



**HAL**  
open science

# Contributions aux méthodes de Monte Carlo et leur application au filtrage statistique

Roland Lamberti

► **To cite this version:**

Roland Lamberti. Contributions aux méthodes de Monte Carlo et leur application au filtrage statistique. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLL007 . tel-01977917

**HAL Id: tel-01977917**

**<https://theses.hal.science/tel-01977917>**

Submitted on 11 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : Université Paris-Sud

*Établissement d'accueil* : Télécom SudParis

*Laboratoire d'accueil* : Services répartis, architectures, modélisation, validation, administration  
des réseaux (SAMOVAR), CNRS UMR 5157

*Spécialité de doctorat* : Mathématiques aux interfaces

**Roland LAMBERTI**

---

## Contributions aux méthodes de Monte Carlo et leur application au filtrage statistique

---

*Date de soutenance* : 22 novembre 2018

*Après avis des rapporteurs* : GERSENDE FORT (IMT, Toulouse)  
JEAN-YVES TOURNERET (INP-ENSEEIHHT & IRIT, Toulouse)

*Jury de soutenance* :

RANDAL DOUC	(Télécom SudParis & SAMOVAR, Evry)	Président
GERSENDE FORT	(IMT, Toulouse)	Rapporteur
JEAN-YVES TOURNERET	(INP-ENSEEIHHT & IRIT, Toulouse)	Rapporteur
RÉMI BARDENET	(CRISTAL, Lille)	Examineur
AUDREY GIREMUS	(Université de Bordeaux & IMS, Bordeaux)	Examineur
FRANÇOIS DESBOUVRIES	(Télécom SudParis & SAMOVAR, Evry)	Directeur de thèse
YOHAN PETETIN	(Télécom SudParis & SAMOVAR, Evry)	Codirecteur de thèse
FRANÇOIS SEPTIER	(Université de Bretagne Sud & Lab-STICC, Vannes)	Codirecteur de thèse

**Titre :** Contributions aux méthodes de Monte Carlo et leur application au filtrage statistique

**Mots Clefs :** Inférence bayésienne, Méthodes de Monte Carlo, Echantillonnage d'importance, Rééchantillonnage, Chaînes de Markov cachées, Filtrage particulaire, Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov, Poursuite multi-cibles

**Résumé :** Cette thèse s'intéresse au problème de l'inférence bayésienne dans les modèles probabilistes dynamiques. Plus précisément nous nous focalisons sur les méthodes de Monte Carlo pour l'intégration. Nous revisitons tout d'abord le mécanisme d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage, puis son extension au cadre dynamique connue sous le nom de filtrage particulaire, pour enfin conclure nos travaux par une application à la poursuite multi-cibles.

En premier lieu nous partons du problème de l'estimation d'un moment suivant une loi de probabilité, connue à une constante près, par une méthode de Monte Carlo. Tout d'abord, nous proposons un nouvel estimateur apparenté à l'estimateur d'échantillonnage d'importance normalisé mais utilisant deux lois de proposition différentes au lieu d'une seule. Ensuite, nous revisitons le mécanisme d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage dans son ensemble afin de produire des tirages Monte Carlo indépendants, contrairement au mécanisme usuel, et nous construisons ainsi deux nouveaux estimateurs.

Dans un second temps nous nous intéressons à l'aspect dynamique lié au problème d'inférence bayésienne séquentielle. Nous adaptons alors dans ce contexte notre nouvelle technique de rééchantillonnage indépendant développée précédemment dans un cadre statique. Ceci produit le mécanisme de filtrage particulaire avec rééchantillonnage indépendant, que nous interprétons comme cas particulier de filtrage particulaire auxiliaire. En raison du coût supplémentaire en tirages requis par cette technique, nous proposons ensuite une procédure de rééchantillonnage semi-indépendant permettant de le contrôler.

En dernier lieu, nous considérons une application de poursuite multi-cibles dans un réseau de capteurs utilisant un nouveau modèle bayésien, et analysons empiriquement les résultats donnés dans cette application par notre nouvel algorithme de filtrage particulaire ainsi qu'un algorithme de Monte Carlo par Chaînes de Markov séquentiel.

---

**Title :** Contributions to Monte Carlo methods and their application to statistical filtering

**Keywords :** Bayesian inference, Monte Carlo methods, Importance sampling, Resampling, Hidden Markov Chains, Particle filtering, Markov Chain Monte Carlo, Multiple target tracking

**Abstract :** This thesis deals with integration calculus in the context of Bayesian inference and Bayesian statistical filtering. More precisely, we focus on Monte Carlo integration methods. We first revisit the importance sampling with resampling mechanism, then its extension to the dynamic setting known as particle filtering, and finally conclude our work with a multi-target tracking application.

Firstly, we consider the problem of estimating some moment of a probability density, known up to a constant, via Monte Carlo methodology. We start by proposing a new estimator affiliated with the normalized importance sampling estimator but using two proposition densities rather than a single one. We then revisit the importance sampling with resampling mechanism as a whole in order to produce Monte Carlo samples that are independent, contrary to the classical mechanism, which enables us to develop two new estimators.

Secondly, we consider the dynamic aspect in the framework of sequential Bayesian inference. We thus adapt to this framework our new independent resampling technique, previously developed in a static setting. This yields the particle filtering with independent resampling mechanism, which we reinterpret as a special case of auxiliary particle filtering. Because of the increased cost required by this technique, we next propose a semi-independent resampling procedure which enables to control this additional cost.

Lastly, we consider an application of multi-target tracking within a sensor network using a new Bayesian model, and empirically analyze the results from our new particle filtering algorithm as well as a sequential Markov Chain Monte Carlo algorithm.



## Remerciements

Je souhaite avant tout exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse, François Desbouvries, Yohan Petetin et François Septier pour leur soutien continu, leur patience, disponibilité et aide dans les moments difficiles, ainsi que la passion et la rigueur qu'ils ont su démontrer lors de nos échanges scientifiques.

Je remercie de plus pour leur bienveillance l'ensemble des membres permanents de mon département d'accueil Communications Images et Traitement de l'Information (CITI) de Télécom SudParis, Emmanuel Monfrini, Jean-Pierre Delmas, Frédéric Lehmann, Randal Douc, François Simon, Christine Letrou, Marc Uro, Luc Leclère et Julie Bonnet. Je remercie plus particulièrement Marc Castella ainsi que le directeur du département Wojciech Pieczynski, pour m'avoir permis d'effectuer une activité très formatrice en tant que chargé de travaux dirigés de traitement du signal.

Je remercie également François Septier pour m'avoir permis d'effectuer plusieurs séjours de recherche au cours de ma thèse, comme à l'Université de Sheffield où j'ai pu me nourrir d'un environnement complètement nouveau pour moi, en parallèle de rencontrer et travailler avec plusieurs collègues étrangers ; je remercie en particulier mes co-auteurs Lyudmila Mihaylova et Naveed Salman. Je remercie d'autre part les membres et doctorants de l'équipe SIGMA du laboratoire CRISAL à l'IMT Lille-Douai ainsi que l'Université de Lille et l'École Centrale de Lille, parmi lesquels je me dois de mentionner Rémi Bardenet, Victor Elvira et Guillaume Gautier pour nos discussions lors de mes séjours sur le campus Cité Scientifique de Lille. Je me souviendrai toujours des moments de détente et sueur en matches de badminton les mardi midi.

Je tiens par ailleurs à remercier parmi les thésards avec lesquels j'ai pu échanger au sein du département CITI, Ivan Gorynin, Dina Chaal et Serge Barbosa pour leur sympathie et leur sérieux au quotidien. Merci également aux étudiants de Télécom SudParis pour l'ambiance du campus et pour leur attention lors de mes séances de travaux dirigés.

Enfin, et plus que tout, je remercie mes proches pour leur soutien inébranlable tout au long de cette aventure. Merci à mes parents et mon frère pour m'avoir toujours poussé à étudier et persévérer, tout en me dotant d'excellentes conditions de travail.

## Abréviations

Les significations des abréviations françaises et anglaises listées ci-dessous sont données en français. La signification anglaise des abréviations anglaises sera donnée dans le contenu du manuscrit, la première fois qu'elles apparaissent.

AIS	Échantillonnage d'Importance Adaptatif
AoA	Angle of Arrival
APF	Filtrage Particulaire Auxiliaire
ARCH	Auto-Régressif Conditionnellement Hétéroscédastique
DPIS	Échantillonnage d'Importance à Double loi de Proposition
EKF	Filtre de Kalman Étendu
FA-APF	Filtrage Particulaire Auxiliaire Parfaitement Adapté
FP	Filtrage Particulaire
HMC	Chaîne de Markov Cachée
IPF	Filtrage Particulaire par Ilots
IS	Échantillonnage d'Importance (non-normalisé)
I-SIR	Échantillonnage d'Importance avec Rééchantillonnage Indépendant
I-SIR-w	Échantillonnage d'Importance avec Rééchantillonnage Indépendant Repondéré
MAE	Erreur Absolue Minimale
MAP	Maximum A Posteriori
M-APF	Filtrage Particulaire Auxiliaire Marginalisé
MC	Monte Carlo
MCMC	Monte Carlo par Chaînes de Markov
MH	Metropolis-Hastings
MMSE	Erreur Quadratique Moyenne Minimale
MSE	Erreur Quadratique Moyenne
NIS	Échantillonnage d'Importance Normalisé
NSSR	Semi-Rééchantillonnage Non-Séquentiel
PLE	Exposant d'Atténuation de Propagation
RMSE	Racine d'Erreur Quadratique Moyenne
RSS	Intensité de Signal Reçue
SIR	Échantillonnage d'Importance avec Rééchantillonnage (Séquentiel ou non)
SIRR	Échantillonnage d'Importance avec Rééchantillonnage Séquentiel avec Rééchantillonnage Stratifié pour sa partie Résiduelle
SIS	Échantillonnage d'Importance Séquentiel
SMC	Monte Carlo Séquentiel
SMCMC	Monte Carlo par Chaînes de Markov Séquentiel
SR	Semi-Rééchantillonnage
TCL	Théorème Central Limite
ToA	Time of Arrival
UKF	Filtre de Kalman Unscented
i.d.	identiquement distribué

i.i.d.	indépendant et identiquement distribué
v.a.	variable aléatoire
2-D	Bidimensionnel

## Notations mathématiques

Dans l'ensemble du manuscrit, les scalaires et vecteurs ne sont pas distingués et seront toujours désignés par des lettres minuscules, tandis que les matrices seront désignées par des lettres majuscules. Par ailleurs, les variables ou vecteurs aléatoires ne seront également pas distingués de leurs réalisations, et seront donc tous désignés par des lettres minuscules.

$\propto$	Proportionnel à
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\nabla$	Opérateur de gradient
$A^T$	Matrice transposée de $A$
$A^{-1}$	Matrice inverse de $A$
$I_d$	Matrice identité de dimension $d$
$v \sim \mathcal{N}(m, P)$	$v$ suit une loi normale de moyenne $m$ et matrice de covariance $P$
$\mathcal{N}(x; m, \sigma^2)$	Loi gaussienne de moyenne $m$ , variance $\sigma^2$ et évaluée en $x$
$\text{diag}(A, B)$	Matrice diagonale par blocs comprenant les matrices $A$ et $B$
$d(x, y)$	Distance euclidienne entre les vecteurs $x$ et $y$
$\mathbb{1}_A$	Fonction indicatrice sur l'ensemble $A$
$\delta_x(z)$	Distribution de Dirac centrée en $x$
$x$	variable aléatoire représentant un état caché
$y$	variable aléatoire représentant une mesure ou observation associée à un état caché
$\xrightarrow{P}$	Convergence en probabilité
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Convergence en loi (ou en distribution)
$\xrightarrow{\text{p.s.}}$	Convergence presque sûre
$1:N$	Ensemble $\{1, \dots, N\}$
$x^{1:N}$	Ensemble $\{x^i\}_{i=1}^N$
$x_{1:T}$	Ensemble $\{x_t\}_{t=1}^T$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
Cadre général . . . . .	13
Plan des contributions . . . . .	14
Publications associées . . . . .	17
Articles de revues . . . . .	17
Articles de conférences internationales . . . . .	17
Article de conférence nationale . . . . .	18
Liens manuscrit/publications . . . . .	18
<b>1 Introduction aux méthodes de Monte Carlo</b>	<b>19</b>
1.1 Rappels sur l'inférence bayésienne . . . . .	20
1.1.1 Principe . . . . .	20
1.1.2 Estimateurs bayésiens usuels . . . . .	21
1.2 Méthode de Monte Carlo brut . . . . .	22
1.2.1 Principe . . . . .	23
1.2.2 Méthodes de simulation . . . . .	24
1.3 Échantillonnage d'importance . . . . .	24
1.3.1 Échantillonnage d'importance non-normalisé . . . . .	25
1.3.2 Échantillonnage d'importance normalisé . . . . .	27
1.4 Échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage . . . . .	30
1.4.1 Mécanisme . . . . .	30
1.4.2 Propriétés des particules rééchantillonnées . . . . .	31
1.4.3 Procédés alternatifs de rééchantillonnage . . . . .	34
1.5 Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov . . . . .	34
1.5.1 Chaîne de Markov et principe MCMC . . . . .	35
1.5.2 Algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	36
1.5.3 Échantillonneur de Gibbs . . . . .	39
<b>2 Méthodes de Monte Carlo séquentielles</b>	<b>41</b>
2.1 Filtrage statistique et chaînes de Markov cachées . . . . .	41
2.1.1 Un problème de récursivité . . . . .	42
2.1.2 Modèle de chaînes de Markov cachées . . . . .	43
2.1.3 Calcul du filtre bayésien . . . . .	46
2.2 Filtrage particulaire . . . . .	47
2.2.1 Principes . . . . .	48
2.2.2 Aspects pratiques du filtrage particulaire . . . . .	51
2.3 Filtrage particulaire auxiliaire . . . . .	54
2.3.1 Principe . . . . .	54
2.3.2 Aspects pratiques . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Alternatives à l'échantillonnage d'importance</b>	<b>57</b>
3.1	Échantillonnage d'importance normalisé à double loi de proposition . . . . .	58
3.1.1	Introduction . . . . .	58
3.1.2	L'estimateur DPIS . . . . .	61
3.1.3	Une solution d'ajustement linéaire des échantillons . . . . .	62
3.1.4	Simulations . . . . .	64
3.2	Échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage indépendant . . . . .	68
3.2.1	Introduction . . . . .	68
3.2.2	L'estimateur SIR indépendant . . . . .	70
3.2.3	Repondération des échantillons indépendants ? . . . . .	74
3.2.4	Simulations . . . . .	75
3.3	Conclusion . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Filtrage particulière avec rééchantillonnage i.i.d. et semi-i.i.d.</b>	<b>85</b>
4.1	Filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant . . . . .	87
4.1.1	Un nouvel algorithme SIR . . . . .	88
4.1.2	Lien avec le filtrage particulière auxiliaire . . . . .	90
4.1.3	Résumé . . . . .	95
4.1.4	Simulations . . . . .	96
4.2	Compromis coût/performance : rééchantillonnage semi-indépendant . . . . .	105
4.2.1	Un procédé de rééchantillonnage intermédiaire . . . . .	106
4.2.2	Performances vs. coût calculatoire . . . . .	108
4.2.3	Une version parallélisable . . . . .	109
4.2.4	Simulations . . . . .	110
4.3	Conclusion . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Poursuite multi-cibles avec corrélations spatio-temporelles</b>	<b>117</b>
5.1	Problématique . . . . .	118
5.1.1	Poursuite multi-cibles par mesures d'intensité de signal . . . . .	118
5.1.2	Contributions et structure . . . . .	119
5.2	Modèles d'état et d'observation . . . . .	120
5.2.1	Modèle d'état et de mouvement des cibles . . . . .	120
5.2.2	Modèle d'observations corrélées . . . . .	120
5.3	Solution bayésienne proposée . . . . .	122
5.3.1	Inférence récursive . . . . .	122
5.3.2	L'algorithme SMCMC proposé . . . . .	124
5.3.3	Loi de proposition basée sur le gradient . . . . .	127
5.4	Simulations . . . . .	130
5.4.1	Performance liée à la prise en compte des corrélations d'occultation . . . . .	132
5.4.2	Performance de l'algorithme SMCMC comparé au filtrage particulière . . . . .	133
5.4.3	Performance de la loi de proposition gradient dans des scénarios difficiles et bruités . . . . .	135
5.4.4	Performance de la loi de proposition gradient dans des scénarios plus faciles avec un nombre de particules variable . . . . .	138
5.5	Conclusion . . . . .	138

<b>Table des matières</b>	<b>11</b>
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>Annexes</b>	<b>144</b>
<b>A Preuves des résultats du chapitre 3</b>	<b>147</b>
A.1 Preuve du Théorème 3 . . . . .	147
A.2 Preuve de la Proposition 4 . . . . .	148
A.3 Preuve de la Proposition 5 . . . . .	148
A.4 Preuve du Théorème 5 . . . . .	149
A.4.1 Convergence de $B_N$ . . . . .	149
A.4.2 Convergence de $A_N$ . . . . .	149
<b>B Preuves des résultats du chapitre 4</b>	<b>151</b>
B.1 Preuve de la Proposition 7 . . . . .	151
B.2 Preuve de la Proposition 8 . . . . .	153
B.2.1 Preuve de l'inégalité (4.46c) . . . . .	153
B.2.2 Preuve de l'inégalité (4.46d) . . . . .	154
B.3 Commentaires et étoffements sur ces propositions et preuves . . . . .	156
<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>



# Introduction

## Cadre général

L'estimation d'un signal d'intérêt à partir d'un signal observé est un problème générique important de traitement statistique du signal, qui admet des applications aussi diverses que le suivi de trajectoires, l'estimation de données financières, la météorologie, etc. Une approche classique de ce problème consiste à se donner un modèle probabiliste sur le couple {signal caché, signal observé}. En pratique il est souvent dynamique ; un modèle particulièrement utilisé est le système d'état (ou chaîne de Markov cachée), communément utilisé en théorie des systèmes dès les années 1960. Les travaux pionniers de Kalman et Bucy [53, 54] (modèle d'état linéaire et gaussien, 1960-1961) ont donné lieu dans la décennie suivante à de nombreuses variantes et extensions, un des axes poursuivis consistant à affaiblir les hypothèses restrictives du modèle originellement utilisé par Kalman.

Dans un contexte bayésien, le problème d'estimation revient en effet à propager dans le temps la loi (ou un moment de cette loi) de l'état caché à l'instant courant, conditionnelle à un jeu de données, qui dans le cas du problème de « filtrage » est classiquement l'historique des observations. Affaiblir les hypothèses sur le modèle (système d'état non linéaire et/ou non gaussien) revient à complexifier le calcul des intégrales sous-jacentes, qui à de rares exceptions près n'admettent plus de solution analytique, et pour lesquelles il convient dès lors de proposer des solutions approchées.

Parmi ces solutions approchées, une classe de méthodes désormais bien établie est la famille des algorithmes de Monte Carlo séquentiels (sequential Monte Carlo - SMC). Leur principe consiste à remplacer la propagation récursive dans le temps d'une loi conditionnelle par la propagation de points (approximativement) tirés selon cette loi conditionnelle. Plus précisément, au vu de la complexité des intégrales en jeu, les algorithmes SMC sont basés sur le principe de l'échantillonnage d'importance, qui consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction  $\varphi$  par rapport à une mesure  $\pi(dx)$ , par l'intégrale d'une autre fonction  $\varphi \frac{\pi}{q}$  par rapport à une mesure  $q(dx)$  selon laquelle il est plus simple de faire des tirages ; les tirages aléatoires  $\tilde{x}^i$  sont alors pondérés par les « poids d'importance »  $w^i$ , dont les fluctuations traduisent la différence entre la loi cible  $\pi$  originelle et la loi instrumentale  $q$  choisie.

Cette idée d'échantillonnage d'importance remonte aux années 1950 [37, 51], et le principe de son application récursive est établi dès 1954-1955 [42, 85]. L'emploi de cette technique a cependant été freiné, d'une part par le manque de puissance des ordinateurs de l'époque, et d'autre part par un phénomène de dégénérescence des poids d'importance ; il est bien connu

qu’au bout de quelques itérations temporelles, la plupart des poids d’importance sont proches de zéro, ce qui entraîne un appauvrissement important de la loi de probabilité conditionnelle estimée. En introduisant le principe de *rééchantillonnage*, la contribution [38] a constitué une avancée importante en filtrage statistique, car elle a ouvert la voie à la classe des algorithmes SIR (“importance sampling and resampling”), autorisant désormais l’emploi pratique des méthodes SMC dans de nombreuses applications.

Nos travaux dans cette thèse s’inscrivent dans ce cadre général de filtrage statistique, et se focalisent plus particulièrement sur les mécanismes d’échantillonnage et de rééchantillonnage qui sont au cœur même des algorithmes de Monte Carlo séquentiels. Par nature, le rééchantillonnage multinomial avec remise présente en effet un certain nombre de limitations (dépendance des points rééchantillonnés, support de la loi de probabilité appauvri...); aussi nous proposons une technique de rééchantillonnage indépendant qui crée des échantillons i.i.d. de même loi marginale que les échantillons fournis par le rééchantillonnage multinomial classique. Des considérations pratiques nous amènent ensuite à proposer une famille d’algorithmes intermédiaires, permettant d’ajuster le compromis entre coût de calcul et précision des estimateurs. Nous revisitons également la technique d’échantillonnage sous-jacente à l’échantillonnage d’importance normalisé. Enfin, nous étudions l’application de ces techniques séquentielles de Monte Carlo pour la résolution d’un problème de poursuite multi-cibles.

## Plan des contributions

Nous nous attachons maintenant à présenter l’organisation de ce manuscrit. Brièvement ce manuscrit est organisé en 5 chapitres. Les deux premiers chapitres 1 et 2 consisteront à expliciter le contexte dans lequel nous nous plaçons ainsi qu’à rappeler les outils statistiques usuels sur lesquels se basent nos travaux. Les chapitres suivants 3, 4 et 5 constituent nos principales contributions et reviennent sur certaines limitations propres aux techniques usuelles afin d’approfondir les discussions existantes et d’apporter plusieurs éléments de réponse. Les publications correspondant à chaque contribution sont précisées en fin de ce chapitre introductif. Le contenu des différents chapitres est le suivant :

- Les chapitres 1 et 2 d’état de l’art s’attachent à présenter les notions centrales de ce manuscrit : les méthodes de Monte Carlo pour l’intégration et le filtrage statistique. Ces méthodes consistent à approcher, à partir de simulations de variables aléatoires, certaines quantités d’intérêt inconnues. En particulier nous nous intéressons à la méthode d’échantillonnage d’importance, une technique bien établie de réduction de variance d’estimateurs Monte Carlo, basée sur l’utilisation d’une loi instrumentale dite d’« importance », puis à son extension connue sous le nom de mécanisme d’échantillonnage d’importance avec ré-

échantillonnage. Cet outil permet d'obtenir des échantillons aléatoires approximativement tirés suivant une certaine loi cible lorsque l'on est incapable de tirer directement suivant cette loi cible.

Dans un premier temps, nous abordons ce problème en chapitre 1 dans un cadre statique où l'objectif est d'estimer (en un sens qui sera précisé plus tard) une variable aléatoire cachée à partir d'une réalisation d'une variable aléatoire observée. Le chapitre 2 étend et adapte ensuite les méthodes présentées dans le cas où les variables aléatoires considérées dépendent du temps. En particulier, l'étape de rééchantillonnage du mécanisme global d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage, que nous aurons rappelé en chapitre 1, prendra alors tout son intérêt dans ce contexte dynamique, formant les algorithmes bien établis de filtrage particulière.

- Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à deux limitations propres au mécanisme d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage rappelé en chapitre 1. Tout d'abord, nous partons de l'observation que la technique d'échantillonnage d'importance normalisé n'utilise qu'une seule loi d'importance pour estimer deux intégrales différentes, pour ensuite nous concentrer sur le fait que la technique de rééchantillonnage rencontre des problèmes de dégénérescence dans certains modèles.
  - En premier lieu, nous nous intéressons en section 3.1 ([C.5]) à l'étape d'échantillonnage d'importance normalisé. Nous généralisons l'estimateur basé sur l'échantillonnage d'importance normalisé en considérant à présent un estimateur qui repose sur le choix de deux lois d'importance au lieu d'une seule. Nous nous assurons tout d'abord que l'estimateur résultant vérifie des propriétés de convergence qui généralisent celles de l'estimateur usuel, tout en offrant un degré de liberté supplémentaire nous permettant d'envisager de réduire la variance de ce dernier. À cet effet, nous nous concentrons ensuite sur ces deux degrés de liberté que sont le choix des deux lois d'importance.
  - En deuxième lieu, nous nous intéressons en section 3.2 ([C.4], [J.2]) à l'étape de rééchantillonnage. Bien qu'elle présente tout son intérêt dans un cadre séquentiel dynamique, cette procédure de rééchantillonnage (ainsi que ses améliorations usuelles) a tendance à être inefficace dans certains modèles tels que les modèles multi-dimensionnels ou informatifs, et nous l'étudions ici dans un cadre statique.

Ce problème est en partie basé sur le fait que la procédure de rééchantillonnage introduise de la dépendance entre les tirages aléatoires qu'elle produit, en raison de possibles duplications. Nous nous attachons ici à améliorer cette technique sous cet angle et proposons ainsi un nouveau mécanisme, le rééchantillonnage indépendant, permettant d'obtenir des tirages aléatoires suivant la même loi mais cette fois indépendants. La diversité des tirages est alors assurée, pour une robustesse significativement accrue dans les modèles où le mécanisme usuel rencontre des difficultés.

Nous étudions ensuite cette méthode de rééchantillonnage sous l'angle du coût de calcul; par ailleurs nous reformulons notre technique en termes d'échantillonnage d'importance, ce qui nous permet alors de repondérer les tirages obtenus.

- Dans le chapitre 4 nous reprenons notre technique de rééchantillonnage indépendant présentée en section 3.2 pour l'adapter au contexte dynamique du filtrage bayésien séquentiel, et nous nous soucions plus étroitement du coût calculatoire associé.
  - En section 4.1 ([C.1], [C.3], [C.4], [J.2]), nous adaptions les améliorations proposées en section précédente 3.2 au cas séquentiel, c'est-à-dire lorsque les variables considérées dépendent du temps. En particulier, nous réinterprétons notre algorithme comme un algorithme de filtrage particulière auxiliaire dans lequel les paramètres sous-jacents (poids de première espèce et loi d'importance) sont choisis automatiquement en fonction d'une loi suivant laquelle il est possible de faire des tirages. Cet algorithme est comparé dans plusieurs scénarios à des algorithmes de filtrage particulière usuels, à la fois en termes de performance statistique mais également en termes de temps de calcul.
  - En section 4.2 ([C.1], [J.3]), nous proposons une extension de la méthode présentée en section précédente 4.1, l'objectif étant de réduire le coût de calcul supplémentaire qu'elle engendre. Ceci repose sur l'introduction d'un paramètre représentant le nombre de tirages régénérés entre deux étapes de rééchantillonnage : augmenter ce paramètre a pour effet d'améliorer progressivement la diversité du support final d'échantillons en affaiblissant la relation de dépendance entre ces tirages, mesurée ici l'amplitude du terme de covariance, au prix d'un accroissement du coût de calcul. En particulier, ce paramètre conduit à la généralisation des algorithmes jusqu'ici étudiés puisque l'algorithme de filtrage particulière usuel correspond au cas où il n'y a pas de régénérations, tandis que l'algorithme présenté en section 4.1 correspond au cas où tous les tirages sont régénérés. Le compromis performance/coût de calcul est étudié empiriquement et cette approche est comparée à des approches existantes similaires telles que l'algorithme de resample-move qui vise à réintroduire de la diversité à la suite du rééchantillonnage.
- Dans le chapitre 5 ([C.2], [J.1]), nous considérons un problème de poursuite multi-cibles à partir de mesures d'intensité de signal. Dans ce scénario, les états cachés des cibles sont leurs états cinématiques (positions et vitesses) et le nombre de cibles total est connu. Afin de prendre en compte la corrélation entre les mesures correspondant à différentes positions, à la fois dans l'espace pour différentes cibles à l'instant courant, et dans le temps pour la même cible ou des cibles différentes, nous proposons un nouveau modèle bayésien adapté à ce problème.

Pour résoudre ce problème de filtrage, nous construisons alors un algorithme de Monte Carlo par Chaînes de Markov séquentiel basé sur l'algorithme de Metropolis-Hastings et

raffiné au moyen d'une étape d'échantillonnage de Gibbs, ce qui permet de combiner les avantages de ces deux procédures. De plus, afin d'améliorer la précision de l'algorithme résultant, nous utilisons dans cette étape de raffinement une loi de proposition basée sur le gradient de la vraisemblance du modèle. Enfin, nous montrons empiriquement les bénéfices issus des différents choix effectués pour la constitution de cet algorithme.

## Publications associées

La liste des publications produites pendant cette thèse, ainsi qu'une table de correspondance entre publications et chapitres ou sections contributives, sont données ci-dessous.

## Articles de revues

- J.3** R. Lamberti, Y. Petetin, F. Desbouvries and F. Septier, "Semi-Independent Resampling for Particle Filtering", in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 25, no. 1, pp. 130-134 January 2018.
- J.2** R. Lamberti, Y. Petetin, F. Desbouvries and F. Septier, "Independent Resampling Sequential Monte Carlo Algorithms", in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 20, pp. 5318-5333, October 2017.
- J.1** R. Lamberti, F. Septier, N. Salman and L. Mihaylova, "Gradient Based Sequential Markov Chain Monte Carlo for Multi-target Tracking with Correlated Measurements", in *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, vol. 4, no. 3, pp. 510-518, September 2017.

## Articles de conférences internationales

- C.5** R. Lamberti, Y. Petetin, F. Desbouvries and F. Septier, "A Double Proposal Normalized Importance Sampling Estimator", *2018 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, Freiburg, Germany, June 2018.
- C.4** R. Lamberti, Y. Petetin, F. Septier and F. Desbouvries, "An improved SIR-based Sequential Monte Carlo algorithm", *2016 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, Palma de Mallorca, Spain, June 2016.
- C.3** R. Lamberti, Y. Petetin, F. Septier and F. Desbouvries, "Particle filters with independent resampling", *2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 3994-3998, Shanghai, China, March 2016.

- C.2** R. Lamberti, F. Septier, N. Salman and L. Mihaylova, “Sequential Markov Chain Monte Carlo for multi-target tracking with correlated RSS measurements”, *2015 IEEE Tenth International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing (ISSNIP)*, Singapore, April 2015 (received the 2015 IEEE ISSNIP Best paper award).

## Article de conférence nationale

- C.1** R. Lamberti, Y. Petetin, F. Septier and F. Desbouvries, « Rééchantillonnage indépendant et semi-indépendant pour le filtrage particulaire », *Actes du 26ème colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, France, September 2017.

## Liens manuscrit/publications

Section	Titre	Article(s) correspondant(s)
3.1	Échantillonnage d’importance normalisé à double loi de proposition	<b>C.5</b>
3.2	Échantillonnage d’importance avec rééchantillonnage indépendant	<b>C.4 - Section 2, J.2 - Section 2</b>
4.1	Filtrage particulaire avec rééchantillonnage indépendant	<b>C.1 - Section 2.1, C.3, C.4 - Section 3, J.2 - Section 3, J.3 - Section 1.B</b>
4.2	Compromis coût/performance : rééchantillonnage semi-indépendant	<b>C.1 - Section 2.2, J.3 - Section 2</b>
5	Poursuite multi-cibles avec corrélations spatio-temporelles	<b>C.2, J.1</b>

TABLE 3 – Correspondance entre publications de l’auteur et parties de ce manuscrit.

# Introduction aux méthodes de Monte Carlo

## Contenu

---

<b>1.1 Rappels sur l'inférence bayésienne</b> . . . . .	<b>20</b>
1.1.1 Principe . . . . .	20
1.1.2 Estimateurs bayésiens usuels . . . . .	21
<b>1.2 Méthode de Monte Carlo brut</b> . . . . .	<b>22</b>
1.2.1 Principe . . . . .	23
1.2.2 Méthodes de simulation . . . . .	24
<b>1.3 Échantillonnage d'importance</b> . . . . .	<b>24</b>
1.3.1 Échantillonnage d'importance non-normalisé . . . . .	25
1.3.2 Échantillonnage d'importance normalisé . . . . .	27
<b>1.4 Échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage</b> . . . . .	<b>30</b>
1.4.1 Mécanisme . . . . .	30
1.4.2 Propriétés des particules rééchantillonnées . . . . .	31
1.4.3 Procédés alternatifs de rééchantillonnage . . . . .	34
<b>1.5 Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov</b> . . . . .	<b>34</b>
1.5.1 Chaîne de Markov et principe MCMC . . . . .	35
1.5.2 Algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	36
1.5.3 Échantillonneur de Gibbs . . . . .	39

---

Soient une variable aléatoire (v.a.)  $x \in \mathbb{R}^{D_x}$ , sa densité de probabilité  $\pi$  éventuellement connue à une constante près, et  $\varphi(\cdot)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^{D_x}$ , telles que l'intégrale suivante soit définie :

$$\Theta(\varphi) = \mathbb{E}_\pi[\varphi(x)] = \int \varphi(x)\pi(x)dx. \quad (1.1)$$

Dans ce chapitre nous nous intéressons au problème générique du calcul exact ou approché de  $\Theta(\varphi)$  (dans la suite  $\Theta(\varphi)$  sera dénotée simplement  $\Theta$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction  $\varphi$ ). Celui-ci trouve un vaste champ d'applications, parmi lesquels le problème d'inférence bayésienne consistant à estimer une variable aléatoire cachée à partir d'une variable aléatoire observée, en un sens qui sera précisé. Cette estimation peut en effet se ramener au calcul d'une intégrale

de la forme (1.1), mais en pratique ce calcul est impossible à effectuer analytiquement dans de nombreux cas.

Lorsque l'intégrale (1.1) n'est pas calculable, les méthodes de Monte Carlo sont une classe bien connue de méthodes d'approximation reposant sur la simulation de variables aléatoires. Nous nous attachons donc dans ce premier chapitre à exposer le problème d'inférence bayésienne ainsi que le principe des méthodes de Monte Carlo.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. La section 1.1 rappelle les fondements de l'inférence bayésienne, tandis que les sections suivantes présentent quelques méthodes de Monte Carlo classiques pour le calcul de  $\Theta$  auxquelles s'intéresse cette thèse. En particulier, la section 1.2 présente la méthode de Monte Carlo brut, la section 1.3 présente la technique d'échantillonnage d'importance, la section 1.4 traite du mécanisme de rééchantillonnage, et en dernier lieu la section 1.5 rappelle brièvement le principe des méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov.

## 1.1 Rappels sur l'inférence bayésienne

### 1.1.1 Principe

L'inférence bayésienne [17] considère un couple de variables aléatoires  $(x, y)$  de loi jointe  $p(x, y)$  (rappelons que l'on ne distingue pas en termes de notation les v.a. de leurs réalisations) où la v.a.  $x$  modélise une certaine quantité « cachée » (non directement observable) que l'on cherche à déterminer à partir de la v.a.  $y \in \mathbb{R}^{D_y}$ , dépendante de  $x$ , dont on observe une réalisation. Cette modélisation trouve des applications dans de nombreux problèmes scientifiques, par exemple :

- pour un problème de localisation ou de poursuite la v.a.  $x$  pourra correspondre aux coordonnées cartésiennes de la cible et  $y$  à des mesures bruitées de position en coordonnées polaires, ou encore des mesures d'intensité de signal reçu [89, 48] ;
- un problème de segmentation d'images amènera à choisir  $x$  comme une classe (c'est-à-dire une v.a. discrète) à identifier à partir des pixels observés en niveau de gris  $y$  [75] ;
- en finance on pourra s'intéresser à l'estimation de la volatilité  $x$  en fonction des rendements passés  $y$  [16, Section 1.3.5] [78] ;
- un modèle de prévision météorologique considèrera  $x$  comme une classe correspondant aux conditions climatiques avec  $y$  certaines données atmosphériques [7].

Dans la mesure où l'on cherche à estimer  $x$  à partir de  $y$ , la forme générale de notre estimateur s'écrit  $\hat{x} = g(y)$  et l'objectif consiste à construire la fonction  $g$ . Pour cela on commence par se donner une fonction de perte (ou fonction de coût)  $L$  à valeurs positives ou nulles, et plus

précisément de  $\mathbb{R}^{D_x} \times \mathbb{R}^{D_x} \rightarrow \mathbb{R}$ . Étant donné le caractère aléatoire de  $x$  et  $y$ , minimiser directement cette perte  $L(x, g(y))$  n'a pas de sens et l'approche bayésienne s'attache donc à minimiser la perte moyenne (encore appelée « risque de Bayes »)  $E[L(x, g(y))]$ . Étant donné que  $E[L(x, g(y))] = E[E[L(x, g(y))|y]]$ , on montre aisément que cette approche revient de manière équivalente à minimiser  $E[L(x, g(y))|y]$  pour tout  $y$  [82].

### 1.1.2 Estimateurs bayésiens usuels

Nous mentionnons ci-dessous trois exemples d'estimateurs bayésiens obtenus à partir de trois fonctions de perte différentes. En pratique le choix et la pertinence de la fonction de perte dépendent de l'application et des objectifs considérés.

**Exemple 1.** Une fonction de coût couramment utilisée dans le cas scalaire pour mesurer la qualité de l'estimateur  $\hat{x}$  est l'erreur quadratique  $L(x, \hat{x}) = (\hat{x} - x)^2$ . La perte moyenne correspondante, encore appelée risque, est l'*erreur quadratique moyenne* (Mean Square Error - MSE)

$$\text{MSE} = E[(\hat{x} - x)^2]. \quad (1.2)$$

La fonction  $\hat{x}^{\text{MMSE}}$  d'erreur quadratique moyenne minimale (Minimum Mean Square Error - MMSE) doit donc satisfaire

$$\forall y, \hat{x}^{\text{MMSE}}(y) = \arg \min_{\hat{x}} E[(\hat{x} - x)^2|y]. \quad (1.3)$$

On peut montrer que la solution de ce problème d'optimisation est le moment du premier ordre de la loi de  $x$  conditionnelle à  $y$ ,  $p(x|y)$ , dite loi a posteriori :

$$\forall y, \hat{x}^{\text{MMSE}}(y) = E[x|y] = \int xp(x|y)dx. \quad (1.4)$$

**Exemple 2.** L'estimateur optimal correspondant à la fonction de perte définie par la valeur absolue de l'erreur  $L(x, \hat{x}) = |\hat{x} - x|$  est l'estimateur dit d'erreur absolue minimale (Minimum Absolute Error - MAE) :

$$\hat{x}^{\text{MAE}} = \arg \min_{\hat{x}} E[|\hat{x} - x||y], \quad (1.5)$$

et coïncide avec la médiane a posteriori (c'est-à-dire la médiane de  $p(x|y)$ ).

**Exemple 3.** L'estimateur bayésien optimal correspondant à la fonction de coût limite  $L^\varepsilon(x, \hat{x}) = \mathbb{1}_{|\hat{x}-x| \geq \varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  est l'estimateur du Maximum A Posteriori (MAP)  $\hat{x}^{\text{MAP}}$  et coïncide avec le mode de la densité a posteriori  $p(x|y)$  :

$$\hat{x}^{\text{MAP}} = \arg \max_x p(x|y). \quad (1.6)$$

Notons cependant que cette convergence de l'estimateur bayésien vers l'estimateur MAP n'est assurée que sous certaines conditions [5, Théorème 5.4].

Dans ce manuscrit nous nous intéresserons principalement au risque quadratique (MSE) en (1.2) ainsi que sa généralisation

$$\mathbb{E}[(\hat{x} - \varphi(x))^2], \quad (1.7)$$

auquel cas la solution optimale correspondante (1.4) devient alors

$$\mathbb{E}[\varphi(x)|y], \quad (1.8)$$

pour  $\varphi$  une fonction d'intérêt telle que ces espérances soient définies.

En pratique, la loi a posteriori  $p(x|y)$  qui intervient dans le calcul des estimateurs optimaux est cependant rarement calculable explicitement. On se donne en revanche usuellement la loi a priori  $p(x)$  modélisant sous forme de loi de probabilité une certaine information disponible au préalable (c'est à dire avant d'avoir obtenu l'observation  $y$ ) sur la quantité inconnue, ainsi que la loi  $p(y|x)$  modélisant le comportement de l'observation pour une valeur de  $x$  quelconque fixée. La loi  $p(x|y)$  peut alors être obtenue comme produit normalisé des lois  $p(x)$  et  $p(y|x)$  selon la formule de Bayes suivante :

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y|x)}{p(y)} = \frac{p(x)p(y|x)}{\int p(x)p(y|x)dx}. \quad (1.9)$$

Ainsi le calcul de (1.8) peut se réécrire comme

$$\mathbb{E}[\varphi(x)|y] = \int \varphi(x)p(x|y)dx = \frac{\int \varphi(x)p(x)p(y|x)dx}{\int p(x)p(y|x)dx}. \quad (1.10)$$

Le calcul de (1.10) apparaît donc comme un cas particulier de (1.1) où  $\pi(x) = p(x|y)$  et n'est connu qu'à une constante près.

## 1.2 Méthode de Monte Carlo brut

Nous revenons maintenant, jusqu'à la fin de ce chapitre, au problème générique du calcul de  $\Theta$  en (1.1). Lorsque  $\Theta$  n'est pas calculable de manière analytique, on doit l'approcher au moyen de méthodes numériques.

Or bien que les méthodes numériques déterministes [58] [32] basées sur des grilles de points soient très efficaces dans le cas scalaire, quand le problème devient multidimensionnel leur coût calculatoire devient très vite rédhibitoire à mesure que la dimension  $D_x$  de l'espace d'état

augmente. En effet globalement pour un calcul d'intégrale faisant intervenir une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^l$  sur  $[0, 1]^{D_x}$ , une technique déterministe adaptée à ce caractère lisse de la fonction  $\varphi$  et l'évaluant  $N$  fois - par exemple les formules de Newton-Cotes qui généralisent à des ordres supérieurs la méthode des trapèzes utilisable pour  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  (ou la méthode de Simpson pour  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^4$ ) - convergera avec une précision en  $\mathcal{O}(N^{-\frac{l}{D_x}})$ . Ceci signifie que lorsque la dimension augmente trop et/ou lorsque les fonctions considérées ne sont pas régulières, ces techniques nécessitent un nombre rédhibitoire d'évaluations de la fonction  $\varphi$ .

Les méthodes de Monte Carlo (MC) basées sur des tirages aléatoires, outre leur caractère très général d'applicabilité (pas d'hypothèses sur la régularité de  $\varphi$ ), présentent une vitesse de convergence insensible à la dimension en  $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$ , contrairement aux méthodes déterministes [13], comme nous allons le rappeler par le Théorème Central Limite (TCL) (1.13) en section 1.2. De nombreux résultats théoriques, en particulier de convergence, sont de nos jours disponibles permettant d'analyser et anticiper leur efficacité.

### 1.2.1 Principe

L'idée de base des méthodes MC consiste à estimer  $\Theta$  à partir d'une collection  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  de tirages indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) suivant  $\pi$ . On construit ainsi l'estimateur empirique  $\hat{\Theta}^{\text{MC},N}$  :

$$\hat{\Theta}^{\text{MC},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{x}^i), \quad (1.11)$$

dit estimateur de Monte Carlo brut (Crude Monte Carlo). Celui-ci est non-biaisé ( $E_\pi[\hat{\Theta}^{\text{MC},N}] = \Theta$ ) et, sous réserve que  $E_\pi[|\varphi(x)|] < \infty$ , la loi forte des grands nombres entraîne sa convergence vers  $\Theta$  presque sûrement :

$$\hat{\Theta}^{\text{MC},N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \Theta. \quad (1.12)$$

Par ailleurs on dispose du théorème central limite suivant :

**Théorème 1 (TCL pour l'estimateur MC brut).** Si  $E_\pi[\varphi^2(x)] < \infty$ , on a

$$\sqrt{N}(\hat{\Theta}^{\text{MC},N} - \Theta) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^{2,\text{MC}}) \quad (1.13)$$

où

$$\sigma^{2,\text{MC}} = \text{var}_\pi(\varphi(x)) = \int \varphi^2(x)\pi(x)dx - \Theta^2. \quad (1.14)$$

Ce résultat nous informe sur la vitesse de convergence de  $\hat{\Theta}^{\text{MC},N}$  en fonction de  $N$  et permet d'approcher des intervalles de confiance. Remarquons enfin que la variance  $\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{MC},N})$  de l'estimateur MC brut est directement calculable et coïncide par ailleurs avec la variance asymptotique du TCL en (1.14). En effet,  $\sigma^{2,\text{MC}} = N\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{MC},N})$ .

### 1.2.2 Méthodes de simulation

Afin d'obtenir des échantillons i.i.d. suivant  $\pi$ , diverses méthodes existent moyennant certaines hypothèses.

- *La méthode de la fonction de répartition inverse.* Lorsque l'on connaît la fonction de répartition inverse  $F_\pi^{-1}$  associée à  $\pi$ , il est possible de transformer des échantillons  $u$  suivant une loi uniforme  $\mathcal{U}([0, 1])$  en échantillons  $x$  suivant  $\pi$  en appliquant la formule  $x = F_\pi^{-1}(u)$ .
- *La méthode des lois marginales.* Lorsque l'on sait simuler un couple de v.a.  $(x, z)$ , par exemple en simulant  $z$  puis  $x$  conditionnellement à  $z$ , tel que la loi marginale de  $x$  corresponde à la densité  $\pi$ , on peut ainsi obtenir des échantillons suivant  $\pi$ .
- *La méthode de rejet (ou méthode d'acceptation-rejet)* [82, Chapitre 2]. Supposons que l'on connaisse  $\pi$  à une constante près et que l'on dispose d'une loi instrumentale  $q$ , selon laquelle il est possible d'obtenir directement des échantillons, ainsi que d'une constante  $m$  telle que pour tout  $x$ ,  $\pi(x) \leq mq(x)$ . La méthode d'acceptation-rejet consiste alors à tirer  $\bar{x} \sim q$  et  $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$  puis à considérer  $u \leq \frac{\pi(\bar{x})}{mq(\bar{x})}$  : si cette inégalité est vérifiée le tirage candidat  $\bar{x}$  est « accepté » et l'on pose  $x = \bar{x}$ , sinon il est « rejeté » et l'on répète l'opération en tirant un nouveau candidat. La variable aléatoire  $x$  produite par la procédure ci-dessus admet alors pour loi  $\pi$ . Notons que cette méthode s'applique également lorsque  $\pi$  n'est connue qu'à une constante près.

Néanmoins, ces méthodes présentent d'importantes limitations. Les deux premières nécessitent respectivement la connaissance de la fonction de répartition inverse de  $\pi$ , et la capacité à simuler suivant un couple  $(x, z)$  dont la marginale  $x$  a pour loi  $\pi$ . Par ailleurs, la méthode d'acceptation-rejet nécessite la connaissance d'une loi  $q$  et d'une constante  $m$  telles que  $\pi(x) \leq mq(x) \forall x$ , et son coût calculatoire peut devenir conséquent dès lors que la probabilité d'acceptation  $\frac{1}{m}$  est faible.

Nous nous intéressons dans le paragraphe suivant à une technique alternative à la méthode de Monte Carlo brut, la technique d'échantillonnage d'importance qui est l'une des thématiques principales de ce manuscrit.

## 1.3 Échantillonnage d'importance

L'estimateur MC brut  $\hat{\Theta}^{\text{MC}, N}$  en (1.11) est basé sur des tirages suivant  $\pi$ . Ceci entraîne deux limitations importantes :

- comme nous l'avons mentionné ci-dessus, tirer directement suivant  $\pi$  est généralement difficile en pratique, et les méthodes de tirage mentionnées en section 1.2.2 ne sont pas

toujours applicables ou peuvent être difficiles à appliquer ;

- même lorsqu'il est possible de tirer suivant  $\pi$ , l'estimateur MC brut peut devenir très inefficace lorsque les régions où  $\varphi$  est grand ne coïncident pas avec celles où  $\pi$  est grand.

Nous nous intéressons dans cette section à la technique connue sous le nom d'échantillonnage d'importance (Importance Sampling - IS) [51] [63] [41, §5.4], ou échantillonnage préférentiel, qui a pour but de remédier à l'un et/ou l'autre des problèmes ci-dessus.

Nous présentons deux variantes bien établies de cette technique : l'échantillonnage d'importance non-normalisé en section 1.3.1, et l'échantillonnage d'importance normalisé en section 1.3.2, applicable en particulier lorsque  $\pi$  n'est connu qu'à une constante près.

### 1.3.1 Échantillonnage d'importance non-normalisé

#### 1.3.1.1 Mécanisme

Commençons par réécrire (1.1) comme

$$\Theta = \int \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} q(x) dx = E_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} \right], \quad (1.15)$$

où  $q$  est une certaine loi d'importance dont le support contient celui de  $\pi$ . La méthode consiste à tirer un ensemble de  $N$  échantillons i.i.d.  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  suivant  $q$ , puis à construire l'estimateur IS approchant cette espérance (1.15) (la dépendance par rapport à la loi  $q$  est soulignée par la notation  $\hat{\Theta}^{\text{IS},N}(q)$ ) :

$$\hat{\Theta}^{\text{IS},N}(q) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} \varphi(\tilde{x}^i) = \sum_{i=1}^N \bar{w}^i \varphi(\tilde{x}^i), \quad \tilde{x}^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} q \quad (1.16)$$

où  $\bar{w}^i$  (le  $i$ -ème poids d'importance non-normalisé) s'écrit

$$\bar{w}^i = \frac{1}{N} \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)}. \quad (1.17)$$

Remarquons que pour  $q = \pi$ ,  $\hat{\Theta}^{\text{IS},N}(\pi)$  se réduit à  $\hat{\Theta}^{\text{MC},N}$ .

#### 1.3.1.2 Propriétés

Suivant le même principe que l'estimateur MC brut,  $\hat{\Theta}^{\text{IS},N}$  est non-biaisé, converge presque sûrement vers  $\Theta$  et vérifie le TCL suivant :

**Théorème 2 (TCL pour l'estimateur d'IS non-normalisé).** Si  $E_q[\frac{\varphi^2(x)\pi^2(x)}{q^2(x)}] < \infty$ , on a

$$\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{IS},N} - \Theta) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^{2,\text{IS}}) \quad (1.18)$$

où

$$\sigma^{2,\text{IS}}(q) = \text{var}_q \left( \frac{\varphi(x)\pi(x)}{q(x)} \right) = \int \frac{\varphi^2(x)\pi^2(x)}{q(x)} dx - \Theta^2 = \int \frac{(\varphi(x)\pi(x) - \Theta q(x))^2}{q(x)} dx. \quad (1.19)$$

Comme pour l'estimateur MC brut on peut à nouveau facilement montrer que la variance de l'estimateur correspond à la variance asymptotique du TCL :  $N\text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{IS},N}(q)) = \sigma^{2,\text{IS}}(q)$ . Par ailleurs, l'introduction de cette loi d'importance  $q$  fournit un degré de liberté supplémentaire et permet d'envisager de réduire la variance de l'estimateur MC brut (1.14). En effet nous avons la proposition suivante [37] :

**Proposition 1.** La loi d'importance  $q_{\text{opt}}^{\text{IS}}$  minimisant  $\sigma^{2,\text{IS}}(q)$ , ainsi que la variance minimale associée, sont

$$q_{\text{opt}}^{\text{IS}}(x) \propto |\varphi(x)|\pi(x), \quad (1.20)$$

$$\sigma^{2,\text{IS}}(q_{\text{opt}}^{\text{IS}}) = \left( \int |\varphi(x)|\pi(x) dx \right)^2 - \Theta^2. \quad (1.21)$$

*Démonstration.* L'expression de  $q_{\text{opt}}^{\text{IS}}$  en (1.20) peut s'obtenir directement en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. En effet remarquons que pour toute fonction  $h$  telle que la quantité  $(\int |h(x)| dx)^2$  soit définie, l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à cette quantité donne

$$\left( \int |h(x)| dx \right)^2 = \left( \int \frac{|h(x)|}{\sqrt{q(x)}} \sqrt{q(x)} dx \right)^2 \leq \int \frac{h^2(x)}{q(x)} dx, \quad (1.22)$$

et le cas d'égalité stipule

$$\frac{|h(x)|}{\sqrt{q(x)}} \propto \sqrt{q(x)} \text{ c'est-à-dire } q(x) \propto |h(x)|. \quad (1.23)$$

Dans le cadre de l'IS non-normalisé,  $h(x) = \varphi(x)\pi(x)$ , et le raisonnement ci-dessus donne

$$\sigma^{2,\text{IS}}(q_{\text{opt}}^{\text{IS}}) + \Theta^2 = \left( \int |\varphi(x)|\pi(x) dx \right)^2 \leq \int \frac{\varphi^2(x)\pi^2(x)}{q(x)} dx = \sigma^{2,\text{IS}}(q) + \Theta^2 \quad (1.24)$$

pour  $q_{\text{opt}}^{\text{IS}}(x) \propto |\varphi(x)|\pi(x)$ . □

**Remarque 1.** Observons tout d'abord que lorsque  $\varphi$  est de signe constant,  $\sigma^{2,\text{IS}}(q_{\text{opt}}^{\text{IS}}) = 0$ .

Néanmoins en pratique l'estimateur optimal  $\widehat{\Theta}^{\text{IS},N}(q_{\text{opt}}^{\text{IS}})$  est incalculable (on ne dispose de  $q_{\text{opt}}^{\text{IS}}$  qu'à la constante inconnue  $\int |\varphi(x)|\pi(x)dx = \int \varphi(x)\pi(x)dx$  près, laquelle correspond justement à  $\Theta$ ). Ensuite lorsque  $\varphi$  est de signe quelconque cette variance minimale reste plus petite que celle de l'estimateur MC brut en (1.14) :  $\sigma^{2,\text{IS}}(q_{\text{opt}}^{\text{IS}}) \leq \sigma^{2,\text{MC}}$ . Enfin, plus généralement la proposition 1 nous révèle que les régions où il est important d'échantillonner (d'où le terme « loi d'importance ») ne sont pas celles où la loi  $\pi$  a de grandes valeurs, mais plutôt celles où le terme  $|\varphi|\pi$  est grand.

Ainsi on s'intéresse à l'estimateur d'IS non-normalisé en (1.16) lorsqu'il est impossible d'obtenir des tirages suivant  $\pi$  ou quand on cherche un estimateur de variance inférieure à celle de l'estimateur MC brut (1.11). Cependant cet estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{IS},N}$  n'est calculable que si l'on connaît exactement  $\pi$  ou si  $\pi$  et  $q$  sont connus à une constante commune près. Lorsque la constante de normalisation n'est pas connue, ce qui est le cas dans certains problèmes statistiques tels que le cadre bayésien pour lequel l'intégrale au dénominateur de (1.9) (normalisant l'expression de la loi a posteriori  $p(x|y)$ ) est souvent inconnue, on peut avoir recours à la technique d'échantillonnage d'importance normalisé (Normalised Importance Sampling - NIS).

### 1.3.2 Échantillonnage d'importance normalisé

#### 1.3.2.1 Mécanisme

Soit  $\pi(x) = \frac{\pi_u(x)}{\int \pi_u(x)dx}$  où  $\pi_u$  (u pour “unnormalized”) est connu mais la constante de normalisation ne l'est pas. Alors (1.15) (ou (1.1)) peut se réécrire comme

$$\Theta = \frac{\int \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q(x)} q(x) dx}{\int \frac{\pi_u(x)}{q(x)} q(x) dx} = \frac{\mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q(x)} \right]}{\mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi_u(x)}{q(x)} \right]} = \frac{\mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} \right]}{\mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi(x)}{q(x)} \right]}. \quad (1.25)$$

Ensuite, chaque espérance peut naturellement être approchée par un estimateur MC brut à partir du même ensemble de  $N$  échantillons i.i.d.  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  tirés suivant  $q$ . L'estimateur NIS  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)$  de  $\Theta$  s'écrit donc

$$\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} \varphi(\tilde{x}^i)}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} \varphi(\tilde{x}^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}} = \sum_{i=1}^N w^i \varphi(\tilde{x}^i), \quad \tilde{x}^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} q \quad (1.26)$$

où  $w^i$  (le  $i$ -ème poids d'importance normalisé) est donné par

$$w^i = \frac{\frac{\pi_u(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)}}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}} = \frac{\frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)}}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}}. \quad (1.27)$$

La première expression en (1.26) est utilisée pour calculer l'estimateur en pratique car elle dépend de la quantité connue  $\pi_u$ , tandis que la seconde est utilisée pour analyser ses propriétés statistiques car elle fait intervenir la loi  $\pi$ .

### 1.3.2.2 Propriétés

Les propriétés de  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)$  sont bien établies [44, Chapitre 2] [71, Chapitre 9] [34] [16]; nous les résumons ici.

Tout d'abord, il est bien connu [34] que sous de faibles hypothèses,

$$\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) \xrightarrow{\text{p.s.}} \Theta. \quad (1.28)$$

La preuve est en effet immédiate en considérant l'expression de  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)$  en (1.26) : le numérateur converge presque sûrement vers la constante  $\Theta$  par la loi forte des grands nombres, et par ailleurs le dénominateur converge presque sûrement vers 1 ; leur quotient converge donc presque sûrement vers  $\Theta$ .

Ensuite, le biais de  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)$  est asymptotiquement nul en  $1/N$  [61, p.35] :

$$\mathbb{E} \left[ \widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) \right] = \Theta + \frac{1}{N} \left( \Theta \text{var} \left( \frac{\pi(x)}{q(x)} \right) - \text{cov} \left( \frac{\pi(x)\varphi(x)}{q(x)}, \frac{\pi(x)}{q(x)} \right) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{N^2} \right), \quad (1.29)$$

et sa variance peut être approchée au premier ordre en appliquant la méthode delta (voir [17, Chapitre 5] pour une présentation de la méthode delta) au quotient de la deuxième expression en (1.26) [61, p.35] :

$$\begin{aligned} \text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)) &= \widehat{\text{var}}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{N^2} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \text{var} \left( \frac{\pi(x)\varphi(x)}{q(x)} \right) + \Theta^2 \text{var} \left( \frac{\pi(x)}{q(x)} \right) - 2\Theta \text{cov} \left( \frac{\pi(x)\varphi(x)}{q(x)}, \frac{\pi(x)}{q(x)} \right) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{N^2} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Enfin le Théorème Central Limite suivant [34] (voir aussi [16]) est vérifié :

**Théorème 3 (TCL pour l'estimateur d'IS normalisé).**

$$\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^{2,\text{NIS}}(q)) \quad (1.31)$$

où

$$\sigma^{2,\text{NIS}}(q) = \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right] = \int \frac{\pi^2(x) (\varphi(x) - \Theta)^2}{q(x)} dx. \quad (1.32)$$

*Démonstration.* La preuve se ramène à écrire

$$\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) - \Theta) = \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} (\varphi(\tilde{x}^i) - \Theta)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}}. \quad (1.33)$$

Le TCL appliqué au numérateur du terme de droite en (1.33) montre que ce numérateur converge en loi vers la gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma^{2,\text{NIS}}(q))$ , tandis que le dénominateur converge presque sûrement vers 1. On en déduit alors (1.31) par le théorème de Slutsky. Notons que la variance approchée au premier ordre en (1.30) et la variance asymptotique en (1.32) coïncident :

$$N \widehat{\text{var}}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)) = \sigma^{2,\text{NIS}}(q). \quad (1.34)$$

□

Le choix de la loi d'importance  $q$  a fait l'objet de nombreux travaux [83, 61, 34]. Lorsque l'objectif est d'approcher  $\Theta$  pour une large classe de fonctions  $\varphi$ , c'est-à-dire lorsque l'on cherche à réutiliser un même jeu d'échantillons afin d'estimer  $\Theta$  pour différentes fonctions  $\varphi$ , la loi d'importance  $q$  est souvent choisie comme étant une approximation de  $\pi$  [15, 21]. Néanmoins, pour le calcul d'un moment particulier, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.** *Pour une fonction spécifique  $\varphi$ , la loi IS minimisant  $\sigma^{2,\text{NIS}}(q)$  en (1.32), et la variance asymptotique minimale associée, sont [44, §2.9] [34, Théorème 3]*

$$q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}(x) \propto |\varphi(x) - \Theta| \pi(x), \quad (1.35)$$

$$\sigma^{2,\text{NIS}}(q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}) = \left( \int |\varphi(x) - \Theta| \pi(x) dx \right)^2. \quad (1.36)$$

*Démonstration.* Comme pour le cas non-normalisé en proposition 1, cette expression de  $q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}$  peut s'obtenir par le raisonnement d'inégalité de Cauchy-Schwartz en (1.22) et (1.23), mais cette fois appliqué à  $h(x) = (\varphi(x) - \Theta)\pi(x)$ . On obtient alors

$$\sigma^{2,\text{NIS}}(q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}) = \left( \int |\varphi(x) - \Theta| \pi(x) dx \right)^2 \leq \int \frac{\pi^2(x)}{q(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 = \sigma^{2,\text{NIS}}(q) \quad (1.37)$$

pour  $q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}(x) \propto |\varphi(x) - \Theta| \pi(x)$ .

□

Ayant rappelé le mécanisme et les principales propriétés de la technique NIS, nous nous concentrons maintenant sur la procédure de rééchantillonnage multinomial, en lien étroit avec cette technique.

## 1.4 Échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage

Présentons maintenant la méthode de rééchantillonnage multinomial appliquée à la suite de la technique d'échantillonnage d'importance normalisé vue en section 1.3.2. Cette application successive constitue la procédure SIR (Sampling Importance Resampling). L'objectif de cette procédure est d'obtenir des points tirés approximativement (en un sens que nous préciserons) suivant  $\pi$ , et de répondre ainsi au premier point soulevé en début de section 1.3.

### 1.4.1 Mécanisme

En plus des propriétés rappelées en section 1.3.2, remarquons que le jeu de points pondérés produit par le mécanisme NIS fournit implicitement une approximation aléatoire discrète de la densité  $\pi$  :

$$\widehat{\pi}^{\text{NIS},N}(x) = \sum_{i=1}^N w^i \delta_{\tilde{x}^i}(x). \quad (1.38)$$

Ainsi, tirer un échantillon  $x$  suivant  $\widehat{\pi}^{\text{NIS},N}$  revient à tirer un indice  $l$  suivant la loi discrète  $\Pr(l|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N) = w^l$ , puis à poser  $x = \tilde{x}^l$  parmi la collection  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ . Nous pouvons réécrire

$$\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) = \mathbb{E}_{\widehat{\pi}^{\text{NIS},N}}[\varphi(x)], \quad \forall \varphi. \quad (1.39)$$

On s'attend donc à ce que pour  $N$  élevé, (ré)échantillonner selon  $\widehat{\pi}^{\text{NIS},N}$  produise des échantillons tirés approximativement suivant  $\pi$  : c'est le principe du mécanisme SIR de Rubin [86, §2], [31], [93], [16, §9.2].

Plus exactement, ce mécanisme revient à tirer comme explicité en section 1.3.2  $N$  échantillons  $\tilde{x}^i$  i.i.d. suivant  $q$ , puis à tirer  $M_N$  (cette notation dénote le fait que  $M_N$  peut éventuellement dépendre du nombre  $N$  de tirages échantillonnés) échantillons  $x^i$  i.i.d suivant  $\widehat{\pi}^{\text{NIS},N}$  en (1.38), ce qui correspond à un rééchantillonnage multinomial. Cette opération de rééchantillonnage multinomial est usuellement effectuée en pratique par la méthode de la fonction de répartition inverse. L'algorithme 1 explicite cette procédure de rééchantillonnage précédée d'une étape d'IS normalisé, ce qui constitue le mécanisme SIR.

**Algorithme 1** L'algorithme SIR**Entrées :** La densité d'importance  $q$  ;**Sorties :** Les tirages rééchantillonnés  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  ;*IS normalisé***pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire**    Tirage des échantillons intermédiaires :  $\tilde{x}^i \sim q(x)$  ;    Pondération des échantillons intermédiaires :  $w^i \propto \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)}$ ,  $\sum_{i=1}^N w^i = 1$  ;**fin pour***Rééchantillonnage***pour**  $1 \leq i \leq M_N$  **faire**    Obtention des échantillons finaux :  $l^i \sim \Pr(l|\{\tilde{x}^j\}_{j=1}^N) = w^l$ , puis poser  $x^i = \tilde{x}^{l^i}$ .**fin pour****1.4.2 Propriétés des particules rééchantillonnées****1.4.2.1 Analyse asymptotique**

Considérons  $x$  une variable produite par l'algorithme 1 SIR à partir de la collection pondérée  $\{w^i, \tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ . Montrons alors que  $x$  converge en loi vers  $\pi$  lorsque  $N \rightarrow \infty$  [93] [86]. Pour toute fonction bornée  $\varphi$ , on a

$$\mathbb{E}[\varphi(x)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N] = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} \varphi(\tilde{x}^i)}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}} = \widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}; \quad (1.40)$$

Comme  $\varphi$  est supposée bornée on peut alors prendre l'espérance de  $\mathbb{E}[\varphi(x)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N]$  pour en déduire  $\mathbb{E}[\varphi(x)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Theta$  par un théorème de convergence dominée :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N]] = \mathbb{E} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi(x)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N] \right] \stackrel{(1.40)}{=} \mathbb{E} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{\Theta}^{\text{NIS},N} \right] \stackrel{(1.28)}{=} \mathbb{E}[\Theta] = \Theta, \quad (1.41)$$

ce qui confirme bien que la loi marginale d'un tirage rééchantillonné  $x^i$  tend vers  $\pi$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . La technique de Rubin peut donc être considérée comme un mécanisme d'échantillonnage à deux étapes qui transforme des échantillons tirés suivant  $q$  en des échantillons approximativement tirés suivant  $\pi$ , d'un point de vue asymptotique.

Par le même argument on peut également confirmer l'indépendance asymptotique de deux tirages quelconques  $x^1$  et  $x^2$  produits par le mécanisme SIR à partir du support commun  $\{w^i, \tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ , en montrant pour deux fonctions bornées  $\varphi$  et  $\psi$  que  $\mathbb{E}[\varphi(x^1)\psi(x^2)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Theta(\varphi)\Theta(\psi)$

$= \int \varphi(x)\pi(x)dx \int \psi(x)\pi(x)dx$ . En effet, on a à nouveau [16, §9.2.1]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(x^1)\psi(x^2)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x^1)\psi(x^2)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x^1)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N]\mathbb{E}[\psi(x^2)|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N]] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\Theta(\varphi)\Theta(\psi)] = \Theta(\varphi)\Theta(\psi). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Une autre manière d'étudier les propriétés du rééchantillonnage est par l'intermédiaire de l'estimateur de  $\Theta$  basé sur la collection non-pondérée de points  $\{(\frac{1}{M_N}, x^i)\}_{i=1}^{M_N}$  :

$$\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} = \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \varphi(x^i), \quad (1.43)$$

pour lequel on dispose du TCL suivant [16, §9] [19] :

**Théorème 4 (TCL pour l'estimateur SIR).** *Soit  $N \rightarrow \infty$ , soit  $M_N$  une suite non-décroissante telle que  $M_N \rightarrow \infty$ , et soit  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{M_N} = \alpha \geq 0$  (éventuellement  $\infty$ ). Alors sous de faibles hypothèses*

$$\text{si } \alpha < 1 \text{ alors } \sqrt{N}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \alpha \text{var}_{\pi}(\varphi(x)) + \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right] \right); \quad (1.44)$$

$$\text{si } \alpha \geq 1 \text{ alors } \sqrt{M_N}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \text{var}_{\pi}(\varphi(x)) + \alpha^{-1} \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right] \right). \quad (1.45)$$

**Remarque 2.** Les résultats (1.44) et (1.45) peuvent se condenser en une unique équation considérant l'une ou l'autre des vitesses de convergence,  $\sqrt{N}$  :

$$\text{si } \alpha \geq 0 \text{ et } \alpha \neq \infty \text{ alors } \sqrt{N}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \alpha \text{var}_{\pi}(\varphi(x)) + \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right] \right), \quad (1.46)$$

ou  $\sqrt{M_N}$  :

$$\text{si } \alpha > 0 \text{ alors } \sqrt{M_N}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \text{var}_{\pi}(\varphi(x)) + \alpha^{-1} \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right] \right). \quad (1.47)$$

Cependant, la séparation de ces deux vitesses de convergence selon que  $\alpha$  est supérieur ou inférieur à 1 dans le théorème 4 peut mener à l'interprétation intuitive suivante : asymptotiquement parlant, c'est le nombre d'opérations de tirage le plus petit en termes du coefficient  $\alpha$  - soit de tirages intermédiaires issus de la technique NIS, soit de rééchantillonnages - qui impose le comportement de l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  final et donc sa qualité en termes de vitesse de convergence. Ceci ne signifie toutefois pas que cet estimateur puisse présenter une variance

(non-asymptotique) plus faible que celle de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  utilisant  $N$  échantillons.

En effet, plus précisément, quel que soit  $\alpha \geq 0$  le terme de variance asymptotique de  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  correspond à  $\frac{1}{M_N} \text{var}_\pi(\varphi(x)) + \frac{1}{N} \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right]$  avec deux vitesses de convergence en jeu.

- Lorsque  $N \gg M_N$  (donc  $\alpha \rightarrow \infty$ ) c'est le terme en  $\text{var}_\pi(\varphi(x))$  qui est limitant alors que le terme propre à l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  est effectivement négligeable, c'est-à-dire que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  exhibe asymptotiquement le même comportement qu'un estimateur Monte Carlo brut déduit directement de  $M_N$  échantillons tirés suivant la loi cible  $\pi$ . Cependant, même si  $\text{var}_\pi(\varphi(x)) < \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right]$  (c'est-à-dire si la loi  $q$  est « mal » choisie), cela n'implique pas que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  soit plus performant que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$ . En effet celui-ci présente une vitesse de convergence beaucoup plus grande puisque  $N \gg M_N$ .
- D'autre part si  $N \ll M_N$  (donc  $\alpha \rightarrow 0$ ) le terme  $\mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right]$  est limitant et le comportement de  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  ne fait donc que se rapprocher de celui de  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$ .

#### 1.4.2.2 Analyse non-asymptotique

Plus généralement, non-asymptotiquement et lorsque l'on conditionne par les tirages intermédiaires  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ , la formule de décomposition de variance appliquée à  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  donne directement [16, Section 7.1.2] :

$$\begin{aligned} \text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}) &= \text{var}(\mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N} | \{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N]) + \mathbb{E}[\text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N} | \{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N)] \\ &= \text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}) + \mathbb{E}[(\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N} - \widehat{\Theta}^{\text{NIS},N})^2] \end{aligned} \quad (1.48)$$

ce qui assure la supériorité de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  sur l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  en termes de variance.

**Remarque 3.** Par ailleurs, à partir de (1.40) on a immédiatement

$$\mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}] = \mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}], \quad (1.49)$$

ce qui implique que les biais de ces deux estimateurs sont égaux. On a donc également une décomposition de l'erreur quadratique moyenne de  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  :

$$\mathbb{E}[(\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N} - \Theta)^2] = \mathbb{E}[(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N} - \Theta)^2] + \mathbb{E}[(\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N} - \widehat{\Theta}^{\text{NIS},N})^2]. \quad (1.50)$$

Néanmoins, malgré cette détérioration locale de la variance, la procédure de rééchantillonnage prendra tout son intérêt lors de l'adaptation séquentielle de l'échantillonnage d'importance, à laquelle nous nous intéressons en section 2.2, en raison du phénomène de dégénérescence des

poids rencontré par ce mécanisme IS lorsqu'il devient séquentiel.

### 1.4.3 Procédés alternatifs de rééchantillonnage

Plusieurs techniques alternatives au rééchantillonnage multinomial ont été proposées et analysées [20] [59] [33]; leur but est de réduire ou contrôler le terme de variance additionnel que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  introduit en (1.48) par rapport à l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$ , tout en conservant le même biais. On rencontre principalement les procédures de rééchantillonnage stratifié, systématique et résiduel :

- le rééchantillonnage stratifié est quasiment équivalent au rééchantillonnage multinomial, la différence étant que les tirages uniformes  $u^i \sim \mathcal{U}([0, 1])$  sont cette fois tirés comme  $u^i \sim \mathcal{U}([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}])$ , pour tout  $i \in \{1 \dots N\}$ ;
- le rééchantillonnage systématique suit la même idée mais à partir d'un unique tirage  $u \sim \mathcal{U}([0, \frac{1}{N}])$  en posant alors  $u^i = \frac{i-1}{N} + u$ ;
- le rééchantillonnage résiduel consiste à calculer la partie entière  $I_N^i$  de  $N \times w^i$  et à transformer la particule intermédiaire correspondante  $\tilde{x}^i$  en une particule rééchantillonnée donc pondérée uniformément. Ensuite, cette particule rééchantillonnée est dupliquée  $I_N^i$  fois pour tout  $i \in \{1 \dots N\}$ . Ceci produit une collection de  $\sum_{i=1}^N I_N^i \leq N$  particules finales, et si cette inégalité est stricte, alors afin d'obtenir  $N$  particules finales au total un rééchantillonnage multinomial (ou stratifié) est effectué pour sélectionner  $N - \sum_{i=1}^N I_N^i$  particules finales à partir de la collection  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  avec des poids modifiés  $\{\bar{w}^i \propto w^i - \frac{I_N^i}{N}\}_{i=1}^N$ .

Des améliorations de ces mêmes techniques sont proposées en [59] mais dépassent le cadre de cette thèse.

Afin de compléter ce chapitre d'introduction aux méthodes de Monte Carlo, nous allons maintenant présenter brièvement le principe des méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov.

## 1.5 Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov

Les méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov (Markov Chain Monte Carlo - MCMC) offrent une alternative pour obtenir des échantillons suivant une certaine loi cible  $\pi$  (et par suite un estimateur des moments d'intérêt de  $\pi$ ) sans pour autant tirer directement suivant  $\pi$ . La méthodologie est cette fois basée sur la construction d'une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est  $\pi$ . Nous rappelons brièvement les principes de base des chaînes de Markov et des méthodes MCMC, puis présentons deux techniques MCMC bien établies : l'algorithme de

Metropolis-Hastings (MH) en section 1.5.2 et l'échantillonneur de Gibbs en section 1.5.3 [82] [18].

### 1.5.1 Chaîne de Markov et principe MCMC

Nous nous intéressons ici aux chaînes de Markov  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  à temps discret  $n \in \mathbb{N}$  et à espace d'état continu  $\mathcal{S}$ , par exemple  $\mathbb{R}^{D_x}$ . Le processus  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  peut être vu comme une suite de v.a. évoluant dans le temps, où la loi de transition entre deux v.a. successives est décrite par le noyau de transition  $K$  de la chaîne, et la v.a. initiale suit une certaine loi  $p(x_0)$ . La particularité des chaînes de Markov est que le noyau  $K$  ne doit dépendre que de l'état précédent de la chaîne afin de construire l'état courant :

$$p(x_n | x_{n-1}, \dots, x_0) = p(x_n | x_{n-1}). \quad (1.51)$$

Formellement, le noyau  $K$  est défini de la manière suivante pour un état  $x \in \mathbb{R}^{D_x}$  et un ensemble  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{D_x})$  :

$$K(x, A) = \Pr(z \in A | x), \quad (1.52)$$

et exprime la probabilité que la v.a.  $z$  appartienne à  $A$  sachant que l'état précédent est égal à  $x$ . En pratique, cette propriété de Markov du noyau  $K$  facilite l'obtention d'une réalisation de la chaîne : il suffit en effet de simuler successivement suivant  $K$  à partir d'une réalisation initiale  $x_0$  suivant la loi initiale  $p(x_0)$ .

Dans le contexte des méthodes MCMC, nous nous focalisons sur des chaînes de Markov présentant une propriété particulière appelée *stationnarité* ou *invariance*. Ceci signifie qu'il existe une loi  $\pi$  telle que si  $x_n \sim \pi$ , alors  $x_{n+1} \sim \pi$ , ce qui peut se définir ainsi :

$$\text{pour tout } A, \int_A \pi(z) dz = \int K(x, A) \pi(x) dx. \quad (1.53)$$

De plus, lorsque la chaîne admet  $\pi$  comme loi stationnaire, on peut montrer la convergence en loi des v.a.  $x_n$  vers  $\pi$  sous certaines conditions supplémentaires de régularité de la chaîne (plus précisément lorsqu'elle est irréductible et apériodique) [82]. L'idée d'intérêt est que même lorsque la v.a. initiale de la chaîne suit une loi arbitraire  $p(x_0)$ , différente de  $\pi$ , au fur et à mesure que cette chaîne évolue dans le temps la loi des v.a.  $x_n$  se rapproche de  $\pi$  (on peut dire que la chaîne « oublie » asymptotiquement les conditions initiales).

Cette propriété de convergence en loi vers  $\pi$  peut être exploitée par l'extraction d'une partie des réalisations cette chaîne  $x^{n_1+1:n_1+N}$  (nous écrivons ici les variables en exposant pour exprimer le fait qu'il s'agit de réalisations). En choisissant  $n_1$  « suffisamment grand » pour que la chaîne ait approximativement convergé (la période de 0 à  $n_1$  est alors communément appelée

période de brûlage ou chauffage), on peut en effet construire l'estimateur de moyenne empirique suivant :

$$\hat{\Theta}^{\text{MCMC},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+N} \varphi(x^i), \quad x^0 \sim p(x_0), \quad x^i \sim K(x^{i-1}, \cdot), \quad (1.54)$$

dont la convergence presque sûre vers  $\Theta = \mathbb{E}[\varphi(x)]$  en (1.1) est assurée par un théorème ergodique, bien que ces échantillons  $x^i$  ne soient pas i.i.d.. Par ailleurs pour contrôler la vitesse de convergence, et donc être capable de quantifier le caractère « suffisamment grand » de  $n_1$ , des TCLs existent sous certaines conditions supplémentaires. Cependant le détail des résultats théoriques existants ne fait pas l'objet de ce manuscrit (pour cela, se référer par exemple au livre [82, Chapitre 6]), et nous considérerons que les chaînes sont suffisamment régulières pour assurer leur convergence vers leur loi invariante et satisfaire le théorème ergodique.

Maintenant, lorsque l'on cherche à approcher  $\Theta$  en (1.1) par un estimateur MCMC en (1.54), on ne dispose pas à l'avance d'une chaîne de Markov d'intérêt ni de son noyau de transition, mais uniquement de la loi cible  $\pi$ . Le principe des méthodes MCMC consiste ainsi à partir d'une densité cible  $\pi$  donnée à construire un noyau de transition  $K$ , et par suite une chaîne de Markov  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , admettant  $\pi$  comme loi invariante. Nous rappelons ici deux méthodes bien établies permettant d'obtenir un tel noyau  $K$  : l'algorithme de Metropolis-Hastings en section 1.5.2 et l'échantillonneur de Gibbs en section 1.5.3.

## 1.5.2 Algorithme de Metropolis-Hastings

### 1.5.2.1 Principe général

Un principe fondamental permettant de déterminer un noyau  $K$  admettant une loi  $\pi$  donnée comme loi invariante, utilisé en particulier pour l'algorithme de Metropolis-Hastings (MH), est le suivant. Considérons  $K$  sous la forme spécifique :

$$K(x, A) = \int_A k(x, z) dz + r(x) \mathbb{1}_x(A) \quad (1.55)$$

où  $k$  est une certaine fonction telle que  $k(x, x) = 0$ . Ainsi, la quantité  $\int_A k(x, z) dz$  correspond à la probabilité que la chaîne se déplace de  $x$  vers  $z \in A$ , et  $r(x) = 1 - \int k(x, z) dz$  à celle que la chaîne reste à l'état  $x$  ( $\in A$ ). Alors une condition suffisante, dite condition de *réversibilité temporelle* (ou *équilibre détaillé*) pour que  $K$  admette  $\pi$  comme loi invariante est

$$\pi(x)k(x, z) = \pi(z)k(z, x). \quad (1.56)$$

Ceci peut se vérifier directement en remplaçant  $K$  par son expression ci-dessus (1.55) dans le terme de droite de la définition de la stationnarité (1.53), puis en utilisant l'égalité (1.56) [18] :

$$\begin{aligned}
\int K(x, A)\pi(x)dx &= \int \left( \int_A k(x, z)dz \right) \pi(x)dx + \int r(x)\mathbf{1}_x(A)\pi(x)dx \\
&= \int_A \left( \int k(x, z)\pi(x)dx \right) dz + \int_A r(x)\pi(x)dx \\
&= \int_A \left( \int k(z, x)\pi(z)dx \right) dz + \int_A r(x)\pi(x)dx \tag{1.57} \\
&= \int_A (1 - r(z))\pi(z)dz + \int_A r(x)\pi(x)dx \\
&= \int_A \pi(z)dz
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien à la définition d'une loi invariante en (1.53). Intuitivement, cette condition de réversibilité temporelle signifie que lorsque la chaîne atteint un état  $x$  pour lequel la loi cible  $\pi$  est particulièrement faible, alors le noyau de transition doit présenter de grandes chances de se déplacer vers un nouvel état  $z$  pour lequel  $\pi$  est plus forte; et inversement si la chaîne a atteint un état  $z$  pour lequel la loi cible  $\pi$  est particulièrement forte, alors le noyau de transition doit présenter de petites chances de se déplacer vers un nouvel état  $x$  pour lequel  $\pi$  est plus faible. On peut dire que les mouvements de la chaîne sont alors « contrôlés » par la loi  $\pi$ , par l'intermédiaire du noyau  $K$ .

### 1.5.2.2 Construction de $K$

Cependant on ne dispose pas toujours d'un noyau de transition vérifiant la condition de réversibilité temporelle (1.56). La technique MH offre une manière très générale d'obtenir un tel noyau de la forme (1.55). Cette procédure nécessite la connaissance d'une certaine densité  $q(x, z)$  selon laquelle on est capable de générer un tirage candidat  $z$  à partir du point courant  $x$  de la chaîne; par ailleurs  $\pi$  et  $q$  n'ont toutes deux besoin d'être connues qu'à une constante près. Étant donné que  $q$  elle-même ne vérifie pas nécessairement la condition de réversibilité temporelle, supposons que l'on a

$$\pi(x)q(x, z) > \pi(z)q(z, x), \tag{1.58}$$

ce qui signifie que la densité  $q$  a tendance à déplacer les échantillons de  $x$  vers  $z$  trop souvent par rapport à de  $z$  vers  $x$  (ou inversement si l'inégalité (1.58) était dans l'autre sens). L'idée de la technique MH consiste à corriger cette inégalité en introduisant la possibilité de n'accepter le tirage candidat qu'avec une certaine probabilité  $\alpha(x, z)$ , plutôt qu'une probabilité de 1. La transition de  $x$  vers  $z$  doit ainsi s'effectuer selon une certaine densité proportionnelle à

$q(x, z)\alpha(x, z)$ .

Le terme  $\alpha(x, z)$  peut ensuite être déterminé en exigeant d'une part que la condition de réversibilité temporelle soit vérifiée, et d'autre part que le déplacement de  $z$  vers  $x$  soit encouragé le plus possible (puisque contrairement au déplacement de  $x$  vers  $z$ , il n'est pas effectué assez souvent par la densité  $q$ ) ce qui mène à poser une probabilité d'acceptation maximale  $\alpha(z, x) = 1$ . Ceci donne alors  $\alpha(x, z) = \frac{\pi(z)q(z, x)}{\pi(x)q(x, z)}$  avec pour limite supérieure 1, c'est-à-dire

$$\alpha(x, z) = \min \left[ \frac{\pi(z)q(z, x)}{\pi(x)q(x, z)}, 1 \right] \text{ si } \pi(x)q(x, z) > 0, \text{ et } \alpha(x, z) = 1 \text{ sinon.} \quad (1.59)$$

Enfin, l'expression du noyau de transition  $K(x, A)$  formé par cette procédure MH doit tenir compte de la probabilité non-nulle  $r(x) = 1 - \int q(x, z)\alpha(x, z)dz$  de rejeter le candidat  $z$  et donc de conserver  $x$  :

$$K(x, A) = \int_A q(x, z)\alpha(x, z)dz + \left( 1 - \int q(x, z)\alpha(x, z)dz \right) \mathbb{1}_x(A). \quad (1.60)$$

Par construction ce noyau vérifie la condition de réversibilité temporelle et admet donc bien  $\pi$  comme loi invariante [18]. Notons que certains choix particuliers de la loi de proposition  $q$  ont été étudiés en détail dans la littérature, par exemple  $q$  indépendant de la valeur courante de la chaîne ( $q(x, z)$  ne dépend pas de  $x$ ), (c'est-à-dire  $q(z|x) = q(z)$ ), ou encore en simulant une marche aléatoire c'est-à-dire  $q(x, z) = \mathcal{N}(z; x, P)$  [82]. La procédure MH générique est décrite en algorithme 2.

---

**Algorithme 2** L'algorithme de Metropolis-Hastings
 

---

**Entrées :** L'état  $x^n$  ;

**Sorties :** L'état  $x^{n+1}$  ;

Tirer  $x^{n+1} \sim q(x^n, \cdot)$  ;

Calculer le rapport d'acceptation  $\alpha = \min(1, \frac{\pi(x^{n+1})q(x^n, x^{n+1})}{\pi(x^n)q(x^{n+1}, x^n)})$  ;

Tirer  $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$  ;

**si**  $u < \alpha$  **alors**

Conserver  $x^{n+1}$ .

**sinon**

Annuler la mise à jour :  $x^{n+1} = x^n$ .

**fin si**

---

Nous nous attachons maintenant à présenter brièvement une autre technique MCMC usuelle : l'échantillonneur de Gibbs.

### 1.5.3 Échantillonneur de Gibbs

L'échantillonneur de Gibbs [82] est une technique MCMC très répandue permettant d'obtenir des tirages suivant une loi cible  $\pi$  multivariée de dimension  $D$  lorsqu'il est difficile ou impossible de tirer directement suivant  $\pi$  mais que l'on est capable de tirer suivant ses conditionnelles.

#### 1.5.3.1 Principe

Notons  $x_{n,d}$  la  $d$ -ième composante du  $n$ -ième état d'une chaîne de Markov en construction suivant l'algorithme de Gibbs. Afin de propager  $x_n$  à l'itération suivante, l'idée consiste à mettre à jour chaque composante  $x_{n,d}$  l'une après l'autre séquentiellement, tout en tenant compte des composantes déjà mises à jour dans le conditionnement de la loi de tirage.

Pour simplifier les expressions, considérons un cas bivarié. La technique de Gibbs considère un noyau de transition associé au processus  $x_n$  comme suit :

$$K((x_{n,1}, x_{n,2}), A) = P((z_1, z_2) \in A | (x_{n,1}, x_{n,2})) = \int_A \pi(z_1 | x_{n,2}) \pi(z_2 | z_1) dz_1 dz_2. \quad (1.61)$$

On peut montrer que ce noyau admet comme loi invariante la loi  $\pi$  elle-même [18] :

$$\begin{aligned} \int_A \pi(z_1, z_2) dz_1 dz_2 &= \int_A \pi(z_2 | z_1) \left( \int \pi(z_1 | x_{n,2}) \pi(x_{n,2}) dx_{n,2} \right) dz_1 dz_2 \\ &= \int \left( \int_A \pi(z_1 | x_{n,2}) \pi(z_2 | z_1) dz_1 dz_2 \right) \pi(x_{n,1}, x_{n,2}) dx_{n,1} dx_{n,2} \\ &= \int K((x_{n,1}, x_{n,2}), A) \pi(x_{n,1}, x_{n,2}) dx_{n,1} dx_{n,2}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

ce qui vérifie bien la définition de la stationnarité (1.53). L'échantillonneur de Gibbs générique est présenté en algorithme 3.

**Remarque 4.** Les processus marginaux  $\{x_{n,d}\}_{n \geq 0}$  ainsi créés sont eux-mêmes des chaînes de Markov admettant comme lois invariantes les marginales correspondantes de  $\pi$ . Ces processus vérifient de plus la condition de réversibilité temporelle (1.58), et peuvent ainsi être considérés comme ayant été construits au moyen de procédures MH (section 1.5.2) dont le taux d'acceptation est toujours égal à 1 [18]. Le processus  $x_n$  lui-même ne vérifie pas nécessairement la condition de réversibilité temporelle sauf si l'ordre de construction de ses composantes est choisi aléatoirement [82, Chapitre 9].

**Algorithme 3** L'échantillonneur de Gibbs**Entrées :**  $x^n$  ;**Sorties :**  $x^{n+1}$  ;Poser  $x^{n+1} = x^n$  ;**pour**  $1 \leq d \leq D$  **faire**Mettre à jour la composante  $d$  :  $x_d^{n+1} \sim \pi(\cdot | x_1^{n+1}, \dots, x_{d-1}^{n+1}, x_{d+1}^n, \dots, x_D^n)$ .**fin pour****1.5.3.2 Metropolis-Hastings dans Gibbs**

Une variante importante de l'échantillonneur de Gibbs, connue sous le nom d'algorithme de MH dans Gibbs (MH-within-Gibbs) et résumée en algorithme 4, consiste à intégrer la procédure MH pour chaque composante traitée dans l'algorithme de Gibbs (nous adoptons ici la notation  $q(x, z) = q(z|x)$ ). Ceci permet d'utiliser des tirages conditionnels suivant une loi instrumentale  $q$  lorsqu'il est impossible d'en obtenir suivant les conditionnelles de la loi cible  $\pi$ .

**Algorithme 4** L'algorithme de MH dans Gibbs**Entrées :**  $x^n$ **Sorties :**  $x^{n+1}$ Poser  $x^{n+1} = x^n$  ;**pour**  $1 \leq d \leq D$  **faire**Mettre à jour la composante  $d$  :  $x_d^{n+1} \sim q(\cdot | x_1^{n+1}, \dots, x_{d-1}^{n+1}, x_{d+1}^n, \dots, x_D^n)$  ;Calculer le rapport d'acceptation  $\alpha = \min(1, \frac{\pi(x^{n+1}) q(x^n | x^{n+1})}{\pi(x^n) q(x^{n+1} | x^n)})$  ;Tirer  $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$  ;**si**  $u < \alpha$  **alors**Conserver  $x_d^{n+1}$ .**sinon**Annuler la mise à jour  $x_d^{n+1} = x_d^n$ .**fin si****fin pour**

# Méthodes de Monte Carlo séquentielles

## Contenu

---

<b>2.1 Filtrage statistique et chaînes de Markov cachées</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1.1 Un problème de récursivité . . . . .	42
2.1.2 Modèle de chaînes de Markov cachées . . . . .	43
2.1.3 Calcul du filtre bayésien . . . . .	46
<b>2.2 Filtrage particulaire</b> . . . . .	<b>47</b>
2.2.1 Principes . . . . .	48
2.2.2 Aspects pratiques du filtrage particulaire . . . . .	51
<b>2.3 Filtrage particulaire auxiliaire</b> . . . . .	<b>54</b>
2.3.1 Principe . . . . .	54
2.3.2 Aspects pratiques . . . . .	55

---

## 2.1 Filtrage statistique et chaînes de Markov cachées

De nombreux problèmes rencontrés en traitement statistique du signal font intervenir un aspect temporel contrairement au problème d'inférence bayésienne statique considéré dans le chapitre 1. Nous nous intéressons donc cette fois à un processus caché  $\{x_t \in \mathbb{R}^{D_x}\}_{t \geq 0}$  et un processus observé  $\{y_t \in \mathbb{R}^{D_y}\}_{t \geq 0}$ , où  $t \in \mathbb{N}$  correspond à l'indice temporel discret représentant le temps. Ces variables sont régies par une densité jointe que l'on se donne,  $p(x_{0:t}, y_{0:t})$ , où  $x_{0:t} = (x_0, \dots, x_t)$ .

Ainsi les observations ou mesures  $y_t$  arrivent au cours du temps et l'on souhaite estimer à chaque nouvel instant  $t$  un certain moment de la densité a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  (c'est-à-dire que l'on souhaite effectuer notre estimation à la lumière de l'ensemble des observations actuellement disponibles). Ce moment, défini dans le cas statique par l'équation (1.10)

$$\Theta = \mathbb{E}[\varphi(x)|y] = \int \varphi(x)p(x|y)dx,$$

devient ici :

$$\Theta_t = \mathbb{E}[\varphi(x_{0:t})|y_{0:t}] = \int \varphi(x_{0:t})p(x_{0:t}|y_{0:t})dx_{0:t}. \quad (2.1)$$

Comparé à l'équation (1.10),  $x$  et  $y$  deviennent donc respectivement  $x_{0:t}$  et  $y_{0:t}$ .

### 2.1.1 Un problème de récursivité

Considérons le moment  $\Theta_t$  en (2.1). Étant donné que la dimension de l'espace d'état associé à l'intégrale en jeu augmente, on va s'attacher à calculer ce moment *récursivement*. Cependant ce calcul pose les deux problèmes suivants :

- bien que l'on connaisse la loi jointe  $p(x_{0:t}, y_{0:t})$  à chaque instant  $t$ , il peut être difficile de calculer la loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  ;
- même si l'on connaît la loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ , le calcul du moment  $\Theta_t$  lui-même peut rester complexe.

Concentrons-nous tout d'abord sur le premier problème ci-dessus. La loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  est calculable récursivement à partir de la loi jointe  $p(x_{0:t}, y_{0:t})$  par l'intermédiaire de la formule générale suivante :

$$\begin{aligned} p(x_{0:t}|y_{0:t}) &= \frac{p(x_{0:t}, y_{0:t})}{p(y_{0:t})} \\ &= p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1}) \frac{p(x_t, y_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1})}{p(y_t|y_{0:t-1})} \\ &= p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1}) \frac{p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1})p(y_t|x_{0:t}, y_{0:t-1})}{\int p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1})p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1})p(y_t|x_{0:t}, y_{0:t-1})dx_{0:t}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

On peut ici remarquer que la dimension de l'intégrale du dénominateur augmente avec le temps, ce qui risque de s'avérer rédhibitoire en termes de coût de calcul lorsque celui-ci progresse.

En outre on peut obtenir la densité dite de *filtrage*  $p(x_t|y_{0:t})$ , souvent utilisée lorsque l'on s'intéresse à l'évolution de l'état  $x_t$  au temps courant, par marginalisation de l'équation (2.2) ci-dessus par rapport à  $x_{0:t-1}$  :

$$p(x_t|y_{0:t}) = \frac{\int p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1})p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1})p(y_t|x_{0:t}, y_{0:t-1})dx_{0:t-1}}{\int p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1})p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1})p(y_t|x_{0:t}, y_{0:t-1})dx_{0:t}}. \quad (2.3)$$

Néanmoins cette dernière équation n'est plus récursive en général. En revanche, si la loi jointe vérifie  $p(x_t, y_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) = p(x_t, y_t|x_{t-1}, y_{0:t-1})$ , alors l'intégrale au numérateur de (2.3) se simplifie par rapport aux variables  $x_{0:t-2}$ , et le terme  $p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1})$  se réduit donc à  $p(x_{t-1}|y_{0:t-1})$ . Ainsi  $p(x_t|y_{0:t})$  se calcule alors à partir de  $p(x_{t-1}|y_{0:t-1})$  d'où la formule récursive recherchée.

Afin de contourner le problème de dimension croissante de l'intégrale du dénominateur ainsi

que l'absence de récursivité dans le cas général pour le calcul de la densité de filtrage, nous allons introduire en section suivante 2.1.2 un modèle particulier.

Discutons maintenant du second problème listé ci-dessus : même si l'on connaît la loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ , le calcul du moment  $\Theta_t$  lui-même peut rester complexe. Si ce calcul ne peut pas être effectué de manière analytique, et que les méthodes d'approximation déterministes sont difficiles à appliquer par exemple en raison de la dimension temporelle potentiellement grande (comme expliqué en début de section 1.2), une solution envisageable consiste à utiliser une méthode de Monte Carlo telle que la technique d'échantillonnage d'importance présentée en section 1.3. Ceci pose alors le problème de l'application séquentielle de cette technique ainsi que de sa récursivité, que nous détaillerons en section 2.2.

Pour le moment, nous allons voir qu'il est possible de s'affranchir du problème de récursivité du calcul de la densité de filtrage, ainsi que du problème de calcul d'intégrales de dimension croissante, en considérant un modèle particulier : le modèle de Chaînes de Markov Cachées (Hidden Markov Chains - HMC).

### 2.1.2 Modèle de chaînes de Markov cachées

En pratique, on va chercher à modéliser sous forme probabiliste un système physique de telle manière à ce que l'on soit capable de calculer récursivement les densités a posteriori d'intérêt telles que  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  ou  $p(x_t|y_{0:t})$ . Un modèle particulièrement utilisé pour cela est le modèle stochastique dynamique consistant à définir à un instant  $t$  donné les interactions entre  $x_t$  et  $y_t$  de la manière suivante :

$$x_0 \sim p(x_0), \quad (2.4)$$

$$x_t = a_t(x_{t-1}, u_t), \quad (2.5)$$

$$y_t = b_t(x_t, v_t), \quad (2.6)$$

où  $a_t$  et  $b_t$  sont des fonctions potentiellement non-linéaires, et  $\{u_t\}_{t \geq 0}$  et  $\{v_t\}_{t \geq 0}$  des processus dits de bruitage. (2.5) est communément appelée équation d'évolution et traduit l'évolution de  $x$  dans le temps ; (2.6) est l'équation d'observation et représente la manière dont  $y$  se comporte en fonction de  $x$ . La donnée de ces équations correspond à la connaissance de la génération récursive des processus  $x$  et  $y$ , lorsqu'il est possible de générer des réalisations des variables  $u$  et  $v$ .

Néanmoins, selon la forme des fonctions  $a$  et  $b$  et des processus  $u$  et  $v$ , ce modèle (2.5)-(2.6) peut rester très complexe pour le calcul de la loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  ou de ses moments, ainsi des hypothèses simplificatrices supplémentaires sont souvent considérées. Nous nous intéressons

ici au modèle très répandu HMC dans lequel les séquences  $\{u_t\}_{t \geq 0}$  et  $\{v_t\}_{t \geq 0}$  en (2.5)-(2.6) sont supposées indépendantes, mutuellement indépendantes et indépendantes de  $x_0$ . Sous ces hypothèses, la factorisation de  $p(x_{0:t}, y_{0:t}) = p(x_{0:t})p(y_{0:t}|x_{0:t})$ ,

$$p(x_{0:t}, y_{0:t}) = p(x_0) \prod_{i=1}^t p(x_i|x_{0:i-1})p(y_0|x_{0:t}) \prod_{i=1}^t p(y_i|y_{0:i-1}, x_{0:t}), \quad (2.7)$$

peut se simplifier de la manière suivante. L'indépendance mutuelle des  $u_i$  pour  $i$  tel que  $0 \leq i \leq t$  implique que  $x_{0:t}$  est une chaîne de Markov, ainsi pour tout  $t$

$$p(x_t|x_{0:t-1}) = p(x_t|x_{t-1}). \quad (2.8)$$

De plus, l'indépendance mutuelle des  $v_i$  pour  $i$  tel que  $0 \leq i \leq t$ , ainsi que l'indépendance mutuelle des  $u_i$  et  $v_j$  pour  $i$  tel que  $0 \leq i \leq t$  et  $j$  tel que  $0 \leq j \leq t$ , impliquent l'indépendance de différentes observations conditionnellement à tous les états cachés et l'indépendance d'une observation par rapport à tous les états cachés autres que celui lui correspondant. On a donc pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq t$  :

$$p(y_i|y_{0:i-1}, x_{0:t}) = p(y_i|x_i). \quad (2.9)$$

Pour  $i$  tel que  $0 \leq i \leq t$ , notons  $f_i(x_i|x_{i-1}) = p(x_i|x_{i-1})$  la densité dite de *transition* représentant l'évolution dynamique du processus caché (de la même manière qu'en (2.5)), et  $g_i(y_i|x_i) = p(y_i|x_i)$  la *vraisemblance* décrivant à un instant donné la relation entre une observation et l'état caché « correspondant » (de la même manière qu'en (2.6)) ; l'indice  $i$  dans  $f_i$  et  $g_i$  indique le fait que ces lois peuvent changer au cours du temps. La loi jointe s'écrit alors :

$$p(x_{0:t}, y_{0:t}) = p(x_0) \prod_{i=1}^t f_i(x_i|x_{i-1}) \prod_{i=0}^t g_i(y_i|x_i). \quad (2.10)$$

Ainsi, se donner un modèle HMC revient à se donner sa loi initiale  $p(x_0)$ , ses lois de transition  $f_i(x_i|x_{i-1})$  et ses vraisemblances  $g_i(y_i|x_i)$ .

Par ailleurs, les hypothèses du modèle HMC entraînent également la propriété suivante

$$p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) = f_t(x_t|x_{t-1}), \quad (2.11)$$

ce qui, avec la propriété (2.9), permet de simplifier les équations du calcul récursif de  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  :

$$p(x_{0:t}|y_{0:t}) = \frac{p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1})f_t(x_t|x_{t-1})g_t(y_t|x_t)}{\int g_t(y_t|x_t) \left( \int p(x_{t-1}|y_{0:t-1})f_t(x_t|x_{t-1})dx_{t-1} \right) dx_t}, \quad (2.12)$$

ainsi que de sa marginale

$$p(x_t|y_{0:t}) = \frac{g_t(y_t|x_t) \int f_t(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{0:t-1})dx_{t-1}}{\int g_t(y_t|x_t) \left( \int p(x_{t-1}|y_{0:t-1})f_t(x_t|x_{t-1})dx_{t-1} \right) dx_t}, \quad (2.13)$$

où (2.13) permet cette fois de maintenir constante la dimension des intégrales au fil des itérations temporelles pour le calcul de  $p(x_t|y_{0:t})$ , contrairement au cas du modèle plus général (2.3). De par la forme du numérateur du côté droit de (2.13), on constate que la propagation de la densité de filtrage  $p(x_t|y_{0:t})$  peut se faire en deux étapes :

- 1) une première étape de *prédiction* représentée par le calcul de l'intégrale

$$\int f_t(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{0:t-1})dx_{t-1} = \int p(x_t|x_{t-1}, y_{0:t-1})p(x_{t-1}|y_{0:t-1})dx_{t-1} = p(x_t|y_{0:t-1}), \quad (2.14)$$

ce qui correspond au passage de la loi de  $x_{t-1}$  vers celle de  $x_t$ , conditionnellement à  $y_{0:t-1}$  ;

- 2) une deuxième étape de *mise à jour* qui consiste ensuite à incorporer la nouvelle observation  $y_t$  par l'intermédiaire de  $g_t(y_t|x_t)$ , pour passer de la loi  $p(x_t|y_{0:t-1})$  à la loi  $p(x_t|y_{0:t})$ , et correspond finalement à l'application de la formule de Bayes puisqu'on peut réécrire

$$p(x_t|y_{0:t}) = \frac{g_t(y_t|x_t)p(x_t|y_{0:t-1})}{p(y_t|y_{0:t-1})}. \quad (2.15)$$

**Exemple 4.** Un exemple de modèle HMC est le suivant. Considérons un problème de poursuite de cible consistant à estimer le vecteur d'état caché contenant la position et la vitesse de la cible en coordonnées cartésiennes  $x_t = [p_{x,t}, \dot{p}_{x,t}, p_{y,t}, \dot{p}_{y,t}]^T$ , à partir de mesures  $y_t$  en coordonnées polaires. Le modèle est le suivant :

$$x_0 \sim \mathcal{N}(m_0, P_0), \quad (2.16)$$

$$x_t = Fx_{t-1} + u_t, \quad (2.17)$$

$$y_t = \left[ \sqrt{p_{x,t}^2 + p_{y,t}^2}, \arctan \frac{p_{y,t}}{p_{x,t}} \right]^T + v_t. \quad (2.18)$$

où  $u_t \sim \mathcal{N} \left( [0, 0, 0, 0]^T, Q \right)$  et  $v_t \sim \mathcal{N} \left( [0, 0]^T, R \right)$  avec

$$R = \text{diag}(\sigma_\rho^2, \sigma_\theta^2), F = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \sigma_Q^2 \times I_2 \otimes \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{3} & \frac{\tau^2}{2} \\ \frac{\tau^2}{2} & \tau \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

et  $\tau$  désigne l'intervalle temporel entre deux instants (ce modèle d'évolution de l'état caché correspond à un modèle à vitesse presque constante [60] [10]). Ainsi dans cet exemple les lois

de transition et les vraisemblances ne dépendent pas du temps et s'écrivent :

$$f_t(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; Fx_{t-1}, Q) \quad (2.20)$$

$$g_t(y_t|x_t) = \mathcal{N}(y_t; \left[ \sqrt{p_{x,t}^2 + p_{y,t}^2}, \arctan \frac{p_{y,t}}{p_{x,t}} \right]^T, R). \quad (2.21)$$

### 2.1.3 Calcul du filtre bayésien

Dans le cas particulier où  $a_t$  et  $b_t$  sont des fonctions linéaires et  $u_t$  et  $v_t$  sont gaussiens, le modèle (2.5)-(2.6) peut se réécrire :

$$x_0 \sim \mathcal{N}(m_0, P_0), \quad (2.22)$$

$$x_t = F_t x_{t-1} + u_t, \quad (2.23)$$

$$y_t = H_t x_t + v_t, \quad (2.24)$$

où  $u_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$  et  $v_t \sim \mathcal{N}(0, R_t)$ . Il est alors possible de propager exactement les lois a posteriori dans le temps. En effet, grâce aux formules classiques de conditionnement de vecteurs gaussiens ainsi que de calcul d'intégrales de produits de lois gaussiennes, et en utilisant la linéarité du modèle [79], on peut montrer que la gaussianité de  $p(x_{t-1}|y_{0:t-1})$  entraîne celle de  $p(x_t|y_{0:t})$ . La densité a posteriori est donc toujours entièrement définie par ses moments à l'instant  $t$  (moyenne  $m_{t|t}$  et matrice de covariance  $P_{t|t}$ ), dont le calcul s'effectue analytiquement à partir de ceux à l'instant  $t-1$ ,  $m_{t-1|t-1}$  et  $P_{t-1|t-1}$ .

Cette procédure extrêmement répandue est bien connue sous le nom de filtre de Kalman [53, 54, 52, 46]. Supposons qu'à l'instant  $t-1$  on dispose de  $m_{t-1|t-1}$  et  $P_{t-1|t-1}$ . La récursion produit alors les nouveaux moments à l'instant  $t$  en deux étapes, la prédiction et la mise à jour :

$$\begin{array}{ccccc} p(x_{t-1}|y_{0:t-1}) & \xrightarrow{\text{prédiction}} & p(x_t|y_{0:t-1}) & \xrightarrow{\text{mise à jour}} & p(x_t|y_{0:t}) \\ \mathcal{N}(m_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1}) & \xrightarrow{\text{prédiction}} & \mathcal{N}(m_{t|t-1}, P_{t|t-1}) & \xrightarrow{\text{mise à jour}} & \mathcal{N}(m_{t|t}, P_{t|t}). \end{array}$$

Ceci permet d'obtenir les équations de prédiction

$$m_{t|t-1} = F_t m_{t-1|t-1} \quad (2.25)$$

$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t \quad (2.26)$$

et de mise à jour

$$S_t = R_t + H_t P_{t|t-1} H_t^T \quad (2.27)$$

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T S_t^{-1} \quad (2.28)$$

$$m_{t|t} = m_{t|t-1} + K_t (y_t - H_t m_{t|t-1}) \quad (2.29)$$

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t) P_{t|t-1}. \quad (2.30)$$

Cependant les hypothèses de linéarité et gaussianité du modèle ne se prêtent pas à la modélisation de n'importe quel problème ; il devient alors nécessaire d'utiliser des solutions sous-optimales. Lorsque le modèle est non-linéaire, le *filtre de Kalman étendu* [48, 2, 81] fournit une approximation du filtre de Kalman qui s'effectue par linéarisation des équations du modèle afin de se ramener à un problème linéaire et gaussien. Dans certains cas plus fortement non-linéaires où cette approximation n'est plus satisfaisante, une solution de filtre de Kalman "unscented" [50, 97, 4, 65] a été proposée pour améliorer l'estimation de la moyenne et de la covariance tout en ne requérant pas la linéarisation potentiellement complexe des fonctions. Cette technique est basée sur l'application récursive de la transformation "unscented" aux fonctions non-linéaires  $a$  et  $b$  propres au modèle (équations (2.5) et (2.6)).

Une solution sous-optimale alternative d'applicabilité très générale, basée sur les méthodes de Monte Carlo, est aussi couramment utilisée : le filtrage particulaire (FP) [38, 25, 4]. Comme nous allons le voir en section suivante, le filtrage particulaire est basé sur des tirages aléatoires et présente des propriétés asymptotiques intéressantes quand le nombre de tirages  $N$  tend vers l'infini.

## 2.2 Filtrage particulaire

Plaçons-nous ici dans le cadre du modèle HMC (2.10). Nous nous intéressons à l'estimation récursive du moment  $\Theta_t$  en (2.1) :

$$\Theta_t = \int \varphi(x_{0:t}) p(x_{0:t} | y_{0:t}) dx_{0:t}$$

pour  $\varphi$  telle que cette quantité soit définie.

**Remarque 5.** Bien que dans cette section nous nous restreignons au cadre du modèle HMC, notons que la procédure de filtrage particulaire est applicable dans des modèles plus généraux, tels que celui étudié au chapitre 5.

L'estimation récursive du moment  $\Theta_t$  constitue un problème similaire au calcul de (1.10),

car  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  est connue à une constante près. Comme nous l'avons vu en section 1.3.2, la technique d'IS normalisé apporte une solution à ce type de problème.

Ainsi, l'idée fondatrice du FP, ou méthode de Monte Carlo séquentielle (Sequential Monte Carlo method - SMC), repose sur la propagation dans le temps d'un ensemble d'échantillons pondérés,  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$ , permettant d'approcher  $\Theta_t$  sous forme de moyenne (éventuellement pondérée) des  $\varphi(x^i)$ ; ce jeu de points peut également être vu comme une approximation discrète de  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ ,

$$\hat{p}(x_{0:t}|y_{0:t}) = \sum_{i=1}^N w_t^i \delta_{x_{0:t}^i}(x_{0:t}). \quad (2.31)$$

Cette propagation pourrait s'effectuer par l'application séquentielle directe du mécanisme de l'IS normalisé en ciblant  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ , connue à une constante près selon (2.10). Plus précisément ceci comprendrait alors les deux étapes suivantes :

- tirer des échantillons directement suivant une loi d'importance  $x_{0:t}^i \sim q(x_{0:t})$ ;
- calculer les poids d'importance normalisés associés  $w_t^i \propto \frac{p(x_{0:t}^i|y_{0:t})}{q(x_{0:t}^i)} \propto \frac{p(x_{0:t}^i, y_{0:t})}{q(x_{0:t}^i)}$ , c'est-à-dire

$$w_t^i \propto \frac{p(x_0^i) \prod_{r=1}^t f_r(x_r^i|x_{r-1}^i) \prod_{r=0}^t g_r(y_r|x_r^i)}{q(x_{0:t}^i)}, \quad \sum_{i=1}^N w_t^i = 1. \quad (2.32)$$

Cependant il deviendrait rédhibitoire de tirer des échantillons directement suivant cette loi  $q(x_{0:t})$  ainsi que de calculer les poids d'importance associés  $w_t^i$ , lorsque  $t$  croît. En effet, ceci impliquerait à chaque instant de choisir une nouvelle loi d'importance, de tirer des échantillons dont la dimension augmente ainsi que de calculer des poids faisant intervenir un produit dont la taille augmente : le coût calculatoire associé à ces opérations serait donc constamment en hausse.

### 2.2.1 Principes

La technique d'échantillonnage d'importance séquentiel (Sequential Importance Sampling - SIS) permet de contourner ces difficultés en considérant une loi  $q$  sous une certaine forme particulière. Soit  $q(x_{0:t}|y_{0:t})$  une certaine loi d'importance, éventuellement dépendante de  $y_{0:t}$ . On notera pour simplification  $q(x_{0:t}|y_{0:t}) = q_t(x_{0:t})$ , où l'on omet d'écrire le conditionnement par rapport à  $y_{0:t}$ , et où l'indice  $t$  dénote la loi choisie à cet instant. La technique SIS consiste à choisir une loi  $q_t$  telle qu'il soit possible de propager les approximations d'intérêt de manière récursive. À cet effet,  $q_t$  est conçue de façon à pouvoir elle-même être construite récursivement

c'est-à-dire qu'elle se factorise sous la forme :

$$q_t(x_{0:t}) = q_{t-1}(x_{0:t-1})q_t(x_t|x_{0:t-1}) = q_0(x_0) \prod_{r=1}^t q_r(x_r|x_{0:r-1}). \quad (2.33)$$

Notons l'implication sous-jacente qui découle de ce choix : l'application directe de la formule de Bayes donnerait

$$q_t(x_{0:t}) = q(x_{0:t-1}|y_{0:t})q_t(x_t|x_{0:t-1}); \quad (2.34)$$

par construction, la loi d'importance  $q$  doit donc vérifier

$$q(x_{0:t-1}|y_{0:t}) = q(x_{0:t-1}|y_{0:t-1}) = q_{t-1}(x_{0:t-1}). \quad (2.35)$$

Ceci permet alors d'obtenir un échantillon  $x_{0:t}^i$  suivant  $q_t(x_{0:t})$  séquentiellement au moyen des tirages successifs  $\tilde{x}_0^i \sim q_0(x_0)$ ,  $\tilde{x}_1^i \sim q_1(x_1|x_0^i)$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{x}_t^i \sim q_t(x_t|x_{0:t-1}^i)$ , et ainsi d'effectuer en pratique des tirages de taille fixe à chaque nouvelle itération temporelle, contrairement à l'application directe du mécanisme de l'IS normalisé pour lequel la taille des tirages augmenterait linéairement avec  $t$ . Nous utilisons à partir de maintenant la notation  $\tilde{x}_t^i$  afin de distinguer les particules ainsi propagées, dites « intermédiaires », des particules rééchantillonnées  $x_t^i$  qui seront introduites plus loin.

L'algorithme SIS procède ainsi : à l'instant  $t$ , partant de  $N$  trajectoires pondérées (obtenues à l'instant  $t-1$ )  $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$  tirées suivant  $q_{t-1}(x_{0:t-1})$ , cet algorithme commence par étendre chaque trajectoire  $x_{0:t-1}^i$  avec une particule  $\tilde{x}_t^i$  tirée suivant  $q_t(x_t|x_{0:t-1}^i)$ . Afin de pondérer les nouvelles trajectoires  $\{x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$  ainsi créées en appliquant la technique NIS avec cette loi  $q$  particulière, les nouveaux poids  $w_t^i$  doivent être calculés en ciblant la densité a posteriori d'intérêt  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ . On peut obtenir ses valeurs en chaque échantillon  $(x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i)$ , à une constante près, via (2.12) :

$$p(x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i|y_{0:t}) \propto p(x_{0:t-1}^i|y_{0:t-1})f_t(\tilde{x}_t^i|x_{t-1}^i)p(y_t|\tilde{x}_t^i). \quad (2.36)$$

Les nouveaux poids  $w_t^i$  peuvent ainsi être calculés en pratique à partir des anciens poids  $w_{t-1}^i$  (lesquels ont été précédemment calculés en ciblant  $p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1})$ ) sous la forme

$$w_t^i \propto \frac{p(x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i|y_{0:t})}{q_t(x_{0:t}^i)}, \quad \sum_{i=1}^N w_t^i = 1 \quad (2.37)$$

$$w_t^i \propto \frac{p(x_{0:t-1}^i|y_{0:t-1})f_t(\tilde{x}_t^i|x_{t-1}^i)g_t(y_t|\tilde{x}_t^i)}{q_{t-1}(x_{0:t-1}^i)q_t(\tilde{x}_t^i|x_{0:t-1}^i)} \quad (2.38)$$

$$w_t^i \propto w_{t-1}^i \frac{f_t(\tilde{x}_t^i|x_{t-1}^i)g_t(y_t|\tilde{x}_t^i)}{q_t(\tilde{x}_t^i|x_{0:t-1}^i)}. \quad (2.39)$$

Malheureusement, il est bien connu que cette application séquentielle de la technique NIS

mène à la dégénérescence des poids : après quelques itérations temporelles seul un petit nombre de poids  $w_t^i$  ont des valeurs non-nulles [26]. Un recours traditionnel consiste à rééchantillonner les trajectoires c'est-à-dire ajouter à la suite des étapes de tirage et pondération une étape de rééchantillonnage multinomial. L'ensemble de ces trois étapes correspond alors au mécanisme SIR fondateur proposé par Rubin [86, §2] et rappelé en section 1.4. Cette nouvelle étape a pour effet d'éliminer les trajectoires de poids faibles et dupliquer celles de poids forts, créant alors un nouvel ensemble de trajectoires pondérées uniformément. Comme les poids sont uniformes toutes les trajectoires ont alors de l'importance lors de la nouvelle étape de tirage à l'instant suivant  $t + 1$ , par opposition au cas dégénéré sans étape de rééchantillonnage où les tirages conditionnels à des trajectoires de poids très faibles sont gaspillés. En effet dans ce cas dégénéré les poids des trajectoires étendues à  $t + 1$  sont proportionnels aux poids des trajectoires à  $t$ , et donc aussi très faibles (sauf éventuellement dans le cas de modèles très informatifs, mais dans ce cas d'autres problèmes significatifs apparaissent car les poids peuvent devenir dégénérés à l'issue d'une seule ou très peu d'itérations temporelles - nous reviendrons sur ce point en section 2.2.2.1).

L'ajout de cette étape de rééchantillonnage constitue la méthode SIR (*Sequential Importance Resampling*) donnée dans l'algorithme 5 ; nous supposons ici que la taille  $N$  de l'approximation MC reste constante durant les itérations. Dans l'algorithme 5, les étapes **S.**, **W.** et **R.** correspondent respectivement à l'échantillonnage ("Sampling"), à la pondération ("Weighting") et au rééchantillonnage ("Resampling"). Cet algorithme revient donc à l'application séquentielle du mécanisme SIR (qui dans le contexte statique signifie alors *Sampling Importance Resampling* - nous distinguerons les deux acronymes en fonction du contexte). Cette étape de rééchantillonnage peut s'effectuer soit à chaque itération, soit en fonction d'un certain critère comme le nombre de particules effectif [56] [62] qui mesure la disparité des poids et peut être approché par

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_t^i)^2}. \quad (2.40)$$

L'algorithme 5 permet ainsi de calculer deux estimateurs de  $\Theta_t$ , avant et après rééchantillonnage :

$$\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(\tilde{x}_t^i); \quad (2.41)$$

$$\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i), \quad (2.42)$$

où  $x_t^i$  (resp.  $\tilde{x}_t^i$ ) désigne les particules rééchantillonnées (resp. intermédiaires) à l'instant  $t$ . Comme vu en section 1.4.2, l'analyse de l'estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$  peut se révéler utile pour comprendre l'effet local du rééchantillonnage. En effet il est bien connu que l'estimateur avant ré-

échantillonnage  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  est préférable à celui après rééchantillonnage  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$  et doit être utilisé en pratique, malgré les bénéfices du rééchantillonnage pour le jeu de particules pondéré lui-même aux itérations suivantes. En effet similairement à l'équation (1.48) dans le cas statique, le théorème de la variance totale donne

$$\text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}) = \text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}) + \text{E}[\text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} | \{\tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N)]. \quad (2.43)$$

Enfin, les résultats de convergence disponibles dans le cas du mécanisme SIR statique (voir section 1.4.2) peuvent s'étendre à ce cas dynamique comme montré en [16, Chapitre 9]. Néanmoins, en dehors de ces résultats asymptotiques, on peut se poser la question de l'implémentation d'un algorithme de filtrage particulière en pratique. En particulier les performances d'un tel algorithme vont dépendre fortement du modèle et du choix de la loi d'importance. Nous nous attachons donc en section suivante à mentionner brièvement certaines de ces limitations ainsi que de possibles solutions ou améliorations ayant été proposées.

---

**Algorithme 5** L'algorithme FP SIR (basé sur le rééchantillonnage multinomial)

---

**Entrées :**  $q_t(x_t|x_{0:t-1})$ ,  $y_t$ ,  $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$  ;  
**Sorties :**  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$  ;  
**pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire**  
    **S.**  $\tilde{x}_t^i \sim q_t(x_t|x_{0:t-1}^i)$  ;  
    **W.**  $w_t^i \propto w_{t-1}^i \frac{f_t(\tilde{x}_t^i|x_{0:t-1}^i) g_t(y_t|\tilde{x}_t^i)}{q_t(\tilde{x}_t^i|x_{0:t-1}^i)}$ ,  $\sum_{i=1}^N w_t^i = 1$  ;  
**fin pour**  
 $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(\tilde{x}_t^i)$  ;  
**si** Rééchantillonnage **alors**  
    **pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire**  
        **R.**  $l^i \sim \text{Pr}(l | \{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^j\}_{j=1}^N) = w_t^l$  ;  
        Poser  $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^{l^i}, \tilde{x}_t^{l^i})$ ,  $w_t^i = \frac{1}{N}$  ;  
    **fin pour**  
**sinon**  
    Poser  $\{x_t^i\}_{i=1}^N = \{\tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$  ;  
**fin si**  
 $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i)$

---

### 2.2.2 Aspects pratiques du filtrage particulière

Nous mentionnons ici deux problèmes qui surviennent lors de l'implémentation pratique d'un algorithme FP, ainsi que certains éléments de réponse apportés à ces problèmes dans la littérature : comment lutter contre l'appauvrissement du support dû à l'étape de rééchantillonnage en section 2.2.2.1 ; comment choisir la loi d'importance en section 2.2.2.2.

### 2.2.2.1 Appauvrissement du support de trajectoires

Bien que l'utilisation du rééchantillonnage permette de remédier au problème de dégénérescence des poids propre au mécanisme SIS, elle introduit (en plus de détériorer localement la variance de l'estimateur) un autre phénomène de dégénérescence. En effet le fait de sélectionner les trajectoires  $\{x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$  à chaque fois que l'on effectue un rééchantillonnage a pour effet de supprimer entièrement les trajectoires non-sélectionnées et donc d'appauvrir considérablement l'historique de particules. Ainsi, après un certain nombre d'itérations temporelles seule une ou très peu de trajectoires ancêtres restent, c'est-à-dire que pour  $r < t$  suffisamment grand, l'ensemble  $\{x_{t-r}^i\}_{i=1}^N$  ne contient qu'une seule ou très peu de particules différentes. Bien sûr, le rééchantillonnage appauvrit également le support courant à  $t$ .

Ces effets de dégénérescence des trajectoires ont tendance à s'exacerber lorsque les poids intermédiaires issus du mécanisme NIS restent toujours très disparates malgré l'utilisation du rééchantillonnage ; plus précisément lorsque l'étape de pondération produit immédiatement des poids hétérogènes même en l'espace d'une unique itération temporelle, malgré l'utilisation de poids précédents  $w_{t-1}^i$  uniformes. Une telle disparité des poids survient lorsque le terme de correction  $p(x_{0:t}^i|y_{0:t})$  correspondant à la loi cible dans l'expression des poids admet un support sur  $x_{0:t}$  très restreint et/ou très différent du terme  $q_t(x_{0:t}^i)$  correspondant à la loi de proposition. En particulier, le mécanisme de filtrage particulière souffre de ce problème lorsque la vraisemblance  $g_t(\cdot|x_t)$ , comme fonction de  $x_t$ , admet un support très restreint, ou encore dans le cas de systèmes à grande dimension, c'est-à-dire où l'espace d'état des variables cachées  $x_t$  est à grande dimension. Les travaux [95, 94, 8] montrent dans certains cas particuliers que pour garantir de ne pas avoir un seul poids non-nul, le nombre de particules doit croître exponentiellement en fonction de la variance des poids, laquelle est typiquement une fonction linéaire de la dimension de l'espace d'état.

D'autres techniques de rééchantillonnage telles que le rééchantillonnage stratifié, résiduel ou autres alternatives au rééchantillonnage multinomial mentionnées en section 1.4.3, permettent de réduire la variance de l'estimateur SIR en comparaison du rééchantillonnage multinomial. Néanmoins, ces techniques souffrent toujours des mêmes problèmes de dégénérescence que le mécanisme rééchantillonnage multinomial en raison des duplications de trajectoires qu'elles effectuent. Afin de limiter spécifiquement ces problèmes, certaines techniques complémentaires au rééchantillonnage ont été proposées telles que la procédure de "resample-move" [27, 25]. Le resample-move réintroduit de la diversité dans le support courant et/ou passé de particules après une étape de rééchantillonnage par l'intermédiaire d'une procédure MCMC. L'idée, que nous ne détaillerons pas ici, consiste à modifier les particules et/ou trajectoires rééchantillonnées au moyen d'un noyau MCMC ayant pour cible la loi  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ . Les échantillons ainsi créés diversifient alors les particules/trajectoires précédemment dupliquées tout en respectant la même densité cible a posteriori. Un autre exemple de méthode de diversification est le filtrage

particulaire régularisé [68].

### 2.2.2.2 Densité d'importance optimale

En pratique, il reste à choisir la densité d'importance conditionnelle  $q_t(x_t|x_{0:t-1}^i)$ . Une solution répandue consiste à choisir  $q_t(x_t|x_{0:t-1}^i) = f_t(x_t|x_{t-1}^i)$ , car cette densité fait partie du modèle (2.10) et il est généralement facile d'en tirer des échantillons (cette version de l'algorithme est connue sous le nom de filtrage particulière bootstrap). Une autre solution est d'utiliser la loi d'importance conditionnelle dite « optimale »  $q_t(x_t|x_{0:t-1}^i) = p(x_t|x_{t-1}^i, y_t)$  qui prend en compte la nouvelle observation  $y_t$  et pour laquelle les poids deviennent alors proportionnels à  $w_{t-1}^i p(y_t|x_{t-1}^i)$ , c'est-à-dire qu'ils ne dépendent plus des particules tirées  $\{\tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$  [24]. Plus précisément, cette densité ainsi que les poids associés s'expriment comme :

$$q_t(x_t|x_{0:t-1}^i) = p(x_t|x_{t-1}^i, y_t) \propto f_t(x_t|x_{t-1}^i)g_t(y_t|x_t), \quad (2.44)$$

$$w_t \propto w_{t-1}^i p(y_t|x_{t-1}^i) = \int f_t(x_t|x_{t-1}^i)g_t(y_t|x_t)dx_t. \quad (2.45)$$

Cette loi d'importance est dénommée optimale dans le sens où elle minimise la variance des poids d'importance conditionnellement aux trajectoires passées. Par ailleurs, le fait d'utiliser cette loi comme loi de proposition permet d'incorporer l'information issue de la nouvelle observation, en plus de la connaissance de l'état précédent ; à l'opposé, une loi de proposition telle que la loi a priori  $q_t(x_t|x_{0:t-1}^i) = f_t(x_t|x_{t-1}^i)$  tire les nouvelles particules sans tenir compte de la nouvelle observation. Cependant, la densité d'importance optimale n'est généralement pas disponible sous forme analytique, et certaines techniques d'approximation ont été proposées [26] [99] [88] [101].

Concentrons-nous maintenant sur une autre conséquence importante de l'utilisation de cette densité optimale comme loi de proposition d'un filtre particulière. Nous pouvons en effet remarquer que l'étape de pondération peut alors s'effectuer avant l'étape de tirage « intermédiaire », puisque les poids d'importance sur lesquels se base le rééchantillonnage ne seront pas modifiés par ces nouveaux tirages. On peut alors se poser la question de savoir s'il ne serait pas également intéressant d'effectuer l'étape de rééchantillonnage avant l'étape de tirage (et après l'étape de pondération). Intuitivement, une telle procédure présente deux bénéfices potentiels (voir [76] pour une analyse détaillée) :

- effectuer l'étape de tirage après l'étape de rééchantillonnage améliore la diversité du support final puisque toutes les particules finales sont alors nécessairement distinctes ;
- le fait de re-sélectionner les trajectoires disponibles à l'instant  $t - 1$  à la lumière de l'observation  $y_t$ , au moyen de l'étape de rééchantillonnage, peut diminuer le coût de calcul supplémentaire dû à l'étape de tirage. En effet dans le cas usuel où la loi de tirage ne

dépend pas de  $y_t$ , les trajectoires propres à l'instant  $t - 1$  sont rééchantillonnées en tenant compte de l'observation  $y_{t-1}$ , donc leur sélection est potentiellement peu pertinente par rapport à l'observation  $y_t$ . Les nouvelles particules à l'instant  $t$ , tirées conditionnellement à ces trajectoires « mal » sélectionnées, sont donc potentiellement gaspillées car elles sont pondérées en utilisant l'observation  $y_t$ .

Lorsque l'on ne dispose pas de la densité optimale ni de manière analytique ni de manière approchée, on peut se demander s'il reste néanmoins possible d'appliquer cette idée de rééchantillonner les trajectoires en tenant compte de la nouvelle observation, avant de les propager. C'est justement l'objet de la technique de filtrage particulaire auxiliaire (Auxiliary Particle Filter - APF) que nous allons maintenant présenter brièvement.

## 2.3 Filtrage particulaire auxiliaire

### 2.3.1 Principe

L'APF est une méthode alternative de filtrage particulaire permettant de rééchantillonner les trajectoires à la lumière de la nouvelle observation à l'instant  $t$  courant, avant de les propager. Cette méthode se base sur l'utilisation de variables auxiliaires afin d'effectuer les étapes de tirage et pondération en dimension augmentée.

Considérons à nouveau le modèle HMC (2.10) et concentrons-nous sur l'équation de filtrage marginal (2.13). En insérant dans (2.13) l'approximation MC (2.31)

$$\widehat{p}(x_{t-1}|y_{0:t-1}) = \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i \delta_{x_{t-1}^i}(x_{0:t-1}) \quad (2.46)$$

de  $p(x_{t-1}|y_{0:t-1})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{p}(x_t|y_{0:t}) &\propto g_t(y_t|x_t) \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i f_t(x_t|x_{t-1}^i) \\ &\propto \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i p(y_t|x_{t-1}^i) p(x_t|x_{t-1}^i, y_t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

où  $p(x_t|x_{t-1}, y_t)$  et  $p(y_t|x_{t-1})$  correspondent respectivement à la loi d'importance optimale et aux poids optimaux associés. Ces quantités ont été explicitées précédemment en équations (2.44) et (2.45).

Cette approximation  $\widehat{p}(x_t|y_{0:t})$  peut être considérée comme une loi de mélange, et il est donc possible de tirer des échantillons  $x_t^i$  suivant  $\widehat{p}(x_t|y_{0:t})$  par une procédure en deux étapes :

- sélectionner des indices  $l^i$  avec une probabilité proportionnelle aux poids  $w_{t-1}^i p(y_t | x_{t-1}^i)$  ;
- tirer les échantillons  $x_t^i$  d'intérêt suivant  $p(x_t | x_{t-1}^i, y_t)$ .

Ceci revient en fait à obtenir des échantillons en dimension augmentée  $(l^i, x_t^i)$  suivant la loi  $\hat{p}(l, x_t | y_{0:t})$ , en tirant d'abord les indices  $l^i$ , puis les particules  $x_t^i$  conditionnellement à ces indices (toutes ces opérations de tirage restant également conditionnelles aux trajectoires passées  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ ).

Effectuer des tirages exactement suivant  $\hat{p}(x_t | y_{0:t})$  en (2.47) mène à un algorithme SMC particulier, l'APF parfaitement adapté (fully adapted - FA-APF) [78]. Cependant tirer directement suivant  $\hat{p}(x_t | y_{0:t})$  s'avère souvent infaisable car  $p(y_t | x_{t-1}^i)$  (2.45) ou  $p(x_t | x_{t-1}^i, y_t)$  (2.44) ne sont pas calculables. D'autres méthodes ont été proposées pour tirer approximativement suivant la loi marginale a posteriori  $p(x_t | y_{0:t})$  en (2.13) : par exemple les travaux en [98] visent à approcher  $p(y_t | x_{t-1}^i)$  (2.45) à partir de  $N^2$  échantillons  $\{x_{t-1}^{i,j}\}_{j=1}^N \forall i$ , pour ensuite tirer au moyen d'une méthode de rejet suivant  $\hat{p}(x_t | y_{0:t})$  (2.47) en utilisant l'approximation de  $p(y_t | x_{t-1}^i)$ . Ce procédé peut néanmoins présenter des inconvénients calculatoires en raison de l'excès requis en nombre d'échantillons  $x_{t-1}^i$  ainsi que du caractère aléatoire du coût de la méthode de rejet (voir la section 1.2.2 pour une brève présentation de la méthode de rejet).

Une autre approche baptisée l'APF a été proposée [78] afin de cibler la loi de mélange  $\hat{p}(l, x_t | y_{0:t})$  en dimension augmentée. L'APF produit des échantillons suivant une loi de mélange instrumentale

$$\bar{q}(x_t) = \sum_{i=1}^N \mu(x_{0:t-1}^i) \tau(x_t | x_{0:t-1}^i), \quad (2.48)$$

c'est-à-dire en sélectionnant tout d'abord une trajectoire passée au moyen d'un certain indice  $l^i$  avec probabilité  $\mu(x_{0:t-1}^i)$ , puis en étendant la trajectoire suivant la loi  $\tau(x_t | x_{0:t-1}^i)$ . L'APF utilise ensuite la technique NIS mais en dimension augmentée c'est-à-dire en ciblant la loi  $\hat{p}(l, x_t | y_{0:t})$  à partir de la loi de proposition  $\bar{q}(l, x_t)$ , donc en pondérant non pas par rapport à la seule variable  $x_t$  (de loi  $\bar{q}(x_t)$ ), mais par rapport au couple  $(l, x_t)$  (de loi  $\bar{q}(l, x_t) = \mu(x_{0:t-1}^l) \tau(x_t | x_{0:t-1}^l)$ ). L'algorithme résultant est détaillé en algorithme 6.

### 2.3.2 Aspects pratiques

**Remarque 6.** Commentons le choix de la loi instrumentale  $\bar{q}(x_t)$  en (2.48).

- Comparé à l'algorithme SIR en section 2.2 nous pouvons remarquer que du fait de la dimension augmentée, il y a un degré de liberté supplémentaire,  $\mu(x_{0:t-1})$ , appelé le poids de première espèce. Généralement, la finalité des poids de première espèce est d'éviter le gaspillage calculatoire induit par l'étape de rééchantillonnage de l'algorithme SIR en pré-sélectionnant les trajectoires de l'instant  $t-1$  qui sont conformes à la nouvelle observation

**Algorithme 6** L'algorithme APF**Entrées :**  $\mu(x_{0:t-1}), \tau(x_t|x_{0:t-1}), y_t, \{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ **Sorties :**  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$ **pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire****R.**  $l^i \sim \Pr(l|\{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) = \mu(x_{0:t-1}^l)$  ;**S.**  $x_t^i \sim \tau(x_t|x_{0:t-1}^{l^i})$  ;**W.**  $w_t^i \propto \frac{w_{t-1}^{l^i} f_t(x_t^i|x_{t-1}^{l^i}) g_t(y_t|x_t^i)}{\mu(x_{0:t-1}^{l^i}) \tau(x_t^i|x_{0:t-1}^{l^i})}$ ,  $\sum_{i=1}^N w_t^i = 1$  ;Poser  $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^{l^i}, x_t^i)$ **fin pour** $\hat{\Theta}_t^{\text{APF},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(x_t^i)$ 

$y_t$ . D'autre part,  $\tau(x_t|x_{0:t-1})$  est une certaine loi d'importance.

- La conception de cette densité  $\bar{q}(x_t)$  est essentielle et certaines approximations classiques de la vraisemblance prédictive  $p(y_t|x_{t-1})$ , telles que la vraisemblance prise au mode de la loi de transition (c'est-à-dire  $\mu(x_{0:t-1}^i) \propto w_{t-1}^i g_t(y_t|\psi(x_{t-1}^i))$  où  $\psi(x_{t-1}^i)$  est le mode de  $f_t(x_t|x_{t-1}^i)$ ), peuvent nuire en pratique à la performance de l'estimateur. C'est la raison pour laquelle il est souvent suggéré de construire un poids de première espèce le plus proche possible de  $w_{t-1} p(y_t|x_{t-1})$ , bien que ce problème soit généralement difficile [49] [104] à cause du calcul de  $p(y_t|x_{t-1})$ . Il reste par ailleurs à choisir  $\tau(x_t|x_{0:t-1})$  : comme dans l'algorithme SIR, on cherche en règle générale à approcher la loi d'importance optimale  $p(x_t|x_{t-1}, y_t)$ .
- Enfin, [22] identifie des poids de première espèce optimaux, au sens de la minimisation de la variance asymptotique de  $\hat{\Theta}_t^{\text{APF},N}$ , différents des poids de première espèce proportionnels à  $w_{t-1} p(y_t|x_{t-1})$ . Ceci signifie que même lorsqu'on en est capable, tirer directement suivant le mélange (2.47) n'est pas nécessairement la meilleure solution.

**Remarque 7.** Certaines améliorations de la technique APF ont été proposées. En particulier, plutôt que d'utiliser le mécanisme NIS en dimension augmentée, l'APF marginal de [55] vise directement la loi de mélange  $\hat{p}(x_t|y_{0:t})$  en (2.47). Dans ce cas, les poids de deuxième espèce deviennent

$$w_t^i \propto \frac{\sum_{j=1}^N w_{t-1}^j f_t(x_t^i|x_{t-1}^j) p(y_t|x_t^i)}{\sum_{j=1}^N \mu(x_{0:t-1}^j) \tau(x_t^i|x_{0:t-1}^j)}, \quad \sum_{i=1}^N w_t^i = 1, \quad (2.49)$$

et l'on peut montrer que la variance des poids non-normalisés associés à (2.49) est diminuée par rapport à celle des poids de seconde espèce (également non-normalisés) de l'algorithme 6, par le théorème de la variance totale. Cependant, cette réduction de variance reste étroitement liée au choix des poids de première espèce et de la loi d'importance. En particulier, dans le cas où  $\mu(x_{0:t-1}^i) \propto w_{t-1}^i$  et  $\tau(x_t|x_{0:t-1}^i) = f_t(x_t|x_{t-1}^i)$  (c'est-à-dire qu'il est difficile d'approcher  $p(y_t|x_{t-1})$ , et qu'on ne peut effectuer des tirages que suivant  $f_t(x_t|x_{t-1})$ ), il n'y a pas d'amélioration puisque le mécanisme M-APF se réduit alors à l'algorithme 5 de FP SIR.

# Alternatives à l'échantillonnage d'importance

## Contenu

<b>3.1 Échantillonnage d'importance normalisé à double loi de proposition . . .</b>	<b>58</b>
3.1.1 Introduction . . . . .	58
3.1.2 L'estimateur DPIS . . . . .	61
3.1.3 Une solution d'ajustement linéaire des échantillons . . . . .	62
3.1.4 Simulations . . . . .	64
<b>3.2 Échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage indépendant . . .</b>	<b>68</b>
3.2.1 Introduction . . . . .	68
3.2.2 L'estimateur SIR indépendant . . . . .	70
3.2.3 Repondération des échantillons indépendants? . . . . .	74
3.2.4 Simulations . . . . .	75
<b>3.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>81</b>

Les discussions présentées dans ce chapitre concernant le mécanisme SIR statique, rappelé en section 1.3.2 pour ce qui est de la procédure NIS et en section 1.4 pour ce qui est du rééchantillonnage, partent tout d'abord des deux observations suivantes.

- 1) Le mécanisme NIS utilise un unique jeu de tirages pour l'estimation de deux espérances différentes au numérateur et au dénominateur de l'intégrale d'intérêt  $\Theta$  en (1.1) ou (1.25) :

$$\Theta = \frac{\mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q(x)} \right]}{\mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi_u(x)}{q(x)} \right]}. \quad (3.1)$$

Cet estimateur constitue une extension naturelle du mécanisme IS non-normalisé qui n'estime qu'une seule espérance  $\mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} \right]$  à partir d'un unique jeu de tirages, et ainsi n'augmente pas le coût calculatoire associé au nombre de tirages aléatoires. Le mécanisme NIS considère donc ces deux espérances par rapport à la même loi d'importance  $q$ . On peut alors se demander s'il serait pertinent d'utiliser des lois d'importance différentes pour estimer ces quantités, tout en gardant à l'esprit le coût en tirages.

- 2) Le mécanisme SIR, ajoutant une étape de rééchantillonnage à la suite du mécanisme NIS, produit ainsi des échantillons mutuellement dépendants, non-asymptotiquement. Une des

conséquences de ce caractère dépendant est l'appauvrissement du support en tirages, et plus généralement dans le contexte du filtrage particulière l'appauvrissement de l'historique des trajectoires, ce qui s'avère plus ou moins sévèrement néfaste selon le modèle utilisé comme expliqué en section 2.2.2.1. On peut ainsi se poser la question de savoir quel serait l'intérêt d'obtenir de tels échantillons cette fois mutuellement indépendants, non-asymptotiquement, et comment les obtenir.

Ces remarques 1) et 2) constituent de potentielles voies de raffinement du mécanisme SIR. Nous les concrétisons l'une et l'autre séparément, respectivement en sections 3.1 et 3.2.

### 3.1 Échantillonnage d'importance normalisé à double loi de proposition

Rappelons ici l'expression de l'intégrale d'intérêt  $\Theta$  en (1.1) :

$$\Theta = \mathbb{E}_\pi[\varphi(x)] = \int \varphi(x)\pi(x)dx, \quad (3.2)$$

ainsi que l'expression de l'estimateur d'échantillonnage d'importance normalisé classique en (1.26) :

$$\hat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} \varphi(\tilde{x}^i)}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi_u(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)} \varphi(\tilde{x}^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}}, \quad \tilde{x}^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} q(x). \quad (3.3)$$

On se pose ici la question de savoir comment réduire la variance de (3.3) lorsque l'on sait tirer suivant la loi  $q$ . Pour alléger les notations, dans toute cette section, étant donné que nous ne considérons pas d'étape de rééchantillonnage, nous désignerons nos échantillons par  $x^i$  au lieu de  $\tilde{x}^i$ . Cette dernière notation ne sera réintroduite que dans la section 3.2 suivante ainsi que le chapitre 4 suivant, afin de distinguer les tirages intermédiaires des tirages rééchantillonnés.

#### 3.1.1 Introduction

Le problème de réduire la variance d'un estimateur de type Monte Carlo est un sujet largement étudié. Le livre [82, Chapitre 4] détaille certaines méthodes de construction de cet estimateur, par exemple :

- *La technique de simulation par sommes de Riemann.* Elle construit un estimateur de la forme  $\sum_{i=1}^{N-1} \pi(x^i) \varphi(x^i) (x^{i+1} - x^i)$ , où les  $\{x^i\}_{i=1}^N$  sont des échantillons i.i.d. suivant  $\pi$  et doivent être ordonnés ( $x^{i+1} > x^i \forall i \in \{1, \dots, N-1\}$ ).

- *Les méthodes d'accélération.* La technique des variables de contrôle consiste à modifier un estimateur  $\hat{\Theta}$  par l'ajout de nouvelles quantités déjà connues dans son expression, afin de potentiellement réduire sa variance. La technique des variables antithétiques consiste à introduire de la corrélation entre les échantillons utilisés dans l'estimateur, plutôt que de considérer des échantillons i.i.d..
- Un autre exemple est *la technique de Rao-Blackwellization*, qui consiste, en vertu du théorème de la variance totale

$$\text{var}(x) = \text{var}(\mathbb{E}[x|z]) + \mathbb{E}[\text{var}(x|z)], \quad (3.4)$$

à remplacer un estimateur  $\hat{\Theta}(x)$  par l'estimateur  $\mathbb{E}[\hat{\Theta}(x)|z]$  de même espérance et de variance nécessairement plus faible; il faut pour cela pouvoir introduire une v.a.  $z$  telle que l'on sache calculer  $\mathbb{E}[\hat{\Theta}(x)|z]$ . Cette technique peut en particulier être appliquée à l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{NIS}}$  associé à la technique NIS [77].

Cependant, nous nous intéressons ici tout particulièrement aux méthodes d'amélioration de l'échantillonnage dans le mécanisme NIS, basé sur le choix d'une loi d'importance  $q$  appropriée au problème donné et permettant de réduire la variance de l'estimateur. Outre les techniques rappelées en section 1.3.2, d'autres techniques basées sur l'utilisation d'un ensemble de lois d'importance au lieu d'une seule ont été proposées, que l'on peut regrouper sous le nom de méthodes d'échantillonnage d'importance par mélange (Mixture Importance Sampling) [43]. L'idée de base de ces techniques consiste à tirer suivant une certaine loi de mélange c'est-à-dire à tirer suivant plusieurs lois candidates  $q_i$  différentes avec une probabilité  $\alpha_i$ , ou encore à tirer un nombre déterministe prédéfini d'échantillons suivant chaque  $q_i$ , puis à construire un estimateur regroupant tous ces tirages. Par exemple la technique de Multiple Importance Sampling [102] propose un estimateur de la forme

$$\hat{\Theta} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} w_j(x_{i,j}) \frac{\varphi(x_{i,j})\pi(x_{i,j})}{q_j(x_{i,j})} \quad (3.5)$$

où les  $n_j$  correspondent aux nombres d'échantillons tirés suivant chaque loi  $q_j$ , et discute de choix pertinents pour l'expression des  $w_j$ . [45]

Par ailleurs, les techniques connues sous le nom d'échantillonnage préférentiel adaptatif (Adaptive Importance Sampling - AIS) [12] consistent à construire une nouvelle loi d'importance (potentiellement une loi de mélange comme mentionné dans le paragraphe ci-dessus) en utilisant l'information apportée par des tirages suivant une loi d'importance initiale, puis éventuellement à réitérer ce procédé. Un exemple dans le cas du mécanisme IS non-normalisé, appliqué à l'estimation d'événements rares, est la méthode proposée en [87, 57] basée sur la minimisation du critère d'entropie croisée entre la loi d'importance optimale  $q_{\text{opt}}$  (voir la proposition 1) et la loi d'importance  $q$  recherchée, laquelle est restreinte à une certaine famille paramétrée

de densités. Une classe particulière importante d'AIS sont les méthodes de Population Monte Carlo (PMC) [15], dont l'idée de base consiste à modifier itérativement la loi d'importance mélange utilisée  $q(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i q_i(x)$  en jouant sur les paramètres  $\alpha_i$ . Les méthodes PMC produisent ensuite à chaque nouvelle itération des échantillons approximativement tirés suivant la loi cible  $\pi$  au moyen d'une étape de rééchantillonnage (voir section 1.4 pour une présentation du rééchantillonnage). Les travaux en [21, 23] proposent un algorithme PMC à «  $D$ -noyaux », qui part d'une certaine loi de mélange et met à jour ses coefficients  $\alpha_i$  en se basant sur les poids des échantillons obtenus par chaque loi  $q_i$  à chaque itération, dans le but de réduire certaines quantités d'intérêt telles que la divergence de Kullback-Leibler entre la loi de mélange et la loi cible  $\pi$  ou la variance asymptotique de l'estimateur. Enfin, [14] étend plus encore cet algorithme en proposant d'adapter également les variances des lois  $q_i$ , ce qui constitue l'algorithme de PMC mélange (M-PMC - Mixture PMC).

Dans les travaux associés à cette section, nous partons du fait que  $\Theta$  peut se réécrire en fonction d'une unique loi d'importance  $q$  en (1.15) :

$$\Theta = \int \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} q(x) dx = \mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} \right] \quad (3.6)$$

dans le cadre de l'échantillonnage d'importance non-normalisé, ainsi qu'en (1.25) :

$$\Theta = \frac{\int \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q(x)} q(x) dx}{\int \frac{\pi_u(x)}{q(x)} q(x) dx} = \frac{\mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q(x)} \right]}{\mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi_u(x)}{q(x)} \right]} = \frac{\mathbb{E}_q \left[ \varphi(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} \right]}{\mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi(x)}{q(x)} \right]} \quad (3.7)$$

dans le cadre de l'échantillonnage d'importance normalisé. Nous avons vu en section 1.3 que la variance minimale de l'estimateur d'échantillonnage d'importance non-normalisé  $\text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{IS},N}(q_{\text{opt}}^{\text{IS}})) = \sigma_{\text{opt}}^{2,\text{IS}}$  en (1.21) est nulle pour toute fonction  $\varphi$  de signe constant, contrairement au cas normalisé où la variance minimale  $\text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q_{\text{opt}}^{\text{NIS}})) = \sigma_{\text{opt}}^{2,\text{NIS}}$  en (1.36) est strictement positive quelle que soit  $\varphi$  (à l'exception bien sûr du cas dégénéré où  $\varphi(x)$  est constant). Heuristiquement, ceci est dû au fait que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  approche le quotient (3.7), ainsi les deux intégrales à la fois doivent être estimées aussi précisément que possible : la loi  $q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}(x)$  en (1.35) peut être interprétée comme un compromis entre les lois  $\frac{|\varphi|\pi}{\int |\varphi|\pi}$  et  $\pi$ . Ainsi, lorsque  $\varphi$  et  $\pi$  sont quelconques il reste difficile pour un *unique* ensemble de points  $\{x^i\}_{i=1}^N$ , tirés suivant une *unique* loi d'importance donnée, de se trouver à la fois dans les régions où  $|\varphi|\pi$  est grand et dans celles où  $\pi$  est grand (sauf, de nouveau, si  $\varphi$  est une constante).

Nous revisitons donc en section 3.1.2 le mécanisme NIS en considérant deux lois d'importance  $q_1$  et  $q_2$ , ce qui mène à l'estimateur d'Échantillonnage d'Importance à Double loi de Proposition (Double Proposal Importance Sampling - DPIS)  $\widehat{\Theta}^{\text{DPIS}}(q_1, q_2)$ . Cette nouvelle procédure jouit d'une applicabilité tout aussi générale que la technique générique d'échantillonnage d'importance normalisé, mais pose aussi bien sûr les questions du choix des lois  $q_1$  et  $q_2$  ainsi que du

coût en nombre total de tirages. Par conséquent nous nous confrontons ensuite à ces difficultés en section 3.1.3, et discutons de la manière de calibrer ces lois d'importance afin d'améliorer l'estimateur classique  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  en termes de variance asymptotique tout en conservant son attrait calculatoire. Enfin nous validons ces résultats au moyen de simulations numériques en section 3.1.4.

### 3.1.2 L'estimateur DPIS

Dans cette section nous partons à nouveau de l'expression normalisée de l'intégrale d'intérêt  $\Theta = \frac{\int \varphi \pi_u}{\int \pi_u}$ , et nous introduisons deux lois d'importance,  $q_1$  pour le numérateur et  $q_2$  pour le dénominateur. Ainsi  $\Theta$  peut se réécrire comme

$$\Theta = \frac{\int \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q_1(x)} q_1(x) dx}{\int \frac{\pi_u(x)}{q_2(x)} q_2(x) dx} = \frac{\mathbb{E}_{q_1} \left[ \varphi(x) \frac{\pi_u(x)}{q_1(x)} \right]}{\mathbb{E}_{q_2} \left[ \frac{\pi_u(x)}{q_2(x)} \right]}. \quad (3.8)$$

Un estimateur MC de  $\Theta$  basé sur (3.8) peut s'obtenir à partir de  $N$  échantillons i.i.d.  $\{(x_1^i, x_2^i)\}_{i=1}^N$  tirés suivant une loi dont les marginales sont  $q_1$  et  $q_2$ , c'est-à-dire que  $x_1^i \sim q_1$  et  $x_2^i \sim q_2$ . Notons que pour le moment, pour  $i$  donné nous ne faisons aucune hypothèse sur la relation de dépendance entre  $x_1^i$  et  $x_2^i$ . L'estimateur résultant  $\widehat{\Theta}^{\text{DPIS},N}$  s'écrit

$$\widehat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(q_1, q_2) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\pi_u(x_1^i)}{q_1(x_1^i)} \varphi(x_1^i)}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi_u(x_2^j)}{q_2(x_2^j)}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x_1^i)}{q_1(x_1^i)} \varphi(x_1^i)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\pi(x_2^j)}{q_2(x_2^j)}}, \quad (x_1^i, x_2^i) \text{ i.i.d.}, \begin{cases} x_1^i \sim q_1 \\ x_2^i \sim q_2 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Remarquons que  $\widehat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(q_1, q_2)$  coïncide avec  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  lorsque  $q_1 = q_2$  et  $x_1^i = x_2^i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Voyons maintenant ce que cela implique au niveau des propriétés de cet estimateur. La proposition suivante décrit les propriétés statistiques de  $\widehat{\Theta}^{\text{DPIS}}(q_1, q_2)$  et généralise celles rappelées en section 1.3.2 pour l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$ . La preuve, présentée en annexe A.1, reste similaire à celle des résultats présentés en section 1.3.2.

**Proposition 3 (Variance au premier ordre et TCL pour l'estimateur DPIS).** *Soient  $x_1 \sim q_1$  et  $x_2 \sim q_2$ . Une approximation au premier ordre de  $\text{var}(\widehat{\Theta}^{\text{DPIS}}(q_1, q_2))$  s'écrit*

$$N \widehat{\text{var}}(\widehat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(q_1, q_2)) = \text{var} \left( \frac{\pi(x_1) \varphi(x_1)}{q_1(x_1)} \right) + \Theta^2 \text{var} \left( \frac{\pi(x_2)}{q_2(x_2)} \right) - 2 \Theta \text{cov} \left( \frac{\pi(x_1) \varphi(x_1)}{q_1(x_1)}, \frac{\pi(x_2)}{q_2(x_2)} \right). \quad (3.10)$$

De plus, supposons que

$$\sigma^{2,\text{DPIS}}(q_1, q_2) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\pi(x_1)}{q_1(x_1)} \varphi(x_1) - \frac{\pi(x_2)}{q_2(x_2)} \Theta \right)^2 \right] \quad (3.11)$$

est fini. Alors le TCL suivant est vérifié :

$$\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{DPIS},N} - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^{2,\text{DPIS}}(q_1, q_2)) \quad (3.12)$$

et la variance approchée au premier ordre (normalisée)  $N \times \widehat{\text{var}}(\widehat{\Theta}^{\text{DPIS}}(q_1, q_2))$  en (3.10) coïncide avec la variance asymptotique  $\sigma^{2,\text{DPIS}}(q_1, q_2)$  en (3.11).

*Démonstration.* La preuve est donnée en annexe A.1. □

La proposition 3 est vérifiée quelles que soient  $q_1, q_2$ , et quelle que soit la relation de dépendance entre les échantillons  $x_1^i$  tirés suivant  $q_1$  et  $x_2^i$  tirés suivant  $q_2$  pour un même indice  $i$  (en effet rappelons que les couples  $(x_1^i, x_2^i)$  sont i.i.d., ce qui implique que tout échantillon  $x_1^i$  est indépendant de tous les autres échantillons  $x_1^j$  et  $x_2^j$  pour  $j \neq i, j \in \{1, \dots, N\}$ ). Nous voyons donc que les propriétés asymptotiques de l'estimateur DPIS sont conservées par rapport à l'estimateur NIS, tout en admettant un degré de liberté supplémentaire : en effet la présence de deux lois d'importance (potentiellement différentes)  $q_1$  et  $q_2$  introduit plus de flexibilité en comparaison du mécanisme NIS lequel n'utilise qu'une seule loi  $q$ , ce qui nous amène au problème de minimisation du terme de variance (3.10) ou (3.11). Nous remarquons alors qu'à l'opposé du mécanisme NIS classique pour lequel la variance asymptotique minimale (1.36) est strictement positive quel que soit  $\varphi$  sauf dans le cas dégénéré où cette fonction est une constante, ici pour  $\varphi$  de *signe* constant la variance de  $\widehat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(q_1, q_2)$  se réduit à 0 quand on choisit  $q_1 = q_{1,\text{opt}}^{\text{DPIS}} \propto |\varphi| \pi_u$  et  $q_2 = q_{2,\text{opt}}^{\text{DPIS}} \propto \pi_u$  (notons comme mentionné en section 1.3.1.2 que dans le cas non-normalisé, la variance minimale (1.21) de l'estimateur IS classique est également nulle lorsque  $\varphi$  est de signe constant).

### 3.1.3 Une solution d'ajustement linéaire des échantillons

Malheureusement, ni  $q_{1,\text{opt}}^{\text{DPIS}}$  ni  $q_{2,\text{opt}}^{\text{DPIS}}$  ne sont calculables en pratique. Nous nous posons donc maintenant la question du choix de  $q_1$  et  $q_2$ , et plus précisément de la manière de calibrer les tirages  $x_1^i$  et  $x_2^i$ . Certaines techniques d'approximation de telles lois ont été proposées dans le contexte de la technique d'IS non-normalisé et pourraient être adaptées ici [87, 57], mais nous suivons une autre direction. Rappelons qu'un atout calculatoire du mécanisme NIS réside dans le fait qu'il nécessite seulement le tirage de  $N$  échantillons suivant une unique loi  $q$ . Dans cette section nous souhaitons dévier de cette unique loi d'importance  $q = q_1 = q_2$ , mais par souci d'un

compromis entre la diversité des tirages et leur coût nous supposons que  $x_2^i$  reste déterministe sachant  $x_1^i$ .

Considérons donc maintenant une loi d'importance  $q$  et  $N$  échantillons i.i.d.  $\{x^i\}_{i=1}^N$  tirés suivant  $q$ , de la même manière que l'on procéderait pour le mécanisme NIS. Nous souhaitons de plus que la nature de la loi  $q$  soit conservée pour les lois  $q_1$  et  $q_2$ . Notre idée de base consiste à transformer les tirages suivant  $q$  d'une part en tirages  $\{x_1^i\}_{i=1}^N$  suivant  $q_1$  pour approcher le numérateur de (3.8), et d'autre part en tirages  $\{x_2^i\}_{i=1}^N$  suivant  $q_2$  pour approcher le dénominateur de (3.8). Ici nous nous focaliserons sur des transformations linéaires des tirages initiaux  $\{x^i\}_{i=1}^N$  reposant sur des paramètres de contraction  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et de translation  $(\beta_1, \beta_2)$  :

$$x_1^i = \alpha_1 x^i + \beta_1, \quad x_2^i = \alpha_2 x^i + \beta_2. \quad (3.13)$$

Ceci signifie que les ensembles  $\{x_1^i\}_{i=1}^N$  et  $\{x_2^i\}_{i=1}^N$  sont tirés i.i.d. suivant les lois marginales

$$q_1(\cdot) = \frac{1}{|\alpha_1|} q\left(\frac{\cdot - \beta_1}{\alpha_1}\right) \quad (3.14)$$

et

$$q_2(\cdot) = \frac{1}{|\alpha_2|} q\left(\frac{\cdot - \beta_2}{\alpha_2}\right) \quad (3.15)$$

respectivement, mais sont dépendants de manière déterministe. La relation linéaire entre  $x_1^i$  et  $x_2^i$  pour tout  $i$  s'écrit donc  $x_2^i = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(x_1^i - \beta_1) + \beta_2$ .

Intéressons-nous maintenant au choix du jeu de paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ . Nous cherchons ici à minimiser par rapport à  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$  la variance asymptotique  $\sigma^{2, \text{DPIS}}(q_1, q_2)$  en (3.11) de l'estimateur DPIS. Remarquons tout d'abord que notre estimateur DPIS se réduit ici à l'estimateur NIS lorsque  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (1, 1, 0, 0)$ . Notre but est donc d'obtenir un jeu de paramètres « optimal »  $(\alpha_{1, \text{opt}}, \alpha_{2, \text{opt}}, \beta_{1, \text{opt}}, \beta_{2, \text{opt}})$ , différent de  $(1, 1, 0, 0)$ , tel que  $\sigma^{2, \text{DPIS}}(q_1, q_2)$  soit plus petit que la variance asymptotique  $\sigma^{2, \text{NIS}}(q)$  de l'estimateur NIS. Sous la contrainte de transformation linéaire des échantillons, (3.10) peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned} N \widehat{\text{var}}(\widehat{\Theta}^{\text{DPIS}})(q_1, q_2) &= \sigma^{2, \text{DPIS}}(q_1, q_2) \\ &= \frac{1}{C^2} \mathbb{E}_q \left[ \frac{1}{q^2(x)} (|\alpha_1| \pi_u(\alpha_1 x + \beta_1) \varphi(\alpha_1 x + \beta_1) - |\alpha_2| \pi_u(\alpha_2 x + \beta_2) \Theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $C = \int \pi_u(x) dx$ . Si l'on minimise cette expression directement (et qu'un minimum global est atteint) l'estimateur résultant  $\widehat{\Theta}^{\text{DPIS}, N}$  a nécessairement une variance plus petite ou égale à celle de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$ . Notons que ceci n'est valable qu'asymptotiquement parlant, c'est-à-dire sous réserve que  $N$  soit suffisamment grand pour satisfaire l'approximation au premier ordre (3.10).

Cependant l'équation (3.16) ne peut pas être calculée analytiquement car deux intégrales sont inconnues : le facteur  $\Theta$  ainsi que l'espérance suivant  $q$ . On peut néanmoins approcher ces deux intégrales via les échantillons disponibles  $\{x^i\}_{i=1}^N$  tirés initialement suivant  $q$  :  $\Theta$  peut être estimé par  $\bar{\Theta} = \hat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  et l'espérance suivant  $q$  par un estimateur MC brut. Un estimateur de (3.16) s'écrit alors

$$\tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(q_1, q_2) = \frac{1}{C^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{q^2(x^i)} \times (|\alpha_1| \pi_u(\alpha_1 x^i + \beta_1) \varphi(\alpha_1 x^i + \beta_1) - |\alpha_2| \pi_u(\alpha_2 x^i + \beta_2) \bar{\Theta})^2. \quad (3.17)$$

Afin de minimiser cette variance approchée, nous choisissons ici une méthode d'optimisation de sous-gradient (en utilisant une valeur arbitraire nulle pour les dérivées des fonctions valeur absolue autour de 0), incorporant un algorithme de recherche linéaire avec retour sur trace ("backtracking line search") [96, §2.5.4] pour déterminer le pas  $L$  de mise à jour des paramètres. Nous effectuons par ailleurs cette optimisation  $M$  fois avec différentes initialisations aléatoires des paramètres sur une certaine région afin de limiter les problèmes de minima locaux, et pour chaque optimisation nous utilisons comme critère d'arrêt un seuil  $S$  sur la norme du gradient de la variance approchée,  $\|\nabla \tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}\|$ . En outre, afin d'améliorer progressivement l'approximation globale (3.17) nous mettons à jour notre estimation initiale  $\bar{\Theta}$  de  $\Theta$  à chaque itération de la méthode de sous-gradient en utilisant un estimateur DPIS avec des tirages obtenus suivant le jeu de paramètres courant. L'algorithme 7 ci-dessous résume cette procédure (pour alléger les notations nous désignons le jeu de paramètres par  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ ).

### 3.1.4 Simulations

Dans cette section, partant d'une loi d'importance  $q$  nous comparons l'estimateur NIS classique  $\hat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)$  basé sur  $N$  tirages  $\{x^i\}_{i=1}^N$  suivant  $q$  à notre estimateur DPIS  $\hat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(q_1, q_2)$  pour lequel les tirages originaux  $x^i$  sont ajustés linéairement par minimisation de (3.16) ou (3.17). Les estimateurs sont comparés selon un critère de Racine carrée d'Erreur Quadratique Moyenne (Root Mean Square Error - RMSE) estimé ici à partir de  $P = 1000$  itérations MC,

$$\text{RMSE}(\hat{\Theta}) = \left( \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \|\hat{\Theta}^{(p)} - \tilde{\Theta}\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.18)$$

avec en section 3.1.4.1  $\tilde{\Theta} = \Theta$  car le modèle est suffisamment simple pour que l'intégrale d'intérêt soit elle-même calculable analytiquement, et en section 3.1.4.2  $\tilde{\Theta}$  égal à un estimateur NIS classique utilisant  $10^7$  échantillons.

---

**Algorithme 7** L'algorithme DPIS avec ajustement linéaire

---

**Entrées :** La densité d'importance  $q$ ;**Sorties :** Le jeu de paramètres optimisés  $P_{\text{opt}}$  et l'estimateur DPIS associé  $\hat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(P_{\text{opt}})$ ;*IS normalisé classique***pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire**Tirage des échantillons intermédiaires :  $\tilde{x}^i \sim q(x)$ ;Pondération des échantillons intermédiaires :  $w^i \propto \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)}$ ,  $\sum_{i=1}^N w^i = 1$ ;**fin pour**Calcul de l'estimateur NIS :  $\hat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q) = \sum_{i=1}^N w^i \varphi(\tilde{x}^i)$ ;*Ajustement linéaire pour l'estimateur DPIS*Initialiser  $P_* = (1, 1, 0, 0)$ ;**pour**  $1 \leq m \leq M$  **faire**Initialiser aléatoirement  $P^m$ ;Initialiser  $\bar{\Theta} = \hat{\Theta}^{\text{NIS},N}(q)$ ;**tant que**  $\|\nabla \tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(P^m)\| > S$  **faire**Obtenir le pas  $L$  par la méthode de recherche linéaire;Mettre à jour les paramètres  $P^m = P^m - L \times \nabla \tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(P^m)$ ;Mettre à jour  $\bar{\Theta} = \hat{\Theta}^{\text{DPIS},N}(P^m)$ ;**fin tant que****si**  $\tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(P^m) < \tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(P_*)$  **alors**Poser  $P_* = P^m$ ;**fin si****fin pour**

---

### 3.1.4.1 Exemple jouet

Commençons par calculer un estimateur MC de  $\Theta$  en (3.8) où  $\varphi(x) = x^2$  et  $\pi(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1)$ . Pour la loi d'importance initiale nous choisissons  $q = \pi$ . Ici,  $\tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(q_1, q_2)$  peut être calculé analytiquement comme fonction de  $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$  car  $\Theta = 1$  est connu et les intégrales sont également calculables analytiquement. Plus précisément,  $\tilde{\sigma}^{2,\text{DPIS}}(q_1, q_2)$  devient

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_1^2}{\sqrt{2\alpha_1^2 - 1}} \exp\left(\frac{\beta_1^2}{2\alpha_1^2 - 1}\right) \left[ \frac{\beta_1^4}{(2\alpha_1^2 - 1)^4} + \frac{6\beta_1^2\alpha_1^2}{(2\alpha_1^2 - 1)^3} + \frac{3\alpha_1^4}{(2\alpha_1^2 - 1)^2} \right] \\
& + \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{2\alpha_2^2 - 1}} \exp\left(\frac{\beta_2^2}{2\alpha_2^2 - 1}\right) \\
& - \frac{2|\alpha_1||\alpha_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1}} \exp\left(\frac{\beta_1^2(1 - \alpha_2^2) + \beta_2^2(1 - \alpha_1^2) + 2\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1)}\right) \\
& \times \left[ \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1} + \left(\frac{\beta_2\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\alpha_2^2 + \beta_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1}\right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Les paramètres optimaux sont  $(\alpha_{1,\text{opt}} \approx 2.2, \alpha_{2,\text{opt}} \approx 1.25, \beta_{1,\text{opt}} \approx 0, \beta_{2,\text{opt}} \approx 0)$  ce qui signifie que seule la variance de  $q$  est ajustée.

Nous calculons deux estimateurs basés sur une double loi d'importance : le premier utilise les paramètres optimaux ci-dessus tandis que le second, obtenu par l'algorithme 7, utilise les paramètres  $(\hat{\alpha}_{1,\text{opt}}, \hat{\alpha}_{2,\text{opt}}, \hat{\beta}_{1,\text{opt}}, \hat{\beta}_{2,\text{opt}})$  obtenus à partir d'une minimisation de la variance approchée (3.17) (les paramètres sont optimisés à nouveau pour chaque itération MC). Nous comparons ces deux estimateurs DPIS avec un estimateur NIS optimisé en utilisant la même méthode (c'est-à-dire que seule une loi  $q$  est optimisée, ce qui correspond au cas  $\alpha_2 = \alpha_1$  et  $\beta_2 = \beta_1$ ), puis enfin avec un estimateur NIS classique utilisant la densité  $q$ .

La figure 3.1 montre les RMSE des quatre estimateurs en fonction du nombre de tirages  $N$ . Nous observons tout d'abord que notre minimisation de la variance au premier ordre en (3.19) produit des tirages contractés et translatés  $\{x_1^i, x_2^i\}_{i=1}^N$  mieux adaptés à l'estimation de  $\Theta$  que les échantillons originaux  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  tirés suivant la loi d'importance  $q$ , ou encore que les échantillons  $\{x^i\}_{i=1}^N$  ajustés à partir de  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  simultanément au numérateur et au dénominateur. Autrement dit, l'ajustement de deux densités, l'une pour le numérateur et l'autre pour le dénominateur, est plus performant que l'ajustement d'une unique densité pour les deux à la fois. Ensuite, même lorsque les paramètres  $(\hat{\alpha}_{1,\text{opt}}, \hat{\alpha}_{2,\text{opt}}, \hat{\beta}_{1,\text{opt}}, \hat{\beta}_{2,\text{opt}})$  sont déduits de l'optimisation d'une approximation MC de la variance au premier ordre (voir (3.17)), l'estimateur correspondant donne presque la même performance que celui utilisant les paramètres optimaux. Ceci montre que notre technique a le potentiel de rester pertinente dans des modèles où les intégrales ne sont pas calculables analytiquement. Afin d'illustrer ce point, la section 3.1.4.2 présente un exemple d'une telle situation.

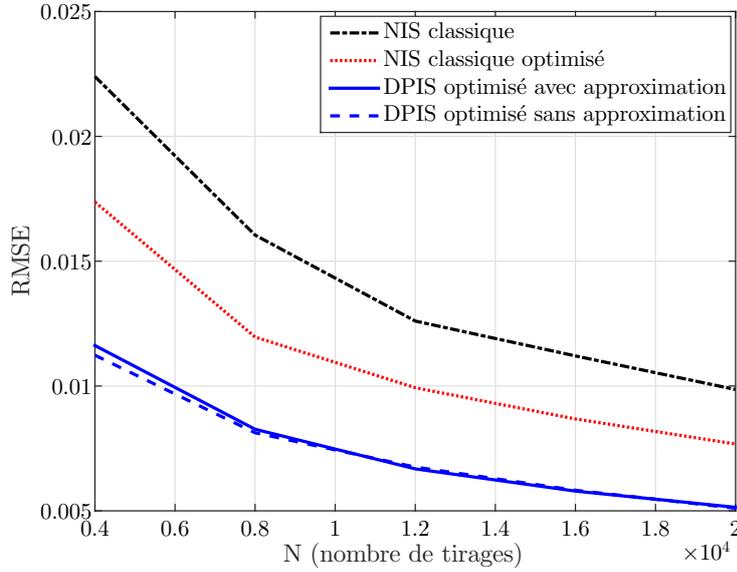


FIGURE 3.1 – Modèle gaussien non-linéaire,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $\pi(x) = q(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1)$ . Simulation avec 1000 itérations MC présentant des estimateurs DPIS utilisant des intégrales soit exactes soit approchées dans l'expression de la variance au premier ordre pour sa minimisation, et les comparant avec les estimateurs NIS classique et NIS classique optimisé. L'optimisation comprenant deux lois d'importance mène à un estimateur plus performant, et par ailleurs cette optimisation reste pertinente même lorsqu'effectuée à partir d'une expression approchée de la variance.

### 3.1.4.2 Cas bayésien, non-linéaire et gaussien

Nous considérons maintenant un problème bayésien où  $x$  est caché,  $y$  est observé et la loi cible s'écrit  $\pi(x) = p(x|y) \propto p(x)p(y|x)$  avec  $p(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1)$ ,  $p(y|x) = \mathcal{N}(y; x^2, 1)$ , et nous cherchons à estimer le moment de  $\varphi(x) = \mathcal{N}(x; 3, 1)$ . Dans ce contexte, afin de pouvoir calculer des RMSE nous prenons comme valeur de référence un estimateur NIS classique utilisant  $10^7$  échantillons. La figure 3.2 présente l'estimateur NIS classique basé sur des tirages i.i.d. suivant  $q$ , l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{DPIS}, N}$  où les paramètres ont été estimés via la méthode d'optimisation décrite en section (3.1.3), ainsi qu'à nouveau un estimateur IS optimisé sur seulement deux paramètres ( $\alpha_2 = \alpha_1$  et  $\beta_2 = \beta_1$ ). Les paramètres moyennés sur 1000 réalisations obtenus dans ce scénario sont ( $\hat{\alpha}_{1, \text{opt}} \approx 1.25$ ,  $\hat{\alpha}_{2, \text{opt}} \approx 2.45$ ,  $\hat{\beta}_{1, \text{opt}} \approx 1$ ,  $\hat{\beta}_{2, \text{opt}} \approx -0.1$ ). Comme cette figure l'illustre, la minimisation de la variance approchée basée sur deux lois d'importance mène à un estimateur plus performant que lorsqu'elle est basée sur une seule loi d'importance.

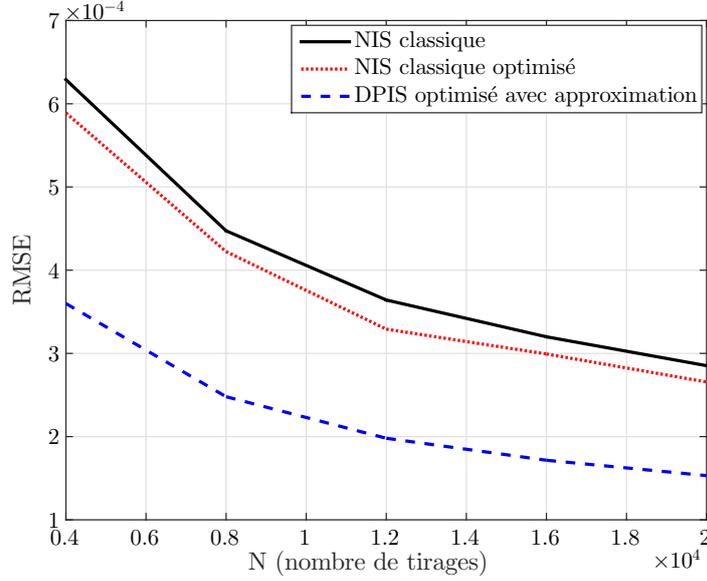


FIGURE 3.2 – Modèle bayésien non-linéaire gaussien,  $\varphi(x) = \mathcal{N}(x; 3, 1)$ ,  $p(x) = q(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1)$ ,  $p(y|x) = \mathcal{N}(y; x^2, 1)$ . Simulation avec 1000 itérations MC comparant l'estimateur DPIS utilisant des intégrales approchées de la variance avec les estimateurs NIS classique et NIS classique optimisé. L'optimisation comprenant deux lois d'importance plutôt qu'une seule mène à un estimateur plus performant.

## 3.2 Échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage indépendant

### 3.2.1 Introduction

En section 3.1 nous nous sommes intéressés aux deux premières étapes du mécanisme SIR, l'échantillonnage et la pondération, précédant l'étape de rééchantillonnage. Maintenant nous revisitons cette étape de rééchantillonnage.

Commençons par rappeler les principes essentiels de ce mécanisme SIR, précédemment détaillé en section 1.4. Étant donné un ensemble de  $N$  points pondérés  $\{(w^i, \tilde{x}^i)\}_{i=1}^N$  issu du mécanisme NIS, c'est-à-dire où  $\tilde{x}^i \sim q$  avec  $q$  une certaine loi d'importance et  $w^i \propto \frac{p(\tilde{x}^i)}{q(\tilde{x}^i)}$ , le rééchantillonnage consiste à effectuer  $M_N$  tirages suivant la loi discrète :

$$\hat{\pi}^{\text{NIS}, N}(x) = \sum_{i=1}^N w^i \delta_{\tilde{x}^i}(x). \quad (3.20)$$

Rappelons qu'une méthode permettant d'obtenir un échantillon  $x$  suivant  $\hat{\pi}^{\text{NIS}, N}$  consiste tout

d'abord à tirer un indice  $l$  suivant la loi discrète  $\Pr(l|\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N) = w^l$ , puis à poser  $x = \tilde{x}^l$  parmi la collection  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ . Le rééchantillonnage produit ainsi des échantillons  $\{x^i\}_{i=1}^N$  tirés approximativement suivant  $\pi$  (voir l'algorithme 1) et l'estimateur de  $\Theta$  correspondant s'écrit :

$$\widehat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} = \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \varphi(x^i). \quad (3.21)$$

Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la loi de ces tirages  $x^i$ . Son expression résulte de la succession de trois étapes : le tirage des échantillons intermédiaires  $\tilde{x}^i$  suivant la loi d'importance  $q$ , puis leur pondération par rapport à la loi cible  $\pi$  suivant le mécanisme NIS, et enfin l'étape de rééchantillonnage c'est-à-dire de tirage suivant  $\widehat{\pi}^{\text{NIS}, N}$  conditionnellement à l'ensemble  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ . Plus spécifiquement, nous partons de l'observation suivante sur le comportement non-asymptotique des échantillons  $x^i$  : bien que ces échantillons soient i.i.d. suivant  $\widehat{\pi}^{\text{NIS}, N}$ , conditionnellement aux tirages intermédiaires  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ , lorsque l'on enlève ce conditionnement ces échantillons deviennent dépendants et marginalement distribués suivant une certaine densité composée  $\tilde{q}^N = \psi(\pi, q, N)$  qui prend en compte les effets des deux lois  $\pi$  et  $q$ . Ce caractère mutuellement dépendant (en effet plusieurs échantillons peuvent prendre la même valeur alors que  $\tilde{q}^N$  est une densité par rapport à la mesure de Lebesgue) des tirages rééchantillonnés est à la base des problèmes d'appauvrissement des trajectoires rencontrés dans le cadre du filtrage particulière, comme mentionné en section 2.2.2.1. Partant de ce constat, nous cherchons alors à construire une procédure conservant les mêmes avantages que le rééchantillonnage multinomial classique, en particulier permettant de remédier au problème de dégénérescence des poids dans le cadre de l'algorithme d'échantillonnage d'importance séquentiel comme vu en section 2.2.1, tout en produisant des tirages qui soient i.i.d. même non-conditionnellement aux tirages intermédiaires afin d'éviter l'appauvrissement du support final.

Nous commençons donc en section 3.2.2 par expliciter la loi non-conditionnelle de ces tirages  $x^i$ , puis proposons en section 3.2.2.1 de construire un estimateur basé sur de nouveaux tirages indépendants suivant cette même loi non-conditionnelle. Nous analysons cet estimateur de manière théorique en termes de réduction de variance et de comportement asymptotique, puis concevons en section 3.2.2.2 un mécanisme permettant d'obtenir de tels tirages indépendants ; ce mécanisme nécessite cependant un coût en tirages intermédiaires plus grand que le mécanisme SIR usuel. Nous discutons ensuite de l'utilité de repondérer ces tirages rééchantillonnés indépendants à la manière de l'échantillonnage d'importance, puis montrons comment effectuer cette pondération de manière approchée en recyclant le surplus en tirages intermédiaires. Nous terminons en section 3.2.4 par des simulations illustrant les nouveaux estimateurs présentés.

### 3.2.2 L'estimateur SIR indépendant

En premier lieu nous commençons donc par expliciter la loi non-conditionnelle des tirages rééchantillonnés obtenus par le mécanisme SIR usuel.

**Proposition 4.** Soient  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  les tirages intermédiaires,  $w^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N) = \frac{\pi(\tilde{x}^i)}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}}$  le poids associé à  $\tilde{x}^i$ , et  $\{x^l\}_{l=1}^{M_N}$  les échantillons obtenus par rééchantillonnage multinomial, c'est-à-dire par le mécanisme SIR classique de l'algorithme 1. Alors chacun des points rééchantillonnés  $x^l$ ,  $1 \leq l \leq M_N$ , est distribué marginalement suivant une loi  $\tilde{q}^N$ , avec

$$\tilde{q}^N(x) = Nh^N(x)q(x), \quad (3.22)$$

$$h^N(x) = \int \int \frac{\frac{\pi(x)}{q(x)}}{\frac{\pi(x)}{q(x)} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\pi(\tilde{x}^j)}{q(\tilde{x}^j)}} \prod_{j=1}^{N-1} q(\tilde{x}^j) d\tilde{x}^j. \quad (3.23)$$

*Démonstration.* La preuve est donnée en annexe A.2. □

Ainsi pour un nombre de tirages fixé  $N$ , le mécanisme SIR produit des échantillons dépendants  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  distribués selon  $\tilde{q}^N$  (ces échantillons sont indépendants sachant la collection intermédiaire  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$  mais deviennent dépendants lorsque ce conditionnement est enlevé). En pratique, cette dépendance conduit à un rétrécissement du support puisque, par construction, un tirage intermédiaire  $\tilde{x}^i$  peut être rééchantillonné plusieurs fois, et  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  est donc un sous-ensemble de  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N$ . Considérons l'exemple suivant où le nombre  $M_N$  de tirages rééchantillonnés est égal au nombre  $N$  de tirages échantillonnés initialement. Si nous supposons que  $w^j$ , le poids d'importance associé au  $j$ -ème tirage pour un certain  $j$ , est égal à 1 et que  $w^i = 0$  pour  $i \neq j$ , alors  $x^i = \tilde{x}^j$  pour tout  $i$ . A contrario, si  $w^i = 1/N$  pour tout  $i$ , alors le nombre moyen d'échantillons  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  différents s'élève environ à  $2N/3$  [76]. Toutefois rappelons à nouveau que l'étape de rééchantillonnage reste utile dans une configuration dynamique (voir section 2.2) : bien qu'elle introduise localement un appauvrissement de la diversité, cette étape est essentielle pour permettre de recréer de la diversité lors des tirages à l'itération temporelle suivante.

Remarquons que les deux facteurs dans (3.22) reflètent les effets des étapes d'échantillonnage et de rééchantillonnage (voir l'algorithme 1) : la loi  $q$  est utilisée lors de l'étape de tirage, tandis que  $h^N(x)$ , pouvant être interprété comme l'espérance conditionnelle d'un poids d'importance normalisé lorsque sa particule associée est  $x$ , résulte des étapes de pondération et rééchantillonnage. Ainsi les particules tirées suivant  $\tilde{q}^N$  ont de fortes chances de se trouver dans des régions où  $q$  et  $h^N$  sont élevés ; par conséquent on peut s'attendre à ce que le rapport  $\pi/q$  soit également grand dans ces régions, étant donné l'expression de  $h^N$  en (3.23). Maintenant, notre objectif est de proposer un mécanisme alternatif qui, dans un contexte séquentiel tel que le filtrage particulaire, produira le même effet positif que le mécanisme SIR classique (c'est-à-dire de lutter contre

la dégénérescence des poids en éliminant les échantillons de poids d'importance faibles), tout en garantissant la diversité du support final. Nous observons ici qu'une telle diversité de support est garantie si l'on tire des échantillons *indépendamment* selon la loi continue  $\tilde{q}^N$ . Nous étudions donc dans un premier temps les avantages potentiels d'un tel mécanisme de tirage indépendant en section 3.2.2.1 puis discutons de son implémentation en section 3.2.2.2.

### 3.2.2.1 Propriétés statistiques

Supposons maintenant que nous avons à notre disposition une collection de  $M_N$  échantillons  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  i.i.d. suivant la loi  $\tilde{q}^N$  définie en (3.22) et (3.23). Avant d'aborder l'obtention d'une telle collection en pratique (voir section 3.2.2.2), nous étudions ses propriétés en considérant l'estimateur brut de  $\Theta$  reposant sur ces  $M_N$  tirages i.i.d. :

$$\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N} = \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \varphi(x^i), \quad x^i \text{ i.i.d. } \tilde{q}^N \quad (3.24)$$

(I dans la notation I-SIR signifie "*independent*"). Notre objectif est de comparer l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  avec l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$ , et plus généralement les trois estimateurs  $\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$ ,  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  et  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  entre eux. Nous avons tout d'abord le résultat suivant.

**Proposition 5.** *Considérons les trois estimateurs  $\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$ ,  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  and  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  définis en (1.26), (1.43) et (3.24) respectivement. Alors*

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}], \quad (3.25)$$

$$\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}) = \text{var}(\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}) + \frac{M_N - 1}{M_N} \text{var}(\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}). \quad (3.26)$$

*Démonstration.* La preuve est donnée en annexe. □

L'équation (3.26) garantit qu'un estimateur construit à partir de tirages indépendants suivant  $\tilde{q}^N$  est plus performant que l'estimateur SIR classique; le gain engendré par l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  en comparaison de l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  dépend du terme de variance  $\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N})$ . D'un autre côté, on sait comme vu en équation (1.48) que

$$\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}) = \text{var}(\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}) + \mathbb{E}[\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} | \{\tilde{x}^i\}_{i=1}^N)]; \quad (3.27)$$

donc les estimateurs  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  et  $\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$  sont tous deux préférables à l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$ .

En revanche, comparer directement la variance de l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$  à celle de l'estimateur

$\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  est plus difficile, car nous devons alors comparer  $\frac{1}{M_N} \text{var}_{\tilde{q}^N}(\varphi(x))$  à

$$\text{var} \left( \sum_{i=1}^N w^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N) \varphi(\tilde{x}^i) \right) \quad (3.28)$$

où  $\tilde{x}^i \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} q$  et  $w^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N)$  est défini dans la proposition 4. Cependant, nous avons le TCL suivant :

**Théorème 5 (TCL pour l'estimateur SIR indépendant).** *Considérons l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  défini en (3.24), où  $M_N$  est une suite non-décroissante avec  $M_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$  et  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{M_N} = \alpha > 0$  (éventuellement  $\infty$ ). Nous supposons également que  $\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N w^i \varphi^2(x^i) \right]$  est fini. Alors  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  satisfait*

$$\sqrt{M_N} (\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N} - \Theta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \text{var}_{\pi}(\varphi(x))). \quad (3.29)$$

*Démonstration.* La preuve est donnée en annexe A.4. □

Commentons ce résultat. Premièrement, le théorème 5 permet à nouveau d'étudier  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  par rapport à  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$ . En effet la comparaison du résultat (1.47) (voir le théorème 4 en section 1.4.2 concernant l'estimateur SIR classique) avec le résultat (3.29) corrobore l'équation (3.26), puisque la variance asymptotique de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  est toujours plus faible que celle de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$ . Notons également que dans le cas où les tirages sont indépendants la variance asymptotique de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  ne dépend plus de  $\alpha > 0$ .

Ensuite, le théorème 5 fournit aussi des éléments pour comparer les estimateurs  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  et  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$ . Soit  $M_N = N$ , pour simplifier les calculs. Alors la comparaison entre les deux estimateurs revient à celle des variances asymptotiques en (1.31) et (3.29) :

$$\sigma_{\infty}^{2, \text{NIS}}(q) = \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right], \quad (3.30)$$

$$\sigma_{\infty}^{2, \text{I-SIR}} = \text{var}_{\pi}(\varphi(x)). \quad (3.31)$$

Pour une loi cible  $\pi$  et une fonction  $\varphi$  données, bien que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, N}$  ait été obtenu à partir d'échantillons tirés suivant la loi d'importance  $q$ ,  $\sigma_{\infty}^{2, \text{I-SIR}}$  ne dépend plus de  $q$ , contrairement à  $\sigma_{\infty}^{2, \text{NIS}}(q)$ . Maintenant, comme vu en section 1.3.2,  $\sigma_{\infty}^{2, \text{NIS}}(q)$  est minimum lorsque  $q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}(x) \propto \pi(x) |\varphi(x) - \Theta|$ ; pour ce  $q_{\text{opt}}^{\text{NIS}}$ ,  $\sigma_{\infty, \text{opt}}^{2, \text{NIS}} = (\int |\varphi(x) - \Theta| \pi(x) dx)^2 \leq \text{var}_{\pi}(\varphi(x))$ , donc l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS}, N}(q_{\text{opt}}^{\text{NIS}})$  est plus performant que l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, N}$  pour de grandes valeurs de  $N$ .

Cependant remarquons que pour d'autres lois d'importance,  $\sigma_\infty^{2,I-SIR}$  peut devenir plus petit que  $\sigma_\infty^{2,NIS}(q)$ , par opposition avec les techniques de rééchantillonnage traditionnelles (par exemple le rééchantillonnage multinomial, ou encore les techniques mentionnées en section 1.4.3 telles que le rééchantillonnage résiduel) lesquelles introduisent *toujours* une variance supplémentaire. Notons également que les variances asymptotiques en (3.30) et (3.31) dépendent de la fonction  $\varphi$ ; on peut constater que pour de grandes valeurs de  $N$ ,  $\widehat{\Theta}^{I-SIR,N}$  a le même comportement qu'un estimateur MC brut (voir section 1.2) construit à partir d'échantillons suivant  $\pi$  et se trouve donc être adapté à une vaste classe de fonctions  $\varphi$ .

Il nous reste maintenant à décrire une procédure permettant d'obtenir des échantillons i.i.d. suivant  $\tilde{q}^N$ , ce que nous allons aborder en section suivante.

### 3.2.2.2 Procédure de tirage

Une solution simple pour créer des échantillons i.i.d. suivant  $\tilde{q}^N$  consiste à effectuer  $N$  tirages intermédiaires  $\{\tilde{x}^{1,j}\}_{j=1}^N$  et en extraire un seul, dénoté  $x^1$ , par rééchantillonnage; puis effectuer  $N$  nouveaux tirages intermédiaires  $\{\tilde{x}^{2,j}\}_{j=1}^N$  et en extraire de nouveau un seul d'entre eux,  $x^2$ , par rééchantillonnage; et ainsi de suite jusqu'à obtenir  $M^N$  points rééchantillonnés  $\{x^i\}_{i=1}^{M^N}$ . Par construction, les échantillons  $x^i$  sont alors indépendants et tirés selon  $\tilde{q}^N$ . L'algorithme correspondant est résumé ci-après en algorithme 8.

---

#### Algorithme 8 L'algorithme SIR indépendant

---

**Entrées :** une loi d'importance  $q$ ,  $N$  et  $M_N$   
**Sorties :**  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  i.i.d.  $\tilde{q}^N$   
**pour**  $1 \leq i \leq M_N$  **faire**  
  **pour**  $1 \leq j \leq N$  **faire**  
    **S.**  $\tilde{x}^{i,j} \sim q$ ;  
    **W.**  $w^{i,j} \propto p(\tilde{x}^{i,j})/q(\tilde{x}^{i,j})$ ,  $\sum_{j=1}^N w^{i,j} = 1$ ;  
  **fin pour**  
   $l^i \sim \text{Pr}(l | \{\tilde{x}^{i,j}\}_{j=1}^N) = w^{i,l}$ ;  
  Poser  $x^i = \tilde{x}^{i,l^i}$ .  
**fin pour**

---

Commentons maintenant le coût calculatoire associé aux procédures SIR indépendant et SIR classique. Comparé à la procédure SIR classique basée sur  $N$  tirages intermédiaires à partir desquels sont déduits les  $M_N$  échantillons finaux, cet algorithme de SIR indépendant s'appuie sur une étape de tirage de  $N \times M_N$  échantillons intermédiaires  $\tilde{x}^{i,j}$  puis  $M_N$  étapes de rééchantillonnage indépendantes. Par conséquent, pour un budget en étapes de tirage et retraitage donné, la procédure indépendante doit être comparée à une procédure SIR classique dans laquelle on tire  $N \times M_N$  points pour en rééchantillonner ensuite  $M_N$  parmi eux. Dans ce dernier cas, on obtient  $M_N$  tirages dépendants selon  $\tilde{q}^{N \times M_N}$ .

Considérons maintenant les théorèmes 4 et 5 concernant les comportements asymptotiques des estimateurs SIR et I-SIR respectivement. Si l'on pose  $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N \times M_N}{M_N} = \infty$  dans le théorème 4, nous voyons alors que les deux estimateurs  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}$  et  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  avec  $N \times M_N$  tirages intermédiaires ont le même comportement asymptotique, avec une vitesse de convergence en  $\sqrt{M_N}$  et une variance asymptotique  $\text{var}_\pi(\varphi(x))$ . Cependant la procédure indépendante peut facilement être parallélisée car les étapes de rééchantillonnage sont indépendantes par nature contrairement à la procédure SIR où tous les rééchantillonnages sont effectués directement à partir de l'ensemble des  $N \times M_N$  tirages intermédiaires. D'autre part, la comparaison des deux estimateurs (toujours avec le même coût global en tirages) dans le cas où le nombre d'échantillons est le même avant et après l'étape de rééchantillonnage pour l'algorithme SIR dépendant, ce qui correspondrait à  $\frac{N \times M_N + M_N}{2}$  échantillons, est plus difficile. En effet dans ce cas,  $\alpha = 1$  dans les théorèmes 4 et 5, et la vitesse de convergence est certes en  $\sqrt{\frac{N \times M_N + M_N}{2}}$  donc meilleure que  $\sqrt{M_N}$ , mais néanmoins la variance asymptotique présente cette fois un terme additionnel correspondant à  $\sigma_\infty^{2, \text{NIS}}(q) = \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta)^2 \right]$ .

Dans un dernier temps, nous abordons la question des poids finaux à attribuer aux particules rééchantillonnées obtenues via la procédure I-SIR.

### 3.2.3 Repondération des échantillons indépendants ?

Dans la procédure SIR, chaque échantillon final est pondéré par  $1/M_N$ . Du point de vue de la technique NIS, cette pondération peut s'interpréter par le fait que les échantillons finaux deviennent distribués suivant la densité cible  $\pi$  et indépendants lorsque  $N \rightarrow \infty$  (voir section 1.4.2, plus précisément les équations (1.41) et (1.42)). En outre, les résultats de convergence de  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}$  vers  $\Theta$  (voir le théorème 4) confirment que ces poids sont valides d'un point de vue asymptotique. Dans la procédure SIR indépendant, la seule différence est que les échantillons finaux sont indépendants, même d'un point de vue non-asymptotique.

En revanche, si  $N$  est fini, on peut se demander si les poids  $1/M_N$  sont pertinents. Dans l'algorithme 8 SIR indépendant, les tirages  $\{x^i\}_{i=1}^{M_N}$  sont i.i.d. suivant  $\tilde{q}^N$ . Par conséquent, pour un  $N$  donné,  $\tilde{q}^N$  peut être vue comme une densité d'importance composée post-rééchantillonnage,  $\tilde{q}^N = \varphi(\pi, q, N)$ , et avec cette interprétation, selon le principe NIS un échantillon final  $x^i$  devrait être pondéré par un poids post-rééchantillonnage proportionnel à  $\pi_u(x^i)/\tilde{q}^N(x^i)$ . Ceci produit un nouvel estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w}, M_N}$  de  $\Theta$  (l'exposant w signifie pondéré - "weighted") :

$$\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w}, M_N} = \sum_{i=1}^{M_N} \frac{\pi_u(x^i)}{\tilde{q}^N(x^i)} \varphi(x^i), \quad x^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \tilde{q}^N \quad (3.32)$$

qui coïncide avec l'estimateur NIS (1.26) de loi d'importance  $\tilde{q}^N$ .

Il est difficile de comparer les estimateurs  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}$  et  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_N}$  car l'expression des poids dans ce dernier cas dépend de  $N$ . Cependant, il est intéressant de noter que contrairement à l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}$ ,  $M_N$  a un impact sur le biais de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_N}$ . Par exemple, si l'on pose  $N = 1$  (donc  $\tilde{q}^N = q$ ) avec  $M_1$  arbitraire, alors l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_1}$  coïncide avec un estimateur NIS utilisant  $M_1$  tirages i.i.d. suivant  $q$ , tandis que l'estimateur non-pondéré  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_1}$  est un estimateur MC brut de  $\int \varphi(x)q(x)dx$  et ne s'avère donc pas adapté à l'estimation de  $\Theta$ . Plus généralement, en utilisant la méthode delta pour approcher  $E[\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}]$  et  $E[\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_N}]$  [61] nous constatons que

$$E[\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}] = E[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}] \approx \Theta - \frac{1}{N} E_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta) \right], \quad (3.33)$$

$$E[\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_N}] \approx \Theta - \frac{1}{M_N} E_{\tilde{q}^N} \left[ \frac{\pi^2(x)}{(\tilde{q}^N(x))^2} (\varphi(x) - \Theta) \right]. \quad (3.34)$$

Ainsi, pour un nombre fixé  $N$  de points échantillonnés, nous observons que dans le cas non-pondéré le biais de l'estimateur  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}$  est indépendant de  $M_N$ . A contrario, quel que soit  $N$  le biais de  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_N}$  tend vers 0 lorsque  $M_N \rightarrow \infty$ .

Enfin, il reste à calculer  $\pi_u(x^i)/\tilde{q}^N(x^i)$  en pratique. De manière générale, l'expression de  $\tilde{q}^N$  en (3.22) n'est pas calculable analytiquement car elle dépend de l'intégrale  $h^N(x)$  en (3.23). Cependant, les  $N \times M_N$  tirages intermédiaires qui ont été utilisés dans l'algorithme 8 peuvent être recyclés pour approcher cette espérance conditionnelle  $h^N(x)$ . Pour  $x$  donné et en utilisant les tirages intermédiaires  $\{\tilde{x}^{i,j}\}$  de l'algorithme 8 pour  $i \in \{1, \dots, M_N\}$  et  $j \in \{1, \dots, N\}$ , un estimateur Monte Carlo brut de  $h^N(x)$  s'écrit

$$\widehat{h}^N(x) = \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \frac{\frac{\pi_u(x)}{q(x)}}{\frac{\pi_u(x)}{q(x)} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\pi_u(\tilde{x}^{i,j})}{q(\tilde{x}^{i,j})}}. \quad (3.35)$$

Ainsi, les poids d'importance  $\frac{\pi_u(x)}{\tilde{q}^N(x)}$  en (3.32) peuvent être approchés par  $\frac{\pi_u(x)}{N\widehat{h}^N(x)q(x)}$ . Remarquons que le calcul de ces poids approchés ne nécessite pas de coût supplémentaire puisque les quantités  $\pi_u(\tilde{x}^{i,j})/q(\tilde{x}^{i,j})$  ont déjà été calculées dans l'algorithme 8 afin d'obtenir des tirages i.i.d..

La section suivante s'attache à étudier empiriquement le comportement du mécanisme de rééchantillonnage indépendant avec et sans pondération des tirages finaux.

### 3.2.4 Simulations

Nous illustrons maintenant les résultats précédents et comparons les estimateurs basés sur les algorithmes SIR indépendant non-pondéré  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}$  et pondéré  $\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},M_N}$  aux estimateurs classiques  $\widehat{\Theta}^{\text{SIR},M_N}$  et  $\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}$ . Nous discutons également du coût calculatoire propre à notre

algorithme de rééchantillonnage indépendant.

Considérons le problème d'estimation bayésienne dans lequel on s'attache à calculer

$$\Theta = E[x|y] = \int xp(x|y)dx. \quad (3.36)$$

Ainsi, nous posons  $\varphi(x) = x$  et  $\pi(x) = p(x|y)$  dans (1.1), et nous utilisons le critère de RMSE suivant

$$\text{RMSE}(\hat{\Theta}) = \left( \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \|\hat{\Theta}^{(p)} - \tilde{\Theta}^{(p)}\|^2 \right)^{1/2} \quad (3.37)$$

où  $\tilde{\Theta}^{(p)}$  correspond à la valeur  $E[x^{(p)}|y^{(p)}]$  exacte (en effet nous considérons ici un modèle où elle est calculable), sauf dans le tableau 3.1 où  $\tilde{\Theta}^{(p)}$  correspond à la vraie valeur cachée  $x^{(p)}$ . Nos expériences seront moyennées sur  $P = 1000$  simulations.

Nous supposons que  $p(x|y)$  est connu à une constante près,  $p(x|y) \propto p(x)p(y|x)$  où  $p(x) = \mathcal{N}(x; 0, \sigma_x^2)$  et  $p(y|x) = \mathcal{N}(y; x, \sigma_y^2)$  avec  $\sigma_x^2 = 10$  et  $\sigma_y^2 = 3$ . Nous choisissons la loi d'importance  $q(x) = p(x)$  pour la procédure NIS. Pour un nombre  $N$  donné d'échantillons finaux, nous calculons quatre estimateurs : l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$  en (1.26) obtenu à partir du mécanisme NIS avec la loi d'importance  $q$ ; l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR}, N}$  en (1.43) déduit du mécanisme SIR avec  $N$  tirages intermédiaires et  $M_N = N$  tirages finaux; notre estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, N}$  en (3.24) basé sur  $N$  échantillons non-pondérés indépendants suivant  $\tilde{q}^N$ ; notre estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w}, N}$  en (3.32) basé sur  $N$  échantillons pondérés indépendants suivant  $\tilde{q}^N$ . Rappelons par ailleurs que la procédure de rééchantillonnage indépendant est basée sur le tirage de  $N^2$  particules intermédiaires ainsi que sur  $N$  étapes de rééchantillonnage, et requiert donc un coût de calcul supplémentaire par rapport au rééchantillonnage dépendant classique. Par conséquent, nous calculons également  $\hat{\Theta}^{\text{SIR-2}, N}$  basé sur la procédure SIR classique avec  $N^2$  tirages intermédiaires (indépendants) et  $N$  étapes de rééchantillonnage (dépendantes); autrement dit cet estimateur est construit au moyen de  $N$  échantillons dépendants obtenus à partir de  $\tilde{q}^{N^2}$ .

Dans un premier temps nous comparons en section 3.2.4.1 ces différents estimateurs en termes de RMSE, et vérifions la pertinence de l'approximation MC de l'espérance conditionnelle  $h^N$  en (3.35). Dans un deuxième temps, nous comparons en section 3.2.4.2 ces différents estimateurs en termes de biais et variance pour une observation  $y$  fixée (c'est-à-dire  $x^{(p)} = x$  et  $y^{(p)} = y$  pour tout  $p \in \{1, \dots, P\}$ ).

### 3.2.4.1 RMSE des estimateurs

Dans la figure 3.3 nous présentons la distance de chaque estimateur par rapport à la vraie espérance  $E[x|y]$  en fonction du nombre  $N$  de tirages. Comme on pouvait le prévoir en raison

du résultat sur sa variance en (3.26), l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$  basé sur  $N$  tirages indépendants suivant  $\tilde{q}^N$  donne une meilleure performance que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR},N}$ , lequel est calculé à partir de  $N$  échantillons dépendants suivant  $\tilde{q}^N$ . Cependant, un résultat intéressant réside dans le fait que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$  est également meilleur que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{NIS},N}$ . Ceci signifie que la loi  $\tilde{q}^N$  produite par le mécanisme SIR est mieux adaptée que la loi a priori  $q(x) = p(x)$ , pour le modèle considéré, ce qui n'est pas surprenant puisque  $\tilde{q}^N$  utilise implicitement l'observation  $y$  par le biais du mécanisme de rééchantillonnage des tirages intermédiaires. Bien sûr, le calcul de l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$  nécessite un coût calculatoire supplémentaire mais il est intéressant de noter que la taille du support final est la même dans les trois cas.

Nous comparons ensuite les estimateurs basés sur des coûts calculatoires identiques. Lorsque  $N$  augmente, ces estimateurs ont le même comportement asymptotique. On peut voir que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{SIR-2},N}$  basé sur  $N$  échantillons dépendants tirés suivant  $\tilde{q}^{N^2}$  est légèrement meilleur que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$ , tandis que lorsque nos échantillons i.i.d. sont pondérés par un terme proportionnel à  $p(x|y)/\tilde{q}^N(x)$  selon le point de vue de la procédure NIS, les estimateurs  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$  et  $\hat{\Theta}^{\text{SIR-2},N}$  semblent présenter les mêmes performances lorsque  $N \rightarrow \infty$  (ou du moins il semble impossible de les distinguer autrement que par du bruit de simulation), ce qui confirme la discussion en section 3.2.2.2. Rappelons néanmoins que la procédure SIR indépendant peut facilement être parallélisée, et que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$  s'appuie sur l'approximation  $\hat{h}^N$  en (3.35) de  $h^N$  en (3.23), recyclant donc les tirages intermédiaires  $\tilde{x}^{i,j}$ . Afin toutefois de permettre une comparaison non-asymptotique plus fine de ces deux estimateurs  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$  et  $\hat{\Theta}^{\text{SIR-2},N}$ , nous avons effectué d'autres simulations en figure 3.4 ainsi qu'au tableau 3.1 (lequel présente des valeurs de RMSE par rapport à l'état caché  $x$  plutôt que par rapport à l'espérance  $E[x|y]$ ) en utilisant des valeurs de  $N$  plus petites. Nous voyons alors que notre estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$  se révèle être légèrement meilleur que  $\hat{\Theta}^{\text{SIR-2},N}$  pour de faibles valeurs de  $N$ .

$N$	$\hat{\Theta}^{\text{SIR},N}$	$\hat{\Theta}^{\text{SIR-w},N}$	$\hat{\Theta}^{\text{NIS},N}$	$\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$	$\hat{\Theta}^{\text{SIR-2},N}$	$\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$
20	1.6844	1.6819	1.6542	1.5951	1.5618	<b>1.5610</b>
40	1.5925	1.5981	1.5763	1.5606	1.5446	<b>1.5410</b>
60	1.5752	1.5777	1.5637	1.5442	1.5395	<b>1.5335</b>
80	1.5623	1.5639	1.5530	1.5345	1.5309	<b>1.5293</b>
100	1.5519	1.5504	1.5410	1.5320	<b>1.5290</b>	<b>1.5290</b>

TABLE 3.1 – Modèle statique linéaire et gaussien - valeurs de RMSE de chaque estimateur par rapport aux vraies valeurs des états cachés. La légère supériorité de l'estimateur I-SIR-w par rapport à l'estimateur SIR-2 est ici illustrée pour de faibles valeurs de  $N$ .

Par ailleurs, afin de nous assurer de la qualité de l'approximation  $\hat{h}^N$  en (3.35) de  $h^N$  en (3.23), nous avons estimé (3.23) avec  $M$  ensembles de  $N$  tirages intermédiaires,  $M > N$ , plutôt que de ne recycler que les  $N$  ensembles disponibles de  $N$  tirages. Comme le montre la figure 3.5, les performances obtenues pour l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$  en utilisant ces ensembles

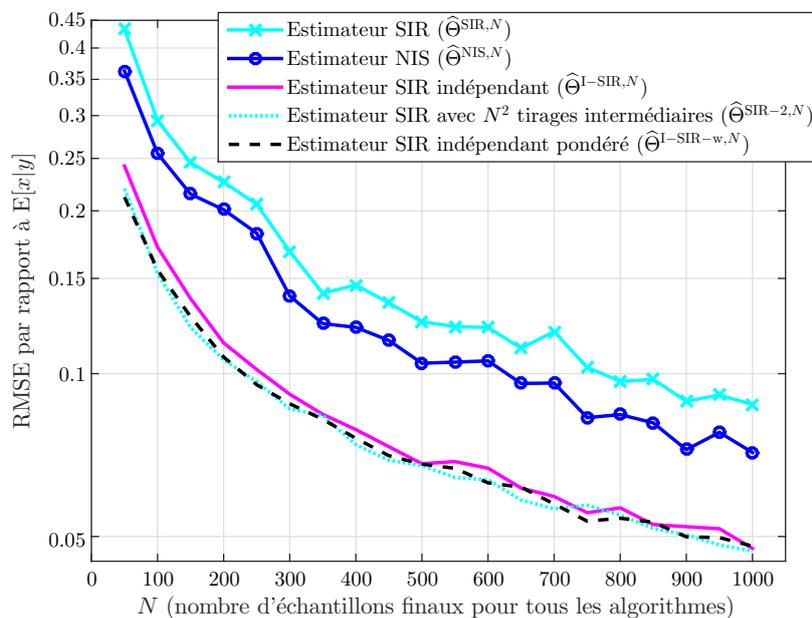


FIGURE 3.3 – Modèle statique linéaire et gaussien -  $\sigma_x^2 = 10$ ,  $\sigma_y^2 = 3$  - les estimateurs bayésiens de  $E[x|y]$  basés sur le mécanisme de rééchantillonnage indépendant donnent de meilleures performances que ceux basés sur les mécanismes traditionnels NIS et SIR pour la même taille du support final, mais avec un coût en tirages intermédiaires supplémentaire. Avec le même nombre de tirages intermédiaires, d'une part l'estimateur I-SIR-w donne une performance similaire à l'estimateur SIR-2, et d'autre part l'estimateur I-SIR a le même comportement asymptotique que ces deux derniers.

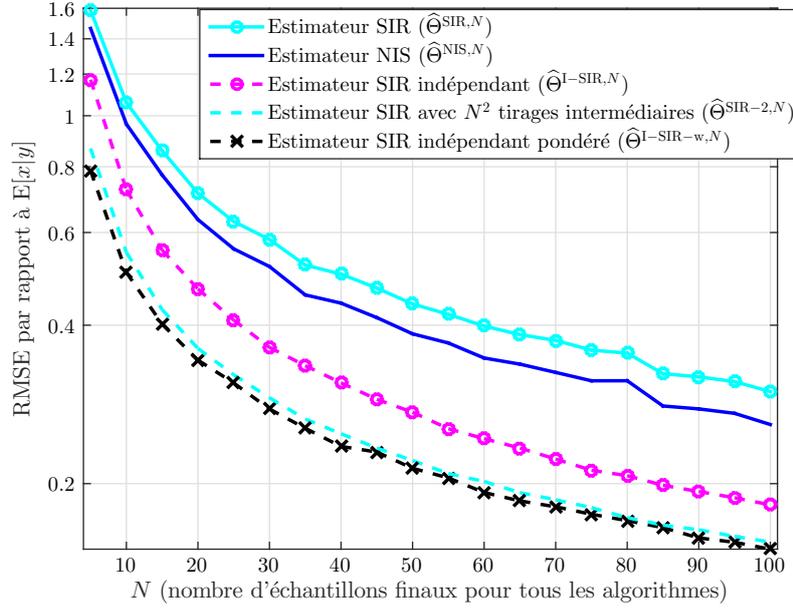


FIGURE 3.4 – Modèle statique linéaire et gaussien -  $\sigma_x^2 = 10$ ,  $\sigma_y^2 = 3$ . Les plus faibles valeurs de  $N$  qu'en figure 3.3 permettent de mieux mettre en évidence les différences entre les estimateurs I-SIR, SIR-2 et I-SIR-w.

supplémentaires de tirages sont identiques, ce qui tend à suggérer que le fait de recycler les  $N$  ensembles d'échantillons  $\tilde{x}^{i,j}$  disponibles lors de la procédure I-SIR est effectivement suffisant pour approcher (3.23).

Nous avons également pu observer que l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$  est meilleur que les autres estimateurs lorsque  $\sigma_y \rightarrow 0$ , c'est-à-dire lorsque les observations deviennent informatives. Nous discuterons plus en détail de cet aspect dans le cas dynamique en section 4.1.4.3.

### 3.2.4.2 Biais et variance des estimateurs

Nous étudions ensuite le comportement de la variance empirique et du biais de ces estimateurs. Contrairement à la section précédente, ici nous fixons l'état caché  $x^{(p)} = x$  et l'observation  $y^{(p)} = y$  pour toutes les réalisations MC de manière à calculer la variance empirique correspondant aux mêmes termes de variance  $\text{var}(\hat{\Theta})^{\text{I-SIR},N}$  et  $\text{var}(\hat{\Theta})^{\text{SIR},N}$  que ceux évoqués auparavant (comme par exemple dans l'équation (3.26)), lesquels sont implicitement conditionnels à l'observation (en effet  $\pi(x) = p(x|y)$ ). Les résultats sont tracés sur la figure 3.6 pour la variance et la figure 3.7 pour le biais. L'ordre de performance des estimateurs en termes de variance ou biais reste le même en comparaison du cas où l'on considère le RMSE moyenné sur des observations différentes, cependant les performances des estimateurs  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR},N}$  et  $\hat{\Theta}^{\text{NIS},N}$  sont beaucoup plus

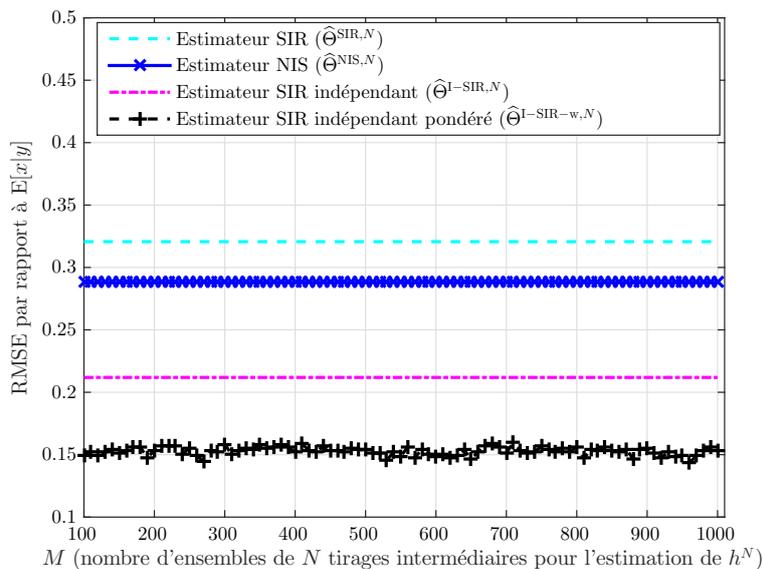


FIGURE 3.5 – Modèle statique linéaire et gaussien -  $\sigma_x^2 = 10$ ,  $\sigma_y^2 = 3$ ,  $N = 100$ . Le RMSE de l'estimateur  $\hat{\Theta}^{\text{I-SIR-w},N}$  est moyenné sur  $P = 1000$  itérations MC et affiché en fonction du nombre  $M$  d'ensembles de  $N$  tirages intermédiaires utilisés pour l'estimation de  $h^N$ . Notons que pour chaque valeur de  $M$  l'algorithme tout entier (pas seulement l'estimation de  $h^N$ ) est ré-effectué pour obtenir l'estimateur, d'où la variabilité que l'on peut observer. Lorsque seule l'estimation de  $h^N$  est changée (ce qui implique donc toujours le tirage de nouvelles particules utilisées dans cette approximation), on observe un résultat similaire mais avec une variabilité beaucoup plus faible qui ne peut donc pas être représentée sur la figure à moins de supprimer les courbes associées aux autres estimateurs. Ces autres courbes sont par ailleurs entièrement indépendantes de  $M$ , donc constantes.

proches l'une de l'autre ainsi que de celle de l'estimateur  $\hat{\Theta}^{I-SIR-w,N}$ .

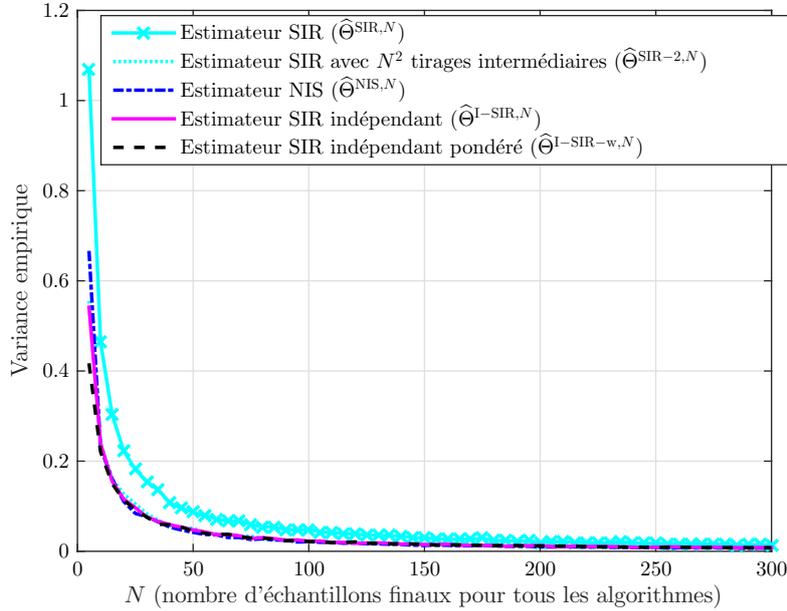


FIGURE 3.6 – Modèle statique linéaire et gaussien -  $\sigma_x^2 = 10$ ,  $\sigma_y^2 = 3$ . Variance empirique des estimateurs moyennée sur 1000 itérations MC et exprimée en fonction du nombre  $N$  d'échantillons finaux pour tous les algorithmes, avec une observation fixée quel que soit l'itération MC. L'ordre de performance des estimateurs reste le même que celui en termes de RMSE lorsque les observations changent à chaque itération MC, mais les valeurs sont plus proches.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons en premier lieu observé que la technique NIS approche le quotient de deux espérances à l'aide d'un unique ensemble de tirages aléatoires, qui par construction ne peut pas s'ajuster simultanément au numérateur et au dénominateur. Nous avons donc proposé un nouveau mécanisme, le DPIS, similaire au mécanisme NIS mais basé sur l'utilisation de deux lois instrumentales. Afin de calibrer ces lois de proposition en pratique nous avons ajusté un ensemble initial d'échantillons tirés suivant une certaine loi initiale  $q$  via deux transformations linéaires, l'une visant le numérateur et l'autre le dénominateur. Ces transformations linéaires sont optimisées par minimisation approchée de la variance au premier ordre de notre estimateur DPIS. Nos simulations montrent que l'estimateur DPIS résultant surpasse les estimateurs NIS ne prenant en compte qu'un seul ensemble de tirages, même si cet ensemble est ajusté selon la même procédure de minimisation de variance au premier ordre.

En second lieu, nous avons revisité la procédure SIR classique avec rééchantillonnage multi-

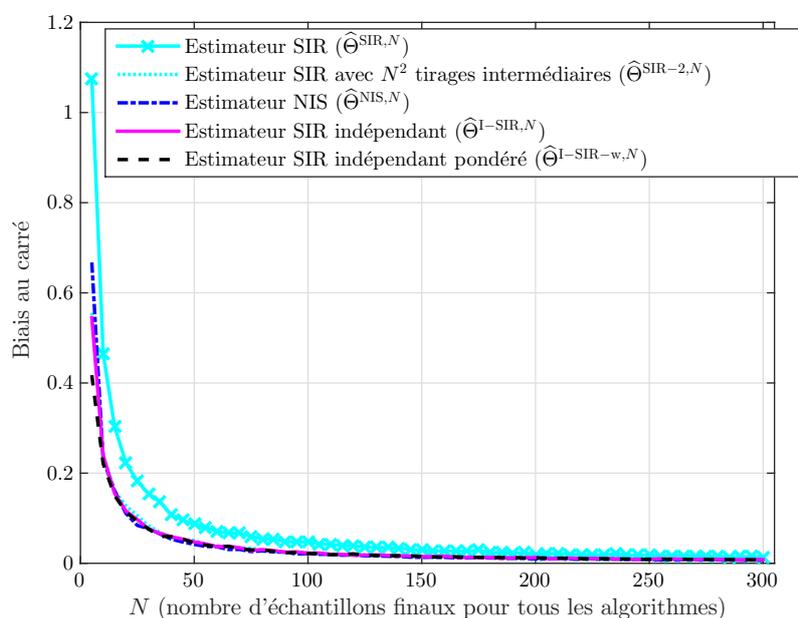


FIGURE 3.7 – Modèle statique linéaire et gaussien -  $\sigma_x^2 = 10$ ,  $\sigma_y^2 = 3$ . Biais au carré des estimateurs moyennée sur 1000 itérations MC et exprimée en fonction du nombre  $N$  de tirages finaux pour tous les algorithmes, avec une observation fixée quel que soit l'itération MC. L'ordre de performance des estimateurs reste le même que celui en termes de RMSE lorsque les observations changent à chaque itération MC, mais les valeurs sont plus proches.

nomial, en montrant tout d'abord que les particules tirées suivant le mécanisme SIR de Rubin sont des échantillons dépendants tirés suivant une certaine loi  $\tilde{q}^N$ . Partant de cette observation, nous avons proposé un mécanisme de tirage alternatif qui produit des échantillons indépendants  $x^i$  tirés suivant cette même loi marginale  $\tilde{q}^N$ . Cette collection de tirages indépendants nous permet de construire un estimateur surpassant théoriquement celui basé sur le SIR classique, d'un point de vue à la fois asymptotique et non-asymptotique. Cependant le mécanisme permettant d'obtenir en pratique des tirages indépendants est plus coûteux en tirages intermédiaires pondérés provenant du mécanisme NIS. Enfin, la succession des étapes d'échantillonnage, pondération et rééchantillonnage transforme effectivement une loi instrumentale élémentaire  $q$  en une loi d'importance composée  $\tilde{q}^N = \varphi(\pi, q, N)$ , ce qui nous amène à repondérer les particules rééchantillonnées (originellement non-pondérées) au moyen de poids post-rééchantillonnage proportionnels à  $\frac{\pi(x^i)}{\tilde{q}(x^i)}$ . Ces poids sont incalculables exactement, mais peuvent être estimés facilement par recyclage des tirages intermédiaires supplémentaires nécessaires à l'obtention des particules rééchantillonnées indépendamment. Enfin nous avons validé nos discussions au moyen de simulations en prenant soigneusement en compte le budget calculatoire.



# Filtrage particulaire avec rééchantillonnage i.i.d. et semi-i.i.d.

## Contenu

---

<b>4.1 Filtrage particulaire avec rééchantillonnage indépendant . . . . .</b>	<b>87</b>
4.1.1 Un nouvel algorithme SIR . . . . .	88
4.1.2 Lien avec le filtrage particulaire auxiliaire . . . . .	90
4.1.3 Résumé . . . . .	95
4.1.4 Simulations . . . . .	96
<b>4.2 Compromis coût/performance : rééchantillonnage semi-indépendant . . . . .</b>	<b>105</b>
4.2.1 Un procédé de rééchantillonnage intermédiaire . . . . .	106
4.2.2 Performances vs. coût calculatoire . . . . .	108
4.2.3 Une version parallélisable . . . . .	109
4.2.4 Simulations . . . . .	110
<b>4.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>114</b>

---

Commençons ici tout d'abord par rappeler brièvement les principes de la technique de filtrage particulaire détaillés en section 2.2 et plus précisément en section 2.2.1. Nous nous plaçons dans le cadre bayésien dynamique du chapitre 2 où l'on cherche à estimer récursivement à chaque nouvel instant temporel un certain moment d'intérêt (2.1) de la densité a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  :

$$\Theta_t = \mathbb{E}[\varphi(x_{0:t})|y_{0:t}] = \int \varphi(x_{0:t})p(x_{0:t}|y_{0:t})dx_{0:t}. \quad (4.1)$$

Nous considérons pour cela le modèle particulier de Chaînes de Markov Cachées en 2.1.2. La loi jointe  $p(x_{0:t}, y_{0:t})$  s'écrit donc

$$p(x_{0:t}, y_{0:t}) = p(x_0) \prod_{i=1}^t f_i(x_i|x_{i-1}) \prod_{i=0}^t g_i(y_i|x_i) \quad (4.2)$$

où les  $f_i(x_i|x_{i-1})$  correspondent aux lois de transition du modèle et les  $g_i(y_i|x_i)$  aux vraisemblances.

Le filtrage particulaire consiste à propager dans le temps un ensemble de trajectoires pondérées  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$ , ce qui s'effectue dans un premier temps par l'application séquentielle de

la technique NIS en considérant une loi d'importance  $q$  particulière qui puisse être elle-même construite récursivement. Ainsi, les trajectoires sont propagées en deux étapes pour  $1 \leq i \leq N$  :

- une étape de propagation,  $\tilde{x}_t^i \sim q_t(x_t|x_{0:t-1}^i)$ , où les tirages  $\tilde{x}_t^i$  sont appelés les particules intermédiaires ;
- une étape de pondération,  $w_t^i \propto w_{t-1}^i \frac{f_t(\tilde{x}_t^i|x_{t-1}^i)g_t(y_t|\tilde{x}_t^i)}{q(\tilde{x}_t^i|x_{0:t-1}^i)}$ .

Néanmoins, ce mécanisme appelé l'échantillonnage d'importance séquentiel (SIS) souffre intrinsèquement du problème bien connu de dégénérescence des poids, c'est-à-dire qu'après quelques itérations temporelles seul un petit nombre de poids  $w_t^i$  ont des valeurs non-nulles. C'est pourquoi l'algorithme de filtrage particulière ajoute une étape de rééchantillonnage des trajectoires pour  $1 \leq i \leq N$  :

- sélectionner les trajectoires  $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^{l^i}, \tilde{x}_t^{l^i})$  avec une probabilité égale à leur poids c'est-à-dire que  $l^i \sim \Pr(l|\{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^j\}_{j=1}^N) = w_t^{l^i}$  (les tirages  $x_t^i$  sont alors appelés les particules finales ou le support final) ;
- uniformiser les poids des trajectoires  $w_t^i = \frac{1}{N}$ .

L'algorithme incorporant cette étape est alors appelée la méthode SIR (Sequential Importance Resampling, à ne pas confondre avec le SIR Sampling Importance Resampling dans le contexte statique) ou filtre particulière, et produit deux estimateurs de  $\Theta_t$  en (2.41) et (2.42), respectivement avant et après rééchantillonnage :

$$\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(\tilde{x}_t^i), \tag{4.3}$$

$$\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i). \tag{4.4}$$

La procédure complète correspondante est détaillée en algorithme 5.

Cependant, comme expliqué en section 2.2.2.1, la technique de rééchantillonnage introduit un autre phénomène de dégénérescence du fait de la dépendance qu'elle introduit entre les trajectoires rééchantillonnées : certaines trajectoires sont en effet dupliquées. Cette dégénérescence est d'autant plus sévère que les poids d'importance sont disparates, ce qui est tout particulièrement le cas dans un cadre bayésien quand la vraisemblance  $g_t(\cdot|x_t)$  admet un support sur  $x_t$  très restreint. Ceci peut arriver lorsque le modèle est très informatif, c'est-à-dire que  $y_t$  est presque déterministe conditionnellement à  $x_t$ , ou à grande dimension, car dans ces deux cas il va être difficile de placer des points où la fonction de vraisemblance  $g_t(\cdot|x_t)$  est importante.

Ayant désormais rappelé le principe de l'algorithme FP ainsi que l'une de ses limites, nous nous attachons maintenant à apporter des éléments de réponse à ce problème. En section 3.2 du chapitre précédent, nous avons proposé une technique de rééchantillonnage indépendant, dont un des avantages réside justement dans la diversité accrue du support final d'échantillons

obtenu en comparaison de la technique de rééchantillonnage multinomial. Nous adaptons ainsi en section 4.1 suivante cette technique de rééchantillonnage indépendant au filtrage particulière dans le cadre bayésien dynamique rappelé ci-dessus, tout particulièrement en vue de réduire le phénomène de dégénérescence du support de trajectoires introduit par les techniques de rééchantillonnage usuelles.

Cependant, bien qu'elle soit intéressante d'un point de vue statistique, cette technique de rééchantillonnage indépendant requiert un surplus en tirages aléatoires intermédiaires suivant la loi d'importance  $q_t$  à chaque instant  $t$ . Ainsi nous étendons en section 4.2 cette technique par l'ajout d'un nouveau degré de liberté afin de mieux contrôler son coût additionnel en tirages aléatoires. Ceci constitue une nouvelle classe d'algorithmes SIR avec rééchantillonnage semi-indépendant, reposant sur un paramètre contrôlant le coût en nombre de tirages, et englobant à la fois le filtrage particulière avec rééchantillonnage multinomial classique et le filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant.

Enfin, nous terminons ce chapitre par une conclusion.

## 4.1 Filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant

Dans cette section nous adaptons au cadre dynamique du filtrage particulière la procédure de SIR indépendant présentée en section 3.2. Tout d'abord nous généralisons en section 4.1.1 certaines propriétés statistiques des tirages rééchantillonnés obtenus via cette procédure ainsi que de l'estimateur associé, présentés dans le cas statique en sections 3.2.2 et 3.2.2.1. Nous généralisons également l'algorithme 8 SIR indépendant présenté en section 3.2.2.2.

Puis en section 4.1.2.1 nous montrons que notre nouvel algorithme ainsi résultant peut être interprété comme un cas particulier d'algorithme de filtrage particulière auxiliaire. Cette interprétation nous permet alors d'utiliser la méthodologie de l'APF afin de repondérer nos particules en dimension augmentée. En effet l'utilisation directe du mécanisme de repondération vu dans le cas statique en section 3.2.3 deviendrait ici trop coûteuse, dans la mesure où dans un cadre dynamique la loi de proposition considérée devient une loi de mélange dont l'expression devrait alors être recalculée pour chaque poids.

Enfin en section 4.1.4 nous analysons empiriquement les nouveaux estimateurs proposés en les comparant à des méthodes bien établies tout en prenant soigneusement en compte les coûts calculatoires en jeu et en considérant divers modèles d'intérêt. En particulier nous considérons des modèles informatifs ainsi qu'en grande dimension, puisque comme nous l'avons vu en section 2.2.2.1 ces types de modèles ont tendance à exacerber le phénomène de dégénérescence du support dû au rééchantillonnage usuel, tandis que notre nouvel algorithme permet de limiter ce

problème.

### 4.1.1 Un nouvel algorithme SIR

De la même manière qu'en proposition 4, nous pouvons déterminer dans le cas bayésien séquentiel la loi des tirages rééchantillonnés (par rééchantillonnage multinomial) non-conditionnellement aux tirages intermédiaires  $\{\tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$  - donc cette fois seulement conditionnellement aux trajectoires passées  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ .

**Proposition 6.** *Considérons les échantillons  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  produits par le mécanisme SIR classique de l'algorithme 5, et posons*

$$p_t^i(x) = w_{t-1}^i f_t(x|x_{t-1}^i) g_t(y_t|x), \quad (4.5)$$

$$q_t^i(x) = q(x|x_{0:t-1}^i). \quad (4.6)$$

Alors conditionnellement aux trajectoires initiales  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ , ces nouveaux échantillons  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  sont identiquement distribués suivant une densité  $\tilde{q}_t^N$  qui s'écrit

$$\tilde{q}_t^N(x) = \sum_{i=1}^N h_t^i(x) q_t^i(x), \quad (4.7)$$

où  $h_t^i(x)$  correspond à l'espérance conditionnelle (sachant  $\{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N$  et  $\tilde{x}_t^i = x$ ) du  $i$ -ème poids d'importance  $w_t^i$  à l'instant  $t$ ,

$$h_t^i(x) = E[w_t^{i,l} | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N, \tilde{x}_t^i = x] \quad (4.8)$$

$$= \int \int \frac{\frac{p_t^i(x)}{q_t^i(x)}}{\frac{p_t^i(x)}{q_t^i(x)} + \sum_{l \neq i} \frac{p_t^l(x^l)}{q_t^l(x^l)}} \prod_{l \neq i} q_t^l(x^l) dx^l. \quad (4.9)$$

*Démonstration.* La preuve suit le même raisonnement que celle de la proposition 4 en annexe A.2, et en constitue une extension. Dans cette extension, le produit  $\prod_{j=1}^N q(\tilde{x}^j)$  est remplacé par  $\prod_{j=1}^N q_t^i(\tilde{x}_t^j)$  où les lois  $q_t^i$  sont différentes car conditionnelles à des trajectoires  $x_{0:t-1}^i$  différentes, contrairement au cas statique où une unique loi  $q$  est utilisée. Ainsi dans la suite de la preuve, à l'intérieur de l'intégrale sur les variables  $d\tilde{x}^i$ , la somme  $\sum_{i=1}^N h^N(\tilde{x}^i) q(\tilde{x}^i)$  ne se simplifie plus en un seul terme  $N \times h^N(\tilde{x}) q(\tilde{x})$  mais reste cette fois sous forme de somme  $\sum_{i=1}^N h_t^i(\tilde{x}^i) q_t^i(\tilde{x}^i)$  car les quantités  $h$  et  $q$  dépendent alors de  $i$ .  $\square$

Rappelons que dans cette proposition, nous nous focalisons sur la loi de  $x_t^i$  sachant  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ . En effet, conditionnellement à  $\{x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$ , les nouveaux tirages  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  sont indépendants.

Lorsque l'on enlève la dépendance en  $\{\tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$ , ces tirages  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  deviennent identiquement distribués suivant  $\tilde{q}_t^N$  et mutuellement dépendants (une même particule peut être rééchantillonnée plusieurs fois).

Étant donné que  $\tilde{q}_t^N$  est une densité de probabilité, une procédure qui produirait des échantillons conditionnellement i.i.d. suivant  $\tilde{q}_t^N$  nous permettrait de conserver l'avantage de l'étape de rééchantillonnage (c'est-à-dire permettre de recréer de la diversité lors des étapes de tirage à l'itération temporelle suivante grâce à l'uniformisation des poids), tout en évitant d'appauvrir localement le support (c'est-à-dire en conservant de la diversité après rééchantillonnage avant même d'avoir effectué les étapes de tirage). Plus précisément, cet avantage consiste à permettre de recréer de la diversité lors des étapes de tirage propres à l'itération temporelle suivante, grâce à l'uniformisation des poids. Néanmoins, à part dans un cas particulier qui sera décrit en section 4.1.2, tirer directement suivant  $\tilde{q}_t^N(x)$  s'avère difficile pour une loi d'importance arbitraire  $q(x_t|x_{0:t-1})$ . Nous proposons donc une procédure similaire à l'algorithme 8 de SIR indépendant, mais adaptée au cadre dynamique. Ce nouvel algorithme SIR avec rééchantillonnage indépendant est donné en algorithme 9. Notons qu'une différence avec l'algorithme 5 de FP classique réside dans le fait que la loi de l'indice discret  $l^i$  dépend désormais de  $i$ .

---

**Algorithme 9** Un algorithme SIR basé sur le rééchantillonnage indépendant

---

**Entrées :**  $q(x_t|x_{0:t-1})$ ,  $y_t$ ,  $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$   
**Sorties :**  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$   
**pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire**  
  **pour**  $1 \leq j \leq N$  **faire**  
    **S.**  $\tilde{x}_t^{i,j} \sim q(x_t|x_{0:t-1}^j)$  ;  
    **W.**  $w_t^{i,j} \propto \frac{w_{t-1}^{i,j} f_t(\tilde{x}_t^{i,j}|x_{t-1}^j) g_t(y_t|\tilde{x}_t^{i,j})}{q(\tilde{x}_t^{i,j}|x_{0:t-1}^j)}$ ,  $\sum_{j=1}^N w_t^{i,j} = 1$  ;  
  **fin pour**  
  **R.**  $l^i \sim \Pr(l|\{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N) = w_t^{i,l}$  ;  
  Poser  $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^{l^i}, \tilde{x}_t^{i,l^i})$ ,  $w_t^i = \frac{1}{N}$ .  
**fin pour**

---

Nous proposons maintenant un nouvel estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  de  $\Theta_t$ , basé sur la collection  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  produite par l'algorithme 9 :

$$\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i). \quad (4.10)$$

Afin de comparer l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  en (4.10) avec l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$  en (2.42), rappelons-nous que dans ces deux cas les échantillons  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  sont tirés suivant la même densité  $\tilde{q}_t^N$ , mais que dans (4.10) ils sont désormais indépendants, sachant  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$  uniquement. Partant d'un jeu de trajectoires passées  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ , l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  est préférable à l'estimateur

$\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$  puisque [76]

$$\mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N] = \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N], \quad (4.11)$$

$$\text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N) = \text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N) + \frac{N-1}{N} \text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N). \quad (4.12)$$

Bien sûr, le calcul de  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  utilisant les tirages produits par l’algorithme 9 nécessite un coût supplémentaire en échantillons intermédiaires. Cet aspect sera discuté en détail par simulations en section 4.1.4, mais pour le moment remarquons les points suivants :

- premièrement, cet algorithme peut être vu comme une alternative à l’algorithme SIR classique, garantissant la diversité du support rééchantillonné sans modifier la loi conditionnelle des tirages finaux. Si le rééchantillonnage ne doit être effectué que rarement, par exemple seulement lorsque le nombre de particules effectif  $N_{\text{eff}} = 1 / \sum_{i=1}^N (w_t^i)^2$  (voir section 2.2.1) devient trop faible, la procédure plus coûteuse de rééchantillonnage indépendant peut alors n’être utilisée que si nécessaire ;
- d’un autre côté, nous verrons que l’estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  peut aussi constituer une alternative intéressante à l’estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  bien qu’il nécessite un coût calculatoire supplémentaire ;
- Enfin, si la procédure de rééchantillonnage indépendant est effectuée à chaque instant, nous pourrions réduire le nombre  $N$  de particules utilisées dans le calcul de l’estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  afin d’atteindre le même coût calculatoire que pour l’estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$ .

**Remarque 8.** Notons que l’idée d’utiliser des tirages MC supplémentaires a déjà été proposée dans le contexte du filtrage particulaire par îlots (Island PF - IPF) [103]. L’idée sous-jacente à cette classe de techniques consiste à exploiter les architectures parallèles, et la logique est la suivante. Plutôt que de considérer une unique collection de  $N$  particules, cette méthode consiste à diviser la population de  $N$  tirages en  $N_1$  lots de  $N_2$  tirages avec  $N_1 N_2 = N$ . Une telle configuration n’améliore pas le FP classique avec  $N$  tirages [103], mais présente l’avantage de diviser le temps de calcul lorsque des architectures parallèles sont disponibles. En d’autres termes, l’IPF ne vise pas à lutter contre l’appauvrissement du support.

Nous allons désormais voir en quoi notre nouvel algorithme peut être interprété comme un cas particulier d’algorithme de filtrage particulaire auxiliaire, et en quoi ceci nous permet de repondérer nos tirages rééchantillonnés indépendants.

### 4.1.2 Lien avec le filtrage particulaire auxiliaire

Jusqu’ici, nous avons vu qu’il était possible de construire un estimateur de  $\Theta_t$  basé sur des échantillons conditionnellement i.i.d. suivant la densité conditionnelle  $\tilde{q}_t^N$ . Comme dans le cas

statique en section 3.2.3, nous nous posons maintenant la question de savoir s'il serait possible lorsque  $N$  est fini d'utiliser des poids différents de  $w_t^i = 1/N$  pour notre estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{I-\text{SIR},N}$  en (4.10). Pour cela, nous voudrions utiliser l'expression de la loi  $\tilde{q}_t^N$  afin de proposer un mécanisme de pondération alternatif. À première vue, le calcul d'un tel poids à partir de (4.7)-(4.8) semble compromis car très coûteux ; en effet  $\tilde{q}_t^N$  comprend une somme de  $N$  termes qui devrait alors être évaluée pour chaque échantillon final  $x_t^i$ . Comme nous allons le voir, l'interprétation de l'algorithme SIR indépendant en tant que première étape particulière d'un algorithme APF aidera à contourner ce problème.

Pour cela, commençons par rappeler brièvement l'algorithme de filtrage particulière auxiliaire comme présenté en section 2.3. Un algorithme APF générique diffère d'un algorithme SIR tout d'abord dans le sens où il cible la loi de mélange  $\widehat{p}(x_t|y_{0:t})$  en (2.47) :

$$\widehat{p}(x_t|y_{0:t}) \propto \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i p(y_t|x_{t-1}^i) p(x_t|x_{t-1}^i, y_t), \quad (4.13)$$

elle-même une approximation de la loi marginale a posteriori d'intérêt  $p(x_t|y_{0:t})$ , à partir d'une autre loi de mélange :

$$\bar{q}(x_t) = \sum_{i=1}^N \mu(x_{0:t-1}^i) \tau(x_t|x_{0:t-1}^i). \quad (4.14)$$

Les coefficients  $\mu$  sont dénommés les poids de première espèce et correspondent aux probabilités de sélection des trajectoires, tandis que les lois  $\tau$  sont ensuite utilisées pour effectuer la propagation. Les nouveaux échantillons  $x_t$  ainsi obtenus sont alors pondérés à la manière de l'échantillonnage d'importance, mais en dimension augmentée en considérant que l'on pondère le couple  $(l, x_t)$  au lieu de  $x_t$  seulement, où  $l$  correspond à l'indice de la trajectoire sélectionnée via les poids de première espèce. Ainsi les poids finaux, dits de deuxième espèce, s'écrivent

$$w_t^i \propto \frac{w_{t-1}^i f_t(x_t^i|x_{t-1}^i) g_t(y_t|x_t^i)}{\mu(x_{0:t-1}^i) \tau(x_t^i|x_{0:t-1}^i)}, \quad \sum_{i=1}^N w_t^i = 1, \quad (4.15)$$

et l'estimateur APF associé de  $\Theta$  est

$$\widehat{\Theta}_t^{\text{APF},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(x_t^i). \quad (4.16)$$

Pour plus de détails voir l'algorithme 6 en section 2.3.

4.1.2.1 Rééchantillonnage indépendant comme première étape d'un algorithme APF canonique

Intéressons-nous maintenant à l'interprétation de notre procédure de filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant en termes d'APF. Remarquons tout d'abord que la densité  $\tilde{q}_t^N$  en (4.7) peut se réécrire

$$\tilde{q}_t^N(x) = \sum_{i=1}^N \int h_t^i(x) q_t^i(x) dx \times \frac{h_t^i(x) q_t^i(x)}{\int h_t^i(x) q_t^i(x) dx} \tag{4.17}$$

et peut par conséquent être considérée comme une loi de mélange instrumentale particulière  $\bar{q}(x_t)$  propre à un algorithme APF, dans laquelle les poids de première espèce  $\mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^i)$  coïncident avec  $\int h_t^i(x) q_t^i(x) dx$  et les éléments du mélange  $\tau^{\text{ind}}(x_t | x_{0:t-1}^i)$  s'écrivent  $\frac{h_t^i(x_t) q_t^i(x_t)}{\int h_t^i(x) q_t^i(x) dx}$ . Vérifions maintenant que le couple d'échantillons  $(l^i, x_t^i)$  produit par l'algorithme de rééchantillonnage indépendant en algorithme 9 peut effectivement être vu comme un tirage en dimension augmentée dont la loi marginale est  $\tilde{q}_t^N(x)$  en (4.17) :

- conditionnellement aux trajectoires passées  $\{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N$  ainsi qu'aux tirages intermédiaires courants  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N$ , la loi de  $l^i$  s'écrit

$$\Pr(l^i = l | \{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N) = w_t^{i,l}. \tag{4.18}$$

Ainsi comme  $\tilde{x}_t^{i,m} \sim q_t^m(x)$  pour  $1 \leq m \leq N$ , cette même loi de  $l^i$  sachant cette fois uniquement  $\{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N$  devient par intégration par rapport aux lois  $q_t^m$

$$\Pr(l^i = l | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) = \mathbb{E}[w_t^{i,l} | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N] = \int \int w_t^{i,l} \prod_{m=1}^N q_t^m(\tilde{x}_t^{i,m}) d\tilde{x}_t^{i,m} = \int h_t^l(x) q_t^l(x) dx, \tag{4.19}$$

puisque  $h_t^l$  en (4.8) est justement l'intégrale de  $w_t^{i,l}$  par rapport à toutes les lois  $q_t^j$  sauf  $q_t^l$ .  $\Pr(l^i = l | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N)$  correspond donc bien au poids de première espèce  $\mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^l)$  ;

- conditionnellement aux trajectoires passées  $\{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N$ , aux tirages intermédiaires courants  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N$  ainsi qu'à l'indice de rééchantillonnage  $l^i$ , on a pour tout borélien  $A$  :

$$\Pr(x_t^i \in A | \{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N, l^i) = \mathbb{1}_A(\tilde{x}_t^{i,l^i} \in A). \tag{4.20}$$

En retirant le conditionnement par rapport à  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N$ , la loi de  $x_t^i$  sachant uniquement

$\{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N$  et  $l^i$  devient alors :

$$\Pr(x_t^i \in A | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N, l^i) = \int \int \mathbb{1}_A(\tilde{x}_t^{i,l^i} \in A) p(\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N | l^i, \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) d\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N \quad (4.21)$$

$$= \int_A \int \frac{\Pr(l^i | \{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N, \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) p(\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N)}{\Pr(l^i | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N)} d\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N, \quad (4.22)$$

où cette dernière égalité découle de la formule de Bayes. Or on retrouve ici le produit des lois de propagation  $p(\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) = \prod_{m=1}^N q_t^m(\tilde{x}_t^{i,m})$ , ainsi que le poids de première espèce calculé au point précédent

$$\Pr(l^i | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) = \int h_t^{l^i}(x) q_t^{l^i}(x) dx = \mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^i). \quad (4.23)$$

Par ailleurs  $\Pr(l^i | \{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N, \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N) = w_t^{i,l^i}$ . On peut donc maintenant écrire :

$$\begin{aligned} \Pr(x_t^i \in A | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N, l^i) &= \frac{1}{\int h_t^{l^i}(x) q_t^{l^i}(x) dx} \int_A \int w_t^{i,l^i} \prod_{m=1}^N q_t^m(\tilde{x}_t^{i,m}) d\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{m=1}^N \quad (4.24) \\ &= \frac{1}{\int h_t^{l^i}(x) q_t^{l^i}(x) dx} \int_A \left( \int w_t^{i,l^i} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l^i}}^N q_t^m(\tilde{x}_t^{i,m}) d\{\tilde{x}_t^{i,m}\}_{\substack{m=1 \\ m \neq l^i}}^N \right) q_t^{l^i}(\tilde{x}_t^{i,l^i}) d\tilde{x}_t^{i,l^i} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{\int h_t^{l^i}(x) q_t^{l^i}(x) dx} \int_A h_t^{l^i}(\tilde{x}_t^{i,l^i}) q_t^{l^i}(\tilde{x}_t^{i,l^i}) d\tilde{x}_t^{i,l^i}, \quad (4.26)$$

d'où l'expression de la densité

$$p(x_t^i | \{x_{0:t-1}^j\}_{j=1}^N, l^i) = \frac{h_t^{l^i}(x) q_t^{l^i}(x)}{\int h_t^{l^i}(x) q_t^{l^i}(x) dx} \quad (4.27)$$

ce qui correspond donc également bien à la loi  $\tau^{\text{ind}}(x_t | x_{0:t-1}^i)$ .

En résumé, notre procédure de rééchantillonnage indépendant n'est autre que la première étape d'un algorithme APF particulier, car la densité  $\tilde{q}_t^N(x)$  selon laquelle nous tirons des échantillons i.i.d. (sachant  $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ ) coïncide avec la loi de mélange (4.17), qui elle-même constitue une classe de lois instrumentales  $\bar{q}(x_t)$  en (2.48) paramétrée par  $q(x_t | x_{0:t-1})$ .

Afin de mettre en évidence la pertinence de cette solution particulière, commentons le choix des poids de première espèce  $\mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^i)$  et des lois  $\tau^{\text{ind}}(x_t | x_{0:t-1}^i)$  :

- à l'instant  $t-1$ , les trajectoires  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$  sont tout d'abord rééchantillonnées suivant des

poids de première espèce coïncidant avec l'espérance des poids d'importance  $w_t^i$  de l'algorithme SIR définis en (2.37). En d'autres termes, ces trajectoires sont pré-sélectionnées de telle manière que le nouveau poids d'importance  $w_t^i$  affecté lors de l'étape de pondération de l'algorithme SIR ait tendance à être élevé ;

- après qu'une trajectoire  $x_{0:t-1}^i$  ait été sélectionnée et propagée via un tirage intermédiaire, il n'est pas garanti que son poids correspondant  $w_t^i$  soit effectivement grand. En tirant selon une densité proportionnelle à  $h_t^i(x)q_t^i(x)$ , l'objectif est de produire un échantillon dans une région où  $h_t^i(x)$  (l'espérance conditionnelle du poids d'importance  $w_t^i$ , sachant que  $(x_t^i = x)$ ) ainsi que la loi  $q_t^i(x)$  sont tous deux à valeurs élevées.

**Remarque 9.** Par conséquent, la densité de mélange  $\tilde{q}_t^N(x)$  apparaît comme une loi instrumentale candidate naturelle pour l'APF lorsque le but est de pré-sélectionner les trajectoires et de les étendre conformément aux lois d'importance conditionnelles  $q_t^i(x) = q(x|x_{0:t-1}^i)$  utilisées dans l'algorithme SIR. Si les densités d'importance  $q_t^i(x)$  (propres au mécanisme NIS) de l'algorithme SIR coïncident avec la loi d'importance optimale  $p(x|x_{t-1}^i, y_t)$ , on voit aisément que notre loi instrumentale canonique d'APF (4.17) se réduit au mélange cible (4.13)

$$\hat{p}(x_t|y_{0:t}) \propto \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i p(y_t|x_{t-1}^i) p(x_t|x_{t-1}^i, y_t). \quad (4.28)$$

En effet  $h_t^i$  en (4.8) se réduit à un terme proportionnel à  $w_{t-1}^i p(y_t|x_{t-1}^i)$ . Ainsi, la procédure de SIR indépendant devient alors équivalente à l'algorithme de FA-APF. Dans ce cas on peut tirer suivant  $\tilde{q}_t^N$  de manière très efficace (puisque (4.17) est un mélange connu) et l'estimateur résultant surpasse l'estimateur SIR  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$  [76]. D'autre part, lorsque l'algorithme de FA-APF n'est pas applicable, il reste possible de tirer suivant la loi de mélange  $\tilde{q}_t^N(x)$  en (4.17) dès que l'on est capable de tirer suivant la loi source  $q_t^i(x)$ , même si  $\mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^i)$  ne peut pas être calculé, ou si l'on ne peut pas tirer suivant  $\tau^{\text{ind}}(x_t|x_{0:t-1}^i)$ .

#### 4.1.2.2 Repondération des échantillons indépendants ?

Nous pouvons enfin utiliser cette interprétation en termes d'APF pour repondérer nos échantillons  $\{x_t^i\}_{i=1}^N$  conditionnellement indépendants issus de l'algorithme 9 de SIR indépendant. Étant donné que la loi  $\tilde{q}_t^N$  peut être vue comme un mélange de la forme  $\bar{q}$  en (2.48) ou (4.14), de paramètres  $\mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^i)$  et  $\tau^{\text{ind}}(x_t|x_{0:t-1}^i)$ , le produit  $\mu^{\text{ind}}(x_{0:t-1}^i) \times \tau^{\text{ind}}(x_t|x_{0:t-1}^i)$  se réduit à  $h_t^i(x)q_t^i(x)$ . Par suite, lorsque l'on vise le mélange (4.13), les poids de seconde espèce associés aux échantillons indépendants  $x_t^i$  s'écrivent

$$w_t^i \propto \frac{w_{t-1}^i f_t(x_t^i|x_{t-1}^i) g_t(y_t|x_t^i)}{h_t^i(x_t^i) q_t^i(x_t^i)}, \sum_{i=1}^N w_t^i = 1. \quad (4.29)$$

Notons que l'on pourrait calculer ces poids de seconde espèce dans le contexte de l'algorithme de Marginal APF en utilisant (2.49) (voir la fin de la section 2.3), moyennant un coût calculatoire supplémentaire, ce qui donnerait ici

$$w_t^i \propto \frac{\sum_{j=1}^N w_{t-1}^j f_t(x_t^i | x_{t-1}^j) p(y_t | x_t^i)}{\sum_{j=1}^N h_t^j(x_t^i) q_t^j(x_t^i)}, \quad \sum_{i=1}^N w_t^i = 1. \quad (4.30)$$

Nous obtenons donc un nouvel estimateur de  $\Theta_t$ ,

$$\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(x_t^i) \quad (4.31)$$

où les  $w_t^i$  sont définis en (4.29) et les  $x_t^i$  sont issus de l'algorithme 9 de SIR indépendant. Le calcul pratique de ces poids finaux s'appuie sur celui de  $h_t^i(x)$  en (4.8), lequel peut être approché par l'expression suivante grâce aux tirages supplémentaires  $\tilde{x}_t^{i,j}$  générés par l'algorithme 9 :

$$\widehat{h}_t^l(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{p_t^l(x)}{q_t^l(x)}}{\frac{p_t^l(x)}{q_t^l(x)} + \sum_{j \neq l} \frac{p_t^j(\tilde{x}_t^{i,j})}{q_t^j(\tilde{x}_t^{i,j})}}. \quad (4.32)$$

**Remarque 10.** Commentons cette approximation. Tout d'abord, elle n'induit pas de coût calculatoire supplémentaire puisque les tirages  $\tilde{x}_t^{i,j}$  ainsi que les poids  $\frac{p_t^j(\tilde{x}_t^{i,j})}{q_t^j(\tilde{x}_t^{i,j})}$  sont recyclés à partir de l'algorithme 9. Ensuite,  $\widehat{h}_t^l(x)$  peut être considéré comme l'espérance conditionnelle du  $l$ -ième poids d'importance normalisé et par ailleurs les  $\tilde{x}_t^{i,j}$  sont tirés suivant  $q_t^j(x)$ , donc  $\widehat{h}_t^l(x)$  est un estimateur non-biaisé de  $h_t^l(x)$ . Néanmoins, l'analyse de la variance de  $\widehat{h}_t^l(x)$  reste complexe car la dimension de l'intégrale intervenant dans l'expression de  $h_t^l(x)$  est directement liée au nombre de tirages  $N$  utilisés pour l'approximer. Cet aspect sera détaillé dans notre section de simulations et nous verrons que dans certains cas il est possible de prédire le comportement de  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$  par rapport à  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ . Enfin, l'introduction de cette approximation MC est difficile à quantifier en termes de variance supplémentaire dans l'estimateur final. Cependant, il n'est pas nécessaire de propager ces poids approchés dans le temps. En effet, l'approximation peut n'être utilisée que pour calculer l'estimateur local  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$ , et par ailleurs l'interprétation en termes d'algorithme SIR détaillée en section 4.1.1 assure qu'il est suffisant de propager des poids uniformes, d'un point de vue asymptotique.

### 4.1.3 Résumé

Résumons maintenant les discussions de la section 4.1. Lorsque le but est de calculer  $\Theta_t$  en (2.1) nous disposons de plusieurs options :

- utiliser l'algorithme SIR classique (voir l'algorithme 5) dans lequel on calcule l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  défini en (2.41). L'étape de rééchantillonnage qui fait suite au calcul de cet estimateur produit un jeu de particules conditionnellement dépendant et non-pondéré tiré suivant la loi  $\tilde{q}_t^N$ , et a pour but de remédier au phénomène de dégénérescence des poids ;
- une alternative permettant de limiter l'appauvrissement local provoqué par cette étape de rééchantillonnage traditionnelle consiste à utiliser l'algorithme 9 de SIR indépendant et à calculer l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ , basés sur les principes et analyses statistiques détaillés en section 3.2.2. Cet estimateur reste construit à partir d'une collection non-pondérée de particules tirées marginalement suivant la loi  $\tilde{q}_t^N$  mais ces échantillons sont désormais conditionnellement indépendants ;
- enfin, les échantillons produits par l'algorithme 9 peuvent également être considérés comme le résultat d'une procédure de tirage suivant une densité de mélange instrumentale de filtrage particulaire auxiliaire (4.17). Utilisant la méthodologie APF en interprétant la loi  $\tilde{q}_t^N$  comme étant un mélange et donc en disposant de points tirés indépendamment suivant ce mélange, il est possible de viser la loi de mélange  $\hat{p}(x_t|y_{0:t})$  en (4.13) qui constitue elle-même une approximation de la loi cible d'un algorithme APF générique,  $p(x_t|y_{0:t})$ . Ceci mène à l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$  en (4.31), pour lequel les poids  $w_t^i$  en (4.29) sont estimés en recyclant les tirages supplémentaires produits par l'algorithme 9. Cette approximation des poids introduit une approximation MC supplémentaire, mais l'interprétation propre au point précédent garantit qu'il est suffisant de propager des poids uniformes pour l'itération temporelle suivante.

Ces trois estimateurs vont maintenant être comparés en termes de performance et coût de calcul dans la section suivante au moyen de simulations numériques.

#### 4.1.4 Simulations

Nous commençons en section 4.1.4.1 par effectuer des simulations sur le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique (ARCH - AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) [28], modèle que nous détaillerons en début de cette section. D'une part, l'algorithme de FA-APF est réalisable dans ce modèle [78]. D'autre part, rappelons que notre estimateur pondéré  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$  (4.31) peut s'interpréter comme l'estimateur obtenu à partir d'un algorithme APF particulier utilisant la loi de mélange instrumentale  $\tilde{q}_t^N$  en (4.17), suivant laquelle on peut toujours effectuer des tirages (moyennant un coût calculatoire supplémentaire). L'estimateur déduit de l'algorithme FA-APF est ainsi utilisé comme référence et nous permet d'analyser la pertinence de la loi instrumentale  $\tilde{q}_t^N$  dans l'algorithme APF.

En section 4.1.4.2 nous considérons le problème de l'estimation de la vraisemblance prédictive  $p(y_t|y_{0:t-1})$  qui joue un rôle crucial dans l'estimation de paramètres ou les problèmes de lissage

[3].

Ensuite, dans la section 4.1.4.3, nous calculons nos estimateurs indépendants dans un contexte de poursuite de cible avec des observations en coordonnées polaires (voir l'exemple 4 en section 2.1.2). Nos estimateurs sont comparés à ceux obtenus à partir de l'algorithme SIR classique, pour un budget calculatoire fixé mesuré en termes de nombre d'opérations de tirages ; ceci implique que l'on compare  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  et  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  ( $M$  désignera dans toute cette section 4.1.4.3 le nombre de particules après l'étape de rééchantillonnage indépendant, utilisées pour les estimateurs associés) à  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  pour lequel  $N = \frac{M^2+M}{2}$ . Ainsi tous les estimateurs sont basés sur  $M^2 + M$  opérations d'échantillonnage (on ne fait pas la distinction entre tirages suivant une loi continue ou discrète). Les performances relatives des estimateurs sont analysées en fonction des paramètres du modèle d'espace d'état.

Enfin en section 4.1.4.4 nous calculons nos estimateurs dans des modèles où la dimension  $d$  de l'état caché est plus grande et nous analysons leurs performances par rapport aux estimateurs de filtrage particulière classiques en fonction de la dimension  $d$  avec un nombre fixé d'opérations de tirage. Dans toute cette section, nos expériences sont moyennées sur  $P = 1000$  simulations (ou itérations MC), nous posons  $\varphi(x) = x$  dans (2.1) et nous utilisons un critère moyenné sur le temps de RMSE, défini comme

$$\text{RMSE}(\hat{\Theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \|\hat{\Theta}_t^{(p)} - x_t^{(p)}\|^2 \right)^{1/2} \quad (4.33)$$

où  $x_t^{(p)}$  est le vrai état caché à l'instant  $t$  pour la  $p$ -ème réalisation MC,  $\hat{\Theta}_t^{(p)}$  est un estimateur de  $x_t^{(p)}$  et  $T$  est la durée du scénario.

#### 4.1.4.1 Comparaison avec les algorithmes APF

Nous nous focalisons maintenant sur l'interprétation de notre algorithme à rééchantillonnage indépendant en termes de mécanisme APF. Nous étudions le modèle ARCH qui est un cas particulier de modèle HMC (2.10) dans lequel :

$$f_t(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; 0, \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2) \quad (4.34)$$

$$g_t(y_t|x_t) = \mathcal{N}(y_t; x_t, R). \quad (4.35)$$

Nous fixons  $R = 1$ ,  $\beta_0 = 3$  et  $\beta_1 = 0.75$ . Dans ce modèle on peut calculer les poids d'importance et la loi d'importance sous-jacents au FA-APF (voir section 2.2.2.2) :

$$p(y_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(y_t; 0, R + \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2), \quad (4.36)$$

$$p(x_t|x_{t-1}, y_t) = \mathcal{N}\left(x_t; \frac{\beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2}{R + \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2} y_t, \frac{R(\beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2)}{R + \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}^2}\right). \quad (4.37)$$

Par conséquent, il est possible d'obtenir directement des échantillons i.i.d. suivant la loi de mélange cible  $\hat{p}(x_t|y_{0:t})$  en (4.13) et donc de calculer l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{FA},N}$  basé sur l'algorithme de FA-APF. Dans ce contexte, le M-APF décrit en fin de section 2.3 coïncide avec le FA-APF. Rappelons que l'algorithme de FA-APF peut également être vu comme un cas particulier de notre algorithme 9 de filtrage particulaire avec rééchantillonnage indépendant, dans lequel la loi d'importance  $q(x_t|x_{0:t-1})$  coïncide avec  $p(x_t|x_{t-1}, y_t)$  (voir section 4.1.2.1). Soulignons cependant le fait que la procédure FA-APF ne peut être utilisée que dans des modèles spécifiques, tandis que l'algorithme 9 peut être utilisé avec n'importe quelle loi d'importance  $q(x_t|x_{0:t-1})$ , tout en conservant la même interprétation que le mécanisme FA-APF (voir notre discussion en section 4.1.2.1). Nous calculons également nos estimateurs basés sur les procédures de SIR indépendant  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  et  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$  en utilisant comme loi d'importance la loi de transition  $q(x_t|x_{0:t-1}) = f_t(x_t|x_{t-1})$ ; notons que l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$  peut être considéré comme un estimateur déduit d'un algorithme APF dans lequel le mélange d'importance (2.48) coïncide avec  $\tilde{q}_t^N$ . Nous calculons enfin l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{APF},N}$  qui est obtenu à partir d'un algorithme APF avec  $\mu(x_{0:t-1}) \propto w_{t-1}p(y_t|x_{t-1})$  et  $\tau(x_t|x_{0:t-1}) = f_t(x_t|x_{t-1})$ ; dans cette configuration, les particules sont donc pré-sélectionnées à l'aide des poids de première espèce dits « optimaux », puis tirées non pas suivant la loi d'importance optimale mais simplement suivant la loi de transition.

Le RMSE de chaque estimateur est affiché dans la figure 4.1a en fonction du nombre de tirages  $N$ . Il est intéressant de noter que notre algorithme utilisant le rééchantillonnage indépendant pondéré, lequel produit  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$ , présente la même performance que l'algorithme FA-APF quand  $N \geq 20$ , bien qu'il n'utilise pas les poids d'importance optimaux  $p(y_t|x_{t-1})$  ni la loi d'importance optimale  $p(x_t|x_{t-1}, y_t)$ . Ceci signifie que la loi de mélange  $\tilde{q}_t^N$  implicitement construite par notre algorithme certes diffère du mélange cible  $\hat{p}(x_t|y_{0:t})$  en (4.13), puisqu'en effet les estimateurs  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  et  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N}$  présentent des performances différentes, mais reste néanmoins presque aussi pertinente que ce mélange cible en termes de performance dans le modèle considéré ici. De plus, la loi de mélange  $\tilde{q}_t^N$  formée par le mécanisme de rééchantillonnage présente l'avantage que son interprétation ne dépend pas de la loi d'importance  $q_t^i$  choisie, et qu'il reste donc possible de tirer suivant cette loi dans des modèles HMC généraux (2.10) pour lesquels le mélange cible  $\hat{p}(x_t|y_{0:t})$  lui-même n'est plus utilisable en tant que loi de tirage.

Nous observons également que la repondération des échantillons finaux est bénéfique comparée à l'attribution de poids uniformes. Afin d'analyser le comportement des poids associés à

notre estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{I-SIR-w,N}$ , nous calculons le nombre effectif normalisé de particules défini par  $N_{\text{neff}} = \frac{1}{N \sum_{i=1}^N (w_t^i)^2}$ . Nous observons en figure 4.1b que  $N_{\text{neff}}$  converge rapidement de 0.9 vers 1 quand  $N$  augmente de 5 à 100 (atteignant  $N_{\text{neff}} = 0.99$  pour  $N = 30$ ), ce qui signifie que ces poids ont tendance à devenir uniformes, et donc que les estimateurs  $\widehat{\Theta}_t^{I-SIR,N}$  et  $\widehat{\Theta}_t^{I-SIR-w,N}$  deviennent proches quand  $N$  est suffisamment grand.

Enfin, nous montrons en figure 4.1c le RMSE associé aux divers estimateurs en fonction du temps. On peut ici observer que  $\widehat{\Theta}_t^{I-SIR,N}$  (dédié d'échantillons tirés suivant  $f_t(x_t|x_{t-1})$ ) et  $\widehat{\Theta}_t^{\text{FA},N}$  présentent la même performance à tout instant  $t$ .

#### 4.1.4.2 Estimation de la vraisemblance prédictive

Considérons deux manières d'approcher la quantité  $p(y_t|y_{0:t-1})$ , basées sur la remarque qu'elle peut être déduite de la densité de filtrage, puisque

$$p(y_t|y_{0:t-1}) = \int g_t(y_t|x_t) f_t(x_t|x_{t-1}) p(x_{0:t-1}|y_{0:t-1}) dx_{0:t-1}.$$

La première est un estimateur non-biaisé utilisant les  $N^2$  tirages intermédiaires  $\tilde{x}_t^{i,j} \sim q(x_t|x_{t-1}^j)$  propres à notre procédure de rééchantillonnage indépendant, ce qui correspond donc à un estimateur avant rééchantillonnage :

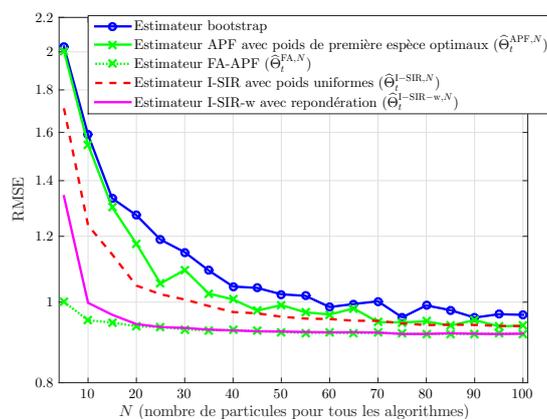
$$\widehat{p}(y_t|y_{0:t-1}) = \sum_{j=1}^N w_{t-1}^j \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_t(y_t|\tilde{x}_t^{i,j}) \frac{f_t(\tilde{x}_t^{i,j}|x_{t-1}^j)}{q(\tilde{x}_t^{i,j}|x_{t-1}^j)}. \quad (4.38)$$

La seconde utilise l'interprétation en termes d'APF de notre algorithme. En effet, à partir de nos échantillons repondérés après rééchantillonnage on peut construire l'estimateur suivant :

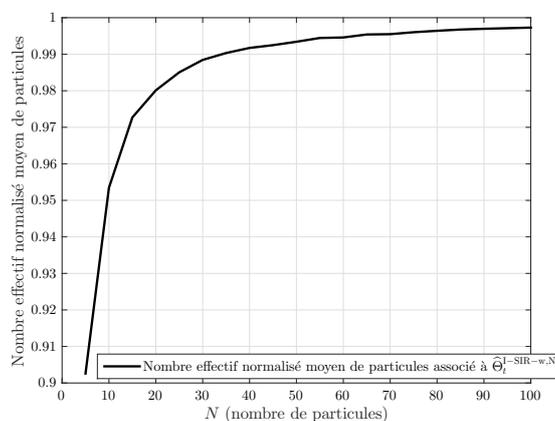
$$\widehat{p}(y_t|y_{0:t-1}) = \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i g_t(y_t|x_t^i) \frac{f_t(x_t^i|x_{t-1}^i)}{\widehat{h}_t^i(x_t^i) q_t^i(x_t^i)}, \quad (4.39)$$

où les termes  $\widehat{h}_t^i(x_t^i)$  ont déjà été estimés par recyclage des  $N^2$  particules intermédiaires.

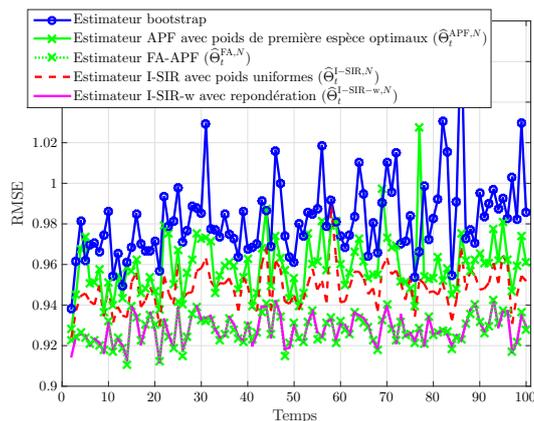
La qualité de ces approximations peut être illustrée dans un modèle statique générique. Considérant donc ici un modèle statique linéaire et gaussien, nous avons estimé  $p(y)$  à partir de (4.38) (qui est également l'estimateur déduit d'un algorithme NIS avec  $N^2$  tirages) d'une part, et à partir de (4.39) d'autre part. En outre nous considérons également un estimateur déduit d'un algorithme NIS avec  $N$  tirages (voir [26]). On peut observer sur la figure 4.2 que les estimateurs (4.39) et (4.38) convergent tous deux bien plus vite et régulièrement vers la vraie valeur que celui propre à l'algorithme NIS lorsque  $N$  augmente (rappelons que l'estimateur (4.39) n'est basé que sur  $N$  tirages comme celui déduit de l'algorithme NIS).



(a) RMSE en fonction du nombre de particules



(b) Nombre effectif normalisé moyen de particules



(c) RMSE en fonction du temps

FIGURE 4.1 – Modèle ARCH -  $R = 1$ ,  $\beta_0 = 3$  et  $\beta_1 = 0.75$  - (a) L'estimateur basé sur le mécanisme de rééchantillonnage indépendant avec une repondération finale présente la même performance que l'estimateur déduit de l'algorithme FA-APP. Le mécanisme de repondération finale est bénéfique comparé à l'utilisation de poids uniformes. - (b) Quand  $N$  est grand, les poids finaux associés à l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{I-SIR-w,N}$  ont tendance à devenir uniformes. - (c) RMSE en fonction du temps des divers estimateurs pour  $N = 100$ .

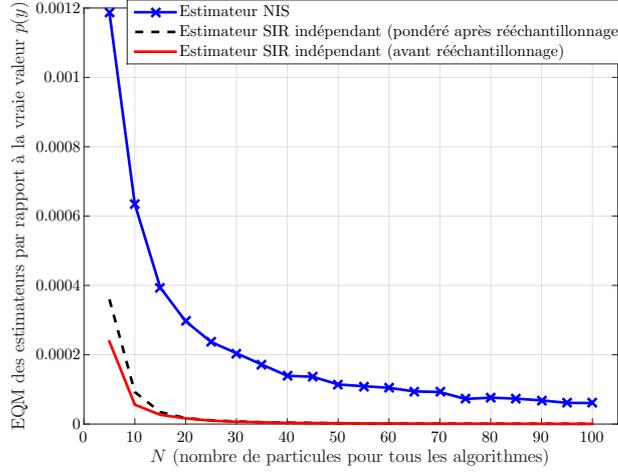


FIGURE 4.2 – Modèle statique linéaire et gaussien -  $\sigma_x^2 = 10$ ,  $\sigma_y^2 = 3$ . Estimateurs de la constante de normalisation  $p(y)$ . L'erreur quadratique  $(\hat{p}(y) - p(y))^2$  (moyennée sur  $P = 1000$  réalisations MC) est affichée en fonction du nombre  $N$  de particules finales pour tous les algorithmes. Notons qu'ici l'estimateur SIR indépendant (avant rééchantillonnage) est exactement équivalent à un estimateur NIS avec  $N^2$  particules car le scénario est statique.

#### 4.1.4.3 Poursuite de cible avec observations en coordonnées polaires

Nous étudions maintenant la performance de nos algorithmes dans un scénario de poursuite avec des observations en coordonnées polaires comme présenté en exemple 4. Nous cherchons donc à estimer le vecteur d'état  $x_t = [p_{x,t}, \dot{p}_{x,t}, p_{y,t}, \dot{p}_{y,t}]^T$  (position et vitesse en coordonnées cartésiennes) d'une cible à partir d'observations bruitées  $y_t$  en coordonnées polaires. Nous fixons cette fois l'intervalle de temps entre deux observations à  $\tau = 1$ . Ainsi, les lois du modèle (2.10) correspondant à ce problème de pistage sont

$$f_t(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; Fx_{t-1}, Q) \quad (4.40)$$

$$g_t(y_t|x_t) = \mathcal{N}\left(y_t; \begin{pmatrix} \sqrt{p_{x,t}^2 + p_{y,t}^2} \\ \arctan \frac{p_{y,t}}{p_{x,t}} \end{pmatrix}, R\right) \quad (4.41)$$

où

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \sigma_Q^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

La loi d'importance conditionnelle utilisée pour tirer les particules est la loi de transition  $q(x_t|x_{0:t-1}) = f_t(x_t|x_{t-1})$ ; ainsi les poids d'importance  $w_t^i$  à l'instant  $t$  sont proportionnels

à  $w_{t-1}^i g(y_t | x_t^i)$ .

Nous calculons les estimateurs  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  (voir (2.41)),  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  (voir (4.10)),  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  (voir (4.31)) avec  $N = \frac{M^2+M}{2}$  de manière à fixer le nombre d'opérations de tirage. Nous comparons également ces estimateurs avec l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{IPF},N}$  déduit de l'IPF à 5 îlots et  $N/5$  particules par îlot, ainsi que l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIRR},N}$  (calculé après rééchantillonnage) obtenu à partir d'une procédure SIR classique utilisant un rééchantillonnage résiduel avec rééchantillonnage stratifié pour sa partie résiduelle (voir section 1.4.3), plutôt qu'un rééchantillonnage multinomial [20]. Notons que l'on utilise un petit nombre d'îlots pour l'IPF, ce qui serait peu judicieux en termes de coût en pratique car cela ne permettrait pas une parallélisation efficace. Cependant, comme montré en [103], l'augmentation du nombre d'îlots ne peut que détériorer la performance de l'estimateur final. Afin de comparer les performances en termes de RMSE nous choisissons donc une paramétrisation favorable pour l'IPF, sans souci de parallélisation.

Les résultats sont présentés pour deux jeux de paramètres différents. La figure 4.3a correspond au cas où  $\sigma_Q = \sqrt{10}$ ,  $\sigma_\rho = 0.25$  et  $\sigma_\theta = \frac{\pi}{720}$  tandis que la figure 4.3b correspond à un cas très informatif où  $\sigma_Q = \sqrt{10}$ ,  $\sigma_\rho = 0.05$  et  $\sigma_\theta = \frac{\pi}{3600}$ . Dans la première configuration, nous remarquons la supériorité de l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  par rapport aux autres estimateurs et le fait qu'il constitue une amélioration par rapport à l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$ , lequel ne repose pas sur des échantillons pondérés, pour  $M$  quelconque. Comparé à l'estimateur SIS classique, l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  est également meilleur pourvu que le nombre d'échantillons  $M$  reste petit ( $M < 30$ , c'est-à-dire  $N < 465$ ) mais se retrouve ensuite dépassé. Cependant, comme le montre la figure 4.3b, lorsque les observations deviennent informatives l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  offre les meilleures performances. Contrairement aux estimateurs  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$ ,  $\hat{\Theta}_t^{\text{IPF},N}$  et  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIRR},N}$ , notre estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  ne souffre pas de la dégénérescence des poids d'importance. En effet lorsque les observations sont informatives (ce qui implique une vraisemblance  $g_t(y_t | x_t)$  à support très restreint), seul un petit nombre de poids d'importance ont une valeur non nulle et les méthodes avancées de rééchantillonnage ne permettent pas d'obtenir un support final diversifié. A contrario, la procédure de rééchantillonnage indépendant garantit la diversité des échantillons finaux lorsque l'on utilise des poids finaux uniformes.

Rappelons enfin que  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  requiert une approximation MC (4.32). Une étude de l'approximation  $\hat{h}_t^l$  en (4.32) révèle que tous les termes  $\frac{p_t^j(\bar{x}^{i,j})}{q_t^j(\bar{x}^{i,j})}$  avec  $q_t^i(x) = f_t(x_t | x_{t-1}^i)$  peuvent être considérés comme négligeables en comparaison de n'importe quel autre de ces termes plus grand, dès lors que le modèle est très informatif. Les poids non-normalisés de deuxième espèce approchés ont alors tendance à devenir égaux aux poids non-normalisés intermédiaires  $\frac{p_t^j}{q_t^j}$  des particules correspondantes, et l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  s'en retrouve affecté par le manque de diversité.

Pour référence, les temps calculatoires moyens associés à une unique itération temporelle des

algorithmes (sans parallélisation) lorsque  $M = 50$  sont les suivants (cette simulation utilise le logiciel Matlab et un ordinateur portable équipé d'un processeur Intel(R) Core(TM) i7-4810MQ à 2.80 GHz) :  $t_{SIR} \approx 0.0010s$ ,  $t_{IPF} \approx 0.0014s$ ,  $t_{I-SIR} \approx 0.0011s$ ,  $t_{I-SIR-w} \approx 0.0020s$ .

#### 4.1.4.4 Problèmes en grande dimension

En dernier lieu nous étudions l'impact de la dimension de l'état caché  $x_t$ . Considérons un vecteur d'état de dimension  $d = 4 \times l$ ,  $x_t = [p_{x,t}(1), \dot{p}_{x,t}(1), p_{y,t}(1), \dot{p}_{y,t}(1), \dots, p_{x,t}(l), \dot{p}_{x,t}(l), p_{y,t}(l), \dot{p}_{y,t}(l)]^T$ . Chaque composante  $x_t(l) = [p_{x,t}(l), \dot{p}_{x,t}(l), p_{y,t}(l), \dot{p}_{y,t}(l)]^T$  évolue indépendamment de toutes les autres composantes, suivant

$$f_t(x_t(l)|x_{t-1}(l)) = \mathcal{N}(x_t(l); Fx_{t-1}(l), Q) \quad (4.43)$$

où  $F$  et  $Q$  sont donnés par (4.49), et se trouve observée indépendamment selon

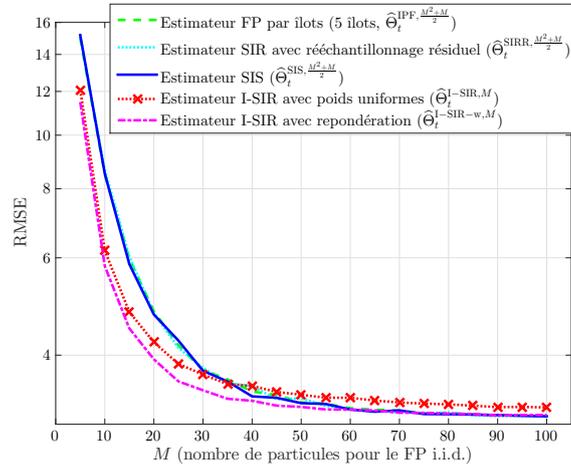
$$g_t(y_t|x_t(l)) = \mathcal{N}(y_t; Hx_t(l), R) \quad (4.44)$$

où

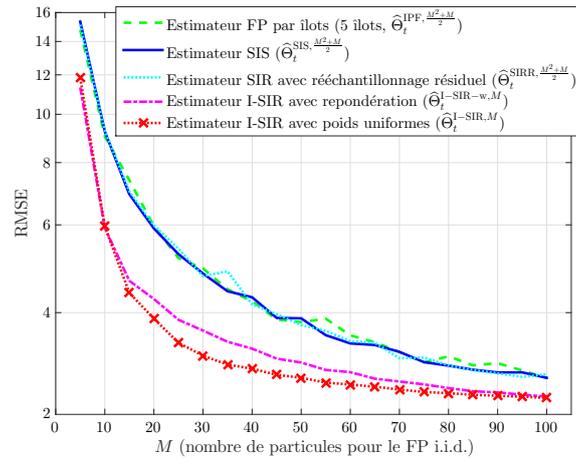
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons à nouveau l'estimateur basé sur le FP classique  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  (voir (2.41)). Le FP est bien connu pour avoir tendance à dégénérer lorsque la dimension de l'état caché augmente (voir section 2.2). Nous évaluons également les estimateurs  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  (voir (4.10)) et  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  (voir (4.31)), avec  $N = \frac{M^2+M}{2}$  pour  $M = 100$  ou  $M = 1000$ , et présentons les RMSE de ces estimateurs en fonction de la dimension  $d$  afin d'observer l'effet de cette dimension sur notre estimateur ainsi que l'estimateur fourni par le FP classique. Notons que l'on utilise ici la loi d'importance élémentaire  $f_t(x_t|x_{t-1})$  pour mesurer l'impact de notre méthode, mais les améliorations développées pour les modèles à grande dimension (telles que par ex. les travaux [101], consistant à diviser l'espace d'état afin de se ramener à une loi d'importance conditionnelle qui soit unimodale, dans le but d'augmenter le nombre de particules effectif) peuvent aussi être incluses dans l'algorithme de SIR indépendant.

Les résultats sont fournis en figure 4.4. On peut remarquer que les estimateurs  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  et  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  surpassent  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS}, \frac{M^2+M}{2}}$  de plus en plus significativement à mesure que la dimension augmente, en raison du phénomène d'appauvrissement local. Tout d'abord,  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},M}$  surpasse  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},M}$  tant que la dimension de l'état caché reste faible ( $d = 4$  et  $d = 8$ ); lorsque  $d$  augmente, l'estimateur construit à l'aide d'échantillons pondérés suivant un  $\tilde{q}^N$  approché limite toujours le phénomène de dégénérescence en comparaison de celui basé sur des tirages pondérés suivant  $q$ ,



(a)  $\sigma_Q = \sqrt{10}$ ,  $\sigma_\rho = 0.25$  et  $\sigma_\theta = \frac{\pi}{720}$



(b)  $\sigma_Q = \sqrt{10}$ ,  $\sigma_\rho = 0.05$  et  $\sigma_\theta = \frac{\pi}{3600}$

FIGURE 4.3 – Modèle de poursuite de cible à partir d’observations en coordonnées polaires - (a) la procédure de rééchantillonnage indépendant avec repondération finale est meilleure que les autres estimateurs et tout particulièrement intéressante lorsque le nombre d’échantillons finaux est faible - (b) dans le cas informatif, tous les estimateurs souffrent de la dégénérescence des poids d’importance sauf celui basé sur l’algorithme de rééchantillonnage indépendant non-pondéré. Pour obtenir les mêmes performances que  $\hat{\Theta}_t^{I-SIR, M}$  lorsque  $M = 20$ , le FP classique utilise  $N = (50^2 + 50)/2 = 1275$  tirages.

mais l'utilisation de tirages non-pondérés quand la dimension est élevée garantit la diversité et donne une meilleure performance. Notons que les algorithmes de SIR dépendant et indépendant donnent à peu près la même performance quand  $d$  est faible, mais l'écart entre les estimateurs SIR dépendant et indépendant croît avec la dimension. Plus précisément, cet écart apparaît et s'agrandit significativement pour  $d$  augmentant de 8 à 20 ; pour les valeurs plus élevées de  $d$ , il croît alors linéairement avec  $d$  ce qui est entièrement dû au fait que le RMSE effectue l'addition de plus en plus de termes présentant le même écart de performance par dimension qu'avec  $d = 20$  (ce qui implique qu'autour de  $d = 20$ , le SIR dépendant a déjà complètement dégénéré, avec seulement un ou très peu de poids non-nuls). La même progression peut être observée entre les estimateurs SIR indépendant pondéré et non-pondéré, sauf que cette fois pour  $d < 12$  l'estimateur pondéré surpasse même légèrement l'estimateur non-pondéré, et l'écart de performance pour  $d > 20$  (lequel croît à nouveau linéairement avec  $d$ ) est plus faible.

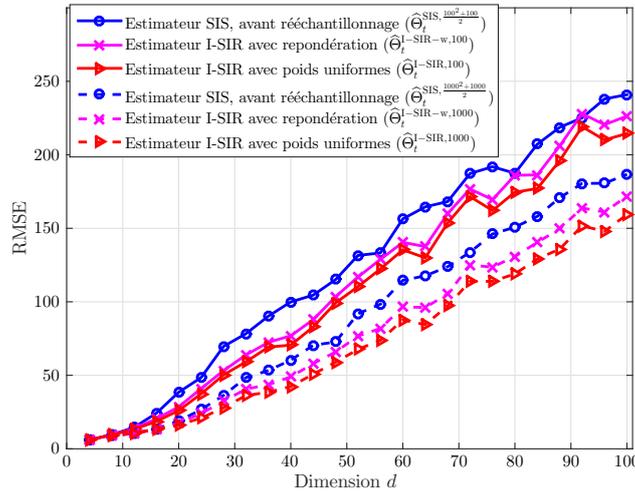


FIGURE 4.4 – Modèle linéaire gaussien multidimensionnel -  $\sigma_Q^2 = 25$ ,  $\sigma_x^2 = 4$  et  $\sigma_y^2 = 4$ . Les estimateurs d'intérêt sont mutuellement comparés en fonction de la dimension  $d$  de l'état caché  $x_t$  pour des nombres fixés d'opérations d'échantillonnage. Le mécanisme de rééchantillonnage indépendant limite l'impact de l'accroissement de la dimension  $d$  et l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR}, 1000}$  avec  $d = 46$  présente la même performance que  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS}, 500500}$  avec  $d = 32$ .

## 4.2 Compromis coût/performance : rééchantillonnage semi-indépendant

Malgré ses bénéfices en termes de diversité du support final, le mécanisme de renouvellement propre à l'algorithme 9 de SIR indépendant entraîne le tirage de  $N^2$  particules intermédiaires  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{i,j=1}^N$  (plus  $N$  étapes de rééchantillonnage), contrairement à l'algorithme SIR classique qui

tire seulement  $N$  particules intermédiaires  $\{\tilde{x}_t^j\}_{j=1}^N$  (suivi également de  $N$  étapes de rééchantillonnage).

La question se pose donc maintenant de savoir si ce coût supplémentaire est effectivement nécessaire. L'objectif de cette section réside ainsi dans la conception d'un algorithme à la fois efficace en termes de coût calculatoire et en termes de performances statistiques. Ce nouvel algorithme et l'estimateur associé sont décrits et analysés en sections 4.2.1 et 4.2.2. Des simulations numériques, comprenant en particulier une comparaison avec la procédure existante connue sous le nom de resample-move (se référer à la section 2.2.2 pour une brève présentation de cette méthode, qui sera néanmoins rappelée ici), sont présentées en section 4.2.4.

### 4.2.1 Un procédé de rééchantillonnage intermédiaire

Les mécanismes de rééchantillonnage classique et indépendant peuvent être rapprochés sous un cadre commun. Ces deux procédés consistent à construire progressivement  $N$  ensembles pondérés  $\tilde{x}_t^{1,\cdot}, \dots, \tilde{x}_t^{N,\cdot}$ , c'est-à-dire les  $N$  supports (la notation  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  désigne l'ensemble  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N$ ) puis à retirer un échantillon  $x_t^i$  parmi chacun d'entre eux (voir figure 4.5). La différence se trouve dans la manière de construire l'ensemble  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  à partir de l'ensemble « précédent »  $\tilde{x}_t^{i-1,\cdot}$  : dans le mécanisme SIR classique,  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  est une copie de  $\tilde{x}_t^{i-1,\cdot}$ , c'est-à-dire que l'étape de rééchantillonnage revient à retirer  $N$  échantillons d'un support commun  $\tilde{x}_t^{1,\cdot}$ , comme nous l'avons vu en algorithme 5. Au contraire, dans le mécanisme SIR indépendant en algorithme 9, un support entièrement nouveau  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  est tiré à chaque itération  $i$ . En d'autres termes, d'un point de vue calculatoire les deux procédés retirent  $N$  particules à partir d'un certain ensemble intermédiaire  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{i,j=1}^N$ , mais la construction de cet ensemble requiert  $N$  étapes préliminaires de tirages intermédiaires indépendants dans le cas classique, et  $N^2$  dans le cas indépendant.

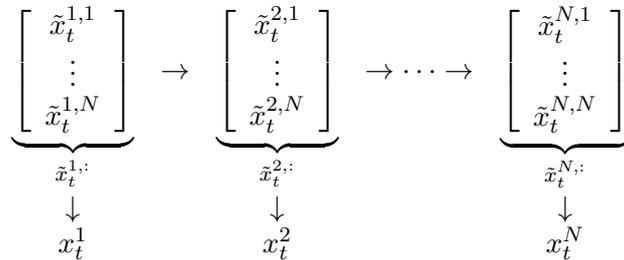


FIGURE 4.5 – Les mécanismes de rééchantillonnage classique, indépendant et semi-indépendant. Chaque procédé tire  $N$  supports  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  et retire un échantillon  $x_t^i$  parmi chacun d'entre eux. La différence se trouve dans la manière de construire  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  à partir de  $\tilde{x}_t^{i-1,\cdot}$  :  $\tilde{x}_t^{i,j}$  est une copie de  $\tilde{x}_t^{i-1,j}$  dans le cas classique ; est une nouvelle particule dans le cas indépendant ; peut être soit copiée soit retirée dans le cas semi-indépendant.

Dans cette section nous proposons un mécanisme de rééchantillonnage qui produit un ensemble intermédiaire  $\{\tilde{x}_t^{i,j}\}_{i,j=1}^N$  plus diversifié que dans le cas classique, mais à moindre coût comparé au cas indépendant. Partant de  $\tilde{x}_t^{i-1,j}$ ,  $\tilde{x}_t^{i,j}$  peut désormais être soit une copie (pour réduire le coût) soit un nouvel échantillon (pour améliorer la diversité). Un pseudo-algorithme est le suivant :

- fixer le nombre  $k$  (avec  $0 \leq k \leq N$ ) d'échantillons qui seront retirés à chaque itération ;
- à l'itération  $i$ , tirer uniformément un sous-ensemble  $m^{i,1:k} = \{m^{i,1}, \dots, m^{i,k}\}$  de taille  $k$  à partir de  $\{1, \dots, N\}$  (les  $m^{i,l}$  sont les indices des particules qui seront retirées) ;
- ensuite  $\tilde{x}_t^{i,j} \sim q(x_t|x_{0:t-1}^j)$  si  $j \in m^{i,1:k}$ , et  $\tilde{x}_t^{i,j} = \tilde{x}_t^{i-1,j}$  si  $j \notin m^{i,1:k}$ .

Remarquons enfin que l'algorithme SIR classique (resp. indépendant) correspond au cas particulier  $k = 0$  (resp.  $k = N$ ). L'étape de rééchantillonnage liée à cette procédure est synthétisée dans l'algorithme 10.

---

**Algorithme 10** Algorithme SIR semi-indépendant (*étape de rééchantillonnage uniquement*)

---

**Entrées :**  $q(x_t|x_{0:t-1})$ ,  $y_t$ ,  $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ ,  $\{\tilde{w}_t^i, \tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$ ,  $\bar{w}_t^i$  les poids non-normalisés associés aux  $\tilde{x}_t^i$  ;

**Sorties :**  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$  ;

**pour**  $1 \leq j \leq N$  **faire**  
 $\tilde{x}_t^{1,j} \leftarrow \tilde{x}_t^j$ ,  $\tilde{w}_t^{1,j} \leftarrow \tilde{w}_t^j$ ,  $\bar{w}_t^{1,j} \leftarrow \bar{w}_t^j$ .

**fin pour**

**pour**  $1 \leq i \leq N$  **faire**  
**R.**  $l^i \sim \text{Pr}(l) = \tilde{w}_t^{i,l}$  ;  
*Renouvellement partiel du support pour l'itération  $i + 1$*   
**si** ( $i < N$ ) **alors**  
 $\tilde{x}_t^{i+1,:} \leftarrow \tilde{x}_t^{i,:}$ ,  $\bar{w}_t^{i+1,:} \leftarrow \bar{w}_t^{i,:}$  ;  
**pour**  $1 \leq j \leq k$  **faire**  
 $m^j \sim \text{Pr}(n|n \in 1:N \setminus \{m^{1:j-1}\}) = \frac{1}{N-j+1}$  ;  
 $\tilde{x}_t^{i+1,m^j} \sim q(x_t|x_{0:t-1}^{m^j})$  ;  
 $\bar{w}_t^{i+1,m^j} = w_{t-1}^{m^j} \frac{f_t(\tilde{x}_t^{i+1,m^j}|x_{t-1}^{m^j})g_t(y_t|\tilde{x}_t^{i+1,m^j})}{q(\tilde{x}_t^{i+1,m^j}|x_{0:t-1}^{m^j})}$  ;  
**fin pour**  
 $\tilde{w}_t^{i+1,:} \propto \bar{w}_t^{i+1,:}$ ,  $\sum_{j=1}^N \tilde{w}_t^{i+1,j} = 1$  ;  
**fin si**  
**fin pour**  
Poser  $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N = \{\frac{1}{N}, \tilde{x}_t^{i,l^i}\}_{i=1}^N$ .

---

Nous allons maintenant étudier plus en détail le compromis entre coût et diversité qu'entraîne cet algorithme.

### 4.2.2 Performances vs. coût calculatoire

Commençons par évaluer la performance de cette procédure en comparant les variances des estimateurs calculés après l'étape de rééchantillonnage car celles-ci affectent les variances des estimateurs construits aux itérations temporelles ultérieures [20]. Définissons ainsi  $\widehat{\Theta}_t^{:,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^{:,i})$ , où la notation générique  $x_t^{:,i}$  représente les points produits soit par l'algorithme 5, l'algorithme 9 ou l'algorithme 10 (nous considérons donc les estimateurs  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$ ,  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  et  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}$ , où SR signifie "semi-resampling"). Nous avons la proposition suivante, dont la preuve est donnée en annexe B.1.

**Proposition 7.** *Conditionnellement à l'ensemble précédent de particules  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ , pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq N$ , on a :*

$$\mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}] = \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}] = \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}], \quad (4.45a)$$

$$\text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}) \leq \text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) \leq \text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}), \quad (4.45b)$$

$$\text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) \leq \text{var}(\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k-1}). \quad (4.45c)$$

Notons que la preuve, utilisant le théorème de Rao-Blackwell, permet d'obtenir des inégalités de variance mais pas de quantifier ces variances en fonction de  $k$ .

Ainsi lorsque le nombre  $k$  de retirages intermédiaires croît entre 0 et  $N$ , la variance conditionnelle de l'estimateur de rééchantillonnage semi-indépendant  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}$  décroît de la borne supérieure de l'inégalité (4.45b) (si  $k = 0$ , l'estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,0}$  se réduit à l'estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$ ) jusqu'à sa borne inférieure (si  $k = N$ , l'estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,N}$  se réduit à l'estimateur  $\widehat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ ). Rappelons (comme vu en section 4.2.1) que  $N + (N - 1) \times k$  tirages sont requis pour construire  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}$  ; le paramètre  $k$  de la procédure SR permet donc de fixer un compromis entre réduction de variance et budget calculatoire.

**Remarque 11.** Par ailleurs nous pouvons nous demander si l'algorithme 10 pourrait être partiellement parallélisé. En effet remarquons que dans cet algorithme, à n'importe quelle itération  $i$  le choix des indices de tirage est indépendant des échantillons. De plus, les retirages eux-mêmes utilisent toujours le même jeu de densités d'importance quel que soit l'itération  $i$  de l'algorithme (mais bien sûr les indices de tirage sélectionnés sont différents) car ces densités ne dépendent que des trajectoires passées qui restent inchangées. En outre, ces deux étapes, le choix des indices de tirage puis les retirages suivant les lois d'importance, ne sont dépendantes entre elles que lors d'une même itération  $i$ , et complètement indépendantes des mêmes étapes à d'autres itérations. Ceci implique donc d'une part que ces deux étapes puissent en fait être effectuées pour toutes les itérations  $i$  indépendamment de la constitution des supports et des étapes de rééchantillonnage, et d'autre part qu'elles puissent par exemple être effectuées au début de l'algorithme avant toute constitution de support ou étape de rééchantillonnage. Ces

deux étapes sont ainsi entièrement parallélisables.

Suite à la remarque ci-dessus, rappelons que contrairement à l'étape de choix des indices de retraitage et à l'étape de retraitage, l'étape de constitution des supports intermédiaires et l'étape de rééchantillonnage à partir de ces supports ne sont en aucun cas parallélisables dans l'algorithme 10. Nous allons maintenant présenter une version modifiée de cet algorithme qui permet de paralléliser également ces étapes.

### 4.2.3 Une version parallélisable

L'algorithme 10 peut être transformé pour donner une version entièrement parallélisable, que nous appellerons l'algorithme de SR non-séquentiel (Non-Sequential SR - NSSR). À l'itération  $i$ , au lieu de dupliquer  $N - k$  particules à partir du support précédent  $\tilde{x}_t^{i-1}$  (voir la figure 4.5), nous proposons de toujours dupliquer  $N - k$  particules à partir de l'ensemble initial  $\tilde{x}_t^1$ . Les  $N - 1$  nouveaux supports ainsi que les particules finales rééchantillonnées peuvent donc être produits parallèlement, contrairement à l'algorithme 10 de SR qui par nature les produit séquentiellement (bien qu'il puisse toutefois permettre la parallélisation des étapes préliminaires de choix d'indices de retraitage, et de retraitage intermédiaire, comme vu en remarque 11). Bien sûr, cette procédure altère la diversité de l'ensemble final de particules en comparaison de la version non-parallélisable, comme l'illustre la proposition suivante dont la preuve est donnée en annexe B.2.

**Proposition 8.** Soit  $\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}$  l'estimateur construit via la procédure de rééchantillonnage semi-indépendant non-séquentiel. Alors sachant l'ensemble précédent de particules  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ , pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq N$ , nous avons :

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}], \tag{4.46a}$$

$$\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}), \tag{4.46b}$$

$$\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k-1}), \tag{4.46c}$$

$$\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}). \tag{4.46d}$$

Comme avec la proposition 7, ces inégalités de variance sont fondées sur le théorème de Rao-Blackwell. Nous voyons donc ici que  $\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k})$  décroît toujours avec  $k$ , mais reste nécessairement plus grand que  $\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k})$ .

Nous allons désormais illustrer la performance de nos nouveaux algorithmes SR et NSSR via des simulations numériques.

#### 4.2.4 Simulations

Dans toute cette section, nous considérons un problème de poursuite de cible basé sur des mesures en coordonnées polaires, comme en section 4.1.4.3 précédente (et initialement présenté en exemple 4). Notre objectif est donc d'estimer le vecteur d'état  $x_t = [p_{x,t}, \dot{p}_{x,t}, p_{y,t}, \dot{p}_{y,t}]^T$  (position et vitesse en coordonnées cartésiennes) d'une cible à partir d'observations bruitées  $y_t$  en coordonnées polaires. Nous fixons l'intervalle de temps entre deux observations à  $\tau = 1$ , et les lois du modèle (2.10) s'écrivent

$$f_t(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; Fx_{t-1}, Q) \tag{4.47}$$

$$g_t(y_t|x_t) = \mathcal{N}\left(y_t; \begin{pmatrix} \sqrt{p_{x,t}^2 + p_{y,t}^2} \\ \arctan \frac{p_{y,t}}{p_{x,t}} \end{pmatrix}, R\right) \tag{4.48}$$

où

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \sigma_Q^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

Comme en section 4.1.4.3, dans toutes les expériences ci-dessous, nous considérons comme loi d'importance la loi de transition elle-même c'est-à-dire  $q(x_t|x_{t-1}) = f_t(x_t|x_{t-1})$ . Ces expériences sont moyennées sur  $P = 1000$  simulations, nous posons  $\varphi(x) = x$  dans (2.1) et nous utilisons le critère (4.33) de RMSE moyenné sur le temps, avec  $T = 10$ .

En premier lieu, la section 4.2.4.1 vise à confirmer les résultats théoriques obtenus en propositions 7 et 8 concernant les variances des estimateurs SR et NSSR. Nous comparons donc en fonction du paramètre  $k$ , représentant le nombre de retirages intermédiaires, les RMSE de ces estimateurs ainsi que des estimateurs SIR classique et SIR indépendant qui ne dépendent pas de  $k$  mais correspondent aux cas limites des estimateurs SR et NSSR lorsque  $k = 0$  et  $k = N$ , respectivement.

Ensuite, la section 4.2.4.2 a pour but d'illustrer l'effet du caractère plus ou moins informatif du modèle considéré sur la performance des algorithmes SR, NSSR, mais aussi I-SIR, SIR ainsi qu'un algorithme SIR utilisant une procédure de resample-move (que nous détaillerons ci-après). Nous cherchons ici à mettre en évidence les avantages que présentent nos algorithmes de rééchantillonnage indépendant et semi-indépendant dans des modèles où les poids d'importance sont très disparates.

En dernier lieu, la section 4.2.4.3 a pour objectif d'étudier la diversité des trajectoires pas-

sées dans nos algorithmes SR, NSSR et I-SIR. En effet, même si ces algorithmes limitent la dégénérescence du support courant en comparaison des techniques SIR classiques, on peut se demander ce qu'il en est de l'historique des particules, car le fait d'effectuer des étapes de rééchantillonnage, même indépendantes ou semi-indépendantes, n'éliminera pas l'inconvénient de dupliquer les trajectoires passées.

4.2.4.1 Variance des procédures SR

Tout d'abord nous analysons le comportement de nos algorithmes en fonction de  $k$ . Posons  $N = 100$ , et fixons les paramètres de la vraisemblance du modèle de poursuite de cible à  $\sigma_\rho = 0.1$  et  $\sigma_\theta = \frac{\pi}{1800}$ ; ici toutes les itérations MC utilisent les mêmes observations. La figure 4.6 affiche les RMSE des estimateurs  $\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}$ ,  $\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}$ ,  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  obtenus à partir de nos méthodes de rééchantillonnage, ainsi que de l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$ . Cette expérience confirme bien que les performances des estimateurs basés sur la procédure SR deviennent graduellement meilleures à mesure que le paramètre  $k$  croît. Il est également intéressant de remarquer que l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}$  (resp.  $\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N}$ ) présente une performance très similaire à l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$  dès que  $k \geq N/2$  (resp.  $k \geq 4N/5$ ).

Avec le logiciel Matlab, en moyenne les temps calculatoires associés à une unique itération des algorithmes SIR, SR avec  $k = N/2$  et I-SIR sont 0.0244s, 0.0267s et 0.0283s, respectivement.

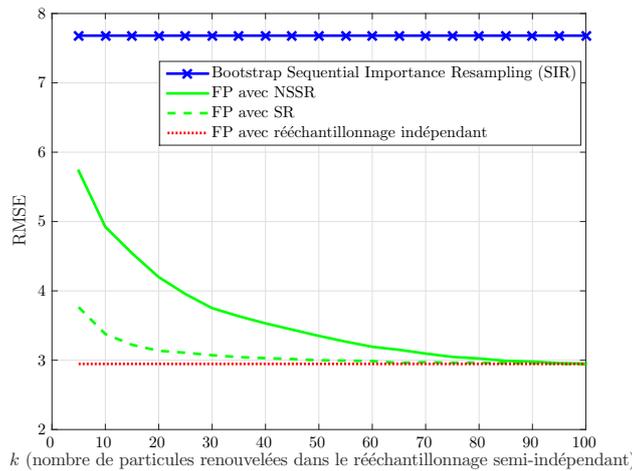


FIGURE 4.6 – RMSE en fonction de  $k$ , modèle de poursuite. Les performances des estimateurs basés sur les procédures SR et NSSR s'améliorent à mesure que  $k$  augmente, et parcourent l'écart de performance entre les estimateurs basés sur les procédures SIR et I-SIR (lorsque tous ces estimateurs utilisent le même nombre de tirages).

## 4.2.4.2 RMSE dans un cas informatif à coût égal

Nous comparons maintenant nos estimateurs à une amélioration existante du FP dans des modèles informatifs. En particulier, le FP avec retirages MCMC (encore appelé FP avec « resample-move » et mentionné précédemment en section 2.2.2.1) est une solution classique permettant d'introduire de la diversité après l'étape de rééchantillonnage [35]. En résumé, les  $N$  particules obtenues à la suite de cette étape de rééchantillonnage dans l'algorithme SIR classique (algorithme 5) sont déplacées par l'intermédiaire d'une procédure MCMC à  $k$  itérations, ici un algorithme de Metropolis-Hastings indépendant ciblant la loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  et utilisant comme loi de proposition la loi de transition  $f_t(x_t|x_{t-1})$ . Nous comparons également nos estimateurs basés sur les algorithmes SR et NSSR avec ceux basés sur les algorithmes SIR classique et I-SIR, mais en fixant le budget total en opérations de tirage (tirages + rééchantillonnages). Nous fixons donc  $N = 100$  particules et  $k = N/2$  pour le calcul de l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}$  ainsi que l'estimateur basé sur le FP avec retirages MCMC,  $N^{\text{I-SIR}} = 72$  pour le calcul de l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N^{\text{I-SIR}}}$  et  $N^{\text{SIR}} = N + \frac{(N-1)k}{2} = 2575$  particules pour le calcul de l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N^{\text{SIR}}}$ . Enfin, nous calculons un autre estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS-2},N}$  basé sur l'algorithme SIR classique avec  $N$  particules finales, mais cette fois utilisant  $N + (N-1)k$  tirages intermédiaires, où le surplus de  $(N-1)k$  tirages est obtenu d'une manière similaire à l'algorithme SR, c'est-à-dire en sélectionnant aléatoirement (sans remplacement)  $k$  indices de tirage puis en répétant cette sélection  $N-1$  fois ; en outre comme cet estimateur est calculé avant rééchantillonnage il utilise dans son expression la totalité des  $N + (N-1)k$  tirages intermédiaires. Le coût global en tirages pour tous ces algorithmes s'élève donc à  $2N + (N-1)k$ . Nous calculons aussi l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{NSSR},N,k}$  avec  $k = 4N/5$ , ce qui est plus coûteux mais peut être entièrement parallélisé. Les résultats sont présentés en figure 4.7.

Lorsque les observations sont très informatives, la solution classique (ou utilisant des procédés alternatifs de rééchantillonnage tels que les rééchantillonnages résiduel ou stratifié présentés en section 1.4.3) a tendance à dégénérer comme vu en section 4.1.4.3, tandis que nos solutions offrent une meilleure performance que l'algorithme de FP avec retirages MCMC lequel utilise aussi  $k$  échantillons supplémentaires (ainsi que l'évaluation de rapports d'acceptation propres au mécanisme MH). Quand la variance du bruit d'observation croît, les différents estimateurs ont tendance à se comporter de manière similaire ; l'algorithme SIR classique est légèrement meilleur car il ne souffre plus du phénomène de dégénérescence et utilise un nombre d'échantillons finaux bien supérieur aux autres solutions. Enfin, nous pouvons remarquer que les RMSE de nos estimateurs basés sur les procédures SR, NSSR et I-SIR sont également plus faibles dans un cas informatif que celui de l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS-2},N}$ . En outre nous voyons que cet estimateur présente lui-même une meilleure performance dans un cas informatif que l'estimateur  $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N^{\text{SIR}}}$ , bien qu'il ait aussi tendance à dégénérer (contrairement aux estimateurs SR et I-SIR, lesquels ne dégèrent pas). Ceci peut s'interpréter par le fait qu'un plus grand nombre de particules

finales, ici  $N^{\text{SIR}}$ , a peu d'intérêt si ces particules sont presque toutes identiques en raison d'une trop grande disparité des poids lors de l'étape de rééchantillonnage multinomial classique. Au contraire, il est plus intéressant d'effectuer moins d'étapes de rééchantillonnage mais à partir d'un ensemble intermédiaire plus large, car cela permettra alors potentiellement de sélectionner (et dupliquer) de meilleurs tirages intermédiaires en termes de poids. D'un autre côté lorsque le modèle n'est plus informatif ces deux estimateurs présentent une performance similaire.

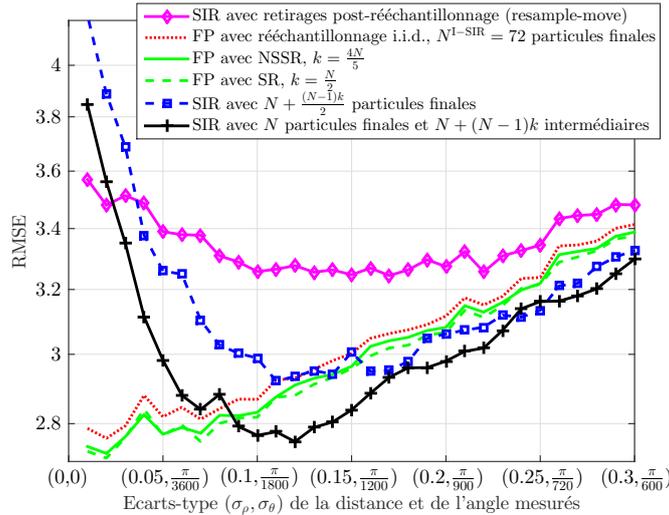


FIGURE 4.7 – Modèle de poursuite,  $\sigma_\rho \in [0.01, 0.3]$  et  $\sigma_\theta \in [\frac{\pi}{18000}, \frac{\pi}{600}]$ . Les algorithmes I-SIR, SR et NSSR ne sont pas susceptibles à la dégénérescence du support final lorsque le modèle devient de plus en plus informatif, contrairement aux algorithmes usuels à coût égal en nombre de tirages.

#### 4.2.4.3 Diversité de particules aux instants temporels courant et passés

Les algorithmes I-SIR et SR visent à réduire la dépendance entre particules rééchantillonnées conditionnellement à l'ensemble initial. Cependant, même dans l'algorithme I-SIR, les trajectoires restent dépendantes. Ainsi les trajectoires produites par ces algorithmes ont aussi tendance à dégénérer (au sens où, à l'intérieur des trajectoires courantes, les particules correspondant à des instants temporels passés deviennent identiques entre elles), mais ce phénomène est cependant limité en comparaison d'un algorithme SIR classique. En effet, l'indice de rééchantillonnage lui-même est également diversifié du fait de la régénération du support entre deux étapes de rééchantillonnage, et ce bénéfice majeur est de plus légèrement accentué par la diversité assurée de l'ensemble courant de particules.

Nous pouvons donc nous attendre à ce que les méthodes I-SIR et SR améliorent les procédures de lissage [27] dans les modèles informatifs, du moins à l'intérieur d'une certaine fenêtre temporelle associée à l'instant courant ( $t - 1, t - 2, t - 3, \dots$ ). D'un autre côté, pour des

instants plus anciens les trajectoires de particules seront graduellement affectées (mais moins rapidement) par le même phénomène de dégénérescence que l'algorithme SIR, ne conservant alors qu'un unique ancêtre à chaque instant et donc limitant similairement la performance des estimateurs de lissage.

Afin d'illustrer la diversité des trajectoires produites par nos algorithmes nous avons affiché en figure 4.8 le nombre de particules différentes en fonction des itérations temporelles passées  $t$ , lorsque le temps courant atteint est  $T = 10$ . Additionnellement, la figure 4.9 montre le nombre de particules différentes en fonction des écarts-type des observations pour une itération temporelle passée  $t = T - 2 = 8$  particulière, encore une fois lorsque le temps courant atteint est  $T$ . On peut observer sur ces deux figures l'importante diversité de trajectoires introduite par les algorithmes I-SIR et SR en comparaison de l'algorithme SIR classique. En particulier, lorsque le modèle est suffisamment informatif l'algorithme SR est considérablement supérieur sur cet aspect en comparaison d'un algorithme SIR utilisant le même nombre de particules intermédiaires, tout en conservant une diversité similaire lorsque le modèle n'est pas très informatif.

Par ailleurs en figure 4.9 l'algorithme I-SIR semble gagner en diversité de trajectoires alors même que le modèle devient de plus en plus informatif, contrairement à tous les autres algorithmes. Ce phénomène peut être interprété intuitivement par le même phénomène qui cause la disparité des poids dans un modèle informatif. Plus précisément, dans un tel modèle la qualité d'une certaine particule rééchantillonnée ne va en rien présager de la qualité de la particule qui sera tirée conditionnellement à elle lors de la propagation à l'itération temporelle suivante. Ceci est dû au fait que la loi cible présente des valeurs extrêmement fortes dans des régions extrêmement restreintes dans ce type de modèle, ainsi de petits déplacements des particules peuvent causer de grandes différences en termes de poids. Cependant, ceci implique aussi que lorsqu'une trajectoire est rééchantillonnée à une itération donnée, elle a moins de chances d'être également rééchantillonnée à l'itération suivante après sa propagation que dans un modèle moins informatif : l'indice de rééchantillonnage a donc tendance à être plus diversifié dans un modèle très informatif, d'où la diversité légèrement accrue des particules ancêtres observée pour l'algorithme I-SIR en figure 4.9 lorsque l'écart-type du bruit d'observation diminue.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord adapté au cadre dynamique l'algorithme de SIR indépendant présenté en section 3.2, afin de calculer l'estimateur MMSE dans un modèle de type HMC par exemple. Le calcul approché des poids post-rééchantillonnage est beaucoup plus coûteux que dans le cas statique, mais la réinterprétation de notre procédure de rééchantillonnage indépendant comme première étape d'un algorithme APF particulier nous permet de passer en

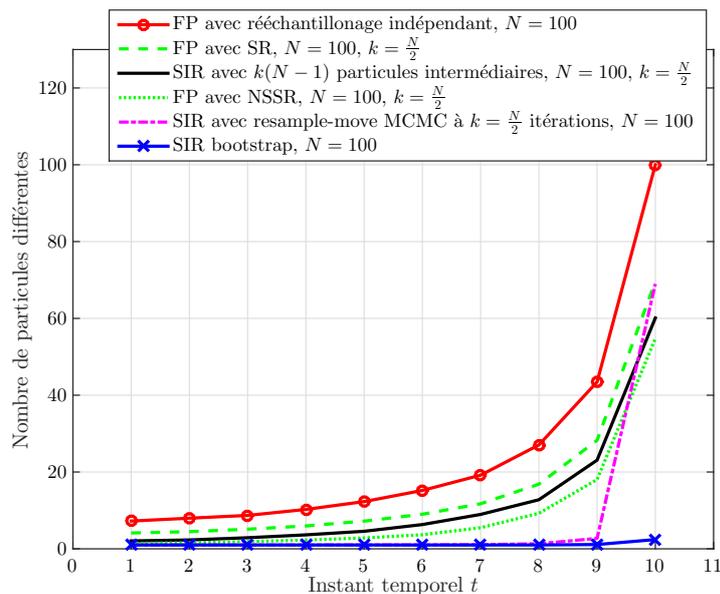


FIGURE 4.8 – Modèle de poursuite,  $\sigma_\rho = 0.1$  et  $\sigma_\theta = \frac{\pi}{1800}$ . Les algorithmes I-SIR, SR et NSSR améliorent la diversité de l'historique des particules en comparaison des algorithmes usuels.

dimension augmentée afin de repondérer plus simplement les tirages finaux à l'aide de poids de seconde espèce. Enfin nous avons validé nos discussions au moyen d'expériences de synthèse en prenant soigneusement en compte le budget calculatoire, et illustré en particulier en quoi le FP avec rééchantillonnage indépendant limite le phénomène de dégénérescence lorsqu'il est appliqué à des modèles hautement informatifs, ou des modèles à grande dimension, lesquels sont difficiles pour le FP classique.

Cependant ce nouvel algorithme nécessite un coût plus élevé en tirages intermédiaires, d'ordre  $N^2$  au lieu de  $N$  pour l'algorithme classique. Nous avons donc ensuite proposé un autre procédé de rééchantillonnage pour le filtrage particulaire où chaque nouvelle particule finale est rééchantillonnée à partir d'un support partiellement renouvelé avec  $k$  retirages. Ceci forme une catégorie de solutions paramétrées englobant la technique de rééchantillonnage multinomial classique ( $k = 0$ ) ainsi que celle de rééchantillonnage indépendant ( $k = N$ ), permettant d'équilibrer variance et coût calculatoire. Nous avons par ailleurs construit deux versions de cet algorithme, dont l'une est parallélisable. Enfin, des simulations ont montré d'une part que le choix  $k = N/2$  conduit à des performances similaires à la procédure de rééchantillonnage entièrement indépendant, et d'autre part que dans les modèles très informatifs la performance de notre algorithme dans un scénario de filtrage n'est pas affectée par le phénomène de dégénérescence.

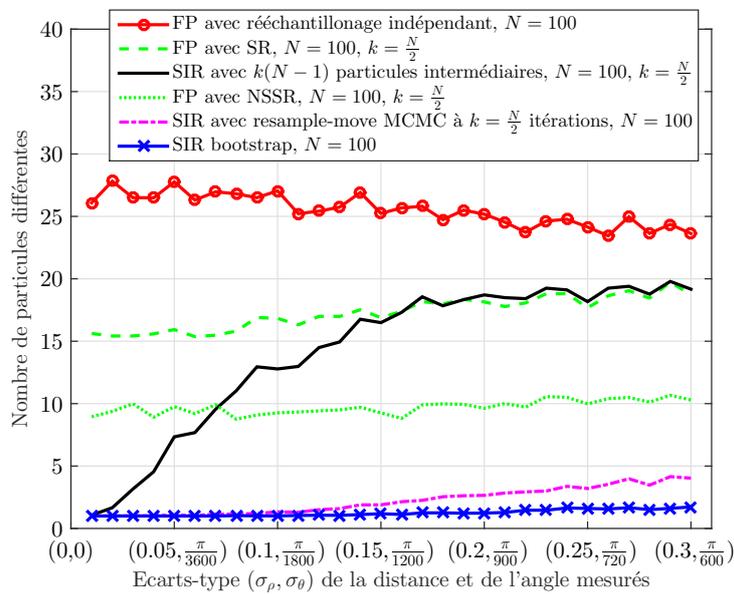


FIGURE 4.9 – Modèle de poursuite,  $T = 10, t = T - 2 = 8$ . Pour les algorithmes I-SIR, SR et NSSR, la diversité de l'historique des particules souffre moins du caractère informatif du modèle que pour les algorithmes usuels.

# Poursuite multi-cibles avec corrélations spatio-temporelles

## Contenu

---

<b>5.1</b>	<b>Problématique</b>	<b>118</b>
5.1.1	Poursuite multi-cibles par mesures d'intensité de signal	118
5.1.2	Contributions et structure	119
<b>5.2</b>	<b>Modèles d'état et d'observation</b>	<b>120</b>
5.2.1	Modèle d'état et de mouvement des cibles	120
5.2.2	Modèle d'observations corrélées	120
<b>5.3</b>	<b>Solution bayésienne proposée</b>	<b>122</b>
5.3.1	Inférence récursive	122
5.3.2	L'algorithme SMCMC proposé	124
5.3.3	Loi de proposition basée sur le gradient	127
<b>5.4</b>	<b>Simulations</b>	<b>130</b>
5.4.1	Performance liée à la prise en compte des corrélations d'occultation	132
5.4.2	Performance de l'algorithme SMCMC comparé au filtrage particulaire	133
5.4.3	Performance de la loi de proposition gradient dans des scénarios difficiles et bruités	135
5.4.4	Performance de la loi de proposition gradient dans des scénarios plus faciles avec un nombre de particules variable	138
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>138</b>

---

Ce chapitre s'intéresse à une application de filtrage à la poursuite multi-cibles. Nous mettrons pour cela en œuvre les algorithmes de filtrage particulaire classique et avec rééchantillonnage indépendant, ainsi qu'une approche par Monte Carlo à Chaînes de Markov séquentiel, présentés respectivement en sections 2.2, 4.1, et 5.3.2.

## 5.1 Problématique

### 5.1.1 Poursuite multi-cibles par mesures d'intensité de signal

La poursuite multi-cibles est une tâche difficile qui a des applications dans plusieurs domaines, comme par exemple les réseaux de capteurs sans fil et la prédiction de mobilité des systèmes de transport intelligents. Dans ce contexte particulier, la structure principale d'un système comprend des nœuds cibles dont les états cinématiques sont inconnus et doivent être estimés ; ainsi que des nœuds capteurs qui reçoivent un certain type d'information bruitée provenant des nœuds cibles, à partir de laquelle il est possible de déduire une estimation de leur position.

Diverses méthodes ont été développées afin de résoudre ce problème de localisation. Les méthodes basées sur la distance entre nœuds (par opposition aux méthodes non basées sur la distance, moins courantes) utilisent des mesures d'intensité de signal reçu (Received Signal Strength - RSS), temps d'arrivée de signaux (Time of Arrival - ToA) [40] ou angle d'arrivée de signaux (Angle of Arrival - AoA) [100] provenant des cibles. Ces deux approches par ToA et AoA produisent des estimations précises, ce qui permet une bonne localisation. Cependant l'approche ToA nécessite des horloges synchronisées au niveau des nœuds cibles, tandis que l'approche AoA nécessite une série d'antennes et reste sensible aux erreurs dues aux trajets multiples. Ce sont par conséquent des solutions coûteuses.

La technique par intensité de signal reçu (RSS) [74] est beaucoup plus simple et directe, et présente de faibles coûts d'implémentation ; de ce fait, elle fait l'objet récurrent de tentatives d'optimisation de performances. La prise en compte de la corrélation des occultations (modèle de Gudmunson [39, 1]) entre différents nœuds (cibles ou capteurs) est un des moyens possibles pour améliorer cette technique. En effet, cela permet de tirer profit du fait que dans un environnement donné, la proximité implique plus ou moins la similarité du comportement en termes d'occultation. Quelques exemples de recherches comprennent [89] qui étudie la combinaison de la corrélation entre observations avec l'estimation par rétrécissement (“shrinkage”) de la matrice de covariance, ce qui entraîne une amélioration significative de la performance, mais reste limité au cas statique. Dans les travaux [66, 67, 29, 70], les corrélations entre observations sont prises en compte et des algorithmes de filtrage particulière sont implémentés. Ceci permet une localisation relativement précise, mais ces algorithmes souffrent intrinsèquement des limitations propres à l'approche par filtrage particulière dans le cas d'espaces d'état à grande dimension [95].

### 5.1.2 Contributions et structure

En premier lieu, nous construisons un nouveau modèle bayésien pour les problèmes de poursuite, prenant en compte dans la loi des observations l'ensemble des corrélations associées aux occultations, corrélations dues à la proximité des nœuds cibles, à la fois dans l'espace et dans le temps, c'est-à-dire entre les positions soit courantes, soit passées, de cibles quelconques. Ceci permet d'améliorer la performance d'une part grâce aux corrélations dans le temps entre positions d'une même cible, et d'autre part grâce aux corrélations entre les trajectoires de différentes cibles, lesquelles peuvent éventuellement se croiser à un certain instant.

Ensuite, afin de résoudre ce problème bayésien de poursuite, nous proposons d'utiliser les techniques SMC présentées dans les chapitres précédents de filtrage particulaire avec rééchantillonnage multinomial classique et indépendant (sections 2.2 et 4.1 respectivement), ainsi qu'une technique basée sur la méthode MCMC : l'algorithme de Monte Carlo par Chaînes de Markov séquentiel (SMCMC). Cette technique SMCMC, relativement récente en comparaison du filtrage particulaire, a montré empiriquement de bonnes performances tout particulièrement dans certains cas de systèmes à grande dimension [90, 11, 91] ; on s'intéresse donc ici à cette approche.

Par ailleurs, nous remplaçons la loi de proposition à priori de l'étape de raffinement de Gibbs, utilisée à la fois pour la procédure SMCMC et dans le resample-move pour la procédure SIR classique, par une densité utilisant le gradient de la vraisemblance. Ceci permet de mieux tirer parti de mesures informatives et guide les particules vers les régions à forte vraisemblance, augmentant ainsi l'efficacité des algorithmes.

Enfin nous présentons des simulations montrant les bénéfices propres au modèle utilisant l'ensemble des corrélations spatio-temporelles, les avantages que présente la procédure SMCMC par rapport à la procédure SIR classique dans ce modèle, ainsi que la supériorité de la loi gradient comparée à la loi a priori, tout en nous assurant que les différents algorithmes présentent des coûts en tirages similaires et utilisent les mêmes densités de proposition.

Le chapitre est structuré de la manière suivante. La section 5.2 détaille le choix des modèles d'état et d'observation. La section 5.3 explique le cadre bayésien utilisé ainsi que la solution SMCMC proposée, et la section 5.3.3 détaille l'intégration du gradient de la vraisemblance dans la loi de proposition associée à l'étape de raffinement de Gibbs. Des résultats de simulations, utilisant des données synthétiques, sur les bénéfices de la prise en compte de la corrélation spatio-temporelle dans le modèle considéré, sur la supériorité de la technique SMCMC avec raffinement de Gibbs comparé à la technique SIR avec le même raffinement, ainsi que sur les avantages de la loi de proposition avec gradient de la vraisemblance comparée à celle a priori, sont présentés et analysés en section 5.4, tandis que la section 5.5 récapitule les conclusions principales de ces travaux.

## 5.2 Modèles d'état et d'observation

### 5.2.1 Modèle d'état et de mouvement des cibles

Dans un réseau bidimensionnel (2-D), l'état cinématique d'une cible à l'instant discret  $t$  peut être défini comme un vecteur de positions et vitesses  $x_t = [\text{pos}_x(x_t), \text{pos}_y(x_t), \text{vit}_x(x_t), \text{vit}_y(x_t)]^T$ , et pourrait éventuellement aussi inclure des accélérations ou autres variables d'intérêt. L'état cinématique  $\{x_{t,1:N_x}\}_{t \in \mathbb{N}^*} = \{[(x_{t,1})^T, (x_{t,2})^T, \dots, (x_{t,N_x})^T]\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  d'une collection de  $N_x$  cibles est ici supposé être un processus stochastique de Markov tel qu'à un instant quelconque  $t$  donné, la loi de transition  $p(x_{t,1:N_x} | x_{1:t-1,1:N_x}) = p(x_{t,1:N_x} | x_{t-1,1:N_x})$  soit connue, de manière à ce que l'on puisse soit l'évaluer en chaque point, soit en tirer des échantillons.

### 5.2.2 Modèle d'observations corrélées

Considérons une collection de  $N_x$  cibles évoluant de l'instant 1 à l'instant  $T$ ,  $x_{1:T,1:N_x}$ , et une collection de  $N_s$  capteurs immobiles  $s = [s_1, \dots, s_{N_s}]$  où  $s_{n_s} = [\text{pos}_x(s_{n_s}), \text{pos}_y(s_{n_s})]^T$  est la position supposée connue du capteur  $n_s$ , avec  $n_s \in \{1, \dots, N_s\}$ . Dans ce modèle, on suppose que  $N_x$  et  $N_s$  sont fixés et connus. À l'instant  $t \in \{1, \dots, T\}$ , une cible  $j \in \{1, \dots, N_x\}$  transmettant un signal de puissance  $P_{t,j}$  entraîne la réception d'une puissance  $P_{t,j,n_s}$  sur le  $n_s$ -ème capteur (le problème d'association de données est supposé résolu, par exemple au moyen de plages temporelles pré-allouées durant lesquelles les différentes cibles émettent leurs signaux). L'atténuation de propagation correspondante peut-être exprimée comme

$$\mathcal{L}_{t,j,n_s} = 10 \log_{10} P_{t,j} - 10 \log_{10} P_{t,j,n_s} \quad (5.1)$$

L'atténuation de propagation  $y_{t,j,n_s}$  observée par le capteur peut être modélisée [72, 80, 69, 73] comme

$$y_{t,j,n_s} = \mathcal{L}_{t,j,n_s} - \mathcal{L}_0 = 10\alpha \log_{10} d(x_{t,j}, s_{n_s}) + w_{t,j,n_s} \quad (5.2)$$

où

$$d(x_{t,j}, s_{n_s}) = \sqrt{(\text{pos}_x(x_{t,j}) - \text{pos}_x(s_{n_s}))^2 + (\text{pos}_y(x_{t,j}) - \text{pos}_y(s_{n_s}))^2} \quad (5.3)$$

correspond à la distance euclidienne entre la position de la  $j$ -ème cible à l'instant  $t$  et celle du  $n_s$ -ème capteur ;  $\mathcal{L}_0$  est l'atténuation de propagation du signal pris à une distance de référence, usuellement à 1 mètre du capteur ;  $\alpha$  est l'exposant de l'atténuation de propagation (path-loss exponent - PLE), supposé connu (ou estimé avec précision dans une application réelle) ;  $w_{t,j,n_s} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{t,j,n_s}^2)$  est la réalisation d'une variable aléatoire modélisant l'effet d'occultation log-normal, avec  $\sigma_{t,j,n_s}$  l'écart-type associé au lien entre le  $n_s$ -ème capteur et la  $j$ -ème cible

(c'est-à-dire à l'observation induite par la  $j$ -ème cible sur le  $n_s$ -ème capteur). Ainsi, l'effet d'occultation introduit un facteur multiplicatif en termes de distance, ce qui signifie que l'erreur correspondante induite est proportionnelle à la distance elle-même. Par conséquent, cette erreur restera relativement importante même si la distance croît considérablement. L'écart-type  $\sigma_{t,j,n_s}$  est supposé être constant au cours du temps, et nous considérons une région de surveillance suffisamment limitée pour que la sensibilité des capteurs ne soit pas remise en cause.

Afin de prendre en compte les corrélations d'occultation spatio-temporelles entre deux positions (donc deux observations) à l'intérieur du réseau, nous utilisons le modèle de Gudmunson [39]. Ainsi, la corrélation entre la  $j$ -ème cible à l'instant  $r$  et la  $k$ -ème cible à l'instant  $t$ , avec  $(j, k) \in \{1, \dots, N_x\}^2$  et  $(r, t) \in \{1, \dots, T\}^2$ , s'écrit :

$$\text{Corr}(x_{r,j}, x_{t,k}) = \exp\left(-\frac{d(x_{r,j}, x_{t,k})}{D_c}\right) \quad (5.4)$$

où  $D_c$  est la distance de décorrélation utilisée dans le modèle de Gudmunson, qui dépend de l'environnement (des mesures de terrain [6] suggèrent des valeurs appropriées de  $D_c$  pour différents environnements) et que l'on suppose ici connue ou estimée antérieurement.

Définissons maintenant :

$f_{n_s}(x_{t,j}) = 10\alpha \log_{10}(d(x_{t,j}, s_{n_s}))$  l'atténuation de propagation exacte entre la position de la cible  $x_{t,j}$  et celle du capteur  $s_{n_s}$  ;

$\rho_{n_s}(x_{r,1:N_x}, x_{t,1:N_x})$  une matrice  $N_x \times N_x$  dont le terme  $(j, k)$   $[\rho_{n_s}(x_{r,1:N_x}, x_{t,1:N_x})]_{j,k} = \sigma_{r,j,n_s} \sigma_{t,k,n_s} \exp\left(-\frac{d(x_{r,j}, x_{t,k})}{D_c}\right)$  représente la covariance entre les observations propres au  $n_s$ -ème capteur correspondant aux cibles  $x_{r,j}$  et  $x_{t,k}$  ;

l'ensemble des observations d'atténuation de propagation mesurées au niveau du  $n_s$ -ème capteur jusqu'à l'instant  $t$  est alors distribuée selon la densité gaussienne multivariée  $p(y_{1:t,1:N_x,n_s} | x_{1:t,1:N_x})$  suivante :

$$y_{1:t,1:N_x,n_s} = \begin{bmatrix} y_{1,1,n_s} \\ \vdots \\ y_{1,N_x,n_s} \\ \vdots \\ y_{t,1,n_s} \\ \vdots \\ y_{t,N_x,n_s} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} f_{n_s}(x_{1,1}) \\ \vdots \\ f_{n_s}(x_{1,N_x}) \\ \vdots \\ f_{n_s}(x_{t,1}) \\ \vdots \\ f_{n_s}(x_{t,N_x}) \end{bmatrix}, R_{t,n_s} \right), \quad (5.5)$$

avec  $R_{t,n_s}$  la matrice  $(N_x \times t, N_x \times t)$  de covariance des observations qui contient les corréla-

tions entre ces observations, corrélations dues à la proximité des cibles à la fois spatialement à un instant donné et spatio-temporellement entre les positions de différentes cibles à différents instants. Cette matrice peut être exprimée par blocs de la manière suivante :

$$R_{t,n_s} = \begin{bmatrix} \rho_{n_s}(x_{1,1:N_x}, x_{1,1:N_x}) & \cdots & \rho_{n_s}(x_{1,1:N_x}, x_{t,1:N_x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n_s}(x_{t,1:N_x}, x_{1,1:N_x}) & \cdots & \rho_{n_s}(x_{t,1:N_x}, x_{t,1:N_x}) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Enfin, les observations au niveau de chaque capteur sont supposées indépendantes des autres observations au niveau de tous les autres capteurs - ceci est justifié en considérant des scénarios où les capteurs sont immobiles et suffisamment éloignés les uns des autres, ce qui implique des corrélations très faibles ou nulles entre eux. Ainsi la loi jointe des observations provenant de plusieurs capteurs peut se calculer comme le produit des lois propres aux observations de chacun de ces capteurs :

$$p(y_{1:t,1:N_x,1:N_s} | x_{1:t,1:N_x}) = \prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{1:t,1:N_x,n_s} | x_{1:t,1:N_x}). \quad (5.7)$$

Nous allons maintenant détailler la solution que nous proposons ici pour estimer les états cinématiques des cibles à partir de la donnée des observations, dans le cadre du modèle défini ci-dessus.

## 5.3 Solution bayésienne proposée

### 5.3.1 Inférence récursive

Dans cette application, le but de l'inférence bayésienne est d'estimer les états cinématiques de la série de cibles en calculant l'espérance de sa densité jointe a posteriori. À l'instant  $t$ , cette densité a posteriori peut être déduite récursivement, à une constante près, en fonction de son expression à l'instant précédent  $t - 1$  :

$$p(x_{1:t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s}) \propto \prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t,1:N_x}) p(x_{t,1:N_x} | x_{t-1,1:N_x}) \times p(x_{1:t-1,1:N_x} | y_{1:t-1,1:N_x,1:N_s}). \quad (5.8)$$

Cependant cette densité est difficile à calculer analytiquement, principalement en raison de la dépendance non-linéaire par rapport aux états cachés des cibles dans la fonction d'observation. Il est donc nécessaire de l'approcher, ce que nous aborderons en section suivante.

Ici, nous devons tout d'abord obtenir une expression de la vraisemblance  $p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t,1:N_x})$ . Ceci peut se faire en appliquant à l'équation (5.5) les propriétés classiques de conditionnement de la loi gaussienne multivariée :

$$p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t,1:N_x}) = \mathcal{N}(\mu_{t,n_s}, \Sigma_{t,n_s}), \quad (5.9)$$

où

$$\begin{aligned} \mu_{t,n_s} &= \mu_2 + \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} (z - \mu_1), \\ \Sigma_{t,n_s} &= \Sigma_{2,2} - \Sigma_{2,1} \Sigma_{1,1}^{-1} \Sigma_{1,2}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec

$$\begin{aligned} z &= y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, \\ \mu_1 &= [f_{n_s}(x_{1,1}), \dots, f_{n_s}(x_{1,N_x}), \dots, f_{n_s}(x_{t-1,1}), \dots, f_{n_s}(x_{t-1,N_x})]^T, \\ \mu_2 &= [f_{n_s}(x_{t,1}), \dots, f_{n_s}(x_{t,N_x})]^T, \\ \Sigma_{1,1} &= R_{t-1,n_s}, \\ \Sigma_{2,1} &= [\rho_{n_s}(x_{t,1:N_x}, x_{1,1:N_x}), \dots, \rho_{n_s}(x_{t,1:N_x}, x_{t-1,1:N_x})], \\ \Sigma_{1,2} &= [\rho_{n_s}(x_{1,1:N_x}, x_{t,1:N_x}), \dots, \rho_{n_s}(x_{t-1,1:N_x}, x_{t,1:N_x})]^T, \\ \Sigma_{2,2} &= \rho_{n_s}(x_{t,1:N_x}, x_{t,1:N_x}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Étant donné que chaque observation dépend de toutes les autres observations des instants courant et passés, les dimensions du vecteur moyenne et de la matrice de covariance des observations définies à l'équation (5.5) augmentent avec le temps. Par conséquent, le coût du calcul de la vraisemblance (équation (5.9)) qui sera à effectuer dans l'algorithme de filtrage croît également avec le temps.

En réponse à ce problème, nous proposons donc ici d'utiliser une stratégie fixant ce coût par restriction de l'ampleur de l'historique d'observations utilisé, par exemple au moyen d'une fenêtre temporelle glissante. Un inconvénient propre à cette approximation est qu'elle pourrait impliquer la perte d'informations intéressantes de corrélation, dans des cas où certaines cibles se rapprochent de trajectoires passées d'autres cibles (ou d'elles-mêmes). En effet, bien que les corrélations les plus significatives puissent intuitivement sembler être celles entre positions d'une même cible à des instants proches, en raison de leur proximité généralement plus prononcée que celle entre positions de cibles différentes, ceci reste entièrement dépendant du modèle cinématique choisi et de la fréquence de capture des observations. Ce n'est vraisemblablement le cas

que lorsque les cibles se déplacent de manière complètement indépendante et que la fréquence de capture est élevée ou que les cibles ne se déplacent pas trop vite. De plus, la fenêtre temporelle glissante peut avoir l'avantage de prévenir certains problèmes numériques lors de l'évaluation de la vraisemblance (problèmes potentiellement dus à l'inversion d'une matrice de covariance dont la dimension devient de plus en plus élevée). Définissant la taille de cette fenêtre temporelle glissante par  $t_{window}$ , le calcul de la vraisemblance à l'équation (5.9) fera donc intervenir une matrice de covariance modifiée de taille  $(N_x \times (t_{window} + 1), N_x \times (t_{window} + 1))$ , puisque  $\forall (j, k) \in \{1, \dots, N_x\}$  on considère  $Corr(x_{r,j}, x_{t,k}) = 0$  dès que  $|r - t| > t_{window}$ .

Dans le cas d'un scénario à une seule cible, les auteurs de [70] proposent d'utiliser une méthode de Monte Carlo séquentielle, le filtrage particulaire, pour obtenir les attributs de cette cible en fonction des observations. Cependant comme vu en section 2.2.2 le FP classique peut rencontrer des problèmes de robustesse en grande dimension. Nous proposons ainsi l'utilisation du filtrage particulaire avec rééchantillonnage indépendant présenté en section 4.1, lequel permet justement d'améliorer la diversité du support de particules dans ce type de cas difficile. Dans ce travail, nous nous sommes également intéressés à une technique alternative existante qui n'a pas encore été appliquée dans ce contexte de poursuite multi-cibles avec corrélations entre observations : la méthodologie relativement récente (en comparaison du filtrage particulaire) de Monte Carlo par Chaînes de Markov séquentiel (Sequential Markov Chain Monte Carlo - SMCMC). Nous élaborons donc en section suivante un algorithme SMCMC adapté à l'application considérée dans ce chapitre.

### 5.3.2 L'algorithme SMCMC proposé

#### 5.3.2.1 Introduction aux méthodes SMCMC

Traditionnellement, les méthodes de type Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) (voir section 1.5) sont utilisées pour tirer des échantillons suivant une certaine loi dans un contexte non-séquentiel. Cependant, des procédés par MCMC séquentiel ont été récemment proposés ; [11, 91] en effectuent une synthèse. Bien qu'ils soient basés sur la technique MCMC, ces procédés sont néanmoins différents de la technique de resample-move (voir section 2.2.2, ou encore [35]) développée pour améliorer le support des filtres particulaires après rééchantillonnage et qui utilise également une méthode MCMC.

En effet, les filtres particulaires avec resample-move restent des méthodes SMC qui corrigent la différence entre la loi de proposition et la loi cible au moyen du principe de l'échantillonnage d'importance, tandis que les procédés SMCMC utilisent une correction de type Metropolis-Hastings par acceptation ou rejet d'un tirage candidat. La différence fondamentale réside dans

le fait que l'algorithme SMCMC construit ainsi une unique chaîne de Markov pour obtenir les particules d'intérêt, permettant une exploration locale de l'espace d'état. À l'inverse, un filtre particulaire augmenté par des retirages MCMC souffre toujours des limitations des étapes d'échantillonnage d'importance et de rééchantillonnage en grande dimension (étapes que l'algorithme SMCMC omet entièrement), et tâche d'y remédier en construisant plusieurs chaînes de Markov indépendantes, ce qui est généralement moins efficace que l'approche SMCMC.

Plus précisément, l'algorithme MCMC séquentiel est une méthodologie pour le filtrage qui cible la loi jointe a posteriori, laquelle est définie dans notre cas par l'équation (5.8). À un instant donné, nous utilisons une étape de Metropolis-Hastings pour générer des candidats distribués asymptotiquement suivant la loi cible et effectuer l'inférence à partir de cette loi complexe (laquelle est fixée à cet instant). Cependant, comme nous ne disposons pas d'une représentation analytique de la loi a posteriori  $p(x_{1:t-1,1:N_x} | y_{1:t-1,1:N_x,1:N_s})$  à l'instant  $t-1$ , elle est approchée par une loi empirique basée sur la collection courante de trajectoires (ou particules) :

$$p(x_{1:t-1,1:N_x} | y_{1:t-1,1:N_x,1:N_s}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_{1:t-1,1:N_x}^{(i)}}(x_{1:t-1,1:N_x}) \quad (5.12)$$

où  $N$  est le nombre de particules et  $(i)$  l'indice d'une particule. Ensuite, en insérant cette approximation particulaire dans l'équation (5.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \pi(x_{1:t,1:N_x}) &\propto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t-1,1:N_x}^{(i)}, x_{t,1:N_x}) \right) \\ &\quad \times p(x_{t,1:N_x} | x_{t-1,1:N_x}^{(i)}) \delta_{x_{1:t-1,1:N_x}^{(i)}}(x_{1:t-1,1:N_x}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

où  $\pi(x_{1:t,1:N_x})$ , une approximation empirique de la vraie densité a posteriori  $p(x_{1:t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s})$  basée sur la collection de particules  $x_{1:t-1,1:N_x}^{(1:N)}$ , est ici choisie comme loi cible de la chaîne de Markov à l'instant  $t$ . À une itération  $i$  donnée de la chaîne de Markov, les variables aléatoires  $x_{1:t-1,1:N_x}$  doivent être tirées selon une loi de support discret défini par la collection  $x_{1:t-1,1:N_x}^{(1:N)}$ , et  $x_{t,1:N_x}$  est alors tiré suivant une loi continue conditionnelle à cet échantillon précédent ainsi choisi, d'où l'appellation « Tirage Joint » (ou « Joint Draw ») de cette procédure.

Ensuite, après avoir effectué de nombreux tirages joints à partir de l'équation (5.13), le résultat après convergence de cette chaîne pour la variable  $x_{1:t,1:N_x}$  peut être extrait de manière à donner une nouvelle approximation particulaire  $p(x_{1:t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s})$ , ainsi mise à jour pour pouvoir être utilisée à l'itération temporelle suivante. Plus précisément, après une période de brûlage de longueur  $N_{burn}$ , toutes les particules  $x_{1:t,1:N_x}^{(i)} = x_{1:t,1:N_x}^i$  résultant des itérations MCMC doivent être conservées pour former la nouvelle collection d'échantillons approchant la loi a posteriori (la notation  $(i)$  dénote uniquement les échantillons considérés après la période de brûlage, tandis que  $i$  peut faire référence à n'importe quel état de la chaîne de Markov). Par

cette procédure, une inférence séquentielle peut ainsi être effectuée. Récemment, des résultats de convergence asymptotique ont été étudiés dans le cadre de cette méthodologie SMCMC [30].

### 5.3.2.2 L'algorithme proposé

En plus de la procédure SMCMC usuelle décrite avec nos notations dans le paragraphe précédent, nous choisissons d'effectuer une étape de raffinement afin d'améliorer la qualité des échantillons associés à l'itération temporelle  $t$ . Diverses structures d'échantillonnage par blocs pourraient être considérées [84], mais dans cette thèse nous choisissons d'échantillonner successivement et individuellement chaque cible en utilisant une séquence d'étapes de Metropolis dans Gibbs (voir section 1.5.3), consistant à tirer de nouveaux échantillons composante par composante, c'est-à-dire dans notre application cible par cible, conditionnellement à toutes les autres cibles, et à choisir de les accepter ou non. Ceci permet de déplacer minutieusement chaque composante de nos particules vers de meilleures régions de l'espace d'état en utilisant des densités focalisées sur chaque composante à l'inverse de la densité jointe utilisée dans l'étape précédente. Soulignons le fait que notre étape de tirage par blocs de Gibbs est effectuée cible par cible et reste donc multivariée, par opposition à une procédure univariée qui travaillerait coordonnée par coordonnée. Ceci est bien plus efficace car dans notre application il y a une forte corrélation entre coordonnées d'une même cible, ce qui implique qu'un tirage coordonné par coordonnée, conditionnellement aux autres coordonnées de la même cible, serait dégénéré (presque déterministe) et produirait donc une chaîne de Markov mal mélangée [90].

De manière à tirer encore plus profit de cette approche, nous utilisons également une densité de proposition de type Langevin pour effectuer des tirages lors du raffinement (cet aspect sera détaillé en section 5.3.3). Il est intéressant de noter qu'effectuer à la fois un Tirage Joint de Metropolis-Hastings (MH), puis un raffinement de Gibbs composante par composante, est complémentaire. En effet, l'étape de Gibbs améliore le Tirage Joint précédent en termes de précision des tirages effectués. Cependant, si l'on omettait ce Tirage Joint initial pour n'effectuer que l'étape de raffinement, l'échantillonnage risquerait de produire une chaîne de Markov mal mélangée lorsqu'il y a de la corrélation entre les observations provenant de différentes cibles, puisque l'on utilise une densité conditionnelle à toutes les cibles autres que la composante courante. De plus, bien que l'on n'effectue ici dans notre algorithme qu'une seule itération de Tirage Joint de MH, plusieurs itérations pourraient éventuellement aider à améliorer la diversité de la chaîne de Markov [64] (à nouveau tout particulièrement lorsqu'il y a une forte corrélation entre blocs, ce qui dans notre cas correspondrait à des cibles proches).

En résumé, à l'instant  $t$  et à la  $n$ -ième itération MCMC, la procédure suivante est effectuée afin d'obtenir des échantillons approximativement tirés suivant  $p(x_{1:t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s})$  :

- faire un Tirage Joint pour  $x_{1:t,1:N_x}$  en utilisant une itération de Metropolis-Hastings ;

- raffiner l'état caché à l'instant courant  $t$ ,  $x_{t,1:N_x}$ , en utilisant une séquence d'itérations de Metropolis-Hastings dans Gibbs.

L'algorithme complet proposé est résumé en algorithme 11 (incluant également la loi de proposition par gradient de type Langevin, détaillée dans la section 5.3.3).

Après obtention de cette collection de particules (sélectionnées après une période de brûlage) asymptotiquement tirées suivant la densité  $p(x_{1:t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s})$ , l'estimation MMSE des états cinématiques des cibles à l'instant  $t$  peut être effectuée en calculant la moyenne des particules ce qui correspond à l'approximation empirique de l'espérance de la densité a posteriori marginalisée  $p(x_{t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s})$  :

$$\hat{x}_{t,1:N_x} = \int x_{t,1:N_x} p(x_{t,1:N_x} | y_{1:t,1:N_x,1:N_s}) dx_{t,1:N_x} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{t,1:N_x}^{(i)}. \quad (5.14)$$

Maintenant, nous allons préciser notre choix de loi de proposition pour l'étape de raffinement de Gibbs.

### 5.3.3 Loi de proposition basée sur le gradient

Le choix d'une loi de proposition pertinente pour propager les états cinématiques dans les étapes de raffinement de Metropolis dans Gibbs est cruciale pour que l'algorithme puisse s'« accrocher » aux cibles. Dans notre cas, utiliser simplement la loi a priori peut échouer en particulier dans des scénarios où cette densité présente une très forte matrice de covariance. Par conséquent, nous cherchons à pallier ce problème en utilisant une densité de proposition qui dépend des observations, afin de guider les particules vers des régions de l'espace d'état présentant une forte vraisemblance.

Nous choisissons une densité de proposition  $q(\cdot)$  de type Langevin [92, 36], basée sur le gradient de la densité cible (ce qui inclut la vraisemblance). Pour une cible  $k$  à la  $i$ -ème itération de l'algorithme de Metropolis-Hastings, l'échantillon de raffinement de Gibbs est tiré de la manière suivante :

$$\tilde{x}_{t,k} \sim q(\cdot | x_{t,k}^i) = \mathcal{N}(x_{t,k}^i + m, \Sigma) \quad (5.19)$$

où  $x_{t,k}^i$  résulte du Tirage Joint de Metropolis-Hastings, et

$$m = \frac{h}{2} \nabla (\log \Pi(x_{t,k})) \Big|_{x_{t,k}=x_{t,k}^i}, \quad (5.20)$$

$$\Sigma = hI_{4 \times 4},$$

**Algorithme 11** Algorithme SMCMC proposé pour la poursuite multi-cibles.

À l'instant  $t$ , pour obtenir la  $i$ -ème trajectoire particulière de la procédure SMCMC,  $x_{1:t,1:N_x}^i$  :

**Données :**  $y_{1:t,1:N_x,1:N_s}$  (toutes les observations disponibles à l'instant  $t$ ),

$x_{1:t-1,1:N_x}^{(1:N)}$  (la collection de particules constituant l'approximation empirique de la densité a posteriori à l'instant  $t-1$ ),

$x_{1:t,1:N_x}^{i-1}$  (l'ensemble des particules propres à l'itération précédente  $i-1$  de l'algorithme)

**Tirage Joint utilisant Metropolis-Hastings**

- Sélectionner aléatoirement une trajectoire particulière jointe  $\tilde{x}_{1:t-1,1:N_x}$  en la tirant à partir de la mesure empirique de  $p(x_{1:t-1,1:N_x} | y_{1:t-1,1:N_x,1:N_s})$  obtenue à l'itération temporelle précédente :

$$\tilde{x}_{1:t-1,1:N_x} \sim \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_{1:t-1,1:N_x}^{(i)}} (x_{1:t-1,1:N_x}) \quad (5.15)$$

- Tirer un échantillon aléatoire pour la  $t$ -ième itération temporelle courante :

$$\tilde{x}_{t,1:N_x} \sim p(\cdot | \tilde{x}_{1:t-1,1:N_x}) \quad (5.16)$$

- Calculer le rapport d'acceptation qui compare la vraisemblance conditionnelle à  $\tilde{x}_{1:t,1:N_x}$  avec la vraisemblance conditionnelle à  $x_{1:t,1:N_x}^{i-1}$  (qui est celle de l'itération précédente  $i-1$ ) :

$$\alpha = \min \left( 1, \frac{\prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, \tilde{x}_{1:t,1:N_x})}{\prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t,1:N_x}^{i-1})} \right) \quad (5.17)$$

- Accepter ou rejeter cette particule proposée :  
tirer  $a \sim \mathcal{U}[0, 1]$

**si** ( $a < \alpha$ ) **alors**

accepter la particule, donc  $x_{1:t,1:N_x}^i := \tilde{x}_{1:t,1:N_x}$

**sinon**

rejeter la particule, donc  $x_{1:t,1:N_x}^i := x_{1:t,1:N_x}^{i-1}$

**fin si**

**Raffinement utilisant Metropolis dans Gibbs**

- Tirer successivement chaque cible :

**pour**  $1 \leq b \leq N_x$  **faire**

- Définir  $\tilde{x}_{1:t,1:N_x} := x_{1:t,1:N_x}^i$

- Tirer un nouvel échantillon suivant la densité de proposition  $q$  basée sur le gradient (d'après (5.19)), pour la  $b$ -ième cible à l'instant courant  $t$  :

$$\tilde{x}_{t,b} \sim q(\cdot | x_{t,b}^i) \quad (5.18)$$

- Calculer le rapport d'acceptation  $\alpha = \min(1, \beta)$  où  $\beta$  provient de l'équation (5.27), avec la particule modifiée  $\tilde{x}_{1:t,1:N_x}$ .

- Accepter ou rejeter cette particule proposée :  
tirer  $a \sim \mathcal{U}[0, 1]$

**si** ( $a < \alpha$ ) **alors**

accepter la particule,  $x_{t,b}^i = \tilde{x}_{t,b}$

**sinon**

rejeter la particule c'est-à-dire ne pas mettre à jour le  $b$ -ième bloc dans  $x_{t,1:N}^i$

**fin si**

**fin pour**

**Résultat :** Échantillon  $x_{1:t,1:N_x}^i$

$h$  étant un pas qui doit être choisi empiriquement de manière à ce que la performance de l'algorithme soit satisfaisante [82, Section 7.8.5], et  $\Pi(x_{t,k})$ , proportionnel à la densité a posteriori conditionnelle  $p(x_{t,k} | y_{1:t-1,1:N_x,1:N_s}, x_{1:t-1,1:N_x}^i, x_{t,1:N_x \setminus k}^i)$  pour la cible courante d'intérêt, étant le produit des termes correspondants de vraisemblance et d'a priori, dérivés de (5.8); ainsi

$$\Pi(x_{t,k}) = \prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t-1,1:N_x}^i, x_{t,1:N_x \setminus k}^i, x_{t,k}) \times p(x_{t,k} | x_{t-1,1:N_x}^i, x_{t,1:N_x \setminus k}^i). \quad (5.21)$$

Utilisant (5.9) et (5.10),

$$\log \Pi(x_{t,k}) = \sum_{n_s=1}^{N_s} \log \mathcal{N}(y_{t,1:N_x,n_s}; \mu_{t,n_s}, \Sigma_{t,n_s}) + \log p(x_{t,k} | x_{t-1,1:N_x}^i, x_{t,1:N_x \setminus k}^i). \quad (5.22)$$

Nous devons maintenant calculer le gradient de

$$\log \mathcal{N}(y_{t,1:N_x,n_s}; \mu_{t,n_s}, \Sigma_{t,n_s}) = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log |\Sigma_{t,n_s}| - \frac{1}{2} (y_{t,1:N_x,n_s} - \mu_{t,n_s})^T \Sigma_{t,n_s}^{-1} (y_{t,1:N_x,n_s} - \mu_{t,n_s}) \quad (5.23)$$

par rapport à  $x_{t,k}$  et l'évaluer en  $x_{t,k}^i$ . Dans cette expression,  $\mu_{t,n_s}$  et  $\Sigma_{t,n_s}$  dépendent tous les deux de  $x_{t,k}$  (voir (5.10) et (5.11)). Afin de simplifier ce problème, et plus précisément pour éviter de manipuler des inverses de matrices de grande dimension, nous supposons que tous les termes de covariance (donc  $\Sigma_{t,n_s}$  ainsi que les termes de covariance dans  $\mu_{t,n_s}$ ) sont constants lors de la dérivation. Sous cette hypothèse, en notant  $A = (y_{t,1:N_x,n_s} - \mu_{t,n_s})$  et  $S = \Sigma_{t,n_s}$ , nous calculons pour chaque composante de  $x_{t,k} = [\text{pos}_x(x_{t,k}), \text{pos}_y(x_{t,k}), \text{vit}_x(x_{t,k}), \text{vit}_y(x_{t,k})]^T$  (les deux équations suivantes sont données pour la composante  $\text{pos}_x(x_{t,k})$  et sont donc également appliquées pour les trois autres composantes) :

$$\frac{\partial A^T S A}{\partial \text{pos}_x(x_{t,k})} = \left( \frac{\partial A^T S A}{\partial \mu_{t,n_s}} \right)^T \frac{\partial \mu_{t,n_s}}{\partial \text{pos}_x(x_{t,k})} \quad (5.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^T S A}{\partial \mu_{t,n_s}} &= -2SA, \\ \frac{\partial \mu_{t,n_s}}{\partial \text{pos}_x(x_{t,k})} &= \left[ 0, \dots, 0, \frac{\partial f_{n_s}(x_{t,k})}{\partial \text{pos}_x(x_{t,k})}, 0, \dots, 0 \right]^T \quad (k\text{-ième composante de cible}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

car tous les termes dépendant de cibles autres que la  $k$ -ième cible sont de dérivée nulle. En outre, d'après notre hypothèse, le seul terme dérivé dans  $\mu_{t,n_s}$  est  $\mu_2$  (voir (5.11)), puisque le seul autre terme dans  $\mu_{t,n_s}$  qui dépend de  $x_{t,k}$  est une covariance ( $\Sigma_{2,1}$ ). D'autre part,

$$\frac{\partial f_{n_s}(x_{t,k})}{\partial x_{t,k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{n_s}(x_{t,k})}{\partial \text{pos}_x(x_{t,k})} \\ \frac{\partial f_{n_s}(x_{t,k})}{\partial \text{pos}_y(x_{t,k})} \\ \frac{\partial f_{n_s}(x_{t,k})}{\partial \text{vit}_x(x_{t,k})} \\ \frac{\partial f_{n_s}(x_{t,k})}{\partial \text{vit}_y(x_{t,k})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\alpha \frac{(x_{t,k,x} - s_{n_s,x})}{(x_{t,k,x} - s_{n_s,x})^2 + (x_{t,k,y} - s_{n_s,y})^2} \\ 10\alpha \frac{(x_{t,k,y} - s_{n_s,y})}{(x_{t,k,x} - s_{n_s,x})^2 + (x_{t,k,y} - s_{n_s,y})^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

où les dérivées par rapport aux vitesses sont nulles car les observations ne dépendent que des distances entre cibles (et entre cibles et capteurs), donc uniquement de positions de cibles. Ainsi la propagation des vitesses est effectuée par le seul terme a priori. La dérivée de ce terme a priori est obtenue d'une manière similaire, à part le fait qu'il n'y a pas besoin d'hypothèses de calcul.

Enfin, l'expression du rapport d'acceptation pour l'étape de raffinement doit dépendre de la densité de proposition  $q$  (avec les mêmes notations que l'algorithme 11) :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, \tilde{x}_{1:t,1:N_x})}{\prod_{n_s=1}^{N_s} p(y_{t,1:N_x,n_s} | y_{1:t-1,1:N_x,n_s}, x_{1:t,1:N_x}^i)} \\ &\times \frac{p(\tilde{x}_{t,b} | x_{t-1,1:N_x}^i, x_{t,1:N_x \setminus b}^i) q(x_{t,b}^i | \tilde{x}_{t,b})}{p(x_{t,b}^i | x_{t-1,1:N_x}^i, x_{t,1:N_x \setminus b}^i) q(\tilde{x}_{t,b} | x_{t,b}^i)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

## 5.4 Simulations

Afin d'illustrer les améliorations en termes de performance induites par

- la prise en compte des corrélations d'occultation spatio-temporelles (section 5.4.1 avec une figure montrant le gain qu'entraîne l'élargissement de la fenêtre temporelle associée à l'historique des observations) ;
- l'utilisation d'une méthode SMC MC comparée à une approche par filtrage particulaire classique (section 5.4.2 avec une figure montrant la supériorité de l'algorithme SMC MC lorsque la dimension de l'espace d'état augmente) ;
- le remplacement de la densité de proposition a priori par celle basée sur le gradient (sections 5.4.3 et 5.4.4 avec des figures montrant les divers gains de performance selon la variance du bruit d'occultation et le nombre de particules),

nous supposons que chaque cible évolue indépendamment des autres dans un champ de 16 capteurs comme illustré à la figure 5.1, suivant un modèle à vitesse presque constante [60] [10] défini ainsi pour la  $j$ -ème cible :

$$x_{t,j} = F_t x_{t-1,j} + u_{t,j} \quad (5.28)$$

où  $F_t$  est une matrice de transition de taille  $4 \times 4$  et  $u_{t,j}$  est un vecteur de réalisations indépendantes d'une gaussienne  $\mathcal{N}(0_4, Q_t)$  avec  $Q_t$  la matrice de covariance du bruit d'état de taille  $4 \times 4$ ;  $F_t$  et  $Q_t$  ne dépendent que de l'intervalle temporel  $\tau_t$  entre les instants  $t$  et  $t - 1$ . Ici  $F_t$  et  $Q_t$  sont définies par :

$$F_t = \begin{bmatrix} I_2 & \tau_t I_2 \\ 0_2 & I_2 \end{bmatrix}, Q_t = \sigma_{target} \begin{bmatrix} (\tau_t^3/3)I_2 & (\tau_t^2/2)I_2 \\ (\tau_t^2/2)I_2 & \tau_t I_2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

où  $\tau_t$  est supposé être constant et égal à 1 seconde.

La figure 5.1 montre un exemple de deux trajectoires créées avec ces paramètres de manière à être confinées à l'intérieur d'une grille de capteurs. Étant donné que  $\sigma_{target}^2 = 10 \text{ m}^2$  est une valeur relativement élevée, les trajectoires sont chaotiques, représentant un scénario de poursuite difficile. Ce scénario sera utilisé en section 5.4.3 suivante, tandis que les autres sections considéreront des scénarios plus faciles utilisant des valeurs plus faibles de  $\sigma_{target}^2$ . Pour que l'hypothèse d'indépendance entre capteurs reste acceptable, nous utilisons une distance de décorrélation de  $D_c = 10$  mètres pour le modèle de Gudmunson, sachant que la distance entre capteurs s'élève environ à 33 mètres pour la grille de capteurs considérée. En outre, les simulations en sections 5.4.1 et 5.4.2 utilisent la loi de proposition a priori pour les étapes de raffinement de Gibbs, tandis que les simulations en sections 5.4.3 et 5.4.4 utilisent également pour comparaison la loi de proposition gradient présentée en section 5.3.3.

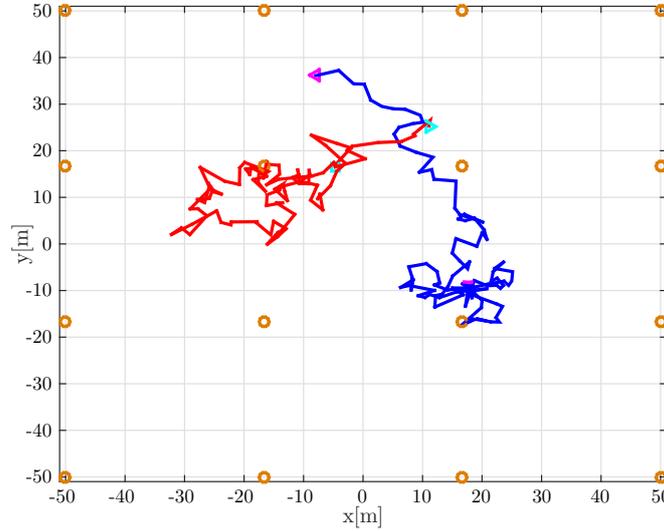


FIGURE 5.1 – Exemple de deux trajectoires chaotiques avec  $\sigma_{target}^2 = 10 \text{ m}^2$ . Les cercles oranges représentent les capteurs, les lignes représentent les trajectoires et les symboles  $\square/\triangle$  représentent leurs points de début/fin respectivement.

Afin d'évaluer la précision des différents algorithmes lorsque les observations sont générées

de manière aléatoire avec un écart-type  $\sigma$  (pour le bruit d'occultation) identique pour tous les liens cible-capteur, nous calculons la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error - RMSE) entre les estimations et les vraies positions de chaque cible (les estimations d'autres variables telles que les vitesses ou les accélérations ne sont pas prises en compte), en fonction du temps et moyennée sur un certain nombre d'itérations MC :

$$\text{RMSE}_t = \sqrt{\frac{1}{PN_x} \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{l=1}^P \|\hat{x}_{t,j}^l - x_{t,j}\|^2} \quad (5.30)$$

où  $\hat{x}_{t,j}^l$  est l'estimation de l'état de la  $j$ -ième cible à la  $l$ -ième itération MC. Tout au long de cette section, nous fixerons  $P = 10$ ,  $N_{burn} = \frac{1}{10}$  et à moins que cela soit spécifié autrement nous conserverons un nombre de capteurs  $N_s = 16$ , un nombre de cibles  $N_x = 2$  et un nombre d'itérations temporelles  $T = 100$ . Pour référence, ces expériences ont été effectuées à l'aide du logiciel Matlab et en utilisant un ordinateur portable équipé d'un processeur Intel(R) Core(TM) i7-4810MQ de 2.80 GHz. Notons par ailleurs que nous évaluons aussi pour certaines simulations la performance d'un algorithme de "Dead Reckoning" [47] : cette approche est généralement utilisée lorsque d'autres informations sur l'état cinématique des cibles sont disponibles, par exemple grâce à des capteurs inertiels installés sur ces objets en mouvement, cependant ce n'est pas le cas ici et elle correspond donc simplement à l'estimation des états cinématiques des cibles à partir du modèle de transition (5.28), c'est-à-dire à l'aveugle (sans tenir compte des observations).

#### 5.4.1 Performance liée à la prise en compte des corrélations d'occultation

Nous considérons dans cette section un scénario avec  $N_x = 2$  cibles et  $\sigma_{target}^2 = 1 \text{ m}^2$  (donc moins chaotique que celui de la figure 5.1). La figure 5.2 montre le gain de performance apporté par la considération des corrélations spatio-temporelles en comparaison de la prise en compte d'aucune corrélation, ainsi que le gain de performance induit par l'augmentation de la fenêtre temporelle  $t_{window}$ . Cependant, lorsque cette fenêtre temporelle est trop élargie, l'estimation de la matrice de covariance peut devenir problématique car la dimension de l'espace d'état considéré devient alors de plus en plus grande. Des simulations utilisant une fenêtre temporelle trop large ont montré que le RMSE se mettait alors à diverger.

Ainsi la fenêtre temporelle doit rester petite, permettant donc de bénéficier des corrélations entre les positions d'une même cible ainsi que d'autres cibles à des instants proches, mais pas des corrélations potentiellement fortes entre des positions de cibles à des instants lointains si leurs trajectoires se sont alors rapprochées. Cependant, du moins pour le type de scénario considéré ici, les corrélations entre des instants proches d'une même cible restent les plus importantes en raison de la proximité des positions correspondantes (mais cette remarque ne serait plus valide

par exemple dans un scénario présentant des cibles très proches se déplaçant similairement ainsi qu'un large intervalle temporel entre deux mesures). Ceci explique le fait que pour le scénario considéré ici, l'amélioration de performance entre  $t_{window} = 10$  et  $t_{window} = 20$  soit faible, car la plupart de l'information de corrélation pertinente est déjà prise en compte avec  $t_{window} = 10$ . De plus, sans surprise, le coût calculatoire croît avec la fenêtre temporelle ; ainsi le choix d'une valeur intermédiaire reste le plus judicieux.

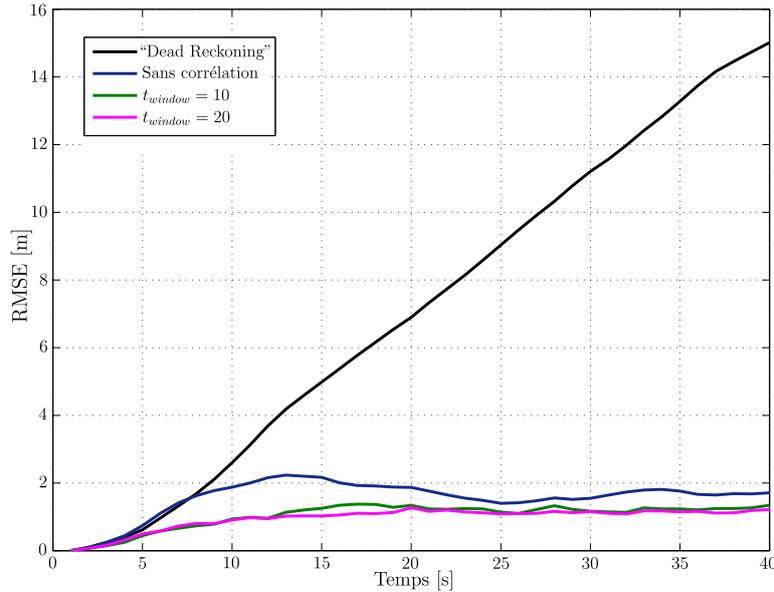


FIGURE 5.2 – Exemple de performance en termes de RMSE entre un algorithme SMCMC sans corrélation et avec corrélation (pour une fenêtre temporelle croissante). Ces algorithmes sont comparés en considérant le même ensemble d'observations pour chaque itération MC, en plus d'utiliser le même ensemble de trajectoires des cibles.

La figure Fig. 5.3 révèle que la prise en compte de la corrélation est d'autant plus bénéfique que la variance du bruit d'observation (c'est-à-dire de l'occultation) augmente. En effet un bruit d'observation plus faible implique des observations plus informatives, ce qui réduit l'utilité d'informations supplémentaires telles que la corrélation. Dans cette figure la fenêtre temporelle utilisé pour l'algorithme avec corrélations est  $t_{window} = 10$ .

#### 5.4.2 Performance de l'algorithme SMCMC comparé au filtrage particulaire

Tout d'abord, nous comparons l'algorithme SMCMC proposé dans cet article avec l'approche par filtrage particulaire, envisagée dans un contexte similaire pour la poursuite d'une seule cible dans les travaux [70]. Plus précisément, le filtre particulaire utilisé dans cette section est un algorithme SIR [25] dans lequel une stratégie de raffinement post-rééchantillonnage de type resample-move (voir section 2.2.2) est employée pour diversifier la collection de particules [35]. Cette stratégie utilise exactement la même approche que celle décrite dans l'étape de raffinement

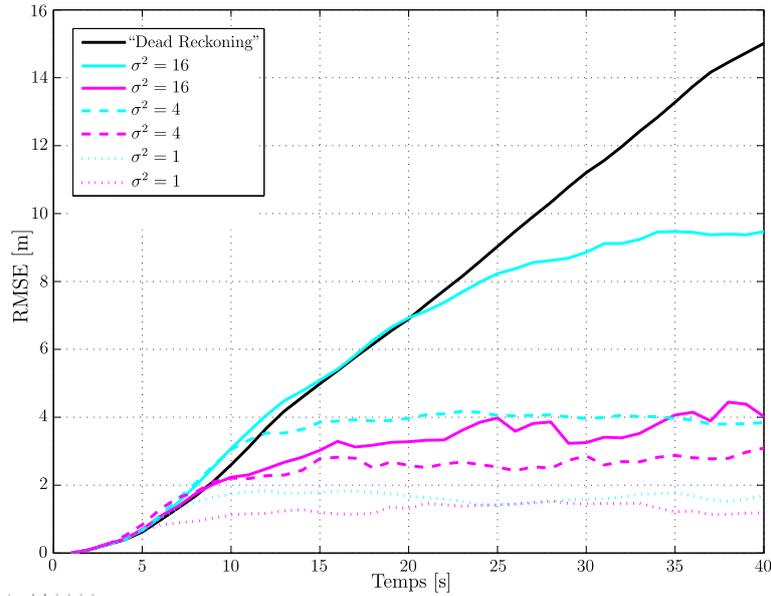


FIGURE 5.3 – Exemple de performance en termes de RMSE entre des algorithmes avec et sans corrélation, pour différentes variances  $\sigma^2$  du bruit d’observation. Les courbes violettes sont avec corrélation pour  $t_{window} = 10$ , les courbes cyan sont sans corrélation.

de notre algorithme SMC MC, y compris la densité de proposition basée sur le gradient, ce qui permet une comparaison équitable des deux algorithmes. Pour d’avantage de comparaisons avec des algorithmes existants, nous implémentons également un algorithme SIR sans raffinement post-rééchantillonnage mais utilisant par contre une densité de proposition particulière dérivée du filtre EKF [26] (voir aussi la fin de la section 2.1.3 de ce manuscrit pour les références de base sur l’EKF). En outre, nous implémentons l’algorithme de filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant présenté en section 4.1, en utilisant la loi de proposition a priori, avec ou sans raffinement de Gibbs. Les figures 5.4a, 5.4b et 5.4c montrent les RMSE obtenus avec ces algorithmes pour lesquels  $N = 200$  particules finales sont utilisées pour effectuer l’inférence (excepté pour l’algorithme SIR indépendant où nous considérons soit  $N = 200$ , soit  $N = 50$  par souci du coût temporel), dans un scénario où les vraies trajectoires des cibles sont générées avec  $\sigma_{target}^2 = 0.01 \text{ m}^2$  donc bien plus lisses que celles de la figure 5.1 (la section 5.4.3 ci-dessous étudie le cas plus difficile propre à cette figure).

Dans cette simulation, la variance du bruit d’occultation est  $\sigma^2 = (0.1)^2 \text{ dB}$  ce qui représente un faible bruit dans le contexte de notre expérience, et différents nombres de cibles sont utilisés :  $N_x = 3$  en figure 5.4a,  $N_x = 6$  en figure 5.4b et  $N_x = 9$  en figure 5.4c. En effet, l’une des principales faiblesses de l’algorithme SIR classique provient de la dégénérescence des poids d’importance soit dans des situations où la vraisemblance devient trop informative (avec une variance trop faible) et ne couvre plus les régions de l’espace d’état où la loi de proposition est forte, soit de façon plus intéressante dans des situations difficiles lorsque l’espace d’état

est de grande dimension (voir section 2.2.2). Dans de tels scénarios multi-dimensionnels, les résultats montrent la supériorité significative de l'approche SMCMC proposée par rapport à l'approche SIR classique, avec des temps de calcul du même ordre ; de plus, le RMSE moyen par cible reste à peu près le même dans le cas de l'algorithme SMCMC lorsque le nombre total de cibles croît, tandis qu'il se détériore dans le cas de l'algorithme SIR. Par ailleurs, l'algorithme SIR indépendant avec raffinement de Gibbs présente également une performance supérieure aux algorithmes SIR classiques et se rapprochant de l'algorithme SMCMC lorsque le nombre de particules finales est le même, pour un coût de calcul néanmoins plus élevé. À coût temporel similaire lorsque  $N = 50$  pour l'algorithme SIR indépendant, nous observons enfin que cet algorithme conserve une performance intermédiaire entre les algorithmes SIR usuels et l'algorithme SMCMC.

Pour référence, le temps de calcul de cette simulation avec 3 cibles, moyenné sur les itérations MC ainsi que temporelles, est approximativement 3.4144 secondes pour l'algorithme SIR avec raffinement post-rééchantillonnage, 1.6141 secondes pour l'algorithme SIR avec une loi de proposition basée sur l'EKF, 54.6679 secondes pour l'algorithme SIR indépendant avec  $N = 200$  particules sans raffinement de Gibbs, 3.7037 secondes pour l'algorithme SIR indépendant avec  $N = 50$  et raffinement de Gibbs et 3.8601 secondes pour l'algorithme SMCMC. Remarquons en outre que la différence entre l'algorithme SIR classique avec raffinement et l'algorithme SMCMC correspond presque exactement à une augmentation de 10% en termes de temps de calcul, or la méthode SMCMC utilise une période additionnelle de brûlage correspondant justement à 10% du nombre total de particules (dans ce cas, 222 particules y compris le brûlage, comparé à 200 pour l'algorithme SIR avec raffinement et l'algorithme SMCMC sans brûlage). Ainsi, l'algorithme SIR avec raffinement et l'algorithme SMCMC présentent un coût calculatoire similaire pour une particule (et les mêmes remarques s'appliquent à des nombres de cibles plus élevés).

### 5.4.3 Performance de la loi de proposition gradient dans des scénarios difficiles et bruités

Nous montrons maintenant quels sont les avantages d'utiliser la loi de proposition basée sur le gradient présentée en section 5.3.3 plutôt que la loi de proposition a priori basique dans nos étapes de raffinement de Gibbs, dans des scénarios difficiles. Considérant les trajectoires chaotiques d'états cachés de la figure 5.1 (donc  $N_x = 2$ ), et soit  $\sigma^2 = 1^2$  dB (bruit d'observation assez élevé) ou  $\sigma^2 = 4^2$  dB (bruit d'observation élevé), nous comparons deux versions de notre algorithme avec soit la densité de proposition a priori, soit celle basée sur le gradient détaillée en section 5.3.3. La figure 5.5 montre le RMSE résultant en fonction des itérations temporelles, pour  $N = 500$ . Sans surprise, l'estimateur utilisant la loi gradient fonctionne mieux. Pour référence, le temps de calcul associé à cette simulation, moyenné sur les itérations MC et temporelles, est à peu près de 1.5205 secondes avec la loi a priori et de 3.2878 secondes avec la loi gradient, avec

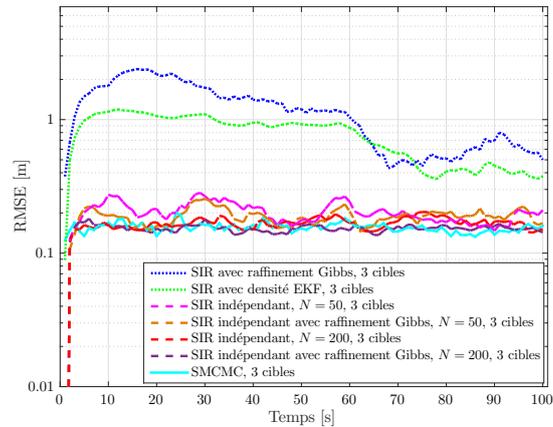
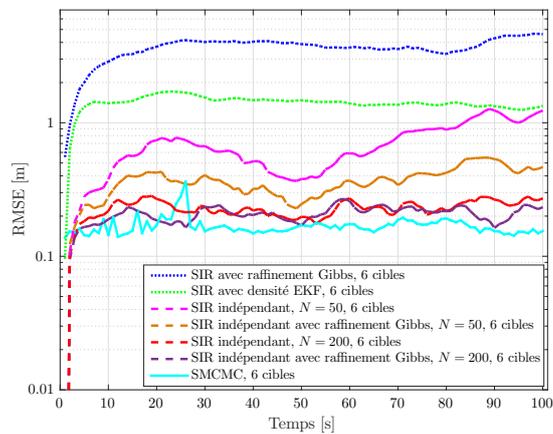
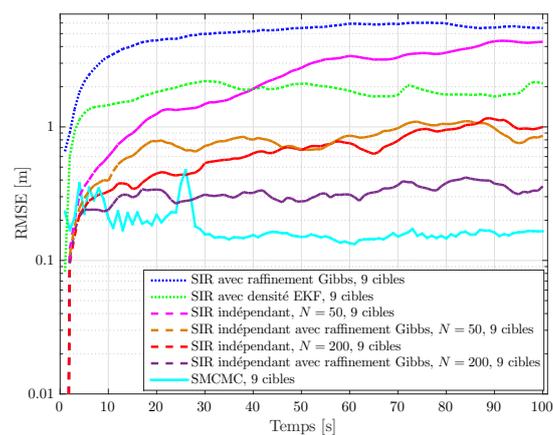
(a)  $N_x = 3$ (b)  $N_x = 6$ (c)  $N_x = 9$ 

FIGURE 5.4 – Performance en échelle logarithmique des algorithmes SMC MC et SIR avec la même étape de raffinement Gibbs post-rééchantillonnage, SIR utilisant la loi de proposition dérivée du filtre EKF, ainsi que SIR indépendant utilisant la loi a priori avec ou sans l'étape de raffinement de Gibbs et pour  $N = 200$  ou  $N = 50$ . Faibles bruits d'observation ( $\sigma^2 = (0.1)^2$  dB) et de processus ( $\sigma_{target}^2 = 0.01$  m<sup>2</sup>) - (a)  $N_x = 3$  - (b)  $N_x = 6$  - (c)  $N_x = 9$ .

$\sigma^2 = 1^2$  dB. Lorsque  $\sigma^2 = 4^2$  dB, les temps de calcul sont de 1.8128 secondes et 3.8967 secondes, respectivement.

Toujours dans ce scénario particulier, en contrôlant la pertinence des particules proposées lors de l'étape de raffinement de Gibbs au moyen des valeurs du rapport d'acceptation données dans le tableau 5.1, nous constatons que la densité gradient permet de réduire significativement le nombre de rejets d'échantillons dans cette étape, ce qui prouve que la collection de particules propagée atteint des régions de l'espace d'état où la vraisemblance est bien plus forte que lorsque l'on utilise la densité a priori. En outre, d'un point de vue théorique, le gain de performance dû à l'utilisation de la densité gradient plutôt que celle a priori doit décroître lorsque le bruit d'observation augmente, puisque cette densité vise à guider les particules tirées vers ces régions de forte vraisemblance, et que dans ce cas de telles régions deviennent plus larges. Le tableau 5.1 confirme que le gain en rapport d'acceptation décroît effectivement lorsque le bruit d'observation croît. La figure 5.6 de la section 5.4.4 confirme également ce phénomène, montrant des gains de performance bien plus grands lorsque le bruit est plus faible (et que les trajectoires sont aussi moins chaotiques) que dans le scénario difficile associé à la figure 5.5.

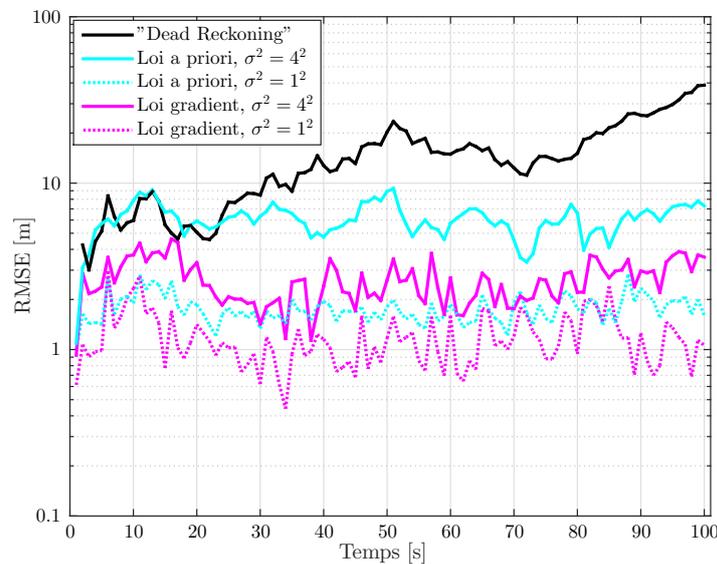


FIGURE 5.5 – Performance en échelle logarithmique de l'algorithme SMCMC utilisant la densité de proposition basée sur le gradient comparée à celle a priori, pour des bruits d'observation élevés sur les trajectoires chaotiques de la figure 5.1 (scénario difficile).

	A priori	Gradient
$\sigma^2 = (0.1)^2$	0.0066	0.0392
$\sigma^2 = (0.3)^2$	0.0075	0.2669
$\sigma^2 = (1)^2$	0.0377	0.8198
$\sigma^2 = (2)^2$	0.1940	0.9117
$\sigma^2 = (4)^2$	0.4860	0.9500

TABLE 5.1 – Rapports d’acceptation dans les étapes de raffinement de Gibbs lorsque l’on utilise soit la densité de proposition a priori soit celle basée sur le gradient, avec un bruit d’observation variable.

#### 5.4.4 Performance de la loi de proposition gradient dans des scénarios plus faciles avec un nombre de particules variable

Un autre avantage d’utiliser cette densité basée sur le gradient peut être montré en réduisant le nombre de particules. En effet, utiliser la densité a priori gaussienne implique que pour n’obtenir qu’un petit nombre de particules localisées dans les régions d’intérêt où la fonction de vraisemblance est élevée, il est nécessaire de tirer un grand nombre de particules en tout, alors que la densité basée sur le gradient ne présente pas cet inconvénient (comme le montrent également les rapports d’acceptation du tableau 5.1). La figure 5.6 montre des valeurs de RMSE en fonction du temps pour différents nombres de particules, illustrant l’accroissement de l’écart de performance entre les deux densités de proposition à mesure que le nombre de particules utilisées décroît. Pour référence, le temps de calcul propre à cette simulation, moyenné sur les itérations MC et temporelles, est environ de 0.24 secondes avec 25 particules et 1.66 secondes avec 200 particules.

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre propose un nouveau modèle bayésien pour le problème de la poursuite multi-cibles avec mesures d’intensité de signal reçu, prenant en compte les corrélations d’occultation spatio-temporelles entre cibles. L’inférence bayésienne est effectuée soit au moyen d’un filtrage particulaire avec étapes de resample-move MCMC, soit au moyen d’une technique SMCMC. Dans les deux cas la procédure MCMC utilisée correspond à la technique de MH dans Gibbs, utilisant par ailleurs une densité de proposition basée sur le gradient de la vraisemblance pour tirer les composantes de particules dans les étapes de raffinement de Gibbs. Les résultats de simulation montrent une amélioration de la performance par rapport à un modèle similaire dans lequel la corrélation n’est pas prise en compte. L’utilisation de la loi de proposition gradient améliore également la performance dans tout scénario en comparaison de l’utilisation d’une

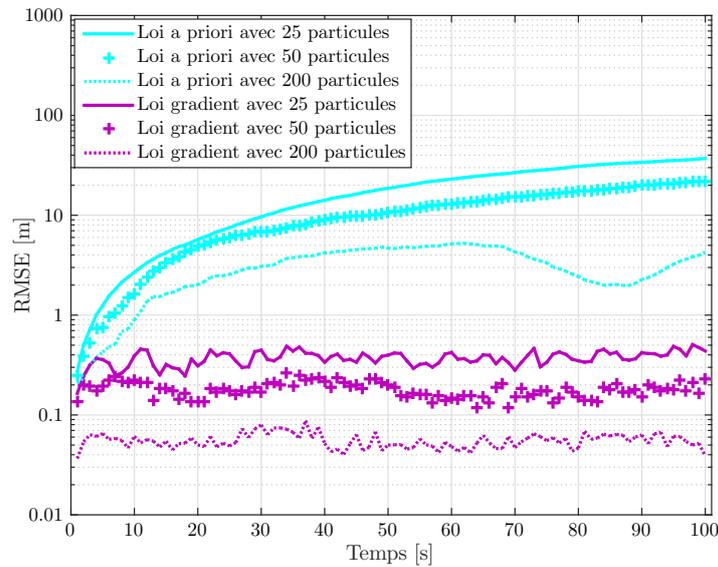


FIGURE 5.6 – Performance en échelle logarithmique de l'algorithme utilisant la densité de proposition basée sur le gradient comparé à celle a priori, avec un faible bruit d'observation ( $\sigma^2 = (0.1)^2$  dB) et un bruit de processus moyen ( $\sigma_{target}^2 = 1$  m<sup>2</sup>).

densité a priori, et le gain est particulièrement grand lorsque l'on utilise un petit nombre de particules ou lorsque le modèle considéré présente des observations informatives. Les résultats confirment en outre la supériorité du filtrage particulaire avec rééchantillonnage indépendant par rapport au filtrage particulaire usuel dans un modèle multi-dimensionnel et informatif. Cependant, dans cette application, l'approche SMC-MC a montré empiriquement de meilleures performances que le filtrage particulaire (classique, ainsi qu'avec rééchantillonnage indépendant) avec resample-move, lorsque les deux méthodes utilisent les mêmes étapes de raffinement de Gibbs.



# Conclusion et perspectives

Cette thèse s'est articulée autour des méthodes de Monte Carlo et de leurs applications à la problématique du filtrage statistique. Plus précisément, nous nous sommes attachés à étudier le mécanisme de base des méthodes de Monte Carlo séquentielles, c'est à dire le mécanisme d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage, puis nous avons proposé diverses améliorations. Certaines de ces améliorations sont en particulier basées sur la combinaison de ces méthodes avec d'autres méthodes de Monte Carlo telles les méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov.

Tout d'abord, nous avons cherché à contourner une limitation intrinsèque de la technique d'échantillonnage d'importance normalisé, laquelle est basée sur l'estimation de deux espérances différentes à partir d'un unique jeu de tirages aléatoires selon une loi d'importance donnée. Nous avons donc proposé un nouveau mécanisme basé sur l'utilisation de deux lois instrumentales, ce qui nous a permis de construire un estimateur bénéficiant d'un degré de liberté supplémentaire et dont les propriétés statistiques généralisent celles de l'estimateur issu de l'échantillonnage d'importance normalisé usuel. Afin de garder l'avantage calculatoire de cette dernière méthode en termes de coût de tirages, les deux jeux de tirages aléatoires nécessaires au calcul de notre estimateur ont été obtenus à partir d'une transformation linéaire d'un ensemble initial de points tirés suivant une loi d'importance donnée, dans le but de réduire la variance de l'estimateur final. Des simulations numériques ont alors montré que notre estimateur donnait de meilleures performances que l'estimateur usuel.

D'autre part, nous avons revisité le mécanisme d'échantillonnage d'importance normalisé avec rééchantillonnage dans son ensemble dans le but d'obtenir, cette fois ci, des tirages indépendants. Le mécanisme de rééchantillonnage résultant nous a permis d'obtenir une approximation discrète d'une loi cible donnée dont la diversité du support est garantie. Nous avons également montré que dans ce contexte, il pouvait être pertinent de repondérer les tirages finaux obtenus. À travers des simulations prenant soigneusement en compte le budget calculatoire de notre méthode, nous avons montré que les estimateurs construits à partir de ce mécanisme permettaient une amélioration des performances par rapport aux estimateurs usuels.

Dans le contexte du filtrage bayésien dynamique, nous nous sommes intéressés à l'application de notre nouveau mécanisme de rééchantillonnage indépendant. Ce dernier s'est révélé particulièrement pertinent dans des modèles dynamiques informatifs et/ou à grande dimension dans lesquels les techniques de filtrage particulière usuelles ont tendance à être mises en difficulté. En particulier, nous avons montré que ce nouveau mécanisme de rééchantillonnage et la pondération des particules finales qui en résultent pouvaient être interprétés comme un algorithme

de filtrage particulaire auxiliaire s'adaptant automatiquement à la loi utilisée pour obtenir de nouvelles particules. Par ailleurs, afin de réduire le coût de calcul supplémentaire engendré par notre nouvelle méthode, un algorithme de rééchantillonnage semi-indépendant a été proposé. Cet algorithme est basé sur un paramètre permettant de contrôler le coût calculatoire en termes de tirages ainsi que le gain en termes de variance de l'estimateur obtenu. Nos discussions ont été validées au travers des simulations dans lesquelles les estimateurs ont été comparés à coût de calcul égal.

En dernier lieu, nous nous sommes intéressés à une application de poursuite multi-cibles avec mesures d'intensité de signal reçu, et nous avons conçu un nouveau modèle bayésien pour ce problème, prenant en compte les corrélations d'occultation spatio-temporelles entre cibles. Pour cette application, en parallèle des méthodes de filtrage particulaire nous nous sommes intéressés à adapter la méthodologie SMCMC à notre modèle en couplant une procédure MH avec une procédure MH dans Gibbs afin de bénéficier de leur complémentarité. Par ailleurs nous avons construit une loi de proposition adaptée à ce problème basée sur le gradient de la vraisemblance. Tout d'abord, les résultats de simulation ont montré une amélioration des performances des estimateurs par rapport aux estimateurs construits sur un modèle similaire dans lequel la corrélation n'est pas prise en compte. Ensuite ces résultats ont illustré la supériorité de la méthodologie SMCMC en comparaison du filtrage particulaire ainsi que du choix de la loi de proposition gradient en comparaison de la loi de proposition a priori. Enfin, ce gain de performances s'est révélé particulièrement important lorsque le nombre de particules est faible ou lorsque le modèle considéré présente des observations informatives.

Enfin, ces divers travaux ont ouvert la voie à de multiples perspectives d'amélioration.

D'une part, l'algorithme construit au chapitre 3, section 3.1 a été obtenu à partir de l'approximation à l'ordre 1 de la variance de l'estimateur considéré. Il serait intéressant d'étendre l'algorithme proposé afin de prendre en compte des approximations de la variance à des ordres supérieurs. D'autre part, il reste à réfléchir à une analyse statistique asymptotique de l'estimateur proposé, qui est un estimateur construit à partir d'une méthode d'optimisation reposant sur des approximations Monte Carlo.

D'autre part, nous avons montré que notre procédure de rééchantillonnage indépendant revenait à tirer des points, de manière indépendante, suivant une loi dont l'expression analytique est inconnue. Dans un premier temps, on pourrait se demander s'il existe une méthode de tirage plus efficace que celle proposée à l'algorithme 8. Ensuite, on pourrait s'intéresser à l'analyse statistique de l'estimateur obtenu après la repondération approchée des particules finales, qui introduit une approximation Monte Carlo supplémentaire. Enfin, concernant l'algorithme 10 de rééchantillonnage semi-indépendant, on pourrait réfléchir à une façon alternative de régénérer les supports intermédiaires, en prenant par exemple en compte cette fois les poids d'importance

des particules constituant ces supports.

En dernier lieu, dans le cadre de notre application à la poursuite multi-cibles, une voie d'approfondissement possible serait d'alléger les hypothèses considérées lors du calcul du gradient de la vraisemblance. En particulier, nous pourrions tenir compte des termes de covariance dépendant de l'état cinématique lors de la dérivation, au lieu de les ignorer, afin de potentiellement améliorer plus encore la performance associée à la loi de proposition gradient.



# Annexes



# Preuves des résultats du chapitre 3

## A.1 Preuve du Théorème 3

Considérons comme en section 3.1  $N$  échantillons i.i.d.  $\{x_1^i, x_2^i\}_{i=1}^N$  où  $x_1^i \sim q_1$  et  $x_2^i \sim q_2$  et la relation de dépendance entre  $x_1^i$  et  $x_2^i$  est quelconque. Écrivons :

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\hat{\Theta}^{\text{DPIS},N} - \Theta) &= \sqrt{N} \left( \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\pi(x_1^i)}{q_1(x_1^i)} \varphi(x_1^i)}{\sum_{i=1}^N \frac{\pi(x_2^i)}{q_2(x_2^i)}} - \Theta \right) \\ &= \sqrt{N} \left( \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\pi(x_1^i)}{q_1(x_1^i)} \varphi(x_1^i) - \frac{\pi(x_2^i)}{q_2(x_2^i)} \Theta \right]}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x_2^i)}{q_2(x_2^i)}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Au numérateur de (A.1), le terme général de la somme est centré et i.i.d. donc le théorème central limite s'applique à ce numérateur :

$$\sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\pi(x_1^i)}{q_1(x_1^i)} \varphi(x_1^i) - \frac{\pi(x_2^i)}{q_2(x_2^i)} \Theta \right] \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^{2, \text{DPIS}}) \quad (\text{A.2})$$

où

$$\sigma^{2, \text{DPIS}} = \int \left( \frac{\pi(x_1)}{q_1(x_1)} \varphi(x_1) - \frac{\pi(x_2)}{q_2(x_2)} \Theta \right)^2 q(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (\text{A.3})$$

D'autre part,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x_2^i)}{q_2(x_2^i)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 1 \quad (\text{A.4})$$

par la loi forte des grands nombres, donc d'après le théorème de Slutsky on a bien

$$\sqrt{N}(\hat{\Theta}^{\text{DPIS},N} - \Theta) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^{2, \text{DPIS}}). \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Preuve de la Proposition 4

Soit  $A$  un borélien quelconque. Soit  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et 0 sinon. Alors pour tout  $l$ ,  $1 \leq l \leq M_N$ ,

$$\begin{aligned}
\Pr(x^l \in A) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \sum_{i=1}^N w^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N) \mathbf{1}_A(\tilde{x}^i) \right] \prod_{j=1}^N q(\tilde{x}^j) d\tilde{x}^{1:N} \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} w^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N) \mathbf{1}_A(\tilde{x}^i) \prod_{j=1}^N q(\tilde{x}^j) d\tilde{x}^{1:N} \\
&= \sum_{i=1}^N \int_A \left[ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} w^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N q(\tilde{x}^j) d\tilde{x}^{1:i-1, i+1:N} \right] q(\tilde{x}^i) d\tilde{x}^i \\
&= \sum_{i=1}^N \int_A h^N(\tilde{x}^i) q(\tilde{x}^i) d\tilde{x}^i \\
&= \int_A N h^N(\tilde{x}) q(\tilde{x}) d\tilde{x},
\end{aligned}$$

donc  $x^l$  a pour densité  $\tilde{q}^N$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

## A.3 Preuve de la Proposition 5

Soit  $x^i$  (pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq M_N$ ) produit par le mécanisme SIR classique en section 1.4.1. Alors (voir (1.40))

$$\mathbb{E}[\varphi(x^i) | \tilde{x}^{1:N}] = \hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}. \quad (\text{A.6})$$

Donc  $\mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N} | \tilde{x}^{1:N}] = \hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}$ , et  $\mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N}]$ . D'autre part  $\mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N}] = \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}]$ , d'où (3.25). Ensuite

$$\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{SIR}, M_N}) = \frac{1}{M_N^2} \sum_{i=1}^{M_N} \text{var}(\varphi(x^i)) + \frac{1}{M_N^2} \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^{M_N} \text{cov}(\varphi(x^k), \varphi(x^l)) \quad (\text{A.7})$$

où  $x^i \sim \tilde{q}^N$  pour tout  $i$ . Le premier terme est égal à  $\text{var}(\hat{\Theta}^{\text{I-SIR}, M_N})$ . Calculons le second terme. Pour tous  $k, l$ ,  $1 \leq k \leq M_N$ ,  $1 \leq l \leq M_N$  avec  $k \neq l$ ,  $\mathbb{E}[\varphi(x^k) \varphi(x^l) | \tilde{x}^{1:N}] = (\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N})^2$ , donc  $\mathbb{E}[\varphi(x^k) \varphi(x^l)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x^k) \varphi(x^l) | \tilde{x}^{1:N}]] = \mathbb{E}[(\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N})^2]$ . En utilisant à nouveau (A.6), on peut conclure que  $\text{cov}(\varphi(x^k), \varphi(x^l)) = \text{var}(\hat{\Theta}^{\text{NIS}, N})$ , d'où (3.26).

## A.4 Preuve du Théorème 5

Réintroduisons tout d'abord les notations suivantes par souci de clarté :

$$\Theta(\varphi) = \int \varphi(x)\pi(x)dx, \quad (\text{A.8})$$

$$\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi) = \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\pi(x^i)}{q(x^i)}}{\sum_{j=1}^N \frac{\pi(x^j)}{q(x^j)}} \varphi(x^i), \quad x^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} q(\cdot), \quad (\text{A.9})$$

$$\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}(\varphi) = \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \varphi(\bar{x}^i), \quad \bar{x}^i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \tilde{q}^N(\cdot), \quad (\text{A.10})$$

Comme  $\mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}(\varphi)] = \mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi)]$ , nous avons

$$\sqrt{M_N} \left( \widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}(\varphi) - \Theta(\varphi) \right) = A_N + B_N, \quad (\text{A.11})$$

$$A_N = \sqrt{M_N} \left( \widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}(\varphi) - \mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{I-SIR},M_N}(\varphi)] \right), \quad (\text{A.12})$$

$$B_N = \frac{\sqrt{M_N}}{\sqrt{N}} \mathbb{E}[\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi) - \Theta(\varphi))]. \quad (\text{A.13})$$

Notre objectif est de montrer que  $A_N$  converge vers une loi gaussienne centrée de variance  $\text{var}_\pi(\varphi(x))$  et que  $B_N$  converge vers 0.

### A.4.1 Convergence de $B_N$

Nous avons rappelé (voir (1.31)) que sous de faibles hypothèses [34]

$$\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi) - \Theta(\varphi)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( 0, \mathbb{E}_q \left[ \frac{\pi^2(x)}{q^2(x)} (\varphi(x) - \Theta(\varphi))^2 \right] \right).$$

Selon [16, Théorème 9.1.10],  $\mathbb{E}[|\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi) - \Theta(\varphi))|^2]$  est borné donc sa borne supérieure est finie. D'après [9, Corollaire du théorème 25.12], il est garanti que  $\sqrt{N}\mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi) - \Theta(\varphi)] \rightarrow 0$ ; par conséquent

$$\frac{\sqrt{M_N}}{\sqrt{N}} \mathbb{E}[\sqrt{N}(\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi) - \Theta(\varphi))] \rightarrow 0. \quad (\text{A.14})$$

### A.4.2 Convergence de $A_N$

$A_N$  s'écrit

$$\sqrt{M_N} \left( \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \varphi(\bar{x}^i) - \mathbb{E}[\varphi(\bar{x}^i)] \right). \quad (\text{A.15})$$

Afin de montrer sa convergence lorsque  $N \rightarrow \infty$ , nous avons besoin d'un TCL pour matrices triangulaires car la loi des  $\tilde{x}^i$  change avec  $N$ , et nous choisissons d'utiliser la version présentée en [16, Théorème 9.5.13]. Les hypothèses nécessaires sont les suivantes :

- 1)  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^{M_N}$  sont indépendants ;
- 2)  $\frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \mathbb{E}[\varphi^2(\tilde{x}^i)] - (\mathbb{E}[\varphi(\tilde{x}^i)])^2 \rightarrow \text{var}_\pi(\varphi(x))$  ;
- 3) pour tout  $C$  positif,  $\frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \mathbb{E}[\varphi^2(\tilde{x}^i) \mathbf{1}_{|\varphi(\tilde{x}^i)| \geq C}] \rightarrow \Theta(\varphi^2 \mathbf{1}_{|\varphi| \geq C})$ .

L'hypothèse 1) est satisfaite puisque  $\{\tilde{x}^i\}_{i=1}^{M_N}$  sont i.i.d. suivant  $\tilde{q}^N$ . Ensuite, on a  $\mathbb{E}[\varphi(\tilde{x}^i)] = \mathbb{E}_{\tilde{q}^N}[\varphi(\tilde{x})]$  ce qui coïncide avec  $\mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi)]$ . En utilisant à nouveau [16, Théorème 9.1.10] et [9, Théorème 25.12], on obtient donc  $\mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi)] \rightarrow \Theta(\varphi)$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Par le même argument, on peut obtenir  $\mathbb{E}[\varphi^2(\tilde{x}^i)] \rightarrow \Theta(\varphi^2)$ . Par conséquent, l'hypothèse 2) est satisfaite puisque

$$\frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \mathbb{E}[\varphi^2(\tilde{x}^i)] - (\mathbb{E}[\varphi(\tilde{x}^i)])^2 = \mathbb{E}_{\tilde{q}^N}[\varphi^2(\tilde{x})] - (\mathbb{E}_{\tilde{q}^N}[\varphi(\tilde{x})])^2 \rightarrow \Theta(\varphi^2) - (\Theta(\varphi))^2 = \text{var}_\pi(\varphi(x)).$$

Enfin,  $\mathbb{E}[\varphi^2(\tilde{x}^i) \mathbf{1}_{|\varphi(\tilde{x}^i)| \geq C}] = \mathbb{E}[\widehat{\Theta}^{\text{NIS},N}(\varphi^2 \mathbf{1}_{|\varphi| \geq C})]$ , qui converge vers  $\Theta(\varphi^2 \mathbf{1}_{|\varphi| \geq C})$  et l'hypothèse 3) est donc satisfaite. Ainsi,

$$\sqrt{M_N} \left( \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \varphi(\tilde{x}^i) - \mathbb{E}[\varphi(\tilde{x}^i)] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{var}_\pi(\varphi(x))). \quad (\text{A.16})$$

En combinant (A.14), (A.16) et (A.11), nous obtenons (3.29).

# Preuves des résultats du chapitre 4

## B.1 Preuve de la Proposition 7

Considérons un FP avec rééchantillonnage à l'instant  $t$ . D'une part, les égalités (4.45a) sont vérifiées car les procédures SIR, I-SIR et SR produisent toutes des particules rééchantillonnées qui, sachant  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ , sont tirées suivant la même loi  $\tilde{q}_t^N$ . D'autre part, les inégalités (4.45b) sont immédiates à partir des inégalités (4.45c) et du fait que le mécanisme SR se réduit au mécanisme SIR (resp. I-SIR) lorsque  $k = 0$  (resp.  $k = N$ ).

Traitons maintenant (4.45c). Puisque  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^{\text{SR},i})$ , sachant  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$

$$N^2 \text{var}_k(\widehat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) = \sum_{i=1}^N \text{var}(\varphi(x_t^i)) + 2 \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \text{cov}_k(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2})); \quad (\text{B.1})$$

ici l'indice  $k$  dans une (co)variance souligne le fait qu'elle dépende de  $k$ . Le premier terme du côté droit est indépendant de  $k$  donc la différence entre diverses valeurs de  $k$  provient exclusivement des termes de covariance. Ensuite  $\text{cov}_k(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2})) = \mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] - \mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_1})]\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_2})]$ , et de nouveau, le deuxième terme du côté droit est indépendant de  $k$ . Maintenant pour  $i_1 < i_2$ ,

$$\mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})|\tilde{x}_t^{i_1:i_2,\cdot}]] \quad (\text{B.2})$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_1})|\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}]\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_2})|\tilde{x}_t^{i_2,\cdot}]] \quad (\text{B.3})$$

$$= \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})] \quad (\text{B.4})$$

$$= \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})|m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] \quad (\text{B.5})$$

où  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$  représente tous les indices retirés de l'itération  $i_1 + 1$  jusqu'à l'itération  $i_2$  (la troisième égalité est vérifiée car  $x_t^i$  est rééchantillonné à partir du support  $\tilde{x}_t^{i,\cdot}$  (voir figure 4.5), donc  $\mathbb{E}[\varphi(x_t^i)|\tilde{x}_t^{i,\cdot}] = \widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}(\tilde{x}_t^{i,\cdot})$  où  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$  est défini en (2.41)). Plus précisément,  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$  contient tous les indices de tirage choisis au moins une fois lors des itérations  $i_1 + 1$  à  $i_2$ , sans les dupliquer lorsqu'ils ont été choisis plusieurs fois. En effet ce qui va nous intéresser sont les particules communes entre les ensembles  $\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}$  et  $\tilde{x}_t^{i_2,\cdot}$ , or dès qu'un indice a été choisi au moins une fois lors des itérations intermédiaires, cela garantit déjà que la particule correspondante n'est plus partagée par ces ensembles.

L'espérance extérieure dans cette dernière expression (B.5) correspond à une somme uni-

formément pondérée sur toutes les valeurs possibles de  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$ , c'est-à-dire sur  $(A_N^k)^{i_2-i_1}$  termes où  $A_N^k$  est le nombre d'arrangements de  $k$  parmi  $N$ . Sachant  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$ , le terme général de cette somme s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})|m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] = & \quad (\text{B.6}) \\ \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})|\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]|m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] \end{aligned}$$

où  $\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}$  sont les particules partagées par les supports  $\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}$  et  $\tilde{x}_t^{i_2,\cdot}$ , c'est-à-dire les particules qui n'ont pas été retirées entre ces deux supports (ce qui peut potentiellement correspondre à un ensemble vide). Sous ce conditionnement,  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})$  et  $\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})$  sont indépendants donc ce terme général devient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})|\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] \\ \times \mathbb{E}[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})|\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]|m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] \\ = \mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})|\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]|m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] \quad (\text{B.7}) \\ = h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)) = h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1), m_{i_1+1}^{i_2}(k)) \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

car sachant les trajectoires des itérations temporelles passées, les particules appartenant à différents supports sont toutes tirées marginalement suivant les mêmes lois. Enfin

$$\mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] = \frac{1}{(A_N^k)^{i_2-i_1}} \sum_{m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)} h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)). \quad (\text{B.9})$$

Il reste à comparer (B.9) avec la même expression lorsque  $k \leftarrow k-1$ . Remarquons que (B.9) peut se réécrire comme

$$\mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] = \frac{1}{(A_N^{k-1})^{i_2-i_1}} \sum_{m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)} \frac{1}{(N-k+1)^{i_2-i_1}} \sum_{m_{i_1+1}^{i_2}(k)} h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1), m_{i_1+1}^{i_2}(k)), \quad (\text{B.10})$$

où cette deuxième somme uniformément pondérée coïncide avec l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k))|m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)].$$

Sachant  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)$ , la collection  $\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}$  est incluse dans la collection  $\tilde{x}_t^{i_1,1:N\setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)}$  puisque l'ajout d'une  $k$ -ième étape de tirage à chaque itération ne peut qu'agrandir l'ensemble d'indices  $m_{i_1+1}^{i_2}$ . Par conséquent, la décomposition de Rao-Blackwell ( $\mathbb{E}[\mathbb{E}^2[x|y]] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}^2[x|y, z]]$ ) assure que

$$h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1), m_{i_1+1}^{i_2}(k)) \leq h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)) \quad (\text{B.11})$$

pour tout  $m_{i_1+1}^{i_2}(k)$ , et donc que

$$\mathbb{E}[h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)) | m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)] \leq h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)). \quad (\text{B.12})$$

Ainsi  $\forall \{i_1, i_2\} \in 1:N, i_1 < i_2$  :

$$\mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] = \frac{1}{(A_N^{k-1})^{i_2-i_1}} \sum_{m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)} \mathbb{E}[h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)) | m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)] \quad (\text{B.13})$$

$$\leq \frac{1}{(A_N^{k-1})^{i_2-i_1}} \sum_{m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)} h(m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)) = \mathbb{E}_{k-1}[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})], \quad (\text{B.14})$$

d'où (4.45c).

## B.2 Preuve de la Proposition 8

L'algorithme NSSR produit comme les techniques SIR et I-SIR des particules tirées suivant la loi  $\tilde{q}_t^N$  sachant  $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ , d'où (4.46a). Par ailleurs l'inégalité (4.46b) se déduit directement de l'inégalité (4.46c) puisque similairement au mécanisme SR, le mécanisme NSSR se réduit au mécanisme SIR (resp. I-SIR) pour  $k = 0$  (resp.  $k = N$ ). Maintenant nous nous concentrons sur les inégalités (4.46c) et (4.46d).

### B.2.1 Preuve de l'inégalité (4.46c)

Nous commençons par montrer que dans le cas du mécanisme NSSR, comme pour le mécanisme SR la variance de l'estimateur décroît à mesure que le paramètre  $k$  croît. Le point de départ de la preuve est exactement le même que pour la preuve de l'inégalité (4.45c) en B.1, jusqu'au point suivant :

$$\mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2}) | \tilde{x}_t^{i_1:i_2,:}]] \quad (\text{B.15})$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_1}) | \tilde{x}_t^{i_1,:}] \mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_2}) | \tilde{x}_t^{i_2,:}]] \quad (\text{B.16})$$

$$= \mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,:}) \Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,:})] \quad (\text{B.17})$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,:}) \Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,:}) | m_{i_1}^{i_2}(1:k)]], \quad (\text{B.18})$$

où cette fois les indices de retraitage se résument à  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  et n'ont pas la même signification que dans le cas du mécanisme SR puisqu'ils représentent ici des retirages admettant l'ensemble  $\tilde{x}_t^{1,:}$  comme base commune pour l'obtention des ensembles  $\tilde{x}_t^{i_1,:}$  et  $\tilde{x}_t^{i_2,:}$ . On ne forme plus une suite de processus de retraitage indépendants de  $i_1 + 1$  à  $i_2$ , il y a seulement 2 processus de

retirage indépendants, donc  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  contient tous les indices retirés à la fois pour la formation de l'ensemble  $\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}$  à partir de  $\tilde{x}_t^{1,\cdot}$ , et pour la formation de l'ensemble  $\tilde{x}_t^{i_2,\cdot}$  à partir de  $\tilde{x}_t^{1,\cdot}$ . Encore une fois,  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  ne peut contenir qu'une fois le même indice, car ce qui nous intéresse sont les particules communes entre les ensembles  $\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}$  et  $\tilde{x}_t^{i_2,\cdot}$ , or dès qu'un indice a été choisi une fois cela garantit que la particule correspondante n'est plus partagée par ces ensembles.

Par conséquent, cette fois l'espérance extérieure du terme général en (B.18) correspond à une moyenne sur toutes les valeurs possibles de  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  ce qui représente  $(A_N^k)^2$  termes. Sachant  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$ , le terme associé à cette somme s'écrit à nouveau :

$$\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})|m_{i_1}^{i_2}(1:k)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})|\tilde{x}_t^{i_1,1:N \setminus m_{i_1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1}^{i_2}(1:k)]|m_{i_1}^{i_2}(1:k)] \quad (\text{B.19})$$

où  $\tilde{x}_t^{i_1,1:N \setminus m_{i_1}^{i_2}(1:k)}$  sont les particules en commun entre les ensembles  $i_1$  et  $i_2$ . Ainsi, sous ce conditionnement  $\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot})$  et  $\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{i_2,\cdot})$  sont indépendants et le terme général s'écrit

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{1,\cdot})|\tilde{x}_t^{1,1:N \setminus m_{i_1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1}^{i_2}(1:k)]|m_{i_1}^{i_2}(1:k)] = h(m_{i_1}^{i_2}(1:k)) = h(m_{i_1}^{i_2}(1:k-1), m_{i_1}^{i_2}(k)). \quad (\text{B.20})$$

Comme pour la preuve de l'inégalité (4.45c) en B.1, on peut donc à nouveau en déduire par la décomposition de Rao-Blackwell que  $\forall \{i_1, i_2\} \in 1:N, i_1 < i_2$ ,

$$\text{cov}_k(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2})) \leq \text{cov}_{k-1}(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2})), \quad (\text{B.21})$$

car la somme sur les indices  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  peut se séparer en une somme sur les indices  $m_{i_1}^{i_2}(1:k-1)$  et une somme sur les indices  $m_{i_1}^{i_2}(k)$  :

$$\mathbb{E}_k[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})] = \frac{1}{(A_N^k)^2} \sum_{m_{i_1}^{i_2}(1:k)} h(m_{i_1}^{i_2}(1:k)) \quad (\text{B.22})$$

$$= \frac{1}{(A_N^{k-1})^2} \sum_{m_{i_1}^{i_2}(1:k-1)} \frac{1}{(N-k+1)^2} \sum_{m_{i_1}^{i_2}(k)} h(m_{i_1}^{i_2}(1:k-1), m_{i_1}^{i_2}(k)), \quad (\text{B.23})$$

d'où l'inégalité (4.46c).

## B.2.2 Preuve de l'inégalité (4.46d)

Nous montrons en outre que pour une valeur de  $k$  donnée la variance de l'estimateur NSSR est plus grande que celle de l'estimateur SR. Le même raisonnement que précédemment peut être appliqué pour effectuer cette comparaison à  $k$  donné car cela revient à comparer quelles variables sont en commun entre les ensembles  $i_1$  et  $i_2$ , et par conséquent cette fois à comparer

$m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  avec  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$ .

Nous remarquons que pour  $i_2 - i_1 \geq 2$ ,  $m_{i_1}^{i_2}(1:k) \subset m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$  et la somme sur  $(A_N^k)^{M_N-1}$  termes peut à nouveau être fragmentée afin de faire apparaître exactement la plus petite moyenne sur  $(A_N^k)^2$  termes. Ceci implique que comparer les termes

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{1,\cdot}) | \tilde{x}_t^{1,1:N \setminus m_{i_1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1}^{i_2}(1:k)] | m_{i_1}^{i_2}(1:k)]] \quad (\text{B.24})$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{1,\cdot}) | \tilde{x}_t^{1,1:N \setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)] | m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]] \quad (\text{B.25})$$

pour  $(i_1, i_2)$  et  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  donnés revient bien à comparer les termes complets de covariance  $\text{cov}_k(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2}))$  correspondants. Ainsi  $\forall \{i_1, i_2\} \in 1:N, i_1 < i_2$  tels que  $i_2 - i_1 \geq 2$ ,

$$\{\text{cov}_k(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2}))\}_{SR} \leq \{\text{cov}_k(\varphi(x_t^{i_1}), \varphi(x_t^{i_2}))\}_{NSSR} \quad (\text{B.26})$$

et il y a égalité pour  $i_2 - i_1 = 2$ .

Cependant pour  $i_2 - i_1 = 1$  cette inégalité est inversée puisque  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k) \subset m_{i_1}^{i_2}(1:k)$ , mais ceci peut se résoudre en comparant des termes de covariance différents entre eux, plutôt que de comparer seulement ceux présentant des indices  $(i_1, i_2)$  égaux. À cet effet nous choisissons d'exclure de la comparaison précédente (où l'on a considéré  $i_2 - i_1 \geq 2$ ) les indices  $i_1 = 1$  et  $i_2$  tels que  $i_1 = 1$  et  $i_2$  parcourt l'intervalle  $3:N$ , afin de les comparer ici avec des indices  $i_1 = 1$  et  $i_2$  tels que  $i_2 - i_1 = 1$  excepté le cas  $i_1 = 1$  et  $i_2 = 2$ .

Ainsi, dans un premier temps nous choisissons de comparer les termes provenant de l'estimateur SR pour tous les indices  $(i_1, i_2)$  où  $i_1 > 1$  et  $i_2 - i_1 = 1$ , avec ceux provenant de l'estimateur NSSR où cette fois les indices  $(i_1, i_2)$  sont tels que  $i_1 = 1$  et  $i_2$  parcourt l'intervalle  $3:N$  (ceci correspond bien à  $N - 2$  termes dans les deux cas). Ces différents termes peuvent être comparés car leurs composantes  $\mathbb{E}[\varphi(x_t^{i_1})\varphi(x_t^{i_2})]$  correspondent toujours à des sommes sur les indices de tirages des mêmes termes

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{1,\cdot}) | \tilde{x}_t^{1,1:N \setminus m_{i_1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1}^{i_2}(1:k)]^2 | m_{i_1}^{i_2}(1:k)]] \quad (\text{B.27})$$

ou

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}_t^{1,\cdot}) | \tilde{x}_t^{1,1:N \setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}, m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]^2 | m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]] \quad (\text{B.28})$$

lesquels diffèrent uniquement de par leur conditionnement, en raison d'indices de tirage différents. Dans ce cas  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$  et  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  correspondent tous les deux à une unique étape de  $k$  tirages, ce qui implique que les termes correspondants sont égaux.

Dans un deuxième temps, à l'inverse, nous devons comparer  $N - 2$  autres termes pour

lesquels  $i_1 = 1$  et  $i_2 = 3:N$  pour le mécanisme SR, et  $i_1 > 1$  et  $i_2 - i_1 = 1$  pour le mécanisme NSSR. Dans ce cas le mécanisme SR effectue nécessairement plus de 2 étapes de retirages (ou exactement 2 pour  $i_1 = 1$  et  $i_2 = 3$ ), tandis que le mécanisme NSSR n'en effectue toujours que 2. Par conséquent les termes associés à l'estimateur SR ont une valeur plus faible ou égale.

Il reste ensuite le cas  $i_1 = 1$  et  $i_2 = 2$ , pour lequel  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$  et  $m_{i_1}^{i_2}(1:k)$  correspondent tous les deux à une unique étape de  $k$  retirages. Ainsi les termes correspondants pour les mécanismes SR et NSSR sont égaux, ce qui assure enfin la validité de l'inégalité (4.46d).

### B.3 Commentaires et étoffements sur ces propositions et preuves

**Remarque 12.** Les termes de covariance (comme en équation (B.1)) propres aux estimateurs SR et NSSR sont en fait tous positifs, en effet par l'inégalité de Jensen on a toujours

$$\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{i_1,\cdot})\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{i_2,\cdot})] \geq \mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{i_1,\cdot})]\mathbb{E}[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{i_2,\cdot})] \geq \mathbb{E}^2[\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{1,\cdot})], \quad (\text{B.29})$$

et l'égalité est atteinte lorsque les deux ensembles  $i_1$  et  $i_2$  n'ont aucune particule en commun.

**Remarque 13.** Précisons en quoi l'inégalité de Jensen peut, alternativement au théorème de Rao-Blackwell, permettre d'obtenir ces preuves. En développant les intégrales, cette inégalité assure directement que

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbb{R}^k} \Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{1,\cdot}) \prod_{l \in m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l} \right)^2 \\ & \leq \\ & \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{1,\cdot}) \prod_{l \in m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l} \right)^2 \prod_{l \in m_{i_1+1}^{i_2}(k)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

car la fonction carré est convexe et  $\Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{1,\cdot})$  est intégrable par rapport à toute mesure  $q_l(\tilde{x}^{1,l})d\tilde{x}^{1,l}$  pour  $l \in m_{i_1+1}^{i_2}(k)$  ou  $l \in m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)$ . Par extension triviale l'inégalité suivante est aussi

assurée, ce qui correspond aux espérances en jeu dans les preuves :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \left( \int_{\mathbb{R}^k} \Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{1,\cdot}) \prod_{l \in m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l} \right)^2 \prod_{l \in 1:N \setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l} \\
 & \leq \\
 & \int_{\mathbb{R}^{N-k+1}} \left( \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Theta_t^{\text{SIS}}(\tilde{x}^{1,\cdot}) \prod_{l \in m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l} \right)^2 \prod_{l \in 1:N \setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)} q_l(\tilde{x}^{1,l}) d\tilde{x}^{1,l}
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

**Remarque 14.** Bien que l'on puisse appliquer le théorème de Rao-Blackwell pour comparer les deux espérances

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}) | \tilde{x}^{i_1,1:N \setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)}] | m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)]] \tag{B.32}$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^2[\widehat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}(\tilde{x}_t^{i_1,\cdot}) | \tilde{x}^{i_1,1:N \setminus m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)}] | m_{i_1+1}^{i_2}(1:k-1)]], \tag{B.33}$$

à notre connaissance il n'est pas possible d'obtenir une relation explicite en  $k$  (par exemple sous forme de relation de récurrence entre les expressions de la variance à  $k$  et  $k-1$ ), ni donc d'obtenir une expression de la variance elle-même en fonction de  $k$ . En effet, le paramètre  $k$  est directement relié à la dimension des intégrales apparaissant dans ces expressions.

**Remarque 15.** Dans le cas statique les sommes sur les indices de retraitage peuvent être réduites considérablement car de nombreux termes de ces sommes sont égaux entre eux. En effet tous les termes dont le conditionnement est par rapport au même nombre de variables ont la même valeur, puisqu'une seule loi d'importance  $q$  est utilisée. Il ne reste en fait qu'une somme sur les nombres possibles de variables conditionnantes, ce qui parcourt l'intervalle  $0:N$  et correspond donc à une somme sur  $N+1$  termes. Cependant il n'est pas trivial de quantifier chacun de ces termes, et par ailleurs cette simplification de somme ne permet pas d'alléger les preuves des propositions 7 et 8 dans le cas statique. En outre, ces termes correspondent toujours à des intégrales et il n'est pas non plus possible dans un cas général de quantifier leur différences, ni donc d'explicitier la décroissance de la variance lorsque  $k$  augmente.

**Remarque 16.** Lorsque l'on écrit  $m_{i_1+1}^{i_2}(1:k)$ , cela implique que ces indices de retraitage sont le résultat d'étapes de rééchantillonnage multinomial *sans remplacement*, ce qui signifie que pour tout  $l \in (i_1+1):i_2$  et pour tout  $r \in 2:k$ ,

$$\begin{cases} m_l(r) \neq m_l(r-1) \\ \vdots \\ m_l(r) \neq m_l(1) \end{cases} \tag{B.34}$$

**Remarque 17.** Les preuves des propositions 7 et 8 restent valables lorsque la loi des indices de tirage n'est plus uniforme sans remplacement sur  $1:N$ . Cette loi peut en fait être choisie de manière quelconque du moment qu'elle reste indépendante des particules intermédiaires  $\tilde{x}$  elles-mêmes (en particulier, elle ne doit donc pas dépendre des poids intermédiaires associés).

# Bibliographie

- [1] P. Agrawal and N. Patwari. Correlated link shadow fading in multi-hop wireless networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 8(8) :4024–4036, August 2009. (Cited on page 118.)
- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979. (Cited on page 47.)
- [3] C. Andrieu, A. Doucet, and R. Holenstein. Particle Markov chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 72(3) :269–342, 2010. (Cited on page 97.)
- [4] M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear / non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2) :174–188, February 2002. (Cited on page 47.)
- [5] R. Bassett and J. Deride. Maximum a posteriori estimators as a limit of Bayes estimators. *Mathematical Programming*, Jan 2018. (Cited on page 22.)
- [6] D. S. Baum, J. Hansen, and J. Salo. An interim channel model for beyond-3G systems : extending the 3GPP spatial channel model (SCM). In *Proc. of the 61st IEEE Vehicular Technology Conference*, volume 5, pages 3132–3136 Vol. 5, May 2005. (Cited on page 121.)
- [7] E. Bellone, J. P. Hughes, and P. Guttorp. A hidden Markov model for downscaling synoptic atmospheric patterns to precipitation amounts. *Climate Research*, 15(1) :1–12, 2000. (Cited on page 20.)
- [8] T. Bengtsson, P. Bickel, and B. Li. *Curse-of-dimensionality revisited : Collapse of the particle filter in very large scale systems*, volume Volume 2 of *Collections*, pages 316–334. Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio, USA, 2008. (Cited on page 52.)
- [9] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1995. (Cited on pages 149 and 150.)
- [10] W. Blair. Design of nearly constant velocity track filters for tracking maneuvering targets. In *Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion*, pages 1–7, June 2008. (Cited on pages 45 and 130.)
- [11] A. Brockwell, P. Del Moral, and A. Doucet. Sequentially interacting Markov chain Monte Carlo methods. *Ann. Statist.*, 38(6) :3387–3411, 12 2010. (Cited on pages 119 and 124.)
- [12] M. F. Bugallo, V. Elvira, L. Martino, D. Luengo, J. Miguez, and P. M. Djuric. Adaptive importance sampling : The past, the present, and the future. *IEEE Signal Processing Magazine*, 34(4) :60–79, July 2017. (Cited on page 59.)
- [13] R. E. Caflisch. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *ACTA NUMERICA*, 1998. (Cited on page 23.)

- [14] O. Cappé, R. Douc, A. Guillin, J.-M. Marin, and C. P. Robert. Adaptive importance sampling in general mixture classes. *Statistics and Computing*, 18(4) :447–459, Dec 2008. (Cited on page 60.)
- [15] O. Cappé, A. Guillin, J. M. Marin, and C. P. Robert. Population Monte Carlo. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 13(4) :907–929, 2004. (Cited on pages 29 and 60.)
- [16] O. Cappé, É. Moulines, and T. Rydén. *Inference in Hidden Markov Models*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2005. (Cited on pages 20, 28, 30, 32, 33, 51, 149 and 150.)
- [17] G. Casella and R. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury advanced series in statistics and decision sciences. Thomson Learning, 2002. (Cited on pages 20 and 28.)
- [18] S. Chib and E. Greenberg. Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. *The American Statistician*, 49(4) :327–335, 1995. (Cited on pages 35, 37, 38 and 39.)
- [19] P. del Moral. *Feynman-Kac formulae. Genealogical and interacting particle systems with applications*. Probability and its applications. Springer, New-York, 2004. (Cited on page 32.)
- [20] R. Douc, O. Cappé, and É. Moulines. Comparison of resampling schemes for particle filtering. In *Proceedings of the 4th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, Zagreb, Croatia, September 2005. (Cited on pages 34, 102 and 108.)
- [21] R. Douc, A. Guillin, J.-M. Marin, and C. P. Robert. Convergence of adaptive mixtures of importance sampling schemes. *Ann. Statist.*, 35(1) :420–448, 02 2007. (Cited on pages 29 and 60.)
- [22] R. Douc, É. Moulines, and J. Olsson. Optimality of the auxiliary particle filter. *Probability and Mathematical Statistics*, 29(1) :1–28, 2009. (Cited on page 56.)
- [23] Douc, R., Guillin, A., Marin, J.-M., and Robert, C. P. Minimum variance importance sampling via population Monte Carlo. *ESAIM : PS*, 11 :427–447, 2007. (Cited on page 60.)
- [24] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. An introduction to sequential monte carlo methods. In *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, pages 3–14. Springer New York, 2001. (Cited on page 53.)
- [25] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, editors. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Statistics for Engineering and Information Science. Springer Verlag, New York, 2001. (Cited on pages 47, 52 and 133.)
- [26] A. Doucet, S. J. Godsill, and C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3) :197–208, 2000. (Cited on pages 50, 53, 99 and 134.)
- [27] A. Doucet and A. M. Johansen. A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing : Fifteen years later. In *Oxford handbook of nonlinear filtering*. 2011. (Cited on pages 52 and 113.)

- [28] R. F. Engle. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4) :987–1007, 1982. (Cited on page 96.)
- [29] B. Ferris, D. Hähnel, and D. Fox. Gaussian Processes for Signal Strength-Based Location Estimation. In *Proceedings of Robotics : Science and Systems*, pages 1–8, 2006. (Cited on page 118.)
- [30] A. Finke, A. Doucet, and A. M. Johansen. Limit theorems for sequential mcmc methods. *arXiv preprint arXiv :1807.01057*, 2018. (Cited on page 126.)
- [31] A. E. Gelfand and A. F. M. Smith. Sampling based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85(410) :398–409, 1990. (Cited on page 30.)
- [32] J. Gentle, W. Härdle, and Y. Mori. *Handbook of Computational Statistics : Concepts and Methods*. Springer Handbooks of Computational Statistics. Springer Berlin Heidelberg, 2017. (Cited on page 22.)
- [33] M. Gerber, N. Chopin, and N. Whiteley. Negative association, ordering and convergence of resampling methods. *ArXiv e-prints*, July 2017. (Cited on page 34.)
- [34] J. Geweke. Bayesian inference in econometric models using Monte Carlo integration. *Econometrica*, 57(6) :1317–39, 1989. (Cited on pages 28, 29 and 149.)
- [35] W. R. Gilks and C. Berzuini. Following a Moving Target-Monte Carlo Inference for Dynamic Bayesian Models. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 63 :127–146, 2001. (Cited on pages 112, 124 and 133.)
- [36] M. Girolami and B. Calderhead. Riemann manifold Langevin and Hamiltonian Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 73(2) :123–214, 2011. (Cited on page 127.)
- [37] G. Goertzel. Quota sampling and importance functions in stochastic solution of particle problems. Technical Report ORNL-434, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, TN, June 1949. (Cited on pages 13 and 26.)
- [38] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/ non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings-F*, 140(2) :107–113, April 1993. (Cited on pages 14 and 47.)
- [39] M. Gudmundson. Correlation model for shadow fading in mobile radio systems. *Electronics Letters*, 27(23) :2145–2146, Nov 1991. (Cited on pages 118 and 121.)
- [40] I. Guvenc and C.-C. Chong. A Survey on TOA Based Wireless Localization and NLOS Mitigation Techniques. *IEEE Communications Surveys Tutorials*, 11(3) :107–124, rd 2009. (Cited on page 118.)
- [41] J. M. Hammersley and D. C. Handscomb. *Monte Carlo Methods*. Methuen and Co., London, 1964. (Cited on page 25.)

- [42] J. M. Hammersley and K. W. Morton. Poor Man's Monte Carlo. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 16(1) :23–38, 1954. (Cited on page 13.)
- [43] H. Y. He and A. B. Owen. Optimal mixture weights in multiple importance sampling. *arXiv preprint arXiv :1411.3954*, 2014. (Cited on page 59.)
- [44] T. Hesterberg. *Advances in Importance Sampling*. PhD thesis, Stanford University, 1988. (Cited on pages 28 and 29.)
- [45] T. Hesterberg. Weighted average importance sampling and defensive mixture distributions. *Technometrics*, 37(2) :185–194, 1995. (Cited on page 59.)
- [46] Y. Ho and R. Lee. A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9 :333–339, 1964. (Cited on page 46.)
- [47] L. Hu and D. Evans. Localization for mobile sensor networks. In *Proceedings of the 10th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking*, MobiCom '04, pages 45–57, New York, NY, USA, 2004. ACM. (Cited on page 132.)
- [48] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*, volume 64 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego, 1970. (Cited on pages 20 and 47.)
- [49] A. M. Johansen and A. Doucet. A note on the auxiliary particle filter. *Statistics and Probability Letters*, 78(12) :1498–1504, September 2008. (Cited on page 56.)
- [50] S. Julier and J. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. In *Proceedings of the IEEE*, volume 92, pages 401–422, March 2004. (Cited on page 47.)
- [51] H. Kahn and A. W. Marshall. Methods of reducing sample size in Monte Carlo computations. *Journal of the Operations Research Society of America*, 1(5) :263–278, 1953. (Cited on pages 13 and 25.)
- [52] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi. *Linear estimation*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000. (Cited on page 46.)
- [53] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, 82(1) :35–45, 1960. (Cited on pages 13 and 46.)
- [54] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, 83(3) :95–108, 1961. (Cited on pages 13 and 46.)
- [55] M. Klaas, N. De Freitas, and A. Doucet. Toward practical  $N^2$  Monte Carlo : the Marginal Particle Filter. In *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2005. (Cited on page 56.)
- [56] A. Kong, J. S. Liu, and W. H. Wong. Sequential imputations and Bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association*, 89(425) :278–88, March 1994. (Cited on page 50.)
- [57] D. P. Kroese, R. Y. Rubinstein, and P. W. Glynn. Chapter 2 - the cross-entropy method for estimation. In C. Rao and V. Govindaraju, editors, *Handbook of Statistics*, volume 31 of *Handbook of Statistics*, pages 19 – 34. Elsevier, 2013. (Cited on pages 59 and 62.)

- [58] K. Lange. *Numerical Analysis for Statisticians*. Springer, 2014. (Cited on page 22.)
- [59] T. Li, M. Bolić, and P. M. Djuric. Resampling Methods for Particle Filtering : Classification, implementation, and strategies. *IEEE Signal Processing Magazine*, 32(3) :70–86, May 2015. (Cited on page 34.)
- [60] X. Li and V. Jilkov. Survey of maneuvering target tracking. Part I. Dynamic models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(4) :1333–1364, Oct 2003. (Cited on pages 45 and 130.)
- [61] J. S. Liu. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008. (Cited on pages 28, 29 and 75.)
- [62] J. S. Liu and R. Chen. Blind deconvolution via sequential imputation. *Journal of the American Statistical Association*, 90(430) :567–76, June 1995. (Cited on page 50.)
- [63] A. W. Marshall. The use of multi-stage sampling schemes in Monte Carlo computations. In M. Meyer, editor, *Symposium on Monte Carlo Methods*, pages 123–140, New York, 1956. (Cited on page 25.)
- [64] L. Martino, V. Elvira, and G. Camps-Valls. The Recycling Gibbs Sampler for Efficient Learning. *arXiv :1611.07056*, 2016. (Cited on page 126.)
- [65] H. M. T. Menegaz, J. Y. Ishihara, G. A. Borges, and A. N. Vargas. A systematization of the unscented Kalman filter theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10) :2583–2598, October 2015. (Cited on page 47.)
- [66] L. Mihaylova, D. Angelova, D. Bull, and N. Canagarajah. Localization of mobile nodes in wireless networks with correlated in time measurement noise. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 10(1) :44–53, Jan 2011. (Cited on page 118.)
- [67] L. Mihaylova, D. Angelova, S. Honary, D. Bull, C. Canagarajah, and B. Ristic. Mobility tracking in cellular networks using particle filtering. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(10) :3589–3599, October 2007. (Cited on page 118.)
- [68] C. Musso, N. Oudjane, and F. Le Gland. Improving regularized particle filters. In A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, editors, *Sequential Monte Carlo methods in practice*, Statistics for Engineering and Information Science, pages 247–271. Springer, 2001. (Cited on page 53.)
- [69] I. Nevat, G. W. Peters, K. Avnit, F. Septier, and L. Clavier. Location of Things : Geospatial Tagging for IoT Using Time-of-Arrival. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2(2) :174–185, June 2016. (Cited on page 120.)
- [70] H. Noureddine, N. Gresset, D. Castelain, and R. Pyndiah. Auto-regressive modeling of the shadowing for RSS mobile tracking. In *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pages 1–5, June 2011. (Cited on pages 118, 124 and 133.)

- [71] A. B. Owen. *Monte Carlo theory, methods and examples*. 2013. Available at <http://statweb.stanford.edu/~owen/mc/>. (Cited on page 28.)
- [72] K. Pahlavan and A. H. Levesque. *Wireless information networks*, volume 95. Wiley New York, 1995. (Cited on page 120.)
- [73] N. Patwari, J. N. Ash, S. Kyperountas, A. O. Hero, R. L. Moses, and N. S. Correal. Locating the nodes : cooperative localization in wireless sensor networks. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(4) :54–69, July 2005. (Cited on page 120.)
- [74] N. Patwari, A. Hero, M. Perkins, N. Correal, and R. O’Dea. Relative location estimation in wireless sensor networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(8) :2137–2148, Aug 2003. (Cited on page 118.)
- [75] M. Pereyra and S. McLaughlin. Fast unsupervised Bayesian image segmentation with adaptive spatial regularisation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 26(6) :2577–2587, June 2017. (Cited on page 20.)
- [76] Y. Petetin and F. Desbouvries. Optimal SIR algorithm vs. fully adapted auxiliary particle filter : a non asymptotical analysis. *Statistics and computing*, 23(6) :759–775, 2013. (Cited on pages 53, 70, 90 and 94.)
- [77] Y. Petetin and F. Desbouvries. Bayesian conditional Monte Carlo algorithms for non linear time-series state estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(14) :3586–3598, July 2015. (Cited on page 59.)
- [78] M. K. Pitt and N. Shephard. Filtering via simulation : Auxiliary particle filter. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446) :590–99, June 1999. (Cited on pages 20, 55 and 96.)
- [79] C. Rao. *Linear statistical inference and its applications*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, New York, second edition, 1973. (Cited on page 46.)
- [80] T. Rappaport. *Wireless Communications : Principles and Practice*. Electrical engineering. Prentice Hall PTR, 1996. (Cited on page 120.)
- [81] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter : Particle Filters for Tracking Applications*. Artec House, 2004. (Cited on page 47.)
- [82] C. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods (Springer Texts in Statistics)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2005. (Cited on pages 21, 24, 35, 36, 38, 39, 58 and 129.)
- [83] C. P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods (Springer Texts in Statistics)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2005. (Cited on page 29.)
- [84] G. O. Roberts and S. K. Sahu. Updating Schemes, Correlation Structure, Blocking and Parameterization for the Gibbs Sampler. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 59(2) :291–317, 1997. (Cited on page 126.)

- [85] M. N. Rosenbluth and A. W. Rosenbluth. Monte Carlo calculation of the average extension of molecular chains. *The Journal of Chemical Physics*, 23(2) :356–359, 1955. (Cited on page 13.)
- [86] D. B. Rubin. Using the SIR algorithm to simulate posterior distributions. In M. H. Bernardo, K. M. Degroot, D. V. Lindley, and A. F. M. Smith, editors, *Bayesian Statistics III*. Oxford University Press, Oxford, 1988. (Cited on pages 30, 31 and 50.)
- [87] R. Y. Rubinstein and D. P. Kroese. *The Cross Entropy Method : A Unified Approach To Combinatorial Optimization, Monte-Carlo Simulation (Information Science and Statistics)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2004. (Cited on pages 59 and 62.)
- [88] S. Saha, P. K. Manda, Y. Boers, H. Driessen, and A. Bagchi. Gaussian proposal density using moment matching in SMC methods. *Statistics and Computing*, 19(2) :203–208, 2009. (Cited on page 53.)
- [89] N. Salman, L. Mihaylova, and A. Kemp. Localization of multiple nodes based on correlated measurements and shrinkage estimation. In *Sensor Data Fusion : Trends, Solutions, Applications (SDF), 2014*, pages 1–6, Oct 2014. (Cited on pages 20 and 118.)
- [90] F. Septier, S. K. Pang, A. Carmi, and S. Godsill. On MCMC-based particle methods for Bayesian filtering : Application to multitarget tracking. In *Proc. of the 3rd IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, pages 360–363, Dec 2009. (Cited on pages 119 and 126.)
- [91] F. Septier and G. W. Peters. An Overview of Recent Advances in Monte-Carlo Methods for Bayesian Filtering in High-Dimensional Spaces. In G. W. Peters and T. Matsui, editors, *Theoretical Aspects of Spatial-Temporal Modeling*. SpringerBriefs - JSS Research Series in Statistics, Nov. 2015. (Cited on pages 119 and 124.)
- [92] F. Septier and G. W. Peters. Langevin and Hamiltonian Based Sequential MCMC for Efficient Bayesian Filtering in High-Dimensional Spaces. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 10(2) :312–327, March 2016. (Cited on page 127.)
- [93] A. F. M. Smith and A. E. Gelfand. Bayesian statistics without tears : a sampling-resampling perspective. *The American Statistician*, 46(2) :84–87, 1992. (Cited on pages 30 and 31.)
- [94] C. Snyder. Particle filters, the optimal proposal and high-dimensional systems. In *Proceedings from the Seminar on Data assimilation for atmosphere and ocean, 6-9 September 2011*, pages 161–170, Shinfield Park, Reading, 2012. ECMWF. (Cited on page 52.)
- [95] C. Snyder, T. Bengtsson, P. Bickel, and J. Anderson. Obstacles to high-dimensional particle filtering. *Monthly Weather Review, Special Collection : Mathematical Advances in Data Assimilation*, 136(12) :4629–4640, 2008. (Cited on pages 52 and 118.)
- [96] W. Sun and Y. Yuan. *Optimization Theory and Methods : Nonlinear Programming*. Springer Optimization and Its Applications. Springer US, 2006. (Cited on page 64.)

- [97] H. Tanizaki. *Nonlinear Filters, Estimation and Applications*. Springer, Berlin, 2nd edition, 1996. (Cited on page 47.)
- [98] H. Tanizaki. On nonlinear and nonnormal filter using rejection sampling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :314–319, 1999. (Cited on page 55.)
- [99] R. van der Merwe, A. Doucet, N. de Freitas, and E. Wan. The Unscented Particle Filter. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2000. (Cited on page 53.)
- [100] B. Van Veen and K. Buckley. Beamforming : a versatile approach to spatial filtering. *IEEE ASSP Magazine*, 5(2) :4–24, April 1988. (Cited on page 118.)
- [101] N. Vaswani. Particle filtering for large-dimensional state spaces with multimodal observation likelihoods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(10) :4583–4597, 2008. (Cited on pages 53 and 103.)
- [102] E. Veach and L. J. Guibas. Optimally combining sampling techniques for Monte Carlo rendering. In *Proceedings of the 22Nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '95, pages 419–428, New York, NY, USA, 1995. ACM. (Cited on page 59.)
- [103] C. Vergé, C. Dubarry, P. Del Moral, and É. Moulines. On parallel implementation of sequential Monte Carlo methods : the island particle model. *Statistics and Computing*, 25(2) :243–260, 2015. (Cited on pages 90 and 102.)
- [104] N. Whiteley and A. M. Johansen. Recent developments in auxiliary particle filtering. In Barber, Cemgil, and Chiappa, editors, *Inference and Learning in Dynamic Models*. Cambridge University Press, 2010. (Cited on page 56.)