



HAL
open science

Calcul par la méthode asymptotique numérique des instabilités en interaction fluide-structure

Antoine Monnier

► **To cite this version:**

Antoine Monnier. Calcul par la méthode asymptotique numérique des instabilités en interaction fluide-structure. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Bretagne Sud, 2018. Français. NNT : 2018LORIS484 . tel-01973873

HAL Id: tel-01973873

<https://theses.hal.science/tel-01973873>

Submitted on 8 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD

UFR Sciences et Sciences de l'Ingénieur
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

Pour obtenir le grade de :
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD
Mention : Génie Mécanique
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

présentée par

Antoine MONNIER

FRE CNRS 3744,
Institut de Recherche Dupuy de Lôme

Calcul par la Méthode Asymptotique Numérique des instabilités en interaction fluide-structure

Thèse soutenue le 12-02-2018,
devant la commission d'examen composée de :

M. Aziz HAMDOUNI

Professeur des universités, Université de La Rochelle / Président

M. Jacques-André ASTOLFI

Professeur des universités, Institut de recherche de l'Ecole Navale / Rapporteur

M. Marc MEDALE

Professeur des universités, Université Aix-Marseille / Rapporteur

Mme. Marianna BRAZA

Directeur de recherche, Institut de mécanique des fluides de Toulouse /
Examineur

Mme. Elisabeth LACAZEDIEU LONGATTE

Ingénieur de Recherche - HDR, EDF R&D / Examineur

M. Yann DOUTRELEAU

Responsable du domaine « Fluides, Structures », DGA/DS/MRIS / Examineur

M. Jean-Marc CADOU

Maître de Conférences HDR, Université de Bretagne-Sud / Directeur de thèse

M. Gregory GIRAULT

Maître de Conférences, Université de Bretagne-Sud / Encadrant de thèse

Remerciements

La thèse est un sacré voyage, et heureusement qu'il y a des rencontres et de précieux échanges.

Je remercie M. Aziz HAMDOUNI, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Les discussions que nous avons eu pendant le temps d'échange de la soutenance et après sont pleine d'informations et de conseils pour poursuivre le travail de recherche.

Je remercie M. Jacques-André ASTOLFI et M. Marc MEDALE d'avoir bien voulu accepter la charge de rapporteur. Leurs remarques concernant le manuscrit ont été prises en compte. Je remercie également mes examinateurs : Mme Marianna BRAZA, Mme Elisabeth LACAZEDIEU-LONGATTE et M. Yann DOUTRELEAU. Les échanges ont montré les attentes vives autours de cette problématique. Et bien qu'il reste du chemin vers le sommet, j'espère avoir contribué à la monté par la face MAN.

Je remercie chaleureusement M. Jean-Marc CADOU et M. Grégory GIRAULT, mes encadrants de thèse. Il est reconnu que le bon déroulement d'une thèse est dépendante de la qualité des encadrants. J'ai eu beaucoup de chance sur leurs qualités et leur complémentarité. Compétence scientifique et pédagogie sont loin d'être leurs plus petites qualités. La confiance qu'ils m'ont témoigné m'a beaucoup apportée et portée vers cette heureuse conclusion.

Je remercie Yann pour les nombreux échanges et le temps qu'il m'a accordé pour des questions scientifiques ou matérielles ou autre. Je remercie aussi Anita pour sa patience à m'expliquer les rouages de ~~la maison des fous d'Astérix~~ l'administration universitaire. Mes pensées vont également à Bertrand qui m'a entre autre "sauvé la vie" avec ses sauvegardes du réseau.

Un grand merci à mes fidèles cobureauitieres, pour leurs amitiés, pour les discussions vélo et celles d'un autre genre. . . , et pour m'avoir servi de peluches de débugeage.

Comme en ascension, il faut faire attention au manque d'air. La salle de pause et ses "habitants" donnent une grande bouffé d'oxygène. Toutes les conversations autour du café (juste autour de la machine des fois !) font partie du package de sécurité. Un grand merci à chacun.

Un grand merci à mes parents pour leur patience et leurs "technicités" à me faire de bonnes chaussures légères mais performantes qui m'ont permis entre autre cette ascension. Tous le reste, je leurs dirai en direct. . . en mode Monnier.

Table des matières

Introduction générale	1
I Mise en équation	9
1 Modélisation du fluide, du solide et de leur interaction	11
1.1 Modélisation de l'écoulement	11
1.1.1 Forme faible des équations de Navier-Stokes	13
1.2 Modélisation du solide	15
1.3 Définition de l'interaction fluide-structure (IFS) et présentation des algorithmes de calcul associés	17
1.3.1 Modélisation Arbitrairement Lagrangien-eulérien	17
1.3.2 Méthode des marqueurs lagrangiens	20
1.3.3 Méthode de la Level-Set	21
1.3.4 Méthode des éléments finis étendus	23
1.3.5 Méthode des frontières immergées	24
II Techniques numériques	33
2 Méthodes numériques pour l'analyse de bifurcation	35
2.1 Analyse de bifurcation stationnaire	36
2.2 Détection d'une bifurcation de Hopf	37
2.2.1 Méthode directe	38
2.2.2 Méthode indirecte	39
2.2.3 Méthode hybride	40
3 Résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires	43
4 Mise au point des algorithmes spécifiques	45
4.1 Prise en compte de l'IFS par une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis	45
4.1.1 Gestion de la frontière	45
4.1.2 Méthodes de Pénalisation et Ghost-Cell adaptées aux éléments finis	49
4.1.3 Synthèse des méthodes proposées	56
4.2 Analyse de bifurcation stationnaire	56
4.2.1 Méthode de perturbation	56
4.2.2 Calcul du domaine de validité	58

4.2.3	Méthode de continuation	60
4.3	Détection des points de bifurcation stationnaire simple	60
4.3.1	Indicateur de bifurcation	61
4.3.2	Analyse des termes de série et détection d'une progression géométrique	63
4.4	Suivi des solutions post-bifurquées	65
4.4.1	Sous-espace de la matrice singulière	66
4.4.2	Détermination des branches post-bifurquées	67
4.4.3	Équation algébrique de bifurcation	68
4.4.4	Développement d'ordre supérieur des solutions post-bifurquées	69
4.4.5	Cas particulier de la bifurcation stationnaire simple avec brisure de symétrie	69
4.5	Analyse de bifurcation de Hopf	71
4.5.1	Définition et construction de l'indicateur de bifurcation	71
4.5.2	Méthode de continuation sur l'indicateur	74
4.5.3	Exploitation de l'indicateur de bifurcation	75
4.5.4	Itération de Newton	76
4.6	Résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires avec prise en compte de l'IFS	78
4.6.1	Solveur d'ordre élevé par association Homotopie/Perturbation	79
4.6.2	Spécificités de l'algorithme liées à la prise en compte de l'IFS	81
4.7	Incorporation des algorithmes dans une solution logicielle	81
III	Résultats numériques	85
5	Etudes numériques et Validation	87
5.1	Bifurcation stationnaire	87
5.1.1	Description du cas d'étude	87
5.1.2	Résultats de référence	90
5.1.3	Résultats avec l'algorithme LP	90
5.1.4	Résultats avec l'algorithme LPG	93
5.1.5	Influence du paramètre de pénalisation	97
5.1.6	Influence du maillage	98
5.1.7	Influence de la position de la Level-Set par rapport aux éléments finis	100
5.1.8	Synthèse des résultats	104
5.2	Bifurcation de Hopf	105
5.2.1	Description des cas d'étude	105
5.2.2	Résultats de référence	106

5.2.3	Résultats avec les méthodes LP et LPG	107
5.2.4	Sensibilité des méthodes au paramètre de pénalisation	108
5.2.5	Sensibilité des méthodes à la position de la Level-Set	111
5.2.6	Analyse critique de la méthode Gost-Cell	114
5.2.7	Synthèse de l'analyse de bifurcation de Hopf	116
5.3	Simulation d'un écoulement instationnaire autour d'un obstacle circulaire fixe ou mobile	117
5.3.1	Description du cas d'étude	117
5.3.2	Cylindre fixe en milieu infini	117
5.3.3	Application des méthodes LPG et LPG+	120
5.3.4	Cylindre mobile en mouvement forcé	122
	Conclusion générale et perspectives	131
	Bibliographie	135

Liste des symboles

Lettres romaines

\mathbf{u}_d	Condition en vitesse de type Dirichlet, d peut être remplacé par e ou s pour entrée ou sortie
\mathbf{f}	Force volumique
D	Longueur caractéristique
Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Strouhal
\mathbf{L}	Opérateur linéaire
\mathbf{L}_{χ_s}	Opérateur linéaire dû à la pénalisation du solide
\mathbf{M}	Opérateur masse
\mathbf{Q}	Opérateur quadratique
L_t^0	Opérateur tangent évalué en \mathbf{U}_0
\mathbf{K}_t	Opérateur tangent sous forme discrète
N	Ordre de troncature des séries
k	Paramètre de pénalisation de la pression
K	Perméabilité du milieu poreux
\mathbf{x}	Position d'un point de l'espace Ω
p	Pression hydrostatique
\mathbf{W}	Solution particulière
T	Temps de simulation
$\mathbf{D}(\mathbf{u})$	Tenseur des taux de déformation
\mathbf{U}	Vecteur mixte, inconnu du problème
\mathbf{n}	Vecteur normal sortant
\mathbf{R}	Vecteur résidu
\mathbf{u}	Vecteur vitesse
\mathbf{U}_s	Vecteur vitesse étendu à l'état stationnaire
\mathbf{u}_b	Vitesse du solide

Lettres grecques

α	Distance à la singularité
χ_s	Fonction indicatrice du solide
ϕ	Fonction de la Level-Set
δq	Fonction test en pression
$\delta \mathbf{v}$	Fonction test en vitesse

φ	Inconnue nodale du problème
μ	Indicateur de bifurcation
ρ	Masse volumique
Φ	Mode droit de bifurcation
Ψ	Mode gauche de bifurcation
κ	Multiplicateur de Lagrange
λ	Paramètre de contrôle
ε	Paramètre de l'homotopie
θ	Paramètre du schéma d'intégration temporelle
Δt	Pas de la discrétisation temporelle
ω	Pulsation de l'écoulement périodique au cycle limite
Γ	Surface de contrôle de surface élémentaire γ
Σ	Tenseur des contraintes
\mathbf{T}	Tenseur des contraintes visqueuses
η	Tolérance utilisateur pour la continuation
ν	Viscosité cinématique
μ_f	Viscosité dynamique
κ_f	Viscosité volumique
Ω	Volume de contrôle de volume élémentaire ω

Abréviations

ALE	Arbitrairement Lagrangien-eulérien
IFS	Interaction Fluide Structure
LS	Level-Set
LP	Méthode associant les méthodes de la Level-Set et pénalisation
LPG	Méthode associant les méthodes de la Level-Set, pénalisation et de la Ghost-Cell
LPG+	Méthode associant les méthodes de la Level-Set, pénalisation des éléments purement solide et de la Ghost-Cell
MAN	Méthode Asymptotique Numérique
MLS	Méthode de la Level-Set
XFEM	Méthode des éléments finis étendus
MFI	Méthode des Frontières Immergées
MGC	Méthode Ghost-Cell
MPC	Méthode Prédicteur-Correcteur
NF	Nœuds Fantômes

VIV Vortex-Induced Vibrations

Symboles mathématiques

- $\frac{\partial \bullet}{\partial t}$ Dérivée par rapport au temps
- $\nabla \cdot \bullet$ Divergence de \bullet
- $\text{div} \bullet$ Opérateur divergence
- grad** \bullet Opérateur gradient
- ∇ Opérateur gradient (Nabla)
- Δ Opérateur laplacien
- $\text{Tr} \bullet$ Opérateur trace
- $\langle \bullet, \bullet \rangle$ Produit scalaire euclidien
- $\bullet : \bullet$ Produit tensoriel doublement contracté
- \bullet^T Transposé

Introduction générale

La simulation numérique est aujourd'hui un outil indispensable et incontournable dans de nombreux domaines qu'ils soient appliqués (industrie) ou de recherche. Même si la complexité des problèmes résolus numériquement augmente régulièrement, la modélisation de problèmes multi-physiques (plusieurs lois d'évolution, des couplages entre différents corps ou matières, des constantes de temps différents) présente de nombreuses difficultés. Dans ce travail on s'intéresse à la validation d'outil numérique permettant de traiter un problème multiphysique particulier, celui du problème d'interaction fluide/structure (IFS). Le fluide (newtonien et incompressible) s'écoule autour ou dans une structure. Ce type de problème est notamment présent dans de nombreux domaines, tels que le transport : aérien (réduction de la traînée, amélioration des turbo-réacteurs, étude de la flottabilité des appareils lors de crash. . .), maritime (réponse du navire aux fortes mers, manœuvrabilité. . .) ou terrestre (étude des écoulements autour des camions et diminutions de la traînée, aérodynamisme. . .). Le secteur de l'énergie est également un domaine dans lequel les problèmes d'IFS sont présents. En effet, en cherchant à augmenter sa productivité, ce secteur pousse de plus en plus loin son besoin de compréhension des phénomènes physiques, citons les éoliennes (instabilité en bout de pâles, optimisation de l'implantation des éoliennes entre elles. . .), les hydroliennes (influence des particules en suspension sur l'hydrolienne et inversement. . .), le transport de cette énergie et l'amarrage des structures flottantes offshore (vibration des câbles d'ancrage, des câbles électriques, des risers). Le secteur médical est également intéressé par la modélisation de l'écoulement du sang et de ces interactions avec les parois des différents organes.

Un des points limitant le développement des technologies citées est le manque de compréhension et de fiabilité des modèles prenant en compte un bouclage complet de l'interaction : le fluide agit sur le solide et le solide agit sur le fluide. Cet aspect, facile à sentir, est numériquement très complexe à poser correctement et à résoudre de façon satisfaisante particulièrement en dynamique. Parmi les phénomènes qui cristallisent ces difficultés, il faut noter ceux des vibrations induites par des tourbillons.

Un point commun des exemples cités précédemment est celui des instabilités des écoulements en présence d'obstacles fixes et/ou mobiles. Ce type de problématique est connu et observé depuis Léonard de Vinci (1452 - 1519). Afin d'aller vers une modélisation des IFS, et particulièrement du phénomène vibratoire évoqué, un certain nombre de points doivent être abordés pour comprendre les enjeux et les problématiques rencontrés. Parmi ceux-ci, nous fixerons quelques bases à propos de la mécanique du fluide, de l'étude de l'instabilité et des méthodes de résolution parmi lesquels se trouve la méthode que nous employons, la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). Enfin une explication de l'IFS sera proposée pour présenter le projet vers lequel l'équipe cherche à se développer, projet qui sous-tend la thèse.

Mécanique du fluide. Lors de l'écoulement d'un fluide à faible vitesse autour d'un d'obstacle fixe, un écoulement rampant se produit, le fluide fait le tour du solide immergé (figure 1(a)). Cela est dû au fait que la partie visqueuse du fluide domine les termes d'inertie. Une quantification de ce rapport est réalisée en adimensionnant la vitesse. Cela fait intervenir les paramètres physiques du fluide et une dimension caractéristique de l'écoulement, dans ce cas, le diamètre D du cylindre. Le nombre de Reynolds, ce nombre adimensionnel, est donné par :

$$Re = \frac{\rho D u_{\infty}}{\mu_f} \quad (1)$$

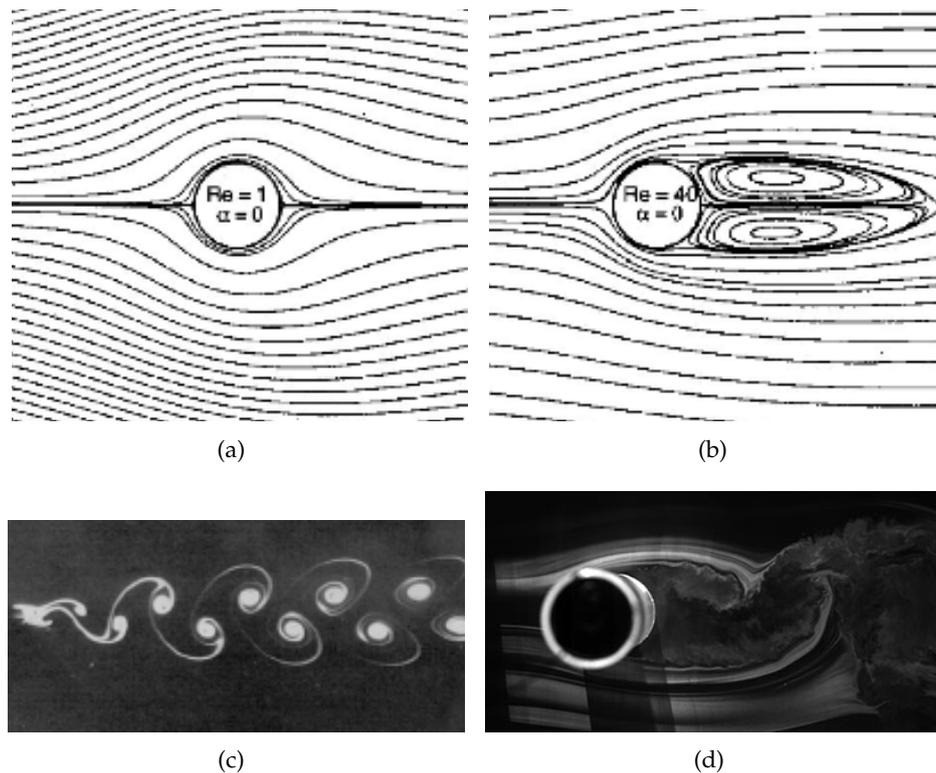


FIGURE 1 – Différents types d'écoulement pour des nombres de Reynolds de plus en plus élevés : (a) $Re = 1$ [Stojković et al., 2002]; (b) $Re = 40$ [Stojković et al., 2002]; (c) $Re = 140$ [Van Dyke & Van Dyke, 1982]; (d) $u_\infty = 50 \text{ m/s}$ [Moreau & Bernard, Moreau & Bernard].

où ρ est la masse volumique du fluide, μ_f est la viscosité dynamique et u_∞ est la vitesse du fluide hors du champ de perturbation du solide.

Si pour la même expérience, la vitesse augmente et dépasse un seuil, l'inertie du fluide prend de l'importance. Il y a alors formation de tourbillons de recirculation dans le sillage du solide (figure 1(b)). La longueur de ces tourbillons augmente avec la vitesse. Au delà d'une certaine vitesse, une instabilité dans la couche limite entraîne le décrochage périodique alterné des vortex (figure 1(c)). Ce régime, connu sous le nom d'allée de von Karman, a aussi de nombreuses variantes avec les vortex qui se décrochent en une paire de vortex contrarotatif ou un mélange de ces deux types de lâchers. Si la vitesse de l'écoulement augmente encore, celui-ci devient turbulent (figure 1(d)). Dans ce travail, ce dernier régime (turbulent) ne sera pas analysé, seuls seront considérés les écoulements à faibles vitesses, inférieures à la transition vers un écoulement turbulent. Ainsi les lâchers tourbillonnaires entraînent une dissymétrie de l'écoulement autour du solide et donc une contrainte résultante pouvant déformer ou déplacer celui-ci. Puisque le lâcher tourbillonnaire est périodique, les efforts sur le solide le sont aussi, il y a donc un mouvement vibratoire du solide. Ce phénomène est auto-entretenu et, si la vitesse ne diminue pas, le phénomène se poursuit. Cette manifestation de l'interaction fluide-structure est connue sous le nom anglais de VIV (Vortex-Induced Vibrations) et est à l'origine d'une catastrophe bien connue : l'effondrement du pont de Tacoma [Courty & Kierlik, 2008].

De nombreux autres domaines présentent ce type d'instabilité. Citons par exemple les crayons de combustible de réacteurs nucléaires ou encore l'aéronautique avec le battement des ailes d'un avion. La connaissance précise des vitesses de transition entre les différents régimes

s'avère être une information primordiale lors de la phase de conception d'un système. Elle permet ainsi d'éviter aux structures des sollicitations trop importantes pouvant à terme conduire à leur destruction.

Les systèmes d'interaction fluide-structures peuvent également être sujets à d'autres types d'instabilité que celle caractérisant la transition d'un écoulement stationnaire vers un écoulement périodique en temps. La transition de l'écoulement d'un état symétrique vers un état non symétrique traduit également l'apparition d'une instabilité. On peut cependant remarquer que les solutions non symétriques après bifurcation sont stables, ce qui n'est pas le cas de la solution post-bifurcation symétrique qui elle, est instable. Ce type d'instabilité représente un bifurcation stationnaire de type fourche.

Mathématique et Instabilité. Un système dynamique non-linéaire (par exemple, un cylindre dans un écoulement figure 1) peut être décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = G(\mathbf{U}, \lambda) \quad (2)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des inconnues, λ est le paramètre de contrôle et G est la fonction non-linéaire du problème. Classiquement, le problème est discrétisé en temps. Pour chaque pas de temps, un problème non-linéaire dépendant plus ou moins fortement des solutions au(x) pas précédent(s) (en fonction des schémas utilisés) doit être résolu. Une fois le problème temporel résolu, il est possible de voir la solution passer d'un état stationnaire à un état périodique en temps (comme décrit précédemment) et converger vers un cycle limite. Cette transition est une bifurcation d'Andronov-Hopf-Poincaré dite de Hopf et schématisée sur la figure 2. La valeur critique λ_c est la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle la solution perd sa stabilité. Sur la figure 2, cette transition correspond à l'intersection entre le segment et la surface enveloppe des cycles limites.

Pour notre problème d'interaction fluide-structure, cette valeur correspond au nombre de Reynolds critique de l'écoulement à la bifurcation de Hopf. Le décrochement d'un vortex change la forme de l'écoulement au voisinage du solide, cette modification a une influence sur les coefficients de portance et de traînée. Puisque le décrochement est périodique et alterné, les coefficients aéro ou hydrodynamiques deviennent aussi périodiques. Le coefficient de portance a une périodicité identique à celle du décrochement, tandis que la traînée est influencée de la même façon par les lâchers du vortex du haut et du bas, il a donc une fréquence double à celle du décrochement. La fréquence de décrochement des tourbillons est une information très documentée. Elle servira de référence pour le calcul de la solution temporelle ainsi que pour les méthodes numériques que nous proposerons pour déterminer les bifurcations de Hopf.

Le système (2) permet, en ajoutant une hypothèse supplémentaire, de chercher les solutions stationnaires. Cependant, si le système est stationnaire, il n'y a pas de variation des champs inconnus par rapport au temps ($\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$). L'équation (2) devient alors :

$$G(\mathbf{U}, \lambda) = 0 \quad (3)$$

Pour certaines valeurs du paramètre de charge λ et pour un écoulement présentant une symétrie, la solution perd également son unicité. La solution passe d'un état stationnaire stable et symétrique à un ensemble de solutions stationnaires satisfaisant l'équation (2), c'est une bifurcation de type fourche [Seydel, 2009]. Dans la plupart des cas, il y a deux solutions stables pour lesquelles l'écoulement est non-symétrique, et une solution symétrique instable.

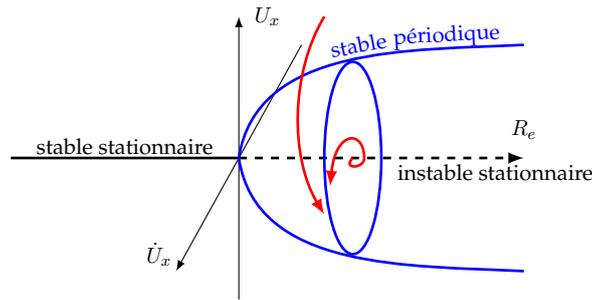


FIGURE 2 – Schéma d'une bifurcation de Hopf. Les axes sont centrés sur la valeur du paramètre de chemin critique λ_c , d'après [Seydel, 2009].

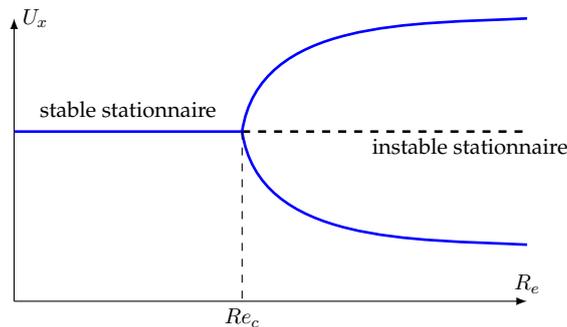


FIGURE 3 – Schéma d'une bifurcation stationnaire.

La valeur critique du paramètre de contrôle λ_c à la perte d'unicité de la solution est également une information importante et nécessaire à la compréhension des phénomènes physiques étudiés. Nous proposerons dans ce travail, des méthodes numériques permettant de déterminer avec précision ces valeurs critiques.

Méthodes numériques La résolution numérique de l'équation (2) se fait habituellement par une méthode de prédiction-corrrection. L'étape de la prédiction utilise une approximation de la solution. Cette approximation peut être réalisée de plusieurs manières possibles. La correction permet de diminuer l'écart entre la solution recherchée et l'approximation du prédicteur. Cette méthode itérative est généralement une correction de Newton qui corrige la solution jusqu'à une précision souhaitée et définie par l'utilisateur. L'analyse des bifurcations peut être fait de plusieurs manières ne nécessitant pas obligatoirement la résolution complète des équations pour chaque pas de la discrétisation temporelle pour l'équation (2) ou pour chaque valeur du paramètre de contrôle pour l'équation (2.2). Un calcul numérique des valeurs propres peut être réalisé pour obtenir le point singulier et obtenir les paramètres à la bifurcation, sans connaître pour autant l'ensemble du diagramme de bifurcation. La méthode asymptotique numérique, qui peut être vue comme un prédicteur d'ordre élevé, permet de suivre, en fonction du paramètre de contrôle, l'écoulement stationnaire et ainsi construire le diagramme de bifurcation.

Une importante gamme d'outils numériques pour la modélisation (Méthode des différences finis, des volumes finis, des éléments finis...) existe. Dans ce travail, certains choix ont été faits en privilégiant les techniques d'analyse des bifurcations. Ces choix sur la modélisation retenue et sur les méthodes de calculs seront détaillés par la suite.

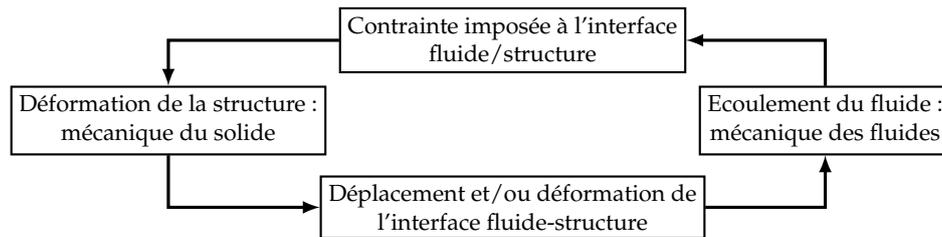


FIGURE 4 – Schéma de l'interaction fluide-structure.

Interaction fluide-structure Aujourd'hui, simuler numériquement la déformation d'un solide, non couplé avec un fluide et soumis à des chargements extérieurs est une tâche relativement aisée si la loi de comportement considérée n'est pas trop complexe (en élasticité par exemple). De la même manière, simuler l'écoulement d'un fluide (sans couplage également) est relativement facile. Au contraire, modéliser et simuler un problème d'interaction fluide-structure demeure un problème présentant plusieurs difficultés. Ainsi la solution du problème solide (le déplacement) est indispensable pour déterminer par exemple les conditions aux limites que l'on doit imposer au milieu fluide. Ce dernier impose des conditions de chargement extérieur (sous forme de pression par exemple) au solide qui va alors se déplacer ou se déformer générant ainsi un nouveau domaine fluide. Le couplage entre les milieux fluide et solide peut être considéré comme fort au sens où chaque modification de l'état de l'un des deux milieux va générer une modification de l'autre et ainsi de suite. Cette boucle de "rétro-action" est schématisée sur la figure 4. La difficulté intrinsèque à ce type de problème d'interaction est la gestion de l'interface entre les deux milieux. Cette interface est le lieu physique où vont être échangées toutes les informations (déplacement, pression...) nécessaires à la bonne résolution du problème. Cette difficulté "physique" se traduit naturellement en difficulté de modélisation lorsque l'on souhaite résoudre numériquement un problème d'interaction fluide-structure.

Dans la littérature, différentes études montrent des résultats de simulations et d'expériences se rapprochant des couplages permettant la modélisation de phénomène de VIV. Ainsi Placzek *et al.* [Placzek et al., 2009] proposent une étude numérique présentant différentes étapes allant vers une simulation de VIV. Ils partent de la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre rigide et fixe. Ils simulent ensuite le cylindre forcé à vibrer verticalement selon une fréquence f_0 et une amplitude A . Leurs simulations présentent les zones de synchronisation de la fréquence de décrochement tourbillonnaire f_s sur la fréquence d'oscillation du cylindre f_0 . Cette zone est mise en avant par Koopmann [Koopmann, 1967]. Enfin ils simulent l'écoulement autour d'un cylindre rigide monté élastiquement. Dans ce cas, le cylindre est libre de se déplacer selon la direction transverse à l'écoulement. Les auteurs étudient l'influence de la rigidité de la liaison sur le comportement simulé de l'écoulement fluide.

Enfin, une très grande part des travaux menés sur cette thématique est synthétisée dans l'ouvrage de Paidoussi *et al.* [Paidoussi et al., 2010]. Cet ouvrage présente un état de l'art sur les instabilités générées par des écoulements transverses autour de structures immergées en se focalisant sur les problématiques liées au galop, au flottement, au lâcher de tourbillons (VIV), aux conditions de verrouillage ou aux vibrations induites dans le sillage d'objets immergés.

Objectifs

L'objectif principal de cette thèse est d'étendre le domaine d'application de la MAN en vue de préparer la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure.

Jusqu'à présent, en mécanique des fluides, les méthodes basées sur la MAN ont été appliquées en grande partie pour l'analyse de bifurcation. Les résultats ont montré une grande robustesse et une efficacité accrue de la méthode par rapport aux méthodes classiques (telles que l'analyse aux valeurs propres ou les techniques de prédiction-correction de Newton-Raphson).

La question se pose de savoir si les méthodes basées sur la MAN permettent l'analyse de bifurcation pour des problèmes d'écoulements fluides autour d'obstacles solides immergés, pouvant se déplacer ou se déformer. Ainsi, dans cette thèse, le cas académique d'un écoulement bidimensionnel incompressible d'un fluide visqueux newtonien autour d'obstacles rigides, fixes ou mobiles, est étudié.

Ce problème, bien que relativement "simple" et longuement étudié, impose d'apporter des réponses aux questions suivantes. En lien avec les méthodes numériques envisagées, il s'agit d'identifier la méthode permettant de décrire le couplage fluide/structure (1^{er} verrou) et de l'associer aux techniques basées sur la MAN (2^e verrou). Cette association doit permettre de retrouver les résultats de référence pour des écoulements classiques, tels que l'écoulement dans une conduite avec expansion ou autour d'un cylindre fixe (3^e verrou). Des applications aux cas où l'obstacle est mobile doivent être proposées (4^e verrou). Enfin, il faut vérifier que les algorithmes proposés soient au moins aussi performants que les méthodes classiques (5^e verrou).

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit de thèse est organisé autour de cinq chapitres selon le plan suivant.

Dans le premier chapitre, les équations modélisant le problème sont présentées. Ainsi, les équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel incompressible d'un fluide visqueux newtonien sont rappelées. Puis, les équations du mouvement pour un solide rigide placés dans un tel écoulement sont proposées. Enfin, une synthèse des techniques permettant de décrire l'interaction fluide/structure est présentée. Dans le cadre de cette thèse, les modèles proposés sont restreints au cas des écoulements laminaires, à faible nombre de Reynolds.

Les deux chapitres suivants constituent des synthèses bibliographiques sur l'analyse de bifurcation et l'intégration temporelle du système couplé étudié.

Le deuxième chapitre est dédié aux méthodes d'analyse de bifurcation. Après avoir rappelé les méthodes classiques d'analyse de bifurcation, une présentation des algorithmes basés sur la MAN est proposée. En particulier, ces techniques permettent de déterminer les bifurcations simples stationnaires (brisure de symétrie) et de Hopf (passage d'une solution stationnaire à une solution périodique en temps).

Le troisième chapitre porte sur l'intégration temporelle des équations du mouvement du système couplé étudié. A cet effet, une présentation des algorithmes classiques, de leurs avantages et inconvénients est proposée. Une attention particulière est portée à une solution non-conventionnelle associant un développement en série, une technique d'homotopie et une discrétisation temporelle.

Le quatrième chapitre présente les algorithmes élaborés pour résoudre le problème posé. A cet effet, une discrétisation spatiale associant la méthode des éléments finis à une méthode de frontières immergées (MFI) est établie. Plusieurs niveaux de précision sont possibles selon que la méthode MFI repose sur une méthode de pénalisation seule ou qu'elle soit associée à une méthode Ghost-Cell. Cette discrétisation est ensuite associée aux techniques MAN pour la détection des bifurcations et le suivi des solutions post-bifurcation. Enfin, un intégrateur

temporel, basé sur la discrétisation précédente et associant des techniques de perturbation et d'homotopie, est proposé.

Le cinquième et dernier chapitre présente les résultats numériques obtenus avec les algorithmes mis au point. Ces résultats permettent d'étudier la performance (efficacité, précision, robustesse) des algorithmes proposés et leur sensibilité par rapport à certains paramètres numériques tels que la finesse du maillage éléments finis, la valeur de pénalisation pour décrire les solides, la forme et la position relative de l'interface fluide/solide par rapport au maillage.

Enfin, une conclusion est proposée dans laquelle les principaux résultats obtenus sont rappelés. De plus, des recommandations sur le bon usage des algorithmes mis au point sont proposées. Enfin, en guise de perspectives, des réflexions sont menées pour améliorer les algorithmes proposés.

Financement du travail

Ce travail de thèse a été financé par deux organismes :

- la DGA (Direction Générale de l'Armement) a financé la moitié de la thèse
- La région Bretagne, à travers la bourse ARED (Allocation de REcherche Doctorale) a financé l'autre moitié



Première partie

Mise en équation

1

Modélisation du fluide, du solide et de leur interaction

Dans ce chapitre les modèles retenus et étudiés dans le cadre de cette thèse sont présentés.

Ainsi, la modélisation du fluide en écoulement repose sur les équations de Navier-Stokes, établies pour un fluide incompressible et newtonien et présentées, dans un premier temps, dans leur forme locale (ou forme forte). Dans un second temps, afin d'anticiper sur la résolution numérique basée sur une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis, la forme faible (ou forme intégrale) des équations de Navier-Stokes est présentée. En particulier, un formalisme spécifique et particulièrement bien adapté au cadre de cette étude est établi.

Un bref rappel des équations du mouvement d'un solide est effectué afin de présenter les différentes situations dans lesquelles un solide peut être amené à interagir au sein d'un fluide.

Enfin, dans la mesure où la résolution des problèmes d'IFS fait appel majoritairement aux méthodes numériques, un panorama des techniques permettant la gestion du couplage fluide-solide est dressé. Cette présentation, la plus exhaustive possible, doit permettre d'identifier la technique la mieux adaptée à l'étude des instabilités pour un écoulement en présence d'obstacles solides.

1.1 Modélisation de l'écoulement

L'écoulement incompressible et isotherme d'un fluide newtonien est décrit par les équations de Navier-Stokes. Les hypothèses ainsi que la manière dont ces équations sont obtenues, sont présentées selon un formalisme eulérien.

L'équation locale de la conservation de la masse, en l'absence de puits ou de source, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide et \mathbf{u} le vecteur vitesse.

Pour un écoulement incompressible isotherme d'un fluide homogène, la masse volumique ρ est constante, l'équation de continuité (i.e. conservation de la masse) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

Traditionnellement, un écoulement est incompressible est une approximation correspondant au cas où la vitesse de l'écoulement est faible devant la vitesse des ondes acoustiques dans le fluide, c'est-à-dire si le nombre de Mach Ma est faible devant l'unité [Candel, 1990]. En pratique, la condition $Ma < 0,3$ est souvent utilisée.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est établie pour un volume de contrôle Ω au sein du fluide. L'application du principe fondamental de la dynamique à cet élément de volume conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, d\omega + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, d\omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \, d\omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \quad (1.3)$$

où \mathbf{f} représente les forces à distance, $\boldsymbol{\Sigma}$ est le tenseur des contraintes au sein du fluide et \mathbf{n} désigne le vecteur normal sortant du domaine fluide ω de frontière γ .

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ peut se décomposer en deux termes [Sini, 2006] : le terme de pression et celui relatif à la viscosité du fluide.

Au repos, le fluide doit se comporter comme un fluide parfait (pas de viscosité) ; sa loi de comportement doit également refléter son isotropie. Le premier terme du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ est une partie sphérique, la pression hydrostatique p et le second, une partie déviatorique appelée le tenseur des contraintes visqueuses \mathbf{T} :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I}_d + \mathbf{T} \quad (1.4)$$

où p , \mathbf{I}_d et \mathbf{T} désignent, respectivement, la pression hydrostatique, le tenseur identité (de dimension 3x3) et le tenseur des contraintes visqueuses.

Le principe d'objectivité, le choix d'une forme linéaire pour le tenseur des contraintes et le second principe de la thermodynamique imposent un tenseur des contraintes visqueuses \mathbf{T} de la forme :

$$\mathbf{T} = 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \left(\kappa_f - \frac{2}{3}\mu_f \right) \text{Tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) \mathbf{I}_d \quad (1.5)$$

où μ_f est la viscosité dynamique (constante en espace et en temps) et κ_f est la viscosité en volume [Candel, 1990]. Celle-ci est négligée car très faible devant la viscosité dynamique ([Taillet et al., 2008] p.523) (hypothèse de Stokes). Dans l'équation (1.5), le terme $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ désigne le tenseur des taux de déformation, qui correspond à la partie symétrique du gradient du champ des vitesses dans le fluide :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad} \, \mathbf{u} + (\mathbf{grad} \, \mathbf{u})^T \right) \quad (1.6)$$

Sachant que $\text{Tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \text{div}(\mathbf{u})$, les hypothèses précédentes nous permettent d'établir la loi de comportement d'un fluide Newtonien :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I}_d - \frac{2}{3} \mu_f \text{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I}_d + 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (1.7)$$

Le volume de contrôle étant arbitraire, il en découle que la formule (1.3) est vraie quel que soit le volume. L'intégrande est donc identiquement nul. De plus, en utilisant (1.7) dans (1.3), ainsi que l'hypothèse d'incompressibilité, on obtient :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} \, p - 2\mu_f \text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{f} \quad (1.8)$$

Finalement, le problème consiste à chercher le vecteur \mathbf{u} et le scalaire p solutions des équations locales de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} \, p - 2\nu \text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.9a) \quad (1.9b)$$

munies des conditions aux limites et initiales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ \mathbf{U}(t = 0) = \mathbf{U}_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (1.10a)$$

$$(1.10b)$$

Dans l'équation (1.9a), le terme ν désigne la viscosité cinématique telle que $\nu = \frac{\mu_f}{\rho}$. Cette équation modélise la conservation de la quantité de mouvement écrite dans sa forme divergente.

Une autre forme dite Laplacienne de l'équation est possible (utilisée par exemple par [Mizushima & Akinaga, 2003; Persillon & Braza, 1998; Placzek et al., 2009]) :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - \mu_f \Delta \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} \quad (1.11)$$

La formulation faible de l'équation (1.11) ne respecte le principe d'objectivité qu'avec une gestion particulière des frontières [Limache et al., 2007, 2008]. Dans ce cas, un terme supplémentaire apparaît dans la forme faible de l'équation de conservation. Sans cette correction, les résultats obtenus avec ces deux formulations peuvent ne pas coïncider.

1.1.1 Forme faible des équations de Navier-Stokes

Dans le cadre de cette thèse, la méthode des éléments finis est retenue. Celle-ci consiste à trouver une solution approchée au problème établi par la forme faible des équations de Navier-Stokes. Dans ce paragraphe, seules les principales étapes de cette technique de discrétisation spatiale sont rappelées. Le lecteur intéressé peut se référer aux nombreux travaux [Azaïez et al., 2011; Cochelin et al., 2007; Hughes et al., 1989; Limache et al., 2008; Zienkiewicz & Taylor, 2000] qui précisent la forme faible des équations de Navier-Stokes.

Soient les champs virtuels $\delta \mathbf{v}$ et δq , respectivement appelées champs virtuels de vitesse et de pression, appartenant à l'ensemble $V = \left\{ \delta \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \delta \mathbf{v} = 0 \text{ sur } (\Gamma) \right\}$ de fonctions possédant les propriétés de régularité suffisante [Azaïez et al., 2011] s'annulant sur le contour Γ et satisfaisant :

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - 2\mu_f \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \rho \mathbf{f} \right) \delta \mathbf{v} \, d\omega = 0 \quad \text{dans } (\Omega) \quad (1.12)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \delta q \, d\omega = 0 \quad \text{dans } (\Omega) \quad (1.13)$$

Les fonctions recherchées étant dérivées, celles-ci doivent être continues et bornées. Il faut donc que la fonction cherchée \mathbf{u} et la fonction test $\delta \mathbf{v}$ aient leurs dérivées dans $L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

On introduit la fonctionnelle $A(\bullet, \bullet)$ telle que :

$$A(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} 2\mu_f \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \delta \mathbf{v} \, d\omega$$

Comme $\delta \mathbf{v}$ appartient à l'ensemble V des fonctions cinématiquement admissibles (c.-à-d. s'annulant sur le contour), il vient après intégration par partie :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{grad} \delta \mathbf{v} \, d\omega + \underbrace{\int_{\Gamma} 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \delta \mathbf{v} \, d\gamma}_{0 \text{ car } \delta \mathbf{v} \in V} \\ &= \int_{\Omega} 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{grad} \delta \mathbf{v} \, d\omega \end{aligned} \quad (1.14)$$

où le symbole $\bullet : \bullet$ désigne le produit tensoriel doublement contracté. Le tenseur des taux de déformations étant symétrique, il est possible d'écrire [Azaïez et al., 2011] :

$$A(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) \, d\omega \quad (1.15)$$

De même, partant de l'équation d'incompressibilité (1.13), on pose :

$$B(\mathbf{u}; \delta q) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \delta q \, d\omega \quad (1.16)$$

Le terme de pression de l'équation (1.12) est calculé à l'aide d'une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \delta \mathbf{v} \, d\omega &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \delta \mathbf{v} \, d\omega \\ &= -B(\delta \mathbf{v}; p) \end{aligned} \quad (1.17)$$

L'ensemble des fonctionnelles peut être regroupé dans un opérateur linéaire \mathbf{L} . Il prend en compte les termes liés à la diffusion, à la pression et à la conservation de la masse. Si le vecteur inconnu mixte $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$ est défini comme la concaténation du vecteur vitesse et de la pression, l'opérateur \mathbf{L} est défini par :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \mathbf{L}(\mathbf{u}, p; \delta \mathbf{v}, q) = A(\mathbf{u}; \delta \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}; \delta q) - B(\delta \mathbf{v}; p) \quad (1.18)$$

Le terme de convection de l'équation (1.12) est isolé dans un opérateur quadratique \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{U}; \mathbf{U}) = \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\omega \quad (1.19)$$

Enfin le terme d'inertie des équations de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \delta \mathbf{v} \, d\omega \quad (1.20)$$

Ainsi, les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien peuvent s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_d & \text{dans } \Omega \times [0; T] \\ \mathbf{U}(t = 0) = \mathbf{U}_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.21a) \\ (1.21b) \end{matrix}$$

Dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet, une vitesse $\lambda \mathbf{u}_d$ est imposée sur le bord du domaine Γ . Le scalaire λ désigne l'intensité de la vitesse imposée \mathbf{u}_d sur le bord Γ . La prise en compte de cette vitesse fait apparaître, dans la formule intégrale, un terme supplémentaire qui s'apparente à un vecteur force $\lambda \mathbf{F}$ [Cochelin et al., 2007; Zienkiewicz & Taylor, 2000]. Cette vision, abusive dans le domaine continu, a l'avantage de s'adapter aux méthodes mises en place par la suite (perturbation, continuation) et de faire apparaître explicitement le paramètre de contrôle λ dans les équations à résoudre.

1.2 Modélisation du solide

Pour la structure, les variables "de travail" sont les vecteurs position \bar{X}_s et déplacement \bar{U}_s ainsi que les tenseurs de déformation $\bar{\epsilon}(\bar{U}_s)$ et de contrainte de Cauchy $\bar{\sigma}$.

En notant ρ_s et \mathbf{a} les champs des masses volumiques et des accélérations du milieu matériel solide à l'instant t , ainsi que \mathbf{b} le champ des forces à distance, les équations du mouvement sont :

$$\operatorname{div}_x \bar{\sigma}(\bar{x}, t) + \rho_s(\bar{x}, t) \mathbf{b} - \rho_s(\bar{x}, t) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \forall t, \quad \forall \bar{x} \in \Omega_t \quad (1.22)$$

munies des conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} = \mathbf{u}_f \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.23)$$

$$\bar{\sigma}_s \mathbf{n}_s = \bar{\sigma}_f \mathbf{n}_f \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.24)$$

Les équations précédentes sont définies à l'instant t , par rapport à la configuration matérielle actuelle Ω_t .

Les équations du mouvement peuvent être définies, d'un point de vue lagrangien, par rapport à la configuration matérielle initiale Ω_0 . Dans ce cas, il vient :

$$\operatorname{div}_X (\bar{F}(\bar{X}, t) \bar{\Pi}(\bar{X}, t)) + \rho_s(\bar{X}, 0) \mathbf{b} - \rho_s(\bar{X}, 0) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \forall t, \quad \forall \bar{X} \in \Omega_0 \quad (1.25)$$

Dans cette équation, \bar{X} désigne le vecteur position d'une particule P_0 repérée dans la configuration initiale, \bar{F} est la transformation linéaire tangente définie au point P_0 et à l'instant t fixé et $\bar{\Pi}$ désigne le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Cette approche est retenue pour observer les transformations mécaniques d'un solide placé dans un écoulement, notamment lorsque la rigidité du solide est faible devant les efforts créés par le fluide. Ainsi il est possible de suivre les modes de déformation d'un cylindre creux à parois minces placé dans un écoulement [Paidoussis & Helleur, 1979] (figure 1.1) ou d'étudier un écoulement dans une conduite souple telle qu'un vaisseau sanguin.

Si le solide est indéformable, les distances entre les particules restent constantes au cours de la transformation mécanique. Dans ce cas, le premier terme dans les équations (1.22) et (1.25) 'disparaît'. Le mouvement est défini à partir de la trajectoire d'un seul point du solide, en général son centre d'inertie G . Dans ce cas, en notant le torseur des actions mécaniques extérieures \mathcal{T}^e et le torseur dynamique \mathcal{T}^d , le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\mathcal{T}^e(G, t) = \mathcal{T}^d(G, t) \quad \forall t \quad (1.26)$$

Dans le cas de problème plans où l'obstacle est placé dans un écoulement transverse, la dynamique du solide s'écrit simplement :

$$\sum \mathbf{f}^e = m_s \mathbf{a} \quad \forall t \quad (1.27)$$

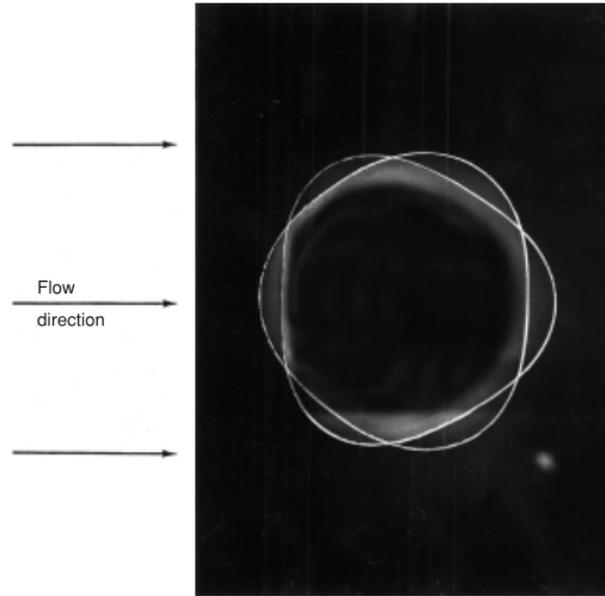


FIGURE 1.1 – 3^e mode de déformation d'un cylindre mince soumis à un écoulement transverse. Les déformations en phase et en opposition de phase sont superposées [Paidoussis & Helleur, 1979].

L'expression du membre de gauche dépend des hypothèses retenues et prend en compte, en général, une force extérieure F et une force exercée par la liaison (visco)élastique de paramètres k_s et c_s sensée modéliser la rigidité du cylindre (figure) :

$$F + k_s u_s + c_s \frac{\partial u_s}{\partial t} = m_s \mathbf{a} \quad \forall t \quad (1.28)$$

Pour la problématique des vibrations induites par vortex, la classification de Paidoussis *et al.* [Paidoussis et al., 2010], montre que l'expression de F peut être plus ou moins raffinée.

Une première approche consiste à imposer un mouvement rigide au cylindre défini par $F(t) = a \sin(\omega t)$. Ce type d'approche s'explique, expérimentalement, par une mise en œuvre plus simple comparativement au cas du cylindre en mouvement libre [Al-Jamal & Dalton, 2004; Cagney & Balabani, 2013].

Un modèle plus élaboré consiste à évaluer la force qu'exerce le fluide sur le cylindre par l'expression suivante :

$$F(t) = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 D C_L \left(\frac{A}{D} \right) \sin(2\pi St \frac{u_\infty}{D} t) \quad (1.29)$$

Selon cette expression, la force dépend du diamètre D du cylindre, de la vitesse u_∞ en amont de l'écoulement, du coefficient de portance C_L et du nombre de Strouhal St . Cependant, un tel modèle ne peut décrire le phénomène de synchronisation des fréquences et surestime le déplacement du cylindre.

L'approche la plus systématique consiste à calculer les efforts générés par les contraintes fluides sur la surface latérale du cylindre [Koumoutsakos & Leonard, 1995; Moubachir & Zolesio, 2006]. Si ce dernier ne possède qu'un degré de liberté selon la direction \mathbf{e}_2 d'un référentiel cartésien alors l'expression de la force est :

$$F(t) = - \int_{\Gamma} (\overline{\sigma}(\mathbf{u}_f, p) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_2 \quad (1.30)$$

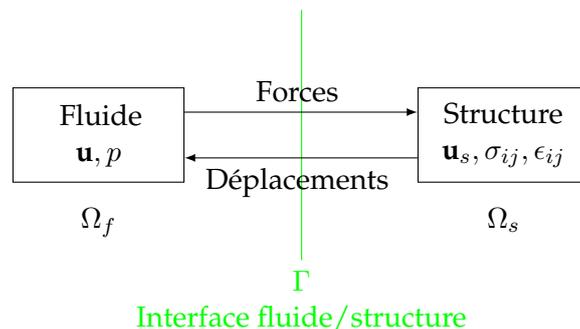


FIGURE 1.2 – Schématisation générale d'un problème de couplage mécanique fluide/structure, d'après [Souli & Sigrist, 2009].

où \mathbf{n} désigne la normale sortante au cylindre.

1.3 Définition de l'interaction fluide-structure (IFS) et présentation des algorithmes de calcul associés

Dans le cadre de cette thèse, l'interaction fluide-structure est étudiée selon les hypothèses suivantes [Souli & Sigrist, 2009] :

- il n'y a pas d'échange de matière entre les milieux solide et fluide,
- seul un échange d'énergie mécanique a lieu entre les milieux solide et fluide,
- les milieux solide et fluide ne sont pas miscibles (les phases sont distinctes).

Sous ces hypothèses, le mécanisme de l'IFS est représenté schématiquement selon la figure 1.2. Au niveau de l'interface Γ , il y a un échange réciproque d'énergie mécanique. Ainsi, le fluide exerce des efforts sur la structure en mouvement et, réciproquement. Le solide grâce à sa transformation mécanique (déplacement et/ou déformation) dessine une nouvelle configuration d'écoulement. Il y a donc une influence mutuelle des dynamiques solide et fluide.

La description de l'interface est d'une importance majeure dans les problèmes d'IFS. En effet les décrochements tourbillonnaires trouvent leurs origines dans l'instabilité de la couche limite. Il est donc nécessaire de modéliser convenablement cette couche, et donc l'interface sur laquelle la couche limite s'appuie.

1.3.1 Modélisation Arbitrairement Lagrangien-eulérien

En mécanique des fluides, il existe deux façons de décrire l'écoulement, lagrangienne ou eulérienne. Elles ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

En effet, la méthode eulérienne décrit l'évolution des grandeurs à travers un maillage fixe. Ce type d'approche est largement utilisé en mécanique des fluides. Le maillage étant fixe, les problèmes d'interface mouvante (par exemple entre fluides de propriétés différentes, ou encore pour des surfaces libres ou des domaines variables) sont résolus en passant par une définition précise de la frontière.

A l'inverse, la description lagrangienne utilise un maillage qui suit l'évolution des particules, y compris celles des frontières. Cette approche est traditionnellement utilisée en mécanique des solides faiblement déformables. Lors de grandes transformations, la description

celle du maillage. Cette vitesse est la vitesse convective du maillage définie par :

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_m \quad (1.32)$$

Equations de Navier-Stokes pour la formulation ALE. Afin de résoudre les équations de Navier-Stokes, dans la formulation ALE, il faut remplacer la vitesse de convection du fluide \mathbf{v} par la vitesse convective \mathbf{c} . Le fluide étant isotherme et à masse volumique constante, l'équation de conservation de la masse n'est pas modifiée. Par contre, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_x + \rho(\mathbf{c} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - \mu_f \Delta \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} \quad (1.33)$$

Le choix de la formulation n'a d'influence que sur les deux premiers termes alors que les trois derniers sont écrits en formulation eulérienne. De plus, la méthode ALE est bien un mélange des formulations lagrangienne et eulérienne puisque les équations sont retrouvées lorsque respectivement la vitesse convective du maillage \mathbf{c} , est nulle (la vitesse matérielle et la vitesse du maillage sont identiques), ou la vitesse du maillage \mathbf{v}_m est nulle (la vitesse convective du maillage est identique à la vitesse matérielle).

Les équations de Navier-Stokes sont donc exprimables dans le formalisme ALE. Cependant, les déplacements du maillage ne sont pas des données d'entrée. Ces inconnues supplémentaires doivent être déterminées en résolvant une équation supplémentaire. Cette résolution doit être la plus performante possible puisque cette mise à jour du maillage est à faire à chaque pas de temps. L'algorithme de résolution a donc une grande influence sur les performances de la méthode ALE.

Deux types de gestion sont fréquemment utilisés pour la vitesse du maillage afin d'optimiser (temps versus précision des calculs) le maillage : l'adaptation ou la régulation du maillage.

La première consiste à déplacer les nœuds vers les zones à fort gradient de solution. Ce déplacement ne change pas le nombre de nœuds et donc la table des connectivités. Ainsi, les opérations algébriques (telles que celles utilisées pour construire les matrices tangente et de masse, par exemple) ne sont pas modifiées et les temps de calcul ne sont pas augmentés. Une fonction erreur est calculée et le maillage est adapté de façon à rendre cette fonction erreur distribuée équitablement sur le domaine. Cette fonction erreur peut être, par exemple, le saut d'une variable entre deux éléments [Donea et al., 2004].

La seconde méthode propose, avec les mêmes avantages, de déplacer les nœuds du maillage pour minimiser l'erreur due à la discrétisation. Le suivi de la frontière par des marqueurs lagrangiens permet de séparer les degrés de liberté du système entre ceux qui sont purement lagrangien (solide) et ceux purement eulérien (fluide) [Liu & Chang, 1984]. Cette technique a été améliorée par [Huerta & Liu, 1988] en permettant, par l'ajout d'une équation sur la frontière, de ne pas résoudre d'équation dans le solide. Les maillages du solide et de la frontière sont connus et le maillage de la partie fluide peut être calculé par différentes méthodes comme le "transfinite mapping", le "Laplacian smoothing" ou le lissage de maillage. Ces méthodes sont décrites dans [Donea et al., 2004].

L'imposition des conditions à la frontière va permettre de modéliser la physique de l'écoulement. Ainsi, le contact fluide/structure est de type collant, il n'y a donc pas de vitesse relative entre le fluide à proximité du solide et le solide lui-même. Il y a également continuité des pressions, ainsi la pression dans le fluide permet de connaître la contrainte extérieure au

solide. Numériquement, la prise en compte de ces conditions de continuité est simple et naturelle puisque les conditions aux limites s'appliquent toujours sur le même groupe de nœuds appartenant à l'interface. C'est sur ce dernier que les conditions de type Dirichlet, Neumann ou Robin s'appliquent.

Dans le cas particulier d'un écoulement autour d'un cylindre rigide et mobile, des études expérimentales [Williamson & Roshko, 1988] montrent que le déplacement du cylindre sous certaines sollicitations peut aller jusqu'à une fois son diamètre D . Afin de s'approcher de conditions de modélisation les plus précises possibles, il faut que la première couche de nœuds soit à une distance de $0,001D$ de la frontière [Franke et al., 1990]. La problématique du remaillage est donc inévitable. Cette étape de remaillage est très coûteuse en temps de calcul, et d'autant plus lorsque des problèmes en trois dimensions sont considérés.

La méthode ALE est une des méthodes les plus utilisées pour résoudre les problèmes en IFS. Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se référer aux nombreux travaux disponibles dans la littérature [Hirt et al., 1997; Hughes et al., 1981; Longatte et al., 2003]. Il existe d'autres méthodes à grille fixe pour la résolution des problèmes en IFS. Cependant, le fait que le maillage ne suive pas l'interface nécessite l'introduction d'une variable supplémentaire afin de distinguer les domaines solide et fluide au sein des équations et de suivre leur évolution respective.

1.3.2 Méthode des marqueurs lagrangiens

Dans les problèmes d'IFS, il est fondamental d'avoir accès à l'évolution de l'interface entre le solide et le fluide. Il existe principalement deux méthodes : le suivi et la capture de l'interface. Le suivi consiste à mailler la frontière par des marqueurs lagrangiens sans masse [Hyman, 1984]. Ces marqueurs reliés entre eux par des éléments de type segment en 2D et triangle en 3D permettent une connaissance précise de la frontière au cours du temps et ce même, pour des interfaces de taille inférieure à une maille du maillage cartésien.

Ainsi, le marqueur lagrangien i de coordonnées \mathbf{x}_i est déplacé à la vitesse \mathbf{V}_i du fluide, obtenue par interpolation des vitesses nodales de la grille eulérienne. Ce déplacement se fait selon l'équation de transport :

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{V}_i \quad (1.34)$$

Il y a donc un transfert d'information d'une grille à l'autre, avec la problématique d'identifier l'élément dans lequel le marqueur lagrangien se situe.

L'équation de transport est intégrée pour simuler le déplacement de la frontière au cours du temps. Cette approche marqueur par marqueur doit respecter la conservation du volume pour les simulations d'écoulement à masse volumique constante. Cette conservation est testée et corrigée si besoin après l'étape de transport. Les marqueurs subissent alors un déplacement supplémentaire selon la normale à l'interface afin de respecter la conservation du volume.

Dans certains cas d'écoulement, les marqueurs advectés peuvent ne plus être uniformément répartis le long de l'interface. Il en découle dans le pire des cas une mauvaise représentation de la frontière. Il faut donc prévoir d'enlever des éléments ou d'en ajouter en modifiant la table des connectivités, selon des critères tels que le pas de l'élément de frontière comparé au pas du maillage ou encore la représentation de la valeur de la courbure locale. De même, si la distance entre deux marqueurs n'appartenant pas au même élément est inférieure à une certaine valeur "seuil" [Tavares et al., 2017], un changement de topologie doit avoir lieu. Ainsi,

si des marqueurs trop proches appartiennent à la même frontière, il y a alors rupture et la frontière est séparée en deux pour modéliser la division d'un domaine. A l'inverse, si des marqueurs trop proches sont de deux frontières distinctes, il y a coalescence, et les deux frontières n'en formeront plus qu'une. Dans tous les cas, les tables de connectivité doivent être remises à jour.

En conclusion, les grandes transformations d'interface peuvent entraîner la distorsion des marqueurs et contraindre les pas de discrétisation temporelle à de très faibles valeurs. Selon la finesse des maillages, l'étape de ré-homogénéisation des marqueurs le long de l'interface et la phase de correction peuvent être coûteuses en temps de calcul. Ces raisons font que les méthodes de capture de frontière peuvent être privilégiées.

1.3.3 Méthode de la Level-Set

La méthode de capture de frontière consiste à construire celle-ci par l'isovaleur d'une fonction scalaire telle que la densité, la fraction volumique ou la concentration de matière. Proposée par Osher et Sethian [Osher & Sethian, 1988], la méthode de la Level-Set (MLS) est une des méthodes les plus utilisées.

1.3.3.1 Equation de la fonction de la Level-Set

Cette méthode consiste à ajouter une information en chaque nœud d'un maillage pour décrire la position d'une interface Γ séparant deux domaines Ω_1 et Ω_2 . Pour ce travail de thèse, la méthode est présentée et appliquée pour des problèmes bidimensionnels. Mais l'extension à des géométries tridimensionnelles est directe et ne pose aucune difficulté particulière. L'ensemble des informations nodales supplémentaires peut être vu comme une courbe de niveau modélisée par une fonction régulière ϕ . L'interface Γ est, par choix, l'isovaleur nulle de la fonction ϕ [Osher & Sethian, 1988] telle que :

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \phi(\mathbf{x}) = 0\}$$

Une définition souvent utilisée pour la fonction Level-Set est la distance signée entre le point considéré et la frontière telle que :

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -d(\mathbf{x}, \Gamma) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma \\ +d(\mathbf{x}, \Gamma) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.35)$$

avec la fonction $d(\mathbf{x}, \Gamma)$, la distance entre le point de coordonnées \mathbf{x} et la frontière Γ . Ainsi la fonction ϕ est définie sur l'ensemble du domaine Ω ($\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$).

Par convention, le choix est fait de prendre $\phi(\mathbf{x})$ négative pour tout \mathbf{x} dans le domaine Ω_1 ($\forall \mathbf{x} \in \Omega_1, \phi(\mathbf{x}) < 0$), domaine modélisant la partie solide du problème. Par construction, le domaine Ω_2 est le domaine fluide et la valeur de sa fonction Level-Set est positive ($\forall \mathbf{x} \in \Omega_2, \phi(\mathbf{x}) > 0$).

Si le fluide a une vitesse \mathbf{u} , alors l'équation de transport :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1.36)$$

régit l'évolution de la fonction ϕ au cours du temps.

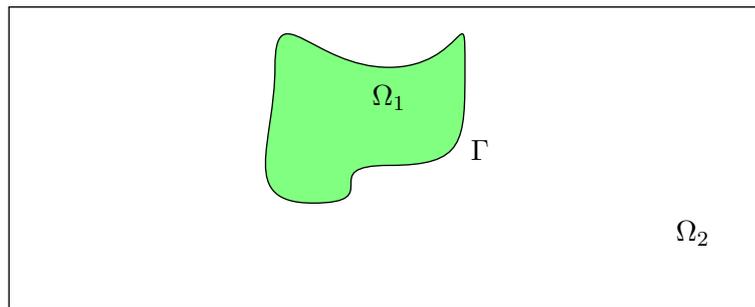


FIGURE 1.4 – Domaines solide Ω_1 et fluide Ω_2 séparés par la frontière Γ (selon la convention retenue dans cette thèse).

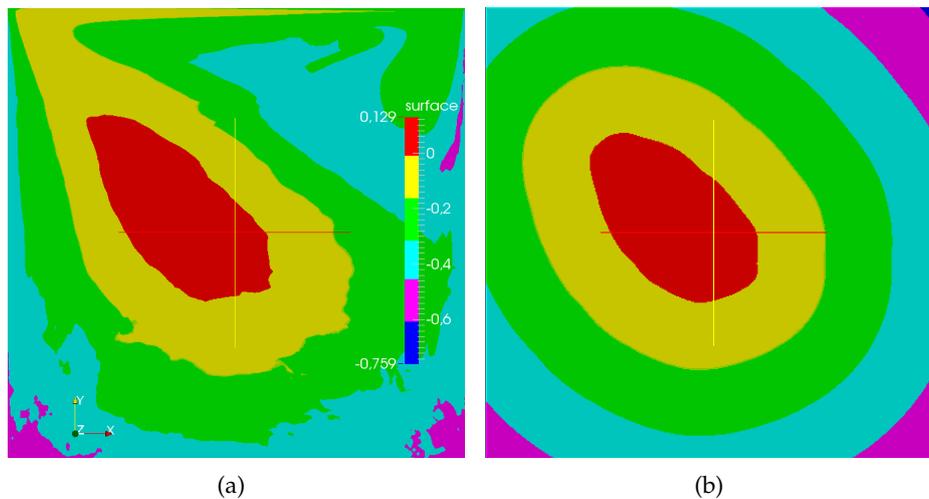


FIGURE 1.5 – Valeur de la fonction Level-Set avant (a) et après redistanciation (b) dans le cas d'une cavité entraînée avec une interface circulaire au centre du domaine.

La méthode de la Level-Set permet de capturer le déplacement de l'interface, ainsi que tous les changements topologiques [Osher & Fedkiw, 2001].

1.3.3.2 Propriétés de la Level-Set

L'utilisation de la distance signée comme fonction de la Level-Set offre une interprétation physique et visuelle de l'interface. Mais l'utilisation de l'équation de transport dans le cas d'un champ de vitesse \mathbf{u} non-constant entraîne un déplacement des isovaleurs avec des vitesses différentes au sein du domaine. Cette variation des vitesses pour une même courbe de niveau fait perdre la caractéristique de distance signée (voir figure 1.5(a)). Il faut donc réévaluer les valeurs de la fonction Level-Set dans le domaine avec l'équation eikonale :

$$|\nabla\phi| = 1 \quad (1.37)$$

Cette redistanciation s'appuie sur l'isovaleur nulle de la fonction Level-Set et réévalue les distances (figure 1.5(b)). Cette équation permet de conserver les propriétés de la fonction Level-Set définie par la distance signée et donc de pouvoir appliquer les propriétés de la Level-Set s'appuyant sur un champ de valeur linéaire.

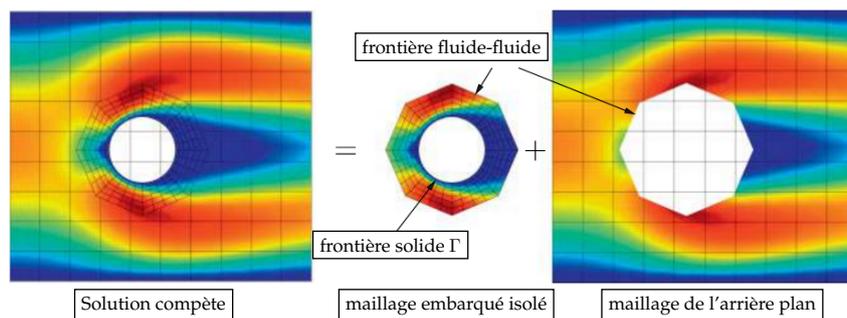


FIGURE 1.6 – Présentation schématique de la méthode XFEM. D'après [Shahmiri et al., 2011].

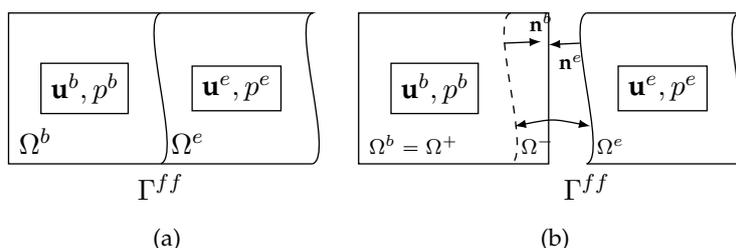


FIGURE 1.7 – Présentation des différents sous-domaines de la méthode XFEM. D'après [Shahmiri et al., 2011].

Parmi les propriétés de la Level-Set liées au choix de la fonction distance signée, le calcul de la normale unitaire sera utilisé par la suite. Ainsi la normale sortante \mathbf{n} du domaine Ω_1 est définie à l'interface par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|_{\phi=0}} \quad (1.38)$$

Cette expression est en accord avec la convention de signe (1.35) de la fonction Level-Set.

1.3.4 Méthode des éléments finis étendus (XFEM)

L'étape de remaillage de l'ensemble des nœuds est une étape longue et coûteuse en temps de simulation. Une solution consiste à utiliser un maillage fixe en arrière plan et un maillage embarqué fluide ceinturant le solide et suivant ses déformations et/ou déplacements (maillage embarqué isolé de la figure 1.6). La bordure extérieure du maillage embarqué délimite une région dans laquelle les éléments de la grille de fond sont désactivés. Cela est possible par l'utilisation de fonctions d'approximation étendues dans les éléments. Le maillage embarqué permet la prise en compte pour la frontière Γ avec le solide de conditions aux limites modélisant l'écoulement collant avec la même facilité que lors d'une simulation ALE. L'ajout d'un maillage embarqué nécessite de prendre en compte le couplage entre ce maillage et le maillage de fond. Ce couplage fluide-fluide à l'interface Γ^{ff} est basé sur une formulation qui permet d'assurer la continuité des contraintes (1.39a) au passage de l'interface ainsi que la continuité des vitesses (1.39b).

$$\begin{cases} \Sigma^b \mathbf{n}^b = -\Sigma^e \mathbf{n}^e & \text{sur } \Gamma^{ff} \\ \mathbf{u}^b = \mathbf{u}^e & \text{sur } \Gamma^{ff} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.39a) \\ (1.39b) \end{matrix}$$

La vitesse du fluide dans le domaine Ω^- (figure 1.7) est définie comme étant nulle. Cela

impose l'utilisation de fonctions d'approximation enrichies permettant d'annuler la solution. Une fonction vitesse discrétisée peut alors être définie par :

$$\mathbf{u}^{b,h}(\mathbf{x}, t) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_I^b(t) + \sum_J N_J(\mathbf{x}) \check{\Phi}(\mathbf{x}) \check{\mathbf{u}}_J^b(t) \quad (1.40)$$

avec la représentation nodale classique des degrés de liberté $\bar{\mathbf{u}}_I^b$, les degrés de liberté supplémentaires $\check{\mathbf{u}}_J^b$ sont multipliés par la fonction d'enrichissement $\check{\Phi}(\mathbf{x})$. L'exposant "h" indique la discrétisation de la fonction. Cette fonction représente la discontinuité entre les domaines Ω^+ et Ω^- . Elle est définie par la fonction de Heaviside :

$$\check{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega^+ \\ 0 & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$$

La fonction d'approximation enrichie est détaillée dans [Shahmiri et al., 2011; Yvonnet et al., 2008], le lecteur pourra y trouver des informations complémentaires.

Cette technique a permis de nombreuses études, comme la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre en 3D [Shahmiri et al., 2011] ou chargé en nanoparticules [Yvonnet et al., 2008].

1.3.5 Méthode des frontières immergées

En 1972, Peskin [Peskin, 1972] propose une méthode pour simuler les mécanismes cardiaques en utilisant une grille fixe, donc non-adaptée à la géométrie du cœur. Depuis, la méthode des frontières immergées MFI (Immersed Boundaries Method (IBM) en anglais) regroupe toutes les méthodes traitant d'un obstacle immergé dont certaines sont éloignées de la méthode originelle de Peskin. Elles répondent à certaines conditions : elles sont toutes utilisées sur une grille cartésienne et utilisent un terme de forçage.

Les applications de la méthode concernant les interactions fluide-structure seront détaillées dans ce manuscrit. Cependant, d'autres applications ont été développées pour modéliser des interactions liquide/liquide, liquide/gaz, ainsi que pour étudier le processus de solidification [Sussman et al., 1994; Tryggvason et al., 2001].

Comme il a été discuté précédemment, la gestion numérique de la frontière est un point délicat de l'IFS, en particulier l'imposition des conditions de non-glissement et de continuité des contraintes. La connaissance des numéros d'identification des noeuds composant la frontière comme en ALE permet de savoir sur quels noeuds les conditions de bord doivent être appliquées. Les MFI n'ayant pas cette possibilité, le terme de forçage joue ce rôle afin de prendre en compte les phénomènes d'interaction. Il y a de nombreuses techniques permettant la prise en compte de l'interface. Elles peuvent être classées en deux familles, selon qu'elles introduisent le terme de forçage avant ou après la discrétisation.

Ce chapitre a été construit selon le papier de Mittal et Iaccarino [Mittal & Iaccarino, 2005] présentant de façon très claire les différentes méthodes d'MFI.

Afin de distinguer ces deux familles, partons des équations de Navier-Stokes (présentées au chapitre 1.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p - 2\nu \mathbf{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (1.41a) \\ \mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (1.41b) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (1.41c) \end{array} \right.$$

La technique de forçage continu consiste à prendre en compte l'effet de la frontière par l'ajout d'une force \mathbf{f}_b dans l'équation (1.41a). Cette dernière peut donc se réécrire :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p - 2\nu \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} + \mathbf{f}_b$$

La discrétisation spatiale des équations (1.41) conduit à un système algébrique du type :

$$[\mathcal{L}(\mathbf{u})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{f}\} + \{\mathbf{f}_b\}$$

Avec $[\mathcal{L}(\mathbf{u})]$ l'opérateur discret des équations de Navier-Stokes, $\{\mathbf{U}\}$ les inconnues du problème, $\{\mathbf{f}\}$ le vecteur des forces extérieures et $\{\mathbf{f}_b\}$ le vecteur issu de la discrétisation du terme de forçage.

La technique du forçage discret ne prend en compte la frontière qu'une fois la discrétisation spatiale du domaine effectuée. Le système discrétisé de l'équation de (1.41) se présente sous la forme suivante :

$$[\mathcal{L}'(\mathbf{u})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{f}\}$$

Les termes de forçage sont alors ajoutés sur les nœuds choisis afin de prendre en compte l'interface et de la décrire le plus précisément possible. Le système discret devient :

$$[\mathcal{L}'(\mathbf{u})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{f}\} + \{\mathbf{r}_b\}$$

avec $\{\mathbf{r}_b\}$ le vecteur force provenant de l'imposition des conditions d'interface.

1.3.5.1 Forçage continu

Méthode de Peskin Dans la méthode proposée par Peskin, le flux de sang est modélisé par les équations de Navier-Stokes et les parois du cœur en action sont modélisées par des fibres élastiques dont la position est suivie par un marqueur lagrangien. Ce problème est discrétisé et résolu sur un maillage fixe.

L'interaction entre le fluide et les fibres est transmise par la contrainte mécanique (notée \mathbf{F}_k) et la déformation des fibres. Le comportement mécanique des fibres suit une loi constitutive du type loi de Hooke. La contrainte mécanique créée par les fibres élastiques sur le fluide est modélisée et prise en compte dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide par la force localisée \mathbf{f}_m telle que :

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{x}, t) = \sum_k \mathbf{F}_k(t) \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_k\|) \quad (1.42)$$

avec δ la fonction Dirac et \mathbf{X}_k les coordonnées du marqueur lagrangien (k). La grille fixe et les marqueurs lagrangiens n'étant pas coïncidents dans le cas général, il faut répartir la force sur le fluide environnant ; il faut donc que la force due à la k -ième fibre soit introduite comme une force volumique dans l'équation du fluide. Cette projection de la force sur plusieurs nœuds provoque un saut spatial dû à la fonction Dirac qui est par définition un opérateur de localisation ayant une très forte discontinuité spatiale. La fonction Dirac peut être discrétisée en une "approximation de la fonction Dirac" δ_h à l'aide d'une fonction continue par morceaux, d'une fonction trigonométrique ou de fonctions plus évoluées. Il s'agit d'un point crucial de la méthode [Mittal & Iaccarino, 2005], et explique les nombreuses propositions faites pour modéliser cette fonction (voir la figure 1.8).

Il est possible de modéliser un solide rigide avec la méthode de Peskin. On peut considérer le solide comme élastique avec des constantes d'élasticité, comme le module de Young,

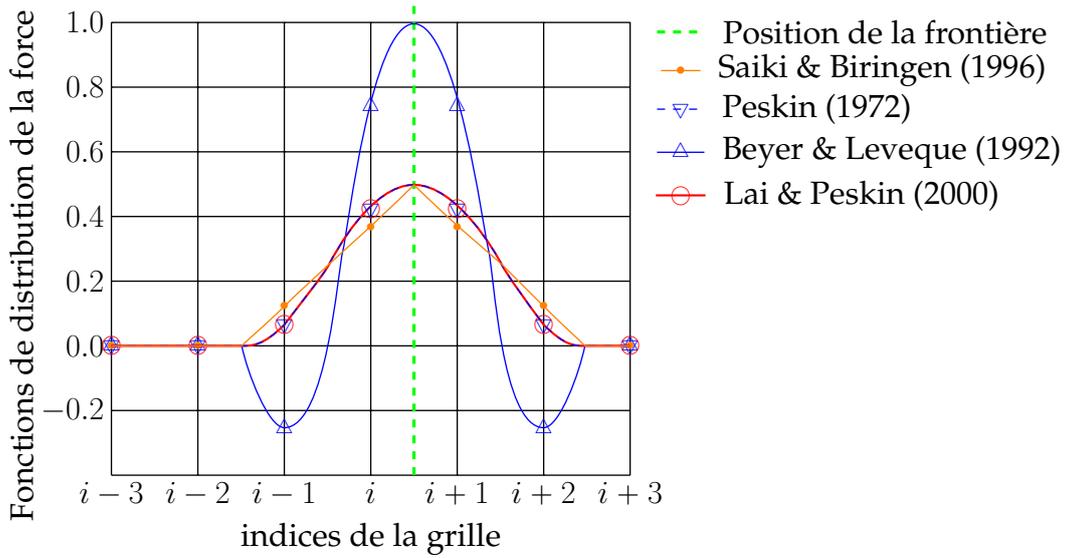


FIGURE 1.8 – Exemple en 1D de différentes approximations de la fonction Dirac. D’après [Donea et al., 2004].

très élevées. Il est également possible de remplacer la loi de comportement élastique par une loi modélisant le solide relié élastiquement à sa position d’équilibre. La force de rappel est alors définie par :

$$\mathbf{F}_k(t) = -\kappa(\mathbf{X}_k(t) - \mathbf{X}_k^e(t)) \quad (1.43)$$

avec κ la constante de raideur du ressort et \mathbf{X}_k^e la position du k -ième marqueur lagrangien à l’équilibre. Cette méthode est sensible au paramètre κ puisqu’une forte valeur implique un problème de stabilité [Mittal & Iaccarino, 2005], tandis qu’une faible valeur conduit à des effets élastiques incorrects.

D’autres modélisations sont possibles en utilisant la méthode de Peskin ou certains de ses raffinements. Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se référer à [Beyer & Leveque, 1992; Lai & Peskin, 2000].

Méthode de Pénalisation Peskin et Printz [Peskin & Printz, 1993] s’aperçoivent que, sous certaines conditions, le fluide passe entre les marqueurs lagrangiens et entraîne une non-conservation du volume. Cette fuite est due à l’opérateur utilisé pour l’équation de conservation de la masse qui altère le champ de vitesses. Ils ont alors proposé une solution pour construire un opérateur de divergence qui conserve mieux le volume. Sans cet opérateur, le solide est physiquement traversé par le fluide. Une autre solution pour assurer la conservation du volume est proposée par Arquis et Caltagirone [Arquis & Caltagirone, 1984]. Leur solution consiste à utiliser une seule et même équation en ajoutant un terme de pénalisation dépendant du milieu [Arquis & Caltagirone, 1984]. Le domaine est considéré comme un milieu poreux dont l’imperméabilité est très grande dans le solide et négligeable dans le fluide. Cette approche par porosité correspond dans le solide à l’équation de Brinkman pour laquelle on ajoute une force du type :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{K} \mathbf{u}$$

Conformément à [Angot et al., 1999], l’équation de Navier-Stokes / Brinkman peut s’écrire :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - 2\mu_f \text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{f} + \rho \frac{\chi_s}{K} \mathbf{u} \quad \text{dans } (\Omega)$$

avec K la perméabilité du milieu poreux supposé isotrope, dont la valeur tend vers zéro dans le solide et est infinie dans le fluide [Mittal & Iaccarino, 2005], et χ_s la fonction indicatrice du solide telle que :

$$\chi_s = \begin{cases} 1 & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

Dans cette modélisation, le solide est fixe. Cependant, l'étude de Arquis et Caltagirone [Arquis & Caltagirone, 1984] ouvre la voie d'un modèle prenant en compte le déplacement du solide. L'équation peut alors être réécrite :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - 2\mu_f \text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{f} + \rho \frac{\chi_s}{K} (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \times [0, T] & (1.44a) \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] & (1.44b) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } \Gamma \times [0, T] & (1.44c) \end{cases}$$

avec \mathbf{u}_b la vitesse que l'on souhaite imposer au fluide dans le solide. Cette vitesse, pour respecter une vitesse relative nulle entre le fluide et le solide, est également la vitesse du solide. Le système d'équations (1.44) représente les équations de Navier-Stokes pénalisées.

Angot *et al.* [Angot et al., 1999] proposent un autre type de pénalisation portant sur l'ensemble des termes linéaires. Cette pénalisation serait théoriquement plus efficace mais les résultats numériques sont en contradiction avec ce point [Angot et al., 1999]. De plus, l'obtention de la convergence de la méthode n'est pas garantie [Bost, 2008].

1.3.5.2 Forçage discret

Les méthodes MFI en forçage continu sont relativement simples à mettre en œuvre et les résultats qu'elles apportent à des nombres de Reynolds bas ou modérés sont pertinents. Cependant, l'approximation de la masse de Dirac provoque une frontière diffuse qui nuit à la modélisation fine des couches limites, zones d'origine de la perte de stabilité de l'écoulement lors du passage d'un régime stationnaire vers un régime instationnaire ou lors de la transition laminaire/turbulent. Les méthodes dont le terme de forçage est introduit après la discrétisation spatiale permettent de mieux définir les frontières et donc de palier à ces problèmes.

La méthode Ghost-Cell La première étape de la méthode est d'identifier, grâce à la frontière, les éléments solides qui ont au moins un voisin fluide. Ces éléments sont appelés les "éléments fantômes" (voir la figure 1.9). De même, les nœuds dont au moins un nœud voisin est dans le domaine fluide, sont identifiés et appelés "nœuds fantômes".

L'idée générale est d'établir une équation pertinente pour chaque nœud fantôme pour satisfaire de façon implicite les conditions d'interface de non-glissement. Il faut donc imposer $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b$ dans le solide et plus particulièrement sur sa frontière.

Fadlun *et al.* [Fadlun et al., 2000] sont les premiers à présenter cette technique. Ils utilisent une discrétisation par différence finie centrée. Cette approximation est restée la principale méthode de discrétisation spatiale lors de l'utilisation de la méthode Ghost-Cell (MGC). Les auteurs cités dans ce paragraphe utilisent tous cette technique.

Tseng et Ferziger [Tseng & Ferziger, 2003] présentent le cas le plus simple en 2D. Les principales étapes de la méthode sont rappelées ici. Dans un premier temps, on introduit la variable φ qui représente une inconnue nodale du problème (la méthode étant identique quelque soit la variable de l'écoulement considérée, une inconnue muette est utilisée). La MGC consiste

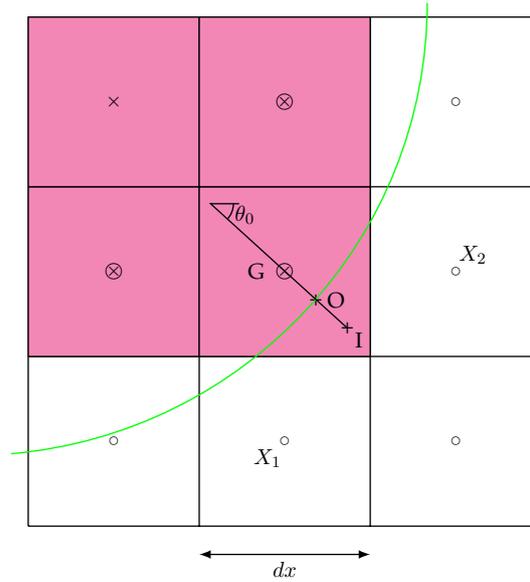


FIGURE 1.9 – L’isoligne zéro de la Level-Set (en vert) permet de distinguer les éléments solides (en magenta) des éléments fluides (en blanc). Les cellules fantômes ont leur nœud central représenté par un \otimes .

à déterminer la valeur φ pour le nœud fantôme G (voir figure 1.9) qui permet de respecter une vitesse relative nulle en O (voir figure 1.9), point où la condition d’interface doit être respectée. Ce point O peut être le milieu de la cellule ou tel que \vec{GO} soit normal à la frontière [Majumdar et al., 2001]. Tseng et Ferziger proposent que la valeur φ soit obtenue par extrapolation en utilisant les nœuds dans le voisinage de l’interface. L’approche la plus simple est de prendre les nœuds fluides les plus proches (X_1 et X_2) afin de minimiser les instabilités numériques [Tseng & Ferziger, 2003]. En 2D, une interpolation spatiale linéaire est un premier élément de réponse :

$$\varphi = c_0 + c_1x + c_2y \quad (1.45)$$

Les coefficients c_0, c_1 et c_2 sont déterminés en fonction de la variable φ définie sur les trois nœuds X_1, X_2 et O :

$$\{\mathbf{C}\} = [\mathbf{B}]^{-1}\varphi \quad (1.46)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}^T = \{c_0, c_1, c_2\} \\ \varphi^T = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\} \\ [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & x|_0 & y|_0 \\ 1 & x|_1 & y|_1 \\ 1 & x|_2 & y|_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{: vecteur des coefficients inconnus} \\ \text{: valeur de la variable aux points } O, X_1 \text{ et } X_2 \\ \text{: matrice d’interpolation de Vandermonde} \end{array}$$

Mais cette technique provoque des instabilités numériques lorsqu’un des points fluides est trop proche de l’interface. Deux solutions ont alors été proposées. La première est de déplacer localement l’interface afin qu’elle passe par le point G [Gibou et al., 2002]. La seconde [Majumdar et al., 2001] consiste à ne plus faire l’extrapolation entre les points X_1, X_2 et O pour trouver la valeur de la variable en G , mais de faire l’interpolation entre les points X_1, X_2 et O pour trouver la vitesse au point I , symétrique de G par rapport au point O (voir figure 1.9). De la valeur interpolée de φ_I , on en déduit $\varphi_G = 2\varphi_O - \varphi_I$.

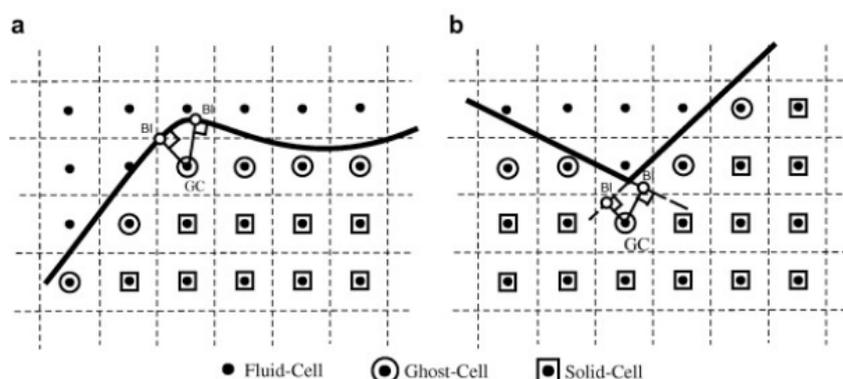


FIGURE 1.10 – Problème généré par la présence de points images multiples. D'après [Mittal et al., 2008].

Cette interpolation, présentée dans le cas 2D, peut être étendue au cas 3D. De plus, on peut utiliser des degrés d'interpolation plus élevés. Une autre alternative proposée par Majumdar *et al.* [Majumdar et al., 2001] consiste à obtenir la valeur de φ_I par une interpolation différenciée selon les directions normale et tangente à la frontière. Ainsi, en 2D et selon l'équation (1.47), une interpolation linéaire selon les directions tangentes (coordonnée t) et une interpolation quadratique selon la direction normale (coordonnée n) sont utilisées. Cette approche permet de ne pas négliger la physique des couches limites lorsque le nombre de Reynolds est grand. Cependant, ne pas prendre en compte les couches limites est acceptable pour les écoulements laminaires [Iaccarino & Verzicco, 2003].

$$\varphi = c_0 + c_1 n^2 + c_2 n t + c_3 n + c_4 t \quad (1.47)$$

Néanmoins, Mittal *et al.* ont mis en évidence que la recherche du point image pouvait mener à des incohérences lorsque le point image n'est pas unique (figure 1.10) et ont proposé un algorithme robuste pour résoudre ce genre de conflit [Mittal et al., 2008].

La démarche présentée permet d'imposer des conditions en vitesse de type Dirichlet. La même approche permet d'imposer des conditions de type Neumann. Dans ce cas, il faut chercher φ en X_1 et X_2 selon l'équation (1.45) mais la variable d'écoulement en O est [Hovnanian, 2012] :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(x|_O, y|_O) = c_1 \cos(\theta_0) + c_2 \sin(\theta_0) \quad (1.48)$$

L'équation (1.46), dont la matrice $[\mathcal{B}]$ a été adaptée, permet de calculer les coefficients de l'interpolation. Finalement, en associant les conditions de Dirichlet aux conditions de Neumann, il est possible de mettre en place des conditions "mixtes" de type Robin.

La méthode Cut-Cell Les MFI proposées précédemment sont présentées dans l'ordre selon lequel les méthodes minimisent la perte de volume. Cependant, cette fuite est due à l'altération de l'incompressibilité du champ de vitesse lors de l'interpolation. Il faut donc changer de méthode pour pouvoir garantir cette conservation stricte lorsque les conditions de l'écoulement ne permettent plus de négliger cette perte. La méthode Cut-Cell en volumes finis permet de satisfaire ce point [Ye et al., 1999].

Cette méthode introduite par Clarke *et al.* [Clarke et al., 1986] utilise une grille cartésienne. La description des variables de l'écoulement s'effectue au centre de la maille (grille

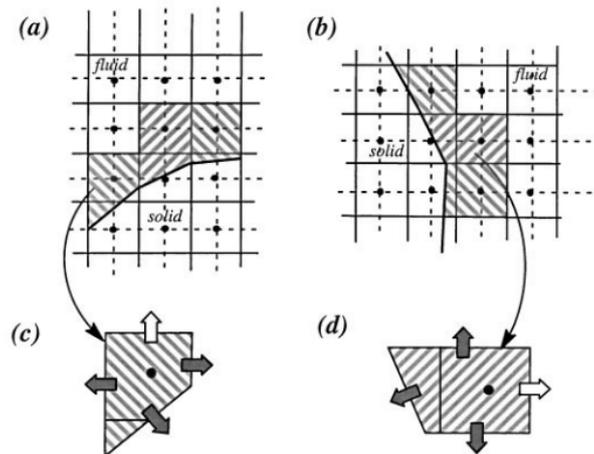


FIGURE 1.11 – Exemple de remodelage des cellules coupées par la frontière selon la méthode Cut-Cell (d’après [Ye et al., 1999]).

colocalisée) ou non (grille décalée ou grille MAC). La méthode Cut-Cell (ou méthode à grille cartésienne) est décrite dans le cas d’une grille colocalisée bidimensionnelle selon la procédure de Ye *et al.* [Ye et al., 1999].

Les mailles coupées par la frontière sont identifiées. Les intersections de l’interface et des faces de l’élément sont identifiées. La frontière peut alors être vue comme une courbe continue par morceaux constituée par un ou plusieurs segments de droite. L’étape suivante consiste à remodeler les cellules coupées, il y a alors deux possibilités. Soit le centre de la cellule est dans la partie fluide et la cellule est tronquée de sa partie solide. Soit le centre est dans le solide et, dans ce cas, la partie fluide de la cellule est absorbée par une cellule fluide voisine. Il en résulte que les cellules ont à présent des formes trapézoïdales.

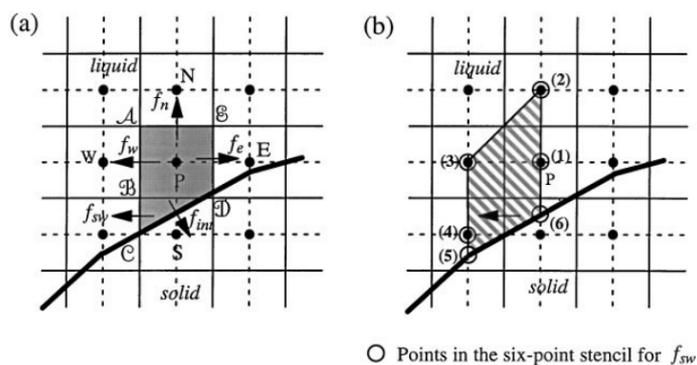
Malgré la variabilité des dimensions et des orientations des faces du trapèze, il faut calculer les flux (masse, convection, diffusion et gradient de pression) au travers des mailles. Cette étape est cruciale puisqu’elle ne doit pas faire chuter la précision globale de la méthode et qu’elle concerne, en général, les zones de couches limites où prennent naissance les instabilités de l’écoulement. Dans une partie purement fluide, les flux et le gradient de pression entre les mailles se calculent à l’interface par une approximation linéaire. Ce n’est plus aussi simple pour les faces du trapèze dont le centre ne coïncide pas avec le centre de la cellule (cas des flux représentés par une flèche grisée sur la figure c et d de 1.11). La solution proposée est d’utiliser, pour toute variable φ de l’écoulement, une interpolation polynomiale en prenant des points de référence bien choisis : deux centres de mailles de chaque côté de l’interface sur laquelle le flux est recherché (les points 3 et 4 en aval de $f_{[SW]}$ et 1 et 2 en amont sur la figure 1.12(b)), et les points de frontières (points 5 et 6 sur la fig. 1.12(b)).

Pour une interpolation quadratique, la variable d’écoulement φ est donnée par (1.49) pour les six points utilisés et les valeurs sont stockées dans le vecteur $\varphi^T = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6\}$.

$$\varphi(x, y) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2 + c_5y^2 \quad (1.49)$$

Il faut alors résoudre le système (1.50) pour obtenir les valeurs des coefficients permettant de calculer le flux f_{SW} .

$$\{C\} = [C]^{-1}\varphi \quad (1.50)$$



○ Points in the six-point stencil for f_{sw}

FIGURE 1.12 – (a) recherche du flux f_{sw} ; (b) points utilisés pour l'interpolation (d'après [Ye et al., 1999]).

$$\text{avec } [C] = \begin{bmatrix} 1 & x|_1 & y|_1 & x|_1 y|_1 & x^2|_1 & y^2|_1 \\ 1 & x|_2 & y|_2 & x|_2 y|_2 & x^2|_2 & y^2|_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x|_6 & y|_6 & x|_6 y|_6 & x^2|_6 & y^2|_6 \end{bmatrix}$$

Ye *et al.* [Ye et al., 1999] ont utilisé cette technique pour de nombreux types d'écoulement (cylindre dans un écoulement infini ou confiné, réseau de cylindres disposés de façon aléatoire, pâles de turbine en série). Udaykumar *et al.* [Udaykumar et al., 2001] propose une adaptation de la méthode pour un solide en mouvement dans un écoulement.

Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter différentes méthodes pour la prise en compte de l'interaction fluide structure. Le choix qui est fait pour la suite doit permettre de répondre aux objectifs de modélisation : modélisation de structure (solide) mobile soumise à des sollicitations de type VIV, étude des instabilités (stationnaire ou périodique) du fluide en interaction avec un solide éventuellement déformable. Ces deux objectifs doivent être atteints en 2D ou en 3D par la méthode des éléments finis. Ces objectifs de modélisation sont couplés à des objectifs sur les méthodes numériques : les calculs doivent utiliser la MAN et être économe en temps et en place mémoire.

Le premier choix porte sur une grande classe de modélisation : grille fixe ou mobile. Si la méthode ALE permet de simuler avec précision les interactions fluide structure, y compris pour les structures se déplaçant, elle nécessite dans ce cas une étape de remaillage dont le coût en terme de temps de calcul est important en 2D, et devient prépondérant en 3D. Au sein des techniques à grille fixe, la méthode XFEM offre une modélisation précise des phénomènes que l'on veut étudier. Cependant, les projections entre le maillage embarqué et le maillage de base peuvent avoir un coût non-négligeable. De plus, si le solide se déforme, le maillage embarqué doit être actualisé et des problématiques de remaillage ou d'adaptation du maillage peuvent se poser. La méthode Cut-Cell semble être une gageure à coder en 3D et n'est donc pas retenue pour cette étude. La méthode de pénalisation est réputée pour être simple à implémenter et permet de modéliser des structures mobiles dans des écoulements tout en garantissant une précision globale d'ordre 2. Cependant, elle est également connue pour ne pas garantir la conservation de la matière, surtout pour les écoulements à haut nombre de Reynolds. Nos simulations

étant pour des nombres de Reynolds faibles à modérés, cette modélisation est acceptable. Une discrétisation spatiale par éléments finis crée une distinction entre éléments fluides et solides. Cette distinction naturellement 'binaire' conduit à représenter l'interface fluide/solide par une ligne discontinue (frontière en escalier). Pour améliorer cette représentation, la méthode Ghost-cell va être ajoutée. Ainsi, la condition de non-glissement sera placée précisément à la frontière sans dépendance à la position du maillage.

Les modélisations qui ont été retenues utilisent une information supplémentaire pour connaître la position du/des solides. Cette information vient de la méthode de suivi ou de capture de la frontière. La méthode de capture de frontière et plus particulièrement la méthode de la Level-Set va être utilisée. Cependant, la technique des marqueurs lagrangiens est aussi utilisée car elle présente l'avantage d'être facile d'emploi pour décrire la présence d'un solide indéformable immobile ou en mouvement forcé. Ceci n'est plus le cas lorsqu'il faut suivre l'obstacle en déplacement libre car la technique réclame alors des temps de calcul prohibitifs [Tanguy et al., 2004].

Dans les prochains chapitres, des propositions pour associer toutes ces méthodes aux méthodes d'analyse de bifurcation sont formulées.

Deuxième partie

Techniques numériques

2

Méthodes numériques pour l'analyse de bifurcation

Comme il a été évoqué dans l'introduction, de nombreux types de bifurcation existent. Et parfois pour un même modèle, différentes instabilités apparaissent à différentes valeurs du nombre de Reynolds. Il est donc important de pouvoir les détecter et les distinguer.

Une instabilité est physiquement observable grâce à la transition entre un régime stable ou symétrique ou stationnaire ou laminaire qui devient, lors de l'augmentation du paramètre de contrôle, respectivement instable, asymétrique, instationnaire ou turbulent. Cette observation ne montre que le passage d'un état à l'autre. La vision plus mathématique de l'instabilité linéaire est l'apparition de valeur(s) propre(s) particulière(s) de la matrice Jacobienne de l'équation régissant le phénomène.

La distinction du type d'instabilité rencontrée est donnée par la typographie des valeurs propres (une seule valeur propre positive, un couple de valeurs propres purement imaginaires...).

Deux types de bifurcations sont étudiés dans cette thèse. Les bifurcations stationnaires simples, et plus particulièrement celles entraînées par une perte de symétrie de l'écoulement. Le second type de bifurcation étudiée est de type Hopf. Pour détecter ces instabilités, largement étudiées, des techniques numériques spécifiques doivent être choisies. Il est à remarquer cependant que quelque soit le type d'instabilité étudiée, les méthodes numériques utilisées appartiennent toutes à deux familles de méthodes : directes ou indirectes. Les méthodes directes consistent à résoudre un système d'équations non linéaires dont les solutions sont les points de bifurcation. En général, la méthode utilisée est une méthode de Newton. Les méthodes directes permettent d'obtenir des valeurs exactes (à une qualité de résidu près) des paramètres critiques de l'écoulement. En général, ce n'est pas le cas des méthodes dites indirectes, qui permettent d'estimer ces paramètres critiques. Pour cette dernière famille de méthodes, citons par exemple le suivi d'un indicateur (déterminant de la matrice tangente, plus petite valeur réelle d'une valeur propre de la matrice Jacobienne, indicateur de bifurcation...). Grâce à ces techniques, un encadrement des paramètres critiques est obtenu. Le calcul des valeurs exactes nécessite souvent des temps de calculs importants.

Dans le cas de la bifurcation stationnaire, le diagramme de bifurcation s'appuie sur les techniques de continuation de branches solutions [Cadou, 1997; Cochelin, 1994; Jawadi et al., 2013], de détection de bifurcation [Cochelin & Medale, 2013], de calcul des branches tangentes émanant du point de bifurcation [Medale & Cochelin, 2015; Vannucci et al., 1998]. Ces techniques ont été utilisées avec succès dans la recherche de points de bifurcation stationnaire d'écoulement en deux dimensions [Guevel et al., 2011] ou en trois dimensions [Guevel et al., 2017; Medale & Cochelin, 2015]. Ces techniques sont à classer dans la famille des méthodes in-

directes. Cependant, contrairement par exemple à des techniques telles que celles qui consistent à détecter le changement de signe du déterminant de la matrice tangente, ces méthodes basées sur les techniques de perturbation conduisent à des valeurs précises des paramètres critiques de l'écoulement.

La détection numérique des instabilités de Hopf est habituellement réalisée de plusieurs manières : par l'analyse des valeurs propres et suivi de celles-ci, par l'utilisation d'un indicateur [Ben Saadi, 1995; Cadou, 1997], par la résolution d'un système non-linéaire prenant en compte l'équation stationnaire, et les équations dynamiques complexes [Jackson, 1987], par analyse de type Stuart-Landau des écoulements post-bifurqués [Schumm et al., 1994; Sohankar et al., 1998], par une étude de la stabilité asymptotique au cours du temps (écoulement perturbé qui tend vers un retour à sa stabilité ou non) [Agnaou et al., 2016], par la résolution du problème instationnaire [Goodrich et al., 1990]. Ces techniques n'utilisent pas les mêmes outils pour déterminer les paramètres critiques à la bifurcation. Dans la partie consacrée à l'analyse de bifurcations de Hopf, les deux grandes familles de méthodes utilisées seront décrites en détail. On peut cependant remarquer que dans cette thèse, le calcul de points de bifurcation de Hopf est réalisé en associant une méthode indirecte (un indicateur de bifurcation) et une méthode directe (résolution d'un système d'équations non linéaires grâce à une méthode de Newton). Nous qualifierons par la suite cette association comme méthode hybride.

2.1 Analyse de bifurcation stationnaire

L'analyse de bifurcation stationnaire est la recherche du paramètre de charge (nombre de Reynolds) au-delà duquel l'écoulement perd par exemple sa symétrie. Pour ce faire, l'équation de Navier-Stokes est résolue pour déterminer la branche solution stationnaire. Parallèlement, des algorithmes de recherche de singularité sont utilisés pour déterminer leur apparition le long de cette branche solution.

La première étape est donc de partir d'un point initial solution et de mettre en place une méthode de continuation. Classiquement, une méthode de type prédicteur-correcteur (MPC) est utilisée pour la résolution des équations stationnaires de Navier-Stokes [Dijkstra et al., 2014; Seydel, 2009]. La prédiction est réalisée par le couplage d'un prédicteur dans la direction tangente à la solution connue et la technique de type longueur d'arc (par exemple la méthode de Riks [Riks, 1979]). Cette dernière permet une meilleure prédiction dans le cas de point limite mais la longueur est choisie *a priori*, ce qui peut poser problème dans certains cas. Il faut par exemple choisir une longueur suffisamment faible pour garantir la convergence de la méthode. La solution obtenue grâce à la prédiction est corrigée par une méthode de type Newton. Par calculs successifs, la solution va s'approcher de la solution du problème non-linéaire. L'association de la prédiction correction permet d'obtenir une suite de points solutions.

Ensuite, à chaque pas de continuation il est possible de chercher les valeurs critiques auxquelles apparaissent les phénomènes instables ou asymétriques. Pour cela, différentes techniques peuvent être mises en place. Une recherche de la singularité en utilisant les propriétés des valeurs propres à la bifurcation est une possibilité. Il est alors nécessaire de calculer les valeurs propres de la matrice tangente associée au problème [Alleborn et al., 1997]. Une autre méthode de recherche indirecte de la bifurcation est la méthode de l'indicateur. Celle-ci a été utilisée à de nombreuses reprises et correspond en une recherche particulière de valeurs propres [Cadou et al., 2012; Guevel et al., 2011].

Une autre technique, répondant à la définition de stabilité asymptotique, consiste à perturber le système dont le régime est établi pour une valeur du nombre de Reynolds. L'écou-

lement va retrouver son équilibre sur la branche la plus stable pour ce nombre de Reynolds. Si l'écoulement est modifié, la valeur critique du nombre de Reynolds est dépassée [Huang & Hwang, 2010]. Cette technique nécessite une résolution temporelle pour chaque régime testé, elle est donc très coûteuse en temps de calcul.

Les méthodes asymptotiques numériques sont une alternative aux méthodes de prédiction-correction pour calculer les branches solutions et présentent l'avantage de déterminer les solutions de manière continue [Cochelin, 1994]. Elles utilisent également une méthode de type longueur d'arc mais sa longueur est calculée *a posteriori*, lui assurant une plus grande flexibilité dans la taille des pas. Enfin cette méthode de continuation peut être aisément couplée au calcul de l'indicateur de bifurcation. La continuité de l'indicateur et des solutions permet d'obtenir une valeur précise du nombre de Reynolds à la bifurcation. Une autre technique proposée par Cochelin et Médale [Cochelin & Medale, 2013] utilise les informations déjà calculées pour le calcul de la continuation pour trouver la valeur critique, le type de bifurcation et les tangentes aux branches post-bifurquées. Cette technique repose sur l'analyse du comportement de la solution polynomiale au voisinage d'une bifurcation. En effet, le domaine de validité de cette dernière est limité par le rayon de convergence qui est en quelque sorte la distance à la première singularité du problème (point de bifurcation, point limite, ...). Ainsi lorsque la solution MAN approche un point singulier, une accumulation de pas est constatée. Dans leur article [Cochelin & Medale, 2013], les auteurs ont montré que la série originale était composée de deux séries : une première représentant une solution "propre" (ne contenant pas de pollution relative à la présence de la singularité) et une seconde qui pour une bifurcation stationnaire est une suite géométrique. Les auteurs ont également montré que la raison de cette suite géométrique est exactement l'inverse de la distance au point singulier. Une simple analyse des termes de la série originale permet d'accéder aux paramètres critiques de l'écoulement (nombre de Reynolds, champs de vitesses...). Cette technique peut être considérée comme une méthode indirecte au sens où elle ne résout pas un problème non linéaire dont la solution est exactement la solution à la singularité. Elle permet cependant d'obtenir des valeurs "exactes" des paramètres critiques.

2.2 Détection d'une bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf caractérise la transition entre une solution stationnaire stable et une solution périodique en temps. D'un point de vue mathématique, cette instabilité se produit lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées, de l'opérateur tangent du problème étudié, traversent l'axe des imaginaires (figure 2.1).

Numériquement, la recherche d'une bifurcation de Hopf consiste en la recherche d'une solution au problème dynamique de la forme $\mathbf{U} = \mathbf{U}_s + (\mathbf{U}^R + i\mathbf{U}^I) \cdot e^{i\omega t}$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = G(\mathbf{U}, \lambda) \quad (2.1)$$

où \mathbf{U}^R et \mathbf{U}^I désignent les parties réelle et imaginaire de l'inconnue et ω désigne la pulsation de l'écoulement périodique.

Soit $(\mathbf{U}_c, \lambda_c)$ un point stationnaire, solution de :

$$G(\mathbf{U}_c, \lambda_c) = 0 \quad (2.2)$$

Notons les n valeurs propres ζ_k de la Jacobienne du système (2.1) de la façon suivante :

$$\zeta_k(\lambda) = \alpha_k(\lambda) + i\beta_k(\lambda) \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.3)$$

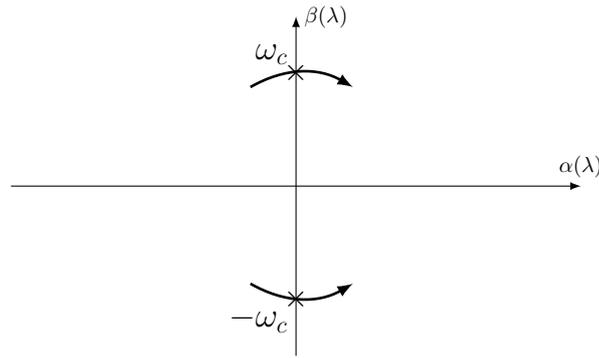


FIGURE 2.1 – Schéma de l'évolution des valeurs propres dans le plan complexe lors d'une bifurcation de Hopf.

S'il existe une valeur de λ_c telle que :

$$\begin{cases} \zeta_1(\lambda_c) = \bar{\zeta}_2(\lambda_c) = i\omega_c & (2.4a) \\ \alpha_i(\lambda_c) < 0 \quad i \in \llbracket 3, n \rrbracket & (2.4b) \\ \frac{d\alpha_1(\lambda_c)}{d\lambda} \neq 0 & (2.4c) \end{cases}$$

Alors le point $(\mathbf{U}_c, \lambda_c)$ est un point de bifurcation de Hopf. Il y a alors naissance d'un cycle limite périodique en temps de pulsation ω_c . Les grandeurs caractéristiques de l'écoulement peuvent être définies sous la forme de nombres adimensionnels, nombre de Reynolds Re_c et nombre de Strouhal St_c , par les relations suivantes :

$$Re = \frac{\rho u_x D}{\mu} \quad (2.5)$$

$$St = \frac{\omega D}{2\pi u_x} \quad (2.6)$$

où u_x désigne la composante horizontale de la vitesse au point considéré

Il est à noter que sur le diagramme figure 2 présentant une bifurcation de Hopf, et contrairement au diagramme figure 3 présentant une bifurcation stationnaire, il n'y a pas coexistence de plusieurs solutions stationnaires. Pour une valeur du nombre de Reynolds Re , il y a une solution stationnaire pour $Re < Re_c$ et une seule solution périodique en temps pour $Re > Re_c$.

2.2.1 Méthode directe

La recherche d'une bifurcation de Hopf par une méthode directe (en général, par un algorithme de Newton ou une méthode de point fixe) consiste à résoudre le problème non-linéaire suivant :

$$H(\mathbf{U}^s, \mathbf{U}^R, \mathbf{U}^I, \omega, \lambda^s) = \begin{bmatrix} R(\mathbf{U}^s, \lambda^s) \\ \frac{\partial R}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^R + \omega \mathbf{U}^I \\ \frac{\partial R}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^I - \omega \mathbf{U}^R \\ N(\mathbf{U}^R, \mathbf{U}^I) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

dans lequel \mathbf{U}^s et λ^s désignent, respectivement, le champ de vitesse/pression et le paramètre de contrôle (équivalent au nombre de Reynolds) qui sont solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires. Comme le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, deux conditions de normalisation sont ajoutées (notées symboliquement $N(\mathbf{U}^R, \mathbf{U}^I)$ dans les équations (2.7)).

Le problème non-linéaire (2.7) est obtenu grâce à une méthode de perturbation (stabilité linéaire). La solution du problème précédent est généralement obtenue par une méthode itérative telle que celle de Newton dont la convergence dépend fortement des valeurs initiales.

De plus, le calcul par cette méthode peut être long. En effet, la taille du système à résoudre est trois fois plus importante que celle du système stationnaire. Le temps demandé pour la factorisation de l'opérateur tangent associé au problème (2.7) est égal à 27 fois le temps requis pour la factorisation de l'opérateur associé au problème stationnaire (dans le cas d'une discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes). Une amélioration du processus est obtenue par [Jackson, 1987] qui propose d'effectuer la résolution du système linéaire obtenu par la méthode de Newton en utilisant des étapes de substitution. Ceci conduit à la résolution de deux systèmes linéaires, dont les tailles sont respectivement égale et double à celle du problème stationnaire. Les temps de factorisation de ces matrices étant moindres, le temps de calcul d'une itération de la méthode de Newton est donc moins important que lorsque l'on résout numériquement le problème défini par les équations (2.7). Malgré cette amélioration, les temps de calcul pour déterminer précisément une bifurcation de Hopf restent importants et dépendent fortement de la solution initiale.

2.2.2 Méthode indirecte

La méthode indirecte consiste à suivre, au moyen d'un indicateur (déterminant de la matrice tangente, fonction scalaire additionnelle...), l'évolution des valeurs propres de l'opérateur tangent le long de la branche solution stationnaire et d'identifier pour quel(s) nombre(s) de Reynolds deux des valeurs propres traversent l'axe des imaginaires.

Cette technique, employée en général avec des systèmes discrets à grands nombres d'inconnues (et, dans le cadre de la mécanique des fluides, avec des opérateurs non-symétriques), génère des calculs potentiellement prohibitifs [Jackson, 1987] : il faut, pour chaque solution stationnaire, calculer les valeurs propres de l'opérateur tangent du système augmenté et vérifier si un couple de ces valeurs propres a traversé l'axe des imaginaires.

Une méthode alternative et basée sur la MAN introduite progressivement par [Ben Saadi, 1995; Cadou, 1997; Tri, 1996], consiste à ajouter une fonction réelle scalaire au second membre des équations de Navier-Stokes instationnaires. Rechercher une bifurcation de Hopf revient à déterminer les paramètres de l'écoulement pour lesquels cette fonction s'annule. La fonction scalaire étant une inconnue supplémentaire, une condition de normalisation est ajoutée afin d'obtenir un problème bien posé.

Proposée dans sa forme initiale, cette méthode est identique au suivi des valeurs propres en terme d'efforts de calculs : pour chaque solution stationnaire, il faut calculer l'évolution d'un indicateur en fonction de la pulsation et s'assurer qu'il soit nul. Procéder à l'analyse de bifurcation réclame donc de lancer un grand nombre de calculs (pour de nombreuses valeurs du nombre de Reynolds) et d'identifier le nombre de Reynolds critique Re_c correspondant à la valeur d'indicateur la plus proche de zéro.

Une amélioration de ce procédé consiste à mieux exploiter les informations contenues dans l'indicateur de bifurcation. Cette amélioration a conduit aux travaux [Brezillon et al., 2010;

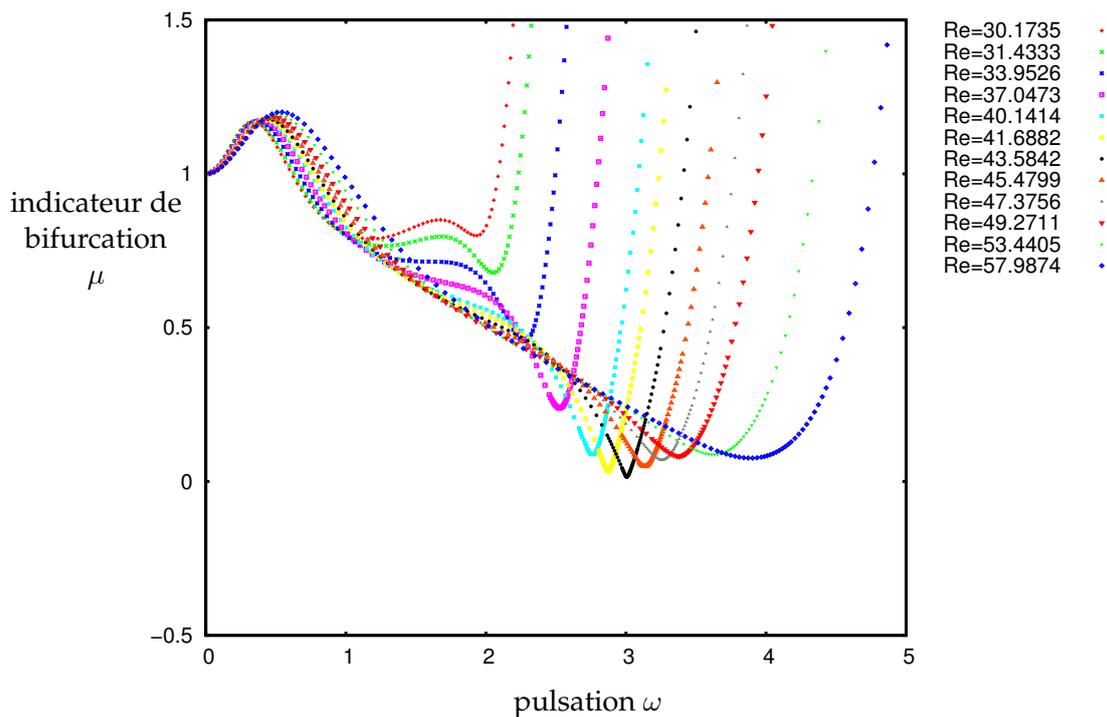


FIGURE 2.2 – Courbe de l'indicateur de bifurcation de Hopf pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds.

Girault et al., 2012] et à l'élaboration de la méthode hybride. Cette dernière consiste à coupler la méthode directe à la méthode de l'indicateur.

2.2.3 Méthode hybride

La méthode hybride propose de calculer un indicateur de bifurcation en fonction de la pulsation ω pour une solution stationnaire \mathbf{U}_s obtenue à une valeur du nombre de Reynolds Re (voir figure 2.2). Ce calcul n'a que peu de chance d'être évalué à la valeur du Reynolds critique Re_c . La recherche des valeurs minimales de l'indicateur donne une pulsation ω_i pouvant être au voisinage de la pulsation critique. Les grandeurs de l'écoulement sont évaluées à la valeur ω_i de la pulsation. Ces champs, le paramètre de contrôle et la pulsation sont introduits ensuite comme point initial pour résoudre le système (2.7) par une méthode itérative. A la convergence, la vitesse \mathbf{U}_c , les modes réel \mathbf{V}_c^R et imaginaire \mathbf{V}_c^I , le paramètre de contrôle λ_c et la pulsation ω_c sont obtenus.

Conclusion

Dans cette thèse consacrée à la résolution numérique d'un problème d'IFS, la méthode numérique retenue pour déterminer précisément les points de bifurcation de Hopf est la méthode hybride (couplage indicateur de bifurcation et méthode directe). En effet, cette dernière permet de déterminer de manière automatique (sans analyse de l'utilisateur) les valeurs critiques des nombres de Reynolds et de Strouhal.

Cette méthode est également choisie car les temps de calculs demandés sont plus faibles

que les autres techniques.

Les étapes et les explications dans le cadre spécifique à l'IFS seront données à la section 4.5.

3

Résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires

L'analyse des bifurcations permet de connaître les points critiques pour lesquels les écoulements changent. Les écoulements post-critiques, dans le cas de la bifurcation stationnaire, peuvent être simulés par suivi de branche en partant du point critique. En revanche, dans le cas de bifurcation de Hopf, une technique différence est nécessaire pour suivre l'écoulement à des régimes d'écoulement supérieur au nombre de Reynolds critique Re_c . En effet, l'écoulement devient périodique en temps, il est donc nécessaire de le prendre en compte dans la simulation. Cette prise en compte a une conséquence sur le coût en temps de calcul. Ainsi une partie de la recherche porte sur le matériel et les logiciels qui optimisent le temps de calcul par la parallélisation des tâches sur plusieurs processeurs. Un autre axe de recherche est l'utilisation de modèles réduits. Ainsi, la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) [Allery et al., 2004] ou la Proper Generalized Decomposition (PGD) [Chinesta et al., 2011] permettent de réaliser des simulations sur des modèles de taille réduite, tout en gardant les principales (au sens de l'énergie) structures de l'écoulement.

Un autre point limitant est la stabilité du schéma numérique, stabilité d'autant plus dure à assurer que les équations sont non-linéaires. Lors de la résolution des équations d'IFS, une fois la discrétisation choisie, deux approches sont possibles. Ces deux approches sont largement étudiées afin d'améliorer ces types de solveurs. Une approche directe propose de résoudre au même instant t les équations solide et fluide en utilisant une formulation garantissant la compatibilité à l'interface [Tezduyar et al., 2006]. Une seconde approche considère une résolution itérative du problème. Ainsi, des méthodes à pas de temps fixes alternant une résolution fluide puis une résolution solide, avec éventuellement des sous-itérations pour améliorer la convergence ont été testées [Farhat et al., 1997; Piperno, 1995]. Des techniques implicites avec sous-itérations sont annoncées pour éviter certains problèmes d'instabilité numérique dû à de l'amortissement numérique. Cette approche semble donner des résultats particulièrement bons y compris pour les problèmes non-linéaires [Longatte et al., 2009; Sigrist & Abouri, 2006].

L'approche itérative a été privilégiée pour son implémentation plus facile dans un code de calcul [Longatte et al., 2009]. De plus l'approche itérative implicite semble pouvoir être utilisée sur des pas de temps plus grand, au vu des conditions de stabilité [Longatte et al., 2009]. Généralement, la résolution se fait par une méthode de prédicteur-correcteur comme par exemple une méthode de Newton [Azaïez et al., 2011]. D'autres études proposent d'utiliser des solveurs d'ordre élevé basés sur l'utilisation d'une technique d'homotopie et de perturbation [Baguet & Cochelin, 2011; Braikat et al., 2002; Jamal et al., 2002]. Cette méthode a été utilisée pour résoudre les équations instationnaires de Navier-Stokes et une amélioration est proposée par [Guevel, 2016]. Cette amélioration s'appuie sur un critère de pseudo-résidu pour éviter des

calculs qui n'apportent que des informations redondantes lors de la méthode d'homotopie.

Conclusion

La résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires adaptées à la méthode des frontières immergées est réalisée selon une approche itérative. Les équations de Navier-Stokes sont intégrées temporellement selon un schéma implicite. Enfin la méthode de résolution choisie utilise les méthodes s'appuyant sur la MAN, les méthode d'homotopie et de perturbation. Les améliorations proposées par Guevel [Guevel, 2016] sont utilisées dans l'approche IFS. Les détails de la technique permettant de construire la routine numérique de résolution sont donnés à la section 4.6 en adaptant les opérateurs à la MFI.

4

Mise au point des algorithmes spécifiques

L'ensemble des techniques présentées jusqu'alors nous paraissent être les plus pertinentes pour résoudre les problèmes d'IFS que nous souhaitons aborder. Ces techniques n'ont, à notre connaissance, pas été utilisées ensemble. La résolution du problème d'IFS nécessite donc des aménagements de ces techniques numériques afin de mettre au point des algorithmes performants. La logique des développements et des choix qui ont été faits dans ce travail sont expliqués dans ce chapitre.

4.1 Prise en compte de l'IFS par une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

4.1.1 Gestion de la frontière

Les maillages utilisés dans ce travail sont des maillages cartésiens, donc structurés (agencement répétitif des cellules), homogènes (tous les éléments ont le même nombre d'arêtes) et conformes (pas de sommet au milieu de l'arête d'un autre élément).

Dans ces maillages, rien ne distingue la partie solide de la partie fluide (figure 4.1(a)). La distinction entre un élément solide ou fluide d'un maillage provient de la valeur de la fonction Level-Set (LS)(nœud solide ayant un nœud voisin fluide) qui est définie comme une donnée supplémentaire du maillage. La frontière est représentée par une ligne continue, affine par morceaux, joignant l'ensemble des marqueurs lagrangiens. (figure 4.1(b)). La valeur de la fonction Level-Set est la distance la plus courte entre le nœud du maillage considéré et les marqueurs de la frontière. Le signe affecté à cette distance est donné en fonction de la normale sortante de la frontière.

La discrétisation de la frontière doit être suffisamment fine pour que les nœuds les plus proches aient une valeur de LS tendant vers la distance de ce nœud à la frontière (figure schématisant le maillage lorsque ce n'est pas le cas 4.2(a)).

Le nombre de marqueurs lagrangiens pour définir la frontière est très important. L'utilisation de la distance entre un nœud du maillage et un marqueur plutôt que la vraie distance entre un nœud du maillage et une courbe introduit un défaut. Celui-ci peut être minimisé par un pas Δx_f entre marqueurs au moins 13 fois plus petit que le pas Δx du maillage. Cette condition permet de descendre sous les 4 % d'erreur relative¹ pour la représentation de la position de la frontière dans l'élément (contre une erreur relative supérieure à 16 % pour $\Delta x_f = \frac{1}{3}\Delta x$). Si cette condition n'est pas respectée, la frontière entre les domaines fluide et solide est défor-

1. L'erreur est la différence entre la courbe réelle et la courbe discrétisée

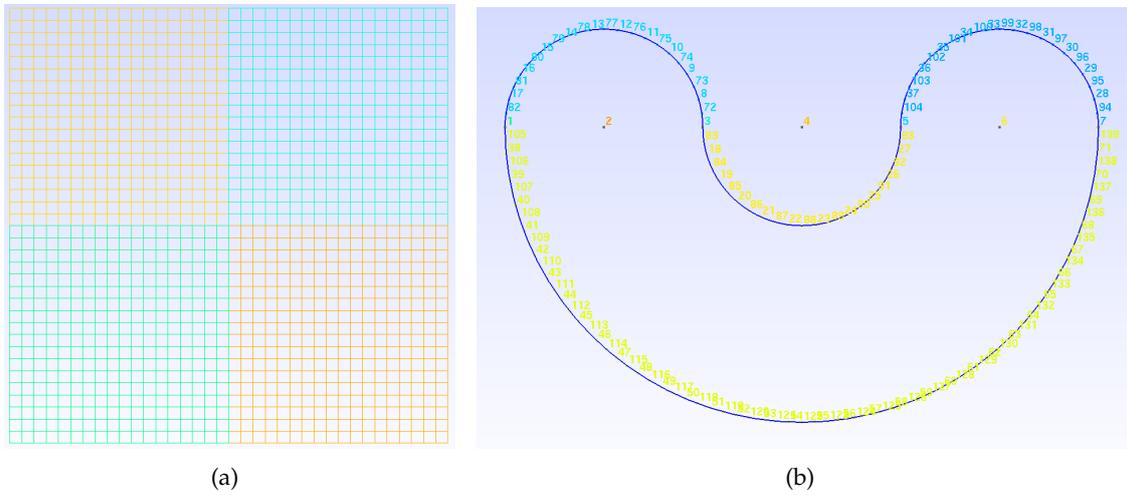


FIGURE 4.1 – Exemple de maillage utilisé : (a) maillage de base ; (b) maillage de la frontière (pas à l'échelle).

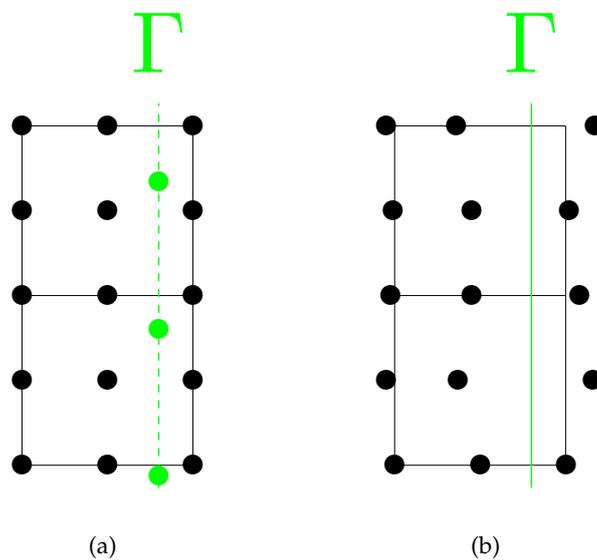


FIGURE 4.2 – Mise en évidence du problème de la discrétisation de la frontière : (a) maillage de la frontière trop grossier ; (b) maillage donnant les mêmes valeurs de LS pour une distance entre le nœud et la vraie courbe frontière.

mée (voir figure 4.3(a)). Par contre, la même simulation respectant le critère permet une bonne description de l'interface (voir figure 4.3(c)). Pour tous les résultats de simulation, présentés dans ce manuscrit, la condition $\Delta x_f \leq 13\Delta x$ est respectée.

Malgré le respect de la condition précédente, il est nécessaire d'avoir un maillage cohérent avec la géométrie de la frontière. Ainsi, les changements de forme brusques de la frontière ont besoin d'une plus grande finesse de maillage pour que la fonction LS puisse correctement représenter la géométrie (voir l'exemple de la figure 4.4).

La valeur de la LS pour tous les nœuds du maillage de base est déterminée lors de l'initialisation du calcul. Le champ de la LS est construit à partir du maillage de la frontière dont les nœuds sont vus comme des marqueurs lagrangiens. Il est à noter que pour les calculs stationnaires, la frontière est immobile et non déformée, la valeur de la LS aux nœuds n'est donc pas modifiée.

Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour réactualiser la position du solide est calculé pour discriminer deux approches : la méthode par les marqueurs lagrangiens et celle par la méthode Level-Set. Un maillage de 1 600 nœuds et une discrétisation de la frontière de 1 000 marqueurs lagrangiens sont considérés.

Pour un problème bidimensionnel, il y a deux inconnues nodales par nœud (les composantes u_x et u_y de la vitesse fluide²) et l'opérateur tangent est une matrice de dimension : $(2 \times 1\,600) \times (2 \times 1\,600) = 3\,200^2$.

Si l'utilisation des marqueurs lagrangiens est privilégiée, la nouvelle position des marqueurs est calculée (4 000 opérations élémentaires : calcul du déplacement ajouté à la position actuelle selon les deux directions pour les 1 000 marqueurs) en fonction du temps t ainsi que de la cinématique du solide. Il faut ensuite chercher pour chaque nœud le marqueur lagrangien le plus proche (donc $1\,600 \times 1\,000$ calculs de distance³) et faire le produit scalaire entre le vecteur de position relative du marqueur au nœud avec la normale sortante du solide définie au marqueur (donc $1\,600$ produits scalaires⁴) pour définir la nouvelle valeur de la LS sur tous les nœuds. Cela conduit à un nombre d'opérations élémentaires égal à 9 608 800.

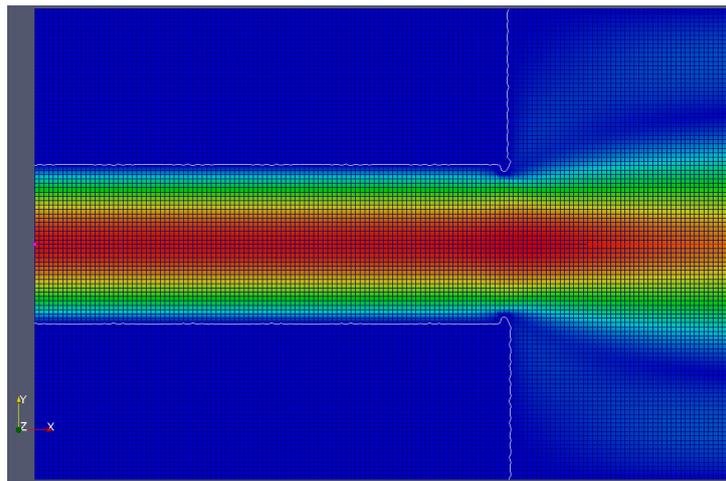
La seconde approche nécessite de créer artificiellement un vecteur \mathbf{u}_b qui représente un champ uniforme de vitesse sur l'ensemble du domaine. Ce champ a pour composantes, pour un nœud, les composantes v_x et v_y de la vitesse imposée au solide. Il faut ensuite résoudre l'équation (1.36) de convection de la Level-Set ϕ à la vitesse de convection \mathbf{u}_b . Ceci nécessite alors, en supposant les opérateurs déjà assemblés, et en considérant toujours le cas 2D, $\frac{2}{3} \times 3\,200^3$ opérations pour la décomposition LU et $2 \times 3\,200^2$ opérations pour la descente-remontée [Ciarlet, 1982; Schatzman, 1991]. Le champ de la LS réactualisé est obtenu en 21 865 813 334 opérations élémentaires au minimum.

La technique mixte des marqueurs lagrangiens pour recalculer à chaque étape le champ de la LS est donc utilisée pour les calculs stationnaires et instationnaires. Ce champ d'information nodale est utilisé dans les méthodes de la pénalisation et de la Ghost-Cell couplées à la MEF.

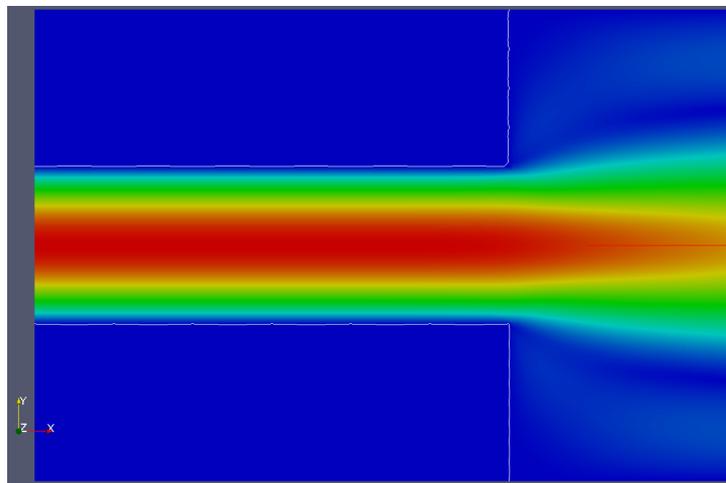
2. La pression est condensée au niveau élémentaire lors de la discrétisation spatiale et disparaît du vecteur inconnu.

3. Un calcul de distance comprend la racine carré de la somme du carré de deux soustraction ($d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$) soit 6 opérations.

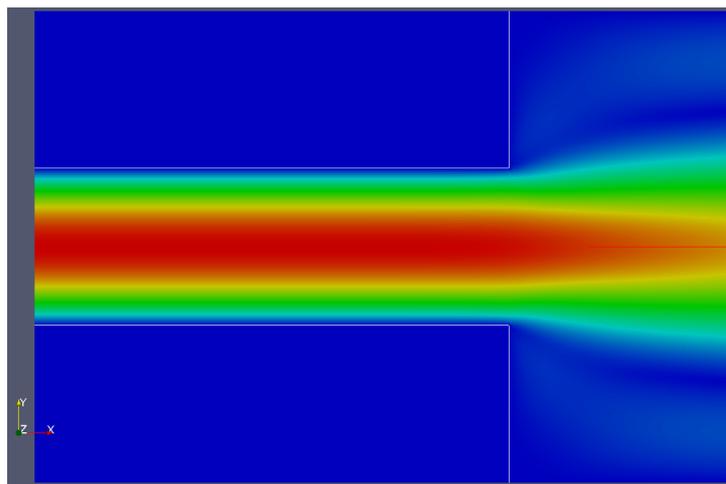
4. Un produit scalaire comprend la somme des produits des coordonnées ($a = x_2x_1 + y_2y_1$) soit 3 opérations.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.3 – Qualité de la frontière en fonction du nombre de marqueurs lagrangiens utilisé : (a) $\Delta x_f = \frac{1}{1,9} \Delta x$, frontière grossière au point de pénaliser des éléments qui ne devraient pas l'être ; (b) $\Delta x_f = \frac{1}{7,8} \Delta x$; (c) $\Delta x_f = \frac{1}{48} \Delta x$.

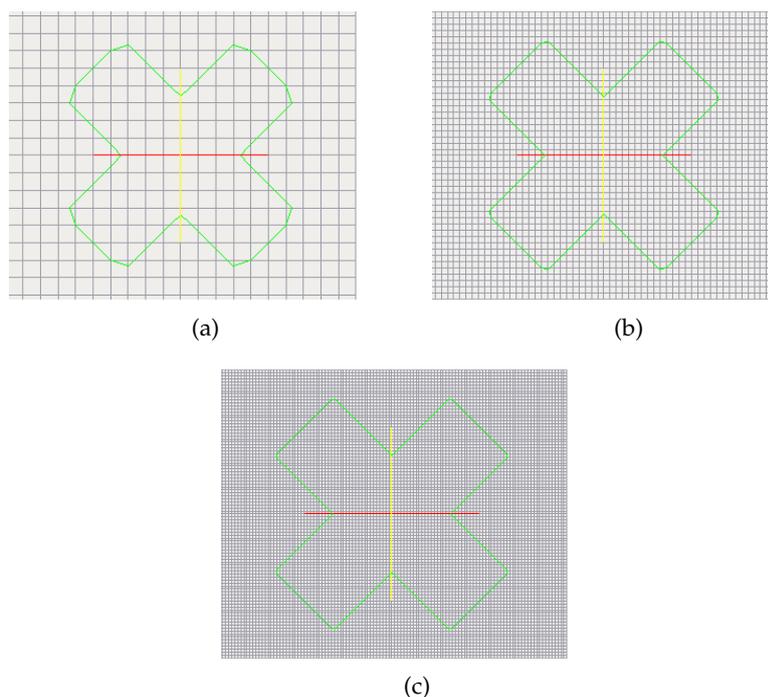


FIGURE 4.4 – Précision de la frontière en fonction du maillage : (a) maillage grossier (25x25); (b) maillage intermédiaire (57x57); (c) maillage fin (117x117).

4.1.2 Méthodes de Pénalisation et Ghost-Cell adaptées aux éléments finis

4.1.2.1 Méthode de Pénalisation

Lors de l'implémentation de la méthode de pénalisation, une première version directement inspirée de la bibliographie basée sur la méthode de différences finies a été utilisée. Selon cette méthode, une cellule est pénalisée entièrement en fonction de la position du nœud central de l'élément [Tseng & Ferziger, 2003]. Ainsi, si le nœud central est dans le domaine fluide alors la cellule n'est pas pénalisée (voir figure 4.5(b)). Dans le cas contraire, la cellule, dont le nœud central est solide, est pénalisée (voir figure 4.5(c)). L'utilisation du signe de la fonction Level-Set permet de réaliser facilement ce test.

L'équation de Navier-Stokes pénalisée fait intervenir la fonction indicatrice du solide χ_s qui permet de distinguer les zones à pénaliser ou non. En fonction de la position, la zone est solide ou fluide et n'a pas les mêmes propriétés. Cette vision, conforme à l'équation, ne prend pas en compte les règles de la méthode des éléments finis. En effet, il n'est pas possible de simuler le comportement d'un élément ne possédant pas les mêmes propriétés sur tous les nœuds sauf par l'utilisation l'opérateur moyennant la discontinuité.

Habituellement dans les codes de calculs, un module de pénalisation moyennant les contributions de chaque nœud est utilisé. La moyenne des valeurs de perméabilité nodales est calculée pour déduire une valeur de perméabilité élémentaire. Cette approche pénalise encore fortement un élément dont un seul nœud est hors du domaine solide et ne résout que très partiellement le problème de la discrétisation en escalier d'un solide courbe.

Une évolution testée pour cette thèse est de modifier le critère de pénalisation. Ainsi, les éléments coupés peuvent ne plus être pénalisés (comportement fluide) mais la condition

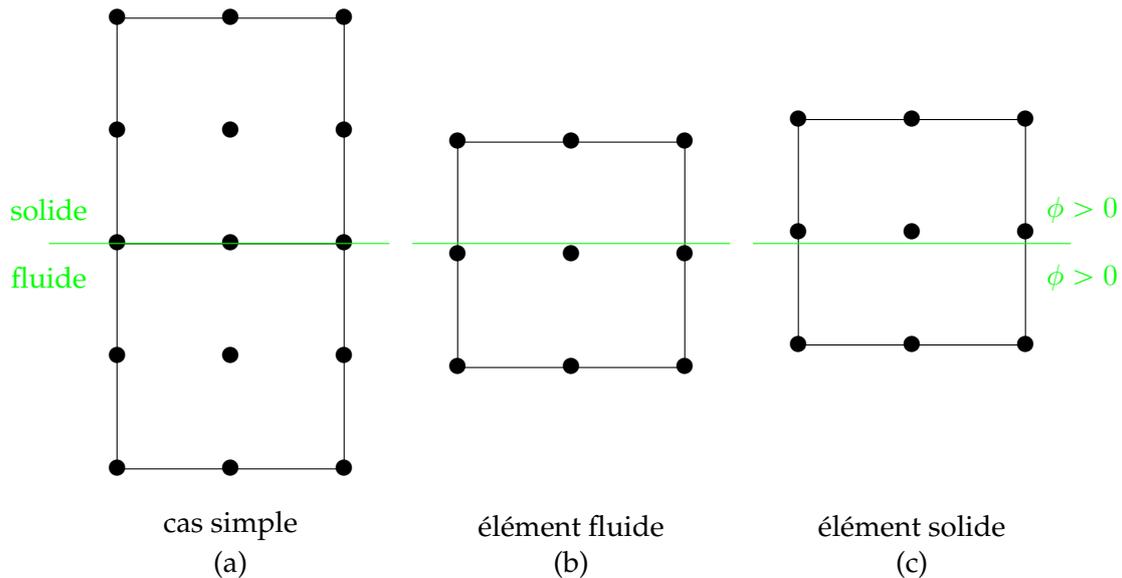


FIGURE 4.5 – Schéma de la pénalisation de l'élément en fonction de la frontière.

de non-glissement est assurée par la méthode Ghost-Cell. Afin de quantifier l'amélioration, il faut pouvoir comparer les deux méthodes. Techniquement, lors de l'initialisation, les éléments fluides sont affectés d'un identifiant de matériau correspondant au fluide, les éléments solides sont affectés comme solide, selon le critère classique. Si le choix est fait d'utiliser la méthode proposée, alors les éléments coupés par l'isovaleur zéro de la fonction Level-Set sont affectés d'un identifiant de matériau 3 dont les caractéristiques matériaux sont identiques au matériau fluide. Cette astuce permet d'identifier très rapidement tous les éléments finis qui nécessitent un calcul particulier de l'opérateur élémentaire L_{χ_s} . L'utilisation de cette méthode est référencée en utilisant le sigle "+" en fin de l'abréviation de la méthode.

4.1.2.2 Méthode Ghost-Cell

La méthode Ghost-Cell a été développée en différences finies, mais elle peut être implémentée en éléments finis [Mittal & Iaccarino, 2005]. La méthode Ghost-Cell ainsi que les modifications nécessaires à son utilisation avec la MEF sont maintenant présentées.

L'idée fondamentale de cette méthode consiste en l'imposition de la variable φ sur un nœud solide proche de la frontière pour que la valeur de la variable sur la frontière respecte strictement les conditions de couplage fluide-structure.

Dans le cas d'un solide de forme géométrique "complexe", la frontière ne passe pas nécessairement par un nœud. Il faut alors faire une extrapolation du champ de vitesse afin de trouver la vitesse à imposer aux nœuds fantômes et ainsi forcer la condition de non-glissement à l'interface.

Dans ce cas, l'algorithme de la méthode Ghost-Cell proposé par Tseng *et al.* [Tseng & Ferziger, 2003] présente les étapes suivantes :

1. détection de l'interface et repérage de l'ensemble des cellules fantômes ;
2. extrapolation de la vitesse des nœuds fantômes ;
3. résolution des équations de Navier-Stokes .

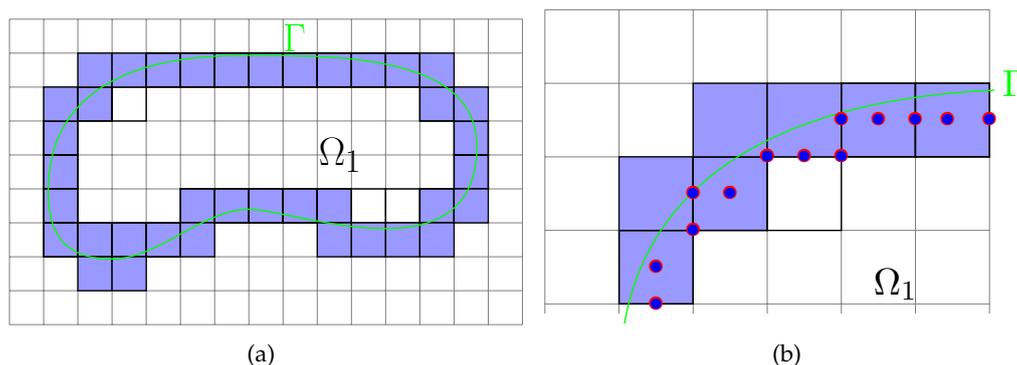


FIGURE 4.6 – (a) Zone fantôme : selon Tseng *et al.* avec les hachures de couleur rouge, dans cette étude en bleu ; (b) les nœuds fantômes détectés selon les deux méthodes (zoom du coin supérieur gauche).

Détection de l'interface et repérage de l'ensemble des cellules fantômes Cette étape consiste à trouver les éléments "solides" (valeur de la LS négative au nœud central) suffisamment proches de la frontière pour que leur élément voisin soit un élément "fluide" [Tseng & Ferziger, 2003]. Les éléments respectant ce critère (éléments en bleu dans la figure 4.6(a)) sont nommés les éléments fantômes et leur numéro d'identification est enregistré dans une liste. Cette recherche nécessite de savoir quel est l'élément voisin et de vérifier s'il est "solide" ou "fluide". Ce type d'algorithme entraîne plusieurs boucles sur l'ensemble du domaine ce qui n'est pas optimal pour le temps de calcul.

Une méthode alternative consiste à tester si la frontière coupe les éléments (valeur de la LS d'au moins un nœud de signe opposé aux autres nœuds de l'élément) et ne conserver dans une liste que les numéros d'identification des éléments coupés par la frontière (éléments hachurés en rouge dans la figure 4.6(a)).

Ces listes nous permettent d'identifier les nœuds "fantômes" (NF)(nœud solide ayant un nœud voisin fluide) proches de la frontière en classant (étape nommée "tri des nœuds de l'élément k ") dans l'algorithme 4.12) les valeurs de la fonction Level-Set des nœuds de l'élément sélectionné et en prenant les n premiers nœuds (les 3 premiers pour le schéma 4.6(b)). Les listes d'éléments sont différentes mais les NF ainsi trouvés sont identiques quelque soit la méthode d'identification utilisée. Grâce à la méthode proposée, les NF sont obtenus en n'utilisant que des informations locales pour chaque élément. On évite ainsi la recherche des éléments voisins.

Extrapolation spatiale de la vitesse des nœuds fantômes. Cette seconde étape consiste à extrapoler les vitesses du fluide aux nœuds les plus proches du NF afin de définir la vitesse à imposer au NF pour respecter la condition de Dirichlet $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b$ sur la frontière réelle. Il a été vu, dans la partie 1.3.5.2, que certaines configurations produisent des instabilités et qu'il faut mettre en place des techniques particulières pour les éviter. La méthode de [Tseng & Ferziger, 2003] (schématisée sur la figure 4.7(a)) est retenue puisqu'elle conserve la forme de la géométrie. Il faut donc, pour chaque NF, chercher le point O , point reconstruit, sur lequel la condition de non-glissement est imposée et le point I , point où l'interpolation est effectuée.

Les valeurs de la variable φ aux points I (de coordonnées $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_G + 2\phi_G \cdot \mathbf{n}$) et O (de coordonnées $\mathbf{X}_O = \mathbf{X}_G + \phi_G \cdot \mathbf{n}$) permettent de calculer la valeur $\varphi_G = 2\varphi_O - \varphi_I$ qu'il faut appliquer au NF. Cette formule peut être vue comme une variation linéaire de φ [Majumdar et al., 2001] ou comme une moyenne en O des grandeurs obtenues en G et I [Mittal et al., 2008].

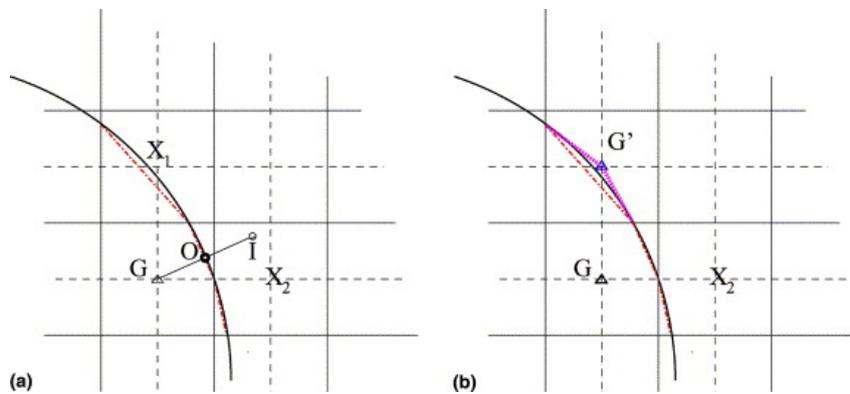


FIGURE 4.7 – Représentation des techniques proposées par Tseng *et al.* [Tseng & Ferziger, 2003] (..... : l'approximation linéaire de la frontière) : (a) utilisation du point I image du nœud fantôme G ; (b) déplacement local de la frontière avec deux segments (.....). Image d'après [Tseng & Ferziger, 2003].

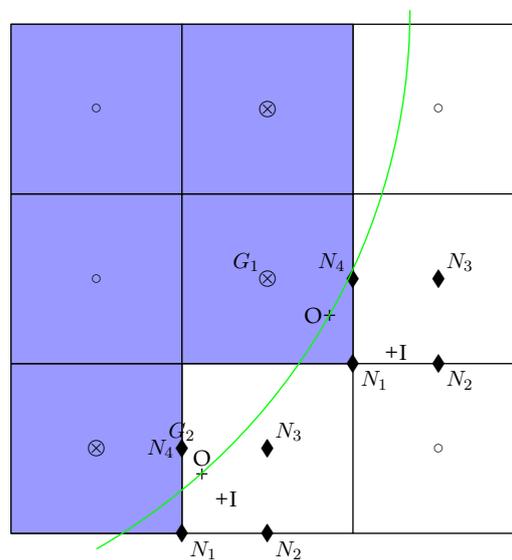


FIGURE 4.8 – L'isoligne zéro de la Level-Set (en vert) permet de distinguer les éléments solides (en bleu) des éléments fluides (en blanc). Les cellules fantômes ont un nœud central représenté par \otimes . Les nœuds représentés par \blacklozenge sont utilisés pour l'interpolation de la vitesse au point I .

Pour une discrétisation spatiale 2D, une formule d'interpolation bilinéaire classique en deux dimensions est utilisée :

$$\varphi = c_0xy + c_1x + c_2y + c_3 \quad (4.1)$$

Les coefficients c_0, c_1, c_2 et c_3 que l'on cherche, pour le cas général du nœud fantôme G_1 , sont déterminés en fonction de la grandeur φ évaluée aux quatre nœuds N_1, N_2, N_3 et N_4 (voir figure 4.8) et sont solutions du système suivant :

$$\mathbf{C} = [\mathcal{B}]^{-1}\varphi \quad (4.2)$$

où $\mathbf{C}^T = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ est le vecteur des coefficients inconnus, $\varphi^T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ est le vecteur des valeurs de la variable aux nœuds $N_i (i = \llbracket 1, 4 \rrbracket)$ et $[\mathcal{B}]$ est la matrice de Vandermonde telle que :

$$[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} x|_1 y|_1 & x|_1 & y|_1 & 1 \\ x|_2 y|_2 & x|_2 & y|_2 & 1 \\ x|_3 y|_3 & x|_3 & y|_3 & 1 \\ x|_4 y|_4 & x|_4 & y|_4 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $x|_i$ et $y|_i$ les coordonnées spatiales des nœuds considérés. Cette matrice, et son inverse, sont valables quelle que soit la variable du NF considérée. Il est donc avantageux de n'inverser $[\mathcal{B}]$ qu'une fois par NF.

Pour avoir les nœuds utiles à l'interpolation, il faut prendre les quatre nœuds fluides les plus proches du point I d'interpolation. Notons que dans un certain nombre de cas la matrice $[\mathcal{B}]$ n'est pas inversible. La raison dépend du degré d'interpolation choisi. Ainsi pour l'interpolation bilinéaire, la matrice est numériquement non-inversible lorsque trois des quatre points sont alignés ou lorsqu'une des coordonnées de deux points est nulle. Ces situations produisent soit un déterminant nul, soit une matrice mal-conditionnée. Des solutions de substitution ont donc été mises en place pour ces cas particuliers. Lorsque le point I est dans une zone proche du nœud central, trois des quatre nœuds utiles sont alignés. Vu la forme de la zone dans lequel le point I entraîne un problème (figure 4.9), il est plus simple de tester l'alignement des nœuds que de mettre en place un ensemble de conditions évitant de prendre les nœuds. Si les nœuds sont alignés, l'algorithme permet de sélectionner les nœuds qui forment les sommets du quart de l'élément.

Une autre situation problématique est schématisée sur la figure 4.8. Si un des nœuds (ici le nœud N_4 autour du point image du NF G_1) est trop proche de la frontière (ici : $|\phi_{N_4}| < 10^{-8}$), alors le nœud est considéré comme étant sur la frontière et par conséquent $\varphi_{N_4} = \varphi_0$. De même, si un nœud de l'interpolation est solide ($\phi_{N_4} > 0$ dans le cas du NF G_2), alors le nœud de l'interpolation est rejeté sur la frontière en prenant les variables φ_0 pour l'interpolation.

Un autre avantage au couplage MGC et MEF est l'utilisation de la répartition des informations sur plusieurs nœuds. Cela entraîne plus de nœuds à traiter pour imposer la méthode Ghost-Cell à chacun. Mais cela permet d'imposer la condition de non-glissement en davantage de points le long de la frontière, et donc d'avoir une meilleure description de l'interface. Cette caractéristique est illustrée sur la figure 4.10. Cependant, l'utilisation des NF par élément peut entraîner deux calculs de la vitesse à imposer au NF, un calcul pour chaque élément auquel le NF appartient. Ces calculs sont équivalents et conduisent au même résultat puisque le NF n'a qu'une seule normale à la Level-Set et qu'il n'y a qu'un seul point image I . Mais il faut s'assurer que, dans la liste des conditions limites regroupant les nœuds et les vitesses à imposer, le traitement du forçage n'est effectué qu'une seule fois par nœuds (en réalité une fois pour chaque degré de liberté).

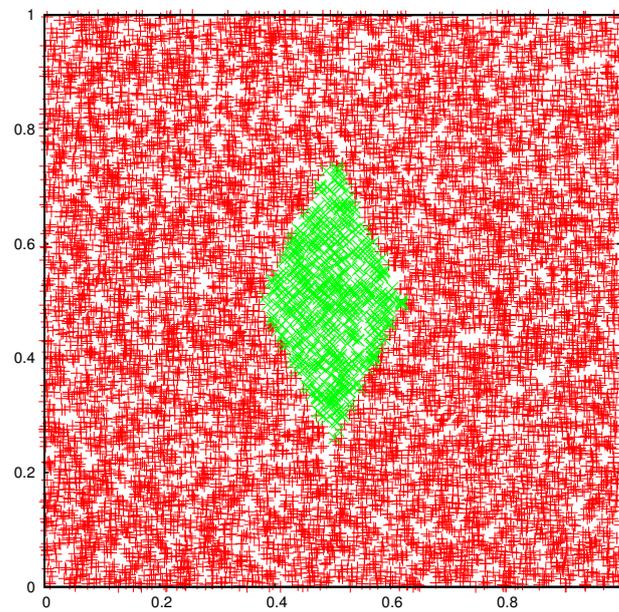


FIGURE 4.9 – Lieu du point I pour lequel les nœuds de l'interpolation sont alignés.

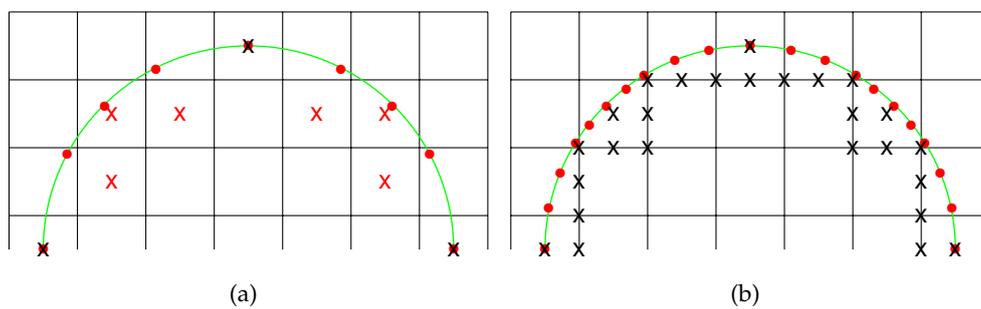


FIGURE 4.10 – Lieux d'imposition de la condition de non-glissement \bullet et leur NF x , selon la méthode des différences finies (a) et selon la méthode des éléments finis (b).

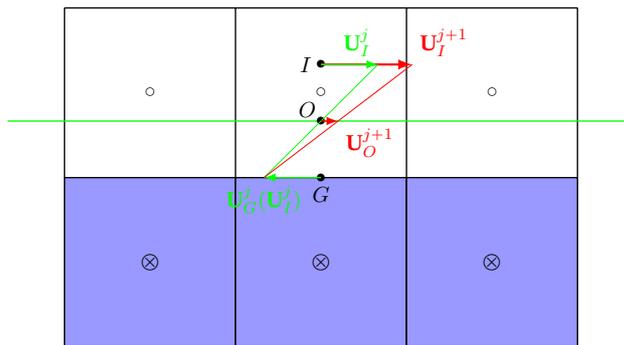


FIGURE 4.11 – Décalage due à la technique entre le pas sur lequel est calculé la vitesse de NF et celui pour lequel les conditions sont imposées.

Bien que la forme de la frontière soit mieux dessinée, l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes n'est pas modifié.

Résolution des équations de Navier-Stokes . La méthode de résolution des équations qui a été choisie dans ce travail, la MAN, repose sur une seule étape de "prédiction" d'ordre élevé. Il n'est donc pas possible d'utiliser les résultats de la prédiction pour calculer les vitesses à imposer au NF lors de possibles corrections comme dans [Bergmann et al., 2014]. Les vitesses imposées $\mathbf{U}_G^j(\mathbf{U}_I^j)$ (voir figure 4.11) sont utilisées comme un forçage des conditions limites classiques pour le pas MAN suivant, dont l'interpolation en I donne une vitesse \mathbf{U}_I^{j+1} . Ce décalage n'est pas très élégant puisqu'il introduit une circulation (puisque $\mathbf{U}_O^{j+1} \neq 0$) le long de la frontière. Cependant certains résultats semble montrer que cette approche est admissible.

En effet, lors des calculs stationnaires, la vitesse du solide est nulle donc les variables φ_O le sont aussi. L'erreur portera principalement sur la vitesse imposée qui sera plus faible que la vitesse nécessaire pour avoir une condition de non-glissement exacte.

Lors du suivi de branche des solutions, la taille des pas MAN diminue à l'approche d'une bifurcation. Cette diminution de la taille du pas fait que la différence entre ce que l'on impose au NF et ce que l'on devrait imposer est faible. De plus lorsque l'indicateur détecte une bifurcation, l'algorithme calcule de nouveau cet indicateur en partant de la moitié du pas. Cela permet d'augmenter la fiabilité des valeurs critiques que nous obtenons.

Lors des simulations instationnaires, le calcul des valeurs aux NF se fait à chaque début de pas de temps en utilisant les vitesses du pas de temps précédent. Cette approximation est couramment utilisée pour l'intégration temporelle des équations du mouvement en IFS (couplage faible entre solveurs 'solide' et 'fluide').

La méthode Ghost-Cell présentée conduit à la résolution d'un système algébrique dont les dimensions et la structure n'ont pas changé malgré la prise en compte de conditions supplémentaires. Il est donc possible d'appliquer les méthodes basées sur la MAN (prédiction d'ordre élevé, continuation, indicateur de bifurcation, analyse de série, ...) pour des problèmes IFS, les opérateurs algébriques ayant la même structure avec ou sans les techniques d'IFS proposées.

4.1.2.3 Algorithme complet

L'algorithme dans lequel les méthodes de la Level-Set, de pénalisation et de Ghost-Cell sont déployées est présenté en Algo 4.12.

sigle	méthodes employées
TB	modèle utilisant des frontières classiques pour décrire le solide
LP	Solide localisé par la méthode de la Level-Set et pénalisé dans l'équation de Navier-Stokes/Brinkman
LPG	Ajout de la méthode Gost-Cell à la méthode LP
LPG+	Méthode LPG, mais les éléments coupés par la frontière ne sont pas pénalisés (cf. §4.1.2.1)

TABLE 4.1 – sigles décrivant les méthodes étudiées et leurs significations.

Dans le cas de l'analyse de bifurcation stationnaire, la recherche des points G, O, I , et des nœuds de l'interpolation N_i et donc la matrice \mathcal{B} et son inverse sont toujours identiques. Il est donc possible de stocker toutes ces informations pour gagner du temps de calcul au pas suivant. Cela se fait au détriment de la place mémoire disponible pour modéliser des maillages plus fins et/ou des résolutions avec des séries ayant des ordres plus élevés. De plus la simplicité des tâches en question n'entraîne aucune incidence sur le temps de calcul.

4.1.3 Synthèse des méthodes proposées

Plusieurs méthodes ont été présentées. La partie résultat présentera les capacités de ces différentes méthodes. Afin de synthétiser l'écriture pour parler d'une méthode, des sigles vont être utilisés. Ceux-ci sont donnés avec leur signification dans le tableau 4.1.

4.2 Analyse de bifurcation stationnaire

Les branches solutions stationnaires sont calculées par la MAN qui associe une technique de discrétisation spatiale et une méthode de perturbation. La MAN permet d'obtenir une branche solution continue par morceaux, plutôt que point à point comme le fait une méthode de type prédiction-correction.

4.2.1 Méthode de perturbation

L'équation stationnaire que l'on cherche à résoudre par la MAN est l'équation de Navier-Stokes-Brinkman stationnaire pour un fluide newtonien incompressible et un solide pénalisé respectant les conditions limites de type Dirichlet sur le contour extérieur du domaine et sur le contour du solide au sein de l'écoulement. Le problème consiste à trouver \mathbf{U} solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F} & \text{dans } (\Omega) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } (\Gamma_d) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b & \text{sur } (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.3)$$

où \mathbf{U} désigne le vecteur mixte des inconnues vitesse et pression, λ est le paramètre de contrôle, \mathbf{L}_{χ_s} est l'opérateur linéaire dû à la pénalisation du solide, \mathbf{L} est celui regroupant les opérateurs linéaires de l'équation de Navier-Stokes, et \mathbf{Q} est l'opérateur quadratique. Le paramètre λ peut être identifié, dans le cas de la mécanique des fluides, comme étant le nombre de Reynolds Re . La solution est cherchée comme une série entière tronquée à l'ordre N en fonction d'un

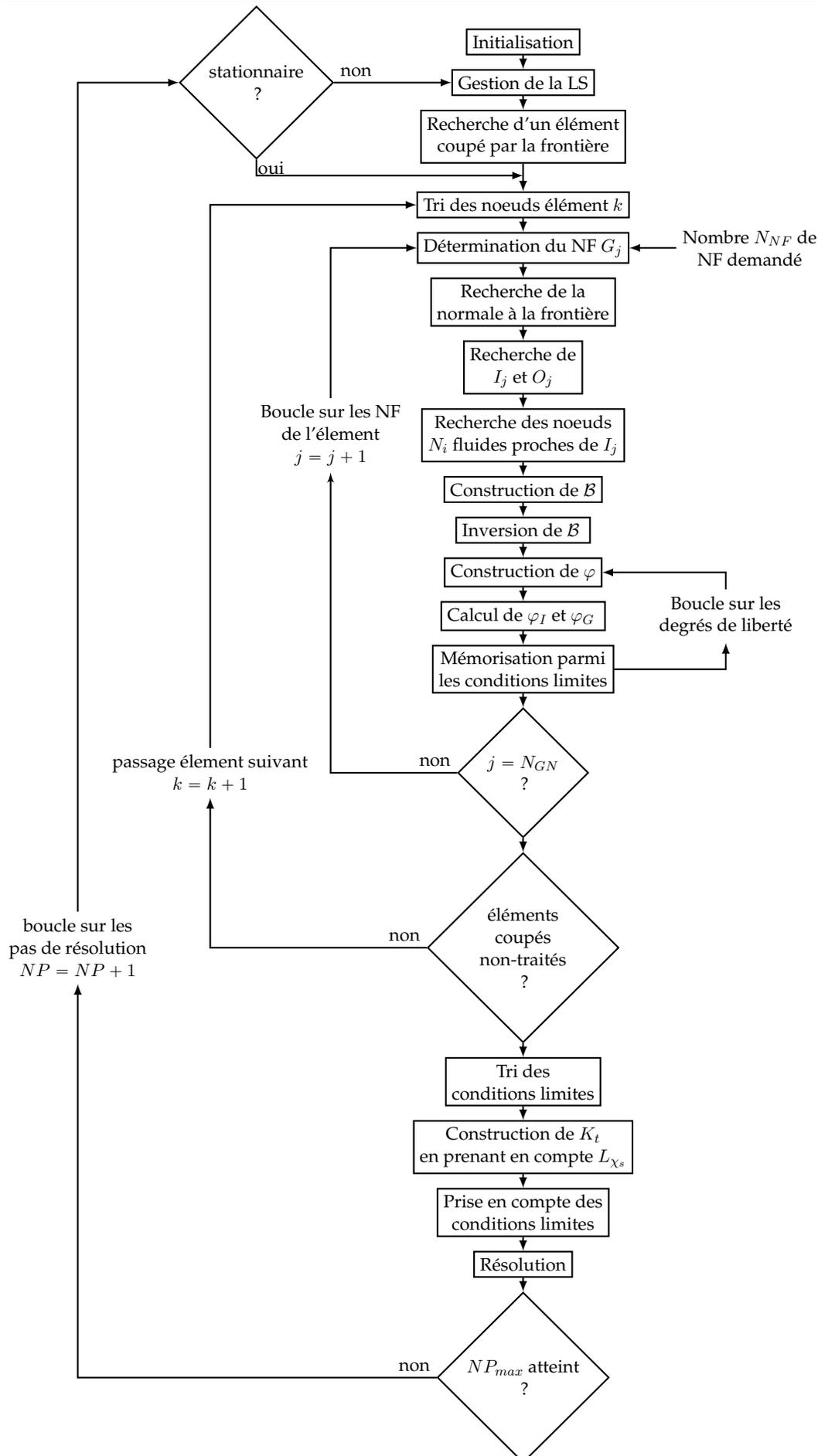


FIGURE 4.12 – Algorithme de résolution associant les méthodes Level-Set, de pénalisation et de Ghost-Cell à la MEF.

paramètre de chemin a au voisinage d'un point \mathbf{U}_0 solution de l'équation :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + a^3\mathbf{U}_3 + \dots + a^N\mathbf{U}_N & (4.4a) \\ \lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \dots + a^N\lambda_N & (4.4b) \end{cases}$$

En posant, $\mathbf{X} = \left(\frac{\mathbf{U}}{\lambda}\right)$, l'inconnue du problème s'écrit :

$$\mathbf{X}(a) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^N a^i \mathbf{X}_i \quad (4.5)$$

Afin d'avoir un problème bien posé, il faut également définir le paramètre de chemin a . Bien que d'autres choix existent [Cochelin, 1994], le pilotage par longueur d'arc est ici retenu. Il permet de passer les points limites sans traitement particulier. La définition du paramètre de chemin est :

$$a = \frac{1}{s^2} (\langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1) \quad (4.6)$$

avec $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire et s^2 est la longueur de la prédiction tangente. Pour ce travail de thèse, la valeur de s est fixée telle que $s^2 = 1$.

Les inconnues définies à l'équation (4.5) sont injectées dans les équations (4.3) et (4.6). Par identification des puissances de a , un ensemble de systèmes linéaires ayant le même opérateur tangent L_t^0 est obtenu :

$$\text{Ordre 1 : } \begin{cases} \mathbf{L}_t^0(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F} \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\text{Ordre } k \in \llbracket 1, N \rrbracket : \begin{cases} \mathbf{L}_t^0(\mathbf{U}_k) = \lambda_k \mathbf{F} - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{k-i}) \\ \langle u_k, u_1 \rangle + \lambda_k \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

où l'opérateur tangent L_t^0 est défini par :

$$\mathbf{L}_t^0(\bullet) = \mathbf{L}(\bullet) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \bullet) + \mathbf{Q}(\bullet, \mathbf{U}_0) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\bullet) \quad (4.9)$$

Le problème au 1^{er} ordre correspond à la linéarisation du problème au point régulier \mathbf{X}_0 . Ainsi, la résolution d'un système à l'ordre k permet de calculer la valeur du second membre du système à l'ordre $k + 1$, et par résolution successive l'ensemble des termes de la série est calculé.

4.2.2 Calcul du domaine de validité

La série calculée précédemment n'est valide que sur un certain domaine. Dans cette thèse, une estimation a_{max} du domaine de validité est donnée par [Cochelin, 1994] :

$$a_{max} = \left(\eta \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (4.10)$$

où η est une tolérance utilisateur et $\|\bullet\|$ désigne la norme euclidienne. Cette estimation se fonde sur l'écart relatif entre deux solutions d'ordre de troncature consécutif $(N - 1)$ et (N) .

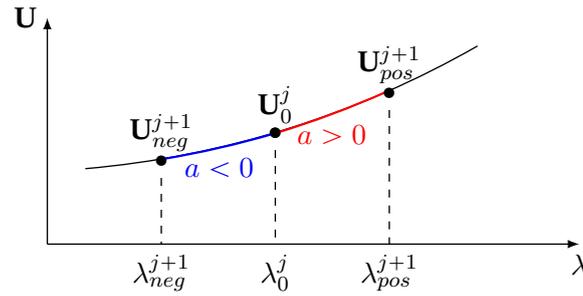


FIGURE 4.13 – Schéma d'un morceau de branche approximé par la MAN dans son domaine de validité $[-a_{max}; a_{max}]$.

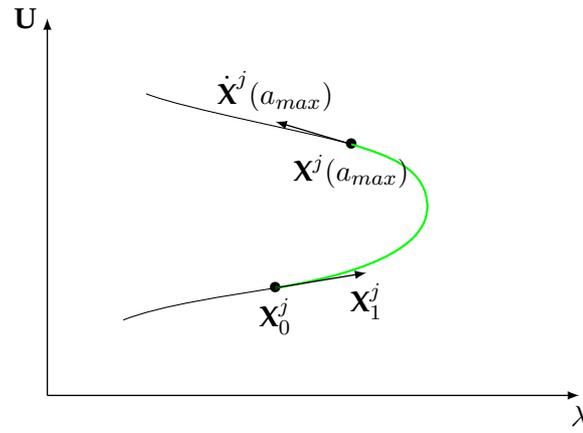


FIGURE 4.14 – Schématisation des tangentes en début et fin de pas dans le cas d'un point limite.

Tous les termes de la série étant connus, l'évaluation de a_{max} s'effectue pour un coût CPU marginal. Cependant, cette estimation ne garantit pas à la solution de minimiser le résidu.

Les termes de série étant connus ainsi que le domaine de validité de la série, nous pouvons calculer, par la définition (4.5), la branche continue dans l'intervalle $[-a_{max}; a_{max}]$ (voir figure 4.13).

Le point d'arrivée \mathbf{X}^{j+1} est un point régulier, solution de l'équation 4.3. Ce point peut servir de nouveau point de départ pour l'évaluation d'un nouveau morceau de branche.

La tangente au point final est donnée par la dérivée de la série. Par exemple, la dérivée de la série en fin de parcours positif de a_{max} est déterminée par l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{X}}(a_{max}) = \left. \frac{d\mathbf{X}(a)}{da} \right|_{a=a_{max}} = \sum_{i=1}^N i a_{max}^{i-1} \mathbf{X}_i \quad (4.11)$$

Selon le signe de a_{max} , deux directions d'avancement sont donc possibles. Le sens de parcours du paramètre de chemin est choisi tel que le produit scalaire entre la tangente \mathbf{X}_1^{j+1} au nouveau point de départ \mathbf{X}_0^{j+1} et la tangente en fin de pas $\dot{\mathbf{X}}^j(a_{max})$ de la branche précédente soit positif (voir figure 4.14).

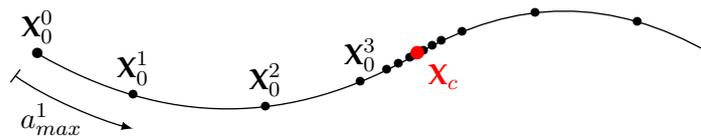


FIGURE 4.15 – Schéma d’une partie de branche avant et après un point critique, mise en évidence de l’accumulation de pas.

4.2.3 Méthode de continuation

Le morceau de branche solution évalué à partir de \mathbf{X}_0^j et valide jusqu’en $\mathbf{X}^j(\pm a_{max})$ est une solution régulière de l’équation. En considérant un sens de parcours positif ($a_{max} > 0$), un nouveau point de départ \mathbf{X}_0^{j+1} est obtenu en évaluant, au pas de continuation j , la série en a_{max} :

$$\mathbf{X}_0^{j+1} = \mathbf{X}^j(a_{max}) = \mathbf{X}_0^j + \sum_{i=1}^N a_{max}^i \mathbf{X}_i \quad (4.12)$$

La technique basée sur une seule prédiction d’ordre élevé et la définition retenue pour évaluer le domaine de validité ne permettent pas de corriger l’éventuelle accumulation d’erreurs. Il peut être intéressant d’avoir recours à une méthode de correction, telle que l’algorithme de Newton pour corriger la prédiction d’ordre élevé et obtenir ainsi une solution dont l’erreur serait inférieure à la tolérance requise.

La technique décrite permet donc de calculer une branche solution depuis un point régulier que l’on prend comme point de départ de la branche. Le calcul continue et s’il croise une bifurcation, les imprécisions numériques feront qu’une des branches post-bifurquées sera privilégiée. Afin de détecter cette bifurcation et déterminer l’ensemble des branches post-bifurquées, il faut mettre en place une méthode numérique permettant de calculer avec précision ce point singulier (bifurcation). Dans ce travail, nous proposons d’utiliser un indicateur de bifurcation.

4.3 Détection des points de bifurcation stationnaire simple

Dans ce travail de thèse seules les bifurcations stationnaires par brisure de symétrie sont étudiées. Le cas général sera présenté pour ne pas perdre en généralité avant de mettre en avant les simplifications dues à la symétrie. La bifurcation stationnaire arrive lorsqu’une valeur propre réelle du système linéarisé autour d’un point fixe stable traverse l’axe des imaginaires pour $\lambda = \lambda_c$.

A l’approche d’une bifurcation, le domaine de validité de la série diminue : la valeur de a_{max} est de plus en plus petite. Il en résulte visuellement une accumulation de pas MAN au voisinage du point critique comme sur la figure 4.15.

Cette accumulation de pas ne permet pas de définir précisément les paramètres critiques (vitesse critique \mathbf{U}_c et nombre de Reynolds λ_c) de la bifurcation mais informe visuellement de la probable proximité d’une singularité.

Dans le cadre de cette thèse, deux indicateurs basés sur la MAN sont retenus. Le premier indicateur repose sur le concept d’analyse de stabilité et de réponse du système à une perturbation. Le second indicateur tire profit des développements asymptotiques des inconnues à des ordres élevés pour analyser les termes de série et détecter ainsi l’émergence d’une bifurcation.

4.3.1 Indicateur de bifurcation

L'indicateur de bifurcation repose sur la perturbation du système étudié (analyse de stabilité linéaire). Celle-ci se présente sous la forme d'un second membre $\mu \mathbf{f}$ où μ , un scalaire, est l'indicateur de bifurcation et \mathbf{f} est un vecteur aléatoire. Déterminer une bifurcation consiste à déterminer les paramètres \mathbf{U}_c et λ_c pour lesquels l'indicateur devient nul, soit $\mu = 0$. Ce type d'indicateur a été utilisé avec succès pour des problèmes de mécanique du solide [Boutyou et al., 2004; Vannucci et al., 1998]. Cette approche a été étendue à l'étude des écoulements stationnaires en mécanique des fluides [Cadou, 1997; Cadou et al., 2006; Guevel, 2016].

Soit (\mathbf{U}, λ) une solution régulière des équations de Navier-Stokes-Brinkman 4.3. La perturbation $\mu \mathbf{f}$ est introduite dans cette équation et l'incrément de réponse $\Delta \mathbf{U}$ dû à cette perturbation est recherché :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}, \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{f} \quad (4.13)$$

En séparant les variables \mathbf{U} et λ d'une part, et $\Delta \mathbf{U}$ et μ d'autre part, et en ne considérant que les réponses à la perturbation du 1^{er} ordre, le système linéarisé "perturbé" s'écrit :

$$\mathbf{L}_t(\Delta \mathbf{U}) = \mu \mathbf{f} \quad (4.14)$$

où $\mathbf{L}_t(\bullet) = \mathbf{L}(\bullet) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \bullet) + \mathbf{Q}(\bullet, \mathbf{U}) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\bullet)$ désigne l'opérateur tangent.

Lorsque l'indicateur de bifurcation μ est nul, le problème à résoudre est un problème aux valeurs propres dont la solution fondamentale $(\mathbf{U}_c, \lambda_c)$ correspond à la bifurcation stationnaire.

Les inconnues $\Delta \mathbf{U}$ et μ sont cherchées sous la forme de séries tronquées à l'ordre N :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}(a) = \Delta \mathbf{U}_0 + \sum_{i=1}^N a^i \Delta \mathbf{U}_i & (4.15a) \\ \mu(a) = \mu_0 + \sum_{i=1}^N a^i \mu_i & (4.15b) \end{cases}$$

En introduisant les développements (4.15) dans l'équation (4.14), et par identification des puissances de a , un ensemble de systèmes linéaires est obtenu :

$$\text{Ordre } 0 : \begin{cases} \mathbf{L}_t^0(\Delta \mathbf{U}_0) = \mu_0 \mathbf{f} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\text{Ordre } k \in \llbracket 1, N \rrbracket : \begin{cases} \mathbf{L}_t^0(\Delta \mathbf{U}_k) = \mu_k \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{U}_i, \Delta \mathbf{U}_{k-i}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.17)$$

avec $\tilde{\mathbf{Q}}(a, b) = \mathbf{Q}(a, b) + \mathbf{Q}(b, a)$.

Pour que le problème soit bien posé, une équation supplémentaire est requise. Dans cette étude, cette équation est donnée par l'égalité suivante [Cadou et al., 2012] :

$$\|\Delta \mathbf{U}\| = \|\Delta \mathbf{U}_0^{init}\| \quad (4.18)$$

dans laquelle $\Delta \mathbf{U}_0^{init}$ désigne la solution obtenue pour une valeur initiale de l'indicateur choisie habituellement égale à 1 (i.e. $\mu_0^{init} = 1$). D'autres relations supplémentaires sont proposées

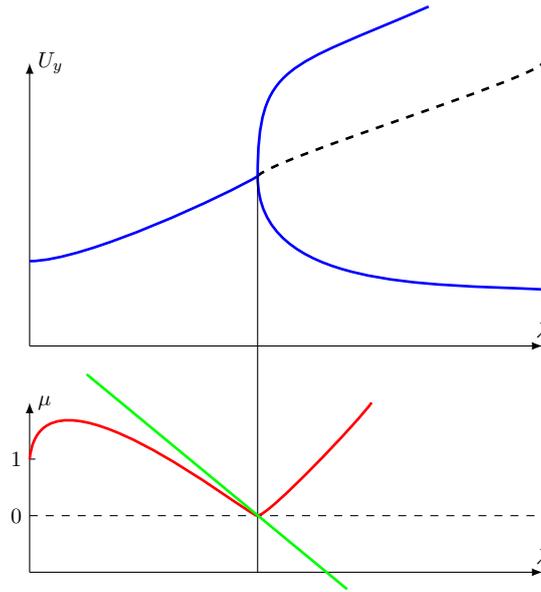


FIGURE 4.16 – En haut : schéma d’une bifurcation stationnaire simple ; En bas : évolution de l’indicateur de bifurcation en fonction du paramètre λ (nombre de Reynolds) : en rouge : [Cadou, 1997] ; en vert, indicateur classique.

[Cadou et al., 2012, 2006; Vannucci et al., 1998]. Cependant la relation (4.18), bien que non-linéaire, permet d’éviter certaines instabilités numériques [Cadou, 1997].

Pour tous les autres pas de continuation, l’indicateur à l’ordre zéro s’écrit :

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\langle \Delta \mathbf{U}_0^{init}, \Delta \mathbf{U}_0^{init} \rangle}{\langle \Delta \mathbf{U}_0, \Delta \mathbf{U}_0 \rangle}} \quad (4.19)$$

La condition supplémentaire aux ordres de troncature supérieurs à zéro s’écrit :

$$\sum_{i=0}^k \langle \Delta \mathbf{U}_{k-i}, \Delta \mathbf{U}_k \rangle = 0 \quad (4.20)$$

L’expression (4.17) permet de décomposer l’inconnue, $\Delta \mathbf{U}_k$, sous la forme :

$$\Delta \mathbf{U}_k = \mu_k \Delta \mathbf{U}_0 + \Delta \mathbf{U}_k^* \quad (4.21)$$

où $\Delta \mathbf{U}_k^*$ est solution de l’équation :

$$\mathbf{L}_t^0(\Delta \mathbf{U}_k^*) = - \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{U}_i, \Delta \mathbf{U}_{k-i}) \quad , \quad k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (4.22)$$

En reprenant la condition (4.18), les termes d’ordre k de la série de l’indicateur sont :

$$\mu_k = - \frac{2 \langle \Delta \mathbf{U}_k^*, \Delta \mathbf{U}_0 \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \langle \Delta \mathbf{U}_{k-i}, \Delta \mathbf{U}_i \rangle}{2 \langle \Delta \mathbf{U}_0^{init}, \Delta \mathbf{U}_0 \rangle} \quad , \quad k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (4.23)$$

Il est donc possible de calculer l’indicateur de bifurcation lors d’un pas MAN, car celui-ci est continu le long de ce pas. En prenant la valeur de l’indicateur en fin de pas MAN et en

l'utilisant comme valeur initiale μ_0 du pas suivant, il est possible de calculer l'indicateur de bifurcation pour n'importe quelle valeur du paramètre λ . Cette fonction continue par morceau permet d'obtenir la valeur critique λ_c pour laquelle l'indicateur est nul (voir figure 4.16). Le calcul de cet indicateur ne demande pas beaucoup de temps de calculs par rapport à la détermination de la solution stationnaire de l'équation de Navier-Stokes par la MAN (voir section 4.2). En effet, l'opérateur tangent utilisé pour calculer les termes de série de l'indicateur (équations (4.16) et (4.17)) est le même que celui utilisé pour déterminer la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes (équations (4.7) et (4.8)). Seuls les seconds membres sont différents entre ces deux systèmes linéaires. Numériquement, cela implique qu'une seule triangulation de matrice tangente par pas MAN est nécessaire. En conclusion, le calcul de l'indicateur de bifurcation demandera " k " (l'ordre de troncature des approximations polynomiales) résolutions supplémentaires de système linéaire par rapport au calcul de la solution stationnaire. Numériquement, le calcul de l'indicateur ne nécessite que k opérations de descente/remontée et aucune factorisation supplémentaire.

4.3.2 Analyse des termes de série et détection d'une progression géométrique

L'indicateur de bifurcation est un moyen simple et peu coûteux en temps de calculs pour déterminer précisément les bifurcations stationnaires. Il existe cependant une technique alternative encore plus efficace. Ainsi, l'analyse des termes d'une série issus d'une méthode de perturbation apporte des informations sur le type de singularité rencontrée ainsi que sur sa proximité par rapport au point initial \mathbf{X}_0 . Ces propriétés mathématiques sur l'analyse des séries ont été utilisées par Cochelin et Médale [Cochelin & Medale, 2013] pour la recherche des bifurcations stationnaires simples. Dans leur étude, ces auteurs ont montré que la série est "polluée" par des termes qui émanent d'une suite géométrique dont la raison est liée à la distance à la singularité. Les auteurs montrent de plus que la multiplicité m de la progression géométrique a une valeur qui dépend du type de singularité. En particulier, les auteurs ont montré que $m = -1$ pour une bifurcation stationnaire simple. Depuis, la technique a été utilisée avec succès à de nombreuses reprises [Guevel, 2016; Jawadi et al., 2013; Medale & Cochelin, 2015].

4.3.2.1 Série géométrique

La série obtenue par (4.7) et (4.8), à l'approche d'une bifurcation stationnaire, peut être décomposée en deux séries : une série optimale $\{\hat{\mathbf{X}}_i\}_{\text{optimale}}$ et une série géométrique $\{\mathbf{X}_i\}_{\text{géométrique}}$:

$$\{\mathbf{X}_i\} = \{\hat{\mathbf{X}}_i\}_{\text{optimale}} + \{\mathbf{X}_i\}_{\text{géométrique}} \quad \text{pour } i = \llbracket 1, N \rrbracket \quad (4.24)$$

Dans leur étude [Cochelin & Medale, 2013], les auteurs montrent que la série issue d'un calcul MAN peut être réécrite en utilisant la raison $\frac{1}{\alpha}$ de la série géométrique et le facteur d'échelle $a^N \mathbf{X}_N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(a) &= \mathbf{X}_0 + a(\hat{\mathbf{X}}_1 + \alpha^{N-1} \mathbf{X}_N) + a^2(\hat{\mathbf{X}}_2 + \alpha^{N-2} \mathbf{X}_N) + \dots + a^N \mathbf{X}_N \\ &= \mathbf{X}_0 + a\hat{\mathbf{X}}_1 + a^2\hat{\mathbf{X}}_2 + \dots + a^{N-1}\hat{\mathbf{X}}_{N-1} + \left[\frac{a}{\alpha} + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^N \right] a^N \mathbf{X}_N \end{aligned}$$

Les termes de la série optimale sont regroupés et la somme des termes entre crochets est

réécrite :

$$\mathbf{X}(a) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} a^i \hat{\mathbf{X}}_i + \left[\begin{array}{c} \frac{a}{\alpha} \\ \frac{a}{1 - \frac{a}{\alpha}} \end{array} \right] \alpha^N \mathbf{X}_N \quad (4.25)$$

Cette écriture met en évidence la singularité de la solution en $a = \alpha$. Le paramètre α est l'inverse de la raison de la progression géométrique. Il correspond à la distance séparant la singularité de la solution initiale \mathbf{X}_0 . Plus le morceau de branche en cours $\mathbf{X}(a)$ est proche du point de singularité, plus le dernier terme de l'eq. (4.25) est dominant. La série est alors parasitée par ce terme ce qui réduit drastiquement son domaine de validité, et conduit ainsi à l'accumulation des pas de continuation MAN au voisinage de la singularité (comme illustrée sur la figure 4.15). Ce dernier terme permet de définir la présence d'une suite géométrique dans la série calculée initialement. La série optimale, débarrassée de l'influence de la série géométrique, possède un domaine de validité plus grand que la série initiale. Dans la suite, nous montrons comment détecter la progression géométrique et, lorsqu'elle existe, comment la retirer pour conserver la série optimale et profiter des propriétés évoquées. Cette méthode présente donc trois intérêts : détecter la singularité (grâce à la raison de la suite géométrique), "nettoyer" la série initiale en ne conservant pour le calcul de la solution stationnaire que la série optimale et ainsi éviter les accumulations de pas au voisinage de la bifurcation (diminuant ainsi les temps de calculs), mais également déterminer plus facilement les vecteurs du sous-espace associé à la bifurcation.

4.3.2.2 Détection de la progression géométrique

A l'approche d'une bifurcation, une série géométrique vient "parasiter" la série calculée par la MAN. En prenant une série évaluée suffisamment près de la bifurcation, l'importance de la suite géométrique sur la suite optimale est de plus en plus forte. Si l'ordre de troncature est suffisamment élevé pour que la suite géométrique apparaisse, $N = 30$ selon [Cochelin & Medale, 2013], les quatre derniers termes \mathbf{X}_{N-3} , \mathbf{X}_{N-2} , \mathbf{X}_{N-1} et \mathbf{X}_N répondent aux deux critères suivants :

$$\sum_{p=N-3}^{N-2} \left(\frac{|\alpha_p|^{\frac{1}{N-p}}}{|\alpha_{N-1}|} - 1 \right)^2 < \varepsilon_{gpa} \quad , \quad \text{avec } \alpha_p = \frac{\langle \mathbf{X}_p, \mathbf{X}_N \rangle}{\langle \mathbf{X}_N, \mathbf{X}_N \rangle} \quad (4.26)$$

$$\sum_{p=N-3}^{N-1} \left(\frac{\|\mathbf{X}_p^\perp\|}{\|\mathbf{X}_p\|} \right) < \varepsilon_{gpc} \quad , \quad \text{avec } \mathbf{X}_p^\perp = \mathbf{X}_p - \alpha_p \mathbf{X}_N \quad (4.27)$$

avec ε_{gpa} et ε_{gpc} des tolérances choisies par l'utilisateur. Dans ce travail, celles-ci ont été choisies respectivement égales à 10^{-6} et 10^{-3} . Le premier critère peut s'apparenter à un test de proportionnalité entre les différents ordres, puisque la suite géométrique qui va apparaître principalement pour les derniers termes uniformise les normes de ces derniers. Le second critère peut être vu comme un test de colinéarité, si la suite existe pour les derniers termes, ils doivent être colinéaires entre eux.

Si les critères (4.26) et (4.27) sont respectés, alors un point de bifurcation simple de type fourche est détecté à une distance $\alpha_c = \alpha_{N-1}$ du point \mathbf{X}_0 de la série. Cette distance peut être supérieure ou inférieure au domaine de validité de la série, il faut donc utiliser la série optimale pour déterminer la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes .

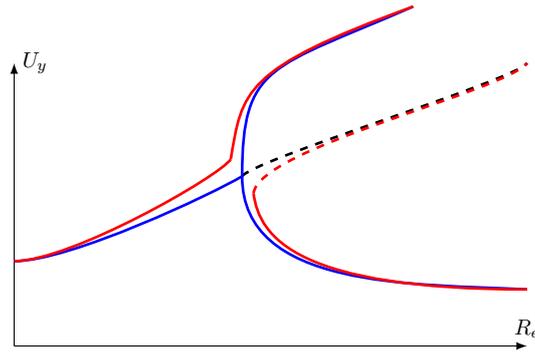


FIGURE 4.17 – Schéma d’une bifurcation stationnaire simple en bleu ; schéma d’une bifurcation stationnaire simple perturbée.

4.3.2.3 Construction de la série optimale

En utilisant la raison géométrique $\frac{1}{\alpha_c}$ et le facteur d’échelle $\alpha_c^N \mathbf{X}_N$, il est possible de calculer les termes de la série optimale tels que :

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i - \alpha_c^{N-i} \mathbf{X}_N, \text{ pour } i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \quad (4.28)$$

La solution nettoyée (4.28) n’est plus dépendante du défaut dû à la bifurcation. Le paramètre critique λ_c et la solution \mathbf{U}_c à la bifurcation stationnaire sont calculés en prenant la distance à la singularité comme paramètre de chemin dans la série nettoyée :

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X}(a = \alpha_c) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_c^i \hat{\mathbf{X}}_i \quad (4.29)$$

4.4 Suivi des solutions post-bifurquées

Une fois la solution à la bifurcation obtenue, il peut être intéressant de calculer les solutions post-bifurquées. En théorie, l’opérateur tangent évalué au point de bifurcation est singulier. Dans la pratique, l’imprécision numérique fait que la solution ne passe jamais exactement par le point critique (illustration d’une bifurcation stationnaire simple perturbé à la figure 4.16) et la matrice tangente n’est donc pas singulière. L’opérateur tangent étant inversible, une solution aux problèmes (4.7) et (4.8) est obtenue, celle-ci pouvant être imprécise (imprécision due par exemple au mauvais conditionnement de la matrice ou encore aux paramètres du calcul). La branche ainsi suivie est une des trois branches post-critiques, sans que l’on sache à l’avance laquelle est suivie. En modifiant certains paramètres numériques (finesse de la discrétisation spatiale, ordre de troncature N et précision η de la MAN) il est possible de reconstruire l’ensemble du diagramme de bifurcation. Cette technique est longue, non-exhaustive et certains calculs peuvent être redondants.

Une alternative plus précise existe. Celle-ci se base sur la théorie de la bifurcation et l’analyse de stabilité [Seydel, 2009].

Le calcul des branches post-bifurquées nécessite de déterminer les vecteurs associés au sous-espace spécifique de l’opérateur tangent évalué au point singulier [Seydel, 2009]. Ceux-ci permettent de calculer les tangentes des deux branches de l’instabilité hydrodynamique par une réduction de Lyapunov-Schmidt [Guevel et al., 2011].

En disposant de la solution et du paramètre critique à la bifurcation grâce aux techniques présentées précédemment, il est possible de les utiliser comme point initial pour une méthode de perturbation, comme proposé initialement dans [Azrar et al., 1993] et adapté dans le contexte de la mécanique du fluide par [Guevel, 2016; Guevel et al., 2011]. Les points principaux de la méthode sont rappelés dans les paragraphes suivants.

4.4.1 Sous-espace de la matrice singulière

Pour les équations de Navier-Stokes, la matrice associée à l'opérateur tangent \mathbf{L}_t^c évalué au point de bifurcation \mathbf{X}_c n'est pas symétrique. Par conséquent, le noyau de cet opérateur et celui de son adjoint (noté L_t^{c*}) sont différents. Ces noyaux sont de dimension 1 dans le cas de bifurcation simple. Dans le cadre de cette étude, l'adjoint est le transposé de l'opérateur tangent, puisque les coefficients de l'opérateur tangent sont tous réels. Si on note Φ le mode droit de bifurcation et Ψ le mode gauche de bifurcation, alors on peut poser les définitions suivantes :

$$\text{Ker}(\mathbf{L}_t^c) = \{\Phi\} \quad , \quad \Phi \in \Omega, \langle \Phi, \Phi \rangle = 1 \quad (4.30)$$

$$\text{Ker}(\mathbf{L}_t^{c*}) = \text{Ker}(\mathbf{L}_t^{c\top}) = \{\Psi\} \quad , \quad \Psi \in \Omega, \langle \Psi, \Phi \rangle = 1 \quad (4.31)$$

On définit également la solution particulière \mathbf{W} , le vecteur unique tel que :

$$\mathbf{L}_t^c(\mathbf{W}) = \mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{W} \in \Omega, \langle \mathbf{W}, \Phi \rangle = 0 \quad (4.32)$$

Puisque la solution particulière est telle que $\mathbf{L}_t^c(\mathbf{W}) = \mathbf{F}$, alors \mathbf{F} appartient à l'image de l'opérateur tangent. Sa projection sur le sous-espace complémentaire orthogonal du noyau de l'opérateur, c'est-à-dire sur le mode gauche Ψ , est nulle :

$$\langle \Psi, \mathbf{F} \rangle = 0 \quad (4.33)$$

En fonction des techniques utilisées, les besoins et les informations déjà connus ne sont pas les mêmes. Ainsi [Vannucci et al., 1998] et [Guevel et al., 2011], le mode de bifurcation est obtenu directement grâce à l'indicateur de bifurcation. De plus, dans [Vannucci et al., 1998], la solution au point singulier est dérivée pour obtenir la solution particulière \mathbf{W} , le mode gauche n'est pas utilisé puisque le problème considéré est symétrique. Par contre, dans [Guevel et al., 2011], l'écriture d'un système augmenté (opérateur régulier) est nécessaire pour calculer la solution particulière \mathbf{W} et le mode gauche Ψ . Une autre technique proposée par [Medale & Cochelin, 2015] permet le calcul du mode gauche Ψ par la méthode de la puissance itérée inverse.

4.4.1.1 Obtention des modes de bifurcation et de la solution particulière

Pour le calcul des branches post-bifurquées émanant du point critique, les vecteurs des sous-espaces de l'opérateur tangent sont nécessaires. L'approche proposée par [Guevel et al., 2011] est présentée ci-dessous. Le mode droit de bifurcation est obtenu par l'utilisation du dernier terme de la série MAN au point de bifurcation donné par les critères (4.26) et (4.27) de la progression géométrique. Le mode droit de bifurcation est donc :

$$\Phi = \Delta \mathbf{U}(a_c) \quad (4.34)$$

La définition (4.31) du mode gauche n'est pas utilisable directement. La définition algébrique du noyau permet de réécrire la définition sous cette autre forme :

$$\mathbf{L}_t^{cT}(\Psi) = 0 \quad , \quad \Psi \in \Omega, \langle \Psi, \Phi \rangle = 1 \quad (4.35)$$

Cette nouvelle forme permet de voir une similitude dans l'équation du mode gauche et celle de la solution particulière. L'opérateur tangent évalué au point critique est singulier. Une solution consiste à construire un système augmenté en ajoutant une condition [Azrar et al., 1993; Vannucci et al., 1998]. Une seule condition est suffisante puisque le rang du noyau est un. Pour la solution particulière, la solution appartient au sous-espace complémentaire orthogonal du noyau de l'opérateur ($\langle \mathbf{W}, \Phi \rangle = 0$). Pour le mode gauche, la condition porte sur la normalisation de celui-ci vis-à-vis du mode droit de bifurcation.

La solution particulière est obtenue en résolvant numériquement le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_t^c & \Phi \\ \Phi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

De la même façon, le mode gauche est obtenu par la résolution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_t^{cT} & \Phi \\ \Phi^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Dans ces deux systèmes algébriques, κ est un multiplicateur de Lagrange. Une fois ces systèmes résolus, les vecteurs Φ, Ψ, \mathbf{W} nécessaires à la construction des branches post-bifurquées sont connus.

4.4.2 Détermination des branches post-bifurquées

Pour une bifurcation stationnaire simple, deux branches se croisent au point de bifurcation [Brezzi et al., 1982]. Ces deux branches solutions $\{\mathbf{X}_i^{b1}\}$ et $\{\mathbf{X}_i^{b2}\}$ sont cherchées sous la forme d'une représentation polynomiale avec le point critique comme point initial :

$$\mathbf{X}_i^{bi}(a) = \mathbf{X}_c + \sum_{j=1}^N a^j \mathbf{X}_j^{bi} \quad , \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (4.38)$$

En injectant l'équation précédente dans l'équation (4.3), et en identifiant suivant les puissances du paramètre de chemin a , les termes de la série sont calculés grâce aux systèmes linéaires suivants :

$$\text{Ordre 1 : } \begin{cases} \mathbf{L}_t^c(\mathbf{U}_1^{bi}) = \lambda_1^{bi} \mathbf{F} \\ \langle u_1^{bi}, u_1^{bi} \rangle + \lambda_1^{bi2} = 1 \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\text{Ordre } k \in \llbracket 2, N \rrbracket : \begin{cases} \mathbf{L}_t^c(\mathbf{U}_k^{bi}) = \lambda_k^{bi} \mathbf{F} - \sum_{j=1}^{k-1} Q(\mathbf{U}_j^{bi}, \mathbf{U}_{k-j}^{bi}) \\ \langle u_k^{bi}, u_1^{bi} \rangle + \lambda_k^{bi} \lambda_1^{bi} = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Cependant, l'opérateur tangent évalué au point critique est singulier et la solution n'est plus unique. La technique de réduction de Lyapunov-Schmidt permet de déterminer les différentes solutions émanant de ce point singulier. En s'appuyant sur les travaux de [Guevel et al., 2011], nous présentons les principales étapes de cette réduction faisant appel aux vecteurs Φ, Ψ et \mathbf{W} . Déjà utilisée dans une étude antérieure [Guevel et al., 2011], les principales étapes de la réduction de Lyapunov-Schmidt sont rappelées.

4.4.3 Équation algébrique de bifurcation

Dans le cas d'une bifurcation stationnaire simple, la réduction de Lyapunov-Schmidt permet de décomposer chacune des tangentes dans le sous-espace vectoriel engendré par le noyau de l'opérateur tangent Φ et son complémentaire orthogonal \mathbf{W} . Les tangentes \mathbf{X}_1^{bi} sont donc des combinaisons linéaires du mode de bifurcation Φ et de la solution particulière \mathbf{W} . Ainsi, à l'ordre 1 de la série, la réduction permet d'écrire :

$$\mathbf{U}_1^{bi} = \lambda_1^{bi} \mathbf{W} + \eta_1^{bi} \Phi \quad (4.41)$$

avec λ_1^{bi} et η_1^{bi} deux réels à déterminer. Le calcul de ces paramètres se fait en projetant le deuxième ordre de la série (eq. (4.40)) sur le mode gauche de bifurcation Ψ . Pour rappel, ce deuxième ordre est solution du problème linéaire :

$$\mathbf{L}_t^c(\mathbf{U}_2^{bi}) = \lambda_2 \mathbf{F} - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_1^{bi}, \mathbf{U}_1^{bi}) \quad (4.42)$$

En utilisant la propriété (4.33), la projection conduit à l'équation suivante :

$$\langle \Psi, \mathbf{Q}(\mathbf{U}_1^{bi}, \mathbf{U}_1^{bi}) \rangle = 0 \quad (4.43)$$

La décomposition (4.41) est insérée dans l'eq. (4.43), les paramètres inconnus sont alors solution de l'équation de bifurcation algébrique :

$$a_b (\lambda_1^{bi})^2 + b_b \lambda_1^{bi} \eta_1^{bi} + c_b (\eta_1^{bi})^2 = 0 \quad (4.44)$$

avec les coefficients définis par :

$$\begin{cases} a_b = \langle \Psi, \mathbf{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) \rangle & (4.45a) \\ b_b = \langle \Psi, \mathbf{Q}(\Phi, \mathbf{W}) + \mathbf{Q}(\mathbf{W}, \Phi) \rangle & (4.45b) \\ c_b = \langle \Psi, \mathbf{Q}(\Phi, \Phi) \rangle & (4.45c) \end{cases}$$

La recherche de la solution de cette équation (4.44) passe par le calcul du discriminant $\Delta = b_b^2 - 4 a_b c_b$. Si ce discriminant est positif, la singularité est une bifurcation stationnaire simple.

Dans le cas général, si $\eta_1^{bi} \neq 0$ et $a_b \neq 0$ la résolution de cette équation du second ordre conduit à la solution suivante :

$$t^{bi} = \frac{\lambda_1^{bi}}{\eta_1^{bi}} = \frac{-b_b + (-1)^i \sqrt{b_b^2 - 4a_b c_b}}{2a_b} \quad (4.46)$$

En prenant en compte l'équation (4.39) et la condition (4.32), le paramètre η_1^{bi} est donné par :

$$\eta_1^{bi} = \frac{1}{\sqrt{t^{bi2} \langle \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle + \langle \Phi, \Phi \rangle + t^{bi2}}} \quad (4.47)$$

D'où, l'expression de λ_1^{bi} :

$$\lambda_1^{bi} = \eta_1^{bi} . t^{bi} \quad (4.48)$$

4.4.4 Développement d'ordre supérieur des solutions post-bifurquées

Pour les deux tangentes calculées précédemment, il faut calculer les termes d'ordre supérieur. Le terme de série \mathbf{U}_k^{bi} est également décomposé selon une réduction de Lyapunov-Schmidt sous la forme :

$$\mathbf{U}_k^{bi} = \lambda_k^{bi} \mathbf{W} + \eta_k^{bi} \Phi + \mathbf{V}_k^{bi} \quad (4.49)$$

Le terme \mathbf{V}_k^{bi} est dans le complémentaire orthogonal du noyau de l'opérateur tangent singulier. Il est obtenu en injectant l'expression (4.49) dans l'équation (4.40) ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t^c(\mathbf{V}_k^{bi}) &= - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_j^{bi}, \mathbf{U}_{k-j}^{bi}) \\ \langle \mathbf{V}_k^{bi}, \Phi \rangle &= 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

Ce système est identique au système (4.36). D'un point de vue numérique, il semble judicieux de profiter de la matrice déjà factorisée lors du calcul de la solution particulière \mathbf{W} .

L'ensemble des vecteurs de la réduction de Lyapunov-Schmidt étant connu, il faut injecter l'équation (4.49) dans la première équation de (4.40) et projeter sur le mode gauche Ψ . La deuxième partie de (4.40) permet d'évaluer λ_k^{bi} et η_k^{bi} avec le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \langle \Psi, \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{W}, \mathbf{U}_1^{bi}) \rangle & \langle \Psi, \tilde{\mathbf{Q}}(\Phi, \mathbf{U}_1^{bi}) \rangle \\ \langle \mathbf{W}, \mathbf{U}_1^{bi} \rangle + \lambda_k^{bi} & \langle \Phi, \mathbf{U}_1^{bi} \rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_k^{bi} \\ \eta_k^{bi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_k \\ \langle \mathbf{V}_k^{bi}, \mathbf{U}_1^{bi} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

en utilisant la définition de g_k suivante :

$$\begin{cases} g_2 &= \langle \Psi, \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{V}_2^{bi}, \mathbf{U}_1^{bi}) \rangle \\ g_k &= \langle \Psi, \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{V}_k^{bi}, \mathbf{U}_1^{bi}) \rangle + \sum_{j=2}^{k-1} \langle \Psi, \mathbf{Q}(\mathbf{U}_j^{bi}, \mathbf{U}_{k-j+1}^{bi}) \rangle \quad \text{pour } k > 2 \end{cases} \quad (4.52)$$

Lorsque les coefficients sont obtenus, il est possible de calculer le terme de la série \mathbf{U}_k^{bi} en utilisant l'équation (4.49). Lorsque l'ensemble des termes est connu, le domaine de validité doit être calculé de la même façon que pour le suivi de branche classique. Les deux branches solutions $\{\mathbf{X}_i^{b1}\}$ et $\{\mathbf{X}_i^{b2}\}$ sont évaluées en leurs a_{max} et $-a_{max}$ respectifs. Les solutions de l'écoulement en ces quatre points sont mémorisées. Elles peuvent servir de point solution régulier pour une méthode de continuation pour suivre la branche désirée par l'utilisateur.

4.4.4.1 Remarque

En fin de pas, après la construction des branches dont les opérateurs sont évalués au point critique, si les test (4.26) et (4.27) est réalisé, il est possible que le critère détecte une bifurcation. Si la raison de la progression géométrique est négative, c'est l'influence de la bifurcation obtenue précédemment (la bifurcation est en amont du pas de continuation actuel) qui se fait encore sentir. Cette influence est due, comme à l'approche, par l'apparition d'une suite géométrique dans les termes de série. Il est alors possible de ne conserver que les termes de la série optimale pour augmenter le domaine de validité et ainsi avoir un premier morceau de branche post-bifurquée plus long. Un "nettoyage" post-bifurcation de la série est alors réalisé.

4.4.5 Cas particulier de la bifurcation stationnaire simple avec brisure de symétrie

Les résultats présentés jusqu'ici sont valables pour les bifurcations stationnaires simples. Un cas particulier simplifie certains calculs dans le cas d'une bifurcation stationnaire simple

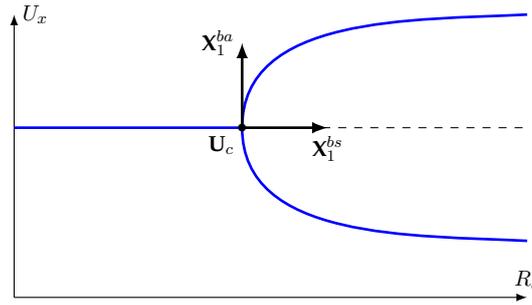


FIGURE 4.18 – Schéma d'une bifurcation fourche stationnaire, et des tangentes associées au point de bifurcation.

pour un écoulement dont la géométrie et les conditions limites sont symétriques. Ce type de problème est caractérisé par la formule $G(-\mathbf{u}, \lambda) = -G(\mathbf{u}, \lambda)$, G définissant l'équation de Navier-Stokes stationnaire (2.2). La bifurcation susceptible d'intervenir sur ces écoulements est spécifique, on parle de bifurcation par brisure de symétrie ou de bifurcation fourche. Dans ce cas, la bifurcation présente un comportement particulier : l'une des deux branches d'une bifurcation est symétrique tandis que l'autre est antisymétrique. L'analyse numérique de bifurcation profite de ces caractéristiques qui simplifient le calcul des branches solutions post-bifurcation. Les domaines de calcul et les conditions aux limites adoptées dans cette thèse font que les bifurcations étudiées relèvent de cette spécificité.

4.4.5.1 Termes d'ordre 1

Si les coefficients a_b et c_b définis à l'équation (4.45) s'annulent alors la bifurcation est une bifurcation fourche. Dans ce cas, les tangentes sont orthogonales entre elles [Seydel, 2009; Werner & Spence, 1984]. Par conséquent, les tangentes à la branche antisymétrique \mathbf{X}_1^{ba} et à la branche symétrique \mathbf{X}_1^{bs} sont colinéaires respectivement à la solution particulière \mathbf{W} et au mode de bifurcation Φ (voir figure 4.18).

De plus, lors d'une brisure de symétrie, le noyau de l'opérateur tangent évalué au point critique est singulier et antisymétrique [Brezzi et al., 1982]. Le mode de bifurcation Φ est alors exactement la tangente de la branche antisymétrique.

En utilisant la réduction de Lyapunov-Schmidt (4.41), les propriétés des vecteurs des sous-espaces (4.32) et (4.31) et le système au premier ordre (4.39), les deux tangentes peuvent être obtenues.

La tangente de la branche antisymétrique, notée \mathbf{X}_1^{ba} , est donnée par :

$$\mathbf{X}_1^{ba} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{ba} \\ \lambda_1^{ba} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

La tangente de la branche symétrique, notée \mathbf{X}_1^{bs} , est donnée par :

$$\mathbf{X}_1^{bs} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{bs} \\ \lambda_1^{bs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1^{bs} \mathbf{W} \\ \lambda_1^{bs} \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\text{avec } \lambda_1^{bs} = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle + 1}}$$

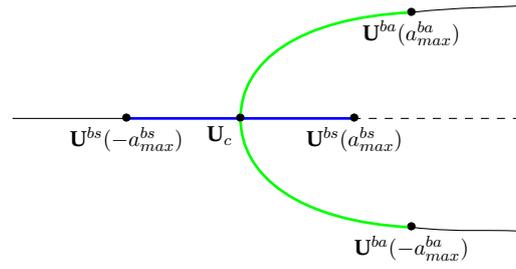


FIGURE 4.19 – Schéma d’une bifurcation fourche stationnaire simple avec les quatre points réguliers solutions du problème.

4.4.5.2 Termes d’ordre supérieur

Le système (4.51) peut être simplifié du fait de l’orthogonalité des tangentes. Pour la branche symétrique, en utilisant en premier lieu la tangente symétrique, les coefficients λ_k^{bi} et η_k^{bi} impliqués dans la réduction de Lyapunov-Schmidt se calculent par les formules simplifiées suivantes :

$$\lambda_k^{bs} = -\frac{\langle \mathbf{V}_k^{bs}, \mathbf{W} \rangle}{\langle \mathbf{W}, \mathbf{W}_{bs} \rangle + 1} \quad (4.55a)$$

$$\eta_k^{bs} = -\frac{g_k}{b_b} \quad (4.55b)$$

avec la formule de g_k donnée par l’équation (4.52).

Pour la branche antisymétrique, l’utilisation de la tangente \mathbf{X}_1^{ba} conduit aux expressions suivantes :

$$\lambda_k^{ba} = -\frac{g_k^{ba}}{b_b} \quad (4.56a)$$

$$\eta_k^{bs} = 0 \quad (4.56b)$$

Le coefficient nul pour la branche symétrique simplifie la formule (4.49) qui devient :

$$\mathbf{U}_k^{ba} = \lambda_k^{ba} \mathbf{W} + \mathbf{V}_k^{ba} \quad (4.57)$$

Les séries $\{\mathbf{X}_i^{ba}\}$ et $\{\mathbf{X}_i^{bs}\}$ sont alors entièrement calculées. Il est donc possible de la même façon que pour le cas général d’évaluer le domaine de validité des séries et d’évaluer les solutions en respectivement $\pm a_{max}^{ba}$ et $\pm a_{max}^{bs}$. Ces quatre points constituent des solutions régulières qui pourront servir de point d’initialisation d’une méthode de continuation comme schématisé sur la figure 4.19.

4.5 Analyse de bifurcation de Hopf

4.5.1 Définition et construction de l’indicateur de bifurcation

La recherche du point de bifurcation de Hopf est à l’intersection de la partie stationnaire et de la partie périodique en temps. La solution au point critique répond à l’équation stationnaire (4.58) et à l’équation instationnaire (1.21) :

$$\begin{cases} L(\mathbf{U}^s) + Q(\mathbf{U}^s, \mathbf{U}^s) + \mathbf{L}_{\mathbf{X}^s}(\mathbf{U}^s) = \lambda^s \mathbf{F} & \text{dans } (\Omega) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } (\Gamma_d) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b & \text{sur } (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.58)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{L}_{\chi^s}(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_d & \text{dans } (\Omega) \times [0; T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } (\Gamma_d) \times [0; T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b & \text{sur } (\Gamma_b) \times [0; T] \end{cases} \quad (4.59)$$

où le couple $(\mathbf{U}^s, \lambda^s)$ est solution du problème stationnaire. La solution est recherchée comme une perturbation $\Delta\mathcal{V}$ à une solution stationnaire \mathbf{U}^s ($\mathbf{U} = \mathbf{U}^s + \Delta\mathcal{V}$). L'équation (4.59) peut donc se réécrire en ne conservant que le premier ordre en $\Delta\mathcal{V}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\Delta\mathcal{V}} + \mathbf{L}_t^s(\Delta\mathcal{V}) = 0 & \text{dans } (\Omega) \\ \Delta\mathcal{V} = 0 & \text{sur } (\Gamma_d) \\ \Delta\mathcal{V} = 0 & \text{sur } (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.60)$$

avec L_t^s défini à l'équation (4.9).

La recherche d'une bifurcation de Hopf consiste en la recherche d'un couple (λ_c, ω_c) , de la solution stationnaire \mathbf{U}^s et du mode $\Delta\mathcal{V}$ solutions des équations (4.58) et (4.60).

Pour la résolution, la perturbation $\Delta\mathcal{V}$ est cherchée sous la forme d'une fonction périodique en temps, définie par :

$$\Delta\mathcal{V}(t) = \Delta\mathbf{V}.e^{i\omega t} \quad (4.61)$$

avec ω la pulsation de l'écoulement périodique, et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Le mode $\Delta\mathbf{V}$ est également complexe.

L'introduction de (4.61) dans l'équation (4.60) conduit au système suivant :

$$\begin{cases} i\omega\mathbf{M}\Delta\mathbf{V} + \mathbf{L}_t^s(\Delta\mathbf{V}) = 0 & (4.62a) \\ \Delta\mathbf{V} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.62b)$$

Le mode complexe peut être séparé en sa partie réelle et sa partie imaginaire, autrement dit $\Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{V}^R + i \Delta\mathbf{V}^I$. La perturbation en vitesse de l'écoulement stationnaire introduit une perturbation en force que l'on va noter $\mu\mathbf{f}$. Dans ce second membre de l'équation (4.63), le scalaire μ désigne l'intensité d'un vecteur force aléatoire \mathbf{f} . Ce scalaire μ est notre indicateur de bifurcation de Hopf.

L'indicateur de bifurcation $\mu\mathbf{f}$ est introduit en tant que second membre dans l'équation (4.63), où μ est un scalaire et \mathbf{f} est un vecteur aléatoire non nul. L'indicateur a la propriété d'être toujours positif et nul à la singularité [Ben Saadi, 1995; Cadou, 1997; Tri, 1996].

Le système complexe à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s) & -\omega\mathbf{M} \\ \omega\mathbf{M} & \mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{V}^R \\ \Delta\mathbf{V}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} & (4.63a) \\ \Delta\mathbf{V} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.63b)$$

Le système précédent permet de mettre en évidence que l'indicateur est bien nul à la bifurcation. En effet, le système précédent est équivalent à un problème aux valeurs propres lorsque le scalaire μ est nul. Trouver une bifurcation de Hopf consiste donc à déterminer les valeurs de la solution stationnaire \mathbf{U}_s et de la pulsation ω pour lesquelles l'indicateur est nul. Dans ce cas, la solution $(\mathbf{U}_s, \omega, \Delta\mathbf{V}^R, \Delta\mathbf{V}^I)$ satisfait exactement un problème aux valeurs propres. On note que la taille de ce système est deux fois supérieure à celle du système défini pour le problème stationnaire (4.58). En passant par la méthode des éléments finis, l'opérateur tangent \mathbf{L}_t

(resp. \mathbf{M}) prend sa forme discrète \mathbf{K}_t (resp. \mathbf{M}). La matrice de l'équation (4.63a) sous forme discrète sera notée $\mathcal{L}_t(\mathbf{U}^s, \omega)$.

Pour être précis, l'indicateur μ est fonction de deux paramètres $\mu(\lambda, \omega)$. La mise en place numérique d'un indicateur μ et d'un mode $\Delta\mathbf{V}$ développés en séries entières de deux paramètres (λ et ω) est très lourde. Dans la suite, seul un développement selon la pulsation ω est réalisé [Cadou, 1997].

Numériquement, cela signifie que l'indicateur est calculé pour un nombre de Reynolds fixé. Pour cette valeur de Reynolds, on détermine l'évolution de l'indicateur en fonction de la pulsation ω . Comme il y a peu de chances d'obtenir une valeur nulle de l'indicateur pour cette valeur de Reynolds choisie, la détermination d'une bifurcation de Hopf à l'aide de l'indicateur de bifurcation nécessite plusieurs calculs d'indicateurs réalisés pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds.

Cette précision apportée, et pour simplifier l'écriture, l'indicateur de bifurcation $\mu(\lambda, \omega)$ est noté simplement μ .

Les inconnues $(\mu, \Delta\mathbf{V})$ sont cherchées comme des expansions polynomiales à l'ordre p de la pulsation ω à partir de la solution connue $(\mu_0, \Delta\mathbf{V}_0)$:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{V}(\omega) = \Delta\mathbf{V}_0 + \omega\Delta\mathbf{V}_1 + \dots + \omega^p\Delta\mathbf{V}_p & (4.64a) \\ \mu(\omega) = \mu_0 + \omega\mu_1 + \dots + \omega^p\mu_p & (4.64b) \end{cases}$$

En identifiant selon les puissances du paramètre ω , la séquence de systèmes linéaires suivant peut être définis :

$$\text{Ordre 0 : } \begin{cases} \mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s) \cdot \Delta\mathbf{V}_0 = \mathbf{f} \\ \mu_0 = 1 \\ \Delta\mathbf{V}_0 = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_d) \\ \Delta\mathbf{V}_0 = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\text{Ordre 1 : } \begin{cases} \mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s) \cdot \Delta\mathbf{V}_1 + i\mathbf{M} \cdot \Delta\mathbf{V}_0 = \mu_1 \mathbf{f} \\ \langle \Delta\mathbf{V}_1, \Delta\mathbf{V}_0 \rangle = 0 \\ \Delta\mathbf{V}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_d) \\ \Delta\mathbf{V}_1 = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.66)$$

$$\text{Ordre } k \in \llbracket 2, p \rrbracket : \begin{cases} \mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s) \cdot \Delta\mathbf{V}_k + i\mathbf{M} \cdot \Delta\mathbf{V}_{k-1} = \mu_k \mathbf{f} \\ 2\langle \Delta\mathbf{V}_k, \Delta\mathbf{V}_0 \rangle + \sum_{r=0}^{k-1} \langle \Delta\mathbf{V}_{k-r}, \Delta\mathbf{V}_r \rangle = 0 \\ \Delta\mathbf{V}_k = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_d) \\ \Delta\mathbf{V}_k = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.67)$$

Pour chaque ordre, le vecteur complexe peut être calculé, ainsi à l'ordre zéro on écrit :

$$\text{Ordre 0 : } \begin{cases} \Delta\mathbf{V}_0 = [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s)]^{-1} \cdot \mathbf{f} \\ \mu_0 = 1 \\ \Delta\mathbf{V}_0 = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_d) \\ \Delta\mathbf{V}_0 = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.68)$$

Comme le vecteur \mathbf{f} est choisi réel, alors le vecteur $\Delta\mathbf{V}_0$ l'est aussi. Cela permet d'obtenir plusieurs propriétés intéressantes sur l'indicateur et sur le vecteur $\Delta\mathbf{V}$, avec la distinction des ordres paire et impaire. De plus pour, le premier calcul, la solution initiale $(\mu_0, \Delta\mathbf{V}_0)$ est inconnue (seule est connue la valeur de la pulsation initiale, généralement choisie égale à zéro).

Il faut donc pour résoudre le premier problème, fixer la valeur initiale de l'indicateur, soit μ_0 . Dans ce travail, on a choisi arbitrairement de prendre $\mu_0 = 1$.

Le problème linéaire à l'ordre 1 s'écrit :

$$\text{Ordre 1 : } \begin{cases} \Delta \mathbf{V}_1 = -i [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s)]^{-1} \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{V}_0 \\ \mu_1 = 0 \\ \Delta \mathbf{V}_1 = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_d) \\ \Delta \mathbf{V}_1 = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.69)$$

A l'ordre 1, le vecteur $\Delta \mathbf{V}_1$ est entièrement imaginaire.

$$\text{Ordre 2 : } \begin{cases} \Delta \mathbf{V}_2 = \mu_2 \Delta \mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}_2^* \\ \mu_2 = \frac{-\langle \Delta \mathbf{V}_1, \Delta \mathbf{V}_1 \rangle - 2\langle \Delta \mathbf{V}_2^*, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle}{2\langle \Delta \mathbf{V}_0, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle} \\ \Delta \mathbf{V}_2 = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_d) \\ \Delta \mathbf{V}_2 = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_b) \\ \text{avec } \Delta \mathbf{V}_2^* = [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s)]^{-1} \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{V}_1 \end{cases} \quad (4.70)$$

A l'ordre 2, le vecteur $\Delta \mathbf{V}_2$ est entièrement réel.

Le calcul peut être généralisé pour les ordres supérieurs, selon qu'ils sont paires ou impaires :

$$\text{Ordre } k \text{ paire } \in \llbracket 2, p \rrbracket : \begin{cases} \Delta \mathbf{V}_k = \mu_k \Delta \mathbf{V}_0 + [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s)]^{-1} \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{V}_{k-1} \\ \mu_k = \frac{-2\langle \Delta \mathbf{V}_k^*, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle - \sum_{r=1}^{k-1} \langle \Delta \mathbf{V}_{k-r}, \Delta \mathbf{V}_r \rangle}{2\langle \Delta \mathbf{V}_0, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle} \\ \Delta \mathbf{V}_k = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_d) \\ \Delta \mathbf{V}_k = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.71)$$

$$\text{Ordre } k \text{ impaire } \in \llbracket 2, p \rrbracket : \begin{cases} \Delta \mathbf{V}_k = i [\mathbf{K}_t(\mathbf{U}^s)]^{-1} \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{V}_{k-1} \\ \mu_k = 0 \\ \Delta \mathbf{V}_k = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_d) \\ \Delta \mathbf{V}_k = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.72)$$

En introduisant les termes calculés selon (4.69-4.72) dans le développement en série (4.64a) et (4.64b), les inconnues $(\Delta \mathbf{V}, \mu)$ peuvent s'écrire (pour un ordre de troncature p paire) :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{V}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ i \Delta \mathbf{V}_1^* \end{pmatrix} + \dots + \omega^{p-1} \begin{pmatrix} 0 \\ i \Delta \mathbf{V}_{p-1}^* \end{pmatrix} + \omega^p \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{V}_p \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.73a)$$

$$\begin{cases} \mu = \mu_0 + \omega^2 \mu_2 + \omega^4 \mu_4 + \dots + \omega^p \mu_p \end{cases} \quad (4.73b)$$

La série étant calculée, son domaine de validité doit être déterminé à l'aide d'un critère identique à celui utilisé lors du calcul de la solution stationnaire par la MAN.

4.5.2 Méthode de continuation sur l'indicateur

Le domaine de validité des séries (4.73) est déterminé comme précédemment et estimé par la pulsation ω_{max} :

$$\omega_{max} = \left(\varepsilon \frac{\|\Delta \mathbf{V}_1\|}{\|\Delta \mathbf{V}_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (4.74)$$

Les séries $\Delta \mathbf{V}$ et μ étant évaluées en ω_{max} , un nouveau point-solution $(\omega_0, \Delta \mathbf{V}_0, \mu_0)$ est obtenu et sert de point de départ pour un nouveau pas de continuation :

$$(\omega_0, \Delta \mathbf{V}_0, \mu_0) \rightarrow (\omega_{max}, \Delta \mathbf{V}(\omega_{max}), \mu(\omega_{max})) \quad (4.75)$$

Toutefois, une attention particulière doit être apportée à la nouvelle définition de μ_0 pour que la nouvelle branche solution coïncide avec la fin de la précédente. Un changement de variable permet de définir la pulsation ω comme un incrément de pulsation $\hat{\omega}$ depuis une pulsation initiale ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + \hat{\omega} \quad (4.76)$$

En prenant l'incrément $\hat{\omega}$ comme nouveau paramètre de perturbation, les inconnues $(\mu, \Delta \mathbf{V})$ peuvent être trouvées, grâce à une expansion polynomiale, par les systèmes suivants :

$$\text{Ordre } 0 : \begin{cases} \mu_0 &= \sqrt{\frac{\langle \Delta \mathbf{V}_0^i, \Delta \mathbf{V}_0^i \rangle}{\langle \Delta \mathbf{V}_0^*, \Delta \mathbf{V}_0^* \rangle}} \\ \Delta \mathbf{V}_0 &= \mu_0 \Delta \mathbf{V}_0^* \\ \text{avec } \Delta \mathbf{V}_0^* &= \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{U}^s, \omega_0) \cdot \mathbf{f} \end{cases} \quad (4.77)$$

avec $\Delta \mathbf{V}_0^i$ la solution initiale au premier pas de la méthode, solution de l'équation (4.68). La forme des différents systèmes semble proche des systèmes de (4.68) à (4.71) surtout en ce qui concerne le calcul de $\Delta \mathbf{V}_k^*$. Mais lors du premier pas, les formes complexes sont découplées, d'où l'utilisation de $K_t(\mathbf{U}^s)$ qui permet d'avoir une matrice de la taille du système initial. Alors que lors des pas suivants, le couplage des formes nécessite l'utilisation de la matrice $\mathcal{L}_t(\mathbf{U}^s, \omega_0)$ dont la taille est deux fois celle du problème initial.

$$\text{Ordre } 1 : \begin{cases} \mu_1 &= -\frac{\langle \Delta \mathbf{V}_1^*, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle}{\langle \Delta \mathbf{V}_0^*, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle} \\ \Delta \mathbf{V}_1 &= \mu_1 \Delta \mathbf{V}_0^* + \Delta \mathbf{V}_1^* \\ \text{avec } \Delta \mathbf{V}_1^* &= i \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{U}^s, \omega_0) \cdot M \cdot \Delta \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (4.78)$$

$$\text{Ordre } k \in \llbracket 2, p \rrbracket : \begin{cases} \Delta \mathbf{V}_k &= \mu_k \Delta \mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}_k^* \\ \mu_k &= \frac{-2 \langle \Delta \mathbf{V}_k^*, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle - \sum_{r=1}^{k-1} \langle \Delta \mathbf{V}_{k-r}, \Delta \mathbf{V}_r \rangle}{2 \langle \Delta \mathbf{V}_0^*, \Delta \mathbf{V}_0 \rangle} \\ \Delta \mathbf{V}_k &= \mu_k \Delta \mathbf{V}_0^* + \Delta \mathbf{V}_k^* \\ \text{avec } \Delta \mathbf{V}_k^* &= i \mathcal{L}_t^{-1}(\mathbf{U}^s, \omega_0) \cdot M \cdot \Delta \mathbf{V}_{k-1} \end{cases} \quad (4.79)$$

Pour un pas de continuation, une seule inversion de matrice est nécessaire. La résolution de systèmes algébriques fait appel soit aux méthodes itératives (algorithme CG, PCS, GMRES, ...) soit aux méthodes directes (LU, Cholesky, ...). Dans la littérature, il est indiqué que les méthodes itératives sont mieux adaptées pour la résolution de systèmes à grand nombre d'inconnues. Cependant, dans le cadre de la thèse où les méthodes font appel à la MAN, le même opérateur tangent est utilisé pour calculer tous les termes de la série : le recours à un solveur direct semble donc plus pertinent (une seule triangulation de matrice pour le calcul de tous les ordres). Ceci est d'ailleurs confirmé par [Cadou et al., 2006].

4.5.3 Exploitation de l'indicateur de bifurcation

Comme nous l'avons vu, un indicateur doit être calculé pour chaque valeur du nombre de Reynolds, sans connaître *a priori* la valeur critique de ce paramètre. Il est fort peu probable

de mener un calcul pour lequel l'indicateur soit strictement égal à zéro pour une valeur de la pulsation. Au mieux, il est possible d'avoir une estimation des paramètres critiques en sélectionnant, parmi les indicateurs calculés pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, la solution qui conduit à la valeur de l'indicateur la plus proche de zéro. De plus, le calcul de l'indicateur est coûteux en temps de calculs, chaque pas de continuation demandant la factorisation d'un nouvel opérateur tangent. La stratégie adoptée consiste donc à exploiter au mieux les informations contenues dans un indicateur et de déterminer les valeurs de la pulsation pour lesquelles l'indicateur est minimum.

L'indicateur étant défini comme une série polynomiale, ses dérivées successives par rapport à la pulsation sont facilement calculées :

$$\frac{d\mu}{d\hat{\omega}} = \mu_1 + 2\hat{\omega}\mu_2 + \cdots + p\hat{\omega}^{p-1}\mu_p \quad (4.80)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\hat{\omega}^2} = 2\mu_2 + 6\hat{\omega}\mu_3 + \cdots + p(p-1)\hat{\omega}^{p-2}\mu_p \quad (4.81)$$

La recherche des minimums locaux de l'indicateur μ consiste à déterminer les valeurs ω_i pour lesquelles la dérivée première est nulle et la dérivée seconde est positive. En pratique, un algorithme de Bairstow est utilisé pour déterminer les racines du polynôme (4.80). Ainsi, pour chaque valeur ω_i trouvée, le 5-uplet $\Lambda_i^T = (\mathbf{U}^s, \mathbf{V}^R, \mathbf{V}^I, \lambda, \omega)_i$ est évalué et pris comme valeur initiale pour la seconde étape de résolution, présentée ci-dessous.

4.5.4 Itération de Newton

L'algorithme de Newton est un algorithme itératif très performant si la solution initiale est dans le voisinage de la solution à obtenir. Ainsi, chaque 5-uplet Λ_i identifié précédemment constitue un point probable depuis lequel une itération de Newton peut converger vers la solution du problème.

Pour l'itération de Newton, les inconnues sont exprimées sous forme incrémentale :

$$\Lambda = \Lambda_i + \Delta\Lambda \quad (4.82)$$

où $\Delta\Lambda$ désigne l'incrément du vecteur des inconnues.

Comme il a été souligné, les indicateurs sont calculés pour des nombres de Reynolds fixés, il est donc probable que le nombre de Reynolds critique soit différent des nombres auxquels les indicateurs ont été calculés (cf. figure 4.20). Il faut donc que l'algorithme de Newton corrige également le nombre de Reynolds à travers le paramètre de charge λ et la solution stationnaire \mathbf{U}^s .

La décomposition (4.82) est introduite dans (4.58) et (4.62), le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t^i(\Delta\mathbf{U}_i) - \Delta\lambda = \mathbf{R}_s \\ \mathbf{L}_t^i(\Delta\mathbf{V}^R) + \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i^R, \Delta\mathbf{U}^s) + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{U}^s, \mathbf{V}_i^R) - \omega_i\mathbf{M}\Delta\mathbf{V}^I - \Delta\omega\mathbf{M}\mathbf{V}_i^I = \mathbf{R}_R \\ \mathbf{L}_t^i(\Delta\mathbf{V}^I) + \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i^I, \Delta\mathbf{U}^s) + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{U}^s, \mathbf{V}_i^I) + \omega_i\mathbf{M}\Delta\mathbf{V}^R + \Delta\omega\mathbf{M}\mathbf{V}_i^R = \mathbf{R}_I \\ \Delta\mathbf{V}^R = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_d) \cup (\Gamma_b) \\ \Delta\mathbf{V}^I = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_d) \cup (\Gamma_b) \end{cases} \quad (4.83)$$

où \mathbf{L}_t^i est l'opérateur tangent évalué en \mathbf{U}_i , et R_s, R_R et R_I sont, respectivement, le résidu

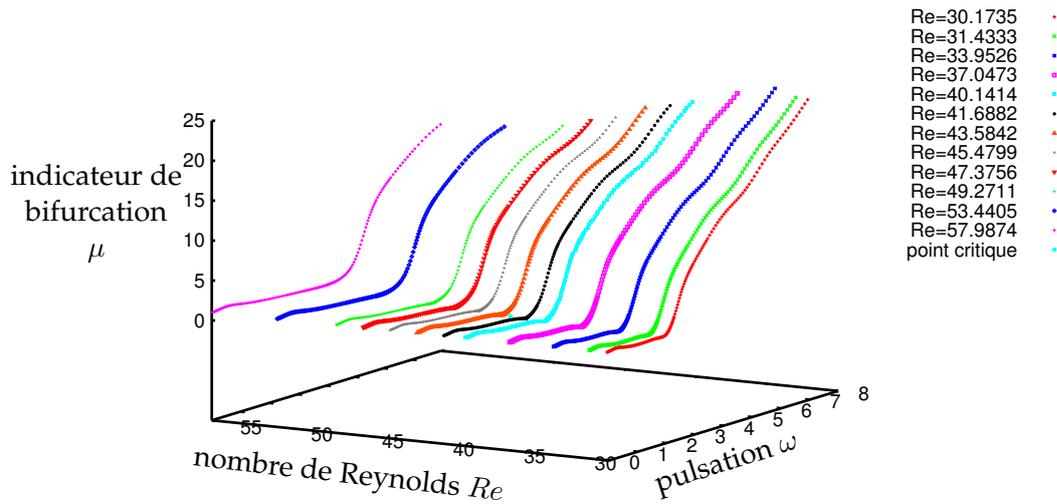


FIGURE 4.20 – Représentation des indicateurs de bifurcation de Hopf en fonction du nombre de Reynolds et de la pulsation.

statique, et le résidu "dynamique" réel et le résidu "dynamique" imaginaire :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_s &= -\mathbf{L}_t^i(\mathbf{U}_i^s) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i^s, \mathbf{U}_i^s) - \lambda_s \mathbf{F} \\
 \mathbf{R}_R &= -\mathbf{L}_t^i(\mathbf{V}_i^R) - \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i^R, \mathbf{U}_i^s) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i^s, \mathbf{V}_i^R) + \omega_i M \mathbf{V}_i^I \\
 \mathbf{R}_I &= -\mathbf{L}_t^i(\mathbf{V}_i^I) - \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i^I, \mathbf{U}_i^s) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i^s, \mathbf{V}_i^I) - \omega_i M \mathbf{V}_i^R
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Afin de bien poser le problème, des conditions de normalisation sont ajoutées :

$$\langle l, \mathbf{V}^R \rangle = 0 \tag{4.85a}$$

$$\langle l, \mathbf{V}^I \rangle = 0 \tag{4.85b}$$

avec l un vecteur constant choisi arbitrairement. Ces normalisations facilitent la mise en œuvre de la méthode mais peuvent mener à des point limites [Brezillon et al., 2010; Jepson, 1981; Poliashenko & Aidun, 1995]. Les itérations de Newton permettent d'obtenir, à une tolérance près, les valeurs de Λ_c à la bifurcation (cf. figure 4.21).

L'algorithme de Newton s'arrête si le critère sur le vecteur résidu suivant est respecté :

$$\|G(\Lambda)\| < \epsilon \tag{4.86}$$

où $\|\bullet\|$ désigne la norme euclidienne.

A la fin de l'itération de Newton, une fois que la convergence de tous les 5-uplet Λ_i sélectionnés a été testée, un nouvel indicateur est calculé pour un autre nombre de Reynolds. Ce nouveau calcul fournit de nouvelles valeurs initiales à l'algorithme de Newton. Dans la référence [Brezillon et al., 2010], les auteurs ont montré que les solutions initiales Λ_i obtenues pour différentes valeurs de nombre de Reynolds permettaient à l'algorithme de Newton de converger vers la solution associée à la bifurcation de Hopf même si l'indicateur est calculé pour un nombre de Reynolds "relativement" loin de la valeur critique Re_c . Ainsi, cette méthode de résolution s'affranchit de devoir calculer des solutions à des nombre de Reynolds très proche de la valeur critique Re_c et permet d'identifier, à moindre coût, pour un calcul d'indicateur plusieurs solutions initiales qui convergent vers la bifurcation.

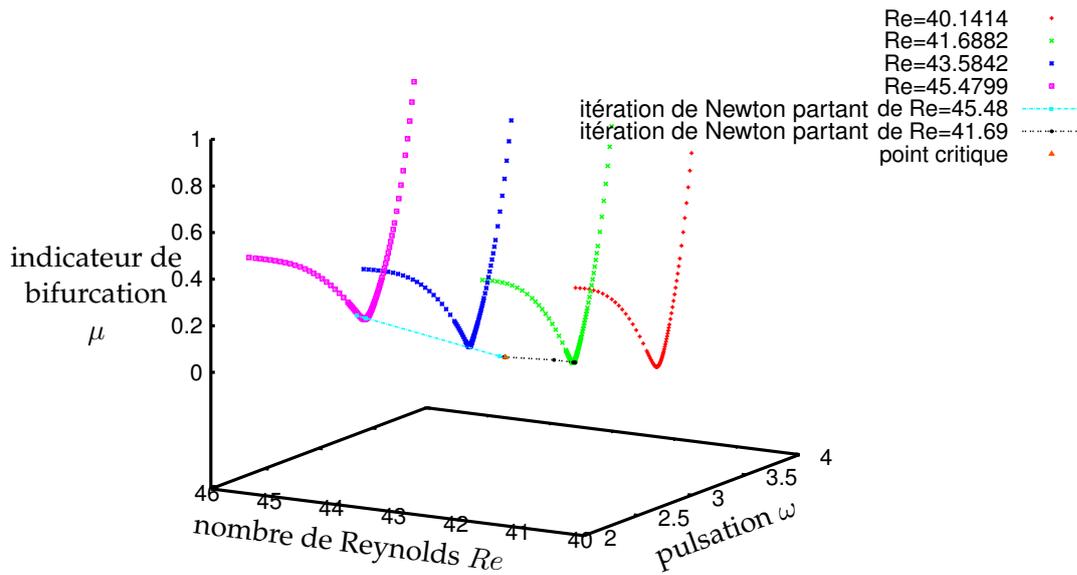


FIGURE 4.21 – Représentation de quatre courbes indicateur de bifurcation de Hopf en fonction du nombre de Reynolds et de la pulsation au voisinage de la solution critique. La convergence de Newton depuis deux valeurs initiales est schématisée.

4.6 Résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires avec prise en compte de l'IFS

On rappelle ici que la discrétisation spatiale proposée dans le cadre de cette thèse repose sur la méthode des éléments finis associée à une méthode des frontières immergées. Cette dernière permet de décrire la présence d'obstacle (mobile ou non) au sein du fluide.

Dans ce chapitre, il est proposé un solveur temporel basé sur les développements asymptotiques pour la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires.

Nous cherchons à résoudre ce problème en utilisant les méthodes développées dans le contexte de la Méthode Asymptotique Numérique. Une technique d'homotopie et une technique de perturbation seront utilisées. Un schéma d'intégration temporelle sera également utilisé. Braikat *et al.* [Braikat et al., 2002] montrent que l'ordre dans lequel ces étapes sont effectuées est capital pour l'efficacité de la résolution. [Cochelin & Compain, 2000] propose un algorithme commençant par l'homotopie puis la perturbation et enfin la discrétisation temporelle. Une autre séquence envisagée commence par la discrétisation, suivie de l'homotopie puis de la perturbation. Cette séquence, notée tHP, est proposée par [Jamal et al., 2002]. Une version à ordre adaptatif, permettant un gain de temps, est proposée par [Guevel, 2016]. Pour la thèse, nous avons retenu la méthode tHP à ordre adaptatif dont les principales étapes sont rappelées.

On rappelle que l'équation du mouvement d'un fluide incompressible et newtonien, en présence d'un solide rigide dont la vitesse est \mathbf{u}_b , est modélisée par les équations de Na-

vier-Stokes/Brinkman suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\mathbf{U} - \mathbf{u}_b) = \mathbf{F} & \text{dans } (\Omega) \times [0; T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } (\Gamma_d) \times [0; T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b & \text{sur } (\Gamma_b) \times [0; T] \end{cases} \quad (4.87)$$

où \mathbf{L}_{χ_s} est l'opérateur dû à la pénalisation du solide, et \mathbf{F} est le vecteur pseudo-force provenant de l'imposition des conditions aux limites sur Γ_d conformément à l'équation (1.21).

Dans le cadre d'une méthode de perturbation, un changement de variable est réalisé sur le vecteur inconnu \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t_0) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \quad (4.88)$$

pour lequel \mathbf{U}_0 est un vecteur défini à l'instant initial t_0 , et $\mathbf{V} := \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ est le nouveau vecteur inconnu à l'instant t dépendant du temps et de l'espace. Notons $\dot{\mathbf{V}}$ l'accélération qui est connue au temps initial. La solution à l'instant initial $t = t_0$ est le couple $(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{V}})$.

L'équation du mouvement (4.87) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{L}_t^0(\mathbf{V}) + \mathbf{Q}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{F}_0 \quad (4.89)$$

avec la définition de l'opérateur tangent :

$$\mathbf{L}_t^0(\bullet) = \mathbf{L}(\bullet) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \bullet) + \mathbf{Q}(\bullet, \mathbf{U}_0) + \mathbf{L}_{\chi_s}(\bullet) \quad (4.90)$$

et le second membre :

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{L}(\mathbf{U}_0) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0) - \mathbf{L}_{\chi_s}(\mathbf{U}_0 - \mathbf{u}_b) \quad (4.91)$$

4.6.1 Solveur d'ordre élevé par association Homotopie/Perturbation

Une étape de discrétisation spatiale est réalisée sur l'équation (4.89). Dans le cadre de cette thèse, il est choisi d'appliquer successivement la méthode d'homotopie puis la méthode de perturbation sur les équations discrètes, conformément aux travaux menés par [Braikat et al., 2002; Guevel, 2016; Jamal et al., 2002]. Dans la suite de l'exposé, on note \mathbf{V}_n la valeur discrète de \mathbf{V} à l'instant t_n : $\mathbf{V}_n \approx \mathbf{V}(t_n)$

4.6.1.1 Discrétisation temporelle

L'intégration temporelle est réalisée en utilisant un θ -schéma, dont l'implémentation est relativement simple. De plus, il est inconditionnellement stable si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ [Jedrzejewski, 2006]. La discrétisation de $\dot{\mathbf{V}}$ par le θ -schéma est [Azaïez et al., 2011] :

$$\dot{\mathbf{V}}_{n+1} = \frac{1}{\theta\Delta t}(\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_n) - \frac{1-\theta}{\theta}\dot{\mathbf{V}}_n \quad (4.92)$$

L'équation (4.92) est injectée dans l'équation (4.89), dans laquelle l'inconnue est le vecteur \mathbf{V}_{n+1} [Jamal et al., 2002]. Le problème non-linéaire à résoudre devient :

$$K_t^0 \mathbf{V}_{n+1} + \mathbf{Q}(\mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}) = \mathbf{F}_p \quad (4.93)$$

avec :

$$\begin{aligned} K_t^0 &= \left[\frac{1}{\theta\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{L}_t^0 \right] \\ \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_0 + \frac{1}{\theta\Delta t} \mathbf{M} \left(\mathbf{V}_n + (1-\theta)\Delta t \dot{\mathbf{V}}_n \right) \end{aligned}$$

4.6.1.2 Méthode de l'homotopie

La méthode de l'homotopie consiste à passer continûment d'un problème difficile à résoudre à un problème dont la solution est plus facile à déterminer. Pour définir cette transformation, l'équation (4.93) est modifiée en introduisant un paramètre ε dont la valeur est comprise entre 0 et 1 :

$$K_t^0 \mathbf{V}_{n+1} + \varepsilon \mathbf{Q}(\mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}) = \mathbf{F}_p \quad (4.94)$$

Ainsi, le problème facile (ici linéaire) est obtenu pour $\varepsilon = 0$ et le problème initial (plus difficile car non-linéaire) à résoudre est défini quand $\varepsilon = 1$.

4.6.1.3 Méthode de la perturbation

Comme il a été vu précédemment, la méthode de perturbation consiste à chercher l'inconnue sous la forme d'une représentation polynomiale. L'inconnue \mathbf{V}_{n+1} est cherchée sous la forme d'une série tronquée à l'ordre N en fonction du paramètre d'homotopie ε :

$$\mathbf{V}_{n+1}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \mathbf{W}_{n+1}^{\{i\}} \quad (4.95)$$

Le vecteur $\mathbf{W}_{n+1}^{\{i\}}$ est le i -ème terme de série au pas de temps $n + 1$. L'accélération $\dot{\mathbf{V}}_{n+1}$ est calculée par la formule (4.92).

En introduisant la représentation polynomiale (4.95) dans l'équation (4.94), et en identifiant par puissance de ε , le système non-linéaire devient un ensemble de systèmes linéaires :

$$\begin{cases} K_t^0 \mathbf{W}_{n+1}^{\{0\}} = \mathbf{F}_p & (4.96a) \\ K_t^0 \mathbf{W}_{n+1}^{\{k\}} = \mathbf{FQ}^{\{k\}} & , \quad k \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases} \quad (4.96b)$$

avec

$$\mathbf{FQ}^{\{k\}} = - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}(\mathbf{W}^{\{i\}}, \mathbf{W}^{\{k-1-i\}})$$

Comme dans les chapitres précédents, on tire avantage que l'opérateur tangent K_t^0 soit conservé pour tous les ordres k de résolution.

Pour chaque terme d'ordre k , le calcul du domaine de validité de la série est réalisé avec le critère développé par [Baguet & Cochelin, 2003] :

$$\varepsilon_{max}^{\{k\}} = \left(\frac{\eta}{\|\mathbf{FQ}^{\{k+1\}}\|} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (4.97)$$

Cette définition est basée sur la qualité de la solution car les auteurs [Baguet & Cochelin, 2003] montrent que le second membre $\mathbf{FQ}^{\{k+1\}}$ est une bonne estimation du résidu $\mathbf{R}_{n+1}^{\{k+1\}}$. Le critère porte donc sur un écart avec la solution.

Tant que $\varepsilon_{max}^{\{k\}} < 1$, un ordre k supplémentaire est déterminé grâce à la résolution du système linéaire (4.96) afin d'améliorer la qualité de la solution et donc d'augmenter le domaine de validité du paramètre d'homotopie ε . Si $\varepsilon_{max}^{\{k\}} \geq 1$ alors l'incrément en vitesse \mathbf{V}_{n+1} est calculé avec $\varepsilon = 1$, ainsi que l'incrément en accélération $\dot{\mathbf{V}}_{n+1}$. Cette adaptation de l'ordre de

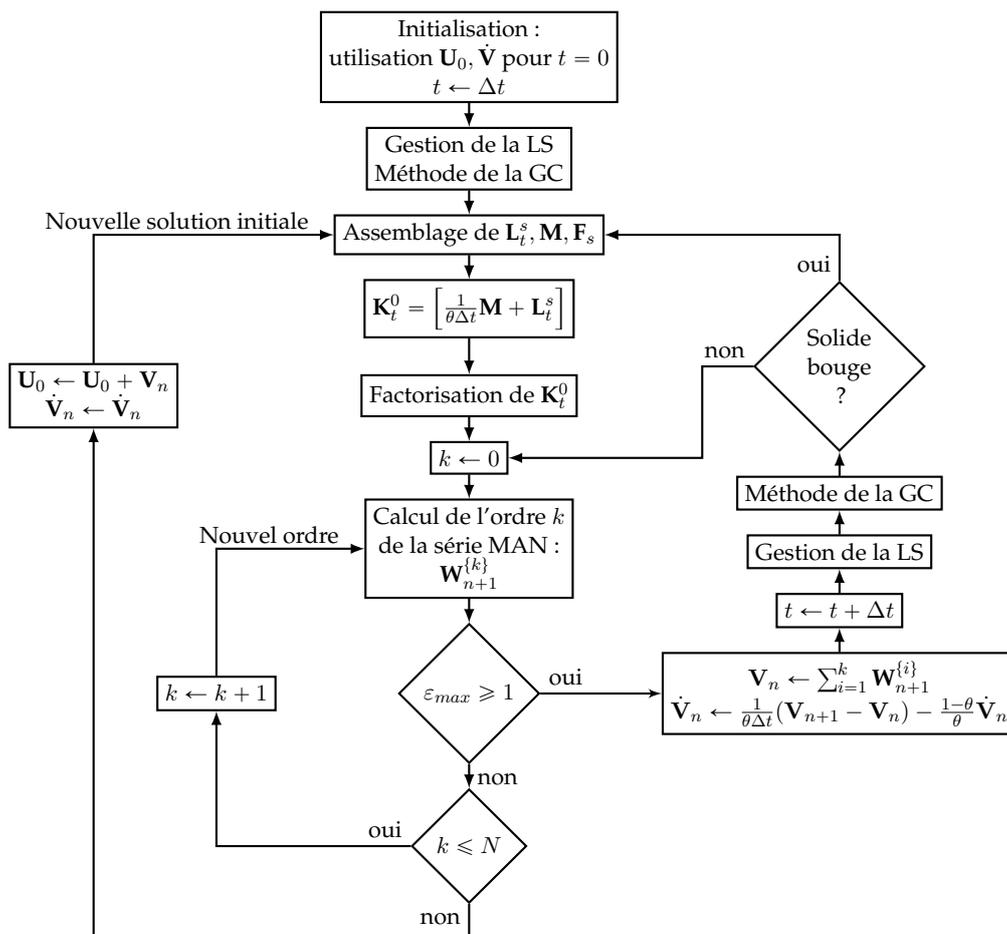


FIGURE 4.23 – Algorithme de la méthode tHP avec ordre adaptatif et prise en compte de l'IFS.

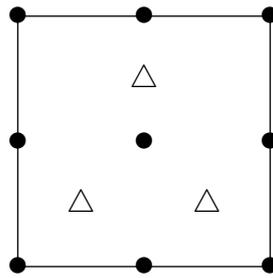


FIGURE 4.24 – Élément fini mixte vitesse/pression de type Q9/3 à neuf nœuds (symbole ‘●’ pour l’évaluation des vitesses) et trois points d’intégration (symbole ‘△’ pour l’évaluation de la pression).

simulation par éléments finis en utilisant une méthode de Galerkin. Les premiers développements du code datent de 1980 et portent sur les problèmes de calcul des structures en 2D. Les méthodes MAN sont incorporées dans le code et permettent la résolution des équations de Navier-Stokes [Cadou, 1997]. Les indicateurs de bifurcation stationnaire et de Hopf [Brezillon et al., 2010] ainsi que les méthodes de résolution en instationnaire tHP sont ajoutées [Guevel, 2016]. L’ensemble de ces développements permet d’utiliser le code EVE pour l’élaboration et la mise en œuvre de procédures numériques spécifiques à l’analyse des écoulements en IFS.

Ce code de calcul utilise, pour la résolution des équations de la mécanique des fluides, des éléments mixtes vitesse/pression. Ces éléments utilisent une interpolation quadratique complète sur neuf nœuds en vitesse et une interpolation linéaire sur trois nœuds en pression (figure 4.24). Ces éléments, nommés Q9/3 dans [Zienkiewicz & Taylor, 2000], respectent la condition LBB [Zienkiewicz & Taylor, 2000]. Les discontinuités en pression, stabilisées par l’utilisation d’une interpolation linéaire, autorisent une condensation de la pression (au niveau élémentaire) pour l’équation de la conservation de la masse. Cette condition s’exprime alors comme une pseudo-incompressibilité, et l’équation de la condition de continuité s’exprime :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{k} p \quad (4.98)$$

avec $k \in \mathbb{R}$ le paramètre de pénalisation de la pression. Ce paramètre peut être choisi arbitrairement grand, ou pris selon un rapport d’une grandeur physique (viscosité ou nombre de Reynolds par exemple). Dans le cadre de cette thèse où seules de petites valeurs du nombre de Reynolds sont considérées, le paramètre est fixé pour l’ensemble des simulations à une valeur $k = 10^7$.

Un avantage de cette méthode est la possibilité de résoudre le problème uniquement en vitesse, et donc d’avoir un degré de liberté de moins. Cette particularité est intéressante d’un point de vue numérique avec des opérateurs algébriques de moindres tailles.

Le logiciel utilise une méthode de décomposition LU pour la résolution des systèmes linéaires. Compte tenu de la taille des opérateurs, la préconisation générale est d’utiliser une méthode itérative pour gagner du temps et pour économiser de la place mémoire. Cependant il a été démontré que l’utilisation de la librairie MUMPS (dans le cas de l’expansion soudaine en 2D et 3D) était plus rapide dans les deux cas que deux solveurs itératifs utilisés (BiCGStab+ILUt pour le 2D et BiCGStab($l = 4$) pour le 3D) [Guevel et al., 2017]. La comparaison concernant la place nécessaire en mémoire est moins évidente. Pour le 2D la tendance dépend du préconditionneur utilisé, mais la place nécessaire à l’utilisation de MUMPS est du même ordre de grandeur que BiCGStab+ILUt. Alors que pour les problèmes 3D, le solveur BiCGStab($l = 4$)

est plus intéressant que MUMPS. Le solveur itératif BiCGStab($l = 4$) est utilisé car le solveur itératif BiCGStab+ILUt utilisant un prédontionneur de type ILut (décomposition incomplète de Choleski) demande trop de place mémoire.

Pour plus d'information concernant le logiciel EVE ou sur la condensation de la pression, le lecteur est invité à se référer à [Cadou, 1997; Cadou et al., 2001; Cochelin et al., 2007; Guevel, 2016; Guevel et al., 2011].

Conclusion

Les développements de la méthode asymptotique numérique permettant de prendre en compte la présence d'un solide au sein d'un écoulement ont été présentés. De plus, au sein du logiciel de calcul choisi, les implémentations nécessaires à cette modalisation ont été mises en place. Ainsi, la méthode de la pénalisation et la méthode Ghost-Cell sont intégrées et sont compatibles avec les fonctions déjà existantes dans le logiciel.

Une procédure permettant de simuler au cours du temps des problèmes d'interaction fluide-structure grâce à une méthode de perturbation a été expliquée. Cette procédure s'appuie sur des techniques qui ont fait, chacune dans leur domaine, leurs preuves. Cette procédure a été implémentée dans le logiciel du laboratoire, EVE.

Dans le chapitre suivant, nous allons tester la fiabilité, la robustesse et les limites de ces méthodes grâce à quelques exemples numériques.

Troisième partie

Résultats numériques

5

Etudes numériques et Validation

Dans les chapitres précédents, des méthodes de résolution de problèmes non-linéaires stationnaires ou instationnaires ainsi que des algorithmes d'analyse numérique de bifurcation ont été présentés.

Ces algorithmes reposent sur l'utilisation conjointe d'une méthode de perturbation (MAN) et d'une discrétisation spatiale particulière. Celle-ci associe une discrétisation par éléments finis (pour le domaine de calcul fluide) à une méthode de frontières immergées (pour la prise en compte des obstacles solides et l'interaction fluide-structure).

L'objectif de ce chapitre est donc d'évaluer la précision et la robustesse des algorithmes proposés. En particulier pour la méthode MFI, l'apport de la méthode Ghost-Cell à la méthode de pénalisation est évalué. De plus, une étude sur l'influence des paramètres numériques tels que la valeur de la pénalisation K , la finesse du maillage et les paramètres de calcul MAN, est proposée.

A cet effet, l'analyse de bifurcation stationnaire est réalisée sur le cas académique de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible visqueux dans une conduite avec expansion et contraction [Mizushima et al., 1996]. Il s'agit d'un écoulement qui présente deux bifurcations stationnaires [Guevel et al., 2011; Mullin et al., 2003].

L'analyse de bifurcation de Hopf est réalisée pour le problème de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible autour d'un cylindre, soit de forme carrée, soit de forme circulaire. Pour ces deux problèmes, une bifurcation de Hopf existe [Aagnaou et al., 2016; Cadou, 1997; Wissink, 1995].

Enfin, l'algorithme d'intégration temporelle est testé sur le cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. Dans ce cas, deux configurations sont envisagées et testées. Dans un premier temps, le cas de l'obstacle fixe est considéré. Puis, afin d'aborder la problématique de l'IFS, le cas d'un obstacle mobile soumis à un mouvement vertical sinusoïdal est étudié.

5.1 Bifurcation stationnaire

5.1.1 Description du cas d'étude

Le cas d'étude retenu est celui présenté par Mizushima *et al.* [Mizushima et al., 1996]. Il s'agit d'étudier l'écoulement incompressible 2D d'un fluide newtonien dans une conduite présentant une expansion suivie d'une contraction (voir la figure 5.1). Cet écoulement a été étudié pour de nombreux ratios d'aspect géométrique. Le modèle considéré dans cette thèse possède un ratio d'aspect $E = H/h = 3$ et $A = l/L = 3/8$.

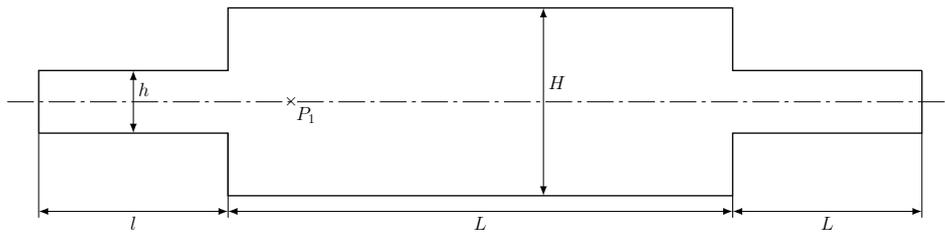


FIGURE 5.1 – Géométrie de la conduite avec expansion soudaine suivie d’une contraction soudaine.

Les valeurs numériques (supposées constantes) du fluide considéré sont $\rho_f = 10 \text{ g/cm}^{-3}$ et $\mu = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Le solide n’est distingué du fluide que par son paramètre de pénalisation. Sa masse volumique est prise telle que $\frac{\rho_f}{\rho_s} \approx 1$ pour pouvoir obtenir un couplage fort [Baumgartner et al., 2015].

Les conditions aux limites retenues tout au long de cette étude sont des conditions de type Dirichlet. Ainsi, un profil de vitesse parabolique d’intensité $\lambda u_{d_{max}}$ selon la direction x est appliqué sur le bord Γ_e de la conduite. Le paramètre λ permet de régler (automatiquement) l’intensité de la vitesse imposée. Des conditions de vitesse nulle sont appliquées sur toutes les parois de la conduite à l’exception de Γ_e et de Γ_s . Enfin, aucune condition explicite de sortie (ni en vitesse, ni en pression) n’est appliquée sur le bord Γ_s (voir figure 5.2). La condition est donc régit par le condition implicite de la modélisation éléments finis portant sur la pression.

Dans ces conditions, en utilisant la longueur $h/2$ comme longueur caractéristique, le nombre de Reynolds suivant est défini :

$$Re = \frac{\rho h \lambda u_{d_{max}}}{2\mu} \quad (5.1)$$

Dans la suite de l’étude, plusieurs modèles sont comparés. Un modèle "True Boundary" (TB) nous sert de référence. Celui-ci se base sur une discrétisation spatiale par éléments finis conforme au domaine de calcul représenté par la conduite. Les autres modèles font appel à la méthode des frontières immergées. Dans ce cas, les parois de la conduite ne coïncident pas forcément aux limites du domaine de calcul, ce dernier étant un rectangle, discrétisé par des éléments finis selon un maillage cartésien réglé. On rappelle que les obstacles immergés (ici les parois de la conduite) sont modélisés par l’isovaleur zéro de la fonction Level-Set.

Le maillage de référence (TB) et la partie fluide du maillage cartésien utilisé pour les premiers tests possèdent 24 337 nœuds et 5 964 éléments. Ces maillages bien que grossiers, ont une structure identique, ce qui va permettre de focaliser l’analyse sur les méthodes et non sur la discrétisation spatiale. De plus, l’isovaleur zéro de la fonction Level-Set est définie pour coïncider avec les faces des éléments finis.

L’ordre de troncature N et la tolérance η sont des paramètres MAN qui ont une influence mais qui sont aujourd’hui maîtrisés. Ainsi, depuis les travaux [Cochelin & Medale, 2013; Guevel, 2016] on sait qu’un nombre relativement important de termes de série (de l’ordre de 30 à 40) est nécessaire pour l’analyse de bifurcation. De même, afin d’obtenir des diagrammes de bifurcation suffisamment précis, la valeur de η ne doit pas être trop élevée. Ainsi, les études précédentes basées sur la MAN ont montré qu’un compromis précision/coût de calcul doit être trouvé. Les résultats numériques, présentés dans la suite de ce paragraphe et en accord avec les conclusions des travaux précédents, ont été obtenus en fixant les paramètres MAN aux valeurs suivantes : $N = 30$ et $\eta = 10^{-7}$.

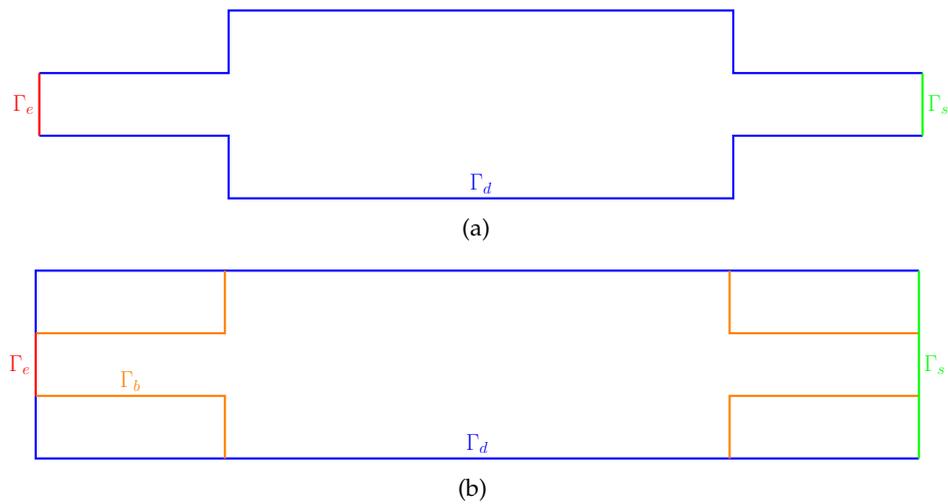


FIGURE 5.2 – Frontière de la conduite avec expansion soudaine suivie d'une contraction soudaine : (a) Domaine utilisé pour la condition de bord de type Dirichlet, dit "True Boundary" (TB); (b) Domaine de calcul utilisé pour les méthodes MFI (frontière immergée en rouge).

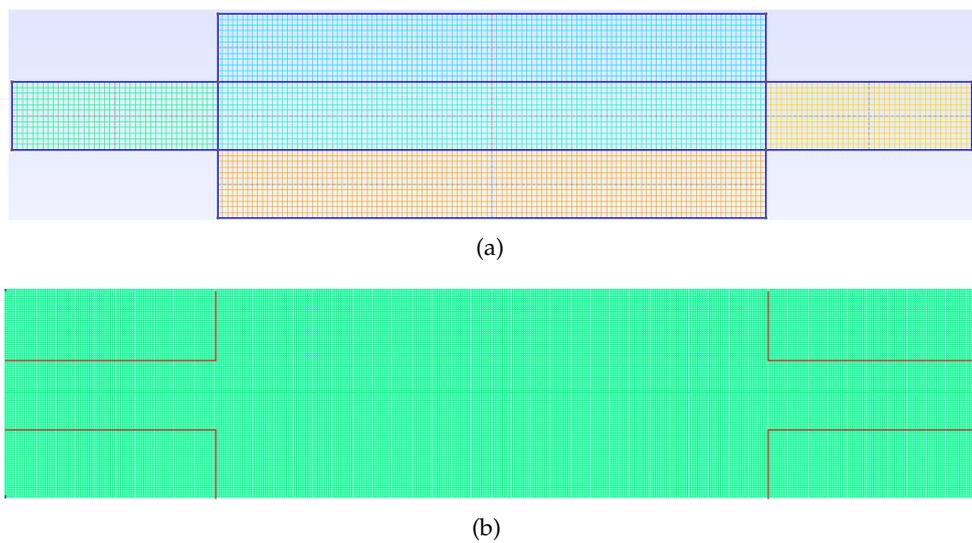


FIGURE 5.3 – (a) Maillage avec condition de bord de type Dirichlet, dit "True Boundary" (TB); (b) maillage du domaine de calcul utilisé pour les méthodes MFI (frontière immergée en rouge).

	Re_{c_1}	Re_{c_2}	$Re_{c_{PL}}$
[Mizushima et al., 1996]	41, 1	X	111, 0
[Guevel et al., 2011]	41, 75	105, 96	112, 0
[Guevel, 2016]	41, 7	106, 5	111, 2
EVE + MAN + TB	41, 72	106, 14	111, 48
EVE + MAN + TB _{fin}	41, 76	106, 39	

TABLE 5.1 – Valeurs du nombre de Reynolds pour les deux bifurcations stationnaires (B1 et B2) et pour le point limite (PL).

5.1.2 Résultats de référence

D'après la littérature [Guevel et al., 2011; Mizushima et al., 1996], l'écoulement est d'abord symétrique jusqu'à la première bifurcation stationnaire (pour une valeur du nombre de Reynolds Re_{c_1}). En ce point, la solution perd son unicité et trois solutions émergent. Une solution correspond à un écoulement instable et symétrique. Deux autres solutions correspondent à des écoulements stables et symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe horizontal (x). Le parcours de ces branches solutions, à mesure que le nombre de Reynolds augmente, conduit à la seconde bifurcation stationnaire (pour un nombre de Reynolds Re_{c_2}), où les solutions se rejoignent. Au delà de cette bifurcation, une seule solution, stable et symétrique, existe.

Les résultats "de référence" sont obtenus avec le modèle "True Boundary" (TB). Ainsi, pour la configuration de la conduite retenue ($E = 3$, $A = 8/3$), deux bifurcations sont obtenues pour des nombres de Reynolds critiques, $Re_{c_1} = 41, 72$ et $Re_{c_2} = 106, 14$, très proches de ceux obtenus dans la littérature [Guevel et al., 2011; Mizushima et al., 1996]. Une comparaison des résultats est proposée dans la table 5.1. Un maillage beaucoup plus fin, noté "TB fin", a été testé (quatre fois plus de nœuds). La précision apportée ($\epsilon_r < 0, 3 \%$) sur les nombres de Reynolds critiques ne justifie pas l'utilisation d'un maillage si fin qui augmente significativement la taille des opérateurs.

De plus, en relevant la composante de la vitesse selon la direction y au point P1 (voir figure 5.1), le diagramme de bifurcation de la figure 5.5 est obtenu. Celui-ci est très proche du diagramme présenté par [Guevel et al., 2011] (voir figure 5.4) et correspond au comportement attendu.

5.1.3 Résultats avec l'algorithme LP

Une analyse de bifurcation est réalisée en utilisant cette fois-ci le modèle de frontières immergées. La frontière entre le fluide et la conduite est modélisée par la méthode Level-Set (L). Le solide est pris en compte dans l'équation par la méthode de la pénalisation (P) avec un coefficient de pénalisation $K = 10^{-2}$. En revanche, la méthode Ghost-Cell n'est pas utilisée dans ce premier test.

La recherche des bifurcations est effectuée en utilisant le critère de détection d'une suite géométrique (eq. (4.26) et eq. (4.27)). Le diagramme de bifurcation obtenu est présenté figure 5.6 et correspond quasi-parfaitement au diagramme de référence.

Pour obtenir ce diagramme, le calcul a nécessité 10 pas de continuation pour décrire la branche asymétrique et 12 pas pour la branche symétrique. On note l'accumulation de pas à l'approche des points singuliers (ici : deux points de bifurcation et un point limite) ce qui est cohérent avec le comportement de la MAN observé dans les études antérieures [Cadou, 1997;

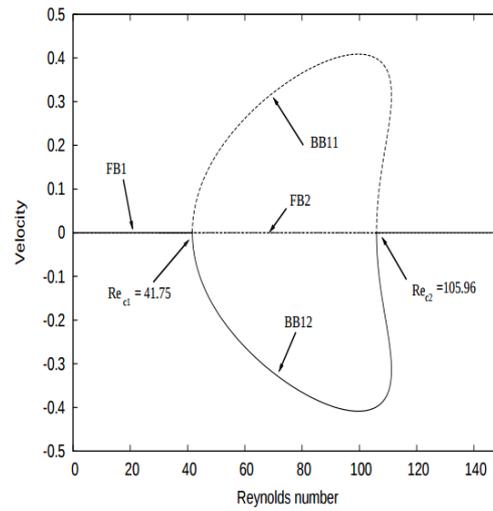


FIGURE 5.4 – Diagramme de bifurcation dans le cas de l'expansion-contraction $E = 3$ et $A = 8/3$ selon Guevel *et al.* [Guevel *et al.*, 2011].

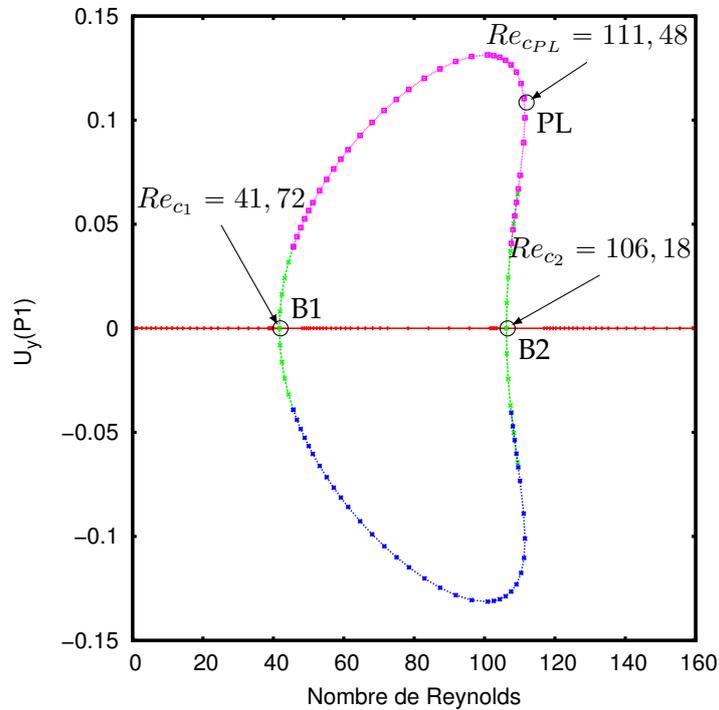


FIGURE 5.5 – Diagramme de bifurcation dans le cas de l'expansion-contraction $E = 3$ et $A = 8/3$ en utilisant la méthode TB.

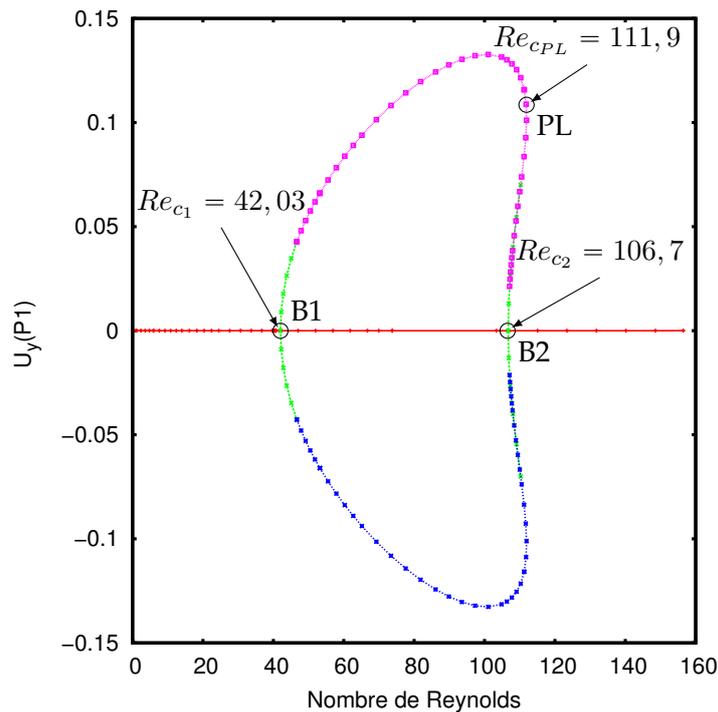


FIGURE 5.6 – Diagramme de bifurcation dans le cas de l'expansion-contraction $E = 3$ et $A = 8/3$ en utilisant le méthode de la Level-Set, pénalisation ($K = 10^{-2}$) (LP).

Cochelin, 1994; Guevel et al., 2011].

Il est intéressant de constater que les extrémités des branches asymétriques qui émanent du premier point de bifurcation se superposent aux morceaux de branches asymétriques, qui émanent du second point de bifurcation, obtenus lors de l'étape de construction des branches post-bifurquées. Il y a donc une cohérence entre les solutions obtenues par suivi de branche et celles obtenues par les modes de bifurcation Φ et Ψ et la solution particulière \mathbf{W} .

Ces vecteurs spécifiques Φ , Ψ et \mathbf{W} associés à la vitesse et obtenus aux points de bifurcation sont représentés sur les figures 5.7 et 5.8. La similitude de ces vecteurs avec les résultats proposés par Guevel [Guevel, 2016] est remarquable.

En complément, et à titre d'illustration, la représentation par lignes de courant des écoulements pour les trois points singuliers est proposée en figure 5.9.

L'évolution des termes de série, au cours de la continuation, est proposée sur les figures 5.10 et 5.11. La figure 5.10 représente les champs de vitesse (à chaque ordre MAN) pour un nombre de Reynolds $Re = 19,2$, c'est-à-dire pour une solution "loin" de la première bifurcation. La figure 5.11, quant à elle, représente ces mêmes champs de vitesse pour un nombre de Reynolds $Re = 41,8$ pour une solution "proche" de la bifurcation.

Ainsi, ces figures montrent bien, qu'à l'approche de la bifurcation, il y a émergence dans les termes de série (termes d'ordre supérieur à 8) d'une "solution" qui est très similaire au mode de bifurcation. L'analyse des termes de série consiste donc à repérer cette émergence (qui peut être considérée comme une "signature" de la bifurcation) au sein de la série afin de détecter plus efficacement la bifurcation.

Ces résultats, extrêmement semblables aux résultats de [Guevel, 2016], montrent clairement que la technique LP ne perturbe pas l'analyse des termes de série et permet de détecter

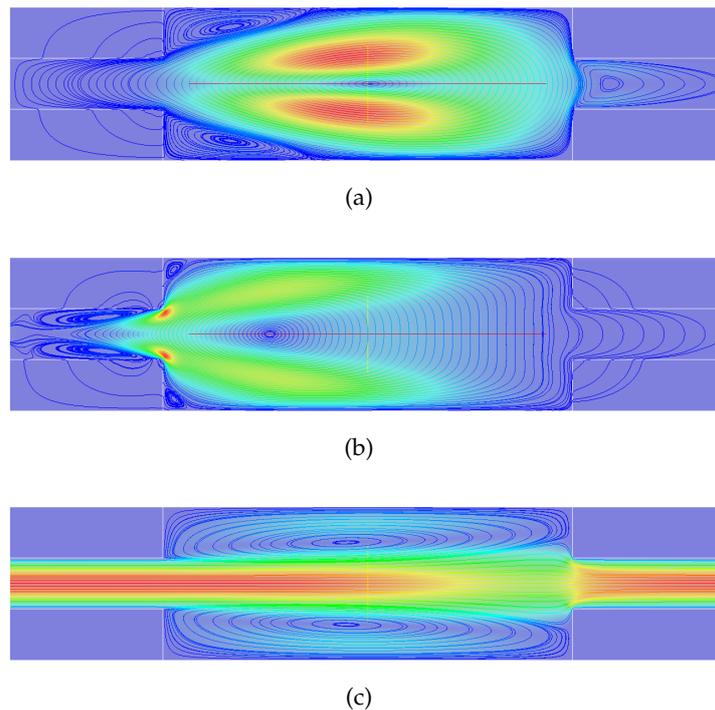


FIGURE 5.7 – Vecteurs Φ , Ψ et \mathbf{W} associés à la vitesse \mathbf{u} pour la première bifurcation ; (a) Magnitude du mode de bifurcation Φ_{B_1} ; (b) Magnitude du mode gauche Ψ_{B_1} ; (c) Magnitude de la solution particulière \mathbf{W}_{B_1} . Cas $E = 3$ et $A = 8/3$ - Méthode LP ($K = 10^{-2}$, $N = 35$, $\eta = 10^{-6}$).

	Re_{c_1}	Re_{c_2}
[Guevel et al., 2011]	41, 75	105, 96
EVE + MAN + TB	41, 72	106, 14
EVE + MAN + LP	41, 78	106, 116
EVE + MAN + LPG	41, 73	106, 184

TABLE 5.2 – Valeurs du nombre de Reynolds pour les deux bifurcations stationnaires (B1 et B2).

les solutions singulières (points limites et de bifurcation).

5.1.4 Résultats avec l'algorithme LPG

L'algorithme associant la pénalisation à la méthode Ghost-Cell est évalué en choisissant les paramètres numériques suivants : un coefficient de pénalisation $K = 10^{-6}$, un nombre d'ordre MAN $N = 35$, une précision $\eta = 10^{-6}$. Au vu du maillage cartésien et des frontières parallèles au maillage, le nombre de NF par élément est choisi à $N_{NF} = 3$.

Dans ce test, la frontière entre le fluide et le solide est coïncidente avec les arêtes des éléments : il n'y a donc aucun décalage et la frontière immergée ne coupe aucun élément fini.

Les nombres de Reynolds obtenus avec l'algorithme sont présentés dans le tableau 5.2. Ces valeurs sont très proches de celles de référence ainsi que de celles obtenues en utilisant la méthode LP. De même, la représentation de l'écoulement par lignes de courant, les vecteurs spécifiques Φ , Ψ et \mathbf{W} et les champs de vitesse normés pour les termes de séries sont visuellement identiques aux représentations pour la méthode LP.

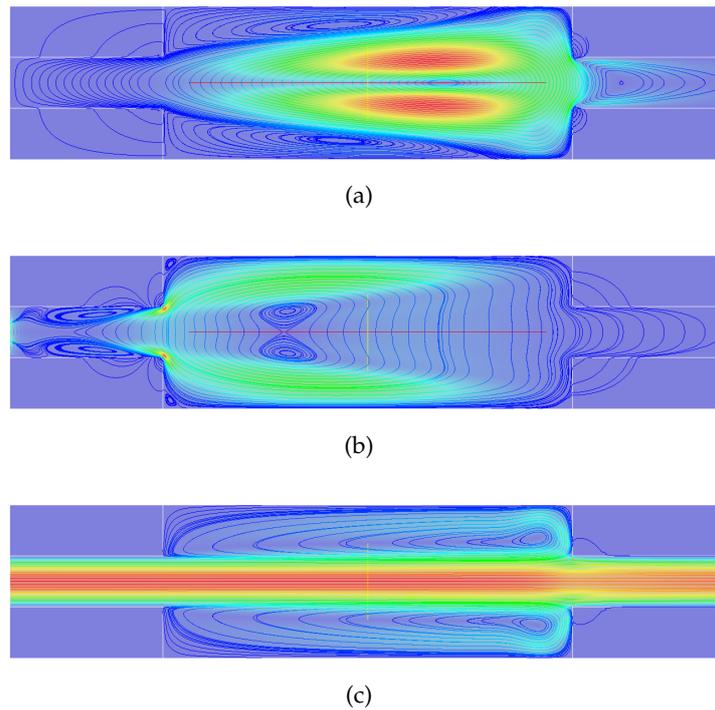


FIGURE 5.8 – Vecteurs Φ , Ψ et \mathbf{W} associés à la vitesse \mathbf{u} pour la deuxième bifurcation ; (a) Magnitude du mode de bifurcation Φ_{B_2} ; (b) Magnitude du mode gauche Ψ_{B_2} ; (c) Magnitude de la solution particulière \mathbf{W}_{B_2} . Cas $E = 3$ et $A = 8/3$ - Méthode LP ($K = 10^{-2}$, $N = 35$, $\eta = 10^{-6}$).

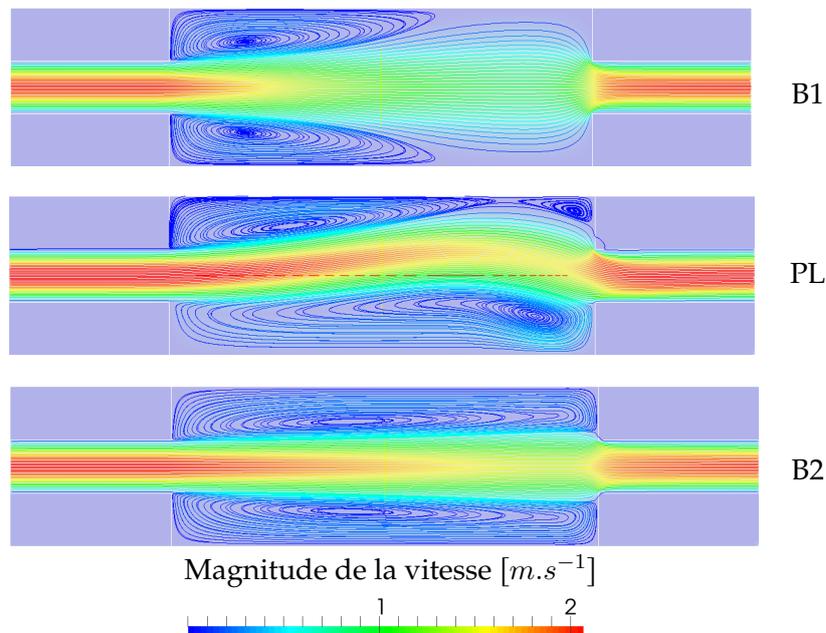


FIGURE 5.9 – Champs de vitesse et lignes de courant pour les points singuliers (bifurcations primaire et secondaire et point limite). Cas $E = 3$ et $A = 8/3$ - Méthode LP ($K = 10^{-2}$, $N = 35$, $\eta = 10^{-6}$).

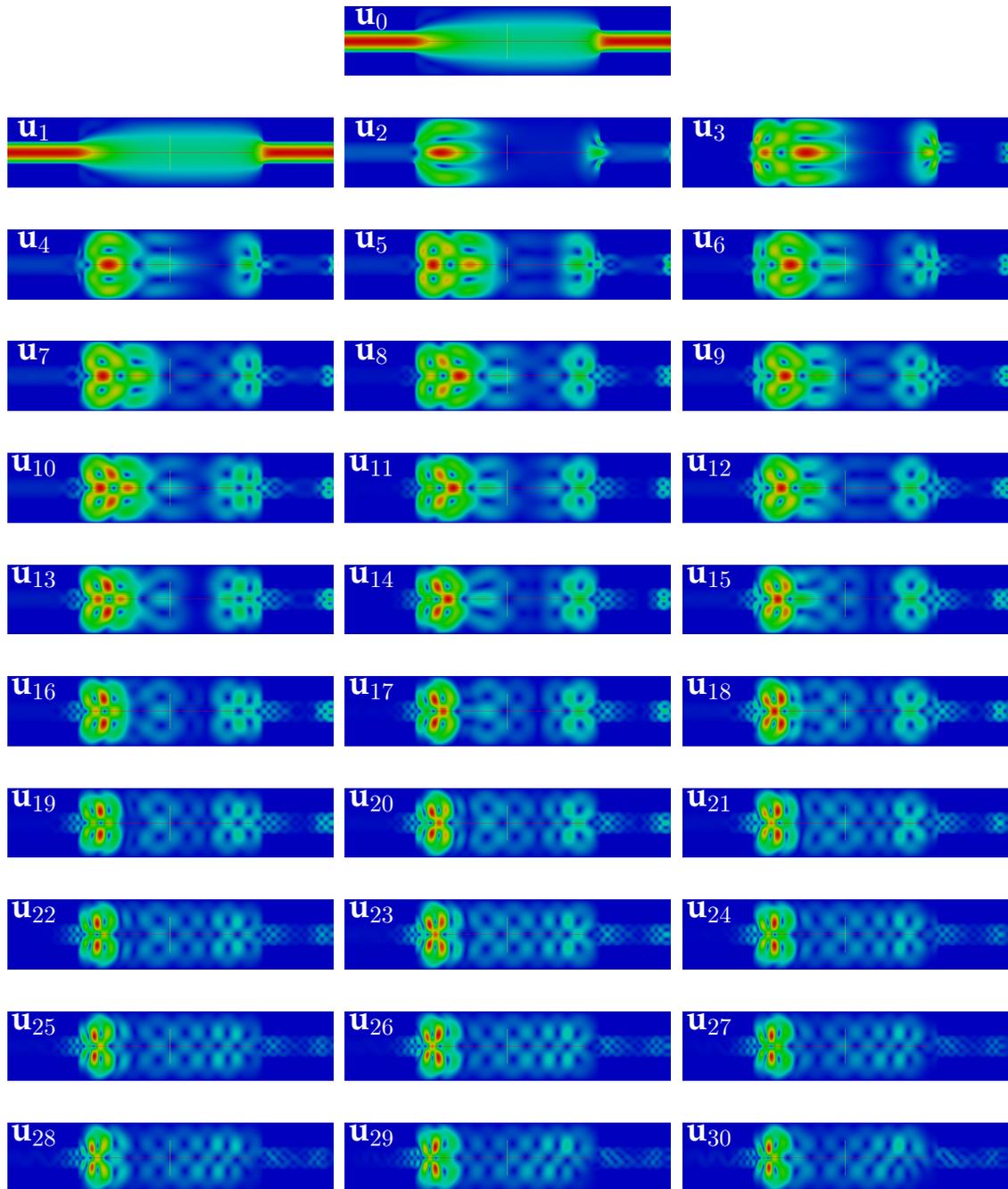


FIGURE 5.10 – Champs de vitesse normés pour tous les termes de séries sur la branche fondamentale à $Re = 19,2$.

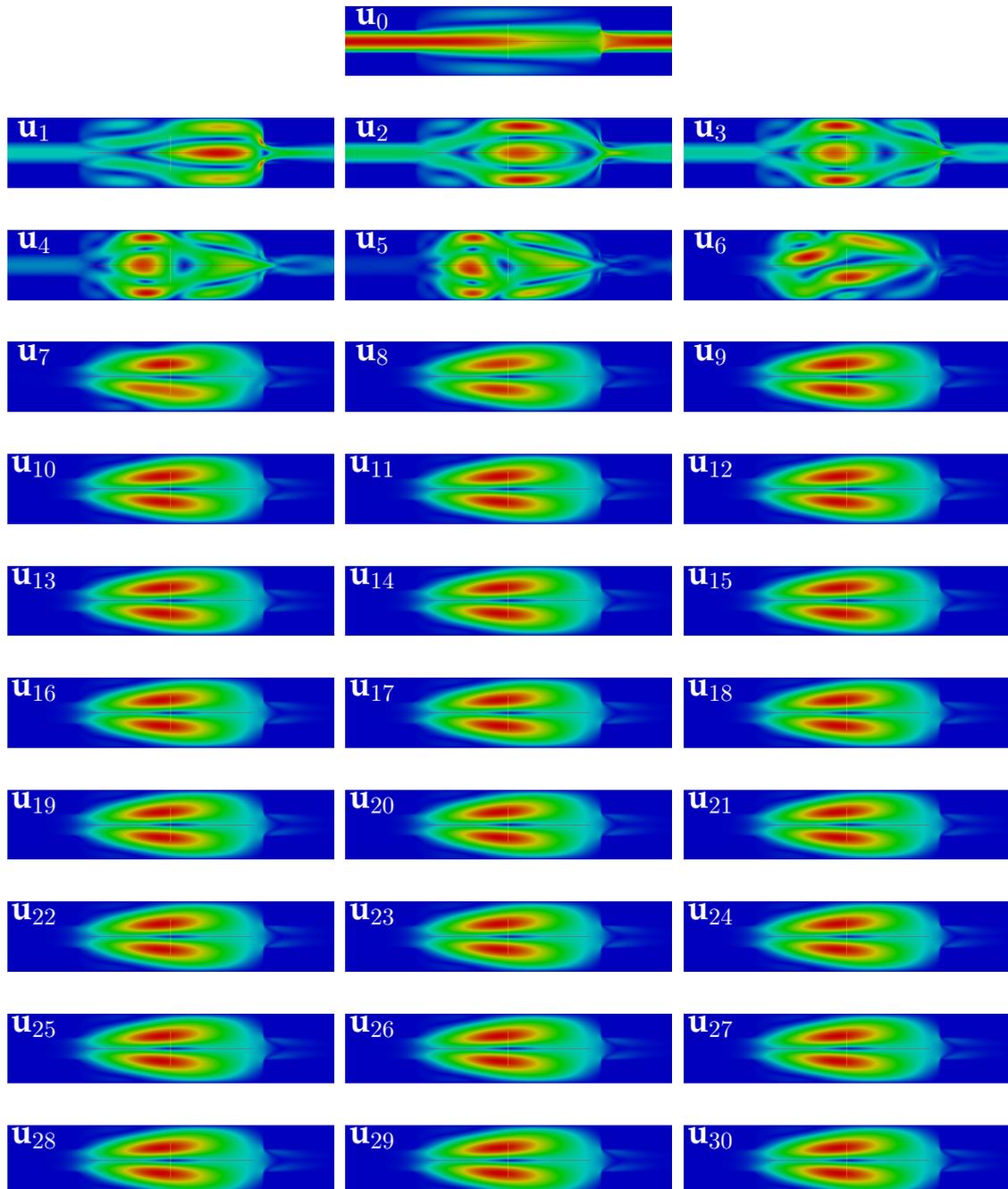


FIGURE 5.11 – Champs de vitesse normés pour tous les termes de séries sur la branche fondamentale à l'approche d'une bifurcation à $Re = 41,8$.

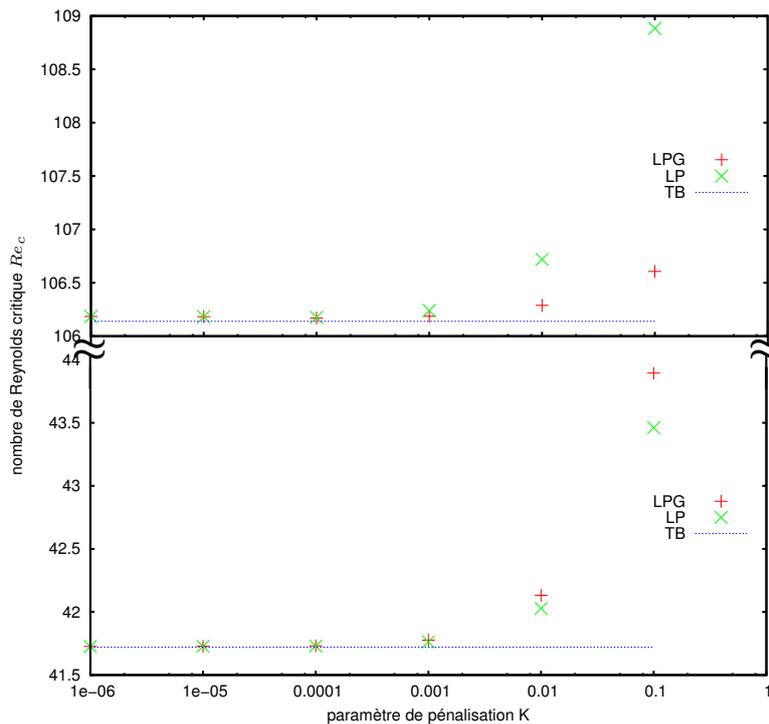


FIGURE 5.12 – Nombre de Reynolds critique pour la première (en bas) et pour la seconde bifurcation stationnaire (en haut).

Les grandeurs globales ne présentent pas de différence significative entre la méthode LP et la méthode LPG. Cependant, la méthode de pénalisation peut entraîner des "fuites" numériques. Il faut donc regarder localement l'influence de chacune des méthodes sur la qualité des frontières qu'elles modélisent.

5.1.5 Influence du paramètre de pénalisation

Dans ce paragraphe, l'influence du paramètre de pénalisation K est étudiée. Tous les autres paramètres numériques sont fixés aux valeurs suivantes : $N = 35$, $\eta = 10^{-6}$, 66 810 degrés de libertés (soit 33 405 nœuds). La frontière est coïncidente avec les arêtes des éléments. Certains auteurs [Angot et al., 1999; Caltagirone & Vincent, 2001] proposent une valeur de paramètre de pénalisation la plus faible possible ($K = 10^{-7}$). Cependant, les premiers résultats obtenus par les algorithmes MAN+LP et MAN+LPG avec des valeurs de pénalisation beaucoup plus élevées ($K = 10^{-2}$) sont déjà très satisfaisants. La question est de savoir si ce critère de valeur de K très faible est valable pour les méthodes proposées.

Ainsi, pour les deux méthodes MAN+LP et MAN+LPG, l'évolution des nombres de Reynolds critiques Re_{c_1} et Re_{c_2} en fonction de la valeur du paramètre K est proposée sur la figure 5.12. Premièrement, plus la valeur de K est faible, plus les nombres de Reynolds critiques tendent vers leur valeur de référence. Ceci tend à confirmer le constat établi ci-dessus. Deuxièmement, il existe un seuil, identifié à $K = 10^{-3}$, au-delà duquel diminuer la valeur de K n'apporte pas de réelle différence pour les paramètres critiques de l'écoulement. Ceci est valable pour les deux méthodes proposées.

Par conséquent, en se basant uniquement sur des grandeurs "globales" (c.-à-d. le nombre de Reynolds critique), il n'est pas nécessaire de prendre une valeur de K trop faible. Pour

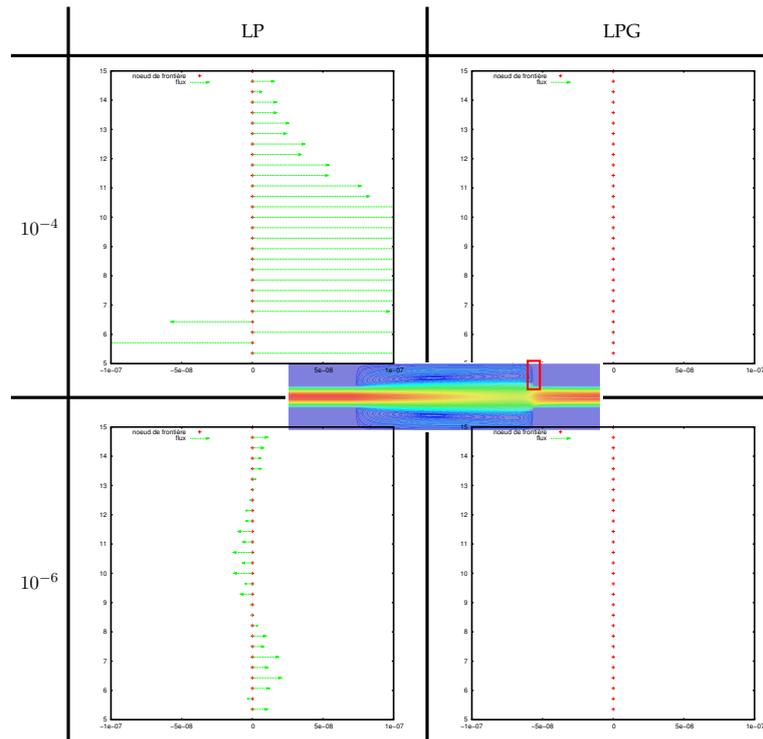


FIGURE 5.13 – Flux traversant la frontière verticale de la partie convergente pour deux paramètres de perméabilité ($K = 10^{-4}$ et $K = 10^{-6}$) et ce pour les méthodes LP et LPG.

approfondir l'analyse, le flux et la circulation du vecteur vitesse à travers et le long des parois immergées sont étudiés qualitativement (figure 5.13) et quantitativement (figure 5.14). Sur cette figure 5.14, l'influence du paramètre K est significative pour la modélisation LP. Il devient nécessaire de diminuer très fortement la valeur de K pour bloquer tout flux à travers les parois. Ainsi, pour une valeur $K = 10^{-3}$, le flux est faible mais non nul, quand, pour les valeurs $K = 10^{-4}$, $K = 10^{-5}$ et $K = 10^{-6}$, le flux peut être considéré comme nul.

Ceci confirme donc la nécessité pour les méthodes MAN+LP et MAN+LPG d'utiliser une valeur de K très faible. Ainsi, pour le reste des simulations, la valeur $K = 10^{-6}$ est retenue car elle est considérée comme suffisamment faible pour décrire les frontières immergées et limiter les flux du vecteur vitesse à travers les parois.

5.1.6 Influence du maillage

Jusqu'à présent, le maillage utilisé comporte 33 405 nœuds et les frontières immergées sont coïncidentes avec les bords des éléments. Pour cette étude, nous conservons les paramètres numériques suivants : $K = 10^{-6}$, $N = 35$, $\eta = 10^{-6}$.

Premièrement, l'influence du maillage sur la valeur des nombres de Reynolds critiques est étudiée. A cet effet, trois maillages de plus en plus raffinés ont été générés (maillage structuré, homogène, conforme à maille rectangulaire $\frac{a}{b} = 1,05 ; 1,07 ; 1,06$ respectivement pour M1, M2 et M3).

Les nombres de Reynolds critiques obtenus pour ces trois maillages sont présentés dans le tableau 5.3. Quelle que soit la méthode, les nombres de Reynolds critiques pour la première et la seconde bifurcation n'évoluent que très faiblement par rapport à la taille des éléments.

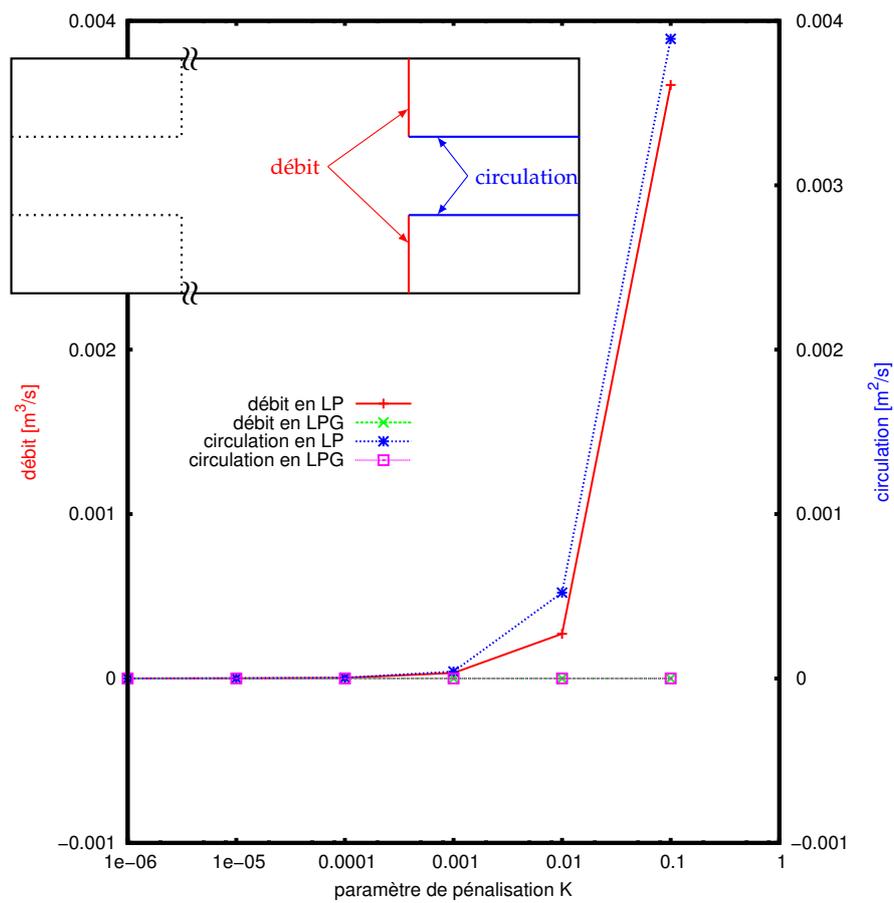


FIGURE 5.14 – Flux à travers les parois verticales et circulation le long des parois horizontales de la partie convergente du modèle.

taille de l'élément dx	Re_{c_1}		Re_{c_2}	
	LP	LPG	LP	LPG
0,5555	41,784	41,786	106,116	106,114
0,3333	41,764	41,764	106,386	105,764
0,2632	41,770	41,770	106,413	105,413

TABLE 5.3 – Nombre de Reynolds pour les deux bifurcations stationnaires (B1 et B2) en fonction de la taille de l'élément dx et de la méthode (LP ou LPG).

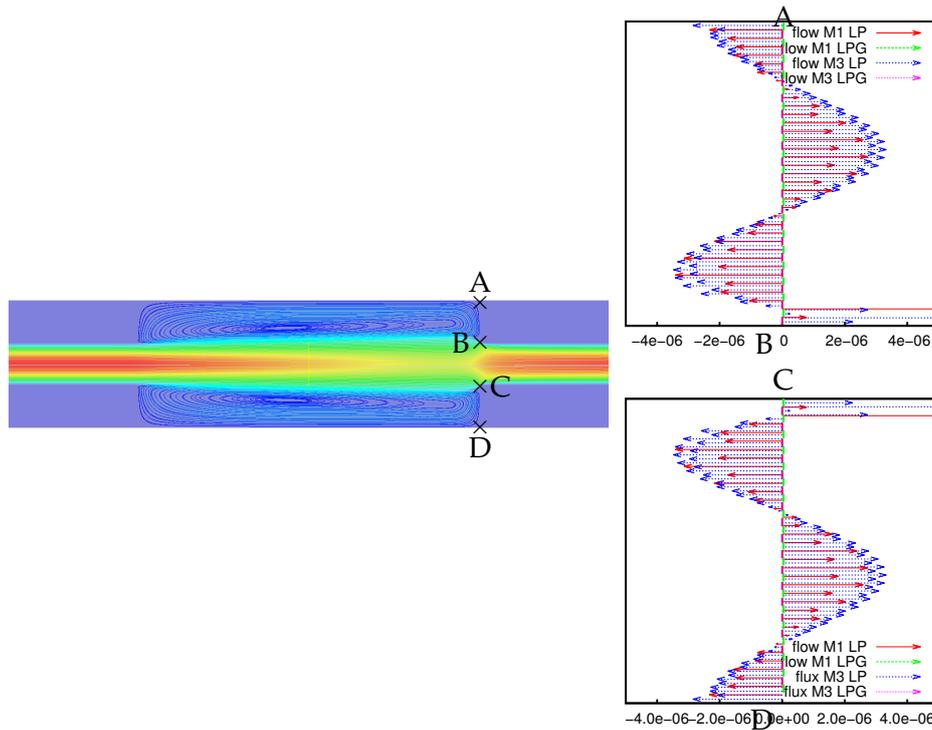


FIGURE 5.15 – Flux traversant la frontière verticale de la partie convergente pour deux maillages (M1 et M3) et ce pour les méthodes LP et LPG.

Ainsi, pour les maillages étudiés, une indépendance des résultats "globaux" par rapport à la finesse du maillage est constatée.

Une étude des flux au travers des parois verticales immergées du convergent (voir figure 5.15) confirme cette indépendance des méthodes MAN+LP et MAN+LPG par rapport à la finesse du maillage. En effet, pour la méthode MAN+LP, les flux sont quasi-identiques quel que soit le maillage retenu. Pour la méthode MAN+LPG, les flux sont quasi-nuls et aucune différence ne peut être observée.

5.1.7 Influence de la position de la Level-Set par rapport aux éléments finis

Le paramètre le plus influent sur les résultats semble être la position de la frontière immergée, décrite par la Level-Set, par rapport aux bords des éléments finis.

Jusqu'à présent, cette frontière et les bords des éléments sont coïncidents. Cependant, dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que cette coïncidence persiste. Dans ce cas, la Level-Set 'coupe' les éléments finis et des décalages entre la frontière et les bords des éléments

apparaissent. Il est donc intéressant d'étudier l'influence d'un tel décalage sur l'analyse de bifurcation et la précision des résultats obtenus.

De plus, cette étude permet d'évaluer la capacité de la méthode Ghost-Cell à reconstruire une frontière immergée sur laquelle la condition cinématique de couplage s'applique. En effet, lorsqu'il y a coïncidence, la condition cinématique (ici vitesse nulle aux parois) est imposée naturellement au niveau élémentaire par imposition des vitesses nodales, les nœuds étant positionnés exactement sur l'isovaleur zéro de la Level-Set. Lorsqu'il n'y a plus coïncidence, la méthode Ghost-Cell permet la 'reconstruction' de la frontière et l'application stricte de la condition cinématique de couplage.

Comme il a été souligné par Tsui et Wang [Tsui & Wang, 2008] dans leur étude sur l'écoulement dans une conduite avec expansion soudaine, le ratio d'expansion E a une grande influence sur la valeur du nombre de Reynolds critique. Les auteurs montrent que cette valeur passe d'environ 132 à 36 lorsque le ratio d'aspect évolue de 2 à 4.

Par conséquent, dans cette étude de l'écoulement dans une conduite présentant une expansion/contraction, il est fort probable que toute modification de la hauteur h en entrée de conduite va avoir une influence sur le nombre de Reynolds critique. En particulier, lorsqu'elle ne coïncide pas avec le maillage, la Level-Set coupe les éléments et, selon que l'élément est pénalisé (considéré comme solide) ou non (considéré comme fluide), la hauteur h de la conduite est modifiée (voir l'illustration figure 5.16).

Comme il a été décrit précédemment, l'utilisation de la méthode de pénalisation classique utilise le signe de la fonction Level-Set pour pénaliser le solide ou ne rien faire dans le cas du fluide. Un faible décalage de la position de la frontière au sein de l'élément peut changer le signe de la Level-Set du nœud central de l'élément. Ce changement de signe modifie la pénalisation de l'élément et déplace la frontière effective de la taille de l'élément. Ce décalage modifie le diamètre de la conduite en amont et en aval de la chambre d'expansion et donc le rapport d'aspect est modifié. Cette modification change la physique globale de l'écoulement, dont les nombres de Reynolds critiques sont des indicateurs.

Indépendamment de la technique utilisée (LP, LPG ou LPG+), la taille dx de l'élément a une forte influence. Ainsi, le changement de signe de la Level-Set du nœud central pour un maillage M1 (33 nœuds dans une section du canal d'entrée) fait passer le ratio d'aspect effectif de $E = 2,87$ à $E = 3,13$, alors que le ratio passe de $E = 2,95$ à $E = 3,05$ pour un maillage M3 (75 nœuds dans une section du canal d'entrée). La figure 5.17 montre la convergence vers la valeur cible des maillages plus fins et illustre l'influence très importante du ratio d'aspect E sur la valeur du nombre de Reynolds critique selon la position relative de la frontière par rapport aux éléments finis (DVCVvert1 ou DCCVvert2).

Le maillage M3 est utilisé pour comparer les différentes techniques entre elles. Toutes choses égales par ailleurs, les résultats sont présentés à la figure 5.18 en fonction de la position de la frontière dans l'élément.

La méthode Gost-Cell corrige le défaut de diamètre hydraulique effectif. Cela permet d'avoir des résultats au moins aussi bons avec le maillage DVCVvert1, et allant jusqu'à 2,5 % d'amélioration. Cependant, cette amélioration n'est pas confirmée pour un maillage DVCVvert2. Dans ce cas, les nœuds utilisés pour l'interpolation de la vitesse au point I appartiennent à un élément fini entièrement pénalisé. Les vitesses nodales sont donc très faibles et, par conséquent, la vitesse imposée au nœud G l'est aussi. Ceci ne permet pas d'imposer la condition de vitesse nulle à la position attendue de la frontière.

La méthode LPG+ qui considère les éléments coupés par la frontière comme des éléments fluides permet de corriger les défauts de la méthode LPG, dans le cas d'élément DVCVvert2.

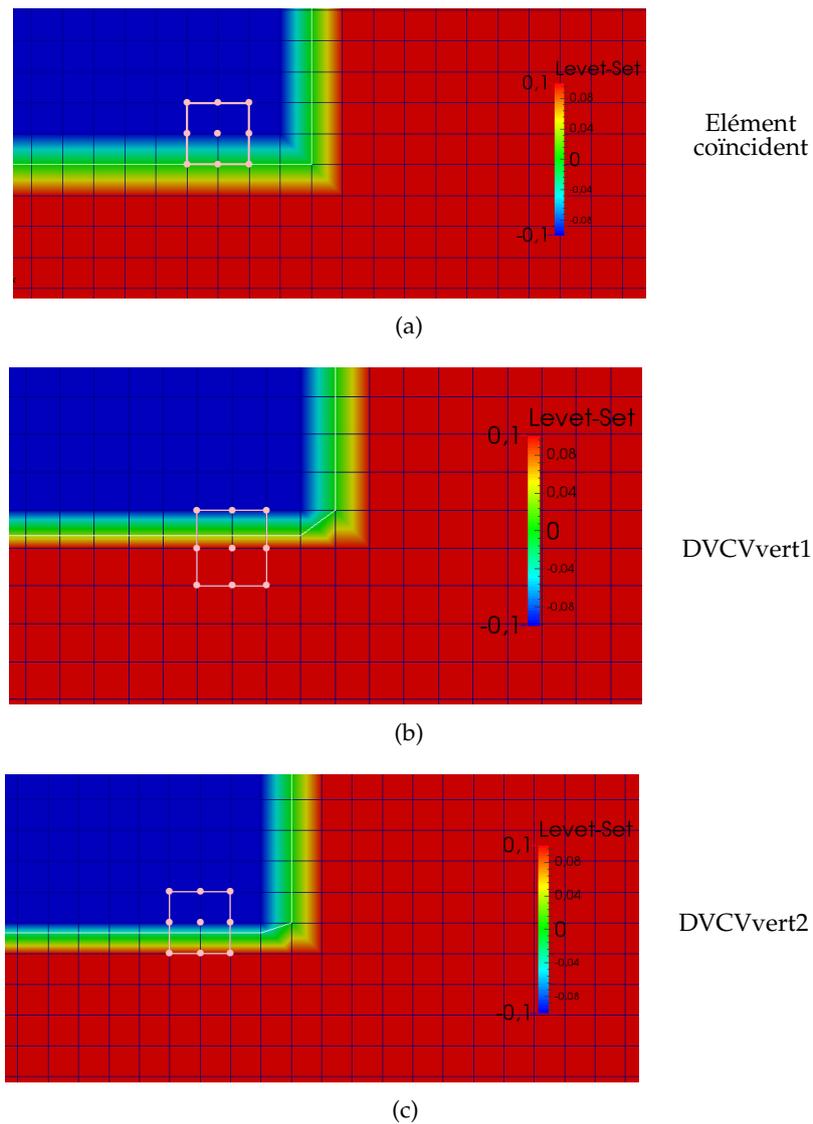


FIGURE 5.16 – Visualisation de la position de la frontière par rapport aux éléments pour l'étude paramétrique, les points roses sont les neuf nœuds d'un élément ; (a) frontière et bords des éléments coïncidents ; (b) frontière empiétant sur l'élément de moins de la moitié de la hauteur (DVCVvert1) ; (c) frontière empiétant sur l'élément de plus de la moitié de la hauteur (DVCVvert2).

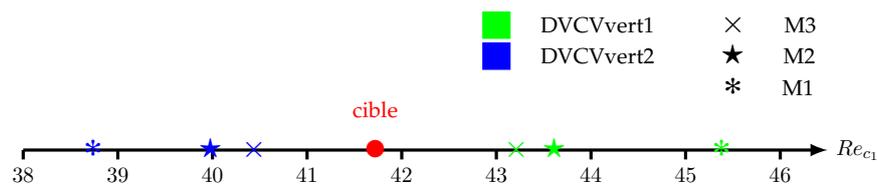


FIGURE 5.17 – Nombre de Reynolds critique du premier point singulier en fonction de la taille de l'élément pour la technique LP.

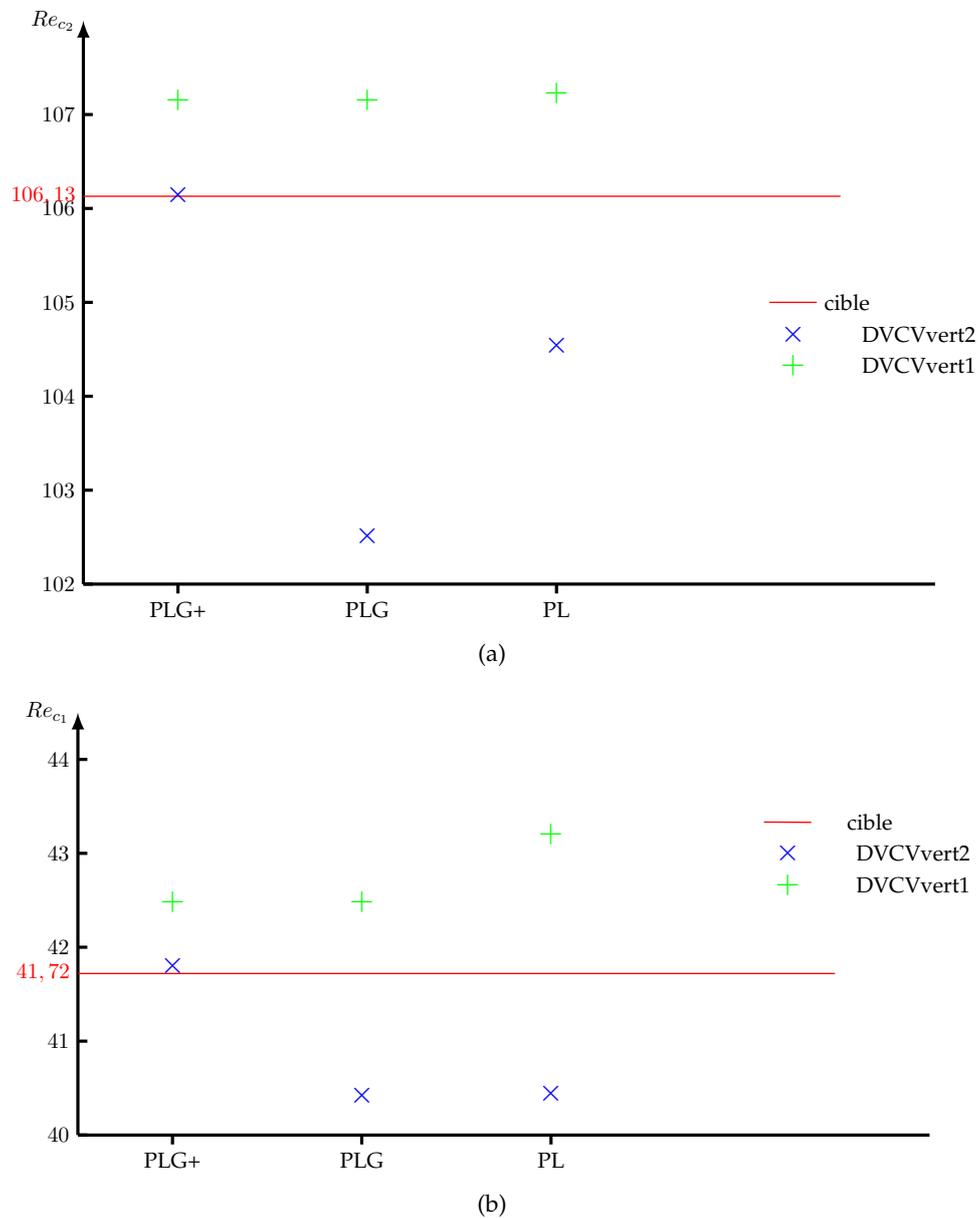


FIGURE 5.18 – Nombre de Reynolds critique en fonction de la méthode employée et de la position de la frontière dans l'élément : (a) second point singulier ; (b) premier point singulier.

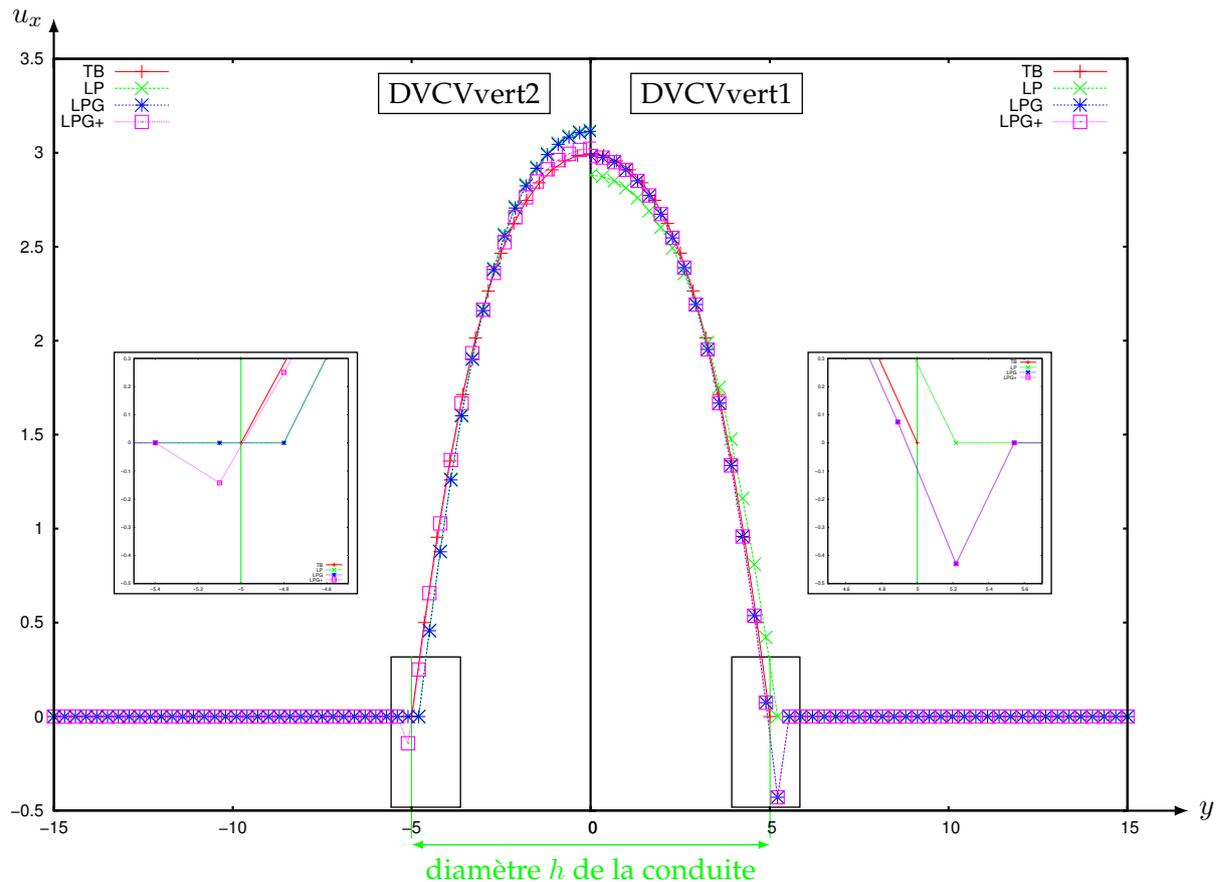


FIGURE 5.19 – Ecoulement dans le canal de sortie (en son milieu) pour différentes méthodes dans le cas d'un maillage DVCVvert2 à gauche et DVCVvert1 à droite.

En effet, les résultats de la méthode LPG+ dans ce cas sont très bons, tant vis-à-vis des nombres de Reynolds critiques que de la modélisation de l'écoulement de type Poiseuille (voir figure 5.19) dans le canal de diamètre h .

Sur la figure 5.19, l'imposition de la vitesse sur les NF dans le solide est mise en évidence et corrige les défauts de la méthode de pénalisation seule. Il faut cependant retenir que les vitesses fluides non-nulles obtenues dans le solide ne sont pas réalistes.

5.1.8 Synthèse des résultats

L'association des méthodes de frontières immergées (méthodes de pénalisation et Ghost-Cell) à une méthode de perturbation d'ordre élevé (MAN) permet de procéder à l'analyse de bifurcation stationnaire d'écoulements. Trois méthodes ont été évaluées (LP, LPG et LPG+). Les méthodes LP et LPG permettent d'isoler les valeurs critiques avec une marge d'erreur pouvant être considérée comme importante. De plus, les résultats sont sensibles à la discrétisation spatiale utilisée. Finalement, la méthode LPG+ apporte plus de précision tout en rendant les résultats obtenus moins sensibles aux maillages utilisés.

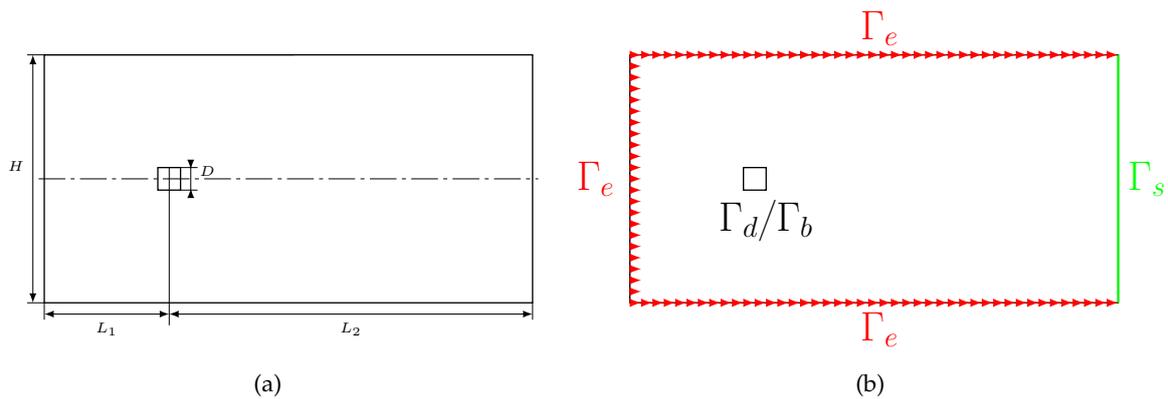


FIGURE 5.20 – Domaine utilisé pour l'étude de la bifurcation de Hopf : (a) Description de la géométrie ; (b) nom des conditions limites.

5.2 Bifurcation de Hopf

5.2.1 Description des cas d'étude

Le cas d'étude retenu pour l'étude des instabilités de type Hopf est l'écoulement 2D d'un fluide incompressible newtonien autour d'un cylindre fixe. Les cylindres à base carrée et circulaire sont étudiés. La géométrie du problème (dans le cas d'un obstacle de forme carrée) est présentée à la figure 5.20. Elle respecte les conditions préconisées par Persillon et Braza [Persillon & Braza, 1998] afin que les valeurs du nombre de Strouhal et du coefficient de traînée soient indépendantes de la taille du domaine supposé infini. Ainsi, $\frac{H}{D} = 22$ et $\frac{L_2}{D} = 34$ sont les conditions minimisant la taille du domaine, tout en évitant la surestimation des paramètres caractéristiques de l'écoulement. D'autres auteurs privilégient un nombre de degrés de liberté raisonnable en assumant des valeurs caractéristiques erronées, celles-ci étant influencées par les effets de blocage du domaine de calcul restreint. Afin d'évaluer la pertinence des algorithmes développés dans cette thèse et d'éviter tout biais dans les valeurs caractéristiques, les domaines de calcul retenus par la suite répondent aux préconisations de [Persillon & Braza, 1998].

Les valeurs des grandeurs du fluide sont les mêmes que celles utilisées dans le cas stationnaire ($\rho_f = 10 \text{ g/cm}^{-3}$ et $\mu = 1 \text{ Pa.s}$). De même les masses volumiques du fluide et du solide sont supposées identiques $\frac{\rho_f}{\rho_s} = 1$.

Le domaine étant supposé infini, une condition de Dirichlet en vitesse est imposée sur le bord Γ_e . L'intensité de la composante horizontale (selon x) de la vitesse imposée est λu_d . Aucune condition (ni en vitesse, ni en pression) n'est appliquée explicitement sur le bord Γ_s (figure 5.20(b)). La condition est donc régit par le condition implicite de la modélisation éléments finis portant sur la pression.

Pour le modèle TB, une condition de Dirichlet de non-glissement $u_x = u_y = 0$ est appliquée sur la frontière Γ_d de l'obstacle. Pour les modèles à frontières immergées, les méthodes de Level-Set et Ghost-Cell s'appliquent sur la frontière Γ_b sur laquelle une condition de Dirichlet de non-glissement est aussi appliquée.

Le nombre de Reynolds est défini en utilisant la longueur caractéristique D qui corres-

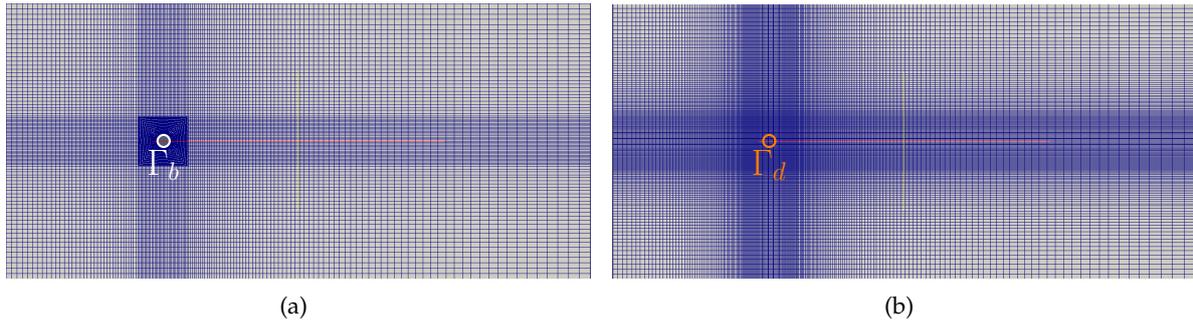


FIGURE 5.21 – maillages utilisés pour la simulation d’un écoulement infini autour d’un cylindre : (a) maillage classique, True Boundary (TB); (b) maillage pour les MFI proposées.

pond, selon le cas, soit au diamètre (cercle) soit au côté (carré) du cylindre :

$$Re = \frac{\rho D \lambda u_d}{\mu} \quad (5.2)$$

Les paramètres de la MAN sont tels que $N = 40$ et $\eta = 10^{-15}$. Ces paramètres assez contraignants permettent d’avoir une solution stationnaire précise. Le calcul de l’indicateur de bifurcation de Hopf est réalisé pour 10 valeurs différentes du nombre de Reynolds dans l’intervalle $[40; 60]$. Les paramètres MAN sur l’indicateur de bifurcation de Hopf sont $N = 30$ et $\eta = 10^{-6}$. Enfin la méthode de Newton a convergé si le résidu stationnaire est inférieur à $\epsilon_s = 10^{-4}$ et si les résidus dynamiques réel et imaginaire sont inférieurs à $\epsilon_d = 10^{-8}$.

5.2.2 Résultats de référence

La bifurcation de Hopf pour l’écoulement autour d’un cylindre de base carrée et circulaire est largement étudiée.

Dans le cas de l’obstacle carré, une grande variation des valeurs critiques est constatée. La valeur obtenue selon l’équation de Stuart-Landau est $Re_c = 47 \pm 2$ [Schumm et al., 1994; Sohankar et al., 1998] [SND98, SBM94].

Une autre méthode basée sur la stabilité asymptotique conduit aux valeurs du nombre de Reynolds critique suivantes : $Re_c = 46 \pm 1$ [Aagnaou et al., 2016; Lankadasu & Vengadesan, 2008] et $Re_c = 53$ [Kelkar & Patankar, 1992]. Cette dernière estimation est surévaluée à cause d’un taux de blocage ($\beta = D/H$) supérieur à ceux retenus dans les autres études. En effet, Sohankar *et al.* [Sohankar et al., 1997] montrent que, pour un taux de blocage inférieur à 5 %, les erreurs dues à la taille du domaine de calcul et aux conditions aux limites sur les valeurs critiques de l’écoulement sont vraiment faibles. Une synthèse de ces résultats issus de la littérature est proposée au tableau 5.4.

Dans le cas de l’obstacle circulaire, les valeurs critiques Re_c du nombre de Reynolds sont plus cohérentes malgré une sensibilité au taux de blocage élevée [Kumar & Mittal, 2006]. Ainsi, les méthodes expérimentale ($Re_c = 47, 90$), numérique par calcul direct ($Re_c = 46, 184$) et par calcul d’indicateur ($Re_c = 45, 98$) ont été utilisées. Une synthèse de ces résultats est proposée dans le tableau 5.5.

Pour la discrétisation spatiale, Franke *et al.* [Franke et al., 1990] montrent que la distance entre la frontière Γ_d et la première rangée de nœuds doit être faible ($y_{max}/D = 0,004$ pour

	β	Re_c	St
[Sohankar et al., 1997]	$\ll 1 \%$	47 ± 2	X
EVE + MAN + TB	4,5 %	44,23	0,108
[Sohankar et al., 1998]	5 %	$51,2 \pm 1,0$	0,115
[Kelkar & Patankar, 1992]	14,2 %	53 ± 2	X

TABLE 5.4 – Nombre de Reynolds et de Strouhal en fonction du taux de blocage pour un cylindre carré.

	méthode	Re_c	St
[Jackson, 1987]	méthode directe	46,184	0,137
[Williamson, 1989]	expérimental	47,90	0,122
[Brezillon et al., 2010]	MAN + padé	45,98	0,137
Présente étude	EVE + MAN + TB	46,07	0,122

TABLE 5.5 – Nombre de Reynolds et Strouhal pour un cylindre circulaire.

l'obstacle carré et $y_{max}/D = 0,001$ pour l'obstacle circulaire) sous peine de modifier les valeurs des nombres de Reynolds Re_c et de Strouhal St_c critiques. De même que pour l'exemple de l'obstacle carré, ces auteurs montrent qu'un raffinement de grille d'un facteur 2 modifie de 5 % la valeur du nombre de Strouhal critique.

Pour ce travail, les ressources informatiques disponibles au laboratoire ont nécessité la recherche d'un compromis entre la taille du domaine de calcul, la finesse de la discrétisation spatiale et la précision des résultats. Ainsi, pour l'écoulement autour d'un obstacle carré, les simulations ont été réalisées avec un taux de blocage de 4,5 % et un rapport $y_{max}/D = 0,016$. Pour le cas d'un obstacle circulaire, le rapport $y_{max}/D = 0,0056$ a été choisi. Par conséquent, les résultats présentés par la suite sont affectés d'une certaine imprécision due à ces limitations techniques.

Malgré ces limites, l'algorithme de recherche d'une bifurcation de Hopf est appliqué pour un problème dont le maillage est conforme aux obstacles (modèle TB).

Dans le cas de l'obstacle carré, les valeurs critiques suivantes sont obtenues : $Re_c = 44,237$ et $St_c = 0,108$. Ces valeurs sont en accord avec celles de la littérature (voir tableau 5.4). Pour obtenir ces résultats, un calcul d'indicateur est effectué pour la valeur $Re = 44,04$ du nombre de Reynolds. Un minimum est obtenu ($Re_{min} = 44,04$ et $\omega_{min} = 3,00$) et est utilisé comme solution initiale pour l'algorithme itératif de Newton. La convergence est obtenue en trois itérations.

Dans le cas du cylindre à base circulaire, les valeurs critiques suivantes sont obtenues : $Re_c = 46,067$ et $St_c = 0,122$. Ces valeurs sont aussi en accord avec celles de la littérature (voir tableau 5.5). Pour obtenir ces résultats, trois calculs d'indicateur sont effectués pour des valeurs du nombre de Reynolds suivantes : $Re = 40,13, 41,36, 42,60$. Pour chaque indicateur, un minimum est sélectionné ($\omega_{min} = 3,025, 3,1346, 3,2428$) et utilisé comme solution initiale pour l'algorithme itératif de Newton. La convergence est obtenue, quelle que soit la valeur initiale, en cinq itérations.

5.2.3 Résultats avec les méthodes LP et LPG

Les méthodes LP et LPG ont été appliquées aux deux écoulements autour d'obstacles fixes, de forme carrée et circulaire.

Re	ω	statut	Re_c	ω_c
42,15	2,953	CV (6 iter)	47,2979	3,3627
45,122	0	NCV		
45,122	3,1915	CV (4 iter)	47,2979	3,3627
48,0879	0	NCV		

TABLE 5.6 – Point initial et résultats de l’algorithme de Newton pour le cylindre à base carrée - méthode LPG. Les symboles NCV et CV signifient respectivement la non convergence ou la convergence de la méthode de Newton en (•) itérations.

Dans cette étude, les paramètres numériques suivants sont fixés. La valeur de la pénalisation K est égale à 10^{-6} . Les maillages utilisés nécessitent 19 952 éléments, soient 80 385 nœuds.

Pour l’écoulement autour d’un carré, la méthode LP permet d’obtenir les paramètres critiques suivants : $Re_c = 45,618$ ($e_r = 3,0\%$) et $St_c = 0,109$. Ces valeurs sont cohérentes avec celles de la littérature (tableau 5.4). Pour déterminer ces paramètres critiques, trois calculs d’indicateurs pour les valeurs suivantes du nombre de Reynolds $Re = 45,59, 49,0, 52,43$ ont été réalisés. Les valeurs initiales retenues pour l’algorithme itératif de Newton sont : $\omega_{min} = 3,11, 3,36, 3,59$. La convergence est obtenue pour $Re = 45,59$. A titre d’illustration, la figure 5.22 présente le champ de vitesse à la bifurcation ainsi que les modes réel et imaginaire de bifurcation.

Pour ce même problème, la méthode LPG permet d’obtenir les valeurs critiques suivantes : $Re_c = 47,298$ ($e_r = 0,5\%$) et $St_c = 0,112$. Ces valeurs sont bien meilleures que celles obtenues avec la méthode LP et plus cohérentes avec les valeurs de référence (tableau 5.5). Dans ce cas, nous avons choisi de réaliser quatre calculs d’indicateurs de bifurcation pour lesquels deux solutions initiales ont permis la convergence de l’algorithme de Newton (voir tableau 5.6). Pour information, le champ de vitesse et les modes de bifurcation ne présentent aucune distinction notable avec ceux obtenus par la méthode LP. *A priori*, pour ce problème, si le maillage et la Level-Set sont coïncidents, alors la méthode LPG est plus précise que la méthode LP.

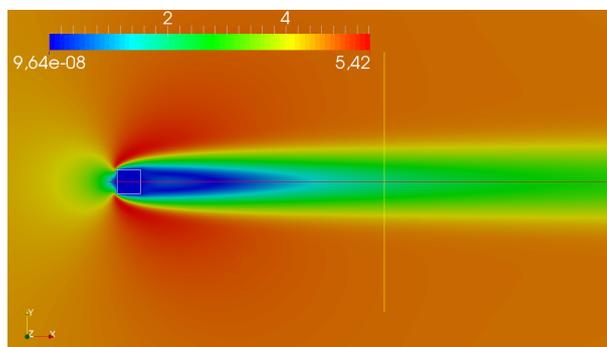
Considérons à présent le problème de l’écoulement autour d’un obstacle circulaire fixe. La méthode LP, appliquée à ce problème, permet d’obtenir les résultats suivants : $Re_c = 47,54$ et $St_c = 0,122$. Ces résultats sont très proches ($e_r = 3,2\%$) de ceux issus de la littérature (voir tableau 5.5). Visuellement, le champ de vitesse à la bifurcation ainsi que les modes de bifurcation (réel et imaginaire) présentés à la figure 5.23 sont proches des représentations publiées [Cadou et al., 2006; Jackson, 1987]. Pour ce calcul, l’analyse de bifurcation a été réalisée grâce à 6 calculs d’indicateurs et 10 valeurs initiales ont été retenues pour l’algorithme de Newton. Parmi ces valeurs, 4 ont convergé vers une même valeur critique (voir tableau 5.7).

L’application de la méthode LPG au problème considéré n’est pas aussi évidente. Dans ce cas, avec les paramètres de calculs retenus, la valeur obtenue du nombre de Reynolds critique est $Re_c = 68,54$. Cette valeur est évidemment bien trop élevée et impose d’analyser plus finement le fonctionnement des algorithmes.

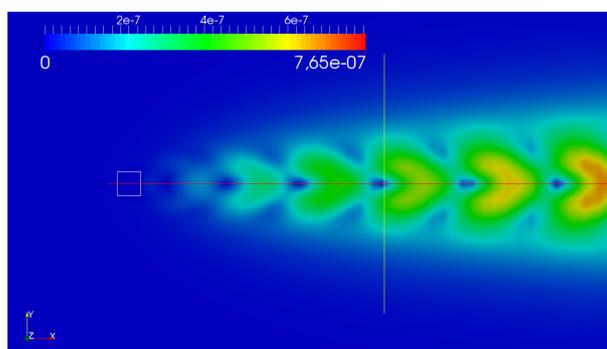
5.2.4 Sensibilité des méthodes au paramètre de pénalisation

La sensibilité des méthodes LP et LPG au paramètre de pénalisation est évaluée en considérant le problème de l’écoulement autour d’un obstacle carré.

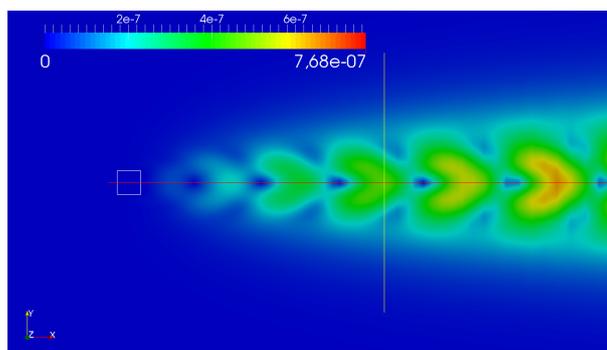
Suite à l’analyse de bifurcation stationnaire, il est admis que la valeur du paramètre de



(a)

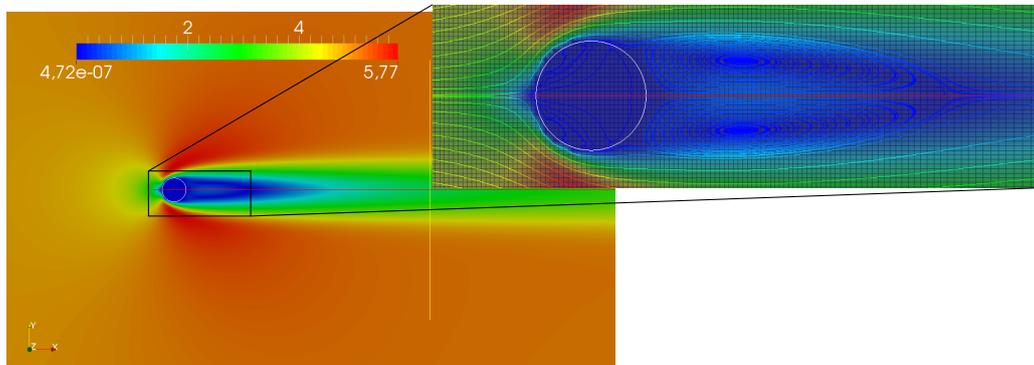


(b)

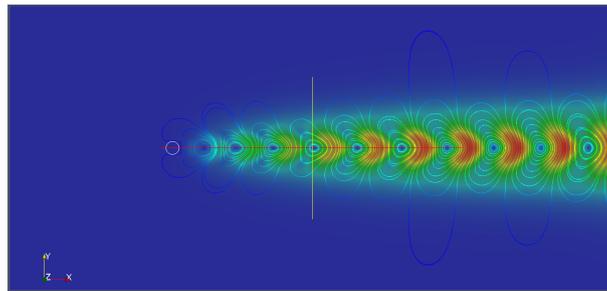


(c)

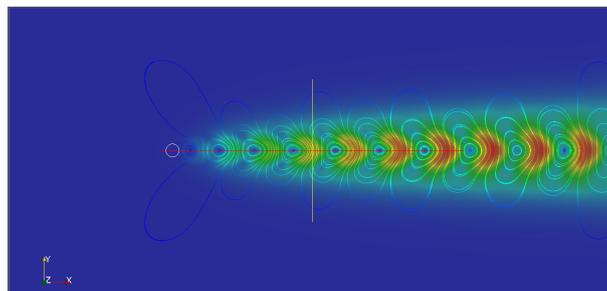
FIGURE 5.22 – Ecoulement autour d'un cylindre à la bifurcation $Re = 44,33$: (a) magnitude de la vitesse ; (b) partie réelle du mode complexe ; (c) partie imaginaire du mode complexe - Méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 30$, $\eta = 10^{-6}$).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.23 – Ecoulement autour d'un cylindre à la bifurcation $Re = 47,539$: (a) magnitude de la vitesse ; (b) partie réelle du mode complexe ; (c) partie imaginaire du mode complexe - Méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 30$, $\eta = 10^{-6}$).

Re	ω	statut	Re_c	ω_c
41,26	0	NCV		
41,26	1,756	NCV		
41,26	3,102	CV (6 iter)	47,539	3,656
42,88	0	NCV		
42,88	1,908	NCV		
42,88	3,248	CV (6 iter)	47,539	3,656
44,50	3,392	CV (6 iter)	47,539	3,656
46,11	0	NCV		
47,73	0	NCV		
47,73	3,67	CV (4 iter)	47,539	3,656

TABLE 5.7 – Point initial et résultats de l’algorithme de Newton pour le cylindre à base circulaire - méthode LP. Les symboles NCV et CV signifient respectivement la non convergence ou la convergence de la méthode de Newton en (\bullet) itérations.

paramètre de pénalisation K	LP		LPG	
	Re_c	St	Re_c	St
10^{-4}	44,33	0,110	44,36	0,108
10^{-5}	44,28	0,109	48,77	0,109
10^{-6}	45,618	0,110	47,298	0,112

TABLE 5.8 – Nombre de Reynolds et nombre de Strouhal en fonction du paramètre de pénalisation K pour les modélisations LP et LPG.

pénalisation K ne doit pas être trop élevée. Ainsi, pour cette étude, les simulations sont réalisées pour les trois valeurs de pénalisation suivantes : $K = 10^{-4}$, 10^{-5} et 10^{-6} . Les résultats, synthétisés dans le tableau 5.8, montrent une dépendance des valeurs critiques Re_c et St_c à la valeur de K . Pour les deux méthodes LP et LPG, la valeur la plus faible de K permet d’obtenir la valeur la plus élevée du nombre de Reynolds critique Re_c ainsi que la valeur la plus élevée pour le nombre de Strouhal critique St_c . On note que la méthode Gost-Cell permet d’obtenir des valeurs du nombre de Reynolds critique Re_c plus élevées que celles obtenues avec la méthode LP. Finalement, l’étude confirme qu’une valeur la plus faible possible du paramètre de pénalisation K est nécessaire pour procéder à l’analyse de bifurcation de Hopf d’un écoulement.

Cependant, cette étude ne permet pas de mettre en évidence un comportement différent des méthodes LP et LPG. En particulier, depuis les travaux de Sohankar *et al.* [Sohankar et al., 1998, 1997] et de Franke *et al.* [Franke et al., 1990], les paramètres de simulation (tels que le taux de blocage, la discrétisation spatiale et en particulier dans les zones de points anguleux) ont une grande importance sur les résultats numériques. C’est la raison pour laquelle une étude sur l’influence de la Level-Set est menée.

5.2.5 Sensibilité des méthodes à la position de la Level-Set

Jusqu’à présent, le maillage et la Level-Set définissant l’interface fluide-solide sont coïncidents. Afin de mettre en évidence l’influence de la fonction Level-Set, trois configurations de maillage (voir la figure 5.24) sont testées pour le problème de l’écoulement autour d’un obstacle carré.

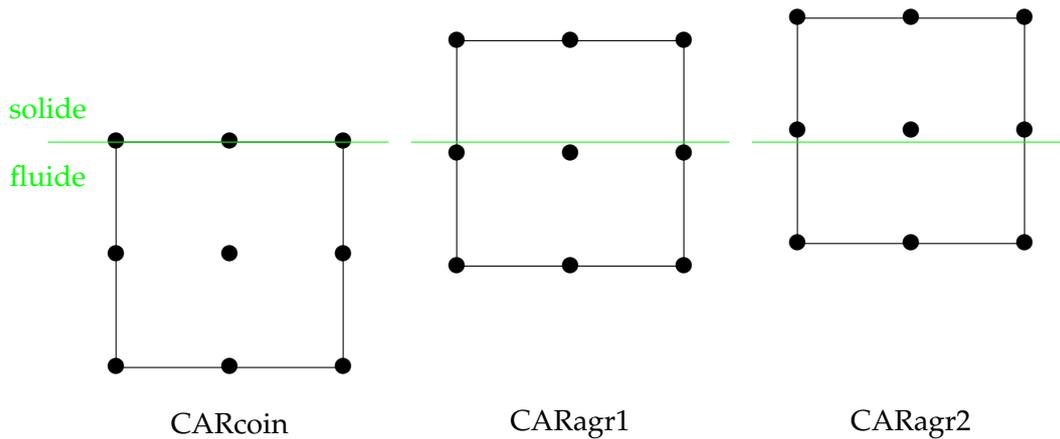


FIGURE 5.24 – Position relative de la frontière au sein de l'élément pour l'étude de l'influence de la position de la Level-Set.

La configuration 'CARcoin' correspond à la discrétisation de référence où l'iso-valeur zéro de la Level-Set est coïncidente avec le bord des éléments finis de l'interface fluide-solide. La configuration 'CARagr1' correspond à la situation où l'iso-valeur zéro de la fonction Level-Set 'coupe' l'élément fini tout en garantissant au nœud central d'appartenir au domaine fluide (l'élément fini n'étant pas pénalisé). Enfin, la configuration 'CARagr2' correspond au cas où l'iso-valeur zéro de la fonction Level-Set 'coupe' l'élément fini tel que le nœud central appartient au domaine solide. Dans ce cas, la configuration correspond exactement à la modélisation proposée par Tseng *et al.* [Tseng & Ferziger, 2003].

Les maillages utilisés comportent sensiblement le même nombre de nœuds (de 33 000 à 36 000). Cette différence provient de l'adaptation du maillage aux configurations testées.

Les résultats de l'analyse de bifurcation de Hopf réalisée pour ces trois configurations sont présentés à la figure 5.25. Pour les deux méthodes LP et LPG, les valeurs critiques les plus proches des valeurs de référence sont obtenues pour la configuration 'CARagr1', cas où il y a le moins de différence. Dans cette configuration, la méthode LPG conduit aux meilleurs résultats.

Par contre, les analyses de bifurcation conduites avec la configuration 'CARagr2' ne permettent absolument pas de retrouver les résultats de référence. Les éléments coupés étant considéré comme solide, le cylindre est de dimension $D_{\text{apparent}} \approx D + 2\frac{dx}{2}$. Il est donc normal d'avoir une valeur différente. Dans le cas 'CARagr2', la méthode LPG+ n'apporte aucune amélioration. Une représentation de l'écoulement autour de l'obstacle dans les trois configurations est proposée sur la figure 5.26. Il est observé notamment que la configuration 'CARagr2' ne permet pas d'imposer la condition cinématique de couplage à l'interface (voir figure 5.26(c)).

Finalement, cette étude met en évidence l'influence de la position de l'interface (représentée par l'iso-valeur zéro de la Level-Set) par rapport aux éléments finis. En particulier, la méthode Gost-Cell, censée reconstruire exactement l'interface indépendamment du maillage, ne le permet pas. Une analyse critique de cette méthode est réalisée dans le paragraphe suivant.

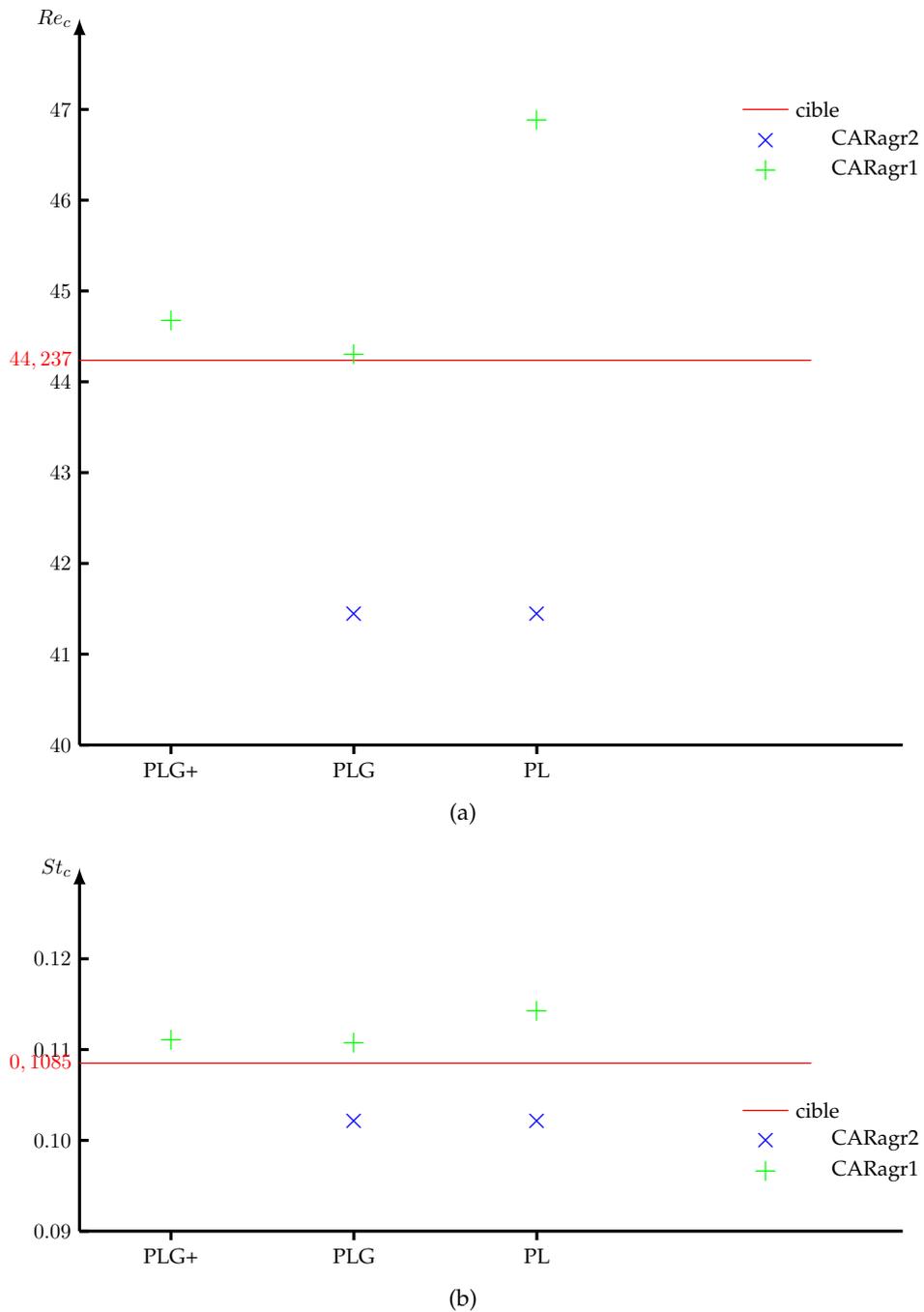


FIGURE 5.25 – Valeur caractéristique critique en fonction de la méthode employée et de la position de la frontière dans l'élément : (a) Nombre de Reynolds critique ; (b) Nombre de Strouhal critique.

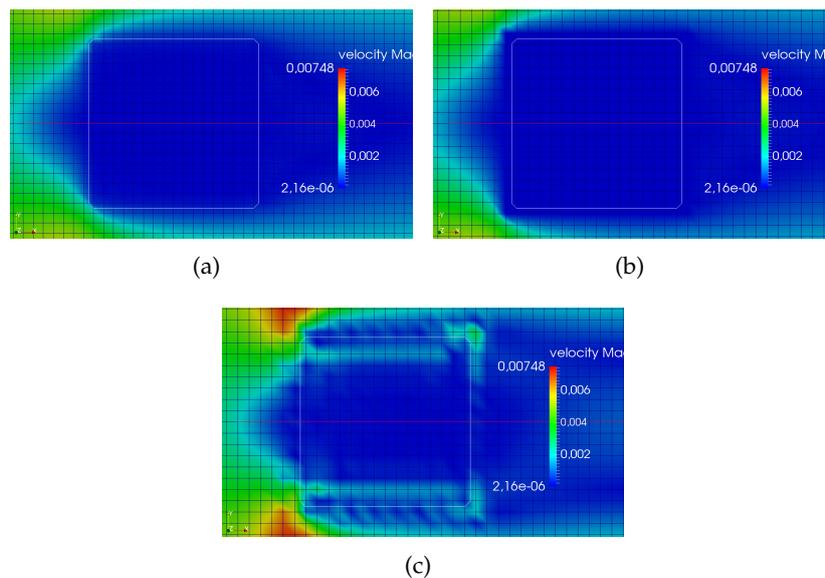


FIGURE 5.26 – Écoulement autour du cylindre à base carrée pour plusieurs cas de figure : (a) LPG CARagr1 ; (b) LPG CARagr2 ; (c) LPG+ CARagr2.

5.2.6 Analyse critique de la méthode Gost-Cell

Deux causes, probables, du dysfonctionnement de la méthode Ghost-Cell dans la reconstruction des interfaces sont avancées.

Tout d'abord, dans le cas de l'écoulement autour d'un obstacle de forme carrée, une observation de l'écoulement révèle un champ de vitesse aberrant au voisinage des points anguleux (figure 5.26(c)). Une explication à ce dysfonctionnement porte sur la détermination des points O et I , en particulier, l'impossibilité de construire un unique vecteur normal sortant n en un point anguleux (figure 5.27). Ce problème fait écho à l'étude de Mittal *et al.* [Mittal *et al.*, 2008] qui met en évidence les situations problématiques dans l'application de la méthode Ghost-Cell.

Plus vraisemblablement, après de nombreux essais menés sur l'écoulement autour d'un obstacle circulaire (pour lequel il n'y a aucun point anguleux), il apparaît que l'application de la condition cinématique de couplage provoque des instabilités numériques.

En effet, lors de la procédure de continuation, le champ de vitesse au pas précédent ($j - 1$) est utilisé pour appliquer la condition cinématique de couplage au pas actuel (j). Comme aucune procédure de correction portant sur la condition cinématique n'est présente dans l'algorithme (seul le champ de vitesse 'fluide' est corrigé dans la procédure de Newton pour la détermination des bifurcations de Hopf), des erreurs sont introduites au niveau de l'interface et s'amplifient au fur et à mesure des pas de continuation MAN. Pour s'en convaincre, la répartition spatiale des résidus pour l'écoulement autour de l'obstacle circulaire est représentée (figure 5.28). Sur cette figure, une comparaison des résidus obtenus avec les méthodes LP et LPG est proposée. Les résidus obtenus avec la méthode LPG sont bien plus élevés que ceux obtenus avec la méthode LP et concentrés notamment autour de l'obstacle. Ces erreurs, n'étant jamais corrigées, vont s'amplifier et empêcher la convergence vers la solution du problème.

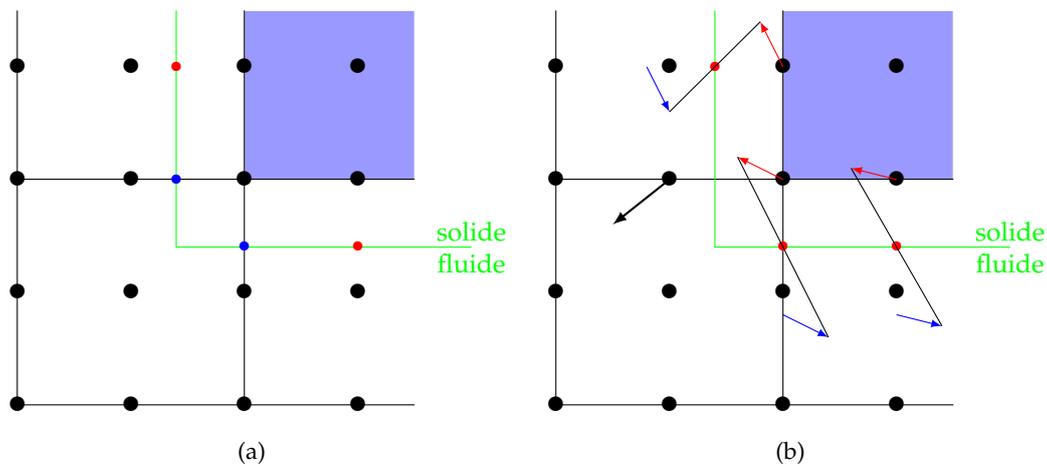


FIGURE 5.27 – Schéma montrant le problème de situation non-classique : (a) Les points \bullet sont les points O classiques donnant la normale attendue. Les points \bullet montrent les deux positions auxquelles le points O et sa condition de non-glissement peuvent-être affectés ; (b) les vitesses imposées (en rouge) basées sur les vitesses du fluide (en bleu) donnent une conditions de non-glissement aux points \bullet mais imposent des conditions incohérentes pour le pas suivant (en noir).

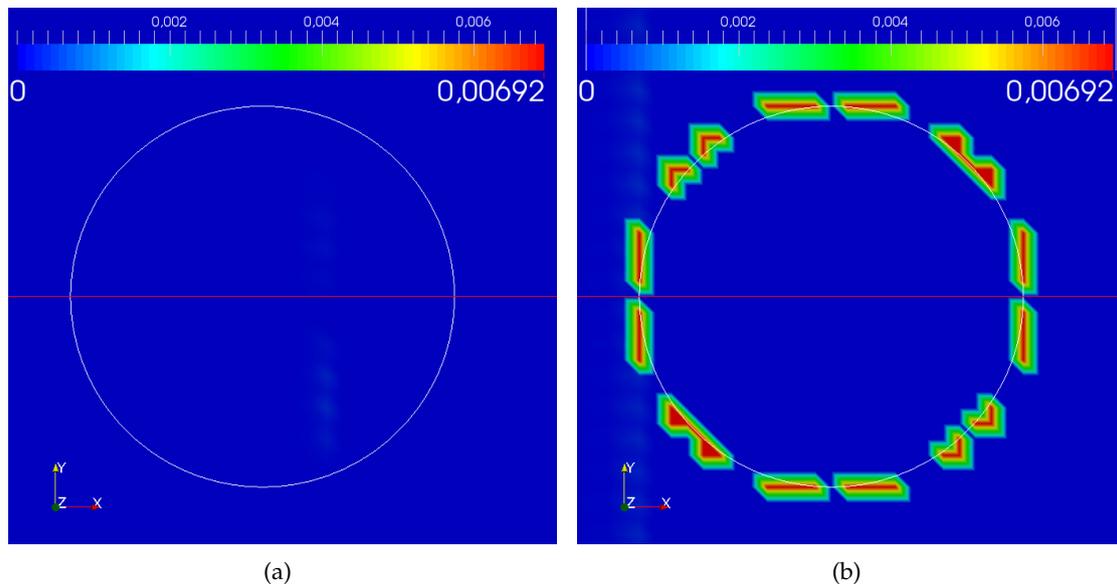


FIGURE 5.28 – Carte des résidus autour du cylindre : (a) méthode LP à $Re = 27,5$; (b) méthode LPG à $Re = 30,3$ - ($K = 10^{-6}$, $N = 30$, $\eta = 10^{-6}$).

5.2.7 Synthèse de l'analyse de bifurcation de Hopf

L'analyse de bifurcation de Hopf est réalisée sur l'écoulement autour d'obstacles fixes, de formes carrée et circulaire. Les études numériques montrent que la méthode LP, avec une valeur de pénalisation faible (par ex. $K \cong 10^{-6}$), permet de retrouver les valeurs critiques de bifurcation. Les résultats relatifs aux méthodes LPG et LPG+ sont moins satisfaisants. Ils révèlent l'impossibilité d'appliquer correctement les conditions cinématiques de couplage au niveau de l'interface. Bien que la méthode Ghost-Cell permette de 'reconstruire' l'interface, l'algorithme proposé ne permet pas d'appliquer les valeurs de vitesses nodales adéquates. Une amplification des erreurs autour de l'interface est observée (via la répartition spatiale des résidus) car ces dernières ne sont pas corrigées au cours du calcul réalisé par la MAN.

5.3 Simulation d'un écoulement instationnaire autour d'un obstacle circulaire fixe ou mobile

5.3.1 Description du cas d'étude

Dans ce paragraphe, l'algorithme tHP, présenté au chapitre 4.6, est évalué dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle de forme circulaire pouvant, ou non, se déplacer.

Le domaine de calcul est identique à celui retenu pour l'analyse de bifurcation de Hopf (voir figure 5.20)

Sur les bords du domaine de calcul, les conditions aux limites sont identiques ($\lambda u_{d,x}$ sur Γ_e et pas de contraintes sur Γ_s). Les conditions d'interactions fluide-structure autour du cylindre sont gérées soit par l'algorithme LP, soit par l'algorithme LPG.

Les paramètres numériques utilisés sont un ordre de troncature $N = 55$ (ordre maximal car l'algorithme est adaptatif) et une précision utilisateur choisie comme étant égale à $\eta = 10^{-6}$. L'intégration temporelle utilise un pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$ et un paramètre $\theta = 0,6$ pour le θ -schéma.

Des 'sondes' numériques sont placées en différents points du domaine de calcul afin de suivre l'évolution temporelle du champ des vitesses dans le sillage du cylindre. En particulier, la sonde B au nœud de coordonnées $\left(\frac{x}{D}; \frac{y}{D}\right) \approx (0,75; 0,0)$ permet de calculer le nombre de Strouhal St et de comparer les valeurs obtenues avec celles disponibles dans la littérature ([Brajon-Socolescu, 1996; Braza et al., 1986; Guerouache, 2000] pour le cylindre fixe et [Guerouache, 2000; Placzek et al., 2009] pour le cylindre en mouvement). Par la suite, le nombre de Strouhal est obtenu par application d'une transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform) sur l'évolution temporelle de la composante verticale de la vitesse u_y mesurée au point B et d'une durée de 30 secondes. La durée totale des simulations est fixée à $T_{max} = 50$ s.

Pour tester l'algorithme d'intégration temporelle tHP, la procédure suivante est adoptée. Une solution stationnaire U_s , correspondant à un écoulement à un nombre de Reynolds $Re = 100$, est d'abord calculée selon l'algorithme de perturbation/continuation présenté précédemment. Une fois la solution initiale U_s obtenue, l'algorithme tHP est utilisé jusqu'à l'établissement d'un régime périodique.

Cet algorithme est appliqué pour les problèmes du cylindre fixe et mobile et en utilisant l'une des méthodes mises au point (méthode LP, LPG ou LPG+) pour tenir compte de l'IFS.

5.3.2 Cylindre fixe en milieu infini

5.3.2.1 Régime stationnaire

Pour les trois méthodes LP, LPG et LPG+, la procédure de perturbation/continuation jusqu'à un nombre de Reynolds $Re = 100$ est évaluée. A cet effet, la longueur de recirculation L_r des tourbillons derrière le cylindre est mesurée au cours de la continuation. La longueur de recirculation correspond à la distance, derrière le cylindre, où la composante horizontale de la vitesse, mesurée sur l'axe de symétrie $y = 0$, devient nulle (voir la figure 5.29). Dans cette étude, la longueur de recirculation L_r est adimensionnée par le diamètre D du cylindre. Les résultats de référence sont synthétisés dans le tableau 5.9.

Pour cette étude, les mesures des longueurs de recirculation sont effectuées en fin de pas de continuation et ces derniers ne correspondent pas obligatoirement aux valeurs du nombre

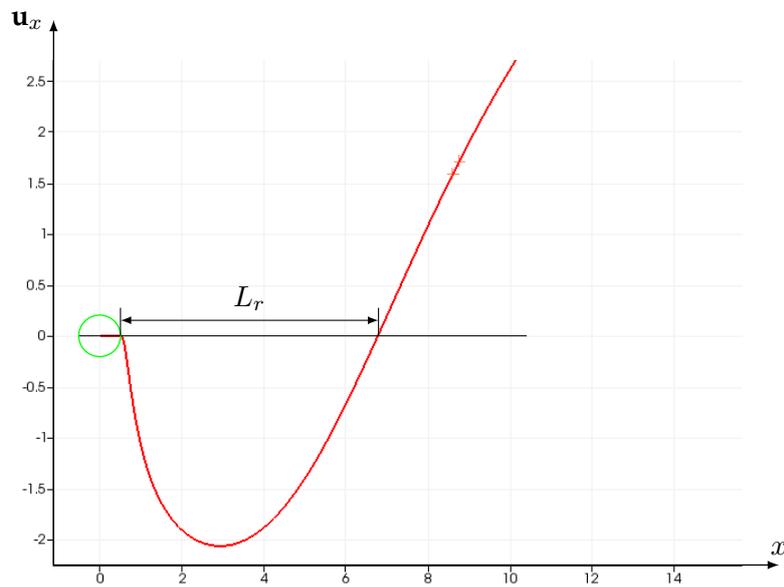


FIGURE 5.29 – Détermination de la longueur de recirculation.

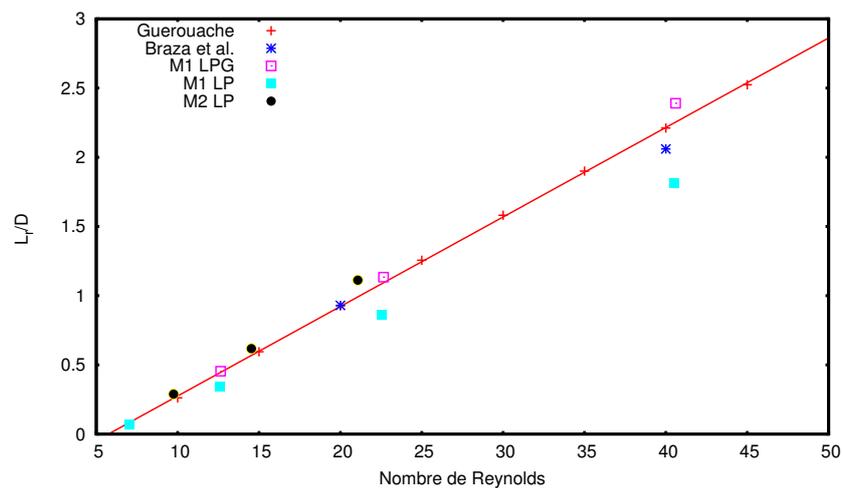


FIGURE 5.30 – Longueur de recirculation adimensionnelle en fonction de la valeur du nombre de Reynolds pour les maillages M1 et M2 et les méthodes LP et LPG, comparée aux valeurs de [Guerouache, 2000] et [Braza et al., 1986].

Re	10	15	20	25	30	35	40	45
[Guerouache, 2000]	0,262	0,595	0,927	1,256	1,581	1,900	2,211	2,524
[Brajon-Socolescu, 1996]	0,263	0,579	0,895	1,211	1,527	1,843	2,159	2,475
[Braza et al., 1986]	-	-	0,93	-	-	-	2,060	-

TABLE 5.9 – Longueur de recirculation adimensionnelle $\frac{L_r}{D}$ en fonction de la valeur du nombre de Reynolds.

Méthode	loi d'évolution proposée	Re_s
[Guerouache, 2000]	$L_r/D = 6,4662 \cdot 10^{-2} Re - 0,37120$	5,74
M1 LPG	$L_r/D = 6,9328 \cdot 10^{-2} Re - 0,427773$	6,17
M1 LP	$L_r/D = 5,20454 \cdot 10^{-2} Re - 0,301983$	5,80
M2 LP	$L_r/D = 7,28658 \cdot 10^{-2} Re - 0,4286$	5,88

TABLE 5.10 – Longueur de recirculation adimensionnelle $\frac{L_r}{D}$ en fonction du nombre de Reynolds.

de Reynolds indiquées dans le tableau 5.9. Pour être plus précis, le diagramme de la figure 5.30 est proposé. A partir des données tracées, il est possible d'établir une régression linéaire reliant la distance L_r à la valeur du nombre de Reynolds Re . Plusieurs modèles sont proposés dans le tableau 5.10 selon la méthode et le maillage retenus.

Sachant que les résultats de la littérature offrent une grande dispersion, les longueurs obtenues selon les méthodes LP sur le maillage M2 (80 863 nœuds) et LPG sur le maillage M1 (53 863 nœuds) sont du bon ordre de grandeur. L'intersection de la droite provenant de la régression coupe l'abscisse en un point appelé nombre de Reynolds seuil Re_s . L'écoulement est rampant pour une valeur du nombre de Reynolds inférieure à Re_s . Au-delà de cette valeur, l'écoulement présente des tourbillons de recirculation derrière le cylindre.

Pour le maillage M1, la méthode LPG donne de meilleurs résultats que la méthode LP sur l'évolution. Les résultats obtenus avec la méthode LP appliquée au maillage M2 sont aussi très satisfaisants.

5.3.2.2 Régime instationnaire

La transition d'un écoulement stationnaire vers un écoulement périodique en temps est caractéristique d'une bifurcation de Hopf. Physiquement, l'instabilité est provoquée par le décrochage de la couche limite visqueuse autour du cylindre. Puis, les tourbillons sont advectés et atténués par diffusion visqueuse au sein de l'écoulement. Numériquement, la transition d'une solution stationnaire vers la solution périodique nécessite un grand nombre d'itérations et entraîne un coût de calcul élevé. C'est ce coût de calcul qu'il faut diminuer en utilisant le plus possible la même matrice tangente $K_t^{U_s}$ et en limitant ainsi le nombre de factorisations de cet opérateur.

Application de la méthode LP La méthode LP, utilisée conjointement avec le maillage M2, permet d'obtenir l'évolution temporelle de la vitesse u_y au point sonde B présentée à la figure 5.31.

Une autre façon de voir cette transition est présentée à la figure 5.31(b). Ce portrait de phase montre la composante verticale de l'accélération \dot{u}_y en fonction de la composante verti-

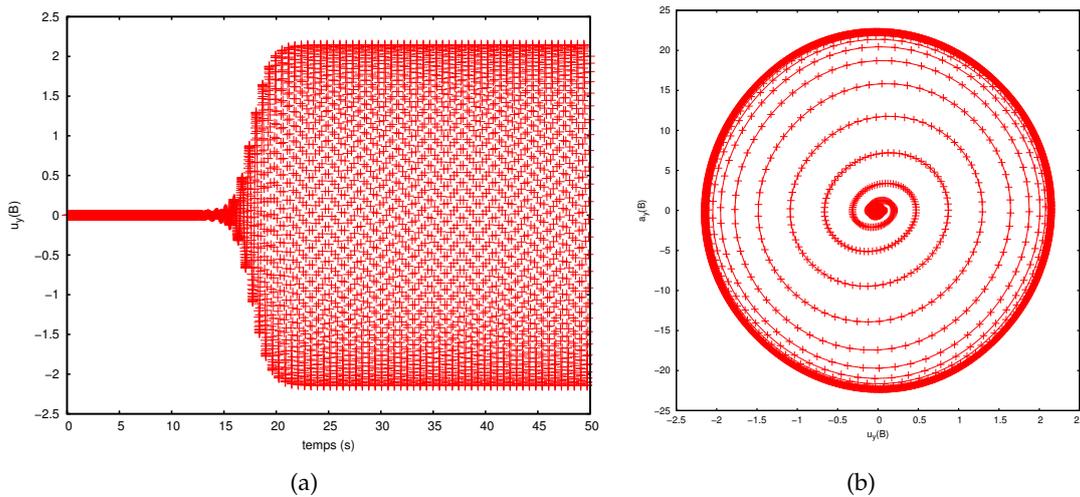


FIGURE 5.31 – Transition de l'état initial stationnaire à l'état périodique : (a) Vitesse selon y au point sonde B ; (b) Cycle limite au point sonde B - Méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 35$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

cale de la vitesse u_y au point sonde B.

Lorsque le régime périodique est établi, une FFT de l'évolution temporelle de u_y au point B est effectuée (voir figure 5.32) et permet d'obtenir le nombre de Strouhal St .

Pour information, le champ de vitesse et les lignes de courant autour du cylindre sont proposés à la figure 5.33. Sur cette figure, on note la présence de points anguleux au niveau de l'interface fluide-solide due à la méthode LP qui ne permet pas une définition précise de l'interface. En complément, la norme du champ de vitesse est représentée à la figure 5.34. Sur cette figure, l'allée de von-Karman est bien décrite, même si une atténuation rapide des tourbillons en aval du domaine est observée. Malgré le défaut de définition exacte de l'interface fluide-solide, ces résultats sont cohérents avec ceux de la littérature.

Pour vérifier la précision de la méthode LP, l'évolution du nombre de Strouhal St en fonction du nombre de Reynolds Re est proposée à la figure 5.35. Cette évolution, non linéaire par rapport au nombre de Reynolds, est en bon accord avec les évolutions issues de la littérature.

5.3.3 Application des méthodes LPG et LPG+

L'étude précédente dédiée à l'analyse de bifurcation de Hopf autour du cylindre circulaire a montré que les méthodes LPG et LPG+ échouaient dans la détection de la bifurcation. En particulier, l'application des conditions cinématiques de couplage avec la solution au pas j pour la résolution des équations de Navier-Stokes pour le pas suivant $j + 1$ semble provoquer des instabilités numériques.

Aussi, dans le contexte de l'algorithme tHP et en considérant des pas de discrétisation temporelle faible ($\Delta t = 0,01 s$), il est possible que les méthodes LPG et LPG+ ne souffrent pas de ce 'décalage' des solutions entre les étapes d'imposition des conditions d'IFS et de résolution des équations de Navier-Stokes.

Malheureusement, la méthode tHP fait appel à une continuation sur le paramètre d'homotopie ϵ . Ceci conduit aux mêmes dysfonctionnements des méthodes LPG et LPG+ rencontrés

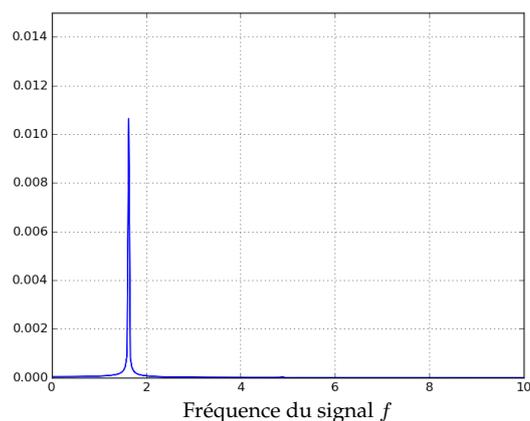


FIGURE 5.32 – Transformée de Fourier du signal périodique $u_y(B)$ - Méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

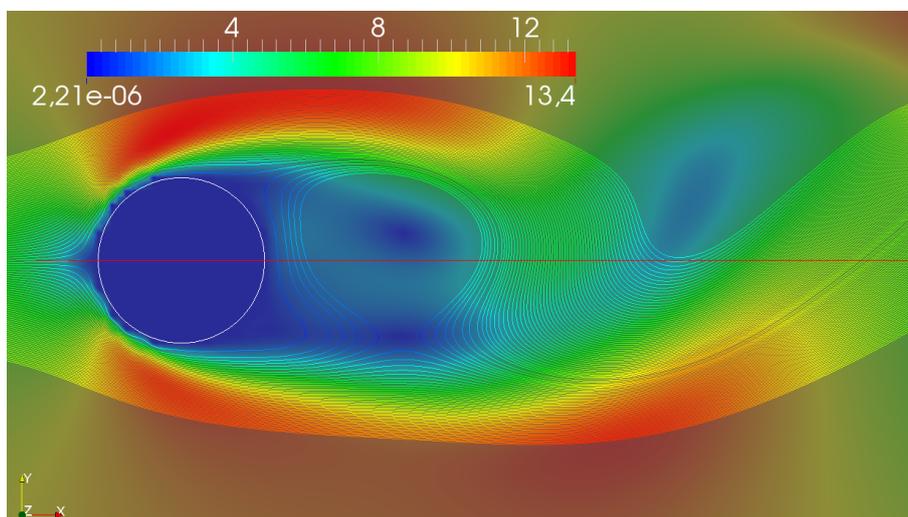


FIGURE 5.33 – lignes de courant pour un écoulement à $Re = 100$ et à l'instant $t = 50,00 s$ - méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

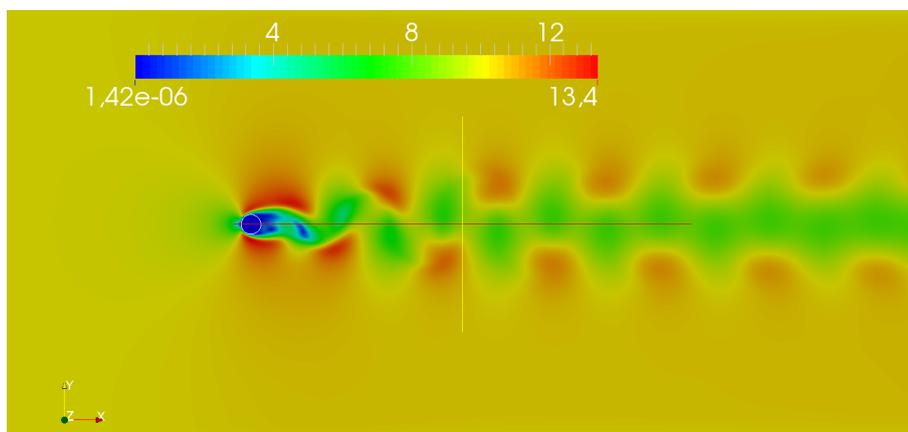


FIGURE 5.34 – Norme de la vitesse pour un écoulement à $Re = 100$ et à l'instant $t = 50,00 s$ - méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

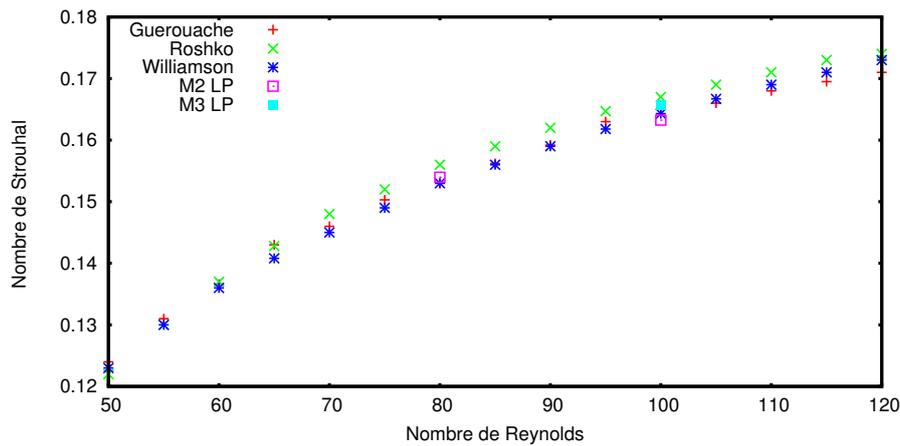


FIGURE 5.35 – Nombre de Strouhal St en fonction du nombre de Reynolds Re .

précédemment.

Tout d'abord, la norme du champ de vitesse, calculée selon les méthodes LPG et LPG+ obtenue à la première itération temporelle à partir d'une solution initiale (obtenue avec la méthode LP) est tracée sur les figures 5.36(b) et 5.36(c). Ces résultats semblent montrer une structure d'écoulement cohérente autour du cylindre. En particulier, on note la définition précise de la forme circulaire de l'obstacle ainsi que l'imperméabilité de l'interface sans intrusion de lignes de courant venant du domaine fluide extérieur.

Malheureusement, pour des temps de simulation plus élevés (voir les figures 5.37), quelle que soit la méthode utilisée, l'écoulement autour du cylindre n'est plus correct. De plus, si l'évolution de la norme du champ de vitesse est étudiée entre les deux instants consécutifs ($t = 17,84$ s et $t = 17,85$ s en LPG, $t = 17,94$ s et $t = 17,95$ s en LPG+), alors le problème de 'décalage' énoncé précédemment est très clairement mis en évidence. En effet, le champ de vitesse devient fortement erroné à l'instant même où la matrice tangente est actualisée (voir le chronogramme (a) des figures 5.38 et 5.39 pour les méthodes LPG et LPG+ respectivement).

5.3.4 Cylindre mobile en mouvement forcé

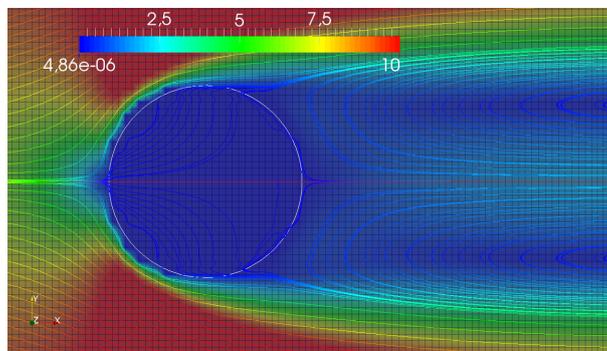
5.3.4.1 Forçage à la fréquence du lâché tourbillonnaire

Le même domaine que précédemment est utilisé pour simuler le déplacement forcé de l'obstacle rigide. Le cylindre subit un déplacement vertical dont la fréquence et l'amplitude du déplacement sont choisis par l'utilisateur :

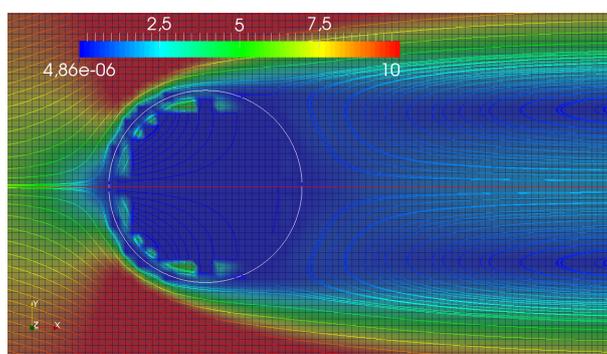
$$\mathbf{u}_b(t) = \begin{cases} 0 \\ 2A\pi \cos(2\pi ft) \end{cases} \quad (5.3)$$

Pour comparer avec les simulations d'autres auteurs, ces grandeurs sont adimensionnées, ainsi la fréquence d'excitation est divisée par la fréquence de décrochement tourbillonnaire f_s du cylindre fixe, et l'amplitude du déplacement du cylindre A est divisée par le diamètre D . Dans cette étude, les valeurs de A et de f sont choisies telles que les ratios f/f_s et A/D soient égaux, respectivement à 1 et 0,25.

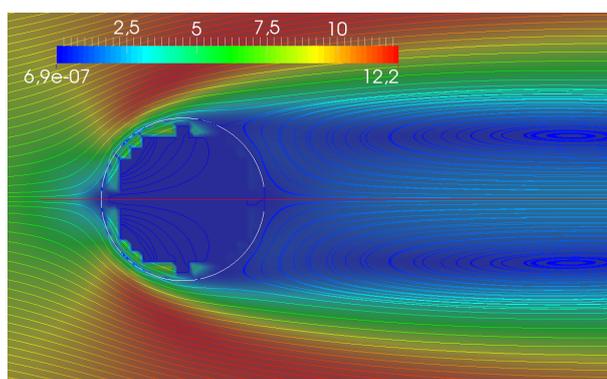
Une simulation est réalisée en utilisant les mêmes paramètres numériques que précédemment et la méthode LP. Ce cylindre se déplace dans un fluide dont l'écoulement est caractérisé



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.36 – Norme de la vitesse autour du cylindre circulaire : (a) initialisation par la méthode LP ; (b) méthode tHP et LPG après la 1^{re} itération utilisant la MGC ; (c) méthode tHP et LPG+ après la 1^{re} itération utilisant la MGC - ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0, 6$, $dt = 10^{-2}$).

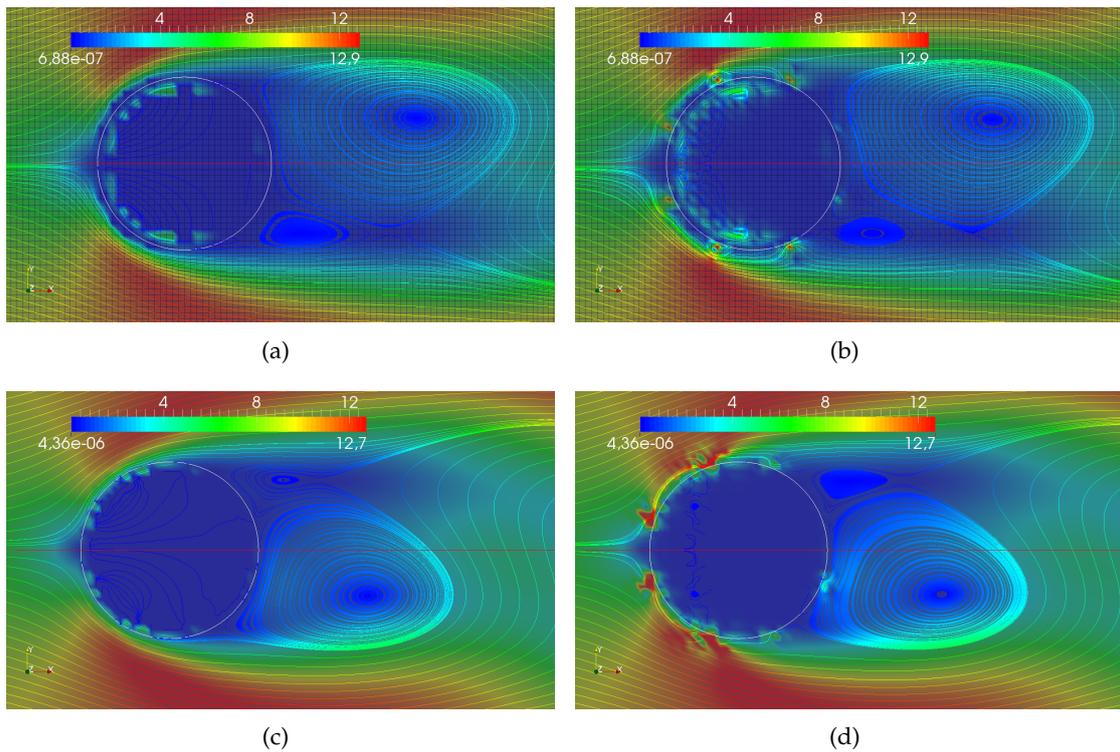


FIGURE 5.37 – Norme de la vitesse autour du cylindre circulaire à deux instants consécutifs : 1^{er} ligne selon la méthode LPG (a) $t = 17,84$; (b) $t = 17,85$; 2^e ligne selon la méthode LPG+ (c) $t = 17,94$ s; (d) $t = 17,95$ s - ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

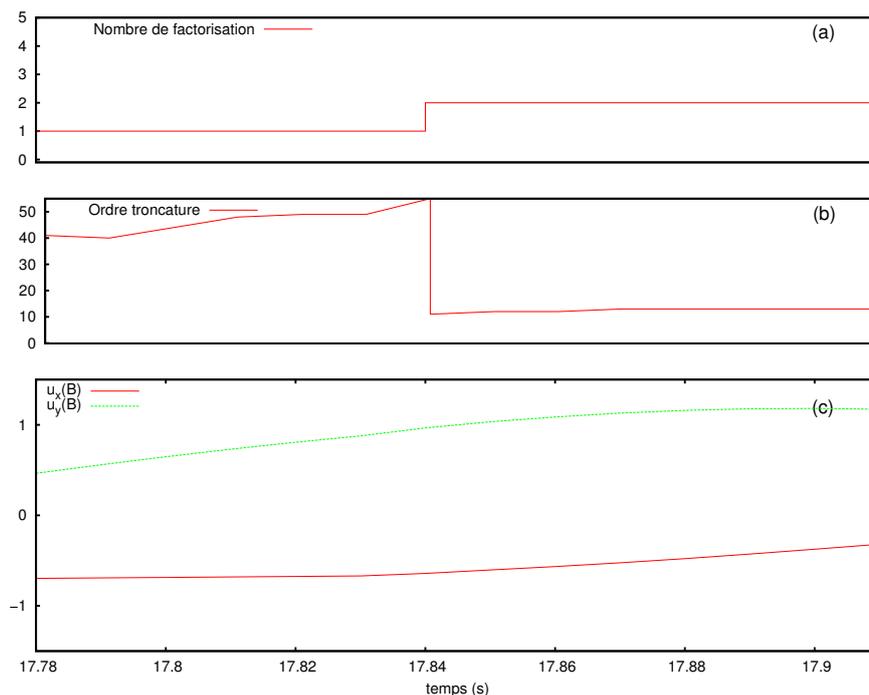


FIGURE 5.38 – Comportement de l’algorithme en fonction du temps autour de l’instant $t = 17,84 \text{ s}$; (a) nombre de factorisation de matrice; (b) nombre d’ordre MAN nécessaire; (c) Composantes de la vitesse au point sonde B - méthode LPG ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

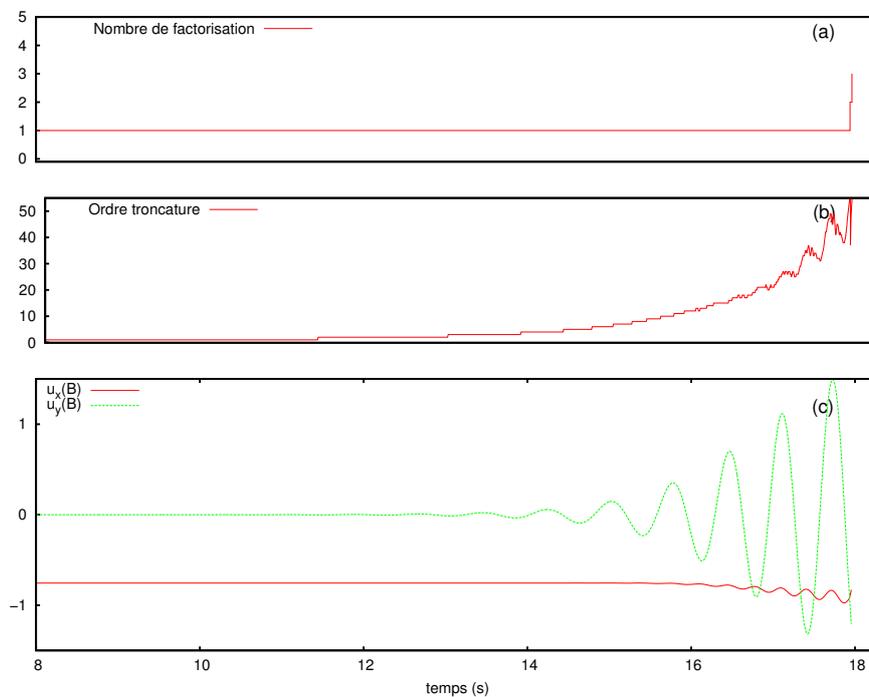


FIGURE 5.39 – Comportement de l’algorithme LPG+ en fonction du temps; (a) nombre de factorisation de matrice; (b) nombre d’ordre MAN nécessaire; (c) Composantes de la vitesse au point sonde B - méthode LPG+ ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

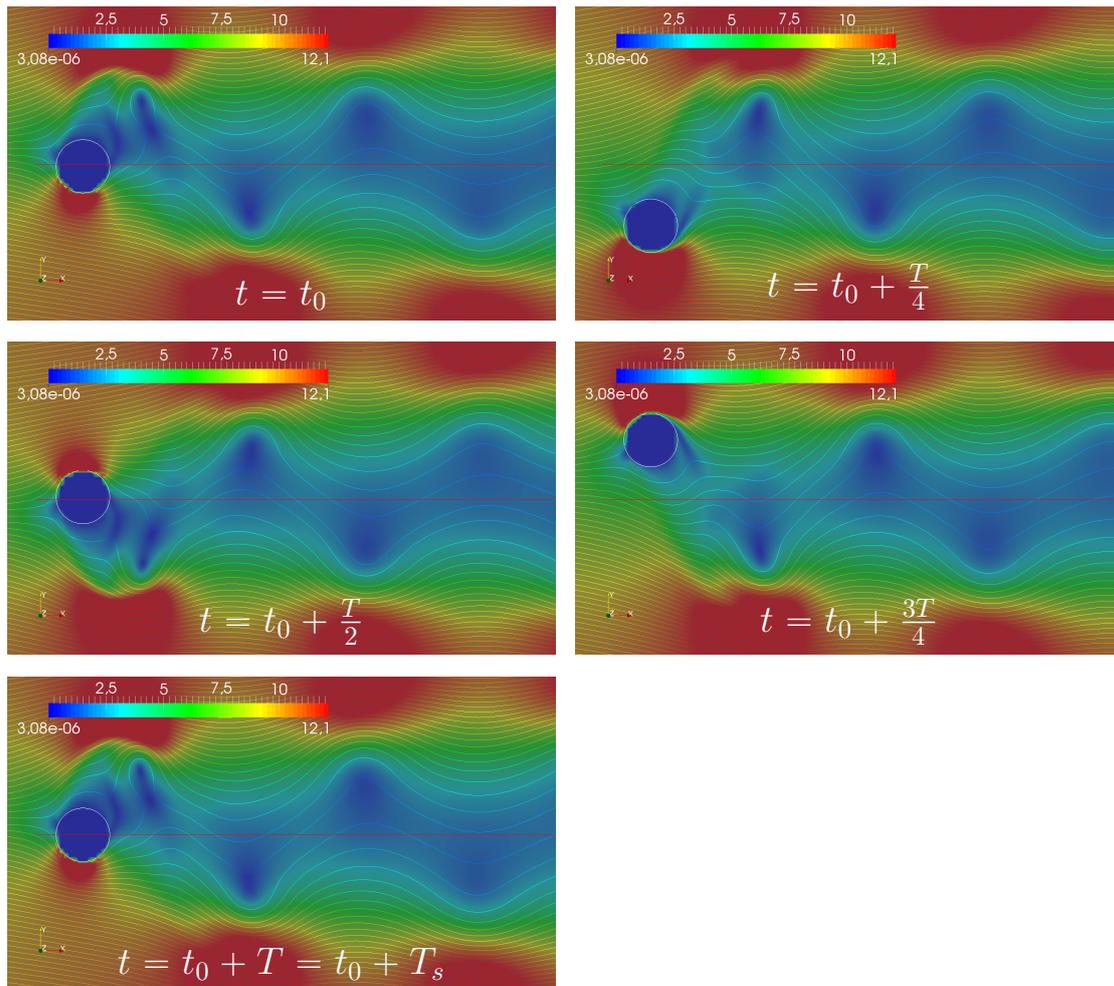


FIGURE 5.40 – Norme de la vitesse autour du cylindre circulaire à cinq instants au cours d’une période d’oscillation du cylindre.

par une valeur du nombre de Reynolds $Re = 100$.

La figure 5.40 montre l’écoulement à plusieurs instants pris durant une période du mouvement. Ces images ont un profil qui correspond à ce que [Guerouache, 2000] montre pour un cas $(1, 0; 0, 5)$ se plaçant dans la zone de synchronisation [Placzek et al., 2009]. On constate que les écoulements à l’instant t_0 et à l’instant $t_0 + T$ sont parfaitement identiques. Le sillage est donc parfaitement synchronisé sur la fréquence d’oscillation. Comme identifiée dans [Williamson & Roshko, 1988], cette émission de deux tourbillons par cycle de mouvement est désignée sous le terme de mode "2S".

L’évolution temporelle de la composante verticale de la vitesse u_y au point sonde B est donnée à la figure 5.41. Le déplacement du cylindre y est affiché pour montrer la synchronisation.

Une analyse du signal de la composante verticale de la vitesse u_y au point sonde B donne un spectre où la fréquence de forçage f et donc de décrochement tourbillonnaire f_s est présente. Le spectre est en revanche assez bruité. De plus, il est loin des spectres que Placzek *et al.* [Placzek et al., 2009] présentent pour des simulations de la zone de synchronisation dont l’amplitude A/D est la même et le rapport $f/f_s = [0, 9, 1, 1]$.

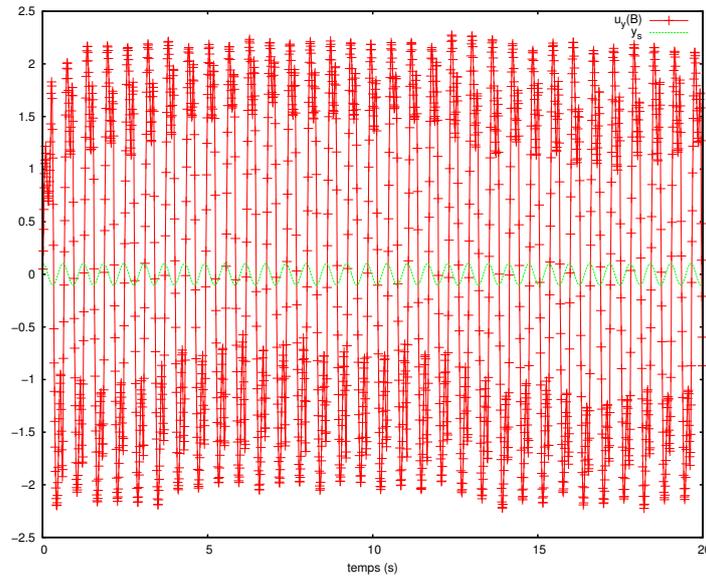


FIGURE 5.41 – Vitesse u_y au point sonde B et déplacement du cylindre - méthode LP (1, 0 ; 0, 25), ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0, 6$, $dt = 10^{-2}$).

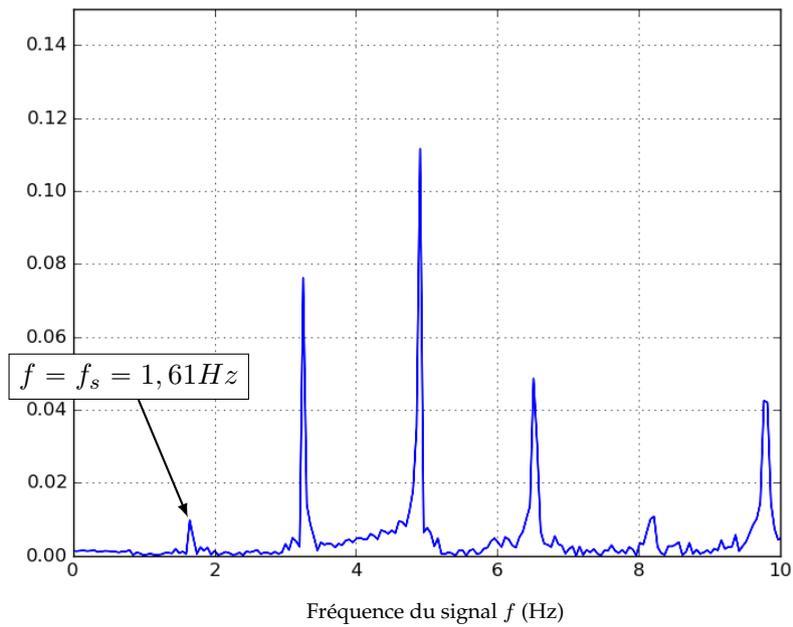


FIGURE 5.42 – Vitesse u_y au point sonde B et déplacement du cylindre - méthode LP (1, 0 ; 0, 25), ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0, 6$, $dt = 10^{-2}$).

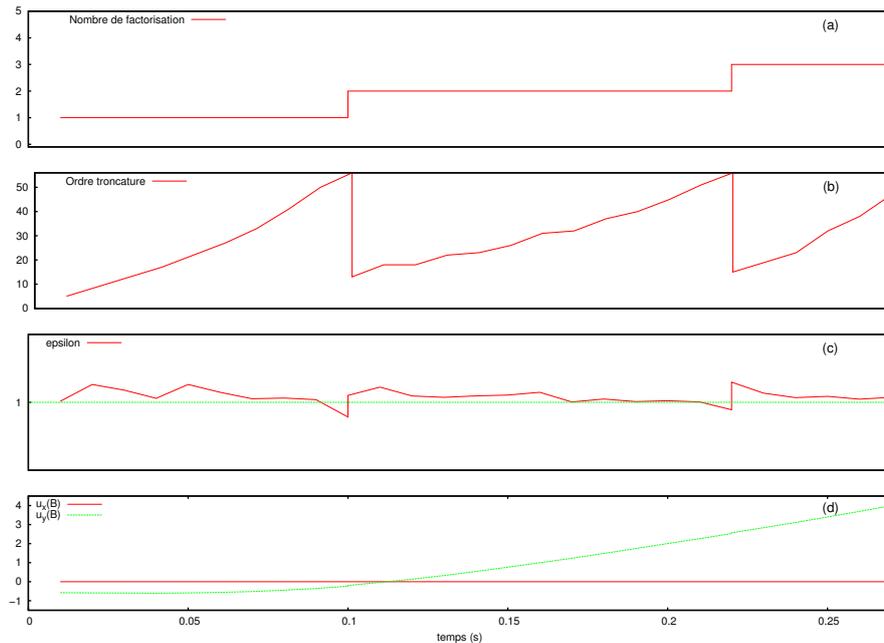


FIGURE 5.43 – comportement de l'algorithme en fonction du temps ; (a) nombre de factorisation ; (b) nombre d'ordre MAN nécessaire ; (c) valeur du paramètre d'homotopie ϵ ; (d) Composantes de la vitesse au point sonde B - méthode LP ($K = 10^{-6}$, $N = 55$, $\theta = 0,6$, $dt = 10^{-2}$).

Pour information, le fonctionnement de l'algorithme tHP est présenté (voir figure 5.43). Lorsque l'ordre de troncature maximal est atteint ($t = 0,1$ de 5.43(b)) et ne permet toujours pas de valider le critère d'homotopie ($\epsilon > 1$, figure 5.43(c)), une nouvelle matrice est évaluée et factorisée (5.43(a)). Avec cette nouvelle matrice, une série à 11 termes est nécessaire pour valider le critère d'homotopie. La figure 5.43(a) montre que la matrice est factorisée seulement trois fois pour $t = 0,25$ s ce qui entraîne un gain de temps de calcul.

Conclusion

Dans ce chapitre, les algorithmes d'analyse de bifurcation et d'intégration temporelle associant les MFI et la MAN ont été testés.

L'analyse de bifurcation stationnaire est réalisée pour un écoulement 2D dans une conduite avec expansion soudaine suivie d'une contraction soudaine. Dans ce problème, la conduite est modélisée pour les MFI proposées. Les résultats montrent que la méthode LP, avec un paramètre de pénalisation K bien choisi, permet de déterminer les bifurcations. Cependant, une dépendance des résultats au maillage est mise en évidence et un flux traversant l'interface fluide-solide, au niveau des obstacles, est observé. L'ajout de la méthode Ghost-Cell corrige ces défauts en imposant exactement les conditions de couplage (continuité des vitesses) selon les hypothèses retenues (pas d'échange d'énergie autre que mécanique, phases distinctes, pas d'échange de matière). Seule la méthode LPG+ autorise des résultats indépendants de la position de la frontière au sein de l'élément. La méthode LPG+ considère les éléments coupés par la frontière fluide-solide comme des éléments fluides. Ceci a pour effet que les vitesses nodales ne sont pas pénalisées au niveau de l'interface. Par conséquent, il est possible de calculer un champ de vitesse (respectant exactement la condition de couplage) à partir d'une interpolation spatiale où toutes les vitesses nodales proches de l'interface ont la même importance. La

méthode LPG+ conduit à des résultats en parfait accord avec ceux de la littérature.

L'analyse de bifurcation de Hopf est réalisée pour l'écoulement autour d'obstacles 2D de forme carrée et circulaire. La méthode LP, correctement calibrée, permet de déterminer des nombres de Reynolds et de Strouhal critiques qualitativement corrects, cohérents avec les valeurs de la littérature. Les méthodes LPG et LPG+ sont beaucoup plus sensibles et délicates à utiliser. A ce jour, les simulations basées sur les méthodes LPG et LPG+ ne permettent pas une convergence des algorithmes. En particulier, les résidus calculés au niveau des interfaces fluide-solide mettent en évidence un conflit entre les champs de vitesse utilisés, respectivement, pour la résolution des équations de Navier-Stokes et pour imposer les conditions de couplage.

L'analyse transitoire d'un écoulement autour d'un cylindre rigide et de forme circulaire est menée avec le solveur tHP. Deux situations ont été considérées : le cas où le cylindre est fixe et celui où le cylindre est mobile. Pour ce cas, un mouvement forcé est imposé au cylindre. La méthode de résolution consiste à effectuer la continuation d'une solution stationnaire jusqu'à un écoulement de nombre de Reynolds $Re = 100$. Puis cette solution est utilisée comme solution initiale pour le solveur tHP. Une observation de la réponse transitoire jusqu'à un régime périodique établi est menée. La méthode LP permet de calculer une telle évolution. L'utilisation des méthodes LPG et LPG+ pour décrire l'interface fluide-solide, bien que les interfaces soient correctement 'représentées' (définition exacte de la forme de l'obstacle, pas de flux entrant), conduit aux mêmes problèmes que ceux observés pour l'analyse de bifurcation. Avec ces méthodes, il n'est pas encore possible d'obtenir une solution périodique et d'atteindre le cycle limite.

Conclusion générale et perspectives

Le contexte général de cette thèse s'inscrit dans le développement d'algorithmes spécifiques pour la résolution de problèmes non-linéaires et l'analyse de bifurcation.

Parmi tous les algorithmes, la MAN fait l'objet de nombreuses études. Il s'agit d'une méthode de perturbation d'ordre élevé qui est utilisée, notamment, pour l'analyse de bifurcation, tant dans le domaine du calcul des structures qu'en mécanique des fluides. Associée à une procédure de continuation et à des techniques spécifiques (comme le calcul d'indicateurs ou l'analyse des termes de série), la MAN permet de déterminer les bifurcations avec précision et robustesse et de suivre des solutions post-bifurcation.

Ainsi, dans le cadre de cette thèse, il a été décidé d'appliquer la MAN à des problèmes d'instabilité en interaction fluide-structure.

La première étape a consisté en l'identification des techniques numériques utilisées pour décrire l'IFS. Pour repérer le solide en interaction avec le fluide dans une grille fixe, une méthode de Level-Set est introduite. Le choix s'est porté sur une méthode de pénalisation des équations de Navier-Stokes (méthode LP). Afin d'améliorer la description de l'interface fluide-solide, une technique de frontières immergées basée sur la méthode Ghost-Cell est proposée (méthodes LPG et LPG+).

L'ensemble de ces techniques, dédiées à l'IFS, est associé à une discrétisation spatiale par éléments finis et des solveurs basés sur la MAN. Les adaptations, nécessaires à cette association, ont été réalisées notamment par l'introduction, dans la formulation faible des équations de Navier-Stokes, d'un opérateur dédié à la pénalisation et des conditions aux limites définissant l'interface fluide-solide.

En complément, un solveur transitoire (solveur tHP) basé sur la MAN a été proposé. Celui-ci associe, dans cet ordre, une discrétisation temporelle des équations du mouvement, une homotopie et une perturbation. Ce solveur tHP permet d'optimiser l'utilisation de l'opérateur tangent sur plusieurs pas de temps diminuant ainsi les temps de simulation.

Tous ces algorithmes ont été testés sur des problèmes académiques afin de vérifier le bien-fondé de l'association MAN-MFI. A cet effet, plusieurs analyses de bifurcation (stationnaire, Hopf) d'écoulement autour d'obstacle fixe sont réalisées. Une étude systématique de l'influence, sur les résultats, des paramètres numériques tels que la finesse du maillage, la valeur de la pénalisation ou la position de l'interface par rapport au maillage, a été réalisée.

Les principaux résultats obtenus au cours de la thèse sont les suivants.

L'analyse de bifurcation stationnaire (par brisure de symétrie) conduit à de bons résultats pour les trois méthodes proposées. En particulier, la méthode d'analyse des termes de série pour déterminer la bifurcation est applicable dans un contexte d'IFS. De plus, pour la méthode LP, l'importance du paramètre de pénalisation K est mise en évidence. Une valeur de K la plus faible possible permet de minimiser le flux du fluide à travers l'interface solide. L'ajout de la méthode Ghost-Cell permet de supprimer ce flux et d'imposer strictement la condition d'imperméabilité. Enfin la méthode LPG+ permet d'obtenir de très bons résultats indépendamment de la position de la frontière au sein de l'élément.

L'analyse de bifurcation de Hopf est menée sur l'écoulement autour d'un cylindre fixe à base carrée et circulaire. Cette étude se révèle beaucoup plus sensible à la finesse du maillage autour du solide. La méthode LP permet d'obtenir de bons résultats quelle que soit la forme du cylindre. La méthode LPG permet d'obtenir des résultats au moins aussi bons que la méthode LP pour l'écoulement autour du carré. Malgré un apport positif de la méthode Ghost-Cell, les

méthodes LP et LPG ne permettent pas de s'affranchir de la dépendance à la position de la frontière au sein de l'élément. La méthode LPG+, quant à elle, ne permet pas d'obtenir des résultats cohérents.

Enfin, l'analyse transitoire par le solveur tHP d'un écoulement autour du cylindre circulaire (considéré fixe puis en mouvement forcé) est réalisée. Cette étude montre que la méthode LP permet d'obtenir une solution périodique stable. Les résultats obtenus sont cohérents qualitativement avec ceux de la littérature. Malheureusement, les méthodes LPG et LPG+ ne permettent pas d'obtenir de solution.

Les résultats obtenus avec la méthode LPG montrent que la méthode Ghost-Cell apporte des améliorations pour la description de l'IFS. Malheureusement, à l'issue de cette thèse, le couplage de cette méthode à la MAN reste perfectible. En effet, la MAN peut être vue comme un prédictor d'ordre élevé et permet, théoriquement, de s'affranchir d'une étape de correction (coûteuse en temps avec l'assemblage d'un nouvel opérateur tangent) à la fin d'un pas de continuation. Cependant, la méthode Ghost-Cell, en faisant appel à un champ de vitesse calculé au pas précédent pour imposer les conditions cinématiques au pas de continuation actuel, engendre des instabilités numériques.

Une des stratégies envisageable consisterait à ajouter une étape de correction en fin de pas MAN et à résoudre le système algébrique 'augmenté' suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}(X_i) \\ \mathbf{d} - \mathbf{C}X_i \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Dans ce système, Λ est un multiplicateur de Lagrange, $\mathbf{X} = (\mathbf{U}, \lambda)$ est le vecteur inconnu, \mathbf{K}_t désigne l'opérateur tangent associé aux équations de Navier-Stokes / Brinkman, \mathbf{C} désigne l'opérateur booléen désignant tous les degrés de liberté impliqués dans les contraintes cinématiques (conditions aux limites de Dirichlet et conditions IFS), \mathbf{R} désigne le vecteur résidu associé aux équations de Navier-Stokes / Brinkman et \mathbf{d} est le vecteur des contraintes et des conditions cinématiques imposées.

Après convergence, le vecteur obtenu constitue la solution aux équations de Navier-Stokes / Brinkman qui respecte toutes les conditions aux limites imposées.

Ainsi formulé, ce problème se ramène à la recherche de point-selle et constitue un problème classiquement rencontré en optimisation ou en mécanique des solides avec la gestion des contacts [Angot et al., 2012; Mercier et al., 2017].

Dans cette thèse, la perturbation ne s'applique qu'aux équations de Navier-Stokes. L'ensemble des systèmes linéaires obtenus après identification (selon les puissance du paramètre de chemin) satisfont les conditions de Dirichlet mais ne prennent pas en compte les conditions cinématiques de couplage. Une amélioration possible consisterait à appliquer la perturbation sur les champs de vitesse 'fluide' et d' 'interface'. Dans ce cas, le problème est le suivant :

$$\begin{cases} R(U, \lambda) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{C}U = \mathbf{d} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.5)$$

constitué des équations de Navier-Stokes / Brinkman $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0$ et vérifiant les conditions $\mathbf{C}U = \mathbf{d}$ sur les frontières extérieures du domaine et immergées.

Un système algébrique de même nature que le précédent serait obtenu. Mais cette approche permettrait d'appliquer naturellement la continuation sur les conditions de couplage et aurait l'avantage d'éviter une étape de correction en fin de pas.

L'analyse de bifurcation de Hopf s'est révélée d'une grande sensibilité. Bien que la méthode fasse appel à une étape de correction, la prise en charge des conditions de couplage est restée problématique. En effet, les corrections ne s'appliquent que sur le champ des vitesses 'fluide'. Il y a un découplage entre ce champ et le champ des vitesses défini à l'interface fluide-solide. Dans ces conditions, il est fort peu probable d'obtenir une correction qui soit solution des équations de Navier-Stokes et qui vérifie en même temps la condition de couplage. Une amélioration consisterait à reformuler le problème pour incorporer une correction sur les composantes de vitesse impliquées, par la méthode Ghost-Cell, dans la condition de couplage. Encore une fois, un système 'augmenté' devrait être mis en place pour calculer les corrections nécessaires aux calculs des bifurcations de Hopf.

L'application du solveur transitoire tHP peut être étendue en incorporant l'évolution de la Level-Set dans un système de type MAN instationnaire. Ainsi, l'équation (5.6) peut être écrite dans un formalisme symbolique (équation (5.7)) cohérent avec le chapitre 4.6.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (5.6)$$

$$\dot{\phi} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \phi) = 0 \quad (5.7)$$

En utilisant l'intégration temporelle par le θ -schéma, l'homotopie et la technique de perturbation $\phi_{n+1} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \varphi_{n+1}^{\{i\}}$, l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{\theta \Delta t} \sum_{i=0}^N \varphi_{n+1}^{\{i\}} + \varepsilon \mathbf{Q} \left(\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \mathbf{W}_{n+1}^{\{i\}}, \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \varphi_{n+1}^{\{i\}} \right) = \frac{1}{\theta \Delta t} \phi_n + \frac{1-\theta}{\theta} \dot{\phi}_n \quad (5.8)$$

avec $\mathbf{W}_{n+1}^{\{i\}}$ venant du système (4.96). Par identification des puissances de ε , un ensemble de systèmes linéaires est obtenu :

$$\text{Ordre } 0 : \frac{1}{\theta \Delta t} \varphi_{n+1}^{\{0\}} = \frac{1}{\theta \Delta t} \phi_n + \frac{1-\theta}{\theta} \dot{\phi}_n \quad (5.9)$$

$$\text{Ordre } k \in \llbracket 1, N \rrbracket : \frac{1}{\theta \Delta t} \varphi_{n+1}^{\{k\}} = - \sum_{r=0}^{k-1} \mathbf{Q} \left(\mathbf{W}_{n+1}^{\{r\}}, \varphi_{n+1}^{\{k-1-r\}} \right) \quad (5.10)$$

En résolvant le système (4.96) et l'équation (5.10) en même temps, l'ensemble des termes du second ordre de l'équation (5.10) sont connus. L'équation de la Level-Set et les équations de Navier-Stokes peuvent donc être résolues en même temps. Afin que la fonction Level-Set conserve sa signification de distance signée et respecte l'équation eikonale (1.37), une étape de correction sur la Level-Set est nécessaire. Pour la méthode LP, le respect de ces contraintes n'est pas indispensable car seul le signe de la valeur nodale de la Level-Set est utilisé.

Afin de diminuer les temps de calcul ou d'envisager des simulations plus complexes (plusieurs solides, solides déformables, écoulement 3D), des techniques de réduction de modèles devront être associées. Dans ce cas, les verrous scientifiques sont nombreux. Dans le cadre de l'interaction fluide-structure, la génération de bases n'est pas 'triviale' car celles-ci doivent tenir compte de dynamiques distinctes (une dynamique par phase, fluide et solide) et avec des domaines de calcul en évolution permanente [Bourguet et al., 2011; Shinde et al., 2016]. A cela s'ajoute la difficulté d'établir le processus, au cours de la continuation, permettant d'alterner les calculs entre le modèle 'haute-fidélité' et le modèle réduit.

Bibliographie

- Agnaou, M., Lasseux, D., & Ahmadi, A. (2016). From steady to unsteady laminar flow in model porous structures : an investigation of the first hopf bifurcation. Computers & Fluids, 136, 67–82.
- Al-Jamal, H. & Dalton, C. (2004). Vortex induced vibrations using large eddy simulation at a moderate reynolds number. Journal of Fluids and Structures, 19(1), 73–92.
- Alleborn, N., Nandakumar, K., Raszillier, H., & Durst, F. (1997). Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion. Journal of Fluid Mechanics, 330, 169–188.
- Allery, C., Guerin, S., Hamdouni, A., & Sakout, A. (2004). Experimental and numerical pod study of the coanda effect used to reduce self-sustained tones. Mechanics Research Communications, 31(1), 105–120.
- Angot, P., Bruneau, C., & Fabrie, P. (1999). A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numerische Mathematik, 81(4), 497–520.
- Angot, P., Caltagirone, J.-P., & Fabrie, P. (2012). A new fast method to compute saddle-points in constrained optimization and applications. Applied Mathematics Letters, 25(3), 245–251.
- Arquis, E. & Caltagirone, J. (1984). Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle. C. R. Accad. Sc. Paris, 299(1), 80 – 100.
- Azaïez, M., Deville, M., & Mund, E. (2011). Éléments finis pour les fluides incompressibles. PPUR Presses polytechniques.
- Azrar, L., Cochelin, B., Damil, N., & Potier-Ferry, M. (1993). An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36(8), 1251–1277.
- Baguet, S. & Cochelin, B. (2003). On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcations. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 19(6), 459–471.
- Baguet, S. & Cochelin, B. (2011). Méthode asymptotique numérique adaptative pour la dynamique transitoire non-linéaire. In 10e colloque national en calcul des structures, (pp. Clé-USB).
- Baumgartner, D., Wolf, J., Rossi, R., Wüchner, R., & Dadvand, P. (2015). Contribution to the fluid-structure interaction analysis of ultra-lightweight structures using an embedded approach.
- Ben Saadi, M. (1995). Méthodes asymptotiques-numériques pour le calcul de bifurcations de Hopf et de solutions périodiques. PhD thesis, Université de Metz.
- Bergmann, M., Hovnanian, J., & Iollo, A. (2014). An accurate cartesian method for incompressible flows with moving boundaries. Communications in Computational Physics, 15(5), 1266–1290.
- Beyer, R. & Leveque, R. (1992). Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 29(2), 332–364.

- Bost, C. (2008). Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- Bourguet, R., Braza, M., & Dervieux, A. (2011). Reduced-order modeling of transonic flows around an airfoil submitted to small deformations. Journal of Computational Physics, 230(1), 159–184.
- Boutyour, E., Zahrouni, H., Potier-Ferry, M., & Boudi, M. (2004). Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and padé approximants. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60(12), 1987–2012.
- Braikat, B., Jamal, M., Damil, N., & Potier-Ferry, M. (2002). Algorithmes d'intégration temporelle implicites couplés avec des résolveurs d'ordre élevé. Revue Européenne des Eléments, 11(6), 749–772.
- Brajon-Socolescu, L. (1996). Etude numérique de l'instabilité de benard-von karman derrière un cylindre chauffé. PhD thesis, Le Havre.
- Braza, M., Chassaing, P., & Minh, H. (1986). Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. Journal of fluid mechanics, 165, 79–130.
- Brezillon, A., Girault, G., & Cadou, J.-M. (2010). A numerical algorithm coupling a bifurcating indicator and a direct method for the computation of hopf bifurcation points in fluid mechanics. Computers & Fluids, 39(7), 1226–1240.
- Brezzi, F., Rappaz, J., & Raviart, P. (1982). Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Numerische Mathematik, 38(1), 1–30.
- Cadou, J.-M. (1997). Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure. PhD thesis, Université de Metz.
- Cadou, J.-M., Guevel, Y., & Girault, G. (2012). Numerical tools for the stability analysis of 2d flows : application to the two-and four-sided lid-driven cavity. Fluid Dynamics Research, 44(3), 031403.
- Cadou, J.-M., Potier-Ferry, M., & Cochelin, B. (2006). A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 25(2), 234–254.
- Cadou, J.-M., Potier-Ferry, M., Cochelin, B., & Damil, N. (2001). ANM for stationary navier-stokes equations and with petrov-galerkin formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50(4), 825–845.
- Cagney, N. & Balabani, S. (2013). Wake modes of a cylinder undergoing free streamwise vortex-induced vibrations. Journal of Fluids and Structures, 38, 127–145.
- Caltagirone, J. & Vincent, S. (2001). Sur une méthode de pénalisation tensorielle pour la résolution des équations de navier-stokes. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, 329(8), 607–613.
- Candel, S. (1990). Mécanique des fluides cours. Dunod.

- Chinesta, F., Ladeveze, P., & Cueto, E. (2011). A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, *18*(4), 395.
- Ciarlet, P. (1982). Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. *masson*.
- Clarke, D., Hassan, H., & Salas, M. (1986). Euler calculations for multielement airfoils using cartesian grids. *AIAA journal*, *24*(3), 353–358.
- Cochelin, B. (1994). A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & structures*, *53*(5), 1181–1192.
- Cochelin, B. & Compain, C. (2000). An asymptotic numerical method for non-linear transient dynamics. *Revue Européenne des éléments finis*, *9*(1-3), 113–128.
- Cochelin, B., Damil, N., & Potier-Ferry, M. (2007). *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoissier.
- Cochelin, B. & Medale, M. (2013). Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of asymptotic numerical method in the vicinity of bifurcations. *Journal of Computational Physics*, *236*, 594–607.
- Courty, J. & Kierlik, E. (2008). Pont de tacoma : la contre-enquête. *Pour la science*, (364), 98–99.
- Dijkstra, H., Wubs, F., Cliffe, A., Doedel, E., Dragomirescu, I., Eckhardt, B., Gelfgat, A., Hazel, A., Lucarini, V., Salinger, A., et al. (2014). Numerical bifurcation methods and their application to fluid dynamics : analysis beyond simulation. *Communications in Computational Physics*, *15*(1), 1–45.
- Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J., & Rodríguez-Ferran, A. (2004). Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd. DOI : 10.1002/0470091355.ecm009.
- Fadlun, E., Verzicco, R., Orlandi, P., & Mohd-Yusof, J. (2000). Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of computational physics*, *161*(1), 35–60.
- Farhat, C., Lesoinne, M., Stern, P., & Lantéri, S. (1997). High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms : methodology and preliminary results. *Advances in Engineering Software*, *28*(1), 43–61.
- Franke, R., Rodi, W., & Schönung, B. (1990). Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *35*, 237–257.
- Gibou, F., Fedkiw, R., Cheng, L., & Kang, M. (2002). A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, *176*(1), 205–227.
- Girault, G., Guevel, Y., & Cadou, J.-M. (2012). An algorithm for the computation of multiple hopf bifurcation points based on padé approximants. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *68*(9), 1189–1206.
- Goodrich, J., Gustafson, K., & Halasi, K. (1990). Hopf bifurcation in the driven cavity. *Journal of Computational Physics*, *90*(1), 219–261.

- Guerouache, M. (2000). Etude numérique de l'instabilité de Bénard-Karman derrière un cylindre fixe ou en mouvement périodique. Dynamique de l'écoulement et advection chaotique. PhD thesis.
- Guevel, Y. (2016). Méthodes numériques adaptées à la résolution des équations de Navier-Stokes. PhD thesis, Université de Bretagne Sud.
- Guevel, Y., Allain, T., Girault, G., & Cadou, J.-M. (2017). Numerical bifurcation analysis for three-dimensional sudden expansion fluid dynamic problem. International Journal for Numerical Methods in Fluids.
- Guevel, Y., Boutyour, H., & Cadou, J.-M. (2011). Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics. Journal of Computational Physics, *230*(9), 3614–3629.
- Hirt, C., Amsden, A., & Cook, J. (1997). An arbitrary lagrangian–eulerian computing method for all flow speeds. Journal of computational physics, *135*(2), 203–216.
- Hovnanian, J. (2012). Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides. Application à la simulation de la nage. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.
- Huang, C. & Hwang, F. (2010). Parallel pseudo-transient newton–krylov–schwarz continuation algorithms for bifurcation analysis of incompressible sudden expansion flows. Applied Numerical Mathematics, *60*(7), 738–751.
- Huerta, A. & Liu, W. (1988). Viscous flow with large free surface motion. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, *69*(3), 277–324.
- Hughes, T., Franca, L., & Hulbert, G. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, *73*(2), 173–189.
- Hughes, T., Liu, W., & Zimmermann, T. (1981). Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. Computer methods in applied mechanics and engineering, *29*(3), 329–349.
- Hyman, J. (1984). Numerical methods for tracking interfaces. Physica D: Nonlinear Phenomena, *12*(1-3), 396–407.
- Iaccarino, G. & Verzicco, R. (2003). Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. Applied Mechanics Reviews, *56*(3), 331–347.
- Jackson, C. (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. Journal of Fluid Mechanics, *182*, 23–45.
- Jamal, M., Braikat, B., Boutmir, S., Damil, N., & Potier-Ferry, M. (2002). A high order implicit algorithm for solving instationary non-linear problems. computational Mechanics, *28*(5), 375–380.
- Jawadi, A., Boutyour, H., & Cadou, J.-M. (2013). Asymptotic numerical method for steady flow of power-law fluids. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, *202*, 22–31.
- Jedrzejewski, F. (2006). Introduction aux méthodes numériques. Springer Science & Business Media.

- Jepson, A. (1981). Numerical Hopf bifurcation : thesis. PhD thesis, California Institute of Technology.
- Kelkar, K. & Patankar, S. (1992). Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 14(3), 327–341.
- Koopmann, G. (1967). The vortex wakes of vibrating cylinders at low reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics, 28(3), 501–512.
- Koumoutsakos, P. & Leonard, A. (1995). High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods. Journal of Fluid Mechanics, 296, 1–38.
- Kumar, B. & Mittal, S. (2006). Prediction of the critical reynolds number for flow past a circular cylinder. Computer methods in applied mechanics and engineering, 195(44), 6046–6058.
- Lai, M. & Peskin, C. (2000). An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. Journal of Computational Physics, 160(2), 705–719.
- Lankadasu, A. & Vengadesan, S. (2008). Onset of vortex shedding in planar shear flow past a square cylinder. International Journal of Heat and Fluid Flow, 29(4), 1054–1059.
- Limache, A., Idelsohn, S., Rossi, R., & Oñate, E. (2007). The violation of objectivity in laplace formulations of the navier–stokes equations. International journal for numerical methods in fluids, 54(6-8), 639–664.
- Limache, A., Sánchez, P., Dalcín, L., & Idelsohn, S. (2008). Objectivity tests for navier–stokes simulations : The revealing of non-physical solutions produced by laplace formulations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(49), 4180–4192.
- Liu, W. & Chang, H. (1984). Efficient computational procedures for long-time duration fluid-structure interaction problems. J. Press. Vessel Technol.-Trans. ASME, 106, 317–322.
- Longatte, E., Bendjeddou, Z., & Souli, M. (2003). Methods for numerical study of tube bundle vibrations in cross-flows. Journal of Fluids and Structures, 18(5), 513–528.
- Longatte, E., Verreman, V., & Souli, M. (2009). Time marching for simulation of fluid–structure interaction problems. Journal of Fluids and Structures, 25(1), 95–111.
- Majumdar, S., Iaccarino, G., & Durbin, P. (2001). Rans solvers with adaptive structured boundary non-conforming grids. Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University, 353–466.
- Medale, M. & Cochelin, B. (2015). High performance computations of steady-state bifurcations in 3d incompressible fluid flows by asymptotic numerical method. Journal of Computational Physics, 299, 581–596.
- Mercier, S., Gratton, S., Tardieu, N., & Vasseur, X. (2017). A new preconditioner update strategy for the solution of sequences of linear systems in structural mechanics : application to saddle point problems in elasticity. Computational Mechanics, 1–14.
- Mittal, R., Dong, H., Bozkurttas, M., Najjar, F., Vargas, A., & von Loebbecke, A. (2008). A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. Journal of computational physics, 227(10), 4825–4852.
- Mittal, R. & Iaccarino, G. (2005). Immersed boundary methods. Annu. Rev. Fluid Mech., 37, 239–261.

- Mizushima, J. & Akinaga, T. (2003). Vortex shedding from a row of square bars. Fluid dynamics research, 32(4), 179–191.
- Mizushima, J., Okamoto, H., & Yamaguchi, H. (1996). Stability of flow in a channel with a suddenly expanded part. Physics of Fluids, 8(11), 2933–2942.
- Moreau, E. & Bernard, N. Des décharges électriques pour contrôler les écoulements. <https://www.3af.fr/article/sciences-et-technologies/le-controle-actif-des-ecoulements-basse-vitesse-par-actionneurs>.
- Moubachir, M. & Zolesio, J. (2006). Moving shape analysis and control : Applications to fluid structure interactions. CRC Press.
- Mullin, T., Shipton, S., & Tavener, S. (2003). Flow in a symmetric channel with an expanded section. Fluid dynamics research, 33(5), 433–452.
- Osher, S. & Fedkiw, R. (2001). Level set methods : an overview and some recent results. Journal of Computational physics, 169(2), 463–502.
- Osher, S. & Sethian, J. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. Journal of computational physics, 79(1), 12–49.
- Paidoussis, M. & Helleur, C. (1979). On ovaling oscillations of cylindrical shells in cross-flow. Journal of Sound and Vibration, 63(4), 527–542.
- Païdoussis, M., Price, S., & de Langre, E. (2010). Fluid-structure interactions : cross-flow-induced instabilities. Cambridge University Press.
- Persillon, H. & Braza, M. (1998). Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional navier–stokes simulation. Journal of Fluid Mechanics, 365, 23–88.
- Peskin, C. (1972). Flow patterns around heart valves : a numerical method. Journal of computational physics, 10(2), 252–271.
- Peskin, C. & Printz, B. (1993). Improved volume conservation in the computation of flows with immersed elastic boundaries. Journal of computational physics, 105(1), 33–46.
- Piperno, S. (1995). Simulation numérique de phénomènes d’interaction fluide-structure. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech.
- Placzek, A., Sigrist, J., & Hamdouni, A. (2009). Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low reynolds number : Forced and free oscillations. Computers & Fluids, 38(1), 80–100.
- Poliashenko, M. & Aidun, C.-K. (1995). A direct method for computation of simple bifurcations. Journal of Computational Physics, 121(2), 246–260.
- Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal of Solids and Structures, 15(7), 529–551.
- Schatzman, M. (1991). Analyse numérique. Dunod.
- Schumm, M., Berger, E., & Monkewitz, P. (1994). Self-excited oscillations in the wake of two-dimensional bluff bodies and their control. Journal of Fluid Mechanics, 271, 17–53.

- Seydel, R. (2009). Practical bifurcation and stability analysis, volume 5. Springer Science & Business Media.
- Shahmiri, S., Gerstenberger, A., & Wall, W. (2011). An xfm-based embedding mesh technique for incompressible viscous flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 65(1-3), 166–190.
- Shinde, V., Longatte, E., Baj, F., Hoarau, Y., & Braza, M. (2016). A galerkin-free model reduction approach for the navier–stokes equations. Journal of Computational Physics, 309, 148–163.
- Sigrist, J. & Abouri, D. (2006). Simulation of a non-linear coupled fluid-structure problem with implicit and explicit coupling procedures. 9.
- Sini, J. (2006). Cours de mécanique des fluides.
- Sohankar, A., Norberg, C., & Davidson, L. (1998). Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. International journal for numerical methods in fluids, 26(1), 39–56.
- Sohankar, A., Norberg, C., & Davidson, L. (1997). Numerical simulation of unsteady low-reynolds number flow around rectangular cylinders at incidence. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 69, 189–201.
- Souli, M. & Sigrist, J.-F. (2009). Interaction fluides-structures : modélisation et simulation numérique. Hermès Science publications-Lavoisier.
- Stojković, D., Breuer, M., & Durst, F. (2002). Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder. Physics of fluids, 14(9), 3160–3178.
- Sussman, M., Smereka, P., & Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. Journal of Computational physics, 114(1), 146–159.
- Taillet, R., Villain, L., & Febvre, P. (2008). Dictionnaire de physique. De Boeck Supérieur.
- Tanguy, S., Ménard, T., Berlemont, A., Estivalezes, J., & Couderc, F. (2004). Developpement d’une methode level-set pour le suivi d’interfaces et applications. Advances in the Modeling Methodologies of Two-Phase Flows, Lyons, France, November, 24–26.
- Tavares, M., Vincent, S., & Chénier, E. (2017). A two-dimensional conservative front-tracking method for multi-scale multiphase flows. S11-Ecoulements diphasiques.
- Tezduyar, T., Sathe, S., & Stein, K. (2006). Solution techniques for the fully discretized equations in computation of fluid–structure interactions with the space–time formulations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(41), 5743–5753.
- Tri, A. (1996). Méthodes Asymptotiques Numériques pour les fluides visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de Hopf. PhD thesis, Université de Metz.
- Tryggvason, G., Bunner, B., Esmarelli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S., & Jan, Y. (2001). A front-tracking method for the computations of multiphase flow. Journal of Computational Physics, 169(2), 708–759.
- Tseng, Y. & Ferziger, J. (2003). A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. Journal of Computational Physics, 192(2), 593–623.

- Tsui, Y. & Wang, H. (2008). Side-wall effects on the bifurcation of the flow through a sudden expansion. International Journal for numerical methods in fluids, 56(2), 167–184.
- Udaykumar, H., Mittal, R., Rampunggoon, P., & Khanna, A. (2001). A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. Journal of Computational Physics, 174(1), 345–380.
- Van Dyke, M. & Van Dyke, M. (1982). An album of fluid motion, volume 176. Parabolic Press Stanford.
- Vannucci, P., Cochelin, B., Damil, N., & Potier-Ferry, M. (1998). An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. International journal for numerical methods in engineering, 41(8), 1365–1389.
- Werner, B. & Spence, A. (1984). The computation of symmetry-breaking bifurcation points. SIAM Journal on Numerical Analysis, 21(2), 388–399.
- Williamson, C. (1989). Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics, 206, 579–627.
- Williamson, C. & Roshko, A. (1988). Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. Journal of fluids and structures, 2(4), 355–381.
- Wissink, J. (1995). Dns of transitional flow around a square cylinder. In Advances in Turbulence V (pp. 569–573). Springer.
- Ye, T., Mittal, R., Udaykumar, H., & Shyy, W. (1999). An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. Journal of computational physics, 156(2), 209–240.
- Yvonnet, J., Quang, H., & He, Q.-C. (2008). An xfem/level set approach to modelling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites. Computational Mechanics, 42(1), 119–131.
- Zienkiewicz, O. & Taylor, R. (2000). The finite element method : solid mechanics, volume 2. Butterworth-heinemann.

Résumé

Ce travail de thèse est une contribution à l'analyse de bifurcation des écoulements fluides avec prise en compte des interactions fluide-structure.

Les phénomènes d'instabilité en interaction fluide-structure apparaissent dans de nombreux domaines de la vie courante ou industriels comme, par exemple : le flottement d'un drapeau dans le vent ou bien l'écoulement au sein d'échangeurs thermiques sur les sites de production d'énergie, l'écoulement autour des câbles sous-marins pour l'extraction de matières premières ou la fixation des plateformes off-shores, l'écoulement autour des structures aéronautiques ou navales. Dans ces situations, un phénomène complexe de vibration des structures induite par vortex peut se produire.

L'objectif de la thèse est de proposer un algorithme permettant l'analyse de stabilité de tels systèmes. Ainsi, le couplage original d'une méthode de perturbation d'ordre élevé (Méthode Asymptotique Numérique - MAN) à une discrétisation spatiale permettant la prise en compte des interactions fluide-structure est proposée. A cet effet, une description purement eulérienne du mouvement est retenue. L'interaction fluide-structure est décrite au moyen d'une méthode de frontières immergées (MFI) à forçage continu (méthode de pénalisation) et discret (méthode Ghost-Cell). La présence d'obstacles au sein de l'écoulement est obtenue au moyen de la méthode de Level-Set.

En complément, un intégrateur temporel des équations du mouvement associant la MAN, la MFI et une technique d'homotopie est proposé.

L'ensemble de ces algorithmes est appliqué à des problèmes d'écoulement incompressible, à faible nombre de Reynolds, d'un fluide visqueux newtonien en présence d'obstacles solides rigides (fixes ou mobiles).

L'analyse de stabilité des écoulements dans une conduite avec expansion/contraction soudaine (bifurcation stationnaire), ou autour d'un cylindre (bifurcation de Hopf) sont traités.

L'analyse transitoire d'un écoulement autour d'un cylindre rigide et mobile est également proposée.

Les résultats obtenus permettent d'évaluer la précision et la performance des algorithmes proposés. Ainsi, les résultats de cette thèse permettent de conclure sur le bien-fondé de l'approche et constituent une première étape vers l'analyse de stabilité d'écoulements en présence de structures complexes, représentatifs de situations réelles.

Abstract

This thesis is a first contribution to the bifurcation analysis of fluid flows by taking into account fluid-structure interactions.

Instability with fluid-structure interactions appears in many areas of everyday life or industry such as, for example: flag floating in the wind, flow within heat exchangers for energy production, flow around submarine cables for the extraction of raw materials or the fixing of off-shore platforms, flow around aeronautical or naval structures. In these situations, complex vortex-induced vibrations of the structures can occur.

The aim of the thesis is to propose an algorithm allowing stability analysis of such systems. Thus, an original coupling of a high order perturbation method (Numeric Asymptotic Method - MAN) to a spatial discretization able to take into account fluid-structure interactions is proposed. For this purpose, a purely Eulerian description of the motion is retained. The fluid-structure interaction is described using an immersed boundary method (IBM) with continuous forcing (penalization method) and discrete (Ghost-Cell method) forcing. The presence of solids within the flow is obtained by means of the Level-Set method.

In addition, a time integrator of the motion equations associating MAN, IBM and homotopy technique is proposed.

All these algorithms are applied to analyse incompressible flows, at low Reynolds number, of a Newtonian viscous fluid in the presence of rigid solids (fixed or moving).

Stability analysis of flows in a channel with sudden expansion / contraction (stationary bifurcation), or around a cylinder (Hopf bifurcation) are carried out.

The transient analysis of a flow around a moving rigid cylinder is also proposed.

Our results make it possible to evaluate the accuracy and the performance of the proposed algorithms. Thus, the thesis results allow to conclude on the validity of the proposed approach. Finally, this thesis work constitutes a first step towards flow stability analysis in the presence of complex structures, representative of real situations.