont représentées géométriquement dans la figure 1. La fonction de distance $\psi_{P^J|S_1}(x, y)$ est égale à 1 aux points a , b et c . En effet, ces trois points appartiennent à la frontière de l'ensemble en outputs B -disponible P^J . Pareillement, la fonction de distance $\psi_{P^\emptyset|S_1}(x, y)$ est égale à 1 au point c . Néanmoins, $\psi_{P^\emptyset|S_1}(x, y)$ est strictement inférieure à 1 pour les points a et b . En effet ces derniers n'appartiennent pas à la frontière de l'ensemble en outputs librement disponible $P^\emptyset(x)$.

Ainsi, selon les fonctions de distance multiplicatives (6.1) et (6.2), la congestion en outputs non polluants peut être évaluée à partir des points a et b . Effectivement, à ces points, $\psi_{P^J}(x, y)|_{S_1} \neq \psi_{P^\emptyset}(x, y)|_{S_1}$.

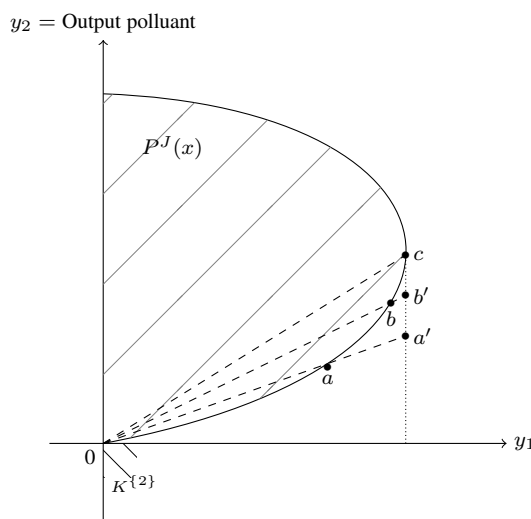


FIGURE 1 – Test de congestion dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

Dans la définition suivante un test de congestion en outputs non polluants est introduit.

Définition 6.1 Soit P^J un ensemble en outputs associé à une technologie de production B -disponible T^J satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6, où $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour tout $(x, y) \in T^J$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, une mesure de congestion en outputs non polluants est définie selon le ratio suivant :

$$DC^B(x, y) = \frac{\psi_{P^J|S_1}(x, y)}{\psi_{P^\emptyset|S_1}(x, y)}.$$

Le test de congestion proposé dans la définition 6.1 permet de mesurer la perte en outputs non

polluants, induite par le manque de disponibilité dans les productions résiduelles (voir Figure 1). Le résultat exposé dans la proposition suivante est immédiat.

Proposition 6.2 *Soit $P(x)$ un ensemble en outputs satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons la propriété suivante :*

$P(x)$ est congestionné en outputs non polluants si et seulement si il existe $y \in P(x)$ tel que

$$\psi_{P^\emptyset}|_{S_1}(x, y) < \psi_{P^J}|_{S_1}(x, y).$$

Preuve de la Proposition 6.2 :

$P(x)$ est congestionné dans la dimension des outputs non polluants si et seulement si $P^\emptyset(x) \neq P^J(x)$. Pour toute correspondance en outputs P , $y \in P(x)$ si et seulement si, $\psi_P|_{S_1}(x, y) \leq 1$. De plus, par définition $P^J(x) \subset P^\emptyset(x)$ ce qui implique que $\psi_{P^\emptyset}|_{S_1}(x, y) \leq \psi_{P^J}|_{S_1}(x, y)$. Par conséquent, $P^\emptyset(x) \neq P^J(x)$ est équivalent à $\psi_{P^\emptyset}|_{S_1}(x, y) \neq \psi_{P^J}|_{S_1}(x, y)$. Ainsi, $P(x)$ est congestionné dans la dimension des outputs non polluants si et seulement si, $\psi_{P^\emptyset}|_{S_1}(x, y) < \psi_{P^J}|_{S_1}(x, y)$ pour au moins une unité de production $y \in P(x)$, ce qui termine la preuve. \square

A présent, nous pouvons exposer le corollaire suivant pour la mesure de congestion $DC^B(x, y)$.

Corollaire 6.3 *Soit P^J un ensemble en outputs B -disponible satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. Ainsi, il existe au moins une unité de production $y \in P^J(x)$ tel que $DC^B(x, y) > 1$.*

Notons que le test radial de congestion exposé dans la définition 6.1 peut conduire à sous estimer la congestion en outputs non polluants (Briec, Kerstens et Van de Woestyne, 2017). En effet, l'ensemble des points situés sur le segment $[0, c]$ ne permet pas d'identifier la congestion dans la dimension des outputs non polluants. Dans ce cas, $DC^B(x, y)$ sera toujours égal à 1. L'utilisation d'un test de congestion spécifiquement orienté en output non polluant permet d'éviter ce problème.

Ainsi, nous avons :

$$\widetilde{DC}^B(x, y) = \frac{\psi_{P^J}|_{S_3}(x, y)}{\psi_{P^\emptyset}|_{S_3}(x, y)},$$

avec

$$\psi_{P^J|S_3}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.3)$$

et

$$\psi_{P^\emptyset|S_3}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^\emptyset(x) \right\} & \text{si } \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^\emptyset(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.4)$$

2.2 Structure additive

Considérons les fonctions de distance de directionnelle en output $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k)$ et $\vec{\psi}_{P^\emptyset|S_1}(x, y; k)$ afin d'établir une mesure additive de congestion en outputs non polluants.

$$\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^J(x) \} & \text{si } (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.5)$$

et

$$\vec{\psi}_{P^\emptyset|S_1}(x, y; k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^\emptyset(x) \} & \text{si } (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^\emptyset(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.6)$$

La définition suivante introduit un test additif de congestion en outputs non polluants.

Définition 6.4 Soit P^J un ensemble en outputs associé à une technologie de production B -disponible T^J satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6, où $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour tout $(x, y) \in T^J$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, une mesure de

congestion additive en outputs non polluants est définie selon la différence suivante :

$$DC^B(x, y; k) = \vec{\psi}_{P^0|S_1}(x, y; k) - \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k).$$

Le résultat exposé dans la proposition suivante est immédiat.

Proposition 6.5 *Soit $P(x)$ un ensemble en outputs satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons la propriété suivante :*

$P(x)$ est congestionné en outputs non polluants si et seulement si, il existe $y \in P(x)$ tel que

$$\vec{\psi}_{P^0|S_1}(x, y; k) > \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k).$$

Preuve de la Proposition 6.5 :

Rappelons que $P(x)$ est congestionné dans la dimension des outputs non polluants si et seulement si, $P^0(x) \neq P^J(x)$. Ainsi, quel que soit l'ensemble en outputs P , $y \in P(x)$ si et seulement si, $\vec{\psi}_{P|S_1}(x, y) \geq 0$. De plus, par définition $P^J(x) \subset P^0(x)$ ce qui implique que $\vec{\psi}_{P^0|S_1}(x, y) \geq \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y)$. De ce fait, $P^0(x) \neq P^J(x)$ est équivalent à $\vec{\psi}_{P^0|S_1}(x, y) \neq \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y)$. Ainsi, $P(x)$ est congestionné dans la dimension des outputs non polluants si et seulement si, $\vec{\psi}_{P^0|S_1}(x, y; k) > \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k)$ pour au moins une unité de production $y \in P(x)$, ce qui termine la preuve. \square

Le corollaire suivant peut être proposé pour la mesure additive de congestion $DC^B(x, y; k)$.

Corollaire 6.6 *Soit P^J un ensemble en outputs B-disponible satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6. Ainsi, il existe au moins une unité de production $y \in P^J(x)$ tel que $DC^B(x, y; k) > 0$.*

Tout comme le test radial $DC^B(x, y)$, le test non radial de congestion exposé dans la définition 6.4 peut amener à sous-estimer la congestion en outputs non polluants (Briec, Kerstens et Van de Woestyne, 2017). Ainsi, un test additif de congestion spécifiquement orienté en output non polluant permet de corriger ce problème. Dans ce cas, nous avons :

$$\widetilde{DC}^B(x, y; k^{np}) = \vec{\psi}_{P^0|S_3}(x, y; k^{np}) - \vec{\psi}_{P^J|S_3}(x, y; k^{np}),$$

avec

$$\vec{\psi}_{P^J|S_3}(x, y; k^{np}) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^J(x) \} & \text{si } (y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.7)$$

et

$$\vec{\psi}_{P^\emptyset|S_3}(x, y; k^{np}) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^\emptyset(x) \} & \text{si } (y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^\emptyset(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.8)$$

3 Test de Convexité

3.1 Structure multiplicative

Dans cette sous section, la convexité des outputs dans un ensemble B -disponible est testée. Tout d'abord, nous proposons un test de convexité global dans un ensemble en outputs B -disponible P^J (Figure 2)². Afin d'implémenter ce test, nous nous référons aux fonctions de distance de Shephard en output $\psi_{P^J|S_1}(x, y)$ et $\psi_{P_{nc}^J|S_1}(x, y)$. La première se définit dans un ensemble en extrants B -disponible convexe et la seconde s'établit dans une correspondance en outputs B -disponibles non convexe. Ainsi, nous avons :

$$\psi_{P^J|S_1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.9)$$

2. Ici le test de convexité en extrants est défini dans un ensemble en outputs P^J associé à une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B \subset [m]$. De manière analogue, ce test peut être implémenté dans un ensemble en outputs P^J associé à une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$.

et

$$\psi_{P_{nc}^J|S_1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P_{nc}^J(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P_{nc}^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.10)$$

Les fonctions de distance (6.9) et (6.10) sont présentées dans la figure 2. Les mesures de distance $\psi_{P^J|S_1}(x, y)$ et $\psi_{P_{nc}^J|S_1}(x, y)$ sont inférieure à 1 pour les points a et b . En effet, ces deux points sont situés à l'intérieur des ensembles en outputs B -disponibles convexes et non convexes.

Ainsi, d'après les fonctions de distance multiplicatives (6.9) et (6.10), la convexité des ensembles en outputs (non polluants et polluants) B -disponibles peut être testé à partir des points a et b . En effet, pour ces points, $\psi_{P^J|S_1}(x, y) \neq \psi_{P_{nc}^J|S_1}(x, y)$. De plus, remarquons que le point a permet de tester la convexité de la frontière B -congestionnée. Inversement, le point b permet de tester la convexité de la frontière supérieure.

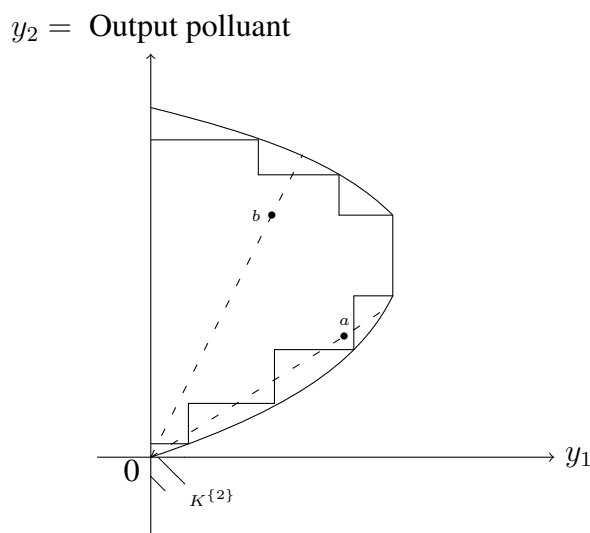


FIGURE 2 – Test global de convexité dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

Dans la définition suivante un test de convexité en outputs polluants et non polluants est introduit.

Définition 6.7 Soit P^J et P_{nc}^J des ensembles en outputs B -disponibles convexes et non convexes, satisfaisant respectivement les axiomes P1-P4 et P6 et, P1-P3 et P6. Pour tout $y \in P_{nc}^J(x)$, avec

$(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, un test de convexité global dans l'ensemble $P^J(x)$ est défini selon le ratio suivant :

$$CT_g^B(x, y) = \frac{\psi_{P_{nc}^J|S_1}(x, y)}{\psi_{P^J|S_1}(x, y)}$$

Remarquons qu'il est également possible de caractériser un test spécifique de convexité (Figure 3). Ce test présente un intérêt particulier lorsque l'on souhaite tester séparément la convexité de la borne supérieure et celle de la frontière B -congestionnée de l'ensemble en outputs. Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition des ensembles en outputs B -disponibles. En effet nous avons montré que ces derniers pouvaient être compris comme des intersections de sous-technologies.

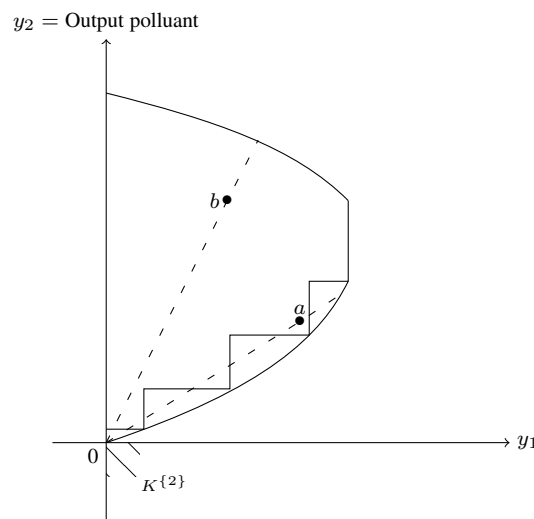


FIGURE 3 – Test spécifique de convexité dans un ensemble en outputs B -disponible $P^J(x)$, avec $J \in \{\emptyset, B\}$ et $B = \{2\}$

La définition suivante introduit un test spécifique de convexité en outputs polluants et non polluants.

Définition 6.8 Soit P^J et P_h^J des ensemble en outputs B -disponibles convexes et hybrides, satisfaisant respectivement les axiomes $P1$ - $P4$ et $P6$ et, $P1$ - $P3$ et $P6$. Pour tout $y \in P_h^J(x)$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, un test spécifique de convexité dans

l'ensemble $P^J(x)$ est présenté selon le ratio suivant :

$$CT_h^B(x, y) = \frac{\psi_{P_h^J}|_{S_1}(x, y)}{\psi_{P^J}|_{S_1}(x, y)}$$

Rappelons qu'un ensemble en outputs B -disponible hybride, P_h^J , admet soit une borne supérieure non convexe soit une frontière B -congestionnée non convexe. Ainsi, $\psi_{P_h^J}|_{S_1}(x, y)$ est soit déterminée par $\psi_{P_{h^+}^J}|_{S_1}(x, y)$ soit par $\psi_{P_{h^-}^J}|_{S_1}(x, y)$. Dans le premier cas, le test spécifique de convexité dans l'ensemble $P^J(x)$ correspond à $CT_{h^+}^B(x, y)$ et dans le second, à $CT_{h^-}^B(x, y)$.

Les résultats exposés dans la proposition suivante sont immédiats.

Proposition 6.9 Soit P^J , P_{nc}^J et P_h^J des ensembles en outputs B -disponibles convexes, non convexes et hybrides, satisfaisant respectivement les axiomes P1-P4 et P6 et, P1-P3 et P6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons les propriétés suivantes :

- (a) $P^J(x)$ est globalement non convexe si et seulement si, il existe $y \in P^J(x)$ tel que $\psi_{P^J}|_{S_1}(x, y) < \psi_{P_{nc}^J}|_{S_1}(x, y)$.
- (b) $P^J(x)$ est spécifiquement non convexe sur sa borne supérieure si et seulement si, il existe $y \in P^J(x)$ tel que $\psi_{P^J}|_{S_1}(x, y) < \psi_{P_{h^+}^J}|_{S_1}(x, y)$.
- (b) $P^J(x)$ est spécifiquement non convexe sur sa frontière B -congestionnée si et seulement si, il existe $y \in P^J(x)$ tel que $\psi_{P^J}|_{S_1}(x, y) < \psi_{P_{h^-}^J}|_{S_1}(x, y)$.

Preuve de la Proposition 6.9 :

(a) $P^J(x)$ est globalement non convexe si et seulement si, $\psi_{P^J}|_{S_1}(x, y) \neq \psi_{P_{nc}^J}|_{S_1}(x, y)$. Par définition $P_{nc}^J(x) \subset P^J(x)$ ce qui implique que $\psi_{P^J}|_{S_1}(x, y) \leq \psi_{P_{nc}^J}|_{S_1}(x, y)$. De fait, $P_{nc}^J(x) \neq P^J(x)$ est équivalent à $\psi_{P_{nc}^J}|_{S_1}(x, y) \neq \psi_{P^J}|_{S_1}(x, y)$. Par conséquent, $P^J(x)$ est globalement non convexe si et seulement si $\psi_{P^J}(x, y) < \psi_{P_{nc}^J}(x, y)$ pour au moins une unité de production $y \in P^J(x)$, ce qui termine la preuve. (b) et (c) : par définition $P_{nc}^J(x) \subset P_h^J(x) \subset P^J(x)$. Ainsi, d'après la preuve de la propriété (a), les propriétés (b) et (c) peuvent immédiatement être déduites. \square

Nous pouvons à présent proposer le corollaire suivant pour les tests de convexité $CT_g^B(x, y)$ et $CT_h^B(x, y)$.

Corollaire 6.10 Soit, P^J un ensemble en outputs B -disponible satisfaisant les axiomes $P1$ - $P3$ et $P6$. Ainsi, (a) si P^J est globalement non convexe alors, il existe au moins une unité de production $y \in P^J(x)$ tel que $CT_g^B(x, y) > 1$.

(b) si P^J est spécifiquement non convexe alors, il existe au moins une unité de production $y \in P^J(x)$ tel que $CT_h^B(x, y) > 1$.

3.2 Structure additive

Considérons les fonctions de distance directionnelle en output $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y)$ et $\vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y)$. Ainsi, nous avons :

$$\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^J(x) \} & \text{si } (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.11)$$

et

$$\vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P_{nc}^J(x) \} & \text{si } (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P_{nc}^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.12)$$

La définition suivante propose un test additif de convexité en outputs polluants et non polluants.

Définition 6.11 Soit P^J et P_{nc}^J des ensembles en outputs B -disponibles convexes et non convexes, satisfaisant respectivement les axiomes $P1$ - $P4$ et $P6$ et, $P1$ - $P3$ et $P6$. Pour tout $y \in P_{nc}^J(x)$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, un test additif de convexité global dans l'ensemble $P^J(x)$ est défini selon la différence suivante :

$$CT_g^B(x, y; k) = \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) - \vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k).$$

De plus, une version additive du test spécifique de convexité en outputs polluants et non polluants est définie dans le résultat ci-après.

Définition 6.12 Soit P^J et P_h^J des ensembles en outputs B -disponibles convexes et hybrides, satisfaisant respectivement les axiomes P1-P4 et P6 et, P1-P3 et P6. Pour tout $y \in P_h^J(x)$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, un test spécifique de convexité dans l'ensemble $P^J(x)$ est défini à partir de la différence suivante :

$$CT_h^B(x, y; k) = \vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) - \vec{\psi}_{P_h^J|S_1}(x, y; k).$$

Les résultats exposés dans la proposition ci-dessous sont immédiats.

Proposition 6.13 Soit P^J , P_{nc}^J et P_h^J des ensembles en outputs B -disponibles convexes, non convexes et hybrides, satisfaisant respectivement les axiomes P1-P4 et P6 et, P1-P3 et P6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, nous avons les propriétés suivantes :

- (a) $P^J(x)$ est globalement non convexe si et seulement si, il existe $y \in P^J(x)$ tel que $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) > \vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k)$.
- (b) $P^J(x)$ est spécifiquement non convexe sur sa borne supérieure si et seulement si, il existe $y \in P^J(x)$ tel que $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) > \vec{\psi}_{P_{h^+}^J|S_1}(x, y; k)$.
- (b) $P^J(x)$ est spécifiquement non convexe sur sa frontière B -congestionnée si et seulement si, il existe $y \in P^J(x)$ tel que $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) > \vec{\psi}_{P_{h^-}^J|S_1}(x, y; k)$.

Preuve de la Proposition 6.13 :

(a) $P^J(x)$ est globalement non convexe si et seulement si, $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) \neq \vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k)$. De plus, par définition, $P_{nc}^J(x) \subset P^J(x)$ ce qui implique que $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) \geq \vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k)$. Ainsi, $P_{nc}^J(x) \neq P^J(x)$ est équivalent à $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) \neq \vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k)$. Par conséquent, $P^J(x)$ est globalement non convexe si et seulement si $\vec{\psi}_{P^J|S_1}(x, y; k) \geq \vec{\psi}_{P_{nc}^J|S_1}(x, y; k)$ pour au moins une unité de production $y \in P^J(x)$, ce qui termine la preuve. (b) et (c) : rappelons que par définition $P_{nc}^J(x) \subset P_h^J(x) \subset P^J(x)$. Ainsi, à partir de la preuve de la propriété (a), les propriétés (b) et (c) sont immédiates. \square

A présent, nous pouvons proposer le corollaire suivant pour les tests de convexité $CT_g^B(x, y; k)$ et $CT_h^B(x, y; k)$.

Corollaire 6.14 *Soit , P^J un ensemble en outputs B -disponible les axiomes $P1$ - $P3$ et $P6$. Ainsi,*
 (a) *si P^J est globalement non convexe alors, il existe au moins une unité de production $y \in P^J(x)$ tel que $CT_g^B(x, y; k) > 0$.*
 (b) *si P^J est spécifiquement non convexe alors, il existe au moins une unité de production $y \in P^J(x)$ tel que $CT_h^B(x, y; k) > 0$.*

4 Tests de Congestion en Outputs Non Polluants et de Convexité : Spécification Non-Paramétrique

Soit $\mathcal{A} = \{(x_z, y_z) : z \in \mathcal{Z}\}$, avec $\mathcal{Z} \in \mathbb{N}$, l'ensemble des unités de production observées sur un secteur de l'économie engagé dans activités productives polluantes.

4.1 Structure multiplicative

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une spécification non-paramétrique généralisée des fonctions de distance multiplicatives en output dans des ensembles de production B -disponibles. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance de Shephard en output de l'unité de production $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ peut être déterminée à travers la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \psi_{P^J,DEA}|_{S_1}(x_0, y_0) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Remarquons que le programme (6.13) possède $2(m+n)+1$ contraintes. Lorsque la spécification non-paramétrique 6.13 est convexe alors, sa solution peut être obtenue grâce à la méthode de programmation linéaire. Par ailleurs, afin d'introduire une mesure non-paramétrique de congestion en outputs non polluants ($DC^{B,DEA}(x, y)$), nous devons calculer le ratio suivant³ :

$$\frac{\psi_{P^J,DEA}|_{S_1}(x^0, y^0)}{\psi_{P^{\emptyset},DEA}|_{S_1}(x^0, y^0)}.$$

Dans le même esprit, la fonction de distance de Shephard en output non-paramétrique $\psi_{P^{\emptyset},DEA}|_{S_1}(x^0, y^0)$ peut être évaluée selon la résolution du programme linéaire suivant :

3. En remplaçant l'hypothèse de rendements d'échelle variables (VRS) par celle de rendements d'échelle constants (CRS) dans (6.13) et en supposant que $\theta = \mu$ alors, le test de congestion en outputs non polluants exposé dans ces travaux est équivalent au test de congestion suggéré par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989); indépendamment du choix de la fonction de distance retenue pour implémenter ce test.

$$\begin{aligned}
 \psi_{P^{\emptyset,DEA}|_{S_1}}(x_0, y_0) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \frac{1}{\lambda} y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_k &= 1, \quad \mu \geq 0.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

En plus de la résolution du programme linéaire (6.13), nous avons besoin de mettre à jour une procédure non-paramétrique (DEA) permettant de calculer la fonction de distance de Shephard en output dans un ensemble B -disponible non convexe, afin d'implémenter le test global de convexité non-paramétrique :

$$CT_g^{B,DEA}(x, y) = \frac{\psi_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y)}{\psi_{P^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y)}.$$

D'après la spécification 3.23, l'utilisation du principe d'énumération va nous permettre d'atteindre cet objectif (Briec, Kerstens, et Vanden Eeckaut, 2004) et donc d'estimer $\psi_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y)$.

Proposition 6.15 *La fonction de distance de Shephard en output dans l'ensemble non convexe*

$P_{nc}^{J,DEA}$ *peut être définie par :*

$$\left[\psi_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}} \left(x, y \mid S^{SD}(x_z, y_z) \cap S^B(x_z, y_z) \right) \right]^{-1} = \begin{cases} \min_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ j=1, \dots, m}} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) & \text{si } \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \leq \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve de la Proposition 6.15 :

Ici, nous avons,

$$\begin{aligned}
 \left[\psi_{P_{nc}^{J,DEA}} |_{S1} \left(x, y |_{S^{SD}(x_z, y_z) \cap S^B(x_z, y_z)} \right) \right]^{-1} &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \begin{array}{l} \max \{ \lambda : x \geq x_z, \quad \lambda y \leq y_z \}; \\ \max \{ \lambda : x \geq x_z, \quad \lambda y \leq^B y_z \} \end{array} \right\} \\
 &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ \lambda : x \geq x_z, \quad \lambda \leq \min_{j=1, \dots, m} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \right\}; \\ \max \left\{ \lambda : x \geq x_z, \quad \lambda \leq \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right), \right. \\ \left. \lambda \geq \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \right\} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, si $\max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \leq \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right)$, alors :

$$\left[\psi_{P_{nc}^{J,DEA}} |_{S1} \left(x, y |_{S^{SD}(x_z, y_z) \cap S^B(x_z, y_z)} \right) \right]^{-1} = \min_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ j=1, \dots, m}} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right).$$

Par définition, $\min_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \leq \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right)$. Ainsi, si $\max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \leq \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right)$ alors, $\min_{j=1, \dots, m} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \leq \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right)$. Cette contrainte est toujours vérifiée pour au moins une unité de décision (DMU) ; c'est-à-dire, pour la DMU évaluée relativement à elle même. Par conséquent, quand $\max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) > \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right)$, se produit pour les DMUs restantes tel qu'il n'existe pas $\lambda > 1$ pour $\lambda \in \left[\max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right); \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \right]$, alors :

$$\max \left\{ \lambda : x \geq x_z, \lambda \leq \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right), \lambda \geq \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \right\} = 1.$$

En effet, une unité de décision évaluée relativement à elle même est toujours efficace ; c'est-à-dire, que son score d'efficace est égal à 1. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 \left[\psi_{P_{nc}^{J,DEA}} |_{S1} \left(x, y |_{S^{SD}(x_z, y_z) \cap S^B(x_z, y_z)} \right) \right]^{-1} &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \max \left\{ \lambda : x \geq x_z, \lambda \leq \min_{j=1, \dots, m} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \right\}; 1 \right\} \\
 &= 1 \qquad \qquad \qquad \square
 \end{aligned}$$

L'axiome de rendements d'échelle variables est imposé dans la Proposition 6.15. D'autres hypothèses concernant la nature des rendements d'échelle peuvent être introduites en considérant des paramètres spécifiques (voir (3.24) et (3.25)). Selon la propriété usuelle de rendements d'échelle constants, le résultat suivant peut être proposé.

Proposition 6.16 *La fonction de distance de Shephard en output dans l'ensemble non convexe $P_{nc,crs}^{J,DEA}$, satisfaisant des rendements d'échelle constants (CRS), peut être définie selon le résultat suivant :*

$$\left[\psi_{P_{nc,crs}^{J,DEA}|S_1} \left(x, y |_{SSD(x_z, y_z) \cap SB(x_z, y_z)} \right) \right]^{-1} = \begin{cases} \min_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ i=1, \dots, n}} \left(\frac{x_i}{x_{z,i}} \right) \min_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ j=1, \dots, m}} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) & \text{si } \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \leq \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve de la Proposition 6.16 :

Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\psi_{P_{nc,crs}^{J,DEA}|S_1} \left(x, y |_{SSD(x_z, y_z) \cap SB(x_z, y_z)} \right) \right]^{-1} &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \max \left\{ \lambda : x \geq \delta x_z, \lambda y \leq \delta y_z, \delta \geq 0 \right\}; \right. \\ &\quad \left. \max \left\{ \lambda : x \geq \delta x_z, \lambda y \leq^B \delta y_z, \delta \geq 0 \right\} \right\} \\ &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \max \left\{ \lambda : \min_{i=1, \dots, n} \left(\frac{x_i}{x_{i,z}} \right) \geq \delta, \right. \right. \\ &\quad \left. \lambda \leq \delta \min_{j=1, \dots, m} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right), \delta \geq 0 \right\}; \\ &\quad \left. \max \left\{ \lambda : \min_{i=1, \dots, n} \left(\frac{x_i}{x_{i,z}} \right) \geq \delta, \lambda \leq \delta \min_{j \notin B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \lambda \geq \delta \max_{j \in B} \left(\frac{y_{z,j}}{y_j} \right), \delta \geq 0 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Notons que $\delta_{max} = \min_{i=1, \dots, n} \left(\frac{x_i}{x_{i,z}} \right)$. Ainsi, selon la preuve 6.15, la preuve de la Proposition 6.16 est immédiate. \square

Soit $P^{J,DEA}$ un ensemble en outputs B -disponible avec $J \neq \emptyset$. Ainsi, si $CT_g^{B,DEA}(x^0, y^0) > 1$ alors, l'ensemble en outputs B -disponible est globalement non convexe. De plus, si $\psi_{P^{J,DEA}|S_1}(x^0, y^0) = \psi_{P^{\emptyset,DEA}|S_1}(x^0, y^0)$ (c'est-à-dire, $DC^{B,DEA}(x^0, y^0) = 1$) alors, la borne supé-

rière de l'ensemble $P^{J,DEA}$ est non convexe (c'est-à-dire, $CT_{h+}^{B,DEA}(x^0, y^0) > 1$). Inversement, si $CT_g^{B,DEA}(x^0, y^0) > 1$ et $\psi_{P^{J,DEA}|S_1}(x^0, y^0) > \psi_{P^{\emptyset,DEA}|S_1}(x^0, y^0)$ (c'est à dire, $DC^{B,DEA}(x^0, y^0) > 1$) alors, la frontière inférieure de $P^{J,DEA}$ est non convexe (c'est à dire, $CT_{h-}^{B,DEA}(x^0, y^0) > 1$).

Par conséquent, la combinaison des tests non-paramétrique de congestion et de convexité dans l'ensemble $P^{J,DEA}$ permet de caractériser la structure de cet ensemble. Le tableau 6.1 résume ces informations.

	$DC^{B,DEA} = 1$	$DC^{B,DEA} > 1$
$CT_g^{B,DEA} = 1$	Borne supérieure (C), Outputs non polluants (N Cong)	Borne inférieure (C), Outputs non polluants (Cong)
$CT_g^{B,DEA} > 1$	Borne supérieure (NC), Outputs non polluants (N Cong)	Borne inférieure (NC), Outputs non polluants (Cong)

TABLE 6.1 – Caractérisation de l'ensemble $P^{J,DEA}$

4.2 Structure additive

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance de directionnelle en output B -disponible de l'unité de production $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ peut être déterminée grâce à la résolution du programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{PJ,DEA|S_1}(x_0, y_0; k^{np}, k^p) = \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} + \beta k^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Une mesure non-paramétrique de congestion en outputs non polluants possédant une structure additive ($DC^{B,DEA}(x, y; k)$), peut être mise en évidence à travers la différence suivante :

$$\vec{\psi}_{P\emptyset,DEA|S_1}(x_0, y_0; k^{np}, k^p) - \vec{\psi}_{PJ,DEA|S_1}(x_0, y_0; k^{np}, k^p).$$

La fonction de distance directionnelle $\vec{\psi}_{P\emptyset,DEA|S_1}(x_0, y_0; k^{np}, k^p)$ peut être déterminée selon la résolution du programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{P\emptyset,DEA|S_1}(x_0, y_0; k) = \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} + \beta k &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j = 1, \dots, m \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Selon une spécification non-paramétrique (DEA), la fonction de distance directionnelle en output dans un ensemble B -disponible non convexe permet de construire un test global de convexité non paramétrique :

$$CT_g^{B,DEA}(x, y; k) = \vec{\psi}_{P^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y; k^{np}, k^p) - \vec{\psi}_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y; k^{np}, k^p).$$

D'après le principe d'énumération, la fonction de distance directionnelle $\vec{\psi}_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y; k^{np}, k^p)$ peut être caractérisée (Briec, Kerstens, et Vanden Eeckaut, 2004) selon le résultat ci-après.

Proposition 6.17 *La fonction de distance directionnelle en output dans l'ensemble non convexe $P_{nc}^{J,DEA}$ peut être définie selon le résultat suivant :*

$$\vec{\psi}_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y; k^{np}, k^p) = \begin{cases} \frac{1}{k} \min_{z \in \mathcal{Z}} \left(y_{z,j} - y_j \right) & \text{si } \frac{1}{k^p} \max_{j \in B} \left(y_{z,j} - y_j \right) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \leq \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} \left(y_{z,j} - y_j \right)$$

Preuve de la Proposition 6.17 :

Ici, nous avons,

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y; k^{np}, k^p) &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \begin{array}{l} \max \{ \beta : x \geq x_z, \quad y + \beta k \leq y_z \}; \\ \max \{ \beta : x \geq x_z, \quad y + \beta k \leq^B y_z \} \end{array} \right\} \\ &= \min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ \beta : x \geq x_z, \quad \beta \leq \frac{1}{k} \min_{j=1, \dots, m} \left(y_{z,j} - y_j \right) \right\}; \\ \max \left\{ \beta : x \geq x_z, \quad \beta \leq \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} \left(y_{z,j} - y_j \right), \right. \\ \left. \beta \geq \frac{1}{k^p} \max_{j \in B} \left(y_{z,j} - y_j \right) \right\} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\frac{1}{k^p} \max_{j \in B} \left(y_{z,j} - y_j \right) \leq \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} \left(y_{z,j} - y_j \right)$, alors :

$$\vec{\psi}_{P_{nc}^{J,DEA}|_{S_1}}(x, y; k^{np}, k^p) = \frac{1}{k} \min_{z \in \mathcal{Z}} \left(y_{z,j} - y_j \right).$$

Par définition, $\frac{1}{k^p} \min_{j \in B} (y_{z,j} - y_j) \leq \frac{1}{k^p} \max_{j \in B} (y_{z,j} - y_j)$. Ainsi, si $\frac{1}{k^p} \max_{j \in B} (y_{z,j} - y_j) \leq \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} (y_{z,j} - y_j)$ alors, $\frac{1}{k} \min_{j=1, \dots, m} (y_{z,j} - y_j) \leq \frac{1}{k^p} \max_{j \in B} (y_{z,j} - y_j)$. Cette contrainte est toujours vérifiée pour au moins une unité de décision (DMU); c'est-à-dire, pour la DMU évaluée relativement à elle-même. Par conséquent, quand $\frac{1}{k^p} \max_{j \in B} (y_{z,j} - y_j) > \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} (y_{z,j} - y_j)$, se produit pour les DMUs restantes tel qu'il n'existe pas $\beta > 0$ pour $\beta \in \left[\frac{1}{k^p} \max_{j \in B} (y_{z,j} - y_j); \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} (y_{z,j} - y_j) \right]$, alors :

$$\max \left\{ \beta : x \geq x_z, \beta \leq \frac{1}{k^{np}} \min_{j \notin B} (y_{z,j} - y_j), \beta \geq \frac{1}{k^p} \max_{j \in B} (y_{z,j} - y_j) \right\} = 0.$$

En effet, une unité de décision évaluée relativement à elle-même est toujours efficiente; c'est-à-dire, que son score d'efficience est égal à 0. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{P_{nc}^{J,DEA}|S_1}(x, y; k^{np}, k^p) &= \min_{z \in Z} \left\{ \max \left\{ \beta : x \geq x_z, \beta \leq \frac{1}{k} \min_{j=1, \dots, m} (y_{z,j} - y_j) \right\}; 0 \right\} \\ &= 0 \qquad \square \end{aligned}$$

Rappelons que la propriété de rendements d'échelle variables est privilégiée dans la Proposition 6.17. D'autres hypothèses concernant la nature des rendements d'échelle peuvent être considérées grâce à des paramètres spécifiques (voir (3.24) et (3.25)). De plus, le croisement des résultats obtenus des versions additives des tests non-paramétrique de congestion et de convexité dans l'ensemble $P^{J,DEA}$, permet de caractériser la structure de cet ensemble. Le tableau 6.2 résume ces informations.

	$DC^{B,DEA}(:, k) = 0$	$DC^{B,DEA}(:, k) > 0$
$CT_g^{B,DEA}(:, k) = 0$	Borne supérieure (C), Outputs non polluants (N Cong)	Borne inférieure (C), Outputs non polluants (Cong)
$CT_g^{B,DEA}(:, k) > 0$	Borne supérieure (NC), Outputs non polluants (N Cong)	Borne inférieure (NC), Outputs non polluants (Cong)

TABLE 6.2 – Caractérisation de l'ensemble $P^{J,DEA}$

5 Illustration Empirique

5.1 Présentation des données

L'ensemble des données utilisées provient de différents rapports et documents du ministère de l'Écologie, du Développement durable et de l'Énergie (<http://www.developpement-durable.gouv.fr>); Abad et Peypoch (2017). Deux inputs sont sélectionnés : (i) la main d'oeuvre (nombre d'employés) et (ii) les coûts opérationnels. Ces intrants permettent de produire différents outputs. Plus précisément, des productions non polluantes, (iii) nombre de passagers et, des productions polluantes, représentées par (iv) les émissions de CO₂. Ces dernières sont mesurées selon l'outil TARMAAC (Traitements et Analyses des Rejets éMis dans l'Atmosphère par l'Aviation Civile) mis au point par la Direction générale de l'Aviation civile (DGAC).

Le tableau 5.1 présente les principales statistiques descriptives des variables utilisées dans cette illustration empirique.

Variables	Min.	Max.	Moyenne	Écart type
Inputs				
Employés (quantité)	67	3813	738	1166
Coûts opérationnels (Keuro)	15614	1112248	187521	329679
Output non polluant				
Passagers (quantité)	1014704	60970551	10328725	15646444
Output polluant				
Emissions de CO ₂ (mégatonne Mt)	13	896	136	222

TABLE 6.3 – Caractéristiques des inputs et des outputs

5.2 Implémentation des tests de congestion en outputs non polluants et de convexité

Les Tableaux 6.4 et 6.5 présentent les valeurs de la fonction de distance de Shephard en output lorsque celle-ci est évaluée respectivement sur un ensemble en outputs librement disponibles convexe (colonne 2 : **Shep. SD_c**), sur un ensemble en outputs *B*-disponible convexe (colonne 3 : **Shep. BD_c**) et sur un ensemble en outputs *B*-disponible non convexe (colonne 4 : **Shep. BD_{nc}**). Au regard des valeurs obtenues par cette fonction de distance, l'emboîtement suivant peut être établi :

$$P_{nc}^{J,DEA}(x) \subset P^{J,DEA}(x) \subset P^{\emptyset,DEA}(x).$$

Les colonnes 5 et 6 exposent respectivement un test global de convexité (\mathbf{CT}_g^B) et une mesure de congestion en outputs non polluants \mathbf{DC}^B . La colonne 7 identifie la partie de l'ensemble $P^{J,DEA}$ sur laquelle les observations sont projetées par la fonction de distance de Shephard en output (c'est-à-dire, la frontière inférieure ou la borne supérieure). Par ailleurs, nous précisons si la projection concerne une partie convexe (C) ou non convexe (NC). La colonne 8 indique si les outputs non polluants sont congestionnés (Cong) ou non congestionnés (N Cong).

Pour l'ensemble des années étudiées, le lecteur peut observer que la procédure non-paramétrique exposée dans ces travaux permet d'identifier des situations de congestion en outputs non polluants ($\mathbf{DC}^B > 1$). Rappelons que ce contexte se présente dès qu'il existe un manque de cessibilité dans les productions résiduelles. De plus, la méthodologie proposée permet de considérer des technologies de production polluante pour lesquelles les outputs (polluants et non polluants) ne satisfont pas l'hypothèse usuelle de convexité. Sachant que les technologies de production B -disponibles (respectivement leurs images en termes de correspondances productives) peuvent être comprises comme des intersections de sous-technologies (respectivement de sous-correspondances productives), ce résultat présente un intérêt particulier dans les études empiriques. En effet, suivant l'approche retenue dans ces travaux, la propriété de convexité de la sous-technologie de production résiduelle (ou sous-technologie de production de la "nature" selon Murty, Russell et Levkof (2012)) peut être remise en cause (Dasgupta et Mäler, 2003).

6 Conclusion

Ce sixième chapitre a permis d'introduire plusieurs tests à partir des mesures d'efficacité technique radiales et non radiales exposées dans le chapitre 5. Tout d'abord, un test de congestion en outputs non polluants a été proposé. Celui-ci permet de vérifier le caractère polluant des technologies de production dans lesquelles la mesure est implémentée. En effet, celle-ci met en lumière le manque de cessibilité dans la dimension des outputs polluants. Ainsi, une version additive et multiplicative de ce test de congestion a été suggérée.

Chapitre 6. Technologie de Production Polluante : Tests de Congestion et de Convexité

Aéroports	Shep. SD _c	Shep. BD _c	Shep. BD _{nc}	CT _g ^B	DC ^B	Frontière		Output non polluant
						Supérieure	Inférieure	
2007								
Bâle-Mulhouse	0,7754	0,7804	0,8075	1,0348	1,0064	-	NC	Cong
Beauvais	0,6569	1	1	1	1,5224	-	C	Cong
Bordeaux-Mérignac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Lille	0,6419	0,6419	0,6419	1	1	C	-	N Cong
Lyon-Saint Exupéry	0,8818	0,8818	0,9127	1,0350	1	NC	-	N Cong
Marseille-Provence	0,9491	0,9506	0,9993	1,0512	1,0016	-	NC	Cong
Montpellier-Méditerranée	0,7503	0,8927	1	1,1202	1,1898	-	NC	Cong
Nantes-Atlantique	0,8713	0,8713	0,8753	1,0047	1	NC	-	N Cong
Nice-Côte d'azur	0,9930	0,9930	1	1,0071	1	NC	-	N Cong
Paris CDG	0,7627	0,7627	0,7627	1	1	C	-	N Cong
Paris ORY	0,3397	0,5023	1	1,9908	1,4788	-	NC	Cong
Strasbourg-Entzheim	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Toulouse-Blagnac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
2008								
Bâle-Mulhouse	0,7579	0,7581	0,8178	1,0787	1,0002	-	NC	Cong
Beauvais	0,6112	1	1	1	1,6360	-	C	Cong
Bordeaux-Mérignac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Lille	0,6944	0,6944	0,6944	1	1	C	-	N Cong
Lyon-Saint Exupéry	0,9086	0,9086	0,9267	1,0200	1	NC	-	N Cong
Marseille-Provence	0,9237	0,9237	0,9237	1	1	C	-	N Cong
Montpellier-Méditerranée	0,7354	0,8793	1	1,1372	1,1957	-	NC	Cong
Nantes-Atlantique	0,9433	0,9433	0,9433	1	1	C	-	N Cong
Nice-Côte d'azur	0,9749	0,9749	0,9785	1,0037	1	NC	-	N Cong
Paris CDG	0,8213	0,8213	0,8213	1	1	C	-	N Cong
Paris ORY	0,3563	0,4767	1	2,0979	1,3379	-	NC	Cong
Strasbourg-Entzheim	0,8689	0,8689	0,8741	1,0060	1	NC	-	N Cong
Toulouse-Blagnac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
2009								
Bâle-Mulhouse	0,8369	0,8369	0,8457	1,0105	1	NC	-	N Cong
Beauvais	0,8037	1	1	1	1,2442	-	C	Cong
Bordeaux-Mérignac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Lille	0,7731	0,7731	0,7754	1,0030	1	NC	-	N Cong
Lyon-Saint Exupéry	0,9226	0,9226	0,9354	1,0140	1	NC	-	N Cong
Marseille-Provence	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Montpellier-Méditerranée	0,7548	0,7980	1	1,2531	1,0573	-	NC	Cong
Nantes-Atlantique	0,9987	0,9987	0,9987	1	1	C	-	N Cong
Nice-Côte d'azur	0,9685	0,9685	0,9750	1,0067	1	NC	-	N Cong
Paris CDG	0,8302	0,8302	0,8302	1	1	C	-	N Cong
Paris ORY	0,3751	0,4697	1	2,1290	1,2522	-	NC	Cong
Strasbourg-Entzheim	0,8738	0,8738	0,8808	1,0080	1	NC	-	N Cong
Toulouse-Blagnac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong

TABLE 6.4 – Tests de congestion en outputs non polluants et de convexité

Par la suite, des tests de convexité possédant une structure additive et multiplicative ont été exposés. Ceux-ci sont construits selon des fonctions de distance définies dans des ensembles de production B -disponibles convexes et non convexes. Ils ont pour objectif de vérifier que l'hypothèse de convexité de ces ensembles reste valable.

L'analyse croisée des résultats obtenus à ces différents tests nous a permis de mettre à jour une procédure de caractérisation des ensembles B -disponibles. Ainsi, une spécification non-paramétrique de ces tests a été implémentée à travers une illustration empirique concernant les secteur aéroportuaire français.

Chapitre 6. Technologie de Production Polluante : Tests de Congestion et de Convexité

Aéroports	Shep. SD _c	Shep. BD _c	Shep. BD _{nc}	CT _g ^B	DC ^B	Frontière		Output non polluant
						Supérieure	Inférieure	
2010								
Bâle-Mulhouse	0,8353	0,8353	0,8415	1,0074	1	NC	-	N Cong
Beauvais	0,7980	1	1	1	1,2531	-	C	Cong
Bordeaux-Mérignac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Lille	0,7758	0,8812	1	1,1348	1,1358	-	NC	Cong
Lyon-Saint Exupéry	0,8663	0,8663	0,8708	1,0052	1	NC	-	N Cong
Marseille-Provence	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Montpellier-Méditerranée	0,7200	0,7597	1	1,3163	1,0552	-	NC	Cong
Nantes-Atlantique	0,9497	0,9497	0,9497	1	1	C	-	N Cong
Nice-Côte d'azur	0,9176	0,9176	0,9236	1,0066	1	NC	-	N Cong
Paris CDG	0,8011	0,8011	0,8011	1	1	C	-	N Cong
Paris ORY	0,3713	0,4439	0,8764	1,9743	1,1954	-	NC	Cong
Strasbourg-Entzheim	0,8097	0,8097	0,8097	1	1	C	-	N Cong
Toulouse-Blagnac	0,9793	0,9793	0,9793	1	1	C	-	N Cong
2011								
Bâle-Mulhouse	0,8210	0,8839	1	1,1313	1,0767	-	NC	Cong
Beauvais	0,7718	1	1	1	1,2956	-	C	Cong
Bordeaux-Mérignac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong
Lille	0,7034	0,7707	1	1,2974	1,0957	-	NC	Cong
Lyon-Saint Exupéry	0,8070	0,8215	1	1,2172	1,0180	-	NC	Cong
Marseille-Provence	0,9485	0,9534	1	1,0488	1,0052	-	NC	Cong
Montpellier-Méditerranée	0,6885	0,7151	0,9118	1,2752	1,0387	-	NC	Cong
Nantes-Atlantique	0,9300	0,9300	0,9300	1	1	C	-	N Cong
Nice-Côte d'azur	0,9234	0,9234	0,9741	1,0549	1	NC	-	N Cong
Paris CDG	0,8012	0,8012	0,8012	1	1	C	-	N Cong
Paris ORY	0,3880	0,4640	0,8639	1,8619	1,1960	-	NC	Cong
Strasbourg-Entzheim	0,7448	0,7448	0,7870	1,0567	1	NC	-	N Cong
Toulouse-Blagnac	1	1	1	1	1	C	-	N Cong

TABLE 6.5 – Tests de congestion en outputs non polluants et de convexité (suite)

Troisième partie

Les Mesures de Productivité

Chapitre 7

Les Mesures de Productivité Multiplicatives et Additives

1 Introduction

Interrogations : Quelles sont les mesures usuelles de productivité ? Quels sont leurs déterminants ? Selon quelles procédures les variations de la productivité peuvent-elles être appréciées ?

Dans la partie précédente, nous avons successivement défini des fonctions de distance radiales et non radiales dans des ensembles de production usuels et dans des technologies de production polluante. Pour chaque unité de production observée à une période de temps (t), ces mesures de distance nous renseignent sur leur degré d'efficacité technique. Une question demeure : comment évolue leur efficacité technique dans le temps ? Afin de répondre à cette interrogation, nous allons définir des mesures de productivité fondées sur des fonctions de distance établies à différentes périodes de temps. Plus précisément, nous retiendrons des périodes de temps consécutives (t) et ($t + 1$).

Deux approches relatives à l'évaluation de la productivité sont souvent identifiées dans la littérature. A partir des travaux fondateurs de Solow (1957), la croissance de la productivité peut être appréciée en temps continu, à travers la différentiabilité de la fonction de production. Les indices et les indicateurs de productivité permettent d'analyser des variations de productivité dans des périodes de temps consécutives. Dans ce chapitre nous nous intéresserons spécifiquement à ces

mesures de productivité.

Dans section suivante, les indices et les indicateurs de productivité usuels sont exposés. Les définitions des mesures de productivité multiplicatives de Malmquist et de Hicks-Moorsteen sont introduites. Dans le même temps, les indicateurs de productivité de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen sont présentés. Une attention particulière est accordée à la décomposition de ces mesures de productivité.

La troisième section est consacrée à l'étude des mesures d'éco-productivité. Ainsi, l'indice de Malmquist-Luenberger et l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger sont successivement proposés. De plus, de nouvelles définitions des mesures d'éco-productivité de type Hicks-Moorsteen et Luenberger-Hicks-Moorsteen sont introduites. A cette occasion, les problèmes d'infaisabilités associés aux mesures d'éco-productivité usuelles, sont analysés.

Enfin, dans une dernière section une illustration empirique est retenue. Celle-ci concerne le secteur aéroportuaire français. Elle permet d'implémenter les mesures d'éco-productivité exposées dans ce chapitre, selon une spécification non-paramétrique.

2 Indices et Indicateurs de Productivité : Définition Usuelle

2.1 Indice de Malmquist et indicateur de Luenberger

Caves, Christensen et Diewert (1992) introduisent les indices de productivité de Malmquist en input et en output. Ces indices sont élaborés, suite aux travaux de Malmquist (1953). Les indices de productivité de Malmquist en input et en output sont construits à partir de fonctions de distance radiales. Ils ont été implémentés pour la première fois par Pittman (1983) et par Nishimizu et Page (1982), qui sont les premiers à proposer une décomposition des variations de productivité. Ces auteurs distinguent deux déterminants : le changement d'efficacité technique et le progrès technologique. A partir des fonctions de distance de Shephard (1970) (c'est-à-dire l'inverse des mesures d'efficacité de Debreu-Farrell), Färe, Grosskopf, Lindgren et Roos (1995) proposent une procédure d'estimation de l'indice de Malmquist en intégrant la décomposition de Nishimizu et Page (1982).

Les indices de productivité de Malmquist en input et en output sont respectivement définis par :

$$M_{t,t+1}^i(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \left[\frac{D_t^i(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^i(x_t, y_t)} \times \frac{D_{t+1}^i(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^i(x_t, y_t)} \right]^{1/2} \quad (7.1)$$

et

$$M_{t,t+1}^o(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \left[\frac{D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^o(x_t, y_t)} \times \frac{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^o(x_t, y_t)} \right]^{1/2}. \quad (7.2)$$

Les orientations en input et en output de l'indice de productivité de Malmquist sont définies comme des moyennes géométriques des indices de Malmquist aux périodes (t) et $(t+1)$. Cette spécification permet d'éviter des choix arbitraires entre les périodes de références (t) et $(t + 1)$. Elle est issue des travaux de Färe, Grosskopf, Lindgren et Roos (1995).

Des gains de productivité, respectivement des pertes, sont à signaler quand l'indice de productivité de Malmquist orienté en input est inférieur, respectivement supérieur, à 1. Inversement, dans le cas de l'orientation en output,¹ la croissance de la productivité, respectivement la diminution, est mise en évidence par des valeurs supérieures, respectivement inférieures, à 1.

Nishimizu et Page (1982) décomposent la productivité totale des facteurs en deux composantes : le changement technologique et la variation d'efficacité technique. Färe, Grosskopf, Lindgren et Roos (1995) montrent que l'indice de productivité de Malmquist peut être décomposé selon les mêmes composantes. La variation d'efficacité en output est défini par :

$$EFFCH = \frac{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^o(x_t, y_t)}. \quad (7.3)$$

Le progrès technique en output est déterminé par :

$$TECH = \left[\frac{D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \frac{D_t^o(x_t, y_t)}{D_{t+1}^o(x_t, y_t)} \right]^{1/2}. \quad (7.4)$$

L'équation (7.3) mesure la variation d'efficacité technique entre les périodes (t) et $(t + 1)$. Elle correspond au rapport des écart à la frontière de production entre les périodes de temps $(t + 1)$ et (t) . La composante *TECH* mesure le changement technologique. Elle permet d'identifier les variations de la frontière de production entre deux périodes de temps consécutives.

1. Une illustration de l'indice de productivité de Malmquist en output peut être observée dans Färe, Grosskopf et Russell (1998).

Chambers (1996, 2002) définit l'indicateur de productivité de Luenberger en utilisant des fonctions de distances directionnelle.

$$L(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{D}_t(x_t, y_t; g_t) - \vec{D}_t(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1}) \right) + \left(\vec{D}_{t+1}(x_t, y_t; g_t) - \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1}) \right) \right]. \quad (7.5)$$

Où $g_{t,t+1} = (h_{t,t+1}, k_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ est un vecteur directionnel fixé *a priori*. L'indicateur de productivité de Luenberger est présenté comme une moyenne arithmétique des indicateurs de Luenberger aux périodes de temps (t) et $(t + 1)$. Cette spécification permet d'éviter des choix arbitraires entre les périodes de références (t) et $(t + 1)$. L'indicateur de productivité de Luenberger se construit à partir d'une moyenne arithmétique, et non géométrique, puisque les fonctions de distance directionnelle ont une structure additive, contrairement aux fonctions de distance radiales pourvues d'une structure multiplicative.

Si $g_{t,t+1} = (x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ alors, l'indicateur de productivité de Luenberger est défini à partir de fonctions de distance proportionnelle (Briec, 1997 ; Chambers, Färe et Grosskopf, 1996). Les gains de productivité, respectivement les pertes, sont associés à des valeurs positives, respectivement négatives, de l'indicateur de Luenberger.²

L'indicateur de productivité de Luenberger peut être décomposé de façon additive en deux composantes représentant respectivement, la variation d'efficacité technique et le changement technologique.

$$EFFCH = \vec{D}_t(x_t, y_t; g_t) - \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1}) \quad (7.6)$$

et

$$TECH = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1}) - \vec{D}_t(x_{t+1}, y_{t+1}; g_{t+1}) \right) + \left(\vec{D}_{t+1}(x_t, y_t; g_t) - \vec{D}_t(x_t, y_t; g_t) \right) \right]. \quad (7.7)$$

Les résultats (7.6) et (7.7) ont la même interprétation que ceux exposés précédemment dans le

2. Il est possible de construire des indicateurs de Luenberger orientés en input ou en output. Ces derniers se distinguent des indices de Malmquist, en s'exprimant comme une différence et non selon un ratio, du fait de la structure additive des fonctions de distance directionnelle.

cadre de l'indice de productivité de Malmquist. La seule différence intervient dans leur construction, additive ou multiplicative. Ainsi, les composantes *EFFCH* et *TECH* sont déterminées en termes de différences et non de ratios.

2.2 Indice de Hicks-Moorsteen et indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen

Selon une procédure alternative, Diewert (1992) propose un indice de productivité se référant à des fonctions de distance multiplicatives. Celui-ci est construit selon un ratio entre des indices de quantité en input et en output de Malmquist. Il attribue cette idée à Hicks (1961) et Moorsteens (1961). Cette approche a été retenue par Bjurek (1996).

D'après Bjurek (1996), le ratio entre les indices de quantité en output et en input de Malmquist, à une période de temps (t), permet de définir l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen relatif à cette période de référence :

$$HM_t(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \frac{MO_t(x_t, y_t, y_{t+1})}{MI_t(x_t, x_{t+1}, y_t)}, \quad (7.8)$$

où

$$MO_t(x_t, y_t, y_{t+1}) = \frac{D_t^o(x_t, y_{t+1})}{D_t^o(x_t, y_t)}$$

et

$$MI_t(x^t, x^{t+1}, y^t) = \frac{D_t^i(x_{t+1}, y_t)}{D_t^i(x_t, y_t)}.$$

L'indice de productivité de Hicks-Moorsteen est toujours supérieur, respectivement inférieur, à 1 lorsqu'il met en lumière des gains de productivité, respectivement des pertes. L'indice de productivité de Hicks-Moorsteen en ($t + 1$) est défini par :

$$HM_{t+1}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \frac{MO_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, y_t)}{MI_{t+1}(x_t, x_{t+1}, y_{t+1})}, \quad (7.9)$$

avec

$$MO_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, y_t) = \frac{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_t)}$$

et

$$MI_{t+1}(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \frac{D_{t+1}^i(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^i(x_t, y_{t+1})}.$$

La moyenne géométrique des indices de Hicks-Moorsteen aux périodes temps (t) et ($t + 1$) se présente comme suit :

$$HM_{t,t+1}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = [HM_t(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) \times HM_{t+1}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1})]^{1/2}. \quad (7.10)$$

Contrairement à l'indice de productivité de Malmquist, O'Donnell (2012) montre que l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen possède une structure multiplicative complète. L'ensemble des indices qui possèdent une telle structure peuvent être décomposés en plusieurs composantes. Ainsi, O'Donnell (2012) propose une décomposition multiplicative de l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen en termes de variation d'efficacité technique, de progrès technologique et de changement d'efficacité d'échelle.

Briec et Kerstens (2004) introduisent l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen. A la période de temps (t), ce dernier se définit comme une différence entre des indicateurs de quantité de Luenberger en output et en input.

$$\begin{aligned} LHM_t(x_{t+1}, y_{t+1}, x_t, y_t; g_t, g_{t+1}) \\ = LO_t(x_t, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) - LI_t(x_t, x_{t+1}, y_t; h_t, h_{t+1}), \end{aligned} \quad (7.11)$$

où

$$LO_t(x_t, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) = \vec{D}_t(x_t, y_t; 0, k_t) - \vec{D}_t(x_t, y_{t+1}; 0, k_{t+1})$$

et

$$LI_t(x_t, x_{t+1}, y_t; h_t, h_{t+1}) = \vec{D}_t(x_{t+1}, y_t; h_{t+1}, 0) - \vec{D}_t(x_t, y_t; h_t, 0).$$

Les indicateurs de quantité en input et en output de Luenberger sont des généralisations des indices de quantité en input et en output de Malmquist (Chambers, Färe and Grosskopf, 1994). L'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen est supérieur, respectivement infé-

rieur, à 0 lorsqu'il indique des gains de productivité, respectivement des pertes. Selon la période de référence ($t + 1$), l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen se définit comme suit :

$$\begin{aligned} LHM_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, x_t, y_t; g_t, g_{t+1}) \\ = LO_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, y_t; k_t, k_{t+1}) - LI_{t+1}(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}), \end{aligned} \quad (7.12)$$

avec

$$LO_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, y_t; k_t, k_{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_t; 0, k_t) - \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}; 0, k_{t+1})$$

et

$$LI_{t+1}(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}; h_{t+1}, 0) - \vec{D}_{t+1}(x_t, y_{t+1}; h_t, 0).$$

La moyenne arithmétique des indicateurs de Luenberger-Hicks-Moorsteen en (t) et ($t + 1$) se présente comme suit :

$$\begin{aligned} LHM_{t,t+1}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = \frac{1}{2} [LHM_t(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) + LHM_{t+1}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Contrairement à l'indicateur de productivité de Luenberger, Ang et Kerstens (2017) montrent que l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen possède une structure additive complète. Partant de ce résultat, ils proposent une décomposition additive de l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

3 Les Mesures d'Eco-Productivité

Les mesures de productivité exposées dans cette section sont basées sur les mesures d'eco-efficacité présentées dans le chapitre précédent. Ainsi, les indices et les indicateurs de productivité

exposés dans cette section sont construits selon des fonctions de distance définies dans le schéma S2. En ce sens, nous parlerons de mesures d'éco-productivité.

3.1 Mesure de Malmquist-Luenberger et indicateur d'éco-productivité de Luenberger

A partir de la définition de l'indice de productivité de Malmquist en output, Chung, Färe et Grosskopf (1997) introduisent l'indice de productivité de Malmquist-Luenberger (ML). Dans le cadre d'une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$, cet indice se définit comme suit :

Définition 7.1 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3 tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger est défini par :

$$ML_{t,t+1}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \left[\frac{1 + \vec{\psi}_{T_t^J} |s_2(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, y_t^{np}, -y_t^p)}{1 + \vec{\psi}_{T_t^J} |s_2(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, y_{t+1}^{np}, -y_{t+1}^p)} \times \frac{1 + \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |s_2(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, y_t^{np}, -y_t^p)}{1 + \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |s_2(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, y_{t+1}^{np}, -y_{t+1}^p)} \right]^{1/2} \quad (7.14)$$

L'indice de d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger est construit en utilisant la relation d'équivalence entre les mesures d'éco-efficacité multiplicatives et additives. En ce sens, Chung, Färe et Grosskopf (1997) montrent que cet indice correspond à la mesure de productivité de Malmquist en output lorsque le vecteur directionnel utilisé dans (7.14) est défini par : $g_{t,t+1} = (0, y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p)$.

Lorsque l'indice d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger est supérieur, respectivement inférieur, à 1, des gains d'éco-productivité, respectivement des pertes, sont à signaler. Rappelons que ceux-ci prennent place lorsque les productions polluantes et non polluantes sont traitées de façon asymétrique afin d'atteindre un état techniquement efficient. Ainsi, sur des périodes de temps consécutives (t) et $(t + 1)$, il existe des gains d'éco-productivité si, pour un niveau donné d'intrant, il est possible de produire plus d'outputs non polluants en $(t + 1)$ que en (t) , tout en générant moins de résidus polluants en $(t + 1)$ que en (t) .

Pareillement à l'indice de Malmquist en output, la mesure d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger peut être décomposée en deux composantes : le changement technologique (MLTC) et la variation d'efficacité technique (MLEV).

$$MLEV(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \frac{1 + \vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, y_t^{np}, -y_t^p)}{1 + \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, y_{t+1}^{np}, -y_{t+1}^p)} \quad (7.15)$$

et

$$MLTC(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \left[\frac{1 + \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, y_t^{np}, -y_t^p)}{1 + \vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, y_t^{np}, -y_t^p)} \times \frac{1 + \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, y_{t+1}^{np}, -y_{t+1}^p)}{1 + \vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, y_{t+1}^{np}, -y_{t+1}^p)} \right]^{1/2}. \quad (7.16)$$

Les composantes (7.15) et (7.16) ont la même interprétation que celles proposées dans le cadre de l'indice de productivité de Malmquist. Néanmoins, rappelons que celles-ci sont construites selon des mesures d'éco-efficacité définies dans le schéma S2.

Azad et Ancev (2014) introduisent une mesure d'éco-productivité à partir de l'indicateur de productivité de Luenberger. Pour définir ce nouvel indicateur, ils utilisent des mesures d'éco-efficacité non radiales³. Dans le cadre d'une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$, l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger (EL) se définit comme suit :

Définition 7.2 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3 tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et, $y_{t,t+1} =$

3. Picazo-Tadeo, Castillo-Gimenez et Beltran-Estevé (2014) adoptent une démarche similaire. Ces auteurs considèrent des fonctions de distance directionnelle en sous-vecteur (polluant) pour déterminer une mesure d'éco-productivité.

$(y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger (EL) est défini par :

$$\begin{aligned}
 & EL_{t,t+1}(x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_{t,t+1}^{np}, k_{t,t+1}^p) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, k_t^p) - \vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) \right) \right. \\
 & \left. + \left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, k_t^p) - \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) \right) \right] \quad (7.17)
 \end{aligned}$$

L'indicateur d'éco-productivité de Luenberger signale des gains d'éco-productivité, respectivement des pertes, quand il prend des valeurs positives, respectivement négatives. D'après Azad et Ancev (2014), l'EL peut être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & EL_{t,t+1}(x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_{t,t+1}^{np}, k_{t,t+1}^p) \\
 &= \left[\vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, k_t^p) + \vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) - \vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) \right) \right. \\
 & \left. + \left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, k_t^p) - \vec{\psi}_{T_t^J} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, k_t^p) \right) \right] \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

La variation de l'éco-efficience entre les périodes de temps (t) et $(t + 1)$ est définie par les termes compris dans les premiers crochets. Ceux appartenant aux seconds déterminent le changement technologique s'opérant entre les deux périodes consécutives (t) et $(t + 1)$.

3.2 Les mesures d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen et de Luenberger-Hicks-Moorsteen

3.2.1 Indices d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen

Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho (2004) définissent un indice de performance environnementale (EPI). Cette mesure de productivité possède la même structure que l'indice de productivité de Hicks-Moorsteens. L'EPI est construit selon le ratio entre un indice de quantité de Malmquist en output non polluant (M_t^{np}) et un indice de quantité de Malmquist en output polluant (M_t^p) ⁴. Dans le cadre d'une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$,

4. Dans ces travaux, nous considérons une version temporelle plutôt qu'une version territoriale de l'EPI (Färe , Grosskopf et Hernandez-Sancho , 2004).

l'EPI est défini ci-après.

Définition 7.3 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3 tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice de performance environnementale est caractérisé par :

$$EPI_t(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{M_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{M_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)}, \quad (7.19)$$

où M_t^{np} et M_t^p sont respectivement les indices de quantité de Malmquist en output non polluant et polluant à la période (t) .

Remarquons que les indices de quantité de Malmquist en output non polluant et polluant, intervenant dans l'EPI, sont respectivement définis par :

$$M_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p)} \quad (7.20)$$

et

$$M_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p)}. \quad (7.21)$$

L'indice de quantité de Malmquist en output non polluant (M_t^{np}) est supérieur (inférieur) à 1 lorsque les outputs non polluants augmentent (diminuent), entre les périodes (t) et $(t + 1)$, pour une quantité donnée d'intrants et de résidus polluants. De même, si l'indice de quantité de Malmquist en output polluant (M_t^p) est inférieur, respectivement supérieur, à 1 alors, entre les périodes (t) et $(t + 1)$, les productions polluantes diminuent, respectivement augmentent, pour une quantité donnée de production non polluante et d'intrants. Ainsi, quand l'EPI à la période (t) est plus grand, respectivement plus petit, que 1 alors, il met en lumière des gains d'éco-productivité, respectivement des pertes.

Dans le même esprit, Abad (2015) introduit un nouvel indice d'éco-productivité. Celui-ci présente la même structure que l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen. Il est construit selon un partitionnement en composantes désirables et indésirables. Abad (2015) identifie comme éléments

"désirables" les productions non polluantes et désigne comme "indésirables" les intrants (non partitionnés) et les outputs polluants. Cet indice d'éco-productivité peut ainsi être défini dans le cadre d'une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et, $B \subset [m]$.

Définition 7.4 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et, $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen (EHM) de la période (t) est représenté par :

$$EHM_t^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{EMO_t^{np} (x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np})}{EMI_t^{I \cup O^p} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)}, \quad (7.22)$$

où EMO_t^{np} et $EMI_t^{I \cup O^p}$ sont respectivement les indices de quantité de Malmquist en composantes désirables et indésirables à la période (t) .

Notons que les indices de quantité de Malmquist en composantes désirables et indésirables, intervenant dans l'indice de d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen, sont respectivement définis comme suit :

$$EMO_t^{np} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p)}, \quad (7.23)$$

$$EMI_t^{I \cup O^p} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p)}. \quad (7.24)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p) &= \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, \frac{y_t^{np}}{\lambda}, y_t^p \right) \in T_t^J \right\} \\ &= \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{y_t^{np}}{\lambda}, y_t^p \right) \in P_t^J(x) \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

et

$$\begin{aligned}\psi_{T_t^J}^{I\cup OP} |_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p) &= \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x_t}{\lambda}, y_t^{np}, \frac{y_t^p}{\lambda} \right) \in T_t^J \right\} \\ &= \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x_t}{\lambda}, \frac{y_t^p}{\lambda} \right) \in Q_t^J(y_t^{np}) \right\}.\end{aligned}\quad (7.26)$$

L'indice de quantité de Malmquist en composantes désirables est supérieur, respectivement inférieur, à 1 quand, les composantes désirables (productions non polluantes) augmentent, respectivement diminuent, entre les périodes (t) et $(t + 1)$, pour un niveau donnée de composantes indésirables (intrants et productions polluantes). De manière analogue, si l'indice de quantité de Malmquist en composantes indésirables est inférieur (supérieur) à 1 alors, entre les périodes (t) et $(t + 1)$, une quantité inférieure (supérieure) de composantes indésirables est nécessaire afin de produire une quantité donnée de composantes désirables. Ainsi, lorsque l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen est supérieur, respectivement inférieur, à 1 alors, il met en lumière des gains, respectivement des pertes, d'éco-productivité.

Remarquons que l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen de la période $(t + 1)$ se présente de la manière suivante :

$$EHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{EMO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p)}{EMI_{t+1}^{I\cup OP}(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)},\quad (7.27)$$

tels que

$$EMO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p)},\quad (7.28)$$

$$EMI_{t+1}^{I\cup OP}(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_{t+1}^J}^{I\cup OP} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_{t+1}^J}^{I\cup OP} |_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}.\quad (7.29)$$

L'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen entre deux périodes de référence (t) et $(t + 1)$ correspond à la moyenne géométrique des indices de Hicks-Moorsteen en (t) et $(t + 1)$. Cette procédure permet d'éviter des choix arbitraires entre les périodes de référence (t) et $(t + 1)$.

Proposition 7.5 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes

$T1 - T3$ tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et, $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen global est :

$$EHM_{t,t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \left[EHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) \times EHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) \right]^{1/2}. \quad (7.30)$$

Les deux résultats suivants établissent des relations d'équivalence entre l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen, l'indice usuel de Hicks-Moorsteen et l'EPI.

Proposition 7.6 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $O = O^p \cup O^{np}$, l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen en output de la période (t) correspond à :

$$EHM_t^O(x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = EPI_t(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p), \quad (7.31)$$

où EPI_t est l'indice de performance environnementale de Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho (2004).

La Proposition 7.6 précise que lorsque l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen est spécifiquement défini en output alors, il correspond à l'indice de performance environnementale de Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho (2004). Ce résultat présente un intérêt particulier dans la réalisation des études empiriques. En effet, cette spécification permet de s'affranchir des problèmes d'infaisabilités (voir Annexe 3). De ce fait, une analyse globale de l'éco-productivité peut être réalisée (voir section 4).

Preuve de la Proposition 7.6 :

Pour toute période de temps (t) , nous avons $O = O^p \cup O^{np}$ tel que $y_t = (y_t^{np}, y_t^p)$. Ainsi,

$$EHM_t^O(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{EMO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np})}{EMI_t^{Op}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)}, \quad (7.32)$$

où

$$EMO_t^{np} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2} (x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p)}, \quad (7.33)$$

$$EMI_t^{Op} (x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p)}. \quad (7.34)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p) &= \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, \frac{y_t^{np}}{\lambda}, y_t^p \right) \in T_t^J \right\} \\ &= \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{y_t^{np}}{\lambda}, y_t^p \right) \in P_t^J(x) \right\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{T_t^J}^p|_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p) &= \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, y_t^{np}, \frac{y_t^p}{\lambda} \right) \in T_t^J \right\} \\ &= \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, \frac{y_t^p}{\lambda} \right) \in Q_t^J(y_t^{np}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Le résultat exposé dans la Proposition 7.6 peut immédiatement être déduit. \square

Proposition 7.7 *Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ tels que $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$, l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen global devient :*

$$EHM_{t,t+1}^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = HM_{t,t+1} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}), \quad (7.37)$$

où $HM_{t,t+1}$ est l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen global.

Preuve de la Proposition 7.7 :

Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$, nous avons $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$ tel que $x_{t,t+1}^{np} =$

$x_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}$. Ainsi,

$$EHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{EMO_t^{np}(x_t, y_t, y_{t+1})}{EMI_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t)}, \quad (7.38)$$

où

$$EMO_t^{np}(x_t, y_t, y_{t+1}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1})}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t)}, \quad (7.39)$$

$$EMI_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t) = \frac{\psi_{T_t^J}^I|_{S_2}(x_{t+1}, y_t)}{\psi_{T_t^J}^I|_{S_2}(x_t, y_t)}. \quad (7.40)$$

Avec

$$\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t) = \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, \frac{y_t}{\lambda} \right) \in T_t^J \right\} \quad (7.41)$$

et

$$\psi_{T_t^J}^I|_{S_2}(x_t, y_t) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x_t}{\lambda}, y_t \right) \in T_t^J \right\} \quad (7.42)$$

De plus,

$$EHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{EMO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_t, y_{t+1})}{EMI_{t+1}^I(x_t, x_{t+1}, y_{t+1})}, \quad (7.43)$$

où

$$EMO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{\psi_{T_{t+1}^J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1})}{\psi_{T_{t+1}^J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}, y_t)}, \quad (7.44)$$

$$EMI_{t+1}^I(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \frac{\psi_{T_{t+1}^J}^I|_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1})}{\psi_{T_{t+1}^J}^I|_{S_2}(x_t, y_{t+1})}. \quad (7.45)$$

Avec

$$\psi_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}) = \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_{t+1}, \frac{y_{t+1}}{\lambda} \right) \in T_{t+1}^J \right\} \quad (7.46)$$

et

$$\psi_{T_{t+1}^J}^I |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x_{t+1}}{\lambda}, y_{t+1} \right) \in T_{t+1}^J \right\} \quad (7.47)$$

Le résultat présenté dans la Proposition 7.7 peut immédiatement être déduit. \square

Contrairement à la mesure d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger, l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen possède une structure multiplicative complète (O'Donnell, 2012). Rappelons que les indices possédant une telle structure peuvent être décomposés en plusieurs composantes multiplicatives. Ainsi, suivant O'Donnell (2012) une décomposition multiplicative de l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen peut être établie.

3.2.2 Indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen

Abad (2015) introduit une mesure d'éco-productivité possédant la même structure que l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Ce nouvel indicateur d'éco-productivité repose également sur un partitionnement en composantes désirables (outputs non polluants) et indésirables (intrants et extrants polluants). Le résultat suivant définit l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen (ELHM) dans le cadre d'une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$.

Définition 7.8 *Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3 tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et, $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen*

de la période (t) est représenté par :

$$\begin{aligned} ELHM_t^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}, k_t^p, k_{t+1}^p) \\ = ELO_t^{np} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) - ELI_t^{I \cup O^p} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^p, k_{t+1}^p), \end{aligned} \quad (7.48)$$

où ELO_t^{np} et $ELI_t^{I \cup O^p}$ sont respectivement des indicateurs de quantité de Luenberger en composantes désirables et indésirables à la période (t).

Notons que les indicateurs de quantité de Luenberger en composantes désirables et indésirables sont respectivement :

$$\begin{aligned} ELO_t^{np} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{np} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, 0) - \\ \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{np} |_{S_2} (x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0), \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} ELI_t^{I \cup O^p} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^p, k_{t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; h_{t+1}, 0, k_{t+1}^p) \\ - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; h_t, 0, k_t^p). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{np} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, 0) = \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_t, y_t^{np} + \beta k_t^{np}, y_t^p) \in T_t^J \} \\ = \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y_t^{np} + \beta k_t^{np}, y_t^p) \in P_t^J(x_t) \}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; h_t, 0, k_t^p) = \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_t - \beta h_t, y_t^{np}, y_t^p + \beta k_t^p) \in T_t^J \} \\ = \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_t - \beta h_t, y_t^p + \beta k_t^p) \in Q_t^J(y_t^{np}) \}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Dans la Figure 1, en maintenant constant les composantes désirables (outputs non polluants) en (t), la mesure d'efficacité technique en composantes indésirables ($\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}{}^{I \cup O^p} |_{S_2}$) peut être évaluée

par rapport aux observations (x_t, y_t^p) et (x_{t+1}, y_{t+1}^p) .

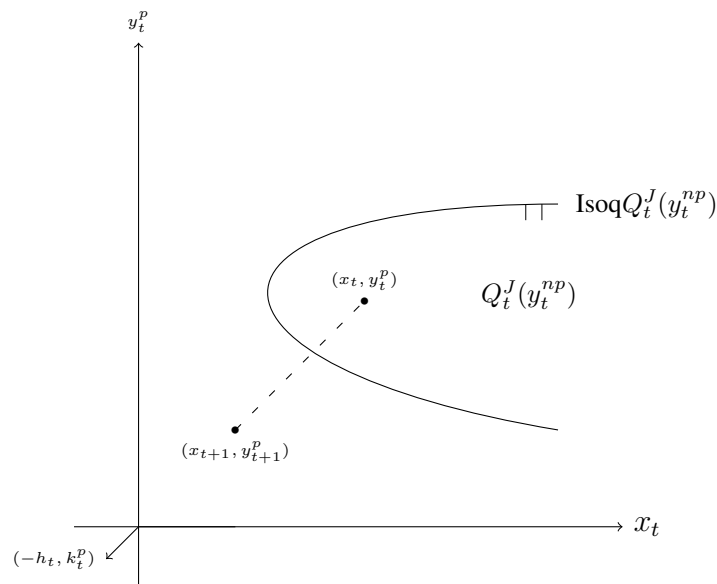


FIGURE 1 – Mesure d'efficacité technique en composantes indésirables dans l'ensemble $Q_t^J(y_t^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$

Il est nécessaire de remarquer que l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen de la période $(t + 1)$ est :

$$\begin{aligned} & ELHM_{t+1}^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}, k_t^p, k_{t+1}^p) \\ &= ELO_{t+1}^{np} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) - ELI_{t+1}^{I \cup O^p} (x_t, x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^p, k_{t+1}^p), \end{aligned} \quad (7.53)$$

avec

$$\begin{aligned} ELO_{t+1}^{np} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) &= \vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_t^{np}, 0) \\ &\quad - \vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0), \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} ELI_{t+1}^{I \cup O^p} (x_t, x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^p, k_{t+1}^p) &= \vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; h_{t+1}, 0, k_{t+1}^p) \\ &\quad - \vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p; h_t, 0, k_t^p). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Pour toute période de temps (t) , l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen signale des gains d'éco-productivité, respectivement des pertes, s'il prend des valeurs positives, respectivement négatives. Dans ce cas, le changement de productivité dans les composantes désirables est plus important, respectivement plus faible, que la variation de productivité dans les composantes indésirables. L'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen entre deux périodes consécutives (t) et $(t + 1)$ se définit selon une moyenne arithmétique, afin de ne pas opérer de choix arbitraire entre les périodes de référence (t) et $(t + 1)$.

Proposition 7.9 *Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen global est caractérisé par :*

$$\begin{aligned} ELHM_{t,t+1}^{I,O} & (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}, k_t^p, k_{t+1}^p) \\ & = \frac{1}{2} \left[ELHM_t^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}, k_t^p, k_{t+1}^p) \right. \\ & \quad \left. + ELHM_{t+1}^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}, k_t^p, k_{t+1}^p) \right]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Notons que la mesure d'efficience technique en composantes indésirables $(\vec{\psi}_{T^J}^{I \cup O^p} |_{S_2})$ peut être indéterminée. D'après la Figure 1, selon la disposition de l'observation (x_{t+1}, y_{t+1}^p) , il est possible que la fonction de distance en composantes indésirables en périodes-croisées $(t, t + 1)$ $\vec{\psi}_{T^J}^{I \cup O^p} |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; h_{t+1}, 0, k_{t+1}^p)$ n'obtienne pas une valeur finie. Dans ce cas, l'indicateur d'éco-productivité ELHM présente des infaisabilités (Briec et Kerstens, 2009ab). Ce problème d'infaisabilités peut être surmonté, en se référant à une mesure d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen spécifiquement orientée en output (polluant et non polluant)⁵.

Proposition 7.10 *Pour une technologie de production B -disponible T^J avec deux périodes consécutives $(t, t+1)$ tels que $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $O = O^p \cup O^{np}$, l'indicateur d'éco-productivité*

5. Cette construction est inspirée des travaux de Abad (2015), se référant eux-mêmes aux apports de Briec et Kerstens (2011) et, Briec, Dumas et Stenger (2013). Ouellette et Vierstraete (2004) proposent une approche similaire à travers la définition d'un indice de productivité de Malmquist spécifiquement orienté en intrant de court terme.

de Luenberger-Hicks-Moorsteen en output pour la période (t) est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} ELHM_t^O(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_t^p, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) \\ = ELO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) - ELI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; k_t^p, k_{t+1}^p), \end{aligned} \quad (7.57)$$

où ELO_t^{np} et ELI_t^p sont respectivement les indicateurs de quantité de Luenberger en composantes désirables et indésirables.

Les indicateurs de quantité de Luenberger en composantes désirables et indésirables sont définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} ELO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^{np}}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, 0) \\ - \overrightarrow{\psi}_{T_t^{np}}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0), \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} ELI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; k_t^p, k_{t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^p}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^p) \\ - \overrightarrow{\psi}_{T_t^p}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, 0, k_t^p). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Quand l'indicateur de quantité de Luenberger en composantes désirables est supérieur, respectivement inférieur, à 0 alors entre les périodes consécutives (t) et $(t + 1)$, une quantité supérieure, respectivement inférieure, de productions non polluantes est produite pour une quantité donnée d'intrants et de productions polluantes. De même, lorsque l'indicateur de quantité de Luenberger en composantes indésirables est inférieur, respectivement supérieur, à 0 alors, moins, respectivement plus, de productions polluantes sont générées en $(t + 1)$ relativement à (t) pour un niveau donné d'intrants et de productions non polluantes.

Remarquons que l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen en output de la période $(t + 1)$, est quant à lui, défini par :

$$\begin{aligned} ELHM_{t+1}^O(x_{t+1}, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_t^p, k_{t+1}^{np}, k_{t+1}^p) \\ = ELO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) - ELI_{t+1}^p(x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; k_t^p, k_{t+1}^p), \end{aligned} \quad (7.60)$$

avec

$$\begin{aligned} ELO_{t+1}^{np} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) &= \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}{}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_t^{np}, 0) \\ &\quad - \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}{}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0), \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} ELI_{t+1}^p (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) &= \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}{}^p |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^p) \\ &\quad - \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}{}^p |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p; 0, 0, k_t^p). \end{aligned} \quad (7.62)$$

Dans la Figure 2, les observation $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}^p)$ sont combinées et forment ainsi une observation fictive définie par (x_t, y_{t+1}^p) . Pour ce point, la mesure d'efficience technique en composantes indésirables orientée en output polluant, $\overrightarrow{\psi}_{T_t^J} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^p)$, admet toujours une valeur finie. Dans ces conditions, cette fonction de distance en sous-vecteur (output polluant) ne présente pas d'infaisabilités. Ainsi, l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen spécifiquement orienté en outputs (polluant et non polluant) permet d'éviter les problèmes d'infaisabilités dans l'analyse des variations d'éco-productivité. De fait, ce nouvelle indicateur présente un intérêt particulier dans la réalisation des études empiriques d'éco-productivité (Aiken et Pasurka, 2003).

Le résultat suivant établit une relation d'équivalence entre l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen et l'indicateur usuel de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Proposition 7.11 *Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $O = O^{np}$ et $I^{np} = I^p = \emptyset$, l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen global devient :*

$$\begin{aligned} ELHM_{t,t+1}^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}, k_t^p, k_{t+1}^p) \\ = LHM_{t,t+1} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}, k_t^{np}, k_{t+1}^{np}). \end{aligned} \quad (7.63)$$

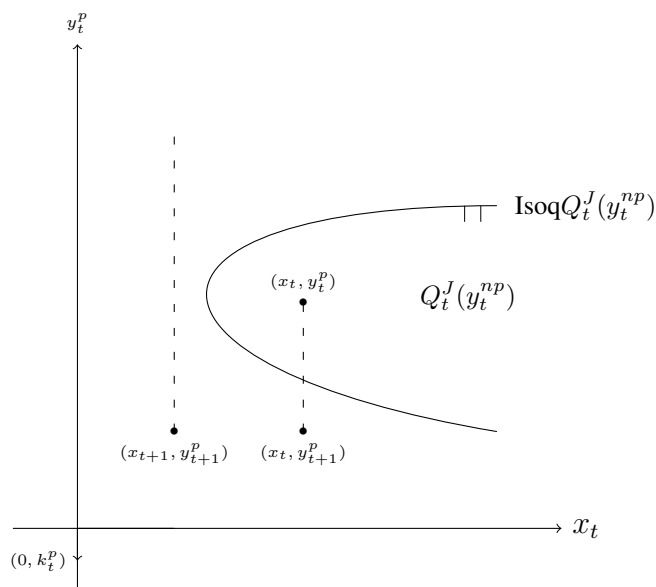


FIGURE 2 – Mesure d'efficacité technique en composantes indésirables orientée en output polluant dans l'ensemble $Q_t^J(y_t^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$

Preuve de la Proposition 7.11 :

Ici, nous avons $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$ tel que $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}$. Ainsi, pour tout (t) :

$$\begin{aligned} ELHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}, k_t, k_{t+1}) \\ = ELO_t^{np}(x_t, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) - ELI_t^{I \cup O^p}(x_t, x_{t+1}, y_t; h_t, h_{t+1}) \end{aligned} \quad (7.64)$$

où

$$ELO_t^{np}(x_t, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) = \vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t; 0, k_t) - \vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}; 0, k_{t+1}) \quad (7.65)$$

$$ELI_t^{I \cup O^p}(x_t, x_{t+1}, y_t; h_t, h_{t+1}) = \vec{\psi}_{T_t^I}^I|_{S_2}(x_{t+1}, y_t; h_{t+1}, 0) - \vec{\psi}_{T_t^I}^I|_{S_2}(x_t, y_t; h_t, 0) \quad (7.66)$$

Avec

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t; 0, k_t) &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_t, y_t + \beta k_t) \in T_t^J \} \\ &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y_t + \beta k_t) \in P_t^J(x_t) \}.\end{aligned}\quad (7.67)$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{I \cup O^p}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; h_t, 0, k_t^p) &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_t - \beta h_t, y_t) \in T_t^J \} \\ &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_t - \beta h_t) \in L_t^J(y_t) \}.\end{aligned}\quad (7.68)$$

De plus,

$$\begin{aligned}ELHM_{t+1}^{I, O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}, k_t, k_{t+1}) \\ = ELO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) - ELI_{t+1}^I(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}),\end{aligned}\quad (7.69)$$

où

$$ELO_{t+1}^{np}(x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) = \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}, y_t; 0, k_t) - \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}; 0, k_{t+1}),\quad (7.70)$$

$$ELI_{t+1}^I(x_t, x_{t+1}, y_{t+1}; h_t, h_{t+1}) = \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}^I|_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}; h_{t+1}, 0) - \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}^I|_{S_2}(x_t, y_{t+1}; h_t, 0).\quad (7.71)$$

Avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}; 0, k_{t+1}) &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_{t+1}, y_{t+1} + \beta k_{t+1}) \in T_{t+1}^J \} \\ &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y_{t+1} + \beta k_{t+1}) \in P_{t+1}^J(x_{t+1}) \}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi}_{T_{t+1}^J}^I |_{S_2}(x_{t+1}, y_{t+1}; h_{t+1}, 0) &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_{t+1} - \beta h_{t+1}, y_{t+1}) \in T_{t+1}^J \} \\ &= \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x_{t+1} - \beta h_{t+1}) \in L_{t+1}^J(y_{t+1}) \}. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Le résultat exposé dans la Proposition 7.11 peut immédiatement être déduit. \square

Notons que l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen possède une structure additive complète. Suivant Ang et Kerstens (2017), une décomposition de l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen orienté en output (polluant et non polluant) peut être proposée (voir Annexe 4).

4 Illustration Empirique

L'analyse empirique exposée dans cette section est construite selon le même ensemble de données que celui utilisé dans le chapitre précédent. Ainsi, nous proposons une étude d'éco-productivité appliquée au secteur aéroportuaire français. Commençons par exposer les programmes nécessaires à l'implémentation des indices et indicateurs d'éco-productivité selon une spécification non paramétrique.

4.1 Mesures d'éco-Productivité : spécification Non-Paramétrique

Les notations suivantes sont adoptées afin de simplifier l'exposition des programmes présentés dans cette sous-section : $(x_t, y_t) = (x, y)$ et $(x_{t+1}, y_{t+1}) = (\hat{x}, \hat{y})$. Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T4 tels que les intrants sont librement dis-

ponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance multiplicative généralisée (5.1) en périodes croisées $(t, t + 1)$ peut être déterminée selon le programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \psi_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \inf \lambda \\
 \text{s.t. } \lambda^\alpha \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \lambda^\alpha \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \lambda^{\beta^p} \hat{y}_{0,j}^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \lambda^{\beta^{np}} \hat{y}_{0,j}^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \lambda^{\beta^p} \hat{y}_{0,j}^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \lambda^{\beta^{np}} \hat{y}_{0,j}^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{7.74}$$

avec $\alpha = \{0, 1\}$, $\beta^p = \{-1, 0, 1\}$ et $\beta^{np} = \{-1, 0, 1\}$.

Selon la spécification des paramètres α , β^p et β^{np} , le programme (7.74) permet de déterminer l'ensemble des fonctions de distance nécessaires pour implémenter les mesures d'éco-productivité de type Hicks-Moorsteen exposées dans ces travaux. Notons que si les paramètres prennent la valeur 0 alors, \hat{x} et/ou \hat{y} deviennent x et/ou y . Par exemple, si on pose $\alpha = \beta^p = 0$ et $\beta^{np} = -1$ alors, nous avons $\psi_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \psi_{T_t}^{np, J, DEA} |_{S_2}(x_0, \hat{y}_0^{np}, y_0^p)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \psi_{T_t^{J,DEA}}^{np} |_{S_2}(x_0, \hat{y}_0^{np}, y_0^p) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \frac{1}{\lambda} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \frac{1}{\lambda} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

De même, si on pose $\alpha = \beta^p = 1$ et $\beta^{np} = 0$ alors, nous avons $\psi_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \psi_{T_t^{I \cup O P, DEA}} |_{S_2}(\hat{x}_0, y_0^{np}, \hat{y}_0^p)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \psi_{T_t^{J,DEA}}^{I \cup O^p} |_{S_2}(\hat{x}_0, y_0^{np}, \hat{y}_0^p) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } \lambda \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \lambda \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \lambda \hat{y}_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \lambda \hat{y}_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

A présent, considérons, la fonction de distance additive généralisée (5.28) en périodes croisées $(t, t + 1)$. Celle-ci peut être déterminée selon le programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } \hat{x}_{0,i} - \beta h &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{7.75}$$

avec $h \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$.

Selon la définition des paramètres h , k^p et k^{np} , le programme (4.1) permet de déterminer l'ensemble des fonctions de distance directionnelle nécessaires au calcul des mesures d'éco-productivité de type Luenberger-Hicks-Moorsteen exposées dans ces travaux. Notons que si les paramètres prennent la valeur 0 alors, \hat{x} et/ou \hat{y} deviennent x et/ou y . Par exemple, si on pose $h = k^p = 0$ et $k^{np} \in \mathbb{R}_+^{m^{np}}$ alors, nous avons $\vec{\psi}_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \vec{\psi}_{T_t^{J,DEA}|S_2}^{np}(x_0, \hat{y}_0^{np}, y_0^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{T_t^{J,DEA}}^{np} |_{S_2}(x_0, \hat{y}_0^{np}, y_0^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k_{t+1}^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k_{t+1}^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

De manière analogue, si on pose $h \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in 0 \times \mathbb{R}_-^{m^p}$ alors, nous avons $\vec{\psi}_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \vec{\psi}_{T_t^{J,DEA}}^{I \cup O^p} |_{S_2}(\hat{x}_0, y_0^{np}, \hat{y}_0^p; ; h_{t+1}, 0, k_{t+1}^p)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{T_i^{J,DEA}}^{I \cup O^p} |_{S_2}(\hat{x}_0, y_0^{np}, \hat{y}_0^p; h_{t+1}, 0, k_{t+1}^p) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } \hat{x}_{0,i} - \beta h_{t+1} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h_{t+1} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 \hat{y}_{0,j} - \beta k_{t+1}^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k_{t+1}^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

4.2 Une analyse de l'éco-productivité : le secteur aéroportuaire français

Pour les années 2007 à 2011, les mesures d'éco-productivité basées sur l'indice ML et l'indicateur EL sont exposées dans les Tables 7.1 et 7.2. L'implémentation de ces mesures d'éco-productivité présente plusieurs infaisabilités. Par exemple, l'indice ML et l'indicateur EL de l'aéroport Toulouse-Blagnac ne sont pas définis sur la période 2007-2011. Les Tables 8.2 et 8.3 présentent la décomposition des mesures d'éco-productivité ML et EL en termes de progrès technologiques et de changement d'efficacité technique (voir Annexe 3). Le premier est déterminé par l'adoption de nouvelles technologies (investissement en capital ou en R&D). Le second est fixé par les procédures manageriales déterminant les choix dans la transformation des intrants en extrants. Remarquons que l'ensemble des infaisabilités provient des variations technologiques. Plus précisément, celles-ci résultent des fonctions de distance en période croisée : $\vec{\psi}_{T_i^j} |_{S_2}(x_j, y_j^{np}, y_j^p; 0, k_j^{np}, k_j^p)$ avec $i \neq j$. Ces résultats sont cohérents avec la littérature relative aux indices et indicateurs de productivité (Briec et Kerstens, 2009a,b).

Les mesures d'éco-productivité issues de l'indicateur $ELHM^O$, sont exposées dans la Table 7.3 (sa contrepartie en termes de ratios EHM^O est présentée en Annexe 3). La comparaison des estimations des indicateurs EL et $ELHM^O$, met en lumière des divergences dans les changements d'éco-productivité. Par exemple, l'aéroport de Beauvais connaît respectivement une croissance d'éco-productivité selon l'indicateur EL et une décroissance d'après la mesure $ELHM^O$ (même constat pour ML et EHM^O). Dans la suite de cette illustration empirique, nous interprétons les résultats de l'indicateur $ELHM^O$ pour une raison principale : son implémentation n'est pas sujette au problème des infaisabilités. Ainsi, l'analyse des résultats de cet indicateur semble plus générale et plus à même d'établir une analyse globale des variations d'éco-productivité.

Les principaux enseignements de cette étude sont les suivants. Premièrement, remarquons que la plupart des aéroports retenus dans cette analyse présente un changement positif d'éco-productivité sur la période 2007-2011. Les deux principaux aéroports français (Paris CDG et Paris ORY) situés en région parisienne, connaissent également une variation positive d'éco-productivité. Ces deux aéroports sont des hubs internationaux en interaction avec les principales plateformes aéroportuaires mondiales. L'aéroport de Lyon-Saint Exupéry présente en moyenne le meilleur changement d'éco-productivité sur la période analysée : +6,38%. Ces résultats sont en adéquation avec les principales avancées exposées dans la littérature empirique. En effet, les résultats de l'indicateur $ELHM^O$ pour les aéroports Paris CDG et Paris ORY confirment l'hypothèse usuelle selon laquelle, la taille et les plateformes de correspondances aéroportuaires internationales (hubs) augmentent la performance des aéroports (Assaf, 2009, 2010 ; Fung, Wan, Hui et Law, 2008). Notons que ces résultats restent vrais pour les deux autres principaux aéroports français en termes de tailles et correspondances aéroportuaires, à savoir Nice Côte d'Azur et Toulouse-Blagnac. Les principaux aéroports français connaissent, chaque année, des niveaux élevés d'investissements ; par exemple, en 2009 et en 2010, les investissements étaient respectivement de 404 et 412 millions d'Euros pour ADP (Aéroports de Paris) et, de 50,1 et 57,1 millions d'Euros pour l'aéroport Nice Côte d'Azur⁶. Deuxièmement, il est à noter qu'en moyenne, sur la période analysée, les résultats exposés signalent une perte d'éco-productivité pour trois aéroports : Beauvais, Montpellier-Méditerranée et Strasbourg-Entzheim⁷. Ainsi, la plupart des aéroports français retenus dans cette étude (77%)

6. Activité des aéroports français 2009 et 2010, Direction Générale de l'Aviation Civile et Direction du Transport Aérien.

7. Notons que ces aéroports ne constituent pas des hubs internationaux mais plutôt des plateformes de correspon-

Aéroports	ML				Moyenne
	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	
Bâle-Mulhouse	0,9915	0,9467	1,0435	1,1143	1,0240
Beauvais	1,0031	1,0445	1,0404	1,0276	1,0289
Bordeaux-Mérignac	infini	infini	infini	infini	infini
Lille	0,9961	1,0878	1,0397	0,9698	1,0233
Lyon-Saint Exupéry	1,0336	0,9922	1,0332	1,0374	1,0241
Marseille-Provence	0,9776	1,0381	infini	infini	infini
Montpellier-Méditerranée	0,9710	0,9966	0,9768	1,0318	0,9941
Nantes-Atlantique	1,0170	infini	1,0118	1,0341	infini
Nice-Côte d'azur	0,9993	1,0093	0,9761	1,0120	0,9992
Paris CDG	1,0029	1,0060	1,0058	1,0234	1,0095
Paris ORY	0,9987	1,0064	0,9987	1,0126	1,0041
Strasbourg-Entzheim	0,9000	1,0053	1,0577	1,0258	0,9972
Toulouse-Blagnac	infini	infini	infini	infini	infini
Moyenne	infini	infini	infini	infini	infini

TABLE 7.1 – Indice d'éco-productivité de Malmquist-Luenberger (2007-2011)

adoptent une attitude responsable face aux enjeux environnementaux (émissions CO₂). Pour les aéroports de Paris CDG et de Paris ORY, ces résultats peuvent s'expliquer par les stratégies mises en place par les principales compagnies aériennes afin de réduire leurs émissions de CO₂. Par exemple, Air France a annoncé en Juin 2008⁸ le renouvellement de sa flotte avec des investissements dans des avions plus performants (par exemple, Airbus A380). Ces investissements sont en lien avec les stratégies du CORAC (Conseil pour la Recherche Aéronautique Civile)⁹ qui consistent, depuis 2008, à promouvoir la recherche technologique dans l'aéronautique civile afin de réduire les émissions de CO₂.

Sur la période 2007-2011, la Table 7.3 signale une perte moyenne d'éco-productivité pour les périodes consécutives 2007-2008 et 2008-2009. Notons que la phase de développement du programme SESAR (Single European Sky Air Traffic Management Research) a démarré durant l'année 2008. Ce programme a pour objectif de créer un système optimal de gestion du trafic aérien à l'échelle européenne afin, notamment, de réduire l'impact sur l'environnement des activités aéronautiques. Le lancement de la phase de développement du programme SESAR semble coïncider avec l'apparition de gain moyen d'éco-productivité sur les périodes consécutives 2009-2010 et

dances aéroportuaires régionales.

8. Environnement : Airfrance s'engage, Service de Presse, Juin 2008.

9. Au niveau européen, ces investissements s'inscrivent dans le cadre de l'ACARE (Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe).

Aéroports	EL				Moyenne
	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	
Bâle-Mulhouse	-0,0093	-0,0617	0,0493	0,1190	0,0243
Beauvais	0,0030	0,0416	0,0383	0,0267	0,0274
Bordeaux-Mérignac	infini	infini	infini	infini	infini
Lille	-0,0045	0,0927	0,0410	-0,0330	0,0241
Lyon-Saint Exupéry	0,0372	-0,0088	0,0362	0,0400	0,0262
Marseille-Provence	-0,0234	0,0384	infini	infini	infini
Montpellier-Méditerranée	-0,0307	-0,0035	-0,0263	0,0363	-0,0060
Nantes-Atlantique	0,0181	infini	0,0126	0,0360	infini
Nice-Côte d'azur	-0,0007	0,0099	-0,0262	0,0133	-0,0009
Paris CDG	0,0033	0,0069	0,0066	0,0269	0,0109
Paris ORY	-0,0015	0,0076	-0,0016	0,0150	0,0049
Strasbourg-Entzheim	-0,1311	0,0070	0,0738	0,0330	-0,0043
Toulouse-Blagnac	infini	infini	infini	infini	infini
Moyenne	infini	infini	infini	infini	infini

TABLE 7.2 – Indicateur d'éco-productivité de Luenberger (2007-2011)

Aéroports	ELHM (output)				Moyenne
	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	
Bâle-Mulhouse	-0,0019	-0,1229	0,0873	0,2237	0,0465
Beauvais	-0,0238	-0,0074	0,0115	0,0155	-0,0010
Bordeaux-Mérignac	0,0245	0,0326	0,0246	0,0277	0,0274
Lille	-0,0297	0,1505	0,0784	0,0241	0,0558
Lyon-Saint Exupéry	0,0808	0,0155	0,0683	0,0905	0,0638
Marseille-Provence	-0,0055	0,0411	0,0135	0,0240	0,0182
Montpellier-Méditerranée	-0,0510	0,0080	-0,0277	0,0504	-0,0051
Nantes-Atlantique	0,0185	-0,0046	0,0893	0,0412	0,0361
Nice-Côte d'azur	0,0226	0,0238	-0,0096	0,0296	0,0166
Paris CDG	0,0089	-0,0067	0,0099	0,0421	0,0136
Paris ORY	-0,0059	-0,0223	0,0009	0,0813	0,0135
Strasbourg-Entzheim	-0,3021	-0,1541	-0,0197	0,0718	-0,1010
Toulouse-Blagnac	0,0019	0,0317	-0,0343	0,0170	0,0041
Moyenne	-0,0202	-0,0011	0,0225	0,0568	0,0145

TABLE 7.3 – Indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen orienté en output (2007-2011)

2010-2011.

5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'exposer les mesures de productivité traditionnellement rencontrées dans la littérature économique. Ainsi les indices de Malmquist et de Hicks-Moorsteen ont été présentés. De plus, les indicateurs de productivité de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen ont été mis en évidence. Une attention particulière a été accordée à leur décomposition en termes de changement d'efficacité technique et de progrès technologique.

Partant de ces résultats, les principales mesures d'éco-productivité existant dans la littérature économique ont été exposées. Ces mesures sont construites selon les mêmes structures que les indices et indicateurs de productivité usuels. A cette occasion les problèmes d'infaisabilité associés aux mesures d'éco-productivité de type ML et EL ont été analysés avec attention.

Enfin, une illustration empirique qui repose sur des mesures d'éco-productivité non-paramétriques, a été introduite. Celle-ci concerne le secteur aéroportuaire français sur la période 2007-2011.

Chapitre 8

Indices et Indicateurs d'Eco-Productivité : Généralisation

1 Introduction

Questionnements : Est-il possible de définir des indices et des indicateurs d'éco-productivité généralisés ? Si oui, quelles relations existe-t-il entre ces mesures d'éco-productivité et leur caractérisation usuelle ?

Des mesures d'éco-productivité généralisées sont exposées dans ce chapitre. Celles-ci peuvent être comprises comme des extensions des indices et des indicateurs d'éco-productivité de type Hicks-Moorsteen et Luenberger-Hicks-Moorsteen présentés dans le chapitre précédent. Dans le cadre d'un partitionnement global des intrants et des extrants en composantes polluantes et non polluantes. Les mesures d'éco-productivité généralisées admettent comme cas particuliers les mesures de productivité et d'éco-productivité usuelles, possédant une structure de type Hicks-Moorsteen ou de type Luenberger-Hicks-Moorsteen ; c'est-à-dire une structure multiplicative ou additive complète (O'Donnell, 2012).

Dans ces travaux, nous définissons ces indices et indicateurs de productivité selon une technologie de production B -disponible en inputs et en outputs. Néanmoins, la définition de ces mesures d'éco-productivité généralisées ne dépend pas de la structure de la technologie de production dans laquelle elles se définissent ou de la méthode d'estimation retenue pour les implémenter (paramé-

trique ou non) mais, du partitionnement des intrants et des extrants en composantes polluantes et non polluantes.

La deuxième section de ce chapitre introduit un indice d'éco-productivité généralisé. Celui-ci hérite de la structure de l'indice de productivité de Hicks-Moorsteen. Dans la section 3, sa contrepartie additive est présentée. Ainsi, un indicateur d'éco-productivité généralisé de type Luenberger-Hicks-Moorsteen est mis en évidence. La quatrième section expose les principales relations entre ces mesures de productivité généralisées et les mesures existantes, possédant des structures multiplicatives et additives complètes (O'Donnell, 2012). Enfin, dans une dernière section une spécification non-paramétrique permettant d'implémenter ces mesures de productivité, est introduite.

2 Indice d'Eco-Productivité Généralisée

Dans cette section, nous introduisons un indice d'éco-productivité généralisé de type Hicks-Moorsteen (EGHM). Ainsi, celui-ci est construit selon un ratio entre des indices de quantité généralisés de Malmquist en output ($EGMO^{np}$) et en input ($EGMI^p$). L'indice de quantité généralisé en input se réfère aux composantes polluantes (intrants et extrants) tandis que l'indice de quantité généralisé en output est construit à partir des composantes non polluantes (inputs et outputs).

Définition 8.1 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $x_{t,t+1} = (x_{t,t+1}^{np}, x_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice de d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen de la période (t) est défini par :

$$EGHM_t^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{EGMO_t^{np} (x_t^{np}, x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{EGMI_t^p (x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)}, \quad (8.1)$$

où $EGMO_t^{np}$ et $EGMI_t^p$ sont respectivement les indices de quantité généralisés de Malmquist en output et en input.

L'expression des indices de quantité généralisés de Malmquist est respectivement :

$$EGMO_t^{np} (x_t^{np}, x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_t^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_t^p)}, \quad (8.2)$$

$$EGMI_t^p (x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2} (x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2} (x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_t^p)}. \quad (8.3)$$

Notons que les fonctions de distance de Shephard croisées, intervenant dans les indices de quantité généralisés de Malmquist en output et en input sont définies par :

$$\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p) = \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x_{t+1}^{np}, x_t^p, \frac{y_{t+1}^{np}}{\lambda}, y_t^p \right) \in T_t^J \right\}, \quad (8.4)$$

$$\psi_{T_t^J}^p |_{S_2} (x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t^{np}, \frac{x_{t+1}^p}{\lambda}, y_t^{np}, \frac{y_{t+1}^p}{\lambda} \right) \in T_t^J \right\}. \quad (8.5)$$

La mesure d'efficacité technique (8.4) identifie la performance de l'observation fictive, $(x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p)$, par rapport à la technologie de production B -disponible T_t^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Rappelons que dans ce cas, la fonction de distance de Shephard croisée devient une mesure hyperbolique (Färe, Grosskopf et Lovell, 1985). De même, la mesure d'efficacité technique (8.5) signale la performance de l'observation fictive, $(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p)$, par rapport à la technologie de production B -disponible T_t^J .

L'indice de quantité généralisé de Malmquist en output est toujours supérieur (inférieur) à 1 quand, plus (moins) de productions non polluantes sont produites et moins (plus) d'intrants non polluants sont utilisés en $(t + 1)$ relativement à (t) , pour une quantité donnée de composantes polluantes (intrants et extrants polluants). Dans ce cas, entre les périodes (t) et $(t + 1)$, des efforts managériaux sont réalisés (adaptation positive) afin d'adopter des intrants non polluants de meilleures qualités et/ou des technologies innovantes dans le but d'accroître les productions désirables et de réduire les inputs non polluants, pour des quantités constantes d'extrants polluants et d'intrants polluants utilisées. De manière analogue, l'indice de quantité de Malmquist en input est toujours inférieur (supérieur) à 1 si, moins (plus) de composantes polluantes sont nécessaires en $(t + 1)$ relativement à (t) pour produire un niveau donné de productions non polluantes, en utilisant une quantité donnée d'inputs non polluants. Dans une telle situation, entre les périodes (t) et $(t + 1)$, des efforts managériaux sont mis en place (adaptation positive) en choisissant des intrants

polluants de qualités supérieures et/ou des technologies innovantes dans l'intention de réduire les productions polluantes, pour un niveau donné d'extrants non polluants et d'inputs non polluants utilisés. Finalement, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen est toujours supérieur (inférieur) à 1 quand, il présente des gains (pertes) d'éco-productivité.

Notons qu'il n'est pas usuel dans la littérature économique, de définir des indices de productivité par l'intermédiaire d'autres mesures de productivité. En effet, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen indique les changements de productivité dans les composantes non polluantes corrigés par les variations de productivité dans les composantes polluantes. Dans ce cas, l'impact des attributs de qualités (polluants et non polluants) sur la croissance de la productivité, peut être apprécié. L'indice d'éco-productivité généralisé est construit selon une combinaison d'observations entre les périodes (t) et $(t + 1)$ et possède ainsi une structure de type Hicks-Moorsteen.

Remarquons que l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen de la période $(t + 1)$ est représenté par :

$$EGHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{EGMO_{t+1}^{np}(x_t^{np}, x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p)}{EGMI_{t+1}^p(x_{t+1}^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)}, \quad (8.6)$$

avec

$$EGMO_{t+1}^{np}(x_t^{np}, x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_{t+1}}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_{t+1}}^{np} |_{S_2}(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}, \quad (8.7)$$

$$EGMI_{t+1}^p(x_{t+1}^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_{t+1}}^p |_{S_2}(x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_{t+1}}^p |_{S_2}(x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}. \quad (8.8)$$

La moyenne géométrique des indices d'éco-productivité généralisés de Hicks-Moorsteen sur les périodes consécutives $(t, t + 1)$ est définie dans la proposition suivante. Rappelons que cette procédure permet d'éviter des choix arbitraires par rapport aux périodes de références (t) et $(t + 1)$.

Proposition 8.2 *Soit un ensemble de production T^J B-disponible satisfaisant les axiomes T1 – T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $x_{t,t+1} = (x_{t,t+1}^{np}, x_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen global est défini*

par :

$$EGHM_{t,t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \left[EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) \times EGHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) \right]^{1/2}. \quad (8.9)$$

Les indices d'éco-productivité généralisés de Hicks-Moorsteen orientés en composantes polluantes et non polluantes sont respectivement définis dans les propositions suivantes.

Proposition 8.3 Soit une technologie de production T^J qui est B -disponible et vérifie les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^{np}$ et $O = O^{np}$ alors :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = EGM O_t^{np}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}), \quad (8.10)$$

où $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^{np}$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$.

D'après la Proposition 8.3, si les intrants et les extrants sont traités comme des composantes non polluantes alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen hérite de la structure de l'indice de quantité généralisé de Malmquist en output.

Preuve de la Proposition 8.3

Si $I = I^{np}$ et $O = O^{np}$ alors, l'indice d'éco-productivité généralisé EGHM pour la période (t) est :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t^{np}, y_t^{np}, x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}) = \frac{EGM O_t^{np}(x_t^{np}, y_t^{np}, x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np})}{EGM I_t^p(x_t^{np}, y_t^{np})}$$

ainsi, $EGM O_t^{np}(x_t^{np}, y_t^{np}, x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np})}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np})}$ et $EGM I_t^p(x_t^{np}, y_t^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np})}{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np})}$
 = 1. De fait,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{\frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np})}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np})}}{1} = EGM O_t^{np}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}).$$

Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.4 Soit une technologie de production T^J qui est B -disponible et qui satisfait les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O = O^p$ alors :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \left[EGM I_t^p(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) \right]^{-1}, \quad (8.11)$$

où $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^p$.

Selon la Proposition 8.4, quand les intrants et les extrants sont traités comme des composantes polluantes alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen prend la forme de l'indice de quantité généralisé de Malmquist en input.

Preuve de la Proposition 8.4 :

Quand $I = I^p$ et $O = O^p$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période de temps (t) est :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p) = \frac{EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t^p)}{EGMI_t^p(x_t^p, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p)}$$

$$\text{où, } EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t^p) = \frac{\psi_{T^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^p)}{\psi_{T^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^p)} = 1 \text{ et } EGM I_t^p(x_t^p, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_{t+1}^p)}{\psi_{T^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^p)}.$$

Ainsi,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{1}{\frac{\psi_{T^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_{t+1}^p)}{\psi_{T^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^p)}} = \left[EGM I_t^p(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) \right]^{-1}.$$

Ceci termine la preuve. \square

3 Indicateur d'Eco-Productivité Généralisé

Dans cette section, nous introduisons un indicateur d'éco-productivité généralisé (EGLHM). Ce dernier hérite d'une structure de type Luenberger-Hicks-Moorsteen. Ainsi, il est construit à partir des fonctions de distance directionnelle (Luenberger, 1992 ; Chambers, Chung et Färe, 1996, 1998) définies selon une direction $g = (h, k)$, où $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{mnp} \times \mathbb{R}_+^{mp}$. De plus, il est défini selon la différence entre des indicateurs de quantité de Luenberger en

output et en input. L'indicateur de quantité en output se réfère aux composantes non polluantes tandis que l'indicateur de quantité en input est construit à partir des composantes polluantes.

Définition 8.5 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $x_{t,t+1} = (x_{t,t+1}^{np}, x_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen de la période (t) est défini par :

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = EGLO_t^{np} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) - EGLI_t^p (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \end{aligned} \quad (8.12)$$

où $EGLO_t^{np}$ et $EGLI_t^p$ sont respectivement les indicateurs de quantité généralisés de Luenberger en input et en output.

Notons que pour $g_t = (h_t^{np}, 0, k_t^{np}, 0)$ et $g_{t+1} = (h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0)$ alors, $EGLO_t^{np}$ se définit par :

$$\begin{aligned} EGLO_t^{np} (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = \vec{\psi}_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_t^p; h_t^{np}, 0, k_t^{np}, 0) - \vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Par ailleurs, lorsque $g_t = (0, h_t^p, 0, k_t^p)$ et $g_{t+1} = (0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p)$ alors, on a :

$$\begin{aligned} EGLI_t^p (x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = \vec{\psi}_{T_t^J}^p |_{S_2} (x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p) - \vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^p |_{S_2} (x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_t^p; 0, h_t^p, 0, k_t^p). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Il est utile de notifier que les fonctions de distance directionnelle croisées, intervenant dans les indicateurs de quantité de Luenberger en input et en output, sont respectivement exprimées de la façon suivante :

$$\vec{\psi}_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p; h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0) = \sup_{\beta} \{ \beta : (x_{t+1}^{np} - \beta h_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np} + \beta k_{t+1}^{np}, y_t^p) \in T_t^J \}, \quad (8.15)$$

$$\vec{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p) = \sup_{\beta} \{ \beta : (x_t^{np}, x_{t+1}^p - \beta h_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p - \beta k_{t+1}^p) \in T_t^J \}. \quad (8.16)$$

Rappelons que la fonction de distance (8.15) permet d'apprécier l'efficacité technique de l'observation fictive $(x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p)$, par rapport à la technologie de production B -disponible T_t^J , dans la direction $g_{t+1} = (h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0)$. De même, la mesure d'efficacité technique (8.16) permet d'apprécier la performance de l'observation fictive $(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p)$, par rapport à la technologie de production B -disponible T_t^J , dans la direction $g_{t+1} = (0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p)$.

Remarquons que l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen à la période $(t + 1)$ est défini par :

$$\begin{aligned} EGLHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = EGLO_{t+1}^{np}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) - EGLI_{t+1}^p(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \end{aligned} \quad (8.17)$$

sachant que pour $g_t = (h_t^{np}, 0, k_t^{np}, 0)$ et $g_{t+1} = (h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0)$ on a :

$$\begin{aligned} EGLO_{t+1}^{np}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = \psi_{t+1}^{np}(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; h_t^{np}, 0, k_t^{np}, 0) - \psi_{t+1}^{np}(x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p; h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Par ailleurs, avec $g_t = (0, h_t^p, 0, k_t^p)$ et $g_{t+1} = (0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p)$ on a :

$$\begin{aligned} EGLI_{t+1}^p(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = \psi_{t+1}^p(x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p) - \psi_{t+1}^p(x_{t+1}^{np}, x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p; 0, h_t^p, 0, k_t^p). \end{aligned} \quad (8.19)$$

La moyenne arithmétique des indicateurs d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen entre les périodes (t) et $(t + 1)$ est définie dans la proposition ci-dessous. L'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen pour les périodes consécutives $(t, t + 1)$ est construit selon une moyenne arithmétique afin de ne pas opérer de choix arbitraires entre les périodes de référence (t) et $(t + 1)$.

Proposition 8.6 Soit un ensemble de production T^J qui est B -disponible et satisfaisant les axiomes $T1 - T3$ avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ avec $x_{t,t+1} = (x_{t,t+1}^{np}, x_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p) \in \mathbb{R}_+^m$, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen global est :

$$EGLHM_{t,t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = \frac{1}{2} \left[EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) + EGLHM_{t+1}^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \right]. \quad (8.20)$$

L'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen signale des gains (pertes) d'éco-productivité s'il prend une valeur positive (négative). Rappelons que cette mesure de productivité n'est pas construit selon une approche habituellement rencontrée dans la littérature économique. En effet, l'indicateur d'éco-productivité généralisé présente les changements de productivité dans les composantes non polluantes corrigés par les variations de productivité dans les composantes polluantes. Ainsi, il offre un cadre d'analyse permettant d'apprécier l'impact des attributs de qualité (polluant et non polluant) sur la croissance de la productivité. De plus, en combinant des observations issues des périodes (t) et $(t + 1)$, il hérite d'une structure de type Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Notons que la mesure d'efficacité technique en composantes polluantes ($\vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}$) peut être indéterminée. Dans ce cas, l'indicateur d'éco-productivité généralisé EGLHM présente des infaisabilités (Briec et Kerstens, 2009ab). Ce problème d'infaisabilités peut être évacué, en se référant à une mesure d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen spécifiquement orientée en outputs (polluant et non polluant) ; voir Annexe 5.

Les propositions ci-après présentent les orientations en composantes non polluantes et polluantes de l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Proposition 8.7 Soit T^J , une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O = O^p$ alors,

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = -EGLI_t^p(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \quad (8.21)$$

avec $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$, $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^p$ et $g_{t,t+1} = (0, h_{t,t+1}^p, 0, k_{t,t+1}^p)$.

D'après la Proposition 8.7, si les inputs et les outputs sont traités comme des composantes polluantes alors, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen se définit comme l'indicateur de quantité généralisé en input de Luenberger.

Preuve de la Proposition 8.7

Quand $I = I^p$ et $O = O^p$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) est :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p) = EGLO_t^{np}(x_t^p, y_t^p; g_t, g_{t+1}) - EGLI_t^p(x_t^p, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p; g_t, g_{t+1})$$

ainsi, $EGLO_t^{np}(x_t^p, y_t^p; g_t, g_{t+1}) = \vec{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^p; g_t) - \vec{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^p; g_t) = 0$ et

$EGLI_t^p(x_t^p, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p; g_t, g_{t+1}) = \vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_{t+1}^p; g_{t+1}) - \vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^p; g_t)$. Par conséquent ,

$$\begin{aligned} EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) &= 0 - \left[\vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_{t+1}^p; g_{t+1}) - \vec{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^p; g_t) \right] \\ &= -EGLI_t^p(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}). \end{aligned}$$

Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.8 Soit un ensemble de production T^J vérifiant la B -disponibilité et satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^{np}$ et $O = O^{np}$ alors :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = EGLO_t^{np}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \quad (8.22)$$

tels que $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^{np}$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$ avec $g_{t,t+1} = (h_{t,t+1}^{np}, 0, k_{t,t+1}^{np}, 0)$.

Selon le résultat 8.8, si les intrants et les extrants sont traités comme des composantes non polluantes alors, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen hérite de la structure de l'indicateur de quantité généralisé en output de Luenberger.

Preuve de la Proposition 8.8

Si $I = I^{np}$ et $O = O^{np}$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) est :

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O}(x_t^{np}, y_t^{np}, x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}; g_t, g_{t+1}) &= EGLO_t^{np}(x_t^{np}, y_t^{np}, x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}; g_t, g_{t+1}) \\ &\quad - EGLI_t^p(x_t^{np}, y_t^{np}; g_t, g_{t+1}) \end{aligned}$$

où, $EGLO_t^{np}(x_t^{np}, y_t^{np}, x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}; g_t, g_{t+1}) = \vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}; g_{t+1}) - \vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np}; g_t)$ et $EGLI_t^p(x_t^{np}, y_t^{np}; g_t) = \vec{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np}; g_t) - \vec{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np}; g_t) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) &= \vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}^{np}, y_{t+1}^{np}; g_{t+1}) - \vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^{np}, y_t^{np}; g_t) - 0 \\ &= EGMO_t^{np}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. \square

4 Connexions avec les Mesures Existantes

Les mesures d'éco-productivité exposées dans les sections précédentes correspondent à des cas généraux dans lesquels, des attributs de qualité (polluant et non polluant) sont associés aux inputs et aux outputs. Cependant, lorsque cette partition n'est pas totalement vérifiée, nous pouvons retrouver les indices et les indicateurs de productivité et d'éco-productivité présentés dans la littérature économique.

4.1 Structure multiplicative

Proposition 8.9 Soit une technologie de production T^J qui est B -disponible et qui satisfait les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives ($t, t + 1$) et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O = O^{np}$ alors,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = HM_t(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}), \quad (8.23)$$

avec $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$.

Cette proposition signifie que si les inputs et les outputs sont respectivement traités comme des intrants polluants et des extrants non polluants alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen correspond à la mesure de productivité de Hicks-Moorsteen usuelle.

Preuve de la Proposition 8.9

Si $I = I^p$ et $O = O^{np}$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période (t) devient :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}) = \frac{EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np})}{EGMI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np})},$$

où $EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_{t+1}^{np})}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np})}$ et $EGMI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t^{np})}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np})}$.

Dans la mesure où $x_t = x_t^p$ et $y_t = y_t^{np}$ alors,

$$\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t) = \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, \frac{y_t}{\lambda} \right) \in T_t^J \right\} \tag{8.24}$$

et

$$\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x_t}{\lambda}, y_t \right) \in T_t^J \right\}. \tag{8.25}$$

Ainsi, $\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(\cdot)$ et $\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(\cdot)$ sont respectivement des fonctions de distance de Shephard en input et en output dans T_t^J . Par conséquent,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = \frac{MO_t(x_t, y_t, y_{t+1})}{MI_t(x_t, x_{t+1}, y_{t+1})}.$$

Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.10 Soit T^J un ensemble de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$ alors,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = MO_t(x_t, y_t, y_{t+1}), \tag{8.26}$$

où $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$.

D'après la Proposition 8.10, si l'on s'intéresse spécifiquement aux outputs et que ces derniers sont traités comme des extrants non polluants alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen hérite de la structure de l'indice de quantité de Malmquist en output (MO).

Preuve de la Proposition 8.10

Quand $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période (t) est :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}) = \frac{EGMO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np})}{EGMI_t^p(x_t, y_t^{np})}$$

avec, $EGMO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np})}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np})}$ et $EGMI_t^p(x_t, y_t^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np})}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np})} = 1$.

Ainsi,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = \frac{\frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np})}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np})}}{1}.$$

Sachant que $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$ alors,

$$\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t) = \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x_t, \frac{y_t}{\lambda} \right) \in T_t^J \right\} \tag{8.27}$$

Ainsi, $\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(\cdot)$ prend la forme d'une fonction de distance de Shephard en output dans T_t^J . Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.11 Soit une technologie de production T^J vérifiant la B-disponibilité et satisfaisant les axiomes T1 – T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives ($t, t + 1$) et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O^p = O^{np} = \emptyset$ alors,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = \left[MI_t(x_t, y_t, y_{t+1}) \right]^{-1}, \tag{8.28}$$

tels que $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$ et $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}^p = \emptyset$.

D'après le résultat précédent, si l'on s'intéresse spécifiquement aux inputs et et que ces derniers sont traités comme des intrants polluants alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-

Moorsteen prend la forme de l'indice de quantité de Malmquist en input.

Preuve de la Proposition 8.11

Si $I = I^p$ et $O^p = O^{np} = \emptyset$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période (t) devient :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t, x_{t+1}^p) = \frac{EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t)}{EGMI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_t)}$$

où, $EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t)}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t)} = 1$ et $EGMI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_t) = \frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t)}$. De fait,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}) = \frac{1}{\frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t)}}.$$

Dans la mesure où $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$ et $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}^p = \emptyset$ alors,

$$\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t) = \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x_t}{\lambda}, y_t \right) \in T_t^J \right\}. \quad (8.29)$$

Ainsi, $\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(\cdot)$ prend la forme d'une fonction de distance de Shephard en input dans T_t^J . Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.12 *Soit un ensemble de production T^J vérifiant la B-disponibilité et satisfaisant les axiomes T1 – T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives ($t, t + 1$) et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors,*

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = EHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}), \quad (8.30)$$

avec $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p)$.

La Proposition 8.12 stipule que lorsque les intrants et les extrants sont respectivement traités comme des inputs polluants et comme des outputs partitionnés en composantes polluantes et non polluantes alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen hérite de la structure de l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen (Abad, 2015).

Preuve de la Proposition 8.12

Quand $I = I^p$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période (t) est :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np})}{EGMI_t^p(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p)}$$

ainsi, $EGMO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p)}$ et $EGMI_t^p(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_{t+1}^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p)}$. Par conséquent,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}) = \frac{\frac{\psi_{T_{t+1}^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p)}}{\frac{\psi_{T_{t+1}^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p)}}.$$

Sachant que $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p)$, selon les équations (7.25) et (7.26) ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.13 Soit T^J , une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = EHM_t^O(x_t, y_t, y_{t+1}) = EPI_t(x_t, y_t, y_{t+1}), \quad (8.31)$$

où $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p)$.

Le résultats précédent indique que l'indice d'éco-productivité généralisé de Hicks-Moorsteen prend la forme de l'indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen en output (Abad, 2015)¹ lorsque l'on s'intéresse spécifiquement aux outputs et que ces derniers sont traités comme des outputs partitionnés selon des attributs de qualité (polluant et non polluant).

Preuve de la Proposition 8.13

Si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période (t)

1. Rappelons que cette mesure d'éco-productivité est identique à l'indice EPI exposé par Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho (2004).

devient :

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p) = \frac{EGMO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np})}{EGMI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)}$$

tel que, $EGMO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p)}$ et $EGMI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p)}$. Ainsi,

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = \frac{\frac{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p)}}{\frac{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p)}}.$$

Notons que $EGMO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np})$ et $EGMI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p)$ héritent de la structure des indices de quantité de Malmquist en outputs désirables et indésirables (Färe, Grosskopf et Hernandez-Sancho, 2004). Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.14 *Soit un ensemble de production T^J qui est B -disponible et qui satisfait les axiomes $T1 - T3$ avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t+1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^{np} \cup I^p$ et $O^{np} = O^p = \emptyset$ alors :*

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t) = \left[EHM_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t) \right]^{-1}, \quad (8.32)$$

avec $x_{t,t+1} = (x_{t,t+1}^{np}, x_{t,t+1}^p)$ et $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}^p = \emptyset$.

Preuve de la Proposition 8.14

Quand $I = I^{np} \cup I^p$ et $O^{np} = O^p = \emptyset$ alors, l'indice d'éco-productivité EGHM pour la période (t) est :

$$EGHM_t^{I,O}(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p) = \frac{EGMO_t^{np}(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^{np})}{EGMI_t^p(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p)}$$

$$\text{avec, } EGM O_t^{np}(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^{np}) = \frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(y_t, x_{t+1}^{np}, x_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p)} \text{ et } EGM I_t^p(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p) = \frac{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p)}. \text{ De fait,}$$

$$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = \frac{\frac{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(y_t, x_{t+1}^{np}, x_t^p)}{\psi_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p)}}{\frac{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_{t+1}^p)}{\psi_{T_t^J}^p |_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p)}} = EHM_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t).$$

Ce résultat termine la preuve. \square

4.2 Structure additive

Proposition 8.15 *Soit T^J , une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t+1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O = O^{np}$ alors :*

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = LHM_t(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \quad (8.33)$$

$$\text{avec } x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p, y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np} \text{ et } g_{t,t+1} = (0, h_{t,t+1}^p, k_{t,t+1}^{np}, 0).$$

Ce résultat précise que si les inputs et les outputs sont respectivement traités comme des intrants polluants et des extrants non polluants alors, l'indice d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen correspond à la mesure de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen usuelle.

Preuve de la Proposition 8.15

Si $I = I^p$ et $O = O^{np}$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) est :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = EGLO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) - EGLI_t^p(x_t^p, y_t^{np}, x_{t+1}^p; h_t^p, h_{t+1}^p).$$

$$\text{avec, } EGLO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}; k_t^{np}, k_{t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}; 0, k_t^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np} |_{S_2}(x_t^p, y_{t+1}^{np}; 0, k_{t+1}^{np}) \text{ et } EGLI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_t^{np}; h_t^p, h_{t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p |_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t^{np}; h_t^p, 0) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p |_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}; h_t^p, 0). \text{ Étant donné}$$

que $x_t = x_t^p$ et $y_t = y_t^{np}$ alors,

$$\vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t; 0, k_t) = \sup_{\beta} \{ \beta : (x_t, y_t + \beta k_t) \in T_t^J \}, \quad (8.34)$$

$$\vec{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t; h_t, 0) = \sup_{\beta} \{ \beta : (x_t - \beta h_t, y_t) \in T_t^J \}. \quad (8.35)$$

Ainsi, $\vec{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(\cdot)$ et $\vec{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(\cdot)$ sont respectivement des fonctions de distance directionnelle en input et en output dans T_t^J . Par conséquent,

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = \\ LO_t(x_t, y_t, y_{t+1}; k_t, k_{t+1}) - LI_t(x_t, y_t, x_{t+1}; h_t, h_{t+1}). \end{aligned}$$

Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.16 Soit un ensemble de production T^J qui est B -disponible et qui satisfait les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t + 1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$ alors :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = LO_t(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \quad (8.36)$$

tels que $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$, $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$ et, $g_{t,t+1} = (0, 0, k_{t,t+1}^{np}, 0)$.

D'après la Proposition 8.16, si l'on s'intéresse spécifiquement aux outputs et que ces derniers sont traités comme des extrants non polluants alors, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen hérite de la structure de l'indicateur de quantité de Luenberger en output (MO).

Preuve de la Proposition 8.16

Si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) est :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}; g_{t,t+1}) = EGLO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}; k_{t,t+1}^{np}) - EGLI_t^p(x_t, y_t^{np}; 0)$$

ainsi , $EGLLO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^{np}; k_{t,t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}; k_{t+1}^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}; k_t^{np})$ et $EGLI_t^p(x_t, y_t^{np}; 0) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}; 0) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}; 0) = 0$. Sachant que $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $y_{t,t+1} = y_{t,t+1}^{np}$ alors,

$$\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t; 0, k_t) = \sup_{\beta} \{ \beta : (x_t, y_t + \beta k_t) \in T_t^J \} \quad (8.37)$$

Ainsi, $\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(\cdot)$ prend la forme d'une fonction de distance directionnelle en output dans T_t^J .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) &= \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}; k_{t+1}^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}; k_t^{np}) - 0 \\ &= LO_t(x_t, y_t, y_{t+1}; k_{t,t+1}). \end{aligned}$$

Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.17 Soit T^J , une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t+1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O^{np} = O^p = \emptyset$ alors :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = -LI_t(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1}), \quad (8.38)$$

où $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$, $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}^p = \emptyset$ et $g_{t,t+1} = (0, h_{t,t+1}^p, 0, 0)$.

D'après la proposition précédente, si l'on s'intéresse spécifiquement aux inputs et que ces derniers sont traités comme des intrants polluants alors, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen prend la forme de l'indicateur de quantité de Luenberger en input.

Preuve de la Proposition 8.17

Quand $I = I^p$ et $O^p = O^{np} = \emptyset$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) est :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t, x_{t+1}^p; g_t, g_{t+1}) = EGLLO_t^{np}(x_t^p, y_t; 0) - EGLI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_t; h_{t,t+1}^p)$$

où, $EGLLO_t^{np}(x_t^p, y_t; 0) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t; 0) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t; 0) = 0$ et $EGLI_t^p(x_t^p, x_{t+1}^p, y_t; h_{t,t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t; h_{t,t+1}^p) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t; h_t^p)$. Sachant que $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$, $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}^p = \emptyset$ alors,

$$\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t; h_t, 0) = \sup_{\beta} \{ \beta : (x_t - \beta h_t, y_t) \in T_t^J \} \quad (8.39)$$

Ainsi, $\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(\cdot)$ prend la forme d'une fonction de distance directionnelle en input dans T_t^J .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}; g_t, g_{t+1}) &= 0 - \left[\overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t; g_{t+1}) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t; g_t) \right] \\ &= -LI_t(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1}). \end{aligned}$$

Ce résultat termine la preuve. \square

Proposition 8.18 Soit un ensemble de production T^J qui est B -disponible et qui satisfait les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t+1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^p$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = ELHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \quad (8.40)$$

tels que $x_{t,t+1} = x_{t,t+1}^p$, $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p)$ et, $g_{t,t+1} = (0, h_{t,t+1}^p, k_{t,t+1}^{np}, k_{t,t+1}^p)$.

Le résultat 8.18 précise que lorsque les intrants et les extrants sont respectivement traités comme des inputs polluants et comme des outputs partitionnés selon des attributs de qualité (composantes polluantes et non polluantes) alors, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen hérite de la structure de l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen (Abad, 2015).

Preuve de la Proposition 8.18

Quand $I = I^p$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) devient :

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; g_t, g_{t+1}) &= EGLLO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; k_{t,t+1}^{np}) \\ &\quad - EGLI_t^p(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p; h_{t,t+1}^p, k_{t,t+1}^p) \end{aligned}$$

avec, $EGLO_t^{np}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}; k_{t,t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_{t+1}^{np}, y_t^p; k_{t+1}^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p; k_t^{np})$ et $EGLI_t^p(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p; h_{t,t+1}^p, k_{t,t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; h_{t+1}^p, k_{t+1}^p) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t^p, y_t^{np}, y_t^p; h_t^p, k_t^p)$. D'après les équations (7.51) et (7.52) le résultat est immédiat. \square

Proposition 8.19 Soit T^J , une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes consécutives $(t, t+1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = ELHM_t^O(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}), \quad (8.41)$$

avec $x_{t,t+1}^{np} = x_{t,t+1}^p = \emptyset$, $y_{t,t+1} = (y_{t,t+1}^{np}, y_{t,t+1}^p)$ et, $g_{t,t+1} = (0, 0, k_{t,t+1}^{np}, k_{t,t+1}^p)$.

Le résultats précédent indique que l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen prend la forme de l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen en output (Abad, 2015)² lorsque l'on s'intéresse spécifiquement aux outputs et que ces derniers sont traités considérés selon des attributs de qualité (polluant et non polluant).

Preuve de la Proposition 8.19

Si $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) devient :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; g_t, g_{t+1}) = EGLO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}; k_{t,t+1}^{np}) - EGLI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; k_{t,t+1}^p)$$

où, $EGLO_t^{np}(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^{np}; k_{t,t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p; k_{t+1}^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^{np}|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; k_t^{np})$ et $EGLI_t^p(x_t, y_t^{np}, y_t^p, y_{t+1}^p; k_{t,t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p; k_{t+1}^p) - \overrightarrow{\psi}_{T_t^J}^p|_{S_2}(x_t, y_t^{np}, y_t^p; k_t^p)$. D'après les équations (7.61) et (7.62), ces résultats terminent la preuve. \square

Proposition 8.20 Soit un ensemble de production T^J qui est B -disponible et qui satisfait les axiomes $T1 - T3$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour deux périodes

2. Rappelons que cette mesure d'éco-productivité permet d'évacuer le problème des infaisabilités associé aux mesures usuelles d'éco-productivité.

consécutives $(t, t+1)$ et pour tout $(x_{t,t+1}, y_{t,t+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, si $I = I^{np} \cup I^p$ et $O^{np} = O^p = \emptyset$ alors :

$$EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1}) = ELHM_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1}), \quad (8.42)$$

tels que $x_{t,t+1} = (x_{t,t+1}^{np}, x_{t,t+1}^p)$, $y_{t,t+1}^{np} = y_{t,t+1}^p = \emptyset$ et, $g_{t,t+1} = (h_{t,t+1}^{np}, h_{t,t+1}^p, 0, 0)$.

Preuve de la Proposition 8.20

Si $I = I^{np} \cup I^p$ et $O^{np} = O^p = \emptyset$ alors, l'indicateur d'éco-productivité EGLHM pour la période (t) est :

$$\begin{aligned} EGLHM_t^{I,O}(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p; h_{t,t+1}^{np}, h_{t,t+1}^p) &= EGLO_t^{np}(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^{np}; h_{t,t+1}^{np}) \\ &\quad - EGLI_t^p(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p; h_{t,t+1}^p) \end{aligned}$$

avec, $EGLO_t^{np}(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^{np}; h_{t,t+1}^{np}) = \overrightarrow{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(y_t, x_{t+1}^{np}, x_t^p; h_{t+1}^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p; h_t^{np})$ et $EGLI_t^p(y_t, x_t^{np}, x_t^p, x_{t+1}^p; h_{t,t+1}^p) = \overrightarrow{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_{t+1}^p; h_{t+1}^p) - \overrightarrow{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p; h_t^p)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) &= \left[\overrightarrow{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(y_t, x_{t+1}^{np}, x_t^p; h_{t+1}^{np}) - \overrightarrow{\psi}_{T^J}^{np}|_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p; h_t^{np}) \right] \\ &\quad - \left[\overrightarrow{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_{t+1}^p; h_{t+1}^p) - \overrightarrow{\psi}_{T^J}^p|_{S_2}(y_t, x_t^{np}, x_t^p; h_t^p) \right] \\ &= ELHM_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1}). \end{aligned}$$

Ce résultat termine la preuve. \square

La Table 8.1 résume les liens existant entre les mesures d'éco-productivité généralisées (additives et multiplicatives) et, les indices et indicateurs de productivité exposés dans le chapitre précédent.

5 Mesures d'Eco-Productivité Généralisées : spécification Non-Paramétrique

Les notations suivantes sont adoptées afin de simplifier l'exposition des programmes présentés dans cette sous-section : $(x_t, y_t) = (x, y)$ et $(x_{t+1}, y_{t+1}) = (\hat{x}, \hat{y})$. Soit T^J une tech-

Chapitre 8. Indices et Indicateurs d'Eco-Productivité : Généralisation

Partitions	Structure multiplicative	Structure additive
(i) $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np}$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = MO_t(x_t, y_t, y_{t+1})$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = LO_t(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})$
(ii) $I = I^p$ et $O^p = O^{np} = \emptyset$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = MI_t(x_t, x_{t+1}, y_t)^{-1}$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = -LI_t(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1})$
(iii), (i) \cap (ii), $I = I^p$ et $O = O^{np}$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = HM_t(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1})$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = LHM_t(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})$
(iv) $I^{np} = I^p = \emptyset$ et $O = O^{np} \cup O^p$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}) = EHM_t^O(x_t, y_t, y_{t+1}) = EPI_t(x_t, y_t, y_{t+1})$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = ELHM_t^O(x_t, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})$
(v) $I = I^{np} \cup I^p$ et $O^p = O^{np} = \emptyset$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t) = EHM_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t)$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1}) = ELHM_t^I(x_t, x_{t+1}, y_t; g_t, g_{t+1})$
(vi), $I = I^p$ et $O = O^{np} \cup O^p$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = EHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1})$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = ELHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})$
(vii) $I = I^{np}$ et $O = O^{np}$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = EGMO_t^{np}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1})$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = EGLO_t^{np}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})$
(viii) $I = I^p$ et $O = O^p$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = EGM_t^p(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1})^{-1}$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = -EGL_t^p(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1})$
(ix), (vii) \cap (viii), $I = I^p \cup I^{np}$ et $O = O^p \cup O^{np}$	$EGHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}) = (vii) \times (viii)$	$EGLHM_t^{I,O}(x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) = (vii) + (viii)$

TABLE 8.1 – EGHM et EGLHM : connexions avec les mesures de productivité existantes

nologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ tel que $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance multiplicative généralisée (5.1) en périodes croisées $(t, t + 1)$ peut être déterminée selon le programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \psi_t^{DEA}(\hat{x}_0^{np}, \hat{x}_0^p, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } \lambda^{\alpha^p} \hat{x}_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\alpha^{np}} \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\alpha^p} \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\alpha^{np}} \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \lambda^{\beta^p} \hat{y}_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \lambda^{\beta^{np}} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \lambda^{\beta^p} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \lambda^{\beta^{np}} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{8.43}$$

avec $\alpha^p = \{0, 1\}$, $\alpha^{np} = \{0, 1\}$, $\beta^p = \{-1, 0, 1\}$ et $\beta^{np} = \{-1, 0, 1\}$.

D'après la spécification des paramètres α^p , α^{np} , β^p et β^{np} , le programme (8.43) permet de déterminer l'ensemble des fonctions de distance nécessaires pour implémenter les mesures d'éco-productivité généralisées de type Hicks-Moorsteen, exposées dans ces travaux. Notons que si les paramètres prennent la valeur 0 alors, \hat{x} et/ou \hat{y} deviennent x et/ou y . Par exemple, si on pose $\alpha^{np} = 1$, $\alpha^p = \beta^p = 0$ et $\beta^{np} = -1$ alors, nous avons $\psi_t^{DEA}(\hat{x}_0^{np}, \hat{x}_0^p, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \psi_{T_t^J, DEA|S_2}^{np}(\hat{x}_0^{np}, x_0^p, \hat{y}_0^{np}, y_0^p)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \psi_{T_t^{np}, DEA}^{np}(\hat{x}_0^{np}, x_0^p, \hat{y}_0^{np}, y_0^p) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } \lambda \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \lambda \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \frac{1}{\lambda} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \frac{1}{\lambda} \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

De même, si on pose $\alpha^p = \beta^p = 1$ et $\alpha^{np} = \beta^{np} = 0$ alors, nous avons $\psi_t^{DEA}(\hat{x}_0^{np}, \hat{x}_0^p, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \psi_{T_t^{J, DEA}}^p |_{S_2}(x_0^{np}, \hat{x}_0^p, y_0^{np}, \hat{y}_0^p)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \psi_{T_t^J, DEA}^p |_{S_2}(x_0^{np}, \hat{x}_0^p, y_0^{np}, \hat{y}_0^p) &= \inf \lambda \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \lambda \hat{x}_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \lambda \hat{x}_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \lambda \hat{y}_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \lambda \hat{y}_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned}$$

A présent, considérons la fonction de distance additive généralisée (5.11) en périodes croisées $(t, t + 1)$. Celle ci peut être implémentée selon le programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_t^{DEA}(\hat{x}_0, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } \hat{x}_{0,i} - \beta h^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h^{np} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h^{np} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0
 \end{aligned} \tag{8.44}$$

avec $h = (h^{np}, h^p) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^{np}, k^p) \in \mathbb{R}_+^{m^{np}} \times \mathbb{R}^{m^p}$.

Selon la définition des paramètres h^{np} , h^p , k^p et k^{np} , le programme précédent permet de déterminer l'ensemble des fonctions de distance directionnelle nécessaires à l'estimation des mesures d'éco-productivité généralisées de type Luenberger-Hicks-Moorsteen, évoquées dans ce chapitre. Notons que si ces paramètres prennent la valeur 0 alors, \hat{x} et/ou \hat{y} deviennent x et/ou y . Par exemple, si on pose $h^p = k^p = 0$, $h^{np} \in \mathbb{R}_+^{n^{np}}$ et $k^{np} \in \mathbb{R}_+^{m^{np}}$ alors, nous avons $\vec{\psi}_t^{DEA}(\hat{x}_0^{np}, \hat{x}_0^p, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p; h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0) = \vec{\psi}_{T^J, DEA|S_2}^{np}(\hat{x}_0^{np}, x_0^p, \hat{y}_0^{np}, y_0^p; h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{T_t^{J,DEA}|S_2}^{np}(\hat{x}_0^{np}, x_0^p, \hat{y}_0^{np}, y_0^p; h_{t+1}^{np}, 0, k_{t+1}^{np}, 0) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } x_{0,i} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h^{np} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h^{np} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 y_{0,j} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^{np} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0 \quad (8.45)
 \end{aligned}$$

De manière analogue, si on pose $h^{np} = k^{np} = 0$, $h^p \in \mathbb{R}_+^{np}$ et $k^p \in \mathbb{R}_-^{mp}$ alors, nous avons $\vec{\psi}_t^{DEA}(\hat{x}_0^{np}, \hat{x}_0^p, \hat{y}_0^{np}, \hat{y}_0^p) = \vec{\psi}_{T_t^{J,DEA}|S_2}^p(x_0^{np}, \hat{x}_0^p, y_0^{np}, \hat{y}_0^p; 0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p)$. Formellement,

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{T_t^{J,DEA}|S_2}^p(x_0^{np}, \hat{x}_0^p, y_0^{np}, \hat{y}_0^p; 0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p) &= \max \beta \\
 \text{s.t. } \hat{x}_{0,i} - \beta h^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \hat{x}_{0,i} - \beta h^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \in B_{\text{in}} \\
 x_{0,i} &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i \notin B_{\text{in}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^p &\geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \hat{y}_{0,j} + \beta k^p &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in B_{\text{out}} \\
 y_{0,j} &\leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \notin B_{\text{out}} \\
 \sum_{z \in \mathcal{Z}} \theta_z &= \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z = 1, \quad \theta, \mu \geq 0 \quad (8.46)
 \end{aligned}$$

6 Conclusion

Dans ce chapitre une généralisation des mesures d'éco-productivité possédant des structures additives et multiplicatives complètes a été introduite. Tout d'abord nous avons défini un indice d'éco-productivité généralisé héritant d'une structure de type Hicks-Moorsteen. Par la suite un indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen a été présenté. Une attention particulière a été accordée dans l'exposition des connexions existant entre ces mesures d'éco-productivité généralisées et celles possédant des structures additives et multiplicatives complètes.

Enfin, une spécification non-paramétrique permettant d'implémenter ces nouvelles mesures

d'éco-productivité a été proposée. Celle-ci repose sur la spécification non paramétrique des fonctions de distance additives et multiplicatives généralisées exposées dans le cinquième chapitre de ces travaux.

Conclusion Générale

Ces travaux, structurés en trois parties, mettent à jour différents apports théoriques et empiriques. La première partie est consacrée à l'étude des technologies de production selon différentes approches axiomatiques. Le chapitre 1 recense les propriétés usuelles de l'ensemble de production et de ses images, en termes de correspondances (inputs et outputs). Le chapitre 2 présente les différentes définitions et caractérisations des technologies de production polluante rencontrées dans la littérature économique. Le chapitre 3 introduit un nouvel axiome de disponibilité afin de proposer une définition plus générale des technologies de production polluante : l'hypothèse de B -disponibilité.

La deuxième partie est vouée à l'analyse des fonctions de distance afin de caractériser l'ensemble des possibilités productives. Le chapitre 4 définit ces mesures de distance (radiales et non radiales) dans des ensembles de production usuels. Le chapitre 5 introduit des mesures d'efficacité technique généralisée (additives et multiplicatives) dans des technologies de production B -disponibles. Le chapitre 6 propose des tests de congestion et de convexité. Une application empirique y est consacrée.

La troisième partie est dédiée aux mesures de productivité. Le chapitre 7 présente les indices et les indicateurs de productivité et d'éco-productivité existant dans la littérature économique. Une étude comparative de ces mesures de productivité est proposée à travers une illustration empirique. Le chapitre 8 introduit une généralisation des indices et des indicateurs d'éco-productivité.

L'hypothèse de B -disponibilité

L'axiome de B -disponibilité est introduit dans la première partie de ces travaux afin d'apporter une définition générale aux technologies de production polluante. Selon cette propriété, il est pos-

sible de définir des ensembles de production polluant à travers un ensemble réduit d'hypothèses. Ainsi, des technologies de production polluante convexes, non convexes et hybrides peuvent être mises en évidence.

De plus, cette nouvelle approche axiomatique peut être définie selon plusieurs stratégies de partitionnement, ce qui présente un intérêt particulier pour la mise en oeuvre des études empiriques. Lorsque seuls les extrants sont partitionnés en composantes polluantes et non polluantes, elle s'inscrit dans les pas du modèle proposé par Färe, Grosskopf, Lovell et Pasurka (1989). En effet, dans ce cas, l'hypothèse de B -disponibilité des outputs fait apparaître une situation de congestion dans la dimension des productions non polluantes. Par ailleurs, selon ce schéma de partitionnement, les technologies de production B -disponibles peuvent être définies en terme d'intersection de sous-technologies. Ainsi l'approche axiomatique suggérée dans ces travaux permet de retrouver l'idée introduite par Murty, Russell et Levkoff (2012). Du fait des règles de partitionnement adoptées, l'approche axiomatique proposée par Murty, Russell et Levkoff (2012) a une portée plus générale.

Partant de ce constat, une hypothèse de B -disponibilité généralisée est proposée. Celle-ci permet de considérer une nouvelle structure de partitionnement des intrants et des extrants. Lorsque les inputs et les outputs sont partitionnés en termes de composantes polluantes et non polluantes, cette généralisation permet de définir une situation de congestion généralisée, concernant simultanément les productions désirables et les intrants polluants. Dans ce cas, l'approche axiomatique introduite dans ces travaux s'inscrit dans les pas du modèle introduit par Murty, Russell et Levkoff (2012). En effet, nous montrons que lorsque les technologies de production vérifient la propriété généralisée de B -disponibilité alors, elles peuvent être considérées comme des intersections de sous-technologies.

Selon une spécification non-paramétrique des technologies de production B -disponibles, les interactions entre les approches axiomatiques existant et celle introduite dans ces travaux, sont mises à jour. A cette occasion, une nouvelle modélisation non-paramétrique non convexe des technologies de production polluante est définie.

Fonctions de Distance additives et multiplicatives généralisées

Dans ces travaux, des mesures d'efficacité technique (additives et multiplicatives) généralisées ont été introduites. Ces dernières sont définies dans des ensembles de production B -disponibles. Ces nouvelles fonctions de distance permettent d'analyser les mesures d'efficacité technique selon plusieurs schémas exposés dans la littérature économique. Ainsi, selon les règles de partitionnement adoptées, ces mesures de distance permettent de retrouver des mesures d'efficacité technique existantes. Partant de ces résultats, plusieurs tests permettant d'apprécier la structure des ensembles de production B -disponibles ont été exposés. Ainsi, un test de congestion en outputs non polluants, permettant d'étudier le caractère polluant des technologies de production dans lesquelles elle est implémentée, a été développé. Des tests de convexité, construits selon des fonctions de distance (additives ou multiplicatives) définies dans des ensembles de production B -disponibles convexes et non convexes, ont également été introduits.

De plus, de nouveaux résultats de dualité ont été proposés. Ces derniers sont construits sous la propriété de B -disponibilité, ce qui atténue l'importance des axiomes usuels de disponibilité dans l'élaboration de ces résultats. Ainsi, des relations duales entre des fonctions de profit et de revenu et, des mesures de distance B -disponible (radiales et non radiales) ont été exposées. Suivant ces résultats, des fonctions de demande conditionnelle des inputs (polluants et/ou non polluants) et des fonctions d'offre conditionnelle des outputs (polluants et/ou non polluants) ont été établies. De plus, des fonctions de prix ajustés des intrants (polluants et/ou non polluants) et des extrants (polluants et/ou non polluants) ont également été présentées. Ces dernières correspondent aux prix implicites des intrants (polluants et/ou non polluants) et des extrants (polluants et/ou non polluants) dont certains peuvent être négatifs. Ces derniers sont directement liés à l'existence de frontières B -congestionnées dans les ensembles de production B -disponibles.

Enfin, une spécification non-paramétrique des fonctions de distance additives et multiplicatives généralisées a été proposée. A cette occasion, nous avons pu constater que la modélisation non-paramétrique présentée, permet de retrouver l'ensemble des fonctions de distance additives et multiplicatives exposées dans ces travaux. De plus, une analyse croisée des différents tests exposés dans ces travaux a été menée. Celle-ci nous a permis de mettre en évidence une procédure caractérisant les ensembles de production B -disponibles. Suivant ce résultat, une spécification non-

paramétrique de ces tests a été implémentée. A cette occasion, une illustration empirique relative au secteur aéroportuaire français a été retenue.

Les Mesures d'Eco-Productivité Généralisées

Les principales mesures d'éco-productivité existant dans la littérature économique, ont été exposées dans le chapitre 7. Ces mesures sont construites selon les mêmes structures que les indices et indicateurs de productivité usuels. A cette occasion les problèmes d'infaisabilités associés aux mesures d'éco-productivité de type ML et EL ont été étudiés avec attention. Une illustration empirique reposant sur des mesures d'éco-productivité non-paramétriques a été introduite. Celle-ci concerne le secteur aéroportuaire français sur la période 2007-2011. La décomposition des mesures d'éco-productivité ML et EL en termes de changements technologiques et de variations d'efficacité technique nous a permis d'identifier les principales sources d'infaisabilités. Celles-ci proviennent de la définition des changements technologiques et plus précisément des fonctions de distance en période croisée : $\vec{\psi}_{T^j} |_{S_2}(x_j, y_j^{np}, y_j^p; 0, k_j^{np}, k_j^p)$ avec $i \neq j$.

Une généralisation des mesures d'éco-productivité possédant des structures additives et multiplicatives complètes a été introduite dans le chapitre 8. Ainsi, des indices et des indicateurs d'éco-productivité généralisés de type Hicks-Moorsteen et Luenberger-Hicks-Moorsteen ont été présentés. Une attention particulière a été accordée à la présentation des connexions existant entre ces mesures d'éco-productivité généralisées et celles possédant des structures additives et multiplicatives complètes. Une spécification non paramétrique permettant d'implémenter ces nouvelles mesures d'éco-productivité a été introduite. Celle-ci repose sur la spécification non paramétrique des fonctions de distance additives et multiplicatives généralisées exposées dans le cinquième chapitre de ces travaux.

Au regard des apports théoriques exposés dans ces travaux, plusieurs pistes de recherche peuvent être identifiées :

- Est-il possible d'étendre les résultats obtenus dans ces travaux à d'autres domaines d'étude en économie ?

Conclusion Générale

– Un modèle d'équilibre général peut-il être construit ?

De plus, en réponse aux illustrations empiriques présentées dans ces travaux, des études empiriques approfondies d'éco-efficacité et d'éco-productivité peuvent être élaborées.

Annexe 1. Correspondances Productives L, P, Q et Z : Spécification Non-Paramétrique

Approches Indirectes

Soit une unité de production observée (x_0, y_0) , les correspondances en inputs (L) et en outputs (P) peuvent être modélisées à l'aide de la méthode DEA comme suit :

$$\begin{aligned}
 L^{DEA}(y_0, \bar{y}_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \right. \\
 x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 \bar{y}_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \bar{y}_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma \right\} \quad (8.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^{DEA}(x_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : \right. \\
 x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 \bar{y}_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \bar{y}_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 \left. \mu \in \Gamma \right\}. \quad (8.48)
 \end{aligned}$$

De même, il est possible de spécifier par enveloppement des données les correspondances Q et Z. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
Q^{DEA}(y_0) = \{ & (x, \hat{y}) \in \mathbb{R}_+^{n+m^p} : \\
& x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& \bar{y}_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \bar{y}_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \mu \in \Gamma \} \quad (8.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^{DEA}(\bar{y}_0) = \{ & (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m^{np}} : \\
& x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& \bar{y}_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z \bar{y}_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \mu \in \Gamma \}. \quad (8.50)
\end{aligned}$$

Technologies de Production Jointe

Soit une unité de production observée (x_0, y_0) , les ensembles en inputs (L) et en outputs (P) peuvent être caractérisés par la méthode DEA comme suit :

$$\begin{aligned}
L^{wd,DEA}(y_0) = \{ & x \in \mathbb{R}_+^n : \\
& x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_{0,j} \leq \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& y_{0,j} = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \mu \in \Gamma, 0 \leq \gamma \leq 1 \} \quad (8.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{wd,DEA}(x_0) = \{ & y \in \mathbb{R}_+^m : \\
& x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_j \leq \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& y_j = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \mu \in \Gamma, 0 \leq \gamma \leq 1 \}. \quad (8.52)
\end{aligned}$$

De même, il est possible de spécifier par enveloppement des données les correspondances Q et Z. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
Q^{wd,DEA}(y_0^{np}) = & \left\{ (x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m^p} : \right. \\
& x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_{0,j} \leq \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& y_j = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \left. \mu \in \Gamma, 0 \leq \gamma \leq 1 \right\}
\end{aligned}
\tag{8.53}$$

$$\begin{aligned}
Z^{wd,DEA}(y_0^p) = & \left\{ (x, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+m^{np}} : \right. \\
& x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_j \leq \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& y_{0,j} = \gamma \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \left. \mu \in \Gamma, 0 \leq \gamma \leq 1 \right\}.
\end{aligned}
\tag{8.54}$$

Modèle de Rödseth (2017)

Soit une unité de production observée (x_0, y_0) , les correspondances en inputs (L) et en outputs (P) peuvent être modélisées par la méthode DEA comme suit :

$$\begin{aligned}
L^{mb,DEA}(y_0) = & \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \right. \\
& x_i = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i} + g_x, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_{0,j} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} - g_{y^{np}}, \quad j \in O^{np} \\
& y_{0,j} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} + g_{y^p}, \quad j \in O^p \\
& \left. \mu \in \Gamma, \rho_x g_x + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \right\}
\end{aligned}
\tag{8.55}$$

$$\begin{aligned}
P^{mb,DEA}(x_0) = & \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : \right. \\
& x_{0,i} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i} + g_x, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} - g_{y^{np}}, \quad j \in O^{np} \\
& y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} + g_{y^p}, \quad j \in O^p \\
& \left. \mu \in \Gamma, \rho_x g_x + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \right\}.
\end{aligned}
\tag{8.56}$$

De même, il est possible de spécifier par enveloppement des données les correspondances Q et Z. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
Q^{mb,DEA}(y_0^{np}) = & \left\{ (x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+mp} : \right. \\
& x_i = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i} + g_x, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_{0,j} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} - g_{y^{np}}, \quad j \in O^{np} \\
& y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} + g_{y^p}, \quad j \in O^p \\
& \left. \mu \in \Gamma, \rho_x g_x + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \right\} \\
& (8.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^{mb,DEA}(y_0^p) = & \left\{ (x, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+m^{np}} : \right. \\
& x_i = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i} + g_x, \quad i = 1, \dots, n \\
& y_j = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} - g_{y^{np}}, \quad j \in O^{np} \\
& y_{0,j} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j} + g_{y^p}, \quad j \in O^p \\
& \left. \mu \in \Gamma, \rho_x g_x + \rho_{y^{np}} g_{y^{np}} - g_{y^p} = 0 \right\}. \\
& (8.58)
\end{aligned}$$

Modèle de Murty, Russell et Levkoff (2012)

Soit une unité de production observée (x_0, y_0) , les ensembles en inputs (L) et en outputs (P) peuvent être représentés par la méthode DEA comme suit :

$$\begin{aligned}
L^{bp,DEA}(y_0) = & \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \right. \\
& x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& x_i \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i \in I^p \\
& y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& y_{0,j} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \left. \lambda, \mu \in \Gamma \right\} \\
& (8.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{bp,DEA}(x_0) = & \left\{ y \in \mathbb{R}_+^m : \right. \\
& x_{0,i} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& x_{0,i} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i \in I^p \\
& y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
& y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
& \left. \lambda, \mu \in \Gamma \right\}. \\
& (8.60)
\end{aligned}$$

De même, il est possible de spécifier par enveloppement des données les correspondances Q et Z. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
 Q^{bp,DEA}(y_0^{np}) = & \left\{ (x, y^p) \in \mathbb{R}_+^{n+m^p} : \right. \\
 & x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & x_i \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i \in I^p \\
 & y_{0,j} \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 & y_j \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 & \left. \lambda, \mu \in \Gamma \right\} \quad (8.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z^{bp,DEA}(y_0^p) = & \left\{ (x, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+m^{np}} : \right. \\
 & x_i \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z x_{z,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & x_i \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z x_{z,i}, \quad i \in I^p \\
 & y_j \leq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mu_z y_{z,j}, \quad j \in O^{np} \\
 & y_{0,j} \geq \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z y_{z,j}, \quad j \in O^p \\
 & \left. \lambda, \mu \in \Gamma \right\}. \quad (8.62)
 \end{aligned}$$

Annexe 2. Technologie de Production Polluante et Mesures de l'Efficienc (schéma S1)

Fonctions de Distance Multiplicatives et Technologie de Production Polluante (schéma S1)

Fonctions de distance de Shephard

Soit L^J et P^J les correspondances en inputs et en outputs d'une technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$, satisfaisant respectivement les axiomes L1-L3 et P1-P3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance de Shephard en input, $\psi_{L^J}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup 0$, et en output, $\psi_{P^J}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, dans les correspondances productives L^J et P^J se définissent comme suit :

$$\psi_{L^J}|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \sup_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{x^p}{\lambda}, \frac{x^{np}}{\lambda} \right) \in L^J(y) \right\} & \text{si } \left(\frac{x^p}{\lambda}, \frac{x^{np}}{\lambda} \right) \in L^J(y), \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.63)$$

et

$$\psi_{P^J|S_1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.64)$$

Par construction, la fonction de distance de Shephard en input (8.63), respectivement en output (8.64), est égale à 1 dès que les intrants (polluants et non polluants), respectivement les extrants (désirables et indésirables), appartiennent à la frontière de la correspondance en inputs, respectivement à l'isoquant de l'ensemble en outputs, de la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$.

Dans le cadre d'une analyse en sous-vecteurs, les fonctions de distance (8.63) et (8.64) peuvent être définies spécifiquement en composantes polluantes ou non polluantes. Ainsi, pour tout $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$ on a :

$$\psi_{L^J|S_1}^{np}(x, y) = \begin{cases} \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{x^{np}}{\lambda}, x^p \right) \in L^J(y) \right\} & \text{si } \left(\frac{x^{np}}{\lambda}, x^p \right) \in L^J(y), \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.65)$$

et

$$\psi_{P^J|S_1}^{np}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.66)$$

De même,

$$\psi_{L^J|S_1}^p(x, y) = \begin{cases} \sup_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x^{np}, \frac{x^p}{\lambda} \right) \in L^J(y) \right\} & \text{si } \left(x^{np}, \frac{x^p}{\lambda} \right) \in L^J(y), \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.67)$$

et

$$\psi_{P^J|S_1}^p(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{y^p}{\lambda}, y^{np} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, y^{np} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.68)$$

Si P^J est un ensemble en outputs B -disponible satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance (8.64) se définit comme suit :

$$\psi_{P^J|S_1(x,y)} = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(\frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.69)$$

La fonction de distance (8.69) est un cas particulier de la mesure (8.64) dans lequel les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes. Dans le cadre d'une analyse en sous-vecteurs, la fonction de distance (8.69) peut être caractérisée spécifiquement en composantes polluantes ou non polluantes. Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, on a :

$$\psi_{PJ|S1}^{np}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.70)$$

et

$$\psi_{PJ|S1}^p(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda : \left(y^{np}, \frac{y^p}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(y^{np}, \frac{y^p}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.71)$$

Remarque 8.21 Soit P^J un ensemble en outputs B -disponible satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance de Shephard en output dans les schémas S2 et S3 se définissent comme suit :

$$\psi_{PJ|S2}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(\lambda y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \lambda > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.72)$$

et

$$\psi_{PJ|S3}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x) \right\} & \text{si } \left(y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in P^J(x), \\ & \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.73)$$

Les mesures d'efficience technique dans le graphe de la technologie de production polluante

Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance, $\psi_{T^J}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, définit une mesure d'efficacité technique dans le graphe de la technologie de production polluante :

$$\psi_{T^J}|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.74)$$

La mesure de distance (8.74), correspond à une fonction de distance hyperbolique dans le graphe de la technologie de production polluante T^J . Ainsi, la mesure hyperbolique (8.74) met en évidence la réduction et l'augmentation equi-proportionnelles, des composantes polluantes et non polluantes, qui permettent d'atteindre la frontière de la technologie de production polluante. Par construction, cette mesure est égale à 1 d s que les composantes polluantes et non polluantes appartiennent à l'isoquant de la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$.

La fonction de distance (8.74) peut être présentée spécifiquement en composantes polluantes ou non polluantes. Dans le premier cas, la mesure de distance en composantes polluantes, $\psi_{T^J}^p|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, se définit comme suit :

$$\psi_{T^J}^p|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, x^{np}, \frac{y^p}{\lambda}, y^{np} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, x^{np}, \frac{y^p}{\lambda}, y^{np} \right) \in T^J, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.75)$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\psi_{T^J}^p|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, x^{np}, \frac{y^p}{\lambda} \right) \in Q^J(y^{np}) \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, x^{np}, \frac{y^p}{\lambda} \right) \in Q^J(y^{np}), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.76)$$

La fonction (8.75), respectivement (8.76), met en lumière la réduction et l'accroissement équi-proportionnels des composantes polluantes qui permettent, pour un niveau donné de composantes non polluantes, d'atteindre la frontière de la technologie de production polluante T^J , respectivement de l'ensemble en intrants et en produits polluants $Q^J(y^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$. Par construction, (8.75) et (8.76) correspondent à des mesures hyperboliques. Ainsi, elles vérifient la relation suivante :

$$(x^p, x^{np}, y^p, y^{np}) \in \text{Isoq}T^J \Leftrightarrow \psi_{T^J}^p(x, y)|_{S1} = 1 \Leftrightarrow (x^p, x^{np}, y^p) \in \text{Isoq}Q^J(y^{np}).$$

De façon similaire, la fonction de distance en composantes non polluantes, $\psi_{T^J}^{np}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, se présente comme suit :

$$\psi_{T^J}^{np}|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x^p, \lambda x^{np}, y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(x^p, \lambda x^{np}, y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.77)$$

De même, on peut écrire :

$$\psi_{T^J}^{np}|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in Z(y^p) \right\} & \text{si } \left(x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in Z(y^p), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.78)$$

Ainsi, (8.77) et (8.78) respectent la relation suivante :

$$(x^p, x^{np}, y^p, y^{np}) \in \text{Isoq}T^J \Leftrightarrow \psi_{T^J}^{np}(x, y)|_{S1} = 1 \Leftrightarrow (x^p, x^{np}, y^{np}) \in \text{Isoq}Z^J(y^p).$$

Des mesures de distance multiplicatives conciliant composantes polluantes et non polluantes peuvent également être caractérisées. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S1}(x, y) &= \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, x^{np}, y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, x^{np}, y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, x^{np}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in Z^J(y^p) \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, x^{np}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in Z^J(y^p), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.79)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S1}(x, y) &= \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^p}{\lambda}, y^{np} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^p}{\lambda}, y^{np} \right) \in T^J, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^p}{\lambda} \right) \in Q^J(y^{np}) \right\} & \text{si } \left(x^p, \lambda x^{np}, \frac{y^p}{\lambda} \right) \in Q^J(y^{np}), \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.80)$$

La fonction de distance en intrants polluants et en extrants non polluants, $\psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, mesure la réduction et l'accroissement equi-proportionnels des intrants polluants et des outputs non polluants qui permettent d'atteindre, pour un niveau donné d'intrants non polluants et d'extrants polluants, l'isoquant de la technologie de production polluante T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$. Inversement, la fonction de distance en intrants non polluants et en extrants polluants, $\psi_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, mesure la diminution et l'augmentation equi-proportionnelles des intrants non polluants et des outputs polluants qui permettent, pour un niveau donné d'intrants polluants et d'outputs non polluants, d'atteindre la frontière de la technologie de production polluante T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$. Par

construction, ces fonctions de distance correspondent à des mesures hyperboliques. Ainsi, elles vérifient les relations suivantes :

$$(x^p, x^{np}, y^p, y^{np}) \in \text{IsoqT}^J \Leftrightarrow \psi_{T^J}^{I^p \cup O^{np}}(x, y)|_{S1} = 1 \Leftrightarrow (x^p, x^{np}, y^{np}) \in \text{IsoqZ}^J(y^p)$$

et

$$(x^p, x^{np}, y^p, y^{np}) \in \text{IsoqT}^J \Leftrightarrow \psi_{T^J}^{I^{np} \cup O^p}(x, y)|_{S1} = 1 \Leftrightarrow (x^p, x^{np}, y^p) \in \text{IsoqQ}^J(y^{np}).$$

Remarque 8.22 Si T^J est une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3 tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance hyperbolique, $\psi_{T^J}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, se définit comme suit :

$$\psi_{T^J}|_{S1}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x, \frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(\lambda x, \frac{y^p}{\lambda}, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J, \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.81)$$

La mesure hyperbolique (8.81) est un cas particulier de la mesure (8.74) dans lequel les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

Remarque 8.23 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance, $\psi_{T^J}|_{S2} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$ et $\psi_{T^J}|_{S3} : \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup +\infty$, définissent des mesures d'efficacité technique dans le graphe de la technologie de production polluante selon les schémas S2 et S3 :

$$\psi_{T^J}|_{S2}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, \lambda x^{np}, \lambda y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, \lambda x^{np}, \lambda y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J, \\ & \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.82)$$

et

$$\psi_{T^J}(x, y)|_{S3}(x, y) = \begin{cases} \inf_{\lambda} \left\{ \lambda > 0 : \left(\lambda x^p, \lambda x^{np}, y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J \right\} & \text{si } \left(\lambda x^p, \lambda x^{np}, y^p, \frac{y^{np}}{\lambda} \right) \in T^J, \\ & \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.83)$$

Fonctions de Distance Additives et Technologie de Production Polluante (schéma S1)

Fonctions de distance de directionnelle

Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tels que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance directionnelle, $\vec{\psi}_{T^J}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, définit une mesure d'efficacité technique dans le graphe de la technologie de production polluante :

$$\vec{\psi}_{T^J}|_{S1}(x, y; h, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y + \beta k) \in T^J \} & \text{si } (x - \beta h, y + \beta k) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.84)$$

Cette mesure se caractérise dans la direction $g = (h^p, h^{np}, k^p, k^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n+np+m+mp}$. Par définition $[n] = [n^{np}] + [n^p]$ et $[m] = [m^{np}] + [m^p]$, ainsi nous notons $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^p, k^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$.

La fonction de distance directionnelle (8.84) permet simultanément de réduire les inputs (polluants et non polluants) et d'accroître les outputs (polluants et non polluants) suivant la direction $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^p, k^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, jusqu'à atteindre la frontière de la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$. En effet, d'après nos notations $(x - \beta h, y + \beta k) \in T^J \Leftrightarrow (x^p - \beta h^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J$. Par construction, cette mesure est égale à 0 dès que les composantes polluantes et non polluantes appartiennent à l'isoquant de la technologie de production B -disponible T^J , avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\}$.

Selon la spécification du vecteur directionnel g , la fonction de distance directionnelle (8.84) peut être présentée spécifiquement en composantes polluantes ou non polluantes. Si le vecteur directionnel est défini par $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n^p} \times 0$ et $k = (k^p, k^{np}) \in \mathbb{R}_+^{m^p} \times 0$ alors, la fonction de distance directionnelle (8.84) est caractérisée en composantes polluantes.

$$\vec{\psi}_{T^J|S_1}^p(x, y; h^p, k^p) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^p + \beta k^p, y^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^p + \beta k^p, y^{np}) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.85)$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\vec{\psi}_{T^J|S_1}^p(x, y; h^p, k^p) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^p + \beta k^p) \in Q^J(y^{np}) \} & \text{si } (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^p + \beta k^p) \in Q^J(y^{np}), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.86)$$

Si le vecteur directionnel est défini par $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{n^{np}}$ et $k = (k^p, k^{np}) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{m^{np}}$ alors, la fonction de distance directionnelle (8.84) est représentée en composantes non polluantes.

$$\vec{\psi}_{T^J|S_1}^{np}(x, y; h^{np}, k^{np}) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.87)$$

De même,

$$\vec{\psi}_{T^J|S_1}^{np}(x, y; h^{np}, k^{np}) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^{np} + \beta k^{np}) \in Z^J(y^p) \} & \text{si } (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^{np} + \beta k^{np}) \in Z^J(y^p), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.88)$$

Enfin, si le vecteur directionnel est défini par $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{n^p}$ et $k = (k^p, k^{np}) \in \mathbb{R}_+^{m^p} \times 0$ ou inversement $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^{n^p} \times 0$ et $k = (k^p, k^{np}) \in 0 \times \mathbb{R}_+^{m^p}$ alors, la fonction de distance directionnelle (8.84) est définie selon des croisements partiels en composantes polluantes et non polluantes.

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{T^J \cup O^{np}}|_{S1}(x, y; h^p, k^{np}) &= \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^p, \\ & y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^{np} + \beta k^{np}) \in Z^J(y^p) \} & \text{si } (x^p - \beta h^p, x^{np}, y^{np} + \\ & \beta k^{np}) \in Z^J(y^p), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.89)$$

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{T^J \cup O^p}|_{S1}(x, y; h^{np}, k^p) &= \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p + \beta k^p, y^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p + \beta k^p, \\ & y^{np}) \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p + \beta k^p) \in Q^J(y^{np}) \} & \text{si } (x^p, x^{np} - \beta h^{np}, y^p + \beta k^p) \\ & \in Q^J(y^{np}), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.90)$$

Remarque 8.24 Si T^J est une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3 tels que les intrants sont librement disponibles, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, la fonction de distance directionnelle, $\vec{\psi}_{T^J}|_{S1} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times$

$\mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, se définit comme suit :

$$\vec{\psi}_{T^J|S1}(x, y; h, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x - \beta h, y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.91)$$

La fonction de distance directionnelle (8.91) est un cas particulier de la mesure (8.84) dans lequel les intrants ne sont pas partitionnés en composantes polluantes et non polluantes.

Remarque 8.25 Soit T^J une technologie de production B -disponible satisfaisant les axiomes T1-T3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, tel que $x = (x^p, x^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance directionnelle, $\vec{\psi}_{T^J|S2} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$ et $\vec{\psi}_{T^J|S3} : \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R} \cup -\infty$, définissent des mesures d'efficacité technique dans le graphe de la technologie de production polluante selon les schémas S2 et S3,.

$$\vec{\psi}_{T^J|S2}(x, y; h, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x - \beta h, y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.92)$$

et

$$\vec{\psi}_{T^J|S3}(x, y; h, k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x - \beta h, y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in T^J \} & \text{si } (x - \beta h, y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in T^J, \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.93)$$

Dans le cadre du schéma (S2), la fonction de distance directionnelle dans le graphe de la technologie de production B -disponible, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$, s'établit dans la direction $g_{S2} = (h, k) \in \mathbb{R}_+^n \times -\mathbb{R}_+^{m^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^p, k^{np}) \in -\mathbb{R}_+^{m^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}}$. Dans le troisième schéma (S3), le vecteur directionnel est défini par $g_{S3} = (h, k) \in \mathbb{R}_+^n \times 0_{m^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}}$, avec $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ et $k = (k^p, 0) \in 0_{m^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}}$.

Si la fonction de distance directionnelle (8.84) se présente selon une direction spécifiquement orientée en intrant, $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^n \times 0$ avec $h = (h^p, h^{np}) \in \mathbb{R}_+^n$ alors on obtient :

$$\vec{\psi}_{L^J|S1}(x, y; h) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (x^p - \beta h^p, x^{np} - \beta h^{np}) \in L^J(y) \} & \text{si } (x^p - \beta h^p, x^{np} - \beta h^{np}) \\ & \in L^J(y), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.94)$$

Inversement, si la fonction de distance directionnelle (8.84) se caractérise suivant une direction spécifiquement orientée en output, $g = (h, k) \in 0 \times \mathbb{R}_+^m$ avec $k = (k^p, k^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$ alors on a :

$$\vec{\psi}_{P^J|S1}(x, y; k) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^J(x) \} & \text{si } (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.95)$$

Les spécifications (8.94) et (8.95) correspondent respectivement à la version orientée en input et à celle orientée en output de la fonction de distance directionnelle (8.84). Elles se définissent respectivement dans les correspondance productives L^J et P^J d'une technologie de production B -disponible T^J satisfaisant respectivement les axiomes L1-L3 et P1-P3, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\} \subset [n] \times [m]$. Dans le cadre d'une analyse en sous-vecteurs, les mesures (8.94) et (8.95) peuvent être spécifiquement exprimées en composantes polluantes ou non polluantes.

Remarque 8.26 Soit P^J un ensemble en outputs B -disponibles satisfaisant les axiomes P1-P3 et P6, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B \subset [m]$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ tel que $x^p = x^{np} = \emptyset$ et $y = (y^p, y^{np}) \in \mathbb{R}_+^m$, les fonctions de distance directionnelle en output dans les schémas S2 (Chung, Färe et Grosskopf 1997) et S3 (Abad, 2015) se définissent comme suit :

$$\vec{\psi}_{P^J|S2}(x, y; k^{np}, k^p) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^J(x) \} & \text{si } (y^p + \beta k^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.96)$$

et

$$\vec{\psi}_{P^J|S3}(x, y; k^{np}, 0) = \begin{cases} \sup_{\beta} \{ \beta \in \mathbb{R} : (y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \in P^J(x) \} & \text{si } (y^p, y^{np} + \beta k^{np}) \\ & \in P^J(x), \beta \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.97)$$

Annexe 2

Avec $g_{S_2} = (h, k^p, k^{np}) \in 0 \times -\mathbb{R}_+^{m^p} \times \mathbb{R}_+^{m^{np}}$ et $g_{S_2} = (h, k^p, k^{np}) \in 0 \times 0 \times \mathbb{R}^{m^{np}}$, la figure 5 (chapitre 5) présente une illustration des fonctions de distance directionnelle en output dans les schémas S1 S2 et S3.

Annexe 3. Une Analyse de l'Eco-Productivité (Secteur Aéroportuaire Français)

Aéroports	2007-2008		2008-2009		2009-2010		2010-2011		Moyenne	
	EV	TV	EV	TV	EV	TV	EV	TV	EV	TV
Bâle-Mulhouse	0,9954	0,9961	0,9313	1,0166	1,0161	1,0270	1,0875	1,0246	1,0076	1,0161
Beauvais	1,0000	1,0031	1,0000	1,0445	1,0000	1,0404	1,0000	1,0276	1,0000	1,0289
Bordeaux-Mérignac	1,0000	infini	1,0000	infini	1,0000	infini	1,0000	infini	1,0000	infini
Lille	0,9852	1,0110	1,0756	1,0114	1,0174	1,0220	0,9409	1,0306	1,0048	1,0187
Lyon-Saint Exupéry	1,0494	0,9849	0,9773	1,0152	1,0234	1,0096	1,0161	1,0209	1,0165	1,0077
Marseille-Provence	0,9844	0,9931	1,0421	0,9962	1,0000	infini	0,9821	infini	1,0021	0,9946
Montpellier-Méditerranée	0,9896	0,9813	0,9640	1,0338	0,9382	1,0412	0,9976	1,0343	0,9723	1,0227
Nantes-Atlantique	1,0299	0,9875	0,9794	infini	1,0091	1,0027	0,9916	1,0428	1,0025	1,0110
Nice-Côte d'azur	1,0067	0,9927	1,0008	1,0085	0,9747	1,0015	0,9912	1,0209	0,9933	1,0059
Paris CDG	0,9979	1,0050	0,9965	1,0095	0,9860	1,0200	0,9988	1,0246	0,9948	1,0148
Paris ORY	0,9973	1,0014	1,0094	0,9971	0,9941	1,0046	1,0065	1,0061	1,0018	1,0023
Strasbourg-Entzheim	0,9044	0,9952	0,9883	1,0171	1,0253	1,0316	0,9966	1,0293	0,9786	1,0183
Toulouse-Blagnac	1,0000	infini	1,0000	infini	0,9887	infini	1,0114	infini	1,0000	infini
Moyenne	0,9954	infini	0,9973	infini	0,9979	infini	1,0016	infini	0,9980	infini

TABLE 8.2 – Décomposition de l'indice d'éco-productivité ML (2007-2011)

Aéroports	2007-2008		2008-2009		2009-2010		2010-2011		Moyenne	
	EV	TV	EV	TV	EV	TV	EV	TV	EV	TV
Bâle-Mulhouse	-0,0050	-0,0042	-0,0801	0,0184	0,0184	0,0309	0,0923	0,0267	0,0064	0,0179
Beauvais	0,0000	0,0030	0,0000	0,0416	0,0000	0,0383	0,0000	0,0267	0,0000	0,0274
Bordeaux-Mérignac	0,0000	infini	0,0000	infini	0,0000	infini	0,0000	infini	0,0000	infini
Lille	-0,0169	0,0124	0,0802	0,0125	0,0181	0,0229	-0,0655	0,0325	0,0040	0,0201
Lyon-Saint Exupéry	0,0543	-0,0171	-0,0256	0,0168	0,0257	0,0105	0,0174	0,0226	0,0180	0,0082
Marseille-Provence	-0,0163	-0,0071	0,0421	-0,0037	0,0000	infini	-0,0182	infini	0,0019	infini
Montpellier-Méditerranée	-0,0109	-0,0198	-0,0391	0,0356	-0,0715	0,0452	-0,0028	0,0391	-0,0311	0,0250
Nantes-Atlantique	0,0316	-0,0135	-0,0222	infini	0,0097	0,0029	-0,0090	0,0450	0,0025	infini
Nice-Côte d'azur	0,0072	-0,0079	0,0009	0,0090	-0,0279	0,0017	-0,0098	0,0230	-0,0074	0,0065
Paris CDG	-0,0024	0,0057	-0,0040	0,0108	-0,0162	0,0229	-0,0013	0,0283	-0,0060	0,0169
Paris ORY	-0,0032	0,0017	0,0112	-0,0035	-0,0071	0,0055	0,0077	0,0073	0,0021	0,0027
Strasbourg-Entzheim	-0,1257	-0,0054	-0,0155	0,0225	0,0328	0,0411	-0,0045	0,0375	-0,0282	0,0239
Toulouse-Blagnac	0,0000	infini	0,0000	infini	-0,0114	infini	0,0114	infini	0,0000	infini
Moyenne	-0,0067	infini	-0,0040	infini	-0,0023	infini	0,0014	infini	-0,0029	infini

TABLE 8.3 – Décomposition de l'indicateur d'éco-productivité EL (2007-2011)

Aéroports	Indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen				Moyenne
	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	
Bâle-Mulhouse	0,9983	0,9034	1,0724	1,2127	1,0467
Beauvais	0,9768	0,9927	1,0115	1,0153	0,9991
Bordeaux-Mérignac	1,0248	1,0330	1,0248	1,0279	1,0276
Lille	0,9853	1,1394	1,0899	1,0343	1,0622
Lyon-Saint Exupéry	1,0598	1,0382	1,0773	1,0975	1,0682
Marseille-Provence	0,9939	1,0397	1,0131	1,0259	1,0182
Montpellier-Méditerranée	0,9486	1,0185	0,9854	1,0214	0,9935
Nantes-Atlantique	1,0013	0,9969	1,0590	1,0237	1,0203
Nice-Côte d'azur	1,0277	1,0497	0,9994	1,0121	1,0222
Paris CDG	1,0001	0,9733	1,0112	1,0175	1,0005
Paris ORY	0,9994	0,9842	1,0033	1,0317	1,0047
Strasbourg-Entzheim	0,8815	0,9737	0,9164	1,1286	0,9751
Toulouse-Blagnac	1,0019	1,0322	0,9652	1,0152	1,0036
Moyenne	0,9923	1,0135	1,0176	1,0511	1,0186

TABLE 8.4 – Indice d'éco-productivité de Hicks-Moorsteen (2007-2011)

Annexe 4. Décomposition de l'Indicateur d'Eco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen Orienté en Output (Polluant et Non Polluant)

Suivant Ang et Kerstens (2017), l'indicateur d'éco-productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen orienté en output (polluant et non polluant) peut être décomposé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} ELHM_{t,t+1} &= \Delta T_{t,t+1}^{np} + \Delta TEI_{t,t+1}^{np} + \Delta SEC_{t,t+1}^{np} \\ &= \Delta T_{t,t+1}^p + \Delta TEI_{t,t+1}^p + \Delta SEC_{t,t+1}^p \end{aligned} \quad (8.98)$$

$\Delta T_{t,t+1}^{np}$ ($\Delta T_{t,t+1}^p$) identifie le changement technologique entre les périodes (t) et ($t + 1$) relativement aux outputs non polluants (polluants). Le progrès technologique entre les périodes consécutives (t) et ($t + 1$) en direction des outputs non polluants et polluants sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} \Delta T_{t,t+1}^{np} &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_t^{np}, 0) - \vec{\psi}_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, 0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0) - \vec{\psi}_{T_t^J}^{np} |_{S_2} (x_t, y_{t+1}^{np}, y_t^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0) \right) \right] \end{aligned} \quad (8.99)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_{t,t+1}^p &= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^p |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_t^p; 0, 0, k_t^p) - \vec{\psi}_{T_t^J}^p |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, 0, k_t^p) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\vec{\psi}_{T_{t+1}^J}^p |_{S_2} (x_{t+1}, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^p) - \vec{\psi}_{T_t^J}^p |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^p) \right) \right] \end{aligned} \quad (8.100)$$

$\Delta TEI_{t,t+1}^{np}$ ($\Delta TEI_{t,t+1}^p$) représente le changement d'efficience technique entre les périodes (t) et ($t+1$) par rapport aux outputs non polluants (polluants). Ces variations sont respectivement représentées par :

$$\Delta TEI_{t,t+1}^{np} = \vec{\psi}_{T_t}^{np} |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, k_t^{np}, 0) - \vec{\psi}_{T_{t+1}}^{np} |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, k_{t+1}^{np}, 0) \quad (8.101)$$

$$\Delta TEI_{t,t+1}^p = \vec{\psi}_{T_t}^p |_{S_2} (x_t, y_t^{np}, y_t^p; 0, 0, k_t^p) - \vec{\psi}_{T_{t+1}}^p |_{S_2} (x_{t+1}, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^p) \quad (8.102)$$

Enfin, les résidus entre les périodes consécutives (t) et ($t + 1$) relatifs aux outputs non polluants et polluants sont respectivement définis par :

$$\Delta SEC_{t,t+1}^{np} = ELHM_{t,t+1} - \Delta T_{t,t+1}^{np} - \Delta TEI_{t,t+1}^{np} \quad (8.103)$$

$$\Delta SEC_{t,t+1}^p = ELHM_{t,t+1} - \Delta T_{t,t+1}^p - \Delta TEI_{t,t+1}^p. \quad (8.104)$$

Ils correspondent à la variation d'efficacité d'échelle en outputs non polluants et polluants³.

3. Ang and Kerstens (2017) proposent une procédure permettant de décomposer ces variations.

Aéroports	2007-2008			2008-2009		
	$\Delta TEI_{t,t+1}^{np}$	$\Delta T_{t,t+1}^{np}$	$\Delta SEC_{t,t+1}^{np}$	$\Delta TEI_{t,t+1}^{np}$	$\Delta T_{t,t+1}^{np}$	$\Delta SEC_{t,t+1}^{np}$
Bâle-Mulhouse	0,0086	-0,0105	0,0000	-0,1550	0,0321	0,0000
Beauvais	0,0000	0,1425	-0,1663	0,0000	0,0423	-0,0496
Bordeaux-Mérignac	0,0000	0,0267	-0,0022	0,0000	-0,0696	0,1022
Lille	-0,0229	-0,0217	0,0148	0,1503	-0,0052	0,0054
Lyon-Saint Exupéry	0,0888	0,0070	-0,0150	-0,0139	-0,0159	0,0453
Marseille-Provence	-0,0334	0,0339	-0,0060	0,0733	-0,0262	-0,0061
Montpellier-Méditerranée	-0,0111	-0,0144	-0,0256	-0,0675	0,0398	0,0357
Nantes-Atlantique	0,0479	0,0171	-0,0465	-0,0065	-0,0194	0,0213
Nice-Côte d'azur	-0,0165	0,0177	0,0214	0,0308	-0,0923	0,0853
Paris CDG	0,0061	0,0138	-0,0110	-0,0008	-0,0542	0,0484
Paris ORY	-0,0967	0,0847	0,0060	-0,0415	-0,0196	0,0389
Strasbourg-Entzheim	-0,5874	0,1884	0,0969	-0,0763	-0,1378	0,0600
Toulouse-Blagnac	0,0000	0,0300	-0,0281	0,0000	-0,0107	0,0424
Aéroports	2009-2010			2010-2011		
	$\Delta TEI_{t,t+1}^{np}$	$\Delta T_{t,t+1}^{np}$	$\Delta SEC_{t,t+1}^{np}$	$\Delta TEI_{t,t+1}^{np}$	$\Delta T_{t,t+1}^{np}$	$\Delta SEC_{t,t+1}^{np}$
Bâle-Mulhouse	0,0811	0,0062	0,0000	0,1313	0,0976	-0,0052
Beauvais	0,0000	0,1236	-0,1120	0,0000	0,2286	-0,2131
Bordeaux-Mérignac	0,0000	0,0983	-0,0737	0,0000	0,1168	-0,0892
Lille	0,0370	-0,0157	0,0571	-0,0945	0,0887	0,0299
Lyon-Saint Exupéry	0,0351	0,0042	0,0290	0,0249	0,0381	0,0274
Marseille-Provence	0,0000	0,0313	-0,0179	-0,0265	0,0049	0,0457
Montpellier-Méditerranée	-0,0732	0,0296	0,0159	-0,0182	0,1484	-0,0798
Nantes-Atlantique	0,0016	0,1446	-0,0569	-0,0161	0,0908	-0,0336
Nice-Côte d'azur	-0,0413	0,0130	0,0186	-0,0238	0,1187	-0,0653
Paris CDG	-0,0070	0,0127	0,0042	0,0049	0,0546	-0,0173
Paris ORY	-0,0271	0,0328	-0,0048	0,0239	0,0861	-0,0288
Strasbourg-Entzheim	0,1310	-0,2028	0,0521	0,0323	-0,0049	0,0444
Toulouse-Blagnac	-0,0179	0,0376	-0,0540	0,0179	0,0699	-0,0709

TABLE 8.5 – Décomposition dans la direction des extrants non polluants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM orienté en output (2007-2011)

Aéroports	$\Delta TEI_{t,t+1}^{np}$	Moyenne	
		$\Delta T_{t,t+1}^{np}$	$\Delta SEC_{t,t+1}^{np}$
Bâle-Mulhouse	0,0165	0,0313	-0,0013
Beauvais	0,0000	0,1342	-0,1353
Bordeaux-Mérignac	0,0000	0,0431	-0,0157
Lille	0,0175	0,0115	0,0268
Lyon-Saint Exupéry	0,0337	0,0084	0,0217
Marseille-Provence	0,0034	0,0110	0,0039
Montpellier-Méditerranée	-0,0425	0,0508	-0,0134
Nantes-Atlantique	0,0067	0,0583	-0,0289
Nice-Côte d'azur	-0,0127	0,0143	0,0150
Paris CDG	0,0008	0,0067	0,0061
Paris ORY	-0,0354	0,0460	0,0028
Strasbourg-Entzheim	-0,1251	-0,0393	0,0633
Toulouse-Blagnac	0,0000	0,0317	-0,0276

TABLE 8.6 – Moyenne des déterminants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM (orientation output) en direction des extrants non polluants (2007-2011)

Aéroports	2007-2008			2008-2009		
	$\Delta TEI_{t,t+1}^p$	$\Delta T_{t,t+1}^p$	$\Delta SEC_{t,t+1}^p$	$\Delta TEI_{t,t+1}^p$	$\Delta T_{t,t+1}^p$	$\Delta SEC_{t,t+1}^p$
Bâle-Mulhouse	-0,0455	0,0455	-0,0019	-0,1492	0,1492	-0,1229
Beauvais	0,0000	-0,1663	0,1425	0,0000	-0,0496	0,0423
Bordeaux-Mérignac	0,0000	-0,0022	0,0267	0,0000	0,1022	-0,0696
Lille	-0,0493	0,0641	-0,0445	0,1691	-0,1636	0,1451
Lyon-Saint Exupéry	0,0661	-0,0811	0,0958	-0,0487	0,0939	-0,0298
Marseille-Provence	-0,0259	0,0199	0,0005	0,0515	-0,0576	0,0471
Montpellier-Méditerranée	-0,0488	0,0232	-0,0255	-0,0882	0,1239	-0,0277
Nantes-Atlantique	0,0824	-0,1289	0,0650	-0,1168	0,1381	-0,0259
Nice-Côte d'azur	0,0296	-0,0082	0,0012	-0,0149	0,1002	-0,0615
Paris CDG	-0,0189	0,0079	0,0199	-0,0184	0,0668	-0,0550
Paris ORY	0,0157	-0,0097	-0,0119	0,0156	0,0233	-0,0611
Strasbourg-Entzheim	-0,2465	0,3434	-0,3990	0,0028	0,0572	-0,2141
Toulouse-Blagnac	0,0000	-0,0281	0,0300	0,0000	0,0424	-0,0107
Aéroports	2009-2010			2010-2011		
	$\Delta TEI_{t,t+1}^p$	$\Delta T_{t,t+1}^p$	$\Delta SEC_{t,t+1}^p$	$\Delta TEI_{t,t+1}^p$	$\Delta T_{t,t+1}^p$	$\Delta SEC_{t,t+1}^p$
Bâle-Mulhouse	-0,0124	0,0124	0,0873	0,2115	-0,2167	0,2289
Beauvais	0,0000	-0,1120	0,1236	0,0000	-0,2131	0,2286
Bordeaux-Mérignac	0,0000	-0,0737	0,0983	0,0000	-0,0892	0,1168
Lille	0,0254	0,0317	0,0213	-0,2119	0,2419	-0,0058
Lyon-Saint Exupéry	0,0346	-0,0056	0,0393	0,0096	0,0178	0,0630
Marseille-Provence	0,0474	-0,0653	0,0313	-0,0581	0,1037	-0,0217
Montpellier-Méditerranée	-0,1412	0,1571	-0,0436	-0,0227	-0,0571	0,1302
Nantes-Atlantique	0,0273	-0,0842	0,1462	-0,0122	-0,0214	0,0748
Nice-Côte d'azur	-0,1119	0,1305	-0,0283	-0,0194	-0,0459	0,0949
Paris CDG	-0,0794	0,0836	0,0057	-0,0212	0,0039	0,0595
Paris ORY	-0,0099	0,0051	0,0057	0,0108	-0,0396	0,1101
Strasbourg-Entzheim	0,0299	0,0222	-0,0718	0,0457	-0,0013	0,0274
Toulouse-Blagnac	-0,0311	-0,0229	0,0197	0,0311	-0,1020	0,0879

TABLE 8.7 – Décomposition dans la direction des extrants polluants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM orienté en output (2007-2011)

Aéroports	$\Delta TEI_{t,t+1}^p$	Moyenne	
		$\Delta T_{t,t+1}^p$	$\Delta SEC_{t,t+1}^p$
Bâle-Mulhouse	0,0011	-0,0024	0,0478
Beauvais	0,0000	-0,1353	0,1342
Bordeaux-Mérignac	0,0000	-0,0157	0,0431
Lille	-0,0167	0,0435	0,0290
Lyon-Saint Exupéry	0,0154	0,0063	0,0421
Marseille-Provence	0,0037	0,0002	0,0143
Montpellier-Méditerranée	-0,0752	0,0618	0,0083
Nantes-Atlantique	-0,0048	-0,0241	0,0650
Nice-Côte d'azur	-0,0291	0,0442	0,0016
Paris CDG	-0,0345	0,0405	0,0075
Paris ORY	0,0080	-0,0052	0,0107
Strasbourg-Entzheim	-0,0420	0,1054	-0,1644
Toulouse-Blagnac	0,0000	-0,0276	0,0317

TABLE 8.8 – Moyenne des déterminants de l'indicateur d'éco-productivité ELHM (orientation output) en direction des extrants polluants (2007-2011)

Annexe 5. Indicateur d'Eco-Productivité Généralisé et Infaisabilités

Notons que la mesure d'efficacité technique en composantes polluantes ($\vec{\psi}_{T,J}^p|_{S_2}$) peut être indéterminée. D'après la Figure 1, selon la disposition de l'observation $(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^p)$, il est possible que la fonction de distance en composantes polluantes en périodes-croisées $(t, t + 1)$,

$$\vec{\psi}_{T,J}^p|_{S_2}(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, h_{t+1}^p, 0, k_{t+1}^p)$$

n'obtienne pas une valeur finie. Dans ce cas, l'indicateur d'éco-productivité généralisé *EGLHM* présente des infaisabilités (Briec et Kerstens, 2009ab). Ce problème d'infaisabilités peut être évacué, en se référant à une mesure d'éco-productivité généralisée de Luenberger-Hicks-Moorsteen spécifiquement orientée en outputs (polluant et non polluant). Formellement, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen en output (polluant et non polluant) de la période (t) est défini par :

$$\begin{aligned} EGLHM_t^O(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = EGLO_t^{np}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) - EGLI_t^p(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}). \end{aligned} \quad (8.105)$$

Avec

$$\begin{aligned} EGLO_t^{np}(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\ = \vec{\psi}_{T,J}^{np}|_{S_2}(x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_t^p; 0, 0, k_t^{np}, 0) - \vec{\psi}_{T,J}^{np}|_{S_2}(x_{t+1}^{np}, x_{t+1}^p, y_{t+1}^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, k_{t+1}^{np}, 0) \end{aligned} \quad (8.106)$$

et

$$\begin{aligned}
 &EGLI_t^p(x_t, x_{t+1}, y_t, y_{t+1}; g_t, g_{t+1}) \\
 &= \vec{\psi}_{T_t}^p |_{S_2}(x_t^{np}, x_{t+1}^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, 0, k_{t+1}^p) - \vec{\psi}_{T_t}^p |_{S_2}(x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_t^p; 0, 0, 0, k_t^p). \quad (8.107)
 \end{aligned}$$

Notons que pour l'observation fictive (x_t^{np}, x_t^p, y_t^p) , la mesure d'efficacité technique en composantes indésirables orientée en output polluant, $\vec{\psi}_{T_t}^p(x_t^{np}, x_t^p, y_t^{np}, y_{t+1}^p; 0, 0, 0, k_{t+1}^p)$, admet toujours une valeur finie. Dans ces conditions, cette fonction de distance en sous-vecteurs (outputs polluants) ne présente pas d'infaisabilités. Ainsi, l'indicateur d'éco-productivité généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen spécifiquement orienté en outputs (polluants et non polluants) permet d'éviter les problèmes d'infaisabilités.

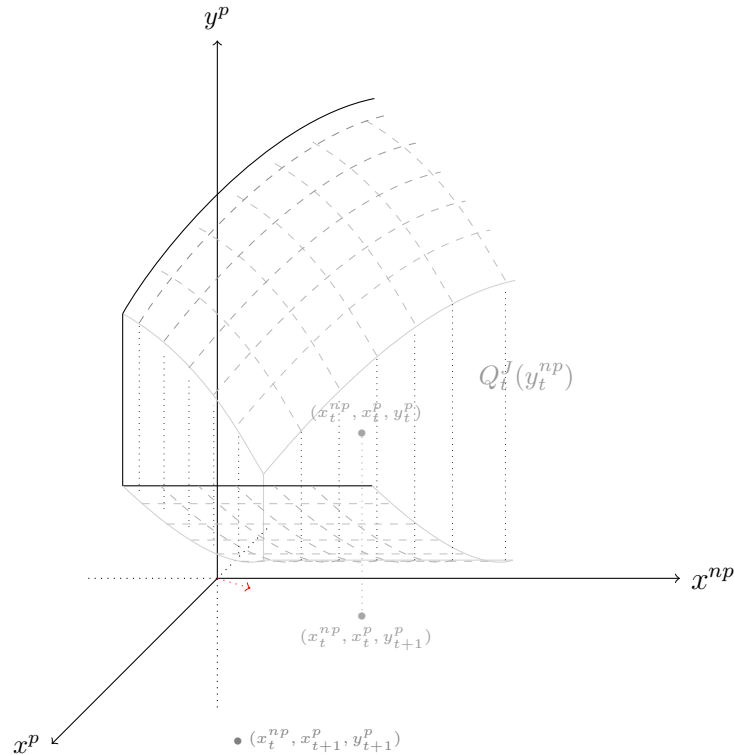


FIGURE 1 – Fonctions de distance additives dans l'ensemble $Q_t^J(y_t^{np})$, avec $J = \{\emptyset, B\}$ et $B = \{B_{in}, B_{out}\} \subset [n] \times [m]$

Références Bibliographiques

- [1] Abad, A., P. Ravelojaona (2017) Exponential Environmental Productivity Index and Indicators, *Journal of Productivity Analysis*, 48(2), 147-166.
- [2] Abad, A. (2015) An environmental generalised Luenberger-Hicks-Moorsteen productivity indicator and an environmental generalised Hicks-Moorsteen productivity index, *Journal of Environmental Management*, 161, 325-334.
- [3] Abad, A., P. Kongmanwatana (2015) Comparison of destination competitiveness ranking in the European Union using a non parametric approach, *Tourism Economics*, 21(2), 267-281.
- [4] Abad, A., W. Briec (2016) Pollution-generating Technologies and Disposability Assumptions, présenté aux 10èmes Journées de Recherche en Sciences Sociales (JRSS).
- [5] Abad, A., N. Peypoch (2017) Environmental Productivity Indices and Indicators : French Airports Productivity Assessment, document de travail.
- [6] Aiken, D.V., C.A. Pasurka (2003) Adjusting the measurement of US manufacturing productivity for air pollution emissions control, *Resource and Energy Economics* , 25, 329-351.
- [7] Ali, A.I., L.M. Seidford (1990) Translation Invariance in Data Envelopment Analysis, *Operations Research Letters*, 9, 403-405.
- [8] Allais, M. (1989), *La Théorie Générale des Surplus*, Presses universitaires de Grenoble.
- [9] Ang, F., P. J. Kerstens (2017) Decomposing the Luenberger-Hicks-Moorsteen Total Factor Productivity Indicator : An Application to U.S. Agriculture, *European Journal of Operational Research*, 260, 359-375.
- [10] Assaf, A. (2009) Accounting for size in efficiency comparisons of airports, *Journal of Air Transport Management*, 15, 256-258.
- [11] Assaf, A. (2010) Bootstrapped scale efficiency measures of UK airports, *Journal of Air Transport Management*, 16, 42-44.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [12] Ayres, R.U., A.V. Kneese (1969) Production, consumption, and externalities, *The American Economic Review*, 59, 282-297.
- [13] Azad, M.A.S., T. Ancev (2014) Measuring environmental efficiency of agricultural water use : A Luenberger environmental indicator, *Journal of Environmental Management*, 145, 314-320.
- [14] Azad, M.A.S., Ancev, T., F. Hernandez-Sancho (2017) *New Directions in Productivity Measurement and Efficiency Analysis : Counting the Environment and Natural Resources*, Edward Elgar Publishing, Cheltenham : UK, Northampton : MA, USA.
- [15] Banker, R.D., Charnes, A., W.W. Cooper (1984) Some Models for Estimating Technical and Scale Efficiency in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 30, 1078-1092.
- [16] Baumol, W. J., W. E. Oates (1988) *The Theory of Environmental Policy* (initialement publié en 1975), 2ème ed, Cambridge University Press.
- [17] Bilsel, M., N. Davutyan (2014) Hospital efficiency with risk adjusted mortality as undesirable output : the Turkish case *Annal of Operational Research*, 221, 73-88.
- [18] Bjurek, H. (1996) The Malmquist Total Factor Productivity Index, *Scandinavian Journal of Economics*, 98(2), 303-313.
- [19] Bjurek, H., F.R. Førsund, L. Hjalmarsson (1998) Malmquist Productivity Indices : An Empirical Investigation, dans : R. Färe, S. Grosskopf, R. Russell (eds) *Index Numbers : Essays in Honour of Sten Malmquist*, Boston, Kluwer.
- [20] Boulding, K. (1966) The economics of the coming spaceship Earth, in : Jarrett (ed) *Environmental Quality in a Growing Economy*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [21] Boussemart, J.P., W. Briec, K. Kerstens, J.-C. Poutineau (2003) Luenberger and Malmquist Productivity Indices : Theoretical Comparisons and Empirical Illustration, *Bulletin of Economic Research*, 55(4), 391-405.
- [22] Briec, W. (1997) A Graph-Type Extension of Farrell Technical Efficiency Measure, *Journal of Productivity Analysis*, 8, 95-110.
- [23] Briec, W., Kerstens, K., P. Vanden Eeckaut (2004) Non-convex Technologies and Cost Functions : Definitions, Duality and Nonparametric Tests of Convexity, *Journal of Economics*, 81(2), 155-192.
- [24] Briec, W., K. Kerstens (2004) A Luenberger-Hicks-Moorsteen Productivity Indicator : Its Relation to the Hicks-Moorsteen Productivity Index and the Luenberger Productivity Indicator, *Economic Theory*, 23(4), 925-939.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [25] Briec, W., K. Kerstens (2009a) Infeasibilities and Directional Distance Functions : With Application to the Determinateness of the Luenberger Productivity Indicator, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 141, 55-73.
- [26] Briec, W., K. Kerstens (2009b) The Luenberger productivity indicator : An economic specification leading to infeasibilities, *Economic Modelling*, 26, 597-600.
- [27] Briec, W., K. Kerstens (2011) The Hicks-Moorsteen productivity index satisfies the determinateness axiom, *The Manchester School*, 79, 765-775.
- [28] Briec, W., Dumas, A., A. Stenger (2013) On the standard achievement and well-being indexes and their relation to the Hicks-Moorsteen productivity index, *Economic Modelling*, 35, 900-909.
- [29] Briec, W., Kerstens, K., I. Van de Woestyne (2016) Congestion in Production Correspondances, *Journal of Economics*, 119(1), 65-90.
- [30] Briec, W., Kerstens, K., I. Van de Woestyne (2017) Hypercongestion in production correspondences : an empirical exploration, *Applied Economics*, 2938-2956.
- [31] Caves, D.W., L.R. Christensen, W.E. Diewert (1982) The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Inputs, Outputs and Productivity, *Econometrica*, 50(6), 1393-1414.
- [32] Chambers, R.G. (1988) *Applied Production Analysis : A Dual Approach*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [33] Chambers, R.G. (1996) *A New Look at Exact Input, Output and Productivity Measurement*, Department of Agricultural and Resource Economics, Working Paper 96-05.
- [34] Chambers, R.G. (1998) Input and output indicators, dans : Färe, R., Grosskopf, S., Russell, R. (Eds.) *Index Numbers : Essays in Honour of Sten Malmquist*, Kluwer Academic Publishers.
- [35] Chambers, R.G. (2002) Exact Nonradial Input, Output, and Productivity Measurement, *Economic Theory*, 20(4), 751-765.
- [36] Chambers, R.G., Chung, Y., R. Färe (1996) Benefit and Distance Functions, *Journal of Economic Theory*, 70, 407-419.
- [37] Chambers, R.G., Chung, Y., R. Färe (1998) Profit, Directional Distance Functions, and Nerlovian Efficiency, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98, 351-364.
- [38] Chambers, R.G., Färe, R., S. Grosskopf (1994) Efficiency, Quantity Indexes, and Productivity Indexes : A Synthesis, *Bulletin of Economic Research*, 46, 1-21.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [39] Chambers, R.G., Färe, R., S. Grosskopf (1996) Productivity Growth in APEC Countries, *Pacific Economic Review*, 1, 181-190.
- [40] Charnes, A., Cooper, W.W., E. Rhodes (1978) Measuring the Efficiency of Decision-making Units, *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- [41] Chung, Y., Färe, R., S. Grosskopf (1997) Productivity and undesirable outputs : A directional distance function approach *Journal of Environmental Management*, 51, 229-240.
- [42] Coelli, T., Lauwers, L., G. Van Huylenbroeck (2007) Environmental efficiency measurement and the materials balance condition *Journal of Productivity Analysis*, 28, 3-12.
- [43] Coggins, J. S., J. R. Swinton (1996) The Price of Pollution : A Dual Approach to Valuing SO₂ Allowances, *Journal of Environmental Economics and Management*, 30, 58-72.
- [44] Cropper, M.L., W.E. Oates (1992) Environmental Economics : A Survey, *Journal of Economic Literature*, 30, 675-740.
- [45] Dakpo, K. H. (2016) On modeling pollution-generating technologies : a new formulation of the by-production approach, Working Paper SMART-LERECO N° 16-06.
- [46] Dakpo, K. H., Jeanneaux, P., L. Latruffe (2016) Modelling pollution-generating technologies in performance benchmarking : Recent developments, limits and future prospects in the nonparametric framework, *European Journal of Operational Research*, 250(2), 347-359.
- [47] Dasgupta, P., K.G. Mäler (2003) The Economics of Non-Convex Ecosystems : Introduction, *Environmental and Resource Economics*, 26(4), 499-525.
- [48] Debreu, G. (1951) The coefficient of ressource utilisation, *Econometrica*, 19, 273-292.
- [49] Debreu, G. (1959) *Theory of Value : An Axiomatic Anlysis Of Economic Equilibrium*, New Haven and London : Yale University Press.
- [50] Diewert, W.E. (1992), The Measurement of Productivity, *Bulletin of Economic Research*, 44, 163-198.
- [51] Diewert, W.E. (1998) *Index Number Theory Using Differences rather than Ratios*, Vancouver, University of British Columbia (Department of Economics : DP 98-10).
- [52] Dong-huyn Oh (2010) A global Malmquist-Luenberger productivity index, *Journal of Productivity Analysis*, 34, 183-197.
- [53] Dupuit. C. (1848), "De la Mesure de l'Utilité des travaux publics", *Annales des Ponts et Chaussées*, 8, 332 – 375.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [54] Färe, R., C.A.K. Lovell (1978) Measuring the Technical Efficiency of Production, *Journal of Economic Theory*, 19, 150-162.
- [55] Färe, R., L. Svenson (1980) Congestion of Production Factors, *Econometrica*, 48(7), 1745-1753.
- [56] Färe, R., S. Grosskopf (1983) Measuring Output Efficiency, *European Journal of Operational Research*, 13, 173-179.
- [57] Färe, R., Grosskopf, S., C.A.K. Lovell (1985) *The Measurement of Efficiency of Production*, New York : Springer.
- [58] Färe, R., Grosskopf, S., C. Pasurka (1986) Effects on Relative Efficiency in Electric Power Generation Due to Environmental Controls, *Resources and Energy*, 8, 167-184.
- [59] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., C. Pasurka (1989) Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable : A non parametric approach, *The Review of Economics and Statistics*, 71, 90-98.
- [60] Färe, R., Grosskopf, S., Norris, M., Z. Zhang (1994) Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries, *The American Economic Review*, 84, 66-83.
- [61] Färe, R., D. Primont (1995) *Multi Output Production and Duality : Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [62] Färe, R., S. Grosskopf, B. Lindgren, P. Roos (1995) Productivity Developments in Swedish Hospitals : A Malmquist Output Index Approach, dans : A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin, and L. M. Seiford (eds) *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology and Applications*, Boston, Kluwer.
- [63] Färe, R., S. Grosskopf, R. R. Russell (1998) *Index Numbers Essays in Honour of Sten Malmquist*, Boston, Kluwer.
- [64] Färe, R., Grosskopf, S., C. Pasurka (2001) Accounting for Air Pollution Emissions in Measures of State Manufacturing Productivity Growth, *Journal of Regional Science*, 41(3), 381-409.
- [65] Färe, R., S. Grosskopf (2003) Non Parametric Production Analysis with Undesirable Outputs : Comment, *American Journal of Agricultural Economics*, 43(3), 257-271.
- [66] Färe, R., S. Grosskopf (2004a) Modeling Undesirable Factors in Efficiency Evaluation : Comment, *European Journal of Operational Research*, 157, 242-245.
- [67] Färe, R., S. Grosskopf (2004b) *Essay 2 : Environmental Performance*, in *New Directions : Efficiency and Productivity*, London : Kluwer Academic.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [68] Färe, R., Grosskopf, S., F. Hernandez-Sancho (2004) Environmental performance : an index number approach, *Resource and Energy Economics*, 26, 343-352.
- [69] Färe, R., Grosskopf, S., C. Pasurka (2007) Pollution Abatement Activities and Traditional Productivity, *Ecological Economics*, 62, 673-682.
- [70] Färe, R., S. Grosskopf (2009) A Comment on Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis, *American Journal of Agricultural Economics*, 91(2), 535-538.
- [71] Farrell, M. (1957) The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, 120A(3), 253-281.
- [72] Førsund, F. R. (2009) Good Modeling of Bad Outputs : Pollution and Multiple-Output Production, *International Review of Environmental and Resource Economics*, 3, 1-38.
- [73] Førsund, F. R. (2016) Multi-Equation Modelling of Desirable and Undesirable Outputs Satisfying the Material Balance, *Department of Economics, University of Oslo*, Memorandum N₀ 3.
- [74] Frisch, R. (1965) *Theory of Production*, D. Reidel, Dordrecht.
- [75] Fung, M.K.Y., Wan, K.K.H., Hui, Y.V., J.S. Law (2008) Productivity changes in Chinese airports 1995-2004, *Transportation Research Part E*, 44, 521-542.
- [76] Georgescu-Roegen, N. (1971) *The Entropy Law and the Economic Process*, Cambridge : Harvard University Press.
- [77] Golany, B., Y. Roll (1989) An Application Procedure for DEA, *Omega The International Journal of Management Science*, 17(3), 237-250.
- [78] Grosskopf, S. (1986) The Role of Reference Technology in Measuring Production Efficiency, *The Economic Journal*, 96, 499-513.
- [79] Hackman, S.T. (2008) *Production Economics : Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [80] Hailu, A., T. S. Veeman (2001) Non-parametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs : An Application to the Canadian Pulp and Paper Industry, *American Journal of Agricultural Economics*, 83(3), 605-616.
- [81] Hailu, A. (2003) Non-parametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs : Reply, *American Journal of Agricultural Economics*, 85(4), 1075-1077.
- [82] Hampf, B., K.L. Rødseth (2015) Carbon Dioxide Emission Standards for U.S. Power Plants : An Efficiency Analysis Perspective, *Energy Economics*, 50, 140-153.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [83] Hetemäki L. (1996) *Essays on the Impact of Pollution Control on a Firm : A Distance Function Approach*, Finnish Forest Research Institute, Research Papers 609.
- [84] Hicks, J. R. (1961) Measurement of Capital in Relation to the Measurement of Economic Aggregates, dans F A Lutz et D. C. Hague (eds.) *The Theory of Capital*, London, MacMillan.
- [85] Hoang, V-H., D. S. Prasada Rao (2010) Measuring and decomposing sustainable efficiency in agricultural production : A cumulative energy balance approach, *Ecological Economics*, 69(9), 1765-1776.
- [86] Jacobsen, S.E. (1970) Production Correspondences, *Econometrica*, 38(5), 754-771.
- [87] Koopmans, T. C. (1951) Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles commission, Wiley and Sons, New York.
- [88] Kuosmanen, T. (2005) Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis with Undesirable Outputs, *American Journal of Agricultural Economics*, 87(4), 1077-1082.
- [89] Kuosmanen, T., V. Podinovski (2009) Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis : Reply to Färe and Grosskopf, *American Journal of Agricultural Economics*, 91(2), 539-545.
- [90] Kuosmanen, T., R. K. Matin (2011) Duality of Weakly Disposable Technology, *Omega*, 39, 504-512.
- [91] Kerstens, K. , I. Van de Woestyne (2014) Comparing Malmquist and Hicks-Moorsteen productivity indices : Exploring the impact of unbalanced vs. balanced panel data *European Journal of Operational Research*, 233, 749-758.
- [92] Lau, L.J. (1974) Comments, *Frontiers of Quantitative Economics, Vol. II*, in : Intrilligator, M.D., D.A. Kendrick (eds) Amsterdam, North-Holland, 176-199.
- [93] Lauwers, L., G. Van Huylenbroeck (2003) Materials balance based modelling of environmental efficiency. In 25th international conference of agricultural economist, South Africa.
- [94] Lauwers, L. (2009) Justifying the incorporation of the materials balance principle into frontier-based eco-efficiency models, *Ecological Economics*, 68, 1605-1614
- [95] Leleu, H. (2013) Shadow pricing of undesirable outputs in nonparametric analysis, *European Journal of Operational Research*, 231, 474-480.
- [96] Luenberger, D.G. (1992) Benefit Function and Duality, *Journal of Mathematical Economics*, 21, 461-481.
- [97] Luenberger, D.G. (1994) Externalities and Benefits, *Journal of Mathematical Economics*, 24(2), 159-177.
- [98] Luenberger, D.G. (1995) *Microeconomic Theory*, Boston : McGraw Hill.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [99] Luenberger, D.G. (1996) Welfare from a Benefit Viewpoint, *Economic Theory*, 7, 445-462.
- [100] Mahlberg, B., Luptacik, M., and B.K. Sahoo (2011) Examining the drivers of total factor productivity change with an illustrative example of 14 EU countries, *Ecological Economics*, 72, 60-69.
- [101] Malmquist, S. (1953) Index Numbers and Indifference Surfaces, *Trabajos de Estaticas*, 4, 209-242.
- [102] Marshall, A. (1920) *Principles of Economics* (initialement publié en 1890), 8ème éd., London : Macmillan and Co.
- [103] McFadden, D. (1978) Cost, Revenue and Profit Functions, dans M. Fuss, D. McFadden (eds.) *Production Economics : A Dual Approach to Theory and Applications*, North-Holland publishing company, 3-109.
- [104] Moorsteen, R. H. (1961) On Measuring Productive Potential and Relative Efficiency, *Journal of Economics*, 96, 477-503.
- [105] Murty, M.N., S. Kumar (2003) Win-win opportunities and environmental regulation : testing of porter hypothesis for Indian manufacturing industries, *Journal of Environmental Management*, 67, 139-144.
- [106] Murty, M.N. (2010) Externalities and fundamental nonconvexities : a reconciliation of approaches to general equilibrium externality modeling and implications for decentralization. *Journal of Economic Theory*, 145, 331-353.
- [107] Murty, S., Russell, R. R., S. B. Levkoff (2012) On Modeling Pollution-generating Technologies, *Journal of Environmental Economics and Management*, 64, 117-135.
- [108] Nishimizu, M., J. Page (1982) Total Factor Productivity Growth, Technological Progress and Technical Efficiency Change : Dimensions of Productivity Change in Yugoslavia, 1965-78, *Economic Journal*, 92, 920-936.
- [109] O'Donnell, C.J (2010) Measuring and Decomposing Agricultural Productivity and Profitability Change, *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, 54(4), 527-560.
- [110] O'Donnell, C.J (2012) An Aggregate Quantity-Price Framework for Measuring and Decomposing Productivity and Profitability Change, *Journal of Productivity Analysis*, 38(3), 255-272.
- [111] O'Donnell, C.J. (2014) Econometric Estimation of Distance Functions and Associated Measures of Productivity and Efficiency Change, *Journal of Productivity Analysis*, 41(2), 187-200.
- [112] O'Donnell, C.J. (2016) Using Information about Technologies, Markets and Firm Behaviour to Decompose a Proper Productivity Index, *Journal of Econometrics*, 190(2), 328-340.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [113] Ouellette, P., V. Vierstraete (2004) Technological Change and Efficiency in the Presence of Quasi-Fixed Inputs : A DEA Application to the Hospital Sector, *European Journal of Operational Research*, 154(3), 755-763.
- [114] Passet, R. (1990) Environnement et Biosphère, *Encyclopédie Economique*, Economica.
- [115] Pethig, R. (2003) The 'materials balance approach' to pollution : its origin, implications and acceptance, Universität Siegen, Fakultät Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht in its series Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, 105-03.
- [116] Pethig, R. (2006) Nonlinear Production, Abatement, Pollution and Materials Balance Reconsidered, *Journal of Environmental Economics and Management*, 51, 185-204.
- [117] Picazo-Tadeo, A. J., Reig-Martinez, E., and F. Hernandez-Sancho (2005) Directional Distance Functions and Environmental Regulation, *Resource and Energy Economics*, 27, 131-142.
- [118] Picazo-Tadeo, A.J., J. Castillo-Giménez, M. Beltrán-Esteve (2014) An intertemporal approach to measuring environmental performance with directional distance functions : Greenhouse gas emissions in the European Union, *Ecological Economics* , 100, 173-182.
- [119] Pigou, A. C. (1932) *The Economics of Welfare* (initialement publié en 1920), 4ème ed., London : Macmillan.
- [120] Pittman, R.W. (1983) Multilateral Productivity Comparisons With Undesirable Outputs, *The Economic Journal* , 93, 883-891.
- [121] Podinovski, V. (2004) Bridging the Gap Between the Constant and Variable Return-to-scale Models : Selective Proportionality in Data Envelopment Analysis, *Journal of Operational Research Society*, 55, 265-276.
- [122] Reinhard, S., Knox Lovell, C.A., G.J. Thijssen (2000) Environmental Efficiency with Multiple Environmentally Detrimental Variables : Estimated with SFA and DEA, *European Journal of Operational Research*, 121, 287-303.
- [123] Rødseth, K. L. (2013) Capturing the least costly way of reducing pollution : A shadow price approach, *Ecological Economics*, 92, 16-24.
- [124] Rødseth, K. L. (2017) Axioms of a Polluting Technology : A Materials Balance Approach, *Environmental and Resources Economics*, 67(1), 1-22.
- [125] Sahoo, B.K., Luptacik, M., B. Mahlberg (2011) Alternative measures of environmental technology structure in DEA : An application, *European Journal of Operational Research*, 275, 750-762.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [126] Scheel, R.W. (2001) Undesirable Outputs in Efficiency Valuations, *European Journal of Operational Research*, 132, 400-410.
- [127] Seidford, L. (1990) Recent Development in DEA : the Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis, *Journal of Econometrics* , 46, 7-38.
- [128] Seidford, L., J. Zhu (2002) Modeling Undesirable Factors in Efficiency Evaluation, *European Journal of Operational Research*, 142, 16-20.
- [129] Shephard, R.W., (1953) *Cost and Production Functions* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [130] Shepard, R.W. (1970) *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton : Princeton University Press.
- [131] Shephard, R.W. (1974) *Indirect Production Functions*, Meisenheim am Glan, Verlag Anton Hain.
- [132] Smith, A. (1776) *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, London : W. Strahan et T. Cadell.
- [133] Solow, R. (1957) Technical Change and the Aggregate Production Function, *The Review of Economics and Statistics*, 39, 312-320.
- [134] Tulkens, H. (1993) On FDH Efficiency Analysis : some Methodological Issues and Applications to retail Banking, Courts and Urban Transit, *Journal of Productivity Analysis*, 4, 183-210.
- [135] Tyteca, D. (1996) On the Measurement of the Environmental Performance of Firms - a Literature Review and a Productive Efficiency Perspective, *Journal of Environmental Management*, 46, 281-308.
- [136] Walras, L. (1874) *Eléments d'Economie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale*, Lausanne : L. Corbaz.
- [137] Zhou, P., Ang, B. W., K. L. Poh (2008a) A survey of data envelopment analysis in energy and environmental studies, *European Journal of Operational Research*, 189, 1-18.
- [138] Zhou, P., Ang, B. W., and K. L. Poh (2008b) Measuring environmental performance under different environmental DEA technologies, *Energy Economics*, 30, 1-14.

Autres documents

- [139] Activité des aéroports français 2009, Direction Générale de l'Aviation Civile et Direction du Transport Aérien, Ministère de l'Écologie, du Développement durable et de l'Énergie, www.developpement-durable.gouv.fr.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [140] Activité des aéroports français 2010, Direction Générale de l'Aviation Civile et Direction du Transport Aérien, Ministère de l'Écologie, du Développement durable et de l'Énergie, www.developpement-durable.gouv.fr.
- [141] Base Carbone (2016), Documentation des Facteurs d'Emissions de la Base Carbone, Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (ADEME).
- [142] Exemple de Bonnes Pratiques Energétiques en Entreprises (2011), Production de Biogaz par Méthanisation des Boues d'Abattoirs, Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (ADEME).
- [143] Millennium Ecosystem Assessment (2005), Ecosystems and Human Well-being : Synthesis, Island Press, Washington D.C.
- [144] The Economics of Ecosystem and Biodiversity (2010), Integrating the ecological and economic dimensions in biodiversity and ecosystem service valuation, Pushpam Kumar (ed) *The Economics of Ecosystems and Biodiversity Ecological and Economic Foundations*, Earthscan, London and Washington.
- [145] Typologie des Facteurs d'Emissions (2011), Fiche Ressource N°3, Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (ADEME).

RÉSUMÉ

Ces travaux structurés en trois parties, mettent à jour différents apports théoriques et empiriques. La première partie est consacrée à l'étude des technologies de production selon différentes approches axiomatiques. L'axiome de B -disponibilité est introduit afin d'apporter une définition générale aux technologies de production polluante. Selon cette propriété, il est possible de définir ces technologies productives grâce à un ensemble réduit d'hypothèses. Ainsi, des technologies de production polluante convexes, non-convexes et hybrides, peuvent être définies. De plus, cette approche peut être appréhendée suivant plusieurs stratégies de partitionnement qui présentent un intérêt particulier pour la mise en œuvre des études empiriques. La deuxième partie est vouée à l'analyse des fonctions de distance. Ainsi, des mesures d'efficience technique généralisées sont proposées. Ces dernières sont présentées dans des ensembles de production B -disponibles. Partant de ces résultats, plusieurs tests permettant d'apprécier la structure des ensembles productifs B -disponibles, sont proposés. De plus, de nouveaux résultats de dualité sont introduits. Ces derniers sont construits sous l'hypothèse de B -disponibilité, ce qui atténue l'importance des axiomes usuels de disponibilité dans l'élaboration de ces résultats. La troisième partie est dédiée aux mesures de productivité. Une généralisation des mesures d'éco-productivité possédant des structures additives et multiplicatives complètes, est introduite. De plus, une spécification non-paramétrique permettant d'implémenter ces nouvelles mesures d'éco-productivité est proposée. Celle-ci repose sur l'estimation non-paramétrique des fonctions de distance additives et multiplicatives généralisées relatives dans ces travaux.

The exposition of this thesis is based on three parts. First, production technologies are analysed with respect to several axiomatic approaches. The B -disposability property is introduced in order to give a more general definition of the pollution-generating technologies. This methodological innovation aims to reveal pollution-generating technologies compatible with a minimal set of assumptions. Then, a more general class of pollution-generating technologies satisfying both convex and non-convex axioms, can be defined. Furthermore, this axiomatic contribution allows to consider inputs and outputs partitions, which is of particular interest in empirical studies. The second part of this work concerns the measurement of technical efficiency. Then, generalised distance functions are introduced in B -disposable production sets. Following these results, several tests are suggested in order to characterize the structure of B -disposable production technologies. Moreover, innovative duality results are proposed based on the B -disposability property. This considerably weakens classical duality results based upon usual disposal assumptions. In the third part, productivity change is studied. Generalisation of additive and multiplicative complete eco-productivity measures, are introduced. Following non-parametric technologies, a procedure to implement the generalised eco-productivity measures is exposed. This process is based on the non-parametric estimation of the generalised distance functions suggested in this work.