



**HAL**  
open science

# Combinatoire dans des stabilisations du modèle du tas de sable sur la grille $Z^2$

Henri Derycke

► **To cite this version:**

Henri Derycke. Combinatoire dans des stabilisations du modèle du tas de sable sur la grille  $Z^2$ . Algorithme et structure de données [cs.DS]. Université de Bordeaux, 2018. Français. NNT : 2018BORD0327 . tel-01977878

**HAL Id: tel-01977878**

**<https://theses.hal.science/tel-01977878>**

Submitted on 11 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

PRÉSENTÉE À

**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET  
D'INFORMATIQUEpar **Henri Derycke**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

---

**Combinatoire dans des stabilisations du modèle du  
tas de sable sur la grille  $\mathbb{Z}^2$** 

---

**Date de soutenance :** 10 décembre 2018**Après avis des rapporteurs :**Sylvie CORTEEL .. Directrice de recherche, IRIF    Rapportrice  
Gilles SCHAEFFER    Directeur de recherche, LIX .    Rapporteur**Devant la commission d'examen composée de :**Mireille BOUSQUET-MÉLOU    Directrice de recherche, LaBRI .....    Examinatrice  
Florent HIVERT .....    Professeur des universités, Paris Sud    Président  
Yvan LE BORGNE .....    Chargé de recherche, LaBRI .....    Directeur  
Jean-François MARCKERT ..    Directeur de recherche, LaBRI .....    Examineur  
Gilles SCHAEFFER .....    Directeur de recherche, LIX .....    Rapporteur  
Andrea SPORTIELLO .....    Chargé de recherche, LIPN .....    Examineur



# Remerciements

Je tiens à commencer cette partie par remercier Yvan qui m'a invité à m'intéresser au modèle du tas de sable et plus généralement à la combinatoire dès la licence. Merci pour ces années de soutien, de conseils et de questions, ponctuées de nombreuses spéculations parfumées, qui ont abouti à ce document et à là où j'en suis aujourd'hui. Merci beaucoup.

Merci à Sylvie Corteel et Gilles Schaeffer d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs relectures attentives m'ont été précieuses. Un remerciement particulier à Sylvie qui a combattu les flammes pour réaliser son rapport. Je remercie également les membres venus compléter mon jury, Florent Hivert qui l'a présidé, Andrea Sportiello avec qui les échanges sont toujours passionnants, Mireille Bousquet-Mélou et Jean-François Marckert pour leurs relectures et la rigueur à laquelle j'ai pu être confronté pendant ces trois années de thèse.

Je tiens également à remercier les membres du groupe de travail de combinatoire du LaBRI qui contribuent à travers les nombreux exposés à m'en faire découvrir toujours plus sur ce domaine dont j'ignorais la dimension en débutant ma recherche.

Je remercie mes collègues des équipes pédagogiques dont j'ai pu faire partie. Je pense notamment à Cyril, Géraud et Lionel avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler.

Merci aux équipes administratives du LaBRI et de l'Université de Bordeaux qui ont grandement aidé au bon déroulement de cette thèse.

Merci également à mes co-bureaux, du stage de Master à aujourd'hui, Théo, Thomas, Théo, Rémi, Romain avec qui les discussions ont toutes su avoir leurs digressions. Mention spéciale pour la pause thé de Théo.

Je remercie aussi les amis bordelais qui ont su me faire sortir de ma bulle, souvent autour d'une passion qui n'a comme dénominateur commun avec le sable que le grain.

Merci aux amis de Lyon, notamment l'équipe PhDisc dont les rencontres ont parsemé ces années de moments aussi conviviales que physiques.

Enfin, merci à ma famille, soutien sans pause et sans faille.

---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Le tas de sable . . . . .	1
1.1.1 Définition du modèle . . . . .	1
1.1.2 Le tas de sable dans la littérature . . . . .	3
1.1.3 Le cas de la grille infinie $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	3
1.2 Les configurations récurrentes . . . . .	6
1.2.1 Chaîne de Markov . . . . .	6
1.2.2 Le groupe du tas de sable . . . . .	7
1.2.3 Critère de Dhar . . . . .	8
1.2.4 Bijection CLB . . . . .	9
1.3 Travaux de cette thèse . . . . .	11
<b>2 Modèle simplifié et bootstrap percolation</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.1.1 Définitions . . . . .	22
2.1.2 Résultats principaux . . . . .	24
2.1.3 Deux statistiques et une positivité . . . . .	27
2.2 Probabilité et statistique sur des permutations . . . . .	28
2.2.1 Toutes les symétries du carré . . . . .	28
2.2.2 Symétries selon les deux diagonales $x = y$ et $x = -y$ . . . . .	30
2.3 Symétrie d'axe $x + y = 0$ . . . . .	31
2.3.1 Algorithme de construction . . . . .	31
2.3.2 Système d'équations $q$ -linéaires . . . . .	33
2.3.3 Permutations partielles et règles d'insertion . . . . .	34
2.3.4 Bijection entre permutations et certificats . . . . .	37
2.4 Sous-suite décroissantes et $q$ -positivité . . . . .	39
2.5 Extension de la méthode à d'autre type de réseaux . . . . .	43
<b>3 Automate des récurrentes sur la bande</b>	<b>45</b>
3.1 Du graphe bi-infini au graphe fini . . . . .	49
3.2 Codage des états par la bijection CLB sur $\Lambda_{W,H}$ . . . . .	51

3.2.1	Décomposition en ordres induits . . . . .	51
3.2.2	Compatibilité et combinaison d'ordres induits . . . . .	54
3.2.3	Automate sur les ordres induits . . . . .	60
3.2.4	Réduction du nombre d'états : des ordres induits aux ordres réduits . . . . .	61
3.3	Énumération des ordres . . . . .	63
3.3.1	Sous-arbres dans la bande . . . . .	63
3.3.2	Construction des états de l'automate . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Configurations bipériodiques récurrentes</b>	<b>69</b>
4.1	Configurations bipériodiques . . . . .	69
4.2	Configuration récurrente dans une direction . . . . .	71
4.2.1	Cas de la direction $(0, -1)$ . . . . .	74
4.2.2	Cas général . . . . .	83
4.3	Bijection avec des recouvrements bipériodiques de la grille . . . . .	90
4.4	Comptage des recouvrements et des configurations récurrentes périodiques . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Sous-groupes sur les bi-périodiques</b>	<b>103</b>
5.1	Le cas (dégénéré ?) du puits $\mathbf{s} = (-1, 0)$ . . . . .	104
5.1.1	Opérateurs d'éboulements périodiques . . . . .	105
5.1.2	Groupe sur les classes d'équivalence . . . . .	108
5.2	Cas non axial . . . . .	110
5.3	Groupes pour les petites tailles . . . . .	112
5.4	Classes d'équivalence et récurrentes . . . . .	112
<b>Conclusion</b>		<b>117</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>121</b>

# 1. Introduction

Le modèle du tas de sable est un modèle de diffusion discret apparu indépendamment dans plusieurs communautés différentes. Il a été introduit en physique puis en mathématiques pour ses propriétés riches malgré une définition simple, en théorie (algébrique) des graphes. En probabilité, il fait apparaître des liens avec les modèles probabilistes de l'arbre couvrant uniforme et de la marche aléatoire (parfois à boucles effacées). Il est étudié à différentes échelles, et notamment de manière élémentaire dans le domaine de la combinatoire algébrique avec les  $q, t$ -Catalan et plus récemment avec les  $q, t$ -Narayana. Pour en discuter, nous allons en donner les premières définitions.

## 1.1 Le tas de sable

### 1.1.1 Définition du modèle

Soit un graphe fini non-orienté  $G = (V, E)$  connexe. On appelle *configuration* de  $G$  dans le modèle du tas de sable l'attribution  $\eta : V \rightarrow \mathbb{N}$  d'un nombre entier de grains sur chaque sommet du graphe. On dit qu'un sommet  $v$  est *instable* dans la configuration  $\eta$  si son nombre de grains  $\eta(v)$  est supérieur ou égal à son nombre de voisins  $\deg_G(v)$ . Dans le cas contraire, le sommet est dit *stable*. On dira qu'une configuration est instable si elle contient au moins un sommet instable et stable sinon. À cette notion de stabilité, on joint une dynamique de stabilisation. On appelle *éboulement* d'un sommet  $v$  dans la configuration  $\eta$  l'opération élémentaire et atomique consistant au transfert d'un grain de  $v$  à chacun de ses voisins. L'action de l'éboulement du sommet  $v$  dans la configuration  $\eta$  se décrit ainsi :

$$\begin{aligned}\eta(v) &\mapsto \eta(v) - \deg_G(v) \\ \eta(u) &\mapsto \eta(u) + a_{u,v}, \text{ où } u \neq v\end{aligned}$$

où  $a_{u,v}$  est le nombre d'arêtes entre  $u$  et  $v$ . On peut également utiliser la



matrice laplacienne  $\Delta_G$  du graphe  $G$  dont on rappelle ici la définition :

$$\Delta_{u,v} = \begin{cases} \deg u & \text{si } u = v \\ -a_{u,v} & \text{sinon} \end{cases} .$$

On note  $\Delta_v$  la colonne correspondant au sommet  $v$ . L'éboulement du sommet  $v$  revient à soustraire  $\Delta_v$  à  $\eta$ . L'éboulement de plusieurs sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$  se fait donc par le calcul de  $\eta - \sum_{i=1}^k \Delta_{v_i}$ . On a alors naturellement une commutativité des éboulements donnant son nom au modèle du tas de sable **abélien**.

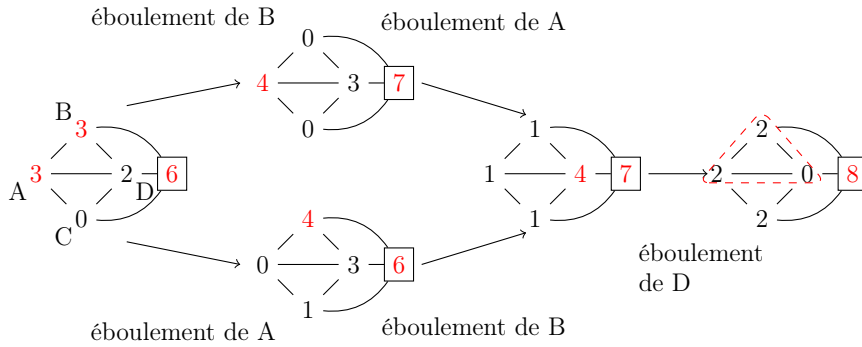


FIGURE 1.1 – Commutativité des éboulements

Afin de préserver un nombre positif ou nul de grains par sommet, on n'autorise que l'éboulement des sommets instables. On dira donc dans le cas d'un sommet instable que l'éboulement est *légal*. La commutativité sur les éboulements légaux est alors incomplète. Au sein d'une suite d'éboulement, deux éboulements peuvent commuter s'ils restent légaux après les avoir échangés. Ainsi, dans la **Figure 1.1**, on peut échanger les éboulements des sommets A et B cependant, ce n'est pas possible d'ébouler le sommet D avant le sommet B. Cette restriction sera parfois relaxée par la suite, autorisant un sommet à avoir un nombre négatif de grains. On parlera d'éboulement forcé dans ce cas.

Cette opération élémentaire permet de rendre stable un sommet. Afin de stabiliser l'ensemble d'une configuration, on peut suivre l'algorithme de stabilisation suivant :

Tant qu'il existe un sommet instable, ébouler un sommet instable.

S'il termine, cet algorithme produit une configuration stable qu'on note  $stab(\eta)$ . On dira que  $stab(\eta)$  est le stabilisé de  $\eta$ . La commutativité des éboulements légaux permet de ne pas avoir besoin de spécifier l'ordre d'éboulement des sommets. Ainsi le stabilisé  $stab(\eta)$  d'une configuration  $\eta$  peut s'écrire

$$stab(\eta) = \eta - \sum_{v \in V} e_v^\eta \Delta_v = \eta - \Delta e^\eta$$

où  $e^n \in \mathbb{N}^V$  est le vecteur d'éboulement donnant le nombre d'éboulements de chaque sommet lors de la stabilisation qui est indépendant de l'ordre. On appellera *support* de la stabilisation l'ensemble des sommets qui se sont éboulés au moins une fois. On généralisera ce terme pour toute suite d'éboulements. La terminaison du processus de stabilisation n'est pas garantie. Notamment, il est simple de montrer par le principe des tiroirs qu'une configuration comptant le double du nombre d'arêtes en nombre de grains aura toujours un sommet instable. Afin d'assurer la terminaison de la stabilisation, on distingue dans  $G$  un sommet  $s$  appelé *puits* dont le but est d'absorber l'excédent de grains en interdisant son éboulement lors de la stabilisation. On pourra alors noter le graphe  $G = (V \cup \{s\}, E)$ .

### 1.1.2 Le tas de sable dans la littérature

Le modèle du tas de sable a été introduit par les physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld [BTW87] comme une discrétisation d'un phénomène de diffusion et les principales propriétés présentées dans cette section sont l'œuvre de Dhar [Dha90]. Ses propriétés de criticalité auto-organisée ont motivé depuis sa création son étude autant en physique qu'en mathématiques probabilistes comme combinatoires. Il est introduit sous un autre nom, le *chip-firing game* [BLS91]. Il est notamment connecté à d'autres modèles introduits indépendamment dont le *rotor-router model* [HLM<sup>+</sup>08]. Il noue également des liens avec la combinatoire par le polynôme de Tutte [CLB03, Lóp97] ainsi qu'en théorie des graphes avec la notion de diviseurs et de groupe critique d'un graphe [LB97, Big99, BN07]. Citons une reformulation de la notion de rang due à Baker et Norine pour un analogue pour les graphes d'un théorème de Riemann-Roch : le rang est le nombre minimal de grains à ajouter à une configuration sans puits pour que la stabilisation ne termine pas. On retrouve également dans le cas des graphes complets et bipartis complets les  $q, t$ -Catalan [GH02] et les  $q, t$ -Narayana [DB13] décrivant des séries de Hilbert d'espaces de fonctions symétriques très étudiées en combinatoire algébrique [Hag07], le phénomène de *Devil Staircase* (Levine [Lev11]). On pourra retrouver un tour d'horizon du modèle du tas de sable en physique (Ruelle [Rue13]), en mathématiques [HLM<sup>+</sup>08, Jár14]. Ce modèle montre qu'une dynamique élémentaire simple peut engendrer de la complexité par ses structures. On retrouve également des généralisations du modèle de la pile de sable avec des anti-éboulements [CPS11] et les *abelian networks* de Bond et Levine [BL16].

### 1.1.3 Le cas de la grille infinie $\mathbb{Z}^2$

Une partie de la recherche sur le modèle du tas de sable se concentre sur la grille  $\mathbb{Z}^2$  et parfois sur certains de ses sous-graphes. On se place alors dans ce

graphe et on s'intéresse à une configuration classique héritée de la physique. On place une grande quantité  $n$  de grains sur l'origine de la grille et on s'intéresse à la stabilisation de la configuration. On obtient ainsi par l'algorithme de stabilisation des figures comme la **Figure 1.2**. On note  $s_n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  le stabilisé d'une pile de  $n$  grains.

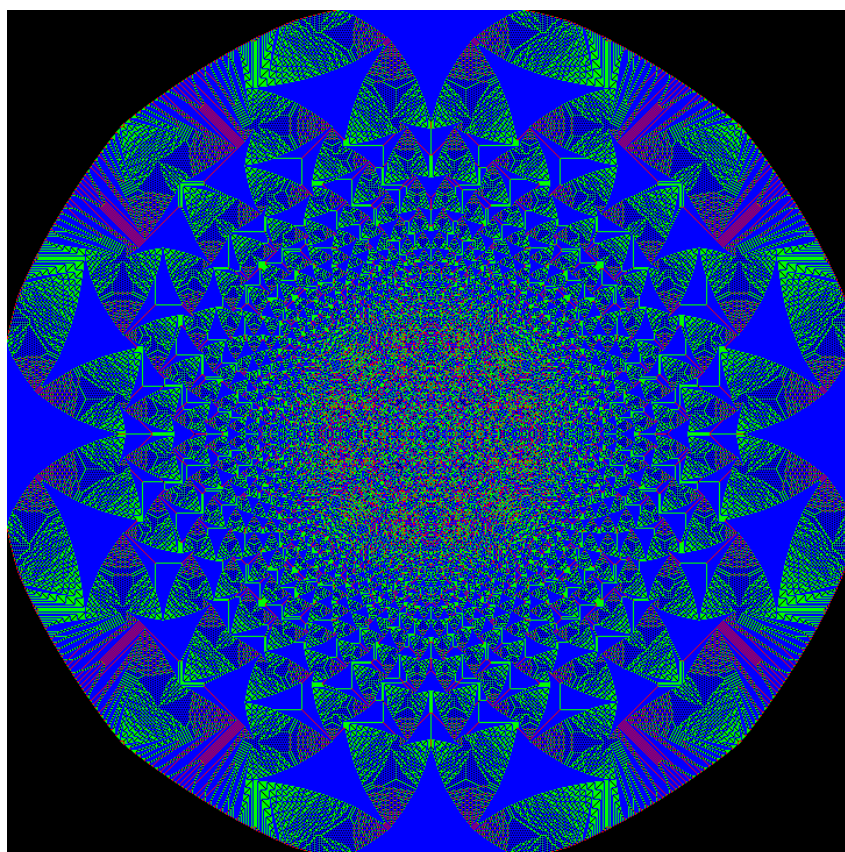


FIGURE 1.2 – Stabilisation d'une pile de  $10^6$  grains. Le code couleur est 0 en noir, 1 en rouge, 2 en vert et 3 en rouge

De premières propriétés ont été conjecturées après des observations expérimentales de cette stabilisation. Le support de la stabilisation est de rayon de l'ordre de  $\sqrt{n}$ . On retrouve une structure auto-similaire avec des zones à motifs périodiques éventuellement traversées par des lignes de défaut [Ost03, DSC08] (**Figure 1.3**). De plus on observe un objet limite quand les distances dans la configuration obtenue sont normalisées par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  : la densité de grains converge.

Ces observations expérimentales ont été suivies d'études afin de montrer notamment que la taille du support est bien de l'ordre de  $\sqrt{n}$  [LBR02] pour être ensuite affiné par un encadrement de la frontière du support par deux cercles concentriques [LP08] en relation avec la fonction de Green de la marche symétrique issue de l'origine. L'existence d'un objet limite est montrée au sens des viscosités par [PKS11] par l'utilisation d'équation aux dérivées partielles :

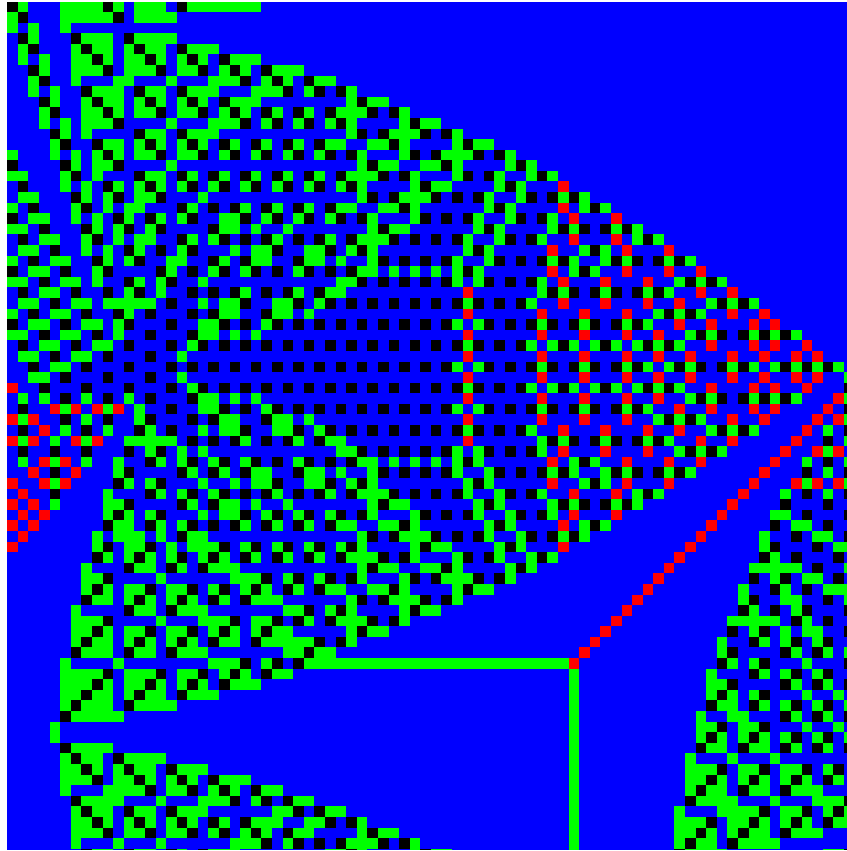


FIGURE 1.3 – Portion de la Figure 1.2

en notant  $\bar{s}_n : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow s_n([n^{1/2}x])$  la configuration normalisée de  $s_n$  où  $[x]$  désigne le point du réseau entier le plus proche de  $x$ , alors  $\bar{s}_n$  converge pour la topologie faible- $*$  sur  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$  vers  $s_\infty = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . La fonction  $w \in C(\mathbb{R}^2)$  est la limite localement uniforme de la fonction d'éboulement, l'*odometre*. Ce  $w$  est la plus petite fonction positive qui approche le comportement de la pile près de l'origine et qui est solution d'une équation différentielle aux dérivées partielles [LPKS12].

L'étude et la description des motifs présents dans la structure fractale se retrouvent dans les travaux d'Ostojic et de Dhar et Sadhu [Ost03, DSC08] et plus récemment de Paoletti [Pao12] qui décrit une méthode pour construire des motifs présents dans la pile de sable visibles sur la Figure 1.3 ainsi qu'une seconde méthode pour construire une trianguloïde de *Sierpiński* proche de celle observée sur la Figure 1.2 dans laquelle chaque sous-triangle est pavé par un motif à défauts linéaires (*string*) près, défauts qui font également l'objet d'étude [KS16]. [LPKS12, LPKS13] montre que l'objet limite est déterminé par des matrices symétriques  $2 \times 2$  dont les formes quadratiques associées définissent le nombre d'éboulements de chaque sommet de  $\mathbb{Z}^2$ . L'odometre  $w$  est approximé par morceaux sur des domaines fractals par ces formes quadratiques

sur les zones périodiques. Le laplacien discret  $\Delta$  de ces formes quadratiques produit à éboulements périodiques près des motifs périodiques observés dans la grille. Dans un contexte proche, [PS17] montre que pour une certaine classe de configurations présentant des structures fractales semblables à la pile de sable, la convergence en densité se précise en une convergence des motifs périodiques presque partout.

Cette convergence est une convergence en termes de densité du nombre de grains. Cependant, une partie des questions initiales issues des expérimentations restent encore à l'étude, notamment on ne sait pas si la frontière de l'éboulement converge vers un cercle ni s'il existe des formes quadratiques produisant des motifs périodiques sans avoir recours à des éboulements périodiques supplémentaires.

## 1.2 Les configurations récurrentes

On se replace dans cette section dans le cas d'un graphe fini  $G = (V \cup \{s\}, E)$  pour présenter une catégorie de configurations sur  $G$  que l'on cherchera à étendre à certains graphes infinis dans les [Chapitres 3 à 5](#).

### 1.2.1 Chaîne de Markov

Bien que le modèle du tas de sable ne soit pas le plus réaliste quant au comportement du sable, il peut être vu comme un modèle jouet pour observer des avalanches d'éboulements quand on rajoute un grain sur un sommet. On définit pour tout sommet  $v$  l'opérateur  $E_v : \eta \mapsto \eta + \mathbf{1}_v$  consistant à ajouter un grain sur le sommet  $v$ . On s'intéresse alors à la dynamique suivante. Partant d'une configuration stable, on ajoute un grain sur un sommet pris aléatoirement puis on stabilise le résultat. On obtient donc une nouvelle configuration stable. Le nombre des configurations stables étant fini au nombre de grains dans le puits près, on obtient une chaîne de Markov à états finis dont les transitions sont décrites par l'opérateur  $\eta \rightarrow \text{stab}(\eta + E_v)$  où  $v$  est un sommet aléatoire du graphe.

Cette chaîne possède des états transients et des états récurrents. L'existence des états transients s'appuie sur le déplacement des grains sur les arêtes. Lors d'un éboulement, un grain se déplace sur chaque arête incidente au sommet éboulé. Dès lors, ces arêtes capturent chacune un grain qui ne pourra faire que des allers-retours sur celle-ci suivant l'extrémité qu'on éboule. Ainsi, les configurations avec moins de grains que d'arêtes du graphe sont des états transients de la chaîne. On appelle configurations *récurrentes* les états récurrents. La configuration stable maximale, c'est-à-dire la configuration  $v \in V \mapsto \text{deg}(v) - 1$ , est atteignable depuis toutes configurations donc est récurrente et l'ensemble des configurations récurrentes forme une composante fortement

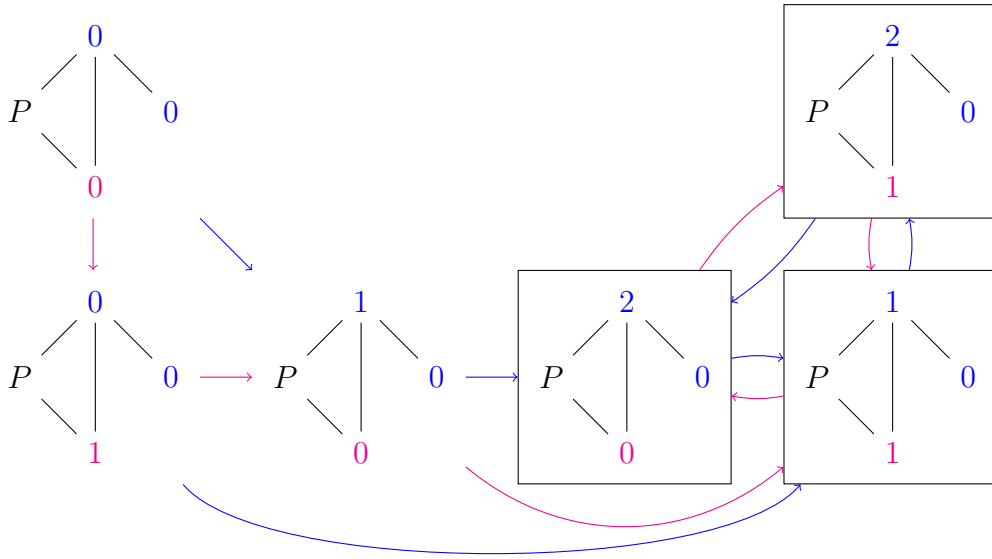


FIGURE 1.4 – Chaîne de Markov, les transitions rouges correspondent à l’ajout d’un grain sur le sommet rouge et celles bleues sur un des sommets bleus

connexe du graphe de la chaîne de Markov. Pour une loi raisonnable sur le choix du sommet sur lequel ajouter un grain, la loi uniforme par exemple, la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov existe et est la distribution uniforme sur les configurations récurrentes. On note  $\mathcal{R}_G$  l’ensemble des configurations récurrentes.

### 1.2.2 Le groupe du tas de sable

Soit  $G = (V \cup \{s\}, E)$  un graphe fini. On définit le groupe abélien infini  $\mathbb{Z}^V$  par la somme usuelle sur le nombre de grains sommet par sommet, autorisant un nombre négatif de grains par sommet. Soit deux configurations  $\eta, \mu \in \mathbb{Z}^V$ . On dit que les deux configurations  $\eta$  et  $\mu$  sont équivalentes si on peut passer de l’une à l’autre par des éboulements légaux ou non. Autrement dit, on peut noter  $\mathbb{Z}^V \Delta$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^V$  généré par les colonnes de  $\Delta_G$  restreintes à  $V$ . Les configurations  $\eta$  et  $\mu$  sont équivalentes si  $\eta - \mu \in \mathbb{Z}^V \Delta$ . On définit alors le groupe  $K_G = \mathbb{Z}^V / \mathbb{Z}^V \Delta$  le quotient de  $\mathbb{Z}^V$  par la relation d’équivalence par éboulements. On remarque que l’éboulement du puits peut se traduire par le vecteur d’éboulement  $-1^V$ , donc que l’éboulement du puits est stable sur les classes d’équivalences.

**Théorème** ([Dha90]). *Chaque classe de  $K_G$  contient exactement une configuration récurrente de  $G$ . La loi  $\oplus : \mathcal{R}_G \times \mathcal{R}_G \rightarrow \mathcal{R}_G$  définie pour tout couple  $\eta, \mu$  de configurations récurrentes par  $\eta \oplus \mu = \text{stab}(\eta + \mu)$  est alors une loi de groupe sur  $\mathcal{R}_G$ .*

Ce théorème permet d'obtenir l'uniformité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov. En effet, l'ajout d'un grain  $E_v$  sur une configuration  $\eta$  est équivalent à l'ajout d'une configuration récurrente  $\mu_v$  équivalente par éboulement à la configuration  $\mathbf{1}_v : E_v(\eta) = \eta \oplus \mu_v$ . En factorisant le groupe en groupes cycliques, l'ajout d'un grain correspond à une translation dans le produit des groupes cycliques. Pour un tirage sur les sommets de probabilités non nulles sur une famille génératrice du groupe, on se retrouve alors avec une marche aléatoire sur les éléments du groupe, et la mesure uniforme est préservée par les translations.

Indépendamment, on retrouve également la notion de *critical group* dans les travaux de Biggs [Big99].

### 1.2.3 Critère de Dhar

Si les configurations récurrentes se définissent par la chaîne de Markov ou par le groupe  $\mathbb{Z}^V / \mathbb{Z}^V \Delta$ , Dhar donne une caractérisation plus algorithmique des configurations récurrentes par le résultat suivant.

**Théorème ([MD92]).** *Une configuration stable  $\eta$  de  $G = (V \cup \{s\}, E)$  est récurrente si et seulement si  $\text{stab}(\eta + \sum_{v \sim s} \mathbf{1}_v) = \eta$ .*

*Lors de la stabilisation, chaque sommet de  $V$  s'éboule exactement une fois.*

Par exemple, lors de l'éboulement du puits  $s$ , tous les sommets de la configuration (1) de la Figure 1.5 s'éboulent, elle est donc bien récurrente (Figure 1.4). La configuration (2) n'est pas récurrente, les sommets de valeurs 0 ne se sont pas éboulés. On obtient par ailleurs après éboulement du puits et stabilisation la configuration (1).

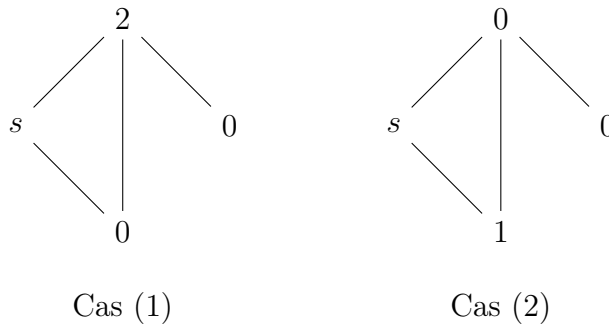


FIGURE 1.5 – Exemple de configurations récurrente (1) et non-récurrente (2)

Autrement dit, une configuration stable  $\eta$  est récurrente si l'éboulement forcé du puits entraîne l'éboulement légal de chaque sommet de  $V$ . On peut se servir de cet algorithme pour assigner à chaque sommet de  $V$  une arête qui l'a déstabilisé. Cette relation définit alors un arbre couvrant  $T_\eta$  de  $G$  enraciné au puits.



On peut découper en étapes ce critère en traitant les éboulements de sommets instables en parallèle. On note  $B_t$  l'ensemble des sommets qui s'éboulent à l'étape  $t$ . À l'instant  $t = 0$ , seul le puits est éboulé,  $B_0 = \{s\}$ . On éboule ensuite tous les nouveaux sommets instables à l'étape  $t = 1$  et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les sommets soient stables. Si la configuration est récurrente, on s'arrête quand  $B_t = V \cup \{s\}$ . Soit  $\eta$  une configuration récurrente. Soit un sommet  $v$  éboulé à l'étape  $t_v > 0$ , alors  $v$  est déstabilisé à l'étape  $t_v - 1$  et a au moins un voisin éboulé à l'étape  $t_v - 1$ . Soit  $K$  le nombre d'arêtes incidentes à  $v$  d'extrémité un voisin éboulé à l'étape  $t_v - 1$  et  $K^-$  son nombre d'arêtes incidentes d'extrémité des voisins qui se sont éboulés avant l'étape  $t_v - 1$ . Ainsi  $K$  compte le nombre de grains arrivés à l'étape  $t_v - 1$ , et  $K^-$  le nombre de grains arrivés avant cette étape. On a en particulier  $\eta(v) + K^- < \deg(v) \leq \eta(v) + K^- + K$ . Si  $K = 1$ , on rajoute à  $T_\eta$  l'arête vers l'unique voisin l'ayant déstabilisé. Si  $K > 1$ , on se donne un ordre arbitraire sur les arêtes incidentes de  $v$ . Il existe un  $\tau_v$  tel que  $\deg(v) = \eta + K^- + \tau_v$ . On rajoute à  $T_\eta$  alors la  $\tau_v$ -ième arête parmi les  $K$ . Ce  $\tau_v$  correspond au temps d'attente d'un sommet avant de s'ébouler. Dans le cas du graphe complet, le temps cumulé  $\sum_{v \in V} t_v$  par les sommets avant éboulement conduit à la statistique *bounce* de Haglund [GH02] pour les  $q, t$ -Catalan (l'autre statistique étant le nombre de grains).

Pour toute configuration récurrente, on associe l'arbre couvrant de  $G$  obtenu par ce processus. On note  $\mathcal{T}_G$  l'ensemble des arbres couvrants de  $G$ .

**Théorème ([MD92]).** *L'ensemble  $\mathcal{T}_G$  des arbres couvrants enracinés en  $s$  est en bijection avec les configurations récurrentes  $\mathcal{R}_G$  par la construction précédente.*

Diverses bijections ont également vu le jour. On peut citer parmi elles une bijection de Gamlin et Járai [GJ14] qui étend la construction précédente sur une certaine classe de graphes infinis, celle de Bernardi [Ber08] et celle de Cori et Le Borgne [CLB03] dont les études sont motivées par le lien avec le polynôme de Tutte. Cette dernière bijection qui semble offrir le meilleur contrôle sur l'espace de traitement du critère de Dhar sera fortement utilisée dans le cadre de cette thèse et on consacre la section suivante à ses propriétés.

### 1.2.4 Bijection CLB

La bijection de Cori et Le Borgne (*CLB*) suit les mêmes principes que ceux donnés par le critère de Dhar. Il s'agit de l'exécuter et, dans le cas d'une configuration récurrente, d'assigner à chaque sommet l'arête ayant apporté le grain l'ayant déstabilisé. Dans le cas de la bijection précédente, les éboulements sont traités en parallèle par étape et les conflits dans le cas où plusieurs arêtes déstabilisent potentiellement un sommet sont réglés à l'aide d'un ordre local sur les arêtes incidentes à chaque sommet. Dans la bijection CLB, les éboulements sont traités sommet par sommet, voire arête par arête, et un ordre global sur

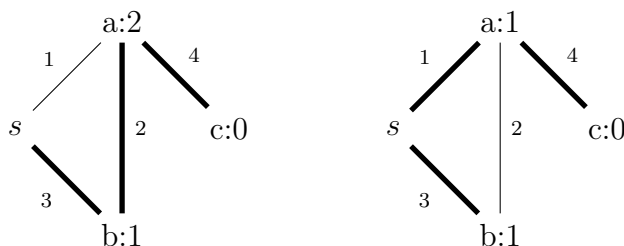


les arêtes du graphe est nécessaire pour définir les priorités de traitement à cette échelle.

Le principe est le suivant : quand un sommet s'écroule, au lieu de faire arriver instantanément les grains à leurs destinations comme le ferait l'opération avec le Laplacien du graphe, les grains sont conservés sur les arêtes jusqu'à ce que celles-ci soient traitées, également une à une en suivant l'ordre qu'on se sera donné. La granularité du traitement des arêtes permet de connaître l'arête qui a déstabilisé chaque sommet.

On se fixe donc un ordre  $\prec_e$  sur les arêtes du graphe  $G = (V \cup \{s\}, E)$ .

Soit  $\eta$  une configuration récurrente, état initial de l'algorithme réalisant la bijection. On exécute l'algorithme suivant. On force tout d'abord l'écroulement du puits  $s$  et des grains sont envoyés sur les arêtes incidentes à  $s$ . Ces dernières sont marquées en attente (ou *pendantes*). On traite ensuite les arêtes en attente en sélectionnant la plus grande suivant l'ordre  $\prec_e$ . Chaque grain sur l'arête arrive alors à sa destination et on marque cette arête comme étant traitée. Si un sommet est déstabilisé alors il est écroulé et on envoie ses grains sur ses arêtes incidentes. Les arêtes incidentes déjà traitées auparavant transfèrent leurs grains tandis que les autres sont marquées en attente. On reprend ensuite en traitant de nouveau l'arête la plus grande parmi les arêtes en attente.



Cas (1)

Cas (2)

FIGURE 1.6 – Exemple de correspondance entre deux configurations et deux arbres couvrants (en gras) pour l'ordre indiqué par la numérotation des arêtes

Lors de l'exécution de cet algorithme, chaque sommet est écroulé une seule fois et chaque arête est traitée une seule fois. On appelle parcours sommet-arête la suite  $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq |V|+1+|E|}$  faisant apparaître chaque élément  $V \cup \{s\} \cup E$  du graphe dans leur ordre de traitement. Ainsi, dans pour la Figure 1.6, on a fixé l'ordre sur les arêtes  $sa \prec_e ba \prec_e sb \prec_e ac$ . Pour la configuration  $\{a \mapsto 2, b \mapsto 1, c \mapsto 0\}$ , on obtient le parcours  $s, sb, b, ba, a, ac, c, sa$  et pour la configuration  $\{a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 0\}$ , le parcours sommet-arête est  $s, sb, b, ba, sa, a, ac, c$ .

L'ordre de traitement des sommets et arêtes du graphe décrit un parcours sommet-arête dit *décroissant* et est caractérisé par [CLB03] :

- (i) Si  $\sigma_i$  est un sommet de  $V$ , alors  $\sigma_{i-1}$  est une arête incidente à  $\sigma_i$ .
- (ii) Si  $\sigma_i$  est une arête, alors elle est maximale pour  $\prec_e$  parmi les arêtes de  $\{\sigma_j \mid j \geq i\}$  incidentes à un sommet de  $\{\sigma_j \mid j < i\}$ .

La propriété (i) reformule le fait que tout sommet  $\sigma_i$  distinct du puits est éboulé à l'instant où il est déstabilisé par l'arête  $\sigma_{i-1}$ . La seconde propriété (ii) traduit la sélection de l'arête maximale parmi les arêtes en attente.

Le parcours sommet-arête est un objet intermédiaire traduisant l'exécution du critère de Dhar suivant l'algorithme précédent. Il est alors naturel d'y retrouver un codage de l'arbre couvrant ainsi que de la configuration récurrente associée. En effet, l'arbre couvrant  $T$  est construit par l'ensemble des arêtes précédant les sommets de  $V$  dans  $\sigma$ , arêtes transportant le grain déstabilisant chaque sommet,  $T := \{\sigma_{i-1} \mid \sigma_i \in V\}$ . Celles-ci sont indiquées en gras sur la [Figure 1.6](#). Et la configuration récurrente est déduite du nombre d'arêtes incidentes à chaque sommet étant traitées après ce dernier dans  $\sigma$ . Ainsi pour un parcours sommet-arête  $\sigma$  donné, pour tout  $\sigma_i \in V$   $\eta(\sigma_i) = |\{u \sim \sigma_i \in E \mid u \sim \sigma_i \in \{\sigma_j \mid j > i\}\}|$ . [\[CLB03\]](#) utilise les parcours sommet-arête comme support de la bijection CLB entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants du graphe.

Le lien avec le polynôme de Tutte est donné par le résultat de [\[Lóp97\]](#). Le polynôme de Tutte d'un graphe  $G$  est donné par :  $T(G, x, y) = \sum_{t \in \mathcal{T}_G} x^{i(t)} y^{j(t)}$  où  $i(t)$  est le nombre d'arêtes internes actives et  $j(t)$  le nombre d'arêtes externes actives. Une arête  $e \in t$  est interne active si elle est la plus petite selon  $\prec_e$  dans le cocycle dans  $E \setminus t \cup \{e\}$ . Une arête externe  $e$  à  $t$  est active si elle est la plus petite dans l'unique cycle du graphe  $(V, t \cup \{e\})$ . Une propriété non triviale de cette définition est qu'elle ne dépend pas de l'ordre choisi.

On note  $R(G, y) = \sum_{\eta \in \mathcal{R}_G} y^{level(\eta)}$  le polynôme associé à la distribution du nombre de grains des configurations récurrentes de  $G$  de puits  $s$  où  $level(\eta) = (\sum_{v \in V} \eta(v)) + \deg(s) - |E|$  définit le niveau de la configuration  $\eta$ .

Alors on a le résultat suivant :

**Théorème** ([\[Lóp97\]](#)).

$$R(G, y) = T(G, 1, y)$$

*Autrement dit, il y a autant de configurations récurrentes de niveau égal à  $i$  que d'arbres couvrants à  $i$  arêtes externes actives dans  $G$ .*

De plus, étant donné un parcours sommet-arête décroissant  $\sigma$ , [\[CLB03, Lemme 3\]](#) montre que les arêtes du graphe qui apparaissent après leurs extrémités dans  $\sigma$  sont d'une part externes à l'arbre couvrant associé et d'autre part qu'elles sont minimales dans le cycle induit que chacune crée dans cet arbre.

### 1.3 Travaux de cette thèse

Les travaux de la thèse sont axés sur des stabilisations de configurations sur le réseau entier  $\mathbb{Z}^2$  ou des sous-parties infinies de ce dernier que sont les

bandes  $\mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, H\}$  de hauteur  $H$ .

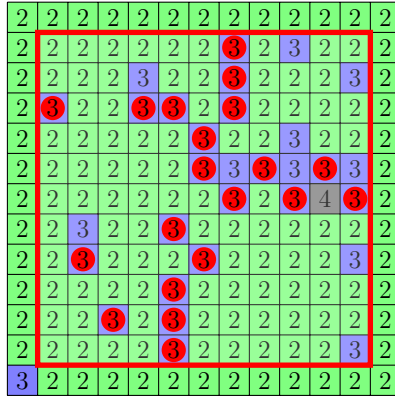


FIGURE 1.7 – Support et exemple de certificat dans le modèle du Chapitre 2

Dans le Chapitre 2, on s'intéressera à une majoration du comportement de la pile de sable stabilisée quand on déstabilise l'origine une fois de plus. On ajoute des grains à chaque sommet afin que ceux-ci aient au moins 2 grains chacun. On travaille alors sur des configurations avec des 2 et 3 partout qu'on déstabilise ensuite en complétant l'origine à 4 grains. Le cas de la pile est particulièrement symétrique et il y a une forte dépendance entre les valeurs de chaque sommet donnée par la stabilisation de la pile. Dans un cadre un peu similaire, on fait une approximation en oubliant cette dépendance et on considère toutes les configurations n'assignant que 2 ou 3 grains à chaque sommet. Plus précisément, on s'intéressera aux configurations où les nombres de grains pour chaque sommet sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli, prenant la valeur 2 avec probabilité  $q \in [0, 1]$  et la valeur 3 avec probabilité  $1 - q$ , en déstabilisant ensuite l'origine. On retrouve ce type de considérations dans [HJL17] où l'étude porte sur la densité critique en dessous de laquelle une configuration dont les nombres de grains sont des variables aléatoires identiquement distribuées sur  $\mathbb{Z}$  se stabilise presque sûrement. Dans la modélisation choisie, on s'intéresse au support de la stabilisation, si celui-ci est fini et le cas échéant à sa taille. On se placera dans le cas où il est fini et on montre que ce dernier est rectangulaire (Figure 1.7). On s'attache à décrire la loi du demi-périmètre du rectangle. Dans le contexte de la *bootstrap percolation*, ce modèle se rapproche du *Froböse local model* [GH08] dans le cas où le processus d'activation, correspondant à l'algorithme de stabilisation, ne termine pas. La description de la loi du demi-périmètre du rectangle peut se faire à l'aide d'un système d'équations  $q$ -linéaires qu'on peut produire par un programme mais qui n'a pas permis une exploitation simple. En simplifiant le modèle en imposant plus ou moins de symétries dans les tirages, comme dans le cas de la pile, donc une dépendance entre les tirages du nombre de grains par sommet, on obtient des systèmes  $q$ -linéaires plus simples et dont les

solutions admettent dans une partie des cas des descriptions combinatoires. Elles font intervenir les permutations et la statistique du nombre d'inversions sur ces permutations. Cette description se montre par une bijection entre des permutations et des *certificats* (correspondant à la position de certains 3, voir [Figure 1.7](#)) garantissant la taille du support. Dans le [Chapitre 2](#), on montre par exemple que dans le cas où on impose une symétrie d'axe une diagonale du carré ( $x + y = 0$ ) la probabilité que le support de stabilisation soit un rectangle de demi-périmètre  $4n + 2$  est

$$q^{2n+2}(1-q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{mult}(\sigma) q^{\text{inv}\sigma} \quad \text{Théorème 2.4}$$

où  $\text{mult}(\sigma)$  est le nombre de sous-suites décroissantes de la permutation  $\sigma$ . Cette étude prolonge des résultats obtenus en stage Master. Elle aboutit également à un résultat inattendu de positivité impliquant deux statistiques Mahoniennes classiques  $\text{inv}$  et  $\text{maj}$  et des permutations contenant une sous-suite décroissante fixée ( $d \downarrow$ ) qui sera détaillé en [Section 2.4](#) :

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma \text{ contient } d \downarrow}} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1-q} \in \mathbb{N}[q].$$

Dans la suite de cette thèse, on s'intéresse à la généralisation des structures observées dans le cadre fini à certains sous-graphes infinis de la grille infinie  $\mathbb{Z}^2$ . On se pose la question de la représentation si possible finie de configurations sur ces graphes infinis. L'accent est porté sur les configurations récurrentes, notamment pour le groupe qu'elles forment dans le cas fini et pour leur caractérisation combinatoire par le critère de Dhar. Ces deux points posent les questions suivantes :

- Où placer le puits ?
- Comment utiliser le critère de Dhar sur un graphe infini ?
- Comment stabiliser une configuration ayant une infinité de grains en excès ?

Cette thèse propose deux approches pour ces questions, l'une dans le [Chapitre 3](#) et l'autre dans les [Chapitres 4](#) et [5](#).

Dans le cas du sous-graphe infini qu'est une bande biinfinie  $\mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, H\}$  de hauteur  $H$ , on propose une nouvelle description des configurations dites récurrentes à gauche [[JL07](#)] également par un automate fini lisant une configuration colonne par colonne. Cette description s'appuie sur la bijection CLB présentée en [Section 1.2.4](#) en plaçant un puits à l'infini à gauche.

Ainsi, dans le [Chapitre 3](#), la grille  $\mathbb{Z}^2$  est restreinte à une bande biinfinie. On s'intéresse à la notion de récurrence à gauche introduite par Járai et Lyons [[JL07](#)] sur ce graphe. Cette notion correspond informellement à placer le puits à l'infini à gauche. Alors en représentant les configurations stables par des mots biinfinis sur l'alphabet des colonnes stables  $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}^{H-2} \times$

$\{0, 1, 2\}$ , ils montrent qu'il existe un automate fini reconnaissant tous les facteurs de configurations récurrentes à gauche en lisant une configuration colonne par colonne. L'automate pour la hauteur  $H = 2$  peut être construit à la main ([JL07]) et correspond à la Figure 1.8.

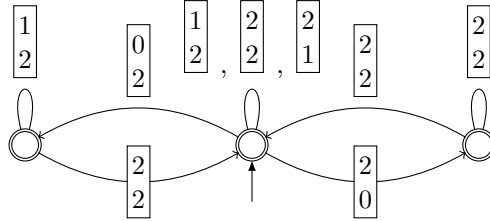


FIGURE 1.8 – Automate pour les configurations récurrentes à gauche de la bande pour  $H = 2$

La preuve de [JL07] donne l'existence et permet de donner une borne grossière sur le nombre d'états en  $(2^H)^{2^H}$  cependant Gamlin, étudiant de Járαι, propose dans sa thèse [Gam16] la conjecture selon laquelle il existe un automate ayant un nombre exponentiel en la hauteur  $H$  d'états. Cette conjecture s'appuie sur les bijections entre les configurations récurrentes et les arbres couvrants, l'existence d'automates ayant un nombre exponentiel d'états pour les arbres sur la bande étant connu. La difficulté de ce rapprochement tient au caractère non local de la bijection entre les arbres et les configurations récurrentes.

On propose ainsi dans cette thèse de construire non pas un automate sur les arbres couvrants mais sur les parcours sommet-arête décroissants présentés en Section 1.2.4. Le choix d'un ordre favorisant le traitement des arêtes les plus à gauche et une lecture colonne par colonne du parcours par une notion d'ordre local, ordre sur les éléments en contact avec une colonne, permet de se ramener à un automate fini reconnaissant les parcours sommet-arête décroissants. Les états de cet automate sont les ordres locaux apparaissant dans les parcours sommet-arête décroissants et les transitions sont caractérisées par une relation de compatibilité simple entre les deux états des transitions (Définition 3.11) et sont étiquetées par leurs états d'arrivée. L'extraction d'une configuration à partir de la lecture colonne par colonne du parcours sommet-arête est locale donc on obtient directement par projection de l'alphabet des ordres locaux vers l'alphabet des colonnes de grains un automate sur les configurations récurrentes à gauche. L'automate ainsi défini a au plus de l'ordre de  $\alpha^{H \log H}$  états, se rapprochant de la conjecture de Gamlin. La construction de cet automate est cependant limité par l'absence de caractérisation combinatoire de ses états à ce stade. Cependant un sous-ensemble d'états de l'automate produit est en bijection avec des permutations évitant un motif, donnant une borne inférieure exponentielle sur le nombre de ses états. La borne sur-exponentielle permet

toutefois de produire les automates pour les hauteurs 3 (Figure 1.9) et 4 (voir Chapitre 3).

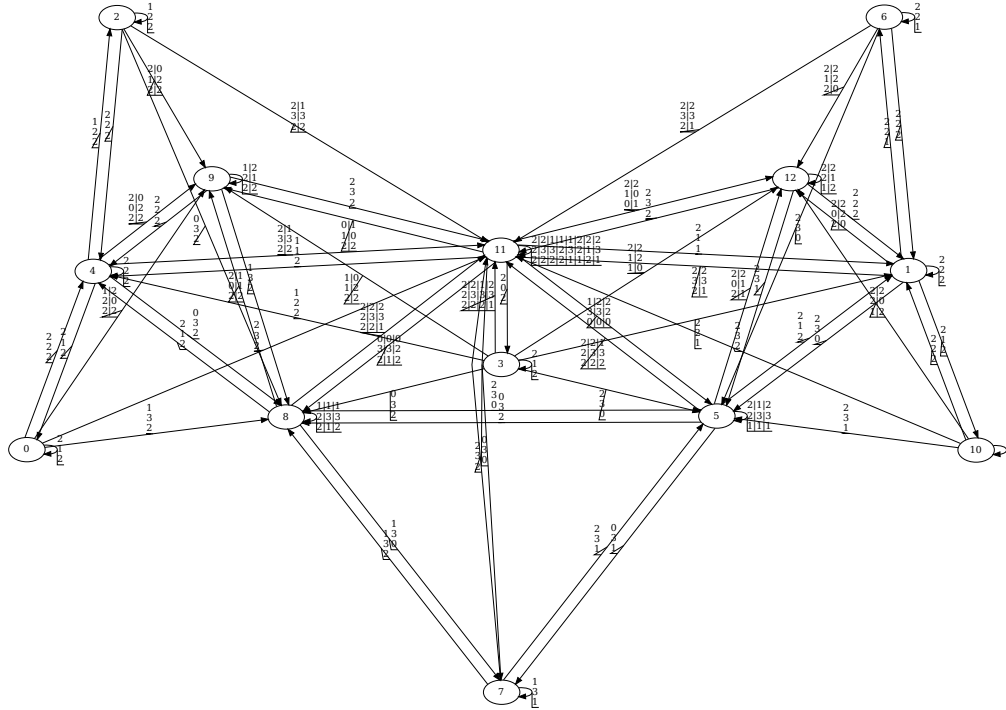


FIGURE 1.9 – Automate des configurations récurrentes à gauche de la bande de hauteur  $H = 3$  à 13 états et 125 transitions

Sur la grille  $\mathbb{Z}^2$  et afin de travailler avec des représentations finies de configurations infinies, on s'intéresse dans les Chapitres 4 et 5 aux configurations bipériodiques, c'est-à-dire les configurations  $\eta$  telles qu'il existe deux vecteurs  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  non colinéaires tels que pour tout sommet  $u$  on a  $\eta(u) = \eta(u + \mathbf{p}_1) = \eta(u + \mathbf{p}_2)$ . Ces configurations sont alors décrites par ce couple de vecteurs, appelé période, et leur motif qui est répété selon les vecteurs de la période.

Se pose alors la caractérisation des récurrentes parmi les configurations stables de la grille  $\mathbb{Z}^2$  (infinie) et plus particulièrement parmi les configurations périodiques stables. La caractérisation usuelle est donnée par le critère de Dhar et nécessite la présence d'un puits. Placer le puits en un sommet de  $\mathbb{Z}^2$  introduit une singularité similaire à celle de la pile de sable avec un comportement fractal mais non périodique, brisant la représentation finie choisie. On propose alors d'envoyer le puits à l'infini dans une direction de pente rationnelle de la même manière que le cas de la bande. Ce choix accompagné d'un critère de récurrence affaibli permet de donner une définition de configurations récurrentes *dans une direction*. Ce critère repose sur le principe suivant : forcer l'éboulement de tout demi-plan de frontière orthogonale à la direction du puits entraîne l'éboulement

(légal) du reste des sommets ([Définition 4.1](#)).

Bien que travaillant sur un domaine infini, le critère affaibli est effectif grâce à la périodicité. S'appuyant sur un ordre bien choisi sur les arêtes qui induit un balayage du plan par une droite s'éloignant parallèlement au demi-plan dont on a forcé l'éboulement, le critère révèle une périodicité dans la direction orthogonal au puits et est ultimement périodique dans la direction opposée au puits. On peut alors réduire le calcul du critère sur un domaine fini, dont la taille dépend uniquement de celle du motif de la configuration testée. De plus, le comportement ultimement périodique ne dépend pas du demi-plan initialement choisi rendant le critère affaibli robuste.

En s'inspirant de la bijection CLB, on donne une bijection entre les configurations récurrentes dans une direction donnée et des recouvrements sans cycle contractile du tore où un recouvrement du tore est l'attribution d'un père à chaque sommet du tore ([Figure 1.10](#)). Ces recouvrements sont des forêts couvrantes du tore enracinées sur des cycles non contractiles (qui se déploient en branches infinies sur le plan). Afin d'être compatible avec la direction du puits, la pente de ces cycles non contractiles ne doit pas être orthogonale à la direction du puits. Les travaux de Kenyon [[Ken17](#)] donnent une formule déterminantale pour compter ces recouvrements qu'on peut raffiner par classe d'homologie sur les cycles non contractiles permettant alors de compter les configurations périodiques récurrentes dans une direction. Le nombre de configurations pour une taille de motif donnée varie alors selon la direction ([Figure 1.11](#)). Inversement, pour un même recouvrement du tore, le changement de position du puits produit différentes configurations récurrentes dans une direction qui se répartissent en secteurs angulaires ([Figure 1.12](#)). La [Figure 1.13](#) illustre les différentes configurations obtenues pour le recouvrement de la [Figure 1.10](#).

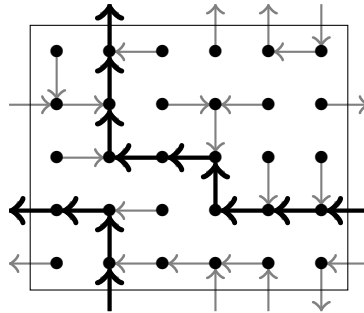


FIGURE 1.10 – Exemple de forêt couvrante périodique de  $\mathbb{Z}^2$  représentée sur le tore  $6 \times 5$  de branche infinie (cycle dans le tore) en surbrillance

De la même manière qu'il existe un groupe sur les configurations récurrentes sur un graphe fini, le [Chapitre 5](#) propose une définition d'une loi de groupe sur des éléments susceptibles d'être les configurations récurrentes périodiques de  $\mathbb{Z}^2$ . Ce serait un sous-groupe de l'hypothétique groupe sur  $\mathbb{Z}^2$ . Les candidats naturels sont donc les éléments dégagés durant la partie précédente.

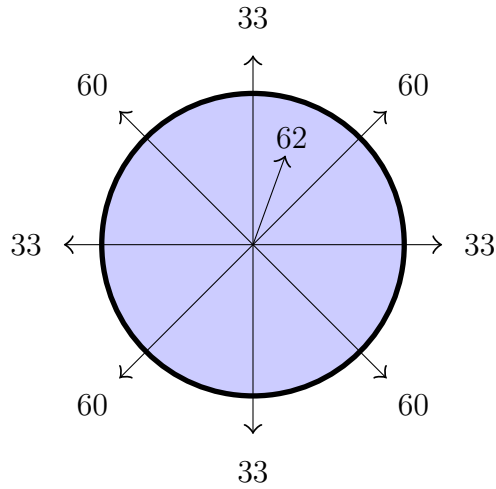


FIGURE 1.11 – Nombre de configurations périodiques de taille  $2 \times 2$  récurrentes dans la direction du puits en fonction de cette dernière, axiale, diagonale ou autre

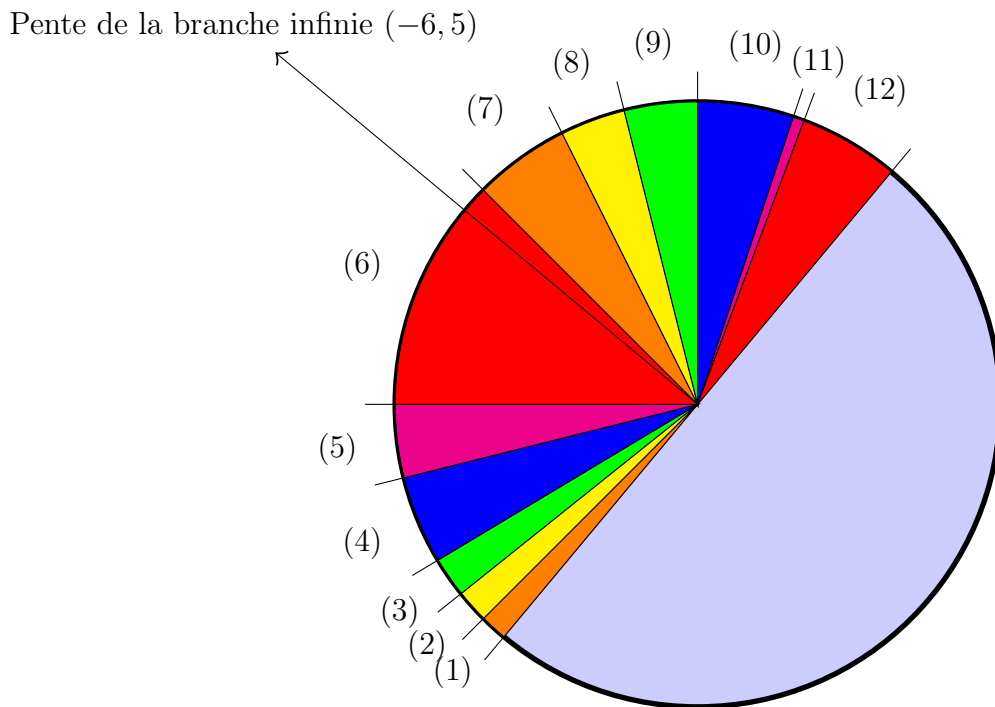


FIGURE 1.12 – Variation de la configuration récurrente en fonction de la direction du puits pour le recouvrement en [Figure 1.10](#)

La principale difficulté sur la grille est la stabilisation de configurations ayant une infinité de sommets avec un excès de grains. Ce problème est rencontré également par [LPKS12] pour la stabilisation des configurations définies par



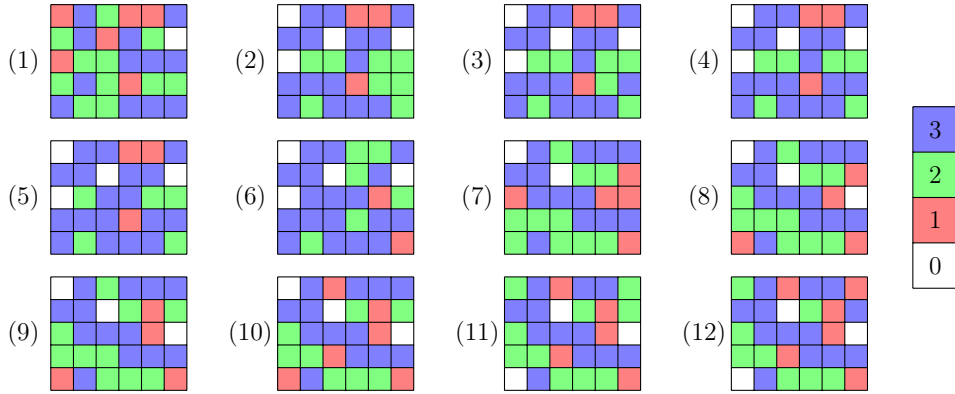
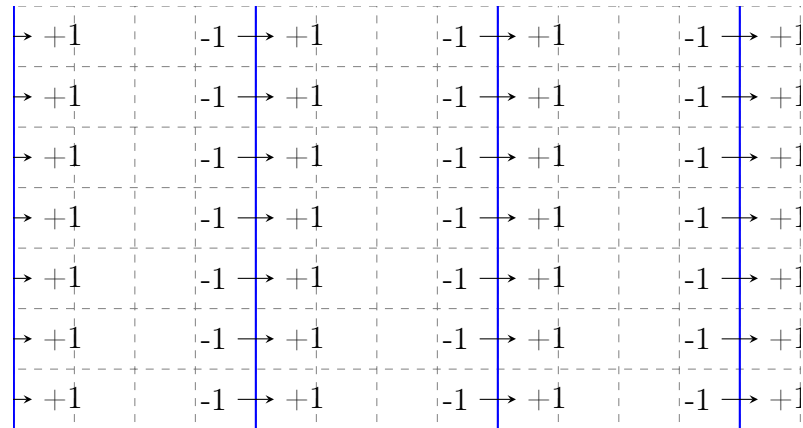


FIGURE 1.13 – Configurations associées aux recouvrements en Figure 1.10 en fonction de la direction du puits en Figure 1.12

des formes quadratiques. Dans leur approche, si une configuration périodique ne peut se stabiliser localement, elle est exclue. Seules les configurations stabilisables périodiquement sont considérées et ils s’intéressent aux limites de ces configurations quand on augmente le nombre de grains.

En s’appuyant sur le puits qu’on place à l’infini, on propose d’ajouter au delà des éboulements périodiques d’autres types d’éboulements liés au placement à l’infini du puits. On s’autorise l’éboulement d’un demi-plan orthogonal à la direction du puits que l’on réalise de manière périodique pour maintenir la périodicité des éboulements. Par exemple, dans le cas d’un puits placé à l’infini à gauche, soit la direction  $(-1, 0)$ , on autorise l’opérateur d’éboulement périodique des demi-plans  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq 4k\}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui peut se traduire par le vecteur d’éboulement  $(x, y) \mapsto \lceil \frac{-x}{4} \rceil$  et par le décalage de grains de gauche à droite périodiquement (Figure 1.14). En restant dans le cas de la direction  $(-1, 0)$ , on permet l’éboulement de tous les demi-plans  $x \leq k$  pour  $k \leq 0$  réalisé de manière périodique. Ce type d’éboulement permet d’insérer ou d’arracher des grains de manière périodique. Là où le vecteur d’éboulement précédent s’exprime de manière linéaire, celui-ci se rapproche des formes quadratiques dans une version dégénérée. On rejoint alors les possibilités données par les formes quadratiques avec en complément une définition de récurrence.

Une fois la stabilisation possible, l’addition de deux configurations périodiques peut se définir comme la stabilisation par arrachage de la somme. Comme dans le cas fini, on s’intéresse aux classes d’équivalences par éboulements sur les configurations. Ici, l’éboulement du puits se généralise à l’éboulement de demi-plan. Les éboulements considérés pour la relation d’équivalence sont les éboulements périodiques de sommets mais également les éboulements périodiques de demi-plans orthogonaux à la direction du puits et les insertions et arrachages. L’arrachage laisse alors invariant les classes d’équivalence, et on se retrouve naturellement avec une définition de groupe abélien fini sur les classes d’équivalences en se restreignant à des configurations de motif de taille



Odomètre 2 2 2 2 1 1 1 1 0 0 0 0 -1

FIGURE 1.14 – Opérateur d’éboulement par demi-plans périodiques

donnée. Cependant contrairement au cas fini, on perd l’unicité et l’existence des récurrentes dans la direction du puits dans ces classes. Ainsi, le groupe engendré par les classes d’équivalence par éboulements sur les configurations de motif de taille  $2 \times 2$  pour la direction à gauche,  $(-1, 0)$ , est isomorphe au groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ . La [Figure 1.15](#) donne la répartition des configurations récurrentes dans la direction  $(-1, 0)$  dans chaque classe. On remarque que deux classes ne contiennent pas de telles configurations (et ne sont pas représentées). Expérimentalement, on trouve des configurations récurrentes de motif plus grand ([Figure 1.16](#)) de classes d’équivalence celles sans configuration récurrente plus petite. Ainsi l’existence de récurrente dans chaque classe semble rattrapable en multipliant la période. De plus le groupe engendré par les configurations  $2 \times 2$  ainsi que par ces 4 configurations est également isomorphe à  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ . Autrement dit, l’ajout de multiples de configurations n’entraîne pas l’explosion du groupe. Ainsi, le groupe engendré par les configurations  $2 \times 2$  est un sous-groupe strict du groupe engendré par les configurations  $2 \times 4$ . Cette observation est vérifiée pour les groupes engendrés par les configurations bipériodiques de motifs de dimensions  $m \times n$  petites  $n, m \leq 4$ . On observe également que la modification de la direction du puits, changeant le nombre de configurations récurrentes dans sa direction, change également la loi de groupe obtenue là où les groupes sont tous isomorphes dans le cas fini. Par exemple, le groupe obtenu pour la direction  $(-1, -1)$  est isomorphe au groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ .

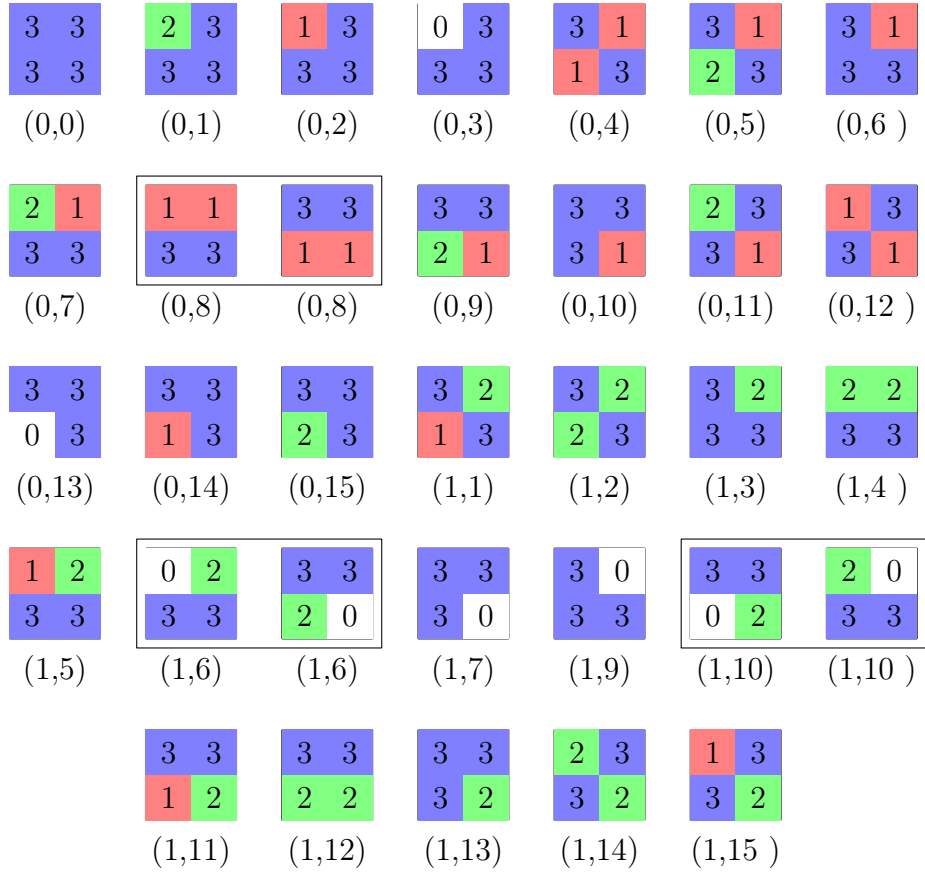


FIGURE 1.15 – Configurations récurrentes  $(2, 2)$  pour  $\mathbf{s} = (-1, 0)$  et regroupement par classes d'équivalence

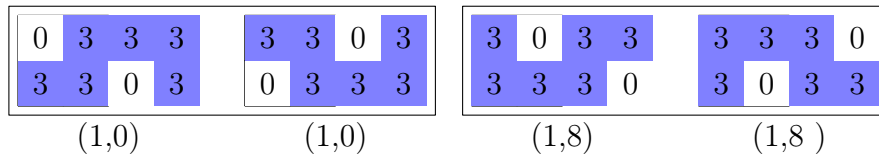


FIGURE 1.16 – Configurations récurrentes manquantes pour le groupe des configurations récurrentes  $2 \times 2$

## 2. Étude d'une simplification du modèle inspirée de la *bootstrap percolation*

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une stabilisation particulière de configurations sur la grille  $\mathbb{Z}^2$ . Le modèle étudié peut être relié à la pile de sable par deux approximations : une majoration des configurations et une approximation supposant l'indépendance site par site de cette majoration. Une telle configuration se retrouve aussi dans un cas limite dans les travaux de [HJL17] sur les explosions dans le modèle du tas de sable. Ce modèle provient d'une question de D. Rossin à R. Cori transmise à Y. Le Borgne et enfin posée ici.

Dans le cas de la pile de sable, on peut obtenir la configuration résultant de la stabilisation d'une pile de  $n$  grains en calculant itérativement le stabilisé de la pile de 1 à  $n$  grains en rajoutant après chaque stabilisation un grain à l'origine et en stabilisant. Dans ce cadre on se propose une *stabilisation par vague*. Lors de la stabilisation, on peut découper le processus en vagues d'éboulements dans lesquelles les sommets ne sont autorisés à s'ébouler qu'une fois. Une vague se termine alors quand les seuls sommets instables ont déjà été éboulés pendant cette même étape. Ainsi, chaque sommet du *support* d'une vague s'est éboulé une seule fois. Le support d'une stabilisation est alors l'union des supports de ses vagues. Dans le cas général, il n'y a pas de relation d'inclusion entre les vagues [VKP98]. La pile de sable en est un exemple avec des vagues pouvant ne contenir que l'origine, notamment la première et la dernière de la stabilisation.

On se place alors dans le cadre suivant : soit  $\mathcal{C} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  une configuration stable de  $\mathbb{Z}^2$ . On majore cette configuration par la configuration  $\tilde{\mathcal{C}} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{2, 3\}$  en complétant à 2 le nombre de grains de chaque sommet si celui-ci en a 0 ou 1. On décide de déstabiliser l'origine en complétant son nombre de grains à 4. La configuration obtenue est donc instable et on peut exécuter l'algorithme de stabilisation. Alors, le support de la stabilisation pour la configuration  $\mathcal{C}$  est inclus dans le support de la stabilisation pour la configuration  $\tilde{\mathcal{C}}$ . De plus on a le résultat suivant :

**Proposition 2.1.** *Les supports des vagues de la stabilisation de  $\tilde{\mathcal{C}}$  sont rectangulaires et sont décroissants pour l'inclusion.*

Cette proposition s'appuie sur une croissance rectangulaire contrôlée des vague d'éboulements qui sera reprise en [Section 2.3.1](#) dans un formalisme légèrement différent. Au début de la première vague, l'origine est éboulée formant un rectangle, sous-ensemble du support final de la vague. Étant donné un rectangle de sommets éboulés, les sommets voisins du rectangle ont tous gagné un grain et ont donc 3 ou 4 grains. Si la configuration est instable, au moins un sommet a 4 grains. Quand celui-ci est éboulé, il déstabilise de proche en proche les sommets voisins du même côté du rectangle et ainsi, le support rectangulaire est agrandi. Si la configuration est stable, les sommets du rectangle se trouvant au bord ont tous perdu au moins un grain, donc ils auront au plus 3 grains à la suite de la vague suivante et donc celle-ci sera strictement incluse dans la première vague.

Ce modèle se rapproche du *local Froboese model* [GH08] où l'on suit l'activation de site sur une grille en suivant une règle rappelant la déstabilisation de sommet. L'initialisation du processus se fait par des Bernoulli indépendantes sur les valeurs 0 ou 1 initiales de la grille. La probabilité non nulle que la stabilisation ne termine pas peut être bornée [GH08][Théorème 1]. Hough, Jerison et Levine [HJL17] listent des résultats dans des modèles légèrement différents sur le tas de sable en autorisant de 0 à 4 grains sur les sommets de la grille. Ces valeurs suivent également indépendamment la même loi où la probabilité de tirer  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  est  $q_i \in [0, 1]$  avec  $\sum_{i=0}^4 q_i = 1$ . Ils s'intéressent alors à la densité critique à partir de laquelle la stabilisation d'une telle configuration ne se termine pas. Dans notre modèle, on s'intéresse à une sorte de limite du modèle précédent avec  $q_0 = q_1 = 0$ ,  $q_2 = q$ ,  $q_3 = 1 - q - \epsilon$  et  $q_4 = \epsilon$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  et l'objectif est la probabilité que la stabilisation termine ainsi que la taille de son support.

Nos configurations initiales  $\tilde{\mathcal{C}}$  ne contenant que des 2 et 3 avant déstabilisation de l'origine, l'objet d'étude sera dans la suite  $\tilde{\mathcal{C}} - 2$  de valeur dans  $\{0, 1\}$ .

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Définitions

Soit  $\mathcal{C} = (c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  une **configuration** de la grille  $\mathbb{Z}^2$ . Un **rectangle** est le produit d'intervalles d'entiers  $\llbracket i, j \rrbracket \times \llbracket k, l \rrbracket$ . On définit le demi-périmètre d'un rectangle comme la somme de sa hauteur et de sa largeur, on notera  $|\llbracket i, j \rrbracket \times \llbracket k, l \rrbracket| := (j - i + 1) + (l - k + 1)$ . Un **segment** est un rectangle dont au moins une des dimensions est égale à 1. Chaque sommet  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  a quatre voisins  $\{(x \pm 1, y), (x, y \pm 1)\}$ . Le voisinage d'un rectangle est l'ensemble des voisins des sommets du rectangle qui ne sont pas dans ce dernier. On appelle ce voisinage le **bord** du rectangle et il est composé de l'union disjointe de 4 segments, Nord, Ouest, Sud et Est. Un rectangle est dit stable dans  $\mathcal{C}$  s'il

contient l'origine et que les sommets de son bord sont de valeur 0. Par exemple, le rectangle bleu de la [Figure 2.1](#) est un rectangle stable pour la configuration donnée et son bord est constitué des sommets grisés.

0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1

FIGURE 2.1 – Plus petit rectangle stable  $\llbracket -3, 2 \rrbracket \times \llbracket -1, 2 \rrbracket$  où l'origine est en noir

On s'intéresse ici au plus petit rectangle stable, s'il existe, pour une configuration donnée. Soit  $\mathcal{C}$  une configuration, on propose un algorithme déterministe terminant si un rectangle stable existe et qui calcule dans ce cas le plus petit rectangle stable. Supposons que  $\mathcal{C}$  est une variable aléatoire où les  $(c_{i,j} = \mathcal{C}(i,j))_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$  sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre  $1 - q \in [0, 1]$ . Alors la loi du demi-périmètre du plus petit rectangle stable de  $\mathcal{C}$  est décrite par la probabilité que l'algorithme termine sur un rectangle de demi-périmètre donné. L'étude de cet algorithme exhibe un système d'équations  $q$ -linéaires décrivant la probabilité recherchée (semblable à ceux de la [Section 2.3](#)). On peut alors évaluer les coefficients de la série génératrice de la loi du périmètre du rectangle par itération sur le système d'équations cependant aucune formule connue à ce jour ne permet de calculer directement ces valeurs.

On considère ici une seconde simplification du modèle en imposant des symétries du carré sur les tirages des  $(c_{i,j} = \mathcal{C}(i,j))_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ . Les tirages sont alors réalisés sur une portion du plan, le demi-plan positif sur l'exemple de la [Figure 2.2](#), et les valeurs obtenues sont ensuite reportées sur les autres portions du plan par symétries, dans le demi-plan négatif par symétrie selon l'axe des ordonnées dans l'exemple. Dans le cas de toutes les symétries ([Figure 2.3](#)), les  $(c_{i,j})_{0 \leq j \leq i}$  sont des Bernoulli indépendantes de paramètre  $1 - q$  et  $c_{\pm j, \pm i} = c_{\pm i, \pm j} (= c_{i,j})$  pour tout  $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ . Ces copies sont représentées par les petits carrés noirs correspondant au report d'une valeur obtenue par tirage sur le reste de la grille. Les résultats principaux sont l'expression exacte des probabilités de plusieurs

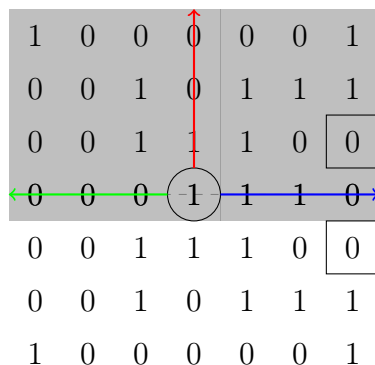


FIGURE 2.2 – Exemple de tirage pour la symétrie d’axe  $y = 0$

de ces modèles à symétries imposées et leurs expressions dans certains cas à l’aide de statistiques sur des ensembles de permutations.

Une statistique sur les permutations est une fonction des permutations dans les entiers. Le nombre d’inversions d’une permutation  $\sigma$  défini par  $\text{inv}\sigma = |\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$  est un exemple de statistique classique sur les permutations. On définit  $\text{Desc}\sigma = \{i \mid \sigma(i) > \sigma(i + 1)\}$  l’ensemble des descentes d’une permutation et  $\text{maj}\sigma = \sum_{i \in \text{Desc}\sigma} i$  l’indice du major de la permutation  $\sigma$ . MacMahon [Mac15] montre que les deux statistiques  $\text{inv}$  et  $\text{maj}$  sont équidistribuées sur l’ensemble des permutations  $\mathcal{S}_n$  de taille  $n$ , autrement dit pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il y a autant de permutations d’indice du major égal à  $k$  que de permutations à  $k$  inversions. On peut traduire cette équidistribution en termes de série :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\text{inv}\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\text{maj}\sigma}.$$

Les statistiques partageant cette propriété sont dites *Mahoniennes*.

### 2.1.2 Résultats principaux

Les résultats principaux sont les suivants et seront détaillés par la suite.

**Proposition 2.2.** *Dans le cas des symétries d’axes d’équations  $x = y$  et  $y = 0$  (Figure 2.3), la probabilité que le plus petit rectangle stable est de demi-périmètre  $4n + 2$  est*

$$q^{n+1}(1-q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\text{inv}\sigma} = q^{n+1}(1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) = q^{n+1}[n]_q!$$

où  $[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdots [n]_q$  et  $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ .

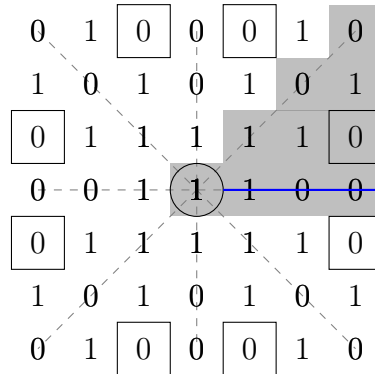


FIGURE 2.3 – Exemple de tirage pour toutes les symétries

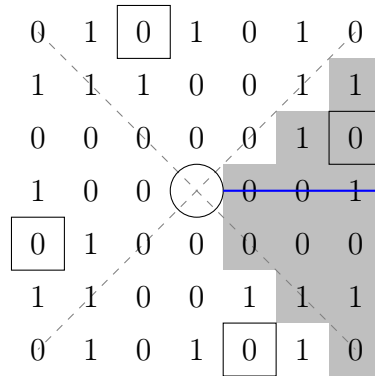


FIGURE 2.4 – Exemple de tirage pour la rotation d'angle  $\pi/2$

**Proposition 2.3.** *Les symétries d'axes les diagonales  $x = y$  et  $x = -y$  (Figure 2.5), et la symétrie par rotation d'un angle de  $\pi/2$  (Figure 2.4) font apparaître des involutions sans point fixe. La probabilité que le plus petit rectangle stable est de périmètre  $4n + 2$  est dans les deux cas*

$$q^{2n+1}(1-q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{2n}} q^{\frac{\text{inv}\sigma - n}{2}}$$

où  $\mathcal{I}_{2n}$  est l'ensemble des involutions sans point fixe de  $\mathcal{S}_{2n}$ .

Le cas de la symétrie d'axe  $x = -y$  (Figure 2.6) mène à un résultat proche du cas des symétries d'axes  $x = y$  et  $y = 0$  (Proposition 2.2). On retrouve une somme proche où chaque permutation est comptée par son nombre d'inversions avec une multiplicité correspondant au nombre de sous-suites décroissantes qu'elle contient où une sous-suite d'une permutation  $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un mot éventuellement vide  $(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k})$  avec  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

**Théorème 2.4.** *Dans le cas de la symétrie d'axe  $x = -y$  (Figure 2.6), la probabilité que le demi-périmètre du plus petit rectangle stable est  $2n + 2$  est*



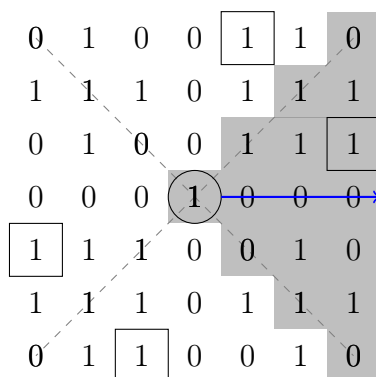


FIGURE 2.5 – Exemple de tirage pour les symétries d’axes  $x = y$  et  $x = -y$

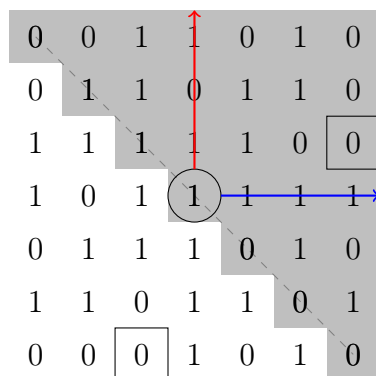


FIGURE 2.6 – Exemple de tirage pour la symétrie d’axe  $x = -y$

$$q^{2n+2}(1-q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{mult}(\sigma) q^{\text{inv}\sigma}$$

où  $\text{mult}(\sigma)$  est le nombre de sous-suites décroissantes de  $\sigma$ .

En résumé, ces résultats sont obtenus en identifiant les permutations apparaissant dans les sommes avec des exécutions de l’algorithme calculant le plus petit rectangle stable. On présentera une spécialisation de l’algorithme dans le cas de la symétrie d’axe  $x + y = 0$  (voir Section 2.3.1). Dans le cas des autres symétries, la méthode utilisée n’a pas abouti à des formules en termes de somme sur des ensembles de permutations et s’est arrêtée sur des équations  $q$ -linéaires. Cependant, dans le cas de la symétrie d’axes  $x = 0$  et  $y = 0$  (Figure 2.7), l’énumération des exécutions de l’algorithme fait apparaître la suite A173469 [Slo] comptant les permutations de taille  $n$  qui réalisent le pire cas du *Homing sort* de [EW09]. Aucune statistique n’a été trouvée afin d’exprimer la probabilité recherchée par une somme sur les permutations de poids une puissance de  $q$ . La rotation d’angle  $\pi$  (Figure 2.8) donne un résultat proche du précédent en termes d’équations. Le lien entre ces deux derniers est le même

que celui entre le cas de toutes les symétries et le cas de la rotation par un angle de  $\pi/2$  (Propositions 2.2 et 2.3) mais dans ce cas, la rotation d'angle  $\pi$  ne fait pas apparaître de permutations ni dans son résultat, ni dans son calcul. Le dernier cas de la symétrie d'axe  $y = 0$  n'a donné aucun autre résultat que le système d'équations (Figure 2.2).

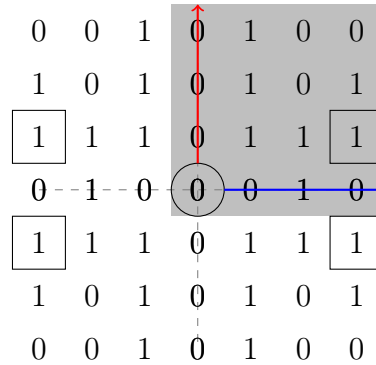


FIGURE 2.7 – Exemple de tirage pour les symétries d'axes  $x = 0$  et  $y = 0$

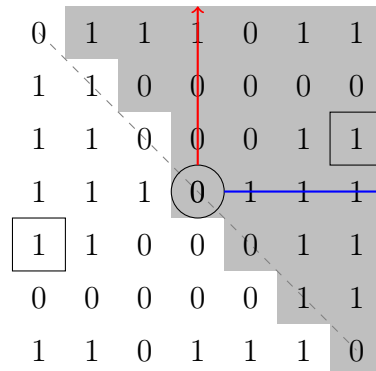


FIGURE 2.8 – Exemple de tirage pour la rotation d'angle  $\pi$

### 2.1.3 Deux statistiques et une positivité

L'étude énumérative d'un des résultats précédents permet également d'obtenir deux résultats annexes.

Le Théorème 2.4 peut être affiné en prenant en compte la position relative de l'origine au bord du plus petit rectangle stable. Les distances au bord supérieur et au bord droit peuvent être mises en relation avec deux statistiques sur les permutations dont on marque une sous-suite décroissante :

$$stat_1 := |\{i \mid \exists j \leq i, \sigma(j) \text{ est marqué}, \sigma(j) \leq \sigma(i)\}|$$

et

$$\text{stat}_2 := |\{i \mid \forall j \leq i, \sigma(j) \text{ est marqué}, \sigma(j) > \sigma(i)\}|.$$

L'étude de l'algorithme montre alors une compatibilité avec la symétrie d'axe  $x = y$  (voir [Section 2.3.4](#)) donnant une involution sur les permutations à sous-suite décroissante marquée échangeant les deux statistiques tout en préservant le nombre d'inversions.

La recherche d'une expression plus élégante pour le [Théorème 2.4](#) a mené vers un résultat plus inattendu. La probabilité calculée peut être vue comme la somme sur les permutations du nombre de sous-suites décroissantes multiplié par le poids  $q$ . On peut inverser la somme en sommant sur les sous-suites (décroissantes)  $d$  de  $(n, n-1, \dots, 2, 1)$  la somme des permutations contenant  $d$ . Chaque terme peut s'écrire comme  $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} q^{\text{inv}(\sigma)}$  où  $\mathcal{S}_n^d$  est l'ensemble des permutations contenant la sous-suite décroissante  $d$ . On a alors le résultat suivant qui sera détaillé (et affiné) en [Section 2.4](#) :

**Théorème 2.5.** *Pour tout  $n$  et  $d$  sous-suite décroissante de  $(n, \dots, 1)$ , la somme suivante est un polynôme à coefficients positives ( $q$ -positif)*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1 - q} \in \mathbb{N}[q].$$

En [Section 2.2](#) on s'intéresse aux premiers théorèmes afin d'introduire les notions qui vont être utilisées ensuite. En [Section 2.3](#) on généralise les notions précédentes pour montrer le [Théorème 2.4](#) en se basant sur un parallèle entre les exécutions de l'algorithme et des règles d'insertions sur de bonnes permutations.

## 2.2 Probabilité et statistique sur des permutations

On note  $R(\mathcal{C})$  le plus petit rectangle stable de  $\mathcal{C}$  et  $|R(\mathcal{C})|$  son demi-périmètre s'il existe.

La probabilité que le plus petit rectangle stable soit de demi-périmètre  $n \geq 2$  est notée  $\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = n]$ . La probabilité qu'il n'existe pas de rectangle stable est alors notée  $\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = +\infty]$ .

### 2.2.1 Toutes les symétries du carré

On se place dans le cas où toutes les symétries du carré sont imposées au tirage de  $\mathcal{C}$ . Alors,  $R(\mathcal{C})$  est un carré de centre l'origine. Les symétries permettent de se ramener au premier octant de la grille où on effectue les tirages avant de les reporter sur le reste de la grille. Un carré de centre l'origine

est stable si et seulement si son bord ne contient aucun 1 donc si et seulement si son bord dans le premier octant ne contient aucun 1.

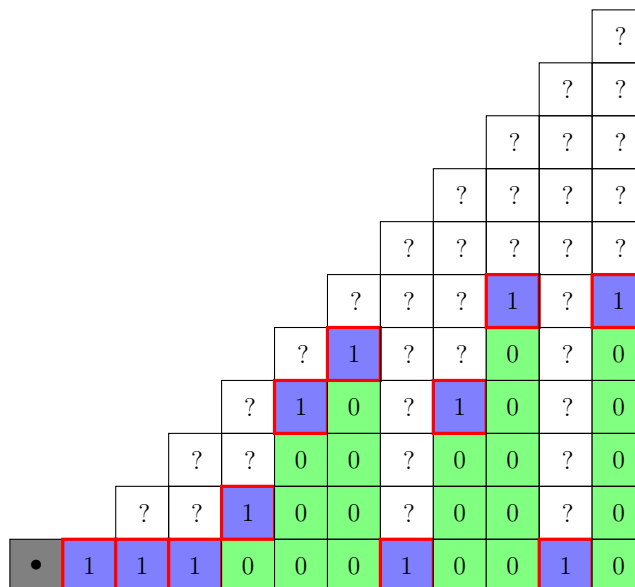


FIGURE 2.9 – Exemple de certificat dans le cas de toutes les symétries de permutation associée  $(1, 6, 5, 9, 2, 11, 8, 4, 3, 7, 10)$

Alors  $\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 4n + 2]$  est la probabilité qu'il existe au moins un 1 dans les  $n$  premiers segments de l'octant et que le  $n + 1$ -ième segment ne contienne que des 0. Donc on a directement

$$\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 4n + 2] = q^{n+1} \prod_{i=1}^n (1 - q^i).$$

Le produit  $\prod_{i=1}^n \frac{(1-q^i)}{1-q}$  est connu pour être le  $q$ -analogue de  $n!$  comptant la distribution du nombre d'inversions des permutations et s'écrit également  $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\text{inv}\sigma}$ .

On appelle *certificat* l'ensemble des positions des premiers 1 de chaque segment en les lisant de bas en haut. Le certificat est dans l'exemple de la Figure 2.9 la suite des sommets d'abscisses  $\llbracket 1, 11 \rrbracket$  et d'ordonnées  $c = (c_i)_{1 \leq i \leq 11} = (0, 0, 0, 1, 3, 4, 0, 3, 5, 0, 5)$ . La probabilité d'obtenir ce certificat est  $q^{12} \prod_{i=1}^{11} (1 - q)q^{c_i} = q^{12}(1 - q)^{11} \prod_{i=1}^{11} q^{c_i}$ . Ce certificat peut être interprété comme la table d'inversions de la permutation  $\sigma = (1, 6, 5, 9, 2, 11, 8, 4, 3, 7, 10)$  et on retrouve bien  $q^{12}(1 - q)^{11}q^{\text{inv}\sigma}$ . On construit  $\sigma$  itérativement en insérant pour  $i$  de 1 à  $n$  la valeur  $i$  à la position  $i - c_i$ , créant  $c_i$  inversions.

Cette lecture du certificat comme table d'inversions se fait pour tout certificat. Ceci nous donne le Proposition 2.2. Cette notion de certificat permet de factoriser l'expression de la probabilité sur les sommets qui ne sont pas lus et sera particulièrement utile pour les sections suivantes.

La probabilité que la stabilisation ne termine pas est quant à elle donnée par

$$\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = \infty] = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i) > 0$$

qui est la fonction d'Euler.

### 2.2.2 Symétries selon les deux diagonales $x = y$ et $x = -y$

Comme le cas précédent, le plus petit rectangle stable est un carré de centre l'origine. On se restreint ici à un quart du plan  $\{(x, y) \mid 0 \leq |y| \leq x\}$  (Figure 2.5). De la même manière, un carré de centre l'origine est stable si et seulement si son bord dans le quart de plan ne contient pas de 1. Ainsi, le plus petit rectangle stable est de demi-périmètre  $4n + 2$  si les  $n$  premiers segments verticaux du quart de plan contiennent chacun au moins un 1 et si le  $n + 1$ -ième n'en contient pas. On a donc

$$\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 4n + 2] = q^{2n+1} \sum_{i=1}^n (1 - q^{2i-1}).$$

On définit de la même manière le *certificat* comme l'ensemble des positions de premier 1 de chaque segment vertical lu de bas en haut. Les segments sont de taille  $2i - 1$  donc le nombre de certificats différents de taille  $n$  est  $(2n - 1)!!$ . Comme le cas précédent, on peut associer la lecture d'un  $c_i$  à une insertion dans  $\sigma$ . Les involutions sans point fixe de taille  $2n$  forment un sous-ensemble des permutations à  $(2n - 1)!!$  éléments. Soit  $\sigma$  une involution sans point fixe de taille  $2n + 2$ , alors  $\sigma$  se décompose comme le produit de transpositions à support disjoint

$$\left( \prod_{k=1}^n (i_k, \sigma(i_k)) \right) (\sigma(2n + 2), 2n + 2)$$

avec  $i_k < \sigma(i_k)$  pour tout  $k$ . L'involution  $\sigma$  est le résultat de l'insertion de la transposition  $(\sigma(2n + 2), 2n + 2)$  dans une involution  $\sigma'$  par décalage de toutes ses valeurs supérieures ou égales à  $\sigma(2n + 2)$  (Figure 2.10). Autrement dit,

$$\forall 1 \leq i < \sigma(2n + 2), \sigma(i) = \begin{cases} \sigma'(i) & \text{si } \sigma'(i) < \sigma(2n + 2) \\ \sigma'(i) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall \sigma(2n + 2) \leq i < 2n, \sigma(i + 1) = \begin{cases} \sigma'(i) & \text{si } \sigma'(i) < \sigma(2n + 2) \\ \sigma'(i) + 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette règle d'insertion crée  $2(2n + 2 - \sigma(2n + 2)) - 1$  inversions. La décomposition suivant cette règle d'une involution de taille  $2n + 2$  en une involution de

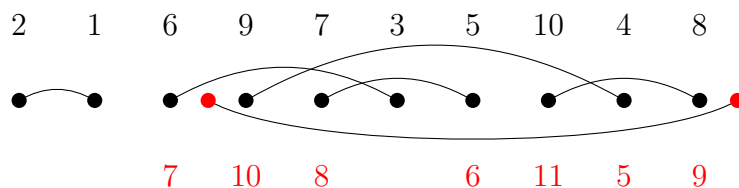


FIGURE 2.10 – Insertion sur l’involution  $(1, 2)(3, 6)(4, 9)(5, 7)(8, 10)$  en position 4

taille  $2n$  et un entier  $\sigma_{2n+2} \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$  est bijective. On peut alors construire une involution  $\sigma$  itérativement en lisant le certificat. Pour  $i$  de 1 à  $n$ , on insère la transposition  $(i - c_i, 2i)$  créant  $2(i + c_i) - 1$  inversions avec  $c_i \in \llbracket -i+1, i-1 \rrbracket$  donc  $i - c_i \in \llbracket 1, 2i-1 \rrbracket$ . Le nombre d’inversions de la permutation obtenue est alors  $2(\sum_{k=1}^n i + c_i - 1) + n$ , autrement dit, il s’agit du double de la somme du nombre de 0 précédant le premier 1 de chaque segment vertical plus  $n$ . En notant  $\sigma_c$  l’involution sans point fixe associée à  $c$ , le nombre de ces 0 pour  $c$  est égal à  $\frac{\text{Inv}\sigma_c - n}{2}$ .

La probabilité  $\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 4n + 2]$  est  $q^{2n+1} \sum_{\text{certificat } c} (1 - q) \prod_{i=1}^n q^{i+c_i-1}$ . On en déduit que cette probabilité est égale à  $q^{2n+1}(1 - q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{2n}} q^{\frac{\text{Inv}\sigma - n}{2}}$ , prouvant la [Proposition 2.3](#).

## 2.3 Symétrie d’axe $x + y = 0$

Dans ce cas, on réalise les tirages dans demi-plan supérieur délimité par  $x = -y$  ([Figure 2.6](#)). Cette symétrie nous assure que le plus petit rectangle stable est également un carré dont une diagonale est la droite  $x = -y$ . Le [Théorème 2.4](#) annonce que

$$\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 2n + 2] = q^{2n+2}(1 - q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{mult}(\sigma) q^{\text{Inv}\sigma}$$

où  $\text{mult}(\sigma)$  est le nombre de sous-suites décroissantes de  $\sigma$ . On se propose de montrer ce résultat. Dans un premier temps, on montre à partir d’un système d’équations  $q$ -linéaires que la probabilité  $\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 2n + 2]$  vérifie une récurrence linéaire de paramètre  $n$ . On remarque ensuite que cette récurrence est un  $q$ -analogue d’une récurrence vérifiée par le nombre de permutations partielles. Enfin on montre que ce  $q$ -analogue compte une extension du nombre d’inversions dans le cas des permutations partielles.

### 2.3.1 Algorithme de construction

Introduit dans les symétries précédentes, le certificat contient la position des 1 qui assurent que le plus petit rectangle stable est d’une certaine taille. Sa

construction est itérative en augmentant la taille du carré de 1 par étape dans le cas où son bord droit, un segment vertical, contient un 1 et en s'arrêtant si aucun 1 n'est lu. Pour la symétrie d'axe  $x = -y$ , le bord du carré dans la zone d'étude est constitué à chaque étape d'un bord droit et d'un bord haut. La construction est donc plus complexe.

---

**Algorithm 1** Symétrie d'axe  $x = -y$ 


---

```

1: procedure SMALLESTSTABLERECTANGLE( $\mathcal{C}$ )
2:   Let certificate the certificate
3:    $i, j \leftarrow 0$  the size of the current rectangle
4:   State A:
5:   if the right border  $\{i + 1\} \times \llbracket -i, j \rrbracket$  contains a 1 then
6:      $y \leftarrow \min\{y \in \llbracket -i, j \rrbracket \mid \mathcal{C}_{i+1,y} = 1\}$ 
7:     Add  $(i + 1, y)$  to certificate ▷ Expansion ( $\alpha$ )
8:      $i \leftarrow i + 1$ 
9:     goto State A
10:  State B:
11:  if the top border  $\llbracket -j, i \rrbracket \times \{j + 1\}$  contains a 1 then
12:     $x \leftarrow \min\{x \in \llbracket -j, i \rrbracket \mid \mathcal{C}_{x,j+1} = 1\}$ 
13:    Add  $(x, j + 1)$  to certificate ▷ Expansion ( $\beta$ )
14:     $j \leftarrow j + 1$ 
15:    if  $\mathcal{C}_{i+1,j} = 1$  then
16:      Add  $(i + 1, j)$  to certificate ▷ Expansion ( $\gamma$ )
17:       $i \leftarrow i + 1$ 
18:      goto State A
19:    goto State B
20:  State C:
21:  return certificate

```

---

Afin de calculer la taille du rectangle  $R(\mathcal{C})$ , on définit l'algorithme déterministe ([Algorithme 1](#)) travaillant sur la grille. Partant du simple rectangle  $\{0\}^2$  ne contenant que l'origine, cet algorithme lit les bords haut et droit afin de faire augmenter la taille du rectangle calculé jusqu'à atteindre  $R(\mathcal{C})$ . À chaque étape, si un 1 est lu dans un bord, par exemple le droit, le rectangle grandit sur le côté droit et sur le côté inférieur. Ne s'intéressant qu'au demi-plan  $x + y > 0$ , le rectangle restreint à ce demi-plan est alors partitionné par des segments droits ou supérieurs contenant chacun au moins un 1. La [Figure 2.11](#) montre un exemple de configuration avec ces segments en rouge ainsi que les 1 en bleu qui correspondent au certificat produit par l'[Algorithme 1](#).

L'algorithme se découpe en 3 états décrivant la connaissance du bord du rectangle en construction. À l'état *A*, aucune des valeurs du bord n'a été lue. À l'état *B*, le bord droit a été lu et ne contient que des 0. À l'état *C*, les bords





Ainsi depuis l'état  $A_{i,j}$ , on entre dans l'état  $A_{i+1,j}$  avec la probabilité  $(1 - q^{i+j+1})$ , et dans l'état  $B_{i,j}$  avec probabilité  $q^{i+j+1}$ . Depuis l'état  $B_{i,j}$ , on entre dans l'état  $B_{i,j+1}$  avec probabilité  $q(1 - q^{i+j+1})$ , dans l'état  $A_{i+1,j+1}$  avec probabilité  $(1 - q)(1 - q^{i+j+1})$ , et dans l'état  $C_{i,j}$  avec probabilité  $q^{i+j+1}$ . On en déduit les équations suivantes :

$$A_{i,j} = (1 - q^{i+j})A_{i,j-1} + (1 - q^{i+j-1})(1 - q)B_{i-1,j-1} \quad (2.1)$$

$$B_{i,j} = q(1 - q^{i+j})B_{i-1,j} + q^{i+j+1}A_{i,j} \quad (2.2)$$

$$C_{i,j} = q^{i+j+1}B_{i,j} \quad (2.3)$$

où  $A_{i,j}$  et  $B_{i,j}$  sont égaux à 0 si  $i$  ou  $j$  sont strictement négatifs et  $A_{0,0} = 1$ . En exprimant  $A_{i,j}$  à l'aide de  $B_{i,j}$  et  $B_{i-1,j}$  on obtient :

$$B_{i,j} = q(B_{i-1,j} + B_{i,j-1})(1 - q^{i+j}) - q^2B_{i-1,j-1}(1 - q^{i+j-1})^2$$

puis

$$C_{i,j} = q^2(C_{i-1,j} + C_{i,j-1})(1 - q^{i+j}) - q^4C_{i-1,j-1}(1 - q^{i+j-1})^2.$$

Cette probabilité correspond à la probabilité que l'algorithme termine sur un carré de côté de longueur  $i + j + 1$  dont le bord droit est à distance  $j$  de l'origine.

On pose  $C_n = \sum_{i=0}^n C_{i,n-i} = \mathbb{P}[|R(C)| = 2n + 2]$  la probabilité que l'algorithme se termine sur un carré de demi-périmètre  $2n + 2$ . Alors

$$C_n = 2q^2(1 - q^n)C_{n-1} - q^2(q(1 - q^{n-1}))^2C_{n-2}$$

où  $C_0 = q^2$  et  $C_1 = 2q^4(1 - q)$ . Le polynôme  $C_n$  peut se factoriser  $(1 - q)^n$  correspondant aux  $n$  valeurs 1 lues :  $C_n = q^{2n+2}(1 - q)^n P_n$  où  $P_n$  satisfait

$$P_n = 2\frac{1 - q^n}{1 - q}P_{n-1} - \left(\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}\right)^2 P_{n-2} \quad (2.4)$$

### 2.3.3 Permutations partielles et règles d'insertion

La récurrence (2.4) est un  $q$ -analogue de la récurrence donnée par Borwein, Rankin and Renner [BRR89] que satisfait le nombre de permutations partielles de  $\{1 \dots n\}$ .

$$|R_n| = 2n|R_{n-1}| - (n - 1)^2|R_{n-2}| \quad (2.5)$$

où  $R_n$  est l'ensemble des permutations partielles de  $\{1 \dots n\}$  et  $|R_0| = 1$  et  $|R_1| = 2$ . Une permutation partielle de  $\{1 \dots n\}$  est une injection d'un sous-ensemble de  $\{1 \dots n\}$  dans  $\{1 \dots n\}$ .

On propose ici d'affiner la récurrence (2.5) afin d'obtenir la récurrence (2.4) en utilisant une statistique sur les permutations partielles. On choisit donc d'étendre la statistique du nombre d'inversions aux permutations de la manière

suivante. On utilise une bijection naturelle entre les permutations partielles et les permutations à sous-suite décroissante marquée. En effet, on peut compléter de manière bijective une permutation partielle en une telle permutation en complétant les valeurs sans images par les valeurs sans antécédent marquées et de manière décroissante. Par exemple, en notant  $\sigma = ?26?1?$  la permutation partielle  $\{2 \mapsto 2, 3 \mapsto 6, 5 \mapsto 1\}$  où les points d'interrogation indiquent les valeurs sans image, on complète  $\sigma$  par les valeurs manquantes  $\{3, 4, 5\}$  en les marquant :  $\underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$ . On confondra une permutation partielle et la permutation à sous-suite décroissante marquée associée et on usera de la notation  $\sigma = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$ . Alors, le nombre d'inversions d'une permutation partielle  $\sigma$  est le nombre d'inversions de la permutation à sous-suite décroissante marquée correspondante. Ainsi, la permutation partielle  $\sigma = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$  a 10 inversions.

Le comptage des permutations partielles par [BRR89] se base sur une partition des permutations partielles en l'ensemble  $T_n$  des permutations partielles non définies en 1 et  $R_n \setminus T_n$ . Dans la suite,  $R_n$  désignera l'ensemble des permutations à sous-suite décroissante marquée et  $T_n$  le sous-ensemble de ces permutations dont le premier élément est marqué. On affine la preuve qui en découle en construisant  $R_n$  depuis  $R_{n-1}$  et en suivant dans le calcul le nombre d'inversions à l'aide de trois règles d'insertion. On note  $r_n$  et  $t_n$  les  $q$ -analogues de  $|R_n|$  et  $|T_n|$  définis par

$$r_n = \sum_{\sigma \in R_n} q^{\text{inv}(\sigma)}$$

and

$$t_n = \sum_{\sigma \in T_n} q^{\text{inv}(\sigma)}.$$

Par exemple,  $r_2 = 3 + 4q$  et  $t_2 = 1 + 2q$ .

Montrons dans un premier temps le lemme suivant.

**Lemme 2.6.** Soit  $n \geq 0$ , alors  $r_{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}r_n + q^n r_n + \frac{1-q^n}{1-q}t_n$ .

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in R_n$  une permutation à sous-suite décroissante marquée. On définit les règles d'insertion  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  sur les permutations à sous-suite décroissante marquée de la manière suivante.

$\pi_1$  Soit  $\sigma \in R_n$  et  $k \in \{1 \dots n + 1\}$ , on décale les valeurs supérieures ou égales à  $k$  de  $\sigma$  et on insère la valeur  $k$  en première position (Figure 2.12).

**Exemple:**  $\sigma = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$ , la règle  $\pi_1$  pour  $k = 2$  donne  $\underline{2}637\underline{5}1\underline{4}$ .

$\pi_2$  Soit  $\sigma \in R_n$ . On insère la valeur marquée  $\underline{n+1}$  en première position (Figure 2.13).

**Exemple:**  $\sigma = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$ , la règle  $\pi_2$  donne  $\underline{6}5\underline{2}64\underline{1}3$ .

$\pi_3$  Soit  $\sigma \in T_n$  et  $k \in \{2 \dots n + 1\}$ , on insère  $n + 1$  en position  $k$  dans  $\sigma$  (Figure 2.14).

**Exemple:**  $\sigma = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$ , la règle  $\pi_3$  pour  $k = 4$  donne  $\underline{5}26\underline{7}4\underline{1}3$ .

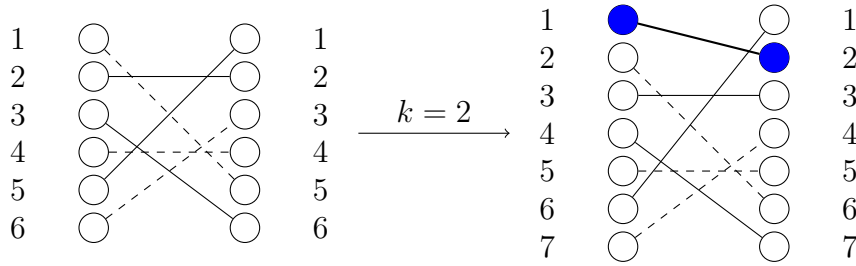


FIGURE 2.12 – Règle d'insertion  $\pi_1$

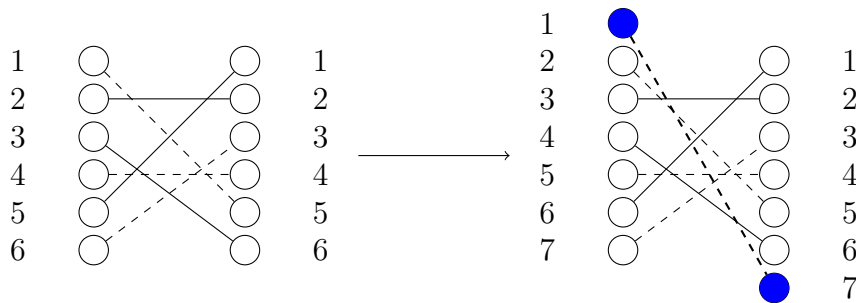


FIGURE 2.13 – Règle d'insertion  $\pi_2$

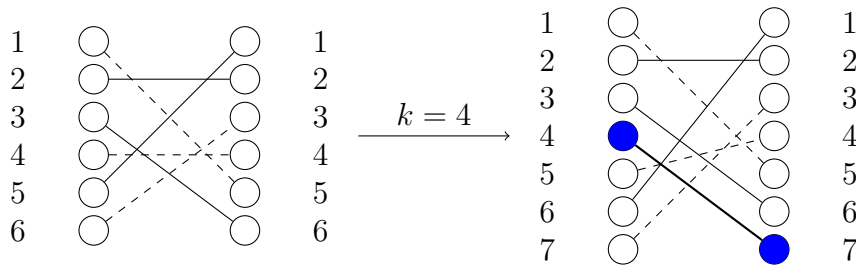


FIGURE 2.14 – Règle  $\pi_3$

La règle  $\pi_1$  est donc une fonction de  $R_n \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  dans  $R_{n+1} \setminus T_{n+1}$  et tout élément de  $R_{n+1} \setminus T_{n+1}$  se décompose en un unique couple de  $R_n \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  déterminé par la valeur  $\sigma_1$ . La règle  $\pi_2$  est une fonction de  $R_n$  dans  $\{\sigma \in T_{n+1} \mid \sigma_1 = \underline{n+1}\}$  et on a naturellement la décomposition inverse. La règle  $\pi_3$  est une fonction de  $T_n \times \llbracket 2, n+1 \rrbracket$  dans  $\{\sigma \in T_{n+1} \mid \sigma_1 \neq \underline{n+1}\}$ . Les trois règles sont donc bijectives et leurs codomaines forment une partition de  $R_{n+1}$ . On a donc la relation  $|R_{n+1}| = (n+1)|R_n| + |R_n| + n|T_n|$ .

De plus, on peut suivre le nombre d'inversions créées en appliquant chaque règle. Celles-ci correspondent aux croisements ajoutés dans les Figures 2.12 à 2.14. La règle  $\pi_1$  de paramètre  $k$  ajoute  $k - 1$  inversions. La règle  $\pi_2$  crée  $n$

inversions. La règle  $\pi_3$  de paramètre  $k$  ajoute  $n + 1 - k$  inversions. On a donc

$$r_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} r_n + q^n r_n + \sum_{k=2}^{n+1} q^{n+1-k} t_n \quad (2.6)$$

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} r_n + q^n r_n + \frac{1 - q^n}{1 - q} t_n \quad (2.7)$$

□

En remarquant que les codomains de  $\pi_2$  et  $\pi_3$  forment une partition de  $T_{n+1}$ , on montre de la même manière le lemme suivant.

**Lemme 2.7.** *Soit  $n \geq 0$ , alors  $t_{n+1} = q^n r_n + \frac{1-q^n}{1-q} t_n$ .*

En utilisant le [Lemme 2.6](#) au rang  $n$  et  $n - 1$  et le [Lemme 2.7](#) au rang  $n - 1$  on obtient la relation de récurrence attendue :

$$r_{n+1} = 2 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} r_n - \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)^2 r_{n-1}.$$

Donc  $P_n$  et  $r_n$  satisfont la même récurrence et initialisation ce qui conclut la preuve du [Théorème 2.4](#).

### 2.3.4 Bijection entre permutations et certificats

On peut construire une bijection de l'ensemble des certificats vers l'ensemble des permutations partielles en appliquant les règles d'insertion  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  suivant les pas de l'[Algorithme 1](#). On associe à la transition  $A_{i,j} \rightarrow A_{i+1,j}$  la règle  $\pi_3$  où le paramètre  $k$  correspond à  $n + 1$  moins le nombre de 0 lus avant le premier 1 dans le cas où ce nombre est inférieur ou égale à  $n - 1$ , et sinon la règle  $\pi_2$ . Ainsi, le nombre de nouvelles inversions correspond au nombre de 0. De même, on associe à la transition  $B_{i,j} \rightarrow B_{i,j+1}$  la règle  $\pi_1$  de paramètre  $k$  le nombre de 0 plus 1. Enfin, la transition  $B_{i,j} \rightarrow A_{i+1,j+1}$  augmentant deux fois la taille du rectangle, on lui associe la composition de règles  $\pi_2 \circ \pi_1$  avec  $\pi_1$  de paramètre  $k$  le nombre de 0 lus sur le bord supérieur incrémenté de 1. Cette correspondance permet de lier le nombre d'inversions de la permutation partielle obtenue avec le nombre de 0 lus par l'algorithme. En notant  $\sigma_c$  la permutation partielle associée avec un certificat  $c$ ,

$$\sum_{\text{certificat } c} \mathbb{P}[c] = q^{2n+2} (1 - q)^n \sum_{\text{certificat } c} q^{\text{inv}\sigma_c}.$$

On s'intéresse à  $\text{stat}_1 := |\{i \mid \exists j \leq i, \sigma(j) \text{ est marqué}, \sigma(j) \leq \sigma(i)\}|$  qui compte le nombre de positions telles qu'il existe un élément le précédant plus petit que sa valeur marquée. L'application de  $\pi_1$  laisse invariante cette

statistique. L'application de  $\pi_2$  et  $\pi_3$ , qui correspond à une croissance vers la droite du rectangle, l'augmente exactement de 1. Donc  $stat_1$  compte le nombre de croissances vers la droite du rectangle. Ainsi, étant donné un certificat  $c$  de rectangle de paramètre  $(i, j)$  et  $\sigma_c$  la permutation associée,  $stat_1(\sigma_c) = i$ . De plus la statistique  $stat_2 := |\{i \mid \forall j \leq i, \sigma(j) \text{ est marqué, } \sigma(j) > \sigma(i)\}|$  est égale à  $n - stat_1$  et  $stat_2(\sigma_c) = j$ . Ainsi, les deux statistiques calculent la distance de l'origine aux bords droit et supérieur.

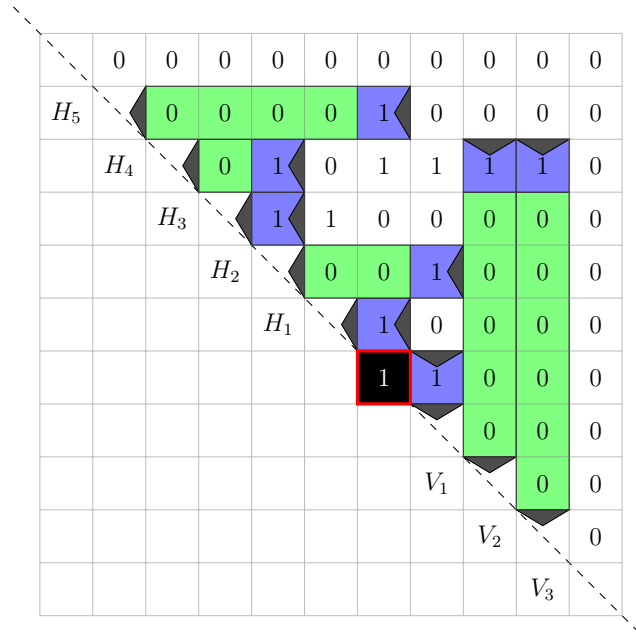


FIGURE 2.15 – Symétrie des lectures

Dans l'Algorithme 1, on a choisi de lire le bord droit puis le bord supérieur. On peut réaliser le même algorithme en échangeant cet ordre. Ceci revient à prendre le symétrique de la configuration  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $x = y$ . On obtient le même rectangle et les premiers 1 de des segments horizontaux et verticaux sont les mêmes. Comme deux segments ne peuvent pas partager le même premier 1, l'algorithme lit les mêmes segments donc les mêmes valeurs et produit alors le même certificat à permutation près. Par exemple sur la Figure 2.15, l'algorithme lit les segments dans l'ordre  $V_1, H_1, H_2, H_3, H_4, V_2, V_3$  et  $H_5$ . En traitant le bord supérieur avant le bord droit, les segments sont lus dans l'ordre  $H_1, V_1, H_2, H_3, H_4, H_5, V_2$  et  $V_3$ . En utilisant la bijection précédente sur ces deux lectures possibles d'un même certificat, on obtient deux permutations partielles ce qui décrit une involution. De plus, ces deux lectures échangent le rôle de  $i$  et  $j$ , donc l'involution échange les statistiques  $stat_1$  et  $stat_2$  tout en conservant le nombre d'inversions. En d'autres termes, on a la proposition suivante.

**Proposition 2.8.** Soit  $n > 0$ , on pose  $F(q, x, y) = \sum_{\sigma \in R_n} q^{\text{inv}(\sigma)} x^{\text{stat}_1(\sigma)} y^{\text{stat}_2(\sigma)}$ .

Alors  $F(q, x, y) = F(q, y, x)$ .

## 2.4 Sous-suite décroissantes et $q$ -positivité

Dans cette section, on présente un résultat apparu dans la recherche d'une formule simple pour la probabilité  $\mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 2n + 2]$  dans le cas de la symétrie d'axe  $x + y = 0$ .

Soit  $s_n = (n, n - 1, \dots, 1)$  le mot décroissant à  $n$  éléments. Soit deux mots  $u$  et  $v$ , on dit que  $u$  est un sous-mot (ou sous-suite) de  $v$  si on peut l'obtenir depuis  $v$  en supprimant des lettres. On le note  $u \prec v$ .

On utilise les notations classiques sur les  $q$ -analogues :

$$[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

et

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q.$$

On reformule la probabilité donnée par le [Théorème 2.4](#) en échangeant les sommes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|R(\mathcal{C})| = 2n + 2] &= q^{2n+2} (1 - q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{\substack{d \prec s_n \\ d \prec \sigma}} q^{\text{inv}\sigma} \\ &= q^{2n+2} (1 - q)^n \sum_{d \prec s_n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ d \prec \sigma}} q^{\text{inv}\sigma}. \end{aligned}$$

Pour  $d \prec s_n$ , on pose  $\mathcal{S}_n^d$  l'ensemble de permutations  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  telles que  $d \prec \sigma$ . Pour  $d = (i + |d|, i + |d| - 1, \dots, i + 1)$  un intervalle,  $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} q^{\text{inv}\sigma}$  se factorise et

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} q^{\text{inv}\sigma} = q^{|d|(|d|-1)/2} \frac{[n]_q!}{[|d|]_q!}.$$

Ce résultat est l'application de [[BW89](#), Theorem 1.1] sur un cas particulier de forêts étiquetées. Björner et Wachs présentent une extension du nombre d'inversions aux forêts étiquetées en termes d'extensions linéaires d'ordres partiels. Ici, le sous-mot  $d$  décrit cet ordre partiel.

Dans le cas général où  $d$  n'est pas un intervalle, il n'y pas de formule connue simple comme la précédente cependant le [[BW89](#), Theorem 1.2] propose une formule semblable dans le cas général faisant intervenir l'indice du major à la place du nombre d'inversions :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} q^{\text{maj}\sigma} = q^{|d|(|d|-1)/2} \frac{[n]_q!}{[|d|]_q!}.$$

Afin d'espérer une formule plus simple pour le calcul de la probabilité, ceci suggère de considérer

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} q^{\text{inv}\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} q^{\text{maj}\sigma} - \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} (q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}) \right).$$

Ainsi la somme s'exprime comme la différence d'un terme d'expression simple avec celle d'un autre terme d'expression possiblement plus simple que la somme originale.

Le terme  $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} (q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma})$  est un polynôme dont 1 est une racine donc il se factorise par  $(1 - q)$ . On a alors le résultat suivant.

**Théorème 2.9.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \prec s_n$ , alors la somme suivante est un polynôme à coefficients entiers positifs :*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1 - q}.$$

Cette positivité est inattendue et prometteuse car elle laisse suggérer une certaine structure sur la somme et donc une formule simple même si à ce stade aucune simplification n'a été trouvée.

Afin de montrer ce résultat, on utilise des statistiques intermédiaires sur les permutations pour interpoler la différence entre inv et maj. Pour cela, on choisit les statistiques introduits par Kadell [WK85] qui sont des nombres d'inversions pondérées. Soit  $W = (w_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice triangulaire supérieure, [WK85] définit le nombre d'inversions pondérées par  $W$  la statistique  $\text{inv}_W(\sigma)$  par

$$\text{inv}_W(\sigma) = \sum_{(i,j) \in \text{Inv}(\sigma)} w_{i,j}$$

où

$$\text{Inv}(\sigma) = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

est l'ensemble des inversions de  $\sigma$ . On définit pour  $1 \leq k < l \leq n$ , la matrice  $W^{(k,l)} = (w_{i,j}^{(k,l)})$  où

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{(k,l)} &= 1 \text{ pour } 1 \leq i < j < l \\ w_{i,i+1}^{(k,l)} &= i \text{ pour } l < i < n \\ w_{i,l}^{(k,l)} &= 1 \text{ pour } k < i < l \\ w_{k,l}^{(k,l)} &= k \text{ et} \\ w_{i,j}^{(k,l)} &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

La matrice  $W^{(k,l)}$  vérifie [WK85][Corollary 2] donc  $\text{inv}_{W^{(k,l)}}$  est une statistique Mahonienne, elle est équidistribuée avec le nombre d'inversions  $\text{inv}$ . On note que  $\text{inv}_{W^{(1,n)}} = \text{inv}$  et  $\text{inv}_{W^{(1,2)}} = \text{maj}$ . Pour  $1 < l < n$ ,  $W^{(1,l)} = W^{(l,l+1)}$ . Donc on peut interpoler la somme par une somme télescopique

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1 - q} = \sum_{1 < k < l \leq n} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{inv}_{W^{(k,l)}}(\sigma)} - q^{\text{inv}_{W^{(k-1,l)}}(\sigma)}}{1 - q}.$$

La clé de la preuve est de montrer la positivité sur chacun des termes du membre droit (cf. [Lemme 2.11](#)).

**Lemme 2.10.** *Pour tout  $\sigma$  et pour tout  $1 < k < l \leq n$ ,*

$$\text{inv}_{W^{(k,l)}}(\sigma) - \text{inv}_{W^{(k-1,l)}}(\sigma) = \begin{cases} (k-1) & \text{si } \sigma(k-1) < \sigma(l) < \sigma(k) \\ -(k-1) & \text{si } \sigma(k-1) > \sigma(l) > \sigma(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

*Démonstration.* Les matrices  $W^{(k,l)}$  et  $W^{(k-1,l)}$  ne diffèrent que sur leurs coefficients en colonne  $l$  et lignes  $k$  et  $k-1$ . Donc

$$\begin{aligned} & \text{inv}_{W^{(k,l)}}(\sigma) - \text{inv}_{W^{(k-1,l)}}(\sigma) \\ &= \begin{cases} k-1 & \text{si } \sigma(k) > \sigma(l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} - \begin{cases} k-1 & \text{si } \sigma(k-1) > \sigma(l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Soit  $1 < k < l \leq n$ , et  $P = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} P_\sigma$  où

$$P_\sigma = \frac{q^{\text{inv}_{W^{(k,l)}}(\sigma)} - q^{\text{inv}_{W^{(k-1,l)}}(\sigma)}}{1 - q}.$$

On partitionne  $\mathcal{S}_n^d$  en trois parts  $\mathcal{S}^+$ ,  $\mathcal{S}^-$  et  $\mathcal{S}^0$  suivant la contribution positive, négative ou nulle de  $P_\sigma$  dans la somme. D'après le [Lemme 2.10](#),

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^+ &= \{\sigma \in \mathcal{S}_n^d \mid \sigma(k-1) > \sigma(l) > \sigma(k)\}, \\ \mathcal{S}^- &= \{\sigma \in \mathcal{S}_n^d \mid \sigma(k-1) < \sigma(l) < \sigma(k)\}, \\ \mathcal{S}^0 &= \{\sigma \in \mathcal{S}_n^d \mid \sigma(k-1), \sigma(k) < \sigma(l) \text{ or } \sigma(k-1), \sigma(k) > \sigma(l)\}. \end{aligned}$$

Soit  $1 < k < l \leq n$ , on définit l'involution  $\phi_{k,l}$  sur les permutations définie par  $\phi_{k,l}(\sigma) = \sigma \circ (k-1, k)$  si  $\sigma(k-1) < \sigma(l) < \sigma(k)$  ou  $\sigma(k) < \sigma(l) < \sigma(k-1)$  et  $\phi_{k,l}(\sigma) = \sigma$  sinon. Cette involution est présentée dans [WK85] et est également un brique de base de la bijection de Foata [FS78] qui échange les statistiques  $\text{inv}$  et  $\text{maj}$ .



**Lemme 2.11.** Soit  $1 < k < l \leq n$ ,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{inv}_W(k,l)(\sigma)} - q^{\text{inv}_W(k-1,l)(\sigma)}}{1 - q}$$

est un polynôme à coefficients entiers positifs.

*Démonstration.* On note  $\sigma^* = \phi_{k,l}(\sigma)$ . Ceci est un cas particulier de [WK85][Lemma 1] indiquant que pour tout  $\sigma$  on a  $\text{inv}_W(k,l)(\sigma) = \text{inv}_W(k-1,l)(\sigma^*)$ . Soit  $\sigma \in \mathcal{S}^-$ , alors  $\sigma(k-1) < \sigma(k)$  donc  $\sigma(k-1)$  et  $\sigma(k)$  ne sont pas les deux à la fois dans  $d$ . Donc, si  $\sigma$  contient  $d$  alors  $\sigma^*$  contient également  $d$  et  $\sigma^*(k) < \sigma^*(l) < \sigma^*(k-1)$  donc  $\sigma^* \in \mathcal{S}^+$ . Donc

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{inv}_W(k,l)(\sigma)} - q^{\text{inv}_W(k-1,l)(\sigma)}}{1 - q} = \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}^+} P_\sigma}_{q\text{-positif}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}^-} P_\sigma}_{q\text{-negatif}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}^0} P_\sigma}_{=0} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}^+ \\ \sigma^* \notin \mathcal{S}^-}} P_\sigma.$$

□

*Preuve du Théorème 2.9.*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1 - q} = \sum_{1 < k < l \leq n} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^d} \frac{q^{\text{inv}_W(k,l)(\sigma)} - q^{\text{inv}_W(k-1,l)(\sigma)}}{1 - q} \in \mathbb{N}[q].$$

□

Les involutions  $\phi_{k,l}$  utilisées pour le Lemme 2.11 préservent les descentes de l'inverse, c'est-à-dire l'ensemble des positions où l'inverse d'une permutation décroît  $\{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i+1)\}$ . Le théorème peut être affiné en ne sommant que sur les permutations partageant les mêmes descentes de l'inverse.

On appelle *ordre partiel décroissant*  $\mathcal{P}$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  un ordre partiel  $\prec_{\mathcal{P}}$  tel que pour tout  $i, j$ ,  $i \prec_{\mathcal{P}} j \Rightarrow i > j$ . Alors la preuve est correcte en généralisant la contrainte de sous-suite décroissante à tout ordre partiel décroissant. En effet, pour tout  $1 < k < l \leq n$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , avec  $\sigma \xrightarrow{\phi_{k,l}} \sigma^*$ , l'ensemble d'inversions  $\text{Inv}(\sigma^*)$  est la différence symétrique de  $\text{Inv}(\sigma)$  et  $\{(k-1, k)\}$ . Donc pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}^-$ ,  $\text{Inv}(\sigma) \subset \text{Inv}(\sigma^*)$ . On appelle extension linéaire de  $\mathcal{P}$  une permutation  $\sigma$  telle que pour tout  $i, j$ ,  $i \prec_{\mathcal{P}} j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$ . Alors on a la généralisation du Théorème 2.9 suivante.

**Théorème 2.12.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}$  un ordre partiel décroissant sur  $\{1, \dots, n\}$ , alors la somme suivante est un polynôme à coefficients entiers positifs :

$$\sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1 - q}$$

où  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  désigne l'ensemble des extensions linéaires de  $\mathcal{P}$ .

## 2.5 Extension de la méthode à d'autre type de réseaux

L'**Algorithme 1** qui construit le plus petit rectangle stable s'appuie sur un automate à 3 états représentant la connaissance du bord du point de vue de l'algorithme. Ce procédé peut être utilisé pour les cas plus simples dont il s'inspire mais également généralisé d'une part aux autres symétries et aussi à d'autres types de réseaux.

En effet, dans le cas général sans symétrie, la connaissance du bord du rectangle se décrit par la connaissance de chaque segment qui compose le bord, lu ne contenant que des 0 ou non lu. On a donc dans ce cas,  $2^4 = 16$  états possibles produisant un système à 16 équations  $q$ -linéaires. Chaque transition se traduit soit par la lecture d'un bord ne contenant que des 0 ( $A_{i,j} \rightarrow B_{i,j}$  dans la **Section 2.3**), soit par une croissance du rectangle dans une ( $A_{i,j} \rightarrow A_{i+1,j}$ ) ou plusieurs directions ( $B_{i,j} \rightarrow A_{i+1,j+1}$ ). Lors d'une croissance selon un côté (droit par exemple), la longueur des segments des côtés adjacents (haut et bas) augmente. Bien que la grille induise une forme rectangulaire, ce procédé peut être étudié sur des polygones à nombre de côtés arbitraire, avec ou sans symétrie. On peut alors appliquer une version généralisée l'algorithme en oubliant le réseau carré. On obtient alors par exemple le système suivant pour un triangle.

$$\begin{aligned}
 O_{i_1, i_2, i_3} &= q^{i_1+i_2+1} G_{i_1, i_2, i_3} \\
 G_{i_1, i_2, i_3} &= q^{i_2+i_3+1} E_{i_1, i_2, i_3} + -(q^{i_1+i_2+1} - 1)q^2 G_{i_1, i_2, i_3-1} + q^{i_1+i_3+1} C_{i_1, i_2, i_3} \\
 E_{i_1, i_2, i_3} &= (1 - q^{i_2+i_3+1})q E_{i_1-1, i_2, i_3} + (1 - q)(1 - q^{i_1+i_2})q^2 G_{i_1-1, i_2, i_3-1} \\
 C_{i_1, i_2, i_3} &= (1 - q^{i_1+i_3+1})q C_{i_1, i_2-1, i_3} \\
 &\quad + q^{i_2+i_3+1} A_{i_1, i_2, i_3} + (1 - q)(1 - q^{i_1+i_2})q^2 G_{i_1, i_2-1, i_3-1} \\
 A_{i_1, i_2, i_3} &= (1 - q^{i_2+i_3})(1 - q)E_{i_1-1, i_2-1, i_3} \\
 &\quad + (2(1 - q)^2(1 - q^{i_1+i_2} - 1)q + (1 - q)^2(1 - q^{i_1+i_2-1})) G_{i_1-1, i_2-1, i_3-1} \\
 &\quad + (1 - q^{i_2+i_3+1})A_{i_1-1, i_2, i_3} + (1 - q)(1 - q^{i_1+i_3})C_{i_1-1, i_2-1, i_3}
 \end{aligned}$$

Les expérimentations ne sont cependant pas concluantes et aucun lien avec les permutations n'a été détecté.



### 3. Reconnaissance de configurations récurrentes par un automate fini

Dans le cadre du modèle du tas de sable défini pour tout graphe, on restreint l'étude à une demi-bande de hauteur  $H$  induite par les sommets  $\Lambda_H = \mathbb{Z} \times \llbracket 1, H \rrbracket$  dans la grille  $\mathbb{Z}^2$ . Ce graphe est également le produit cartésien sur les graphes du chemin infini  $\mathbb{Z}$  et du chemin fini  $\llbracket 1, H \rrbracket$ . Ainsi, dans le graphe  $\Lambda_H$ , deux sommets  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  sont adjacents si  $x_1 = x_2$  et  $y_1 = y_2 \pm 1$  ou bien si  $x_1 = x_2 \pm 1$  et  $y_1 = y_2$ . On appelle une *colonne* de  $\Lambda_H$  un ensemble  $C_i$  des sommets  $\{(i, y) \mid y \in \llbracket 1, H \rrbracket\}$  ainsi que leurs arêtes incidentes pour un certain  $i \in \mathbb{Z}$ . On dira que  $C_i$  est la colonne  $i$  de  $\Lambda_H$ . J'arai et Lyons [JL07] se sont intéressés à la mesure stationnaire  $\mu_{I \times G}$  sur la chaîne de Markov des configurations stables des graphes  $I \times G$  où  $G$  est un graphe connexe fini à au moins deux sommets et  $I$  un intervalle fini de  $\mathbb{Z}$  et auxquels on ajoute un puits  $P$  adjacent aux sommets de la première et de la dernière colonnes du graphe (voir Figure 3.1). Étant donnée une configuration récurrente comme sur la Figure 3.1, on peut définir l'ensemble des sommets qui s'éboulent par la gauche (en vert et jaune) comme l'ensemble des sommets qui s'éboulent après l'éboulement du puits quand on interdit le transfert de grains du puits vers la dernière colonne (à droite) et inversement l'ensemble des sommets qui s'éboulent par la droite (en rouge et jaune) quand on interdit le transfert de grains du puits vers la première colonne. Alors, la position de la zone intermédiaire jaune et grise est uniforme sur les configurations récurrentes. Ils s'intéressent aux configurations récurrentes de ce graphe et isolent deux sous-types de récurrentes, droite et gauche, qui se définissent également sur  $\mathbb{Z} \times G$  et montrent que les deux seules mesures ergodiques d'entropie maximale sur les configurations récurrentes de  $\mathbb{Z} \times G$  sont les mesures uniformes  $\mu_{\mathbb{Z} \times G}^L$  et  $\mu_{\mathbb{Z} \times G}^R$  respectivement sur les configurations récurrentes à gauche et à droite. Ces deux mesures stationnaires sont les limites faibles des mesures uniformes sur les configurations récurrentes à gauche et à droite sur  $I \times G$  quand  $I \rightarrow \mathbb{Z}$ .

On définit formellement une configuration récurrente à gauche de la manière suivante. Soit  $V \subset \mathbb{Z} \times G$ , si  $(\mathbb{Z} \times G) \setminus V$  a une composante connexe infinie

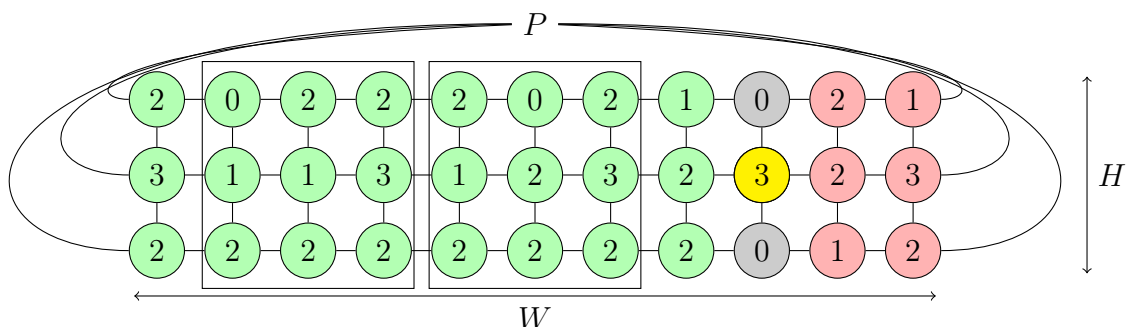


FIGURE 3.1 – Configuration sur le graphe  $\llbracket 1, 11 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket$  utilisé par Járai et Lyons

complète à gauche (c'est à dire contenant  $(-\infty, m] \times G$  pour un certain  $m$ ), on note  $V^-$  cette composante. On définit la frontière gauche de  $V$  par  $\partial_0^L V := \{v \in V \mid v \text{ a un voisin dans } V^-\}$ .

**Définition 3.1** ([JL07]). *Soit  $V \subset \mathbb{Z} \times G$  un ensemble fini. Une configuration stable  $\eta$  du graphe  $\mathbb{Z} \times G$  est dite récurrente à gauche sur  $V$  s'il existe une numérotation  $v_1, \dots, v_{|V|}$  des sommets de  $V$  telle que :*

- (i)  $v_i \in \partial_0^L(V \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\})$  pour  $1 \leq i \leq |V|$
- (ii)  $\eta(v_i) > \deg(v_i) - |\{u \in (V \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\})^- \mid u \sim v_i\}|$ .

*Une configuration stable de  $\mathbb{Z} \times G$  est dite récurrente à gauche si pour tout ensemble fini  $V \subset \mathbb{Z} \times G$ , la configuration stable restreinte à  $V$  est récurrente à gauche.*

Dans le cas fini  $I \times G$ , la récurrence à gauche peut se traduire sur la **Figure 3.1**. Une configuration récurrente de  $I \times G$  est récurrente à gauche si son ensemble de sommet s'éboule sans l'ajout de grains par la droite en éboulant les puits (sommets verts et jaunes) atteint la dernière colonne du graphe.

Dans le cas infini, cette définition peut aussi être exprimée en termes d'éboulements de la façon suivante illustrée par la **Figure 3.2**. Une configuration stable de  $\mathbb{Z} \times G$  est récurrente à gauche si pour tout ensemble fini de sommets  $V$  (en gris), l'éboulement forcé de  $V^-$  (en vert) entraîne l'éboulement des sommets de  $V$  en suivant le processus de stabilisation avec la règle supplémentaire suivante : si un sommet non éboulé de  $\mathbb{Z} \times G \setminus V$  reçoit un grain par un sommet de  $V$ , alors on force l'éboulement de la composante connexe de  $\mathbb{Z} \times G \setminus V$  le contenant. Cela revient à fusionner les sommets de  $V^-$  avec le puits en conservant le nombre d'arêtes incidentes à chaque sommet de  $V$  et à assigner un nombre maximal de grains aux sommets de  $\mathbb{Z} \times G \setminus (V \cup V^-)$  (en rouge). Sur la **Figure 3.2**, la configuration est bien récurrente à gauche sur l'ensemble  $V$  grisé. Il suffit par exemple de numérotter les sommets de gauche à droite pour vérifier la **Définition 3.1**.

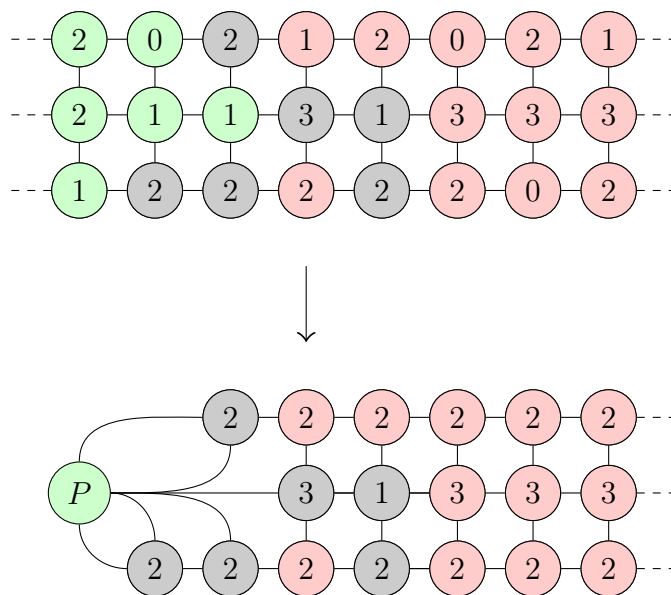


FIGURE 3.2 – Définition de récurrence à gauche pour l'ensemble  $V$  en gris

Les mesures limites  $\mu_G^L$  et  $\mu_G^R$  peuvent être alors codées de manière Markovienne. En effet, Járai et Lyons montrent que les configurations récurrentes à gauche des graphes  $I \times G$  sont reconnues par un automate fini dont peuvent être extraites ces mesures limites. La description de l'automate repose sur le suivi d'un éboulement colonne par colonne traduisant le critère de Dhar en bloquant le traitement des sommets à partir de la colonne en cours de lecture. On s'intéresse dans ce chapitre à la construction effective d'un automate dans le cas du graphe  $\Lambda_H$  mais avec moins d'états que celui de [JL07] dont voici la description.

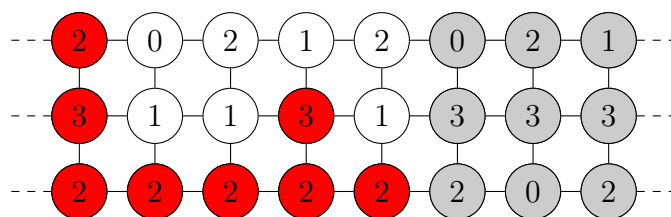


FIGURE 3.3 – Éboulement bloqué à la 6e colonne

Un état  $e$  de cet automate capture dans une fonction  $f_e$  l'information suffisante pour connaître, étant donné un ensemble de sommets  $X \subset G$  qui s'éboulent dans la colonne suivante, l'ensemble des sommets  $f_e(X) \in G$  de la colonne qui s'éboulent lors de la stabilisation en bloquant l'éboulement d'autres sommets se trouvant à sa droite. Pour  $G = \llbracket 1, H \rrbracket$ , chaque état  $e$  est codé par le nombre initial (stable) de grains par sommet  $v_e : G \rightarrow \mathbb{N}$  et une fonction  $f_e$  de l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, H \rrbracket$  dans lui-même. On peut remarquer que

toute fonction  $f_e$  sera croissante :  $X \subset Y \Rightarrow f_e(X) \subset f_e(Y)$ . En effet, si on éboule les sommets d'un ensemble  $X$  dans la colonne de droite, alors les sommets de l'ensemble  $f_e(X)$  s'éboulent, donc si on éboule les sommets de  $Y \supset X$ , on éboulera au moins les sommets de  $f_e(X)$ .

Par exemple, l'état associé à la 5<sup>e</sup> colonne de la Figure 3.3 sera décrit par les nombres de grains  $(2, 1, 2)$  et par la fonction  $f$  définie par les associations suivantes :  $\emptyset \mapsto \{1\}$ ,  $\{1\} \mapsto \{1\}$ ,  $\{2\} \mapsto \{1, 2, 3\}$ ,  $\{3\} \mapsto \{1, 2, 3\}$ . Si dans la 6<sup>e</sup> colonne, on n'éboule aucun sommet ou seulement le sommet de la première ligne, alors seul le sommet de la première ligne 1 s'éboule. Si on éboule le sommet de la 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> ligne, alors toute la 6<sup>e</sup> colonne s'éboule lors de la stabilisation. On peut ensuite projeter cet automate sur l'alphabet des colonnes ce qui donne l'automate de la Figure 3.4 pour  $H = 2$ .

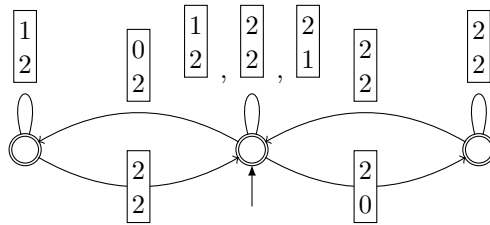


FIGURE 3.4 – Automate pour  $H = 2$

Si Jarai et Lyons ne s'intéressent pas à la taille de l'automate, on déduit néanmoins que le nombre d'états peut être majoré naïvement par  $4^H \cdot (2^H)^{2^H}$  dans le cas de  $G = \llbracket 1, H \rrbracket$ . Dans sa thèse [Gam16], Gamlin présente une construction de cet automate dont les états reposent sur des multigraphes codant la même information mais de manière plus compacte. Il suggère qu'on peut réduire le nombre d'états à un nombre exponentiel du fait de l'existence d'un automate reconnaissant les arbres couvrants de  $\mathbb{N} \times \llbracket 1, H \rrbracket$  de taille exponentielle ([Kas61] avec des matrices de transferts et le modèle des dimers). Les états de ce dernier automate peuvent être comptés par le produit de l'ensemble des partitions non croisées par l'ensemble des combinaisons des pères des sommets.

L'objectif de cette partie est de construire un automate avec une meilleure borne sur le nombre d'états afin de s'approcher de la conjecture de Gamlin et de suggérer pourquoi cette conjecture pourrait être trop optimiste. Il permettra de produire en temps raisonnable les automates pour les hauteurs  $H = 3$  à 13 états et  $H = 4$  à 76 états (Figures 3.16 et 3.17) là où on ne trouve que l'automate pour la hauteur  $H = 2$  dans [JL07].

### 3.1 Du graphe bi-infini au graphe fini

On note  $\Lambda_{W,H}$  le graphe obtenu par le produit des chemins  $\llbracket 1, W \rrbracket \times \llbracket 1, H \rrbracket$  auquel on ajoute un puits  $P$  adjacent aux sommets de la première colonne, ainsi que  $H$  sommets chacun adjacent à un sommet de la dernière colonne comme dans la [Figure 3.5](#). Ce dernier ajout permet de conserver un degré homogène des sommets entre les colonnes.

Soit  $\eta$  une configuration de  $\Lambda_H$ . Pour tout intervalle  $I = \llbracket i_0 + 1, i_0 + W \rrbracket$  on pose  $\eta_I$  la restriction de  $\eta$  sur le graphe  $\Lambda_{W+1,H}$  définie ainsi : pour tout  $1 \leq x \leq W$  et  $1 \leq y \leq H$ ,  $\eta_I(x, y) = \eta(i_0 + x, y)$ , et pour tout  $1 \leq y \leq H$ ,  $\eta_I(W + 1, y) = \delta_{1 < y < H} + 2$  et  $\eta_I(W + 2, y) = 0$ .

**Proposition 3.2.** *Soit  $\eta$  une configuration de  $\Lambda_H$ . Alors  $\eta$  est récurrente à gauche si et seulement si pour tout intervalle  $I \in \mathbb{Z}$  fini, la configuration  $\eta_I$  du graphe  $\Lambda_{W+1,H}$  est récurrente.*

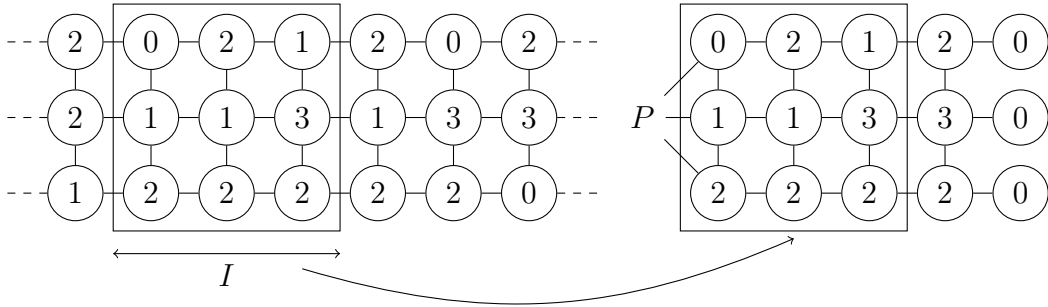


FIGURE 3.5 – Injection d’une configuration de  $\Lambda_H$  dans  $\Lambda_{W,H}$

*Démonstration.* Cette proposition fait écho à la description en termes d’écoulements de la [Définition 3.1](#). Soit  $\eta$  telle que pour tout intervalle fini  $I$ ,  $\eta_I$  est récurrente. Pour tout ensemble fini  $V$  de sommets, il existe un intervalle fini  $I$  tel que  $V \in I \times \llbracket 1, H \rrbracket$ . Or  $\eta_I$  est récurrente, donc en particulier,  $\eta_I$  est récurrente à gauche sur  $\Lambda_{V+1,H}$ . L’ordre d’écoulement des sommets décrit par la définition est valide pour l’ensemble  $V$  sur  $\Lambda_H$ . Donc la configuration  $\eta$  restreinte à  $V$  est récurrente à gauche. Donc  $\eta$  est récurrente à gauche.

Inversement, si  $\eta$  est récurrente à gauche, alors pour tout intervalle fini  $I$ ,  $\eta$  restreinte à  $I \times \llbracket 1, H \rrbracket$  est récurrente à gauche. La définition de récurrente à gauche pour  $\eta$  restreinte à  $I \times \llbracket 1, H \rrbracket$  correspond au critère de récurrence de Dhar sur  $\eta_I$ . Donc  $\eta_I$  est récurrente.  $\square$

Soit  $\eta$  une configuration récurrente de  $\Lambda_{W,H}$ , alors on peut étendre  $\eta$  sur  $\Lambda_H$  en ignorant la dernière colonne nulle et en complétant la configuration par un nombre maximal de grains par sommets. La configuration obtenue est naturellement récurrente à gauche. Ceci nous donne le lemme suivant.



**Lemme 3.3.** *Toute configuration récurrente de  $\Lambda_{W,H}$  est un facteur de configuration récurrente à gauche de  $\Lambda_H$ . Réciproquement, tout facteur de largeur finie  $W$  de configuration récurrente à gauche de  $\Lambda_H$  est un facteur de configuration récurrente de  $\Lambda_{W+1,H}$ .*

D'après [JL07], on sait qu'on peut reconnaître ces facteurs de récurrente à gauche par un automate fini. Ainsi, tout automate fini reconnaissant les configurations récurrentes des  $\Lambda_{W,H}$  pour tout  $W$  peut être transposé pour reconnaître les facteurs des configurations récurrentes à gauche de  $\Lambda_H$ . On s'intéressera donc à un tel automate fini reconnaissant les configurations récurrentes des  $\Lambda_{W,H}$ . On étudie alors les configurations comme des mots sur l'alphabet des colonnes  $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}^{H-2} \times \{0, 1, 2\}$  (voir Figure 3.6).

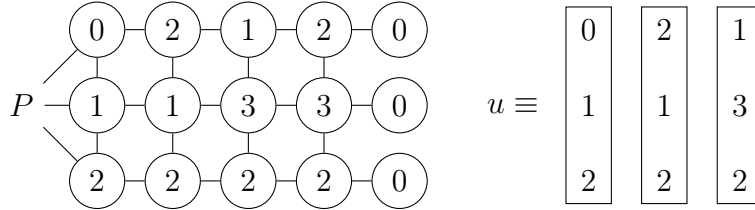


FIGURE 3.6 – Graphe  $\Lambda_{4,3}$

Gamlin [Gam16] propose un automate qui repose sur le déroulement du critère de Dhar sur une configuration récurrente en bloquant les éboulements de sommets au delà de la colonne lue par l'automate. Étant donnée une configuration qu'on lit de gauche à droite, on peut déterminer quels sont les sommets qui ne se sont pas éboulés et combien de grains sont nécessaires pour que ceux-ci s'éboulent. Cette construction correspond à la description donnée par [JL07]. Gamlin stocke dans ses états cette information sous la forme d'un multigraphe. Ces multigraphes n'ont pas de raison d'être finis donc le nombre d'états avec cette description n'est pas borné. Cependant, Gamlin présente plusieurs simplifications qui permettent d'éliminer une partie de la redondance et propose la conjecture qu'on peut réduire les multigraphes jusqu'ici non bornés à des multigraphes possédant un nombre de sommets proportionnel à la hauteur  $H$ , donc un nombre exponentiel d'états.

En s'appuyant sur la bijection de Cori et Le Borgne [CLB03] entre les arbres couvrants et les configurations récurrentes, on propose une nouvelle construction des états de l'automate. L'intérêt de cette bijection est d'une part de s'appuyer sur un ordre des arêtes bien choisi qui forcera un traitement colonne par colonne et d'autre part d'exploiter le parcours sommet-arête comme base pour la description des états de l'automate.

## 3.2 Codage des états par la bijection CLB sur $\Lambda_{W,H}$

On rappelle le critère de Dhar : une configuration d'un graphe  $G = (V \cup \{s\}, E)$  est récurrente si l'éboulement forcé du puits entraîne l'éboulement de chaque sommet exactement une fois. La bijection CLB consiste à ordonner ces éboulements en traitant les transferts de grains arête par arête et en fixant un ordre sur les arêtes (voir [Section 1.2.4](#)).

On se donne donc un ordre sur les arêtes  $<_e$  compatible avec la notion d'éboulement colonne par colonne. On fixe l'ordre suivant sur les arêtes du graphe  $\Lambda_{W,H}$  :

$$u_1v_1 >_e u_2v_2 \Leftrightarrow (x_{u_1} + x_{v_1}, y_{u_1} + y_{v_1}) <_{lex} (x_{u_2} + x_{v_2}, y_{u_2} + y_{v_2})$$

Autrement dit, les arêtes sont représentées par leur milieu, et une arête est plus grande qu'une autre si son milieu est plus à gauche selon l'axe des abscisses, donc plus près du puits et dans le cas d'égalité des abscisses, si son milieu est d'ordonnée plus petite.

Sur la [Figure 3.7](#), les arêtes sont numérotées de la plus grande à la plus petite  $e_1 >_e e_2 >_e \dots >_e e_9$ . L'exécution de l'algorithme précédent produit l'ordre de traitement suivant des sommets et des arêtes :  $e_1, e_2, s_{1,2}, e_3, e_5, s_{2,2}, e_6, s_{2,1}, e_4, s_{1,1}, e_7, s_{3,1}, e_8, s_{3,2}, e_9$ . On représente alors en rouge l'arbre couvrant associé et on peut retrouver également le nombre de grains par sommet. Par exemple, le sommet  $s_{2,1}$  est traité après son arête incidente  $e_6$  et avant ses arêtes incidentes  $e_4$  et  $e_7$ , le sommet  $s_{2,1}$  a donc 2 grains dans cette configuration.

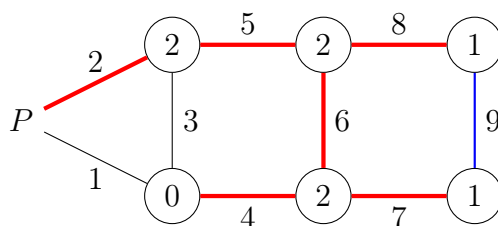


FIGURE 3.7 – Correspondance arbre couvrant (en rouge) et configuration récurrente, de parcours sommet-arête  $e_1, e_2, s_{1,2}, e_3, e_5, s_{2,2}, e_6, s_{2,1}, e_4, s_{1,1}, e_7, s_{3,1}, e_8, s_{3,2}, e_9$

### 3.2.1 Décomposition en ordres induits

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des configurations récurrentes de  $\Lambda_{W,H}$ .

**Définition 3.4.** Soit  $\eta$  une configuration récurrente et  $O_\eta$  le parcours sommet-arête obtenu par la bijection de Cori Le Borgne depuis  $\eta$  avec l'ordre  $<_e$ . On

appelle sous-ordre de  $O_\eta^V$  sur  $V \in \Lambda_{W,H}$  l'ordre  $O_\eta$  restreint aux sommets de  $V$  et aux arêtes incidentes à  $V$ . Le parcours  $O_\eta$  se décompose en la suite des sous-ordres  $(O_\eta^{C_i})_{1 \leq i \leq W}$  sur les colonnes  $(C_i)_{1 \leq i \leq W}$  de  $\Lambda_{W,H}$ .

Les sommets et arêtes incidentes des  $(C_i)_{1 \leq i \leq W}$  sont identiques à position de la colonne près. On appelle donc ordre induit un représentant d'un sous-ordre d'une colonne à position près, c'est-à-dire un ordre sur un ensemble correspondant à  $H$  sommets,  $2H$  arêtes horizontales et  $H - 1$  arêtes verticales. On notera  $s_1, \dots, s_H, g_1, \dots, g_H, d_1, \dots, d_H$  et  $v_1, \dots, v_{H-1}$  ces éléments (voir Figure 3.8).

On appelle décomposition en ordres induits de  $O_\eta$  la suite  $(O_\eta^i)_i$  des ordres induits associés aux sous-ordres de chaque colonne.

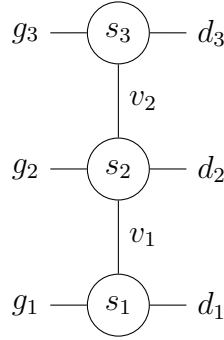


FIGURE 3.8 – Éléments d'une colonne de hauteur  $H = 3$

La Figure 3.9 représente en (a) un parcours sommet-arête décroissant. En vert sont représentées les arêtes. Chaque élément est numéroté par sa position dans le parcours. Sa décomposition en ordres induits est donnée en (b) avec des numérotations locales à chaque ordre induit. Ainsi, les arêtes horizontales entre deux colonnes apparaissent deux fois.

On note  $\mathcal{O}_H$  l'ensemble fini des ordres induits qui apparaissent dans la décomposition en ordres induits des parcours sommet-arête en bijection avec les configurations récurrentes de  $\Lambda_{W,H}$ . Pour tout  $o \in \mathcal{O}_H$ , on notera  $<_o$  la relation d'ordre décrite par  $o$  sur les éléments d'une colonne.

**Lemme 3.5.** Soit  $\eta$  une configuration récurrente de  $\Lambda_{W,H}$  et  $O_\eta = (o_1, \dots, o_W)$  sa décomposition en ordres induits. Alors  $o_1$  et  $o_W$  vérifient les propriétés suivantes :

- (i)  $g_1 <_{o_1} g_2 <_{o_1} \dots <_{o_1} g_H <_{o_1} \min(\{v_i\}_i \cup \{d_j\}_j)$
- (ii)  $\max_{i,j} v_i, g_j <_{o_W} d_1 <_{o_W} d_2 <_{o_W} \dots <_{o_W} d_H$ .

*Démonstration.* (i) Les arêtes horizontales gauches de la première colonne sont incidentes au puits. Donc elles sont toutes pendantes après l'éboulement du puits. De plus elles sont plus grandes que toutes les arêtes du graphe pour

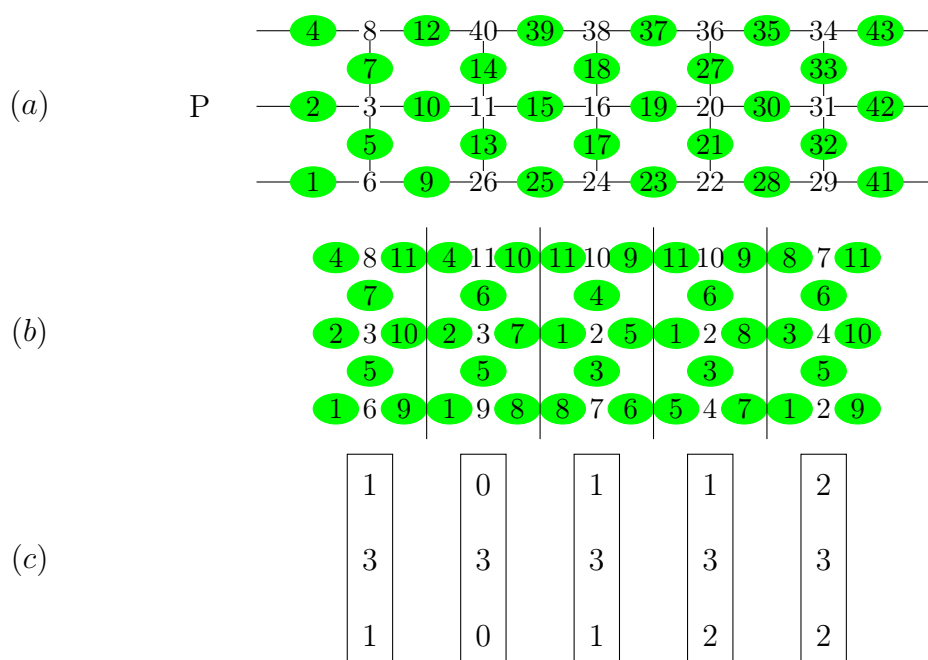


FIGURE 3.9 – Décomposition en ordre induit d’une configuration configuration

l’ordre  $<_e$ . Elles sont donc traitées avant toutes les autres arêtes. (ii) Inversement, les arêtes droites de la dernière colonne sont incidentes à des sommets de degré 1. Elles sont donc traitées après les sommets de la dernière colonne. De plus, elles sont plus petites que toutes les autres arêtes du graphe. Donc ce sont les dernières du graphe à être traitées par le critère de récurrence.  $\square$

Le **Lemme 3.5** donne des conditions nécessaires sur la décomposition en ordre induits d’une configuration récurrente de  $\Lambda_{W,H}$ .

**Proposition 3.6.** *La décomposition en ordres induits est une bijection.*

*Démonstration.* La décomposition en ordres induits est surjective par définition. On sait que le nombre de grains d’un sommet dans une configuration récurrente s’obtient en comptant le nombre d’arêtes qui lui sont incidentes et qui apparaissent après lui dans le parcours sommet-arête décroissant associé (**Section 1.2.4**). On sait également que les arêtes de l’arbre couvrant associé sont celles qui précèdent directement chaque sommet dans le parcours et qui leur sont incidentes. Or un ordre induit ordonne chaque sommet d’une colonne avec ses arêtes incidentes. On peut donc compter le nombre de grains de chaque sommet et l’arête précédant directement un sommet dans un ordre induit est dans l’arbre couvrant. On retrouve ainsi la configuration à partir de sa décomposition en ordres induits (**Figure 3.9 (c)**).  $\square$

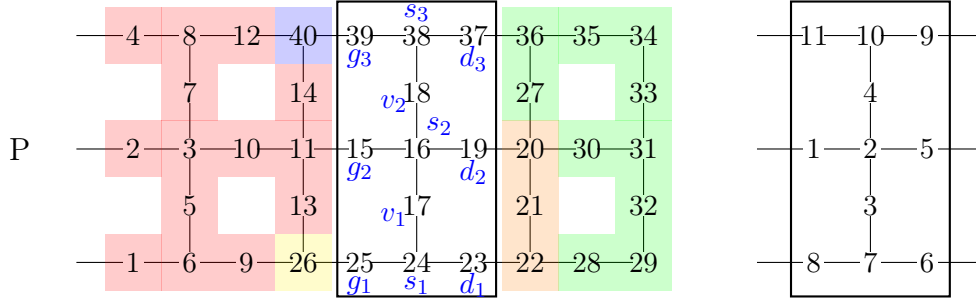


FIGURE 3.10 – Traitement par bloc autour d’une colonne

**Proposition 3.7.** *Soit  $\sigma$  un parcours sommet-arête décroissant du graphe  $\Lambda_{W,H}$  pour l’ordre sur les arêtes  $<_e$ . Alors toute arête horizontale  $(x, y)$   $(x+1, y)$  apparaît dans  $\sigma$  entre ses deux extrémités.*

*Démonstration.* Une arête n’est traitée qu’après l’écroulement de l’une de ses extrémités. De plus, l’arête minimale de tout cycle de  $\Lambda_{W,H}$  pour l’ordre  $<_e$  est verticale. Donc les arêtes horizontales externes à l’arbre couvrant associé à  $\sigma$  ne sont pas minimales dans leur cycle induit. D’après le [CLB03, Lemme 3] rappelé en Section 1.2.4, elles ne sont pas traitées après leurs deux extrémités.  $\square$

### 3.2.2 Compatibilité et combinaison d’ordres induits

Une décomposition en ordres induits est un mot d’ordres induits. On connaît déjà les conditions nécessaires que doivent vérifier le premier et le dernier ordre induits, on veut donc caractériser le reste. Si un parcours sommet-arête est un ordre total sur les sommets et les arêtes du graphe, un mot d’ordres induits ne produit que l’union de sous-ordres sur les sommets et arêtes du graphe qui est donc un ordre partiel. Un parcours sommet-arête décroissant est alors une des extensions linéaire cet ordre partiel. On montre dans cette partie que les propriétés de la bijection CLB permettent de déterminer ce parcours. Qui plus est, étant donnés deux ordres induits consécutifs dans une décomposition en ordres induits, on montre qu’il n’y a qu’une manière d’étendre l’ordre partiel obtenu par l’union des deux ordres induits en un ordre total respectant la bijection CLB. On aura ainsi la brique de base pour la construction de notre automate.

On s’intéresse tout d’abord à un exemple. Soit  $o$  l’ordre décrit par  $g_2 <_o s_2 <_o v_1 <_o v_2 <_o d_2 <_o d_1 <_o v_1 <_o g_1 <_o d_3 <_o s_3 <_o g_3$  (voir Figure 3.10). On peut s’intéresser au comportement du parcours sommet-arête autour de la colonne correspondant à  $o$ . On parcourt tout d’abord un ensemble de sommets

et arêtes numérotées de 1 à 14 (en rouge) à gauche de la colonne de  $o$ . On traite ensuite l'arête  $g_2$  numérotée 15, elle est maximale parmi les arêtes pendantes. D'après  $o$ , on sait que les arêtes  $g_1$  et  $g_3$  sont respectivement traitées après  $s_1$  et  $s_3$ . D'après la [Proposition 3.7](#), elles sont donc traitées avant leurs autres extrémités donc ne sont pas pendantes quand  $g_2$  est traitée. Donc il n'existe aucune autre arête pendante. Alors le parcours sommet-arête poursuit avec  $s_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $d_2$  numérotés successivement de 16 à 19. De manière analogue, les arêtes  $d_1$  et  $d_3$  sont respectivement traitées avant  $s_1$  et  $s_3$ . Elles ne sont alors pas pendantes. On traite alors des sommets et arêtes à droite de la colonne de  $o$  (numérotés de 20 à 22 en orange) jusqu'à avoir l'arête  $d_1$  pendante. Elle est maximale donc on la traite ainsi que  $s_1$  puis  $g_1$ . On traite ensuite des arêtes et sommets à gauche de la colonne de  $o$  (en jaune). L'arête  $g_3$  s'éboule avant son sommet incident gauche donc on traite de nouveau des sommets arêtes à droite (en vert) jusqu'à traiter l'arête  $d_3$  suivie directement par le sommet  $s_3$  et l'arête  $g_3$ . On traite ensuite des éboulements à gauche de la colonne (en bleu) puis des éboulements à droites (absent sur la figure) et le parcours se termine.

On réalise la bijection CLB en s'arrêtant à chaque élément de la colonne. Entre deux éléments, on aura éventuellement traité des arêtes et sommets à gauche puis des arêtes et sommets à droite de la colonne. Ainsi, ce déroulement du parcours se découpe en blocs alternant traitement de sommets et d'arêtes à gauche et traitement de sommets et arêtes à droite. Le parcours est donc la concaténation de blocs en regroupant les arêtes et sommets gauches successifs en bloc maximal et en faisant de même pour les arêtes et sommets à droites, ainsi que des sommets et arêtes de la colonne de  $o$ . Avant de traiter un bloc de sommets et arêtes à gauche, on traite toujours des arêtes de la colonne de l'ordre induit  $o$  dont au moins une envoie un grain vers la gauche entraînant le traitement du bloc. Après avoir traité un bloc droit, soit le parcours est terminé, soit on traite une arête de la colonne de  $o$ .

Le parcours peut s'écrire de la forme

$$G_0 M_1 G_1 D_1 M_2 G_2 D_2 \dots M_K G_K D_K$$

où  $K = 4H - 1$  et  $D_i$  est un ensemble éventuellement vide d'arêtes et sommets droits,  $G_i$  est un ensemble éventuellement vide d'arêtes et sommets gauches et  $M_i$  est un sommet ou une arête de la colonne associée à  $o$ . Ainsi, dans le cas du parcours de la [Figure 3.10](#), le premier bloc  $G_0$  est en rouge,  $D_5$  est en orange,  $G_8$  en jaune,  $D_8$  en vert,  $G_{11}$  en bleu, et les autres ensembles gauches et droites sont vides. Cette alternance est dictée par les transferts de grains de la colonne de  $o$  donc par l'ordre induit  $o$  et ne dépend pas de la configuration réalisant  $o$ . Notamment, soit  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  et  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  deux configurations récurrentes réalisant  $o$  respectivement sur les colonnes  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  comme sur la [Figure 3.11](#). L'ordre induit  $o$  découpe le parcours sommet-arête de  $\eta$  en blocs  $(G_0^\eta M_1^\eta G_1^\eta D_1^\eta \dots M_K^\eta G_K^\eta D_K^\eta)$  et le parcours sommet-arête de  $\nu$  en blocs  $(G_0^\nu M_1^\nu G_1^\nu D_1^\nu \dots M_K^\nu G_K^\nu D_K^\nu)$ . Alors le parcours obtenu par la conca-

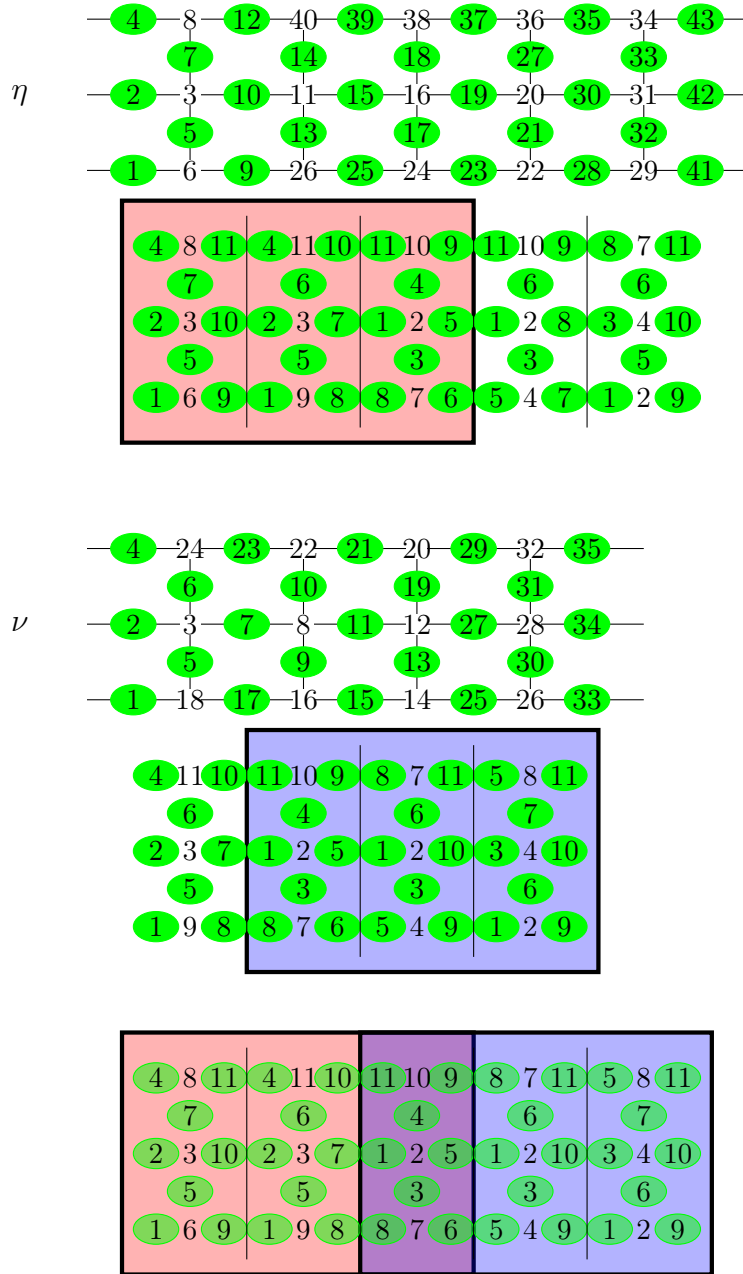


FIGURE 3.11 – Composition de configurations récurrentes partageant un ordre induit en commun

ténation des blocs  $(G_0^\eta M_1^\eta G_1^\eta D_1^\nu \dots M_K^\eta G_K^\eta D_K^\nu)$  est un parcours sommet-arête décroissant sur le graphe  $\Lambda_{i+n-j,H}$ . Ceci nous donne le lemme suivant.

**Lemme 3.8.** *Soit  $o$  un ordre induit et  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  et  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  deux configurations récurrentes réalisant  $o$  respectivement sur les colonnes  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors la configuration  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_i = \nu_j, \nu_{j+1}, \dots, \nu_n)$  est récurrente sur  $\Lambda_{i+n-j,H}$ .*

*Démonstration.* On sait que  $(G_0^\eta M_1^\eta G_1^\eta D_1^\nu \dots M_K^\eta G_K^\eta D_K^\nu)$  décrit un parcours sommet-arête décroissant sur le graphe  $\Lambda_{i+n-j,H}$  par construction. Soit  $O = (o_1, o_2, \dots, o_{i+n-j})$  la décomposition en ordres induits de ce parcours. Alors les  $i - 1$  premiers ordres induits se déduisent de  $(G_0^\eta M_1^\eta G_1^\eta \dots M_K^\eta G_K^\eta)$  et les  $n - j$  derniers se déduisent de  $(M_1^\nu D_1^\nu \dots M_K^\nu D_K^\nu)$ . Donc ces ordres coïncident respectivement avec les  $i - 1$  premiers ordres de la décomposition en ordres induits de  $\eta$  et avec le  $n - j$  derniers ordres induits de la décomposition en ordres induits de  $\nu$ . En notant  $(o_k^\eta)_k$  et  $(o_k^\nu)_k$  ces décompositions, on a  $O = (o_1^\eta, \dots, o_i^\eta = o_j^\nu, o_{j+1}^\nu, \dots, o_n^\nu)$ .  $\square$

**Corollaire 3.9.** *Pour tout ordre induit  $o \in \mathcal{O}_H$  il existe une configuration dont la décomposition en ordres induits ne le fait apparaître qu'une seule fois et dans laquelle les ordres induits précédant  $o$  sont tous distincts.*

*Démonstration.* Soit  $\eta$  une configuration réalisant l'ordre induit  $o$ . Soit  $i$  et  $j$  les indices de la première et la dernière colonnes réalisant  $o$ . Alors d'après le **Lemme 3.8**, la configuration  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_i = \eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n)$  est récurrente et  $o$  n'apparaît qu'en colonne  $i$  de sa décomposition en ordres induits. On peut appliquer cette construction pour toute répétition d'un même ordre dans les ordres des  $i$  premières colonnes permettant ainsi de réaliser le deuxième point.  $\square$

**Lemme 3.10.** *Soit  $o \in \mathcal{O}_H$ , il existe un plus petit indice  $i$  tel que  $o$  soit l'ordre induit sur la  $i$ -ième colonne d'une configuration récurrente de  $\mathcal{C}$ . Alors pour tout  $j \geq i$ , il existe une configuration de  $\mathcal{C}$  telle que  $o$  est l'ordre induit sur la  $j$ -ième colonne de cette configuration.*

*Démonstration.* Soit  $\eta \in \mathcal{C}$  qui réalise le minimum, et  $j > i$ . On peut agrandir  $\eta$  de  $j - i$  colonnes maximales par la gauche. La configuration obtenue est récurrente et le parcours sommets arêtes est le même que celui de  $\eta$  à partir du traitement de la première arête incidente à la colonne  $j$ . L'ordre induit de la  $j$ -ième colonne est donc le même que l'ordre induit de la  $i$ -ième colonne pour la configuration  $\eta$ .  $\square$

L'ensemble  $\mathcal{O}_H$  étant fini, on pose  $i_{max}$  le maximum sur  $\mathcal{O}_H$  de ces plus petits indices. D'après le **Corollaire 3.9**, on sait que  $i_{max} \leq |\mathcal{O}_H|$ .

**Définition 3.11.** *Soit  $o, o' \in \mathcal{O}_H$  deux ordres induits. On dit que  $o'$  est compatible à droite de  $o$  si et seulement si :*



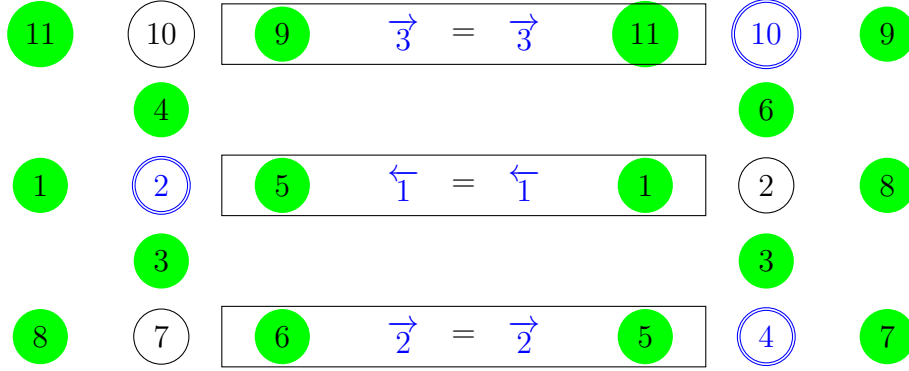


FIGURE 3.12 – Relation de compatibilité

- (i) L'union du plongement des ordres  $o$  et  $o'$  sur deux colonnes consécutives est un ordre partiel.  
 (ii) Pour tout  $1 \leq i \leq H$ ,  $(s_i <_o d_i$  et  $g_i <_{o'} s_i)$  ou  $(s_i >_o d_i$  et  $g_i >_{o'} s_i)$ .

Autrement dit, quand on plonge  $o$  et  $o'$  sur deux colonnes consécutives, (i) l'union des deux sous-ordres est un ordre partiel et (ii) les arêtes horizontales communes aux deux colonnes ne doivent pas simultanément être plus grandes ou plus petites que leurs extrémités (Proposition 3.7).

Les deux ordres présentés sur la Figure 3.12 sont ainsi compatibles. Les nombres entre les deux ordres représentent l'ordre dans lequel les arêtes droites de celui de gauche sont traitées, et l'orientation, l'ordre de traitement de chacune d'elle par rapport au sommet de la colonne dont elle est incidente.

**Lemme 3.12.** Soit  $C$  une configuration, soit  $o$  et  $o'$  deux ordres induits consécutifs de  $C$ . Alors  $o'$  est compatible à droite de  $o$ .

*Démonstration.* Soit  $o_t$  l'ordre de parcours des arêtes et sommets. Alors,  $o$  et  $o'$  sont des sous-ordres de  $o_t$  restreints à leur colonne respective. En particulier, l'union de ces sous-ordres est un ordre partiel des éléments des deux colonnes. De plus, les arêtes horizontales respectent la Proposition 3.7, on retrouve la propriété (ii).  $\square$

Cette relation de compatibilité correspond donc à des conditions nécessaires que doivent vérifier deux ordres induits successifs. On se propose de montrer que ces conditions sont suffisantes.

**Lemme 3.13.** Soit  $o, o' \in \mathcal{O}$ ,  $o'$  compatible à droite à  $o$ . Alors les configurations telles que  $o$  et  $o'$  sont les ordres induits de deux colonnes consécutives partagent le même sous-ordre sur ces deux colonnes.

*Démonstration.* Soit  $\eta$  une telle configuration et  $i$  l'indice de la colonne d'ordre induit  $o$  où  $i + 1$  est l'indice de la colonne d'ordre induit  $o'$ . Alors on peut dérouler la bijection CLB en suivant l'ordre de parcours des arêtes-sommets.

L'ordre doit respecter les deux ordres induits  $o$  et  $o'$ . En particulier, il respecte un ordre partiel sur les éléments de deux colonnes. On va montrer qu'il n'existe qu'une unique manière de respecter cet ordre partiel ainsi que la bijection CLB par un ordre total sur les éléments des deux colonnes.

Soit  $o_p$  l'ordre partiel sur les éléments des colonnes  $i$  et  $i + 1$ . On observe plusieurs règles.

- Un sommet s'éboule toujours directement après l'arête qui le déstabilise (CLB).
- Si deux arêtes non traitées n'ont pas d'élément plus grand non traité, alors on peut décider laquelle traiter en premier, il s'agit de la plus grande dans l'ordre global sur les arêtes, donc celle de la colonne de gauche.

Alors, il n'y a jamais d'ambiguïté sur élément qui doit être traité en suivant l'ordre partiel  $o_p$ , donc il n'y a qu'un ordre total sur les éléments des deux colonnes.  $\square$

On sait donc que si elle existe, il n'y a qu'une façon de compléter en un ordre total correspondant à un sous-ordre de parcours sommet-arête décroissant l'ordre partiel constitué de l'union de deux colonnes consécutives compatibles. Montrons que pour toute paire d'ordres induits compatibles, il existe un tel ordre total.

**Lemme 3.14.** *Soit  $o, o' \in \mathcal{O}$ ,  $o'$  compatible à droite à  $o$ . Alors il existe une configuration récurrente telle que  $o$  et  $o'$  sont les ordres induits de deux colonnes consécutives.*

*Démonstration.* Soit  $\eta$  une configuration réalisant l'ordre induit  $o$  et  $\nu$  une configuration réalisant  $o'$ . Soit  $O_g^\eta$  l'ordre des éléments du graphe de  $\eta$  de la première colonne jusqu'à la colonne réalisant  $o$  et  $O_d^\nu$  l'ordre des éléments du graphe de  $\nu$  de la colonne réalisant  $o'$  jusqu'à la dernière colonne. Alors, de la même manière que précédemment, on déroule la bijection CLB en suivant les ordres  $O_g^\eta$  et  $O_d^\nu$ . On suit alternativement chaque ordre en respectant l'ordre  $<_e$  sur les arêtes en respectant la règle suivante : on traite en priorité les arêtes pendantes de  $O_g^\eta$ .

Comme  $o$  et  $o'$  sont compatibles, leur union sur deux colonnes consécutives est un ordre partiel. Or, les ordres  $O_g^\eta$  et  $O_d^\nu$  consistent en l'insertion d'éléments entre des éléments de  $o$  et  $o'$  respectivement. Donc, l'union des ordres  $O_g^\eta$  et  $O_d^\nu$  sur le prolongement à gauche et à droite des deux colonnes est aussi un ordre partiel.

On considère l'ordre  $O$  qui réalise cet ordre partiel en résolvant les ambiguïtés par l'ordre de priorité sur les arêtes  $<_e$ . Alors, l'ordre obtenu est un parcours sommet-arête décroissant. Donc d'après la bijection CLB, la configuration obtenue est récurrente et elle réalise les ordres  $o$  et  $o'$  sur deux colonnes successives.

De plus, les arêtes allant de la dernière colonne vers le puits étant les dernières de  $o_d$ , elles le sont aussi pour  $O$ . Donc on obtient bien une configuration récurrente.  $\square$

Par ce lemme, on étend la construction de configuration donnée par le **Lemme 3.8** par combinaison de configurations partageant un même ordre induit à la combinaison de configurations réalisant chacune un ordre induit compatible avec celui de l'autre.

**Corollaire 3.15.** *Soit  $O = (o_1, o_2, \dots, o_k)$  une suite d'ordres induits compatibles par paires d'ordres consécutifs. Alors, il existe une configuration récurrente telle que  $O$  est un facteur de sa décomposition en ordres induits.*

*Démonstration.* On montre ce résultat par induction sur la taille de  $k$ . On sait que la propriété est vraie pour  $k = 2$  par le lemme précédent. Soit  $k \geq 2$ , on suppose la propriété vraie pour  $k$ . Soit  $O = (o_1, o_2, \dots, o_{k+1})$ . Il existe une configuration récurrente  $C_g$  réalisant la suite  $(o_1, o_2, \dots, o_k)$  et une configuration récurrente  $C_d$  réalisant  $o_{k+1}$ . Alors en particulier, la configuration  $C_g$  réalise l'ordre induit  $o_k$  donc en suivant la même construction que la preuve du **Lemme 3.14**, on construit à partir de  $C_g$  et  $C_d$  une nouvelle configuration récurrente  $C$  dont les premiers ordres induits de la décomposition sont ceux de la décomposition de  $C_g$  et les derniers ordres induits ceux de la décomposition de  $C_d$ . Donc la décomposition en ordres induits de  $C$  fait apparaître le facteur  $O = (o_1, o_2, \dots, o_{k+1})$ .  $\square$

### 3.2.3 Automate sur les ordres induits

**Théorème 3.16.** *Soit  $\mathcal{A}_H$  l'automate dont les états sont les ordres induits et les transitions correspondent à la compatibilité à droite. Les états initiaux et finaux sont tous les ordres induits dont les arêtes droites sont traitées de bas en haut et après tous les sommets et autres arêtes. Autrement dit, un ordre induit  $o$  est un état initial et final si et seulement si  $d_1 <_o d_2 <_o \dots <_o d_H$  et si pour toute arête gauche  $g_i$ , toute arête verticale  $v_j$  et pour tout sommet  $s_k$ ,  $g_i, v_j, s_k <_o d_1$ .*

*Alors  $\mathcal{A}_H$  reconnaît les décompositions en ordre induits des configurations récurrentes des graphes  $(\Lambda_{W,H})_{W>1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $O = (o_1, o_2, \dots, o_W)$  la décomposition en ordres induits d'une configuration récurrente de  $\Lambda_{W,H}$ . Alors, d'après le **Lemme 3.12**, toute paire  $(o_i, o_{i+1})$  de  $O$  respecte la relation de compatibilité entre ordre induit. Donc,  $O$  correspond à un chemin dans l'automate  $\mathcal{A}_H$  d'un état  $o_{start}$  à l'état étiqueté par  $o_W$ . D'après le **Lemme 3.5**, l'état  $o_W$  vérifie  $\max_{i,j} v_i, g_j <_{o_W} d_1 <_{o_W} d_2 <_{o_W} \dots <_{o_W} d_H$  donc  $o_W$  est un état final de  $\mathcal{A}_H$ . De plus  $o_1$  vérifie  $g_1 <_{o_1} g_2 <_{o_1} \dots <_{o_1} g_H <_{o_1} \min_{i,j} v_i, d_j$ . Donc en particulier, les arêtes horizontales gauche  $(g_i)_{1 \leq i \leq H}$  sont traitées avant leur sommet respectif  $(s_i)_{1 \leq i \leq H}$ ,

pour tout  $1 \leq i \leq H$ ,  $g_i <_{o_1} s_i$ . Or,  $o_1$  est compatible à droite de  $o_{start}$ , donc par la [Définition 3.11](#) pour tout  $1 \leq i \leq H$ ,  $(s_i <_{o_{start}} d_i$  et  $g_i <_{o_1} s_i)$  ou  $(s_i >_{o_{start}} d_i$  et  $g_i >_{o_1} s_i)$ . Donc on a  $d_1 <_{o_{start}} d_2 <_{o_{start}} \dots <_{o_{start}} d_H$  et pour tout  $1 \leq i \leq H$ ,  $s_i <_{o_{start}} d_i$ . Pour l'ordre induits  $o_{start}$ , les sommets sont tous éboulés avant leurs arêtes horizontales droites respectives, donc aucun ne reçoit de grain par la droite afin d'être déstabilisé. Donc les sommets sont tous éboulés avant le traitement des arêtes horizontales droites, c'est donc le cas également des autres arêtes. On a alors  $\max_{i,j} v_i, g_j <_{o_{start}} d_1 <_{o_{start}} d_2 <_{o_{start}} \dots <_{o_{start}} d_H$ , donc  $o_{start}$  est un état initial de l'automate  $\mathcal{A}_H$ . On en déduit que la décomposition en ordres induits  $O$  est un mot reconnu par  $\mathcal{A}_H$ .

Soit  $O = (o_1, o_2, \dots, o_k)$  un mot reconnu par  $\mathcal{A}_H$ . Soit  $o_{start}$  l'état initial permettant la reconnaissance de  $O$ . Alors d'après le [Corollaire 3.15](#), il existe une configuration récurrente  $C$  réalisant dans sa décomposition en ordres induits le facteur  $O$ . On sait que  $\max_{i,j} v_i, g_j <_{o_{start}} d_1 <_{o_{start}} d_2 <_{o_{start}} \dots <_{o_{start}} d_H$ , donc la colonne d'ordre induit  $o_{start}$  se comporte comme le puits pour la colonne suivante. De plus  $\max_{i,j} v_i, g_j <_{o_k} d_1 <_{o_k} d_2 <_{o_k} \dots <_{o_k} d_H$ , donc la colonne de  $C$  correspondant à l'ordre induit  $o_W$  s'éboule avant de recevoir des grains de la droite, donc la colonne suivante se comporte comme la colonne de sommets de degré 1 des graphes  $(\Lambda_{W,H})_W$ . La configuration  $C$  restreinte au graphe  $\Lambda_{k,H}$  est donc récurrente. Donc  $O$  est la décomposition en ordres induits d'une configuration récurrente.  $\square$

On a donc un automate qui reconnaît les décompositions en ordres induits des configurations récurrentes des  $(\Lambda_{W,H})_W$ . L'alphabet de l'automate est l'ensemble des ordres induits  $\mathcal{O}_H$ . Or chaque ordre induit peut être transformé en une colonne stable grâce à la bijection CLB. La projection de l'alphabet  $\mathcal{O}_H$  dans l'espace des colonnes projette l'automate  $\mathcal{A}_H$  sur un automate  $\mathcal{A}_H^c$  de même ensemble d'états, travaillant sur l'alphabet des colonnes de configurations et reconnaissant les configurations récurrentes de  $(\Lambda_{W,H})_W$ . Les états de cet automate sont indexés par les ordres induits, donc on a une borne large sur le nombre d'états par  $(4H - 1)!$  le nombre de permutations sur les éléments d'une colonne. On a donc une borne factorielle meilleure que la borne naïve  $4^H \cdot (2^H)^{2^H}$ . Cette borne reste éloignée de la borne exponentielle suggérée par [\[Gam16\]](#). On essaie de l'affiner dans la section suivante.

### 3.2.4 Réduction du nombre d'états : des ordres induits aux ordres réduits

On a vu que la relation de compatibilité ([Définition 3.11](#)) caractérisait les transitions de l'automate travaillant sur les ordres induits  $\mathcal{O}_H$ . On se propose de s'intéresser de plus près à cette relation afin de réduire le nombre d'états de l'automate  $\mathcal{A}_H$ .

**Proposition 3.17.** *Soit  $o$  et  $o'$  deux ordres induits. Alors  $o'$  est compatible à droite avec  $o$  si et seulement si :*

- (i) *Les ordres des arêtes horizontales droites  $(d_i)_i$  pour  $o$  est le même ordre que les arêtes horizontales gauches  $(g_i)_i$  pour  $o'$  : pour tout  $1 \leq i < j \leq H$ ,  $d_i <_o d_j \Leftrightarrow g_i <_{o'} g_j$ .*
- (ii) *Pour tout  $1 \leq i \leq H$ ,  $(s_i <_o d_i \text{ et } g_i <_{o'} s_i)$  ou  $(s_i >_o d_i \text{ et } g_i >_{o'} s_i)$*

Ainsi, un ordre induit  $o'$  est compatible à droite avec un ordre  $o$  si et seulement si ses arêtes gauches sont dans le même ordre que les arêtes droites de  $o'$  et si chacune à la même orientation donnée par l'extrémité s'éboulant avant le traitement de cette dernière.

*Démonstration.* Le point (ii) vient directement de la définition de compatibilité. Montrons le point (i) est équivalent au point (i) de la définition. Soit  $o_t$  l'union du plongement des ordres  $o$  et  $o'$  sur deux colonnes successives. L'ensemble de relations  $o_t$  décrit un ordre partiel sur les arêtes horizontales gauches et droites, verticales et sur les sommets des deux colonnes. L'ensemble  $o_t$  est un ordre partiel si et seulement si le graphe orienté obtenu par ces relations n'a pas de cycle. Ce graphe peut être représenté par deux chemins correspondant à chaque ordre en fusionnant les sommets représentant les arêtes communes. S'il existe un cycle dans ce graphe, alors il utilise au moins deux arêtes communes distinctes  $c_i$  et  $c_j$  telles que  $c_i = d_i <_o d_j = c_j$  et  $c_j = g_j <_{o'} g_i = c_i$ . Réciproquement, s'il existe deux arêtes communes distinctes  $c_i$  et  $c_j$  telles que  $c_i = d_i <_o d_j = c_j$  et  $c_j = g_j <_{o'} g_i = c_i$ , alors, on a un cycle formé des deux sommets correspondants à  $c_i$  et  $c_j$ .  $\square$

Cette information se résume sur la [Figure 3.12](#) par les numéros surmontés d'une flèche indiquant l'ordre des arêtes horizontales droites et leurs orientations. On appelle *ordre réduit* cette paire d'information. Il suffit donc de connaître cet ordre et l'orientation des arêtes pour connaître la compatibilité d'un ordre avec le précédent. On peut donc simplifier les états de l'automate  $\mathcal{A}_H$  en fusionnant les états par l'équivalence par ordre et orientation égale, ceux-ci partageant exactement les mêmes transitions. On obtient alors l'automate  $\mathcal{A}_H^r$  d'états l'ensemble des ordres réduits, de transitions les ordres induits dont l'unique état initial et final est l'ordre réduit décrit par la relation  $\max_i s_i <_o d_1 <_o d_2 <_o \dots <_o d_H$  qui caractérisait les ordres induits initiaux et finaux de l'automate  $\mathcal{A}_H$ .

Ce nouvel automate a alors autant de transitions que le précédent cependant on réduit la borne sur le nombre d'états de l'automate de  $(4H - 1)!$  à  $2^H H!$  correspondant à l'orientation des arêtes et à une permutation de celles-ci.

## 3.3 Énumération des ordres

### 3.3.1 Sous-arbres dans la bande

Dès lors qu'on dispose des ordres induits, on peut aisément construire l'automate des configurations récurrentes en testant la compatibilité entre deux ordres. Cependant, on ne sait pas encore caractériser ces ordres et les énumérer efficacement.

On sait que les ordres induits sont les ordres qu'on peut extraire des parcours sommet-arête des configurations récurrentes de la bande. La proposition suivante nous permet alors d'énumérer ces ordres en énumérant les configurations récurrentes.

**Proposition 3.18.** *L'ensemble  $\mathcal{O}_H$  des ordres induits est l'ensemble des ordres induits qui apparaissent dans les décompositions en ordres induits des configurations récurrentes de  $\Lambda_{2H+3,H}$ .*

Cette proposition s'appuie sur la construction pour un ordre induit donné par un arbre couvrant le réalisant. Et si un arbre couvrant permet d'ordonner tous les éléments du graphe par la bijection CLB, il suffit d'un sous-arbre de ce dernier pour ordonner les éléments d'une colonne.

L'ordre induit produit sur une colonne à partir d'un arbre couvrant est local. Il ne concerne que les éléments de la colonne, les sommets et leurs arêtes incidentes. Dans la transformation CLB, quand une arête est traitée, une de ses extrémités est traité avant celle-ci. Il existe alors une branche de l'arbre du puits à ce sommet dont les éléments, arêtes et sommets sont entièrement traités avant cette arête.

*Démonstration.* On s'intéresse à la bijection entre les arbres couvrants et les parcours sommet-arête. Soit  $o$  un ordre induit réalisé à la  $i$ -ème colonne d'un arbre couvrant  $T$ . Le calcul de l'ordre induit pour cette colonne consiste à parcourir l'arbre selon l'ordre  $\prec_o$  et de ne retenir que l'ordre de traitements des arêtes incidentes aux sommets de la colonne  $i$ . Donc lors de ce calcul, seules les branches de l'arbre menant à un sommet incident à une de ses arêtes sont pertinentes à explorer. On peut élaguer l'arbre des autres branches et ne conserver que celles utiles comme sur la [Figure 3.13](#). Ensuite, on peut déformer cet arbre en prenant soin de ne pas modifier l'ordre de traitement des arêtes incidentes à la colonne.

Le calcul d'un ordre peut être décomposé en plusieurs phases qui alternent (blocs  $G$ ,  $M$  et  $D$ ). Une phase d'exploration à gauche de la colonne  $i$  ( $G$ ), une phase d'exploration à droite de la colonne  $i$  ( $D$ ).

Au cours d'une phase d'exploration à gauche, on parcourt l'arbre le plus à gauche possible jusqu'à ce que les seules arêtes pendantes soit des arêtes entre les colonnes  $i - 1$  et  $i$ . Elles sont ensuite traitées de la plus grande à

la plus petite avant tout autre arête, donc de bas en haut. Dans la notation précédente il s'agit de blocs  $M$ . Entre autre, ces arêtes sont déterminées par l'ordre induit  $o$ . On cherche à reproduire cet ordre sur ces arêtes par un arbre plus simple. On choisit de remplacer la portion gauche explorée lors de cette phase par un arbre représentant l'ensemble des arêtes entre les colonnes  $i - 1$  et  $i$ , enraciné sur l'arête de la colonne  $i$  qui a déclenché son exploration. On choisit un arbre sous la forme d'un peigne  $\mathbf{E}$  où les branches du peigne sont reliées à l'extrémité gauche de ses arêtes. Ainsi chaque parcours gauche traverse un arbre qui peut être déformé sous la forme d'un peigne. L'ensemble des parts des arêtes entre les colonnes  $i - 1$  et  $i$  forme une partition de  $\llbracket 1, H \rrbracket$  et pour des raisons de planarité, il s'agit d'une partition non croisée. Sur la [Figure 3.13](#), ces parts sont les ensembles  $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ ,  $\{4\}$  et  $\{7, 8, 9, 10\}$ . Chaque peigne se plonge de manière non orientée dans  $\Lambda_{W,H}$ . Afin de conserver la planarité et la structure arborescente, les peignes des explorations à gauche sont imbriqués. On a  $H$  arêtes horizontales donc au plus  $H$  peignes imbriqués.

Au cours d'une phase d'exploration à droite, l'ordre entre deux arêtes horizontales de droite est déterminé par la plus grande arête des chemins du premier sommet commun aux deux branches des arêtes vers le puits. Ces pires arêtes sont des arêtes verticales. On peut déformer les branches à droite en conservant l'ordre de ces arêtes verticales et donc en conservant l'ordre des arêtes horizontales entre les colonnes  $i$  et  $i + 1$ . On a  $H$  arêtes horizontales donc il suffit de placer les arêtes verticales dans  $H$  colonnes différentes.

Le résultat de la déformation est donc un arbre de taille au plus  $H$  à gauche de la colonne  $i - 1$  et  $H$  à droite de la colonne  $i + 1$ . Il suffit alors de compléter l'arbre pour le rendre couvrant.  $\square$

Cette construction permet de mettre en évidence une borne inférieure sur le nombre d'ordres réduits et donc du nombre d'états de l'automate construit à partir des ordres induits. En effet il existe une injection des permutations séparables dans les ordres induits. Une *permutation séparable* est une permutation évitant les motifs (3142) et (2413) [Kit11]. Cela signifie que pour une telle permutation, il n'existe pas de quadruplet  $i < j < k < l$  tel que  $\sigma_j < \sigma_l < \sigma_i < \sigma_k$  ou  $\sigma_k < \sigma_i < \sigma_l < \sigma_j$ . On peut également donner la décomposition récursive suivante  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  est une permutation séparable de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  si et seulement s'il existe  $1 \leq i < n$  tel que  $\sigma^L = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)$  et  $\sigma^R = (\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$  sont soit des permutations séparables respectivement de  $\llbracket 1, i \rrbracket$  et de  $\llbracket i + 1, n \rrbracket$  (cas +), soit des permutations séparables respectivement de  $\llbracket n - i + 1, n \rrbracket$  et de  $\llbracket 1, n - i \rrbracket$  (cas -). La permutation 45213867 est une permutation séparable, cependant la permutation 48167235 ne l'est pas (4816 réalise (2413)). En itérant la décomposition, ces permutations se représentent naturellement par des arbres binaires étiquetés plongés dans le plan dont les étiquettes indiquent le découpage en permutations séparables plus petites ([Figure 3.14 \(a\)](#)). On peut numéroter les feuilles de gauche à droite de 1 à  $n$ . Les nœuds internes sont

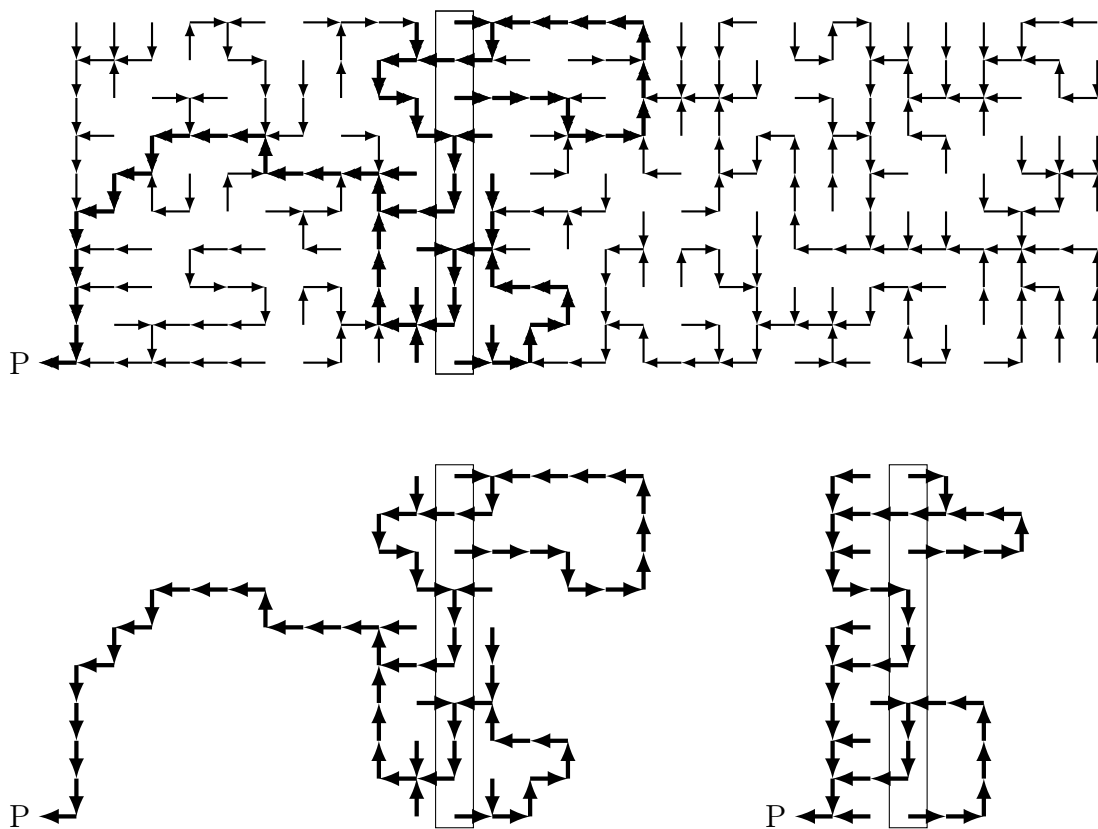


FIGURE 3.13 – Simplification d'un arbre couvrant réalisant un ordre induit donné sur la colonne encadrée



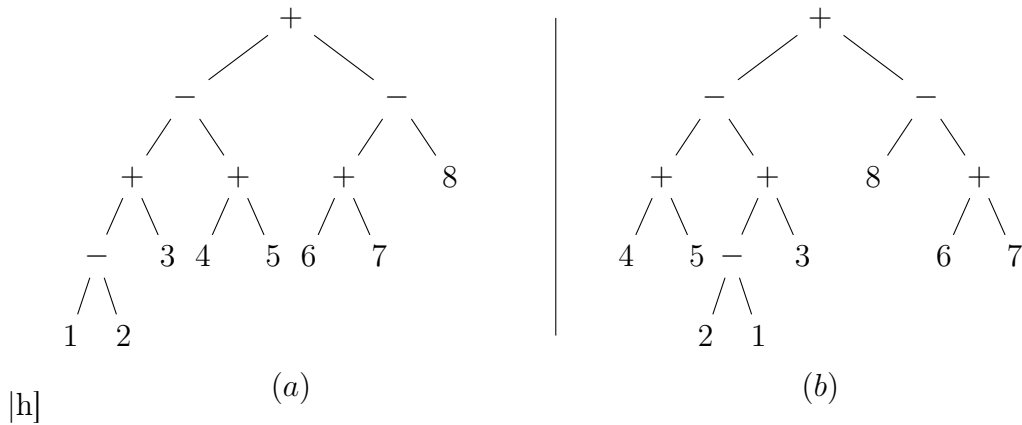


FIGURE 3.14 – Représentation d’une permutation séparable par un arbre binaire étiqueté

étiquetés par un signe indiquant quelle sous-permutation séparable contient les premières valeurs de la permutation séparable du nœud. La reconstruction d’une permutation séparable à partir d’un tel arbre peut être décrit comme le parcours en profondeur de l’arbre en visitant en premier le fils gauche dans le cas  $+$  et le fils droit dans le cas  $-$ . On peut également échanger les fils droits et gauches des nœuds  $-$  en conservant la numérotation des feuilles donnant la [Figure 3.14 \(b\)](#). La permutation séparable associée se lit alors sur les feuilles de gauche à droite.

On peut plonger un arbre de type (a) dans le graphe de la bande comme dans la [Figure 3.15](#). On retrouve de bas en haut sur cette figure l’arbre de type (a) lu de gauche à droite. On a une description également inductive : un nœud de type  $+$  crée une bifurcation verticale vers le haut, et un nœud de type  $-$  crée une bifurcation verticale vers le bas. Alors le parcours sommet-arête sur cet arbre en respectant l’ordre usuel choisi mettant la priorité sur les arêtes les plus à gauche reproduit le parcours en profondeur indiqué pour la reconstruction de la permutation séparable. L’ordre de visite des arêtes droites correspond alors à cette même permutation séparable. Donc pour toute permutation séparable, il existe un ordre réduit réalisant le même ordre de traitement des arêtes.

Le nombre de permutations séparables est connu sous le nom de nombre de Schröder qui est asymptotiquement équivalent [[Knu97](#)][p. 539] à  $\frac{1+\sqrt{2}}{2^{11/4}\sqrt{\pi}}(3+\sqrt{8})^n n^{-\frac{1}{2}}$ . On a donc une borne inférieure exponentielle sur le nombre d’états de l’automate.

Elle permet également de donner une caractérisation algorithmique peu efficace en suivant la remarque de la section précédente. Un ordre induit caractérise l’alternance de traitement d’ensemble d’arêtes et de sommets de part et d’autre de sa position. Ainsi, on peut à partir d’un ordre tenter de le compléter en suivant cette alternance en construisant un arbre canonique le réalisant.

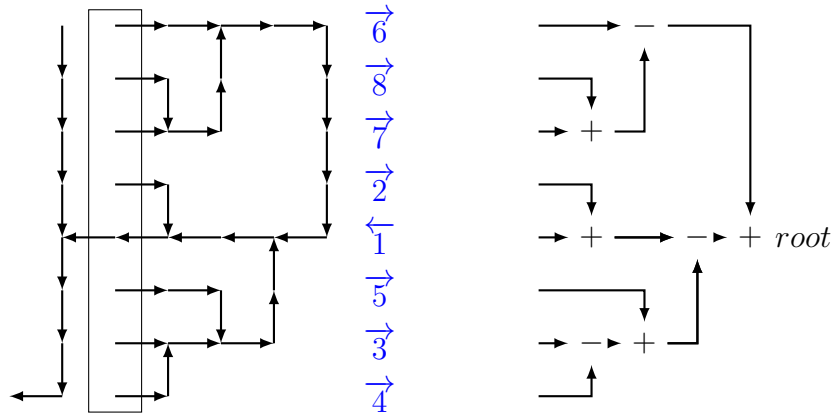


FIGURE 3.15 – Arbre binaire et permutation séparable, ici  $(4, 5, 2, 1, 3, 8, 6, 7)$

Un tel algorithme consiste à construire un arbre partiellement couvrant tel que l'arbre simplifié de la [Figure 3.13](#).

### 3.3.2 Construction des états de l'automate

La [Proposition 3.18](#) permet de proposer l'algorithme suivant. On génère tous les arbres couvrants du graphe  $\Lambda_{2H+3,H}$ . On exécute ensuite la bijection CLB sur ces arbres afin d'énumérer les parcours sommet-arête décroissants. On décompose en ordres induits ces parcours. On a donc calculé l'ensemble  $\mathcal{O}_H$  nous déterminant l'automate. Cependant, l'énumération des arbres couvrants reste fastidieuse et ceci n'a permis que le calcul des automates pour les hauteurs  $H = 3$  de 13 états et 125 transitions et  $H = 4$  de 76 états et 2640 transitions.

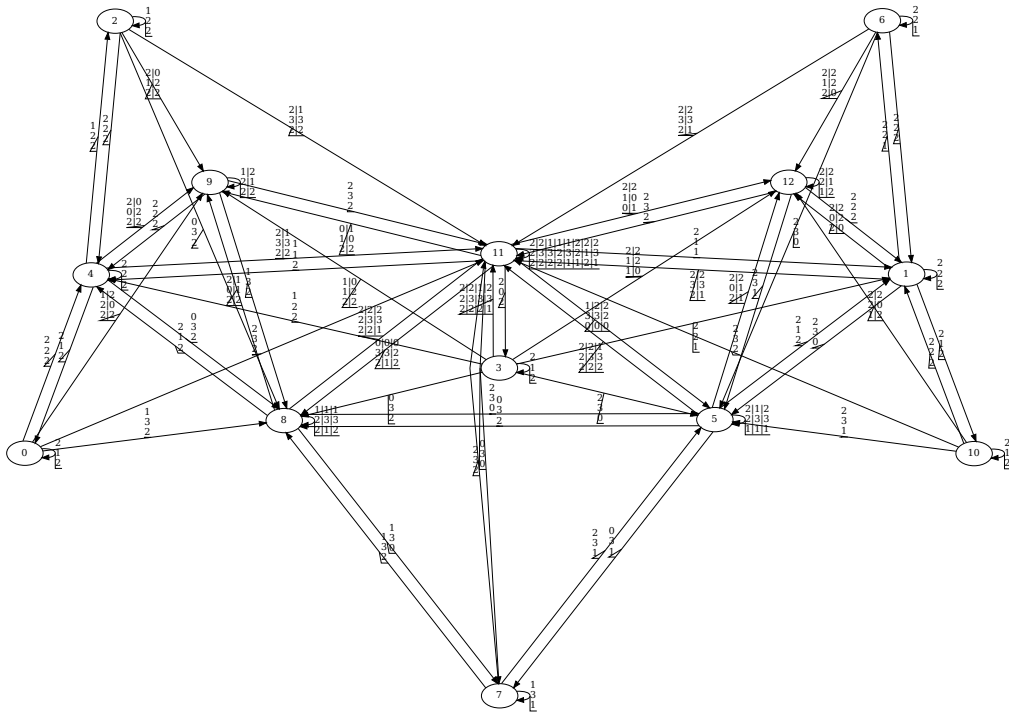


FIGURE 3.16 – Automate pour la hauteur  $H = 3$  à 13 états et 125 transitions

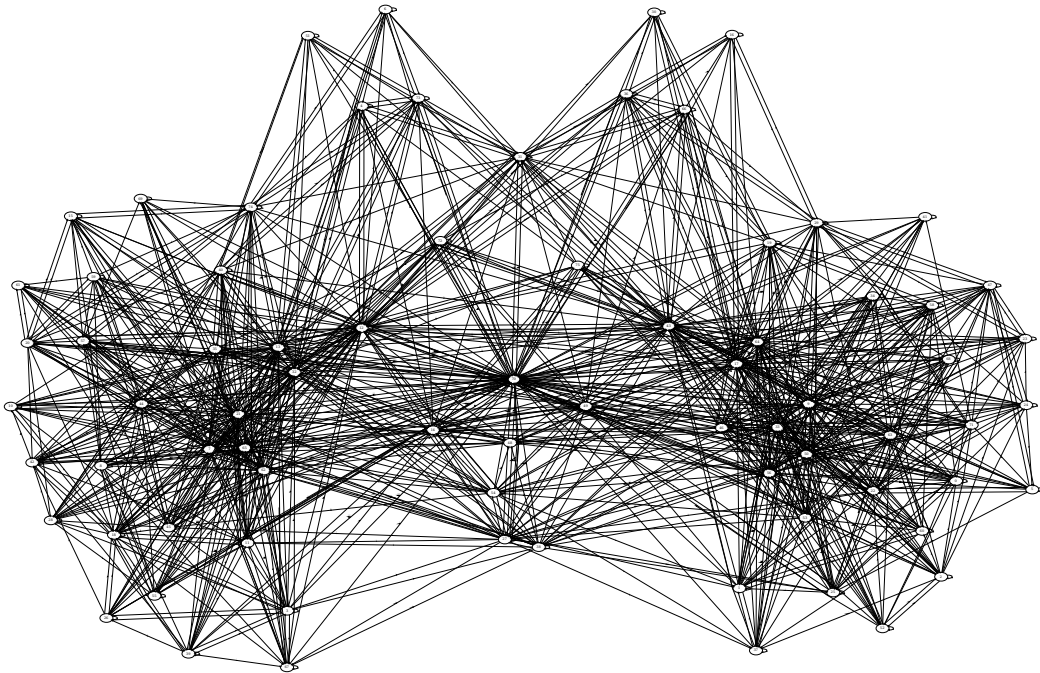


FIGURE 3.17 – Automate pour la hauteur  $H = 4$  à 76 états et 2640 transitions

## 4. Configurations bipériodiques récurrentes

On revient dans le cadre de la grille  $\mathbb{Z}^2$  avec la même question que la partie précédente. Comment représenter des configurations récurrentes du graphe infini  $\mathbb{Z}^2$  de manière finie ? C'est donc naturellement qu'on s'intéresse aux configurations bipériodiques de la grille. Ceci est d'autant plus motivé que ce type de configurations se présente localement dans les stabilisés de la pile du tas de sable. Ces motifs font partie des questions initiales sur le comportement de la pile quand le nombre de grains grandit. On retrouve l'analyse de ces motifs notamment dans [Pao12, DS13, Ost03, LPKS12].

Bien qu'on choisisse une représentation finie, la définition de récurrence pose également problème. En effet, rajouter un puits ou le placer sur un point périodiquement ne correspond pas au comportement attendu sur la grille. Dans le cas de la bande, le puits était tout d'abord aux extrémités avant de faire tendre la largeur du graphe vers l'infini. Le puits se retrouve alors à l'infini à gauche et à droite de la bande. On a vu que la notion de récurrente à gauche et de récurrente à droite était deux sous-types de récurrence distincts. Placer le puits à l'infini dans une direction semble une bonne manière de caractériser des sous-ensembles de récurrentes. Ce chapitre et le suivant s'appuient sur cette notion afin d'une part de proposer une notion de récurrence dans une direction et de l'accompagner avec une potentielle loi de groupe.

### 4.1 Configurations bipériodiques

Une configuration  $\eta$  de  $\mathbb{Z}^2$  est dite *bipériodique* s'il existe deux vecteurs non colinéaires  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  tels que  $\eta$  est invariante par translation de  $\mathbf{p}_1$  et de  $\mathbf{p}_2$  :  $\forall x, \eta(x) = \eta(x + \mathbf{p}_1) = \eta(x + \mathbf{p}_2)$ . On suppose que les vecteurs sont tels que  $\det(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) > 0$ . Une telle configuration est définie sur un *support* fini  $V$  qui pave le plan par translation des deux vecteurs par un motif  $\eta_V : V \mapsto \mathbb{Z}$ . Si  $V$  peut être quelconque, on le choisit tout d'abord comme l'ensemble des points dans le parallélogramme défini par  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ .  $V$  correspond au domaine fondamental du réseau engendré par  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  et est de taille  $\det(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . Autrement dit, pour chaque sommet  $u$  de la grille  $\mathbb{Z}^2$ , il existe un unique couple

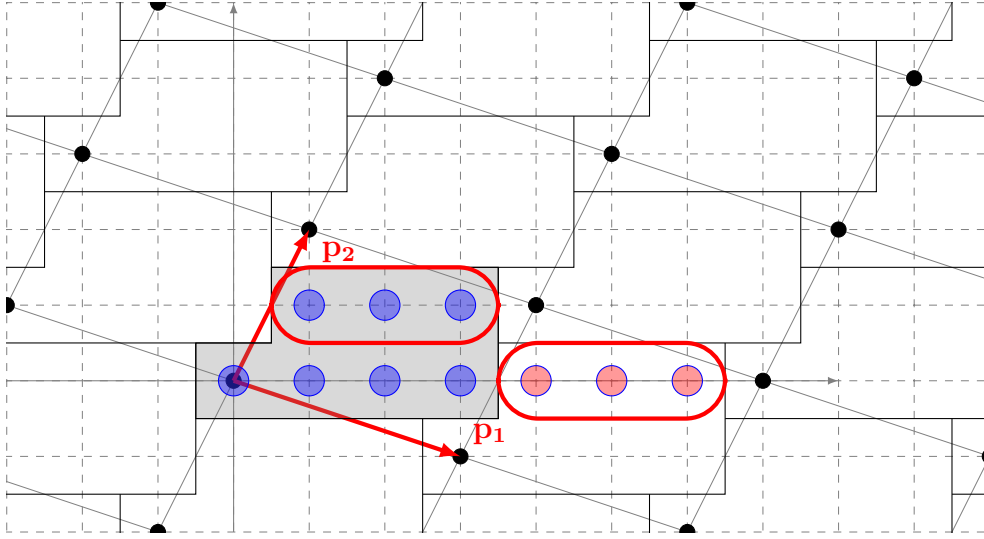


FIGURE 4.1 – Exemple de motif périodique

$(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $u - i\mathbf{p}_1 - j\mathbf{p}_2 \in V$  et  $\eta(u) = \eta_V(u - i\mathbf{p}_1 - j\mathbf{p}_2)$ . On dira alors que le sommet  $u$  appartient à la répétition  $(i, j)$  du motif  $\eta_V$ . On dit que le couple  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  est une période de la configuration bipériodique. La Figure 4.1 illustre par exemple un motif  $\eta_V$  de support  $V$  en gris de période les vecteurs de coordonnées  $(3, -1)$  et  $(1, 2)$ .

Il n'y a pas unicité de la période  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . En effet, le réseau  $\mathbf{p}_1\mathbb{Z} + \mathbf{p}_2\mathbb{Z}$  est préservé par l'action du groupe spécial linéaire  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Toute paire  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$  obtenue par un changement de base par un élément de  $SL_2(\mathbb{Z})$  à partir de  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  est une période de  $\eta$ .

En particulier, on peut choisir le changement de base par l'élément :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}_{2y}}{gcd} & a \\ \frac{-\mathbf{p}_{1y}}{gcd} & b \end{pmatrix}$$

où  $gcd$  est le PGCD de  $\mathbf{p}_{1y}$  et  $\mathbf{p}_{2y}$  et  $a$  et  $b$  sont des coefficients de Bézout tels que  $a\mathbf{p}_{1y} + b\mathbf{p}_{2y} = gcd$ . Ainsi, on obtient la période  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$  où  $\mathbf{p}'_1 = (\frac{\det(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{gcd}, 0)$  et  $\mathbf{p}'_2 = (a\mathbf{p}_{1x} + b\mathbf{p}_{2x}, gcd)$ . On peut alors s'arranger pour que  $|a\mathbf{p}_{1x} + b\mathbf{p}_{2x}|$  soit minimal. Ce changement de base aboutit à la Figure 4.2. Il est choisi afin de trouver un vecteur de période colinéaire à l'axe des abscisses. On peut réaliser la même chose dans le cas de l'axe des ordonnées en obtenant une périodicité selon cet axe de  $\frac{|V|}{gcd(\mathbf{p}_{1x}, \mathbf{p}_{2x})}$ .

Le support  $V$  peut alors être choisi de forme rectangulaire de taille  $\frac{|V|}{gcd} \times gcd$ . On note alors  $W = \frac{|V|}{gcd}$  sa largeur et  $H = gcd$  sa hauteur. La période  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  s'écrit alors de la forme  $(W\mathbf{e}_x, k\mathbf{e}_x + H\mathbf{e}_y)$ . On note la périodicité selon l'axe des abscisses. On se placera toujours dans cette situation dans la suite du chapitre.

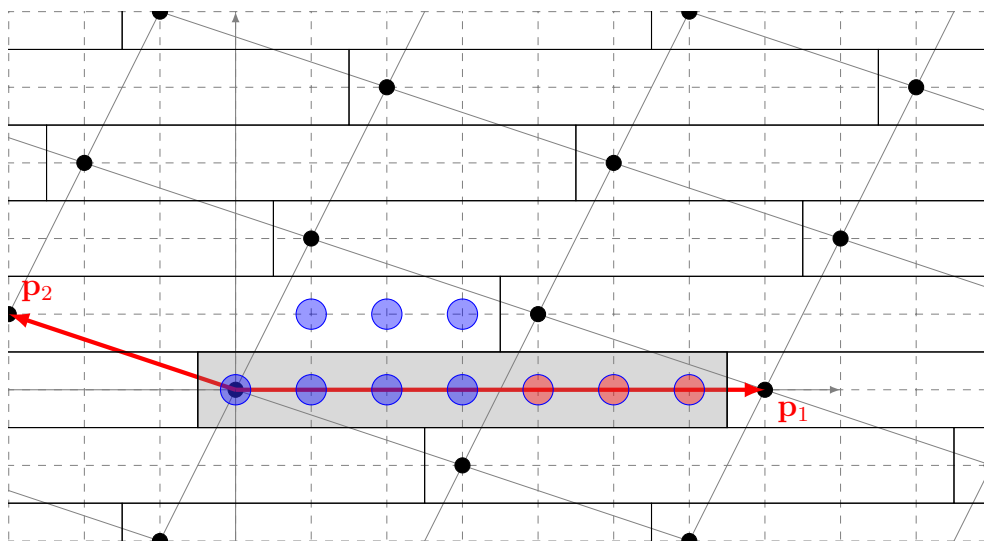


FIGURE 4.2 – Simplification à un motif rectangulaire de même taille

Pour simplifier l'étude, on peut également agrandir la taille du motif comme dans la [Figure 4.3](#) en le répétant verticalement afin d'obtenir pour  $V$  le rectangle  $Rec_{W,H} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq x < W, 0 \leq y < H\}$  la période  $(W\mathbf{e}_x, H\mathbf{e}_y)$ . Dans ce cas,  $W = \frac{|V|}{\gcd(\mathbf{p}_{1,y}, \mathbf{p}_{2,y})}$  et  $H = \frac{|V|}{\gcd(\mathbf{p}_{1,x}, \mathbf{p}_{2,x})}$ . On s'intéresse aux configurations de ce type qui sont récurrentes.

**Remarque :** Cette dernière simplification diminue la précision de l'étude des configurations bipériodiques. La suite de l'étude montrera que cette perte de généralité peut être rattrapée afin que les résultats et théorèmes s'appliquent sur les configurations bipériodiques pour période quelconque.

## 4.2 Configuration récurrente dans une direction

La caractérisation des configurations récurrentes est centrée sur l'utilisation d'un puits qui est un sommet du graphe. Dans le cas périodique, on souhaite que les opérations soient périodiques, notamment, il ne doit pas y avoir de singularité. Si le puits est un sommet de la grille, par cet argument de périodicité, il faut qu'il soit présent dans chaque répétition du support du motif de la configuration récurrente [\[MRS04\]](#). Cela revient à travailler sur le tore avec un sommet puits. Les supports ne sont pas tous de la même taille, il faut donc une définition de récurrence par taille mais on retrouve toutes les propriétés du cas fini. Une autre possibilité consiste à s'intéresser à une portion finie du plan délimitée par un polygone en fusionnant tous les sommets à l'extérieur de ce polygone [\[CPS15\]](#). On fait ensuite grandir ce polygone pour obtenir un comportement limite.

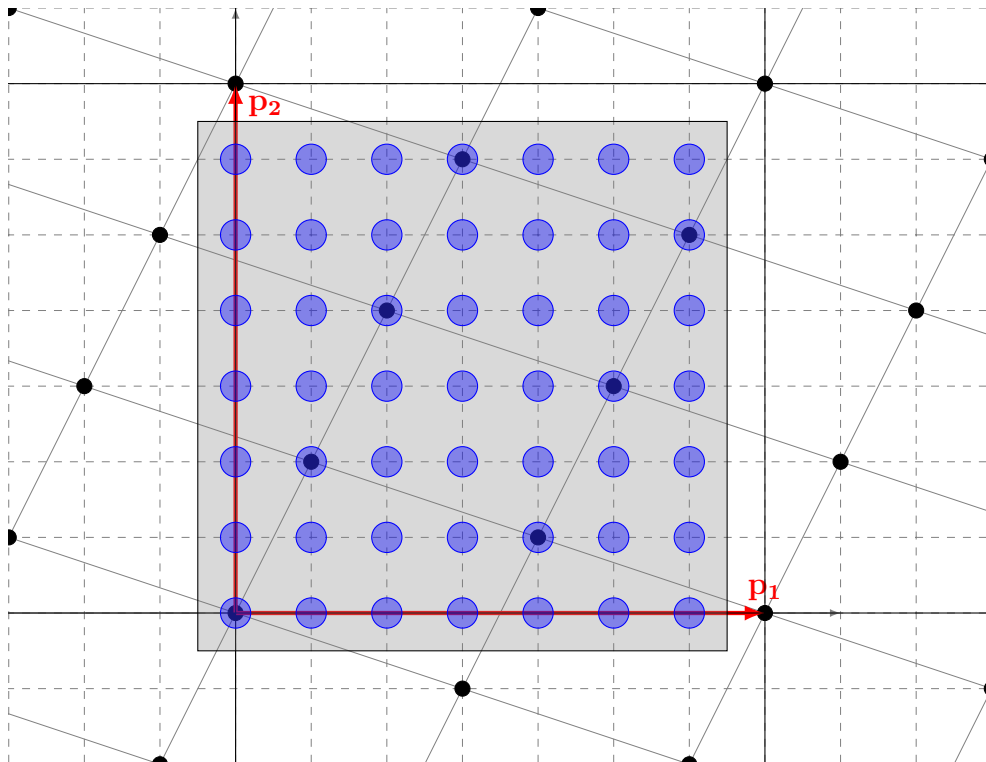


FIGURE 4.3 – Répétition du motif pour atteindre une période selon les deux axes

La présence de motifs périodiques dans des zones de la pile de sable ainsi que sur une variation en ajoutant initialement 2 grains sur tous les sommets de la grille [Ost03] suggère une autre approche. Quand le bord faisant face au puits d'une zone périodique est éboulé, alors cela propage une vague d'éboulements traversant la zone périodique. Autrement dit, chaque sommet de la zone à effets de bord près s'éboule une fois. Ainsi, l'éboulement de l'origine peut entraîner l'éboulement d'un bord de la zone qui se comporte comme un puits, et la zone périodique se comporte alors comme une configuration récurrente. Ce bord peut localement ressembler à un segment qu'on décide d'approcher par un demi-plan. Ainsi on propose de s'intéresser à ce type de configuration en observant une zone périodique suffisamment éloignée de l'origine en fixant un bord arbitraire mais bien choisi représentant l'action de l'éboulement du puits.

**Définition 4.1.** Soit  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$  un vecteur non nul du réseau entier. Soit  $\mathcal{C}_M$  une configuration stable bipériodique de motif  $M$ . La configuration  $\mathcal{C}$  est dite récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$  si pour toute droite  $D$  orthogonale à  $\mathbf{s}$  séparant le réseau en une partie positive  $P^+ = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid xs_x + ys_y > c_D\}$  et négative  $P^- = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid xs_x + ys_y \leq c_D\}$ , l'éboulement forcé des sommets de la partie positive entraîne l'éboulement légal de tout le reste de la configuration. Chaque sommet s'éboule une et une seule fois.

Par exemple, pour  $\mathbf{s} = (0, 1)$ , une configuration stable est récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$  si pour tout entier  $y$ , l'éboulement forcé des sommets d'ordonnées supérieures à  $y$  entraîne l'éboulement de tous les autres sommets.

Ainsi, la configuration stable de motif  $1 \times 1$  constante à 3 est récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$  mais la configuration stable constante à 2 ne l'est pas. Et cette dernière est récurrente dans la direction  $(1, 1)$ .

**Théorème 4.2.** On peut tester en temps fini si une configuration bipériodique est récurrente dans une direction.

L'idée générale est de forcer l'éboulement d'un demi-plan arbitraire et d'utiliser la périodicité selon la droite séparatrice pour se restreindre à un cylindre, puis constater qu'après un nombre fini d'éboulements, au moins une répétition du motif complet s'est éboulé, ce qui permet d'étendre l'éboulement au reste du cylindre par périodicité selon  $\mathbf{s}$  et de montrer que le choix du demi-plan dont on force l'éboulement peut être arbitraire.

La construction s'appuie sur la bijection de Cori et Le Borgne[CLB03] introduite dans les préliminaires qui permet en retenant l'ordre de traitement des éléments du graphe, ses arêtes et sommets, de représenter une configuration récurrente ainsi qu'un arbre couvrant de manière bijective dans le cas fini. On se donne donc un ordre total  $\prec_{\mathbf{s}}$  sur les arêtes qui est l'ordre lexicographique sur les coordonnées des milieux des arêtes dans le repère orthogonal direct  $((0, 0), \mathbf{s}, \mathbf{s}^\perp)$ . En d'autres termes, soient  $e_1$  et  $e_2$ , deux arêtes et  $m_1$  et  $m_2$  leurs milieux. Alors  $e_1 \prec_{\mathbf{s}} e_2$  si et seulement si  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_1 < \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_2$  ou  $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_1 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_2$



et  $\mathbf{s}^\perp \cdot \mathbf{m}_1 < \mathbf{s}^\perp \cdot \mathbf{m}_2$ ). On remarque que cet ordre n'est pas bien fondé sur les arêtes. Cet ordre correspond à l'ordre dans lequel on va traiter l'arrivée des grains sur les arêtes dont une extrémité s'est éboulée, on choisira l'arête maximale. Dès qu'un sommet a 4 grains, il s'éboule et envoie un grain par ses arêtes incidentes. De plus, comme de nombreuses bijections entre les arbres couvrants et les configurations récurrentes, l'arête déstabilisant un sommet est ajoutée à une forêt couvrante de la grille.

La principale difficulté du critère est le traitement d'une infinité d'éboulements. Il va notamment y avoir une infinité d'éboulements entre l'éboulement d'un sommet et celui de son voisin. On va montrer que ces difficultés peuvent être contournées en s'appuyant sur la périodicité de l'exécution de la transformation CLB selon l'orthogonale à la direction du puits  $\mathbf{s}^\perp$  puis sur une quasi périodicité selon la direction du puits  $\mathbf{s}$ .

Le principe général est donc le suivant : on force l'éboulement d'un demi-plan, puis on fonctionne par balayage du plan par une demi droite. Le plan se décompose en trois zones (Figure 4.4), la zone d'éboulements forcés, une zone gelée dans laquelle on gèle le traitement des arêtes et une zone intermédiaire de travail. Le traitement des arêtes par la bijection CLB se fait en éloignant la zone gelée du puits. À chaque déplacement de cette zone, on exécutera la bijection CLB jusqu'à ce que les seules arêtes pendantes soient des arêtes gelées. L'ordre choisi garantit que les arêtes gelées sont toutes plus petites que les arêtes de la zone de travail. On met alors en évidence un traitement par bloc quand on déplace ce demi-plan. Par exemple, sur la Figure 4.4, on pourra avoir un ensemble bleu de sommets éboulés quand la zone gelée commence à la droite  $d_1$ . Quand on déplace la zone gelée successivement de la droite  $d_1$  aux droites  $d_2$ ,  $d_3$  puis  $d_4$ , on observera l'éboulement périodique des zones rouges, vertes puis violette.

Dans les deux sections suivantes, on montre le comportement périodique et ultimement périodique du critère affaibli en se plaçant dans le cas d'un puits selon un axe puis dans le cas d'un puits qui n'est pas selon un axe.

### 4.2.1 Cas de la direction $(0, -1)$

On se place tout d'abord dans le cas où  $\mathbf{s} = (0, -1)$ . Soit  $\mathcal{C}$  une configuration de motif  $M$  de taille  $W \times H$  et de période  $W\mathbf{e}_x$  et  $H\mathbf{e}_y$ , récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$ . On force l'éboulement des sommets du demi-plan  $y < 0$ . On éboule ensuite légalement les sommets par distance croissante à la droite séparatrice  $y = 0$  en respectant la transformation CLB.

Ainsi, la Figure 4.5 montre l'ordre d'éboulement des sommets pour une configuration donnée ainsi que le recouvrement obtenu sur la partie négative (au sens de la direction  $\mathbf{s}$ ,  $y \geq 0$ ) de la grille.

L'éboulement des sommets du demi-plan  $y > 0$  est découpé en étapes contrôlées par le traitement des arêtes. À l'étape  $t \geq 0$ , on autorise le traite-

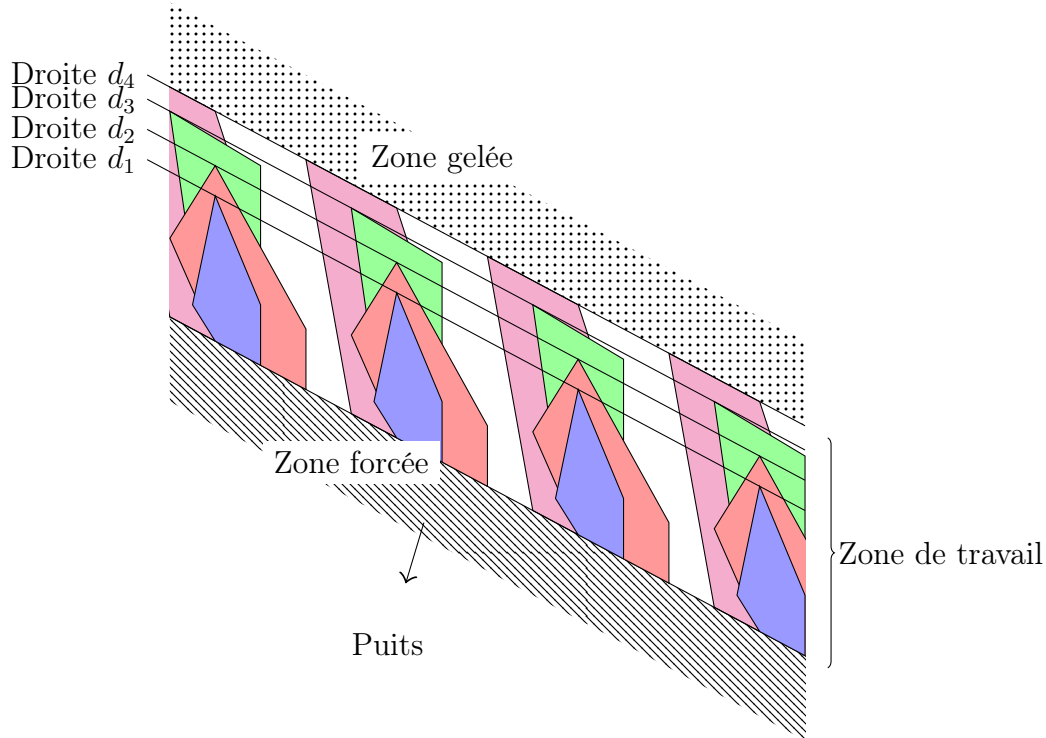


FIGURE 4.4 – Déroulement général du critère affaibli par balayage

ment des arêtes dont les milieux sont à une distance strictement inférieure à  $t$  de la droite  $y = 0$ . Autrement dit, il s'agit des arêtes incidentes aux sommets d'ordonnées  $y < t$ . Notamment, si les arêtes entre les sommets d'ordonnées  $t-1$  et  $t$  sont traitées, ce n'est pas le cas des arêtes entre des sommets de même ordonnée  $y = t$ . Ceci peut donc entraîner l'éboulement de sommets d'ordonnée  $t$  par déstabilisation depuis les sommets d'ordonnée  $t-1$  mais n'autorise pas la propagation d'éboulements sur la ligne  $y = t$ . Ainsi, ces arêtes sont toujours les dernières à être traitées ce qui permet de découper une étape en deux phases. Dans la première phase, on n'autorise que le traitement des arêtes internes aux sommets d'ordonnées  $y < t$ , puis dans la seconde, on traite toutes les arêtes entre les lignes  $y = t-1$  et  $y = t$  permettant l'éventuel éboulement de sommets d'ordonnée  $t$  sans pour autant propager de grain les autres arêtes étant interdite à cette étape.

On pourrait dire que l'étape  $t$  commence au traitement de la première arête interdite à l'étape précédente. Mais il n'existe pas de première arête parmi l'infinité d'arêtes pendantes interdites.

4.2. Configuration récurrente dans une direction

	3	3	3	0	3	3	3	0	3	3
	0	1	3	3	0	1	3	3	0	1
	3	1	1	3	3	1	1	3	3	1
	3	3	3	0	3	3	3	0	3	3
	0	1	3	3	0	1	3	3	0	1
	3	1	1	3	3	1	1	3	3	1
	3	3	3	0	3	3	3	0	3	3
$y = 0$	0	1	3	3	0	1	3	3	0	1
	3	1	1	3	3	1	1	3	3	1
	3	3	3	0	3	3	3	0	3	3
				$x = 0$						

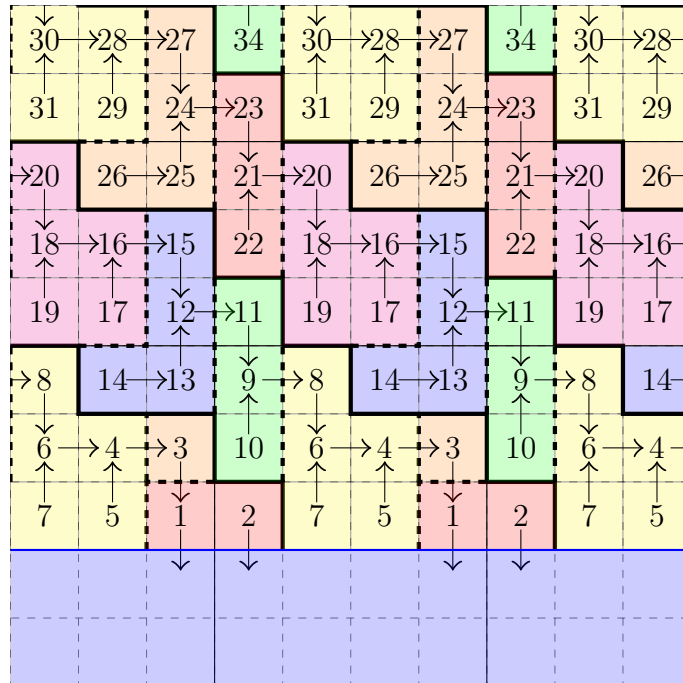


FIGURE 4.5 – Déroulement du critère par étapes

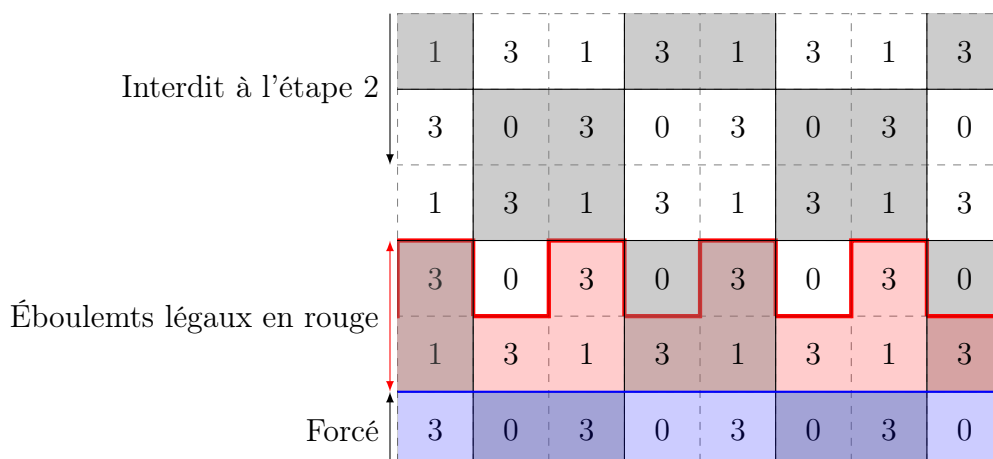


FIGURE 4.6 – Exemple de configuration où le critère s’arrête après l’étape  $t = 1$

Ainsi, à l’étape  $t = 0$ , seules les arêtes entre les sommets d’ordonnée  $-1$  et d’ordonnée  $0$  sont traitées. Ce découpage est représenté par les blocs de couleur sur la Figure 4.5. À l’étape  $0$ , deux sommets sont éboulés, et à l’étape  $1$ , un seul sommet s’éboule car il n’y a pas de propagation via les arêtes internes à la ligne  $y = 1$ . Cette propagation est réalisée à l’étape  $2$  (bloc jaune).

**Lemme 4.3.** *À chaque étape  $t \geq 0$ , au moins un sommet d’ordonnée  $y = t$  de chaque période est éboulé. L’ensemble des sommets qui s’éboulent à chaque étape est périodique de période orthogonale à la direction du puits et la période est au plus  $W\mathbf{e}_x$  dans le cas  $\mathbf{s} = (0, -1)$ .*

On se place dans le cas  $\mathbf{s} = (0, -1)$ .

*Démonstration.* **Cas  $t = 0$ .** Supposons qu’aucun sommet ne s’éboule, alors, chaque sommet a au plus 3 grains, la configuration est donc stable. Ceci contredit la définition de récurrence de  $\mathcal{C}$ . Donc au moins un sommet s’éboule donc avait 3 grains avant le traitement des arêtes. Donc, il existe un sommet dans chaque période ayant 3 grains. Donc, ceux-ci s’éboule en recevant le grain de leur voisin d’ordonnée  $-1$ .

**Cas  $t > 0$ .** On suppose que la propriété est vraie pour l’étape  $t - 1$ . Soit  $E_{t-1}$  l’ensemble des sommets éboulés à l’issue de cette étape. Cet ensemble est connexe par hypothèse de stabilité initiale. D’après l’hypothèse de récurrence, il existe un sommet  $v$  d’ordonnée  $t - 1$  qui s’est éboulé à l’étape  $t - 1$ . Qui plus est, toutes les répétitions  $(v + kW\mathbf{e}_x)_{k \neq 0}$  de ce sommet par translation  $W\mathbf{e}_x$  se sont également éboulés par périodicité. Ainsi l’ensemble des sommets d’ordonnées  $y < t$  non éboulés lors des étapes  $0$  à  $t - 1$  est un ensemble non connexe car séparé par les sommets éboulés menant aux  $(v + kW\mathbf{e}_x)_{k \neq 0}$ , de composantes connexes toutes finies et stable par translation par  $W\mathbf{e}_x$ . À l’étape  $t$ , on utilise le découpage en deux phases suggéré précédemment. Lors de la

première phase, on traite indépendamment les arêtes de chaque portion finie connexe. Les éboulements d'un sommet et de ses répétitions de période  $W\mathbf{e}_x$  sont donc indépendants et identiques. La deuxième phase permet d'ébouler des sommets d'ordonnées  $y = t$  qui sont également indépendant par l'absence de propagation, donc en particulier, les répétitions d'un sommet qui s'éboule s'éboulent également. Enfin, de la même manière que précédemment, si aucun sommet ne s'éboule, alors la configuration obtenue est stable (Figure 4.6) ce qui contredit la récurrence de la configuration. Donc parmi les sommets d'ordonnée  $y = t$ , seuls ceux ayant 3 grains dans la configuration d'origine et dont le voisin d'ordonnée  $t - 1$  s'est éboulé s'éboulent.  $\square$

**Corollaire 4.4.** *Toute configuration stable récurrente dans la direction  $(0, -1)$  a au moins un sommet de 3 grains par ordonnée.*

Ainsi, à chaque étape, on agrandit la composante connexe des sommets éboulés. À la fin de chaque étape, cette composante est périodique selon l'axe des abscisses de période  $W\mathbf{e}_x$ .

De plus on commence par ébouler tous les sommets d'ordonnées  $y < t$ . Or l'ensemble des sommets non éboulés d'ordonnées  $y < t$  est l'union des répétitions de composantes connexes finies deux à deux déconnectées. On peut donc les traiter de manière indépendante et en particulier, en traiter une suffit à simuler le traitement de toutes ses répétitions. Ces répétitions se faisant par translations par le vecteur  $W\mathbf{e}_x$ , on sait que deux sommets distant de  $W\mathbf{e}_x$  sont dans des composantes distinctes. On restreint alors l'étude à un cylindre  $\mathbb{Z}/_{W\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$  en ne s'intéressant à chaque étape qu'à une répétition. Les éboulements étant en nombre fini à chaque étape, on peut les réordonner sans modifier l'ensemble des sommets éboulés à la fin de l'étape.

Ainsi, l'ordre choisi et le découpage par étapes permet de se ramener à des éboulements finis par étapes dans des zones finies construites par l'ordre des arêtes. À chaque étape, une fois les zones finies déterminées, on éboule les sommets sans se soucier de l'ordre en maintenant tout de même les arêtes gelées. On ignore ici temporairement une information qui sera nécessaire par la suite. Notamment les arêtes fusionnent, l'ordre selon l'orthogonale à la direction du puits est perdu et l'ordre des éboulements entre les répétitions n'est donc pas conservé.

**Corollaire 4.5.** *Toute configuration stable récurrente dans la direction  $(0, -1)$  a au moins un sommet de 3 grains par ordonnée.*

On travaille désormais sur le cylindre  $\mathbb{Z}/_{W\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ . On va montrer que le critère de récurrence est autostabilisant. Autrement dit, à partir d'une certaine étape  $t = T$ , le comportement du critère est périodique et ne dépend que de la configuration. En particulier ce résultat permet de déduire l'indépendance du critère par translation du demi-plan dont l'éboulement est forcé.

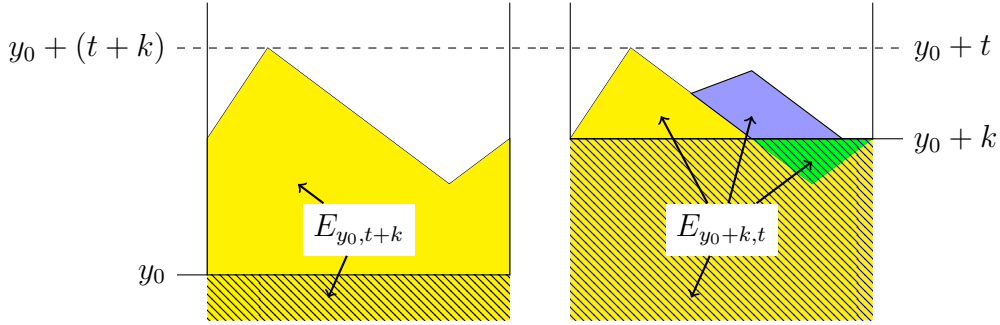


FIGURE 4.7 – Inclusion des éboulements quand on force l'éboulement de  $y < y_0 + k$

**Lemme 4.6.** *Pour tout sommet  $v$ , si  $v$  est éboulé à l'étape  $t_v$ , alors le sommet  $v - k \cdot H\mathbf{e}_y$  pour  $k > 0$  est également éboulé au plus tard à l'étape  $t_k \leq t_v - kH$ .*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet s'ébouyant à l'étape  $t_v$ . Alors, quitte à réordonner les éboulements, on peut forcer les éboulements du demi cylindre  $y \leq -H$  et reproduire les mêmes éboulements à une translation par le vecteur  $(0, -H)$  près puis forcer le reste du demi cylindre  $y \leq 0$ . Donc, le sommet  $v - H\mathbf{e}_y$  est éboulé au plus tard à l'étape  $t_v - H$ .  $\square$

Un des éléments principaux des preuves suivantes est le suivant : forcer plus d'éboulements entraîne au moins autant d'éboulements. Par exemple, notons  $E_{y_0, t}$  l'ensemble des sommets éboulés suite à l'éboulement forcé du demi-plan  $y < y_0$  à la fin de l'étape  $t$ , donc en autorisant le traitement des arêtes incidentes aux sommets d'ordonnées  $y < y_0 + t$ . Alors pour tout  $k > 0$ ,  $E_{y_0, t+k}$  est un sous-ensemble de  $E_{y_0+k, t}$  comme l'illustre la Figure 4.7. Forcer les éboulements des sommets d'ordonnées  $y < y_0 + k$  revient à forcer les éboulements des sommets d'ordonnées  $y < y_0$ , obtenir  $E_{y_0, t+k}$  (en jaune) par éboulements légaux puis forcer les éboulements des sommets d'ordonnées  $y < y_0 + k$  qui n'ont pas été éboulés (en vert) et obtenir d'autres éboulements légaux supplémentaire (en bleu).  $E_{y_0+k, t}$  est formé de  $E_{y_0, t+k}$  en jaune, d'éboulements forcés supplémentaires en vert et des éboulements légaux permis par ces derniers éboulements forcés, en bleu.

Couplé à la périodicité par  $H\mathbf{e}_y$ , on remarque que les positions

$$\{(x, y - (t + H)) \mid \forall (x, y) \in E_{0, t+H}\}$$

relatives à la droite  $y = t + H$  des sommets éboulés à l'étape  $t + H$  sont inclus dans les positions  $\{(x, y - t) \mid \forall (x, y) \in E_{0, t}\}$  relatives à la droite  $y = t$  des sommets éboulés à l'étape  $t$ .

**Corollaire 4.7.** *Soit  $F_k = \{(x, y - kH) \mid \forall (x, y) \in \llbracket 1, W \rrbracket \times \llbracket kH + 1, (k + 1)H \rrbracket \cap E_{0, kH}\}$  l'ensemble des positions relatives des sommets éboulés dans le*

motif  $\llbracket 1, W \rrbracket \times \llbracket kH + 1, (k + 1)H \rrbracket$  à l'issue de l'étape  $kH$ . La suite des  $(F_k)_{k \geq 0}$  est décroissante. En particulier, elle est constante à partir d'un certain rang.

De plus, soit  $G_k = \{(x, y - kH) \mid (x, y) \notin E_{0, kH}, y \leq kH\}$  l'ensemble des positions relatives par rapport au sommet  $(0, kH\mathbf{e}_y)$  des sommets non éboulés à l'issue de l'étape  $kH$ . La suite des  $(G_k)_{k > 0}$  est croissante et  $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq W, y \leq -H\} \subset G_k \subset \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq W, y \leq 0\}$ .

Si une configuration est récurrente, on veut que tout sommet s'éboule. L'objectif est d'obtenir un critère s'exécutant en temps fini. On passe par le lemme suivant.

**Lemme 4.8.** *Pour tout sommet  $v$ , il existe un instant  $t_v$  tel que  $v$  s'éboule à l'étape  $t_v$ .*

*Démonstration.* On tient un raisonnement par l'absurde. Soit  $v$  un sommet tel qu'il n'existe pas d'instant  $t$  tel que  $v$  s'éboule à l'étape  $t$ . Montrons que la configuration de départ n'est dans ce cas pas récurrente. L'intuition associée est que le sommet  $v$  attend un grain de l'infini. D'après le [Lemme 4.6](#), les sommets  $v + k \cdot H\mathbf{e}_y$  pour  $k > 0$  ne s'éboulent à aucune étape. L'ensemble de ces sommets par période ne s'éboule à aucune étape est croissant et donc est constant à partir d'un certain rang.

Soit l'union de ces ensembles sur toutes les périodes est déconnectée. Alors il existe un sous-ensemble fini connexe non éboulé dont tous les voisins se sont éboulés ([Figure 4.9](#)). Ces sommets ne pourront donc plus recevoir de grain, donc ne s'ébouleront jamais. Donc la configuration n'est pas récurrente.

Soit l'union de ces ensembles est connexe ([Figure 4.8](#)). Alors il est périodique à partir d'une certaine distance à la droite  $y = 0$ . On peut alors simuler l'éboulement légal de toutes les parties périodiques. Les sommets ne s'ébouleant jamais ont donc gagné autant de grains que de voisins éboulés. Ces sommets ne s'ébouleant pas sur la première période, ils n'ont pas reçu assez de grains. C'est donc le cas de leurs répétitions dans les périodes suivantes. Ils sont donc tous stables. Le résultat de cet éboulement est une configuration stable où une partie des sommets ne s'est pas éboulée. Donc la configuration n'est pas récurrente.  $\square$

On sait donc que si une configuration est récurrente, chaque sommet s'éboule à une étape du critère. Par le lemme suivant, cela signifie que le critère peut se simuler en temps fini et borné par la taille du motif.

**Lemme 4.9.** *Soit  $t_1 = \max_{v \in \llbracket 0, W-1 \rrbracket \times \llbracket 1, H \rrbracket} t_v$  le premier instant où tous les sommets de la première répétition du motif sont éboulés. Alors tous les sommets de la  $k$ -ième répétition  $\llbracket 0, W-1 \rrbracket \times \llbracket (k-1)H+1, kH \rrbracket$  sont éboulés au plus tard à l'étape  $t_1 + (k-1)H$ . De plus  $t_1 \leq W \cdot H + H$ .*

*Démonstration.* De la même manière que pour le [Lemme 4.6](#), à l'instant  $t_1$ , tous les sommets d'ordonnées inférieures à  $H$  sont éboulés. Donc à  $t_1 + H$ ,

11	1	3	3	1	0	1	3	3	1
10	2	3	3	1	3	2	3	3	1
9	2	3	3	3	2	2	3	3	3
8	1	3	3	1	0	1	3	3	1
7	2	3	3	1	3	2	3	3	1
6	2	3	3	3	2	2	3	3	3
5	1	3	3	1	0	1	3	3	1
4	2	3	3	1	3	2	3	3	1
3	2	3	3	3	2	2	3	3	3
2	1	3	3	1	0	1	3	3	1
1	2	3	3	1	3	2	3	3	1
0	2	3	3	3	2	2	3	3	3
-1	1	3	3	1	0	1	3	3	1

FIGURE 4.8 – Exemple de configuration non récurrente



11	1	3	3	1	1	1	3	3	1
10	1	1	3	2	1	1	1	3	2
9	3	3	1	3	3	3	3	1	3
8	1	3	3	1	1	1	3	3	1
7	1	1	3	2	1	1	1	3	2
6	3	3	1	3	3	3	3	1	3
5	1	3	3	1	1	1	3	3	1
4	1	1	3	2	1	1	1	3	2
3	3	3	1	3	3	3	3	1	3
2	1	3	3	1	1	1	3	3	1
1	1	1	3	2	1	1	1	3	2
0	3	3	1	3	3	3	3	1	3
-1	1	3	3	1	1	1	3	3	1

FIGURE 4.9 – Exemple non récurrent : complément déconnecté fini

quitte à réordonner les éboulements, on peut forcer les éboulements du demi-plan  $y \leq H$ , puis réaliser tous les éboulements possibles. Le comportement est identique au cas de la première répétition avec l'éboulement du demi-plan  $y \leq 0$ . Autrement dit,  $E_{0,t_1+H} = E_{H,t_1} \supset \llbracket 0, W-1 \rrbracket \times \llbracket H+1, 2H \rrbracket$ . Donc, tous les sommets de la deuxième répétition sont éboulés à l'étape  $t_1 + H$ . On peut étendre le raisonnement par récurrence pour tout  $k$ .

On sait également que la suite des sommets éboulés  $G_k$  du [Corollaire 4.7](#) est croissante et bornée. De plus en posant  $K = \lceil \frac{t_1}{H} \rceil$ , alors, en suivant le même raisonnement,  $G_{K+1} = G_K$ . On se place à l'issue de l'étape  $t_1 - 1$ . Soit  $v$  un des sommets non éboulés de la première répétition d'ordonnée minimale. Ce sommet s'éboule à l'étape suivante. Donc il existe une chaîne finie d'éboulements des sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n = v$  d'un sommet d'ordonnée  $y = t_1 - 1$  vers le sommet  $v$ . Alors, d'après le [Lemme 4.6](#), les sommets  $v_i - kH\mathbf{e}_y$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $k > 0$  sont déjà éboulés avant l'étape  $t_1 - 1$ . Donc, les sommets ont tous des représentants distincts dans le motif  $W \times H$ . On en déduit  $n \leq W \cdot H$ . De plus, on sait que la distance entre  $v_1$  et  $v$  est au plus  $n$ . Donc  $t_1 \leq W \cdot H + H$ .  $\square$

On a donc un algorithme qui vérifie en temps fini si une configuration périodique de motif  $W \times H$  est récurrente dans la direction  $(0, -1)$ . On répète le motif sur un cylindre de largeur  $W$ . On éboule un demi cylindre puis on fait les éboulements en s'arrêtant à distance  $(W+1)H$  du demi cylindre. Si au moins la première période est éboulée, alors, la configuration passe le critère de récurrence.

À ce stade, il est clair que cette caractérisation fonctionne pour les quatre directions  $(\pm 1, 0)$  et  $(0, \pm 1)$ . Cependant, les preuves sont à généraliser pour les autres directions.

### 4.2.2 Cas général

On se place dans le cas d'une direction  $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$  où  $s_x$  et  $s_y$  sont non nuls. Sans perte de généralité, on suppose que  $s_y \leq s_x < 0$ .

Soit  $C$  une configuration périodique de période  $W \times H$ . Pour plus de confort on se place dans le cas où la diagonale de la période est orthogonale au puits,  $s_x W + s_y H = 0$ . Quitte à multiplier  $\mathbf{s}$  par un scalaire positif et utiliser une période plus grande du motif de  $C$ , on peut supposer que  $H = -s_x$  et  $W = -s_y$ . En réalisant cette opération, on perd la finesse de la période de la configuration. On tentera par la suite de s'abstenir de cette hypothèse.

On manipule dorénavant non plus les droites  $y = k$  mais les droites  $s_x \cdot x + s_y \cdot y = s_y k$ . Comme on travaille sur le réseau entier, on utilise la notion de droite de géométrie discrète. On force l'éboulement de tous les sommets de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $s_x \cdot x + s_y \cdot y > 0$  (en bleu sur la [Figure 4.10](#)).

On éboule maintenant par étape  $t > 0$  en découpant le plan en deux demi-plans. Soit  $P^-(t) = \{(x, y) \mid s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t) \leq 0\}$  l'ensemble des som-

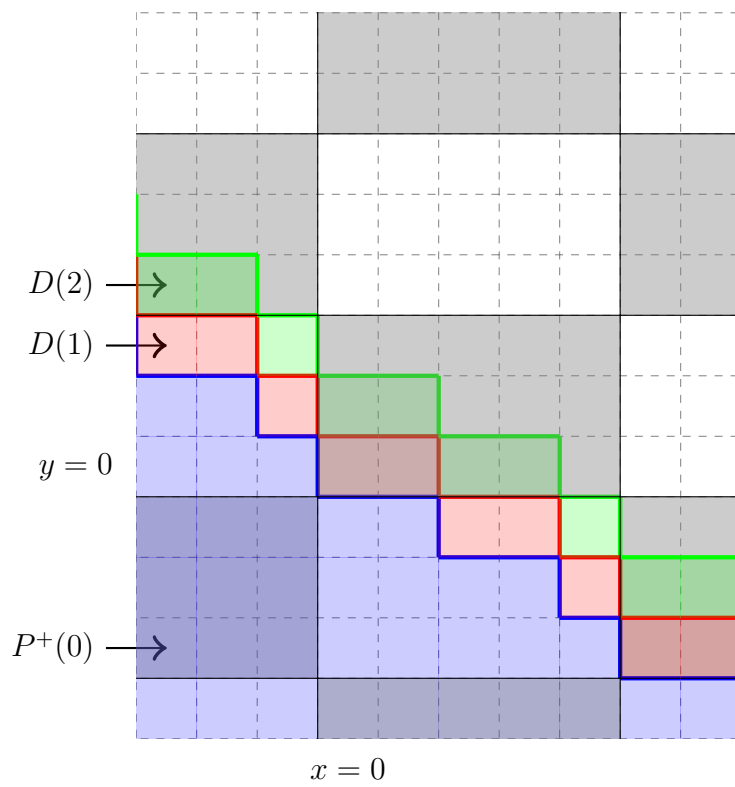


FIGURE 4.10 – Éboulement forcé d'un demi-plan dans le cas général

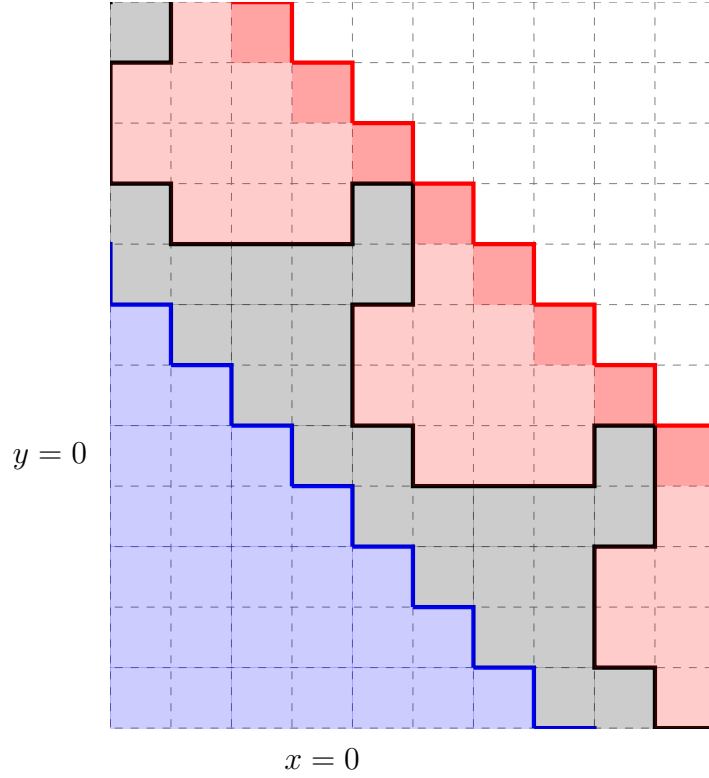
ments dont aucune des arêtes incidentes ne doit être traitée à l'étape  $t$ . Soit  $P^+(t) = \{(x, y) \mid s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t) > 0\}$  son complémentaire. Pour satisfaire cette contrainte, on interdit le traitement des arêtes dont le milieu est de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t) \leq -\frac{s_y}{2}$ . Les arêtes bloquées sont toutes plus petites que les arêtes autorisées. On garantit donc qu'une arête traitée est toujours maximale parmi les arêtes pendantes. Alors on a un comportement semblable au cas particulier  $\mathbf{s} = (0, -1)$ . Ainsi, sur la [Figure 4.10](#),  $P^+(0)$  correspond à la partie en bleu tandis que  $P^-(0)$  correspond au reste. La séparation entre  $P^+(0)$  et  $P^-(0)$  est un chemin périodique dans le dual de la grille.

Alors  $D(t) = P^-(t-1) \setminus P^-(t) = \{(x, y) \mid s_y < s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t + 1) \leq 0\}$  est une droite discrète de pente  $\frac{-s_y}{s_x}$ . Elle est 8-connexe non 4-connexe (en rouge sur la [Figure 4.10](#) pour  $t = 0$ ). En particulier, elle est périodique de période au plus  $(W, -H)$  et  $D(t)$  s'obtient par translation de  $D(t-1)$  par le vecteur  $(0, 1)$ . Les arêtes internes de  $D(t)$  sont toutes horizontales. La droite  $D(t)$  correspond aux sommets dont les arêtes étaient toutes bloquées à l'étape  $t-1$  et où certaines ne le sont plus à l'étape  $t$ . De plus, toute arête entre  $D(t-1)$  et  $D(t)$  est de milieu de coordonnées telles que  $2s_y < s_x \cdot 2x + s_y \cdot (2y - 2t + 3) \leq 0$  donc  $s_y < s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t) - 3s_y/2$ . Aucune n'est donc bloquée donc à l'issue d'une étape  $t$ , tous les grains des sommets éboulés de  $P^+(t-1)$  sont arrivés. Inversement, toute arête entre  $D(t)$  et  $D(t+1)$  est bloquée.

De la même manière que dans le cas  $(0, -1)$ , on découpe une étape en phases. On traite les arêtes en affinant les paliers bloquant les arêtes. On découpe par abscisses décroissantes dans le repère de base  $(\mathbf{s}, \mathbf{s}^\perp)$ , on interdit les arêtes de milieu de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $x s_x + (y - t + 1) s_y \leq -\frac{s_y}{2} - k$  pour  $k$  variant de 1 à  $|s_y|$ . Pour  $k = |s_y|$ , on retrouve la condition  $s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t) \leq -\frac{s_y}{2}$  correspondant à l'étape  $t$ .

Le [Lemme 4.3](#) se généralise de la manière suivante : à chaque étape  $t > 0$ , au moins un sommet de chaque période de  $D(t)$  est éboulé, et l'ensemble des sommets éboulés est périodique de période au plus  $(W, -H)$ . La preuve suit le même raisonnement.

*Preuve de la généralisation du [Lemme 4.3](#).* À l'issue de l'étape  $t$ , toutes les arêtes incidentes aux sommets éboulés à l'étape  $t-1$  sont traitées. Les seules arêtes bloquées incidentes à des sommets de  $P^+(t)$  sont incidentes aux sommets de  $D(t)$ . Donc si aucun sommet de  $D(t)$  ne s'éboule, alors aucune arête pendante n'est bloquée donc, les sommets sont tous stables et la configuration n'est pas récurrente. Donc au moins un sommet s'est éboulé et est déstabilisé par un sommet de  $D(t-1)$ . Ensuite on tient le même raisonnement par récurrence que dans le cas axial : on suppose qu'à l'instant  $t-1$ , la propriété est vérifiée. Alors, montrons que les éboulements sont périodiques en remarquant que chaque étape consiste en l'éboulement de composantes finies déconnectées deux à deux.


 FIGURE 4.11 – Périodicité dans le cas  $\mathbf{s} = (-1, -1)$ 

On se place tout d'abord dans le cas où  $s_x = s_y = -1$ . Chaque étape se découpe en une seule phase. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des sommets éboulés à l'issue de l'étape  $t-1$  est périodique de période  $(W, -H)$  et il existe un sommet éboulé dans  $D(t-1)$ . Alors, l'ensemble des sommets non éboulés de  $P^+(t)$  est une union déconnectée d'ensembles finis comme illustré en rouge par la Figure 4.11. On a donc la périodicité à chaque étape par l'indépendance des éboulements des ensembles déconnectés.

On se place dans le cas où  $s_y < s_x < 0$ . Soit  $k_{mid} = \lfloor \frac{s_x - s_y}{2} \rfloor$ . Les arêtes interdites sont de milieu de coordonnées vérifiant  $x s_x + (y - t + 1) s_y \leq -\frac{s_y}{2} - \lfloor \frac{s_x - s_y}{2} \rfloor$ . Soit  $(x, y)$  les coordonnées d'une arête interne à  $D(t-1)$ , alors  $s_y < s_x \cdot (x + \frac{1}{2}) + s_y \cdot (y - t + 2) \leq 0$  donc  $s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t + 1) > \frac{-s_x}{2} = -\frac{s_y}{2} - \frac{-s_x - s_y}{2} > -\frac{s_y}{2} - \lfloor \frac{s_x - s_y}{2} \rfloor$  donc cette arête est autorisée. Soit  $(x, y)$  les coordonnées du milieu d'une arête horizontale incidente à  $P^-(t-1)$ , alors  $s_x \cdot (x + \frac{1}{2}) + s_y \cdot (y - t + 1) \leq 0$  donc  $s_x \cdot x + s_y \cdot (y - t + 1) \leq \frac{-s_x}{2} = -\frac{s_y}{2} - \frac{s_x - s_y}{2} \leq -\frac{s_y}{2} - \lfloor \frac{s_x - s_y}{2} \rfloor$  donc cette arête est bloquée.

Ceci est illustré par la Figure 4.12. La droite représente la séparation entre les milieux d'arêtes autorisées et ceux des arêtes bloquées. Ainsi, toutes les arêtes dont le milieu est strictement sous cette droite, dont les arêtes internes de  $D(t-1)$  sont autorisées et toutes les arêtes au dessus de cette droite au

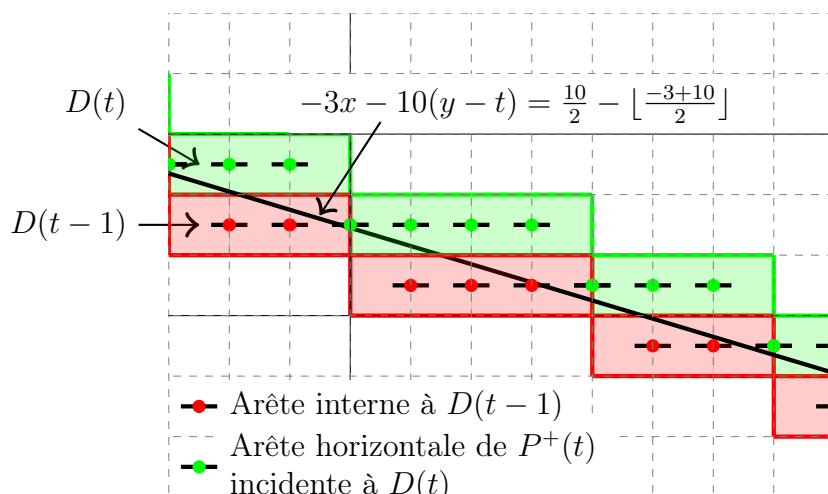


FIGURE 4.12 – Phase intermédiaire  $k_{mid}$  pour la direction du puits  $(-3, -10)$  à l'étape  $t$ .

sens large, dont les arêtes horizontales incidente à  $P^-(t-1)$ , sont bloquées. Le milieu d'une de ces arêtes appartient à la droite, donc elle sera autorisée à la phase suivante.

Si un sommet de  $D(t)$  s'éboule dans une phase de 1 à  $k_{mid}$ , cas de la [Figure 4.13](#), il ne peut y avoir de propagation d'éboulement dans  $D(t)$ , donc ces éboulements sont indépendants et périodiques. De plus, l'ensemble des sommets de  $P^+(t)$  non éboulés est alors composé d'ensembles déconnectés deux à deux et périodique. Donc, la poursuite du critère jusqu'à la phase  $|s_y|$  est également périodique.

Sinon, à l'issue de la phase  $k_{mid}$ , aucune arête incidente à deux sommets de  $P^+(t-1)$  n'est bloquée et aucun sommet de  $D(t)$  n'est éboulé. Donc les seules arêtes pendantes bloquées apportent des grains à des sommets de  $D(t)$  depuis  $D(t-1)$ . Les éboulements se font dans des ensembles déconnectés deux à deux et périodiques par hypothèse de récurrence.

Soit  $k > k_{mid}$  la première phase tel qu'un sommet  $v$  de  $D(t)$  est déstabilisé par un sommet  $u$  de  $D(t-1)$  via l'arête  $e$  déjà éboulé à la phase  $k_{mid}$ . Le sommet  $v$  a au plus deux voisins dans  $D(t-1)$ , le sommet  $v - \mathbf{e}_y$  et le sommet  $v - \mathbf{e}_x$ . L'arête  $e$  est pendante à la phase  $k-1$  donc son milieu est de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $-\frac{s_y}{2} - k < xs_x + (y-t+1)s_y \leq -\frac{s_y}{2} - k + 1$ .

Si le sommet  $v$  est déstabilisé par le sommet  $v - \mathbf{e}_x$  dans  $D(t-1)$ , cas de la [Figure 4.14](#). Alors, le sommet  $v - \mathbf{e}_x$  se comporte comme le cas  $(-1, -1)$ , ses répétitions déconnectent périodiquement l'ensemble des sommets non éboulés de  $P^+(t)$ . Les seules arêtes autorisées à la phase  $k$  permettant une vague d'éboulements depuis le sommet  $v$  en bleu sur la figure sont contraints dans un ensemble fini déconnecté du reste de  $P^+(t)$ . Cette séparation est maintenue pour les phases suivantes. Donc le comportement du critère sur l'étape  $t$  est

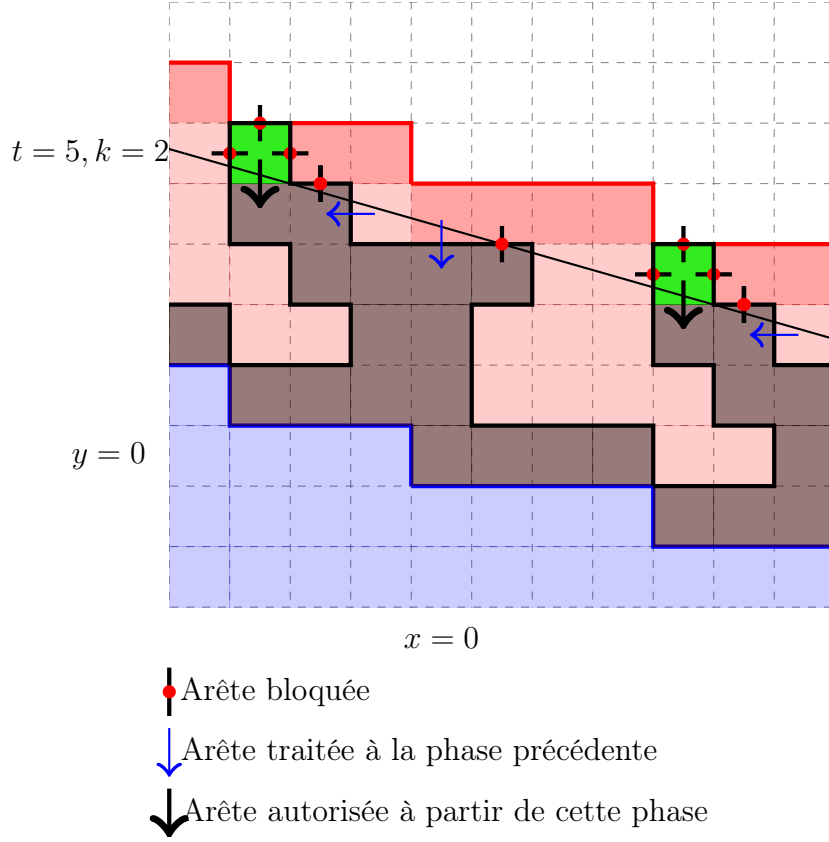


FIGURE 4.13 – Déstabilisation du premier sommet de  $D(t)$  (en vert) à la phase  $k = k_{mid}$  pour  $\mathbf{s} = (-2, -7)$

périodique.

Sinon, le sommet  $v$  est déstabilisé par le sommet  $v - \mathbf{e}_y$  dans  $D(t - 1)$ , cas de la Figure 4.15. Soit  $(x, y)$  le milieu de cette arête. Les arêtes incidentes à  $v$  sont de milieu de coordonnées  $(x, y + 1)$ ,  $(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$  et  $(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ . Or  $xs_x + ((y + 1) - t + 1)s_y = xs_x + (y - t + 1)s_y + s_y < xs_x + ((y + 1) - t + 1)s_y$  et  $(x + \frac{1}{2})s_x + ((y + \frac{1}{2}) - t + 1)s_y < (x - \frac{1}{2})s_x + ((y + \frac{1}{2}) - t + 1)s_y \leq -k + 1 + \frac{1}{2}(s_y - s_x) < xs_x + (y - t + 1)s_y$ . Ces arêtes ont une abscisse strictement plus petite que  $e$  et ne sont donc pas autorisées (parmi les arêtes rouges sur la figure). Donc, les répétitions de  $e$  sont plus grandes pour l'ordre  $\prec_{\mathbf{s}}$  que ces dernières. Quand  $v$  est éboulé, les arêtes pendantes traitées ensuite sont les répétitions périodiques de  $e$ . Donc les répétitions périodiques de  $v$  sont également ébouloées avant le traitement d'autres arêtes, et on a découpé les sommets non ébouloés de  $P^+(t)$  en ensembles finis connexes. Les éboulements qui suivent sont alors indépendants et donc périodique.  $\square$

Par exemple, la Figure 4.13 donne un instantané du déroulement du critère à la phase  $k = 4$  de l'étape  $t = 5$ . En bleu se trouve le demi-plan  $P^+(0)$  qui débute le critère par son éboulement forcé. À l'issue de l'étape  $t = 4$ , l'ensemble

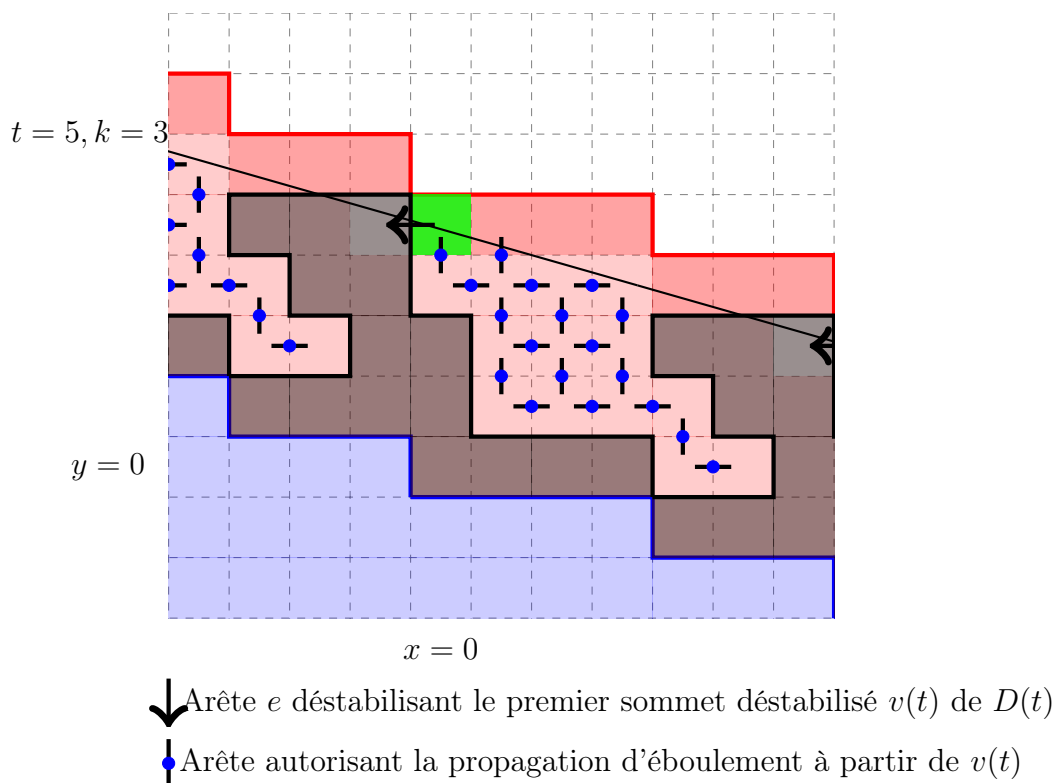


FIGURE 4.14 – Déstabilisation du premier sommet déstabilisé  $v$  de  $D(t)$  (en vert) par une arête horizontale

de sommets gris est éboulé. On se retrouve à l'étape  $t = 5$ . À la phase  $k = 1$ , les arêtes pendantes bleues sont traitées et n'entraînent aucun éboulement. À la phase  $k = 2$ , l'arête pendante noire est traitée et entraîne l'éboulement du sommet vert. Ces nouvelles arêtes pendantes sont toutes plus petites que les répétitions périodiques de l'arête noire. Donc, on traite toutes ces répétitions, entraînant l'éboulement des répétitions des sommets verts. À cet instant, l'ensemble des sommets non éboulés de  $P^+(t)$  est l'union des répétitions périodiques déconnectées deux à deux d'un ensemble fini.

Donc les éboulements sont bien indépendants et périodiques. On peut donc se ramener au cylindre ce qui simplifie grandement les preuves et permet un meilleur parallèle avec le cas axial. Notons que ce cylindre est le quotient de  $\mathbb{Z}^2$  par  $(W, -H)\mathbb{Z}$ . Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , on identifie les sommets  $(x, y)$  et  $(x + W, y - H)$ , on pourra par exemple choisir le sommet de coordonnées  $(x, y)$  où  $0 \leq x < W$  comme représentant.

Le [Lemme 4.6](#) et le [Corollaire 4.7](#) s'expriment naturellement dans le cas général en remarquant de la même manière que les éboulements à l'étape  $t$  sont majorés par les éboulements à l'étape  $t - H$  translaté du vecteur  $H\mathbf{e}_y$ .

Le [Lemme 4.8](#) ne s'appuie pas sur la pente donc on obtient le même résultat : il existe pour chaque sommet une étape  $t$  auquel il s'éboule.



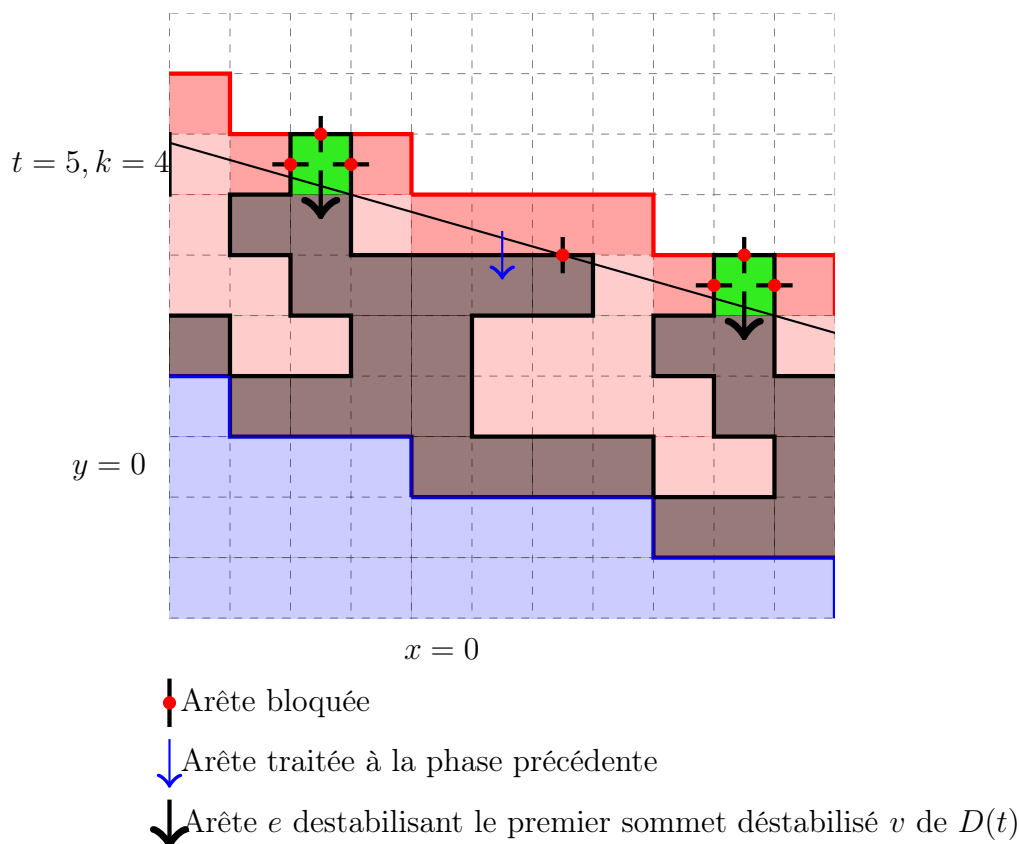


FIGURE 4.15 – Déstabilisation du premier sommet déstabilisé  $v$  de  $D(t)$  par une arête verticale

En définissant  $t_1 = \max\{t_v \mid \forall v \in (P^-(0) - P^-(H)) \cap [0, W] \times \mathbb{Z}\}$  le premier instant où tous les sommets de la première répétition du motif sont éboulés, on obtient le même résultat que le [Lemme 4.9](#).

On en déduit donc que pour toute direction  $\mathbf{s}$ , on peut vérifier en temps borné linéairement par le produit de la taille du motif et des coefficients de la pente qu'une configuration stable périodique est récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$ .

### 4.3 Bijection avec des recouvrements bipériodiques de la grille

Le processus précédent décrit un processus de stabilisation sur un graphe fini. Dans le cadre fini, on dispose de plusieurs bijections liant la stabilisation d'une configuration et un arbre couvrant du graphe sous-jacent.

Par le choix qui a été fait pour le calcul du critère, on s'intéresse à la bijection de Cori et Le Borgne [[CLB03](#)] qui se définit à partir d'un ordre sur

les arêtes du graphe. On rappelle que cette bijection se base sur un objet encodant à la fois une configuration récurrente et l'arbre couvrant associé, le parcours sommet-arête. L'intérêt de cet objet est sa représentation locale, pour chaque sommet, il suffit de connaître l'ordre d'apparition de celui-ci par rapport à ses arêtes incidentes pour retrouver son nombre de grains ainsi que son père dans l'arbre couvrant.

On munit le graphe infini de l'ordre  $\prec_s$  dont on rappelle ici la définition : pour tout  $e_1$  et  $e_2$ , deux arêtes et  $m_1$  et  $m_2$  leurs milieux

$$e_1 \prec_s e_2 \Leftrightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_1 < \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_2 \text{ ou } (\mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_1 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_2 \text{ et } \mathbf{s}^\perp \cdot \mathbf{m}_1 < \mathbf{s}^\perp \cdot \mathbf{m}_2).$$

La plus grande arête est celle dont le milieu est le plus proche du puits.

On applique le critère de récurrence sur la grille infinie. Quand un grain déstabilise un sommet, on rajoute l'arête qui l'a fait arriver à l'arbre. Chaque sommet a ainsi un père dont provient le grain l'ayant déstabilisé. De la même manière que l'exécution du critère de récurrence décrit dans la section précédente, on obtient un comportement périodique de l'application du critère sur la grille tout en préservant cette fois-ci l'ordre des arêtes.

La transformation de Cori et Le Borgne (CLB) s'appuie dans le cas fini sur un ordre total des éléments du graphe. On peut extraire de cet ordre la configuration récurrente associée ainsi que l'arbre couvrant avec lequel la configuration est en bijection. On s'intéresse ici à l'arbre couvrant qu'on peut extraire pendant le déroulement ultimement périodique du critère de récurrence dans la direction  $\mathbf{s}$ . L'ordre de traitement des arêtes et sommets du graphe sera discuté par la suite.

En reprenant le critère de récurrence dans la direction  $\mathbf{s}$  ainsi que son découpage en étapes, on sait qu'à chaque étape  $t$  les portions éboulées sont périodiques sur des composantes déconnectées par les répétitions d'un sommet  $v^1(t)$  représentant le premier sommet éboulé de  $D(t)$  (les sommets verts sur les Figures 4.13 à 4.15). On peut alors traiter les éboulements dans chaque portion connexe de manière indépendante en conservant l'ordre relatif entre toutes les arêtes d'une même composante connexe. Donc localement, on peut en temps fini construire un recouvrement du graphe par une relation de parenté qui respecte l'ordre des arêtes  $\prec_s$ .

Dans le cas du critère de récurrence, il suffisait de travailler sur un cylindre. Cependant, le cylindre brise l'ordre global des arêtes du graphe. Afin de résoudre cette difficulté, il suffit de calculer à chaque étape le premier sommet de  $D(t)$  qui s'éboule par période. On a montré que le comportement du critère est périodique avant et après avoir trouvé ce sommet. Il suffit de réaliser le critère sur une composante. Ensuite, calculer le premier sommet suivant dans  $D(t+1)$  se fait également sur une période car les portions éboulables sont encore déconnectées par le sommet de  $D(t)$ .

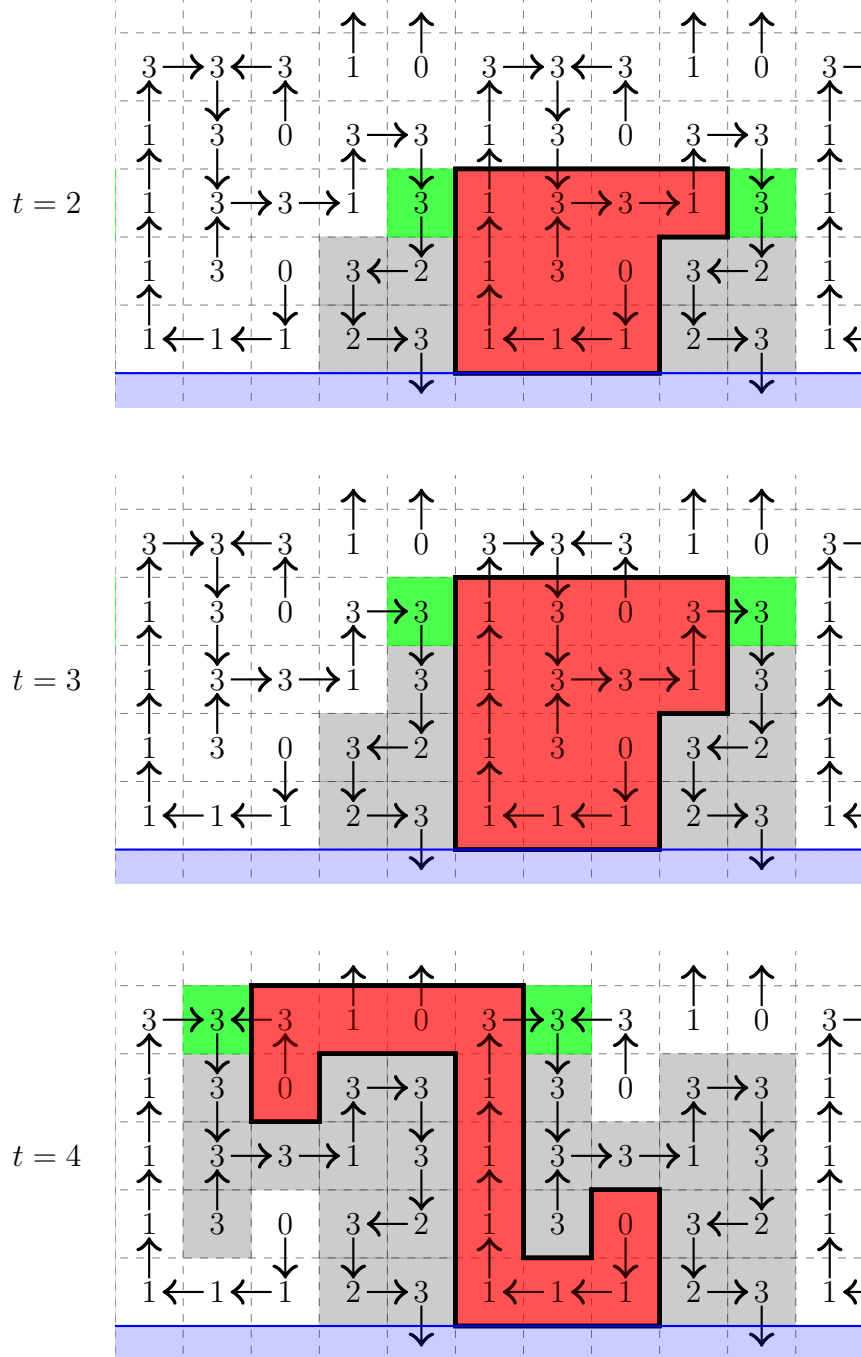


FIGURE 4.16 – Portion finie du déroulement du critère

Dans le cas axial,  $\mathbf{s} = (0, -1)$ , à la fin de chaque étape  $t$ , des sommets, en vert sur la [Figure 4.16](#), sont éboulés dans  $D(t)$ . Ceux-ci séparent des composantes connexes finies en rouge sur lesquelles on applique le critère à l'étape  $t + 1$ . Le calcul se fait alors dans un cadre fini et correspond au comportement périodique du critère sur la grille infinie.

On rappelle que l'exécution du critère affaibli est périodique à partir de l'étape  $WH + H$ . C'est-à-dire que la suite des composantes connexes finies mises en évidence dans la section précédente et également ici est ultimement périodique. La construction du recouvrement sur chacune de ces composantes est donc périodique. Donc le recouvrement obtenu l'est également.

**Définition 4.10.** *Soit  $C$  une configuration périodique récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$ . On définit  $\text{Recouvrement}(C)$  le recouvrement périodique de défini par le recouvrement de la répétition  $(P^-(WH) - P^-(WH + H)) \cap [0, W] \times \mathbb{Z}$  par le processus précédent.*

On peut ordonner les éboulements et les arêtes par leur ordre de traitement. Aussi, on retrouve le parcours sommet/arêtes décroissants de la bijection CLB. Le nombre de grains d'un sommet est donné par le nombre d'arêtes traitées après l'éboulement du sommet. Le recouvrement est l'ensemble des arêtes qui précèdent directement l'éboulement de chaque sommet.

Le motif d'un recouvrement peut se plonger sur une grille torique de dimensions  $W \times H$ . Chaque sommet est doté d'un père. On obtient donc une forêt couvrante enracinée sur des cycles. On rencontre ces objets notamment dans les travaux de Kenyon [[Ken11](#)]. Comme le recouvrement est acyclique par construction, les cycles du motif sur le tore sont non contractiles. De plus, ces cycles sont les branches biinfinies du recouvrement sur la grille. Ces branches sont périodiques et coupent toutes les droites orthogonales à la direction  $\mathbf{s}$ . Elles sont orientées vers le puits.

**Définition 4.11.** *Soit  $T_{m,n}$  le graphe de la grille torique de dimensions  $m \times n$ . On associe à chaque sommet  $s$  une arête sortante  $v(s)$ . Le sous-graphe orienté obtenu est appelé une forêt couvrante orientée enracinée dans des cycles (OCRFS).*

*On appelle recouvrement périodique de la grille un OCRFS de  $T_{m,n}$  dont les cycles sont non contractiles.*

Soit  $R$  un recouvrement périodique de la grille. Les cycles non contractiles de  $R$  induisent des branches périodiques biinfinies. Alors les périodes de ces branches sont colinéaires. On dira que  $R$  est un recouvrement valide si ses branches sont orientées dans la même direction.

**Définition 4.12.** *Soit  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$  une direction (non nulle).*

*On note  $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$  l'ensemble des recouvrements périodiques valides de la grille dont la période  $\mathbf{s}'$  est compatible avec  $\mathbf{s}$ . Autrement dit, telle que  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' > 0$ .*

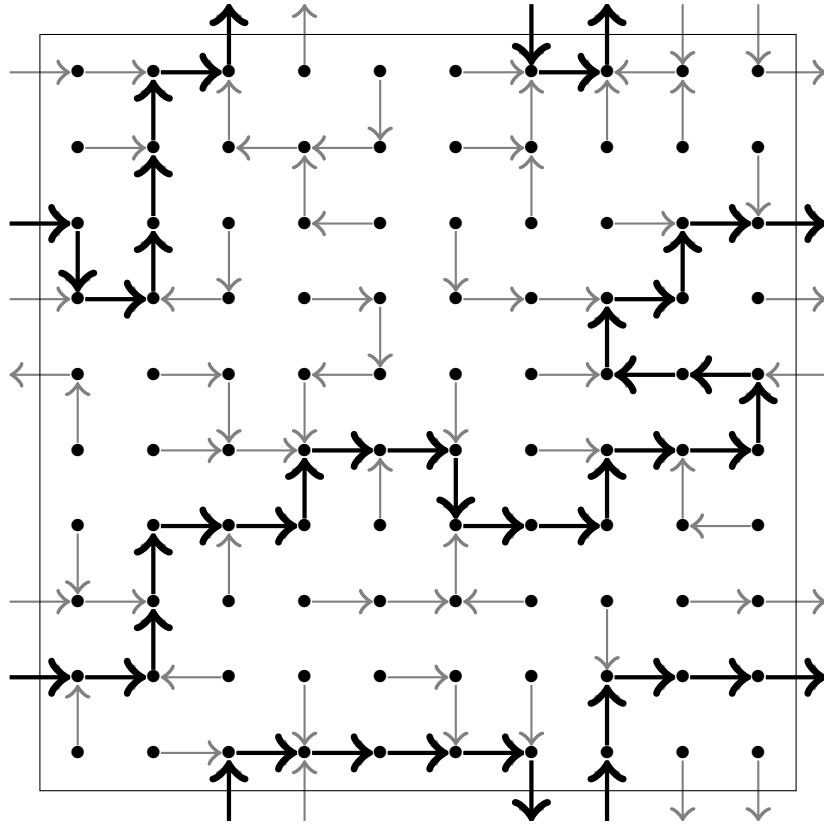


FIGURE 4.17 – Exemple de recouvrement périodique de la grille pour  $T_{10,10}$ , en gras l'unique cycle

De par le fait que le nombre de grains d'un sommet est donné par le nombre d'arêtes traitées après l'éboulement du sommet, on peut pour chaque sommet d'une répétition calculer directement le nombre de grains par une comparaison entre branches.

Soit  $R$  un recouvrement, on note  $R(v)$  le père de  $v$  dans le recouvrement  $R$  de la grille. On désignera par  $R^n(v)$  le  $n$ -ième parent du sommet  $v$ .

Soit  $u$  un sommet et  $v_1, v_2, v_3, v_4$  ses quatre voisins, où  $v_1$  est le père de  $u$  dans le recouvrement  $R$ . Alors, le nombre de grains de  $u$  est le nombre d'arêtes parmi  $uv_2, uv_3$  et  $uv_4$  qui sont traitées après  $uv_1$ . Les autres arêtes incidentes à  $v$  dans le recouvrement sont traitées après. On s'intéresse donc aux arêtes externes. Dans le cas fini, le recouvrement est un arbre, alors,  $uv_1$  est traitée avant  $uv_2$  si et seulement si l'arête minimale du cycle  $p \dots v_1 uv_2 \dots p$  est sur le chemin  $p \dots v_2 u$  où  $p$  est le premier ancêtre commun de  $v_1$  et  $v_2$ .

Dans le cas infini, soit les extrémités  $v_1$  et  $v_i$  des deux arêtes comparées ont un ancêtre commun, et on peut les comparer de la même manière. Ainsi sur la [Figure 4.18](#), on peut comparer les arêtes d'extrémités  $v_1$  et  $v_4$  ou celles d'extrémités  $v_2$  et  $v_3$ . L'arête d'extrémité  $v_1$  est traitée après celle d'extrémité

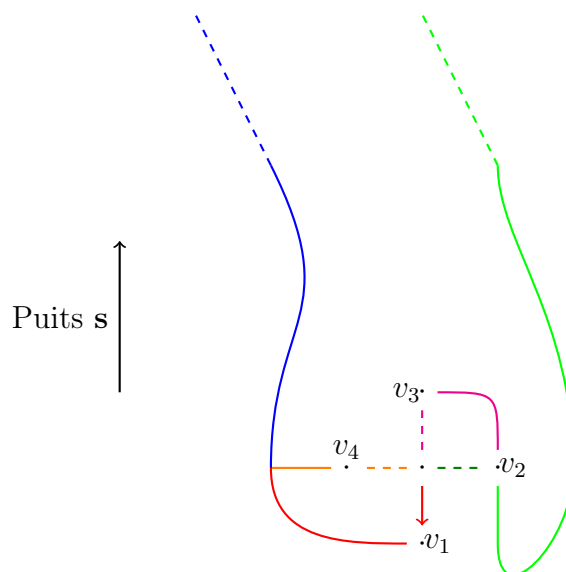


FIGURE 4.18 – Ordre de traitement des arêtes incidentes à un sommet, ici : jaune, rouge, magenta, vert

$v_4$  et celle d'extrémité  $v_2$  est traitée après celle d'extrémité  $v_3$ . Soit elles n'ont pas d'ancêtres commun, comme les arêtes d'extrémités  $v_1$  et  $v_2$ . On a le lemme suivant.

**Lemme 4.13.** *Pour tout sommet  $v$ , l'arête minimale du chemin infini  $v, R(v), R^2(v) \dots$  est sur les  $WH$  premières arêtes du chemin.*

*Démonstration.* Le motif du recouvrement est la donnée d'un père pour tout sommet d'une grille torique de dimensions  $W \times H$ . On obtient donc une forêt enracinée sur des cycles. On sait que ces cycles sont non contractiles. Entre autres, une fois répétés sur la grille, ces cycles sont des branches infinies croisant toutes les droites orthogonales à la direction du puits.

Soit  $v$  un sommet de la grille, alors  $v, R(v), R^2(v) \dots$  est constitué d'un chemin fini jusqu'au cycle qui enracine son arbre, puis la répétition infini du cycle. En particulier, les arêtes de la première répétition du cycle sont toutes plus petites que celles des autres répétitions du cycle. Donc l'arête minimale du chemin infini  $v, R(v), R^2(v) \dots$  est sur le chemin  $v, R(v), R^2(v) \dots R^{i-1}(v)$  où  $i$  est le plus petit indice tel qu'il existe un indice  $j < i$  tel que  $R^i(v) \equiv_M R^j(v)$ . Les sommets de ce chemin sont tous distincts à période près, donc  $i \leq WH$ .  $\square$

Le lemme précédent nous indique que l'arête minimale du chemin  $u, v_i, R(v_i), R^2(v_i) \dots$  se calcule de manière finie. Donc, dans le cas où  $v_1$  et  $v_i$  n'ont pas d'ancêtre commun, on peut comparer les arêtes minimales de leur chemin au puits. On en déduit quelle arête parmi  $uv_1$  et  $uv_i$  est traitée la première.

Contrairement au cas de l'éboulement forcé, cette approche utilise directement la structure d'arbre et ne se calcule pas par stabilisation d'un calcul périodique à partir d'un certain rang (borné). De plus cette construction reproduit localement l'ordre de traitement des arêtes et des éboulements des sommets simulés par le critère de récurrence par éboulement d'un demi-plan dans son comportement ultimement périodique.

**Proposition 4.14.** *La fonction  $\text{Recouvrement}$  est injective.*

*Démonstration.* On peut adapter l'algorithme testant la récurrence en un algorithme construisant une configuration à partir d'un recouvrement.

Soit  $R$  le recouvrement d'une configuration récurrente périodique. Alors à chaque étape on traite les arêtes comme précédemment et on éboule un sommet quand l'arête le couvrant est traitée. On compte ensuite le nombre de grains provenant des autres arêtes incidentes non traitées afin d'obtenir le nombre de grains dans la configuration. En forçant l'éboulement d'un demi-plan, cela revient à rajouter un puits virtuel adjacent à tous les sommets non éboulés voisins d'un sommet éboulé. Alors le calcul de la configuration par la comparaison d'arête minimale de branche vers le puits diffère du cas infini. Cependant, d'après le [Lemme 4.13](#), dès qu'on compare des branches de taille supérieure à  $WH$ , l'arête minimale est parmi les  $WH$  premières arêtes. Donc notamment, l'éboulement forcé ne perturbe pas ce calcul. Ainsi cet algorithme réalise le même parcours sommet/arête que celui sur la configuration obtenue à partir d'un certain rang. Le comportement après  $WH + H$  étapes est périodique et coïncide avec l'ordre de traitement du critère de récurrence sur la configuration associée.  $\square$

On obtient à partir d'un recouvrement obtenu par une configuration récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$  la configuration originale. Aussi, cette construction est valide pour tout OCRSF sans cycle contractile dont les cycles vont vers le puits.

**Proposition 4.15.** *Pour toute direction  $\mathbf{s}$ , l'application des forêts couvrantes orientées du tore  $W \times H$  enracinées sur des cycles non contractiles dont la pente  $\mathbf{s}'$  est compatible avec la direction  $\mathbf{s}$  est injective dans les configurations périodiques récurrentes dans la direction  $\mathbf{s}$  de période  $W \times H$ .*

*Démonstration.* La preuve est directe par la construction de l'application. Pour chaque sommet du tore, on associe une valeur correspondant à son nombre de grains dans la configuration. L'arbre est compatible avec le critère de récurrence. Il est donc unique pour chaque configuration obtenue.  $\square$

On a donc la proposition suivante.

**Proposition 4.16.** *Les configurations périodiques récurrentes de taille  $W \times H$  dans la direction  $\mathbf{s} = (-H, W)$  sont en bijection avec les forêts couvrantes*

orientées du tore  $W \times H$  enracinées sur des cycles non contractiles dont la périodicité  $\mathbf{s}'$  est compatible avec la direction  $\mathbf{s} : \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' > 0$ .

Pour des raisons de confort dans le raisonnement, on a imposé que la taille du motif soit un multiple entier d'un vecteur orthogonal à la direction  $\mathbf{s}$ . On obtient en fait pour chaque direction, une bijection qui conserve la période.

**Théorème 4.17.** *Les configurations périodiques récurrentes de taille  $W \times H$  dans la direction  $\mathbf{s}$  sont en bijection avec les forêts couvrantes orientées du tore  $W \times H$  enracinée sur des cycles non contractiles dont la périodicité  $\mathbf{s}'$  est compatible avec la direction  $\mathbf{s} : \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' > 0$ .*

Le critère de récurrence n'est décrit que pour des dimensions compatibles entre la taille du motif et la direction du puits, c'est-à-dire dont la diagonale est orthogonale à la direction du puits. Pour obtenir un recouvrement associé à une configuration de période non compatible, on a multiplié sa taille en le répétant pour ensuite appliquer le critère affaibli. On peut montrer que cette généralisation conserve la périodicité initiale.

**Lemme 4.18.** *Soit  $C$  une configuration périodique de motif  $M$  de vecteurs de période  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $\mathbf{s}$  une combinaison linéaire entière de  $\mathbf{u}^\perp$  et  $\mathbf{v}^\perp$ . Si  $C$  est récurrente dans la direction  $\mathbf{s}$ , alors le recouvrement obtenu par le test de récurrence est périodique de période les vecteurs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .*

*Démonstration.* On raisonne par majoration des éboulements. On peut supposer sans perte de généralité que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} < 0$ . Autrement dit, une répétition translaturée de  $\mathbf{u}$  est plus loin du puits. Lors du critère de récurrence, à partir d'une certaine étape  $t$ , le demi-plan  $\mathbf{s} \cdot ((x, y) - \mathbf{u}) > 0$  est éboulé. Alors, forcer l'éboulement de ce demi-plan puis continuer le critère de récurrence aboutit au même résultat qu'en éboulant le demi-plan  $\mathbf{s} \cdot (x, y) > 0$ . On peut donc réaliser le critère de récurrence avec le demi-plan  $\mathbf{s} \cdot ((x, y) - \mathbf{u}) > -t$ . Le résultat est donc invariant par translation de vecteur  $\mathbf{u}$ .

Ce raisonnement est également valide pour le vecteur  $\mathbf{v}$ . Donc, le motif de taille  $W \times H$  du recouvrement obtenu par le critère est périodique de période  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .  $\square$

On pourra remarquer que si  $v \in D(t_1)$  et  $(v + \mathbf{u}) \in D(t_2)$ ,  $D(t_2)$  n'est pas égale à  $D(t_1) + \mathbf{u}$  dans le cas général. Les droites discrètes  $D(t)$  découpent les étapes mais n'ordonnent pas les éboulements.

*Preuve de Théorème 4.17.* On sait par [Lemme 4.18](#) que les configurations récurrentes dans une direction ont pour image des recouvrements de période au plus de la même taille que leur antécédent. De plus, l'application des recouvrements périodiques dans les configurations périodiques se définit sur une période, donc la période de l'image est au plus celle de l'antécédent. Donc ce sont les mêmes périodes.  $\square$



## 4.4 Comptage des recouvrements et des configurations récurrentes périodiques

On dispose maintenant d'une bijection entre les configurations périodiques récurrentes dans une direction  $\mathbf{s}$  donnée et l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$  des recouvrements périodiques valides de la grille dont la période  $\mathbf{s}'$  est compatible avec  $\mathbf{s}$ . On sait compter les configurations périodiques récurrentes sur un graphe fini en comptant le nombre d'arbres couvrants de ce dernier. On se propose de réaliser le même calcul dans le cas de nos recouvrements périodiques de la grille. Si Kenyon [Ken11] s'intéresse aux forêts enracinées sur des cycles sur le tore, il présente également dans [Ken17] une formule déterminantale pour compter le nombre de forêts couvrantes enracinées sur des cycles non contractiles.

On appelle *classe d'homologie* d'un cycle sur le tore la paire  $(i, j)$  codant le nombre de tours que réalise le cycle autour du tore. Les entiers  $i$  et  $j$  sont premiers entre eux. Par exemple, l'unique cycle  $\gamma$  du recouvrement  $R$  de la Figure 4.17 réalise 2 tours sur la largeur et 1 tour sur la hauteur du tore. Sa classe d'homologie est donc  $(2, 1)$ . De plus, on peut noter  $vR(\vec{v})$  le vecteur unitaire codant la parenté d'un sommet dans le recouvrement  $R$ . Alors  $\sum_{v \in \gamma} vR(\vec{v}) = 2 \cdot 10\mathbf{e}_x + 1 \cdot 10\mathbf{e}_y$ . La *classe d'homologie* d'un recouvrement périodique est la paire  $(ki, kj)$  où  $(i, j)$  est la classe d'homologie d'un de ces cycles et  $k$  le nombre de ces cycles. On remarque que la longueur d'un cycle de classe d'homologie  $(i, j)$  sur  $T_{m,n}$  est au moins égale à  $m|i| + n|j|$ . Ceci nous donne le premier point de la proposition suivante.

**Proposition 4.19.** *Soit  $R$  un recouvrement périodique du tore  $T_{m,n}$  de classe d'homologie  $(ki, kj)$ , alors  $mk|i| + nk|j| \leq mn$ . Réciproquement, pour tout couple  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  premiers entre eux et pour tout  $k > 0$  tels que  $mk|i| + nk|j| \leq mn$ , il existe un recouvrement  $R$  de  $T_{m,n}$  de classe d'homologie  $(ki, kj)$ .*

*Démonstration.* On construit la droite  $D$  discrète 4-connexe par l'algorithme de Bresenham [Bre65] sur  $\mathbb{Z}^2$  de pente  $(im, jn)$ . Alors

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq jn \cdot x - im \cdot y < |i|m + |j|n\}.$$

Sans perte de généralité, on suppose  $jn, im \geq 0$ . On note  $D_l$  la droite

$$D_l := D - l(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq jn \cdot x - im \cdot y + l(jn + im) < im + jn\}.$$

Les droites  $(D_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  pavent naturellement le plan. On pose

$$\tilde{D} = \{(x \bmod m, y \bmod n) \in T_{m,n} \mid (x, y) \in D\}$$

comme sur la Figure 4.19.

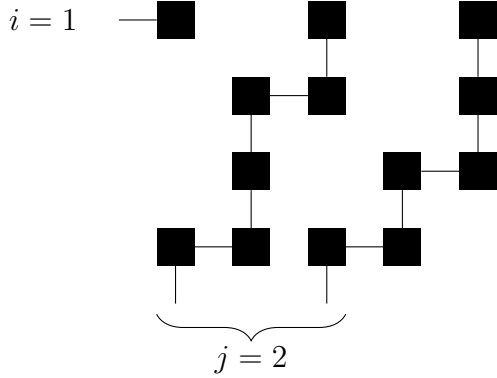


FIGURE 4.19 – Cycle de classe d’homologie  $(i, j) = (1, 2)$  obtenu par l’algorithme de Bresenham sur  $T_{5,4}$

Montrons que les  $(\tilde{D}_l)_{0 \leq l < k}$  sont disjoints et que  $|\tilde{D}| = im + jn$ . Soit  $(x_1, y_1) \in D_{l_1}$  et  $(x_2, y_2) \in D_{l_2}$  deux points de même représentant sur  $T_{m,n}$ . Alors il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}$  tels que  $x_1 = x_2 + um$  et  $y_1 = y_2 + vn$ . Donc on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq jn \cdot (x_1 + um) - im \cdot (y_1 + vn) + l_2(jn + im) < im + jn \\ &\Leftrightarrow \\ 0 &\leq jn \cdot x_1 - im \cdot y_1 + l_2(jn + im) + (uj - vi)nm < im + jn. \end{aligned}$$

Or  $0 \leq jn \cdot x_1 - im \cdot y_1 + l_1(jn + im) < im + jn$ , donc

$$-(im + jn) < (uj - vi)nm + (l_2 - l_1)(im + jn) < im + jn$$

et

$$-k(im + jn) < (uj - vi)nm < k(im + jn).$$

On sait également que  $mk|i| + nk|j| \leq mn$ , donc  $|(uj - vi)nm| < k(im + jn) \leq mn$ . On en déduit que  $uj = vi$ , or  $i$  et  $j$  sont premiers entre eux, donc  $uj = vi = wij$  pour un certains  $w \in \mathbb{Z}$ . Alors  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) + w(im, jn)$  où le vecteur  $(im, jn)$  est un vecteur directeur de  $D$  qui la laisse invariante par translation. Donc  $l_1 = l_2$  ce qui montre que les  $(\tilde{D}_l)_{0 \leq l < k}$  sont disjoints. De plus l’ensemble  $\tilde{D}$  décrit donc un cycle dans le tore  $T_{m,n}$  et a  $im + jn$  éléments.

On peut compléter le recouvrement construit à partir des  $(\tilde{D}_l)_{0 \leq l < k}$  en un recouvrement du tore  $T_{m,n}$  en rajoutant des arêtes vers un des cycles. Le recouvrement obtenu est de classe d’homologie  $(ki, kj)$ .  $\square$

On suppose  $m, n \geq 2$ . Soit  $w, z \in \mathbb{C}^*$ , on pose une fonction de poids sur les

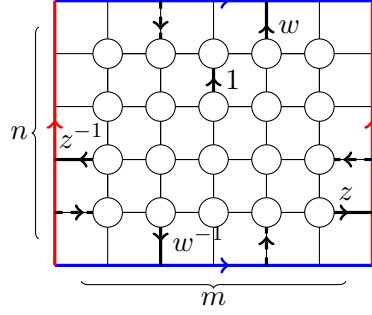


FIGURE 4.20 – Poids  $\Phi$  sur le tore  $T_{m,n}$

arêtes orientées  $\Phi : T_{m,n} \times T_{m,n} \mapsto \mathcal{C}$  définie comme suit.

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} z & \text{if } v = u + \mathbf{e}_x[T_{m,n}] \\ z^{-1} & \text{if } v = u - \mathbf{e}_x[T_{m,n}] \\ w & \text{if } v = u + \mathbf{e}_y[T_{m,n}] \\ w^{-1} & \text{if } v = u - \mathbf{e}_y[T_{m,n}] \\ 1 & \text{if } uv \in T_{m,n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

On met ainsi un poids sur les arêtes orientées qui traversent le domaine fondamental du tore (Figure 4.20). Les arêtes traversant les côtés gauches et droits se voient attribuer un poids  $z^{-1}$  et  $z$ , et celles traversant les côtés haut et bas un poids  $w$  et  $w^{-1}$ . Le poids d'un cycle (orienté)  $\gamma$  de classe d'homologie  $(i, j)$  sur  $T_{m,n}$  est alors  $z^{im}w^{jn}$ . On pose le laplacien  $\Delta$  du graphe  $T_{m,n}$  se définissant sur le  $\mathcal{C}$ -espace vectoriel de base les sommets de  $T_{m,n}$  selon la fonction de poids  $\Phi$ . On a pour tout  $v \in T_{m,n}$ ,  $\Delta(v) = \sum_{u \rightarrow v} v - \Phi_{u \rightarrow v} u$ .

**Théorème 4.20** (Kenyon [Ken17]).

$$\det \Delta = \sum_{NCRSF \gamma} (2 - z^i w^j - z^{-i} w^{-j})^k$$

où un *NCRSF* est une forêt couvrante enracinée sur les cycles sans cycle contractile et  $(i, j)$  est la classe d'homologie d'un cycle de  $\gamma$  et  $k$  le nombre de ces cycles. On peut également noter  $\det \Delta = \sum_{\text{recouvrement périodique } \gamma} (1 - z^i w^j)^k$ .

Le calcul de déterminant est bien plus efficace à effectuer que l'énumération des éléments à compter. Ceci permet d'obtenir la **Tableau 4.1** pour le tore  $T_{4,4}$ . On peut observer les coefficients binomiaux sur l'anti diagonale.

On se place dans l'espace des polynômes de Laurent  $\mathbb{Z}[z, z^{-1}, w, w^{-1}]$  où  $z$  et  $w$  sont des indéterminées. Comme les  $(i, j)$  sont premiers entre eux, les polynômes  $Q_{i,j,k} = (2 - z^i w^j - z^{-i} w^{-j})^k$  forment une famille libre de  $\mathbb{Z}[z, z^{-1}, w, w^{-1}]$

$kj$	$ki$				
	0	1	2	3	4
0		31300528	541732	1528	1
1	31300528	5427200	31232	4	
2	541732	31232	6		
3	1528	4			
4	1				

TABLE 4.1 – Nombre de NCRSF sur le tore  $T_{4,4}$  pour chaque classe d'homologie  $(i, j)$  à  $k$  cycles

pour  $k > 0$  et  $(i, j) = (0, 1)$  ou  $i > 0$  et  $i, j$  co-premiers. On note  $S$  l'ensemble de ces couples  $(i, j)$ . Soit  $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k}$  les coefficients de  $\det \Delta$  dans sa décomposition dans la famille  $(Q_{i,j,k})_{i,j,k}$ . Alors le nombre de NCRSF de  $T_{m,n}$  est  $\sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k}$ . De plus, il n'existe que deux orientations possibles d'un NCRSF pour obtenir un recouvrement périodique. Donc le nombre de recouvrements périodiques est égal à  $2 \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k}$ . On peut alors utiliser ces coefficients pour compter les recouvrements périodiques compatibles avec une direction  $\mathbf{s}$  en isolant l'ensemble  $S_{\mathbf{s}}$  des triplets  $(i, j, k)$  tels que  $kim \cdot s_x + kjn \cdot s_y > 0$ . En effet, la direction d'un recouvrement périodique de classe d'homologie  $(ki, kj)$  est le vecteur  $(kim, kjn)$ . On a donc le résultat suivant.

**Proposition 4.21.** *Le nombre de configurations périodiques récurrentes dans la direction  $\mathbf{s}$  de taille  $m \times n$  est  $\sum_{(i,j,k) \in S_{\mathbf{s}}} \alpha_{i,j,k}$  où*

$$\{(i, j, k) \mid k > 0, (i, j) \in S, |kim| + |kjn| \leq mn, ims_x + jns_y \neq 0\}.$$



## 5. Sous-groupes sur les bi-périodiques

Dans le chapitre précédent, on s'est intéressé à la description combinatoire de configurations stables périodiques récurrentes dans une direction. Dans le cas fini, les configurations récurrentes forment un groupe abélien pour la loi composée de la somme et de la stabilisation. Dans notre cas, les configurations récurrentes dans une direction semblent de bons candidats pour former également un groupe. Cependant contrairement au cas fini, on perd le puits et donc la terminaison de la stabilisation qu'il offre en absorbant l'excès de grains. Notamment, les configurations récurrentes de  $\mathbb{Z}^2$  sont de densité au moins égale à 2 donc la somme est de densité au moins 4 et l'excès de grains est infini.

Afin de décrire les motifs du stabilisé de la pile de sable, [LPKS12] utilisent des formes quadratiques. Ces formes quadratiques sont décrites par 3 coefficients de la manière suivante. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $c \geq 2$ , on pose

$$M(a, b, c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}$$

et  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par

$$h(\mathbf{x}) = \left\lceil \frac{1}{2} \mathbf{x}^t M(a, b, c) \mathbf{x} \right\rceil = \lceil (c+a)x^2 + 2bxy + (c-a)y^2 \rceil.$$

Une forme quadratique définit une approximation du nombre d'éboulements dans une zone périodique de la stabilisation de la pile de sable: en effet, en prenant le Laplacien de cette fonction, on retrouve une configuration  $\eta$  :

$$\eta(\mathbf{u}) = \Delta h(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{v} \sim \mathbf{u}} h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}).$$

Alors la densité d'une telle configuration est donnée par le coefficient  $c$ . On peut remarquer que cette configuration est périodique dans le cas où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont tous rationnels. Comme il n'y a pas de garantie sur la stabilité d'une telle configuration, on peut être amené à stabiliser la configuration obtenue ce qui nous donne dans le cas des coefficients  $M(0.25, 0.875, 2.125)$  la [Figure 5.1](#). Notons que la terminaison de cette stabilisation n'est pas non plus garantie. [LPKS12] s'intéresse pour tout couple  $(a, b)$  à la limite supérieure

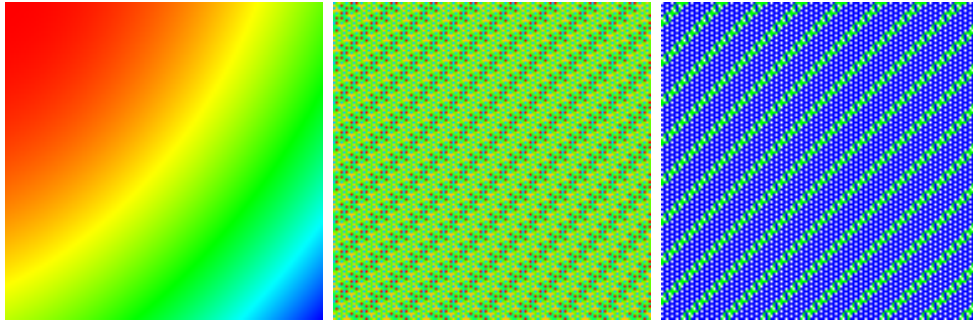


FIGURE 5.1 – Quadratique pour  $M(0.25, 0.875, 2.125)$ , laplacien et stabilisé

$c_0(a, b)$  des densités  $c$  pour lesquelles la configuration obtenue est stabilisable. Les formes quadratiques de paramètres  $(a, b, c_0(a, b))$  sont celles approximant le nombre d'éboulements dans les zones périodiques du stabilisé de la pile de sable. Maximiser la densité est peut être une façon d'approcher la notion de récurrence que nous capturons avec des arbres et forêts couvrantes dans cette thèse.

On peut remarquer que cette construction consiste en l'éboulement forcé des sommets de la grille à partir d'une configuration nulle partout. On a donc artificiellement ajouté des grains à la configuration. Si on peut ajouter des grains, on peut également en retirer. Suivant cette intuition, on propose dans ce chapitre plusieurs opérateurs cohérents avec notre choix de placement du puits et notre critère affaibli de récurrence qui sont basés sur l'éboulement forcé de demi-plans.

On se concentrera uniquement sur les configurations bipériodiques de période compatible avec le puits. Les configurations seront de période  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z} \times \{0\}$  horizontal et  $\mathbf{v} \in \mathbf{s}^\perp$ . Ce choix est motivé par les opérations basées sur l'éboulement des demi-plans.

## 5.1 Le cas (dégénéré?) du puits $\mathbf{s} = (-1, 0)$

Pour donner une première intuition des opérations, on s'intéresse tout d'abord au cas du puits selon un axe,  $\mathbf{s} = (-1, 0)$ .

Dans le cas d'un graphe fini, deux configurations sont équivalentes à éboulements forcés de sommets et éboulements du puits près si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'éboulements forcés du puits et des sommets du graphe. Cette relation d'équivalence partitionne les configurations, stables ou non, en classe d'équivalence contenant chacune une et une seule configuration récurrente. La loi de groupe sur les configurations récurrentes peut s'écrire comme une loi sur les classes d'équivalence.

### 5.1.1 Opérateurs d'éboulements périodiques

On souhaite obtenir un résultat semblable dans le cas des configurations périodiques de la grille infinie. Cependant, afin de préserver la périodicité, tout éboulement d'un sommet doit être effectué sur ses répétitions selon la période de la configuration. On peut donc s'intéresser aux suites finies d'éboulements de sommet et de ses répétitions. Cela revient à travailler sur la grille torique, sans puits.

**Définition 5.1.** *Un éboulement local d'un sommet  $x \in \llbracket 1, W \rrbracket \times \llbracket 1, H \rrbracket$  est l'éboulement des sommets  $x + \mathbf{u}\mathbb{Z} + \mathbf{v}\mathbb{Z}$ . On note  $L_x$  cet opérateur. Alors*

$$L_x = \sum_{i,j} \Delta_{x+i\mathbf{u}+j\mathbf{v}}$$

**Définition 5.2.** *On dira que deux configurations périodiques sont équivalentes à éboulements locaux près si il existe une suite finie d'éboulements forcés transformant la première en la seconde sur le tore.*

Cette définition est assez naturelle. Notamment, s'il faut une infinité d'éboulements sur la grille pour passer d'une configuration à une autre équivalente, chaque sommet ne s'éboule qu'un nombre fini et borné de fois.

On peut représenter une classe d'équivalence pour cette relation de manière canonique comme suit. On se place sur le tore et on calcule la récurrente équivalente à cette configuration par le critère de Dhar en utilisant le sommet  $(1, 1)$  comme puits en retenant le nombre de grains que celui-ci contient. On s'autorise notamment à avoir un nombre négatif de grains dans le puits. Alors il existe une unique configuration récurrente pour le puits en  $(1, 1)$  sur le tore pour chaque classe d'équivalence par éboulements locaux. Les classes d'équivalence sont donc en bijection avec les couples de configurations récurrentes du tore de puits  $(1, 1)$  avec un nombre de grains dans le puits connu. Dans [LPKS12], une configuration périodique est stabilisable si le nombre de sommets dans le puits  $(1, 1)$  pour la récurrente équivalente obtenue est inférieur à 3.

Cependant, seules des configurations de même quantité de grains par motif peuvent être équivalentes. En effet, il n'y a pas de puits pour injecter ou absorber des grains.

Dans le chapitre précédent, pour simuler l'éboulement du puits et tester si une configuration est récurrente, on éboule un demi-plan. On peut s'intéresser à ce type d'éboulement et son application de manière périodique.

Localement, l'éboulement d'un demi-plan  $x < x_0$  correspond au transfert d'un grain sur chacune des arêtes traversant la droite  $x = x_0$  (Figure 5.2). Répéter cet éboulement de manière périodique, tous les  $W\mathbf{e}_x$ , revient alors à un transfert d'un grain par arêtes coupant une droite du dual dans le tore.



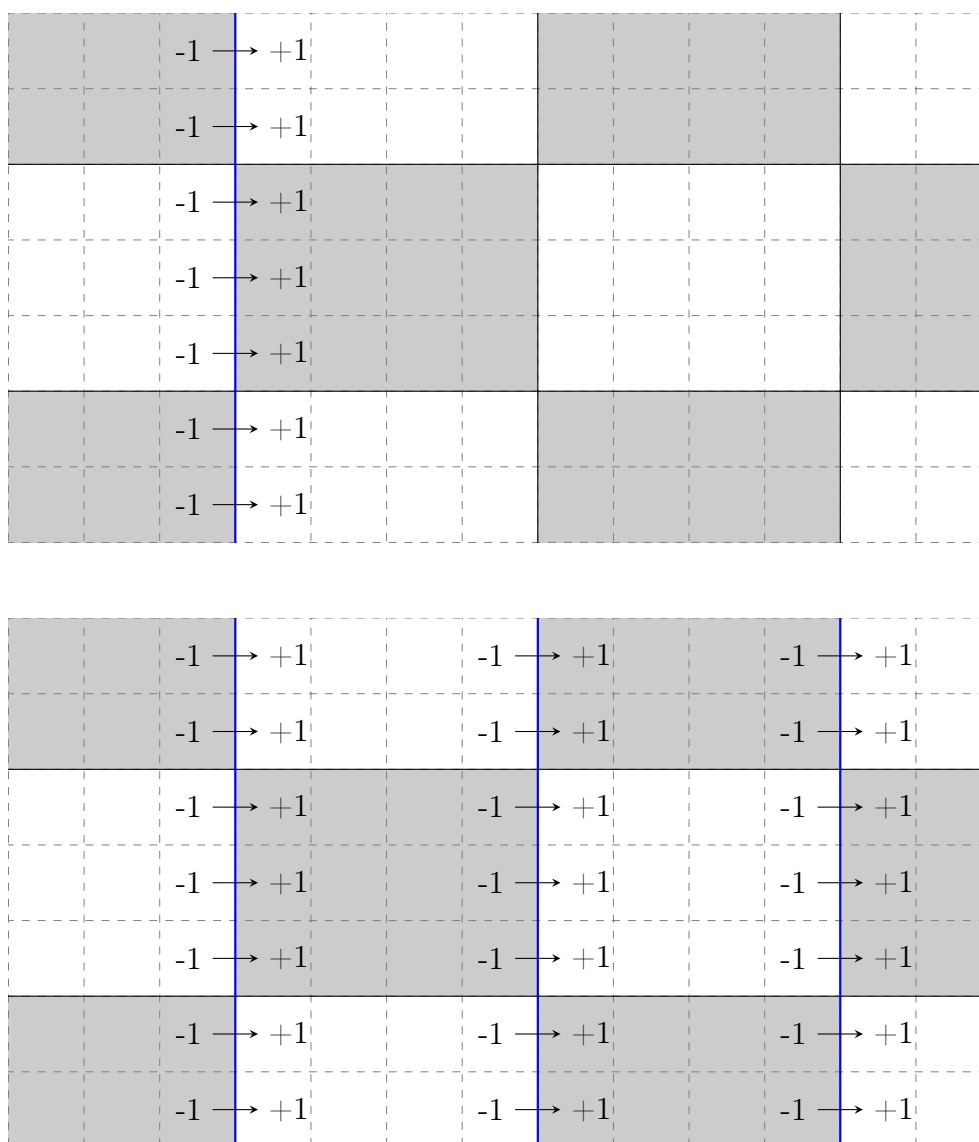


FIGURE 5.2 – Éboulement d'un demi-plan sans et avec répétition

**Définition 5.3.** On appelle décalage en colonne  $i$  l'opérateur  $D_i$  consistant au transfert d'un grain de la  $i$ -ème colonne du tore à la  $i + 1$ -ième.

On remarque qu'un décalage  $D_i$  suivi de l'éboulement local de la colonne  $i + 1$  produit le décalage  $D_{i+1}$ . On se restreindra au décalage  $D = D_W$  transférant les grains de la dernière colonne à la première.

On a  $D = (D_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, W \rrbracket \times \llbracket 1, H \rrbracket}$  où  $D_{1,j} = 1$  et  $D_{W,j} = -1$  pour tout  $j$  et  $D_{i,j} = 0$  sinon :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On confondra les notations  $D(x)$  comme opérateur et  $x + D$  comme somme de configurations.

L'opérateur sur le plan peut alors se définir comme le Laplacien discret de la fonction  $(x, y) \rightarrow -\lfloor \frac{x}{W} \rfloor$ . Chaque répétition du motif sur la grille s'est éboulée une fois de plus ce que celui de droite en  $+W\mathbf{e}_x$  et une fois de moins que celui de gauche en  $-W\mathbf{e}_x$ .

**Proposition 5.4.** La répétition  $W$  fois de l'opérateur  $D$ , notée  $W \cdot D$ , est équivalent à éboulements locaux près à la configuration nulle.

*Démonstration.*  $W \cdot D$  est équivalent à éboulements locaux près à  $\sum_{i=1}^W D_i$ . Or la suite de ces opérateurs consistent à transférer un grain d'une colonne à la suivante. Chaque colonne a perdu et gagné un grain. Donc  $\sum_{i=1}^W D_i = 0$ .  $\square$

Après l'éboulement d'un tel demi-plan, une configuration récurrente se stabilise en elle même par définition. On va donc considérer les opérations résultant de décalages comme étant raisonnable vis à vis de l'établissement d'une relation d'équivalence.

**Définition 5.5.** Deux configurations périodiques sont équivalentes par décalages s'il existe une suite de décalages transformant la première en une configuration équivalente à éboulements locaux près à la seconde.

Encore une fois, cette opération maintient le nombre de grains sur une configuration. Dans le cas fini, l'excédent de grains est absorbé par le puits. Cependant, le puits est placé à l'infini. L'éboulement d'un demi-plan de la grille décale les grains d'une abscisse. Il permet donc de pousser les grains. On propose donc de pousser les grains vers l'infini.

L'éboulement d'un demi-plan pousse les grains vers l'extérieur du demi-plan. Si on éboule le demi-plan d'équation  $x \geq 0$ , les sommets d'ordonnées  $x \geq 0$  ont chacun perdu un grain, et les sommets d'ordonnées  $x = -1$  ont

chacun gagné un grain. Si on éboule maintenant le demi-plan d'équation  $x \geq -1$ , l'excédent de grains se déplace sur l'ordonnée  $x = -2$  et le défaut de grains reste à l'ordonnée 0. On peut ainsi ébouler tous les demi-plans d'équations  $x + k \geq 0$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et pousser l'excédent de grains vers le puits  $\mathbf{s} = (-1, 0)$ . On est donc parvenu à retirer un grain par sommet d'ordonnée  $x = 0$ . On peut répéter cette opération suivant la période du motif, tous les  $W\mathbf{e}_y$ . L'opération se traduit donc par la perte d'un grain par sommet d'une même colonne de chaque répétition du motif de la configuration.

**Définition 5.6.** On appelle arrachage en colonne  $i$  l'opération notée  $A_i$  correspondant à la perte d'un grain par sommet de la colonne  $i$  dans le tore.

Comme pour le décalage, on remarque qu'un arrachage  $A_i$  suivi du décalage  $D_i$  produit le décalage  $A_{i-1}$ . On se restreindra à l'arrachage  $A = A_1$  arrachant un grain par sommet de la première colonne de chaque répétition du motif.

On a  $A = (A_{i,j})_{(i,j) \in [1,W] \times [1,H]}$  où  $A_{i,j} = -\delta_i, 1$  :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On confondra les notations  $A(x)$  comme opérateur et  $x + A$  comme somme sur des configurations.

Cet opérateur se rapproche alors du Laplacien d'une forme quadratique dégénérée de la forme  $ax^2 + bx$ .

Localement, les sommets d'abscisses  $x$  se sont éboulés une infinité dénombrable de fois plus que les sommets d'abscisses  $x + 1$ . On a ainsi une opération plus forte que les précédentes, cependant le bilan par sommet est soit 0 soit  $-1$ .

**Définition 5.7.** Deux configurations périodiques sont équivalentes par arrachages s'il existe une suite d'arrachages transformant l'une en une configuration équivalente par décalages à l'autre.

### 5.1.2 Groupe sur les classes d'équivalence

On s'intéresse aux classes d'équivalence des configurations périodiques par la relation d'équivalence par arrachages.

**Lemme 5.8.** Les classes d'équivalence par arrachages sont en nombre fini.

*Démonstration.* On a vu que les classes d'équivalence par éboulements locaux peuvent être représentées par des couples de configurations récurrentes du tore

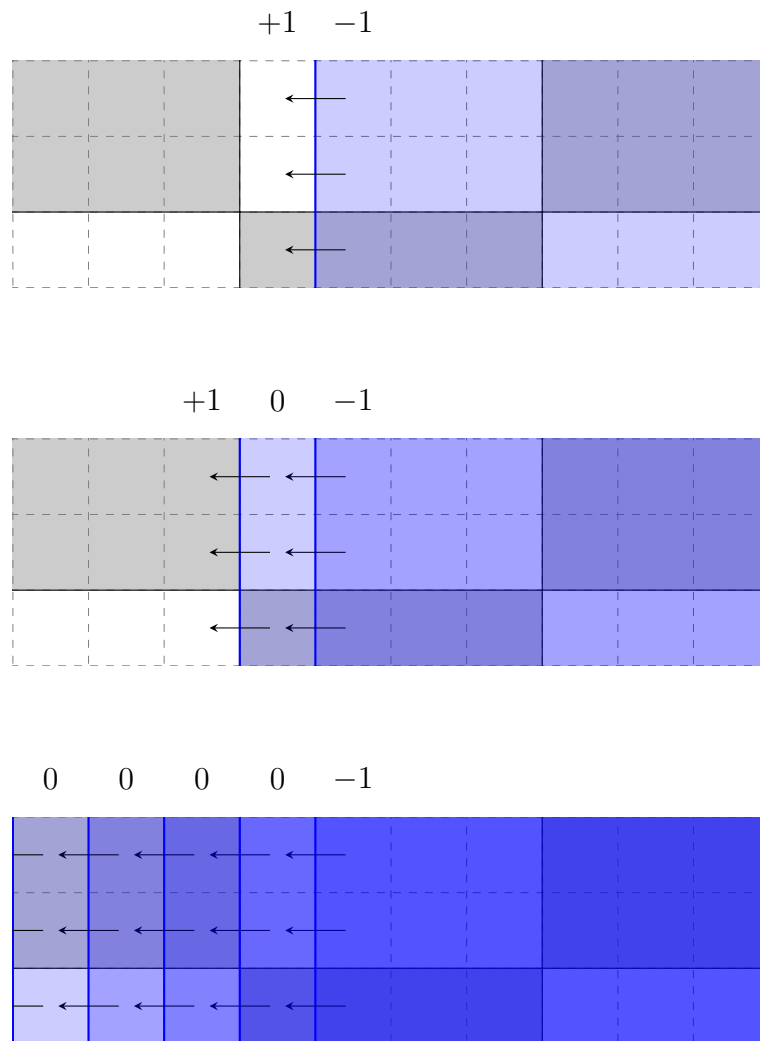


FIGURE 5.3 – Arrachage sur une colonne du plan

de puits  $(1, 1)$  avec un nombre de grains dans le puits. Ce nombre est en entier relatif quelconque. L'arrachage permet de réduire les représentants de classe à ceux dont le nombre de grains est borné. On a donc un nombre fini de représentants, donc un nombre fini de classes d'équivalence par arrachages.

De plus, un arrachage extrait  $H$  grains. Donc il y a au moins  $H$  classes d'équivalence par arrachages.  $\square$

**Proposition 5.9.** *Soit  $[x]$  et  $[y]$  deux classes contenant respectivement les configurations périodiques  $x$  et  $y$ . Soit  $w = x + y$  la somme des deux configurations. Alors pour tout  $x' \in [x]$  et pour tout  $y' \in [y]$ ,  $x' + y' \in [w]$ .*

*La somme usuelle sur les classes de configurations est bien définie et décrit une loi de groupe abélien fini.*

*Démonstration.* Soit  $x' \in [x]$  et  $y' \in [y]$ . Alors  $x' = x + \sum_{i=1}^k L_{u_i} + m \cdot D + n \cdot A$  et  $y' = y + \sum_{i=1}^{k'} L_{v_i} + m' \cdot D + n' \cdot A$ , avec  $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ ,  $u_i, v_j \in \llbracket 1, W \rrbracket \times \llbracket 1, H \rrbracket$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq k'$ . Donc  $x' + y' = x + y + \sum_{i=1}^k L_{u_i} + \sum_{i=1}^{k'} L_{v_i} + (m + m')D + (n + n')A$ . On a bien  $x' + y' \in [w]$ .

On hérite l'inverse, l'associativité et la commutativité de l'addition sur les entiers.  $\square$

On passe d'un groupe infini à un groupe fini par un système de représentants. Dans le cas fini, les configurations récurrentes représentent bijectivement les classes d'équivalence. On ne conservera pas cette bijection dans notre cas (voir [Section 5.4](#)).

## 5.2 Cas non axial

On se place maintenant dans un cas distinct du puits selon un axe. On supposera  $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$  tel que  $0 < -s_x \leq s_y$  pour la clarté des figures. Le puits sera donc à l'infini en haut à gauche.

Quitte à répéter la taille du motif, on se place dans le cas où  $(W, H) = k(s_y, -s_x)$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ . Ainsi, on peut choisir pour l'éboulement d'un demi-plan une frontière orthogonale à  $\mathbf{s}$  qui est périodique de vecteur  $(W, H)$ .

Les opérateurs vont être partiellement conservés. L'éboulement local reste un éboulement sur le tore. Cependant l'éboulement d'un demi-plan doit se définir en accord avec le critère de récurrence.

Le critère de récurrence s'exprime par l'éboulement d'un demi-plan de frontière orthogonale à la direction du puits. Dans le cas de ce critère, le choix a été de prendre une approximation d'une droite par une droite discrète. Soit  $P = \{(x, y) \mid xs_x + ys_y > 0\}$  un tel demi-plan. L'éboulement de  $P$  se décompose en l'éboulement des répétitions du motif intégralement dans  $P$ , et des sommets de répétitions du motif chevauchant  $P$ . Formellement, en rappelant

que  $(s_x, s_y) = (-H, W)$ , on a

$$P = \{(xW, yH) + \llbracket 0, W - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, H - 1 \rrbracket \mid x - y < 0\} \\ + \{(x, y) + (W, H)\mathbb{Z} \mid (x, y) \in \llbracket 0, W - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, H - 1 \rrbracket, xs_x + ys_y > 0\}.$$

Dans le cas d'un éboulement de demi-plan comme opérateur sur les configurations périodiques, on veut ébouler les demi-plans  $P + W\mathbb{Z}\mathbf{e}_x$ . En maintenant la décomposition, ceci revient à réaliser un éboulement local de

$$\{(x, y) \in \llbracket 0, W - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, H - 1 \rrbracket \mid xs_x + ys_y > 0\}$$

ainsi qu'à ébouler chaque répétition du motif une fois de plus que ses voisins en bas et à gauche. Comme on travaille déjà à éboulements locaux près, l'opérateur d'éboulement de demi-plan revient à faire des transferts de grains sur tore. On a alors

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & & & & -1 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 1 & & & & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On peut définir l'arrachage de la même manière que précédemment. On éboule le demi-plan  $P = \{(x, y) \mid xs_x + ys_y \leq 0\}$  puis les demi-plans  $P - (k, 0)$  pour tout  $k > 0$ . Quitte à raisonner à éboulements locaux près, on peut utiliser la décomposition précédente avec  $P = \{(xW, yH) + \llbracket 0, W - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, H - 1 \rrbracket \mid x - y < 0\}$ . L'éboulement des translatés de  $P$  permet de compenser les transferts horizontaux. Cependant les transferts verticaux ne s'équilibrent pas et contrairement au cas du puits sur un axe, on a alors une perturbation infinie non localisée comme sur la [Figure 5.4](#).

Afin de neutraliser ces transferts verticaux, on peut réaliser non seulement l'éboulement des demi-plans  $P + (k, 0)$  pour  $k \leq 0$  mais aussi ébouler les demi-plans  $P + (k, d_y)$  où  $k \leq 0$  et  $0 \leq d_y < H$ . Cela revient à faire une suite de  $H$  arrachages avec défaut ([Figure 5.5](#)). Le bilan d'ajout et de perte de grains est maintenant localisé autour de la frontière et on peut représenter un arrachage par un opérateur sur le tore :

$$A = \begin{pmatrix} -W - H & -W & \cdots & -W \\ -H \\ \vdots \\ -H \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'opérateur d'arrachage retire  $W^2 + H^2$  grains.

On dispose de nouveau des trois opérateurs  $L_v$ ,  $D$  et  $A$  qui s'exprime comme des matrices de taille  $W \times H$ . On a donc un groupe abélien fini sur les classes d'équivalence par arrachages sur les configurations de taille  $(W, H)$  pour le puits dans la direction  $(-H, W)$ .

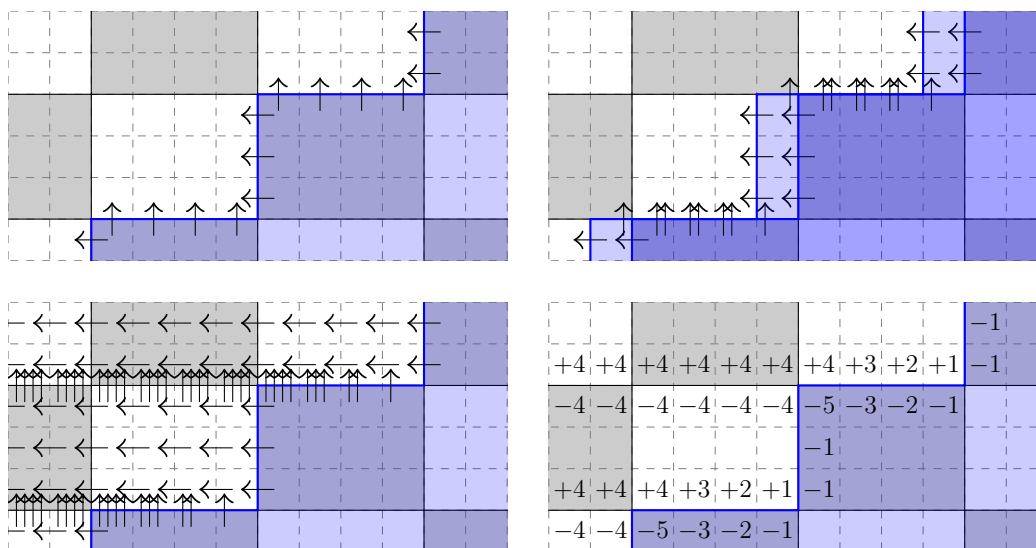


FIGURE 5.4 – Arrachage diagonal non local

### 5.3 Groupes pour les petites tailles

La détermination des classes d'équivalences se fait algorithmiquement. On calcule à partir des configurations  $\eta$  contenant de 0 à 6 grains par sommets. Puis on regroupe à éboulements locaux près. Cela revient à choisir un sommet du tore et de l'utiliser comme un puits dans la recherche de la récurrente équivalente dans le tore enraciné en ce sommet. Ensuite, on cherche tous les couples tels que  $\eta_2 = \eta_1 + D$  et  $\eta_2 = \eta_1 + A$  à éboulements locaux près. Ceci nous donne un graphe dont les composantes connexes sont les classes d'équivalence par arrachages.

Dans le cas de  $(W, H) = (2, 2)$  et le puits dans la direction  $(-1, 0)$ , on retrouve le groupe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$  d'élément neutre la classe de la configuration périodique récurrente  $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ . Dans la direction  $(-1, 1)$ , on retrouve le groupe  $(\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_4)^2$  d'élément neutre la classe de la configuration périodique récurrente  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

### 5.4 Classes d'équivalence et récurrentes

Dans le cas fini, il n'existe qu'une récurrente par classe d'équivalence. Dans le cas des configurations périodiques, on se retrouve avec un double problème. L'arrachage dans le cas diagonal retire  $W^2 + H^2 > WH$ , donc on retire plus d'un grain par sommet en moyenne. Une configuration récurrente a en moyenne entre 2 et 3 grains par sommets. Donc on s'attend à ce qu'une classe ne contienne pas de récurrente à cause du trop gros saut réalisé par l'arrachage

$-W$	$-W$	$-W$	$-W$	$-W$	$-W$	$-W$	$-W - 1$
							$-1$
							$\vdots$
$+W$	$+W$	$+W$	$+W$	$+W - 1$	$\cdots$	$+1$	$-1$
$-W$	$-W$	$-W$	$-W - 1$	$-(W - 1)$	$\cdots$	$-1$	
			$-1$				
			$\vdots$				
$+W - 1$	$\cdots$	$+1$	$-1$				
$-(W - 1)$	$\cdots$	$-1$					

				$-1$	$\cdots$	$-(W - 1)$	$-W - H$
				$-1$			$-(H - 1)$
				$\vdots$			$\vdots$
			$-(H - 1)$				$-1$
$-1$	$\cdots$	$-(W - 1)$	$-W - H$	$-(W - 1)$	$\cdots$	$-1$	
			$-(H - 1)$				
			$\vdots$				
			$-1$				
$-(W - 1)$	$\cdots$	$-1$					

FIGURE 5.5 – Bilan d'un arrachage avec défaut et d'un arrachage avec  $H$  répétitions



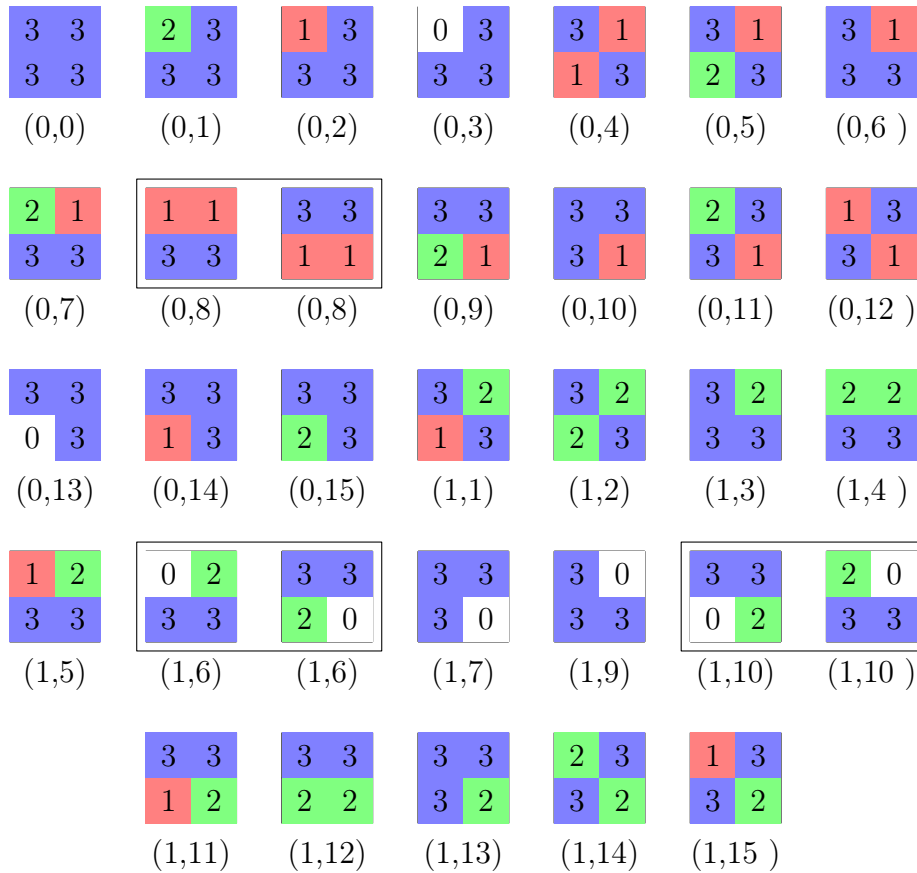


FIGURE 5.6 – Configurations récurrentes (2,2) pour  $\mathbf{s} = (-1, 0)$  et regroupement par classes d'équivalence

dans le cas général.

Expérimentalement, c'est le cas dès le plus petit cas étudié :  $(W, H) = (2, 2)$  avec le puits dans la direction  $(-1, 0)$ , donc dans un cas non diagonal. La figure 5.6 illustre la répartition des configurations récurrentes dans la direction  $(-1, 0)$  dans les classes d'équivalences. On choisit ici un isomorphisme entre les éléments de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$  et les classes. Certaines classes ont plusieurs configurations récurrentes, celles-ci diffèrent soit par éboulements locaux (classe (0, 8)), soit par décalage (classes (1, 6) et (1, 10)). Cependant, deux classes d'équivalence ne contiennent pas de configurations récurrentes, il s'agit de deux des trois classes d'ordre 2 du groupe, les classes (1, 0) et (1, 8) dans notre représentation.

On retrouve ce problème dans les autres cas étudiés. Pour la taille (2, 2) avec le puits en  $(-1, 1)$ , 27 des 64 classes d'équivalence ne contiennent pas de récurrentes dans la direction  $(-1, 1)$ .

Comme l'arrachage extrait trop de grains, on peut essayer de retirer moins de grains. Pour cela, on multiplie la taille des motifs en maintenant la forme de l'arrachage. Pour une configuration  $\eta$  de motif de taille  $(W, H)$ , l'opérateur

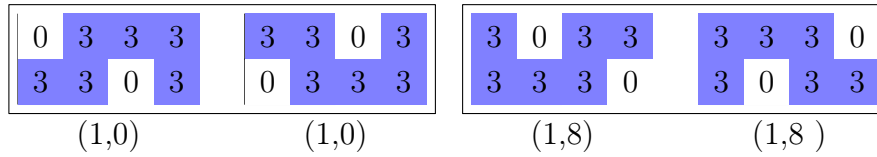


FIGURE 5.7 – Configurations récurrentes pour le groupe des configurations récurrentes  $2 \times 2$

d'arrachage  $A$  est la somme sur  $k \in \mathbb{Z}$  des éboulements des arrachages sur le plan  $A_{W,H} + kW\mathbf{e}_x$ . Ainsi on considère  $\eta$  de motif de taille  $(nW, nH)$  et donc l'opérateur d'arrachage  $A$  est cette fois-ci la somme sur  $k \in \mathbb{Z}$  des éboulements des arrachages sur le plan  $A_{W,H} + (knW, 0)$ .

Cette méthode est expérimentale et fonctionne en pratique car elle permet de mettre en évidence des configurations récurrentes pour chaque classe dont la somme avec les éléments des autres classes est compatible avec la relation de groupe abélien. Par exemple, les classes sans récurrentes de taille  $(2, 2)$  correspondant sur la 5.6 aux classes  $(1, 0)$  et  $(1, 8)$  contiennent les configurations récurrentes de taille  $(4, 2)$  présentées sur la 5.7.

Bien que relaxant l'équivalence par arrachages, les résultats expérimentaux suggèrent que la multiplication de la taille des éléments du groupe laisse stable les éléments du groupe tout en augmentant le nombre d'éléments par classe.



# Conclusion

L'introduction faisant une synthèse des travaux réalisés, la conclusion est consacrée aux ouvertures en cours ou non suggérées par les différents points abordés dans cette thèse.

**Groupe des bipériodiques** La définition de groupe abordée dans le dernier chapitre est la plus expérimentale et il reste plusieurs questions avec des résultats expérimentaux encourageants. Dans notre définition, chaque direction permet de définir une classe d'équivalence par avalanches pour l'élément neutre du groupe. On a ainsi autant de classes de configurations neutres que de directions. Si ces groupes sont des sous-groupes de l'hypothétique groupe des configurations récurrentes de  $\mathbb{Z}^2$ , alors leurs éléments neutres doivent coïncider sur une même classe pour une relation d'équivalence qui reste à définir. On a vu qu'on peut décrire des configurations à partir de la configuration nulle partout à l'aide de certaines formes quadratiques. Un candidat pour la notion d'équivalence pourrait être la généralisation à toutes les formes quadratiques : deux configurations sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par des éboulements locaux et des éboulements décrits par une forme quadratique.

Toujours sur les formes quadratiques, on pourra se demander si une forme quadratique peut se décomposer en la somme de deux formes quadratiques dégénérées. Chaque forme quadratique dégénérée peut s'interpréter comme l'action d'un puits dans une direction. Alors l'utilisation d'une forme quadratique pour approximer un nombre d'éboulements par sommet se traduirait par l'action des deux puits associés aux formes quadratiques. On se rapproche alors des constructions de [Pao12, CPS15, LPKS13, PS17].

**Classes de configurations et récurrentes** La présence de configurations récurrentes dans une direction dans les classes de configurations de dimensions données pose également deux questions. La multiplication de la taille du motif des configurations générant le groupe permet-il toujours d'obtenir au moins une récurrente par classe ? Le cas échéant, est-il possible d'affiner les classes de configurations pour n'obtenir qu'une seule configuration récurrente par classe comme dans le cas fini. À ce stade, l'existence de configurations récurrentes dans chaque classe n'est pas garantie. Cependant l'unicité semble toujours re-

---

liée à une équivalence par éboulements locaux ou éboulements par demi-plan. Affiner les classes en comptant le nombre de décalages réalisés est une piste mais l'équivalence par éboulements locaux pose problème car elle correspond à l'équivalence dans le cas fini. On pourra s'intéresser aux configurations récurrentes dans une direction de dimensions  $m \times n$  pour  $m, n$  raisonnables et essayer de caractériser les configurations récurrentes dans une direction qui sont équivalentes par éboulements locaux.

**Parcours sommet-arête périodique et polynôme de Tutte** La bijection entre les recouvrements périodiques et les configurations récurrentes dans une direction telle que décrite précédemment ne construit pas un parcours sommet-arête. Cependant, on peut reconstruire à partir du recouvrement ce parcours sur une restriction à un domaine fondamental.

Pour cela, on peut se placer sur le plan entre une branche infinie, celle dont un des enfants est le sommet  $(1, 1)$ , et sa répétition par la translation  $\mathbf{p}_1$ . On applique le critère affaibli entre ces deux branches, réalisant le découpage en composantes finies à chaque étape. L'ordre de traitement des sommets est ultimement périodique et définit sur son comportement périodique un parcours sommet-arête sur un domaine fondamental qui contient deux fois les arêtes et sommets de la branche infinie.

À ce stade, ces parcours ne sont pas exploités mais peuvent mener à l'utilisation du polynôme de Tutte par les résultats de [CLB03]. La grille étant auto-duale, on s'attend à ce que le polynôme suivant soit symétrique :

$$T_{W \times H}^{\mathbf{s}}(x, y) = \sum_R x^{i(R)} y^{j(R)}$$

où  $R$  est un recouvrement de  $W \times H$  compatible avec la direction  $\mathbf{s}$  et  $i$  et  $j$  sont les activités internes et externes de  $R$ .

**Automate pour  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$**  En s'inspirant des résultats sur la bande, on peut se demander s'il est possible de réaliser un automate sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  en suivant le principe de lecture par colonne. Afin d'avoir une représentation finie, on ne s'intéressera qu'aux configurations périodiques selon l'orthogonale au puits  $(-1, 0)$ , à l'infini à gauche. Une difficulté vis à vis de la construction de l'automate dans le cas de la bande du **Chapitre 3** est l'utilisation du parcours sommet-arête décroissants. En effet il peut y avoir une infinité d'éléments entre deux éléments dans le parcours. Dans le cas où on arrive à décomposer ces parcours en ordres induits, il faut également décrire une nouvelle relation de compatibilité.

Une possible solution à ces difficultés serait de se baser sur le critère de Dhar affaibli dans son raffinement produisant un arbre couvrant périodique. Le déroulement des éboulements de part et d'autre d'une branche infinie sont indépendants donc la restriction du parcours sommet-arête aux éléments situés entre deux branches infinies permet éventuellement de se ramener à un cadre

fini plus confortable. Cependant, il faut encore trouver la décomposition en ordres induits et décrire la compatibilité de manière homogène pour tous les parcours. Malgré l'apparente difficulté, cette approche semble prometteuse et permettra en cas de succès d'obtenir un automate produisant des configurations récurrentes dans la direction du puits et périodiques orthogonalement au puits.

**Généralisation de l'automate de la bande** Dans le [Chapitre 3](#), on s'est restreint aux graphes  $\mathbb{Z} \times \{1, \dots, H\}$ , dans les travaux de Járai et Lyons, l'existence d'un automate se montre pour tout graphe fini  $G$  connexe. La construction de l'automate à l'aide du parcours sommet-arête se généralise-t-elle à tout graphe fini  $G$ ? Sans entrer dans les détails, la relation de compatibilité et les propriétés sur les ordres induits semblent être conservées. En effet, ces propriétés s'appuient sur le découpage du parcours sommet-arête entre éléments à droite et à gauche d'un ordre induit, les arêtes internes de  $G$  n'influent pas sur l'alternance mise en évidence dans ce chapitre.

**Application de l'automate** Une des motivations de la construction de l'automate est portée par des simulations dans un modèle jouet simulant l'écoulement d'un fluide en présence d'un obstacle réalisé par Y. Le Borgne. Cet écoulement est modélisé sur une bande de hauteur  $H$  en plaçant des obstacles en quelques sommets. Le pas de calcul se définit alors par la translation de l'obstacle d'une colonne vers la gauche, poussant les grains dans les cases d'arrivée également vers la gauche et en laissant une case vide dans les sommets libérés. Ce déplacement est suivi du calcul de la configuration récurrente équivalente. Le résultat principal d'Yvan Le Borgne est que ce pas de calcul, constitué d'un décalage suivi du calcul de configuration récurrente, entre deux configurations récurrentes est bien défini et induit une modification locale (mais non bornée) au voisinage de l'obstacle. Dans cette perspective, il est pertinent d'obtenir uniformément une configuration récurrente initialisant le système puis de s'intéresser à la mesure stationnaire quand le nombre de pas augmente. La mesure uniforme initiale dans le cas sans obstacle est celle de [\[JL07\]](#) et se généralise pour prendre en compte les obstacles. Le pas de simulation peut modifier cette distribution, et on s'intéresse à la distribution après un grand nombre de pas de calcul, voire la distribution asymptotique stationnaire si elle existe.

**Perspective sur les permutations** Dans le [Chapitre 2](#), on a mené les calculs tant qu'on pouvait exprimer les probabilités en termes de somme sur des permutations. Ces calculs ont mené à la positivité de  $\sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1-q}$  ([Théorème 2.12](#)). Ce résultat se montre par décomposition

$$\sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \frac{q^{\text{maj}\sigma} - q^{\text{inv}\sigma}}{1-q} = \sum_{1 < k < l \leq n} \sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \frac{q^{\text{inv}_{W(k,l)}(\sigma)} - q^{\text{inv}_{W(k-1,l)}(\sigma)}}{1-q}.$$

---

On pourrait s'intéresser à un raffinement de cette décomposition en comptant par exemple le nombre de permutations comptant positivement dans la somme pour les paramètres  $(k, l)$ :

$$F(q, t) = \sum_{1 < k < l \leq n} \sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{P})} \frac{q^{\text{inv}_{W^{(k,l)}}(\sigma)} - q^{\text{inv}_{W^{(k-1,l)}}(\sigma)}}{1 - q} t^{i(k,l)}$$

où  $0 \leq i(k, l) < \binom{n}{2}$  est la position du terme de paramètre  $(k, l)$  dans la somme télescopique. Si ce choix de statistique est arbitraire, on peut se demander si un bon choix peut donner plus de structure sur la somme initiale. Cette positivité n'a pu être exploitée dans le cadre de la thèse, elle est donc laissée au regard expert des intéressés.

On s'est intéressé pour calculer la probabilité au nombre de 0 lus pour chaque certificat. On peut également oublier cette statistique pour s'intéresser au chemin pris par l'algorithme de lecture des sommets. En le modifiant quelque peu, on se retrouve dans un cadre proche des chemins prudents [BM10]. On retrouve dans ce modèle des difficultés semblables à la difficulté croissante de la mise en équation de la loi du demi-périmètre du rectangle stable quand on réduit le nombre de symétries. Dans le cas des chemins prudents, cela passe par l'interdiction de tourner autour de l'origine. On peut alors chercher des statistiques sur les certificats permettant un parallèle avec les chemins prudents.

# Bibliographie

- [Ber08] Olivier BERNARDI : Tutte Polynomial, Subgraphs, Orientations and Sandpile Model: New Connections via Embeddings. *Electr. J. Comb.*, 15, 2008.
- [Big99] N.L. BIGGS : Chip-Firing and the Critical Group of a Graph. 9:25–45, 01 1999.
- [BL16] Benjamin BOND et Lionel LEVINE : Abelian Networks I. Foundations and Examples. *SIAM J. Discrete Math.*, 30:856–874, 2016.
- [BLS91] Anders BJÖRNER, László LOVÁSZ et Peter W. SHOR : Chip-firing Games on Graphs. *European Journal of Combinatorics*, 12(4):283 – 291, 1991.
- [BM10] Mireille BOUSQUET-MÉLOU : Families of prudent self-avoiding walks. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 117(3):313 – 344, 2010.
- [BN07] Matthew BAKER et Sergey NORIN : Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph. 215:766–788, 11 2007.
- [Bre65] J. E. BRESENHAM : Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter. *IBM Syst. J.*, 4(1):25–30, mars 1965.
- [BRR89] David BORWEIN, Stuart RANKIN et Lex RENNER : Enumeration of injective partial transformations. *Discrete Mathematics*, 73(3):291 – 296, 1989.
- [BTW87] P. BAK, C. TANG et K. WIESENFELD : Self-organized criticality - An explanation of  $1/f$  noise. *Physical Review Letters*, 59:381–384, juillet 1987.
- [BW89] Anders BJÖRNER et Michelle L WACHS :  $q$ -Hook length formulas for forests. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 52(2):165 – 187, 1989.
- [CLB03] Robert CORI et Yvan LE BORGNE : The sand-pile model and Tutte polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, 30(1–2):44 – 52, 2003.
- [CPS11] Sergio CARACCILO, Guglielmo PAOLETTI et Andrea SPORTIELLO : Multiple and inverse topplings in the Abelian Sandpile Model. 212:23–44, 12 2011.



- 
- [CPS15] S. CARACCILO, G. PAOLETTI et A. SPORTIELLO : Deterministic Abelian Sandpile and square-triangle tilings. *ArXiv e-prints*, août 2015.
- [DB13] Mark DUKES et Yvan Le BORGNE : Parallelogram polyominoes, the sandpile model on a complete bipartite graph, and a  $q, t$ -Narayana polynomial. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120(4):816–842, 2013.
- [Dha90] Deepak DHAR : Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1613–1616, Apr 1990.
- [DS13] Deepak DHAR et Tridib SADHU : A sandpile model for proportionate growth. 2013, 10 2013.
- [DSC08] Deepak DHAR, Tridib SADHU et Samarth CHANDRA : Pattern formation in growing sandpiles. 85, 08 2008.
- [EW09] Sergi ELIZALDE et Peter WINKLER : Sorting by Placement and Shift. In *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 68–75, Philadelphia, PA, USA, 2009.
- [FS78] Dominique FOATA et Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER : Major Index and Inversion Number of Permutations. *Mathematische Nachrichten*, 83(1):143–159, 1978.
- [Gam16] Samuel GAMLIN : *Boundary conditions in Abelian sandpiles*. Thèse de doctorat, University of Bath, April 2016.
- [GH02] A. M. GARSIA et J. HAGLUND : A Proof of the  $Q, t$ -Catalan Positivity Conjecture. *Discrete Math.*, 256(3):677–717, octobre 2002.
- [GH08] Janko GRAVNER et Alexander E. HOLROYD : Local Bootstrap Percolation. *Electronic Journal of Probability*, pages 385–399, 2008.
- [GJ14] Samuel GAMLIN et Antal JÁRAI : Anchored burning bijections on finite and infinite graphs. *Electron. J. Probab.*, 19:23 pp., 2014.
- [Hag07] Jim HAGLUND : The  $q, t$ -Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics with an Appendix on the Combinatorics of Macdonald Polynomials. 2007.
- [HJL17] B. HOUGH, D. JERISON et L. LEVINE : Sandpiles on the square lattice. *ArXiv e-prints*, mars 2017.
- [HLM<sup>+</sup>08] Alexander E. HOLROYD, Lionel LEVINE, Karola MÉSZÁROS, Yuyal PERES, James PROPP et David B. WILSON : *Chip-Firing and Rotor-Routing on Directed Graphs*, pages 331–364. Birkhäuser Basel, Basel, 2008.
- [Jár14] A. A. JÁRAI : Sandpile models. *ArXiv e-prints*, janvier 2014.
- [JL07] Antal A. JÁRAI et Russell LYONS : Ladder sandpiles. pages 493–518, 2007.

- [Kas61] P.W. KASTELEYN : The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. 27:1209–1225, 12 1961.
- [Ken11] Richard KENYON : Spanning forests and the vector bundle Laplacian. *Ann. Probab.*, 39(5):1983–2017, 09 2011.
- [Ken17] R. KENYON : Determinantal spanning forests on planar graphs. *ArXiv e-prints*, février 2017.
- [Kit11] Sergey KITAEV : *Patterns in permutations and words*. Berlin: Springer, 2011.
- [Knu97] Donald E. KNUTH : *The Art of Computer Programming, Volume 1 (3rd Ed.): Fundamental Algorithms*. Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., Redwood City, CA, USA, 1997.
- [KS16] Nikita KALININ et Mikhail SHKOLNIKOV : Tropical curves in sandpiles. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(2):125 – 130, 2016.
- [LB97] N L. BIGGS : Algebraic Potential Theory on Graphs. 29:641–682, 11 1997.
- [LBR02] Yvan LE BORGNE et Dominique ROSSIN : On the identity of the sandpile group. *Discrete Mathematics*, 256(3):775 – 790, 2002. LACIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications.
- [Lev11] Lionel LEVINE : Parallel Chip-Firing on the Complete Graph: Devil’s Staircase and Poincare Rotation Number. 31:891 – 910, 05 2011.
- [Lóp97] Criel Merino LÓPEZ : Chip firing and the tutte polynomial. *Annals of Combinatorics*, 1(1):253–259, Dec 1997.
- [LP08] Lionel LEVINE et Yuval PERES : Strong Spherical Asymptotics for Rotor-Router Aggregation and the Divisible Sandpile. *Potential Analysis*, 30(1):1, Oct 2008.
- [LPKS12] Lionel LEVINE, Wesley PEGDEN et Charles K. SMART : Apollonian Structure in the Abelian Sandpile. 26, 08 2012.
- [LPKS13] Lionel LEVINE, Wesley PEGDEN et Charles K. SMART : The Apollonian structure of integer superharmonic matrices. 186, 09 2013.
- [Mac15] P.A. MACMAHON : *Combinatory Analysis*, 1915.
- [MD92] S.N. MAJUMDAR et Deepak DHAR : Equivalence between the Abelian sandpile model and the  $q \rightarrow 0$  limit of the Potts model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 185(1–4):129 – 145, 1992.
- [MRS04] C. MAES, F. REDIG et E. SAADA : The Infinite Volume Limit of Dissipative Abelian Sandpiles. *Communications in Mathematical Physics*, 244(2):395–417, Jan 2004.

- [Ost03] Srdjan OSTOJIC : Patterns formed by addition of grains to only one site of an abelian sandpile. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 318(1):187 – 199, 2003. STATPHYS - Kolkata IV.
- [Pao12] PAOLETTI : *Deterministic Abelian Sandpile Models and Patterns*. Thèse de doctorat, Università di Pisa, 2012.
- [PKS11] Wesley PEGDEN et Charles K. SMART : Convergence of the Abelian sandpile. 162, 04 2011.
- [PS17] W. PEGDEN et C. K SMART : Stability of patterns in the Abelian sandpile. *ArXiv e-prints*, août 2017.
- [Rue13] P. RUELLE : Logarithmic conformal invariance in the Abelian sandpile model. *Journal of Physics A Mathematical General*, 46:494014, décembre 2013.
- [Slo] N. J. A. SLOANE : The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://oeis.org>.
- [VKP98] D V. KITAREV et Vyatcheslav PRIEZZHEV : Expansion and contraction of avalanches in the two-dimensional Abelian sandpile. 58, 03 1998.
- [WK85] Kevin W.J KADELL : Weighted inversion numbers, restricted growth functions, and standard young tableaux. 40:22–44, 09 1985.







**Résumé** Le modèle du tas de sable est un modèle de diffusion discret et isotrope introduit par les physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld comme illustration de la criticalité auto-organisée. Pour tout graphe, souvent supposé fini, Dhar a formalisé de nombreuses propriétés simplifiant son analyse. Cette thèse propose des études de ce modèle sur la grille bidimensionnelle usuelle et certains de ses sous-graphes également infinis que sont les bandes bi-infinies de hauteur finie. Des approximations du comportement de la pile de sable peuvent se rapprocher de certains modèles de bootstrap percolation avec un support de stabilisation rectangulaire. Les lois sur son demi-périmètre peuvent se décrire à l'aide de statistiques sur les permutations. Un sous-produit de ce travail fait apparaître une différence de deux séries génératrices comptant des permutations selon deux statistiques mahoniennes classiques dont est extrait un polynôme à coefficients entiers et surtout positifs. La suite de cette thèse revisite dans le cadre de ces graphes infinis, des structures jusque-là bien définies uniquement dans le cas des graphes finis, notamment la récurrence. Dans le modèle sur une bande de hauteur finie  $H$ , l'existence donnée par Járai et Lyons d'automates finis reconnaissant les configurations récurrentes lues colonne par colonne est étendu par une construction explicite d'automates avec un nombre moindre d'états, se rapprochant de la conjecture de Gamlin. Dans une seconde approche, l'étude se concentre sur les configurations sur la grille entière qui sont périodiques dans les deux directions. Le puits, un sommet du graphe garantissant la terminaison de la stabilisation, est placé à l'infini dans une direction de pente rationnelle. Ceci permet à la fois de préserver la bipériodicité et de proposer une forme affaiblie du critère de Dhar caractérisant ainsi par un algorithme effectif les configurations récurrentes. Ces configurations récurrentes bipériodiques sont des candidates naturelles pour être les éléments de sous-groupes finis de l'éventuel groupe du tas de sable sur la grille. Des éléments de construction de cette loi de groupe donnent expérimentalement quelques sous-groupes finis.

**Title** Combinatorics on some stabilisations in the Abelian Sandpile Model on the square lattice  $\mathbb{Z}^2$

**Abstract** The sandpile model is a discrete model for diffusion of grains on a graph introduced by physicists Bak, Tang and Wiesenfeld as an illustration for self-organised criticality. For any finite graph, Dhar identified many of its numerous structures which simplify its analysis. This thesis focus on the usual square lattice and its subgraphs which are strips of height  $H$ , both notions of infinite graphs. Approximations on the behaviour of the stabilisation of a large stack of grains at the origin of the square lattice lead to some random distribution of grains, which stabilisation is connected to some models of bootstrap percolation where modified vertices by this stabilisation forms a rectangle. The laws of the half-perimeter of this rectangle are described by statistics on permutations. As a byproduct, the difference between the generating functions over some permutations of two classical mahonian statistics on permutations appears to mainly be a polynomial with coefficients which are integers and especially positive. Then, this thesis visits in the case of the studied infinite graphs some well-defined structures on finite graphs, in particular the recurrence. In the model on an horizontal strip of height  $H$ , we extend the existence of finite automata recognizing recurrent configurations read column by column presented by Járai and Lyons to new automata with significantly less states and these numbers are closer to a conjecture due to Gamlin. An implementation leads to explicit automata for heights 3 and 4 while up to now only the case 2 was obtained by hand. In a second approach, we consider the configurations on the two-dimensional square lattice which are periodic in two directions. We suggest to place the sink ensuring that the stabilisation ends at infinity in a direction of rational slope which allows to preserve biperiodicity and a weaker form of Dhar criterion for recurrent configurations. Hence we obtain an effective algorithm defining recurrent configurations among the biperiodic and stable configurations. These biperiodic and recurrent configurations are natural candidates for being the elements of finite subgroups of the hypothetical group on configurations of the sandpile model on the square lattice. We discuss some notions allowing the definition of the law of such a group and experimentally provide some finite subgroups.

**Keywords** sandpile model, recurrence, spanning tree, bootstrap percolation, q-analogue, sandpile group

**Mots-clés** tas de sable, récurrence, arbre couvrant, bootstrap percolation, q-analogue, groupe du tas de sable

**Laboratoire d'accueil** LaBRI, 351, cours de la Libération F-33405 Talence cedex