



HAL
open science

Interactions ondes-courant-obstacle : application à la physique des trous noirs

Léo-Paul Euvé

► **To cite this version:**

Léo-Paul Euvé. Interactions ondes-courant-obstacle : application à la physique des trous noirs. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Poitiers, 2017. Français. NNT : 2017POIT2280 . tel-01981520

HAL Id: tel-01981520

<https://theses.hal.science/tel-01981520>

Submitted on 15 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées

Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016

Ecole Doctorale SI-MMEA : Sciences et Ingénierie en Matériaux,
Mécanique, Energétique et Aéronautique

Domaine de recherche : Mécanique des Fluides

Présentée par

Léo-Paul Euvé

Interactions ondes-courant-obstacle : application à la Physique des trous noirs

Directeur de thèse :

Serge Huberson (Professeur des Universités)

Co-directeur de thèse :

Germain Rousseaux (Chargé de recherche CNRS HDR)

Thèse soutenue le 10 octobre 2017

devant la Commission d'Examen

JURY

Iacopo Carusotto	<i>Chercheur CNR - Institut National d'Optique de Trente, Université de Trente (Italie)</i>	Rapporteur
Nicolas Mordant	<i>Professeur des Universités - Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (LEGI), Université de Grenoble Alpes</i>	Rapporteur
François Charru	<i>Professeur des Universités - Institut de Mécanique des Fluides Toulouse (IMFT), Université Toulouse III</i>	Examinateur
Frédéric Moisy	<i>Professeur des Universités - Laboratoire Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques (FAST), Université Paris-Sud</i>	Examinateur
Gaële Perret	<i>Maître de conférences - Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC), Université du Havre</i>	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier dans un premier temps mes directeurs de thèse *Serge Huberson*, *Germain Rousseaux* pour m'avoir offert cette opportunité et pour la confiance qu'ils m'ont accordée, par la suite, dans ce travail de recherche. Je remercie, particulièrement, *Germain Rousseaux*, pour son implication et sa grande disponibilité et *Serge Huberson* pour avoir cru en mes capacités. J'exprime toute ma gratitude à *Iacopo Carusotto* et *Nicolas Mordant* pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse et j'adresse toute ma reconnaissance à *Gaël Perret*, *Frédéric Moisy* et *François Charru* pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail en constituant mon jury de thèse. Ces trois années de thèse ont représenté la réalisation d'un projet de recherche scientifique, mais également l'aboutissement d'une aventure personnelle. Le laboratoire P' a la chance de réunir des personnes de grande qualité, à la fois, du point de vue des compétences professionnelles, mais aussi, du point de vue humain.

Même si une thèse est réalisée par un doctorant entouré de ces directeurs, une grande quantité de personnes ont participé de près ou de loin à mon aventure. Cette thèse fait partie du projet ANR HARALAB. Au delà de l'aspect financier, cela a permis une meilleure compréhension de la problématique grâce à une collaboration entre expérimentateurs, théoriciens et numériciens. Je tiens donc à remercier tous les participants de ce projet *Christoph Westbrook*, *Nicolas Pavloff*, *Renaud Parentani*, *Florent Michel*, *Scott Robertson*, *Nicolas James* et *Germain Rousseaux*. Je tiens tout particulièrement à adresser mes remerciements à *Florent Michel* et *Scott Robertson* qui, grâce à nos nombreuses discussions, m'ont permis une meilleure compréhension de la théorie associée à la relativité générale.

La bonne ambiance avec tous les collègues, les doctorants, les chercheurs permanents et le personnel technique, a été un ingrédient essentiel pour mener à bien cette aventure.

J'adresse toute ma reconnaissance aux personnes de l'axe HydEE ainsi qu'aux autres chercheurs du bâtiment H2 pour m'avoir permis d'évoluer dans le meilleur des cadres scientifiques. Je tiens tout particulièrement à remercier *Laurent David* et *Sébastien Jarny* qui, tout comme *Serge Huberson*, ont toujours cru en moi durant mon parcours universitaire et jusqu'à maintenant.

Merci à tous les doctorants et amis que j'ai pu me faire durant cette aventure, *Yann*, *Gwenael*, *Clément C*, *Aurélien*, *Arthur*, *André*, *Artur*, *Guillaume*, *Emmanuel*, *Thomas*, *Paul L*, *Paul C* ainsi que *Maxime*, *Stéphane* et *Jean-Carles*.

Je tiens tout particulièrement à remercier le personnel technique car, à mes yeux, il représente la partie cachée de l'iceberg en travaillant d'arrache-pied en arrière plan de chaque thèse et autre projet de recherche. Merci donc à *Anthony Bernard*, *Catherine Ecale*, *Laurent Dupuis*, *Christian Refin*, *Patrice Robardet*, *Ludovic Mascarenhas*, *Richard Tessier*, *Francis Boissoneau*, *Pierre-François Laplaceta*, *Jean-Marc Mougnot*, *Romain Bellanger* et *Patrick Braud*, pour m'avoir permis d'aller aussi loin dans mon travail de thèse.

Mes pensées vont aussi vers ma famille et mes amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans tous les projets qui m'ont permis d'arriver jusque là.

Et parce qu'il faut toujours garder le meilleur pour la fin, je remercie *Maria* de tout mon cœur, celle qui est devenue ma femme durant ma seconde année de thèse et celle que j'aime du plus profond de mon être.

Sommaire

Nomenclature	iii
Introduction	1
I Méthodes et outils théoriques	11
I.1 Métriques	11
I.1.1 Métrique de Minkowski.....	12
I.1.2 Problème trans-Planckien ou décalage vers le rouge/bleu infini.....	15
I.1.3 Conservation de la norme.....	16
I.1.4 Métrique de Schwarzschild-Droste.....	18
I.1.5 Métrique de Painlevé-Gullstrand.....	20
I.1.6 Les trous blancs.....	21
I.1.7 Radiation de Hawking.....	22
I.2 Métrique acoustique.....	28
I.3 Physique des ondes de surface	31
I.3.1 Dérivation de la relation de dispersion des ondes de surface.....	31
I.3.2 Conditions aux limites	32
I.3.3 Linéarisation autour de $z = 0$	33
I.3.4 Résultats	34
I.4 Métrique des ondes de surface	34
I.5 Étude de la relation de dispersion	36
I.5.1 Relation de dispersion sans courant.....	36
I.5.2 Relation de dispersion en présence de courant	37
I.5.3 Ondulation stationnaire.....	38
I.6 Solutions et horizons.....	39
I.7 Diagramme de phase (U, T)	42
I.8 Cartes de corrélation	46
I.9 Conservation du flux d'action d'onde.....	50
I.10 Bilan sur l'exemple de l'étude d'un trou blanc hydraulique.....	51
II Méthodes et outils expérimentaux	53
II.1 Matériel	55
II.1.1 Le canal Hydrosédimentaire	55
II.1.2 Les obstacles	55
II.1.3 Les batteurs	55
II.2 Mesure de déformée de surface libre : les sondes acoustiques.....	59

II.3	Mesure de déformée de surface libre : méthode optique basée sur la fluorescence induite par laser.....	59
II.3.1	Principe et équipements	60
II.3.2	Ce que voient les caméras	64
II.4	Post-traitement	65
II.4.1	Précision dans l'espace de Fourier	68
II.5	Outils de traitement du signal.....	71
II.5.1	Transformée de Fourier.....	71
II.5.2	Paramètres de la transformée de Fourier rapide (FFT)	72
II.5.3	Fenêtrage spectral.....	73
II.5.4	Filtres	74
III	Trou blanc hydraulique : reproduction des expériences de Vancouver	77
III.1	Régime	78
III.1.1	Paramètres du régime	78
III.1.2	Champs de vitesse	82
III.1.3	Diagramme de phase	86
III.2	Transmission.....	87
III.3	Étude de linéarité.....	90
III.3.1	Ondulation stationnaire et bruit.....	90
III.3.2	Cas stimulés par le batteur.....	92
III.3.3	Conséquences sur la radiation de Hawking	100
III.4	Conclusion.....	104
IV	Trou blanc hydraulique : nouveau régime	105
IV.1	Régime d'écoulement	106
IV.2	Bruit de surface libre	108
IV.3	Corrélations	109
IV.4	Cas stimulés.....	114
IV.4.1	Étude expérimentale.....	114
IV.4.2	Comparaison numérique	116
IV.4.3	Diffusion sur l'ondulation dans les expériences du régime de Vancouver (chapitre précédent)	117
IV.5	Conclusion.....	119
V	Trou de ver et effet Laser	121
V.1	Étude numérique	122
V.1.1	Trou de ver non-dispersif	122
V.1.2	Effet de la dispersion.....	124
V.1.3	Paramètres des simulations.....	124

V.1.4	Trou de ver dispersif (direction : Blanc→Noir)	126
V.1.5	Trou de ver dispersif (direction : Noir→Blanc)	130
V.1.6	Effet Black Hole Laser à deux horizons	132
V.2	Étude expérimentale	136
V.2.1	Choix du régime et des paramètres	137
V.2.2	Théorie des rayons	138
V.2.3	Résultats	139
V.2.4	Vérification dans l'espace de Fourier et corrélations	142
V.2.5	Estimation théorique de l'évolution de l'amplitude	145
V.2.6	Interférences	148
V.2.7	Suppression de la viscosité	150
V.3	Conclusion	152
VI	Trou noir hydraulique	153
VI.1	Tests préliminaires	154
VI.1.1	Premier essai	154
VI.1.2	Second essai	154
VI.2	Régime et obstacle final	156
VI.3	Conversion dans le cas stimulé	160
VI.3.1	Méthodes d'extraction	163
VI.3.2	Linéarité	167
VI.3.3	Résultats	167
VI.4	Modification du batteur	169
VI.5	Comparaison numérique	171
VI.6	Corrélation dans le cas sans stimulation	172
VI.7	Conclusion	172
	Conclusion	175
	Références bibliographiques	179
	Annexes	189
	Publications	189
	Matériel	255

Nomenclature

CONSTANTES PHYSIQUES

g	accélération de pesanteur	$9,81 \text{ m.s}^{-2}$	
ν	viscosité cinématique de l'eau	$1,05.10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$	à 18°C
γ	tension de surface de l'eau	$73 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$	à 18°C
ρ	masse volumique de l'eau	1000 kg.m^{-3}	à 18°C
l_c	longueur capillaire (interface eau/air)	$2,7.10^{-6} \text{ m}$	à 18°C

PARAMÈTRES DE L'ÉCOULEMENT, DU CANAL ET DE L'OBSTACLE

W	largeur du canal	[m]
Q	débit volumique	[L.s ⁻¹]
q	débit par unité de largeur	[m ² .s ⁻¹]
$U(x)$	vitesse du courant	[m.s ⁻¹]
$o(x)$	géométrie de l'obstacle	[m]
h_o	hauteur maximale de l'obstacle	[m]
$h(x, t)$	hauteur d'eau	[m]
h_u	hauteur d'eau en amont de l'obstacle	[m]
h_d	hauteur d'eau en aval de l'obstacle	[m]
h_{\min}	hauteur d'eau minimum au dessus de l'obstacle	[m]

NOMBRES SANS DIMENSION

$Re = Uh/\nu$	nombre de Reynolds basé sur la hauteur d'eau
$F = U/\sqrt{gh}$	nombre de Froude basé sur la hauteur d'eau

ANALYSE ONDULATOIRE

ω	fréquence angulaire dans le référentiel absolu (ou laboratoire)	[rad.s ⁻¹ ou Hz]
k	nombre d'onde dans le référentiel absolu	[m ⁻¹]
v_ϕ	vitesse de phase dans le référentiel absolu	[m.s ⁻¹]
v_g	vitesse de groupe dans le référentiel absolu	[m.s ⁻¹]
E	énergie d'onde dans le référentiel absolu	[kg.m ² .s ⁻²]
σ	fréquence angulaire dans le référentiel du courant	[rad.s ⁻¹ ou Hz]
k'	nombre d'onde dans le référentiel du courant	[m ⁻¹]
c_ϕ	vitesse de phase dans le référentiel du courant	[m.s ⁻¹]
c_g	vitesse de groupe dans le référentiel du courant	[m.s ⁻¹]
E'	énergie d'onde dans le référentiel du courant	[kg.m ² .s ⁻²]
$\delta h(x, t)$	fluctuations de surface libre	[m, mm, μ m]
$\delta \hat{h}(x, \omega)$	transformée de Fourier temporelle des fluctuations de surface libre	[m, mm, μ m]
$\delta \hat{h}(k, \omega)$	transformée de Fourier spatio-temporelle des fluctuations de surface libre	[m, mm, μ m]
a	amplitude des ondes	[m]
a_Φ	amplitude du potentiel des vitesses	[m ² .s ⁻¹]
a_{wm}	amplitude mécanique du batteur	[m]
ω_I	fréquence de l'onde incidente (envoyée par le batteur)	[rad.s ⁻¹ ou Hz]
k_i	nombre d'onde d'une solution i	[m ⁻¹]
ω_{\min}	maxima de la relation de dispersion au dessus de l'obstacle ($h = h_{\min}$)	[rad.s ⁻¹ ou Hz]
ω_{\max}	maxima de la relation de dispersion en aval de l'obstacle ($h = h_d$)	[rad.s ⁻¹ ou Hz]

Introduction

Philosophie de la Gravitation Analogue

« *L'histoire de la Physique nous montre que la recherche des analogies entre deux catégories distinctes de phénomènes a peut-être été, de tous les procédés mis en oeuvre pour construire des théories physiques, la méthode la plus sûre et la plus féconde* »

La théorie physique - Pierre Duhem [Duhem, 1906]

Le raisonnement par analogie est une inclination naturelle de l'esprit humain qui fonctionne en associant des situations nouvelles et inconnues à des situations connues et à des cas déjà rencontrés.

C'est dans cette philosophie que s'inscrit la Gravitation Analogue qui a pour ambition de simuler des objets astrophysiques, tels que les trous noirs et les trous de ver, et de reproduire des phénomènes astrophysiques en laboratoire comme le rayonnement des trous noirs connu sous le nom d'effet Hawking. Les modèles de Gravitation Analogue sont alors basés sur l'analogie entre la propagation d'une onde dans un milieu en mouvement et celle de la lumière dans un espace-temps courbé par la matière [Unruh, 1981, Barceló *et al.*, 2011].

Exemples de modèles analogues

Pour illustrer cette idée, on peut commencer par regarder une expérience extrêmement simple pouvant être reproduite chez soi. Cette expérience (illustrée figure 0.1 et réalisée par Steve Mould) consiste à tendre une toile en lycra et à la déformer avec deux masses, modélisant ainsi l'espace temps (la toile tendue) courbé par la matière (les deux roulettes). En mettant en rotation ces deux masses l'une autour de l'autre (grâce à une perceuse électrique) des ondes élastiques sont générées simulant la création d'ondes gravitationnelles par deux objets célestes massifs (étoiles à neutrons, trous noirs) en rotation. Ce modèle est très simpliste mais permet de montrer que l'on peut recréer un phénomène très complexe se produisant à des milliards d'années lumières, chez soi avec du matériel de la vie courante.

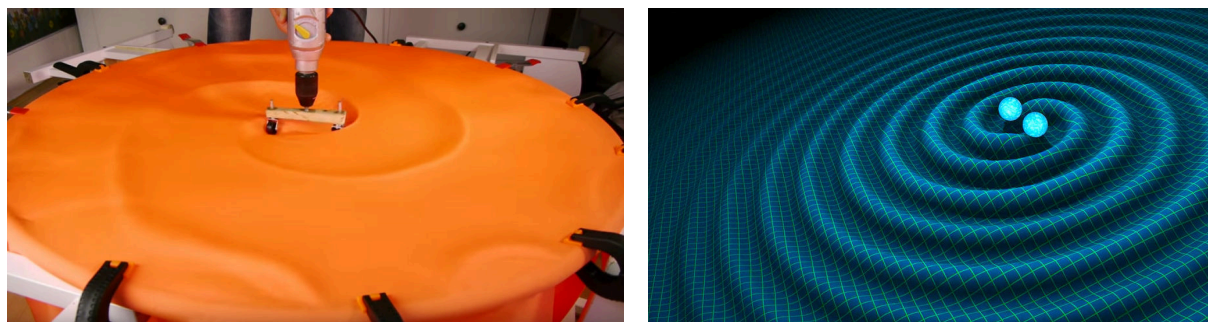


Figure 0.1 – À gauche : expérience simulant la génération d'ondes gravitationnelles (tirée de www.thekidshouldseethis.com). À droite : illustration d'artiste d'onde gravitationnelles générées par un système stellaire binaire (tirée de www.nasa.gov, credits : R. Hurt/Caltech-JPL).

D'autres expériences très intéressantes sont celles réalisées par Yves Couder et son équipe à Paris [Couder *et al.*, 2005, Eddi *et al.*, 2011, Perrard *et al.*, 2016] exhibant un cas de dualité onde-particule à l'échelle macroscopique où une goutte rebondissant sur une surface liquide vibrant verticalement peut être auto-propulsée par son interaction avec les ondes qu'elle a générées lors des rebonds précédents d'où le nom de marcheur (figure 0.2 haut). Il montre aussi l'analogie avec la diffraction d'un unique photon à travers une ou deux fentes en réalisant de multiples expériences d'un marcheur passant au travers d'une ou deux fentes (figure 0.2 bas).

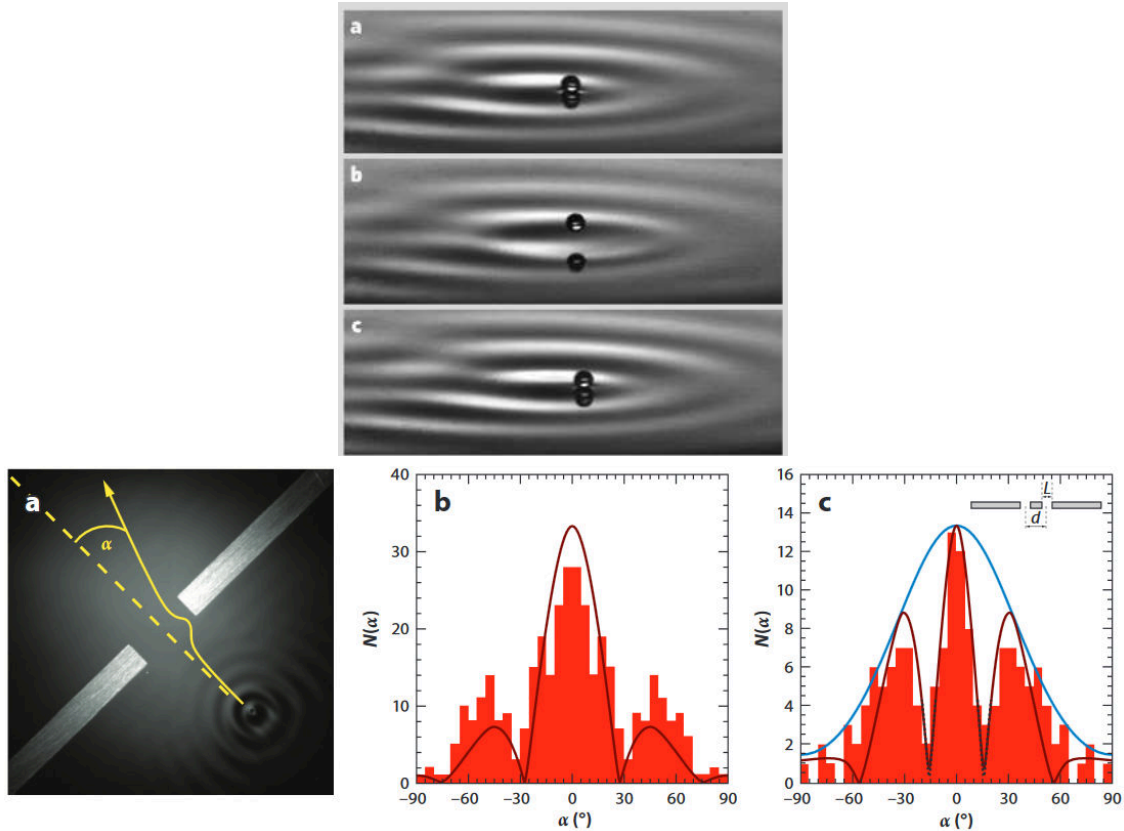


Figure 0.2 – Haut : Goutte d'huile silicone rebondissant sur une bain vibrant d'huile silicone. Les photographies montrent le déplacement de la goutte en interaction avec les ondes qu'elle a générées aux rebonds précédents, le temps s'écoulant du haut vers le bas. Images tirées de [Couder *et al.*, 2005]. Bas : (a) Marcheurs passant au travers d'une fente (b) histogramme de l'angle de déviation sur les expériences à une fente (c) à deux fentes. Images tirées de [Bush, 2015].

On peut aussi prendre comme exemple les expériences de l'équipe de Christoph Westbrook [Jaskula *et al.*, 2012] concernant l'effet Casimir dynamique. L'effet Casimir statique caractérise la force attractive entre deux plaques parallèles conductrices et non-chargées due aux fluctuations quantiques du vide. L'effet Casimir dynamique dans le vide prend en compte le fait que les plaques sont mises en mouvement. Les expériences de l'équipe de Westbrook étudient l'effet Casimir dynamique analogue, dans un condensat de Bose-Einstein, où le système est aussi rendu dépendant du temps. Elles mettent alors en évidence la production et l'amplification de phonons. Cette étude pourrait alors s'appliquer à l'expansion de l'Univers, dont la métrique est elle aussi dépendante du temps.

Autre exemple, l'équipe de Silke Weinfurter Nottingham [Torres *et al.*, 2017] étudie la superradiance d'un trou noir analogue en rotation en envoyant des ondes de surface sur un siphon en rotation comme l'illustre la figure 0.3.

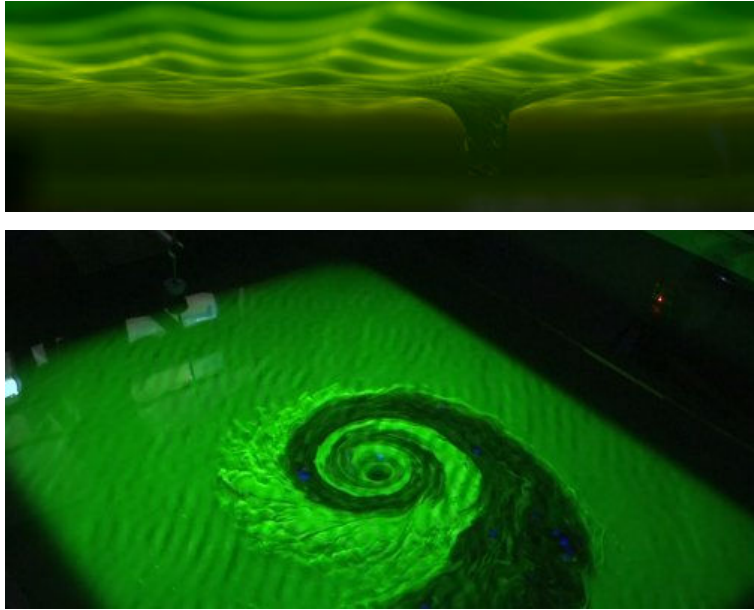


Figure 0.3 – Photographies des expériences de l’équipe de Nottingham [Torres *et al.*, 2017] sur un siphon en rotation (tirées de www.nottingham.ac.uk et uk.businessinsider.com)

Il est important de dire que les modèles analogues restent des analogies et ne doivent pas être considérés comme des identités. Dans le cas de la Gravitation Analogue, les modèles ne tentent généralement pas de reproduire la dynamique d’un système gravitationnel, comme par exemple, celle d’un trou noir, qui est décrite par les équations d’Einstein alors que ce sont les équations de Navier-Stokes qui décrivent la dynamique des fluides Newtoniens. D’un autre côté, l’analogie au niveau cinématique entre la propagation d’une onde dans un milieu en mouvement inhomogène et la propagation de la lumière en espace-temps courbé a été prouvée mathématiquement [Unruh, 1981].

Trou noir et radiation de Hawking

L’un des effets cinématiques pouvant être étudié en Gravitation Analogue et qui intéresse beaucoup de scientifiques depuis sa découverte en 1974, est la radiation de Hawking qui décrit l’évaporation des trous noirs [Hawking, 1974]. Mais tout d’abord, qu’est-ce qu’un trou noir ?

Un trou noir est un objet cosmologique tellement compact que l’intensité de son champ gravitationnel est assez grande pour empêcher toute forme de matière ou de rayonnement d’en échapper en deçà d’une certaine frontière appelée « horizon des événements ». Les trous noirs résulteraient de l’effondrement gravitationnel d’étoiles sur elles-mêmes [Misner *et al.*, 1973]. Le concept de trou noir a émergé à la fin du XVIII^e siècle, avec John Michell [Michell, 1784] dans le cadre de la gravitation universelle d’Isaac Newton, où la lumière était composée de grains (ancêtres des photons) pouvant être influencés par la gravité tout comme le serait une particule de matière. Cette vision envisageait alors qu’il existait des corps si denses que la vitesse de libération, que doit avoir un objet pour échapper à l’attraction gravitationnelle d’un astre et s’en éloigner indéfiniment, serait supérieure à celle de la lumière (quantifiée à $c = 3 \times 10^8$ m/s par James Bradley en 1727 [Bradley, 1727]).

$$V_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (1)$$

Dans cette équation, $G \simeq 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ représente la constante gravitationnelle, M la masse d'un astre et r la distance à laquelle se situerait une particule de masse m du centre de l'astre. John Michell [Michell, 1784] détermina qu'un tel objet, qu'il nomma « astre sombre », pouvait exister à condition de condenser un soleil comme le nôtre, dans un rayon inférieur à trois kilomètres.

Et, ce n'est qu'au début du XX^e siècle et avec l'avènement de la Relativité Générale d'Albert Einstein que le concept de trou noir devient plus qu'une curiosité. La théorie de la relativité générale nous permet de décrire le comportement des rayons lumineux au voisinage d'une masse déformant l'espace temps autour d'elle. Et peu après la publication des travaux d'Einstein, en 1916, Karl Schwarzschild fut le premier à fournir une solution exacte aux équations d'Einstein dans le vide dans le cas d'une symétrie sphérique et statique. Cette solution appelée alors « corps de Schwarzschild » ne prendra le nom de trou noir qu'en 1967 lors d'une conférence au NASA Goddard Institute of Space Studies donnée par John Wheeler. Une observation directe d'un trou noir est impossible du fait de la nature même de ces corps. Mais différentes preuves ont pu être obtenues en cherchant à détecter les effets du trou noir sur son environnement. En 2016, la détection par l'observatoire LIGO [Abbott et al., 2016] d'ondes gravitationnelles émises par la fusion de deux trous noirs (prédites cent ans auparavant par Einstein) a permis une confirmation irréfutable de l'existence des trous noirs.

Selon la prédiction de Stephen Hawking datant de 1974 [Hawking, 1974], les trous noirs ne seraient pas vraiment noirs mais émettraient spontanément de la lumière à cause des propriétés quantiques des fluctuations du vide (création de paires particule/anti-particule) alors que, comme décrit précédemment de manière classique, ces objets très massifs devraient empêcher même la lumière de s'en échapper. La force due au champ gravitationnel au niveau de l'horizon des événements du trou noir permet de séparer la paire, la particule s'échappant de l'attraction du trou noir alors que l'anti-particule est absorbée à l'intérieur de celui-ci (figure 0.4). Comme ils sont en mesure d'émettre de la lumière, il a été découvert que les trous noirs étaient des objets thermodynamiques caractérisés par une température donnée. Cependant, la température d'un trou noir astrophysique (d'une masse solaire) est de plusieurs ordres de grandeur plus faible que la température du fond diffus cosmologique, la faible lueur issue du Big Bang. De plus les trous noirs connus sont, la plupart du temps, beaucoup plus massifs que notre soleil, rendant leurs températures encore plus faibles. Ceci implique qu'une observation du rayonnement de Hawking en astrophysique est presque impossible [Hawking, 1974, Barceló *et al.*, 2011].

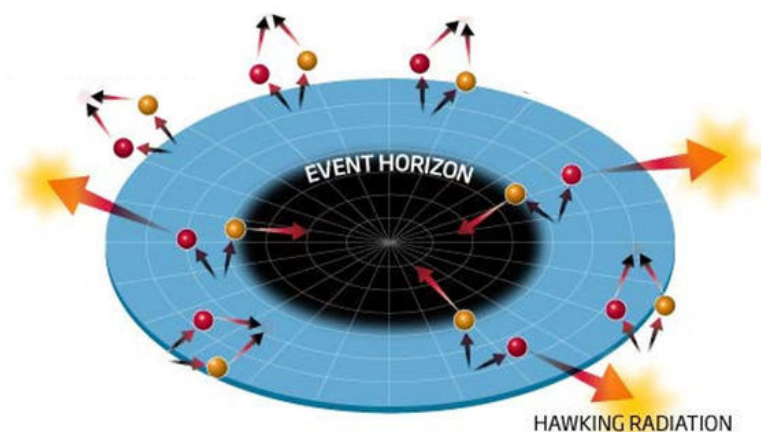


Figure 0.4 – Illustration de la radiation de Hawking tirée de www.newscientist.com [Shiga, 2010].

Effet Hawking analogue

C'est donc ici que rentre en jeu la gravitation analogue. En 1981, dans son article intitulé *Experimental Black Hole evaporation?* [Unruh, 1981], William Unruh eut l'idée que cette prédiction ne serait pas seulement applicable aux trous noirs astrophysiques mais aussi à des trous noirs dits « analogues ». Dans cet article, il établit l'analogie entre la propagation d'une onde acoustique dans un fluide en mouvement et la propagation d'une onde lumineuse dans un espace-temps courbé par la matière, en réalisant que l'équation d'onde était identique dans les deux cas [Unruh, 1981]. Il est alors possible de modéliser l'horizon d'un trou noir acoustique par le passage d'un régime subsonique à un régime supersonique comme dans une tuyère de Laval [Visser *et al.*, 2002]. En Relativité Générale apparaît le « problème trans-Planckien » : la longueur d'onde tend vers zéro au niveau de l'horizon passant ainsi sous l'échelle de Planck. En acoustique, on constate un problème similaire que l'on peut généraliser sous le nom de « catastrophe ultra-violette ». Dans ce cas, on peut considérer le libre parcours moyen comme étant l'analogie de l'échelle de Planck. Une onde se propageant à partir de la position exacte de l'horizon acoustique verrait sa longueur d'onde rougir indéfiniment.

En 1991, Ted Jacobson propose alors une échappatoire à ce problème en utilisant des modèles analogues dispersifs évitant ainsi le problème trans-Planckien [Jacobson, 1991]. Il a été montré numériquement par Unruh en 1995 [Unruh, 1995] puis analytiquement, la même année, par Brout *et al.* [Brout *et al.*, 1995a], que la radiation de Hawking est robuste dans certains régimes même en présence de dispersion.

Dès lors, l'effet Hawking « analogue » a pu être étudié dans divers systèmes que cela soit **théoriquement** :

- En acoustique dans les fluides classiques :
 - White, R. W. Acoustic ray tracing in moving inhomogeneous fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America* **53**, 1700–1704 (1973) [White, 1973]
 - Unruh, W. G. Experimental Black-Hole Evaporation? *Physical Review Letters* **46**, 1351–1353 (1981) [Unruh, 1981]
 - Visser, M. Acoustic black holes : horizons, ergospheres and Hawking radiation. *Classical and Quantum Gravity* **15**, 1767 (1998) [Visser, 1998]
 - Visser, M., Barceló, C. & Liberati, S. Analogue Models of and for Gravity. *General Relativity and Gravitation* **34**, 1719–1734 (2002) [Visser *et al.*, 2002]
- En acoustique dans les condensats de Bose-Einstein :
 - Garay, L. J., Anglin, J. R., Cirac, J. I. & Zoller, P. Sonic Analog of Gravitational Black Holes in Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4643–4647 (2000) [Garay *et al.*, 2000]
 - Barceló, C., Liberati, S. & Visser, M. Analogue gravity from Bose-Einstein condensates. *Class. Quantum Grav.* **18**, 1137 (2001) [Barceló *et al.*, 2001]
 - Recati, A., Pavloff, N. & Carusotto, I. Bogoliubov theory of acoustic Hawking radiation in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **80**, 043603 (2009)[Recati *et al.*, 2009]
 - Zapata, I., Albert, M., Parentani, R. & Sols, F. Resonant Hawking radiation in Bose-Einstein condensates. *New J. Phys.* **13**, 063048 (2011)[Zapata *et al.*, 2011]
 - Balbinot, R., Fabbri, A., Fagnocchi, S., Recati, A. & Carusotto, I. Nonlocal density correlations as a signature of Hawking radiation from acoustic black holes. *Phys. Rev. A* **78**, 021603 (2008)[Balbinot *et al.*, 2008]
 - Macher, J. & Parentani, R. Black-hole radiation in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **80**, 043601 (2009)[Macher *et al.*, 2009]
 - Carusotto, I., Fagnocchi, S., Recati, A., Balbinot, R. & Fabbri, A. Numerical observation of Hawking radiation from acoustic black holes in atomic Bose-Einstein condensates. *New J. Phys.* **10**, 103001 (2008)[Carusotto *et al.*, 2008]
 - Larré, P.-É., Recati, A., Carusotto, I. & Pavloff, N. Quantum fluctuations around black hole horizons

in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* **85**, 013621 (2012)[Larré *et al.*, 2012]

- Helium super-fluide :
Jacobson, T. A. & Volovik, G. E. Event horizons and ergoregions in ^3He . *Phys. Rev. D* **58**, 064021 (1998)[Jacobson et Volovik, 1998]
- Guide d'onde électromagnétique :
Schützhold, R. & Unruh, W. G. Hawking radiation in an electro-magnetic wave-guide? *Physical Review Letters* **95**, (2005)[Schützhold et Unruh, 2005]
- Gaz de fermions ultra-froids :
Giovannazzi, S. Hawking Radiation in Sonic Black Holes. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 061302 (2005)[Giovannazzi, 2005]
- Lumière lente dans une vapeur atomique :
Leonhardt, U. & Piwnicki, P. Relativistic Effects of Light in Moving Media with Extremely Low Group Velocity. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 822–825 (2000)[Leonhardt et Piwnicki, 2000]
Leonhardt, U. A laboratory analogue of the event horizon using slow light in an atomic medium. *Nature* **415**, 406–409 (2002)[Leonhardt, 2002]
Unruh, W. G. & Schützhold, R. On slow light as a black hole analogue. *Phys. Rev. D* **68**, 024008 (2003)[Unruh et Schützhold, 2003]
- Fluide de lumière non-linéaire :
Elazar, M., Fleurov, V. & Bar-Ad, S. All-optical event horizon in an optical analog of a Laval nozzle. *Phys. Rev. A* **86**, 063821 (2012)[Elazar *et al.*, 2012]
- Condensats d'exciton-polaritons :
Solnyshkov, D. D., Flayac, H. & Malpuech, G. Black holes and wormholes in spinor polariton condensates. *Phys. Rev. B* **84**, 233405 (2011)[Solnyshkov *et al.*, 2011]
- Ondes de spin :
Jannes, G., Maïssa, P., Philbin, T. G. & Rousseaux, G. Hawking radiation and the boomerang behavior of massive modes near a horizon. *Phys. Rev. D* **83**, 104028 (2011)[Jannes *et al.*, 2011a]
Roldán-Molina, A., Nunez, A. S. & Duine, R. A. Magnonic Black Holes. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 061301 (2017)[Roldán-Molina *et al.*, 2017]
- Ondes de surface :
Schützhold, R. & Unruh, W. G. Gravity wave analogues of black holes. *Phys. Rev. D* **66**, 044019 (2002)[Schützhold et Unruh, 2002]
Nardin, J.-C., Rousseaux, G. & Couillet, P. Wave-Current Interaction as a Spatial Dynamical System : Analogies with Rainbow and Black Hole Physics. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 124504 (2009)[Nardin *et al.*, 2009]
Rousseaux, G. et al. Horizon effects with surface waves on moving water. *New Journal of Physics* **12**, 095018 (2010)[Rousseaux *et al.*, 2010]
Rousseaux, G. The Basics of Water Waves Theory for Analogue Gravity. dans *Analogue Gravity Phenomenology - Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiments* (Springer, 2013)[Rousseaux, 2013]

Mais aussi **expérimentalement** :

- Condensats de Bose-Einstein :
Steinhauer, J. Observation of self-amplifying Hawking radiation in an analogue black-hole laser. *Nat Phys* **10**, 864–869 (2014)[Steinhauer, 2014]
Steinhauer, J. Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nat Phys* **12**, 959–965 (2016)[Steinhauer, 2016]
- Optique non-linéaire :
Philbin, T. G., Kuklewicz, C., Robertson, S., Hill, S., König F. & Leonhardt, U. Fiber-optical analog of the event horizon. *Science* **319**, 1367–1370 (2008)[Philbin *et al.*, 2008]
Belgiorno, F. et al. Hawking Radiation from Ultrashort Laser Pulse Filaments. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 203901 (2010)[Belgiorno *et al.*, 2010]

- Unruh, W. G. & Schützhold, R. Hawking radiation from “phase horizons” in laser filaments? *Phys. Rev. D* **86**, 064006 (2012)[Unruh et Schützhold, 2012]
- Liberati, S., Prain, A. & Visser, M. Quantum vacuum radiation in optical glass. *Phys. Rev. D* **85**, 084014 (2012)[Liberati *et al.*, 2012]

□ Condensats d’exciton-polaritons :

Nguyen, H. S. et al. Acoustic Black Hole in a Stationary Hydrodynamic Flow of Microcavity Polaritons. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 036402 (2015)[Nguyen *et al.*, 2015]

□ Ondes de surface :

Rousseaux, G., Mathis, C., Maïssa, P., Philbin, T. G. & Leonhardt, U. Observation of negative-frequency waves in a water tank : a classical analogue to the Hawking effect? *New J. Phys.* **10**, 053015 (2008)[Rousseaux *et al.*, 2008]

Jannes, G., Piquet, R., Maïssa, P., Mathis, C. & Rousseaux, G. Experimental demonstration of the supersonic-subsonic bifurcation in the circular jump : A hydrodynamic white hole. *Phys. Rev. E* **83**, 056312 (2011) [Jannes *et al.*, 2011b]

Weinfurtner, S., Tedford, E. W., Penrice, M. C. J., Unruh, W. G. & Lawrence, G. A. Measurement of Stimulated Hawking Emission in an Analogue System. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021302 (2011)[Weinfurtner *et al.*, 2011]

Euvé, L.-P., Michel, F., Parentani, R., Philbin, T. G. & Rousseaux, G. Observation of Noise Correlated by the Hawking Effect in a Water Tank. *Phys. Rev. Lett.* **117**, 121301 (2016)[Euvé *et al.*, 2016]

La gravitation analogue a aussi été le sujet de plusieurs thèses récentes [Jannes, 2009, Robertson, 2011, Mayoral, 2011, Prain, 2012, Finazzi, 2012, Coutant, 2012, Rubino, 2013, Larré, 2013, Busch, 2014, Cropp, 2016, Michel, 2017, Jacquet, 2017, Wang, 2017].

C’est en 2002 que W. Unruh suggère, dans son article *Gravity wave analogues of black holes* [Schützhold et Unruh, 2002], d’utiliser un modèle d’ondes de surface (houle) sur un courant variable. Ce système montre alors de grands avantages. Le premier est qu’il est macroscopique, une vague à la surface de l’eau peut, la plupart du temps, être observable à l’œil nu. Deuxièmement, il est réalisable à température ambiante contrairement aux expériences effectuées dans les condensats de Bose-Einstein ou dans l’hélium super-fluide par exemple. Troisièmement, la création d’horizons analogues dans ce système se fait pour des vitesses de l’ordre du mètre par seconde autrement dit bien plus basse que la vitesse du son dans l’air par exemple. Il est assez facile à mettre en œuvre, nécessitant l’établissement d’un courant variable, à l’aide d’un canal, d’une pompe et d’un obstacle modifiant la vitesse du courant par conservation du débit, sur lequel on envoie des ondes de surface, pouvant être générées par un batteur à houle (mis en oeuvre expérimentalement pour la première fois dans [Rousseaux *et al.*, 2008]). Enfin, la dispersion est facilement « réglable » en jouant sur la hauteur d’eau par exemple. Par contre il faut noter que cela reste un système classique, autrement dit il sera impossible d’observer un effet Hawking analogue avec des propriétés quantiques (telle que l’intrication).

Interaction ondes-courant-obstacle

Les interactions ondes-courant-obstacle sont étudiées depuis des années (comme par exemple dans [Forbes et Schwartz, 1982, Liu, 1983, Bouhadeh, 1988, Lai *et al.*, 1989, Lowery et Liapis, 1999, Swan et James, 2000, Guinot, 2010]). Ces études permettent de comprendre les différents types d’écoulement provoqués par la présence d’un obstacle immergé (sous-critique, super-critique, déferlant...) selon les paramètres de l’écoulement (débit, hauteur d’eau, géométrie de l’obstacle), ainsi que le comportement des ondes se

propageant sur ce courant rendu inhomogène. On peut en particulier citer les expériences de [Badulin *et al.*, 1983] qui étudiait la conversion d’ondes longues en ondes capillaires se propageant sur un contre-courant inhomogène, comme le montre la figure 0.5 (cas qui sera étudié dans l’un des chapitre de ce manuscrit).

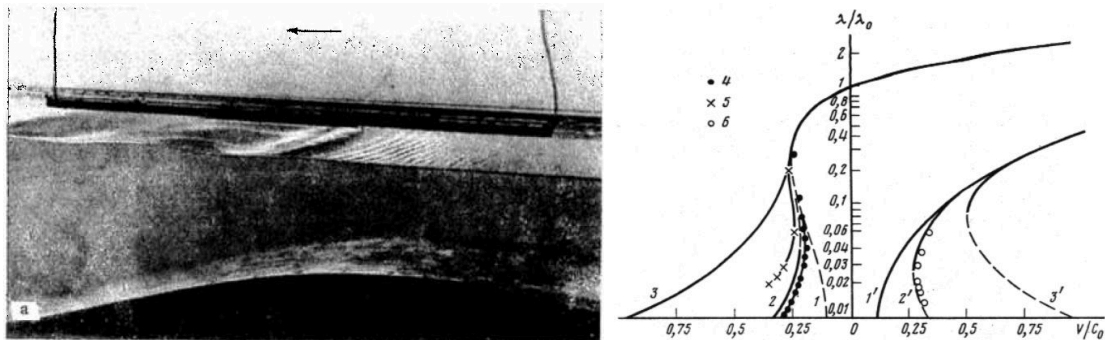


Figure 0.5 – À gauche : Photographie des expériences de [Badulin *et al.*, 1983] illustrant la conversion d’ondes longues en ondes capillaires se propageant sur un contre-courant. À droite : évolution spatiale de la longueur d’onde lors de la conversion vers les capillaires.

Les études faites sur ce sujet s’intéressent principalement aux effets non-linéaires. Dans notre cas, pour que l’analogie soit respectée, les effets non-linéaires doivent être minimisés au maximum car la fréquence doit être conservée. La particularité des modèles de Gravitation Analogue est qu’ils mettent en jeu des ondes à énergie négative (discutées dans le cadre des ondes de surface dans [Cairns, 1979, Ostrovskii *et al.*, 1986, Stepanyants et Fabrikant, 1989, Fabrikant et Stepanyants, 1998]). La nature de ces ondes les rend analogues aux anti-particules absorbées par le trou noir, elles aussi d’énergie négative.

L’écoulement au dessus d’un obstacle génère la plupart du temps une couche limite en aval de celui-ci, nous discuterons alors de la propagation d’ondes sur un profil de vitesse avec vorticité et ces conséquences sur la relation de dispersion [Stepanyants et Fabrikant, 1989, McKee, 1987, Kirby et Chen, 1989, White, 1999, Belibassakis *et al.*, 2017, Touboul et Kharif, 2016, Maïssa *et al.*, 2016].

Nous aborderons aussi le sujet des non-linéarités et, en particulier, la génération d’harmoniques libres et liés [Massel, 1983, Ohya et Nadaoka, 1994, Brossard *et al.*, 2009, Li et Ting, 2012, Monsalve Gutiérrez, 2017] afin de comprendre comment éviter ce phénomène.

Déroulement des chapitres

Le chapitre I décrit à la fois la propagation de la lumière dans un espace temps courbé (en particulier au voisinage d’un trou noir) et la propagation d’ondes de surface sur un courant variable afin de montrer l’analogie mathématique entre les deux domaines.

Le chapitre II présente le montage expérimental ainsi que les méthodes de mesure utilisées pour obtenir les résultats qui suivront.

Les chapitres III, IV, V et VI concernent les résultats expérimentaux obtenus durant cette thèse. Ces résultats sont présentés dans l’ordre chronologique afin de permettre au lecteur de comprendre les choix qui ont été faits dans le déroulement de cette thèse.

Le premier chapitre résultat concerne la reproduction des résultats obtenus par l'équipe de Vancouver comprenant W.G. Unruh [Weinfurtner *et al.*, 2011] sur un trou blanc hydraulique stimulé par une onde incidente. Ces expériences étant les plus avancées sur ce sujet au début de cette thèse, il semblait alors logique de commencer par là. Nous montrons que les résultats obtenus sont identiques aux leurs. Mais une analyse plus poussée a permis de soulever plusieurs problèmes comme l'absence d'horizon analogue pour une grande partie des fréquences étudiées dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] due au caractère sous-critique de l'écoulement. Pour les fréquences possédant un horizon analogue, il est montré que l'apparition de non-linéarités rend impossible la mesure de l'effet Hawking loin du trou blanc et éloigne les résultats de l'analogie où la fréquence doit être conservée.

Ayant une meilleure compréhension des problèmes pouvant apparaître durant l'étude d'un trou blanc hydraulique, des modifications dans le régime d'écoulement ont pu être apportées, ce nouveau régime est présenté dans le chapitre IV. Bien que restant en régime sous-critique, la valeur du nombre de Froude maximum est supérieure à l'étude précédente permettant ainsi l'apparition d'horizons analogues pour un plus grand nombre de fréquences. Les paramètres d'écoulement ainsi que le choix de l'amplitude des ondes permettent de rendre négligeables les effets non-linéaires. Dans cette étude, en plus de stimuler le trou blanc avec une onde incidente, nous nous sommes intéressés aux fluctuations de surface libre générées par l'écoulement turbulent. Une mesure de corrélation montre alors que ces fluctuations subissent elles aussi une conversion possédant les caractéristiques de l'effet Hawking analogue.

Le chapitre V explore, numériquement puis expérimentalement, la possibilité de créer des trous de ver hydrauliques (combinaison d'un horizon noir et d'un horizon blanc) traversables dans les deux sens. Plusieurs autres scénarii sont aussi présentés, comme l'effet Laser, montrant la grande richesse des modèles de gravitation analogue concernant les ondes de surface.

Le chapitre VI permet de se rapprocher encore d'un pas d'une meilleure analogie en créant un régime trans-critique non-déferlant. Un tel régime est rendu possible grâce à l'étude, cette fois-ci, d'un trou noir hydraulique. La stimulation par une onde en co-courant se propageant vers le trou noir génère une conversion vers une onde d'énergie positive s'échappant de l'attraction du trou noir hydraulique et d'une onde d'énergie négative se propageant à l'intérieur du trou noir, cette image se rapprochant d'autant plus de celle de la séparation d'une paire particule/anti-particule.

Une conclusion viendra résumer les résultats obtenus ainsi que les problèmes ayant pu être soulevés pour finir sur les perspectives.

Méthodes et outils théoriques

I.1	Métriques.....	11
I.1.1	Métrie de Minkowski	12
I.1.2	Problème trans-Planckien ou décalage vers le rouge/bleu infini.....	15
I.1.3	Conservation de la norme.....	16
I.1.4	Métrie de Schwarzschild-Droste.....	18
I.1.5	Métrie de Painlevé-Gullstrand.....	20
I.1.6	Les trous blancs.....	21
I.1.7	Radiation de Hawking	22
I.2	Métrie acoustique.....	28
I.3	Physique des ondes de surface.....	31
I.3.1	Dérivation de la relation de dispersion des ondes de surface.....	31
I.3.2	Conditions aux limites.....	32
I.3.3	Linéarisation autour de $z = 0$	33
I.3.4	Résultats	34
I.4	Métrie des ondes de surface	34
I.5	Étude de la relation de dispersion.....	36
I.5.1	Relation de dispersion sans courant	36
I.5.2	Relation de dispersion en présence de courant.....	37
I.5.3	Ondulation stationnaire.....	38
I.6	Solutions et horizons.....	39
I.7	Diagramme de phase (U, T)	42
I.8	Cartes de corrélation	46
I.9	Conservation du flux d'action d'onde.....	50
I.10	Bilan sur l'exemple de l'étude d'un trou blanc hydraulique	51

Dans ce chapitre, nous présentons, d'un côté, la théorie qui entoure la Physique des trous noirs (dans les grandes lignes) ainsi que la radiation de Hawking et de l'autre, la Physique des ondes de surface afin de démontrer l'analogie mathématique existant entre ces deux domaines très distincts.

I.1 Métriques

En relativité, l'intervalle entre deux évènements de l'espace-temps, noté ds^2 est donné par l'expression suivante, avec $g_{\mu\nu}$ un tenseur désignant la métrique de l'espace-temps :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (2)$$

avec μ et ν désignant les 1+3 coordonnées spatio-temporelles. On utilise ici les conventions d'Einstein avec $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. La condition $ds^2 = 0$ donne la trajectoire d'un rayon lumineux au sein de cette métrique.

I.1.1 Métrique de Minkowski

Dans le cas d'un espace-temps plat, on utilise la métrique de Minkowski définie par :
 $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

En se plaçant dans le cas d'une unique dimension spatiale x , on obtient alors la solution pour les trajectoires des rayons lumineux (avec $ds^2 = 0$) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= c^2 \\ \frac{dx}{dt} &= \pm c \\ x &= c(t - \mathcal{U}) \quad \text{ou} \quad x = -c(t - \mathcal{V}) \end{aligned} \quad (3)$$

avec \mathcal{U} et \mathcal{V} des constantes. On définira alors les \mathcal{U} -modes et les \mathcal{V} -modes, les solutions se propageant, respectivement, avec une vitesse positive ($+c$) et négative ($-c$).

On a alors :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U} &= t - \frac{x}{c} \\ \mathcal{V} &= t + \frac{x}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \Rightarrow \begin{aligned} d\mathcal{U} &= dt - \frac{1}{c} dx \\ d\mathcal{V} &= dt + \frac{1}{c} dx \end{aligned} \quad (4)$$

où $f = \mathcal{U}, \mathcal{V}$.

$$ds^2 = (cdt - dx)(cdt + dx) = c^2 d\mathcal{U}d\mathcal{V} \quad (5)$$

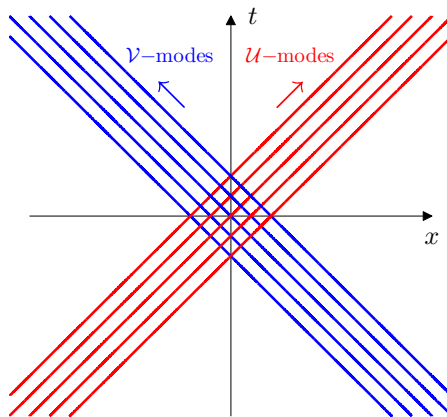


Figure 1.1 – Diagramme espace-temps décrivant la propagation d'onde à une vitesse c (rouge) et $-c$ (bleu).

On peut alors généraliser l'équation de d'Alembert (équation d'onde) décrivant la propagation d'une onde que l'on écrit pour une fonction d'onde ϕ se propageant à une célérité c constante :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

par une expression dépendante de la métrique (opérateur de Beltrami-Laplace) :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0 \quad (7)$$

avec $g = \det(g_{\mu\nu})$ et $g^{\mu\nu}$ la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$.

Soit :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = -c^2, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Chaque valeur de \mathcal{U} et \mathcal{V} correspondra à une phase de l'onde. La fonction d'onde des \mathcal{U} -modes et des \mathcal{V} -modes sera alors stationnaire, respectivement, dans les coordonnées \mathcal{U} et \mathcal{V} et la solution générale sera alors la somme des deux fonctions d'ondes :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) + \phi_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}) \\ &= \phi_{\mathcal{U}}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi_{\mathcal{V}}\left(t + \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

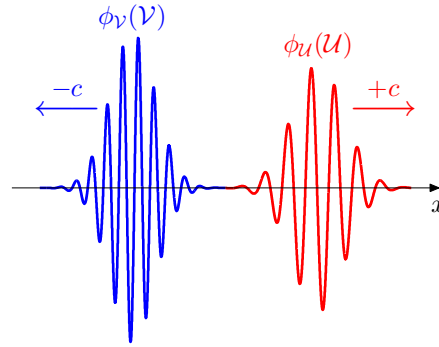


Figure 1.2 – Représentation des \mathcal{V} et \mathcal{U} -modes sous forme de paquets d'onde.

Du fait de la vitesse c constante, il n'y a pas de couplage entre les \mathcal{V} et \mathcal{U} -modes (lorsque l'on a une seule dimension spatiale), ils se croiseront donc sans interagir.

On peut maintenant introduire un champ de vitesse constant et uniforme (que l'on appellera courant) dans lequel se propagent les ondes. En appliquant le fait que les ondes se propagent de la même façon dans le référentiel du courant que dans le référentiel absolu si il n'y avait pas de courant, on utilise alors une transformation Galiléenne :

$$\left. \begin{aligned} x &= x' - Vt' \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= dx' - V dt' \\ dt' &= dt \end{aligned} \quad (10)$$

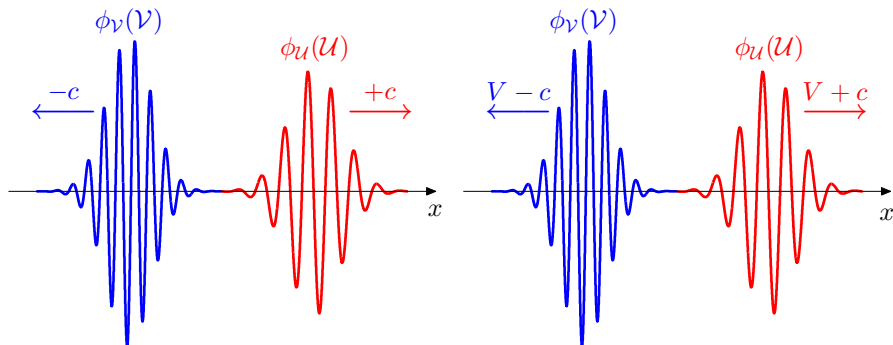


Figure 1.3 – Représentation des \mathcal{V} et \mathcal{U} -modes sous forme de paquets d'onde en présence de courant. À gauche : dans le référentiel du courant. À droite : dans le référentiel absolu.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 \\
 0 &= c^2 dt'^2 - (dx' - V dt')^2 \\
 \left(\frac{dx'}{dt'} - V\right)^2 &= c^2 \\
 \frac{dx'}{dt'} &= V \pm c \\
 x' &= (V + c)(t' - \mathcal{U}) \quad \text{ou} \quad x' = (V - c)(t' - \mathcal{V})
 \end{aligned} \tag{11}$$

On a alors :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U} &= t' - \frac{x'}{V+c} \\ \mathcal{V} &= t' + \frac{x'}{V-c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} d\mathcal{U} &= dt' - \frac{1}{V+c} dx' \\ d\mathcal{V} &= dt' - \frac{1}{V-c} dx' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} ds^2 &= ((c+V)dt' - dx')((c-V)dt' + dx') \\ &= (c^2 - V^2)d\mathcal{U}d\mathcal{V} \end{aligned} \tag{12}$$

La métrique prenant alors la forme :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (c^2 - V^2) & V \\ V & -1 \end{bmatrix}, \quad g = -c^2, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} & \frac{V}{c^2} \\ \frac{V}{c^2} & -\frac{c^2 - V^2}{c^2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

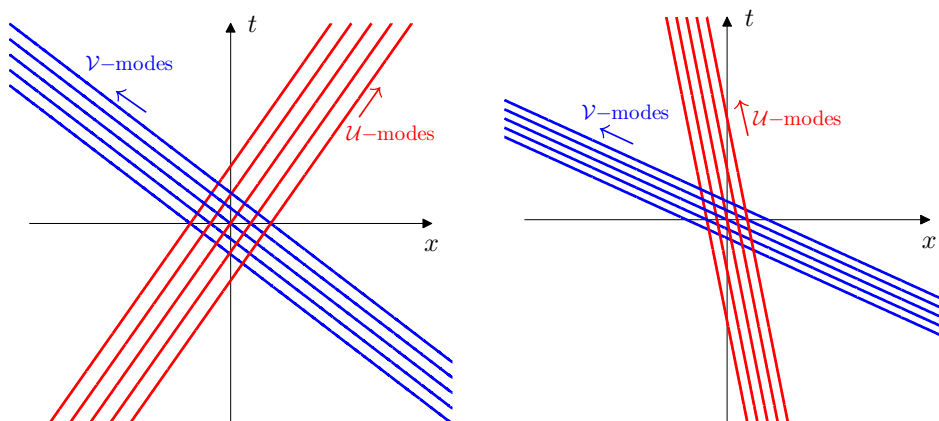


Figure 1.4 – Diagramme espace-temps pour des ondes se propageant sur un courant constant. Gauche : $V = -0,3c$. Droite : $V = -1,2c$.

On peut faire le même développement pour une vitesse variant selon la direction de propagation $V(x)$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dx}{dt} - V(x)\right)^2 &= c^2 \\
 \frac{dx}{dt} &= V(x) \pm c \\
 \mathcal{U} &= t - \int^x \frac{dx'}{V(x') + c} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = t - \int^x \frac{dx'}{V(x') - c}
 \end{aligned} \tag{14}$$

En considérant l'équation d'onde généralisée :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0 \tag{15}$$

avec

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (c^2 - V(x)^2) & V(x) \\ V(x) & -1 \end{bmatrix}, \quad g = -c^2, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} & \frac{V(x)}{c^2} \\ \frac{V(x)}{c^2} & -\frac{c^2 - V(x)^2}{c^2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

et en injectant une solution ondulatoire de type $\phi = a \exp[i(kx - \omega t)]$, nous dérivons alors la relation de dispersion en chaque position x , en considérant que les variations de vitesse sont faibles devant la longueur d'onde ($|\frac{V}{\partial V/\partial x}| \gg \lambda$) :

$$\begin{aligned} (\omega - V(x)k)^2 &= c^2 k^2 \\ \omega - V(x)k &= \sigma = +ck \quad (\mathcal{U}\text{-mode}) \\ \omega - V(x)k &= \sigma = -ck \quad (\mathcal{V}\text{-mode}) \end{aligned} \quad (17)$$

Cette configuration décrit la propagation d'une onde lumineuse en espace temps courbé par la matière.

Considérons maintenant, le cas particulier d'un profil de vitesse présentant une région où $|V| > c$ (super-critique ou super-sonique pour l'acoustique) et une région où $|V| < c$ (sous-critique ou sub-sonique). On remarque (figure 1.5) qu'aucune onde ne peut se propager à contre courant si elle se trouve à gauche de la position où $|V| = c$. Comme expliqué dans l'introduction, aucun rayonnement ne peut échapper à l'attraction d'un trou noir en deçà d'une certaine frontière appelée « horizon des événements » où la vitesse de libération devient égale à la vitesse de la lumière. Il en sera de même dans la configuration présentée figure 1.5, qui décrira donc la propagation de la lumière dans un espace temps courbé aux alentours de l'horizon d'un trou noir.

On séparera deux types de \mathcal{U} -modes, ceux se propageant dans la région super-critique, à gauche de l'horizon (sur le schéma présenté) donc appelés \mathcal{U}_L -modes (pour left) et ceux se propageant dans la région sub-critique, à droite de l'horizon donc appelés \mathcal{U}_R -modes (pour right).

I.1.2 Problème trans-Planckien ou décalage vers le rouge/bleu infini

En se plaçant au niveau de l'horizon, la relation de dispersion donne :

$$k = \frac{\omega}{V+c} \xrightarrow{V \rightarrow -c} \infty \quad \lambda = 2\pi \frac{V+c}{\omega} \xrightarrow{V \rightarrow -c} 0 \quad (18)$$

Le fait que les longueurs d'onde tendent vers zéro au niveau de l'horizon aura pour conséquence qu'une onde (\mathcal{U}_L ou \mathcal{U}_R -mode) se propageant à partir de la position exacte de l'horizon verrait sa longueur d'onde rougir indéfiniment et mettrait un temps infini à s'éloigner de l'horizon. En considérant une symétrie $t \rightarrow -t$ (configuration d'un trou blanc que nous verrons par la suite), on observera alors le problème inverse, les \mathcal{U} -modes verront leurs longueurs d'onde bleuir indéfiniment et mettront un temps infini à atteindre la position de l'horizon. On parlera alors de problème trans-Planckien [Hooft, 1985, Jacobson, 1991, Brout *et al.*, 1995b], les longueurs d'onde passant alors sous l'échelle de Planck $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,61 \times 10^{-35}$ m (avec $\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34}$ J.s la constante de Planck) où les lois de la physique classique ne sont plus applicables.

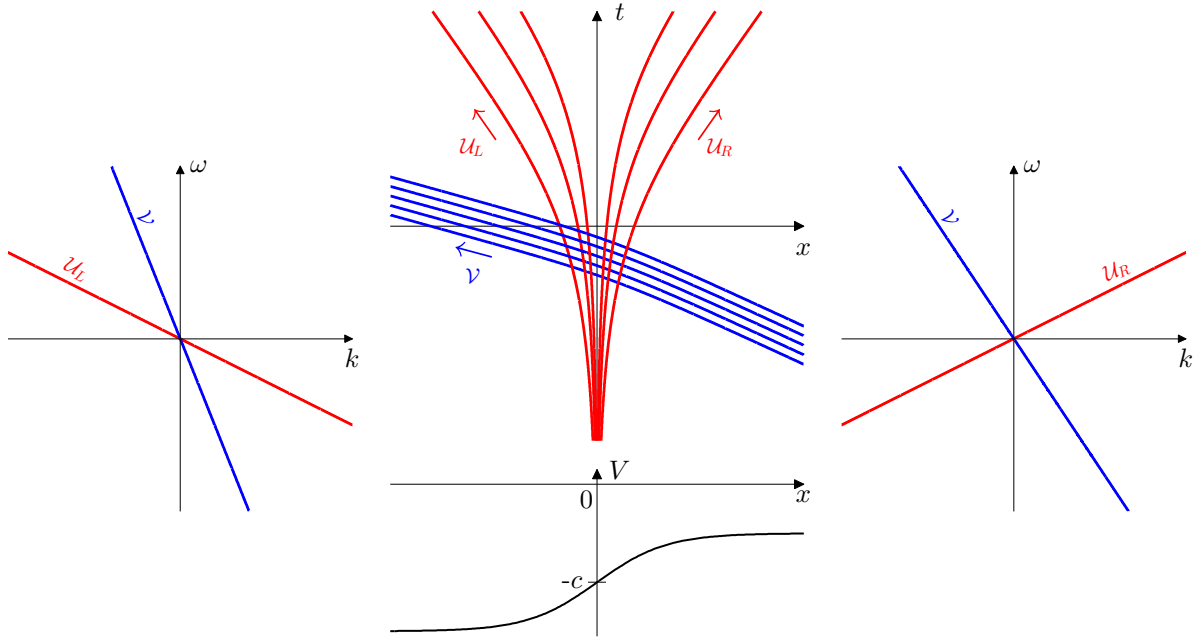


Figure 1.5 – Centre : Diagramme espace-temps avec un courant $V(x)$ variant sur $[-1,5c : -0,5c]$ de forme tangente hyperbolique. Relation de dispersion dans la région super-critique où la vitesse est constante $V = -1,5c$ (gauche) et dans la région sous-critique $V = -0,5c$ (droite).

I.1.3 Conservation de la norme

En considérant une région où V est constant, on se trouve alors en présence d'un \mathcal{U} -mode et d'un \mathcal{V} -mode comme le montre dans l'espace réel la figure 1.4 et les relations de dispersion présentées figure 1.5.

On peut alors écrire le Lagrangien [Robertson, 2011, Robertson, 2012] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= |(\partial_t + V\partial_x)\phi|^2 - c^2 |\partial_x\phi|^2 \\ \mathcal{L} &= (\partial_t + V\partial_x)\phi^* \cdot (\partial_t + V\partial_x)\phi - c^2 \partial_x\phi^* \cdot \partial_x\phi\end{aligned}\quad (19)$$

ainsi que l'équation d'Euler-Lagrange pour ϕ (idem pour ϕ^*) :

$$\partial_\mu \left(\partial_{(\partial_\mu\phi)} \mathcal{L} \right) - \partial_\phi \mathcal{L} = 0 \quad (20)$$

En injectant le Lagrangien dans l'équation d'Euler-Lagrange, on dérive l'équation d'onde :

$$(\partial_t + \partial_x V) (\partial_t + V\partial_x) \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = 0 \quad (21)$$

On utilise alors le théorème de Noether [Noether, 1918] qui exprime l'équivalence entre les lois de conservation et l'invariance des lois physiques selon certaines transformations (symétries). On recherche alors la quantité conservée en regardant l'invariance du Lagrangien lorsqu'il y a rotation de la phase :

$$\phi \rightarrow \phi \exp(-i\theta) \quad \phi^* \rightarrow \phi^* \exp(i\theta) \quad (22)$$

Considérons une rotation de phase infinitésimale : $\exp(-i\delta\theta) \approx 1 - i\delta\theta$. Par invariance : $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ avec $\delta\mathcal{L} = 0$.

On a alors :

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi (1 - i\delta\theta) \quad \partial_\mu \phi^* \rightarrow \partial_\mu \phi^* (1 + i\delta\theta) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \partial_{(\partial_\mu \phi)} \mathcal{L} \delta (\partial_\mu \phi) + \partial_{(\partial_\mu \phi^*)} \mathcal{L} \delta (\partial_\mu \phi^*) + \cancel{\partial_\phi \mathcal{L} \delta \phi} + \cancel{\partial_{\phi^*} \mathcal{L} \delta \phi^*} \\ \delta \mathcal{L} &= \delta \theta \left[\partial_{(\partial_\mu \phi)} \mathcal{L} (-i) \partial_\mu \phi + \partial_{(\partial_\mu \phi^*)} \mathcal{L} i \partial_\mu \phi^* \right] \\ 0 &= \partial_{(\partial_\mu \phi)} \mathcal{L} (-i) \partial_\mu \phi + \partial_{(\partial_\mu \phi^*)} \mathcal{L} i \partial_\mu \phi^* \\ 0 &= \partial_\mu \left[-i \phi \partial_{(\partial_\mu \phi)} \mathcal{L} + i \phi^* \partial_{(\partial_\mu \phi^*)} \mathcal{L} \right] - \left[-i \phi \partial_\mu (\cancel{\partial_{(\partial_\mu \phi)} \mathcal{L}}) + i \phi^* \partial_\mu (\cancel{\partial_{(\partial_\mu \phi^*)} \mathcal{L}}) \right] \\ 0 &= \partial_\mu j^\mu = \partial_t j^t + \partial_x j^x \\ 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\mu j^\mu dx = \partial_t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} j^t dx \right) + \underbrace{(j^x(+\infty) - j^x(-\infty))}_{=0 \text{ pour un paquet d'onde fini}} \end{aligned} \quad (24)$$

La quantité conservée sera alors $\int_{-\infty}^{+\infty} j^t dx$, on définira alors le produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\phi, \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[i \phi^* \partial_{(\partial_t \phi^*)} \mathcal{L} - i \phi \partial_{(\partial_t \phi)} \mathcal{L} \right] \\ (\phi, \phi) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\phi^* (\partial_t + V \partial_x) \phi - \phi (\partial_t + V \partial_x) \phi^* \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Dans la dérivation, on traite ϕ et ϕ^* comme étant indépendant, on peut alors les différencier en deux solutions ϕ_1 et ϕ_2 , le produit scalaire sera alors toujours conservée :

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\phi_1^* (\partial_t + V \partial_x) \phi_2 - \phi_2 (\partial_t + V \partial_x) \phi_1^* \right] \quad (26)$$

Considérons des solutions ϕ_k^γ :

$$\phi_k^\gamma(x, t) = \mathcal{N}_k^\gamma \exp(ikx - i\omega_\gamma(k)t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \mathcal{U}, \mathcal{V} \quad (27)$$

où \mathcal{N}_k^γ est un facteur, restant à définir, qui permettra de normaliser le produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\phi_{k_1}^{\gamma_1}, \phi_{k_2}^{\gamma_2}) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[(\mathcal{N}_{k_1}^{\gamma_1})^* \mathcal{N}_{k_2}^{\gamma_2} \exp(i(k_2 - k_1)x - i(\omega_{\gamma_2}(k_2) - \omega_{\gamma_1}(k_1))t) \right. \\ &\quad \left. (-i\omega_{\gamma_2}(k_2) + iVk_2 - i\omega_{\gamma_1}(k_1) + iVk_1) \right] \\ (\phi_{k_1}^{\gamma_1}, \phi_{k_2}^{\gamma_2}) &= 2\pi (\mathcal{N}_{k_1}^{\gamma_1})^* \mathcal{N}_{k_2}^{\gamma_2} \exp(i(k_2 - k_1)x - i(\omega_{\gamma_2}(k_2) - \omega_{\gamma_1}(k_1))t) \\ &\quad (\omega_{\gamma_2}(k_2) - Vk_2 + \omega_{\gamma_1}(k_1) - Vk_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i(k_1 - k_2)x) dx \\ &\quad \quad \quad =0 \text{ si } \gamma_1 = \gamma_2 \text{ et } k_1 = k_2 \\ (\phi_{k_1}^{\gamma_1}, \phi_{k_2}^{\gamma_2}) &= 2\pi (\mathcal{N}_{k_1}^{\gamma_1})^* \mathcal{N}_{k_2}^{\gamma_2} \exp(i(k_2 - k_1)x - i(\omega_{\gamma_2}(k_2) - \omega_{\gamma_1}(k_1))t) \\ &\quad \underbrace{(\sigma_{\gamma_2}(k_2) + \sigma_{\gamma_1}(k_1))}_{=0 \text{ si } \gamma_1 \neq \gamma_2 \text{ et } k_1 = k_2} \delta(k_2 - k_1) \\ (\phi_{k_1}^{\gamma_1}, \phi_{k_2}^{\gamma_2}) &= 2\pi \left| \mathcal{N}_{k_1}^{\gamma_1} \right|^2 2\sigma_{\gamma_1}(k_1) \delta_{\gamma_1, \gamma_2} \delta(k_2 - k_1) \end{aligned} \quad (28)$$

On peut alors définir $\mathcal{N}_k^\gamma = \frac{1}{\sqrt{4\pi |\sigma_\gamma|}} \Rightarrow (\phi_{k_1}^{\gamma_1}, \phi_{k_2}^{\gamma_2}) = \text{signe}(\sigma_\gamma) \delta_{\gamma_1, \gamma_2} \delta(k_2 - k_1)$

Sachant que $\delta(k_2 - k_1) = |\partial_k \omega| \delta(\omega_2 - \omega_1)$ (29)

On a $\mathcal{N}_\omega^\gamma = \frac{1}{\sqrt{4\pi |\sigma_\gamma| |\partial_k \omega|}} \Rightarrow (\phi_{\omega_1}^{\gamma_1}, \phi_{\omega_2}^{\gamma_2}) = \text{signe}(\sigma_\gamma) \delta_{\gamma_1, \gamma_2} \delta(\omega_2 - \omega_1)$

Le signe du produit scalaire sera alors défini par le signe de la fréquence relative σ_γ .

Dans le cas non-dispersif où $\sigma = \pm ck$ et $\partial\omega/\partial k = U \pm c$, on a alors :

$$\mathcal{N}_\omega^\gamma = \frac{1}{\sqrt{4\pi c |\omega|}} \quad (30)$$

En considérant une solution $A\phi_\omega^\gamma$ d'amplitude a_γ :

$$A\phi_\omega^\gamma = a_\gamma \exp(i(k_\gamma(\omega)x - \omega t)) \quad (31)$$

On définit la norme de ϕ_ω^γ avec le produit scalaire :

$$(A_\omega^\gamma \phi_\omega^\gamma, A_\omega^\gamma \phi_\omega^\gamma) = 4\pi |a_\omega^\gamma|^2 \sigma_\gamma \left| \frac{\partial\omega}{\partial k} \right| = \text{signe}(\sigma_\gamma) \frac{|a_\omega^\gamma|^2}{|\mathcal{N}_\omega^\gamma|^2} \quad (32)$$

Mais on a aussi :

$$(A_\omega^\gamma \phi_\omega^\gamma, A_\omega^\gamma \phi_\omega^\gamma) = |A_\omega^\gamma|^2 (\phi_\omega^\gamma, \phi_\omega^\gamma) = \text{signe}(\sigma_\gamma) |A_\omega^\gamma|^2 \quad (33)$$

En reprenant l'expression du produit scalaire (équation 25), on peut noter que :

$$\begin{aligned} (\phi^*, \phi^*) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\phi (\partial_t + V\partial_x) \phi^* - \phi^* (\partial_t + V\partial_x) \phi] \\ (\phi^*, \phi^*) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx [-[\phi^* (\partial_t + V\partial_x) \phi - \phi (\partial_t + V\partial_x) \phi^*]] \\ (\phi^*, \phi^*) &= -(\phi, \phi) \end{aligned} \quad (34)$$

Autrement dit, les normes d'une solution de l'équation d'onde et du complexe conjugué de cette même solution seront alors de signes opposés.

La norme (en valeur absolue) d'une solution sera alors égale à $|A_\omega^\gamma|^2 = |a_\omega^\gamma|^2 / |\mathcal{N}_\omega^\gamma|^2$. Le signe de la norme sera alors défini par le signe de la fréquence relative, la norme pouvant alors être négative.

I.1.4 Métrique de Schwarzschild-Droste

Pour étudier les trous noirs, nous nous plaçons dans un espace-temps à symétrie sphérique et statique dans le vide autour d'un objet central de masse M .

ds^2 s'exprime alors en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 \quad (35)$$

Après avoir calculé les composantes de la métrique et en utilisant l'équation d'Einstein dans le vide [Fabbri et Navarro-Salas, 2005] :

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (36)$$

avec $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci, nous obtenons la métrique de Schwarzschild-Droste [Eisenstaedt, 1982, Eisenstaedt, 1987],

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (37)$$

valable pour l'espace-temps en dehors de l'objet central. On remarque que pour une valeur particulière du rayon appelée rayon de Schwarzschild R_s ,

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (38)$$

la métrique de Scharzschild-Droste devient singulière pour $r = R_s$ (qui est une fausse singularité due au choix de coordonnées associé à un observateur statique). Ce rayon correspond à une vitesse de libération égale à la vitesse de la lumière. Sa valeur correspond donc à la distance en deçà de laquelle rien ne peut s'échapper (horizon des évènements).

En s'intéressant seulement à la propagation dans la direction radiale :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{V(r)^2}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{V(r)^2}{c^2}\right)^{-1} dr^2 \quad (39)$$

avec $V(r)$ la vitesse de libération à une position r , le tenseur de la métrique s'écrit alors :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} c^2 \left(1 - \frac{V(r)^2}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{V(r)^2}{c^2}\right)^{-1} \end{bmatrix} \quad (40)$$

et pour les \mathcal{U} -modes et \mathcal{V} -modes, on aura alors :

$$\mathcal{U} = t - \int^r \frac{dr'}{\left(1 - \frac{V(r')^2}{c^2}\right) c} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = t + \int^r \frac{dr'}{\left(1 - \frac{V(r')^2}{c^2}\right) c} \quad (41)$$

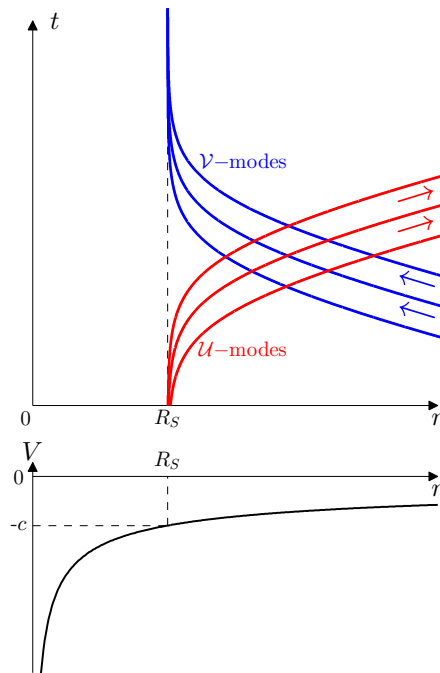


Figure 1.6 – Diagramme espace-temps dans la métrique de Scharzschild-Droste.

I.1.5 Métrique de Painlevé-Gullstrand

Afin de lever la singularité en $r = R_s$ et de pouvoir décrire les trajectoires lumineuses au niveau de l'horizon des événements, Paul Painlevé (en 1921 [Painlevé, 1921]) et A. Gullstrand (en 1922 [Gullstrand, 1922]) ont proposé une nouvelle solution grâce à un changement de variable. Ce changement de coordonnées traduit le fait que, dans les coordonnées de Schwarzschild, l'observateur est statique, alors qu'en coordonnées de Painlevé-Gullstrand, l'observateur est en chute libre. Le changement de variable est alors appelé transformation de Painlevé-Gullstrand (où c est constant) :

$$\begin{cases} t = \tilde{t} + \int dr \frac{v(r)}{c^2 - v^2(r)} \\ v(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \end{cases} \quad (42)$$

Nous obtenons alors la métrique suivante :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2(r)}{c^2} \right) d\tilde{t}^2 - 2v(r) dr d\tilde{t} - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (43)$$

Cette métrique ne possède qu'une singularité d'ordre mathématique au centre du trou noir (i.e. $r = 0$) et est régulière pour $r = R_s$.

La trajectoire radiale d'un rayon lumineux sera alors décrite par :

$$\begin{aligned} 0 &= (c^2 - v^2(r)) d\tilde{t}^2 - 2v(r) dr d\tilde{t} - dr^2 \\ 0 &= \left[(c^2 - v^2(r)) \left(\frac{d\tilde{t}}{dr} \right)^2 + 2v(r) \frac{d\tilde{t}}{dr} - 1 \right] dr^2 \end{aligned} \quad (44)$$

et s'écrirait donc :

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{-v(r) \pm c}{c^2 - v^2(r)} = \frac{1}{v(r) \pm c} \quad \text{soit} \quad \frac{dr}{d\tilde{t}} = v(r) \pm c \quad (45)$$

On retrouve alors la même forme que dans le cas, précédemment décrit, de la propagation de la lumière en espace temps courbé avec :

$$\mathcal{U} = t - \int^r \frac{dr'}{V(r') + c} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = t - \int^r \frac{dr'}{V(r') - c} \quad (46)$$

La trajectoire de chacun des modes est représentée figure 1.7 (gauche).

L'horizon étant décrit comme la position où la vitesse de libération est égale à la vitesse de la lumière en relativité générale, on peut créer des horizons analogues dans un système de propagation d'ondes sur un courant inhomogène, là où la vitesse du courant devient égale à la vitesse de propagation des ondes. Cette correspondance est illustrée figure 1.7 (droite), le courant inhomogène étant créé grâce à une rivière à l'approche d'une chute d'eau et les ondes étant modélisées par des poissons nageant à une vitesse fixe c (sans présence de courant). On retrouve alors nos trois modes, les \mathcal{V} -modes lorsque les poissons nagent à co-courant, les \mathcal{U}_R -modes quand les poissons nagent à contre-courant dans la zone où la vitesse du courant est inférieure à la vitesse de nage et les \mathcal{U}_L -modes où elle y est supérieure.

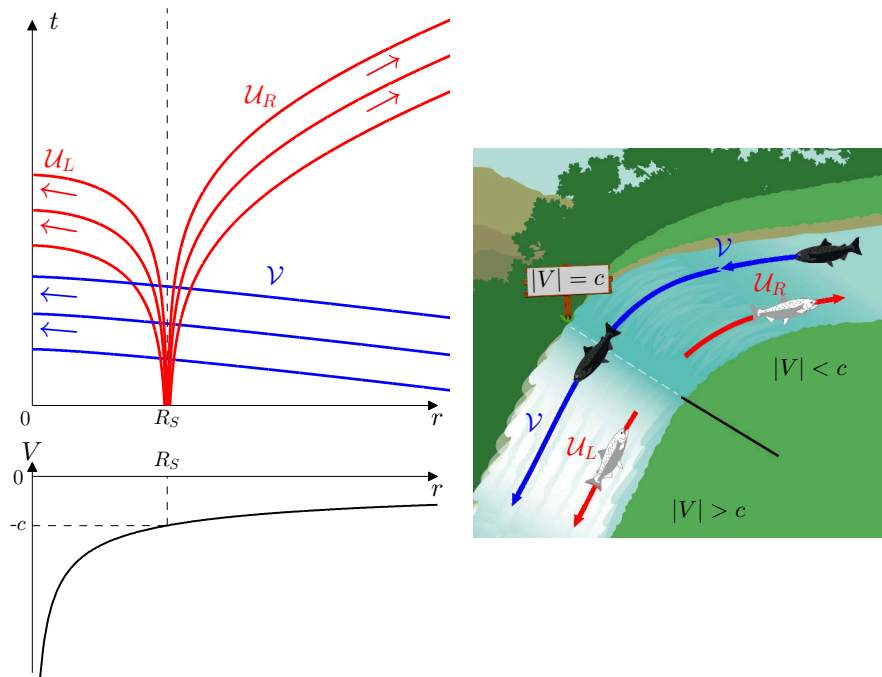


Figure 1.7 – Gauche : diagramme espace-temps d’un trou noir dans la métrique de Painlevé-Gullstrand. Droite : illustration d’un modèle analogue représentant la propagation d’onde (modélisée par des poissons) sur un courant in-homogène dans la configuration d’un trou noir analogue (image de base créée par Anthony Baril).

I.1.6 Les trous blancs

Un trou blanc (aussi appelé fontaine blanche) est le renversé temporel d’un trou noir. Tout comme rien ne peut échapper de l’horizon d’un trou noir sans aller plus vite que la lumière, rien ne peut pénétrer l’horizon d’un trou blanc sans aller plus vite que la lumière. Les équations d’Einstein étant invariantes par renversement de la variable temps, si elles admettent une solution de type trou noir alors elles admettent aussi une solution de type trou blanc. Néanmoins, leur existence est sujet à débat en astrophysique [Fabbri et Navarro-Salas, 2005, Mayoral, 2011, Balbinot *et al.*, 2013] (en raison de leur possible instabilité), ce qui n’est pas le cas en hydrodynamique.

Pour obtenir un tel résultat, il suffit de considérer une vitesse de libération positive selon la direction \vec{r} et non plus négative comme pour le trou noir, autrement dit la transformation $V \rightarrow -V$. Mais on peut aussi simplement utiliser la transformation $t \rightarrow -t$ dans l’équation de propagation, autrement dit ne plus regarder le diagramme espace-temps du trou noir (figure 1.7) avec le temps s’écoulant de bas en haut mais inversement de haut en bas (figure 1.8 gauche). On peut alors créer l’analogue de l’horizon d’un trou blanc de la même façon que pour un trou noir (figure 1.8 droite).

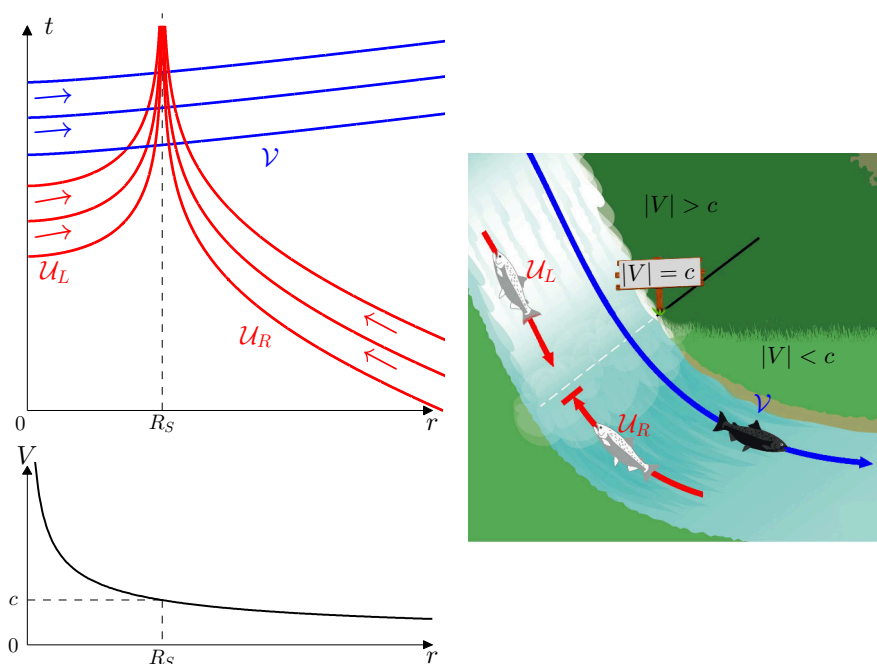


Figure 1.8 – Gauche : diagramme espace-temps d’un trou blanc dans la métrique de Painlevé-Gullstrand. Droite : illustration d’un modèle analogue représentant la propagation d’onde (modélisée par des poissons) sur un courant in-homogène dans la configuration d’un trou blanc analogue (image de base créée par Anthony Baril).

I.1.7 Radiation de Hawking

Bien que comme discuté précédemment de façon classique (par la théorie de la Relativité), un trou noir ne devrait émettre aucun rayonnement, en 1974, Stephen Hawking démontre que ceux-ci ne seraient pas complètement noirs mais émettraient un rayonnement de corps noir grâce à un effet d’origine quantique, ce rayonnement est appelé radiation de Hawking [Hawking, 1974]. La théorie quantique des champs explique l’existence de fluctuations quantiques du vide qui se traduit par la création de paires particule-antiparticule qui, dans un espace temps plat, s’annihilent après un temps très court. Mais si un phénomène permet de les séparer en un temps inférieur à la durée de vie typique de la paire, alors elles ne pourront jamais s’annihiler. C’est le cas au niveau de l’horizon d’un trou noir, la force due au champ gravitationnel permet à la particule de s’échapper de l’attraction du trou noir (sous forme de \mathcal{U}_R -mode) alors que l’antiparticule est absorbée par celui-ci (\mathcal{U}_L -mode). L’émission de ces particules au niveau de l’horizon du trou noir se caractérise par un rayonnement associé à une température, nommée température de Hawking T_H . D’un autre côté, l’absorption des antiparticules d’énergie négative provoque la diminution de la masse du trou noir, d’où le terme « évaporation des trous noirs » par absorption de masse négative, bien que cela ne soit vrai que pour un trou noir isolé.

Le calcul de cette température étant très sophistiqué [Hawking, 1974], nous proposons ici une idée du résultat par analyse dimensionnelle. La radiation de Hawking est au croisement de trois grands domaines de la physique (figure 1.9) :

- la Relativité Générale, dont les constantes fondamentales sont la vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ et la constante gravitationnelle $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.
- la Physique Quantique avec la constante de Planck h ou la constante de Planck réduite (constante de Dirac) $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
- la Physique Statistique avec la constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

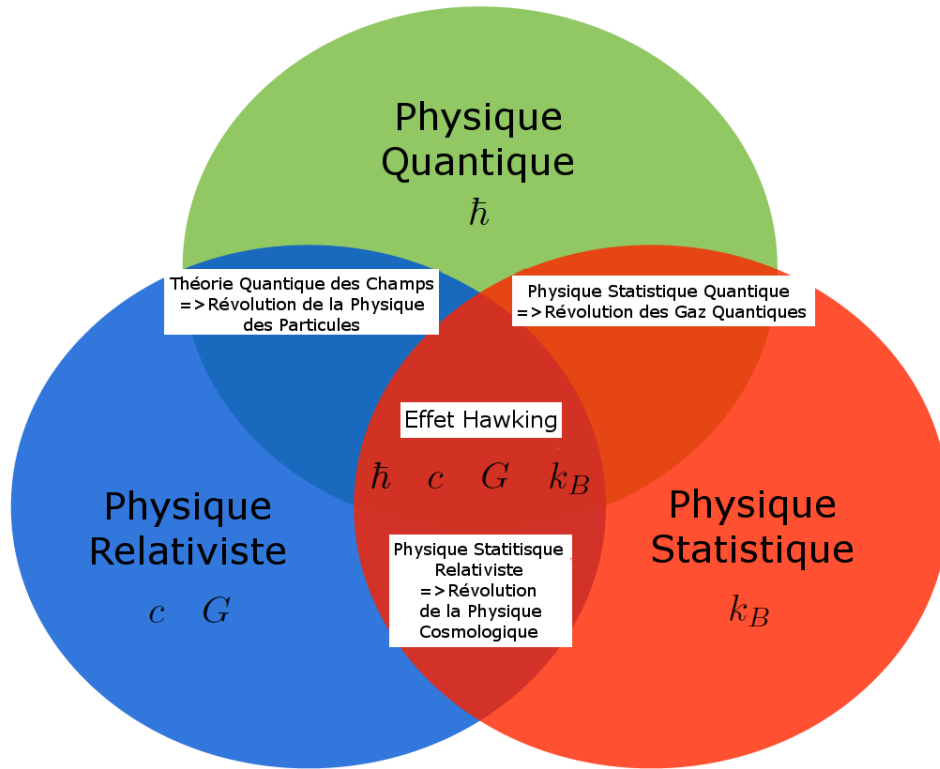


Figure 1.9 – La radiation de Hawking (ou effet Hawking) au croisement de trois grands domaines de la physique.

L'ordre de grandeur de l'agitation thermique en Physique Statistique est $E \approx k_B T$, alors que l'énergie d'un photon possédant une fréquence angulaire ω vaut $E = \hbar\omega$. On peut exprimer la fréquence en fonction de la longueur d'onde du photon avec $\omega = ck = 2\pi c/\lambda$. La seule longueur caractérisant un trou noir étant le rayon de Schwarzschild, il est naturel que la longueur d'onde soit déterminée par cette échelle. De manière analogue à la condition de Bohr postulant que la longueur d'onde électronique est un multiple du périmètre de la trajectoire de l'électron autour de l'atome, on suppose alors que $\lambda = 2\pi R_S$. En admettant que le trou noir rayonne sur un angle solide $\Omega = A/R_S^2 = 4\pi$ (avec A la surface de la sphère autour du trou noir au niveau de l'horizon), on en déduit la température de radiation mesurée par un observateur en espace-temps plat (en égalisant les deux expressions de l'énergie) :

$$T_H \approx \frac{\hbar c}{k_B R_S 4\pi} \quad (47)$$

En prenant en compte le rayon de Schwarzschild, on retombe sur l'expression développée par Stephen Hawking :

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} = 6.16 \times 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} \text{ K} \quad (48)$$

avec $M_\odot = 1,99 \times 10^{30}$ kg la masse solaire.

S.W. Hawking montra que le rapport entre la norme de l'anti-particule nommée $|\beta|^2$ (correspondant au \mathcal{U}_R -mode) sur celle de la particule $|\alpha|^2$ (\mathcal{U}_L -mode) suit une loi exponentielle [Hawking, 1974] :

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T_H}\right) \quad (49)$$

que l'on appelle « spectre thermique ». L'ordre de grandeur de la température de Hawking pour un trou noir d'une masse solaire serait alors de 10^{-7} K ce qui est bien en dessous de la température du fond diffus cosmologique issu du Big Bang $T_{\text{CMB}} \approx 2,73$ K. Il faudrait alors avoir une connaissance exacte du fond cosmologique ainsi que de toutes autres sources de rayonnement pouvant intervenir dans la mesure de la température d'un trou noir, ce qui est impossible à l'heure actuelle.

En 1976, William Unruh généralise l'effet Hawking en utilisant l'équivalence d'Einstein entre accélération et champ de gravité, prédisant qu'un observateur en mouvement uniformément accéléré observerait un rayonnement du milieu de type corps noir alors qu'un observateur au repos ne verrait rien. Cette température est donnée par :

$$T_U = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (50)$$

avec a l'accélération de l'observateur. En se plaçant dans le cas d'un trou noir, l'accélération étant due au champ gravitationnel du trou noir au niveau de l'horizon, elle vaut $a = \frac{c^2}{2R_S}$. On retrouve alors la formule de la température de Hawking (équation 48).

On peut aussi écrire la température de Hawking en fonction de la gravité de surface du trou noir. De façon générale, la gravité de surface est l'intensité du champ gravitationnel à la surface d'un objet astrophysique. Dans le cas d'un trou noir, il en sera de même, bien que la surface d'un trou noir est considérée au niveau de son horizon, et est donc égale à $\kappa = GM/R_S^2 = c^4/4GM$. On a alors :

$$T_H = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c} \quad (51)$$

De multiples méthodes de dérivation [Parikh et Wilczek, 2000, Melnikov et Weinstein, 2001, Visser, 2003] ont permis de retrouver la température de Hawking [Hawking, 1974], la difficulté étant de pouvoir éviter le problème trans-Planckien au niveau de l'horizon. Nous présentons ici, une démonstration permettant de « contourner » l'horizon en se plaçant dans le plan complexe.

Il y a deux bases de solutions pour définir la décomposition entre un mode de norme positive et un autre de norme négative (comme le montre la figure 1.10).

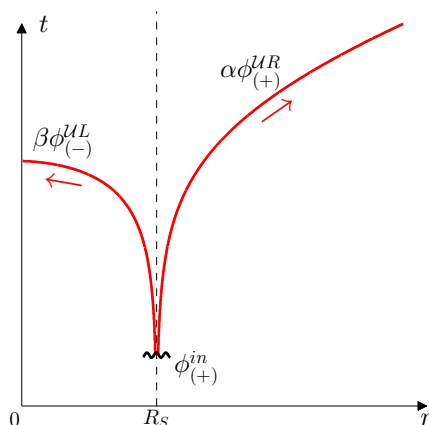


Figure 1.10 – Décomposition entre un mode de norme positive (la particule) et un mode de norme négative (l'anti-particule).

- D'un côté, on peut considérer une onde plane vue par un observateur/émetteur tombant au travers de l'horizon (mode entrant $\phi_{(+)}^{in}$) au niveau de ce dernier. Très proche de

l'horizon on a $V(r) \approx -c$, si on se place dans le référentiel de l'émetteur chutant, décrit par $x' = x - V(r)t \approx x + ct$ et $t' = t$, celui-ci peut émettre des \mathcal{U} -modes de la forme :

$$\begin{aligned} f(x', t') &= \int_0^\infty \hat{f}(\omega') \exp [i(k'x' - \omega't')] + \text{complexe conjugué} \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \hat{f}(\omega') \exp \left[i\omega' \left(\frac{x'}{c} - t' \right) \right]}_{\text{norme positive}} + \underbrace{\text{complexe conjugué}}_{\text{norme négative}} \end{aligned} \quad (52)$$

La partie concernant la norme positive sera alors analytique dans le plan complexe supérieur ($x'/c - t' \approx x/c$, soit dans le plan complexe $x = |x| \exp(i\theta)$ avec $\theta \in [0\pi]$).

-D'un autre côté, on considère des ondes planes vues par un observateur statique à l'infini (modes sortants $\phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L}$ et $\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R}$).

Près de l'horizon, $V(x) = -c + \xi x$ avec $x = r - R_S$ et $\xi = \left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=R_S} = \frac{c}{2R_S} = \frac{c^3}{4GM} = \frac{\kappa}{c}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= t - \int_{x_0}^x \frac{dx'}{V(x') + c} \quad , \quad x_0 = 0 \\ \mathcal{U}_R &= t - \frac{1}{\xi} \ln \left(\frac{x}{|x_0|} \right) \quad \text{pour } x > 0 \\ \mathcal{U}_L &= t - \frac{1}{\xi} \ln \left(-\frac{x}{|x_0|} \right) \quad \text{pour } x < 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R}(x, t) &= \frac{\exp(-i\omega\mathcal{U}_R)}{\sqrt{4\pi c |\omega|}} = \frac{\exp(-i\omega t)}{\sqrt{4\pi c |\omega|}} \exp \left(i\frac{\omega}{\xi} \ln \left(\frac{x}{|x_0|} \right) \right) \\ \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L}(x, t) &= \frac{\exp(-i\omega\mathcal{U}_L)}{\sqrt{4\pi c |\omega|}} = \frac{\exp(-i\omega t)}{\sqrt{4\pi c |\omega|}} \exp \left(i\frac{\omega}{\xi} \ln \left(-\frac{x}{|x_0|} \right) \right) \end{aligned} \quad (54)$$

Ces modes sortants ($\phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L}$ et $\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R}$) ne sont pas analytique dans le plan complexe à cause de la discontinuité. Les deux bases étant équivalentes, on va donc essayer de réécrire ces modes en fonction des modes stationnaires, correspondant à un observateur statique à l'infini, pour rester continument analytique dans le plan complexe :

La figure 1.11 montre que :

$$\exp \left(-\pi \frac{\omega}{\xi} \right) \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} = \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} \quad (55)$$

Le résultat (55) indique que dans la décomposition en $\phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L}$ et $\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R}$, le pré-facteur $\exp(-\pi\omega/\xi)$ doit apparaître devant le mode se propageant à gauche de l'horizon $\phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L}$ [Leonhardt et Philbin, 2012]. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \phi_{(+)}^{in} &= \alpha \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} + \beta \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \\ &= \alpha \left(\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} + \frac{\beta}{\alpha} \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \right) \\ &= \alpha \left(\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} + \exp \left(-\pi \frac{\omega}{\xi} \right) \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

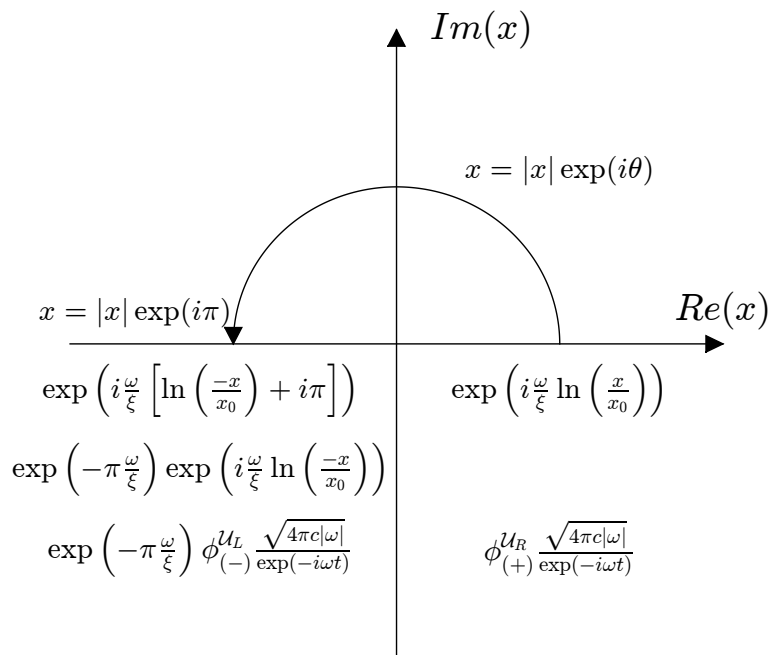


Figure 1.11 – Passage dans le plan complexe pour éviter la discontinuité au niveau de l’horizon.

On utilise alors le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
 \phi_{(+)}^{in} &= \alpha \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} + \beta \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_L} \\
 \phi_{(+)}^{in} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} \\ \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_L} \\ \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \end{bmatrix} \\
 (\phi_{(+)}^{in}, \phi_{(+)}^{in}) &= \left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} \\ \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_L} \\ \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} & \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right) \\
 (\phi_{(+)}^{in}, \phi_{(+)}^{in}) &= \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} \\ \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_L} \\ \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R} & \phi_{(-)}^{\mathcal{U}_L} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\
 1 &= \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\
 1 &= \begin{bmatrix} \alpha^* & -\beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\
 1 &= \alpha^* \alpha - \beta^* \beta \\
 1 &= |\alpha|^2 - |\beta|^2
 \end{aligned} \tag{57}$$

où $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ représentent respectivement les valeurs absolues des normes des solutions $\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_R}$ et $\phi_{(+)}^{\mathcal{U}_L}$ (en considérant que la norme de la solution $\phi_{(+)}^{in}$ est égale à 1). Cette dernière expression correspondant à la conservation de la norme est appelée unitarité. En injectant

la valeur de $|\beta|/|\alpha|$ dans l'unitarité on trouve :

$$\begin{aligned}
 |\alpha|^2 - |\beta|^2 &= 1 \\
 |\beta|^2 \left(\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} - 1 \right) &= 1 \\
 |\beta|^2 \left(\left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^{-2} - 1 \right) &= 1 \\
 |\beta|^2 \left(\left(\exp \left(-\pi \frac{\omega}{\xi} \right) \right)^{-2} - 1 \right) &= 1 \\
 |\beta|^2 &= \frac{1}{\exp \left(2\pi \frac{\omega}{\xi} \right) - 1} \\
 |\alpha|^2 &= \frac{1}{1 - \exp \left(-2\pi \frac{\omega}{\xi} \right)}
 \end{aligned} \tag{58}$$

L'horizon noir est alors un amplificateur dont le gain vaut $|\alpha|^2$. L'évolution de $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ en fonction de la fréquence est représentée figure 1.12 (gauche).

On peut alors observer les différentes asymptotes représentées figure 1.12 (centre et droite) :

$$\begin{aligned}
 |\beta|^2 &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\omega/\xi} & |\beta|^2 &\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(2\pi\omega/\xi)} \\
 |\alpha|^2 &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\omega/\xi} & |\alpha|^2 &\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1
 \end{aligned} \tag{59}$$

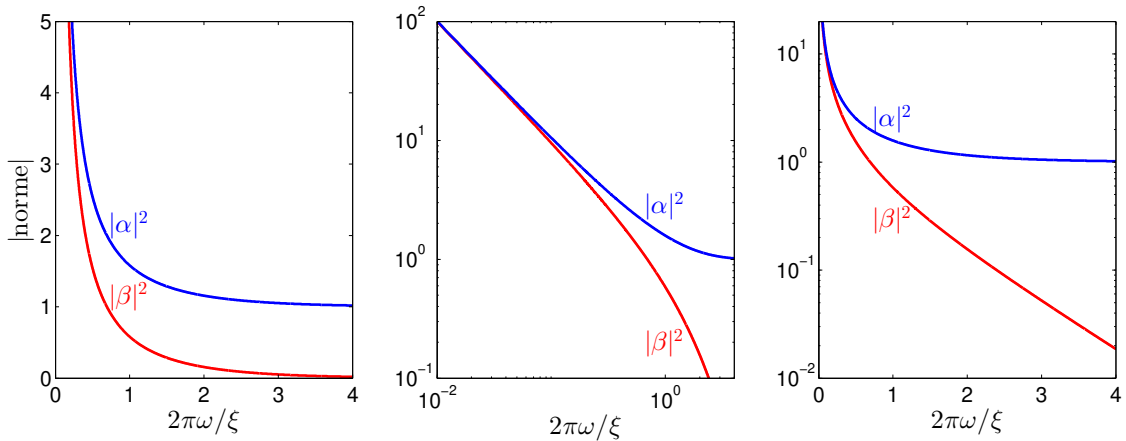


Figure 1.12 – Évolution de $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ en fonction de la fréquence adimensionnée. Les différentes échelles d'axes permettent d'illustrer l'asymptote quand $\omega \rightarrow 0$ (centre) et $\omega \rightarrow \infty$ (droite).

En reprenant l'expression de la température de Hawking (51), on voit que $|\beta|^2$ suit un

spectre de Planck (rayonnement d'un corps noir) :

$$\begin{aligned}
 T_H &= \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B c} \\
 T_H &= \frac{\hbar\xi}{2\pi k_B} \\
 \frac{\hbar}{k_B T_H} &= \frac{2\pi}{\xi} \\
 |\beta|^2 &= \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T_H}\right) - 1}
 \end{aligned} \tag{60}$$

On retrouve la loi exponentielle de Hawking avec :

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T_H}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi\omega}{\xi}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi\omega c}{\kappa}\right) \tag{61}$$

I.2 Métrique acoustique

Comme annoncé précédemment, en 1981, W. G. Unruh [Unruh, 1981] a établi l'analogie entre la propagation d'ondes acoustiques dans un fluide en mouvement et la propagation de la lumière espace temps courbé. Il est alors possible de créer des trous noirs acoustiques qu'il nomme « trous muets » (dumbholes). Nous allons donc montrer ici que les métriques sont semblables.

Considérons le cas d'un fluide s'écoulant à vitesse uniforme que l'on soumet à des perturbations se déplaçant à la vitesse du son. Nous faisons l'hypothèse que le fluide est non-visqueux, irrotationnel et barotrope (p s'exprime en fonction de ρ). Les équations fondamentales de la mécanique des fluides sont l'équation de continuité

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \tag{62}$$

et l'équation d'Euler

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} \equiv \rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) = \vec{f} \tag{63}$$

Nous considérons que les seules forces présentes sont celles dues à la pression.

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} p \tag{64}$$

Comme l'écoulement est irrotationnel ($\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$), nous avons

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{\vec{\nabla}(\vec{u})^2}{2} \tag{65}$$

En remplaçant dans l'équation (63), on obtient

$$\partial_t \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{\vec{\nabla}(\vec{u})^2}{2} \tag{66}$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse que le fluide est barotrope. Nous pouvons donc définir l'enthalpie

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')} \Rightarrow \vec{\nabla} h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \tag{67}$$

L'équation (66) devient

$$\partial_t \vec{u} = -\vec{\nabla} h - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \quad (68)$$

Nous introduisons le potentiel vitesse tel que $\vec{u} = -\vec{\nabla} \phi$ ce qui nous permet de réduire l'équation (68) à

$$-\partial_t \phi + h + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 = 0 \quad (69)$$

qui est une forme de l'équation de Bernoulli.

A présent, nous pouvons linéariser les équations du mouvement en posant

$$\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + O(\epsilon^2) \quad (70)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2) \quad (71)$$

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon^2) \quad (72)$$

avec $\epsilon \rightarrow 0$.

Pour l'équation de continuité on obtient :

à l'ordre 0 en ϵ

$$\partial_t \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_0) = 0 \quad (73)$$

à l'ordre 1 en ϵ

$$\partial_t \rho_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}_1) = 0 \quad (74)$$

La fonction $h(p)$ devient

$$h(p) = h(p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2)) \quad (75)$$

$$h(p) = h(p_0) + \frac{dh}{dp}(p - p_0) + \dots \quad (76)$$

$$h(p) = h(p_0) + \frac{dh}{dp} \epsilon p_1 + \dots$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} dh &= \frac{dp}{\rho} \\ \frac{dh(p_0)}{dp} &= \frac{1}{\rho_0} \end{aligned} \quad (77)$$

Soit

$$h(p) = h(p_0) + \frac{\epsilon p_1}{\rho_0} + O(\epsilon^2) \quad (78)$$

Utilisant ce résultat pour linéariser l'équation d'Euler, on obtient :

à l'ordre 0 en ϵ

$$-\partial_t \phi_0 + h_0 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_0)^2 = 0 \quad (79)$$

à l'ordre 1 en ϵ

$$-\partial_t \phi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = 0 \quad (80)$$

L'équation (80) nous permet d'exprimer p_1 en fonction de ρ_0 , \vec{u}_0 et ϕ_1

$$p_1 = \rho_0(\partial_t \phi_1 + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) \quad (81)$$

Nous pouvons trouver une relation entre ρ_1 et p_1

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0(\partial_t \phi_1 + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) \quad (82)$$

On remplace dans l'équation de continuité, ce qui nous permet de trouver l'équation d'onde :

$$-\partial_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0(\partial_t \phi_1 + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \vec{u}_0(\partial_t \phi_1 + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1) \right) = 0 \quad (83)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0 \quad (84)$$

avec $f^{\mu\nu}$ une matrice 4 X 4 définie par

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \dots & \dots \\ -v_0^i & \vdots & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix} \quad (85)$$

$\mu, \nu = t, x, y, z$ et $i, j = x, y, z$

et c^2 la vitesse locale du son

$$\frac{1}{c^2} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (86)$$

L'équation (84) est similaire à l'équation de d'Alembert généralisée :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0 \quad (87)$$

En identifiant la première équation à la seconde on trouve

$$f^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \quad (88)$$

En posant $\det(g_{\mu\nu}) = g$, nous pouvons écrire la relation suivante

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (89)$$

De plus à partir de la matrice (85) nous pouvons écrire que

$$\det(f^{\mu\nu}) = -\frac{\rho_0^4}{c^2} \quad (90)$$

donc

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c^2} \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c} \quad (91)$$

La métrique acoustique inverse s'exprime de la façon suivante

$$g^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\rho_0 c} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \dots & \dots \\ -v_0^i & \vdots & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix} \quad (92)$$

Il ne nous reste plus qu'à inverser cette matrice pour aboutir à la métrique acoustique :

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c} \begin{bmatrix} -(c^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \dots & \dots \\ -v_0^i & \vdots & \delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (93)$$

On retrouve alors une métrique identique à celle de la propagation de la lumière en espace temps courbé (équation 16) à un facteur conforme près $\frac{\rho_0}{c}$ [White, 1973, Unruh, 1981].

I.3 Physique des ondes de surface

En 2002, les ondes de surface deviennent un nouveau modèle analogue grâce à R. Schützhold and W. G. Unruh [Schützhold et Unruh, 2002]. Cette partie fait un rappel des équations régissant ce système et principalement la relation de dispersion.

I.3.1 Dérivation de la relation de dispersion des ondes de surface

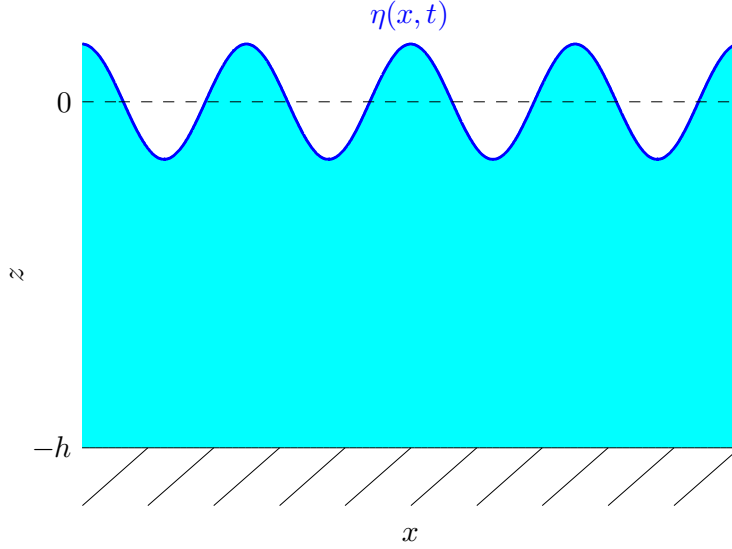


Figure 1.13 – Schema représentant une déformée de surface libre $\eta(x, t)$ en hauteur d'eau finie h .

On part des équations de Navier-Stokes [Crapper, 1984] :

$$\frac{d\rho}{dt} = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (94)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p \quad (95)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \partial_t \vec{u} + \frac{\vec{\nabla}(\vec{u}^2)}{2} - \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \quad (96)$$

En outre, on considère que le fluide est incompressible rendant sa densité ρ constante et l'écoulement est irrotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = 0$, on a alors :

$$\vec{\nabla} \vec{u} = 0 \quad (97)$$

$$\rho \left(\partial_t \vec{u} + \frac{\vec{\nabla}(\vec{u}^2)}{2} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p \quad (98)$$

Puisque le mouvement est irrotationnel, il existe un potentiel de vitesse Φ tel que

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \Phi \quad (99)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\vec{\nabla} \left(\rho \partial_t \Phi + \rho \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + p + \rho g z \right) = 0 \quad (100)$$

$$\rho \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g z \right) + p = \text{constante} \quad (101)$$

L'équation de continuité donne :

$$\Delta \Phi = 0 \quad (102)$$

I.3.2 Conditions aux limites

La condition cinématique en surface $z = \eta$ traduit le fait qu'une particule d'eau ne doit pas traverser la surface libre (condition d'imperméabilité). La vitesse verticale de la particule ($\vec{u} \cdot \vec{z}$) doit donc être égale à la vitesse de la surface ($d\eta/dt$) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{z} &= \partial_t z = \partial_z \Phi \\ \vec{u} \cdot \vec{z} &= \frac{d\eta}{dt} = \partial_t \eta + \partial_t x \partial_x \eta = \partial_t \eta + \partial_x \Phi \partial_x \eta \\ \partial_t \eta &= \partial_z \Phi - \partial_x \Phi \partial_x \eta \end{aligned} \quad (103)$$

La condition cinématique sur le fond en $z = -h$ décrit la non-pénétration (avec \vec{n} la normale au fond) :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{\nabla}(\Phi) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \partial_z \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (104)$$

La condition dynamique (équation 101) en surface $z = \eta$, traduit l'équilibre des forces qui s'exercent de chaque côté de l'interface (avec $\gamma = 0,073\text{N/m}$ la tension de surface à une interface eau/air) :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eau}} \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g \eta \right) + p_{\text{eau}} &= \rho_{\text{air}} \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g \eta \right) + p_{\text{air}} \\ \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g \eta \right) + \frac{p_{\text{eau}} - p_{\text{air}}}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{air}}} &= 0 \\ \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g \eta \right) + \frac{p_{\text{eau}} - p_{\text{air}}}{\rho} &= 0 \quad \rho = \rho_{\text{eau}} \gg \rho_{\text{air}} \end{aligned} \quad (105)$$

on a alors $\Delta p = \frac{\gamma}{R}$ où R = rayon de courbure (loi de Young-Laplace)

$$\begin{aligned} \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g \eta \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma}{R} &= 0 \\ \left(\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + g \eta \right) - \frac{\gamma}{\rho} \partial_{x^2} \eta &= 0 \quad \text{si} \quad \partial_x \eta \ll 1 \end{aligned}$$

On obtient alors un système d'équation :

$$\partial_z \Phi = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (106)$$

$$\partial_t \eta = \partial_z \Phi - \partial_x \Phi \partial_x \eta \quad \text{en} \quad z = \eta \quad (107)$$

$$\partial_t \Phi = -g \eta - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}(\Phi))^2 + \frac{\gamma}{\rho} \partial_{x^2} \eta \quad \text{en} \quad z = \eta \quad (108)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \forall z \quad (109)$$

I.3.3 Linéarisation autour de $z = 0$

On souhaite réécrire les conditions relatives à la surface (107) et (108), en $z = 0$ (surface au repos) en considérant que les perturbations . Pour cela on fait un développement limité autour de $z = 0$ avec :

$$F(\eta) = F(0) + \eta \partial_z F \Big|_{z=0} + \eta^2 \partial_{z^2} F \Big|_{z=0} + \dots \quad (110)$$

avec $F = \partial_t \eta$ ou $\partial_x \Phi$, $\partial_x \Phi \partial_x \eta$, $(\partial_x \Phi)^2$, $(\partial_t \eta)^2$, $\partial_z \Phi \dots$

On effectue ensuite un développement en petits paramètres avec $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^3 \eta_3 + \dots \quad (111)$$

$$\Phi = \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \epsilon^3 \Phi_3 + \dots \quad (112)$$

Le développement limité donnera alors par exemple :

$$\partial_x \Phi \Big|_{\eta} = \partial_x \Phi \Big|_0 + \eta \partial_z \partial_x \Phi \Big|_0 + \dots \quad (113)$$

puis le développement en petits paramètres :

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi \Big|_{\eta} &= \epsilon \partial_x \Phi_1 \Big|_0 + \epsilon^2 \partial_x \Phi_2 \Big|_0 + \epsilon \eta_1 \partial_z \partial_x \Phi_1 \Big|_0 + \dots \\ \partial_x \Phi \partial_x \eta \Big|_{\eta} &= \epsilon^2 \partial_x \Phi_1 \partial_x \eta_1 \Big|_0 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (114)$$

On remplace ces expressions dans le système (106,107,108,109) puis on linéarise en ne gardant que les termes du premier ordre en ϵ et on simplifie les notations avec $\epsilon \eta_1 = \eta$ et $\epsilon \Phi_1 = \Phi$. On obtient :

$$\partial_z \Phi = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (115)$$

$$\partial_t \eta = \partial_z \Phi \quad \text{en } z = 0 \quad (116)$$

$$\partial_t \Phi = -g\eta + \frac{\gamma}{\rho} \partial_{x^2} \eta \quad \text{en } z = 0 \quad (117)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \forall z \quad (118)$$

On considère que le potentiel des vitesses Φ est celui d'une onde plane d'amplitude a , de fréquence angulaire σ et de nombre d'onde k' , on a alors :

$$\eta = a e^{i(k'x - \sigma t)} \quad (119)$$

$$\Phi = \phi(z) e^{i(k'x - \sigma t)} \quad (120)$$

$$(121)$$

L'équation de continuité (118) donne :

$$\Delta \Phi = \partial_{z^2} \phi - k'^2 \phi = 0 \quad (122)$$

ϕ sera alors de la forme $\phi = A e^{k'z} + B e^{-k'z}$.

La condition cinématique sur le fond (115) en $z = -h$:

$$\partial_z \Phi = \partial_z \phi = 0 \quad (123)$$

soit $A = Be^{2k'h}$ et

$$\phi(z) = Be^{2k'h}e^{k'z} + Be^{-k'z} = 2Be^{k'h} \cosh(k'(z+h)) \quad (124)$$

La condition cinématique à la surface (116) en $z = 0$:

$$\partial_t \eta = \partial_z \phi \quad (125)$$

$$B = -i \frac{\sigma}{k'} a \frac{e^{-k'h}}{2 \sinh(k'h)} \quad (126)$$

On a alors :

$$\Phi = -i \frac{\sigma}{k'} a \frac{\cosh(k'(z+h))}{\sinh(k'h)} e^{i(k'x - \sigma t)} \quad (127)$$

La condition dynamique à la surface (117) en $z = 0$:

$$\partial_t \Phi = -g\eta + \rho\gamma \partial_{x^2} \eta \quad (128)$$

$$\partial_{t^2} \Phi = -g\partial_z \Phi + \frac{\gamma}{\rho} \partial_{x^2} \partial_z \Phi \quad (129)$$

$$\Phi(-\sigma^2) = -g\Phi k' \tanh(k'h) + \frac{\gamma}{\rho} \Phi k' \tanh(k'h) (-k'^2) \quad (130)$$

I.3.4 Résultats

On obtient alors la relation de dispersion des ondes de surface :

$$\sigma^2 = \left(gk' + \frac{\gamma}{\rho} k'^3 \right) \tanh(k'h) \quad (131)$$

Et le champ de vitesse :

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \partial_x \phi = \sigma a \frac{\cosh(k'(z+h))}{\sinh(k'h)} e^{i(k'x - \sigma t)} \quad (132)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = \partial_z \phi = -i\sigma a \frac{\sinh(k'(z+h))}{\sinh(k'h)} e^{i(k'x - \sigma t)} \quad (133)$$

$$= \sigma a \frac{\sinh(k'(z+h))}{\sinh(k'h)} e^{i(k'x - \sigma t - \pi/2)} \quad (134)$$

I.4 Métrique des ondes de surface

Reprenons l'équation (129), si on considère que $\partial_x \Phi = ik' \Phi$ et $\partial_z \Phi = k' \tanh(k'h) = -i\partial_x \tanh(ih\partial_x)$, on peut écrire l'équation d'onde :

$$\left[\partial_{t^2} - ig\partial_x \tanh(-ih\partial_x) + \frac{\gamma}{\rho} i\partial_{x^3} \tanh(-ih\partial_x) \right] \Phi = 0 \quad (135)$$

Considérons maintenant que les ondes se propagent sur un courant de vitesse U constante et que l'on se trouve dans le référentiel du courant (x, t) . On peut écrire la transformation Galiléenne :

$$x = X - UT \quad t = T \quad (136)$$

où x et t sont les coordonnées dans le référentiel du courant, X et T dans le référentiel absolu.

On a alors

$$\Phi = -i \frac{\sigma}{k'} a \frac{\cosh(k'(z+h))}{\sinh(k'h)} e^{i(k'(X-UT)-\sigma T)} \quad (137)$$

d'où

$$\begin{aligned} \partial_X \Phi &= ik' \phi = \partial_x \Phi \\ \partial_T \Phi &= (-Uik' - i\sigma)\Phi = (-U\partial_x + \partial_t)\Phi \implies \partial_t \Phi = (\partial_T + U\partial_X)\Phi \end{aligned} \quad (138)$$

L'équation d'onde s'écrit alors :

$$\left[(\partial_T + U\partial_X)^2 - ig\partial_X \tanh(-ih\partial_X) + \frac{\gamma}{\rho} i\partial_{X^3} \tanh(-ih\partial_X) \right] \Phi = 0 \quad (139)$$

On notera que dans le cas où la vitesse du courant n'est pas constante mais faiblement variable [Rousseaux, 2013, Coutant et Parentani, 2014], la fonction d'onde s'écrit :

$$\left[(\partial_T + \partial_X U)(\partial_T + U\partial_X) - ig\partial_X \tanh(-ih\partial_X) + \frac{\gamma}{\rho} i\partial_{X^3} \tanh(-ih\partial_X) \right] \Phi = 0 \quad (140)$$

On remarque qu'en posant la transformation :

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega - Uk \\ k' &= k \end{aligned} \quad (141)$$

où le couple (σ, k') indiquent la fréquence et le nombre d'onde dans le référentiel du courant et (ω, k) dans le référentiel du laboratoire [Rousseaux, 2013], le potentiel des vitesses peut s'écrire :

$$\Phi = -i \frac{\sigma}{k} a \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)} e^{i(kX-\omega T)} \quad (142)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_X \Phi &= ik\Phi \implies i\partial_X \Phi = -k\Phi \\ \partial_T \Phi &= -i\omega\Phi \implies i\partial_T \Phi = \omega\Phi \end{aligned} \quad (143)$$

En injectant ces formules dans l'équation d'onde (139), on retombe sur la relation de dispersion dans le référentiel absolu :

$$(\omega - Uk)^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh) \quad (144)$$

En se plaçant dans le cas où la longueur d'onde est grande devant la hauteur d'eau ($kh = ih\partial_X \rightarrow 0$ soit $\tanh(ih\partial_X) \rightarrow ih\partial_X$) et en négligeant les effets de tension de surface $\frac{\gamma}{\rho} k^2 \ll 1$, l'équation d'onde (où U est constant) devient :

$$\left[(\partial_T + U\partial_X)^2 - gh\partial_{X^2} \right] \Phi = 0 \quad (145)$$

que l'on peut écrire sous forme d'équation d'onde généralisée (avec $\mu, \nu = X, T$) :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0 \quad (146)$$

à condition d'identifier comme matrice inverse

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & U \\ U & (U^2 - gh) \end{bmatrix} \quad (147)$$

et $\mathbf{g} = \det(g^{\mu\nu}) = -gh$

et donc la métrique :

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{gh} \begin{bmatrix} (gh - U^2) & U \\ U & -1 \end{bmatrix} \quad (148)$$

On retrouve encore une fois une métrique (dans l'hypothèse d'onde longue) identique à celle de la propagation de la lumière en espace temps courbé (équation 16) en posant $c = \sqrt{gh}$ (la vitesse des ondes longues) à un facteur conforme près $(gh)^{-1} = c^{-2}$. Ce facteur conforme ne modifie pas la physique près de l'horizon car il reste fini et non nul lorsque $U^2 = gh$.

I.5 Étude de la relation de dispersion

I.5.1 Relation de dispersion sans courant

On peut réécrire la relation de dispersion (sans courant) en introduisant la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 2,7 \text{ mm}$:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh) = \left(1 + l_c^2 k^2 \right) gk \tanh(kh) \quad (149)$$

Dans les expériences qui vont suivre, la hauteur d'eau sera toujours au moins dix fois plus grande que la longueur capillaire, autrement dit $kh \gg l_c k$. De cette relation de dispersion découlent différents régimes selon l'ordre de grandeur du nombre d'onde k :

- Si la longueur d'onde est très grande devant la hauteur d'eau, on aura alors $l_c k \ll kh \ll 1$ soit $\tanh(kh) \rightarrow kh$, la relation de dispersion se réduira alors à $\omega^2 = ghk^2$. On se trouvera alors en régime d'onde longue aussi appelé régime en eau dite « peu profonde » (voir tableau I.1 seconde colonne).
- Si la longueur d'onde est très courte devant la hauteur d'eau mais toujours grande devant la longueur capillaire, on aura alors $l_c k \ll 1 \ll kh$ soit $\tanh(kh) \rightarrow 1$, la hauteur d'eau disparaît alors de la relation de dispersion avec $\omega^2 = gk$. On se trouvera alors en régime d'onde courte aussi appelé régime en « eau profonde » (voir tableau I.1 troisième colonne).
- Si la longueur d'onde est très courte devant la longueur capillaire, on aura alors $1 \ll l_c k \ll kh$, la relation de dispersion donne $\omega^2 = gl_c k^3$. On se trouvera alors en régime d'onde capillaire (voir tableau I.1 quatrième colonne).

La relation de dispersion générale est présentée figure 1.14 à différentes échelles de longueurs d'onde pour mettre en évidence les trois différents régimes.

On peut aussi discerner deux vitesses d'onde, la vitesse de phase $c_\phi = \frac{\omega}{k}$ qui représente la vitesse des crêtes et des creux et la vitesse de groupe $c_g = \partial_t x = \partial_k \omega$ qui indique la vitesse d'avancée de l'enveloppe d'un paquet d'onde. Dans le cas d'un régime non-dispersif, ces deux vitesses sont égales $c_\phi = c_g = c$ (cela sera le cas pour les ondes longues

avec $c = \sqrt{gh}$, alors que dans des régimes dispersifs, ces vitesses peuvent être différentes. Lorsqu'on observera la propagation d'un paquet d'onde, ses crêtes peuvent se déplacer à une vitesse différente de celle son enveloppe voire opposée.

	onde longue	onde courte	onde capillaire
hauteur d'eau	$kh \ll 1$	$kh \gg 1$	$kh \gg 1$
longueur capillaire	$l_c k \ll 1$	$l_c k \ll 1$	$l_c k \gg 1$
relation de dispersion	$\omega^2 = ghk^2$	$\omega^2 = gk$	$\omega^2 = gl_c k^3$
vitesse de groupe $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$	$c_g = \sqrt{gh}$	$c_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$	$c_g = \frac{3}{2} l_c \sqrt{gk}$
vitesse de phase $c_\phi = \frac{\omega}{k}$	$c_\phi = \sqrt{gh}$	$c_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}}$	$c_\phi = l_c \sqrt{gk}$

Table I.1 – Présentation des différents régimes en prenant l'hypothèse que la hauteur est toujours fortement supérieur à la longueur capillaire

Si on approxime la tangente hyperbolique par une série de Taylor au troisième ordre (en considérant $kh \ll 1$), on obtient :

$$\omega^2 \simeq ghk^2 + \left(-\frac{gh^3}{3} + gl_c^2 h\right)k^4 = c^2 k^2 + c^2(-\xi_h^2 + \xi_c^2)k^4 \quad (150)$$

avec la vitesse des ondes longues $c = \sqrt{gh}$, la correction due à la hauteur d'eau $\xi_h^2 = \frac{h^2}{3}$ et celle due à la tension de surface $\xi_c^2 = l_c^2$. La hauteur d'eau apporte une correction dite « sub-luminale » en $-\xi_h k^4$ alors que la tension de surface donne une correction dite « superluminale » en $+\xi_c k^4$ à la relation de dispersion non dispersive. Ces deux corrections dispersives sont illustrées sur la figure 1.14.

Lorsqu'on écrit la relation de dispersion sous la forme :

$$\omega = \pm \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3\right) \tanh(kh)} \quad (151)$$

on remarque qu'elle donne deux racine, l'une positive et l'autre négative, mais les fréquences négatives n'ayant pas de sens, on ne s'intéresse généralement qu'à la solution positive.

I.5.2 Relation de dispersion en présence de courant

La relation de dispersion en présence de courant s'écrit :

$$\omega - Uk = \sigma = \pm \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3\right) \tanh(kh)} \quad (152)$$

on rappelle que σ est la fréquence dans le référentiel du courant que l'on appelle aussi fréquence relative.

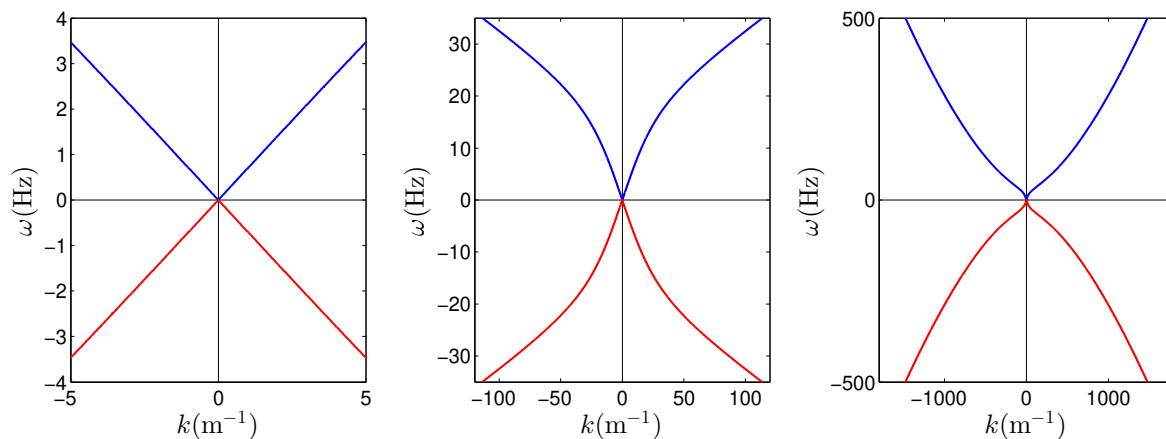


Figure 1.14 – Relation de dispersion des ondes de surface avec une hauteur d'eau $h = 0.05$ m. Les trois graphiques correspondent à la même relation de dispersion à différentes échelles mettant en évidence les différents régimes : onde longue (gauche), onde courte (centre), onde capillaire (droite). Les courbes bleues indiquent les solutions correspondant à la racine positive, les rouges celles correspondant à la racine négatives.

Si dans les cas sans courant, on ne s'intéresse qu'à la racine positive, en présence de courant, l'effet Doppler permet d'obtenir des fréquences relatives négatives ($\sigma < 0$) tout en conservant une fréquence dans le référentiel du laboratoire positive ($\omega > 0$). On doit donc conserver les deux solutions correspondant à la racine positive et à la racine négative (voir figure 1.15).

En considérant donc que $\omega > 0$ et que le nombre d'onde est positif $k > 0$, pour que la fréquence relative soit négative $\sigma = c_\phi k < 0$ il faut que la vitesse de phase soit négative $c_\phi < 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega - Uk \\ -|c_\phi|k &= \omega - Uk \\ (U - |c_\phi|)k &= \omega \\ U - |c_\phi| &> 0 \quad \text{car } \omega > 0 \text{ et } k > 0 \\ \frac{U}{|c_\phi|} - 1 &> 0 \\ F_d(k) = \frac{U}{|c_\phi(k)|} &> 1 \end{aligned}$$

avec F_d le nombre de Froude dispersif basé sur la vitesse de phase.

Dans les régime non-dispersif, on a $|c_\phi(k)| = c = \sqrt{gh}$ (la vitesse des ondes longues) alors $F_d = U/\sqrt{gh} = F$ le nombre de Froude non-dispersif. Dans ce cas, cela signifie que l'écoulement doit être super-critique pour observer une branche de fréquence relative négative dans le référentiel du laboratoire (voir figure 1.15 gauche). Pour des régimes dispersifs (figure 1.15 centre et droite), cette condition n'est pas nécessaire car la vitesse de phase des ondes courtes est inférieure à celle des ondes longues. On remarque alors qu'une partie de la branche de fréquence relative négative se retrouve aux niveaux des fréquences positives dans le référentiel du laboratoire même si l'écoulement est sous-critique ($F < 1$).

I.5.3 Ondulation stationnaire

Dans les cas dispersifs et en présence de courant, on remarque que des solutions de fréquence nulle $\omega = 0$ (autrement dit stationnaire) apparaissent pour des nombres d'onde

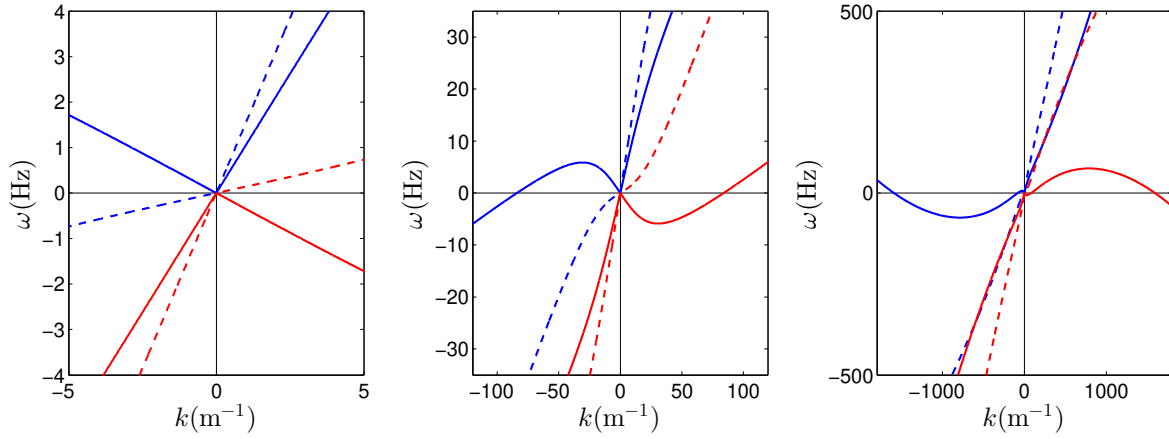


Figure 1.15 – Relation de dispersion des ondes de surface avec une hauteur d'eau $h = 0.05$ m en présence de courant. Les trois graphiques correspondent à la même relation de dispersion à différentes échelles mettant en évidence les différents régimes : eau peu profonde (gauche), eau profonde (centre), capillaire (droite). Les courbes en continu correspondent à un nombre de Froude $F = 0,5 (U = 0,35 \text{ m/s})$, celles en tirets à un nombre de Froude $F = 1,2 (U = 0,85 \text{ m/s})$. Le bleu indique les branches de fréquences relative positive, le rouge pour les négatives.

différents de zéro [Unruh, 2008, Carusotto et Rousseaux, 2013] comme le montrent les figures 1.15 (centre et droite). Cela signifie qu'en plus de la solution $\omega = 0$ et $k = 0$ qui dans l'espace réel se traduirait par une surface plane, se superpose une ondulation stationnaire composée d'une longueur d'onde gravitaire et d'une capillaire. On remarque alors que, bien que ces solutions possèdent une vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ nulle, leurs vitesses de groupe $v_g = \partial\omega/\partial k$ ne le sont pas. La solution gravitaire de l'ondulation stationnaire possède une vitesse de groupe positive (de même signe que le courant) alors que la solution capillaire a une vitesse de groupe négative.

Même si l'ondulation stationnaire existe dans toute région où l'écoulement permet une solution de fréquence nulle et de nombre d'onde non nul, elle est « nourrie » en amplitude par les changements brusques de vitesse et de hauteur d'eau (les deux étant toujours liées par le débit) ainsi que par les fluctuations de surface libre [Coutant et Parentani, 2014]. Si on ne considère que la solution gravitaire, l'ondulation se trouvera en aval du changement brusque de l'écoulement (car de vitesse de groupe de même signe que celle du courant) et sera alimentée en continu, tout comme le sillage se trouvant derrière un bateau.

I.6 Solutions et horizons

Lorsque l'on se place à une fréquence incidente dans le référentiel du laboratoire (ω), on voit apparaître jusqu'à six solutions quand l'écoulement est sous-critique $F < 1$ (dans l'espace de Fourier : figure 1.16 gauche, dans l'espace réel : figure 1.16 droite) :

1. Solutions d'ondes longues dites « hydrodynamiques » déjà présentes sans courant :
 - une se propageant à contre-courant que l'on nommera ϕ_ω^{\leftarrow} localisée en k_ω^{\leftarrow} dans l'espace de Fourier, la flèche indique le sens de propagation (pour rappel la propagation du courant a été considérée arbitrairement de gauche à droite),
 - une se propageant à co-courant que l'on nommera $\phi_\omega^{\rightarrow}$ localisée en k_ω^{\rightarrow} ,
2. Solutions d'ondes courtes dites « dispersives » se propageant à co-courant, dues à la première longueur dispersive h , la hauteur d'eau :
 - une de fréquence relative positive que l'on nommera $\phi_\omega^{h,\rightarrow}$ localisée en $k_\omega^{h,\rightarrow}$,

- une de fréquence relative négative que l'on nommera $(\phi_{-\omega}^{h,\rightarrow})^*$ localisée en $-k_{-\omega}^{h,\rightarrow}$ étant la solution conjuguée de $\phi_{-\omega}^{h,\rightarrow}$ localisée en $k_{-\omega}^{h,\rightarrow}$,
- 3. Solutions d'ondes capillaires dites « ultra-dispersives » se propageant à contre-courant, dues à la seconde longueur dispersive l_c , la longueur capillaire :
 - une de fréquence relative positive que l'on nommera $\phi_{\omega}^{lc,\leftarrow}$ localisée en $k_{\omega}^{lc,\leftarrow}$,
 - une de fréquence relative négative que l'on nommera $(\phi_{-\omega}^{lc,\leftarrow})^*$ localisée en $-k_{-\omega}^{lc,\leftarrow}$,

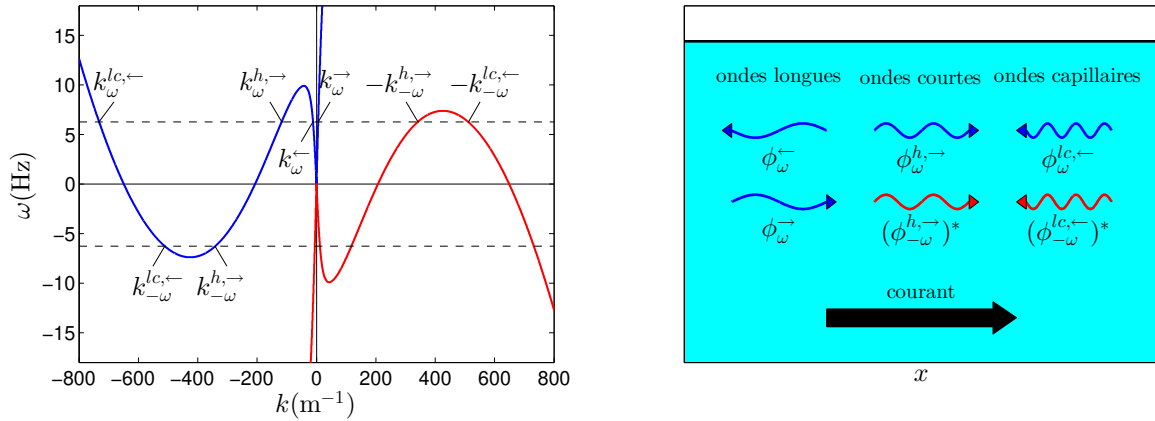


Figure 1.16 – Gauche : Relation de dispersion exhibant les six solutions possibles à une fréquence fixée $\omega_I = 6,28$ Hz indiquée par la droite en tirets noirs ($h = 0,08$ m et $U = 0,25$ m/s). Droite : représentation schématique des six solutions dans l'espace réel, les flèches de couleur indiquent le sens de propagation des solutions en terme de vitesse de groupe $\partial_k \omega$, leurs couleurs correspondent à leurs fréquences relatives ($\sigma > 0$ bleu, $\sigma < 0$ rouge). La flèche noire indique le sens de propagation du courant.

Dans le cas d'un écoulement super-critique $F > 1$ (figures 1.17), on ne considérera que les deux solutions : $\phi_{\omega}^{\rightarrow}$ et $(\phi_{-\omega}^{\rightarrow})^*$, cette seconde solution, même si pouvant être une onde longue ou courte, reste unique (ou inexistante) pour toute fréquence. Les deux solutions capillaires seront aussi présentes mais pour des nombres d'onde très grands pour une profondeur d'eau intermédiaire (figure 1.17 gauche). Lorsque la profondeur d'eau devient très faible ($h \sim l_c$, figure 1.17 droite), elles apparaissent pour des nombres d'onde plus faibles.

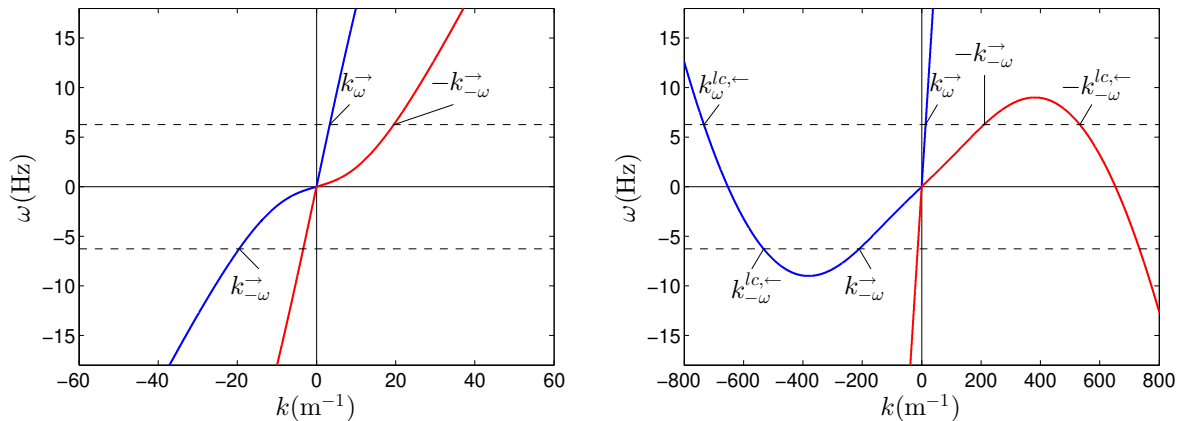


Figure 1.17 – Relation de dispersion super-critique $F = 1,13$ exhibant les solutions possibles à une fréquence fixée $\omega_I = 6,28$ Hz indiquée par la droite en tirets noirs. À gauche : $h = 0,08$ m et $U = 1$ m/s. À droite : $h = 0,005$ m et $U = 0,25$ m/s.

Si on fait varier la vitesse du fluide, on observe alors que des couples de solutions peuvent fusionner lorsque un extremum de la relation de dispersion ($\partial\omega/\partial k = 0$) se trouve au niveau de la fréquence incidente ω_I [Nardin *et al.*, 2009]. La figure 1.18 (gauche) montre que le couple de solution $(\phi_\omega^{\leftarrow}, \phi_\omega^{h,\rightarrow})$ finit par fusionner lorsque la vitesse du courant augmente jusqu'à une certaine vitesse de blocage, la position spatiale où apparaîtra cette vitesse sera alors appelée point de blocage gravitaire. Il en sera de même pour les couples $(\phi_\omega^{h,\rightarrow}, \phi_\omega^{lc,\leftarrow})$ et $((\phi_{-\omega}^{h,\rightarrow})^*, (\phi_{-\omega}^{lc,\leftarrow})^*)$ mais pour une vitesse de courant décroissante, dans ces deux cas on sera en présence de points de blocage capillaires. Les relations de dispersion pour lesquelles apparaissent ces points de blocage sont représentées figure 1.18 (droite).

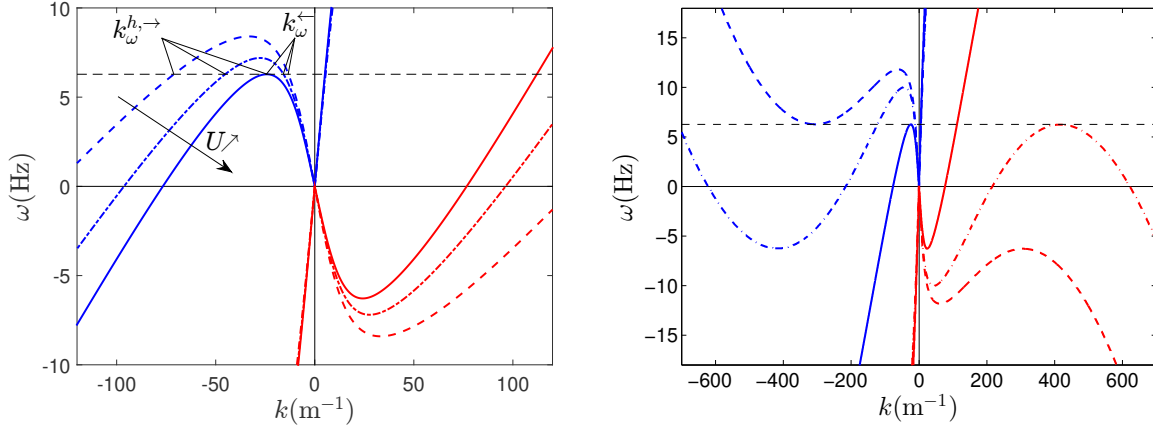


Figure 1.18 – Gauche : Relation de dispersion montrant la fusion du couple de solution $(\phi_\omega^{\leftarrow}, \phi_\omega^{h,\rightarrow})$ lorsque la vitesse du courant augmente avec $U = 0,29$ m/s (tirets), $U = 0,33$ m/s (point-tirets) et $U = 0,365$ m/s (continu). Droite : relation de dispersion aux niveaux du point de blocage gravitaire avec $U = 0,3654$ m/s (continu), du point de blocage capillaire positif $U = 0,213$ m/s (tirets) et du point de blocage capillaire négatif $U = 0,247$ m/s (point-tirets). La hauteur d'eau est toujours fixée à $h = 0,08$ m et la fréquence incidente à $\omega_I = 6,28$ Hz représentée par la droite horizontale en tirets.

Cela veut dire que lorsqu'une solution incidente $I(\phi_\omega^{\leftarrow})$ voit la vitesse du courant augmenter en se propageant à contre-courant, elle se convertie en solution d'onde courte que l'on nommera bleuie $B(\phi_\omega^{h,\rightarrow})$ au niveau du point de blocage gravitaire, la solution bleuie se propagera elle en sens inverse (co-courant) dû au signe de sa vitesse de groupe. Cette conversion est schématisée figure 1.19 (gauche). Ce point de blocage sera alors décrit comme l'analogue de l'horizon d'un trou blanc car aucune onde longue ne peut pénétrer à l'intérieur d'une région interdite où la vitesse du courant est supérieure à sa vitesse de groupe, tout comme aucune onde lumineuse ne devrait pénétrer à l'intérieur d'un trou blanc astrophysique au delà de son horizon où la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de l'onde lumineuse. Mais dans ce système la vitesse de groupe des ondes dépend de la fréquence (ainsi que de la hauteur d'eau) à cause de la dispersion, la position en vitesse (et donc spatiale) du point de blocage sera alors aussi dépendante de la fréquence de l'onde contrairement à un système relativiste (non-dispersif) où la position de l'horizon sera la même pour n'importe quelle fréquence. Par la suite et dans un souci de simplification, nous parlerons d'horizon blanc, le terme « analogue » sera alors implicite, mais il est important de préciser que nous ne parlons pas d'identité mais bien d'analogie. Il en sera de même pour les autres points de blocage.

Toujours sur la figure 1.19 (gauche) sont représentés le point de blocage capillaire positif concernant la conversion des ondes bleuies $B(\phi_\omega^{h,\rightarrow})$ vers les ondes capillaires bleuies $cB(\phi_\omega^{lc,\leftarrow})$, que l'on nommera horizon bleu, ainsi que le point de blocage capillaire négatif,

qui sera nommé horizon négatif-blanc (car proche de l'horizon blanc).

Inversement, sur la figure 1.19 (droite), aucune onde longue ne peut être émise à contre-courant au delà du point de blocage gravitaire où la vitesse du courant est supérieure à celle des ondes. Ce point de blocage sera donc nommé horizon noir pour son analogie avec l'horizon des événements d'un trou noir. Dans cette configuration, les points de blocage capillaires positif et négatif seront nommés, respectivement, horizon rouge (symétrique temporel de l'horizon bleu) et horizon négatif-noir (symétrique temporel de l'horizon négatif-blanc).

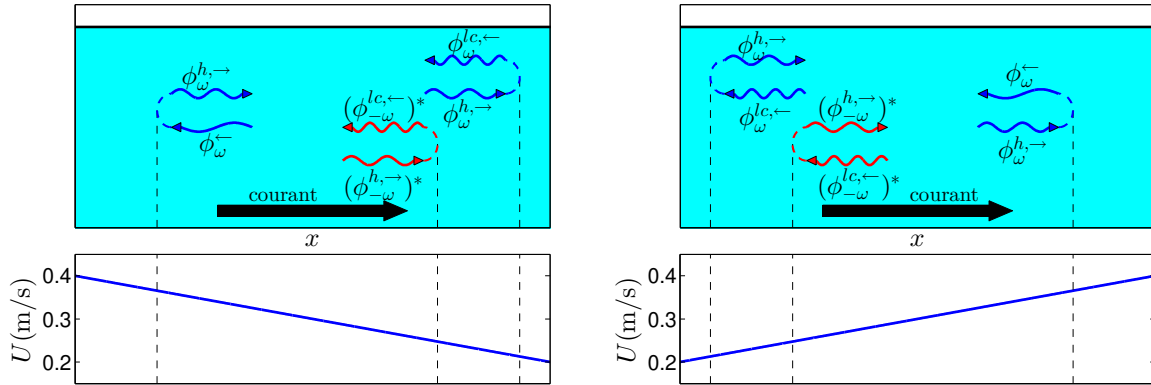


Figure 1.19 – Haut : Représentation schématique des différentes conversions possibles. Bas : variation de la vitesse de courant selon x . Gauche : dans le cas où la vitesse du courant décroît selon \vec{x} . Droite : dans le cas où la vitesse du courant croît selon \vec{x} . Les droites verticales en tirets indiquent la position des points de blocage. Avec toujours $h = 0,08$ m et $\omega_I = 6,28$ Hz.

Pour toutes ces conversions (où l'on reste sur la même branche de la relation de dispersion), on se place dans l'hypothèse WKBJ (en l'honneur de Léon Brillouin [Brillouin, 1926], Hendrik Anthony Kramers [Kramers, 1926], Gregor Wentzel [Wentzel, 1926] et Harold Jeffreys [Jeffreys, 1923]) qui impose que les variations du régime de l'écoulement selon la direction de propagation des ondes doivent être faibles devant la longueur d'onde $\frac{U}{\partial_x U} \gg \lambda$. Si on considère que $c \approx U$ et $\omega \sim ck$, on peut alors réécrire cette condition sous la forme $\frac{\omega}{\partial_x U} \gg 1$ (nombre d'Unruh [Rousseaux, 2013]).

Lorsque l'on ne se trouve pas dans cette hypothèse au niveau du point de blocage, autrement dit que $\partial_x U$ devient du même ordre de grandeur que ω_I , des conversions (dites non-WKBJ) peuvent alors se produire. Par exemple, lors de la conversion de l'onde incidente I vers l'onde bleue B au point de blocage gravitaire (figure 1.20) peuvent apparaître des conversions vers toutes les autres solutions de la relation de dispersion ($N : (\phi_{-\omega}^{h,\rightarrow})^*$, $R : \phi_{\omega}^{\rightarrow}$, ainsi que vers les solutions capillaires bien que non-représentées). Ces conversions non-WKBJ sont l'ingrédient principal de l'effet Hawking classique.

I.7 Diagramme de phase (U, T)

On peut maintenant étudier à quelles vitesses apparaissent les points de blocage en fonction de la période des ondes étudiées, ces vitesses (correspondant aux points de blocage gravitaires et capillaires) sont représentées figures 1.21 et 1.22 gauche. La construction de ce diagramme de phase est décrite dans [Rousseaux *et al.*, 2010]. Certaines asymptotes sont alors mises en évidence comme, par exemple, la vitesse de blocage des ondes longues $U_h = \sqrt{gh}$ qui découle d'un nombre de Froude égal à 1 ou bien la vitesse

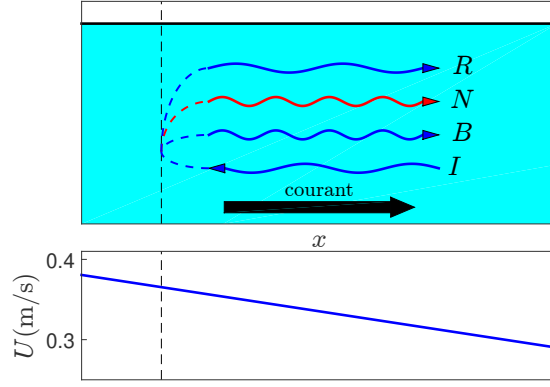


Figure 1.20 – Haut : Représentation schématique des différentes conversions WBKJ et non-WBKJ d'une onde incidente dans le cas où la vitesse du courant décroît selon \vec{x} . Avec toujours $h = 0,08$ m et $\omega_I = 6,28$ Hz.

$U_\gamma = \sqrt{2}(\gamma g / \rho)^{1/4} = 0,23$ m/s correspondant aux points de blocage capillaires quand $T \rightarrow \infty$. Ces deux dernières informent sur les caractéristiques de l'ondulation stationnaire, comme le montre la figure 1.21 (droite), dans le cas où la vitesse est inférieure à U_γ l'ondulation stationnaire n'admet pas de solutions pour $k \neq 0$ (autrement dit la surface libre est plane), pour une vitesse entre U_γ et U_h l'ondulation est gravito-capillaire et pour $U > U_h$ elle est uniquement capillaire.

Lorsque l'on se focalise sur les petites périodes (figure 1.22), on voit apparaître deux points critiques. (U_c, T_c) est le point où les points de blocage gravitaire et capillaire positif fusionnent puis disparaissent pour $T < T_c$, ses valeurs ($U_c = 0,178$ m/s et $T_c = 0,425$ s, pour une interface eau/air) peuvent être calculées au niveau du point d'inflexion dans la relation de dispersion où $\partial_k \omega = \partial_{k^2} \omega = 0$ (figure 1.22 gauche). Le point $(U_b, T_b) = (0,255$ m/s, $0,647$ s) est celui où les points de blocage gravitaire et capillaire négatif surviennent à la même vitesse (soit à la même position spatiale).

Ce diagramme de phase est un outil très utile car, sur un régime d'écoulement où la gamme de vitesse $U \in [U_{\min} : U_{\max}]$ est connue, on pourra directement identifier les fréquences pour lesquelles apparaîtra un point de blocage gravitaire, capillaire positif ou capillaire négatif. Il sera possible aussi de savoir les types d'ondulation stationnaire présents sur le régime.

Par exemple (voir figure 1.23), pour une gamme de vitesse $U \in [0,4 : 0,8]$ m/s (la hauteur étant toujours égale à $0,08$ m), le point de blocage gravitaire sera le seul présent et pour des périodes $T \in [2\pi/\omega_{\max} : 2\pi/\omega_{\min}] = [1,15 : 19,27]$ s. ω_{\min} représente la fréquence pour laquelle on observe un point de blocage gravitaire lorsque $U = U_{\max}$ et ω_{\max} pour $U = U_{\min}$. La gamme de fréquence étant comprise dans $[U_\gamma : U_h]$, une ondulation stationnaire gravito-capillaire sera alors présente sur tout le régime d'écoulement.

La figure 1.24 indique un autre exemple où l'on observera un point de blocage gravitaire sur les périodes appartenant à $[T_c : 2\pi/\omega_{\min}] = [0,425 : 0,943]$ s, capillaire positif pour $T > T_c$ et capillaire négatif pour $T > 0,093$ s. Dans les zones de l'écoulement où $U < U_\gamma$ il n'y aura pas d'ondulation stationnaire, et sur le reste on observera une ondulation gravito-capillaire.

On peut aussi utiliser le diagramme de phase de manière inverse, au lieu de vouloir connaître quels points de blocage seront présents ou non sur un régime d'écoulement déjà établi, on peut définir ce régime en fonction des phénomènes que l'on souhaiterait

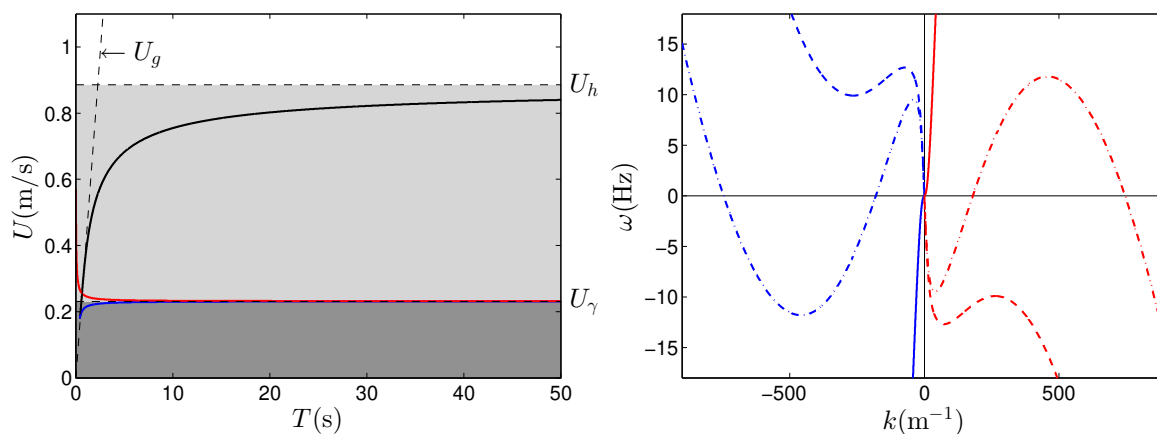


Figure 1.21 – Gauche : diagramme de phase (U, T) pour un régime où la hauteur d'eau est de $h=0,08$ m et la vitesse du fluide varie entre $U=0$ m/s et $U=1,1$ m/s. Les courbes indiquent la position des horizons noir et blanc (en noir), des horizons bleu et rouge (en bleu) et des horizons négatif-blanc et négatif-noir (en rouge). Les droites pointillés représentent les asymptotes des horizons noir et blanc en faible hauteur d'eau (ondes longues, $U_h=\sqrt{gh}$) et en forte hauteur d'eau (ondes courtes, $U_g=\frac{gT}{8\pi}$) et l'asymptote des horizons capillaires à grande période $U_\gamma=\sqrt{2}(\gamma g/\rho)^{1/4}$. La zone en gris foncé indique la gamme de vitesse où le mode zéro n'admet pas de solution pour $k \neq 0$, la zone en gris clair où le mode zéro est gravito-capillaire, et la zone blanche où le mode zéro est uniquement capillaire. Droite : relations de dispersion pour une vitesse inférieure à U_γ (zone en gris foncé, $U=0,2$ m/s, en tirets), pour une vitesse supérieure à U_γ mais avec un nombre de Froude inférieur à 1 (zone en gris clair, $U=0,26$ m/s, en point-tirets), pour une vitesse où le nombre de Froude est supérieur à 1 (zone en blanc, $U=1,05$ m/s, en continu).

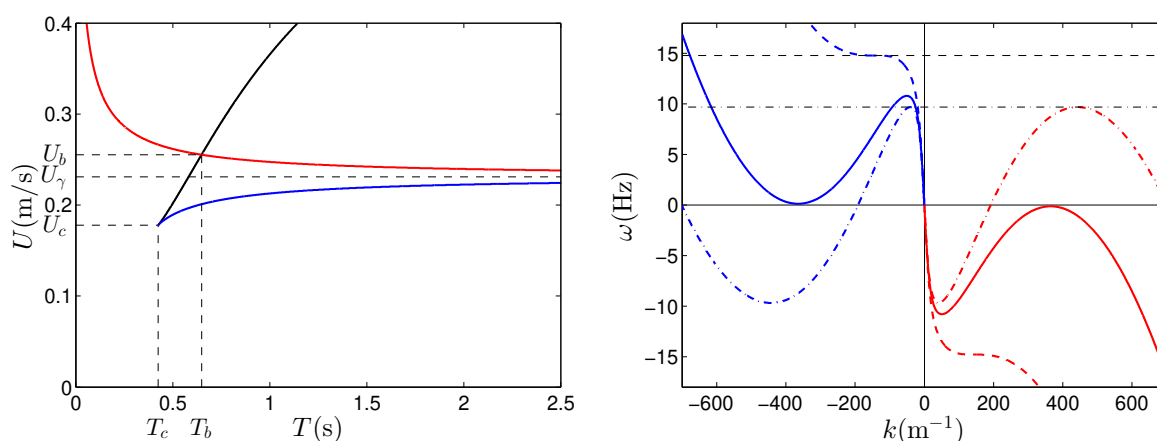


Figure 1.22 – Gauche : diagramme de phase au niveau des périodes faibles permettant de visualiser les coordonnées critiques (U_c, T_c) et (U_b, T_b) . Droite : relation de dispersion pour les vitesses critiques U_γ (continu), U_c (tirets) et U_b (point-tirets). Les droites horizontales indiquent les fréquences critiques $2\pi/T_c$ (tirets) et $2\pi/T_b$ (point-tirets).

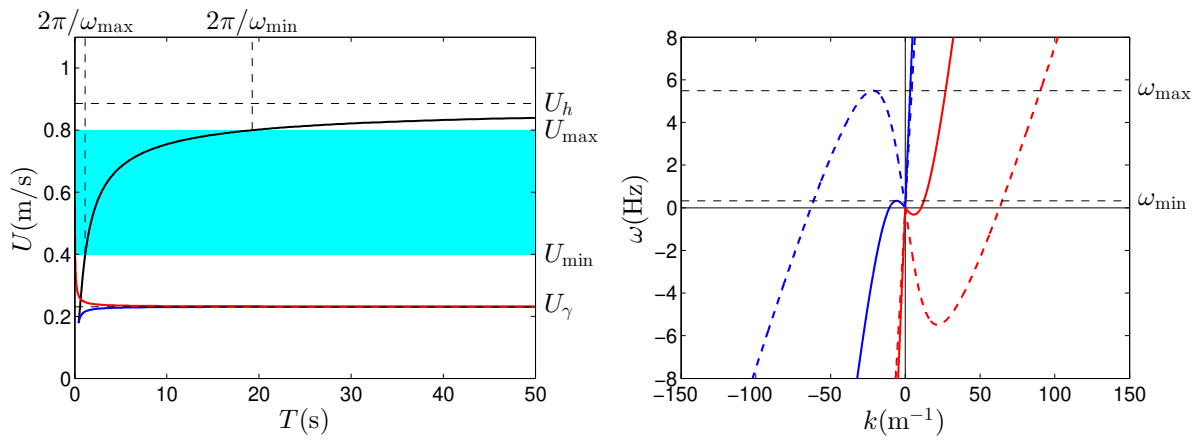


Figure 1.23 – Gauche : diagramme de phase pour une gamme de vitesse $U \in [0, 4 : 0, 8]$ m/s, $h = 0,08$ m. Droite : relations de dispersion pour une vitesse de courant U_{\max} (continu) et U_{\min} (tirets).

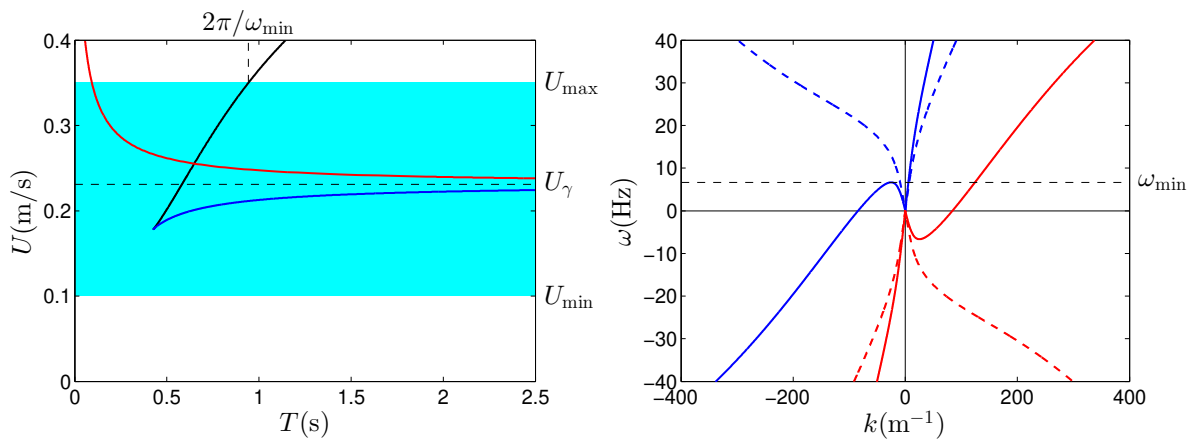


Figure 1.24 – Gauche : diagramme de phase pour une gamme de vitesse $U \in [0, 1 : 0, 35]$ m/s, $h = 0,08$ m. Droite : relations de dispersion pour une vitesse de courant U_{\max} (continu) et U_{\min} (tirets).

observer.

I.8 Cartes de corrélation

Dans le cas des ondes de surface, on travaille la plupart du temps avec des ondes continues et non des paquets d'ondes, des corrélations dans l'espace réel seront alors peu utiles car les ondes ne sont pas localisées spatialement au cours du temps comme le serait un paquet d'onde. Par contre, dans l'espace spectral, une solution (dans une région où le régime est constant, hauteur d'eau et vitesse du fluide) est localisée au niveau d'une fréquence et d'un nombre d'onde. L'étude de corrélation dans l'espace spectral est alors beaucoup plus judicieuse.

En considérant une région où le régime est constant, autrement dit où la relation de dispersion est unique, on peut alors tracer dans un plan (k, k') l'évolution d'une solution $k_i(\omega)$ en fonction d'une autre solution $k_j(\omega)$ lorsque la fréquence ω varie. L'ensemble de ces couples de solutions formera alors une carte dite de corrélation.

Nous commençons par présenter une carte d'auto-corrélation spatiale (figure 1.25), autrement dit réalisée sur une même fenêtre de visualisation. On utilise alors la même relation de dispersion présentée figure 1.15 car elle possède l'ensemble des six solutions possibles. Lors de l'étude de résultats expérimentaux, la mesure d'une fonction de corrélation devrait faire apparaître des pics sur la carte de corrélation aux niveaux des segments de courbes hors de la diagonale si les ondes observées sont corrélées entre elles (et solutions de la relation de dispersion).

La figure 1.26 indique la carte d'inter-corrélation spatiale entre une fenêtre où l'écoulement est sous-critique et une seconde où l'écoulement est super-critique.

Des cartes de corrélations dans l'espace spectral ayant déjà été réalisées pour la relation de dispersion des phonons dans un condensat de Bose-Einstein [Larré, 2013, Boiron *et al.*, 2015], on se place cette fois-ci dans le cas où la hauteur d'eau est extrêmement faible ($h = 0,005 \text{ m} \sim l_c$, figure 1.27). Ainsi les effets de tension de surface deviennent prédominant et la relation de dispersion est alors très similaire (du point de vue qualitatif) à celle dans les condensats de Bose-Einstein (toutes deux possédant une correction superluminale par rapport au cas non-dispersif). On retrouve alors une carte d'inter-corrélation (entre un régime sous-critique et un régime super-critique) similaire à celle obtenue par [Larré, 2013] (figure 1.16).

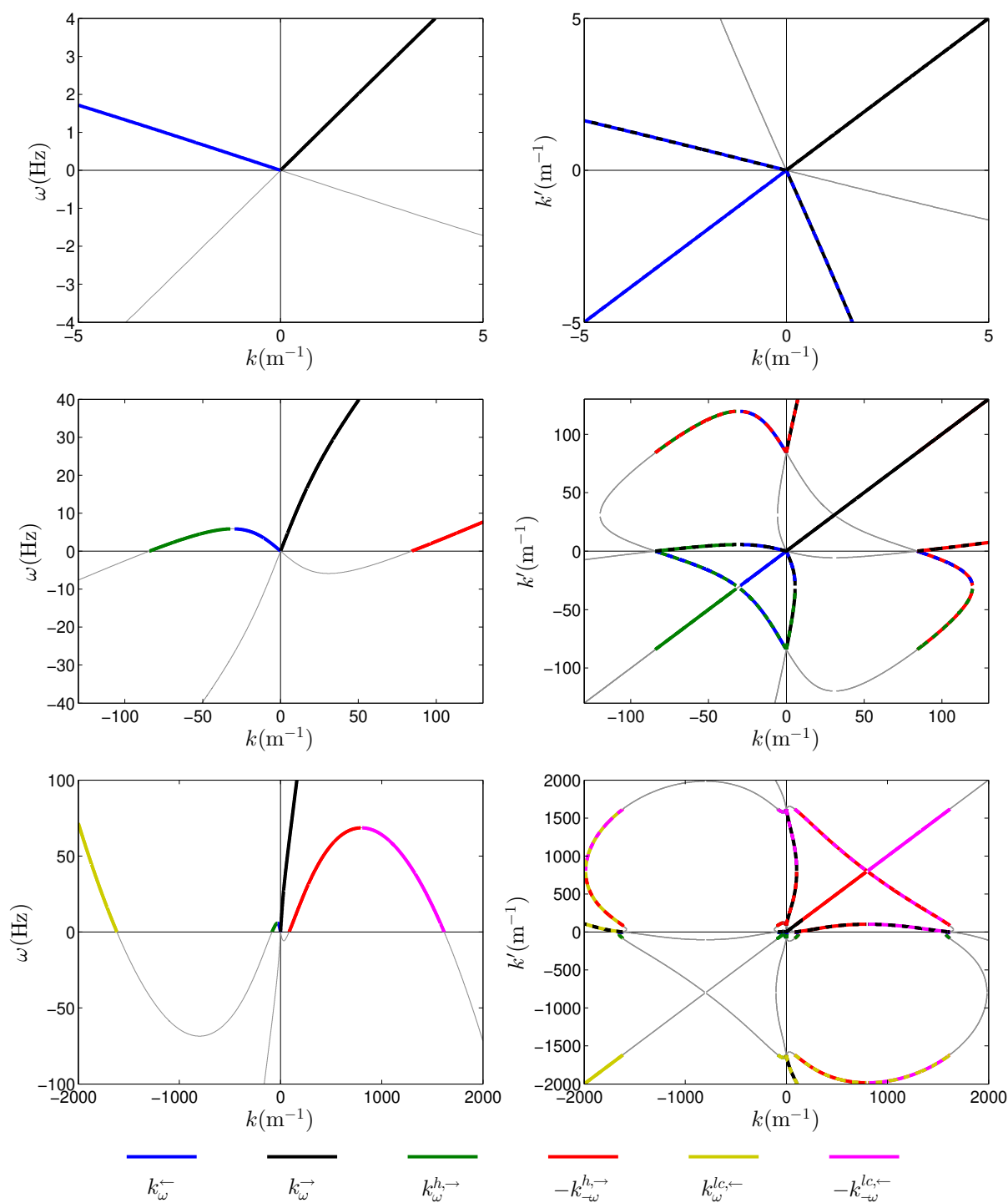


Figure 1.25 – Gauche : relation de dispersion pour $h = 0,05$ m et $U = 0,35$ m/s soit un nombre de Froude $F = 0,5$. Droite : Carte d'auto-corrélation, les courbes unie indiquent les corrélations $\{k, k'\}$ pour une même solution $k = k'$, les courbes en deux couleurs indiquent les corrélations $\{k, k'\}$ entre deux solutions différentes $k \neq k'$, par exemple, sur le graphique en haut, $(k_{\omega}^{-}, k_{\omega}^{+})$ et son inverse $(k_{\omega}^{+}, k_{\omega}^{-})$ sont représentés en bleu et noir, les courbes fines en gris correspondent à $\omega < 0$ et sont obtenues à partir des ω positifs mais en considérant la transformation $(k, k') \rightarrow (-k, -k')$ car dans la relation de dispersion on a la symétrie $k(\omega) = -k(-\omega)$. Les différents graphiques (de haut en bas) correspondent aux mêmes paramètres mais à différentes échelles de nombre d'onde.

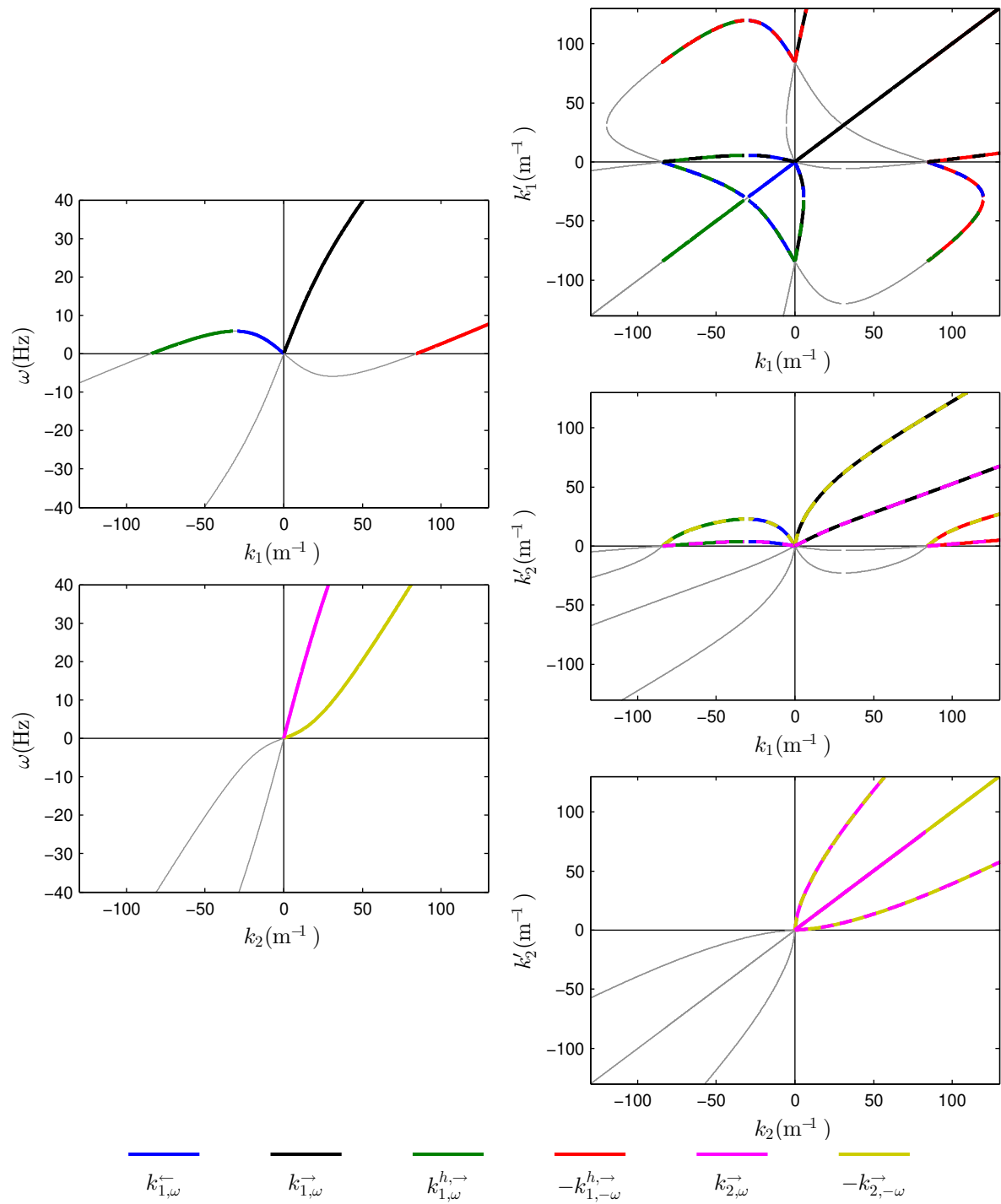


Figure 1.26 – Gauche : relations de dispersion en profondeur d'eau intermédiaire dans une région sous-critique $h = 0,05$ m, $U = 0,35$ m/s et $F = 0,5$ (haut), super-critique $h = 0,05$ m, $U = 0,85$ m/s et $F = 1,2$ (bas). Droite : carte d'auto-corrélation sous-critique (haut), auto-corrélation super-critique (bas), inter-corrélation (centre).

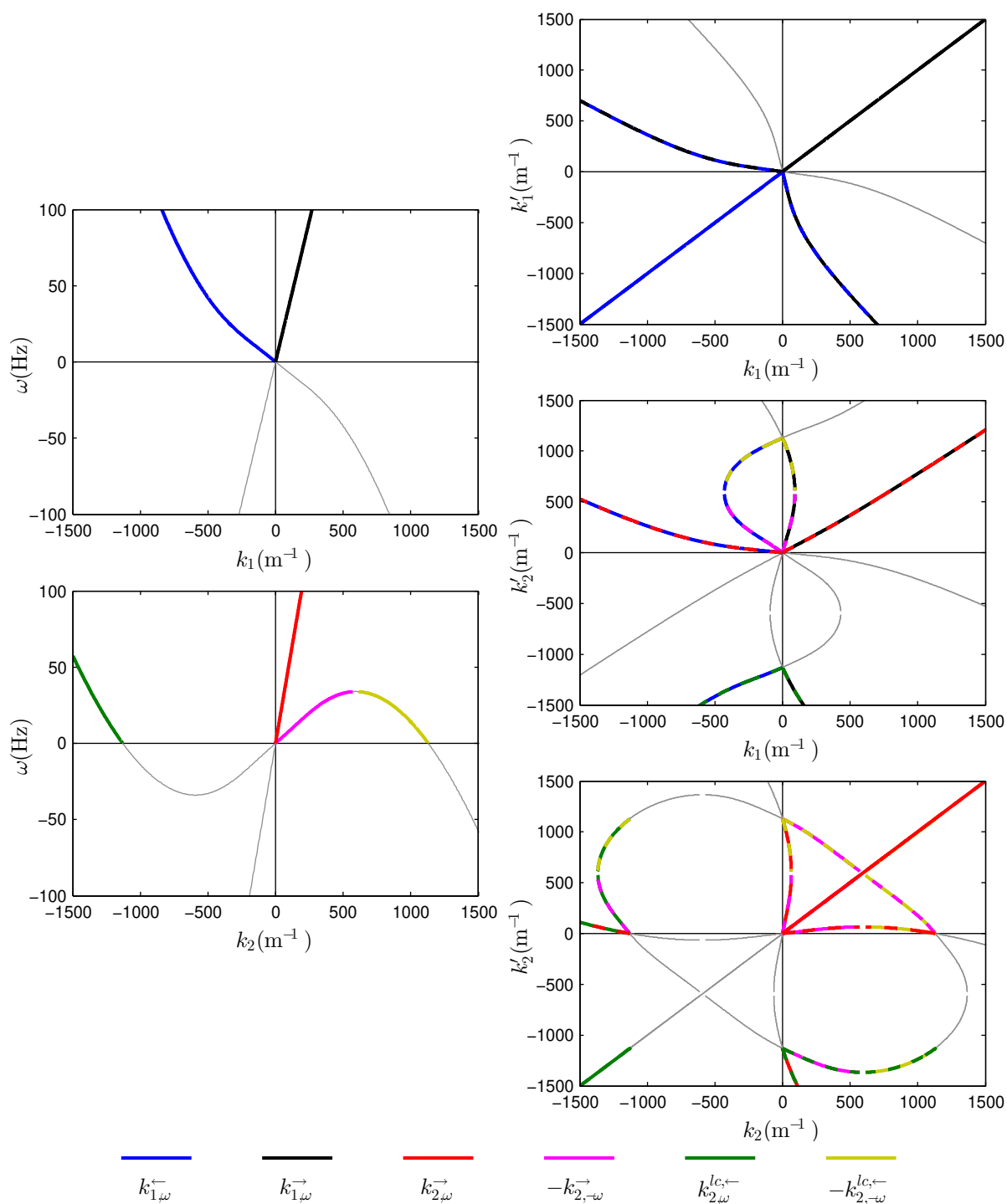


Figure 1.27 – Gauche : relations de dispersion en profondeur d'eau très faible dans une région sous-critique $h = 0,005$ m, $U = 0,15$ m/s et $F = 0,68$ (haut), super-critique $h = 0,005$ m, $U = 0,30$ m/s et $F = 1,35$ (bas). Droite : carte d'auto-corrélation sous-critique (haut), auto-corrélation super-critique (bas), inter-corrélation (centre).

I.9 Conservation du flux d'action d'onde

F. P. Bretherton et C. J. R. Garrett montrent en 1968 [Bretherton et Garrett, 1968], qu'en présence de courant la quantité conservée dans le temps est l'action d'onde E'/σ avec $E' = \frac{1}{2}\rho g a^2(1 + l_c^2 k^2)$ l'énergie dans le référentiel du courant, a l'amplitude d'onde et l_c la longueur capillaire. L'énergie dans le référentiel du courant sera par définition toujours positive.

L'action d'onde dans le référentiel du courant est égale à celle dans le référentiel du laboratoire, autrement dit :

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E'}{\sigma} \quad (153)$$

$$E = \frac{E'}{\sigma}\omega < 0 \quad \text{si} \quad \sigma < 0$$

On utilisera alors le terme onde à énergie négative pour les ondes de fréquence relative négative bien que cela ne sera vrai que dans le référentiel du laboratoire.

On écrit la conservation de l'action d'onde (en l'absence de dissipation ou de vorticité sous-jacente) avec :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E'}{\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E'}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E'}{\sigma} \frac{\partial x}{\partial t} \right) = 0 \quad (154)$$

On a alors $\partial x/\partial t = v_g = \partial\omega/\partial k$ la vitesse de groupe (référentiel du laboratoire) et, étant en régime permanent, $\partial_t = 0$. On définit alors le flux d'action d'onde \mathcal{A} par :

$$\mathcal{A} = \frac{E'}{\sigma} \frac{\partial\omega}{\partial k} = \text{constante} \quad \forall x \quad (155)$$

Cette conservation du flux d'action d'onde donnera l'évolution d'une solution lorsque le régime sur lequel elle se propage varie (en hauteur d'eau et/ou vitesse) ce qui aura donc pour conséquence de faire varier sa fréquence relative et sa vitesse de groupe, son amplitude elle aussi devra alors varier pour conserver un flux d'action d'onde constant.

Le flux d'action d'onde s'écrit alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\rho g \frac{a^2(1 + l_c^2 k^2)}{\sigma} \frac{\partial\omega}{\partial k} \quad (156)$$

Si on reprend l'expression du potentiel des vitesse sous une onde (142) que l'on considère à la surface :

$$\phi = -ia \frac{\sigma}{k \tanh(kh)} \exp(i(kx - \omega t))$$

$$|a_\phi| = |\phi| = |a| \frac{\sigma}{k \tanh(kh)}$$

$$|a_\phi| = |a| \sigma \frac{g(1 + l_c^2 k^2)}{gk(1 + l_c^2 k^2) \tanh(kh)} \quad (157)$$

$$|a_\phi| = |a| \sigma \frac{g(1 + l_c^2 k^2)}{\sigma^2}$$

$$|a| = \frac{|a_\phi| \sigma}{g(1 + l_c^2 k^2)}$$

où a_ϕ indiquent l'amplitude du potentiel des vitesse et a l'amplitude d'onde.

Le flux d'action d'onde en fonction de l'amplitude du potentiel des vitesses devient :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g(1 + l_c^2 k^2)} |a_\phi|^2 \sigma \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (158)$$

En se plaçant dans le cas de solutions de longueur d'onde grande devant la longueur capillaire $l_c = 2,7 \text{ mm}$ ($l_c^2 k^2 \ll 1$), on retrouve alors que le flux d'action d'onde prend la même forme que la norme (équation 32) rappelée ici :

$$\text{signe}(\sigma_\gamma) |A_\omega^\gamma|^2 = 4\pi |a_\omega^\gamma|^2 \sigma_\gamma \left| \frac{\partial \omega}{\partial k} \right| = \text{signe}(\sigma_\gamma) \frac{|a_\omega^\gamma|^2}{|\mathcal{N}_\omega^\gamma|^2} \quad (159)$$

Il y aura tout de même une différence provenant du signe de la vitesse de groupe qui est pris en compte dans le calcul du flux et non dans celui de la norme. Une onde longue se propageant à contre-courant possédera un flux négatif (en considérant que la vitesse du courant est positive) alors que sa norme sera positive, mais ce détail n'aura pas d'importance si on considère la valeur absolue du flux d'action d'onde multiplié par le signe de la fréquence relative.

Cette conservation permet aussi de dire que la somme des flux des n_1 solutions présentes en une position spatiale x_1 sera égale à celle des flux des n_2 solutions en une position x_2 .

$$\sum_{i=1}^{n_j} \mathcal{A}_i(x_j) = \text{constante} \quad \forall x_j \quad (160)$$

I.10 Bilan sur l'exemple de l'étude d'un trou blanc hydraulique

Pour étudier un horizon blanc hydraulique, il faut rendre le courant inhomogène. On peut placer un obstacle sur le fond afin de faire varier la vitesse grâce à la conservation du débit, comme le montre la figure 1.28. On crée alors une accélération au niveau de la partie montante (gauche sur l'obstacle) et une décélération sur la partie descendante. La forte vitesse au dessus de l'obstacle crée un abaissement local de la surface libre. En ne considérant que sa solution gravitaire, l'ondulation stationnaire prend naissance au dessus de l'obstacle et, par sa vitesse de groupe, se propage dans la région aval, bien qu'elle sera stationnaire car elle est produite continument.

Si l'on utilise un régime d'écoulement où les effets de la tension de surface peuvent être négligés, alors au niveau de l'accélération, on pourra trouver un point de blocage gravitaire autrement dit un horizon noir, dont la position spatiale varie selon la fréquence, et si le régime n'est pas trans-critique alors ce point de blocage sera inexistant pour les basses fréquences. Du côté de la décélération on trouvera un horizon blanc symétrique de l'horizon noir. C'est cet horizon que l'on vient stimuler avec une onde longue se propageant à contre courant à partir de la région en aval de l'obstacle. On retrouve alors les différentes conversions possibles où vient s'ajouter une solution transmise dont l'amplitude tend vers zéro lorsque la fréquence devient grande devant ω_{\min} .

La conservation du flux d'action d'onde nous indique que la somme des flux en aval de l'obstacle doit être égale à la somme des flux dans la région en amont, on a alors :

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_I + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_N + \mathcal{A}_R \quad (161)$$

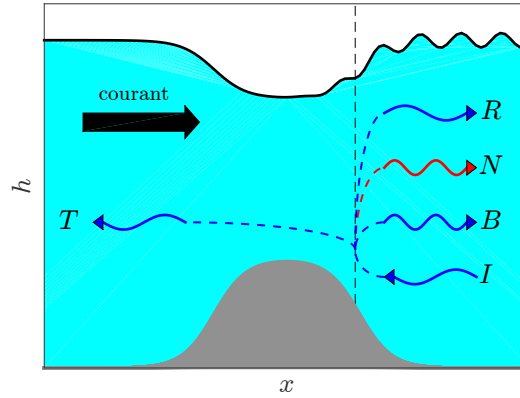


Figure 1.28 – Schéma de conversion de l'étude d'un trou blanc hydraulique grâce à l'écoulement au dessus d'un obstacle.

Sachant que les solutions incidente I et transmise T ont une vitesse de groupe négative (opposée à celle du courant), leurs flux sera donc négatif. Il en sera de même pour la solution négative N car bien que sa vitesse de groupe soit positive, sa fréquence relative est négative. On a alors :

$$-|\mathcal{A}_T| = -|\mathcal{A}_I| + |\mathcal{A}_B| - |\mathcal{A}_N| + |\mathcal{A}_R| \quad (162)$$

et en réorganisant pour avoir, d'un côté, ce qui est injecté, et de l'autre, ce qui est produit :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_I| &= |\mathcal{A}_B| - |\mathcal{A}_N| + |\mathcal{A}_R| + |\mathcal{A}_T| \\ 1 &= \frac{|\mathcal{A}_B|}{|\mathcal{A}_I|} - \frac{|\mathcal{A}_N|}{|\mathcal{A}_I|} + \frac{|\mathcal{A}_R|}{|\mathcal{A}_I|} + \frac{|\mathcal{A}_T|}{|\mathcal{A}_I|} \\ 1 &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 + |A|^2 + |\tilde{A}|^2 \end{aligned} \quad (163)$$

Comme la conservation de la norme, la conservation du flux d'action d'onde amène à une nouvelle expression de l'unitarité, bien qu'il y ait deux termes supplémentaires.

Dans ce cas, l'onde bleue B est l'analogue de la particule d'énergie positive et l'onde négative N et l'analogue de l'anti-particule d'énergie négative. Si les coefficients de l'onde transmise $|\tilde{A}|^2$ et de l'onde rétrograde $|A|^2$ sont négligeables devant les deux autres coefficients on retrouve alors une loi d'unitarité identique à celle décrite pour un trou noir (ou blanc) astrophysique $1 = |\alpha|^2 - |\beta|^2$. Le rapport $|\beta|^2 / |\alpha|^2$ devrait suivre la loi exponentielle de Hawking :

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \exp\left(-\frac{2\pi\omega}{\xi}\right) \quad (164)$$

Mais ici le paramètre ξ décrivant les variations de vitesse au niveau de l'horizon doit prendre en compte la variation de la vitesse de groupe des ondes dans le référentiel du courant. Pour un trou noir astrophysique, cette variation est nulle car la vitesse de la lumière est constante, mais pour un trou blanc hydraulique (ou trou noir) même en se plaçant dans une limite non-dispersive où $c_g = c = \sqrt{gh}$, la hauteur d'eau variant en fonction de la position spatiale, il en va de même pour la vitesse de groupe. On a alors $\xi = \left. \frac{\partial(V(x)-c(x))}{\partial x} \right|_{x=x_H}$ (x_H étant la position de l'horizon, voir [Visser, 1998] pour la dérivation de ξ).

Méthodes et outils expérimentaux

II.1	Matériel.....	55
II.1.1	Le canal Hydrosédimentaire.....	55
II.1.2	Les obstacles.....	55
II.1.3	Les batteurs.....	55
II.2	Mesure de déformée de surface libre : les sondes acoustiques.....	59
II.3	Mesure de déformée de surface libre : méthode optique basée sur la fluorescence induite par laser.....	59
II.3.1	Principe et équipements.....	60
II.3.2	Ce que voient les caméras.....	64
II.4	Post-traitement.....	65
II.4.1	Précision dans l'espace de Fourier.....	68
II.5	Outils de traitement du signal.....	71
II.5.1	Transformée de Fourier.....	71
II.5.2	Paramètres de la transformée de Fourier rapide (FFT).....	72
II.5.3	Fenêtrage spectral.....	73
II.5.4	Filtres.....	74

Dans ce chapitre, nous présentons le matériel utilisé lors des expériences ainsi que les techniques de mesures qui ont permis d'obtenir les résultats qui suivront. Les caractéristiques précises du matériel de mesure sont détaillées en annexe. Un rappel sur différents outils de traitement du signal est fait en fin de chapitre pour la compréhension des post-traitements des résultats.

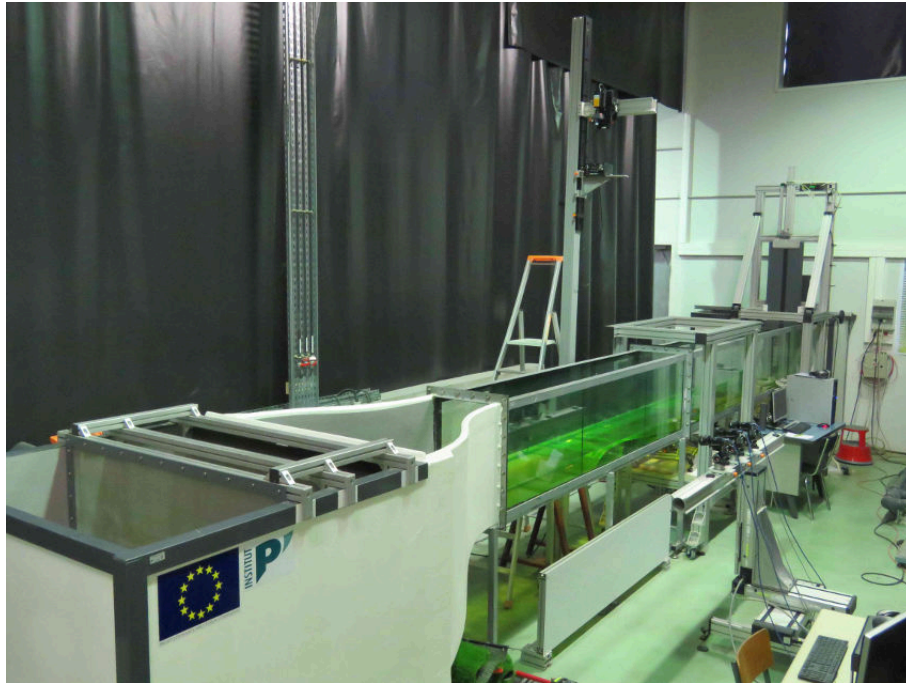


Figure 2.1 – Vue d'ensemble du canal Hydrosédimentaire de l'Institut Pprime.

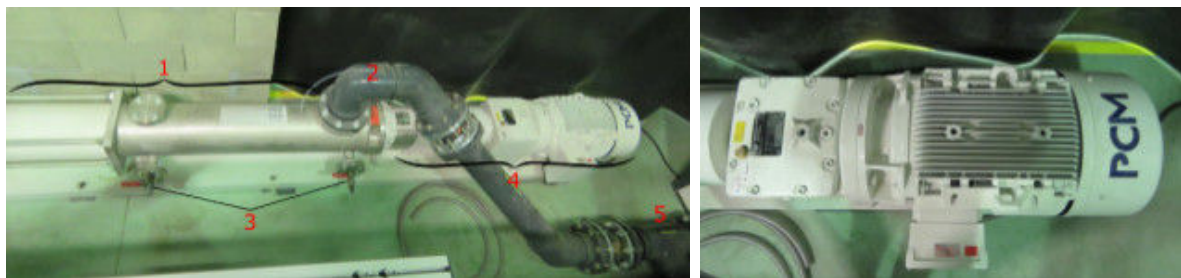


Figure 2.2 – Gauche : photo de la pompe, 1 : vis sans fin, 2 : purge d'air, 3 : purges d'eau, 4 : moteur, 5 : sortie de chambre aval. Droite : photo du moteur.

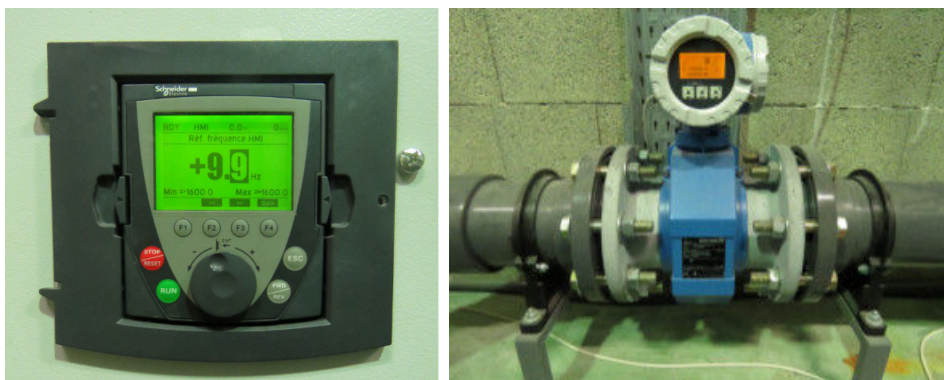


Figure 2.3 – Gauche : photo du variateur servant à régler le débit (marque *Schneider Electric*). Droite : photo du débitmètre (marque *Endress+Hauser* modèle *Promag55*) se trouvant en sortie de pompe.

II.1 Matériel

II.1.1 Le canal Hydrosédimentaire

Le canal utilisé lors de cette thèse est le canal Hydrosédimentaire de l'Institut Pprime, réalisé par l'entreprise *Provision* à La Rochelle. Sa dénomination vient du fait qu'il permet d'étudier des écoulements contenant des sédiments. Ses dimensions, hors convergent et chambre de sortie, sont de 7 m de long sur 0,39 m de large et 0,6 m de haut. Une pompe à vis sans fin, de marque *PCM Moineau* (figure 2.2), permet de créer un courant allant du convergent vers la chambre aval (de la gauche vers la droite), dont le débit est réglable à l'aide d'un variateur (figure 2.3). Ce débit peut être ensuite lu sur un débitmètre placé en sortie de pompe (figure 2.3). Deux grilles et un nid d'abeille placés avant le convergent permettent d'éviter la présence de macro-tourbillons dans l'écoulement. Le convergent 3D sert à diminuer l'épaisseur de couche limite sur le fond du canal et sur les parois latérales permettant de générer un profil vertical de vitesse de type « bouchon » (vitesse uniforme selon la verticale). Le nombre de Reynolds des écoulements étudiés, basé sur la hauteur d'eau, varie entre 15000 et 45000, les écoulements de surface libre sont donc turbulents. Après avoir traversé le canal, le fluide passe à travers une guillotine permettant de créer une chute, le réglage de la position verticale de cette guillotine (avec un pas manuel de 2 mm) permet donc de fixer la hauteur d'eau dans le canal.

II.1.2 Les obstacles

Afin d'obtenir une vitesse de fluide variant selon sa direction de propagation, on place sur le fond du canal un obstacle. Grâce à la conservation du débit et de l'énergie, une partie montante d'obstacle vient diminuer la hauteur d'eau qui la surplombe et donc créer une accélération du fluide, et inversement pour une partie descendante. Différentes géométries d'obstacles ont donc été réalisées selon les buts souhaités.

Certaines géométries ont été réalisées en polystyrène extrudé par l'entreprise *Forme et Volumes* (à La Rochelle 17). Ces obstacles ont l'avantage d'être peu coûteux et la découpe au fil chaud permet de suivre des équations complexes (figure 2.4), par contre leur légèreté nécessite que les formes soient très bien fixées sur le fond du canal à l'aide de colle type silicone. Une géométrie a aussi été réalisée en PMMA (figure 2.5) par l'entreprise *2L Solutions* (à Chauvigny 86), la matière transparente permet de faire passer une nappe laser au travers dans le but de faire des mesures de champs de vitesse (vélocimétrie par images de particules), mais la réalisation d'un tel obstacle est plus coûteuse, par contre en raison de son poids, aucune fixation n'est nécessaire. Pour finir, certains obstacles ont été conçus en PVC (figure 2.6) au sein de l'atelier du laboratoire pour une réalisation plus rapide, les géométries restent par contre plus simple (usinage plan avec différents angles).

II.1.3 Les batteurs

Souhaitant étudier les interactions onde-courant, il a fallu ajouter au montage un batteur à houle afin de générer des ondes de surface pouvant se propager dans le canal. Il a été remarqué qu'en appliquant un mouvement vertical sur la guillotine en sortie de canal (idée de Jean-Marc Mougenot, ingénieur au sein du laboratoire), des ondes pouvaient être générées et remonter l'écoulement à contre-courant. Sur la base de cette idée, un batteur (que nous nommerons par la suite batteur n°1) a été réalisé afin de contrôler

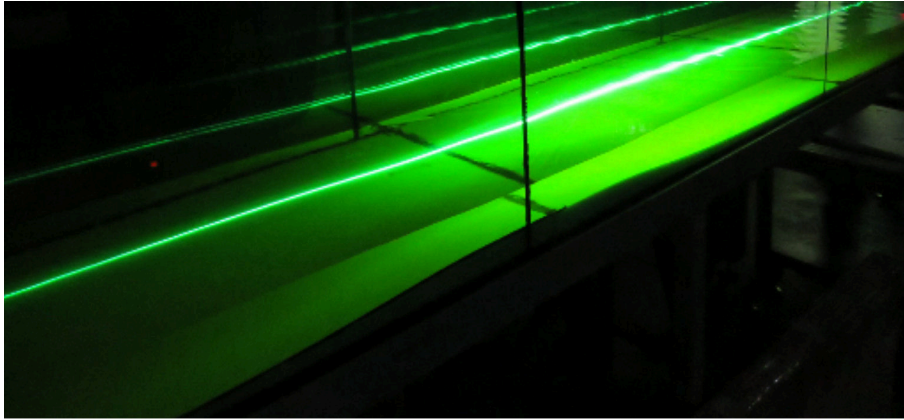


Figure 2.4 – Obstacle en polystyrène extrudé réalisé par *Forme et Volumes* et nommé «Orsay 2» car sa géométrie a été proposée par l'équipe du Laboratoire de Physique théorique d'Orsay.

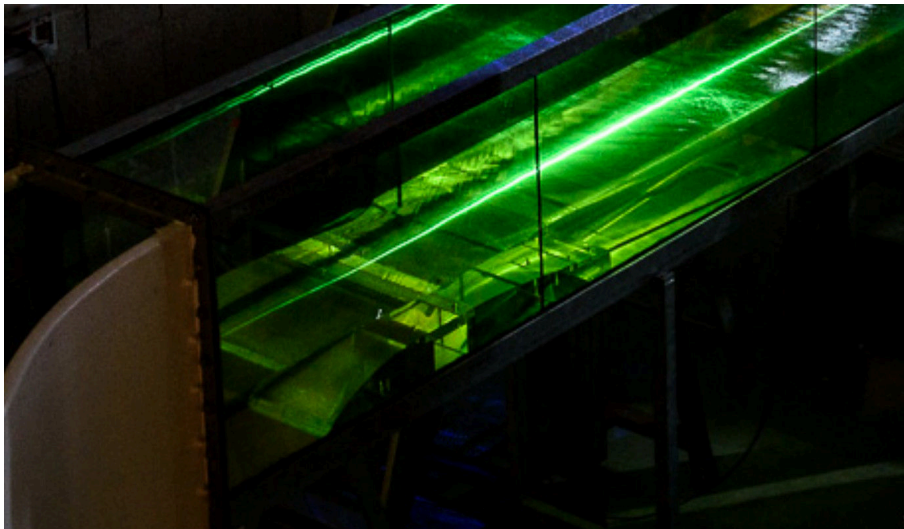


Figure 2.5 – Obstacle transparent en PMMA réalisé par *2L Solutions* nommé «Vancouver» car de même géométrie que celui des expériences dans [Weinfurtner *et al.*, 2011].

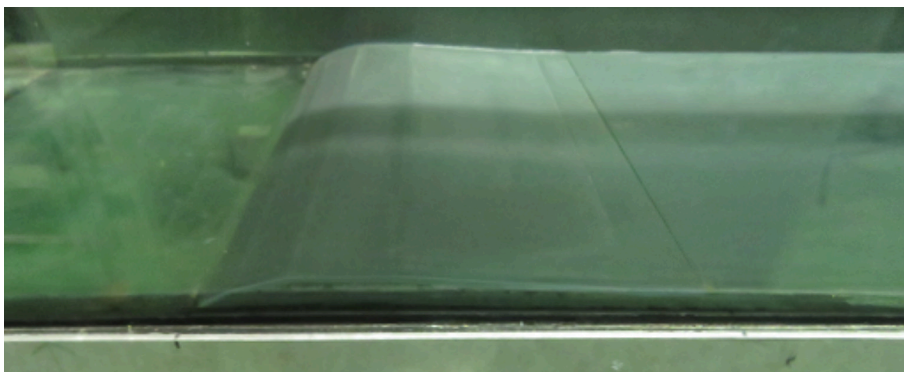


Figure 2.6 – Obstacle en PVC réalisé par l'atelier du Laboratoire Pprime.

avec précision ce mouvement vertical. Il est constitué d'une seconde guillotine fixée sur la première à l'aide de glissière et d'un moteur linéaire *PS01-23x160H-HP-R* de la marque *LinMot* (figures 2.7 et 2.8 gauche). Ce moteur est connecté à un boîtier de commande (figure 2.8 droite) qui lui envoie un signal qui peut être sinusoïdal ou autre (paquet d'onde par exemple). Un stage réalisé par Johan Fourdrinoy au sein du laboratoire a permis de débiter la qualification de ce batteur [Fourdrinoy, 2017, Fourdrinoy *et al.*, 2018].

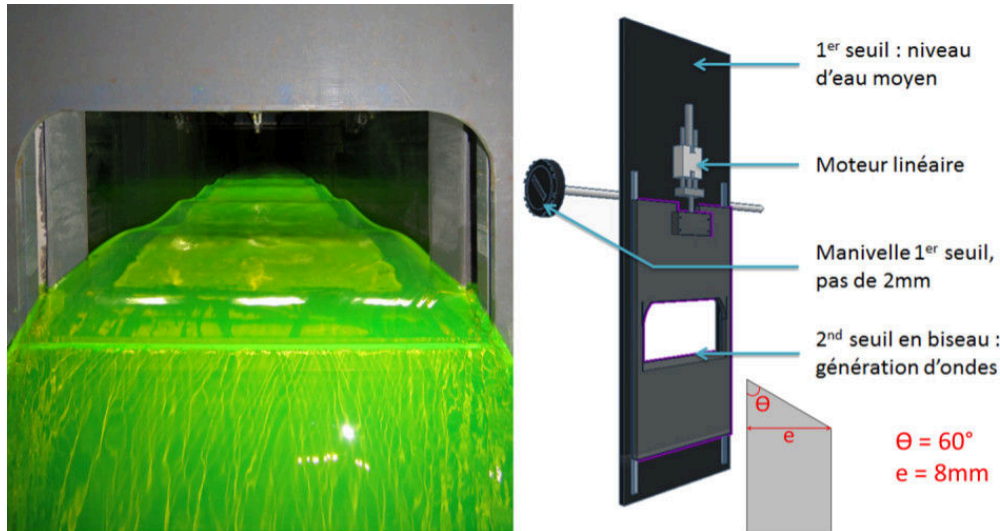


Figure 2.7 – Gauche : Photo du batteur n°1 générant des ondes vu de la chambre aval. Droite : schéma du batteur n°1, et coupe transverse du second seuil.

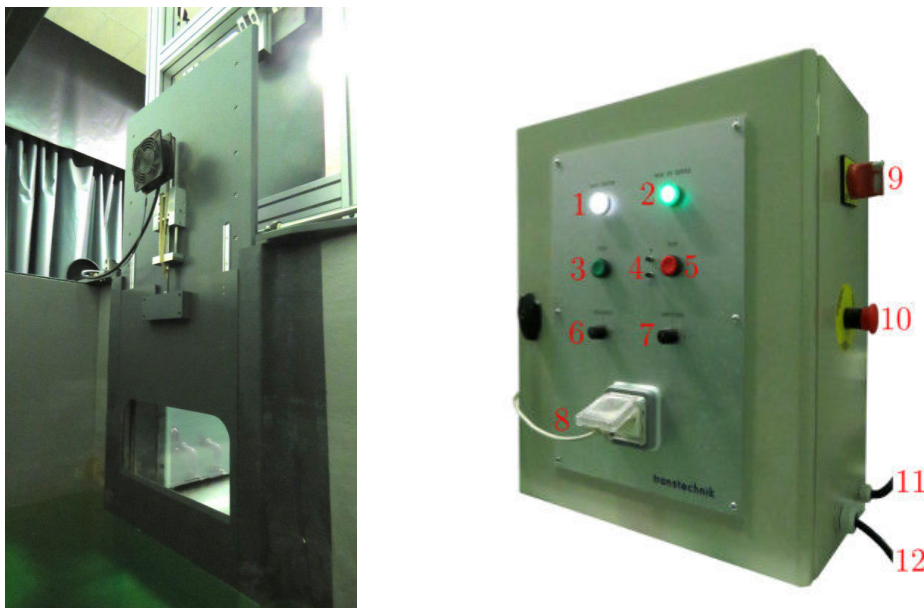


Figure 2.8 – Gauche : photo du batteur n°1. Droite : Boîtier de commande du batteur n°1, 1 : voyant de mise sous tension, 2 : bouton de mise en service, 3 : mise en mouvement mécanique, 4 : boutons permettant d'aller à une position fixée, 5 : arrêt du mouvement, 6 et 7 : réglages manuels, respectivement de la fréquence et de l'amplitude, 8 : connexion à l'ordinateur, 9 : mise sous tension, 10 : arrêt d'urgence, 11 : alimentation du boîtier, 12 : connexion et alimentation du batteur.

Le technologie du batteur n°1 le limitant à être placé en fin de canal et à n'envoyer que des ondes à contre-courant, un second batteur a été mis en place sur le principe plus classique du batteur à houle plongeant. Monté sur un châssis, un moteur (de même marque que le précédent référence *PS01-48x240-C*) met en mouvement vertical une forme plongée

dans le fluide (figure 2.9). Le mouvement vertical de la forme plongeante déplace un volume d'eau près de la surface, ce qui vient générer des ondes de surface se propageant à co-courant et à contre-courant de chaque côté du batteur (figure 2.9 gauche). La forme (figure 2.10 gauche) a été choisie pour déplacer un grand volume sur une petite amplitude afin que la mise en mouvement puisse générer des ondes de surface avec une amplitude suffisante mais en modifiant le moins possible le profil de vitesse du courant sur lequel elles se propagent. Le boîtier de commande du batteur (figure 2.10 droite) servant à contrôler son mouvement est similaire à celui du batteur n°1.

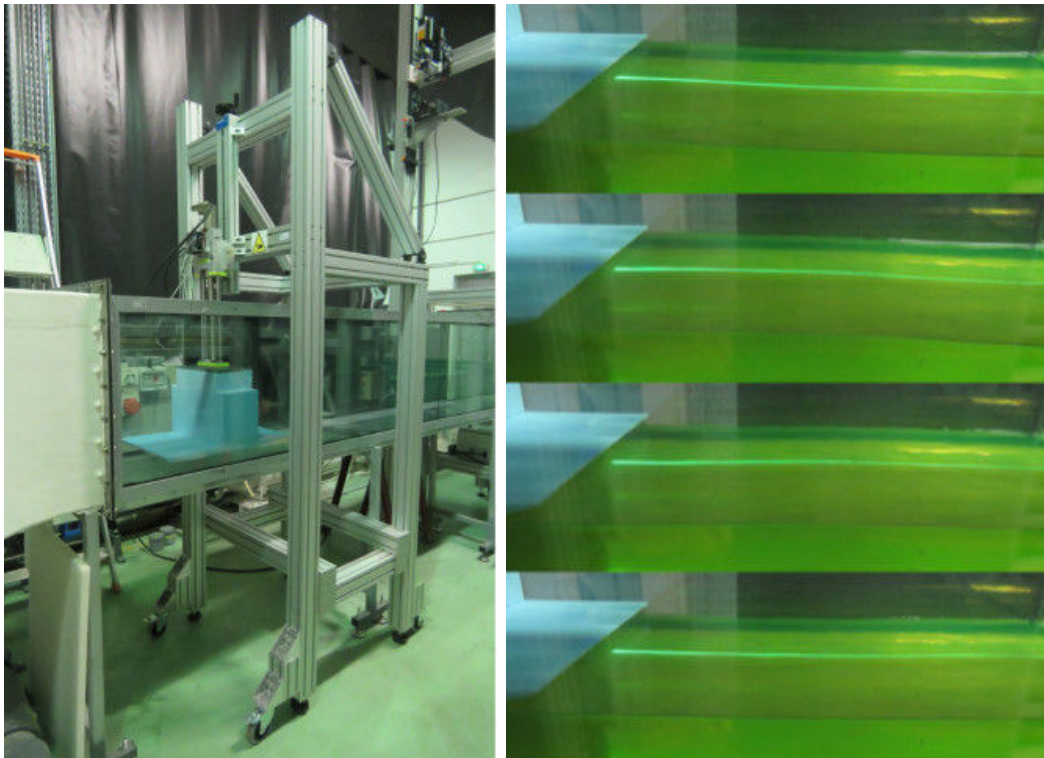


Figure 2.9 – Gauche : photo du batteur n°2 avec son châssis, son moteur et la forme plongeante. Droite : clichés successifs du batteur en marche, le temps s'écoulant de haut en bas.

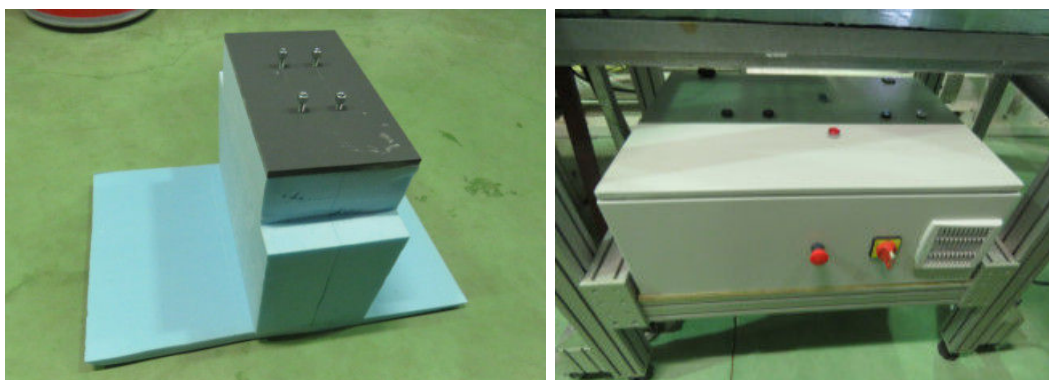


Figure 2.10 – Gauche : photo de la forme plongeante. Droite : photo du boîtier de commande du batteur n°2.

II.2 Mesure de déformée de surface libre : les sondes acoustiques

Le principe de fonctionnement de ces capteurs (figure 2.11) est d'envoyer une onde acoustique qui se réfléchit sur la surface du fluide (ou d'un solide) et de mesurer le temps que cette onde met à faire l'aller-retour. Connaissant la vitesse de l'onde acoustique, cela permet de remonter à la distance entre la sonde et la surface. Un étalonnage avec une cale de hauteur connue ou bien sur le fond du canal (sans présence d'eau sur celui-ci) permet de connaître la distance entre la sonde et le fond du canal. En soustrayant la distance entre la sonde et la surface à la distance entre la sonde et le fond, on remonte à la hauteur d'eau. Cette méthode, bien que ponctuelle, permet une lecture en temps réel de la hauteur d'eau grâce à une interface *LabView*. Le diamètre de la cellule du capteur capturant l'onde réfléchie est de 1 cm. Si l'inclinaison de la surface est trop grande, le signal retour n'atteint jamais le capteur et la mesure résultante est donc aberrante. La précision des capteurs est annoncée au dixième de mm, mais ils permettent tout de même d'observer des amplitudes plus faibles. Quatre capteurs sont utilisés afin d'obtenir plusieurs mesures ponctuelles simultanément. Cette méthode est très utile pour obtenir des résultats rapides afin de définir les régimes (hauteur d'eau, débit) pouvant être intéressants pour des mesures plus précises.

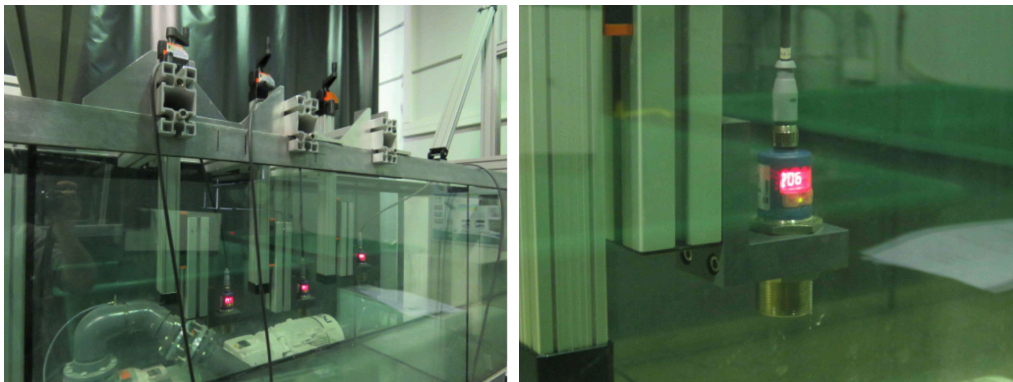


Figure 2.11 – Gauche : trois sondes acoustiques et leurs supports placés sur le canal. Droite : photo proche d'une sonde acoustique.

II.3 Mesure de déformée de surface libre : méthode optique basée sur la fluorescence induite par laser

De multiples techniques de mesures de déformée de surface, instantanées et non-intrusives, ont été développées durant ces dernières années comme celle utilisant la corrélation sur un motif de points placé sur le fond du canal [Moisy *et al.*, 2009] ou bien celle de profilométrie utilisant un motif de franges projeté sur la surface [Cobelli *et al.*, 2009b, Cobelli *et al.*, 2009a]. Mais ces techniques peuvent être coûteuses (en temps de calcul) si l'on souhaite avoir une forte précision sur un champ large. Dans notre cas, nous supposons que les déformées de surface libre sont unidirectionnelles (\vec{x} direction longitudinale du canal), il est alors préférable dans notre cas d'utiliser une méthode de mesure 1D $z(x, t)$, en comparaison aux exemples cités précédemment de mesure 2D $z(x, y, t)$, étant ainsi moins coûteuse en temps de calcul (bien que donnant accès à moins d'information). De plus,

cette technique permet une mesure sur une largeur pouvant aller jusqu'à 2,5 m, ce qui est crucial pour avoir une bonne résolution spectrale (sujet abordé par la suite dans la section II.5.2).

II.3.1 Principe et équipements

Afin d'obtenir des mesures de hauteurs d'eau en fonction, à la fois, du temps et de la position longitudinale (direction de l'écoulement), on utilise une méthode optique basée sur la fluorescence induite par laser [Weinfurtner *et al.*, 2011, Faltot *et al.*, 2014] dont le montage de mesure est présenté figure 2.12.

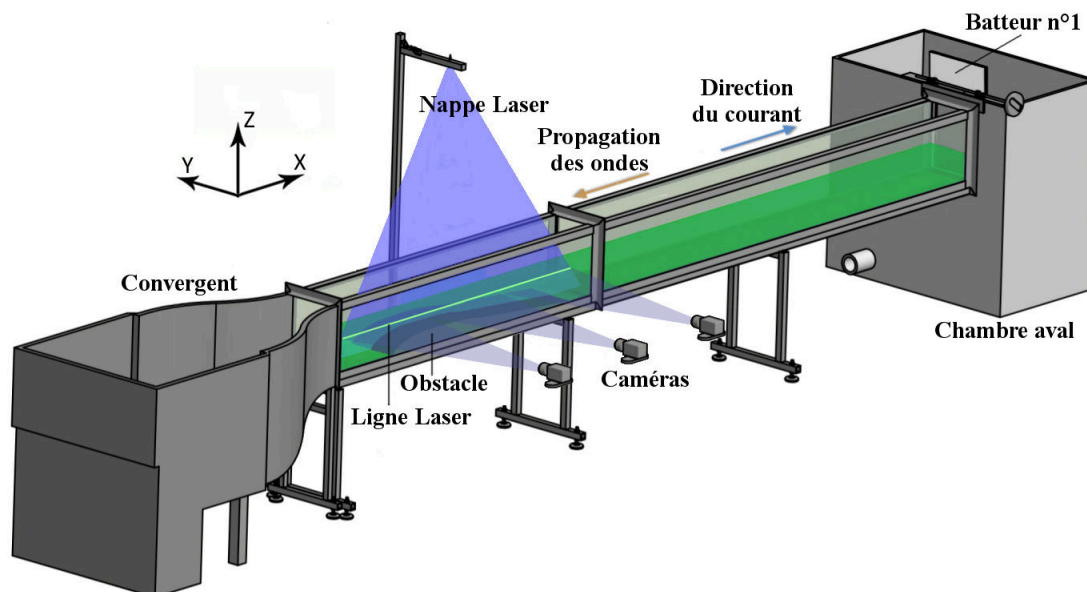


Figure 2.12 – Schéma global du montage de mesure optique.

Il a été ajouté au canal de la fluorescéine à raison de 60 g pour 3 m³ d'eau adoucie (volume estimé par rapport aux dimensions du canal et de la pompe) ce qui donne une concentration de $C = \frac{m}{MV} = \frac{60}{376,28 \times 3 \cdot 10^3} = 5,3 \cdot 10^{-5}$ mol/L (avec M la masse molaire de la fluorescéine). Les longueurs d'onde d'absorption sont centrées sur $\lambda=490$ nm correspondant à une couleur bleu-vert et celles d'émission sur $\lambda=540$ nm correspondant à du vert-jaune (figure 2.13 et 2.14). La fluorescence est, dans notre cas, excitée par une diode laser (marque *Changchun New Industries*, modèle *MBL-III-473*, puissance 150 mW) avec une longueur d'onde de $\lambda=573$ nm (bleu), dont le faisceau est transformé en nappe laser (figure 2.15) grâce à une lentille (cylindrique ou Powell, figure 2.16). Lors des premières expériences, la nappe était générée par une lentille cylindrique mais, pour les suivantes, elle fut remplacée par une Powell permettant une meilleure répartition de puissance. Le coefficient d'absorption molaire (figure 2.13) est normalisée par sa valeur maximale $\epsilon_{490} = 7,69 \cdot 10^6$ L · mol⁻¹ · m⁻¹, par lecture graphique, on trouve que $\epsilon_{473} \approx 0,52\epsilon_{490} = 4 \cdot 10^6$ L · mol⁻¹ · m⁻¹ pour la longueur d'onde de la diode laser.

Le plan de la nappe étant perpendiculaire à la surface libre et la concentration en fluorescéine étant assez élevée, la nappe laser ne pénètre que dans une fine épaisseur d'eau et une ligne de fluorescence se dessine à la surface de l'eau colorée (figures 2.14 et 2.17). Des images de cette ligne laser sont ensuite acquises grâce à plusieurs caméras (*PointGrey GrassHooper 3 - 2048x2048*) situées sur le côté du canal (figure 2.18). Les caméras observent la ligne laser avec un angle de 6° vers le bas pour mesurer la position de l'interface

air/eau du côté air, mais l'angle reste faible pour avoir le moins de déformation possible (comme le montre la figure 2.18). Afin de calibrer les caméras, une mire (figure 2.19), de 2 m de large sur 0,5 m de haut et dont les marqueurs de 5 mm de diamètre sont espacés de 20 mm, est placée dans le plan de la nappe laser. Cette mire permet de régler les caméras afin qu'elles soient bien horizontales (selon l'axe de rotation \vec{y}) et toutes trois alignées sur une même ligne (eau au repos par exemple ou ligne de marqueurs de la mire). Elles sont ensuite positionnées selon la direction longitudinale du canal afin que les 3 images qu'elles offrent puissent n'en former qu'une en les assemblant côte à côte (elles sont placées de telle sorte à ne pas avoir de zone de recouvrement).

La figure 2.20 illustre à la fois une image acquise par le triplet de caméras ainsi que le post-traitement. L'amplitude des ondes a été intentionnellement prise élevée (on remarque que les ondes sont fortement non-linéaires) pour observer les limites de la méthode. On remarque que les fortes pentes créent des zones d'ombres sur les bords de la fenêtre de visualisation (exemple sur la droite de l'image).

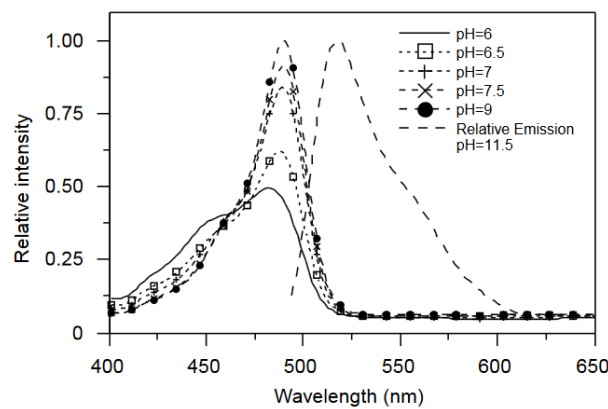


Figure 2.13 – Spectre d'absorption et d'émission de la fluorescéine en fonction du pH tiré de l'article J. Coppeta & C. Rogers [Coppeta et Rogers, 1998]. Dans les expériences de ce manuscrit le pH a été mesuré à 8,3.

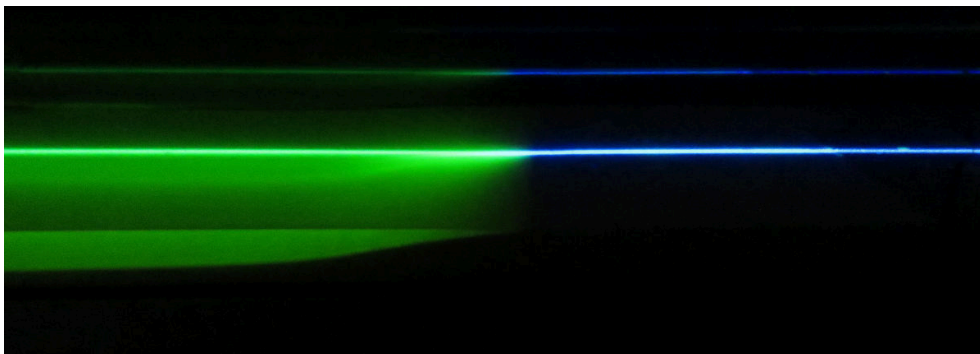


Figure 2.14 – Photo de la ligne laser illustrant la fluorescence avec, à gauche, la nappe laser impactant la surface du fluide chargé en fluorescéine qui ré-émet une lumière verte, à droite, la nappe impactant une surface sèche réfléchissant la lumière bleue de la diode laser.

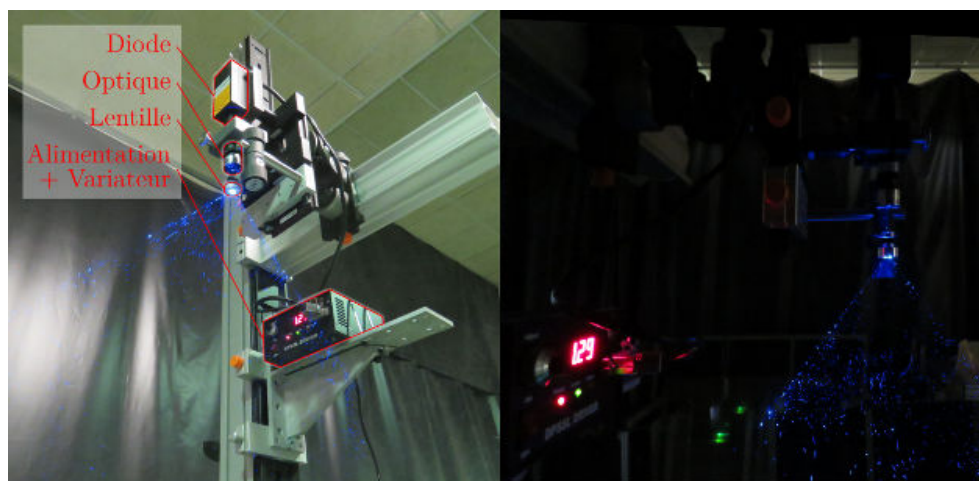


Figure 2.15 – Montage de la diode et de ses optiques permettant la génération de la nappe laser (des particules ont été dispersées, dans l’air et au niveau de la nappe, pour la rendre visible).



Figure 2.16 – Schéma d’éclatement de faisceau en nappe, à gauche : lentille cylindrique, à droite : lentille de Powell.



Figure 2.17 – Photo de la ligne laser tirée de l’article «Astrophysique, un trou noir recréé dans l’eau.» paru dans Sciences et Avenir n°838.



Figure 2.18 – À gauche : Les trois caméras servant à l’acquisition de la ligne laser. À droite : Table de déplacement 3 axes servant de support pour le positionnement des caméras.

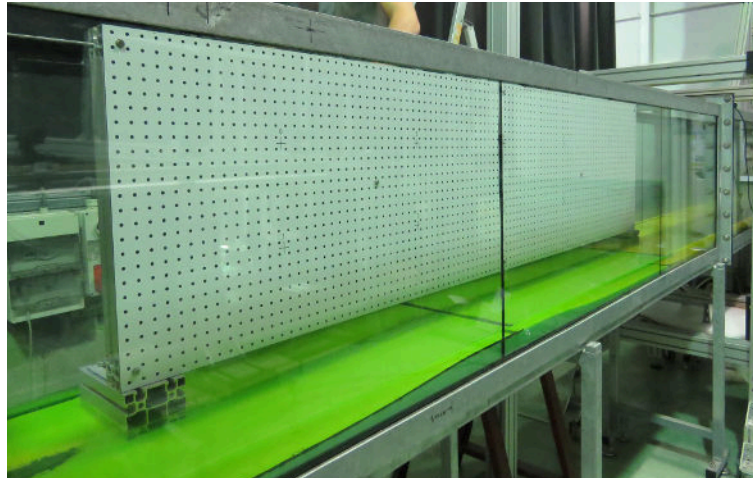


Figure 2.19 – Mire servant à la calibration des caméras.

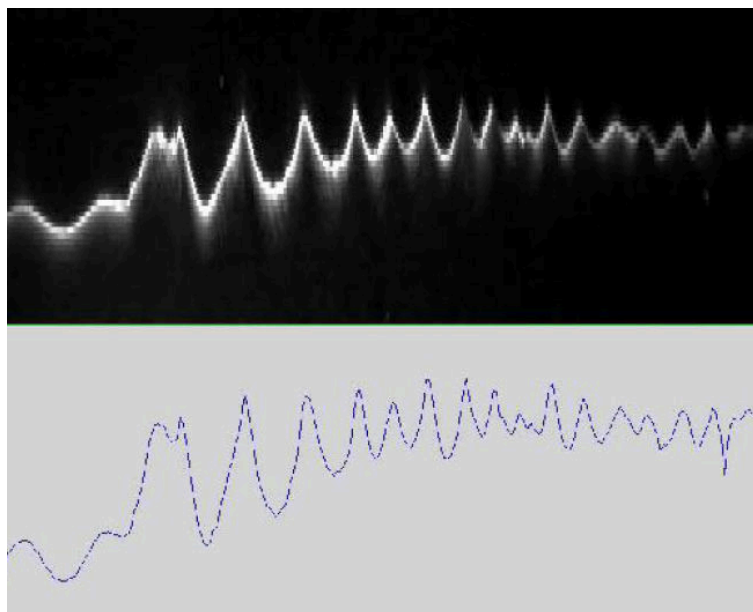


Figure 2.20 – En haut : exemple d’image acquise par le triplet de caméras. En bas : résultat de la méthode subpixel (détaillée dans la section suivante).

II.3.2 Ce que voient les caméras

On considère ici une coupe dans le plan transverse au canal ($y0z$). L'intensité en surface, due à la forme gaussienne de la nappe laser (dans son épaisseur), peut s'écrire $I_0(y) = \exp(-y^2/\sigma^2)$ (σ définissant la largeur de la nappe que l'on prendra égale à 1 mm pour une nappe fine). On considère ensuite que la lumière laser pénétrant dans le fluide est atténuée selon la verticale par l'absorption de la fluorescéine en suivant une loi de Beer-Lambert :

$$I(y, z) = I_0(y) \exp(-\epsilon Cz) \quad (165)$$

avec $\epsilon = \epsilon_{473} = 4 \cdot 10^6 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ le coefficient d'absorption molaire pour la longueur d'onde de la diode laser et $C = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration molaire précédemment calculée.

Toute cette intensité est ré-émise en vert par la fluorescéine (figure 2.21 gauche). Comme la caméra, placée dans l'air, observe cette intensité dans l'eau, il faut calculer les trajectoires des rayons lumineux dont l'une est présentée figure 2.21 (gauche). On considère un rayon lumineux incident provenant de l'eau avec un angle θ_i étant en partie réfléchi à la surface eau/air avec un angle $\theta_t = \theta_i$ et transmis dans l'air avec un angle θ_t . On a alors :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_t) = n_{\text{eau}} \sin(\theta_i) \quad (166)$$

sachant que $\theta_t = 90^\circ - 6^\circ$ (fixé par l'angle de la caméra), on a $\theta_i = 41,6^\circ$.

Il faut ensuite tenir compte du fait que seule une partie de l'intensité du rayon incident I est transmise T , l'autre partie étant réfléchi R avec les coefficients :

$$\begin{aligned} i &= r + t \\ r &= \frac{(n_{\text{eau}} \cos(\theta_i) - n_{\text{air}} \cos(\theta_t))^2}{(n_{\text{eau}} \cos(\theta_i) + n_{\text{air}} \cos(\theta_t))^2} \approx 42\% \\ t &= \frac{4n_{\text{eau}} n_{\text{air}} \cos(\theta_i) \cos(\theta_t)}{(n_{\text{eau}} \cos(\theta_i) + n_{\text{air}} \cos(\theta_t))^2} \approx 38\% \end{aligned} \quad (167)$$

On intègre alors l'intensité sur un rayon incident entre $z = 0$ et $z = -\infty$ (dans notre cas $-\infty$ étant considéré pour $z = -20$ mm car l'intensité à cette profondeur est quasi-nulle) pour toutes les positions y à la surface, sachant que l'intensité sous la surface doit être multipliée par le coefficient de transmission t et au niveau de la surface par 1 (on considère arbitrairement l'épaisseur de la surface égale à $\epsilon = 0,1$ mm même si cela n'a pas beaucoup d'influence sur le résultat tant que cette valeur reste petite) :

$$F(y) = f(0, y) + t \int_{z=-\infty}^{-\epsilon} f(z, y + z \tan(\theta_i)) dz \quad (168)$$

où $f(z, y)$ représente l'intensité de chaque point dans le fluide et $F(y)$ l'intensité vue par la caméra au niveau de la surface (que l'on peut ensuite adimensionner par sa valeur maximale).

Nous projetons ensuite ce résultat sur la direction verticale avec $z_i = y \tan(6^\circ)$. Sur la figure 2.21 (droite), on compare ce résultat à un profil vertical de ligne laser obtenu expérimentalement pour une épaisseur de nappe identique. On remarque alors que même si ce modèle est très simplifié, il semble cohérent avec les observations expérimentales. On peut aussi voir que le signal est asymétrique traduisant le fait que l'on observe à la fois le signal lumineux sur la surface libre (dans le plan horizontal), qui, lui, est symétrique, et

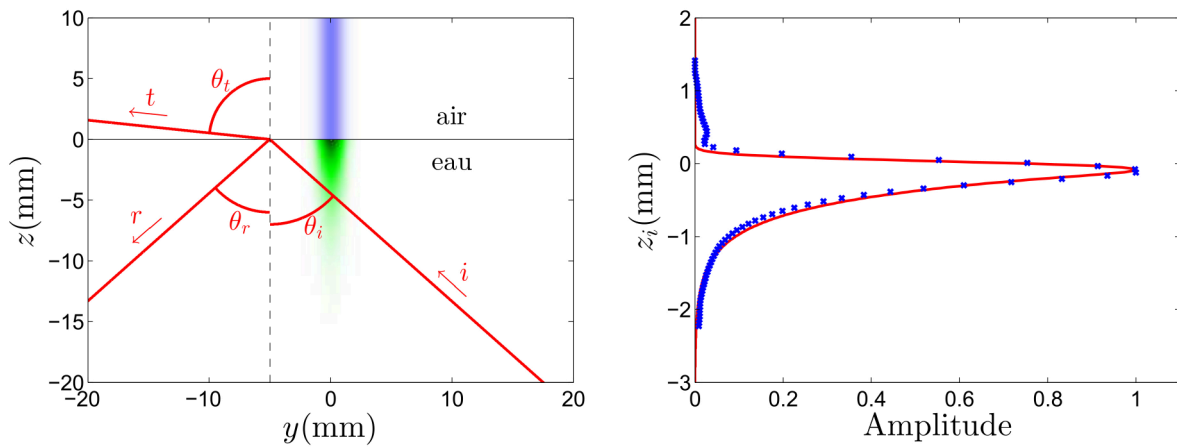


Figure 2.21 – À gauche : Schéma de l'absorption de la nappe laser dans un plan $y0z$. La zone bleue indique la nappe laser dans l'air même si elle n'est pas visible. La zone verte indique l'intensité de fluorescence. Les droite rouges indiquent les trajectoires des différents rayons, incident i , réfléchi r et transmis t . À droite : intensité du signal vue par la caméra, en rouge le signal simulé et en bleu le résultat de mesures expérimentales. Cas d'une épaisseur de nappe fine $\sigma = 1$ mm.

la pénétration de celui-ci dans le fluide (dans le plan vertical) qui, elle, est asymétrique. Le maximum de signal n'est pas observé en $z_i = 0$ mais avec un léger biais de 0,08 mm pour cette épaisseur de nappe (2.21 droite).

Nous pouvons appliquer le même modèle pour une nappe laser plus épaisse avec $\sigma = 6$ mm (figure 2.22). On remarque dans ce cas là que le signal est beaucoup plus symétrique mais le biais devient plus important avec 0,25 mm.

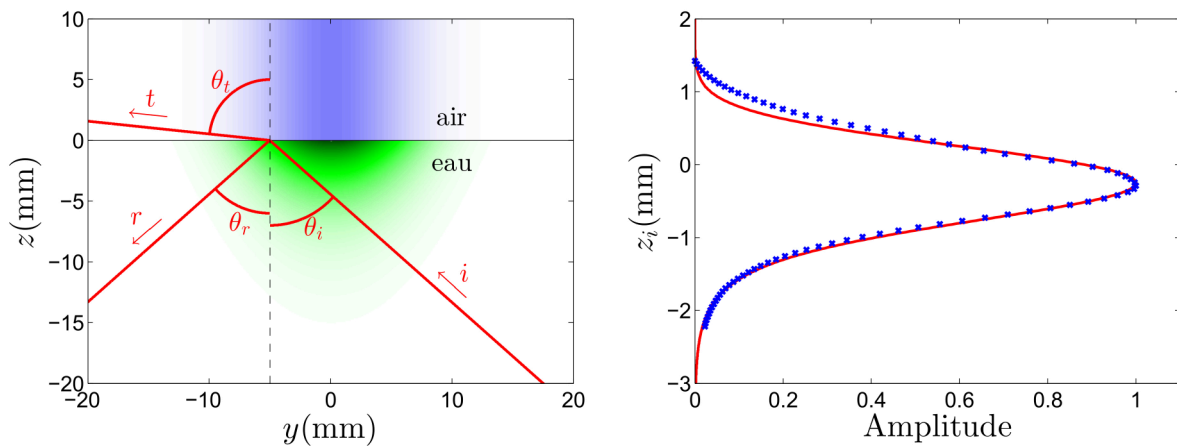


Figure 2.22 – À gauche : Schéma de l'absorption de la nappe laser dans un plan $y0z$. La zone bleu indique la nappe laser dans l'air même si elle n'est pas visible. La zone verte indique l'intensité de fluorescence. Les droite rouges indiquent les trajectoires des différents rayons, incident i , réfléchi r et transmis t . À droite : intensité du signal vue par la caméra, en rouge le signal simulé et en bleu le résultat de mesures expérimentales. Cas d'une épaisseur de nappe épaisse $\sigma = 6$ mm.

II.4 Post-traitement

Les images, acquises par les caméras grâce au logiciel *FlipCap*, sont ensuite traitées dans un programme développé sous *Matlab*. Les images sont acquises en 16 bits (4096 niveaux de gris), avec un bon compromis entre ouverture du diaphragme caméra, temps d'ouverture

et puissance laser, la ligne laser est alors définie sur au moins 2000 niveaux de gris. Le but étant de connaître la position de la surface libre en fonction de la position le long du canal, on se fixe sur une colonne de l'image et on utilise une méthode sub-pixel. La méthode sub-pixel, utilisée pour les résultats de ce manuscrit, est basée sur la recherche du maximum d'une interpolation de type « spline » effectuée sur l'intensité des pixels pour chaque colonne d'une image de ligne laser.

Pour illustrer cette méthode et essayer d'en connaître sa précision, nous avons placé une caméra très proche du canal à 0,015 m de la paroi (extrémité de l'objectif) soit 0,22 m de la ligne laser. Dans cette configuration, la taille des pixels vaut $43,9 \mu\text{m}$ de large et $44,1 \mu\text{m}$ de haut (dû à l'angle de 6° de la caméra, on nommera par $\Delta_{\text{px}0}$ la hauteur d'un pixel). Nous faisons alors l'acquisition de la surface libre au repos (surface plane), pour pouvoir connaître par avance le résultat attendu. Afin de détecter des problèmes dus à une surface libre courbe et non à une surface plane, on incline de 2° la caméra dans l'axe de rotation y (direction transversale au canal) pour obtenir l'image d'une ligne laser légèrement penchée (figure 2.23). Nous commençons par étudier une nappe laser la plus fine possible $e \sim 2 \text{ mm}$. Le signal de la nappe laser étant gaussien, on considère que cette épaisseur, mesurée à l'oeil nu, correspond à deux écart type.

Nous utilisons alors la détection sub-pixel pour connaître la position de la surface libre (figure 2.23 gauche). Nous remarquons que le résultat obtenu suit bien une droite (surface plane). Lors des expériences, la largeur de champ souhaitée d'une caméra était beaucoup plus importante que dans le cas présent, imposant alors de placer les caméras plus loin du canal entre 1 m et 2 m de la ligne laser. Pour simuler le cas d'une caméra placée 7 fois plus loin de la ligne laser que dans le cas présent (soit 1,54 m), on crée des amas de pixels en les moyennant et en modifiant ainsi la taille verticale des pixels ($\Delta_{\text{px}1} = 7\Delta_{\text{px}0} = 308,7 \mu\text{m}$). On applique ensuite la méthode sub-pixel sur l'image reconstituée (figure 2.23 droite).

La figure 2.24 (droite) indique la différence entre le résultat de la caméra éloignée $z_1(x)$ et celui de la caméra proche $z_0(x)$. Nous remarquons que cette différence est grande car le nombre de pixels de plus forte intensité, correspondant à la ligne laser (pixels utiles), est faible (3-4 pixels) et de plus, le signal étant asymétrique le résultat s'approche de celui d'une méthode « au pixel près » introduisant une erreur non-aléatoire. Il faut alors rendre le signal le plus symétrique possible, pour cela on épaissit la nappe laser afin de diminuer l'importance du signal de pénétration devant celui en surface comme montré précédemment. Pour jouer sur l'épaisseur de la ligne laser, il faut modifier la distance entre l'optique et la diode et ainsi légèrement défocaliser le faisceau.

On opère alors de la même façon pour une plus grande épaisseur de nappe laser $e \sim 12 \text{ mm}$. On remarque que le résultat obtenu (figure 2.25 gauche), pour cette épaisseur, n'est pas exactement une droite (surface plane), cela doit être dû au fait que le type de lentille Powell utilisée n'est pas adapté pour des faisceaux larges et donc la nappe projetée pour une telle épaisseur n'est elle-même pas complètement plane. Mais ce biais entre le résultat et la droite attendue aura une conséquence sur la position absolue de la surface libre mais aucune si l'on s'intéresse aux fluctuations de surface libre en chaque point (dans l'hypothèse de faible amplitude). Par contre, on observe que la ligne laser est beaucoup plus symétrique, ce qui améliore grandement la méthode en plus du fait que le nombre de pixels utiles pour une détection avec une caméra éloignée est d'environ 8-9 pixels (figure 2.26). La différence entre la méthode sub-pixel sur l'image éloignée $z_1(x)$ et celle sur l'image proche $z_0(x)$ est alors de $\pm 0,05\Delta_{\text{px}1}$ autour d'un biais qui doit être dû à la qualité de la napper laser (lentille non-adaptée pour un faisceau épais). Mais tout comme précédemment, ce biais semblant constant, il n'aura alors pas de conséquence si

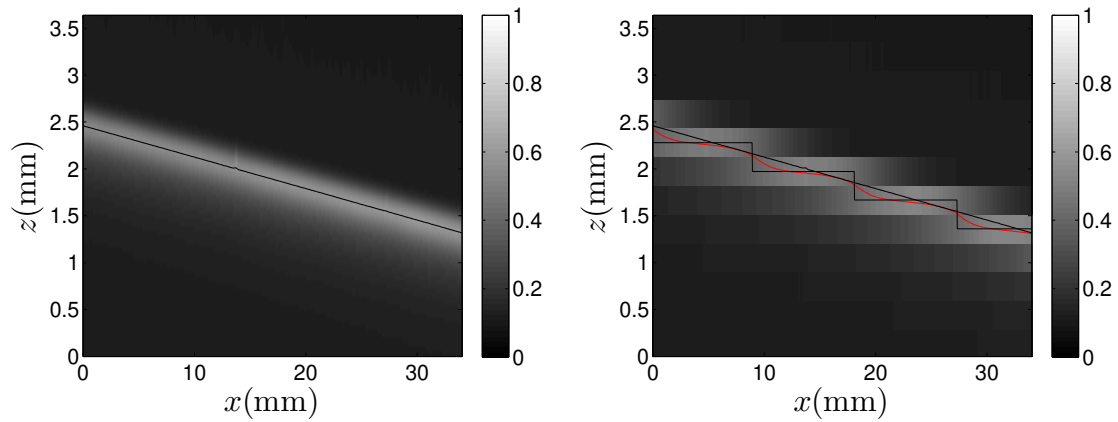


Figure 2.23 – À gauche : ligne laser vue par une caméra très proche du canal avec une taille de pixel $\Delta_{px0}=44,1 \mu\text{m}$, la courbe noir indiquant le résultat de la méthode sub-pixel. À droite : Loin du canal $7\Delta_{px0} = 308,7 \mu\text{m}$, la courbe bleue correspond à une méthode au pixel près, la rouge à la méthode sub-pixel et la noire au résultat pour la caméra proche. L'épaisseur de la ligne laser est d'environ 2 mm.

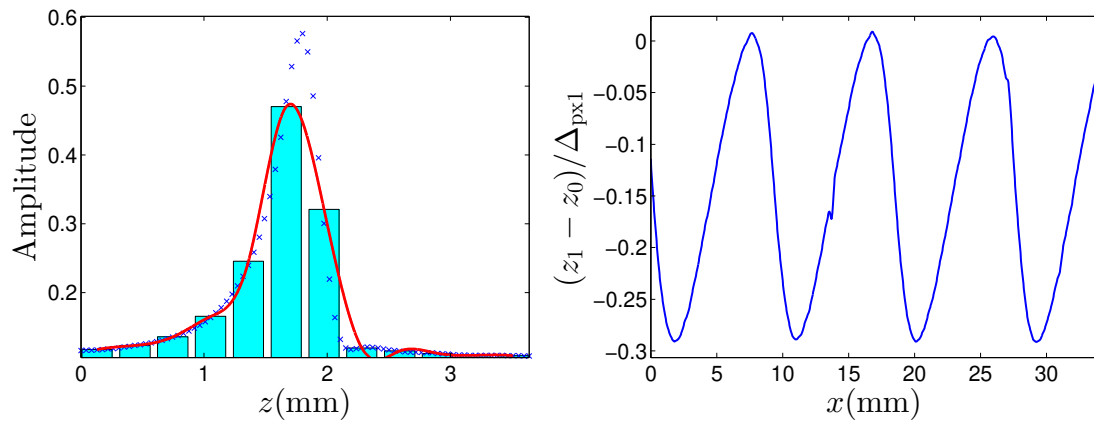


Figure 2.24 – À gauche : Exemple de détection, pour $e \sim 2 \text{ mm}$, sur une colonne à $x=20 \text{ mm}$. Les croix bleues montrent le niveau des pixels pour l'image proche canal, les barres cyan pour l'image éloignée et la courbe rouge la détection subpixel pour l'image éloignée. À droite : différence des méthodes subpixel entre l'image éloignée z_1 et l'image proche z_0 adimensionnée par la taille d'un pixel Δ_{px1} .

on s'intéresse aux fluctuations de surface libre et non à la position absolue de la surface libre. Une erreur de 5% d'un pixel semble être cohérente avec la valeur habituelle de 10% sachant qu'ici le nombre de pixels utiles est assez élevé.

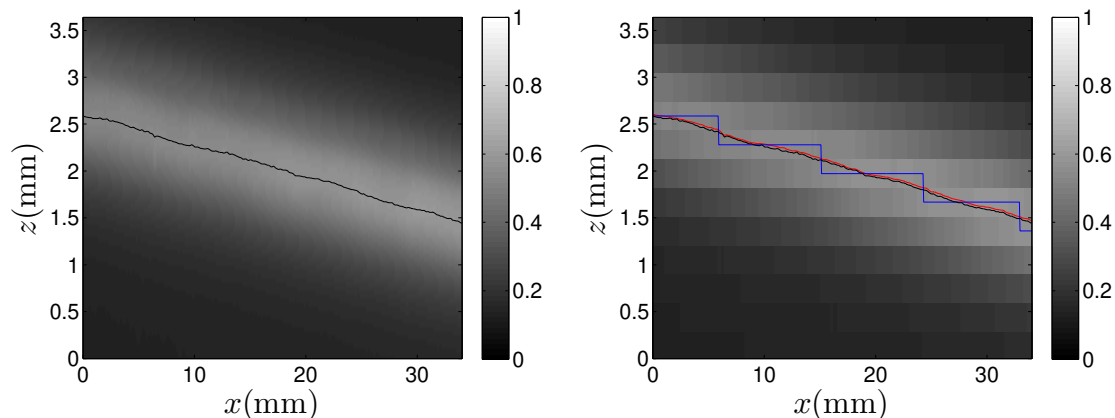


Figure 2.25 – À gauche : ligne laser vue par une caméra très proche du canal avec une taille de pixel $\Delta_{px0} = 44,1 \mu\text{m}$, la courbe noir indiquant le résultat de la méthode sub-pixel. À droite : Loin du canal $\Delta_{px1} = 308.7 \mu\text{m}$, la courbe bleue correspond à une méthode au pixel près, la rouge à la méthode sub-pixel et la noire au résultat pour la caméra proche. L'épaisseur de la ligne laser est d'environ 12 mm.

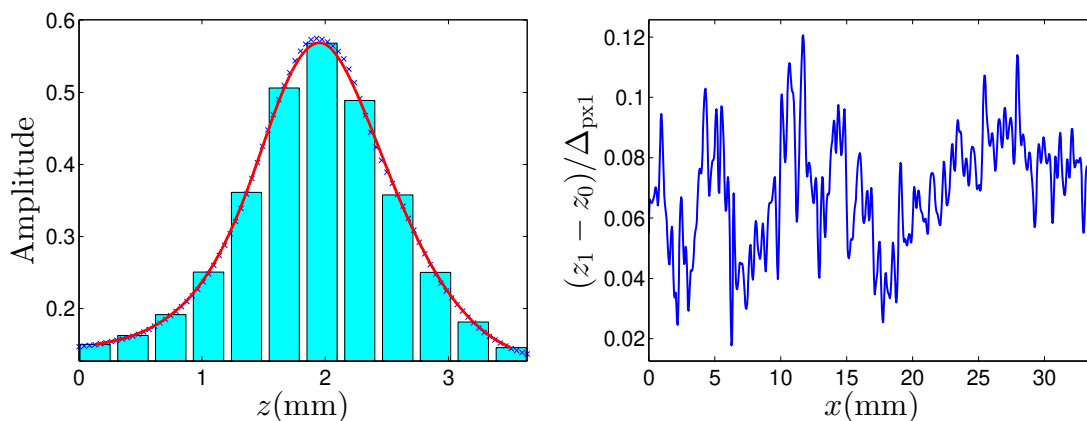


Figure 2.26 – À gauche : Exemple de détection, pour $e \sim 12$ mm, sur une colonne à $x=20$ mm. Les croix bleues montrent le niveau des pixels pour l'image proche canal, les barres cyan pour l'image éloignée et la courbe rouge la détection subpixel pour l'image éloignée. À droite : différence des méthodes subpixel entre l'image éloignée z_1 et l'image proche z_0 adimensionnée par la taille d'un pixel Δ_{px1} .

On peut alors étudier l'erreur $(z_1 - z_0)/\Delta_{px1}$ sous forme de densité de probabilité. Pour le cas d'une fine nappe laser, la figure 2.27 (gauche) montre qu'il y a plus de chance de se trouver sur un erreur extrême que autour de l'erreur moyenne. Cela vient de la forme pseudo-sinusoidale de l'erreur. Alors que pour la nappe épaisse (figure 2.27 droite), la densité semble suivre une loi gaussienne avec un écart type de $\sigma = 0,19\Delta_{px1}$, ce qui semble logique vu la nature aléatoire de l'erreur (autour du biais).

II.4.1 Précision dans l'espace de Fourier

On cherche maintenant à connaître les répercussions de l'erreur précédemment obtenue dans la mesure de l'amplitude d'une onde continue. On crée alors un bruit blanc $\epsilon(t)$ avec

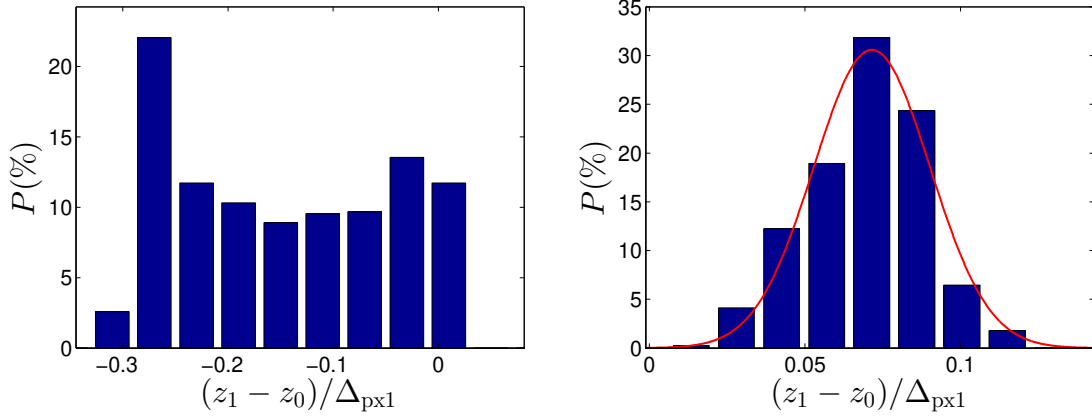


Figure 2.27 – Densité de probabilité sur la différence entre la caméra éloignée et la caméra proche du canal. À gauche pour la nappe fine et à droite pour la nappe épaisse. La courbe rouge indique la loi gaussienne interpolant les résultats.

un nombre d'échantillon N_t (correspondant au nombre d'images) et dont l'amplitude de chaque point suit une loi normale centrée sur zéro avec l'écart type précédemment obtenu $\sigma = 0,19\Delta_{\text{px}}$. On calcule ensuite la transformée de Fourier $\epsilon(\omega)$ afin d'obtenir l'amplitude à chaque fréquence a_ω . On répète ce test un certain nombre de fois N_e pour obtenir un grand nombre d'amplitudes a_ω (plus N_t sera petit plus N_e devra être grand pour garder $N_t \times N_e$ constant). On peut ensuite calculer la densité de probabilité de ces amplitudes en fonction du nombre N_t (figure 2.28). On nommera alors par $(a_\omega)_{50\%}$ l'amplitude en dessous de laquelle on retrouve 50% des valeurs mesurées (il en sera de même pour 95% et 99%). Chacune de ces limites semble suivre une loi semblable :

$$(a_\omega)_{. \%} = C_{. \%} \frac{\Delta_{\text{px}}}{\sqrt{N_t}} \quad (169)$$

avec $C_{50\%} = 0.033$, $C_{95\%} = 0.071$ et $C_{99\%} = 0.089$.

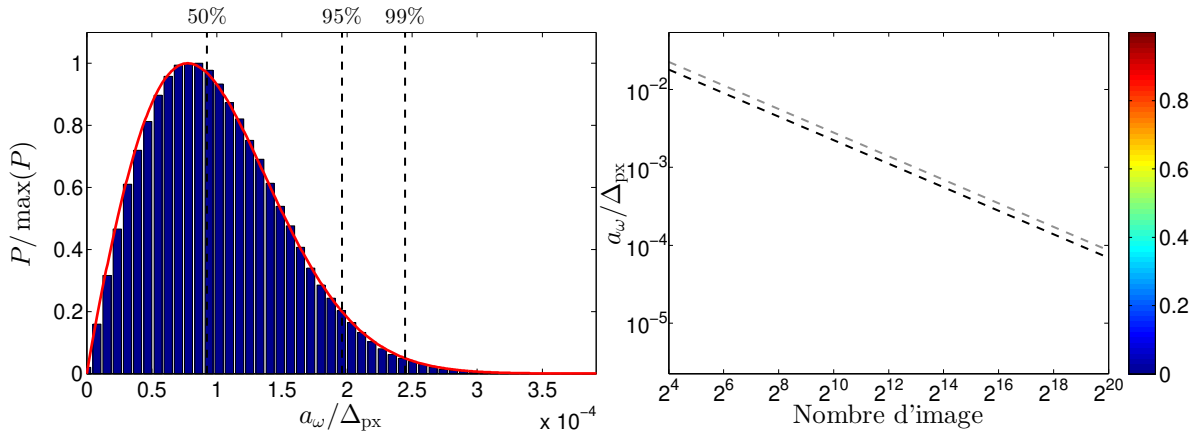


Figure 2.28 – À gauche : Densité de probabilité, pour un nombre d'échantillons temporels $N_t = 2^{17}$ et un nombre de tests $N_e = 2^3$, normalisée par la valeur maximale. La courbe rouge indique une interpolation à partir d'une loi de Weibull. À droite : Densité de probabilité en fonction du nombre d'images N_t , les droites pointillées indiquent les différentes limites $(a_\omega)_{50\%}$ (blanc), $(a_\omega)_{95\%}$ (noir), $(a_\omega)_{99\%}$ (gris).

Pour vérifier que cette estimation d'erreur est correcte, nous allons la comparer avec des résultats expérimentaux, qui concernent l'amplitude d'onde la plus petite mesurée. Ces résultats semblent montrer une amplitude de $0,1 \mu\text{m}$, ce qui paraît extrêmement

faible. Nous simulons alors ce résultat à partir d'un signal sinusoïdal spatio-temporel $z_0(x, t) = a_0 \cos(\omega_I t + k_I x)$ dont la fréquence angulaire vaut $\omega_I = 14,17$ Hz et le nombre d'onde $k_I = 32 \text{ m}^{-1}$, sur lequel on ajoute un bruit blanc $\epsilon(x, t)$ dont l'amplitude de chaque point suit une loi normale centrée sur zéro avec l'écart type $\sigma = 0,19\Delta_{\text{px}}$. Pour se placer dans les mêmes paramètres que dans l'expérience, on utilise un nombre d'échantillons temporels $N_t = 2^{17}$, une fréquence d'acquisition $f_{\text{acqui}} = 18,02$ Hz et une taille verticale de pixel de $\Delta_{\text{px}} = 219 \mu\text{m}$. Nous calculons ensuite la transformée de Fourier temporelle $\hat{z}(x, \omega)$ sachant que $z(x, t) = z_0(x, t) + \epsilon(x, t)$. Nous remarquons qu'un signal ressort bien à la fréquence souhaitée et que l'amplitude moyenne correspond bien à l'amplitude incidente. De plus, si l'on compare ce résultat à celui obtenu expérimentalement (figures 2.29 et 2.30), ils semblent très semblables ce qui indique que l'estimation d'erreur faite ici est cohérente (le fait que le signal expérimental à la fréquence incidente, varie en fonction de l'espace est dû à la présence de plusieurs ondes, mais cette question sera étudiée ultérieurement). La figure 2.30 (droite) montre que la mesure de l'onde incidente dans le bruit numérique donne $a(x) = 0,1 \pm 0,03 \mu\text{m}$. La comparaison avec les données expérimentales semble montrer que cette erreur est légèrement surévaluée car le niveau de bruit de la mesure expérimentale est inférieur à celui des données simulées (figure 2.30, courbes bleues), sachant qu'il s'agit à la fois du bruit de mesure, comme dans les données simulées, mais aussi d'une partie de bruit expérimental pouvant provenir du montage expérimental (par exemple de la pompe), bien qu'il était très faible pour le type d'écoulement étudié.

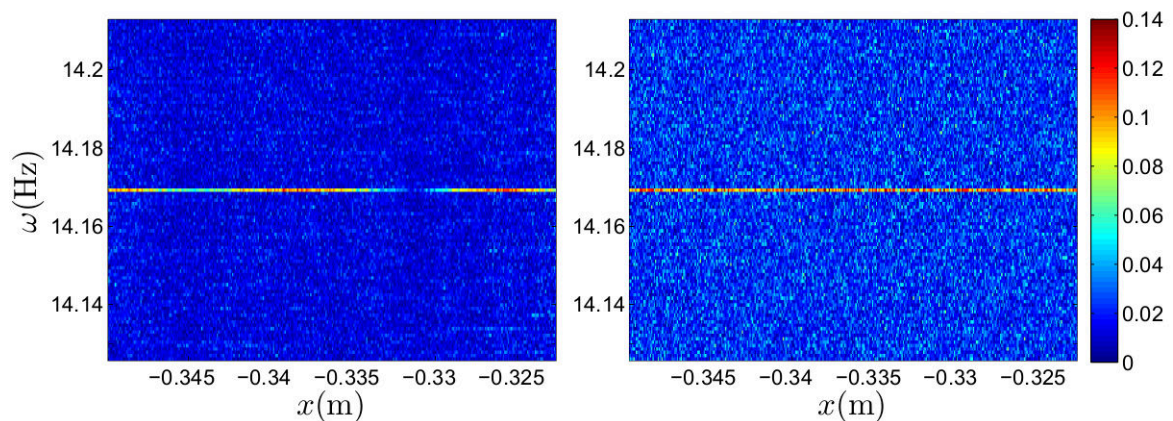


Figure 2.29 – À gauche : transformée de Fourier temporelle de données expérimentales. À droite : transformée de Fourier temporelle du signal simulé $\hat{z}(x, \omega)$ composé d'un sinusoïde de fréquence $\omega_I = 14,17$ Hz et d'un bruit blanc.

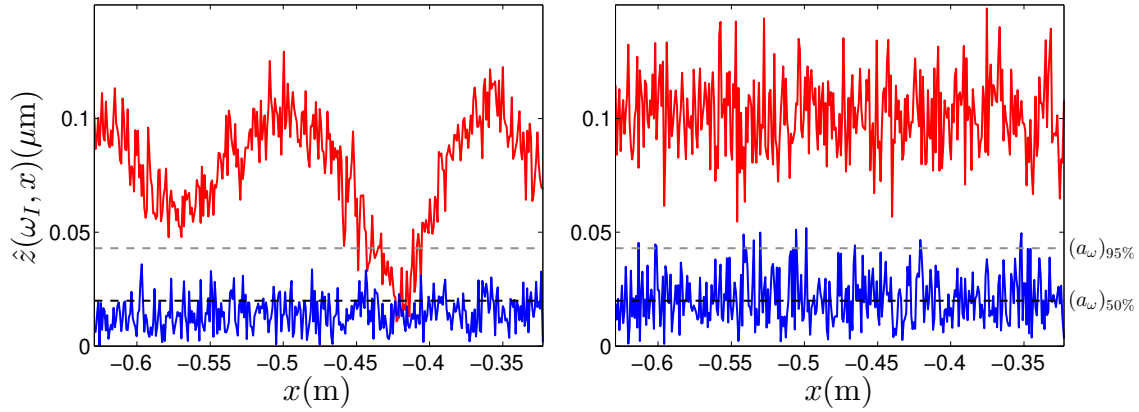


Figure 2.30 – Extraits à la fréquence incidente (rouge) des transformées de Fourier temporelle présentées figure 2.29 et à une autre fréquence quelconque (bleu). Pour le signal simulé (droite) et pour les données expérimentales (gauche).

II.5 Outils de traitement du signal

Cette partie consiste à faire un rappel rapide des différents outils de traitement du signal dans l’optique d’une meilleure compréhension des résultats qui suivront.

II.5.1 Transformée de Fourier

Les transformées de Fourier sont calculées sous *Matlab* avec une transformée de Fourier rapide (FFT). Les données résultantes de la mesure de surface libre (méthode optique), sont bi-dimensionnelles (dimension temporelle t et la dimension spatiale correspondant à la direction longitudinale du canal x). Notées $h(x, t)$ (pour hauteur d’eau), elles peuvent être traitées dans l’espace de Fourier de plusieurs façons. On peut calculer la transformée de Fourier spatio-temporelle, appelée FFT 2D dans ce manuscrit, pour obtenir $\hat{h}(k, \omega)$ dans l’espace spectral (nombre d’onde k et fréquence angulaire ω). La FFT 2D permet, par exemple, des comparaisons avec la relation de dispersion. On peut aussi calculer la transformée de Fourier uniquement temporelle $\hat{h}(x, \omega)$, afin d’obtenir l’évolution à une fréquence donnée selon x et d’observer des effets non-linéaires par exemple.

Pour illustrer ces différents traitements, prenons comme exemple un signal de la forme (on considérera l’amplitude comme sans dimension) :

$$\begin{aligned}
 h(x, t) &= a_1(x)\cos(k_1x - \omega_1t) + a_2(x)\cos(k_2x - \omega_2t) \quad x \in [0, 200] \\
 a_1(x) &= x \quad \text{et} \quad a_2(x) = (200 - x) \\
 \omega_1 &= 1 \text{ Hz}, \quad k_1 = 1 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = 0,6 \text{ Hz}, \quad k_2 = 1,2 \text{ m}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{170}$$

La figure 2.31 (gauche) montre ce signal sous la forme d’un diagramme espace-temps, on remarque alors l’interférence entre les deux signaux sinusoïdaux. La figure du centre montre la transformée de Fourier spatio-temporelle $\hat{h}(k, \omega)$ (FFT 2D), on remarque alors les pics aux niveaux des points (k_1, ω_1) et (k_2, ω_2) mais aussi pour $(-k_1, -\omega_1)$ et $(-k_2, -\omega_2)$, à cause de la symétrie de la transformée de Fourier $\hat{h}(k, \omega) = \hat{h}^*(-k, -\omega)$. L’amplitude au niveau du pic (k_1, ω_1) devrait être l’amplitude moyenne de ce signal, soit $\langle a_1 \rangle = 100$, mais comme elle se répartit à la fois sur ce pic et son symétrique, elle est alors divisée par 2. Dans la suite du manuscrit (dans les chapitres résultats), Nous compenserons ce problème en multipliant par deux les amplitudes dans l’espace de Fourier pour pouvoir

lire directement l'amplitude d'une sinusoïde au niveau d'un pic, par exemple, et non une moitié d'amplitude. On remarque aussi que les pics sont légèrement étalés selon k en raison de la variation spatiale de l'amplitude de chaque sinusoïde. La figure de droite montre la transformée de Fourier temporelle (FFT temporelle), on retrouve alors l'évolution spatiale de chaque amplitude $a_1(x)$ et $a_2(x)$.

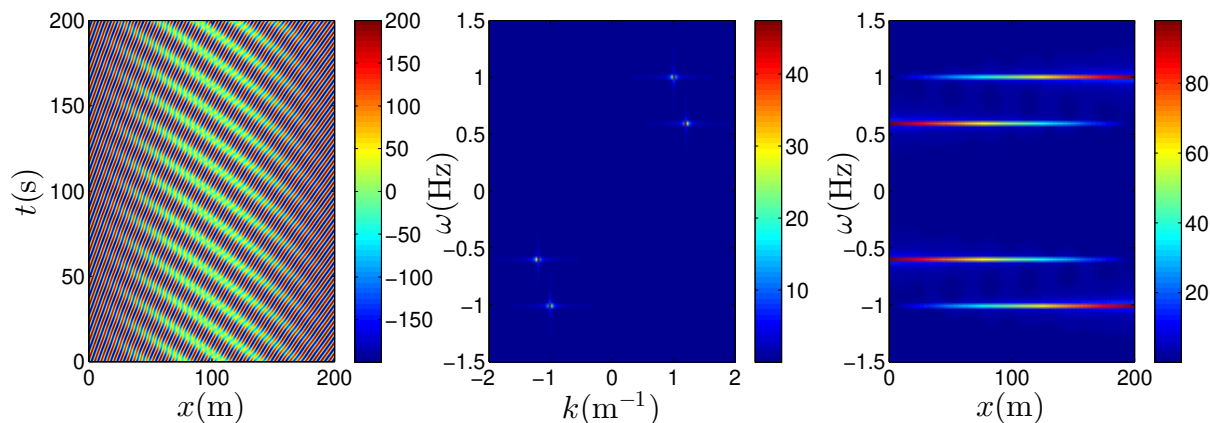


Figure 2.31 – À gauche : Diagramme spatio-temporel du signal suivant l'équation 170 pour une durée de 200 s avec 1024 pas de temps et une fenêtre spatiale de 200 m avec 1024 pas d'espace. Au centre : FFT 2D, du même signal. À droite : FFT temporelle.

II.5.2 Paramètres de la transformée de Fourier rapide (FFT)

On considère un signal temporel $y(t)$ obtenu avec une fréquence d'acquisition $f_{\text{acqui}} = 1/\Delta_t$ sur une durée de T est donc un nombre d'échantillons de $N_t = T/\Delta_t$. Sa transformée de Fourier rapide offrira alors une gamme de fréquence angulaire égale à $[-\pi/\Delta_t : \pi/\Delta_t]$ avec un pas fréquentiel de $\Delta_\omega = 2\pi/T$. Utiliser une longue durée d'acquisition peut être utile si l'on souhaite observer de faibles amplitudes dans une région où le bruit de surface libre est important (les fluctuations dues à l'écoulement). Dans le cas d'un bruit de mesure, comme vu précédemment, l'amplitude de ce bruit à chaque pas Δ_ω est déterminé par le nombre d'échantillons. Dans le cas d'un bruit de surface libre, il peut être localisé sur une certaine gamme de fréquences. Pour réduire son amplitude, il faudra alors que le nombre de pas Δ_ω sur cette gamme de fréquences soit important, autrement dit augmenter la durée d'acquisition T et non le nombre d'échantillons comme pour un bruit de mesure (même si dans le cas d'une fréquence d'acquisition conservée cela reviendra au même).

Il en sera de même pour les paramètres spatiaux d'acquisition avec Δ_x la résolution spatiale des caméras (taille des pixels), L la largeur de champ de visualisation et N_x le nombre de pixels selon la largeur.

Si on veut mesurer dans ce signal la contribution d'un onde de fréquence ω_i et de nombre d'onde k_i , il sera judicieux de choisir la durée d'acquisition en fonction de la fréquence de l'onde pour observer un nombre entier de périodes $\omega_i = n\Delta_\omega = n2\pi/T$ (avec $n \in \mathbb{N}$) pour éviter la fuite de spectre, ainsi les amplitudes à la fréquence ω_i seront réparties sur un seul « bin » ou pas Δ_ω . On prendra toujours un nombre d'images (N_t) en puissance de deux. Pour la fréquence d'acquisition, on la choisira pour ne pas avoir de repliement de spectre donc on la prendra supérieur à 4 fois la fréquence maximale du signal que l'on souhaite observer. La fréquence d'acquisition maximale des caméras est de 90 Hz, ce qui est largement suffisant, les fréquences des ondes étudiées étant de l'ordre du Hertz.

Pour ce qui est des paramètres spatiaux, nous serons limités sur la fenêtre de visualisation par les dimensions du canal et du système de mesure (nappe laser). La largeur maximale du champ de visualisation est alors de 2,7 m (figure 2.12). La taille des pixels varie entre 0,2 mm et 0,5 mm selon les expériences, ce qui permet donc de mesurer des longueurs d'onde de l'ordre du millimètre (quelques pixels) alors que les longueurs d'onde que l'on observera ne seront pas en dessous du centimètre. Spatialement, il est impossible d'éviter la fuite de spectre car plusieurs longueurs d'ondes sont présentes dans chaque expérience. On utilisera alors du « zero padding » (ajout de zéros en fin de signal augmentant virtuellement le nombre d'échantillons) pour obtenir des nombres d'échantillons en puissance de deux mais aussi pour avoir plus de précision sur la position et sur l'amplitude des pics. La figure 2.32 illustre l'intérêt de l'utilisation du « zero padding ».

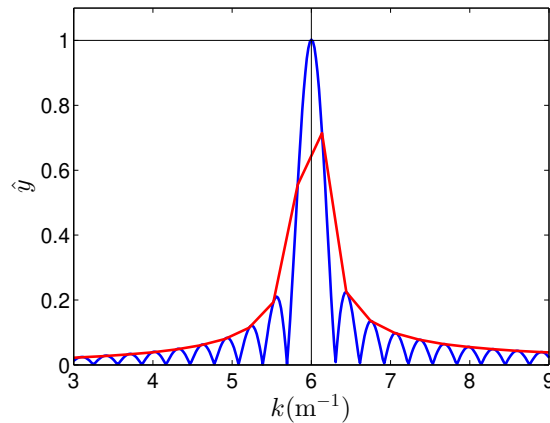


Figure 2.32 – Transformée de Fourier d'un signal $y = a \cos(kx)$ avec $a = 1$ et $k = 6\text{m}^{-1}$ sur une fenêtre $x \in [0, 20]$ et un nombre d'échantillons de $2^{11} = 2048$. En rouge sans zero padding et en bleu avec un zero padding de 2^{15} , les droites noires indiquent l'amplitude a et le nombre d'onde k .

II.5.3 Fenêtrage spectral

Pour mieux séparer l'influence de deux nombres d'onde proches, on aura recours à un fenêtrage de Hamming. Ce fenêtrage appliqué dans l'espace réel s'écrit :

$$\Pi_{\text{Hamming}}(x) = \frac{25}{46} - \frac{21}{46} \cos\left(2\pi \frac{x - x_0}{L}\right) \quad (171)$$

avec L la largeur de la fenêtre de visualisation et x variant sur $[x_0 : x_0 + L]$.

On prend alors comme exemple un signal composé de deux sinusoides :

$$y(x) = a_1 \cos(k_1 x) + a_2 \cos(k_2 x) \quad (172)$$

avec $a_1 = 1$, $k_1 = 1\text{m}^{-1}$, $a_2 = 0,05$, $k_2 = 1,05\text{m}^{-1}$. On considérera ce signal sur une fenêtre $x = [0 : 800]$ m.

Lorsque l'on n'applique pas de fenêtre, ou autrement dit que nous appliquons une fenêtre rectangulaire, nous remarquons qu'il n'est pas possible d'extraire l'amplitude de la seconde sinusoides (a_2) car elle est noyée dans les lobes secondaire du pic de la première sinusoides (figure 2.33 gauche). Alors qu'avec une fenêtre de Hamming, bien que les lobes principaux soient élargis, nous retrouvons l'amplitude des deux sinusoides (figure 2.33 droite).

Nous avons ensuite fait varier la valeur du nombre d'onde de la seconde sinusoides k_2 (figure 2.34) afin de vérifier quelle distance entre les deux nombres d'onde est nécessaire

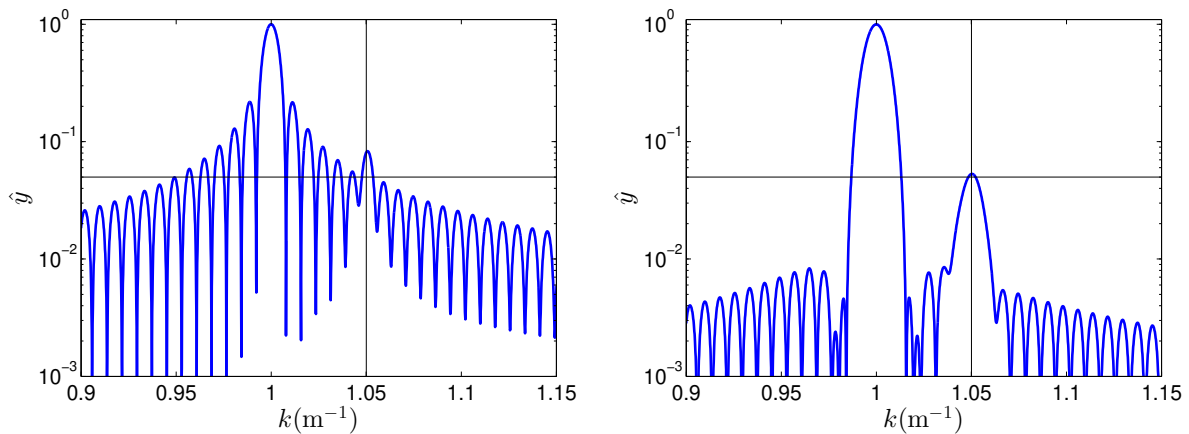


Figure 2.33 – Transformée de Fourier du signal 172 avec un fenêtrage rectangulaire (gauche) et de Hamming (droite). Les droites noires indiquent le nombre d'onde k_2 et l'amplitude a_2 de la seconde sinusoïde.

pour pouvoir retrouver l'amplitude de la seconde sinusoïde (les autres paramètres a_1 , k_1 et a_2 restant les mêmes). Nous remarquons que le fenêtrage de Hamming donne une erreur très faible même si les nombres d'onde sont proches en comparaison d'une fenêtre rectangulaire.

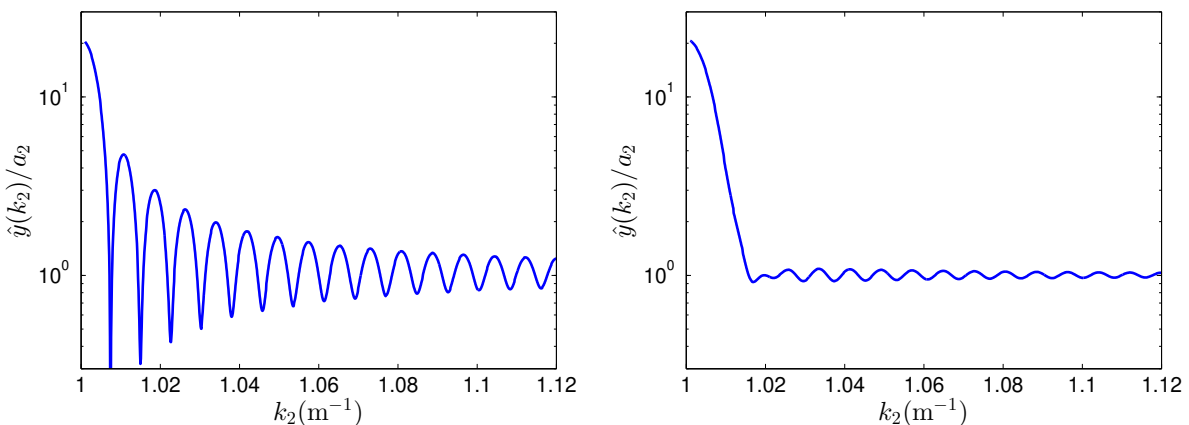


Figure 2.34 – Amplitude du signal pour $k = k_2$ adimensionné par l'amplitude a_2 en fonction de la valeur de k_2 avec un fenêtrage rectangulaire (gauche) et de Hamming (droite).

II.5.4 Filtres

Afin de pouvoir visualiser, dans l'espace réel, la contribution d'une seule solution, nous utilisons des filtres. Considérons un signal $h(x, t)$ composé de plusieurs ondes dont l'une possède une fréquence comprise entre ω_1 et ω_2 et un nombre d'onde compris entre k_1 et k_2 . Nous calculons la transformée du signal complet $\hat{h}(k, \omega)$, puis nous fixons à zéro tous les signaux en dehors des bornes de l'onde à étudier (soit $[\omega_1, \omega_2]$ et $[k_1, k_2]$) pour obtenir un signal filtré dans l'espace de Fourier $\hat{h}_f(k, \omega)$:

$$\hat{h}_f(k, \omega) = \begin{cases} 2\hat{h}(k, \omega) & \text{si } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad k \in [k_1, k_2] \\ 0 & \text{si } \omega \notin [\omega_1, \omega_2] \quad k \notin [k_1, k_2] \end{cases} \quad (173)$$

le signal filtré est multiplié par deux pour compenser le fait que nous filtrons le signal symétrique en $[-\omega_2, -\omega_1]$ et $[-k_2, -k_1]$.

Nous calculons ensuite la transformée de Fourier inverse de ce signal pour obtenir, le signal de l'onde à étudier dans l'espace réel $h_f(x, t)$, comme le montre la figure 2.35.

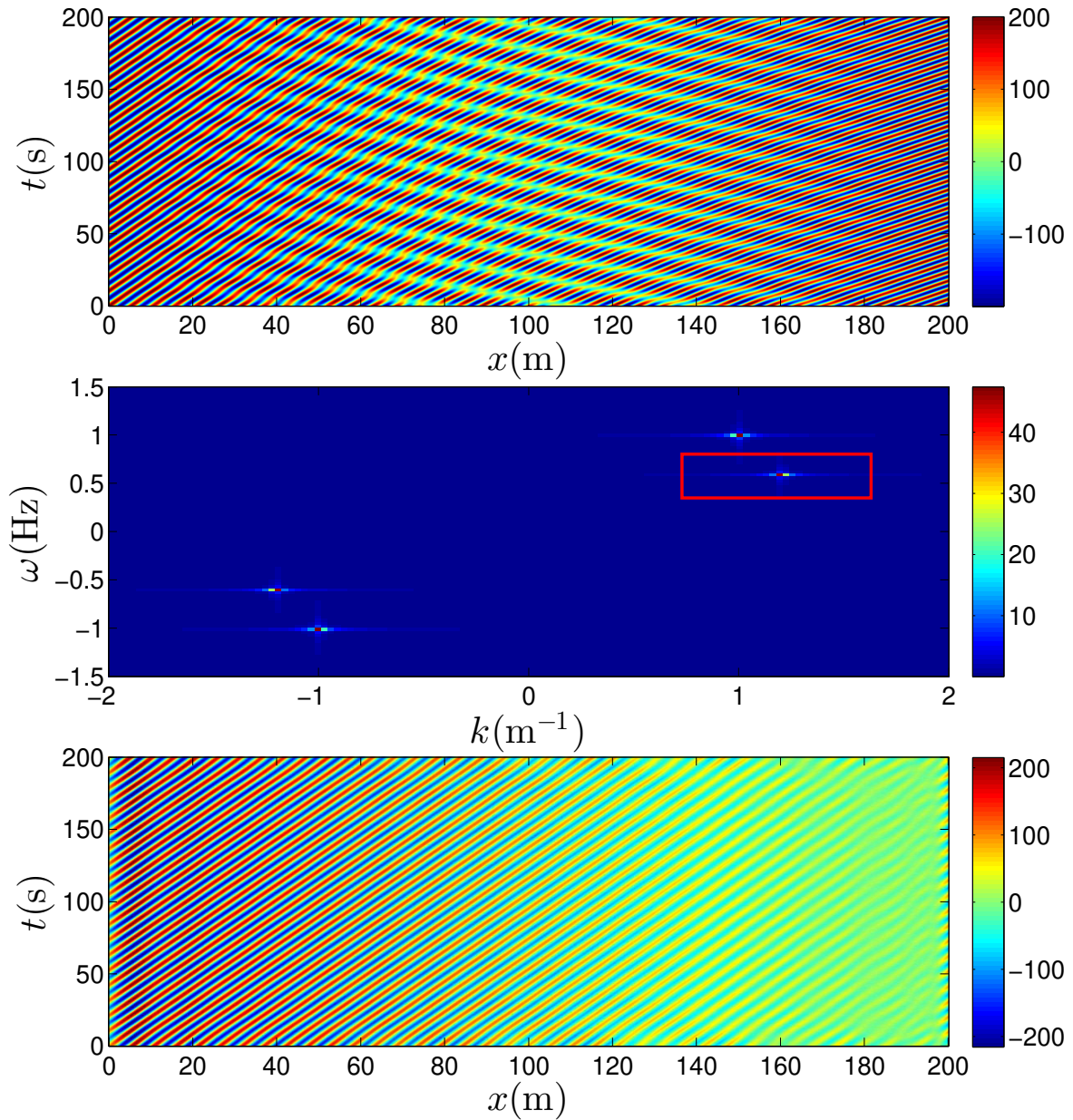


Figure 2.35 – En haut : signal brut $h(x, t)$. Au centre : transformée de Fourier du signal brut $\hat{h}(k, \omega)$, le rectangle rouge indiquant les bornes du filtre. En bas : signal filtré $h_f(x, t)$.

Dans ce manuscrit, nous travaillons la plupart du temps avec des ondes continues de fréquence fixée ω_I , et comme dit précédemment, nous choisissons les paramètres d'acquisition pour que les amplitudes à cette fréquence se trouvent sur un seul pas Δ_ω . Les bornes temporelles du filtre peuvent alors se réduire à un seul « bin » dans la transformée de Fourier numérique correspondant à la fréquence ω_I .

Trou blanc hydraulique : reproduction des expériences de Vancouver

III.1 Régime	78
III.1.1 Paramètres du régime.....	78
III.1.2 Champs de vitesse.....	82
III.1.3 Diagramme de phase.....	86
III.2 Transmission	87
III.3 Étude de linéarité	90
III.3.1 Ondulation stationnaire et bruit.....	90
III.3.2 Cas stimulés par le batteur	92
III.3.3 Conséquences sur la radiation de Hawking.....	100
III.4 Conclusion	104

Les premières expérimentations reproduisent les expériences réalisées à Vancouver en 2011 par l'équipe comprenant William Unruh et présentées dans les publications [Weinfurtner *et al.*, 2011] et [Weinfurtner *et al.*, 2013]. Ces expériences, basées sur l'étude d'un trou blanc hydraulique, étant les plus avancées en gravitation analogue expérimentale dans le domaine des ondes de surface au début de cette thèse, il semblait alors logique de commencer par là. Le but est donc de vérifier que les résultats obtenus sont similaires aux leurs, mais aussi de comprendre l'ensemble des phénomènes pouvant apparaître dans l'étude d'un écoulement au dessus d'un obstacle sur lequel on envoie des ondes à contre-courant.

Une mesure de champ de vitesse montre la génération d'une couche limite turbulente dans la partie en aval de l'obstacle dont l'épaisseur est du même ordre de grandeur que la hauteur maximale de l'obstacle. Cette couche limite modifiera alors la relation de dispersion dans cette région.

Cette étude a aussi permis de constater qu'une grande partie des fréquences étudiées dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] ne présentent pas de point de blocage (horizon analogue), l'onde incidente envoyée par le batteur est alors transmise de l'autre côté de l'obstacle [Euvé *et al.*, 2015]. Dans ce cas, on s'éloigne alors de l'analogie.

En s'intéressant aux cas où l'onde incidente est, cette fois-ci, bloquée par l'écoulement au dessus de la bosse, nous observons que les amplitudes des modes convertis diminuent fortement jusqu'à disparaître durant leur propagation à co-courant. L'une des explications de ce phénomène, aussi observé par l'équipe de Vancouver, était que ces modes subissaient une forte dissipation visqueuse. Mais en étudiant différentes amplitudes d'onde incidente, nous avons pu comprendre qu'il s'agissait en réalité d'un phénomène non-linéaire de génération d'harmoniques libres [Euvé et Rousseaux, 2016], qui a déjà été étudié dans des configurations d'ondes se propageant sur un obstacle mais sans courant [Massel, 1983, Ohyama et Nadaoka, 1994, Li et Ting, 2012, Monsalve Gutiérrez, 2017].

III.1 Régime

III.1.1 Paramètres du régime

Souhaitant reproduire les résultats obtenus par l'équipe de Vancouver, un obstacle identique à celui utilisé dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] (dont la géométrie est décrite précisément dans [Weinfurtner *et al.*, 2013]) a été réalisé afin d'obtenir un courant inhomogène selon la direction de l'écoulement. Sa géométrie est composée à la fois de formes type aile d'avion et de plaques planes comme le montre la figure 3.1 et l'équation 174. Par la suite, cet obstacle sera appelé « obstacle de Vancouver ». Il en sera de même pour le régime d'écoulement (débit, hauteur d'eau) indiqué dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] et alors nommé « régime de Vancouver ».

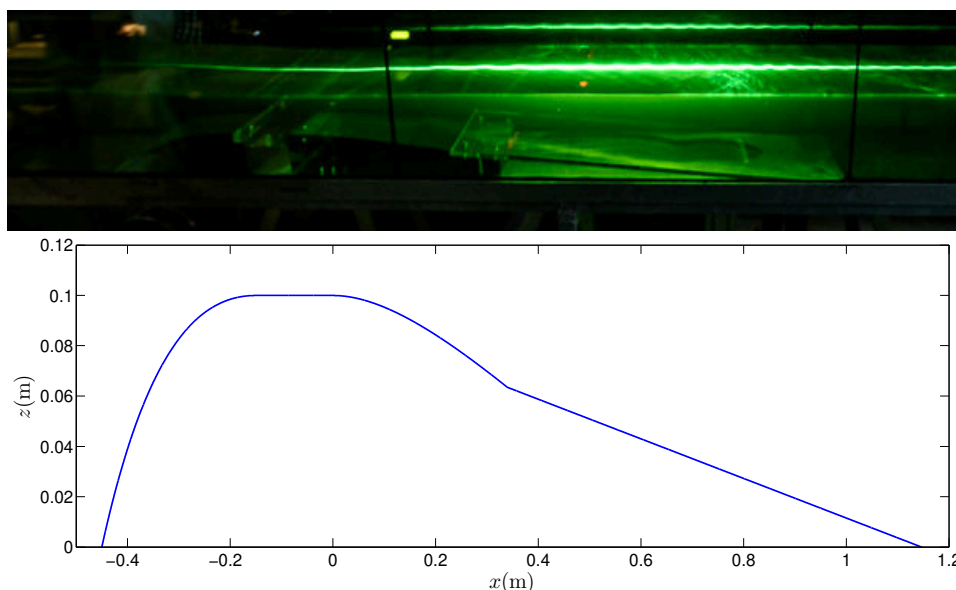


Figure 3.1 – Haut : photo de l'obstacle de Vancouver. Bas : géométrie de l'obstacle de Vancouver.

La géométrie de l'obstacle est donnée par :

$$o(x) = \begin{cases} 2a(1 - (x - x_1) - e^{-b(x-x_1)}) & \forall x \in [x_1 : x_2] \\ 0, 1 & \forall x \in [x_2 : x_3] \\ 2a(1 - (x - (x_1 - x_2)) - e^{-b(x-(x_1-x_2))}) & \forall x \in [x_3 : x_4] \\ o(x_4) - (x - x_4) \tan(4, 5^\circ) & \forall x \in [x_4 : x_5] \end{cases} \quad (174)$$

avec $x_1 = -0,45$ m, $x_2 = -0,15$ m, $x_3 = 0$ m, $x_4 = 0,34$ m, $x_5 = 1,15$ m, $a = 0,094$, $b = 5,94$.

Avant de s'intéresser aux paramètres du régime d'écoulement utilisés dans [Weinfurtner *et al.*, 2011], nous avons voulu savoir quels types d'écoulement apparaissent lorsque nous faisons varier le débit et la hauteur d'eau. Ces mesures ont été réalisées durant mon stage de Master avant la thèse [Euvé, 2014]. Pour cela, des sondes acoustiques ont été placées dans la région en aval de l'obstacle afin de mesurer la hauteur d'eau. Plusieurs sondes sont nécessaires car, dans le cas où le régime d'écoulement provoque une ondulation stationnaire, une seule sonde peut alors être positionnée au niveau d'une crête ou d'un creux et fournir une valeur de hauteur d'eau légèrement erronée, alors qu'en considérant la moyenne des mesures fournies par trois sondes, l'erreur est alors fortement diminuée.

Nous avons ensuite cherché le débit pour lequel l'ondulation commençait à être visible et celui où l'ondulation devenait déferlante. Le déferlement étant considéré comme le moment où l'une des éteules de l'ondulation (ondulations secondaires) commence à déferler. Ces observations ont été faites à l'oeil nu et sont donc très subjectives, principalement pour l'apparition d'une ondulation visible, car elle devrait exister pour tout couple débit/hauteur (tant que la vitesse maximale est supérieure à $q/h = U_\gamma = 0,23$ m/s qui correspond à la limite de la disparition de l'ondulation stationnaire mais aussi des modes négatifs). D'un autre côté, l'apparition des premiers déferlements était assez claire visuellement, l'erreur sur cette limite doit alors être faible. Toutes ces mesures sont reportées sur la figure 3.2, où il a aussi été indiqué les valeurs de débit et de hauteur d'eau utilisées dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] (symbolisées par la croix noire). Nous remarquons que l'équipe de Vancouver s'est placée à la limite du déferlement pour obtenir un nombre de Froude maximal important tout en conservant un régime d'écoulement non-déferlant. De plus, la figure 3.2 indique la vitesse U_γ dans la région en aval. L'ondulation (et les modes négatifs) devrait alors disparaître dans la région en aval de l'obstacle si on se trouve au dessus de la droite en pointillés (bien qu'elle puisse être présente plus en amont de cette région, sur l'obstacle).

Nous remarquons que les paramètres du régime de Vancouver permettent aux modes négatifs d'exister dans la région en aval de l'obstacle. La position de cette droite devrait être légèrement modifiée (décalée vers la gauche) car elle est basée sur une vitesse moyenne de l'écoulement $U = q/h$ (ou vitesse débitante) alors que, en raison du développement d'une couche limite (que nous étudierons par la suite), la vitesse en surface est supérieure à la vitesse moyenne. Nous utilisons aussi une autre sonde acoustique afin de déterminer la hauteur d'eau minimum h_{\min} observée au dessus de l'obstacle permettant de connaître le nombre de Froude maximum en fonction des paramètres de l'écoulement. Nous constatons alors qu'il est impossible (pour cette géométrie d'obstacle) que le nombre de Froude maximum dépasse une valeur d'environ 0,7 si l'on souhaite, à la fois, ne pas observer de déferlement et obtenir une vitesse en aval de l'obstacle supérieure à U_γ .

Les dimensions du canal utilisé dans les expériences [Weinfurtner *et al.*, 2011] étaient légèrement différentes de celles du canal utilisé à l'Institut Pprime, sa longueur était de 6,8 m alors qu'à Poitiers elle est de 7 m et sa largeur était de 0,15 m contre 0,39 m dans les expériences qui vont suivre. Les largeurs étant différentes, pour obtenir un profil de vitesse identique, nous convertissons le même débit par unité de largeur $q=0,045$ m²/s, ce qui équivaut à Poitiers à un débit volumique de 17,58 L/s. La hauteur asymptotique dans la région en aval est fixée à 0,194 m (grâce à la position verticale de la guillotine en fin de canal). La direction de propagation du courant ainsi que de celles des ondes étant la même, le problème peut alors être réduit à deux dimensions (\vec{x} la direction longitudinale au canal et \vec{z} la direction verticale). La différence de largeur de canal ne devrait alors pas avoir de conséquences notables sur les résultats concernant les modes longitudinaux (se propageant selon la même direction que celle du courant).

Les résultats de mesure de surface libre (mesure optique avec ligne laser) nous montrent que le nombre de Froude maximum observé au dessus de l'obstacle vaut $F=0.67$ (pour $h_{\min}=77,5$ mm). L'ondulation stationnaire atteint une amplitude d'environ 4 mm et sa longueur d'onde varie de $\lambda=50$ mm et $\lambda=120$ mm (figure 3.3).

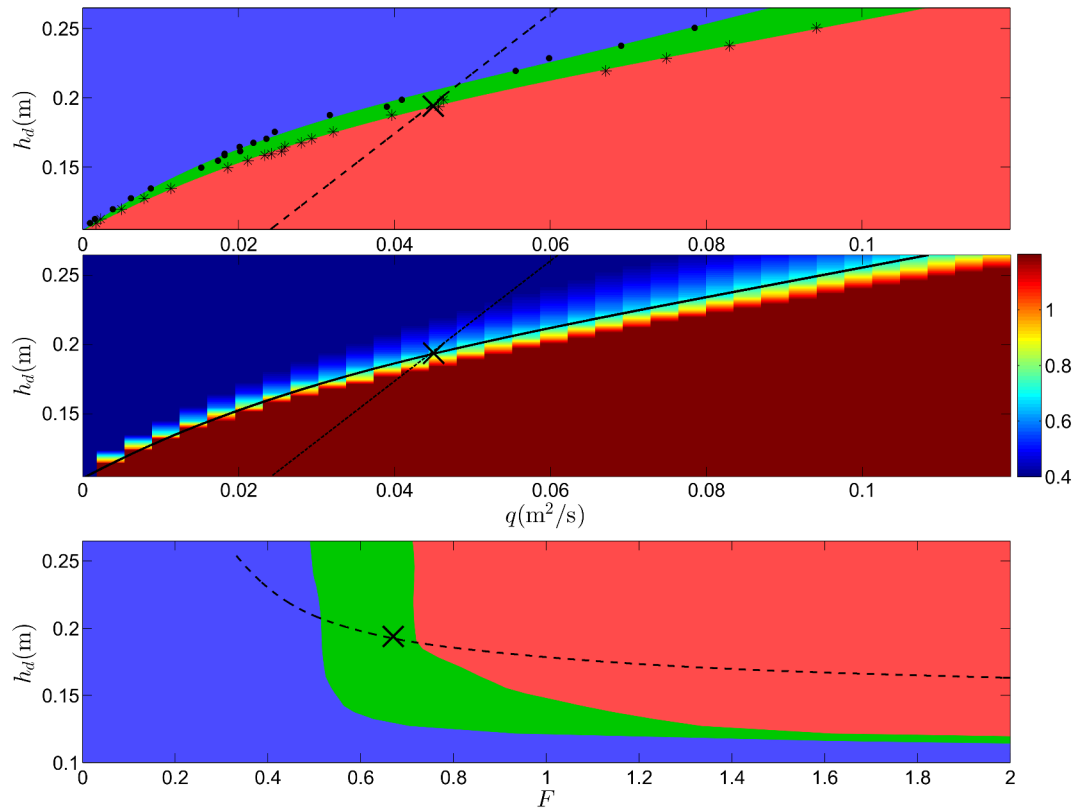


Figure 3.2 – En haut : types d'écoulement observés au dessus de l'obstacle de Vancouver. La zone bleue indique les paramètres où l'ondulation n'est pas visible (à l'oeil nu). La zone rouge correspond aux régimes déferlants. La zone verte correspond aux paramètres où l'ondulation est visible et non-déferlante. Les ronds noirs correspondent aux mesures indiquant l'apparition de l'ondulation et les étoiles correspondent aux premiers déferlements. La croix noire correspond aux paramètres du régime utilisés dans [Weinfurtner *et al.*, 2011]. Les limites entre les types d'écoulement sont obtenues à partir d'une interpolation polynomiale de degré 4 des mesures indiquées par les marqueurs. La droite en pointillés indiquent la vitesse $q/h = U_\gamma = 0,23 \text{ m/s}$.

Au centre : l'échelle de couleur représente le nombre de Froude maximum calculé à partir de h_{\min} , la courbe noire indique la limite de déferlement.

En bas : types d'écoulement en fonction du nombre de Froude maximum et de la hauteur en aval (légende identique au graphique du haut). Ce diagramme peut être comparé avec ceux de [Forbes et Schwartz, 1982] et [Lowery et Liapis, 1999].

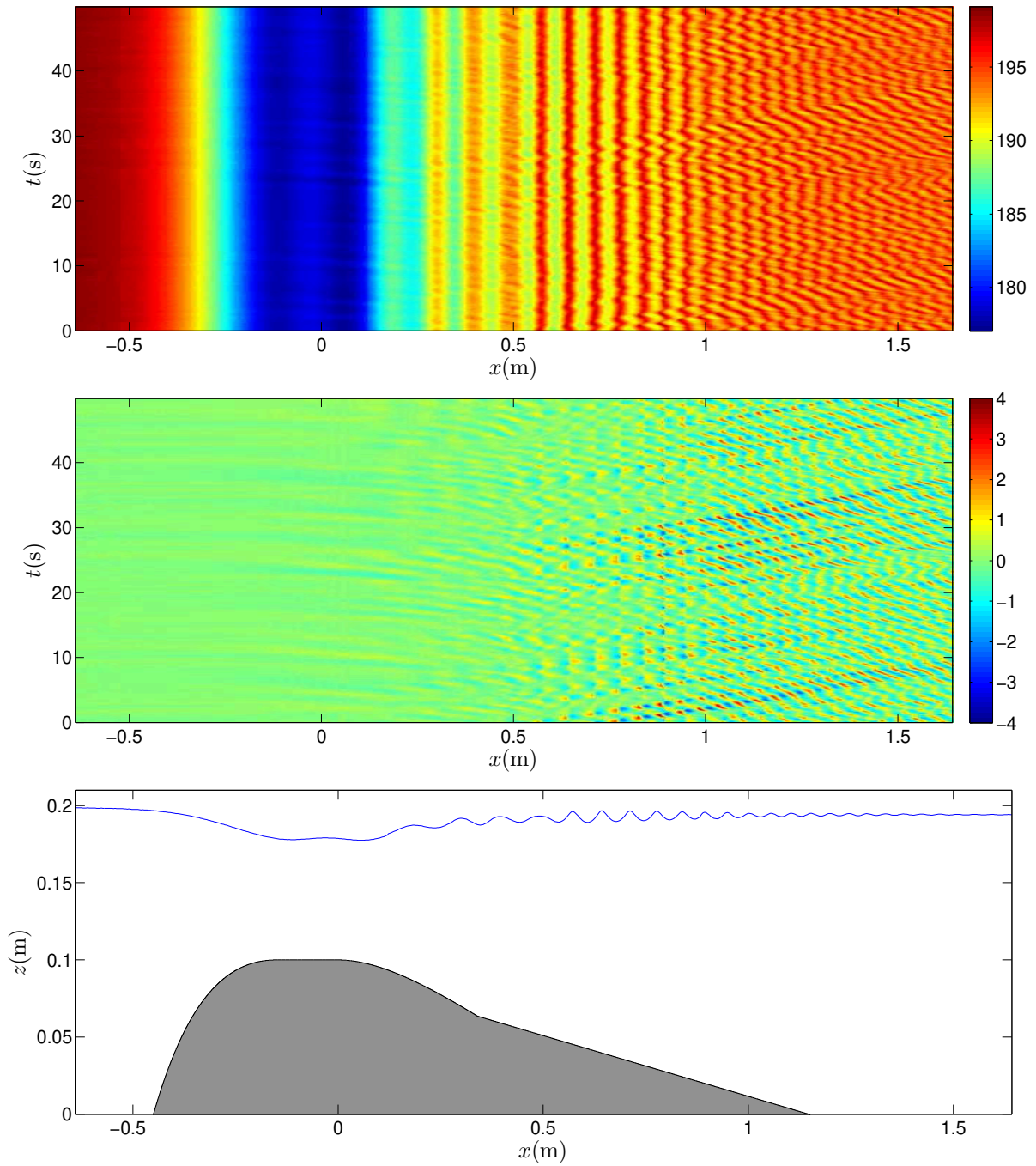


Figure 3.3 – Haut : diagramme espace-temps des variations de hauteur d'eau $h(x, t)$ (en mm) du régime utilisé dans les expériences de Vancouver. Centre : diagramme espace-temps des fluctuations de surface libre $\delta h(x, t)$ (en mm) avec suppression de l'ondulation stationnaire. Bas : ondulation stationnaire $\langle h(x, t) \rangle$ provoqué par la présence de l'obstacle.

III.1.2 Champs de vitesse

Afin de mesurer les champs de vitesse sous la surface libre pour ce régime, une méthode de vélocimétrie par images de particules (PIV) a été mise en place. L'écoulement estensemencé avec des particules de polyamide (Vestosint 2158) dont la petite taille et leur densité proche de celle de l'eau ($d_{50}=20 \mu\text{m}$, $\rho=1016 \text{ kg/m}^3$) permettent de suivre les déplacements du fluide. Un Laser Nd :Yag (*Dantec Dynamics Dual Power 2x50 mJ*) impulsionnel double cavité permet de générer deux nappes Laser séparées d'un intervalle de temps Δt (dépendant de la vitesse moyenne de l'écoulement afin d'obtenir un déplacement moyen de 8 pixels entre deux images), dans notre cas Δt est compris entre 2 ms et 5 ms selon la région de l'écoulement à étudier. Une caméra CMOS (SpeedSense 1040 de Dantec Dynamics - 2320x1726) synchronisée avec le Laser capture alors 4000 doublets d'images à une fréquence d'acquisition de 40 Hz. Les mesures sont réalisées dans le plan (xOz), avec z la verticale et x la direction longitudinale de l'écoulement, et au centre du canal. La nappe Laser ne pouvant pas être projetée par le dessus à cause des déformations qu'induirait la surface libre, un obstacle transparent en PMMA a dû être réalisé (figure 3.1) afin que la nappe, qui est émise par le dessous, puisse le traverser. Afin d'avoir une résolution assez bonne, la caméra est placée de telle sorte qu'elle observe un champ de 400 mm de large. Elle est ensuite déplacée pour observer différentes régions de l'écoulement. Certaines régions observées ont été réduites à cause de zones d'ombre dues aux montants de renfort sous le canal ou aux jointures des différentes pièces de l'obstacle.

Les résultats (figures 3.4, 3.5 3.6, 3.7 et 3.8) montrent la génération d'une couche limite dans la partie aval de l'obstacle. Nous observons que la limite supérieure de la couche limite est environ égale à la hauteur maximale de l'obstacle.

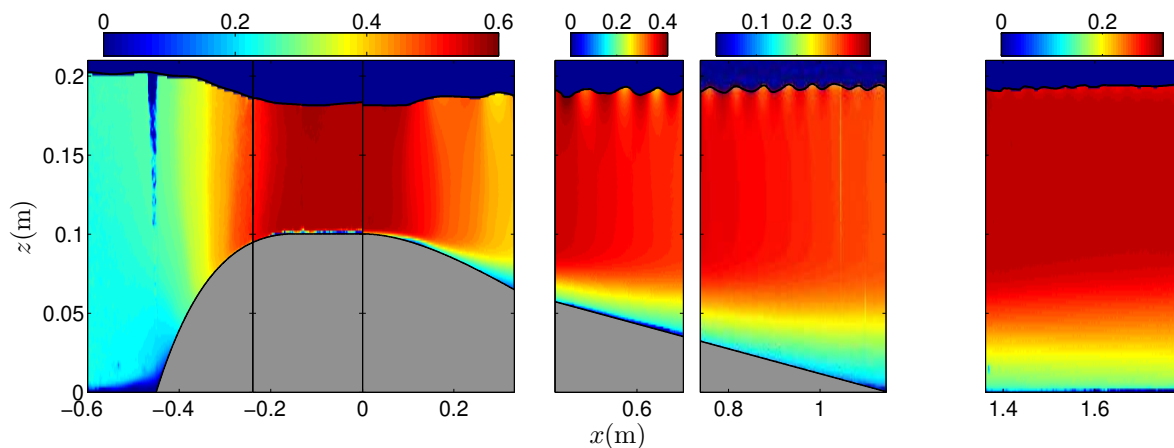


Figure 3.4 – Composante horizontale du champ de vitesse moyen $U_x(\text{m/s})$ de l'écoulement au dessus de l'obstacle.

Dans la zone de vitesse constante, en aval de l'obstacle (fenêtre de mesure tout à droite), nous nous intéressons aux fluctuations de vitesse ($U_x(x, z_*, t)$ et $U_z(x, z_*, t)$) au niveau d'un profil horizontal sous la surface libre à $z=z_*=0,18 \text{ m}$ (figure 3.9). La figure 3.10 montre les transformées de Fourier 2D de ces fluctuations de vitesse ($U_x(k, z_*, \omega)$ et $U_z(k, z_*, \omega)$). On remarque alors que l'on retrouve la relation de dispersion dans cette région (en considérant la vitesse mesurée par PIV). Quand on trace la transformée de Fourier des fluctuations de surface libre de la figure 3.3 dans la zone de vitesse constante en aval de l'obstacle pour $x \in [1,15 : 1,64] \text{ m}$ (figure 3.11), nous remarquons que les fluctuations de vitesse et de hauteur d'eau sont très similaires qualitativement. Cela semble tout à fait logique car toutes ces fluctuations sont liées mathématiquement :

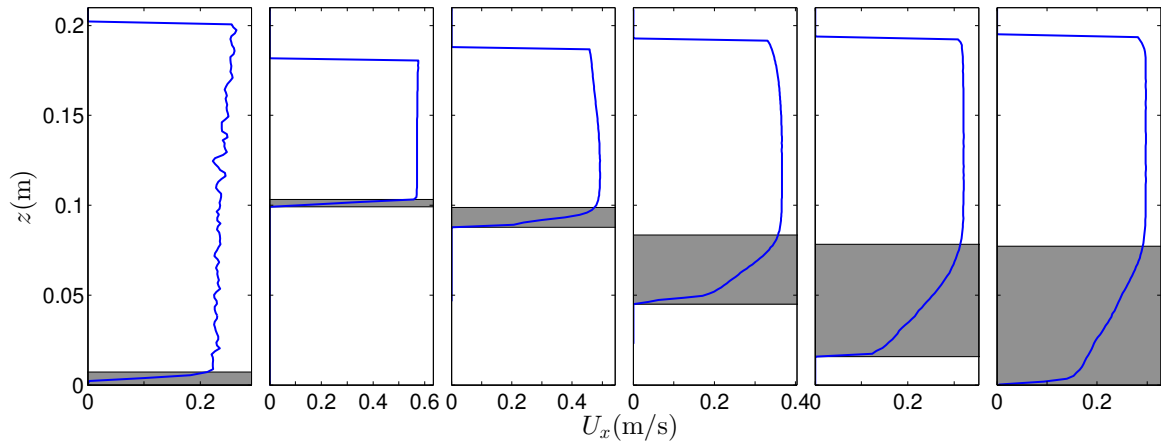


Figure 3.5 – Profil vertical moyen de la composante horizontale $U_x(z)$ (m/s) pour différentes positions le long du canal. De gauche à droite : $x=-0,580$ m, $-0,120$ m, $0,166$ m, $0,561$ m, $0,941$ m et $1,572$ m (au centre de chaque fenêtre à part pour celle en amont). Les zones grisées représentent l'épaisseur de couche limite.

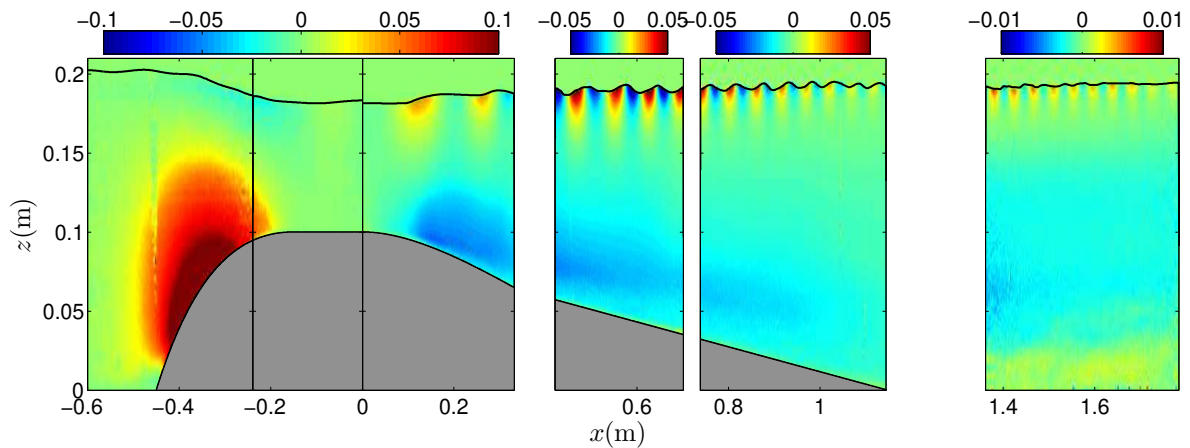


Figure 3.6 – Composante verticale du champ de vitesse moyen U_z (m/s) de l'écoulement au dessus de l'obstacle.

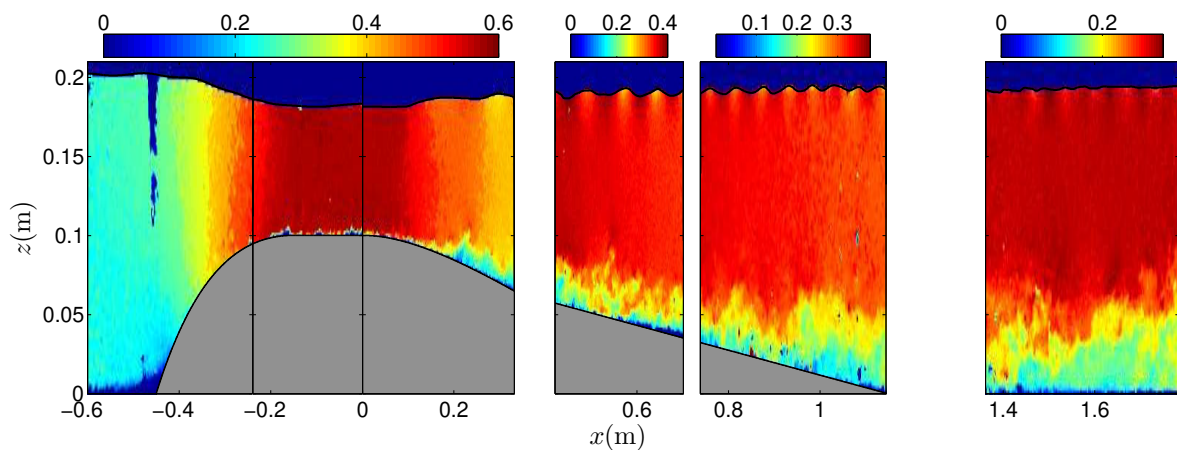


Figure 3.7 – Composante horizontale d'un champ de vitesse instantané U_x (m/s) de l'écoulement au dessus de l'obstacle.

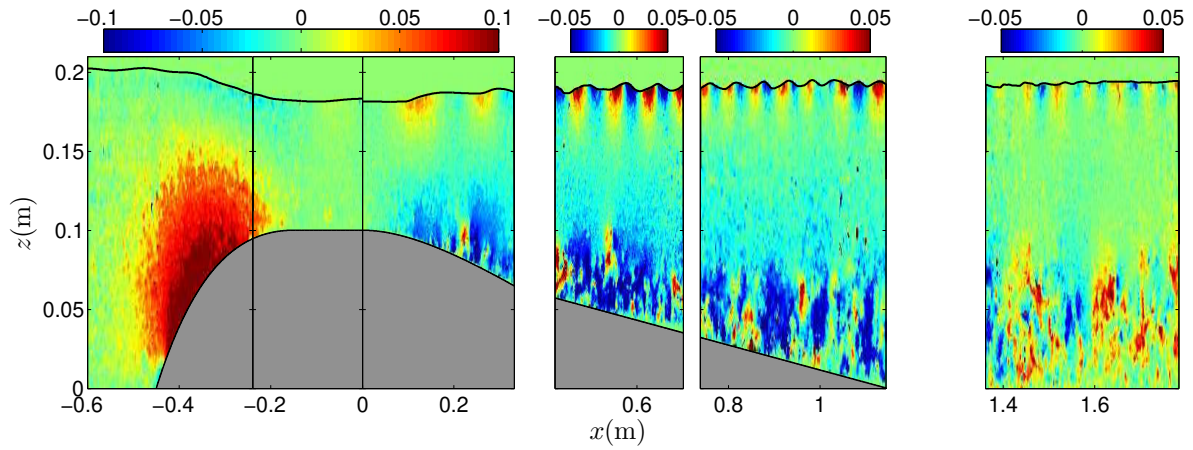


Figure 3.8 – Composante verticale d'un champ de vitesse instantané U_z (m/s) de l'écoulement au dessus de l'obstacle.

$$\begin{aligned} \delta h(x, t) &= \sum_k \sum_\omega a(k, \omega) \exp(i(kx - \omega t)) \\ \delta U_x(x, z, t) &= \sum_k \sum_\omega a(k, \omega) \omega \frac{\cosh(kz)}{\sinh(kh)} \exp(i(kx - \omega t)) \\ \delta U_z(x, z, t) &= \sum_k \sum_\omega a(k, \omega) \omega \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kh)} \exp(i(kx - \omega t - \pi/2)) \end{aligned} \quad (175)$$

On peut alors considérer la valeur absolue de ces fluctuations :

$$\begin{aligned} |\delta \hat{h}(k, \omega)| &= a(k, \omega) \\ |\delta \hat{U}_x(k, z, \omega)| &= a(k, \omega) \omega \frac{\cosh(kz)}{\sinh(kh)} \quad |\delta \hat{U}_z(k, z, \omega)| = a(k, \omega) \omega \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kh)} \end{aligned} \quad (176)$$

On en déduit les fluctuations du champ de vitesse à partir des fluctuations de surface libre (figure 3.12) en utilisant :

$$|\delta \hat{U}_x(k, z, \omega)| = \omega \frac{\cosh(kz)}{\sinh(kh)} |\delta \hat{h}(k, \omega)| \quad |\delta \hat{U}_z(k, z, \omega)| = \omega \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kh)} |\delta \hat{h}(k, \omega)| \quad (177)$$

Sur la figure 3.11 sont tracées les relations de dispersion en prenant en compte, soit la vitesse du fluide mesurée ($U=0,295$ m/s), soit la vitesse du fluide dans l'hypothèse d'un profil vertical de vitesse constant ($U=q/h=0,232$ m/s). On remarque que les relations de dispersion sont très différentes et que l'hypothèse d'un profil vertical constant n'est pas du tout valable dans le cas présent.

La figure 3.12 indique la transformée de Fourier des fluctuations de surface libre sur laquelle on a appliqué les deux facteurs théoriques $\omega \frac{\cosh(kz)}{\sinh(kh)}$ et $\omega \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kh)}$ pour retrouver une forme de fluctuations de vitesse comme indiquée dans l'équation 177. Nous avons considéré dans ce cas $z = h$ car l'étude des fluctuations de vitesse à partir des données PIV est faite très proche de la surface libre. La région étudiée reste en aval de l'obstacle mais sa largeur (0,4 m) et la durée sur laquelle on étudie les fluctuations (100 s) ont été prises identiques à celles pour l'étude des fluctuations de vitesse à partir des données PIV, pour pouvoir comparer les deux résultats. Nous remarquons alors que ces fluctuations de vitesse calculées à partir des données de surface libre sont très proches, cette fois-ci en quantité, de celles obtenues par PIV (figure 3.10). Il faut tenir en compte que cette

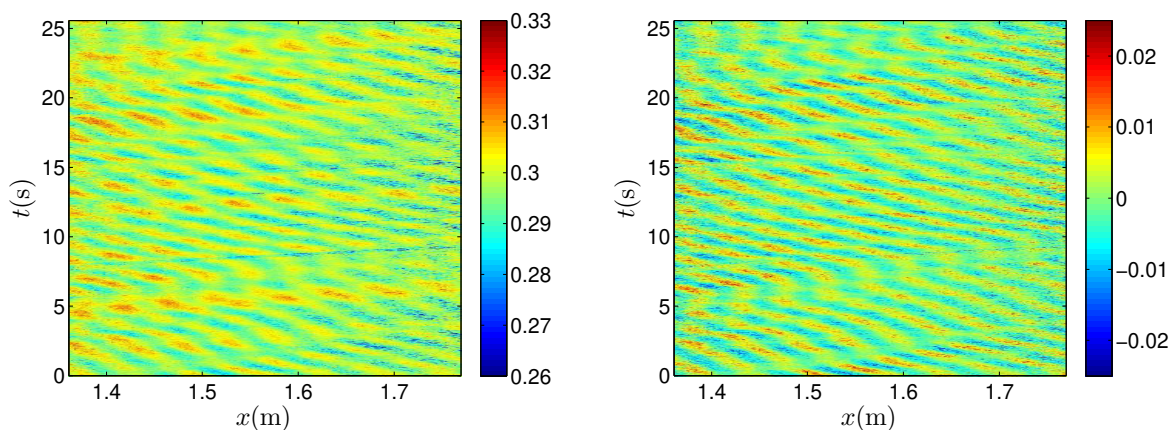


Figure 3.9 – Diagramme espace-temps des fluctuations de vitesse au niveau d’un profil horizontal sous la surface libre à $z=z_*=0,18$ m. À gauche : composante horizontale $\delta U_x(x, z_*, t)$, à droite : composante verticale $\delta U_z(x, z_*, t)$.

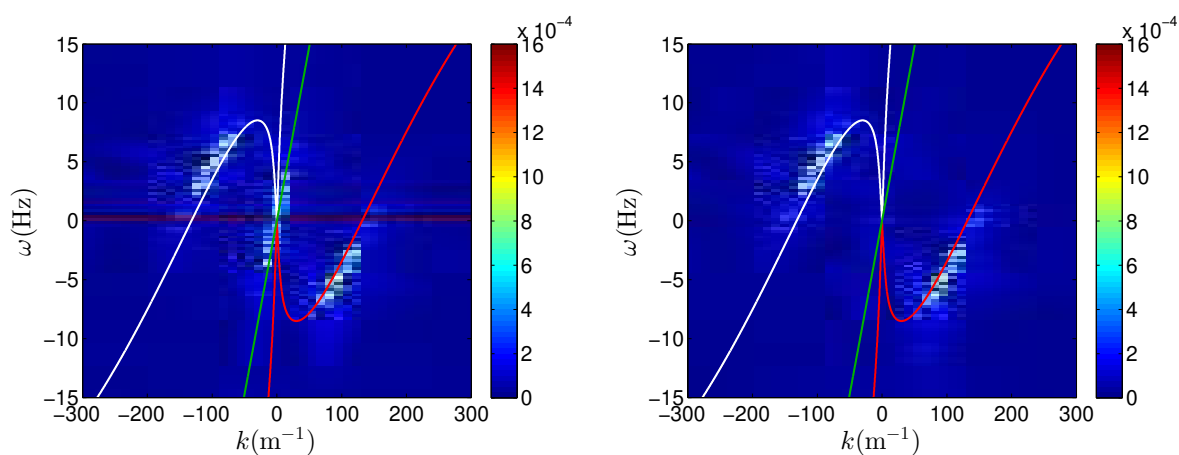


Figure 3.10 – FFT 2D des diagrammes espace-temps des figures 3.9. À gauche : composante horizontale $|\delta \hat{U}_x(k, z_*, \omega)|$, à droite : composante verticale $|\delta \hat{U}_z(k, z_*, \omega)|$. Les courbes blanche et bleue correspondent aux branches de la relation de dispersion (respectivement de fréquence relative positive et négative) en tenant compte de la vitesse du fluide mesurée. La courbe verte représente la branche d’advection $\omega = Uk$.

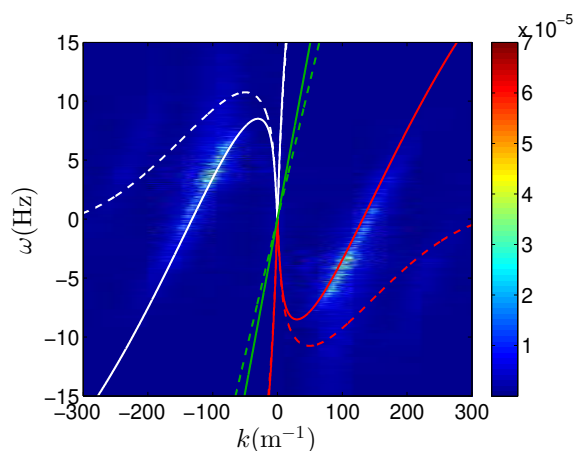


Figure 3.11 – FFT 2D des fluctuations de surface libre $|\delta \hat{h}(k, \omega)|$ de la figure 3.3 dans la zone de vitesse constante en aval de l’obstacle ($x \in [1,15 : 1,64]$ m). Les amplitudes sont en mètres. Les courbes blanche et bleue correspondent aux branches de la relation de dispersion et la courbe verte représente la branche d’advection $\omega = Uk$. En continu : avec U la vitesse du fluide mesurée par PIV, en tirets : avec la vitesse moyenne $U = q/h$.

méthode n'est pas tout à fait correcte car elle considère que les fluctuations de vitesse sont seulement causées par des ondes se propageant à la surface et donc, que le courant sur lequel elles se propagent ne fluctue pas, ce qui est faux. Mais il reste très intéressant de voir le couplage des deux types de fluctuations, ainsi que de pouvoir obtenir la relation de dispersion à partir des fluctuations de vitesse.

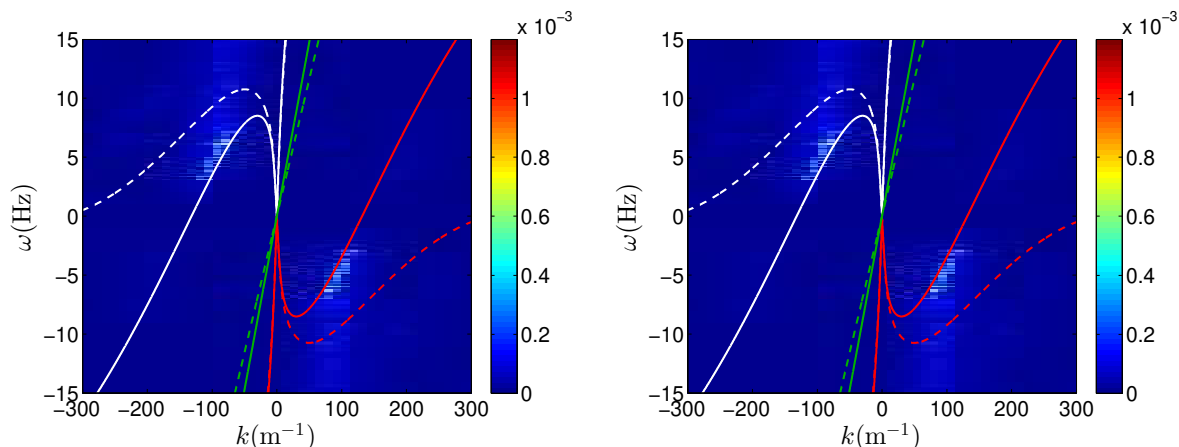


Figure 3.12 – Calcul des fluctuations du champ de vitesse à partir des fluctuations de surface libre en utilisant les équations 177. À gauche : composante horizontale $|U_x(k, z_*, \omega)|$, à droite : composante verticale $|U_z(k, z_*, \omega)|$.

III.1.3 Diagramme de phase

La figure 3.13 (gauche) présente le diagramme de phase (U, T) de l'écoulement au dessus de l'obstacle de Vancouver. La gamme de vitesse indiquée est celle présente sur la partie décroissante de l'obstacle, entre la position où le nombre de Froude est maximum et la zone en aval de l'obstacle. L'étude portant sur la conversion au niveau d'un horizon blanc, c'est dans cette partie de l'écoulement que cet horizon pourra être présent. On remarquera que la vitesse minimum est supérieure à U_γ comme montré précédemment, la tension de surface ne fera donc pas apparaître d'horizon capillaire pour cette gamme de vitesse.

Le diagramme de phase montre que, en raison d'un nombre de Froude inférieur à 1 ($F=0.67$), ce régime ne peut pas bloquer les ondes longues. En effet, on remarque que la courbe noire représentant l'horizon blanc est hors de la gamme de vitesse pour les périodes supérieures à 2,62 s (soit $\omega < \omega_{\min} = 2,4$ Hz). Seules les ondes dont la période est entre 0,76 s et 2,62 s ($2,4 \text{ Hz} < \omega < 8,3 \text{ Hz} = \omega_{\max}$) seront bloquées par le contre-courant. Sur la figure 3.13 (droite), sont représentées les relations de dispersion dans la région en aval de l'obstacle, mettant en évidence la fréquence ω_{\max} , et au dessus de l'obstacle où le nombre de Froude est maximal, mettant en évidence la fréquence ω_{\min} .

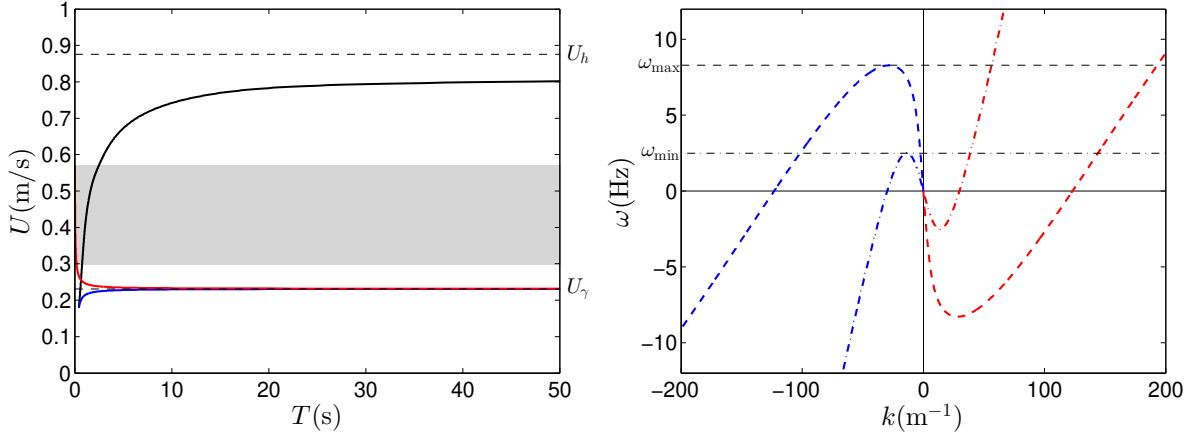


Figure 3.13 – Gauche : Diagramme de phase (U, T) . La zone grisée indique la gamme de vitesse de l'écoulement sur la partie décroissante de l'obstacle de Vancouver. Droite : Relation de dispersion dans la région en aval de l'obstacle (en tirets), et au dessus de l'obstacle où le nombre de Froude est maximum (en point-tirets). Les droite horizontale indiquent les fréquences limites, ω_{\max} (en tirets) et ω_{\min} (en point-tirets).

III.2 Transmission

Comme discuté précédemment, le régime d'écoulement permettra de créer des points de blocage (horizons analogues) seulement pour les fréquences supérieures à ω_{\min} . Mais il faut noter que la conversion vers les ondes courtes reste possible pour des fréquences inférieures à ω_{\min} , grâce à l'introduction d'un point de blocage complexe et non réel (comme discuté dans [Coutant et Weinfurtner, 2016]).

Dans cette partie, on se concentre sur le coefficient de transmission $|\tilde{A}_\omega|$ intervenant dans l'équation de diffusion :

$$\phi_\omega^{\leftarrow, I} \rightarrow \alpha_\omega \phi_\omega^{\rightarrow, B} + \beta_\omega \left(\phi_{-\omega}^{\rightarrow, N} \right)^* + \tilde{A}_\omega \phi_\omega^{\leftarrow, T} + A_\omega \phi_\omega^{\rightarrow, R} \quad (178)$$

où chaque coefficient de diffusion peut être obtenu grâce au calcul du flux d'action de chaque onde intervenant dans la conversion :

$$\mathcal{A} \sim \frac{a^2}{\sigma} v_g, \quad |\tilde{A}|^2 = \frac{\mathcal{A}_T}{\mathcal{A}_I}, \quad |A|^2 = \frac{\mathcal{A}_R}{\mathcal{A}_I}, \quad |\alpha|^2 = \frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}_I}, \quad |\beta|^2 = \frac{\mathcal{A}_N}{\mathcal{A}_I} \quad (179)$$

avec \mathcal{A} le flux d'action d'onde, a l'amplitude, σ la fréquence relative et $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ la vitesse de groupe dans le référentiel du laboratoire.

La fréquence relative et la vitesse de groupe nous sont données par la relation de dispersion. Dans l'étude présente, se concentrant seulement sur l'onde transmise, nous utilisons alors quatre sondes acoustiques placées de chaque côté de l'obstacle pour mesurer, à la fois, l'onde incidente et l'onde transmise (figure 3.14). Les mesures par sondes acoustiques sont ponctuelles contrairement à la mesure optique avec la ligne Laser mais elles peuvent être placées de façon plus espacée le long du canal. Deux sondes acoustiques sont alors placées dans la région en aval de l'obstacle à $x=-3,17$ m et $x=-4,17$ m (avec la position $x=0$ m à l'extrémité droite de la partie plane supérieure de l'obstacle de même que dans les mesures précédentes) afin de mesurer l'amplitude l'onde incidente. On verra par la suite que les ondes converties n'atteignent pas ce point de l'écoulement, ce qui nous permet de mesurer seulement l'onde incidente. Deux autres sondes sont placées dans la région en amont de l'obstacle à $x=-0,95$ m et $x=-0,55$ m dans le but de mesurer l'amplitude de l'onde possiblement transmise. Nous utilisons deux sondes pour mesurer chacune des

amplitudes, même si une seule aurait suffi, pour vérifier qu'elles fournissent un résultat similaire. L'amplitude est alors obtenue par moyenne des deux mesures.

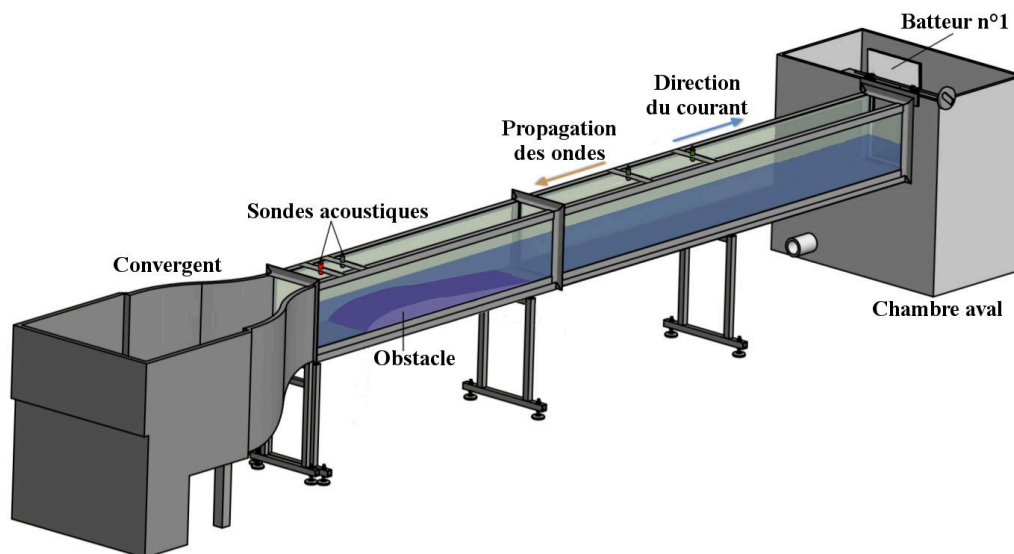


Figure 3.14 – Schéma du canal avec mesure par sonde acoustique.

Nous envoyons, sur le régime, 13 fréquences incidentes allant de 0,82 Hz à 3,48 Hz (nous rappelons que $\omega_{\min} = 2,4$ Hz) avec une amplitude d'environ 0,8 mm.

La figure 3.15 indique les résultats de la mesure du coefficient de transmission ainsi qu'une comparaison avec des résultats numériques dont les méthodes sont décrites dans [Euvé *et al.*, 2015]. On remarque alors que le coefficient tend vers zéro pour les plus hautes fréquences ($> \omega_{\min}$), montrant l'absence de transmission. Par contre pour les plus faibles fréquences où l'on s'attend à voir un coefficient tendre vers 1, nous observons une variation des résultats, cela provient du fait que, lorsqu'il y a transmission, l'onde transmise est réfléchiée sur la paroi de la chambre d'entrée du canal. La superposition de cette onde réfléchiée sur l'onde transmise et l'onde incidente crée des motifs d'interférence qui viennent perturber la mesure de l'amplitude des ondes qui nous intéressent. Mais ces mesures confirment tout de même la forte transmission pour des fréquences inférieure à ω_{\min} . Plus précisément, $|\tilde{A}|^2 \sim 1/16$ pour $\omega = 2,6$ Hz, cela montre que la contribution de la transmission dans l'unitarité ne peut être négligée que pour des fréquences incidentes élevées. Dans les expériences de l'équipe de Vancouver (figure 5 [Weinfurtner *et al.*, 2011]), seulement quatre points expérimentaux sur neuf impliquent un point de blocage (car $> \omega_{\min} = 2,4$ Hz) et valident la condition $|\tilde{A}|^2 < 1/16$.

Une autre façon de visualiser la transmission est de tracer l'enveloppe des fluctuations de surface libre (obtenues avec la méthode optique) à la fréquence incidente $\delta\hat{h}(\omega_I, x)$ que nous adimensionnons par l'amplitude de l'onde incidente (figure 3.16). Nous remarquons alors que, pour les fréquences $\omega > \omega_{\min}$, l'amplitude tend bien vers zéro en amont de l'obstacle (figure 3.16 droite), alors que dans le cas où $\omega < \omega_{\min}$ l'amplitude de l'onde transmise est environ égale à celle de l'onde incidente (figure 3.16 gauche).

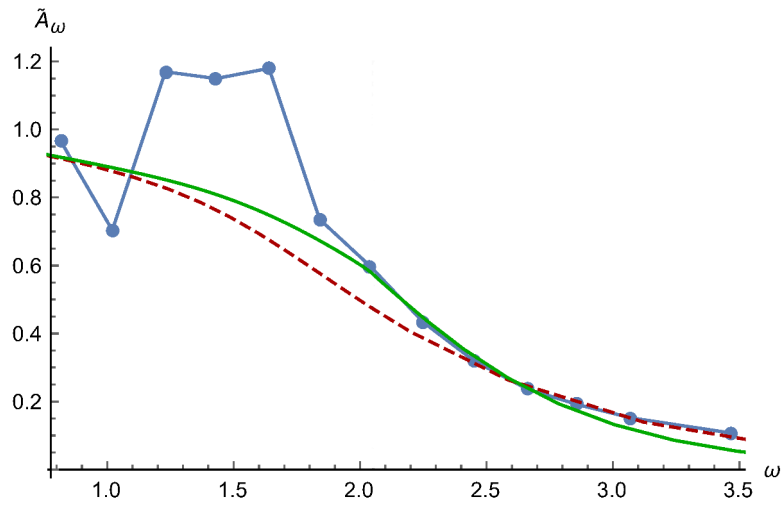


Figure 3.15 – Coefficient de transmission $|\tilde{A}|$ en fonction de ω . La courbe en tirets rouge utilisant une extension standard de la relation de dispersion du quatrième ordre, la courbe verte est obtenue avec une méthode numérique raffinée. Les points bleus représentent les résultats expérimentaux. On rappelle que $\omega_{\min}=2,4$ Hz.

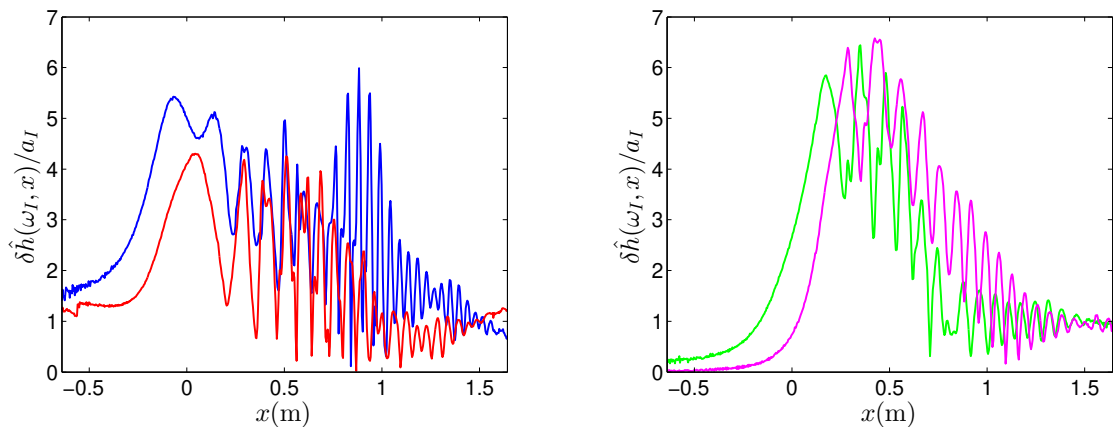


Figure 3.16 – Enveloppe des fluctuations de surface libre à la fréquence incidente $\delta h(\omega_I, x)$ adimensionnée par l'amplitude de l'onde incidente ($a_I = 0,08$ mm). La couleur des courbes correspond à différentes fréquences envoyées par le batteur ω_I : 1,13 Hz (bleu), 2,14 Hz (rouge), 3,14 Hz (vert), 4,21 Hz (violet).

III.3 Étude de linéarité

Les études préliminaires sur le type d'écoulement présent sur l'obstacle de Vancouver en fonction des paramètres d'écoulement (figure 3.2), montrent qu'autour du régime de Vancouver décrit précédemment, si l'on diminue légèrement la hauteur d'eau ou bien si l'on augmente faiblement le débit dans le but d'augmenter le nombre de Froude maximum de l'écoulement, l'ondulation se met alors à déferler. On peut alors prévoir que la superposition de l'onde incidente et des ondes converties sur ce régime pourrait très vite faire apparaître des non-linéarités même à faible amplitude. Dans cette partie, nous allons donc vérifier cette prédiction et essayer de comprendre les non-linéarités qui peuvent apparaître. Les résultats qui vont suivre ont été obtenus avec la méthode optique (ligne laser).

III.3.1 Ondulation stationnaire et bruit

On propose d'étudier premièrement la surface libre induite par l'écoulement au-dessus de l'obstacle sans envoyer d'onde. Elle est composée à la fois de l'ondulation stationnaire et du bruit de surface comme le montre la figure 3.3.

L'ondulation stationnaire (figure 3.3 bas) est considérée comme une onde courte (dans l'hypothèse d'eau profonde) car la hauteur d'eau adimensionnée reste dans l'intervalle $2 < kh < 27$ (soit $\tanh(kh) \approx 1$). Les non-linéarités seront alors contrôlées par la cambrure des ondes ka et seront indépendantes de la hauteur d'eau. Afin d'accéder à la cambrure de l'ondulation stationnaire en fonction de la position le long du canal, on détecte la position des crêtes et des creux nous donnant ainsi accès à son amplitude a et sa longueur d'onde $2\pi/k$. On remarque que sur la figure 3.17 gauche, la cambrure de l'ondulation stationnaire est assez élevée, atteignant $ka = 0,23$ à $x \sim 0,65m$, si on la compare au critère de déferlement en eaux profondes sans courant proposé par Miche $ka = 0,45$ ([Miche, 1944]). L'onde stationnaire doit donc être considérée comme une onde de Stokes en eaux profondes décrite par :

$$h(x) = h_0 + a[\cos(kx) + \frac{1}{2}ka \cos(2kx) + \frac{3}{8}(ka)^2 \cos(3kx) + \dots] \quad (180)$$

avec h_0 , a et k variant selon x . L'amplitude de la seconde harmonique est de 12% celle de la fondamentale et la troisième 2% si on considère le maximum de cambrure $ka = 0,23$.

En tronquant l'équation (180) au premier ordre (houle de Airy), on peut aussi définir :

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \approx -ka \sin(kx) \quad \text{si on pose} \quad \frac{\partial h_0(x)}{\partial x} \ll ka, \quad \frac{\partial k(x)}{\partial x} \ll ka \quad \text{et} \quad \frac{\partial a(x)}{\partial x} \ll ka \quad (181)$$

alors $\max \left(\left| \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right| \right) \approx ka$

La figure 3.17 gauche, montre que la correspondance entre la dérivée spatiale de l'ondulation et la cambrure (équation 181) est à peu près vérifiée pour l'étude d'une seule onde, à part dans la région entre $x = 0$ m et $x = 0,25$ m car la condition $\partial h_0(x)/\partial x \ll ka$ n'est plus valable.

Sur la figure 3.17 (droite), nous avons tracé les solutions de l'équation 180 à l'ordre 1 (houle de Airy) et à l'ordre 3, en ajustant légèrement les valeurs de $a(x)$ et $h_0(x)$ pour une meilleure comparaison. Nous remarquons que l'onde stationnaire s'éloigne fortement

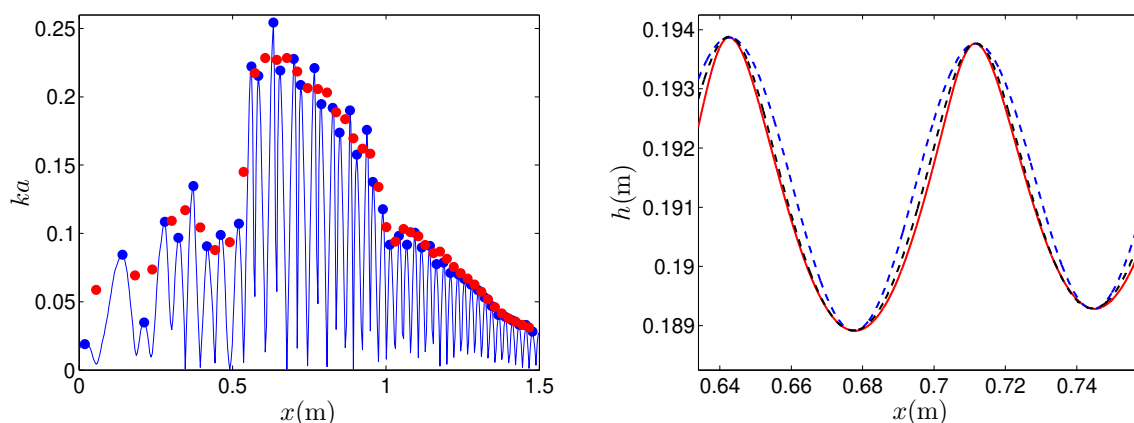


Figure 3.17 – Gauche : Les points rouges représentent la cambrure ka de l’ondulation stationnaire, la courbe bleue correspond à sa dérivée spatiale $|\partial h/\partial x|$ et les points bleus aux maxima de la dérivée spatiale. Droite : La courbe rouge correspond à l’ondulation stationnaire mesurée, la courbe en tirets bleus montre la solution de l’équation (180) à l’ordre 1 (houle de Airy), la courbe en tiret noir correspond à la solution de l’équation (180) à l’ordre 3 (houle de Stokes 3^{ème} ordre).

d’une solution sinusoidale (Airy). L’ondulation stationnaire est donc non-linéaire bien que cela n’implique pas nécessairement que les ondes qui se propageront sur celle-ci le seront.

On s’intéresse maintenant à la cambrure de la surface libre résultante de l’addition de l’ondulation stationnaire et du bruit de surface libre. Dans ce cas, on se trouve en présence d’une multitude d’ondes, le critère de non-linéarité sera la dérivée spatiale $|\partial h/\partial x|$ même si cette fois il n’y aura pas de correspondance avec la cambrure ka . Nous opérons alors de la même façon que pour l’ondulation seule mais pour chaque pas de temps. Pour éviter des mesures aberrantes, on divise nos résultats en 32 intervalles de temps, nous recherchons ensuite le maximum de la dérivée spatiale pour chaque position et sur chaque intervalle de temps, puis nous moyennons sur tous les intervalles. Nous remarquons (figure 3.18) que ce critère non-linéaire atteint 0,35 lorsque l’on considère le bruit, en comparaison à 0,25 pour l’ondulation seule. Les critères non-linéaires (cambrure et dérivée spatiale) sont

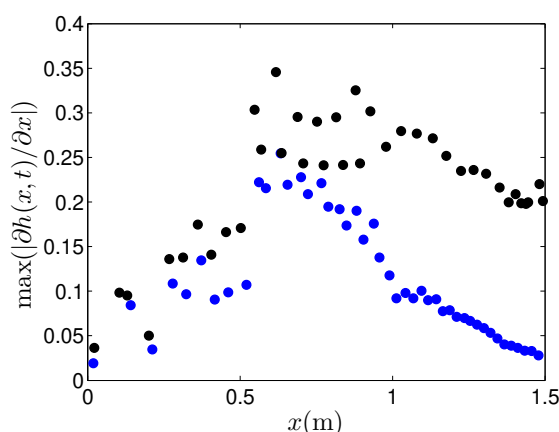


Figure 3.18 – Les points bleus correspondent aux maxima de la dérivée spatiale $|\partial h/\partial x|$ de l’ondulation stationnaire seule et les points noirs ceux de l’ondulation stationnaire et du bruit.

déjà très élevés avant même d’envoyer des ondes grâce au batteur. Ils atteignent la valeur de 0,35 si l’on considère l’addition de l’ondulation stationnaire et du bruit, ce qui semble élevé si n au critère de cambrure critique du déferlement introduit par Miche ($ka=0,45$). Cela semble être cohérent avec le fait que les paramètres du régime se trouvent à la limite du déferlement (figure 3.2).

III.3.2 Cas stimulés par le batteur

Dans [Weinfurtner *et al.*, 2011], l'amplitude des ondes longues, générées à contre courant dans la région en aval de l'obstacle, était annoncée d'environ 2 mm. Ne sachant pas si il s'agit de l'amplitude de la sinusoïde (a) ou de l'amplitude crête à creux ($2a$), nous avons décidé d'étudier des amplitudes inférieures à 1 mm. Comme nous cherchons à vérifier la présence ou non de non-linéarités, plusieurs amplitudes d'onde incidente sont alors étudiées : 0,05, 0,15, 0,35, 0,8 mm correspondant à un déplacement mécanique du batteur de 0,25, 0,50, 1 et 2 mm.

Le problème de transmission sur les plus basses fréquences ayant déjà été étudié, nous décidons de nous focaliser sur un cas bloquant ($\omega_I = 3,14\text{Hz} > \omega_{\min}$). Les diagrammes espace-temps des fluctuations de surface libre sont présentés sur la figure 3.19.

Sur la figure 3.20 est tracée l'enveloppe des fluctuations de surface libre à la fréquence incidente $\delta h(\omega_I, x)$ adimensionnée par l'amplitude de l'onde incidente. Nous remarquons que les résultats diffèrent grandement d'une amplitude à l'autre dans la région en aval de l'écoulement ($x > 0,3$ m), cela indique que des non-linéarités jouent un rôle important. Nous allons donc essayer de comprendre d'où proviennent ces non-linéarités et quelle est leur nature.

La figure 3.21 trace les transformées de Fourier 2D et temporelle du diagramme espace-temps pour la plus forte amplitude (figure 3.19). Nous remarquons qu'il n'y a pas de modification de la fréquence fondamentale qui reste constante (pas d'instabilité de type Benjamin-Feir [Benjamin et Hasselmann, 1967, Benjamin et Feir, 1967, Charru, 2007, Shugan *et al.*, 2014]) mais on observe une répartition importante d'amplitude sur les fréquences harmoniques ($2\omega_I, 3\omega_I$). Nous allons donc chercher à comprendre où et sur quels modes apparaissent ces harmoniques.

On peut séparer deux types de solutions harmoniques (voir figure 3.22) nommées modes liés et modes libres [Massel, 1983, Li et Ting, 2012, Brossard *et al.*, 2009]. Les modes liés viennent d'une déformation à la Stokes d'une onde, par exemple, pour le mode bleuie fondamental (k_B, ω_I), son mode harmonique lié se trouvera dans l'espace de Fourier en $(2k_B, 2\omega_I)$. Ces modes, n'étant qu'une déformation de l'onde fondamentale, sont toujours de plus faible amplitude en comparaison de l'onde fondamentale. Les modes libres sont eux solutions de la relation de dispersion, exemple ($k_{B2}, 2\omega_I$), comme leur nom l'indique, bien que générés à partir du mode fondamental, il sont par la suite indépendant de celui-ci possédant alors leurs propres vitesses de phase et de groupe. Contrairement aux modes liés, l'amplitude du mode fondamental peut être totalement transférée aux modes harmoniques libres.

Sur la figure 3.23, sont représentées les fluctuations de surface libre dans l'espace de Fourier à la fréquence fondamentale $|\delta \hat{h}(k, \omega_I)|$ et à la première fréquence harmonique $|\delta \hat{h}(k, 2\omega_I)|$ (sur toute la fenêtre de visualisation au dessus de l'obstacle). La transformée de Fourier ayant été faite sur une région où la vitesse varie, les pics correspondant à chaque mode sont élargis. Malgré cela, on semble tout de même observer à la fois les modes libres et liés sur les ondes bleuie et négative. L'amplitude des modes liés est négligeable devant celle des modes libres comme discuté précédemment. Nous remarquons, par contre, que l'amplitude du mode incident à la fréquence harmonique, bien que ne pouvant pas identifier si il s'agit d'un mode lié ou libre car les nombres d'onde sont trop proches, est très faible devant l'amplitude du mode incident fondamental. Cela suggère que le mode incident reste linéaire.

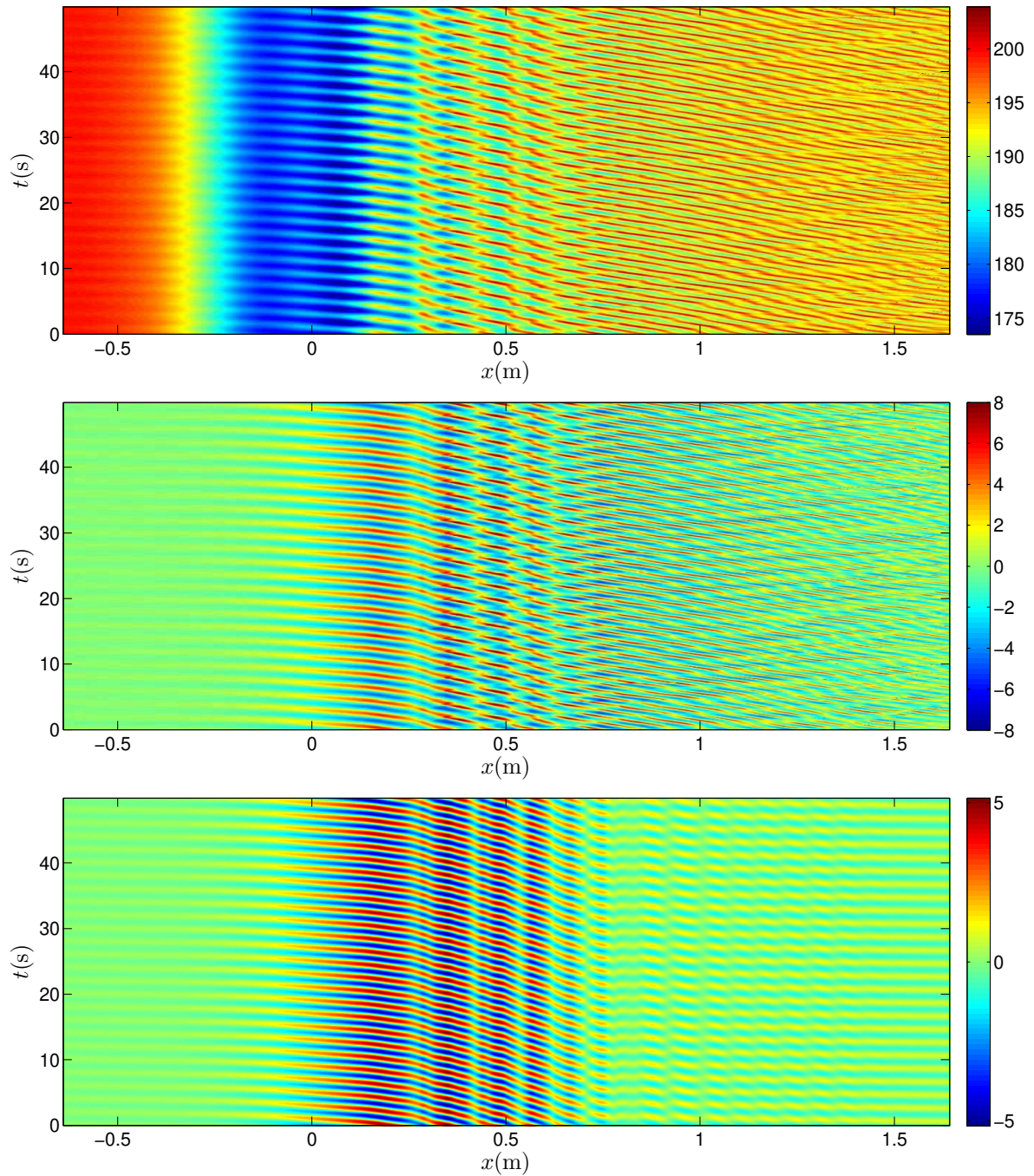


Figure 3.19 – Diagramme espace-temps des des fluctuations de surface libre (en mm) pour une fréquence incidente $\omega_I=3,14$ Hz envoyée avec une amplitude de 0,8 mm. Haut : ondulation+bruit+ondes soit $h(x, t)$ Centre : en soustrayant l'ondulation stationnaire soit $\delta h(x, t)$. Bas : en filtrant à la fréquence incidente $\delta h(\omega_I, x, t)$.

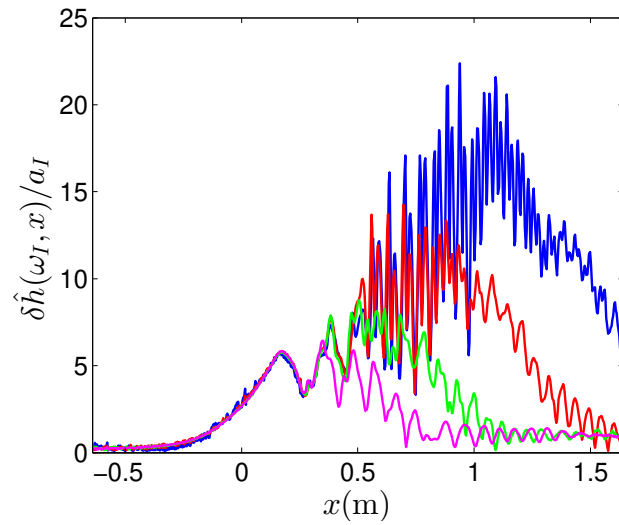


Figure 3.20 – Enveloppe des fluctuations de surface libre à la fréquence incidente $\delta h(\omega_I, x)$ ($\omega_I = 3,14$ Hz) adimensionnée par l'amplitude de l'onde incidente. La couleur des courbes correspond aux différentes amplitudes envoyées par le batteur : 0,05 mm (bleu), 0,15 mm (rouge), 0,35 mm (vert), 0,8 mm (violet).

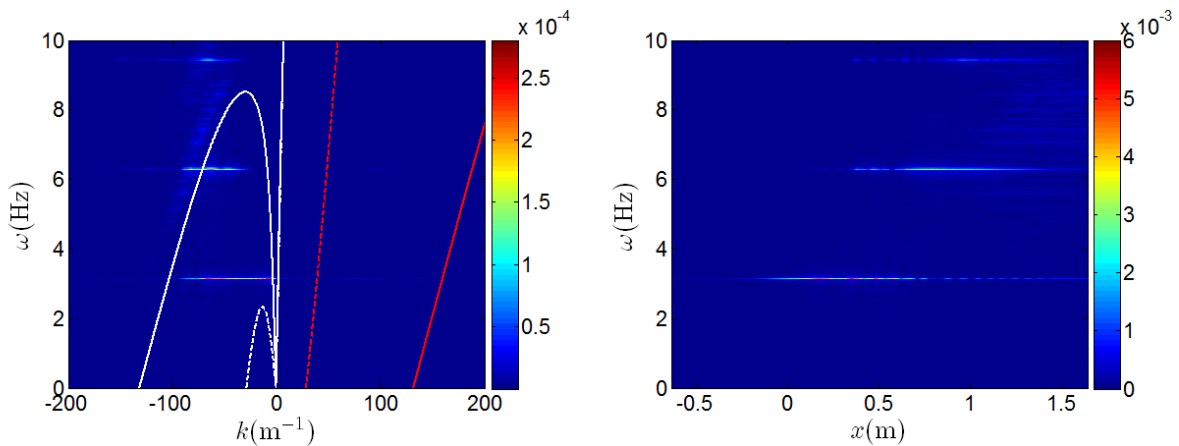


Figure 3.21 – À droite : transformée de Fourier 2D des fluctuations de surface libre $|\delta\hat{h}(k, \omega)|$ calculée sur la totalité de la fenêtre de visualisation, pour une fréquence incidente $\omega_I=3,14$ Hz envoyée avec une amplitude de 0,8 mm. Les courbes en trait continu indiquent la relation de dispersion dans la région en aval de l'obstacle, celles en tirets correspondent à la relation de dispersion au dessus de l'obstacle où le Froude est maximal. À gauche : transformée de Fourier temporelle $|\delta\hat{h}(x, \omega)|$. Les amplitudes sont en mètres.

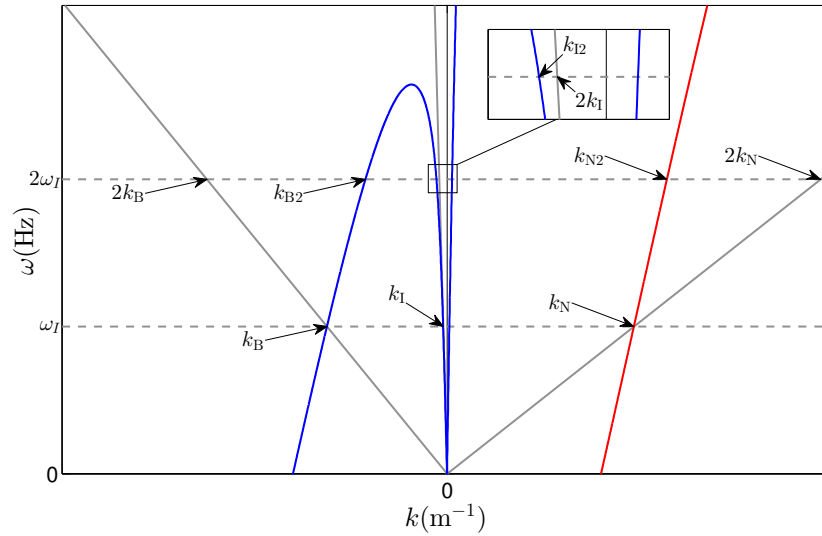


Figure 3.22 – Présentation des différents modes fondamentaux, harmoniques libres et harmoniques liés. Les courbes indiquent la relation de dispersion (bleu pour les branches de fréquence relative positive, rouge pour les branches de fréquence relative négative). Les droites horizontales pointillées indiquent la fréquence fondamentale et la première fréquence harmonique. Les droites grises représentent les droites passant par (k_i, ω_I) ($i=I, B$ ou N) et par l'origine, permettant de trouver les modes harmoniques liés à $(2k_i, 2\omega_I)$.

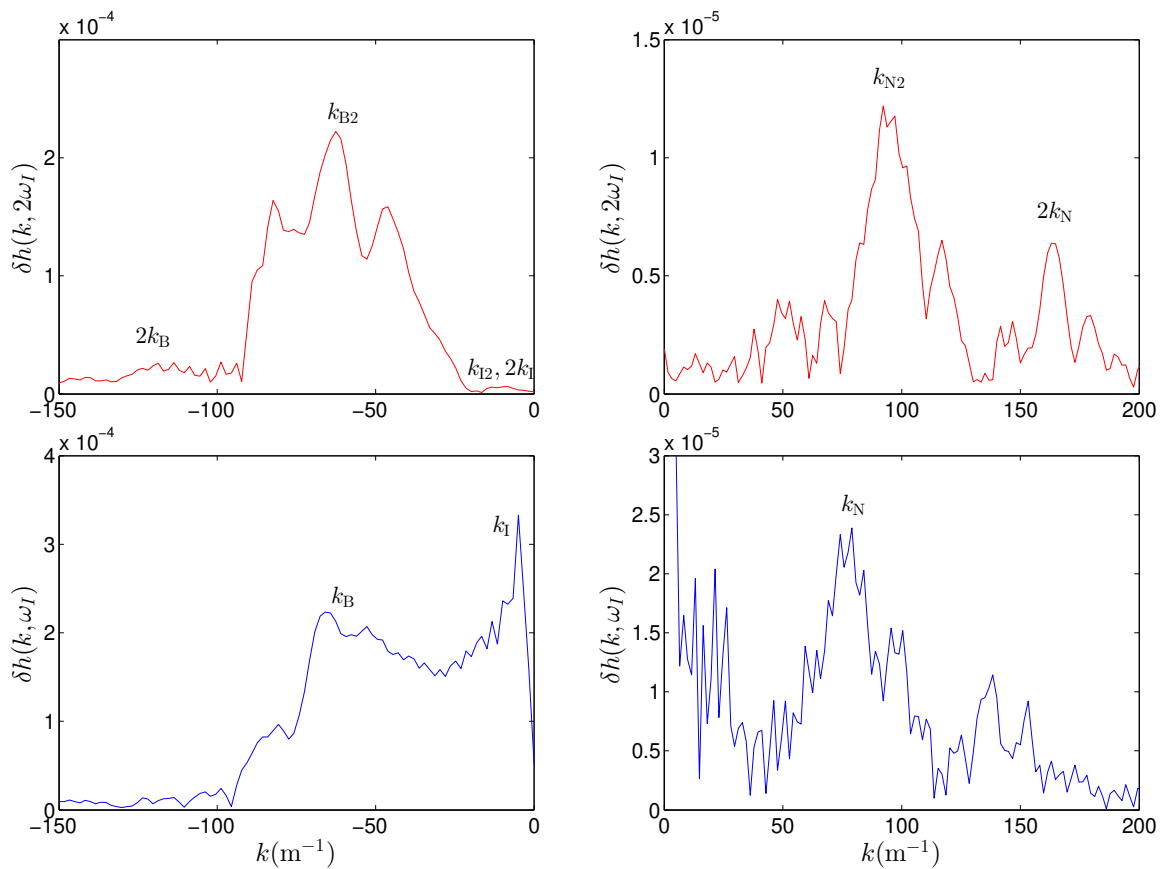


Figure 3.23 – Extraits de la transformée de Fourier 2D aux niveaux de la fréquence fondamentale $|\delta\hat{h}(k, \omega_I)|$ (en bas en bleu), de la première fréquence harmonique $|\delta\hat{h}(k, 2\omega_I)|$ (en haut en rouge). Fréquence incidente $\omega_I=3,14$ Hz envoyée avec une amplitude de 0,8 mm.

En utilisant un filtre autour de chaque solution à la fréquence fondamentale ω_I , nous pouvons observer leur évolution sur le courant inhomogène (figure 3.24). Nous remarquons alors que l'onde incidente voit sa longueur d'onde se raccourcir et son amplitude augmenter en montant sur l'obstacle (de la droite vers la gauche). L'onde bleue B continue de voir sa longueur d'onde diminuer en se propageant (de la gauche vers le droite) tout comme l'onde négative mais on remarque que leurs amplitudes, bien qu'elles commencent par augmenter proche du sommet de l'obstacle, diminue fortement aux environs de $x \sim 0,4$ m pour tendre rapidement vers zéro.

Nous allons maintenant essayer de comprendre où et pourquoi se forment ces modes liés. Nous ne nous intéressons dans ce cas qu'à la première fréquence harmonique ($2\omega_I$), car les modes harmoniques liés incident et bleui de la seconde fréquence harmonique ($I3$ et $B3$) n'existent pas pour ce régime d'écoulement et cette fréquence incidente. En effet, on a $3\omega_I > \omega_{\max}$ (figure 3.21), Nous rappelons que ω_{\max} indique le maximum de la branche de fréquence relative positive de la relation de dispersion en aval de l'obstacle. Pour cela on se place dans la région en aval de l'horizon blanc afin de pouvoir séparer les modes incident et bleui qui ne forment qu'un au niveau de l'horizon (contrairement aux figures 3.21 et 3.23 où les pics de ces deux modes sont en partie confondus). Nous utilisons ensuite des filtres autour de chaque solution afin d'observer l'évolution de l'amplitude de chacun des modes convertis (bleui et négatif ainsi que fondamental et harmonique) selon x . Ces évolutions sont représentées sur la figure 3.25 en fonction de l'amplitude de l'onde incidente envoyée par le batteur. Nous remarquons que, plus l'amplitude de l'onde incidente est grande, plus celle des modes convertis fondamentaux (bleui et négatif) semble décroître rapidement durant leur propagation (nous rappelons que les vitesses de groupe des modes convertis sont de même signe que celle du courant, direction de propagation de la gauche vers la droite).

Pour les ondes bleues, à la position spatiale de cette décroissance en amplitude du mode fondamentale (B), nous observons une croissance du mode harmonique lié (B2) jusqu'à l'endroit où l'amplitude du mode fondamental semble être complètement transférée au mode harmonique (figure 3.25 gauche). En effet, durant la propagation du mode bleui fondamental, son nombre d'onde augmente (la longueur d'onde diminue) du fait de la diminution de la vitesse du fluide. De plus, la fréquence relative σ de ce mode augmente lorsque son nombre d'onde augmente, la conservation du flux d'action d'onde ($\mathcal{A} \sim \frac{a^2}{\sigma} v_g$ équation 219) implique que l'amplitude doit, elle aussi, augmenter pour compenser cette augmentation de la fréquence relative (la variation de vitesse de groupe v_g étant plus faible que la variation de σ). Le couplage des deux provoque alors une augmentation très rapide de la cambrure ka . Il est intéressant de voir que le mode harmonique lié (B2) possède lui un nombre d'onde toujours inférieur à celui du mode fondamental pour une même position spatiale (comme le montre la figure 3.22), le transfert d'amplitude vers ce mode harmonique semble donc être une méthode « efficace » pour diminuer la cambrure ka . C'est pour cela que l'on observe que le mode bleui harmonique se propage plus loin que le mode fondamental.

Ce phénomène n'est pas observé pour les modes négatifs ((figure 3.25 droite). Contrairement aux modes bleus, le nombre d'onde du mode harmonique lié (k_{N2}) est toujours supérieur à celui du mode fondamental (k_N) comme le montre la figure 3.22). Nous observons alors un transfert d'amplitude vers ce mode harmonique mais ce transfert n'est jamais total et nous observons, pour les plus grandes amplitudes incidentes, une disparition complète des modes négatifs qu'ils soient fondamentaux ou harmoniques.

Nous adimensionnons ensuite les amplitudes de chacun des modes par l'amplitude initiale

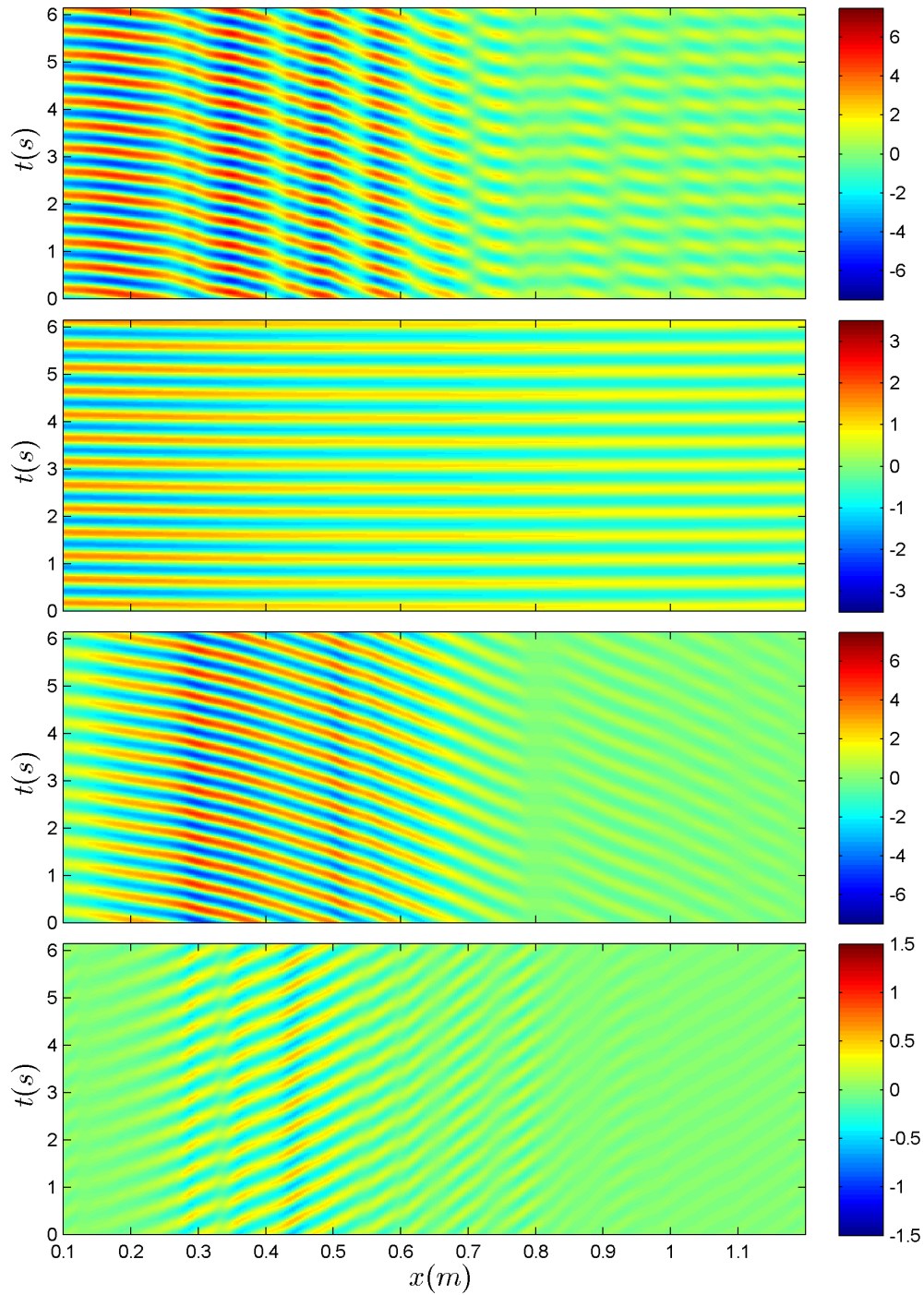


Figure 3.24 – Diagramme espace-temps filtré autour de chaque solution à la fréquence fondamentale $\omega_I=3,14$ Hz. Filtre temporel (haut), solution incidente I (centre haut), solution bleue B (centre bas) et solution négative N (bas). Les amplitudes sont en mm. L'amplitude de l'onde envoyée est de 0,8 mm.

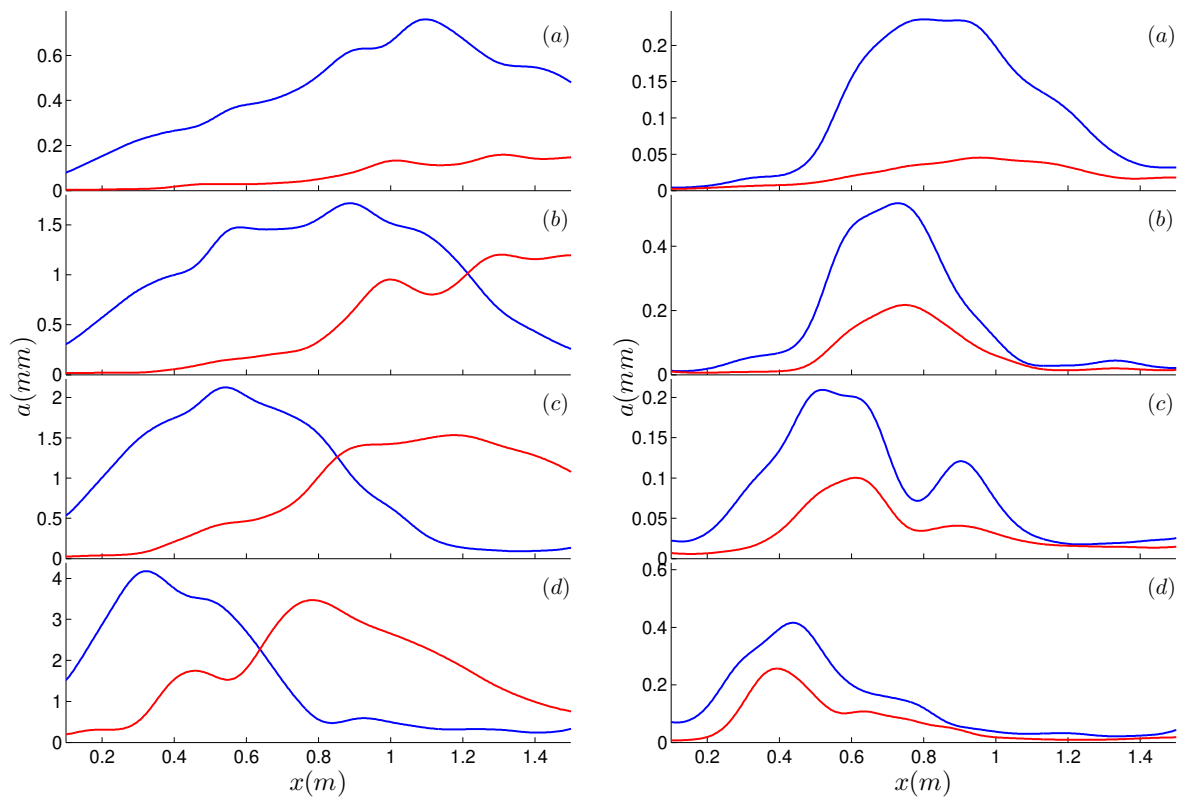


Figure 3.25 – Évolution de l'amplitude des modes convertis en fonction de la position spatiale x . Les courbes bleues indiquent l'amplitude à la fréquence fondamentale ω_I , les courbes rouges celle à la première fréquence harmonique $2\omega_I$, à gauche pour le mode bleu, à droite pour le mode négatif. Les différents graphiques représentent les quatre amplitudes d'onde incidente envoyée par le batteur, (a) 0,05 mm, (b) 0,15 mm, (c) 0,35 mm, (d) 0,8 mm.

de l'onde incidente (dans la région en aval de l'obstacle) afin de pouvoir comparer les résultats. Nous remarquons alors, sur la figure 3.26 gauche, que l'évolution de l'amplitude de l'onde incidente est identique pour toutes les amplitudes envoyées par le batteur (à part une légère différence sur la plus petite amplitude mais qui doit provenir d'un rapport signal sur bruit trop faible), cela indique donc que la propagation de l'onde incidente jusqu'au point de blocage reste linéaire (de la droite vers la gauche). Les mêmes observations peuvent être faites sur les ondes converties (bleuie et négative) mais seulement jusqu'à une certaine position spatiale qui, en augmentant l'amplitude, se rapproche du point de blocage (horizon). Ceci montre que les effets non-linéaires n'apparaissent que durant la propagation de ces modes convertis et donc après une conversion linéaire. Quand nous observons les fluctuations de surface libre dans l'espace de Fourier à la fréquence incidente (figure 3.26 haut droite), l'adimensionnement par l'amplitude initiale de l'onde incidente montre que l'on reste linéaire pour les petits nombres d'onde, autrement dit pour l'onde incidente et une partie des ondes converties (proche de l'horizon où les nombres d'onde des modes convertis restent faibles), mais que les résultats se différencient de plus en plus pour les grands nombres d'onde.

La position spatiale où les non-linéarités apparaissent semble correspondre à l'endroit où les maxima de la dérivée spatiale de la hauteur d'eau ($\max(|\partial h(x, t)/\partial x|)$, figure 3.26 bas droite) dépassent la limite de déferlement $ka=0,45$, ou du moins une valeur critique comprise entre $0,4 < ka < 0,5$. Nous pouvons voir que, même pour la plus faible amplitude, où le maximum de la dérivée spatiale du système ondes+ondulation+bruit est quasiment identique à celui du système sans onde envoyée, l'amplitude des modes convertis décroît dans la région en aval au pied de l'obstacle ($x > 1$ m). Autrement dit, même si l'amplitude des ondes est extrêmement faible, nous observons tout de même des non-linéarités ou bien un autre phénomène (comme par exemple de la dissipation) car les résultats n'indiquent pas de génération d'harmoniques.

On rappelle que dans [Weinfurtner *et al.*, 2011], l'amplitude des ondes longues, générées à contre-courant dans la région en aval de l'obstacle, était d'environ 2 mm. Même si cela correspond à l'amplitude crête à creux ($2a$) elle reste supérieure aux amplitudes envoyées dans les résultats présentés dans ce chapitre, autrement dit, les effets non-linéaires devraient alors être au minimum du même ordre de grandeur que pour les résultats obtenus avec la plus grande amplitude incidente. L'observation et la mesure des ondes converties dans la région en aval de l'obstacle (où la vitesse d'écoulement est constante) sont donc impossibles pour de tels paramètres.

III.3.3 Conséquences sur la radiation de Hawking

Du fait de se trouver dans une région où la vitesse du courant varie, Weinfurtner et al. [Weinfurtner *et al.*, 2011] introduisent un changement de variable $\xi(x) = \int_0^x \frac{dx'}{U(x')}$. La nouvelle coordonnée spatiale ξ a la dimension d'un temps, son nombre d'onde associé κ sera donc en Hz. Ce changement de variable est illustré figure 3.27 (gauche). La figure 3.27 (droite) est tirée de la publication [Weinfurtner *et al.*, 2011] correspondant à l'étude d'une fréquence incidente $f_I = 0,185$ Hz ($\omega_I = 1,16$ Hz $< \omega_{\min}$) et donc d'un cas non-bloquant. On remarque que l'amplitude des modes convertis est grande près de la zone de conversion ($\xi = [0 : 0,5]$ s correspondant à une région spatiale avant changement de variable $x \approx [0 : 0,25]$ m), puis diminue pour disparaître aux alentours de $\xi = 2,5$ s ce qui correspond à $x \approx 0,85$ m (si le changement de variable utilise la vitesse moyenne $U = q/h$) ou $x \approx 1$ m (si le changement de variable utilise la vitesse mesurée par PIV). Ces résultats sont similaires à ceux présentés figure 3.25 même si la fréquence n'est pas la même.

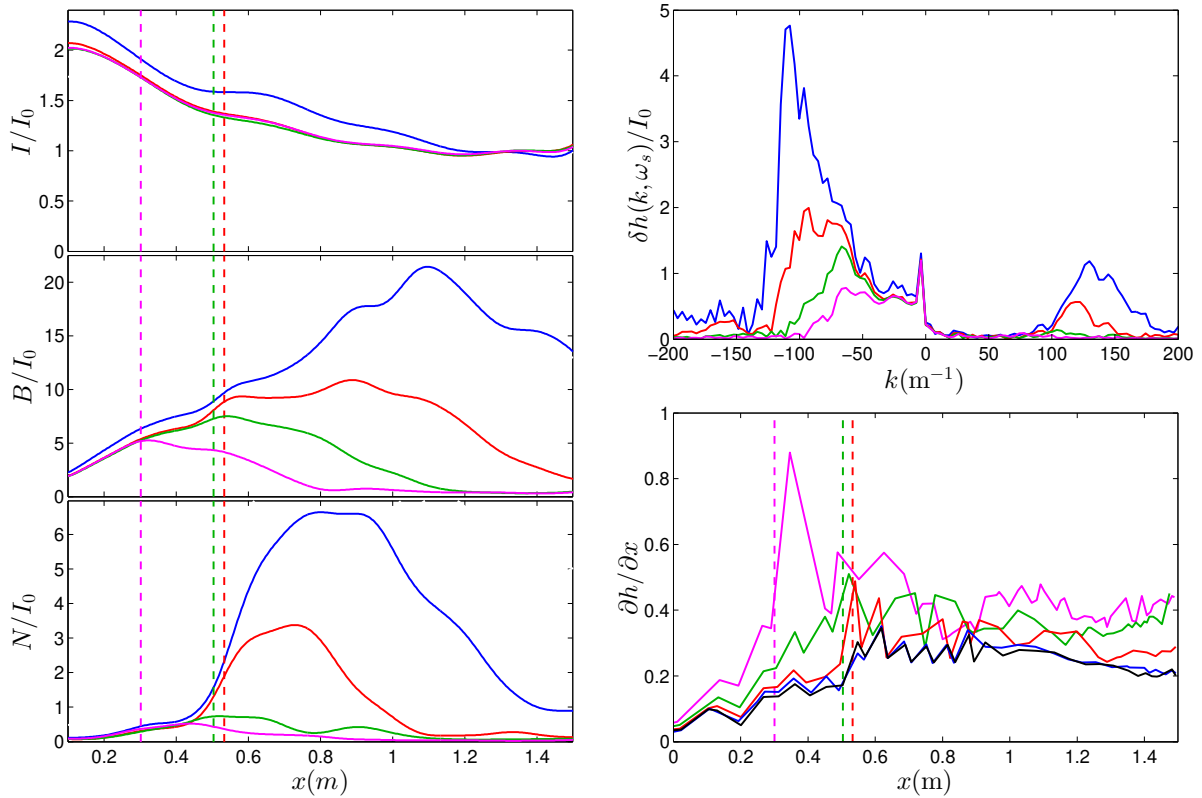


Figure 3.26 – Gauche : Amplitude des différents modes normalisée par l’amplitude de l’onde incidente dans la région en aval de l’obstacle I_0 . Haut droite : Extrait de la Transformée de Fourier 2D au niveau de la fréquence incidente $\delta(k, \omega_I)$ normalisée par l’amplitude de l’onde incidente I_0 . Bas droite : Maxima de la dérivée spatiale $|\partial h/\partial x|$ (comme sur la figure 3.18). La couleur des courbes correspond aux différentes amplitudes envoyées par le batteur : 0,05 mm (bleu), 0,15 mm (rouge), 0,35 mm (vert), 0,8 mm (violet), la courbe noire correspond à l’addition de l’ondulation stationnaire et du bruit comme sur la figure 3.18. Les droites verticales représentent la première position (en partant de la gauche) où la dérivée spatiale dépasse la limite de déferlement de Miche $ka > 0,45$.

L'amplitude du mode bleu est de 4 mm au maximum (pour le cas d'une onde incident de 0,8 mm) et d'environ 8 mm dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] (pour rappel l'amplitude de l'onde incidente était annoncée d'environ 2 mm). Dans notre cas (figure 3.25), nous montrons que les modes convertis disparaissent aux alentours de $x = 0,8$ m, ce qui est cohérent avec les observations pouvant être faites sur la figure 3.27 (droite).

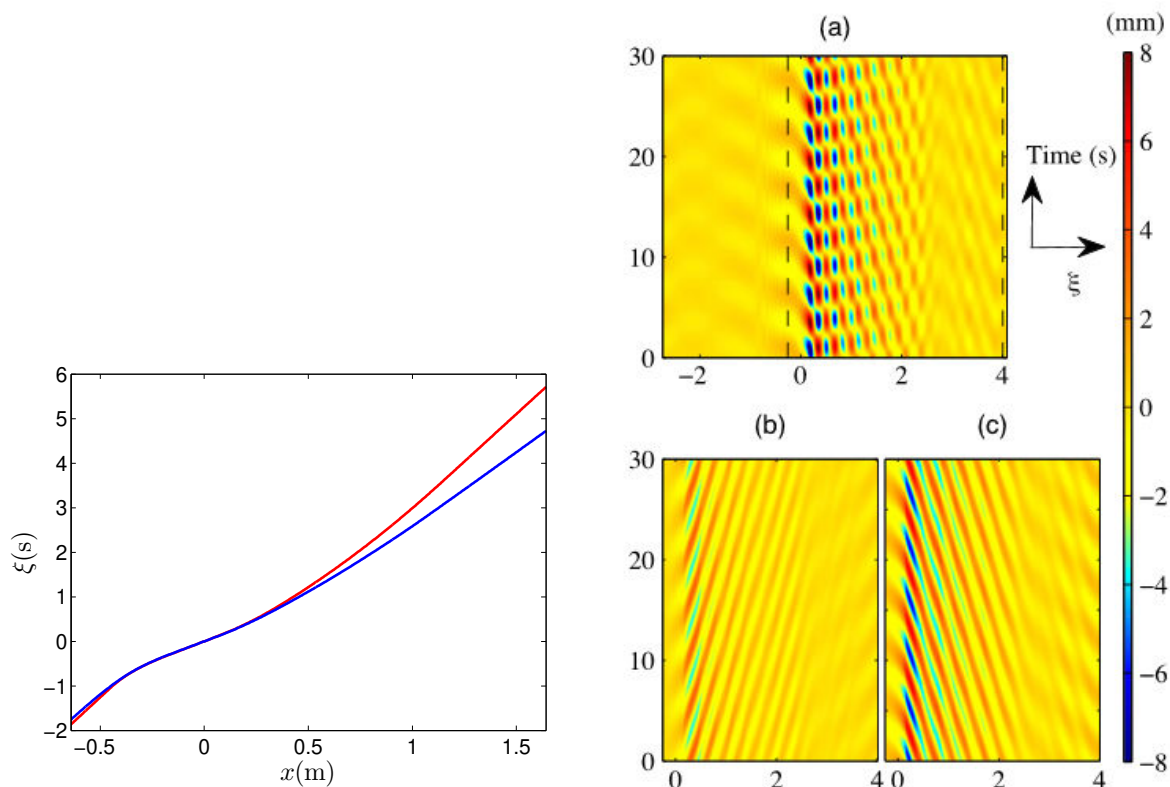


Figure 3.27 – À gauche : Changement de variable $x \rightarrow \xi$ en utilisant la vitesse mesurée par PIV (bleu) ou la vitesse moyenne $U = q/h$ (rouge). À droite : figure extraite de [Weinfurtner *et al.*, 2011] correspondant à l'étude d'une fréquence incidente $f_I = 0,185$ Hz ($\omega_I = 1,16$ Hz $< \omega_{\min}$). Diagramme espace-temps après changement de variable filtré au niveau de la fréquence incidente (a) et autour du mode négatif (b) et positif (c).

La région étudiée semble correspondre à $\xi \approx [-0,2 : 4]$ s, comme le montre la figure 3.27 ($x \approx [-0,1 : 1,25]$ m pour $U = q/h$ ou $x \approx [-0,1 : 1,43]$ m pour U obtenu par PIV). Cette région prend donc en compte le point de blocage, si il existe. Il devient alors compliqué de séparer la contribution du mode incident et celle du mode bleu dans l'espace spectral, car, au niveau du point de blocage, ils ne font qu'un. Mais nous appliquons la même fenêtre d'étude afin d'obtenir des résultats similaires. On remarque que cette région s'étend sur la zone où les modes convertis ont déjà disparu.

Lorsque l'on trace la transformée des fluctuations de surface libre (avec le changement de variable) au niveau de la fréquence incidente $\delta\hat{h}(\omega_I, \kappa)$, nous retrouvons des résultats similaires à ceux obtenus dans [Weinfurtner *et al.*, 2011] comme le montre la figure 3.28. Par contre l'échelle des κ est différente. Quand on regarde le diagramme (ξ, t) (figure 3.27 droite), nous pouvons compter environ 6 longueurs d'onde entre $\xi = 0$ s et $\xi = 2$ s soit $\kappa_{B/N} \sim 2\pi \cdot 3 \sim 19$. Sur nos mesures (figure 3.28 gauche avec $f_i = 0,18$ Hz), on trouve $\kappa_{B/N} \sim 25$ ce qui est cohérent. Par contre sur la figure extraite de [Weinfurtner *et al.*, 2011] (figure 3.28 droite avec $f_i = 0,18$ Hz), $\kappa_{B/N} \sim 10$, même en considérant qu'il ne prennent pas en compte le facteur 2π ($\kappa_{B/N} \sim 63$), ce résultat n'est pas cohérent avec le diagramme (ξ, t) (extrait lui aussi de [Weinfurtner *et al.*, 2011]).

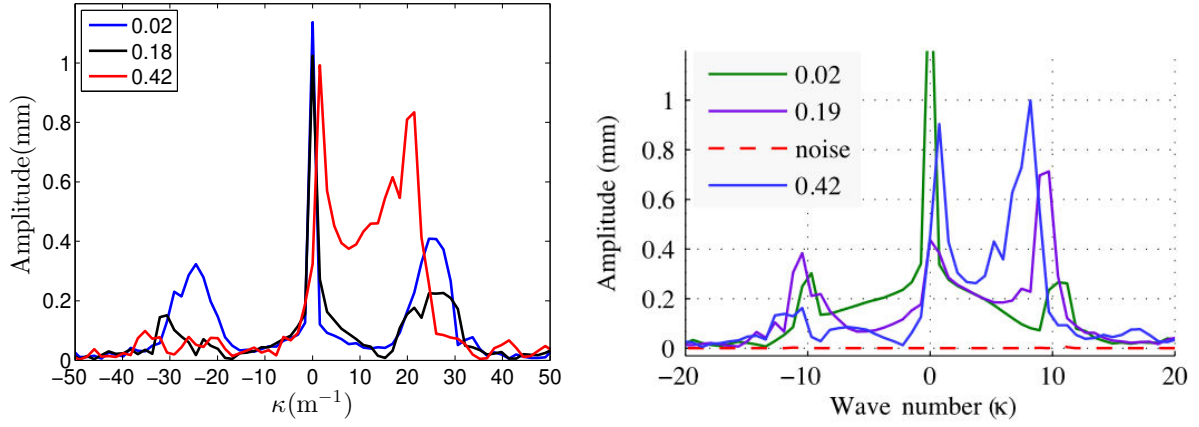


Figure 3.28 – Transformée des fluctuations de surface libre (avec changement de variable) au niveau de la fréquence incidente $\delta\hat{h}(\omega_I, \kappa)$ pour trois fréquences incidentes ($f_I = 0.02$ Hz, 0.18 Hz, 0.42 Hz). À gauche : obtenus sur nos résultats. À droite : tirée de [Weinfurtner *et al.*, 2011].

Afin de reproduire le résultat principal de la publication [Weinfurtner *et al.*, 2011], nous utilisons le même calcul de la norme de chaque mode qui s'écrit :

$$|\mathcal{A}| = \int \frac{|\delta h(\kappa, \omega)|^2}{\omega + \kappa} d\kappa \quad (182)$$

En utilisant l'équation 182 sur chacun des pics, nous pouvons obtenir le coefficient de diffusion de l'onde convertie positive $|\alpha|^2 = |\mathcal{A}_B| / |\mathcal{A}_I|$ et celui de l'onde convertie négative $|\beta|^2 = |\mathcal{A}_N| / |\mathcal{A}_I|$. Ces deux normes sont tracées figure 3.29. On remarque alors que, dans le cas où il devrait avoir le moins de perte d'énergie car moins de non-linéarité (c'est à dire avec l'amplitude incidente la plus petite), le coefficient $|\alpha|^2$ qui devrait tendre vers 1, atteint des valeurs de l'ordre de 20. Le coefficient $|\beta|^2$ qui devrait lui tendre vers zéro, varie aux alentours de 1 pour les plus grandes fréquences. Cela pose alors un problème par rapport au calcul de l'unitarité (ou conservation du flux d'action d'onde) $|\alpha|^2 - |\beta|^2 + |A|^2 + |\tilde{A}|^2 = 1$, les flux d'action d'onde de l'onde transmise et de l'onde réfléchie étant positifs, on a alors $|\alpha|^2 - |\beta|^2 + |A|^2 \leq 1$, ce qui n'est pas du tout le cas. Cela pourrait provenir du fait que les normes de l'onde incidente et de l'onde bleue sont mal calculées car leurs pics dans l'espace de Fourier ne sont pas bien séparés quand la fenêtre d'observation comprend le point de blocage. Le changement de variable (qui ne prend pas compte de la vitesse des ondes et seulement de celle du courant) pourrait ne pas être adapté à la fois aux ondes courtes (bleue et négative) et à l'onde longue incidente. Les valeurs des coefficients de diffusion n'ayant pas été publiées dans [Weinfurtner *et al.*, 2011], une comparaison est impossible.

Ayant calculé les coefficients de diffusion, nous pouvons obtenir le rapport $|\beta|^2/|\alpha|^2 = |\mathcal{A}_N|/|\mathcal{A}_B|$ lié au spectre de Hawking. Le logarithme népérien de ce rapport en fonction de la fréquence correspond à une droite $\ln(|\beta|^2/|\alpha|^2) = 2\pi\omega/\xi$ dans le cas d'un trou noir astrophysique car la valeur de ξ (liée à la température de Hawking du trou noir) est constante pour toute fréquence. L'équipe de Vancouver décide alors d'interpoler leurs résultats par une droite afin de retrouver la température de Hawking de ce trou blanc hydraulique. Mais ce choix n'est pas vraiment justifié car dans le cas d'un régime dispersif, la position du point de blocage (si il existe) varie avec la fréquence de l'onde incidente, il en va alors de même pour la valeur de ξ qui, pour rappel, décrit les variations de l'écoulement au niveau du point de blocage $(\partial(V(x) - c(x))/\partial x)|_{x=x_H}$ [Visser, 1998]). Les résultats ne devraient alors pas former une droite, mais dans le but d'une comparaison, nous allons

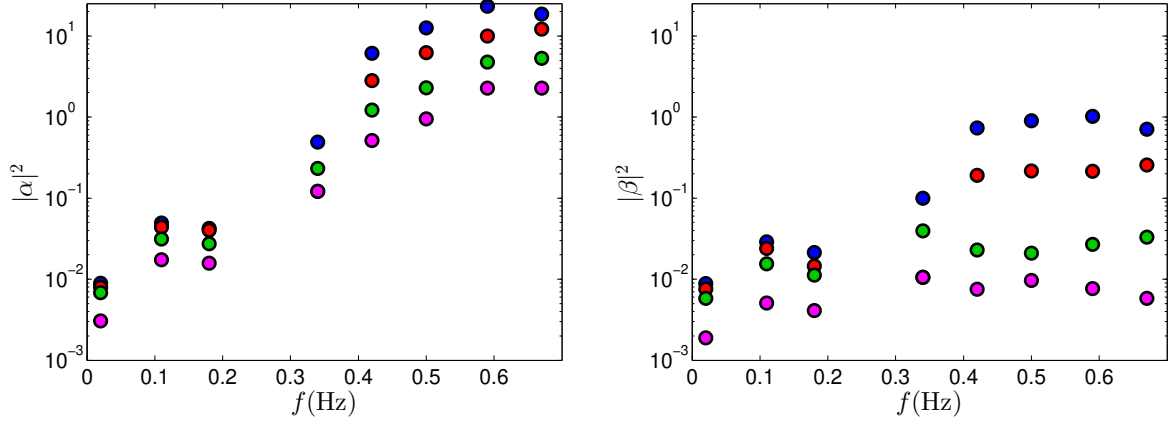


Figure 3.29 – Coefficients de diffusion $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ en fonction de la fréquence et de l’amplitude de l’onde incidente (0,05 mm (bleu), 0,15 mm (rouge), 0,35 mm (vert), 0,8 mm (violet)).

opérer de la même manière. Ces résultats sont représentés figure 3.30. On remarque que nos résultats pour les deux plus fortes amplitudes sont similaires aux résultats obtenus dans [Weinfurtner *et al.*, 2011], mais pour les plus faibles amplitudes d’onde incidente, lorsque le régime devient plus linéaire, on remarque que le coefficient directeur de la droite d’interpolation diminue, ce qui traduirait une diffusion plus importante vers le mode négatif mais nous reviendrons sur ce phénomène dans le chapitre qui va suivre.

III.4 Conclusion

Ces résultats ont pu mettre en évidence certains problèmes pouvant apparaître lors de l’étude d’un trou blanc hydraulique. Ces problèmes sont liés en grande partie à l’ondulation stationnaire provoquée par l’écoulement au dessus de l’obstacle. Afin d’obtenir une ondulation non-déferlante et que la vitesse en aval de l’obstacle reste supérieure à $U_\gamma = 0,23$ m/s, il semble être impossible d’obtenir un nombre de Froude supérieur à 1 pour cette géométrie d’obstacle. Les ondes incidentes de basses fréquences ($< \omega_{\min}$) ne rencontreront donc pas de point de blocage et seront alors principalement transmises de l’autre côté de l’obstacle, ces régimes non-bloquant s’éloignant alors de l’analogie avec un trou blanc astrophysique. En se plaçant à la limite du déferlement pour augmenter le nombre de Froude maximum et par conséquent diminuer la valeur de ω_{\min} , l’ajout de l’onde incidente et de ses conversions à l’ondulation déjà présente, provoque alors l’apparition de non-linéarités (génération d’harmoniques libres) qui empêchent les modes convertis d’atteindre la région en aval de l’obstacle. L’utilisation d’un changement de variable est alors indispensable pour le calcul des coefficients de diffusion dans une région où les paramètres de l’écoulement varient (vitesse du courant, hauteur d’eau). Mais ce calcul de normes basé sur le changement de variable semble donner des résultats incohérents. Une mesure dans la région asymptotique en aval de l’obstacle, là où le régime est redevenu constant, serait alors préférable. Mais il faut pour cela que les effets non-linéaires soient négligeables.

À cause de toutes ces complications, bien que les résultats de l’équipe de Vancouver [Weinfurtner *et al.*, 2011, Weinfurtner *et al.*, 2013] sont extrêmement intéressants et ont permis une grande avancée dans le domaine de la gravitation analogue utilisant les ondes de surface, je pense que l’expérience sur un trou blanc hydraulique mérite plusieurs améliorations et vérifications avant d’arriver à la conclusion définitive de la mesure de l’effet Hawking stimulé dans un système analogue, pour reprendre le titre de la publication « Measurement of Stimulated Hawking Emission in an Analogue System » [Weinfurtner *et al.*, 2011].

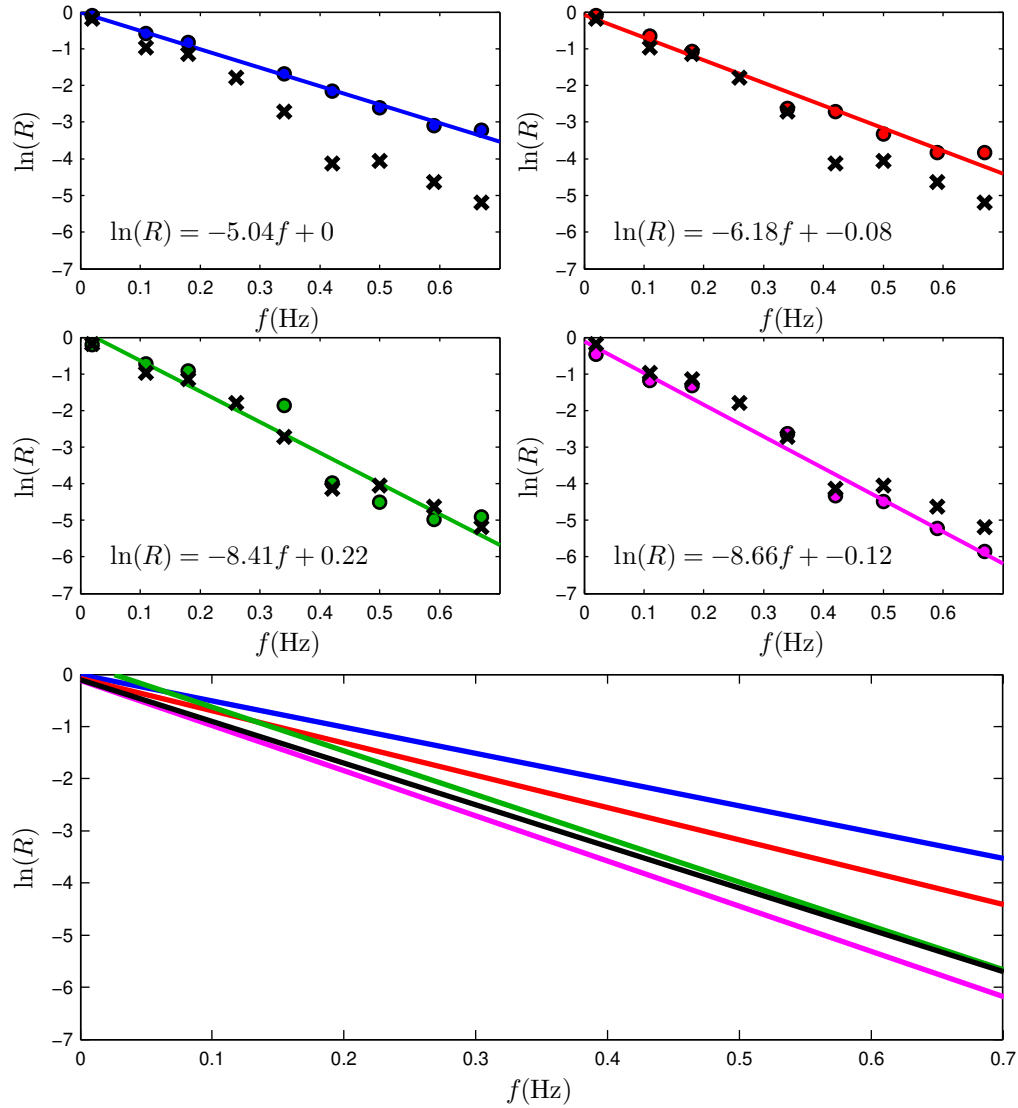


Figure 3.30 – Logarithme népérien du rapport $|\beta|^2/|\alpha|^2$ en fonction de la fréquence incidente. Les couleurs correspondent aux différentes amplitudes envoyées par le batteur : 0,05 mm (bleu), 0,15 mm (rouge), 0,35 mm (vert), 0,8 mm (violet). Les droites d'interpolation sont représentées en trait plein, leurs équations sont indiqués sur chaque graphiques. Les croix et la droite d'interpolation $(-8f + 0.1)$ correspondent aux résultats extraits de [Weinfurtner *et al.*, 2011].

Trou blanc hydraulique : nouveau régime

IV.1 Régime d'écoulement	106
IV.2 Bruit de surface libre	108
IV.3 Corrélations	109
IV.4 Cas stimulés	114
IV.4.1 Étude expérimentale	114
IV.4.2 Comparaison numérique	116
IV.4.3 Diffusion sur l'ondulation dans les expériences du régime de Vancouver (chapitre précédent)	117
IV.5 Conclusion	119

Ayant une meilleure connaissance des problèmes pouvant apparaître lors de l'étude d'un trou blanc hydraulique, un autre régime d'écoulement (obstacle, hauteur d'eau et débit) a été étudié. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication « Observation of noise correlated by the Hawking effect in a water tank » [Euvé *et al.*, 2016] réalisée en collaboration avec Florent Michel, Renaud Parentani (Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay) et Thomas Philbin (Physics and Astronomy Department, University of Exeter, UK). Cette collaboration a permis la mise en place d'un régime d'écoulement possédant un nombre de Froude maximum supérieur à celui des expériences [Weinfurtner *et al.*, 2011] reproduites dans le chapitre précédent. Cet écoulement, ainsi que l'utilisation du batteur avec des amplitudes plus faibles, permettent de supprimer les effets non-linéaires telle que la génération d'harmoniques. Les ondes converties atteignent alors une région où le régime (vitesse de courant et hauteur d'eau) est constant, ceci permettant un calcul des coefficients de diffusion sans passer par un changement de variable. En plus de réaliser des mesures en envoyant une onde à contre-courant grâce au batteur, nous nous sommes intéressés aux fluctuations de surface libre naturellement présentes sans stimulation par le batteur. Ces fluctuations de surface libre provoquées par l'écoulement turbulent sous-jacent suivant la relation de dispersion exhibent alors des modes identiques à ceux présents lors de la stimulation par le batteur. Grâce à un calcul de corrélation, nous montrons que ces modes sont fortement corrélés impliquant alors qu'ils sont issus d'un même processus de conversion. Les résultats expérimentaux ont pu ensuite être comparés avec des calculs numériques réalisés par l'équipe d'Orsay.

IV.1 Régime d'écoulement

La géométrie de l'obstacle « Orsay 2 » a été conçue par l'équipe du Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay, Florent Michel et Renaud Parentani.

La procédure utilisée pour le design de l'obstacle repose sur le fait que, en deux dimensions, la fonction $x+iy \mapsto \phi+i\psi$ (où i est une racine de -1 , x et y des coordonnées Cartésiennes, ϕ le potentiel de vitesse et ψ la fonction de courant), est holomorphe. Une fois celle-ci connue le long de la surface libre, on peut donc la déterminer au fond du canal, ce qui donne la forme de l'obstacle. En pratique, nous avons suivi une méthode d'essai-erreur, consistant à essayer avec un certain nombre de surfaces libres différentes jusqu'à en trouver une donnant (après résolution de l'équation de Laplace donnant la forme de l'obstacle) un régime d'écoulement avec les propriétés attendues. (Florent Michel, communication privée)

L'équation de la géométrie de l'obstacle s'écrit :

$$o(x) = \frac{a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6}{1 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6} \quad (183)$$

avec $a_0 = 0.0221946$ m, $a_2 = 0.195299$ m⁻¹, $a_4 = -0.298497$ m⁻³, $a_6 = 0.0931822$ m⁻⁵, $b_2 = 6.38049$ m⁻², $b_4 = 105.132$ m⁻⁴ et $b_6 = 554.819$ m⁻⁶. La géométrie de cet obstacle est représentée par la courbe orange sur la figure 4.1. Elle a été obtenue pour une surface libre (indiquée en bleu) permettant un nombre de Froude supérieur à 1. Mais à cause de phénomènes présents dans l'expérience (développement de couche limite en aval de l'obstacle, effets de paroi provoqués par la largeur finie du canal) non pris en compte dans la procédure de conception de l'obstacle, le régime d'écoulement théorique adapté à cet obstacle provoque un ressaut déferlant expérimentalement. Il a donc fallu trouver un autre régime où le ressaut n'était pas déferlant tout en gardant un nombre de Froude assez élevé.

Pour les paramètres de cet écoulement, le débit volumique est fixé à $Q = 9$ L/s soit un débit par unité de largeur $q = 0,023$ m²/s, la hauteur d'eau en amont de l'obstacle est alors de $h_u = 77,5$ mm et la hauteur d'eau en aval est de $h_d = 74$ mm (figure 4.1 courbe rouge). Cette différence provient de la création d'une couche limite dans la partie aval tout comme dans les expériences du chapitre précédent, la vitesse du fluide en surface est alors plus importante que la vitesse moyenne q/h_d ce qui provoque un léger abaissement du niveau d'eau. Par contre, dans les expériences suivantes, la hauteur maximale de l'obstacle, adimensionnée par la hauteur d'eau aval, $h_o/h_d = 0,31$ est plus faible que dans les expériences de Vancouver $h_o/h_d = 0,52$. En considérant que l'épaisseur de couche limite dans la région en aval de l'obstacle est proportionnelle à la hauteur de l'obstacle, son épaisseur relative sera alors plus faible dans les résultats de ce chapitre.

La hauteur d'eau minimale (au dessus de l'obstacle) vaut $h_{\min} = 41,7$ mm, la couche limite étant quasi-nulle à cet endroit on considère que la vitesse en surface est égale à la vitesse moyenne $U_{\max} = q/h_{\min} = 0,552$ m/s, le nombre de Froude résultant est alors de $F = 0,86$ (pour rappel $F = 0,67$ dans les expériences de Vancouver).

L'amplitude de l'ondulation stationnaire reste faible (< 2 mm) et dans l'optique d'une comparaison avec les expériences de Vancouver, nous avons réalisé la même étude sur la cambrure de l'ondulation stationnaire que celle du chapitre précédent. Nous opérons alors de la même façon pour obtenir la cambrure ka avec une détection d'extrema que nous comparons avec les maxima de la dérivée spatiale $|\partial h/\partial x|$ (figure 4.2 gauche). Nous montrons alors que la valeur maximale de la cambrure atteint $ka = 0,15$ (en comparaison de $ka = 0.23$ pour le régime de Vancouver) et lorsque nous traçons une solution de Stokes

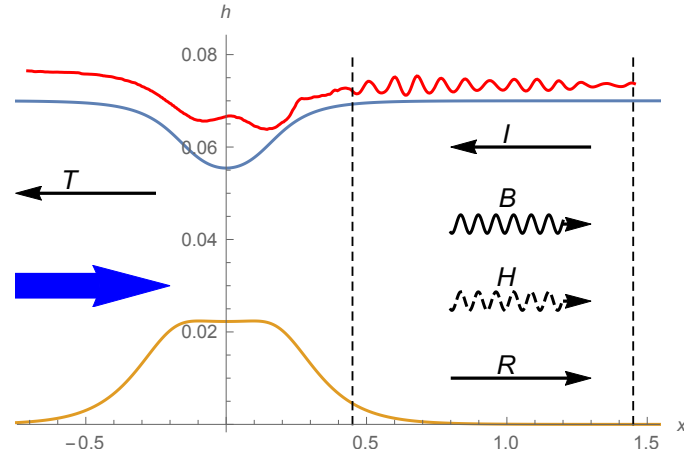


Figure 4.1 – La courbe orange indique la géométrie de l’obstacle. La surface libre correspond à la courbe rouge. La courbe bleue représente la surface libre qui avait été choisie pour déterminer la géométrie de l’obstacle. Les flèches noirs correspondent aux différents modes intervenant dans la conversion avec les mêmes notations que dans le chapitre précédent à part le mode négatif qui est noté H (pour Hawking), la flèche épaisse bleue indique le sens du courant. Les deux droites verticales en pointillés noirs indiquent les bornes de la région en aval de l’obstacle où le régime d’écoulement est considéré comme constant.

à l’ordre 1 (figure 4.2 droite, la solution de Stokes jusqu’à l’ordre 3 étant indiquée équation 184), nous constatons qu’elle reste assez proche de l’ondulation stationnaire de ce régime.

$$h(x) = h_0 + a[\cos(kx) + \frac{1}{2}ka \cos(2kx) + \frac{3}{8}(ka)^2 \cos(3kx) + \dots] \quad (184)$$

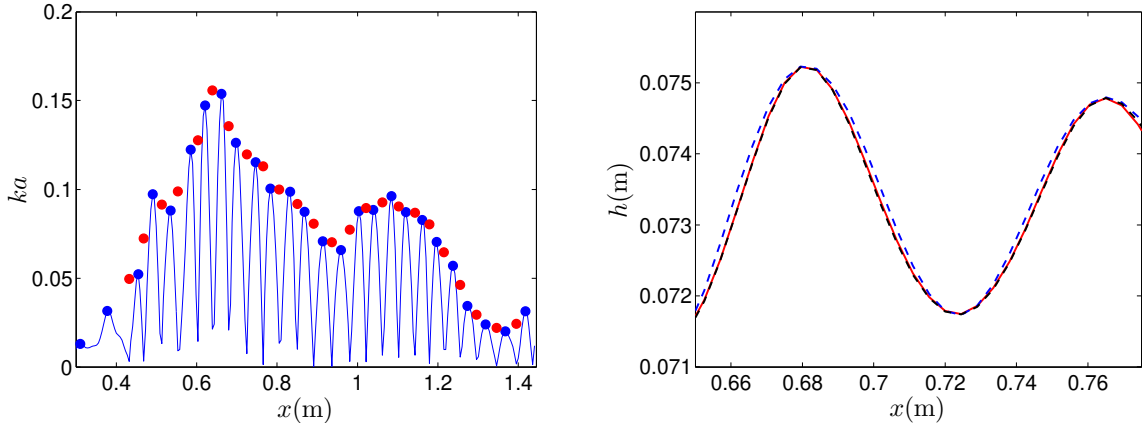


Figure 4.2 – Gauche : Les points rouge représentent la cambrure ka de l’ondulation stationnaire, la courbe bleue correspond à sa dérivée spatiale $|\partial h/\partial x|$ et les points bleus aux maxima de la dérivée spatiale. Droite : La courbe rouge correspond à l’ondulation stationnaire mesurée, la courbe en tirets bleus montre la solution de l’équation 184 à l’ordre 1 (houle de Airy), la courbe en tirets noirs correspond à la solution de l’équation 184 à l’ordre 3 (houle de Stokes 3^{ème} ordre).

Connaissant le régime d’écoulement on peut s’intéresser à la relation de dispersion le long du canal :

$$\omega(k, x) = U(x)k_x \pm \sqrt{gk \tanh(kh(x))} \quad (185)$$

où $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et $k_y = n\pi/W$ la composante transverse dû à la largeur finie du canal W , avec $n \in 2\mathbb{N}$. L’effet de tension de surface n’est pas pris en compte car les nombres d’onde étudiés sont petits.

La figure 4.3 (droite) indique la relation de dispersion à la position où la hauteur d'eau est minimale h_{\min} , ce qui permet d'extraire la valeur de $\omega_{\min} = 0,8$ Hz (fréquence la plus basse pouvant rencontrer un point de blocage car le nombre de Froude maximal est inférieur à 1). La figure 4.3 (gauche) correspond à la relation de dispersion en aval de l'obstacle où le régime d'écoulement (vitesse du courant et hauteur d'eau) est considéré comme constant. Les bornes de cette région étant définies par les deux verticales en tirets noirs dans la figure 4.1. Dans cette région, on a modifié les valeurs de hauteur d'eau $h_d = 74$ mm et de vitesse $U_d = q/h_d = 0,31$ m/s (vitesse moyenne sur la hauteur d'eau) par des valeurs appelées effectives $U_{\text{eff}} = 0,37$ m/s et $h_{\text{eff}} = 88$ mm pour prendre en compte le fait que le profil vertical de vitesse dans la région en aval de l'obstacle n'est pas constant. On peut alors extraire la valeur $\omega_{\max} = 5$ Hz au dessus de laquelle les modes incident et bleui sont inexistantes.

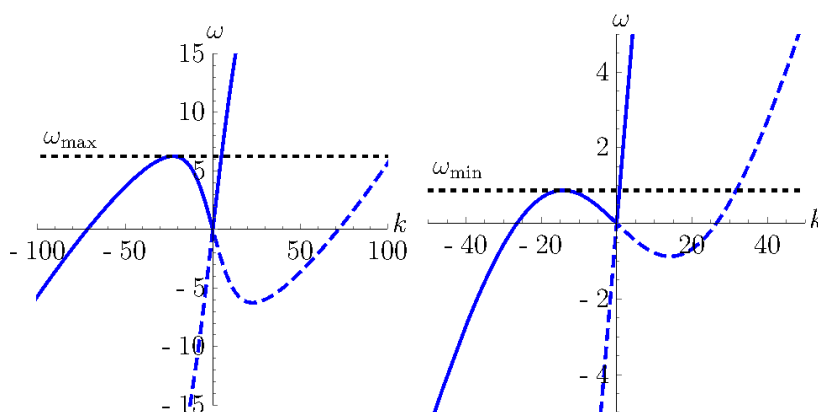


Figure 4.3 – Relations de dispersion dans la région en aval de l'obstacle (gauche) et à la position où la hauteur d'eau est minimale (droite).

IV.2 Bruit de surface libre

La radiation de Hawking est produite par l'amplification des fluctuations quantiques du vide au voisinage de l'horizon d'un trou noir astrophysique comme expliqué dans le chapitre introductif. Ces fluctuations sont, bien sûr, absentes dans l'étude des ondes de surface (dû au caractère classique du système), ceci rendant impossible l'observation d'un effet Hawking quantique. Par contre, à cause du régime turbulent de l'écoulement (le nombre de Reynolds basé sur la hauteur d'eau valant $Re = Uh/\nu = q/\nu \sim 23000$), des fluctuations de surface libre apparaissent, que l'on nommera bruit de surface libre. Ces fluctuations ne sont pas identiques aux fluctuations quantique du vide mais restent un phénomène intrinsèque à l'écoulement et non provoqué par une stimulation extérieure de type batteur. On souhaite donc savoir si ce bruit subit les mêmes conversions de modes que dans le cas d'une onde envoyée par le batteur.

Pour cela, on réalise une acquisition de la surface libre sur une durée de 1000 s avec une fréquence d'acquisition de 5,12 Hz pour un total de pas de temps de 5120. On peut alors étudier les fluctuations de surface libre $\delta h(x, t)$ dans l'espace spectral sous forme de spectre de puissance (équation 186), dans la région en aval de l'obstacle où le régime d'écoulement est considéré comme constant.

Le spectre de puissance s'écrit :

$$\mathcal{P}(k, \omega) = \frac{\langle |\delta \hat{h}(k, \omega)|^2 \rangle}{|\sigma(k)|} \quad (186)$$

où $\sigma = \sqrt{gk \tanh(kh)}$ est la fréquence relative dans le référentiel du courant. Le symbole $\langle \cdot \rangle$ signifie que la transformée de Fourier des fluctuations de surface libre a été calculée en divisant la durée d'acquisition en 80 intervalles de temps pour être ensuite moyennée. Ce nombre d'intervalles sert à obtenir des nombres d'échantillons en puissance de deux (64) pour chaque intervalles.

Le choix de cette représentation des fluctuations de surface libre dans l'espace spectral vient du fait qu'elle est proportionnelle à l'action d'onde $\rho g a^2 / \sigma$ (avec a^2 l'amplitude des ondes). Les bornes de cette région étant définie par les deux verticales en tirets noirs dans la figure 4.1. On fait le choix d'utiliser un fenêtrage de Hamming en espace pour diminuer l'amplitude des lobes secondaires par rapport à une fenêtre rectangulaire.

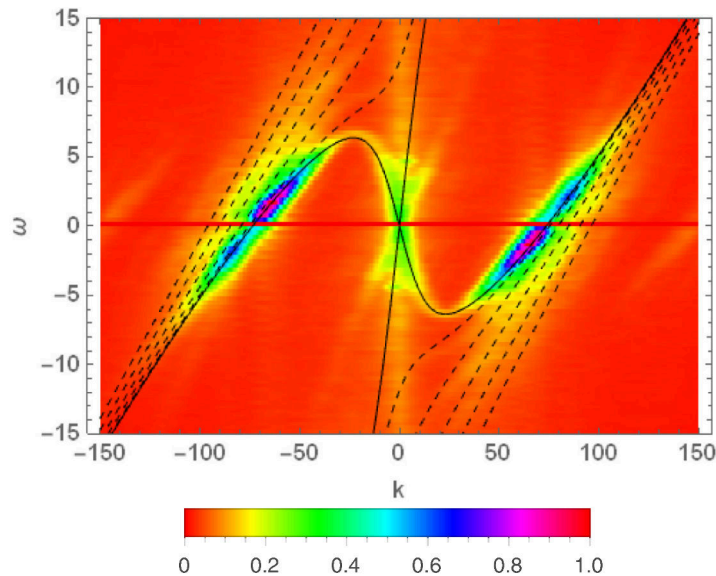


Figure 4.4 – Racine carrée du spectre de puissance de fluctuations de surface libre $\mathcal{P}(k, \omega)$ dans la région en aval de l'obstacle (adimensionné par la valeur maximale). Les courbes indiquent la relation de dispersion avec les modes longitudinaux (continu) et transverses (tirets).

Nous remarquons que, sur la figure 4.4, les branches correspondant aux solutions bleues et négatives sont fortement peuplées, mais nous souhaiterions maintenant savoir si ces modes proviennent d'un même processus de conversion.

IV.3 Corrélations

Premièrement, nous traçons la carte de corrélation dans la région en aval de l'obstacle (figure 4.5), pour rappel, elle permet de visualiser l'évolution du nombre d'onde d'un mode (exemple k_I) en fonction de celui d'un autre (exemple k_B) lorsque la fréquence varie : $\{k, k'\}(\omega)$ (par exemple $\{k_I, k_B\}(\omega)$).

Afin de vérifier que les modes présents en aval de l'obstacle proviennent bien d'un même processus de conversion, nous utilisons une fonction de corrélation à deux points, que nous évaluons pour une même fréquence mais pour différents nombres d'onde :

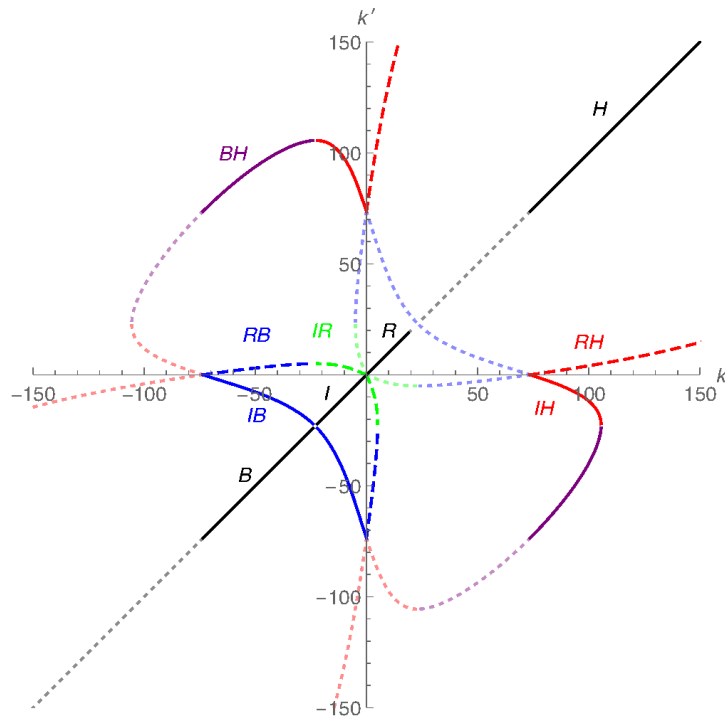


Figure 4.5 – Carte de corrélation dans la région en aval de l'obstacle pour $\omega > 0$. Les segments se trouvant sur la diagonale correspondent à $\{k_i, k_j\}$ pour $k_i = k_j$ ($i = I, B, H, R$). Les courbes de couleur correspondent à $\{k_I, k_B\}$ (bleu), $\{k_I, k_H\}$ (rouge) et $\{k_B, k_H\}$ (violet) ainsi que leur correspondants $\{k_B, k_I\}$, $\{k_H, k_I\}$ et $\{k_H, k_B\}$, alors que celles en tirets représentent $\{k_I, k_R\}$ (bleu), $\{k_R, k_B\}$ (vert) et $\{k_R, k_H\}$ (rouge). Les courbes en pointillés correspondent aux fréquences négatives $\omega < 0$ obtenues par symétrie des résultats des fréquences positives avec la transformation $(k, k') \rightarrow (-k, -k')$.

$$G_2(\omega, k, k') \equiv \frac{|\langle \delta \hat{h}(\omega, k) \delta \hat{h}(\omega, k')^* \rangle|}{\sqrt{|\sigma(k)| |\sigma(k')|}} \quad (187)$$

cette fois encore, un fenêtrage de Hamming spatial est utilisé pour obtenir $\delta \hat{h}(\omega, k)$. Dans le cas des corrélations, ce fenêtrage est très important car, avec une fenêtre rectangulaire, le calcul montre une très forte corrélation entre les lobes secondaires et principal de chacun des pics ce qui, étant un artefact de l'analyse spectrale et non un phénomène physique, empêche la bonne lisibilité des corrélations entre solutions (figure 4.7).

Lorsque l'on trace la fonction de corrélation pour une fréquence $\omega_{\min} < \omega = 2,51 \text{ Hz} < \omega_{\max}$ (figure 4.6 gauche haut), on remarque que les modes bleus B et négatifs N sont fortement corrélés. On peut aussi voir que les modes de grandes longueurs d'onde I et R sont corrélés avec les modes B et H malgré le fait qu'il est difficile de séparer les contributions des modes I et R car leurs nombres d'onde sont trop proches. Des simulations numériques réalisées par l'équipe d'Orsay, montrent que le mode R (dans le cas d'une onde envoyée par le batteur) n'est que faiblement couplé avec les trois autres modes I , B et H , nous n'étudierons donc que ces trois derniers modes pour la suite. La figure 4.6 (droite haut) montre la fonction de corrélation mais pour le cas où une onde incidente ($\omega_I = 2,51 \text{ Hz}$) est envoyée par le batteur, cela permet de voir que les résultats sont très similaires à part pour les pics en lien avec le mode I . Le même traitement a été réalisé mais cette fois-ci sur une fréquence $\omega = 0,63 \text{ Hz} < \omega_{\min}$ (figure 4.6 bas). Nous remarquons alors que dans ce cas le pic correspondant à la paire BH est plus faible que dans le cas bloquant ($\omega > \omega_{\min}$).

Afin de quantifier ces corrélations en terme de taux de corrélations, nous calculons le rapport entre la corrélation de deux différents modes k_i et k_j et la racine carrée du produit de l'auto-corrélation de ces deux modes (à fréquence fixée) :

$$g_2(\omega, i, j) \equiv \frac{G_2(\omega, k_i, k_j)}{\sqrt{G_2(\omega, k_i, k_i) G_2(\omega, k_j, k_j)}} \quad (188)$$

Ce taux de corrélation est alors compris entre 0 (aucune corrélation) et 1 (taux de corrélation maximal). Le fait que le nombre d'intervalles de temps soit fini ($= 80$) induit une erreur estimée de 0,1. Par exemple, deux quantités complètement décorrélées pourront tout de même donner un taux de corrélation de 0,1.

La figure 4.8 montre que 70% des modes bleus B et négatifs H sont corrélés en paires BH pour quasiment toutes les fréquences supérieures à ω_{\min} . Alors que les corrélations IH et IB ont un taux aux alentours de 30%, ce qui impliquerait que plus de 50% des paires BH ne proviennent pas d'un mode I observé dans la fenêtre d'observation. La première cause possible est que la mesure des modes B et H prend en compte à la fois des modes longitudinaux mais aussi transverses (pour l'instant, il est impossible de séparer la contribution de ces deux types de modes car leurs nombres d'onde sont trop proches comme le montre la figure 4.4). Une autre possibilité est que certaines paires BH proviendraient d'autres modes incidents qui pourraient correspondre à des modes H et R venant de la région en amont de l'obstacle (car se propageant à co-courant). Enfin, une partie du mode incident pourrait être produite au niveau de la partie descendante de l'obstacle avant la fenêtre de visualisation et ne serait donc pas prise en compte dans nos résultats.

Ne connaissant donc pas les modes incidents impliqués dans la conversion du bruit de

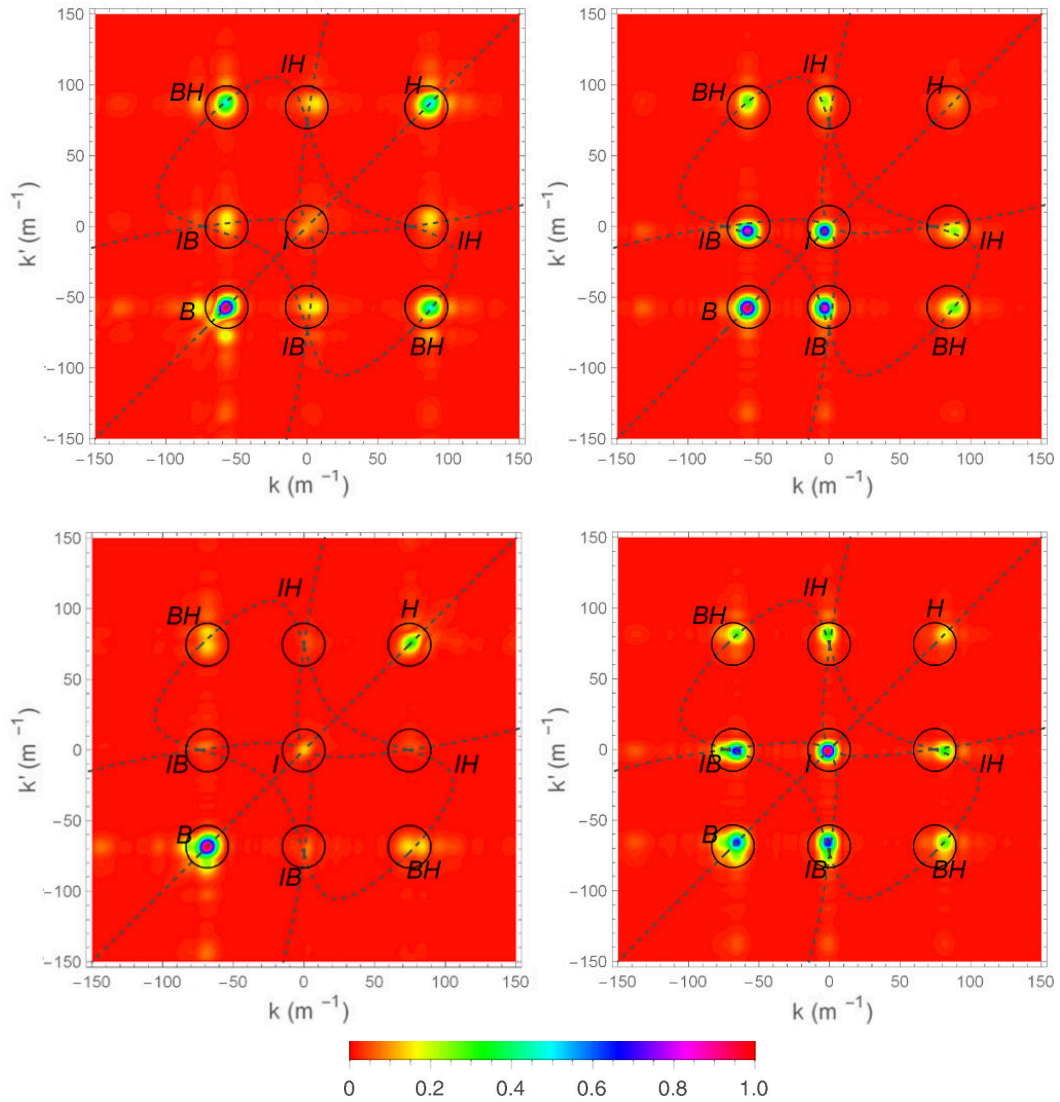


Figure 4.6 – Fonction de corrélation 187 pour une fréquence $\omega = 2,51$ Hz (haut) et $\omega = 0,63$ Hz (bas) adimensionnée par la valeur maximale, l'échelle de couleur étant identique à celle de la figure 4.4. Les courbes en tirets correspondent à la carte de corrélation (identique à la figure 4.5). Les cercles sont centrés sur (k_i, k_j) où k_i et k_j sont solutions de la relation de dispersion à $\omega = 2,51$ Hz. À gauche : Fonction de corrélation du bruit de surface libre. À droite : dans le cas où une onde incidente est envoyée par le batteur avec une fréquence $\omega_I = 2,51$ Hz $> \omega_{\min}$ (haut) et $\omega_I = 0,63$ Hz $< \omega_{\min}$ (bas).

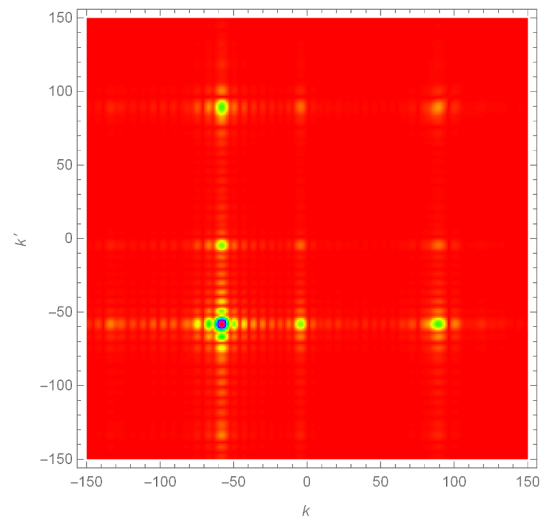


Figure 4.7 – Fonction de corrélation pour les mêmes paramètres que la figure 4.6 (haut droite) mais en appliquant un fenêtrage rectangulaire.

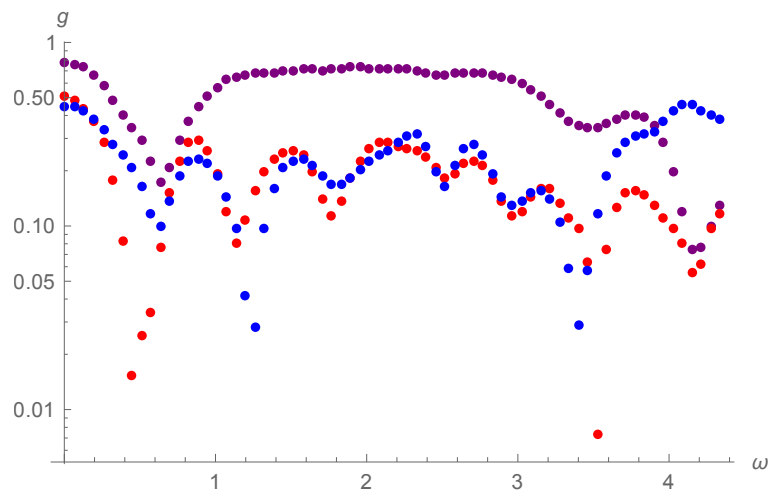


Figure 4.8 – Taux de corrélation $g_2(\omega, i, j)$ pour les couples de mode BH (violet), IB (bleu) et IH (rouge).

surface libre, il est pour l'instant impossible de déduire les coefficients de diffusion, car ces résultats pourraient impliquer plusieurs conversions de modes et donc plusieurs équations de diffusion avec chacune leurs coefficients. Mais nous pouvons maintenant nous intéresser au cas où une onde incidente I est envoyée par le batteur où chacun des coefficient de l'équation de diffusion est alors identifiable.

IV.4 Cas stimulés

IV.4.1 Étude expérimentale

En utilisant le batteur n°1 (système de seuil oscillant), une onde est envoyée à partir d'une région très en aval de l'écoulement avec une amplitude d'environ 0,15 mm (amplitude mécanique du batteur 0,5 mm). Nous réalisons ensuite des mesures optiques de la même façon que dans le cas du bruit de surface libre (avec les mêmes caractéristiques, durée d'acquisition 1000 s, fréquence d'acquisition 5,12 Hz, nombre d'images (ou pas de temps) 5120). Les fréquences étudiées ont été choisies entre $f_I = 0,1$ Hz et $f_I = 0,7$ Hz par pas de 0,1 Hz et donc des fréquences angulaires ω_I entre 0,63 Hz et 4,40 Hz.

Avant toute chose, connaissant les problèmes non-linéaires de génération d'harmoniques dans une telle configuration (similaire aux expériences du chapitre précédent), nous étudions la linéarité du système lors de la stimulation par le batteur. La figure 4.9 montre la transformée de Fourier temporelle $|\delta\hat{h}(\omega, x)|$ permettant de vérifier l'absence de signal aux niveaux des fréquences harmoniques ($2\omega_I, 3\omega_I, \dots$).

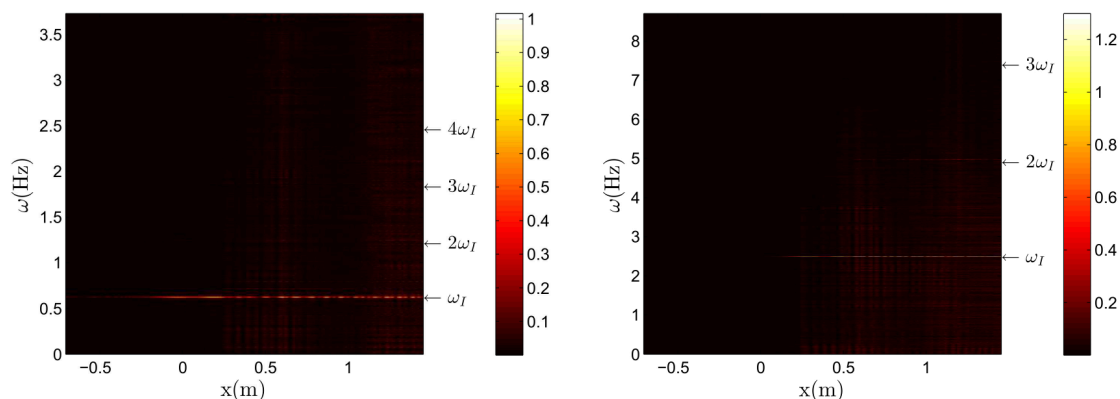


Figure 4.9 – Transformée de Fourier temporelle $|\delta\hat{h}(\omega, x)|$ des fluctuations de surface libre dans le cas d'un onde incidente de fréquence $\omega_I = 0,63$ Hz $< \omega_{\min}$ (gauche) et $\omega_I = 2,51$ Hz $> \omega_{\min}$ (droite). Les amplitudes sont en millimètres.

Le régime étant linéaire (fréquence conservée), l'équation de diffusion est dans ce cas connue :

$$\phi_\omega^I \rightarrow \alpha_\omega \phi_\omega^B + \beta_\omega \phi_\omega^H + A_\omega \phi_\omega^R + \tilde{A}_\omega \phi_\omega^T \quad (189)$$

Les coefficients α_ω et β_ω pourraient être obtenus en calculant le flux d'action d'onde des différents modes :

$$\mathcal{A} \sim \frac{a^2}{\sigma} v_g \quad \text{et} \quad |\alpha_\omega|^2 = \frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}_I}, \quad |\beta_\omega|^2 = \frac{\mathcal{A}_H}{\mathcal{A}_I} \quad (190)$$

avec \mathcal{A} le flux d'action d'onde et $v_g(\omega, k) = \partial\omega/\partial k$ la vitesse de groupe dans le référentiel du laboratoire. Mais dans notre cas, nous utiliserons les résultats de la fonction de corrélation afin de ne considérer seulement le flux d'action d'onde des modes convertis corrélé

avec celui du mode incident. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 |\alpha_\omega| &= \frac{G_2(\omega_I, k_I, k_B)}{G_2(\omega_I, k_I, k_I)} \left| \frac{v_g(\omega_I, k_B)}{v_g(\omega_I, k_I)} \right|^{1/2} \\
 |\beta_\omega| &= \frac{G_2(\omega_I, k_I, k_H)}{G_2(\omega_I, k_I, k_I)} \left| \frac{v_g(\omega_I, k_H)}{v_g(\omega_I, k_I)} \right|^{1/2}
 \end{aligned} \tag{191}$$

L'amplitude du mode transmis est obtenue à partir des résultats de transformées de Fourier temporelles faites au niveau d'un point de la région en amont de l'obstacle $\delta\hat{h}(\omega_I, x)$ à partir de 80 intervalles de temps moyennés. L'erreur sur cette mesure est alors considérée égale à un écart-type. Nous utilisons ensuite le rapport des flux d'action d'onde (équation 190) pour obtenir le coefficient $|\tilde{A}_\omega|$. Le coefficient de l'onde réfléchi $|A_\omega|$ ne peut pas être obtenu, expérimentalement, car son nombre d'onde est trop proche de celui de l'onde incidente I . Ces trois premiers coefficients sont représentés sur la figure 4.10(gauche), on remarque alors que les coefficients ont le comportement attendu avec un coefficient de l'onde transmise qui domine lorsque l'onde incidente n'est pas bloquée soit pour une fréquence $\omega < \omega_{\min}$ (il devrait même tendre vers 1 quand $\omega \rightarrow 0$) puis tend rapidement vers zéro pour les fréquences supérieures à ω_{\min} . Le coefficient $|\alpha|$ domine pour les hautes fréquences car on rentre dans la limite WKBJ où tout le flux d'action d'onde de l'incidente est converti vers le mode bleui. On remarque tout de même que $|\alpha|$ tend vers une valeur légèrement supérieure à 1, cela pourrait provenir du fait que l'on ne mesure pas seulement un mode bleui longitudinal (courbes en trait plein figure 185) mais aussi des modes transverses (courbes en tirets), mais étant trop proches en nombre d'onde ils sont alors indiscernables. Ce problème ne s'applique pas au mode incident car la relation de dispersion n'exhibe pas de mode transverse proche de la solution incidente. L'évaluation du flux d'action d'onde du mode bleui (ainsi que du mode négatif) étant considéré appartenant seulement à un mode longitudinal, est alors, peut-être, légèrement faussée. Malgré tout, le calcul de l'unitarité (ou conservation du flux d'action d'onde) $|\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 + |A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2$ donne une valeur proche de 1, ce qui permet de dire qu'il n'y a pas de perte d'énergie à cause d'effets non-linéaires ou de dissipation visqueuse (aux erreurs de mesures près). Le coefficient du mode réfléchi $|A_\omega|$, impossible à obtenir expérimentalement, est extrait des résultats numériques qui vont suivre.

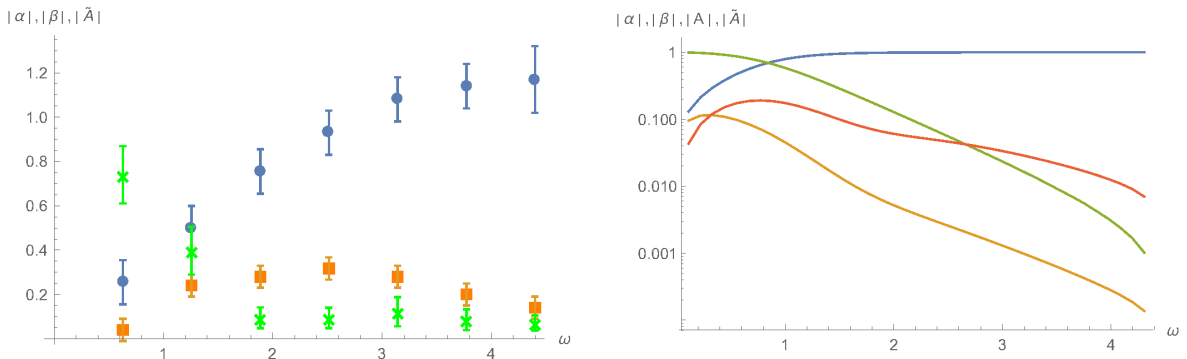


Figure 4.10 – Coefficients intervenant dans l'équation de diffusion $|\alpha|$ (bleu), $|\beta|$ (orange), $|\tilde{A}|$ (vert) et $|A|$ (rouge) mesurés expérimentalement (gauche) et calculés numériquement (droite). Les barres d'erreur des coefficients $|\alpha|$ et $|\beta|$ expérimentaux sont basées sur l'erreur due à l'extension en k provoquée par le fenêtrage d'Hamming et la taille finie du domaine d'étude.

IV.4.2 Comparaison numérique

Pour le calcul numérique, il faut résoudre l'équation d'onde :

$$[(\partial_t + \partial_x U(x))(\partial_t + U(x)\partial_x) + ig\partial_x \tanh(ih(x)\partial_x)]\delta\phi(t, x) = 0 \quad (192)$$

qui peut être réécrite dans une région où la vitesse du courant et la hauteur d'eau sont constantes :

$$[(\partial_t + U\partial_x)^2 + ig\partial_x \tanh(ih\partial_x)]\delta\phi(t, x) = 0 \quad (193)$$

En posant $k = -i\partial_x$ et $\omega = i\partial_t$, venant de la solution en onde plane $\delta\phi(t, x) = a \exp(i(kx - \omega t))$, on retrouve la relation de dispersion.

Pour la résolution numérique, la tangente hyperbolique est approximée par son développement limité à l'ordre 3 :

$$\left[(\partial_t + \partial_x U(x))(\partial_t + U(x)\partial_x) - g \left(\partial_x h(x)\partial_x + \frac{1}{3}\partial_x (h\partial_x)^3 \right) \right] \delta\phi(t, x) = 0 \quad (194)$$

Ainsi la relation de dispersion, dans une région où U et h sont constantes, s'écrit sous forme quartique :

$$(\omega - Uk)^2 \approx gk \left(kh - \frac{(kh)^3}{3} \right) \quad (195)$$

En prenant en compte cette relation de dispersion quartique, les valeurs de $\omega_{\min} = 0,8$ Hz et $\omega_{\max} = 5$ Hz sont légèrement décalées : $\omega_{\min}^{\text{quart}} = 0,72$ Hz et $\omega_{\max}^{\text{quart}} = 4,4$ Hz.

La vitesse du courant est obtenue par $U(x) = q/h(x)$ et la hauteur d'eau est modélisée par :

$$h(x) = h_{\text{eff}} + (h_0 - h_{\text{eff}})e^{-x^2/\sigma^2} + A_u \cos(k_u x) \frac{1}{4} \left(1 + \tanh \left(\frac{x - x_L}{\Delta_L} \right) \right) \left(1 + \tanh \left(\frac{x - x_R}{\Delta_R} \right) \right) \quad (196)$$

avec q qui est légèrement modifié par rapport à celui de l'expérience pour obtenir $U_{\text{eff}} = q/h_{\text{eff}} = 0,37$ m/s dans la région en aval de l'obstacle. h_0 est choisie pour que le nombre de Froude maximal corresponde à celui observé expérimentalement $F_{\max} \approx 0,85$ en prenant en compte que q a été modifié. Les paramètres $x_{R/L}$ et $\Delta_{R/L}$ permettent d'ajouter les oscillations de l'ondulation stationnaire (visible sur la figure 4.1, courbe rouge) avec une amplitude de A_u et un nombre d'onde k_u . Les valeurs de ces paramètres sont fixés par observations visuelles. L'ondulation étant "attachée" sur la partie descendante de l'obstacle, on considère $x_L \sim 0$. On observe environ 15 oscillations, on fixe donc $k_u(x_R - x_L) = 14,3$. L'ondulation décroît lentement en amplitude, on considère alors $k_u\Delta_R \sim 9$. Le nombre d'onde de l'ondulation k_u obtenu correspond à la solution de fréquence nulle de la relation de dispersion quartique 195 bien qu'il soit différent de celui obtenu avec la relation de dispersion non approximée.

L'amplitude de la partie oscillante est d'abord considérée comme nulle ($A_u = 0$) pour le calcul des coefficients de diffusion représentés sur la figure 4.10 (droite). On remarque alors que, même si la tendance d'évolution des coefficients reste identique aux résultats expérimentaux, la valeur des coefficients $|\alpha|$ et $|\beta|$ diffèrent de ceux mesurés expérimentalement. Par exemple, pour une fréquence de $\omega = 3\omega_{\min}^{\text{quart}} = 2,16$ Hz, la valeur numérique de $|\beta|$ vaut 0,004, alors que nous trouvons expérimentalement $|\beta| = 0,3$. Même si des approximations sont faites sur la relation de dispersion ou sur la forme de la surface libre, cela ne peut expliquer un tel écart.

L'estimation du coefficient $|\beta|$ est alors réalisée une autre fois mais cette fois-ci en considérant une amplitude d'oscillation A_u non nulle (figure 4.11). Nous remarquons alors que le coefficient du mode négatif est fortement influencé par l'amplitude de l'ondulation. Ce phénomène montrerait donc, qu'en plus de la diffusion sur l'obstacle, il se rajouterait une diffusion sur l'ondulation qui convertirait du flux d'action d'onde du mode bleui ($\sim |\alpha|^2$) vers le mode négatif ($\sim |\beta|^2$). Cette diffusion sur l'ondulation est causée par le fait que les longueurs des modes bleui et négatif sont très proches de celle de l'ondulation, ce phénomène ressemble à la résonance de Bragg lorsqu'une onde de surface se propage sur un fond périodique dont la longueur d'onde est égale à la moitié de celle de l'onde [Magne, 2005].

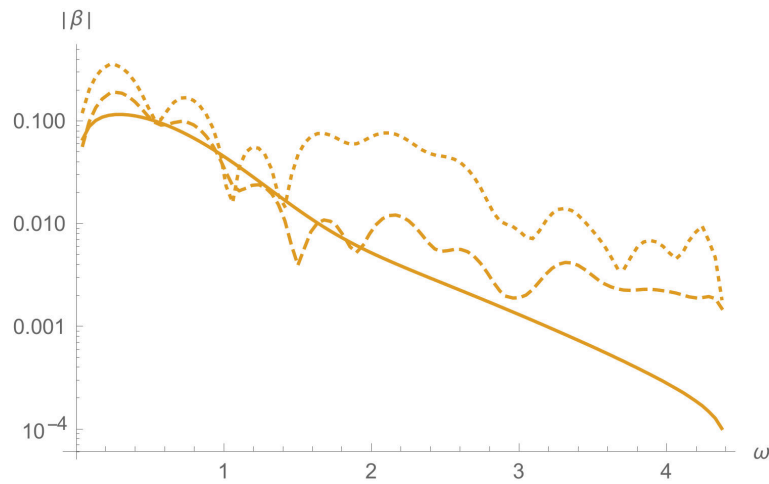


Figure 4.11 – Coefficients de diffusion $|\beta|$ avec une amplitude d'oscillation $A_u = 0$ mm (continu), $A_u = 3$ mm (tirets) et $A_u = 9$ mm (pointillés).

IV.4.3 Diffusion sur l'ondulation dans les expériences du régime de Vancouver (chapitre précédent)

Ce phénomène de diffusion sur l'ondulation explique la variation du ratio $|\beta(\omega)|^2/|\alpha(\omega)|^2$ calculé dans les expériences du chapitre précédent sur la reproduction des expériences de Vancouver, lorsque l'amplitude de l'onde incidente variait. Nous remarquons que les modes bleui et négatif (à la fréquence fondamentale) se propagent sur une distance plus courte, avant de voir leur amplitude transférée vers les fréquences harmoniques, lorsque l'amplitude de l'onde incidente devient plus importante (figure 4.12 gauche). Ces modes subissent alors une diffusion sur l'ondulation plus faible car se propageant sur elle sur une distance plus courte. Alors que, lorsque l'amplitude de l'onde incidente est plus faible, les modes convertis se propagent sur une très grande partie de l'ondulation (figure 4.13), ils subissent alors une diffusion sur l'ondulation importante et le ratio $R = |\beta(\omega)|^2/|\alpha(\omega)|^2$ augmente (figure 4.12 droite). Il est aussi intéressant de remarquer que l'ondulation est de plus grande amplitude et de plus petite longueur d'onde entre $x \sim 0,5$ m et $x \sim 0,8$ m (figure 4.13), ce qui devrait provoquer une diffusion sur l'ondulation plus importante. La figure 4.12 (bas gauche) montre que c'est bien dans cette zone que l'amplitude du mode négatif croît le plus rapidement.

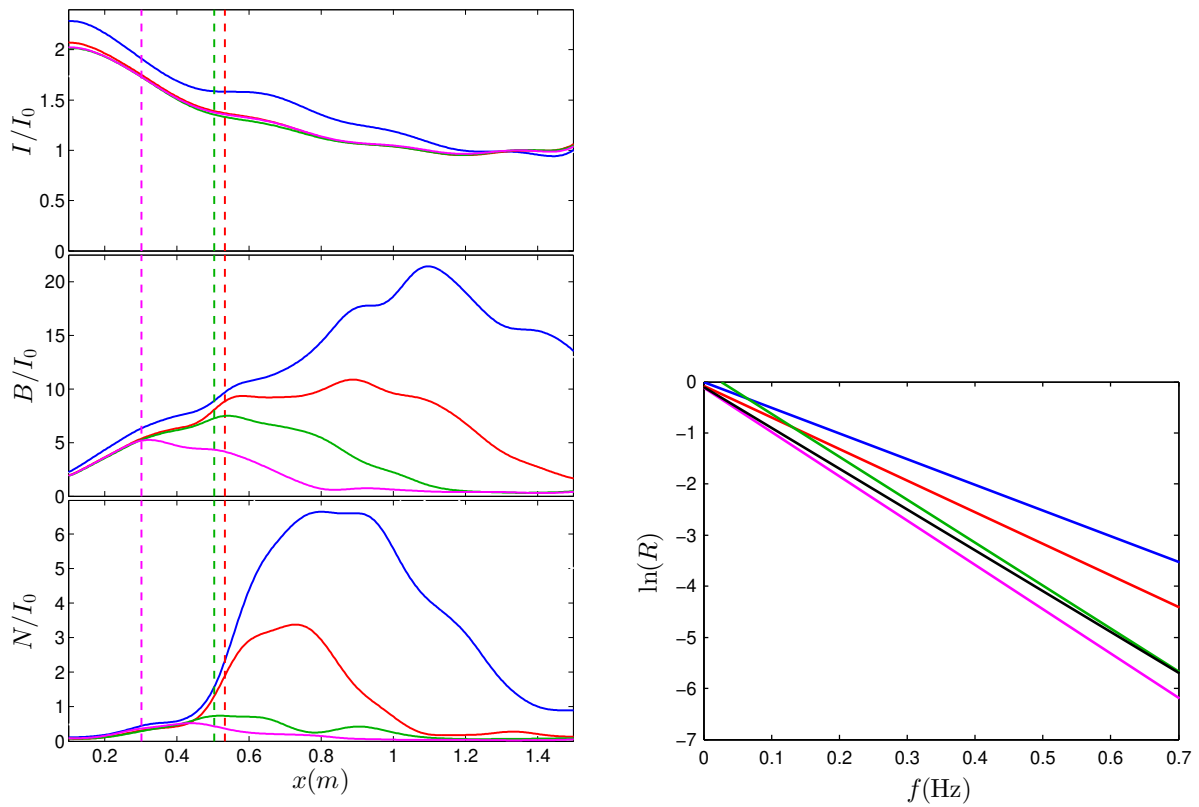


Figure 4.12 – À gauche : Amplitude des différents modes normalisée par l'amplitude de l'onde incidente dans la région en aval de l'obstacle I_0 dans le cas des expériences du chapitre précédent. La couleur des courbes correspond aux différentes amplitudes envoyées par le batteur : 0,05 mm (bleu), 0,15 mm (rouge), 0,35 mm (vert), 0,8 mm (violet). À droite : droite d'interpolation des résultats sur le logarithme de ratio $R = |\beta(\omega)|^2/|\alpha(\omega)|^2$ avec le même système de couleur, la droite noire correspond aux résultats extraits de [Weinfurtner *et al.*, 2011].

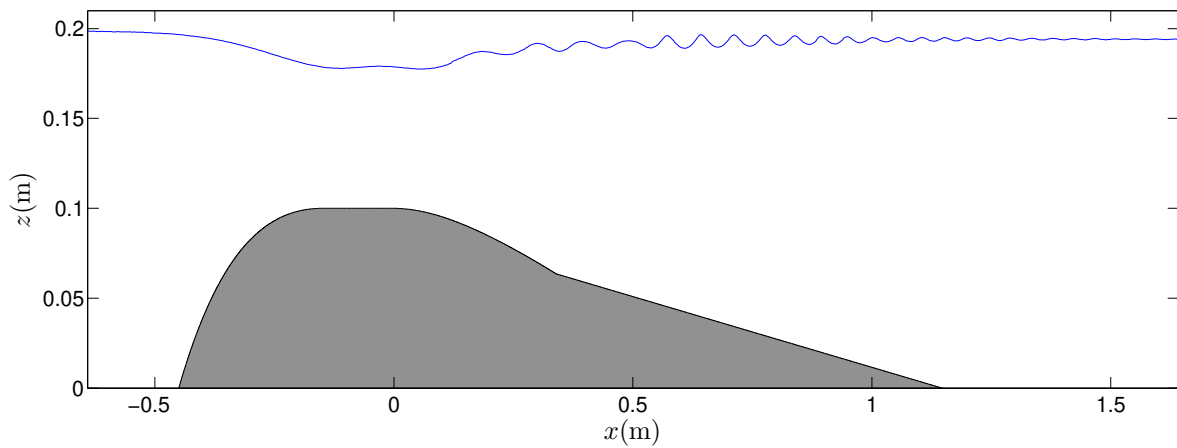


Figure 4.13 – Ondulation stationnaire des expériences du chapitre précédent.

IV.5 Conclusion

Cette étude a permis de montrer que, sans stimulation par le batteur, les fluctuations de surface libre correspondant aux modes converties d'action d'onde positive B et négative H sont fortement corrélées montrant ainsi que ces modes sont issus d'un même processus de conversion. Les mesures des coefficients de diffusion dans le cas d'une stimulation par le batteur ont permis de mettre en évidence la diffusion sur l'ondulation. Plusieurs processus impliqués dans les résultats présents mériteraient d'être étudiés expérimentalement et théoriquement, comme, par exemple, le processus de création de bruit de surface libre par l'écoulement turbulent au dessus de l'obstacle en fonction des paramètres d'écoulement. Pour reprendre la conclusion du chapitre précédent, ces résultats ont permis d'avancer encore d'un grand pas dans l'étude d'un trou blanc hydraulique, mais, heureusement pour toutes les personnes s'intéressant à ce domaine, beaucoup de points restent à éclaircir pour arriver à l'expérience idéale permettant de mesurer la diffusion d'onde par un trou blanc hydraulique.

Trou de ver et effet Laser

V.1 Étude numérique	122
V.1.1 Trou de ver non-dispersif.....	122
V.1.2 Effet de la dispersion	124
V.1.3 Paramètres des simulations	124
V.1.4 Trou de ver dispersif (direction : Blanc→Noir).....	126
V.1.5 Trou de ver dispersif (direction : Noir→Blanc).....	130
V.1.6 Effet Black Hole Laser à deux horizons	132
V.2 Étude expérimentale	136
V.2.1 Choix du régime et des paramètres.....	137
V.2.2 Théorie des rayons	138
V.2.3 Résultats	139
V.2.4 Vérification dans l'espace de Fourier et corrélations.....	142
V.2.5 Estimation théorique de l'évolution de l'amplitude	145
V.2.6 Interférences.....	148
V.2.7 Suppression de la viscosité	150
V.3 Conclusion	152

Un trou de ver est une connexion entre deux régions séparées de l'espace-temps mettant en jeu un trou noir et son reversé temporel, un trou blanc. Albert Einstein et Nathan Rosen propose, en 1935, la possibilité d'un trou de ver [Einstein et Rosen, 1935], appelé pont de Einstein-Rosen, mais qui ne sera pas traversable car en rentrant par le trou noir, le trou de ver se referme et la lumière ne peut traverser le « pont ». Thorne et al [Morris *et al.*, 1988] font l'hypothèse d'une matière exotique d'énergie négative qui permettrait de stabiliser un trou de ver et donc de le rendre traversable. Nous montrons dans ce chapitre, numériquement et expérimentalement, qu'il est possible de créer un trou de ver analogue connectant un horizon noir et un horizon blanc, sous certaines conditions d'écoulement. Dû à l'absence de singularité dans l'écoulement, ce trou de ver hydraulique est alors stable et ressemblerait donc à la solution proposée par Thorne et al. Contrairement à la Relativité Générale qui ne permettrait qu'un voyage du trou noir vers le trou blanc, la dispersion des ondes de surface offre la possibilité d'un trou de ver bidirectionnel (traversable dans les deux sens). Dans les deux chapitres précédents, nous nous intéressions à l'étude d'un trou blanc hydraulique grâce à l'écoulement au dessus d'une bosse. Mais un autre point de blocage de l'autre côté de l'obstacle (en amont) joue le rôle d'horizon noir. Nous nous plaçons toujours dans un régime d'écoulement où la vitesse minimale du fluide restait supérieure à U_γ et où la tension de surface pouvait être négligée et seulement quatre modes étaient présents, deux modes correspondant aux ondes longues et deux modes causés par la première échelle dispersive (la hauteur d'eau). Dans ce chapitre, même si le régime d'écoulement reste similaire à celui au-dessus d'un obstacle, les paramètres sont choisis tels que la tension de surface implique l'apparition de nouvelles paires d'horizons capillaires élevant leurs nombre à six (comme présenté dans le chapitre théorique). Nous observons aussi que dans de tels trous de ver hydrodynamiques, les ondes à énergie négative sont piégées entre les horizons et amplifiées, formant ainsi l'analogie d'une cavité Laser (pour nommer cet effet, nous garderons le terme anglais de

Black Hole Laser [Vilenkin, 1978, Corley et Jacobson, 1999, Leonhardt et Philbin, 2007, Faccio *et al.*, 2012]).

V.1 Étude numérique

Les résultats présentés dans cette partie ont fait l'objet d'une publication [Peloquin *et al.*, 2016] et ont été obtenus avec un code *Fortran* conçu initialement par Thomas Philbin, co-auteur de la publication. Ce code ne simule pas l'écoulement au-dessus d'un obstacle en résolvant les équations de Navier-Stokes, mais il permet de calculer la propagation et les conversions possibles d'un paquet d'onde envoyé sur un courant variable. Il n'est donc pas spécifique à l'étude des ondes de surface mais permet d'étudier tout système dispersif en lui indiquant la relation de dispersion de ce système. Pour notre cas, nous utilisons donc la relation de dispersion des ondes de surface, les paramètres du régime d'écoulement (U vitesse du courant, h hauteur d'eau) étant donc directement injectés dans celle-ci.

V.1.1 Trou de ver non-dispersif

Nous nous intéressons d'abord au cas non dispersif afin de comprendre les limites imposées par la Relativité Générale. On rappelle que, la relation de dispersion d'un régime non-dispersif s'écrit : $\omega = (U \pm c)k$ (figure 5.1) avec U la vitesse du fluide et c la vitesse des ondes longues $c = \sqrt{gh}$.

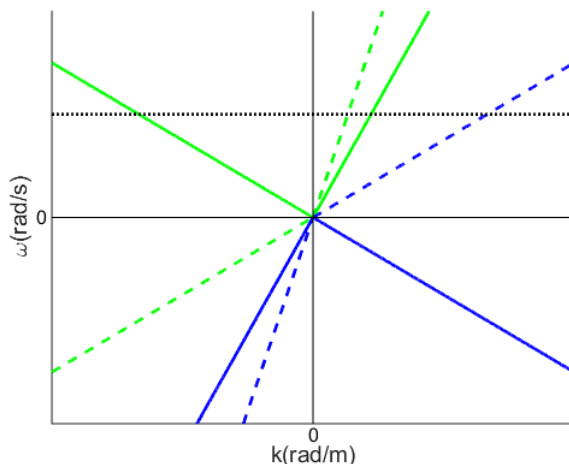


Figure 5.1 – Graphique des relations de dispersion dans la limite non-dispersive lorsque U varie ($\omega = (U \pm c)k$, $U > 0$). En continu pour une région sous-critique où $U = 0.5 \cdot |c|$ et en tirets pour une région super-critique où $U = 1.5 \cdot |c|$. Les branches dont la fréquence relative $\sigma = \omega - Uk = \pm ck$ est positive sont en vert, et celles de fréquence relative négative sont en bleu. La fréquence conservée de l'onde incidente est représentée par la droite en pointillés noirs.

Grâce à une variation de vitesse du fluide, on peut créer une paire d'horizons, un horizon noir au niveau de l'accélération ($dU/dx > 0$ et $U = |c|$) et un horizon blanc au niveau de la décélération ($dU/dx < 0$ et $U = |c|$). Si dans la direction du courant, les horizons se trouvent dans cet ordre (que nous nommerons géométrie "bosse"), une région super-critique est alors créée entre deux régions sous-critiques. Une onde envoyée en amont de l'horizon noir en co-courant (soit un \mathcal{V} -mode si on se réfère au chapitre introductif)

traverserait le trou de ver (figure 5.2 gauche), en plus de cela des conversions peuvent apparaître aux niveaux des horizons vers des modes se propageant avec une vitesse $-c$ dans le référentiel du courant (\mathcal{U} -modes). L'amplitude des modes convertis dépend du gradient de vitesse au niveau de l'horizon. En Relativité Générale, le couplage entre \mathcal{V} et \mathcal{U} modes est impossible car la vitesse de la lumière est constante pour toute position. Mais dans un système analogue, même si on reste dans la limite non-dispersive avec $c = \sqrt{gh}$ pour les ondes de surface, cette vitesse peut varier en fonction de la position si la hauteur d'eau varie elle aussi, permettant ainsi un couplage entre \mathcal{V} et \mathcal{U} modes. Si l'onde est envoyée à contre-courant à partir de la région aval, elle ne pénétrera jamais la région super-critique et verra la longueur d'onde tendre vers zéro au niveau de l'horizon blanc. Il en est de même pour l'onde négative qui pourrait être créée à partir de l'onde envoyée en co-courant. Ce problème est appelé catastrophe ultra-violette en Gravitation Analogue et problème trans-Planckien en Relativité Générale.

Dans une géométrie où l'ordre des horizons serait inversé (nous nommerons cette géométrie "creux", figure 5.2 droite), une région sous-critique sera donc créée entre deux régions super-critiques. Si une onde est envoyée à contre courant à partir de la zone sous-critique, elle subit alors un bleuissement infini au niveau de l'horizon blanc. Si l'onde est envoyée à co-courant, elle s'échappe alors de la zone sous-critique à travers l'horizon noir, où elle se convertit en onde négative, qui elle aussi s'échappe à co-courant, et en onde positive, se propageant à contre-courant et subissant un bleuissement infini au niveau de l'horizon blanc.

Comme en Relativité Générale, on observe donc qu'un trou de ver analogue non-dispersif n'est traversable que dans un sens, que nous appellerons par la suite Noir→Blanc. Dans tous les cas de régime non-dispersif, la pathologie du bleuissement infini est présente au niveau de l'horizon blanc [Barceló *et al.*, 2011, Robertson, 2012].

V.1.2 Effet de la dispersion

En gravitation analogue, le problème trans-Planckien est résolu par l'introduction des échelles dispersives [Faccio *et al.*, 2013]. Pour les ondes de surface et sous certains régimes, la combinaison de ces deux longueurs dispersives (h hauteur d'eau et l_c longueur capillaire) entraîne une coupure de la radiation de Hawking analogue pour un observateur à l'infini [Rousseaux *et al.*, 2010, Chaline *et al.*, 2013].

Pour rappel, la relation de dispersion incluant la tension de surface peut s'écrire :

$$(\omega - Uk)^2 = (gk + gl_c^2 k^3) \tanh(kh) \quad (197)$$

avec $l_c = 2,7$ mm pour l'eau.

Nous montrons donc, par la suite, que la combinaison de ces deux corrections dispersives permet le voyage d'une onde à travers un trou de ver hydrodynamique dans le sens Blanc→Noir interdit en Relativité Générale.

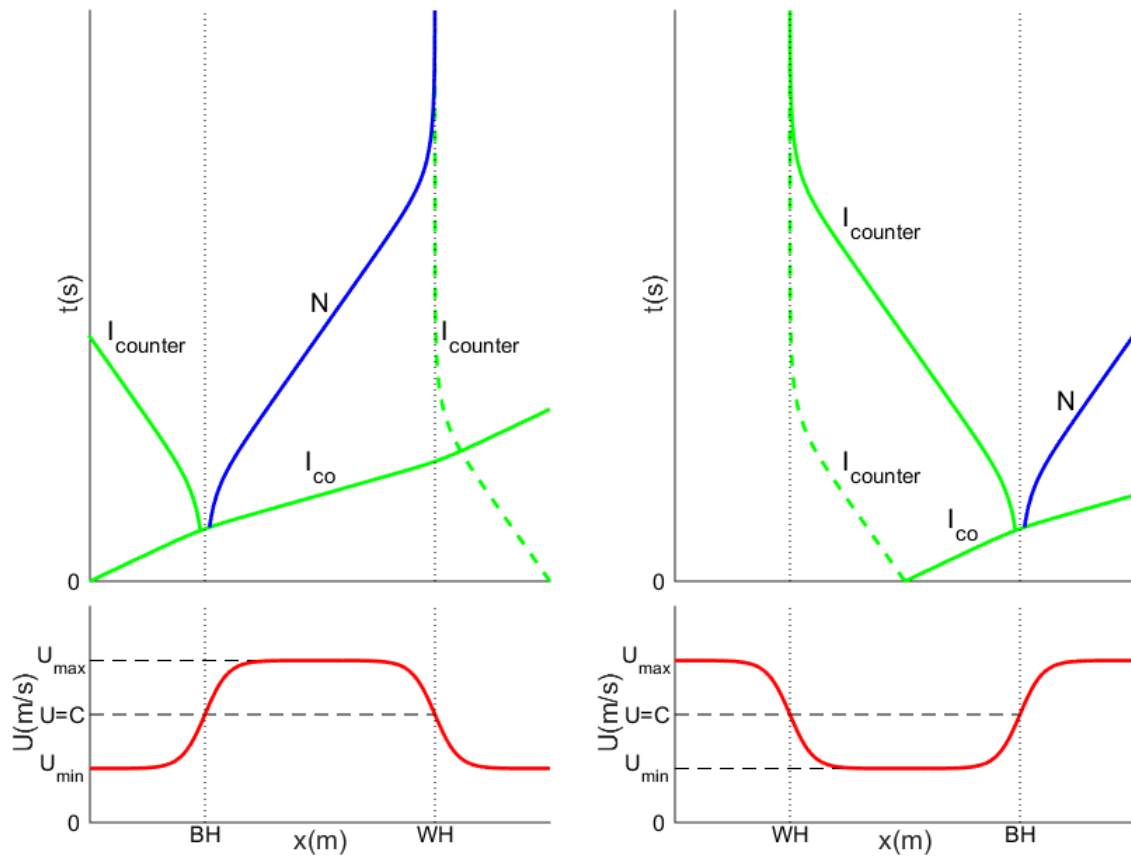


Figure 5.2 – En bas à gauche : profil de vitesse pour une géométrie de type bosse. En bas à droite : pour une géométrie de type creux. En haut schéma des diagrammes espace-temps respectifs. Pour les deux géométrie, $U_{\text{min}} = 0.5 \cdot c$ et $U_{\text{max}} = 1.5 \cdot c$. Pour reprendre les notations de Relativité Générale, le mode I_{co} correspond au \mathcal{V} -mode, I_{counter} au \mathcal{U}_L -mode et N au \mathcal{U}_R -mode.

V.1.3 Paramètres des simulations

Paquet d'onde

Les ondes envoyées sur les différents régimes sont sous forme de paquet d'onde de forme gaussienne (figure 5.3) dont l'expression mathématique est :

$$a(x) = A e^{i \cdot k_0(x+x_0)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \quad (198)$$

où A représente son amplitude fixée arbitrairement à 1 car on se place dans un cas linéaire, toutes les amplitudes peuvent être adimensionnées par rapport à l'amplitude du paquet d'onde initial. $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ correspond au nombre d'onde central dans la représentation spectrale du paquet d'onde. σ est le paramètre contrôlant la largeur initiale du paquet d'onde. x_0 est la position initiale du centre du paquet d'onde.

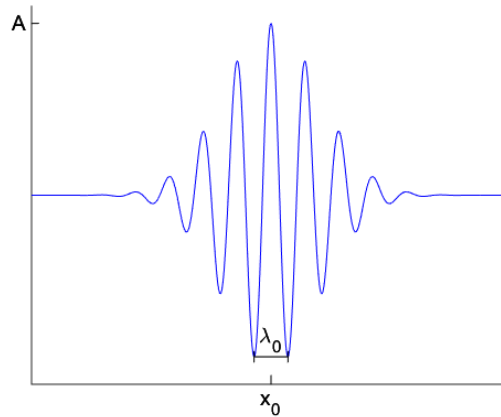


Figure 5.3 – Paquet d'onde décrit par l'équation (198), pour les simulations nous utiliserons $\sigma = \lambda_0$ afin que le paquet d'onde initial soit constitué d'environ 7 crêtes (choix arbitraire).

Profil de vitesse

Nous considérons un profil de vitesse constitué de deux tangentes hyperboliques permettant de créer une accélération ($dU/dx > 0$, région de l'horizon noir) et une décélération ($dU/dx < 0$, région de l'horizon blanc) séparées par une distance contrôlée par la position des deux tangente hyperboliques (figure 5.4) :

$$U(x) = U_{\min} + S(\tanh(a_1 \cdot (x - x_1) - \tanh(a_2(x - x_2))) \quad (199)$$

où $|U_{\min}|$ est le minimum de vitesse, a_1 correspond à la pente sur la partie gauche du profil de vitesse et a_2 pour la partie droite. $\Delta = x_2 - x_1$ représente la distance entre les deux maxima de gradient de vitesse. S caractérise la différence entre le minimum et le maximum du profil de vitesse $U_{\min} + 2S = U_{\max}$. Les deux maxima du gradient de vitesse sont calculés avec l'équation, (pour $i = 1$ ou 2) :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \pm a_i \cdot S \quad (200)$$

Pour simplifier le problème, nous considérons une vitesse variant selon la position tout en conservant une hauteur d'eau constante. Cela pourrait être réalisé expérimentalement en

faisant varier la largeur du canal et non la bathymétrie, même si cela provoquerait tout de même une variation de surface libre due à des effets de dépression aux niveaux des régions de plus grande vitesse par exemple, mais les variations de vitesse du courant seraient beaucoup plus importantes que les variations de hauteur d'eau. Il a été mentionné (dans la section "Trou de ver non-dispersif" de ce chapitre) que le couplage entre les modes se propageant à des vitesses opposées dans le référentiel du courant ($\pm c$) était impossible lorsque la vitesse des ondes était constante, ce qui est le cas ici dans la limite non-dispersive avec $c = \sqrt{gh}$ car h est constant. Mais, la dispersion des ondes de surfaces implique que la vitesse des ondes (vitesse de groupe) varie selon la position rendant ce couplage possible, même si la hauteur d'eau est constante.

Pour les simulations, le vecteur \vec{x} est toujours considéré de même signe que la direction de propagation du paquet d'onde incident, soit de la gauche vers la droite. C'est donc le signe de la vitesse du courant U que l'on modifiera pour considérer un paquet d'onde incident se propageant à co-courant ($U > 0$) ou à contre-courant ($U < 0$).

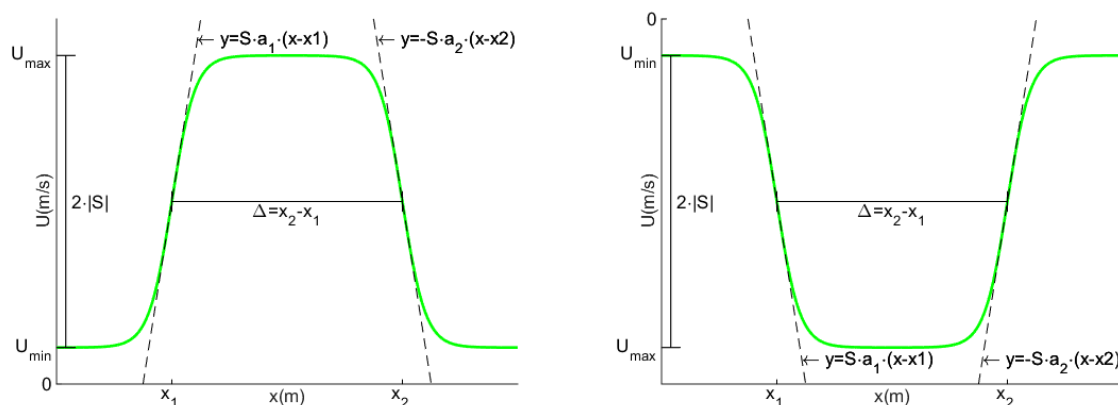


Figure 5.4 – À gauche : champ de vitesse pour un voyage Noir→Blanc, le paquet d'onde incident se propageant en co-courant ($U > 0$). À droite : champ de vitesse pour un voyage Blanc→Noir, le paquet d'onde incident se propageant à contre-courant ($U < 0$).

Horizons et solutions

Pour rappel, un horizon dispersif (point de blocage) est la position spatiale telle que la vitesse de groupe ($v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$) est nulle pour une certaine fréquence angulaire ω : cela correspond à un extremum dans la représentation graphique de la relation de dispersion (figure 5.5 gauche). En présence de tension de surface, les deux échelles dispersives mentionnées précédemment créent six horizons formant trois couples (car chaque couple ayant la même représentation dans la relation de dispersion) : Blanc et Noir, Bleu et Rouge, Négatif-blanc et Négatif-noir. Aux niveaux de certaines positions spatiales, peuvent apparaître jusqu'à six solutions (nombres d'onde) pour une fréquence fixée (figure 5.5 droite), au lieu de deux pour un régime non-dispersif et quatre pour un régime ne possédant qu'une longueur dispersive.

V.1.4 Trou de ver dispersif (direction : Blanc→Noir)

Le paquet d'onde incident I est envoyé à contre courant (figure 5.6, profil de vitesse figure 5.4 droite) à partir de la région sous-critique de gauche ($U = U_{\min}$ and $x < x_1$).

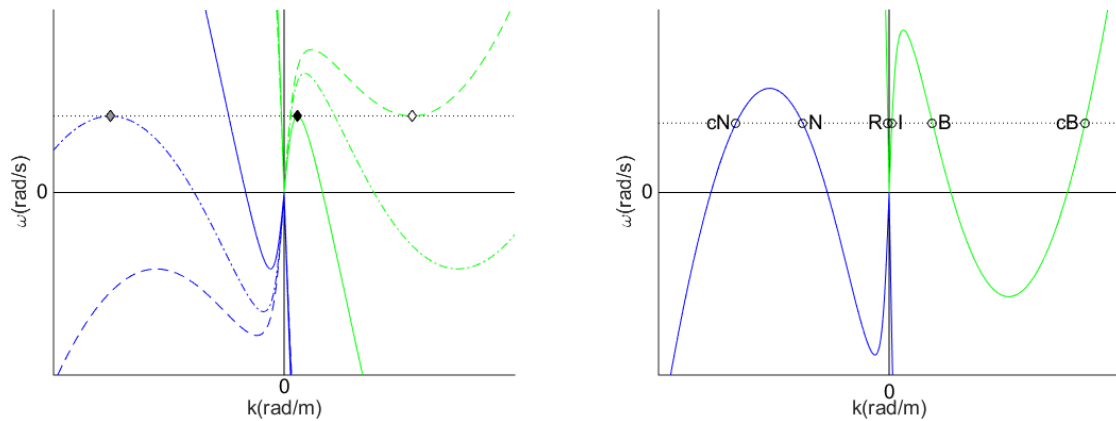


Figure 5.5 – À gauche : les différents horizons dans l'espace de Fourier (pour une relation de dispersion d'ondes gravito-capillaires avec $U < 0$: Blanc et Noir (diamant noir), Bleu et Rouge (diamant blanc), Négatif-blanc et Négatif-noir (diamant gris). Les branches avec une fréquence relative positive sont représentées en vert et celles avec une fréquence relative négative en bleu. À droite : les six solutions (nombres d'onde) pour une fréquence fixée pour la configuration d'une onde envoyée à contre-courant vers la région d'un trou blanc : onde incidente (I), rétrograde (R), bleuie (B), capillaire positive (cB), négative (N), capillaire négative (cN).

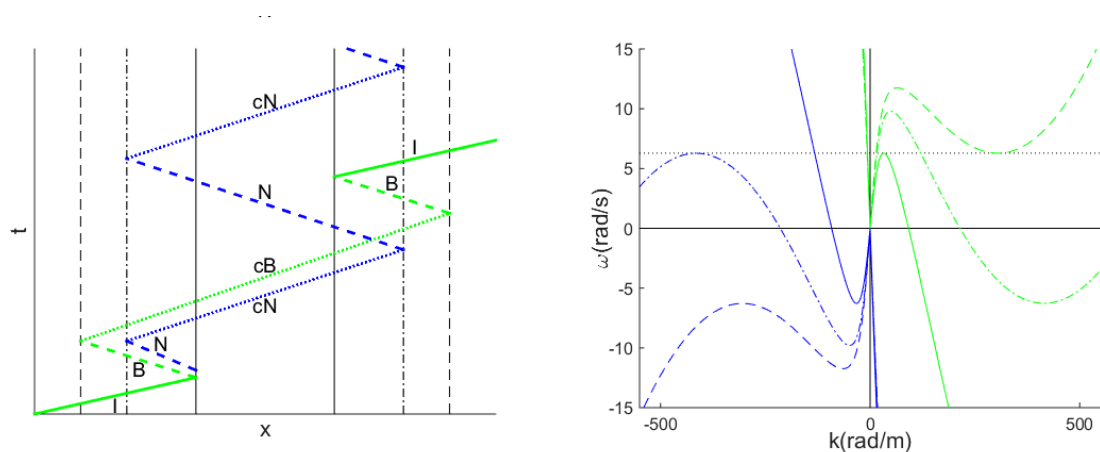


Figure 5.6 – À gauche : schéma des principales conversions dans le voyage Blanc→Noir. Les lignes verticales indiquent la position spatiale des horizons, en continu les horizons blanc (gauche) et noir (droite) où $U = -0.337$ m/s, en tirets les horizons bleu (gauche) et rouge (gauche) où $U = -0.213$ m/s, en point-tirets les horizons blanc-négatif (gauche) et noir-négatif (droite) où $U = -0.248$ m/s, $h = 0.05$ m, $T = 1$ s. À droite : Les relations de dispersion aux niveaux des différents horizons (le type des courbes étant identique au schéma de gauche).

La première conversion est identique à celle observée dans les chapitres précédents. Le paquet d'onde incident I est bloqué à l'horizon blanc et se convertit en un paquet d'onde bleui B et, si le gradient de vitesse est fort au niveau de l'horizon, une partie est aussi convertie en paquet d'onde négatif N . Le paquet d'onde bleui, qui voit sa longueur d'onde diminuer en s'éloignant de l'horizon blanc, est ensuite converti au niveau de l'horizon bleu en paquet d'onde capillaire positif cB . La double conversion incident vers bleui vers capillaire sera appelée par la suite double rebond [Badulin *et al.*, 1983, Trulsen et Mei, 1993, Rousseaux *et al.*, 2010]. Le paquet d'onde capillaire traverse ensuite la région super-critique et subit alors un double rebond inverse dans la région de l'horizon noir, c'est à dire qu'il est converti en paquet d'onde bleui B à l'horizon rouge puis en incident I à l'horizon noir. Le paquet d'onde négatif N est lui converti en capillaire négatif cN à l'horizon blanc-négatif et traverse la région super-critique pour être reconverti en paquet d'onde négatif à l'horizon. On observe ensuite une boucle infinie de conversion d'onde négative ($N \rightarrow cN \rightarrow N \rightarrow cN \rightarrow \dots$). Même si elles ne sont pas représentées dans la figure 5.6, d'autres conversions apparaissent à chaque rebond ($N \rightarrow cN$ et $cN \rightarrow N$) vers des modes à énergie positive, cela provoque alors une amplification des paquets d'onde à énergie négative. Le trou de ver joue alors le rôle d'une cavité Laser, correspondant à l'effet Black Hole Laser hydrodynamique.

Les conversions vers les modes à énergie négative étant contrôlées par les gradients de vitesse aux niveaux des horizons blanc ($\frac{\partial U}{\partial x}|_{x^*} \sim a_1 \cdot S$) et noir ($\frac{\partial U}{\partial x}|_{x^*} \sim a_2 \cdot S$), nous décidons de séparer deux cas de gradients de vitesse différents. Nous considérons d'abord un gradient faible ($a_1 = a_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$ figures 5.7 gauche et 5.8 gauche). Nous observons, dans ce cas, seulement la conversion des paquets d'onde positifs, la conversion vers les modes négatifs étant négligeable. Les deux scénarii de double rebond sont ici clairement visibles. Le paquet d'onde incident I est converti en capillaire cB par double rebond dans la région de l'horizon blanc puis traverse la région super-critique pour subir un double rebond inverse au niveau de la région de l'horizon noir et finit par s'échapper de l'horizon noir dans la région sous-critique de gauche.

Puis, dans le but d'observer la conversion vers les modes négatifs, nous imposons un gradient plus grand ($a_1 = a_2 = 20 \text{ m}^{-1}$ figures 5.7 droite et 5.8 droite). Les horizons blanc, bleu et négatif-blanc sont alors très proches spatialement (il en va de même pour le trio d'horizons noir, rouge et négatif-noir). En plus du processus sur les ondes positives précédemment décrit, nous observons les rebonds successifs du mode négatif N et capillaire négatif cN . L'amplification à chaque occurrence $N \rightarrow cN \rightarrow N$ est d'environ 1% pour les paramètres des figures 5.6 et 5.7 (droite).

Afin d'explorer le phénomène d'amplification, nous modifions les gradients de vitesse dans le but d'augmenter le taux d'amplification. Premièrement, nous doublons les pentes ($a_1 = a_2 = 40 \text{ m}^{-1}$, figure 5.9). Le facteur d'amplification peut alors être mesuré dans l'espace de Fourier, entre un temps t_1 et t_2 :

$$\chi = \frac{\int_k \delta h(k, t_2) dk - \int_k \delta h(k, t_1) dk}{\int_k \delta h(k, t_1) dk} \quad (201)$$

L'amplification est clairement visible pour ce cas (figure 5.9) et est de l'ordre de 16%. La distance entre les horizons et la durée de simulation ont été augmentées dans le but d'observer un nombre plus important de récurrences.

Puis, pour mieux comprendre l'influence des gradients de vitesse, nous les faisons varier entre $a_1 = a_2 = 10 \text{ m}^{-1}$ et $a_1 = a_2 = 100 \text{ m}^{-1}$ (figure 5.10 droite). Nous avons aussi observer, l'influence seule du premier gradient (a_1), en fixant le second $a_2 = 5 \text{ m}^{-1}$ puis en faisant varier le premier entre $a_1 = 10 \text{ m}^{-1}$ et $a_1 = 100 \text{ m}^{-1}$ (figure 5.10 gauche).

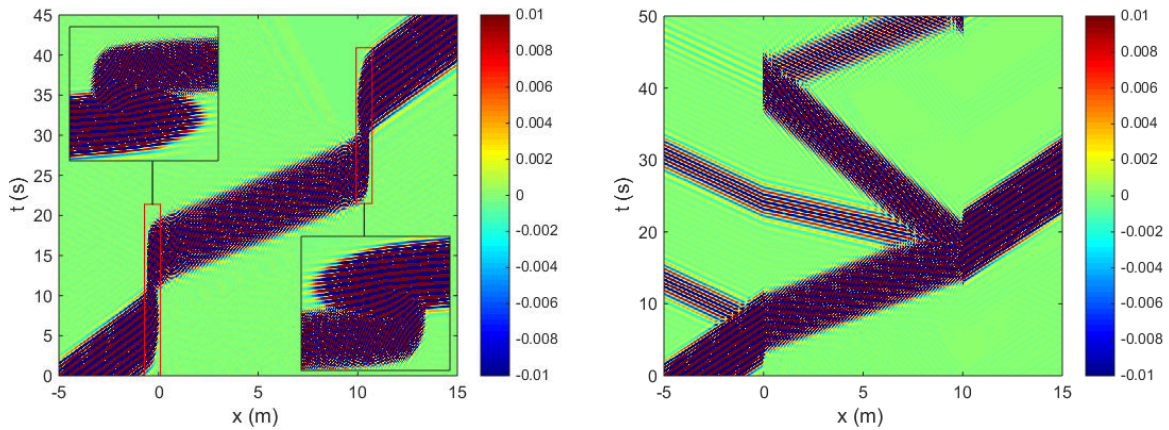


Figure 5.7 – Diagramme espace-temps de la propagation d'un paquet d'onde à travers un trou de ver dispersif dans la direction Blanc→Noir. Les horizons sont localisés aux environs de $x_1 = 0$ m et $x_2 = 10$ m. $h = 0,05$ m, $T = 1$ s, $U_{\min} = -0,1$ m/s, $U_{\max} = 0,9$ m/s. À gauche : $a_1 = a_2 = 1,5$ m⁻¹. À droite : $a_1 = a_2 = 20$ m⁻¹.

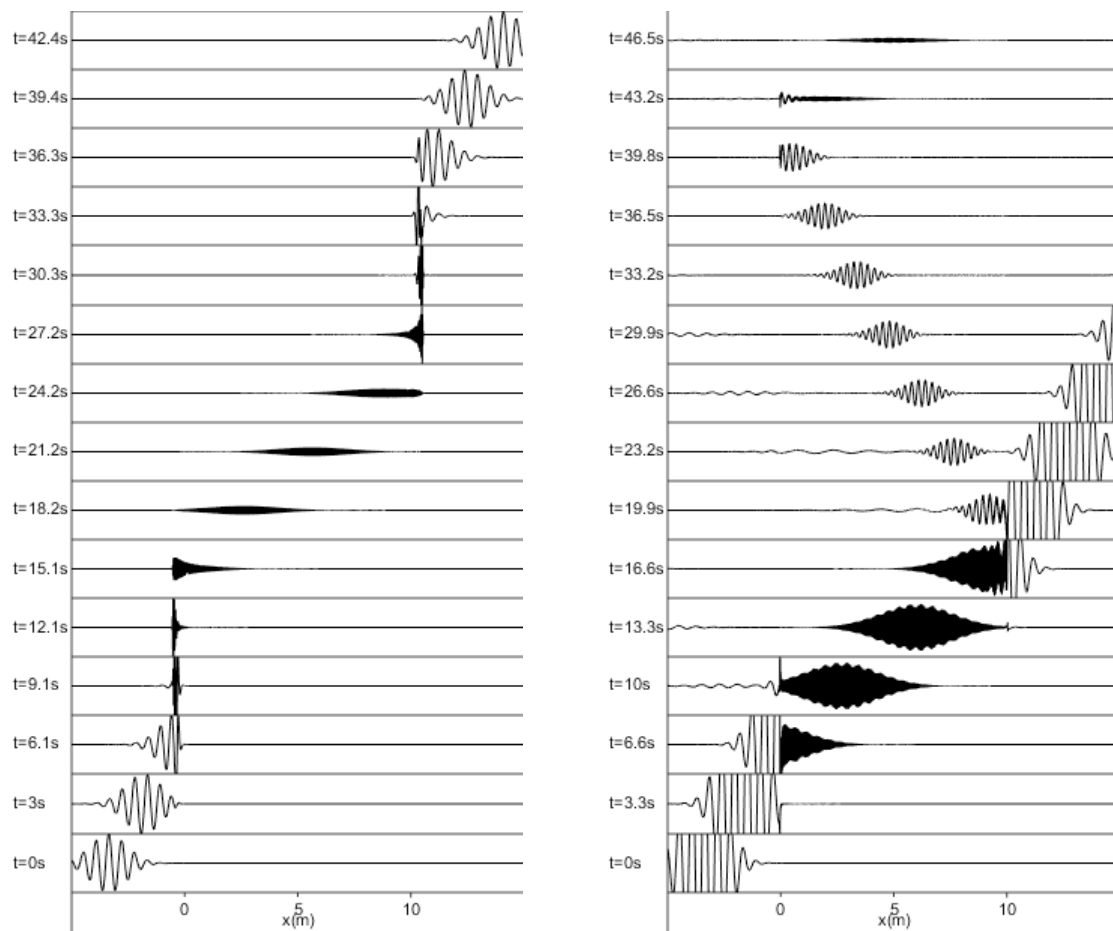


Figure 5.8 – Clichés successifs de la propagation d'un paquet d'onde à travers un trou de ver dispersif dans la direction Blanc→Noir. À gauche : correspondant au diagramme espace-temps de la figure 5.7 gauche (échelle d'amplitude [-1 :1]). À droite : correspondant au diagramme espace-temps de la figure 5.7 droite (échelle d'amplitude [-0.2 :0.2]).

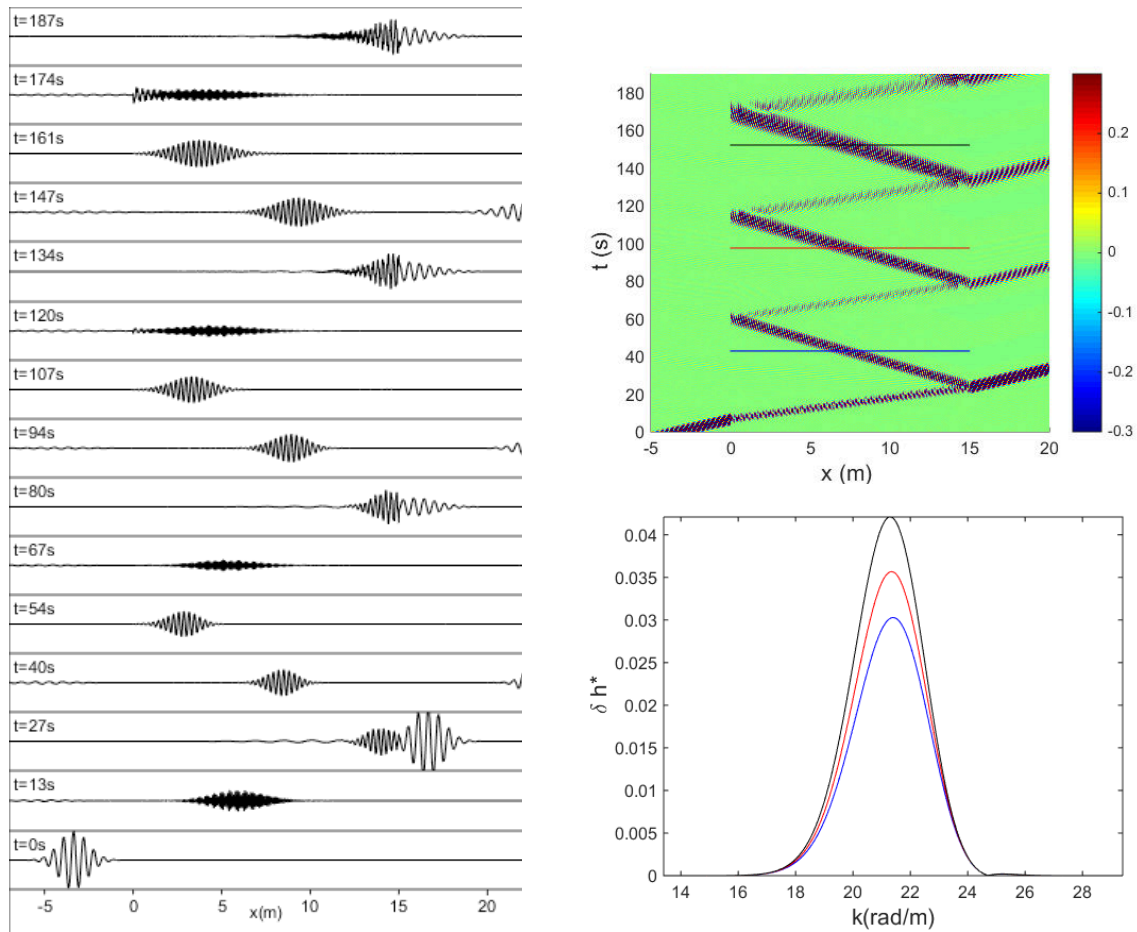


Figure 5.9 – À gauche : Clichés successifs de la propagation d’un paquet d’onde à travers un trou de ver dispersif dans la direction Blanc→Noir. Les horizons sont localisés aux environs de $x_1 = 0$ m et $x_2 = 10$ m. $h = 0,05$ m, $T = 1$ s, $U_{\min} = -0,1$ m/s, $U_{\max} = -0,9$ m/s, $a_1 = a_2 = 40\text{m}^{-1}$ (échelle d’amplitude [-1 : 1]). En haut à droite : diagramme espace-temps pour les mêmes paramètres. En bas à droite : représentation spectrale des paquet d’onde négatifs à différents moments $t_1 = 42.9$ s (bleu), $t_2 = 97.6$ s (rouge) et $t_3 = 152.2$ s (noir). Ces temps sont désignés par les droites horizontales dans le diagramme espace-temps du dessus par les mêmes couleurs.

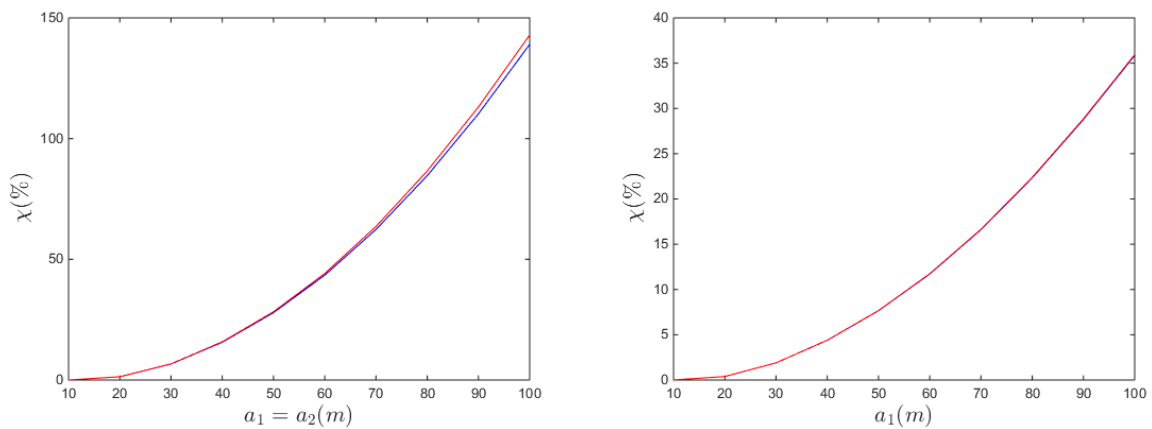


Figure 5.10 – À gauche : Taux d’amplification χ en fonction des gradients de vitesse $a_1 = a_2$ calculés entre les deux temps $t_1 = 42.9$ s et $t_2 = 97.6$ s (bleu) et entre $t_2 = 97.6$ s et $t_3 = 152.2$ s (rouge). À droite : Taux d’amplification χ en fonction du premier gradient de vitesse a_1 , le second gradient étant fixé $a_2 = 5\text{m}^{-1}$.

À chaque rebond sur l'horizon négatif noir, le paquet d'onde d'action d'onde négative N émet un paquet d'onde d'action d'onde positive I se propageant à contre-courant dans la région sous-critique de droite, et à chaque rebond sur l'horizon négatif-blanc, c'est un paquet d'onde rétrograde R qui est émis en co-courant dans la région sous-critique de gauche. L'émission de ces paquets d'action d'onde positive implique une amplification de l'action d'onde du paquet d'onde piégé à l'intérieur du trou de ver démontrant ainsi l'effet Black Hole Laser d'un trou de ver hydrodynamique dispersif.

V.1.5 Trou de ver dispersif (direction : Noir→Blanc)

Le paquet d'onde est envoyé ici en co-courant (profil de vitesse figure 5.4 gauche) à partir de la région sous-critique en amont de l'horizon noir ($U = U_{\min}$ and $x < x_1$). Si les gradients de vitesse sont faibles ($a_1 = a_2 = 1,5\text{m}^{-1}$ figures 5.11 gauche et 5.12 gauche), le paquet d'onde incident est juste réfracté par les gradients de vitesse mais aucune conversion n'est observée durant sa propagation. Or, si les gradient deviennent plus importants ($a_1 = a_2 = 20\text{m}^{-1}$ figures 5.11 droite et 5.12 droite), alors des conversions se produisent aux niveaux des maxima de gradient de vitesse (x_1 et x_2) et nous observons un phénomène similaire à celui du voyage Blanc→Noir. Mais ici, on distingue deux départs d'occurrence ($N \rightarrow cN \rightarrow N \rightarrow \dots$), aux alentours de chaque maximum de gradient de vitesse.

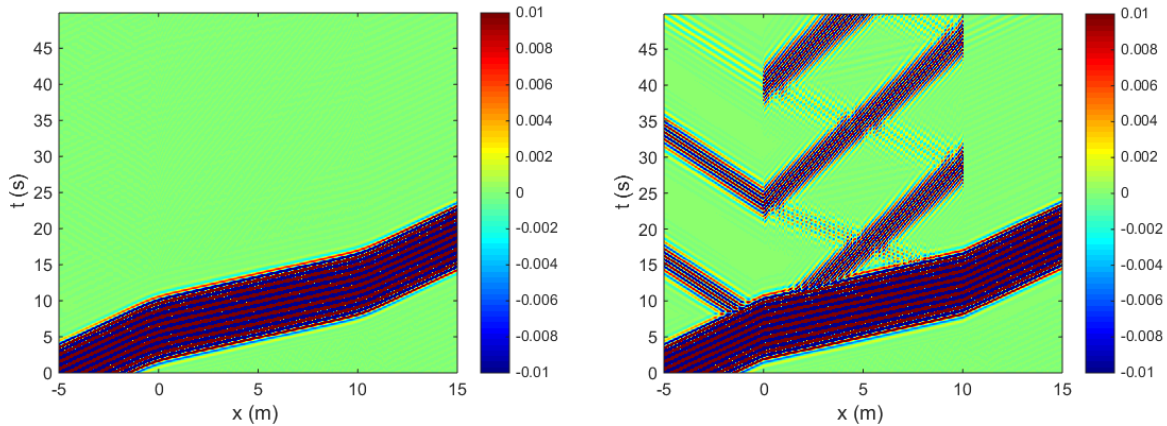


Figure 5.11 – Diagramme espace-temps de la propagation d'un paquet d'onde à travers un trou de ver dispersif dans la direction Noir→Blanc. Les horizons sont localisés aux environs de $x_1 = 0$ m et $x_2 = 10$ m. $h = 0,05$ m, $T = 1$ s, $U_{\min} = 0,1$ m/s, $U_{\max} = 0,9$ m/s. À gauche : $a_1 = a_2 = 1,5 \text{ m}^{-1}$. À droite : $a_1 = a_2 = 20 \text{ m}^{-1}$.

Pour reprendre l'image de la rivière présentée dans le chapitre introductif, la figure 5.13 illustre, de façon très schématique, les différents voyages possibles à travers le trou de ver hydraulique. En plus des voyages « Blanc →Noir » et « Noir→Blanc » déjà présentés s'ajoute la possibilité d'observer la pénétration direct d'onde capillaire grâce à leur vitesse dite « super-luminale » (lorsque $T < T_c$ [Rousseaux *et al.*, 2010]).

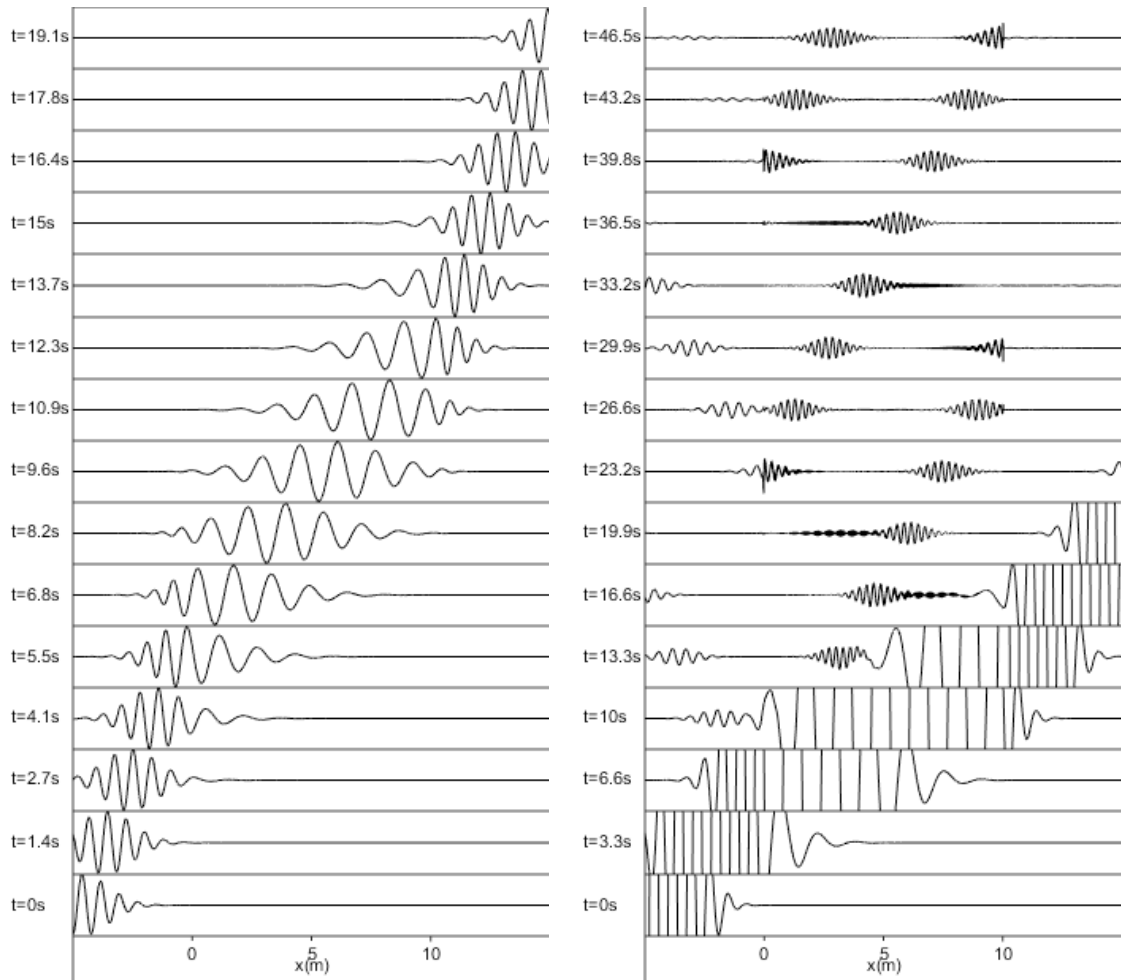


Figure 5.12 – Clichés successifs de la propagation d'un paquet d'onde à travers un trou de ver dispersif dans la direction Blanc→Noir. À gauche : correspondant au diagramme espace-temps de la figure 5.7 gauche (échelle d'amplitude [-1 :1]). À droite : correspondant au diagramme espace-temps de la figure 5.7 droite (échelle d'amplitude [-0.05 :0.05]).

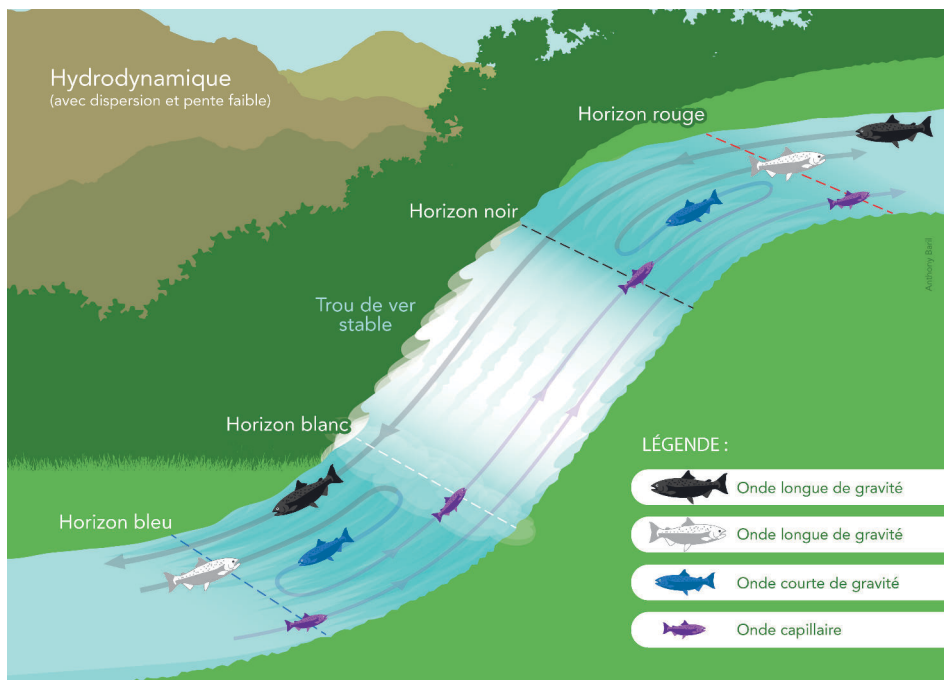


Figure 5.13 – Schématisation des différents voyages possibles à travers un trou de ver hydraulique (Image réalisée par Anthony Baril).

V.1.6 Effet Black Hole Laser à deux horizons

Dans cette partie nous avons souhaité créer un scénario plus proche de celui des condensats de Bose-Einstein, l'effet Black Hole Laser ayant déjà été étudié dans ce domaine de la physique [Steinhauer, 2014], bien que ces résultats soient controversés et sujets à débat [Wang, 2017, Wang *et al.*, 2017]. Nous avons vu précédemment qu'il était possible de créer une cavité Laser grâce à une bosse dans le profil de vitesse (une région super-critique entre deux régions sous-critiques) faisant intervenir six horizons et deux échelles dispersives. Dans le cas présent, il est possible d'observer l'effet Laser avec seulement une longueur dispersive (la hauteur d'eau h) mettant en jeu deux horizons (Noir et Blanc).

Dans un condensat de Bose-Einstein [Garay, 2002, Rousseaux, 2013], la relation de dispersion est décrite par la dispersion de Bogoliubov :

$$(\omega - Uk)^2 = \frac{\mu}{m}k^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2}k^4. \quad (202)$$

avec μ le potentiel chimique, m la masse et \hbar la constante de Planck. En considérant $c^2 = \frac{\mu}{m}$ et $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m\mu}$, la relation de dispersion exhibe une correction en $+k^4$ sur le cas sans dispersion $(\omega - Uk)^2 = \frac{\mu}{m}k^2$:

$$(\omega - Uk)^2 = c^2k^2 + c^2\xi^2k^4. \quad (203)$$

En physique des ondes de surface, si on néglige l'effet de la capillarité, on peut récrire la relation de dispersion 197 grâce aux séries de Taylor (pour $kh \ll 1$) :

$$(\omega - Uk)^2 \simeq ghk^2 - gh\frac{h^2}{3}k^4. \quad (204)$$

Dans ce cas, on obtient $c^2 = gh$ et $\xi^2 = -\frac{h^2}{3}$, cette relation de dispersion montre donc une correction en $-k^4$ par rapport au cas non-dispersif. La relation de dispersion des ondes de surface sera alors très proche de celle des condensats de Bose-Einstein comme le montre les figures 5.14 et 5.15, malgré une symétrie dans la correction dispersive.

Afin de pouvoir négliger les effets capillaires, le profil de vitesse ne doit pas permettre la création d'horizons capillaires (Bleu, Négatif-Blanc, Rouge, Négatif-Noir). Autrement dit, la gamme de vitesse doit être supérieure aux cas précédent (figure 5.14). Dans le cas présent, le paquet d'onde incident est envoyé à partir de la région sous-critique à contre-courant.

Dans les simulations (figure 5.16), nous avons appliqué un fort gradient de vitesse au niveau de l'horizon blanc ($x \sim x_2$) afin d'obtenir un fort taux de conversion du paquet d'onde incident vers le mode négatif. Le gradient au niveau de l'horizon noir est lui faible (profil de vitesse figure 5.14) afin d'observer le rebond du paquet d'onde bleui en incident sans autre conversion (configuration miroir assez proche de celle de [Vilenkin, 1978]). Les paquets d'onde négatifs sont eux simplement réfractés par le changement de vitesse. À l'inverse des cas précédemment, c'est sur les modes positifs que l'on voit apparaître la récurrence ($I \rightarrow B \rightarrow I \rightarrow \dots$) au sein de la cavité. À chaque rebond sur l'horizon blanc, l'émission d'un paquet d'onde d'action d'onde négative vient amplifier celle positive des paquets d'onde piégés dans la région sous-critique. Cette amplification n'est pas directement visible dans l'espace réel (figure 5.17 gauche) car les paquets d'onde ont tendance à voir leur enveloppe gaussienne s'élargir à cause de la dispersion et donc leur amplitude diminuer. Mais, un paquet d'onde étant une somme d'ondes planes, l'amplification de ces ondes est alors visible dans l'espace de Fourier (figure 5.18). Dans cette géométrie, le taux d'amplification (calculé avec l'équation 201) est d'environ 11%.

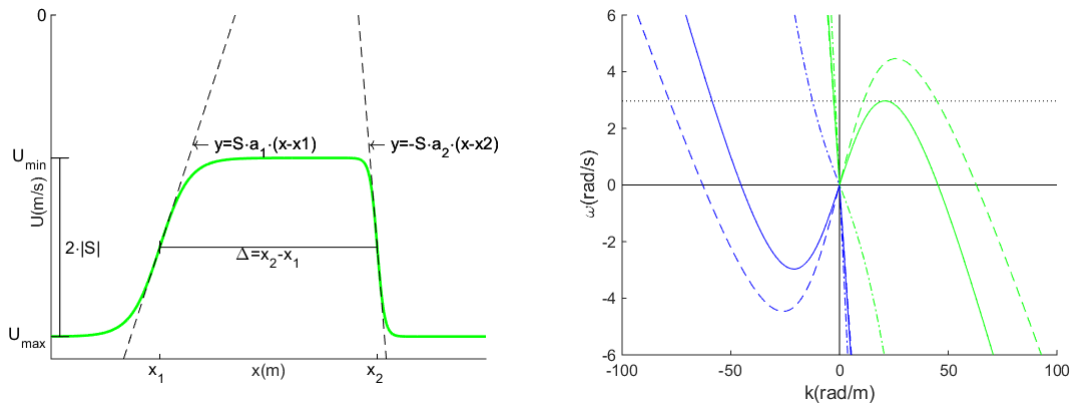


Figure 5.14 – À gauche : Profil de vitesse pour l'étude de l'effet Black Hole Laser à deux horizons, où une région sous-critique est entre deux régions super-critiques. À droite : Relation de dispersion aux niveaux des horizons blanc et noir $U = -0,464$ m/s (courbe continu), dans la région sous-critique $U_{\min} = -0,4$ m/s (tirets), dans la région super-critique $U_{\max} = -0,9$ m/s (point-tirets). La période du paquet d'onde incident est de $T = 2,12$ s.

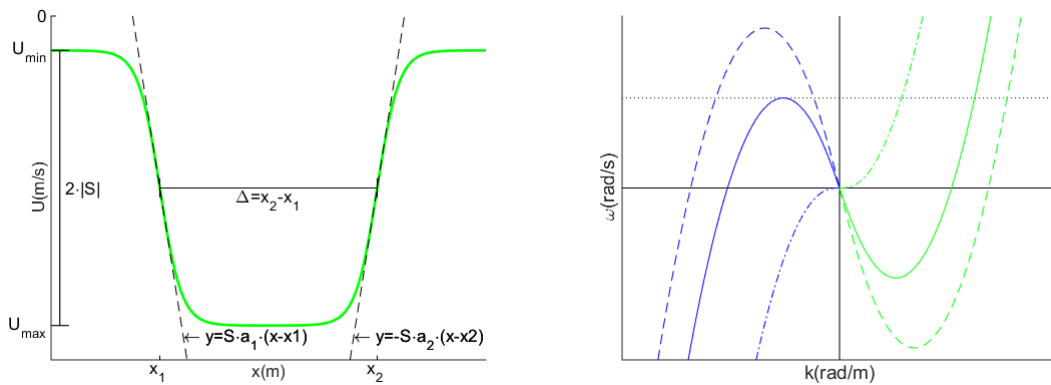


Figure 5.15 – À gauche : Profil de vitesse pour l'étude de l'effet Black Hole Laser dans un condensat de Bose-Einstein, où une région super-critique est entre deux régions sous-critiques. À droite : Relation de dispersion aux niveaux des horizons blanc et noir (courbe continu), dans la région sous-critique U_{\min} (point-tirets), dans la région super-critique U_{\max} (tirets).

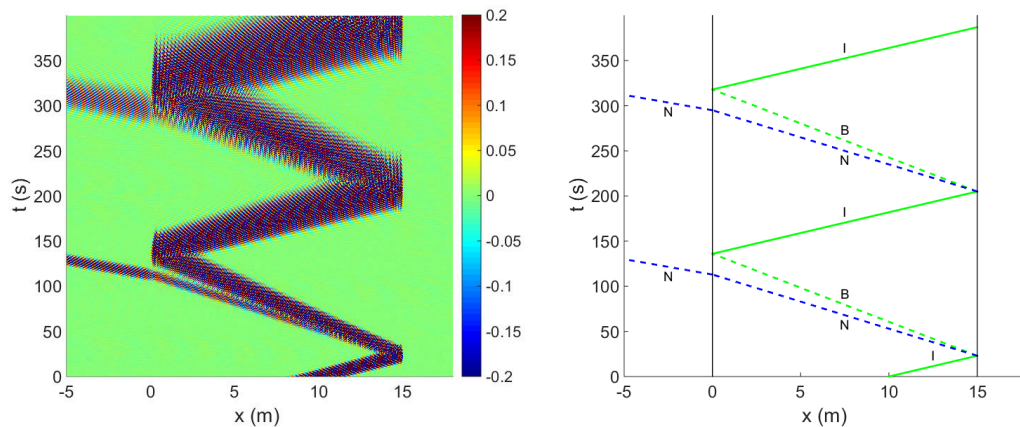


Figure 5.16 – À gauche : diagramme espace-temps de la propagation d'un paquet d'onde dans la configuration Black Hole Laser à deux horizons. Les horizons sont localisés aux environs de $x_1 = 0$ m (Noir) et $x_2 = 15$ m (Blanc). Les paramètres du régime sont : $h = 0,05$ m, $T = 2,12$ s, $U_{\min} = -0,4$ m/s, $U_{\max} = -0,9$ m/s, $a_1 = 5$ m⁻¹ et $a_2 = 40$ m⁻¹. À droite : Schéma de propagation et conversion : le paquet d'onde incident (vert continu), les paquets d'onde bleus (tirets verts) et négatifs (tirets bleus).

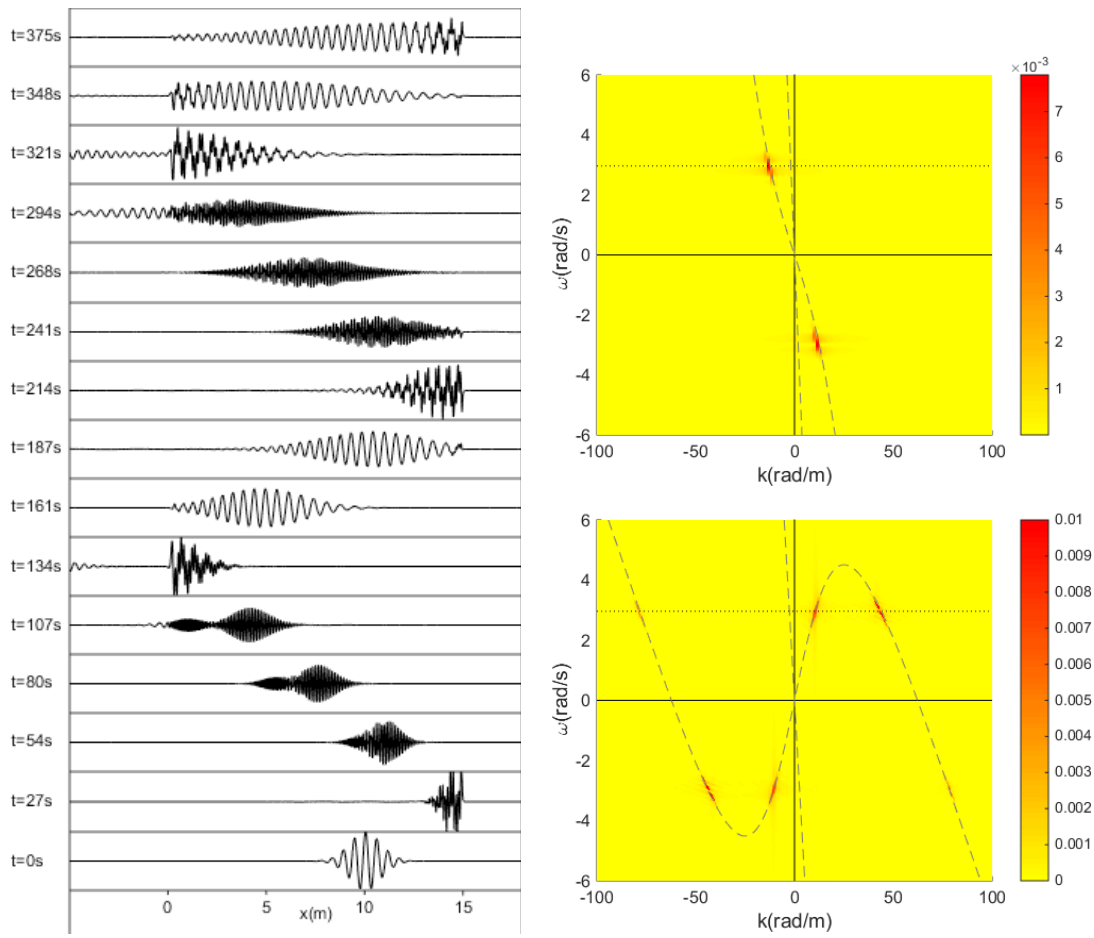


Figure 5.17 – À gauche : clichés successifs de la propagation d'un paquet d'onde dans la géométrie Black Hole Laser à deux horizons (correspondant au diagramme espace-temps figure 5.16, amplitude $[-1 : 1]$). En haut à droite : transformée de Fourier du diagramme espace-temps dans la région super-critique ($x = [-5 : -1]$ m et $t = [0 : 200]$ s) et sa relation de dispersion théorique (tirets gris). En bas à droite : transformée de Fourier du diagramme espace-temps dans la région sous-critique ($x = [1 : 14]$ m et $t = [0 : 133]$ s) et sa relation de dispersion théorique (tirets gris).

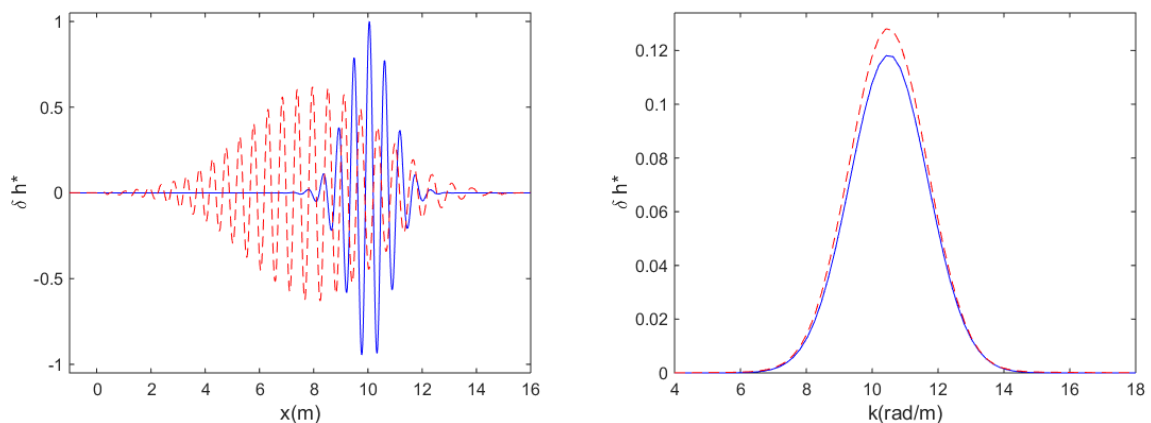


Figure 5.18 – À gauche : Paquet d'onde initial au temps $t = 0$ s (bleu continu) et paquet d'onde incident après le premier rebond sur l'horizon noir au temps $t = 176$ s (tirets rouges). À droite : Représentation spectrale des paquet d'onde à ces deux temps.

V.2 Étude expérimentale

Nous allons maintenant explorer, expérimentalement, un cas similaire à l'un des scénarii présentés dans la partie numérique, celui du voyage de l'horizon blanc vers horizon noir sans conversion vers des ondes à action d'onde négative (figure 5.7 gauche). Les mesures qui vont suivre représentent un défi car la viscosité (non prise en compte dans la partie numérique) aura un effet dissipatif important sur les ondes les plus courtes (capillaires). De plus, le nombre d'onde d'une onde capillaire étant important, l'amplitude de celle-ci doit être faible (même avant de subir de la dissipation visqueuse), pour conserver une cambrure ka faible et éviter tout problème comme la génération d'harmoniques discutée dans le chapitre concernant la reproduction des expériences de l'équipe de Vancouver. Un des processus essentiels, au voyage de l'horizon blanc vers horizon noir, est le double-rebond, permettant aux ondes longues de se convertir en ondes capillaires. Ce double-rebond a été étudié dans [Badulin *et al.*, 1983] (figure 5.19 gauche). Nous avons aussi fait quelques tests afin de visualiser cet effet comme le montre la figure 5.19 (droite), bien que, dans ce cas, nous observons que les ondes sont non-linéaires car nous avons pris intentionnellement une forte amplitude incidente pour que l'effet soit visible à l'oeil nu. Grâce aux caustiques sur l'obstacle (concentration des rayons lumineux), on observe alors les ondes courtes (dites bleuies), environ sept caustiques, ainsi que les ondes capillaires, à la fois au sommet de l'obstacle mais aussi entre les caustiques de l'onde bleuie. Les positions de l'horizon blanc et de l'horizon bleu sont clairement définies par la zone d'existence des ondes bleuies.

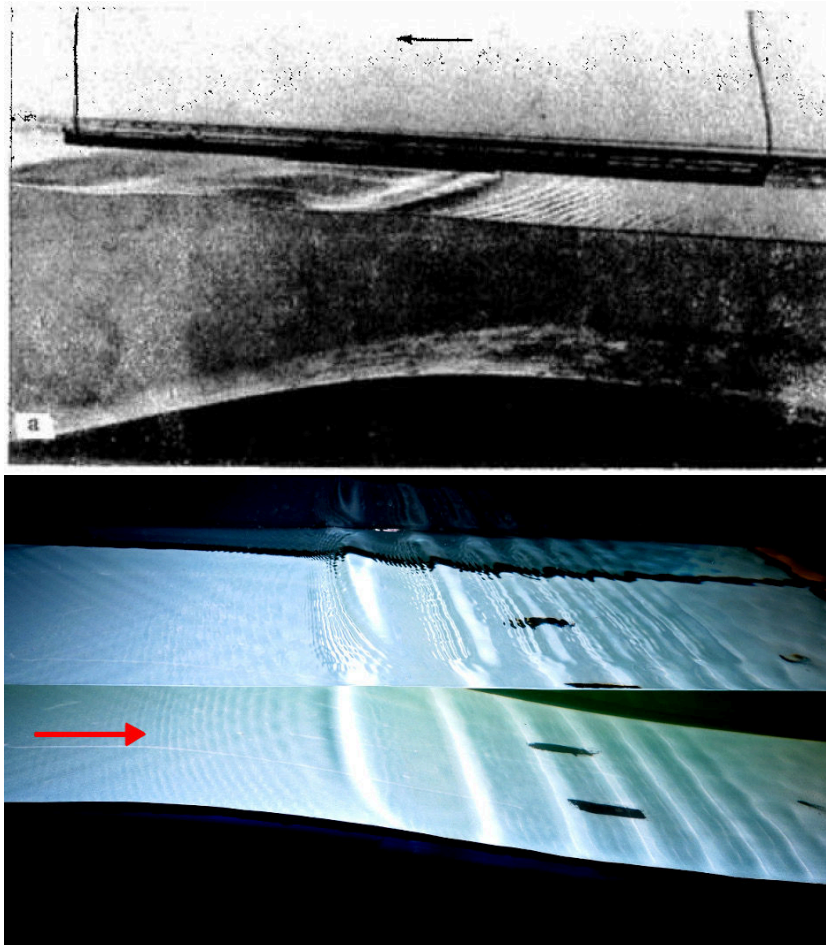


Figure 5.19 – En haut : photographie des expériences de [Badulin *et al.*, 1983]. En bas : photographie d'une expérience, réalisée durant cette thèse, illustrant le double-rebond. Sur les deux photographies, les flèches indiquent le sens du courant.

Dans les résultats de l'expérience qui va suivre, nous avons choisi des paramètres d'écoulement permettant aux horizons blanc et bleu (ainsi que noir et rouge) d'être très proche pour diminuer les effets de la dissipation (contrairement à la photographie 5.19). Le processus de double-rebond ne sera donc pas aussi visible.

V.2.1 Choix du régime et des paramètres

L'obstacle utilisé est celui de Vancouver car il est plus facile à mettre en place (ne nécessitant pas de fixation) et des mesures de champ de vitesse ont déjà été réalisées sur cet obstacle, bien que pour un régime d'écoulement particulier (chapitre « Trou de ver hydraulique : reproduction des expériences de Vancouver »). Nous avons choisi un régime où les fluctuations de surface libre, sans stimulation par le batteur, sont très faibles pour que l'on puisse détecter facilement toutes les ondes intervenant dans les différentes conversions, y compris celles de faibles amplitudes. Le débit volumique est fixé à $Q=8,13\text{Ls}^{-1}$ et la hauteur d'eau asymptotique avant l'obstacle est de $h_u=205\text{ mm}$ pour obtenir une gamme de vitesse comprise entre $0,102\text{ms}^{-1}$ et $0,203\text{ms}^{-1}$.

La figure 5.20 montre le diagramme de phase (U, T) de l'écoulement. Le maximum de vitesse est inférieur à $U_\gamma=0,23\text{ m/s}$, pour ne pas observer d'ondulation stationnaire et obtenir une surface la plus plane possible. La période de l'onde incidente est fixée $T=0,443\text{ s}$ (fréquence angulaire $\omega_I=14,17\text{ Hz}$) ce qui permet, pour cette gamme de vitesses, d'observer un comportement de double-rebond grâce à la présence des horizons blanc et noir (représentés par la courbe noire dans la figure 5.20), et des horizons bleu et rouge (courbe bleue). L'onde envoyée grâce au batteur n°1, est de très faible amplitude $a=0,012\text{ mm}$, afin de rester linéaire durant toutes les conversions de mode.

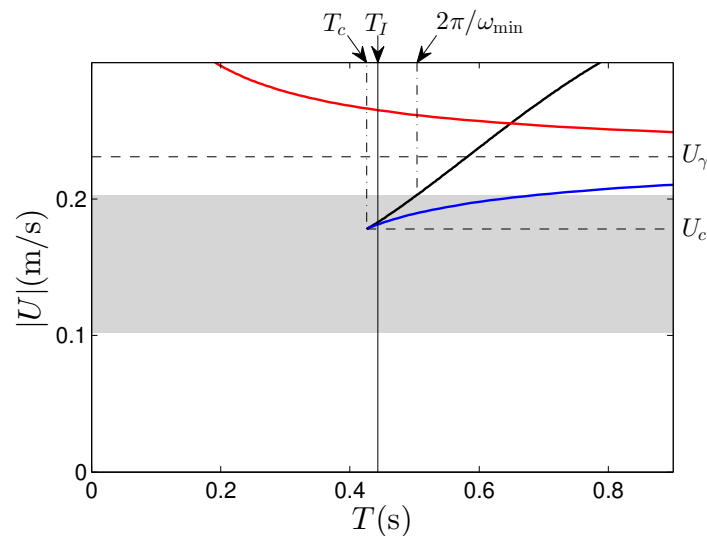


Figure 5.20 – Diagramme de phase (U, T) . La zone grisée indique la gamme de vitesse de l'écoulement. La droite verticale pointillée correspond à la période de l'onde incidente.

Dans le but de mesurer les fluctuations de surface libre, nous plaçons les trois caméras de telle sorte que la largeur de champ totale soit d'environ 1,1 m avec une résolution spatiale de 0,219 mm par pixel. La fréquence d'acquisition est fixée à 18,02 Hz afin d'avoir un nombre entier de période, associé au nombre d'images de 131072 (2^{17}), cela donne une durée d'acquisition d'environ deux heures. Une telle durée est nécessaire pour que toutes les ondes présentes dans les conversions ne soient pas noyées dans le bruit. En effet à cause de la décroissance due à la viscosité, l'amplitude des ondes atteint des ordres de

grandeur de $0,1 \mu\text{m}$.

V.2.2 Théorie des rayons

En restant dans un régime linéaire où la fréquence est conservée, la trajectoire des rayons (enveloppe d'un paquet d'onde) est décrite par la théorie des systèmes de rayons utilisant les équations de Hamilton $dk/dt = -d\omega/dx = -kdU/dx$, $dx/dt = v_g(\omega(k), U(x)) = d\omega/dk$ dans l'approximation de l'optique géométrique où $v_g = \partial\omega/\partial k$ est la vitesse de groupe dans le référentiel du laboratoire [Farrell et Watterson, 1985, Rousseaux *et al.*, 2010].

Nous traçons, dans la figure 5.21, l'une de ces trajectoires correspondant à une onde de fréquence angulaire $\omega_I=14,17$ Hz envoyée à contre-courant sur le régime décrit précédemment. Le comportement de double-rebond est observé à la fois au niveau de la région autour de l'horizon blanc et de l'horizon noir (figure 5.21). Comme rappelé dans les expériences de [Badulin *et al.*, 1983], l'onde incidente I est réfléchiée en onde bleue B au niveau de l'horizon blanc. L'onde bleue est ensuite réfléchiée en onde capillaire C au niveau de l'horizon bleu qui entre donc dans la région interdite entre l'horizon blanc et l'horizon noir. Ces deux conversions forment donc le premier double-rebond. Un zoom sur ce double-rebond est présenté figure 5.22 afin de mieux visualiser ce qui se passe dans les espaces réel et spectral. Contrairement aux expériences de [Badulin *et al.*, 1983], l'onde capillaire C , même si fortement amortie par la viscosité, atteint l'horizon rouge (symétrique temporel de l'horizon bleu) et se convertit en onde rouge R (solution d'onde identique à l'onde bleue, mais contrairement à la partie numérique, on préfère lui donner un nom différent pour les différencier). Cette onde rouge est ensuite réfléchiée en onde longue gravitaire T (solution identique à l'onde I) à l'horizon noir qui finit donc par être transmise de l'autre côté de l'obstacle (autrement dit du trou de ver).

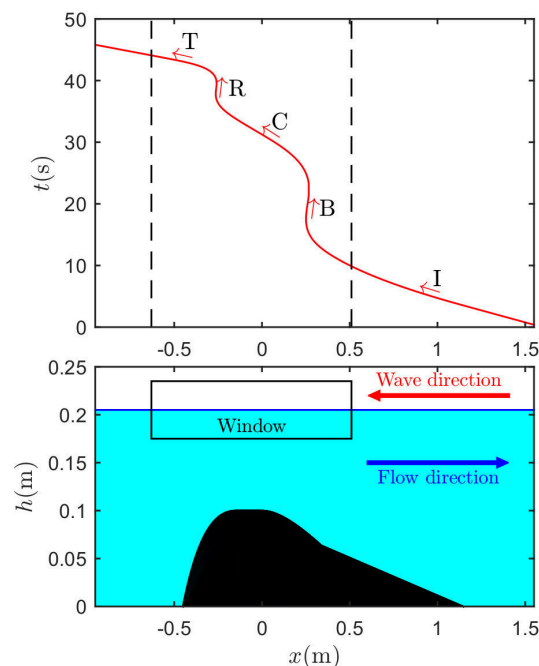


Figure 5.21 – En bas : fenêtre de visualisation au dessus de l'obstacle. En haut : schéma des quatre conversions, la courbe rouge représente une trajectoire basée sur la théorie des rayons, les droites pointillés correspondent aux limites de la fenêtre de visualisation.

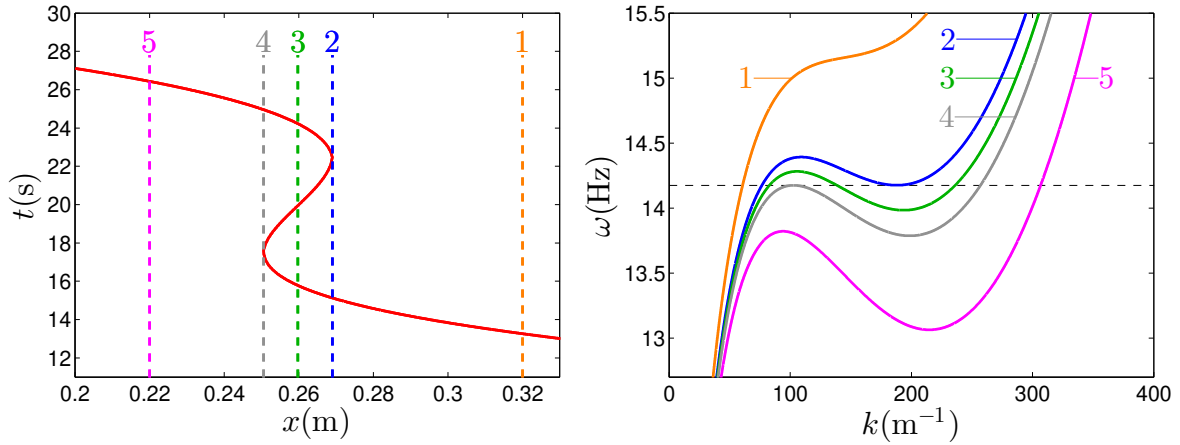


Figure 5.22 – À gauche : zoom sur le premier double rebond dans la région de l’horizon blanc. À droite : relations de dispersion à différentes positions de l’écoulement indiquées sur la figure de gauche.

V.2.3 Résultats

En observant les diagrammes espace-temps des fluctuations de surface libre (figure 5.23) ou sur la photo présentée sur la figure 5.24, on remarque qu’il est difficile de discerner toutes les ondes citées précédemment qui sont noyées dans le bruit.

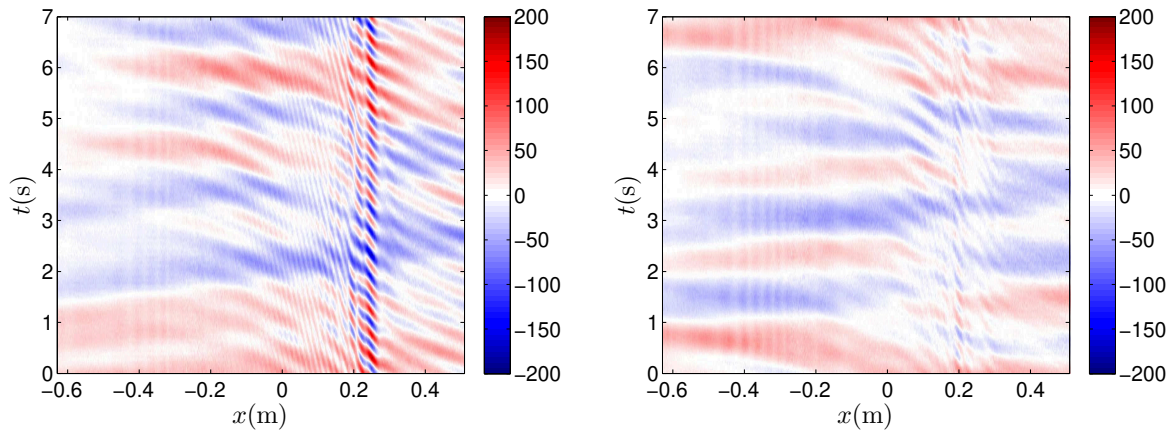


Figure 5.23 – Diagrammes espace-temps des fluctuations de surface libre $\delta h(x, t)$. L’échelle de couleur indique les amplitudes en micromètre. À gauche : En présence de l’onde générée par le batteur avec une fréquence de $\omega_I = 14,17$ Hz, à gauche : sans génération d’onde par le batteur.

La longue durée d’acquisition (2h) permet une bonne résolution temporelle dans l’espace de Fourier, autrement dit, $\Delta\omega$ est petit, et plus $\Delta\omega$ est faible plus l’amplitude du bruit à une fréquence donnée sera faible dans une transformée de Fourier alors que le signal dû à l’excitation par le batteur reste de même amplitude (peu importe la résolution spectrale). L’application d’un filtre autour la fréquence incidente (ω_I) permet donc la suppression du bruit à toutes les fréquences autres que celle de l’incidente, qui reste elle faible grâce à la grande durée d’acquisition (figure 5.26). L’application d’un tel filtre est justifié par le caractère linéaire du régime (propagation et conversion d’onde). En effet, nous observons sur la figure 5.25 (gauche) que la fréquence est conservée (pas de non-linéarité de type Benjamin Feir [Benjamin et Feir, 1967, Charru, 2007, Shugan *et al.*, 2014]) et l’amplitude sur la première fréquence harmonique ($2\omega_I$) reste faible. Les ondes observées peuvent être toutes considérées dans la limite en eau profonde car la hauteur d’eau adimensionnée

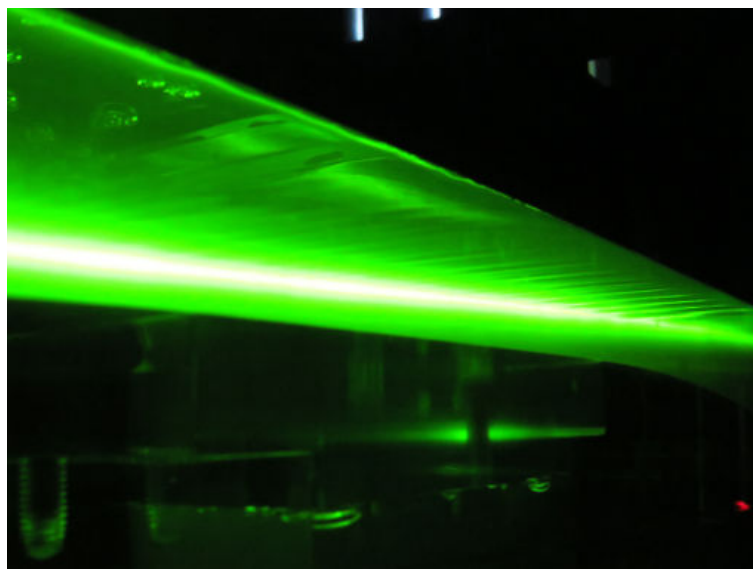


Figure 5.24 – Surface libre vue par en dessous (interface eau→air). L’effet miroir déformé et la lumière Laser permettent une meilleure visualisation d’une partie de l’onde capillaire.

$kh > 6$, le paramètre contrôlant les non-linéarités est alors la cambrure des ondes ka . Pour obtenir cette cambrure, nous utilisons les mêmes méthodes que dans le chapitre « Trou blanc hydraulique : reproduction des expériences de Vancouver ». La première méthode utilise une détection d’extrema permettant de remonter à l’amplitude a et au nombre d’onde k , la seconde considère que $ka \approx \max(|\partial\delta h(\omega, x)/\partial x|)$. En définissant la limite de déferlement en eaux profondes $ka = 0,446$ et la limite d’apparition d’harmoniques $ka = 0,196$ (entre une houle d’Airy et une houle de Stokes du 2^{ème} ordre), la figure 5.25 (droite) nous montre que la cambrure des ondes étudiées reste toujours très faible devant ces deux limites, ce qui explique que l’on n’observe pas (ou très peu) de non-linéarités.

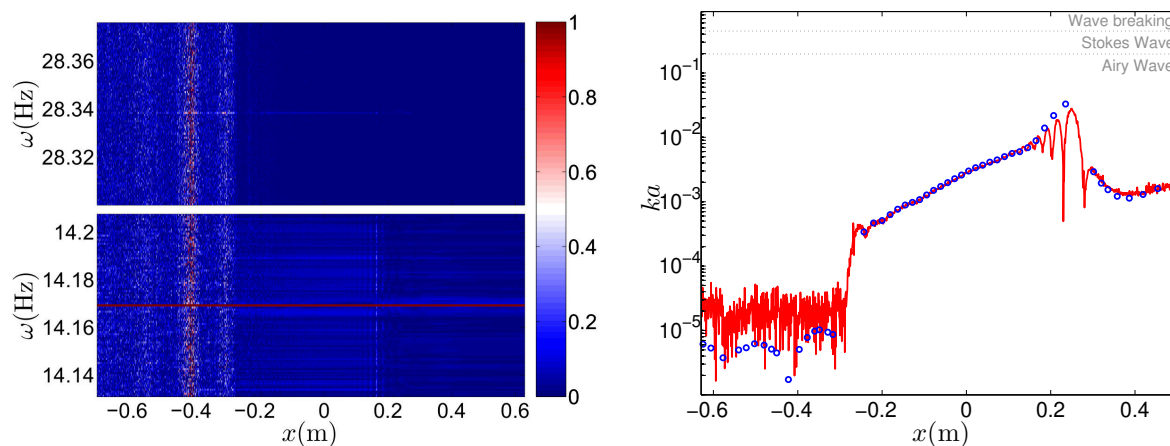


Figure 5.25 – À gauche : Transformée de Fourier temporelle $\delta h(\omega, x)$ adimensionnée par le signal à la fréquence incidente $\delta h(\omega_I, x)$. En bas : autour de la fréquence incidente ω_I , en haut : autour de la première fréquence harmonique $2\omega_I$. À droite : Cambrure expérimentale des ondes étudiées ka en fonction de la position spatiale en utilisant la méthode de détection d’extrema (ronds bleus) et le maximum de la dérivée spatiale (courbe rouge), les droites grises indiquent les limites de déferlement et d’apparition d’harmoniques.

On observe clairement (figure 5.26) la conversion de l’onde longue incidente I en onde capillaire C puis de l’onde capillaire en onde longue gravitaire transmise T (de la droite vers la gauche) comme prédit précédemment. Les conversions intermédiaires au niveau des double-rebonds ($I \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ par exemple) ne sont pas visibles car les horizons blanc et bleu sont trop proches (il en va de même pour les horizons noir et rouge).

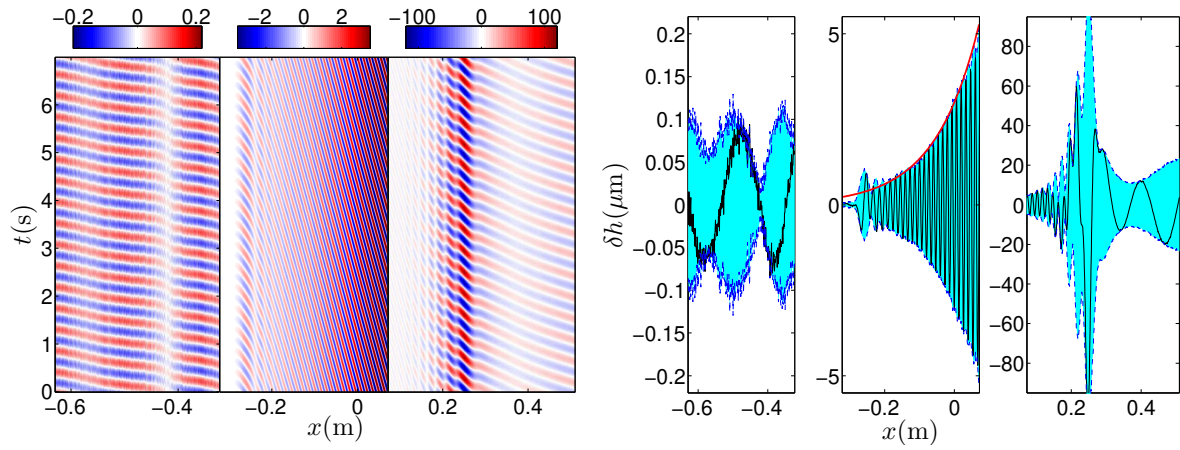


Figure 5.26 – À gauche : Diagramme espace-temps des fluctuations de surface libre $\delta h(x, t)$ filtré à la fréquence incidente $\omega_I=14,17$ Hz. Les échelles de couleur indiquent les amplitudes en micromètre. À droite : fluctuations de surface libre à temps fixé $\delta h(x, t_i)$ (courbe noire), la courbe bleue représente l'enveloppe $\delta h(\omega_I, x)$.

Une autre manière de visualiser les double-rebonds est d'étudier l'évolution de la longueur d'onde en fonction de la position spatiale. On peut obtenir cette évolution théoriquement en calculant le (ou les) solution(s) de la relation de dispersion à la fréquence incidente lorsque la position spatiale varie (autrement dit la hauteur d'eau $h(x)$ et la vitesse du courant $U(x)$). On peut aussi faire une mesure de la longueur d'onde grâce à une détection d'extrema dans les régions où une seule solution est présente (hors des zones de double-rebonds). On peut alors comparer l'évolution de la longueur d'onde aux échelles pertinentes de l'écoulement qui sont la hauteur d'eau h et $\lambda^* = gT^2/(8\pi)$: la longueur d'onde théorique au niveau de l'horizon blanc (ainsi que noir) dans l'approximation $kh \gg 1$ [Nardin *et al.*, 2009, Rousseaux, 2013]. Ces différentes évolutions et échelles sont illustrées sur la figure 5.27 (haut). Nous avons aussi tracé, sur la figure 5.27 (bas), l'évolution de la vitesse du courant U ainsi que celle de la vitesse de groupe $c_g = \partial\sigma/\partial k$ (dans le référentiel du courant). On remarque que la vitesse du courant est toujours inférieure (en valeur absolue) à la vitesse U_γ indiquant l'absence d'ondulation stationnaire et de mode négatif. Tout comme λ^* , la vitesse $U_g = gT/(8\pi)$ correspond à la vitesse théorique de blocage au niveau de l'horizon blanc dans l'approximation $kh \gg 1$ [Rousseaux *et al.*, 2010, Rousseaux, 2013].

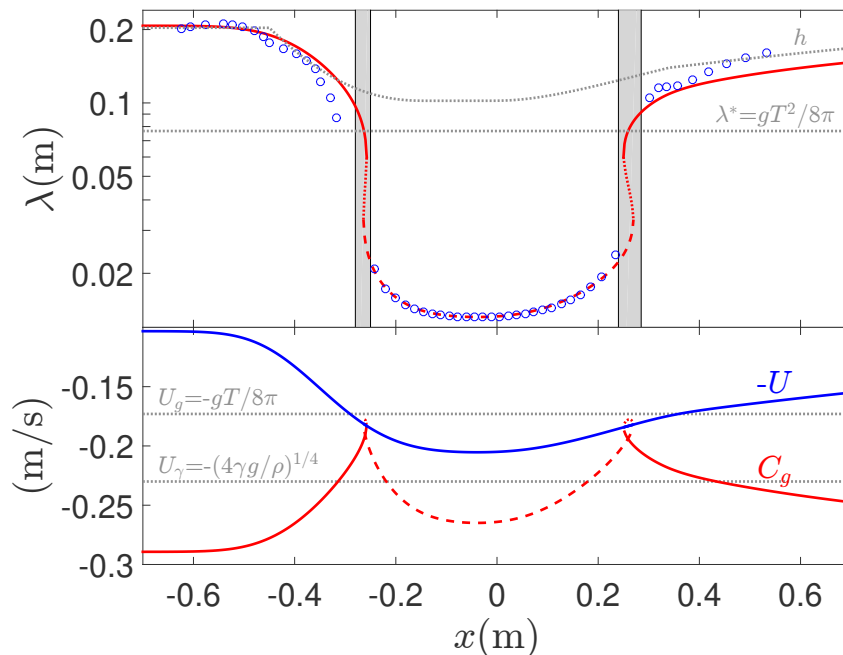


Figure 5.27 – En haut : évolution de la longueur d’onde en fonction de position spatiale, évaluée théoriquement grâce à la relation de dispersion (courbe rouge continue : solutions longues I et T , pointillée : solutions courtes B et R , en tirets : solution capillaire C) et mesurée expérimentalement (ronds bleus). Les courbes grises pointillées indiquent les échelles λ^* et h . Les zones grises correspondent aux régions de double-rebonds. En bas : évolution de la vitesse du courant (courbe bleue) et de la vitesse de groupe c_g dans le référentiel du courant (courbes rouges). Les droites pointillées indiquent les vitesses pertinentes U_γ et U_g .

V.2.4 Vérification dans l’espace de Fourier et corrélations

Afin de vérifier que les ondes observées dans la figure 5.26 correspondent aux modes prédits par la théorie des rayons, nous séparons les caméras pour que chacune observe une région où la vitesse et la hauteur d’eau sont approximativement constantes, c’est à dire dans la région en amont de l’obstacle, au dessus de l’obstacle et en aval de l’obstacle (figure 5.28). Les paramètres d’acquisition (fréquence d’acquisition, nombre d’images, durée d’acquisition) sont identiques au cas où les trois caméras étaient collées.

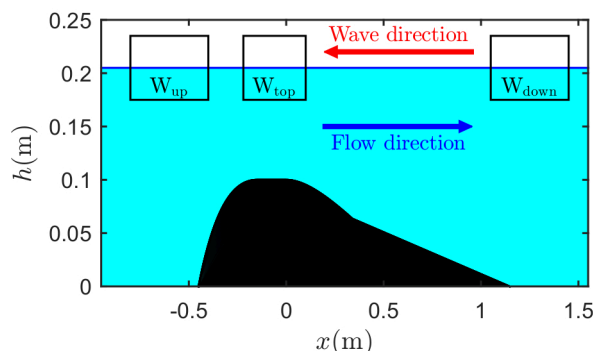


Figure 5.28 – Schéma montrant les trois fenêtres de visualisation correspondant à des régions constantes du régime au dessus de l’obstacle.

Pour obtenir la signature de l’excitation par le batteur, on découpe les résultats en 64 intervalles temporels puis on calcule la moyenne de leurs transformées de Fourier :

$$\left| \langle \delta \hat{h}(\omega, k) \rangle \right| \quad (205)$$

Chaque intervalle de temps comportant un nombre entier de périodes d'onde incidente, la phase du signal provenant de la stimulation par le batteur est donc constante alors que celle du bruit est aléatoire. La moyenne des transformées de Fourier (avant de calculer la norme $|\cdot|$) permet donc de diminuer fortement le signal provenant du bruit, la moyenne d'une phase aléatoire tendant vers zéro, alors que le signal provenant du batteur n'est pas affecté par la moyenne. Sur la figure 5.29, on observe que le pic observé ω_I, k_I (en haut) dans la région aval de l'obstacle correspond bien à l'onde incidente I ; ω_I, k_C (au centre) dans la région au dessus de l'obstacle, à l'onde capillaire C ; ω_I, k_T (en bas) dans la région amont de l'obstacle, à l'onde transmise T . On remarque qu'il reste du signal provenant du bruit pour les fréquences inférieures à ω_{\min} , cela provient du fait que ces fréquences ne sont pas bloquées par le contre-courant et restent sous forme d'ondes longues et ne subissent donc pas de dissipation. Le signal à ces fréquences est alors de forte amplitude, le nombre d'intervalles pour calculer la moyenne (64) n'est pas suffisant pour pouvoir supprimer leur signature dans l'espace spectral. Mais puisque que nous nous intéressons à une fréquence incidente $\omega_I > \omega_{\min}$, les signaux aux fréquences inférieures à ω_{\min} ne perturbent pas nos mesures.

Un calcul de corrélations croisées entre chaque couple de fenêtre (i, j) décrit par l'équation 206 est présenté figure 5.29 (droite).

$$G_2^{(i,j)}(\omega; k, k') = \left| \left\langle \delta h^{(i)}(\omega, k) \delta h^{(j)}(\omega, k')^* \right\rangle \right| \quad (206)$$

Contrairement au chapitre précédent sur le trou blanc hydraulique, la fonction de corrélation ne prend pas en compte la fréquence relative et reste sous la forme d'une amplitude au carré et non d'une action d'onde. On ne s'intéresse ici qu'à savoir si les ondes observées proviennent bien du même processus de conversion, contrairement au chapitre précédent où les corrélations avaient pour but, entre autres, de calculer les coefficients de diffusion. Ces corrélations peuvent être normalisées en utilisant :

$$g_2^{(i,j)}(\omega; k_a, k_b) = \frac{G_2^{(i,j)}(\omega; k_a, k_b)}{\sqrt{G_2^{(i,i)}(\omega; k_a, k_a) G_2^{(j,j)}(\omega; k_b, k_b)}}, \quad (207)$$

On obtient alors une corrélation normalisée entre l'onde incidente I et l'onde capillaire C (couple de fenêtre aval/au-dessus de l'obstacle) $g_2^{(down,top)}(\omega_s; k_I, k_C) = 85.11\%$, entre l'onde capillaire C et l'onde transmise T (au-dessus de l'obstacle/amont) $g_2^{(top,up)}(\omega_s; k_C, k_T) = 94.43\%$ et entre l'onde incidente I et l'onde transmise T (aval/amont) $g_2^{(up,down)}(\omega_s; k_T, k_I) = 80.98\%$.

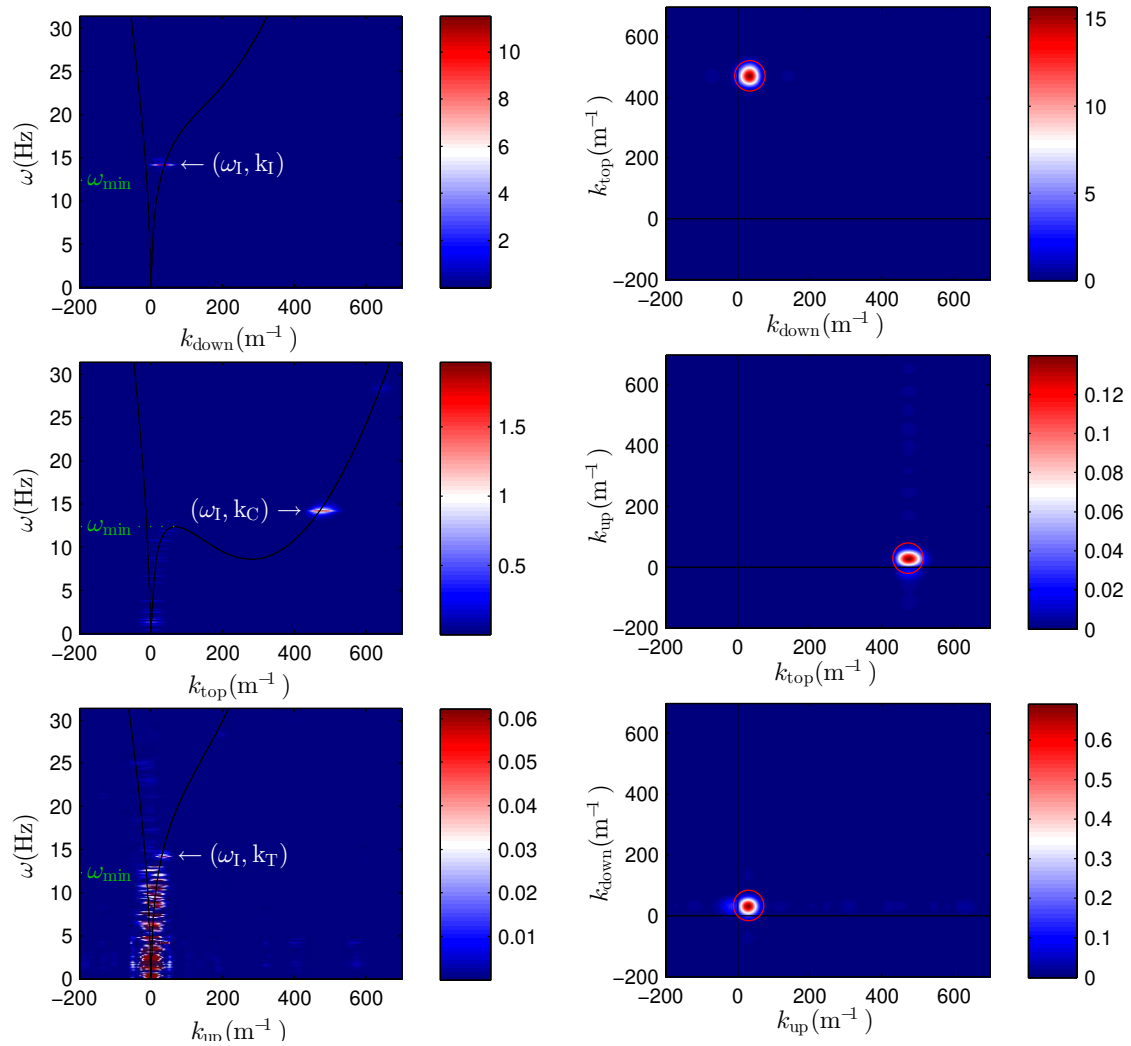


Figure 5.29 – À gauche : Transformée de Fourier moyennée sur 64 intervalles de temps calculée avec l'équation 205 dans les 3 différentes fenêtres de visualisation : en haut dans la partie en aval de l'obstacle (down), au centre dans la région au-dessus de l'obstacle (top), en bas dans la partie en amont de l'obstacle (up). Les courbes noires indiquent la relation de dispersion dans chacune des régions. À droite : Corrélations croisées entre les différentes fenêtres (équation 223) : down/top (en haut), up/top (au centre) et up/down (en bas).

V.2.5 Estimation théorique de l'évolution de l'amplitude

En premier lieu il faut estimer le profil de vitesse au dessus de l'obstacle car un tel écoulement génère toujours une couche limite en aval de l'obstacle. On a pu voir, dans le chapitre sur la reproduction des expériences de Vancouver, que l'épaisseur de cette couche limite est proche de la hauteur maximale de l'obstacle. Nous avons donc utilisé un modèle simplifié de couche limite où la vorticité est constante -profil de vitesse linéaire- entre le fond (ou obstacle) et l'épaisseur de couche limite (hauteur maximum de l'obstacle) puis nulle -profil de vitesse constant- sur le reste de la hauteur d'eau (figure 5.30). Cette couche limite modifie la vitesse en surface qui peut être calculée grâce à la conservation du débit $q = \int_{z_1}^{z_2} U(z) dz$ avec z_1 la hauteur d'obstacle et z_2 la surface libre. En utilisant la forme de profil de vitesse simplifié présenté figure 5.30, on trouve donc que la vitesse en surface, de la forme $U_0 = q/(h - \frac{e}{2})$, est supérieure à la vitesse moyenne $U = q/h$.

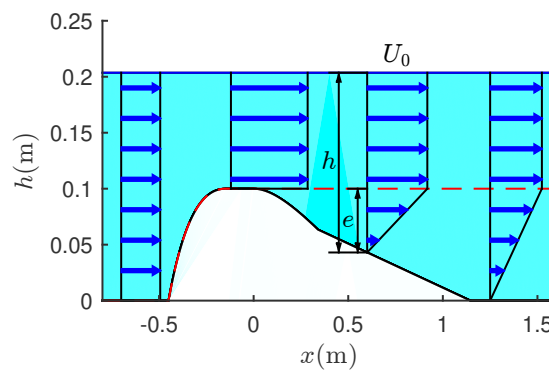


Figure 5.30 – Profil de vitesse simplifié prenant en compte la formation d'une couche limite en aval de l'obstacle. h la hauteur d'eau, e l'épaisseur de couche limite, U_0 la vitesse du courant au niveau de la surface.

Pour la relation de dispersion, nous nous basons sur une résolution analytique prenant en compte un profil de vitesse linéaire sur toute la hauteur d'eau (détaillée dans [Maïssa *et al.*, 2016]) :

$$\omega = - \left(U_0 k - \frac{\alpha}{2} \tanh(kh) \right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} \tanh(kh) \right)^2 + \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh)} \quad (208)$$

où U_0 est la vitesse du fluide au niveau de la surface libre, $\alpha = U_0/h$ le paramètre caractérisant la vorticité, $\gamma = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m la tension de surface et $\rho = 10^3$ kg/m³ la masse volumique. Dans notre cas le profil de vitesse n'est pas linéaire sur toute la hauteur d'eau, nous avons donc modifier, de manière phénoménologique, le paramètre de vorticité avec un coefficient égal à l'épaisseur relative de la couche limite ($\alpha = \alpha_0 U_0/h$ avec $\alpha_0 = e/h$).

Pour vérifier que le modèle simplifié du profil de vitesse ainsi que la relation de dispersion sont cohérents, nous avons repris les résultats du chapitre précédent. Pour ces résultats, une autre méthode avait été utilisée pour tenir compte de la vorticité qui consistait à modifier les valeurs de hauteur d'eau et de vitesse moyenne de courant par des valeurs effectives ($h_d = 74\text{mm} \rightarrow h_{\text{eff}} = 88\text{mm}$ et $U_d = q/h_d = 0,31\text{m/s} \rightarrow U_{\text{eff}} = 0,37\text{m/s}$). La figure 5.31 indiquent les différentes relations de dispersion : la première utilisant les valeurs de hauteur d'eau réelle et de vitesse moyenne, la seconde utilisant le profil de vitesse simplifié avec $U_0 = q/(h - \frac{e}{2})$ ainsi que la relation de dispersion 208 et enfin la relation de dispersion classique mais considérant les valeurs de vitesse et hauteur d'eau

effectives. On remarque alors que même si le profil est très simplifié et que la relation de dispersion (208) a subi une modification ad hoc, elle donne des résultats cohérents et assez proches de la méthode des valeurs effectives. Mais l'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'estimer la relation de dispersion en n'importe quelle position spatiale alors que la méthode des valeurs effectives ne peut être obtenue que par interpolation des résultats de la transformée de Fourier sur une région où le régime est constant (hauteur d'eau et vitesse).

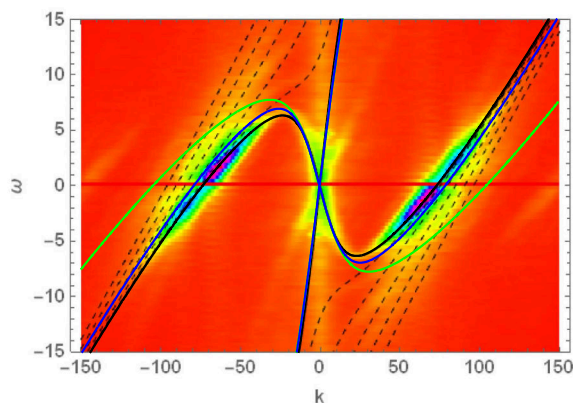


Figure 5.31 – Figure tirée du chapitre précédent représentant la transformée de Fourier des fluctuations de surface libre sous forme de spectre de puissance où les différentes relations de dispersion ont été superposées. La courbe verte indique la relation de dispersion classique avec les valeurs de hauteur d'eau réelle et de vitesse moyenne. La courbe noire indique la même relation de dispersion mais utilisant des valeurs de hauteur d'eau et de vitesse effective. La courbe bleue correspond à la relation de dispersion modifiée 208 utilisant le profil de vitesse simplifié.

En utilisant donc cette relation de dispersion, on peut maintenant appliquer la conservation du flux d'action d'onde :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2(\rho g + \gamma k^2)\frac{v_g}{\sigma} \sim a^2(1 + l_c^2 k^2)\frac{v_g}{\sigma} \quad (209)$$

où a est l'amplitude, σ la fréquence relative (dans le référentiel du courant), v_g la vitesse de groupe (dans le référentiel du laboratoire) et $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$.

Cette équation permet de connaître l'évolution de l'amplitude selon la théorie des rayons dans l'approximation de l'optique géométrique. Comme la vitesse de groupe dans le référentiel du laboratoire $v_g = U + c_g = \partial\omega/\partial k$ tend vers zéro au point blocage, la dérivée spatiale du nombre d'onde $dk/dx = (-k\partial U/\partial x)/v_g$ (où c_g est la vitesse de groupe dans le référentiel du courant) et l'amplitude des ondes deviennent infinies [Farrell et Watterson, 1985]. Mais cette théorie permet tout de même de connaître l'amplitude dans les régions qui sont loin de ces points singuliers. En pratique, ces divergences sont lissées par une approche ondulatoire généralisant la théorie des rayons [Nardin *et al.*, 2009].

La viscosité jouant un rôle important, il faut aussi tenir compte de la dissipation. Nous décidons d'utiliser la longueur dissipative introduite par Lamb [Lamb, 1932, Robertson et Rousseaux, 2017] :

$$L_d = \frac{v_g}{2\nu k^2} \quad (210)$$

où k est le nombre d'onde du mode étudié et $\nu = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ la viscosité (à 18°C).

La combinaison de l'équation 209 avec une décroissance visqueuse exponentielle basée sur la longueur dissipative (équation 210), nous permet de calculer l'évolution de l'amplitude en partant d'une amplitude initiale dans la région aval de l'obstacle avant le voyage à travers le trou de ver ($a_0=a(x_0), x_0=x(t=0)$) puis en se déplaçant d'un pas spatial δx (équation 211) :

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \underbrace{\sqrt{\frac{|v_g(k_i)|}{|v_g(k_{i+1})|} \frac{\sigma(k_{i+1})}{\sigma(k_i)} \frac{1 + l_c^2 k_i^2}{1 + l_c^2 k_{i+1}^2}}}_{\text{conservation action d'onde}} \underbrace{\exp\left(-\frac{|\delta x|}{(Ld_i + Ld_{i+1})/2}\right)}_{\text{décroissance visqueuse}} \quad (211)$$

avec l'indice i correspondant aux variables prise à une position x et l'indice $i + 1$ pour une position $x + \delta x$.

Le signe de δx dépend de la direction de propagation de la solution (signe de la vitesse de groupe : positive pour les ondes incidente I , capillaire C et transmise T et négative pour les ondes bleue B et rouge R). Le résultat de cette méthode est présenté figure 5.32, qui est identique à la figure 5.26 (droite) mais où l'on a ajouté l'évolution de l'amplitude géométrique. Cette solution géométrique semble suivre assez bien l'évolution spatiale de l'enveloppe expérimentale à part dans la région au dessus de l'obstacle ($x \approx [-0, 2 : 0, 2]$ m) où il y a un facteur de 0,75 entre l'amplitude expérimentale et la solution géométrique. Par contre, ce facteur semble constant sur toute cette région, on peut alors dire que la courbe théorique retrace bien l'amortissement des ondes capillaires dont la longueur dissipative est en moyenne égal à $Ld=0,125$ m. Cette longueur dissipative est plus petite que la distance inter-horizons (noir et blanc) qui est elle d'environ $0.5 \text{ m} \simeq 4Ld$, ce qui correspond à une perte en amplitude de deux ordres de grandeur ($e^{-4}=1, 83 \cdot 10^{-2}$). L'amplitude initiale $a_0=11,53 \mu\text{m}$ est extraite des mesures dans la région aval de l'obstacle (figure 5.29 gauche haut) et nous prenons comme position initiale $x_0=x(t=0)=1,5$ m, mais la relation de dispersion étant constante dans cette région (U_0, h et α constants), elle aurait pu être prise ailleurs tant qu'elle se trouve à $x > 1,15$ m (fin de l'obstacle).

V.2.6 Interférences

On observe, dans la figure 5.32, des variations dans l'enveloppe dans des régions où la théorie des rayons n'indique la présence que d'une seule onde, cela vient du fait que l'aspect ondulatoire des solutions n'est pas pris en compte dans cette théorie et que d'autres ondes sont présentes dans le système. On va donc séparer 4 zones d'interférence :

- Zone 1 : avant la première conversion (entre $x = 0.27$ m et $x = 0.50$ m),
- Zone 2 : après le premier double rebond (entre $x = 0.09$ m et $x = 0.25$ m),
- Zone 3 : avant le second double rebond (entre $x = -0.25$ m et $x = -0.16$ m),
- Zone 4 : après toutes les conversions (entre $x = -0.67$ m et $x = -0.28$ m).

Pour déduire la forme que prend ces interférences, on utilise la formule générale de l'enveloppe spatiale A_n du motifs d'interférences de n ondes :

$$A_n = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \cos((k_i - k_j)x - (\phi_i - \phi_j)) \right)^{1/2} \quad (212)$$

où ϕ_i est le déphase et k_i le nombre d'onde du mode i avec une amplitude a_i . Les paramètres a_i, k_i et ϕ_i pouvant dépendre de la position spatiale x .

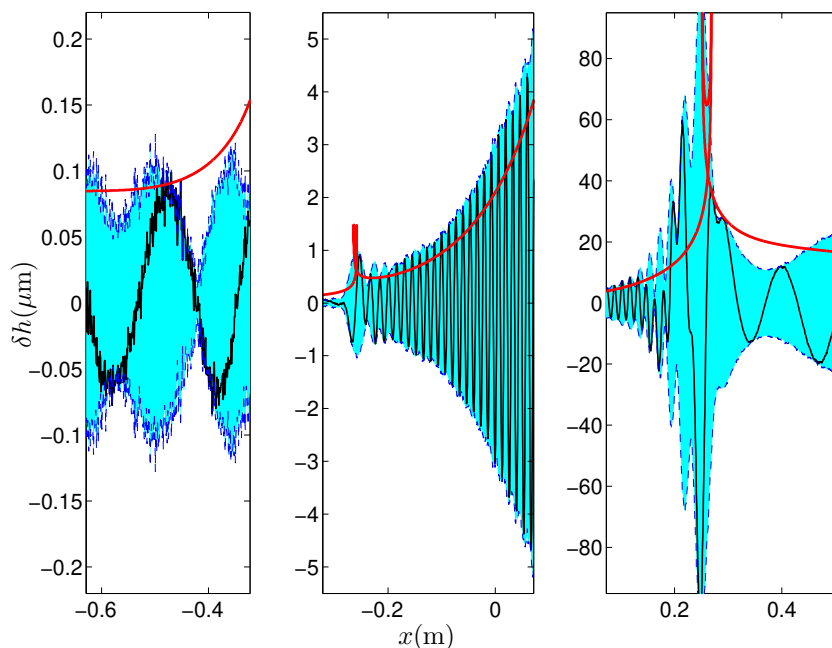


Figure 5.32 – Fluctuations de surface libre à temps fixé $\delta h(x, t_i)$ (courbe noire), la courbe bleue représente l’enveloppe $\delta h(\omega_I, x)$, la courbe rouge correspond à la solution de l’évolution théorique de l’amplitude utilisant la théorie des rayons.

Pour le cas particulier d’une interférence à deux ondes, l’équation 212 peut se simplifier en :

$$A_2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos((k_1 - k_2)x - (\phi_1 - \phi_2)) \right)^{1/2} \quad (213)$$

et la différence entre les déphasages des deux ondes peut être réécrit $\phi_1 - \phi_2 = (k_1 - k_2)x_\phi$ où x_ϕ est l’un des maximum de l’enveloppe d’interférence. La figure 5.33 montre un exemple d’une interférence à deux ondes.

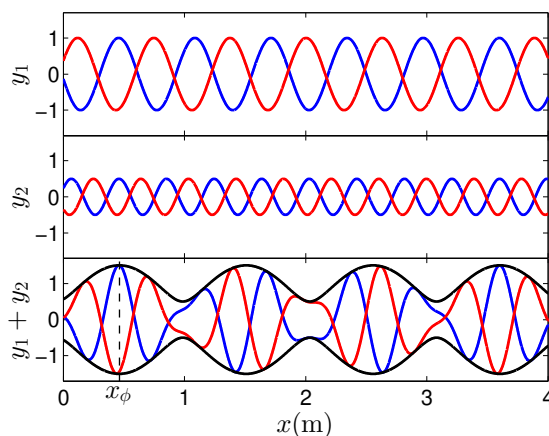


Figure 5.33 – Exemple d’interférence à deux ondes avec $y_i = a_i \cos(k_i x - \omega t - \phi_i)$, $\omega = 1$ Hz, les courbes bleues correspondent à $t = 1.5$ s et les rouges à $t = 4.4$ s. Haut : première onde ($i = 1$) avec $a_1 = 1$ (amplitude adimensionnée), $k_1 = 10\text{m}^{-1}$ et $\phi_1 = 3.2$. Centre : seconde onde ($i = 2$) avec $a_2 = 0.5$, $k_2 = 16\text{m}^{-1}$ et $\phi_2 = 6.7$. Bas : Superposition des deux ondes, les courbes noires indiquent l’enveloppe spatiale A_2 (et $-A_2$) de l’interférence avec $x_\phi = 0.463$ m.

Zone 1 (figure 5.34 droite) :

L’interférence dans cette région peut être expliquée par la superposition de l’onde incidente et d’un mode possédant une composante transverse. On doit donc réécrire la

relation de dispersion 208 (selon l'axe \vec{x}) en prenant en compte cette fois-ci que le vecteur d'onde peut posséder une composante transverse en plus de sa composante longitudinale [McHugh, 1994] :

$$\omega = - \left(U_0 k_x - \frac{\alpha k_x}{2} \frac{k_x}{k} \tanh(kh) \right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha k_x}{2} \frac{k_x}{k} \tanh(kh) \right)^2 + \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh)} \quad (214)$$

avec $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Précédemment, on considérait que le vecteur d'onde ne possédait qu'une composante longitudinale $k = k_x$ et $k_y = 0$. Dans le cas présent, à cause de la largeur finie du canal, la composante transverse est alors due aux modes propres du canal et s'écrivent $k_y = (n\pi/W)$ ($n \in \mathbb{N}$ et W correspond à la largeur du canal). La mesure avec la ligne Laser étant réalisée au centre du canal, seule la moitié des modes transverses sont alors potentiellement observables ($n \in 2\mathbb{N}$) et le seul mode existant à cette fréquence et dans cette région est $n = 2$. Pour son amplitude, on la considère arbitrairement deux fois plus petite que celle du mode longitudinal I . Cette hypothèse est faite sur les observations visuelles que l'on peut faire sur l'enveloppe d'interférence dans cette zone.

Connaissant les nombre d'ondes des deux ondes impliquées (grâce à la relation de dispersion (214)), l'amplitude de l'onde incidente (avec la solution géométrique (211) présentée figure 5.32) et utilisant l'hypothèse sur l'amplitude du mode à composante transverse, on obtient l'enveloppe du motif d'interférence avec l'équation 220. On remarque sur la figure 5.34 (droite), que cette enveloppe ne suit pas exactement celle obtenue expérimentalement. Cette différence peut provenir du fait que les hypothèses sur l'évolution du profil de vitesse sont peut-être trop fortes dans cette région où la vorticité est la plus importante.

Zone 2 (figure 5.34 centre droite) :

À première vue, seule l'onde capillaire C est présente dans cette région en considérant l'optique géométrique. Mais il faut ici prendre en compte le fait que lorsque l'onde incidente I se convertit en onde bleue B au niveau de l'horizon blanc, l'amplitude de cette double solution ne chute pas directement à zéro après l'horizon mais décroît progressivement sur une certaine longueur. Cela ressemble à une fonction de Airy, du moins pour la partie décroissante, nous ne considérerons pas la partie oscillante de la fonction de Airy [Nardin *et al.*, 2009]. Cette fonction étant déjà implémentée sous *Matlab*, nous l'utilisons sous la forme $a_* \text{Ai}(X)$, où $X = (x - x_*)/L_s$, x_* est la position séparant les parties oscillante et décroissante de la fonction de Airy (c'est à dire le point de blocage), L_s est la longueur décrivant la décroissance et a_* l'amplitude à x_* . La longueur de décroissance peut être calculée à partir de différentes formules comme, par exemple, celle introduite dans [Trulsen et Mei, 1993] (équation 215) :

$$L_s = \left(\frac{U_*^2}{2k_* \omega (\partial_x U)_{x_*}} \right)^{1/3} \quad (215)$$

où U_* est la vitesse du fluide, k_* le nombre d'onde, $(\partial_x U)_{x_*}$ le gradient de vitesse, tous pris au point de blocage x_* (d'autres formulations de cette longueur sont introduites dans [Chaline *et al.*, 2013]).

On trouve dans notre cas pour l'horizon blanc (conversion incidente vers bleue), une longueur de décroissance $L_s = -0.0427m$.

On en déduit donc l'enveloppe dans cette zone grâce à la formule 213, qui sera donc l'inférence entre l'onde capillaire, dont l'amplitude et le nombre d'onde sont donnés par la solution géométrique, et la décroissance de la fonction d'Airy, dont l'amplitude est donnée par la fonction d'Airy en se rappelant que le nombre d'onde est pris égal à celui de la double solution IB (k_* au point de blocage).

Zone 3 (figure 5.34 centre gauche) :

L'interférence dans cette zone est similaire à celle de la zone précédente, avec d'un côté l'onde capillaire et de l'autre la partie décroissante d'une fonction d'Airy créée par la conversion de l'onde rouge R en onde transmise T . Dans ce cas, la longueur de décroissance (equation 215)) vaut $L_s = 0.0340m$.

Zone 4 (figure 5.34 gauche) :

Le canal étant de longueur finie, l'onde transmise T est réfléchiée dans le convergent. L'amplitude de cette onde réfléchiée peut être calculée avec l'équation 211 (en considérant que toute l'action d'onde est réfléchiée sans perte), elle est environ égale à la moitié de celle de l'onde transmise. On prend aussi en compte le mode transverse de la même façon que dans la zone 1, on obtient alors une interférence à trois ondes.

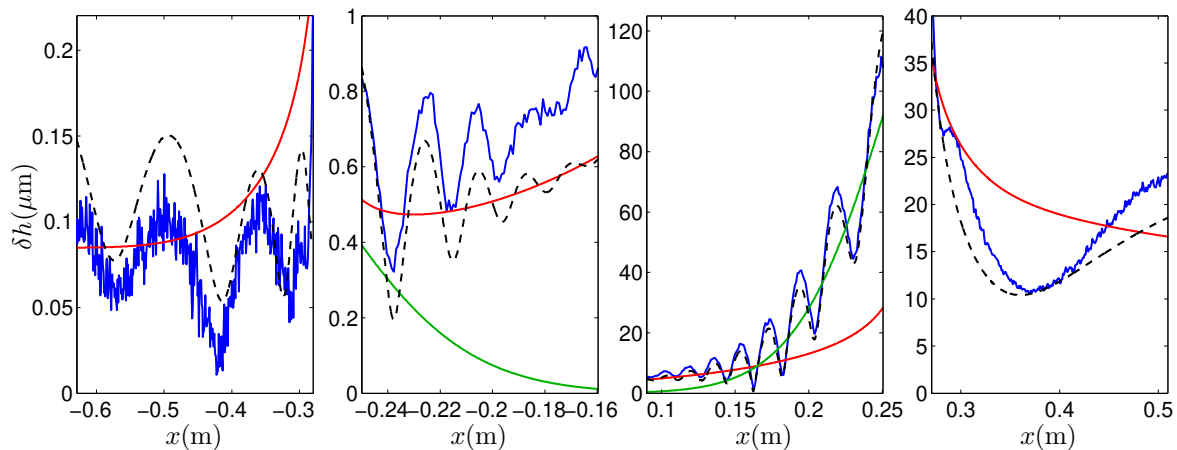


Figure 5.34 – Enveloppe expérimentale $\delta h(\omega_I, x)$ (bleu), solution géométrique (rouge), enveloppes théoriques des interférences (pointillés noirs). De la droite vers la gauche : zone 1, 2, 3 et 4. Les courbes verte sur les graphique des zone 2 et 3 représentent les décroissances des fonction de Airy dues à la double solutions IB pour la zone 2 et RT pour la zone 3.

Les enveloppes estimées théoriquement correspondent assez bien avec l'enveloppe mesurée expérimentalement, ce qui explique l'écart avec la solution géométrique. La présence de l'interférence entre l'onde capillaire et les partie décroissantes des fonctions d'Airy dues aux double solutions IB et RT attestent de la présence des deux double rebonds. Dans la région au dessus de l'obstacle, les ondes transverses peuvent aussi exister, mais les nombres d'onde du mode longitudinal capillaire et du mode transverse sont très proches, la longueur d'interférence serait alors d'environ 4 m sur une région d'environ 0,5 m rendant l'interférence impossible à observer. Cela pourrait expliquer la différence entre la solution géométrique et les résultats expérimentaux, si on se trouve au niveau d'un maximum d'interférence (même si cette différence peut aussi être expliquée par l'utilisation du profil de vitesse simplifié par exemple).

V.2.7 Suppression de la viscosité

Maintenant que toutes les ondes présentes dans le régime ont pu être décelées, on peut supprimer l'effet de la dissipation visqueuse. Pour cela, on calcule l'évolution théorique de l'amplitude avec la solution géométrique (équation 211) mais en supprimant la dissipation. Autrement dit, en éliminant le terme exponentiel ou en prenant une longueur dispersive infinie. Nous appellerons cette solution a_{nv}^{th} (pour non-visqueux). En comparaison, nous nommerons la solution calculée en prenant en compte la viscosité a_v^{th} . L'enveloppe expérimentale a_v^{exp} peut donc être redressée grâce à la combinaison des deux solutions théoriques avec l'équation 216 :

$$a_{nv}^{exp}(x) = a_v^{exp}(x) \frac{a_{nv}^{th}(x)}{a_v^{th}(x)} \quad (216)$$

La figure 5.35 montre donc le résultat de cette enveloppe « redressée » ainsi que les enveloppes d'interférence théoriques, elles aussi redressées.

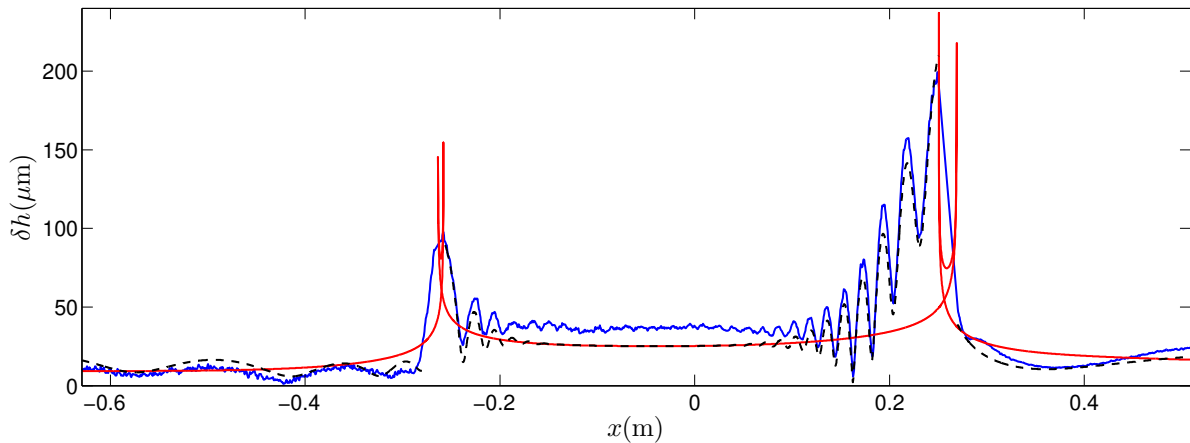


Figure 5.35 – Enveloppe expérimentale a_{nv}^{exp} redressé par l'équation 216 (bleu), solution géométrique sans viscosité a_{nv}^{th} (rouge), enveloppes théoriques des interférences redressé par l'équation 216 (pointillés noirs).

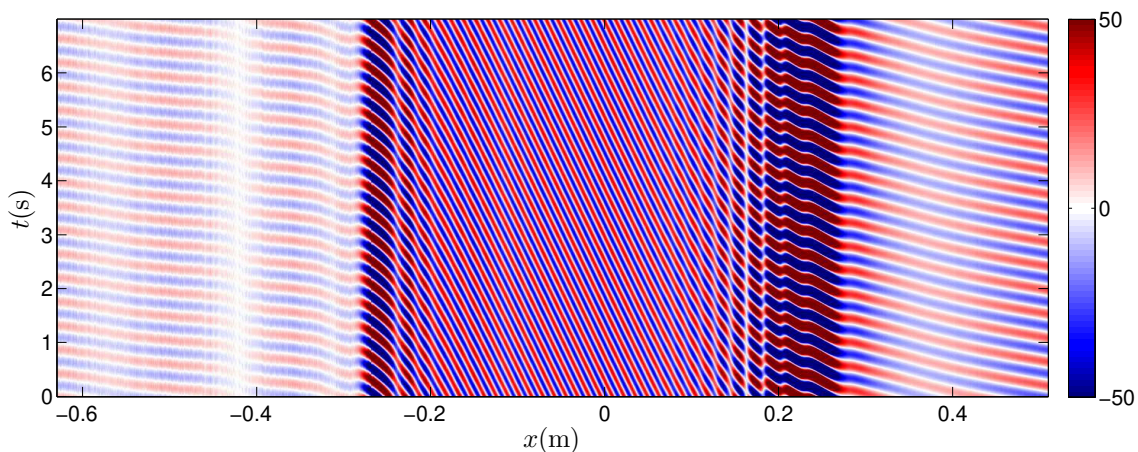


Figure 5.36 – Diagramme espace-temps des fluctuations de surface libre $\delta h(x, t)$ redressé par l'équation 216. Les échelles de couleur indiquent les amplitudes en micromètre.

Cette méthode n'est basée que sur l'amplitude des ondes intervenant dans la solution géométrique ($I \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow R \rightarrow T$). Si il était possible d'obtenir un résultat expérimental sur un même régime mais sans dissipation, il serait alors légèrement différent. L'onde

réfléchi à l'entrée du canal (visible dans la zone 4) aurait une amplitude non négligeable dans toute la fenêtre de visualisation et provoquerait donc une interférence dans la région en aval de l'obstacle par exemple (ce qui n'est pas le cas dans nos résultats expérimentaux car son amplitude est plus faible que celle de l'onde incidente de trois ordres de grandeur). Mais cette méthode permet tout de même de mieux visualiser la conversion d'une onde longue en onde capillaire et de nouveau en onde longue. On retrouve ainsi un résultat semblable à celui obtenu numériquement du voyage Blanc→Noir (figure 5.7 gauche et 5.12 gauche). Dans les deux cas, les ondes à énergie négative ne sont produites, numériquement, parce que les gradients de vitesse sont faibles, la conversion vers les modes négatifs est négligeable, expérimentalement, aucune conversion n'est possible car ces modes n'existent pas dans la gamme de vitesse de l'écoulement étudié.

V.3 Conclusion

La partie numérique de ce chapitre met en évidence la possibilité de créer des trous de ver hydrodynamiques bi-directionnels (traversables dans les deux sens) contrairement aux théories existantes en Relativité Générale permettant des trous de ver traversables seulement dans la direction horizon noir vers horizon blanc. Cette caractéristique est due à la présence de deux échelles dispersives, la première étant la hauteur d'eau et la seconde (longueur capillaire) construite sur la tension de surface, cette seconde échelle dispersive faisant apparaître quatre nouveaux horizons élevant donc leur nombre à six. En plus de rendre ces trous de ver bi-directionnels, on observe que les ondes à énergie négative sont piégées à l'intérieur du trou de ver et sont amplifiées à chaque rebond sur les horizons, transformant donc le trou de ver en une cavité Laser analogue grâce à l'effet Black Hole Laser. Cette effet pouvant aussi être observé avec seulement la première échelle dispersive (la hauteur d'eau) et deux horizons (Noir et Blanc) avec un écoulement présentant une région sous-critique entre deux régions super-critiques, les ondes piégées cette fois-ci seraient celles d'énergie positive.

Les résultats de la partie expérimentale ont permis de prouver le caractère bi-directionnel d'un trou de ver hydrodynamique, ce cas expérimental explorant la première prédiction décrite numériquement mettant en scène quatre horizons et seulement les ondes à énergie positive. Ces premiers résultats sur un trou de ver hydrodynamique bi-directionnel offrent d'intéressantes perspectives sur la possibilité d'observer les autres cas décrits numériquement, comme l'effet Black Hole Laser hydrodynamique. Mais plusieurs complications expérimentales pourront survenir, si des ondes à action d'onde négative sont présentes cela veut aussi dire qu'il y aura une ondulation stationnaire. Dans le cas d'une étude de l'effet Laser capillaire, les nombres d'onde seront plus importants que dans l'étude expérimentale de ce chapitre, il faudra alors trouver les paramètres d'écoulement optimaux pour que la dissipation soit la plus faible possible. L'étude numérique de paramètres optimaux a d'ailleurs commencé [Robertson et Rousseaux, 2017]. Dans le cas d'un Black Hole Laser n'utilisant que deux horizons, la dissipation devrait être beaucoup plus faible car les conversions ne concernant que des ondes gravitaires, mais la grande difficulté serait de pouvoir générer une onde dans la région centrale (dans ce cas une région sous-critique) où d'autres ondes devraient se propager librement sans rencontrer le batteur qui aurait généré l'onde initiale.

Trou noir hydraulique

VI.1 Tests préliminaires	154
VI.1.1 Premier essai	154
VI.1.2 Second essai	154
VI.2 Régime et obstacle final	156
VI.3 Conversion dans le cas stimulé	160
VI.3.1 Méthodes d'extraction	163
VI.3.2 Linéarité	167
VI.3.3 Résultats	167
VI.4 Modification du batteur	169
VI.5 Comparaison numérique	171
VI.6 Corrélation dans le cas sans stimulation	172
VI.7 Conclusion	172

Dans ce chapitre, nous souhaitons reproduire un trou noir hydraulique, autrement dit un régime avec une vitesse du fluide qui accélère selon sa direction de propagation. Cette configuration a l'avantage de ne pas présenter de ressaut hydraulique, celui-ci étant « accroché » aux zones de décélération du fluide. En raison cette absence de ressaut, il devient alors possible d'obtenir un écoulement trans-critique non-déferlant [Forbes et Schwartz, 1982, Lawrence, 1987, Lowery et Liapis, 1999, Vigié, 2005].

VI.1 Tests préliminaires

VI.1.1 Premier essai

Nous avons pu voir précédemment que l'écoulement au dessus d'une bosse faisait apparaître, sous certains régimes d'écoulement, un horizon noir sur la partie montante de l'obstacle (au niveau de l'accélération du fluide) et un horizon blanc dans la descente (au niveau de la décélération). Notre première idée fut donc de conserver uniquement la partie aval de l'obstacle. Pour cela, nous avons fait réaliser une géométrie en polystyrène extrudé en forme de tangente hyperbolique (Figure 6.1).

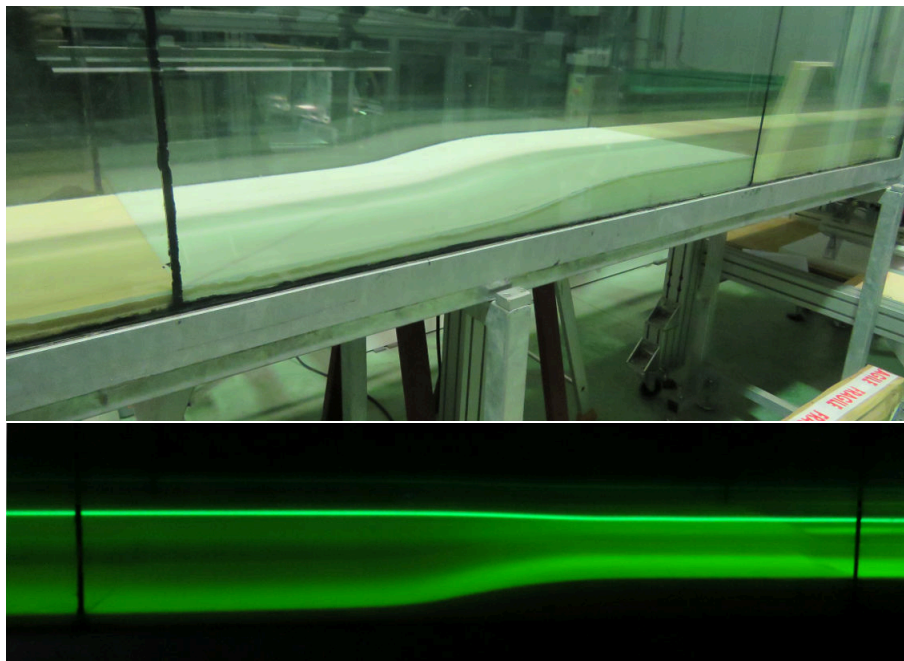


Figure 6.1 – Haut : photo du premier obstacle avant remplissage du canal. Bas : photo de l'écoulement avec ligne laser.

Cette géométrie permet d'avoir un écoulement avec deux zones de vitesses différentes séparées par une accélération mais il est impossible dans cette configuration d'obtenir un nombre de Froude supérieur à 1. En effet, plus le débit imposé est important, plus le système « s'équilibre » en augmentant la hauteur d'eau dans la région de forte vitesse avec un nombre de Froude résultant entre 0,7 et 0,8. L'accélération provoquée par l'obstacle (qui est dans ce cas un convergent 1D), n'est pas assez forte pour obtenir un écoulement trans-critique. Cette observation est cohérente avec les mesures faites lors de la qualification de canal hydro-sédimentaire, sans présence d'obstacle, les nombres de Froude maximaux observés, pour une large gamme de débit, étaient équivalents (le convergent jouant le rôle de notre obstacle, voir l'appendice de [Rousseaux *et al.*, 2016]).

Il a donc fallu penser à un obstacle provoquant une accélération assez forte pour obtenir un régime trans-critique.

VI.1.2 Second essai

L'idée pour d'obtenir un régime trans-critique a été emprunté à l'aéronautique (on rappelle que l'obstacle de Vancouver est lui aussi inspirée de l'aéronautique avec une géométrie

type aile d'avion). Une tuyère permet, grâce à une combinaison d'un convergent et d'un divergent, d'obtenir un écoulement trans-sonique. Le nombre de Mach pour les ondes acoustiques étant l'analogue du nombre de Froude pour les ondes de surface, l'obstacle devrait lui aussi posséder un convergent suivi d'un divergent comme le montre la figure 6.2.

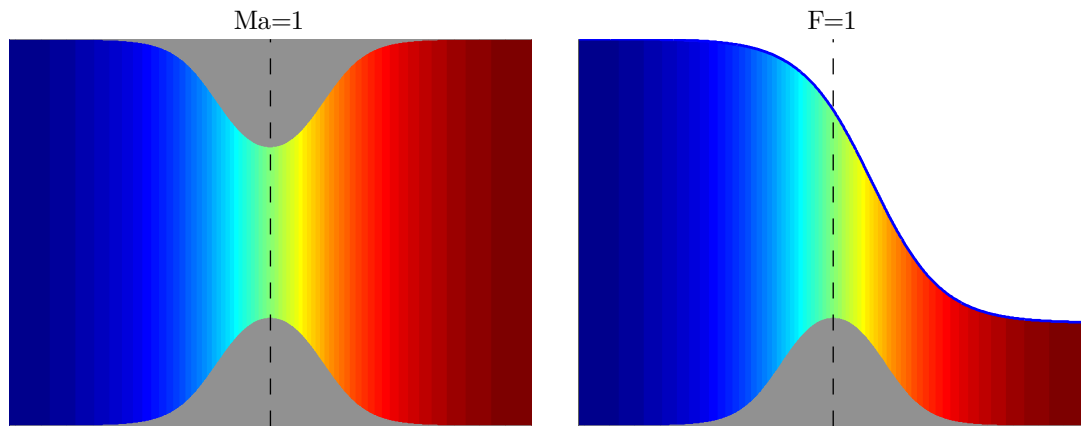


Figure 6.2 – Gauche : schéma d'une tuyère aéronautique. Droite : Schéma d'un écoulement trans-critique, la courbe bleue représente la surface libre, la zone grise l'obstacle. Le gradient de couleur représente la vitesse du fluide (bleu : faible vitesse, rouge : forte vitesse).

Pour appliquer cette idée, nous avons utilisé un obstacle déjà existant en PMMA (figure 6.3 gauche) dont la géométrie est un trapèze de 1,5 m de long sur 15 mm d'épaisseur avec des pentes (montante et descendante) valant 7° . Les mesures de hauteur d'eau (obtenues avec quatre sondes acoustiques) nous permettent d'observer que, en appliquant une large gamme de débits (avant d'imposer l'écoulement, la hauteur d'eau dans le canal est de 1 cm), les régimes sont bien trans-critiques (figure 6.3 droite). Malgré cet objectif atteint, on peut voir que la région sous-critique au dessus de l'obstacle, possède un nombre de Froude assez élevé et non-constant, la solution serait donc de raccourcir l'obstacle afin que la région sous-critique se trouve avant la partie montante de l'obstacle. Nous observons la présence d'un ressaut en aval de l'écoulement et, plus le débit est faible, plus la position de ce ressaut se rapproche de l'obstacle et ceci diminuant la largeur de la région super-critique. Il faudrait donc créer une autre accélération en aval de la fenêtre de visualisation afin « d'aspirer » ce ressaut et ainsi élargir la région super-critique même pour les faibles débits.

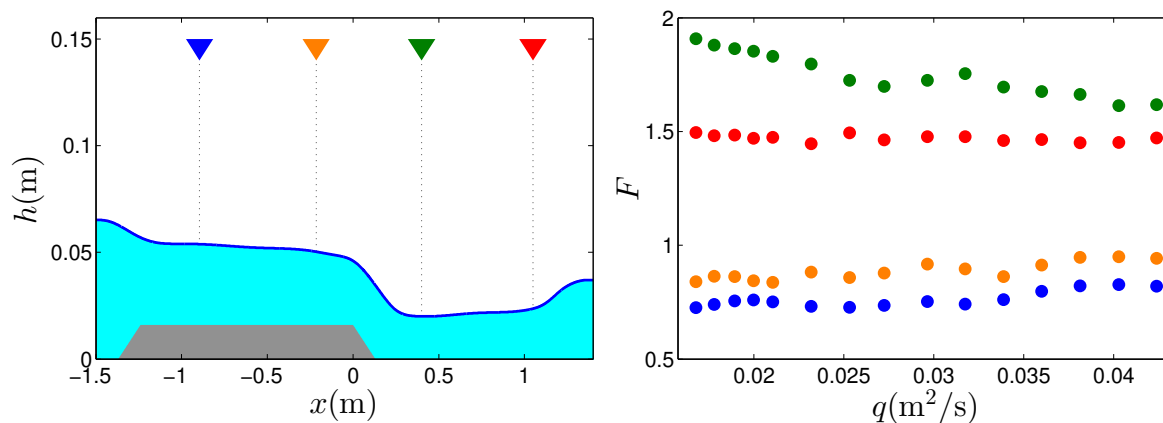


Figure 6.3 – Gauche : déformée de surface libre au dessus du second obstacle pour le plus bas débit ($q=0,0168 \text{ m}^2/\text{s}$). La courbe bleue est tracée à partir des données des quatre sondes acoustiques et d’observations visuelles, les triangles de couleur et lignes en pointillé représentent la position des sondes acoustiques, la zone grise l’obstacle. Droite : mesures des nombres de Froude pour chaque position de capteur en fonction du débit appliqué, La couleur des marqueurs correspondant aux positions des capteurs sur le graphique de gauche.

VI.2 Régime et obstacle final

Les améliorations possibles, observées précédemment, ont donc été appliquées pour la réalisation d’un troisième obstacle dont la géométrie est présentée figure 6.4. La seconde accélération (afin de repousser le ressaut) est ici une marche descendante. Le fait qu’elle soit abrupte, et non en pente douce, n’a pas d’effet car se situant en aval de la région super-critique, rien ne peut remonter l’écoulement à partir de cette position.

La géométrie de cet obstacle est décrite par :

$$o(x)(\text{en mm}) = \begin{cases} 0 & \forall & x < x_1 = -211.6 \text{ mm} \\ \tan(30^\circ)(x - x_1) & \forall & x = [x_1 : x_2] = [-211, 6 : -194, 3] \text{ mm} \\ 10 + \tan(15^\circ)(x - x_2) & \forall & x = [x_2 : x_3] = [-194, 3 : -164.4] \text{ mm} \\ 18 & \forall & x = [x_3 : x_4] = [-164.4 : -114.4] \text{ mm} \\ 18 - \tan(4^\circ)(x - x_4) & \forall & x = [x_4 : x_5] = [-114.4 : 0] \text{ mm} \\ 10 & \forall & x = [x_5 : x_6] = [0 : 1280] \text{ mm} \\ 0 & \forall & x > x_6 = 1280 \text{ mm} \end{cases} \quad (217)$$

La position $x = 0$ a été prise arbitrairement sur un des angles (cassures) pouvant être identifiés facilement. Les dimensions verticales de l’obstacle ont été intentionnellement prises de l’ordre du centimètre (comparé à 10 cm pour l’obstacle de Vancouver) car cela provoque une accélération assez forte pour créer une région super-critique avec un nombre de Froude restant inférieur à 1,5. De plus, ces dimensions permettent d’obtenir une pente descendante (figure 6.4) avec un angle faible de 4° sur une courte distance.

En réglant le débit à $Q=5,71 \text{ L/s}$ soit un débit par unité de largeur $q=0,0146 \text{ m}^2/\text{s}$, on peut séparer maintenant la région sous-critique avec une hauteur d’eau moyenne de $h=60 \text{ mm}$ (pour $x=[-1.05 : -0.2] \text{ m}$) de la région super-critique (pour $x=[0.4 : 1.1] \text{ m}$) avec une hauteur d’eau moyenne de $h=27 \text{ mm}$ (figure 6.4 bas et 6.5 haut). Nous considérons ces deux régions comme quasi-constante (en vitesse de fluide et vitesse des ondes longues, figure 6.5 centre), même si l’on observe quelques variations pour la région super-critique. On peut voir sur la figure 6.5 (haut) qu’il n’y a pas d’ondulation stationnaire comme dans

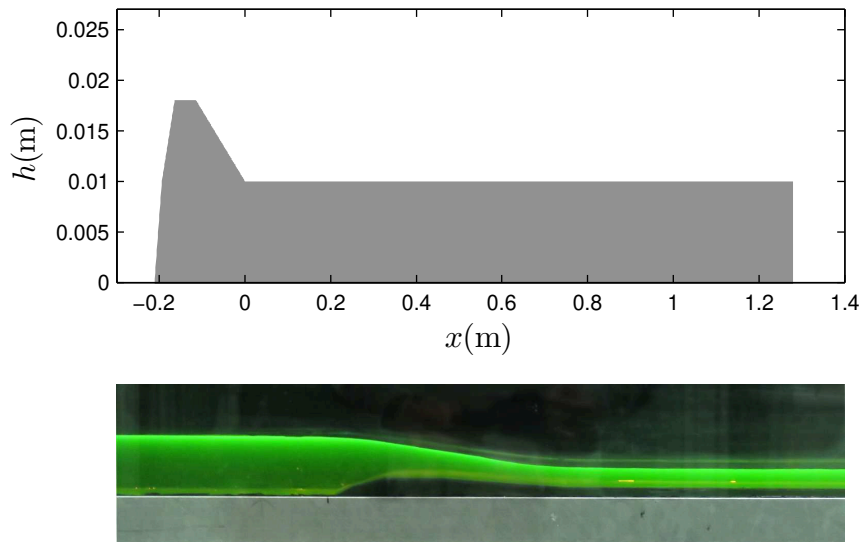


Figure 6.4 – Haut : géométrie de l’obstacle final. Bas : photo de l’écoulement au dessus avec un débit volumique de $Q=5,71$ L/s soit un débit par unité de largeur $q=0,0146$ m²/s.

l’étude sur le trou blanc hydraulique. Comme décrit précédemment, l’ondulation stationnaire (gravitaire) prend naissance aux niveaux des forts gradients de vitesse, autrement dit au dessus de l’obstacle, et possède un vitesse de groupe de même signe que celle du courant, donc se propageant vers l’aval. La région en aval de l’obstacle est super-critique où l’ondulation n’a pas de solution est donc ne peut exister. En plus de pouvoir obtenir un régime super-critique, l’étude d’un trou noir hydraulique aura aussi l’avantage de ne pas posséder d’ondulation stationnaire, évitant ainsi les problèmes de diffusion sur l’ondulation étudiés sur le cas d’un trou blanc hydraulique.

Nous pouvons tracer le diagramme de phase (U, T) (figure 6.6). Nous remarquons l’absence d’horizons capillaires et nous pouvons extraire la valeur de $\omega_{\max} \approx 9$ Hz.

Nous mesurons la surface libre en utilisant la méthode optique avec une durée d’acquisition de 800 s, une fréquence d’acquisition de 5,12 Hz afin d’avoir un nombre d’images égal à 2^{12} . En observant l’évolution temporelle de la déformée de surface libre (figure 6.7), on remarque premièrement que les fluctuations restent faibles devant la déformée stationnaire et que le bruit de surface libre est plus important dans la région super-critique.

En calculant la transformée de Fourier 2D de ses fluctuations dans la région sous-critique (figure 6.8 gauche), on peut vérifier qu’elle est en adéquation avec la relation de dispersion, ce qui nous permet de constater qu’il n’y a pas d’effet important de la vorticité ou de la tension de surface par exemple. Les transformées de Fourier mettent aussi en évidence les modes transverses (figure 6.8 gauche). Pour la région super-critique, la vitesse en surface a été considérée comme légèrement plus importante que la vitesse moyenne $U = 1,1q/h$ pour correspondre aux résultats expérimentaux. Ceci peut provenir d’une modification du profil vertical de vitesse dans cette région. Ces résultats confirment à nouveau le caractère trans-critique de l’écoulement avec une branche de fréquence relative négative ($\sigma < 0$) strictement positive dans le référentiel du laboratoire ($\omega > 0$). Nous pouvons aussi observer, encore une fois, que le niveau de bruit de surface libre est beaucoup plus important dans la région super-critique, cela pourrait être dû à la génération de bruit de volume (turbulence) provoqu e par la marche descendante de l’obstacle. On remarque que,  a l’inverse, la branche de la relation de dispersion correspondant à la solution d’onde longue se propageant à contre-courant dans la région sous-critique ne semble pas être

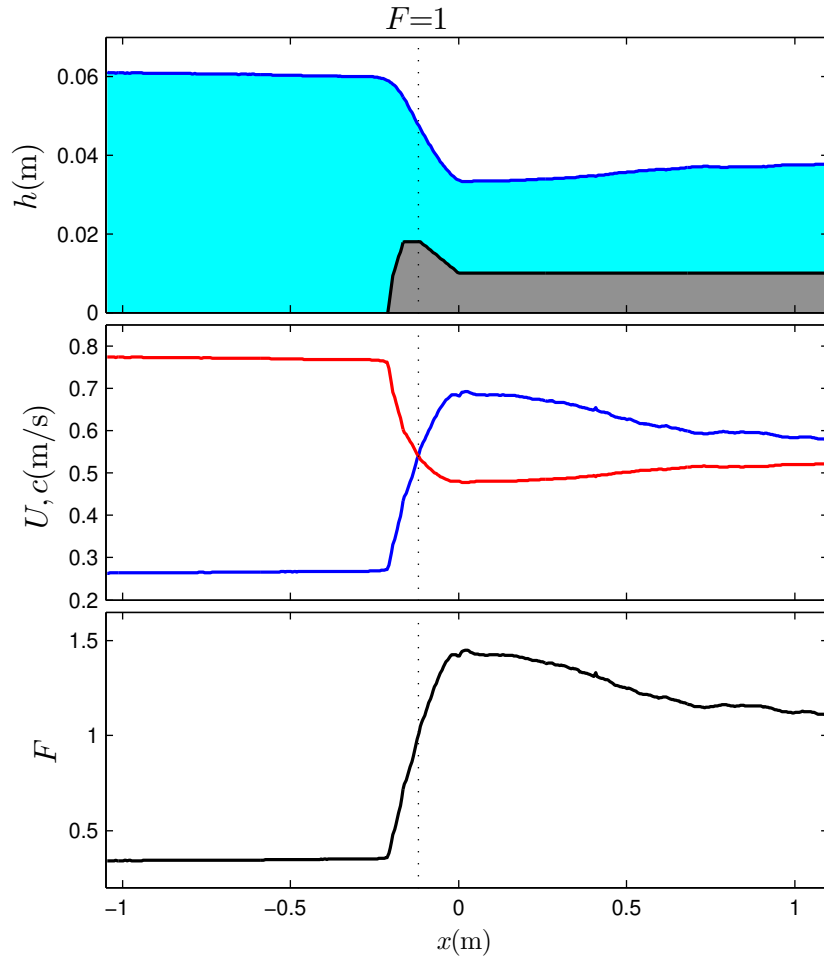


Figure 6.5 – Haut : La courbe bleue représente la position de surface libre, la zone grisée l’obstacle. Centre : En bleu, la vitesse du courant $U(x)$, en rouge, la vitesse des ondes longues $c(x) = \sqrt{gh(x)}$. Bas : Le nombre de Froude $F(x) = U(x)/c(x)$.

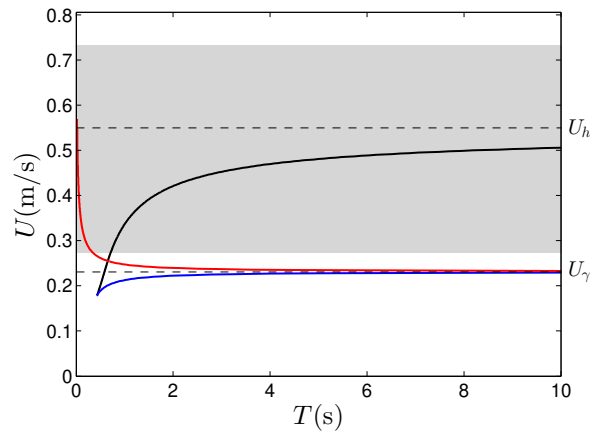


Figure 6.6 – Diagramme de phase (U, T) . La zone grisée indique la gamme de vitesse de l’écoulement.

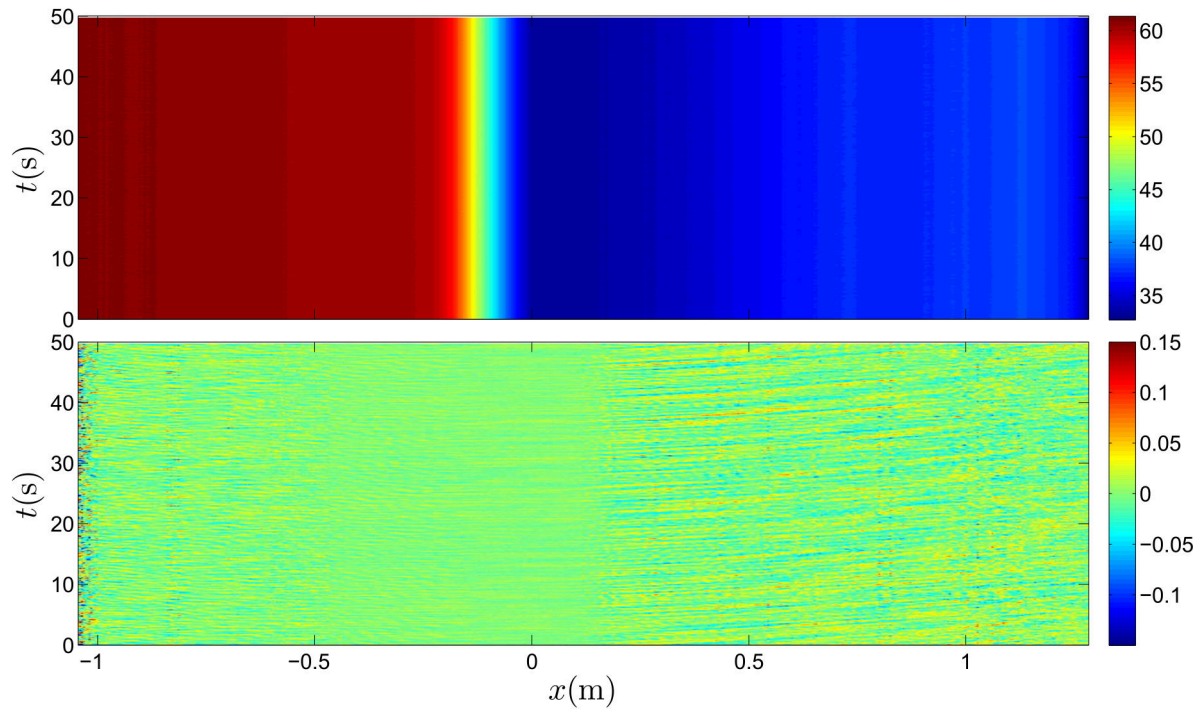


Figure 6.7 – Haut : diagramme espace-temps des mesures de surface libre $h(x,t)$. Bas : diagramme espace-temps des fluctuations de surface libre $\delta h(x,t)$ (en ayant soustrait l'ondulation stationnaire). L'échelle de couleur des amplitudes est en mm.

peuplée. De plus, on peut voir sur la figure 6.8 (gauche) deux bandes symétriques, l'une allant de $\omega \sim -15$ Hz et $k \sim -60$ m^{-1} à $\omega \sim 15$ Hz et $k \sim -20$ m^{-1} et l'autre sa symétrique par rapport à $\omega = 0$ Hz et $k = 0$ m^{-1} . Ceci provient d'un repliement de spectre comme le montre la figure 6.9 où nous avons superposé deux transformées de Fourier (de la région sous-critique), ainsi que leurs relations de dispersion, l'une au dessus de l'autre.

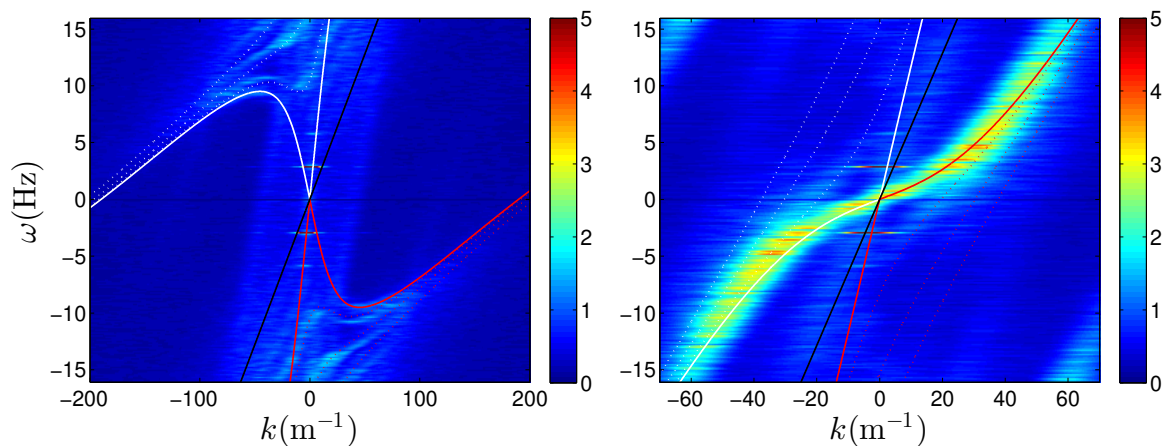


Figure 6.8 – Transformée de Fourier $\delta \hat{h}(\omega, k)$ des fluctuations de surface libre sans envoyer d'onde, les amplitudes étant en μm . À gauche dans la région sous-critique, à droite, super-critique. Les courbes représentent les différentes branches de la relation de dispersion : en blanc, les modes à fréquence relative positive, en rouge, à fréquence relative négative ; en continu, les modes longitudinaux, en pointillés, les transverses ; en noir, la branche advective $\omega = -Uk$. Les amplitudes sont en μm

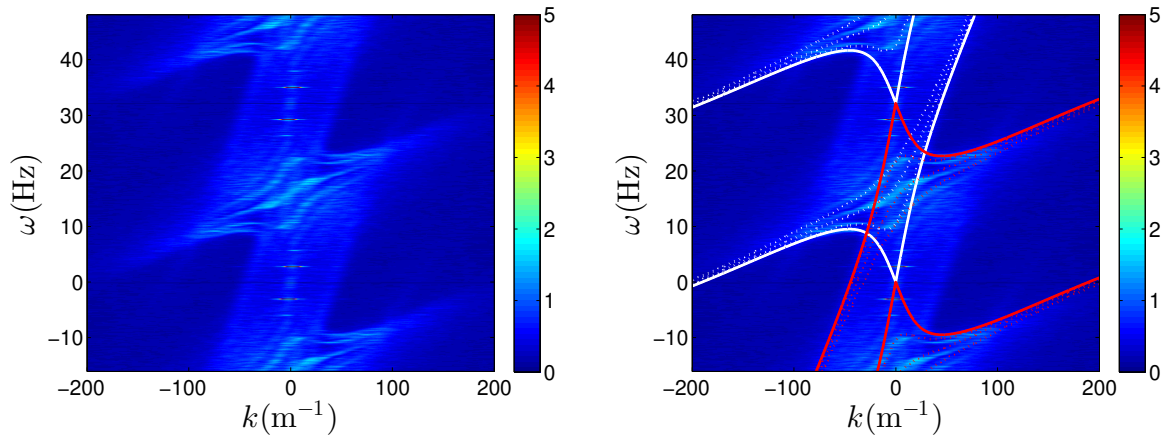


Figure 6.9 – Superposition de la transformée de Fourier $\delta\hat{h}(\omega, k)$ dans la région sous-critique permettant de mettre en évidence le repliement de spectre (gauche) avec relation de dispersion (droite).

VI.3 Conversion dans le cas stimulé

Ayant obtenu un écoulement trans-critique, nous allons le stimuler avec une onde en co-courant partant de la région sous-critique. Pour cela, nous utilisons le batteur n°2 pouvant se placer en amont de l'écoulement. La forme de l'impacteur est illustrée sur la figure 6.10, elle est ensuite placée à la surface de l'eau pour être légèrement immergée (environ 20 mm). Ses dimensions très allongées ont été choisies pour déplacer un assez grand volume d'eau sur une faible amplitude verticale, ainsi les amplitudes des ondes générées (dépendant du volume déplacé et de la fréquence) sont de l'ordre du demi millimètre pour une amplitude du batteur de l'ordre du millimètre qui reste assez faible pour considérer que l'écoulement sous l'obstacle n'est pas modifié durant les oscillations.

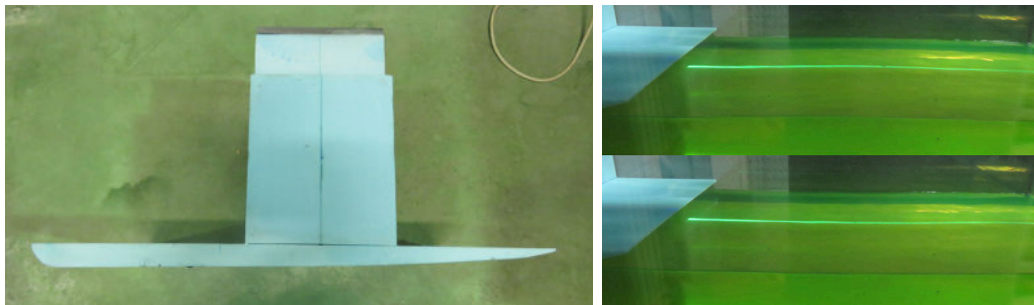


Figure 6.10 – À gauche : Photo de la forme du batteur n°2. Les dimensions de la partie inférieure sont 600 mm de large sur 27 mm d'épaisseur maximum (la profondeur étant égale à celle du canal 390mm). La forme est placée telle quel dans le canal, ce qui veut dire que la partie plus épaisse (à gauche sur la photo) se trouve en amont et la partie plus fine (à droite) en aval. À droite : le batteur en fonctionnement.

Lorsqu'on trace les relations de dispersion dans les zones sous-critique et super-critique (figure 6.11), nous observons la présence de 4 modes pouvant être représentés dans l'espace réel par la figure 6.12 (gauche); un mode entrant : l'onde incidente I envoyée en co-courant par le batteur et trois modes sortant : l'onde transmise T de même nature que l'onde incidente, l'onde réfléchie R avec un sens de propagation opposée à celui de l'incidente, l'onde négative N se propageant dans la région super-critique dotée d'une fréquence relative négative. On pourrait aussi considérer les modes de courte longueur d'onde dus à la dispersion contrôlée par la hauteur d'eau dans la région sous-critique, mais ces modes se propageant à co-courant seraient des modes entrants donc générés par le batteur et les mesures de déformée de surface libre montrent que le batteur ne génère

qu'un mode incident de grande longueur d'onde.

On peut voir que les relations de dispersion (figure 6.11) restent assez proche d'un cas non-dispersif pour les plus basses fréquences (dans les deux régions sous et super-critique).

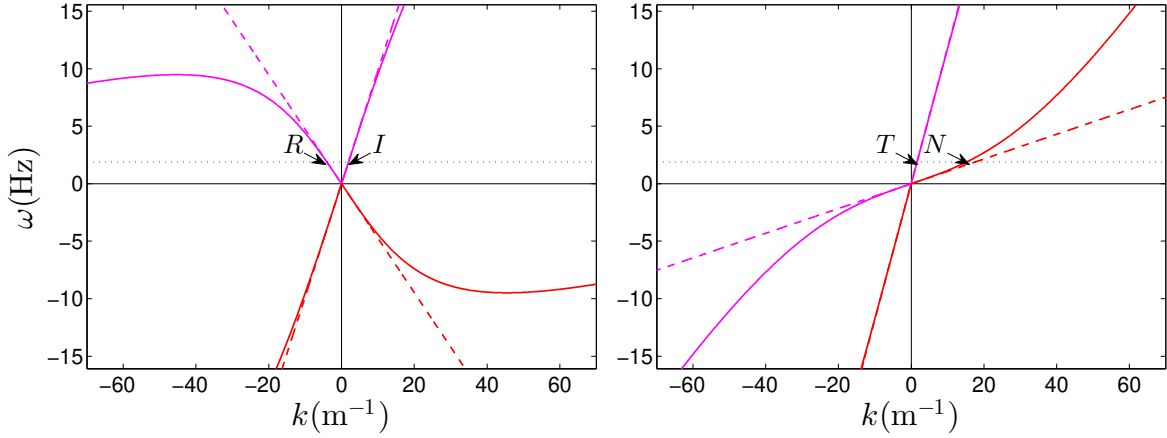


Figure 6.11 – En continu : relation de dispersion de notre cas, en tirés : relation de dispersion non dispersive $\omega = (-U \pm c)k$ avec $c = \sqrt{gh}$, en pointillé : une fréquence incidente $\omega_I = 1,88$ Hz avec ses quatre solutions. À gauche dans la région sous-critique, à droite super-critique.

La figure 6.12 (droite) représente, dans le cas d'un trou noir astrophysique, la propagation des différents \mathcal{U} et \mathcal{V} modes (voir chapitre « Méthodes et outils théoriques »). On remarque alors la grande similitude entre le diagramme espace-temps dans le cas de notre trou noir hydraulique et celui d'un trou noir astrophysique. Les modes incident et transmis correspondent bien aux \mathcal{V} -modes à l'extérieur et à l'intérieur de l'horizon car se propageant à contre-courant. Le mode réfléchi se propageant à contre-courant et de fréquence relative positive correspond donc au mode \mathcal{U}_R et le mode négative se propageant en aval de l'horizon (point de blocage) possédant une fréquence relative négative correspond lui au \mathcal{U}_L mode. Cette similitude n'est que qualitative et due à la correspondance des quatre modes présents dans le cas du trou noir hydraulique et ceux dans le cas d'un trou noir astrophysique.

Dans le cas d'un trou noir astrophysique, la vitesse de la lumière est constante pour toute position spatiale, en se plaçant dans le référentiel de la vitesse de libération, les \mathcal{V} et \mathcal{U} modes se propagent comme dans un espace temps plat, il ne peut donc pas y avoir de conversion entre ces deux modes (en se plaçant dans le cas d'une seule dimensions spatiale). À l'inverse, dans le cas d'un trou noir hydraulique, même en étant dans un régime non-dispersif $c = \sqrt{gh}$, la hauteur d'eau variant avec la position spatiale, il en va de même pour la vitesse des ondes longues. En se plaçant dans le référentiel du courant, la variation de la vitesse des ondes selon la position permet alors les conversions entre \mathcal{V} et \mathcal{U} modes.

Ces conversions de mode peuvent être écrites sous forme de perturbation du potentiel de vitesse complexe (rappel : si la fréquence est conservée : $\phi(x, t) = e^{-i\omega t} \phi_\omega(x)$) :

$$\phi_\omega^{\rightarrow, I} \rightarrow \tilde{A} \phi_\omega^{\rightarrow, T} + \varepsilon \phi_\omega^{\leftarrow, R} + \iota \left(\phi_{-\omega}^{\rightarrow, N} \right)^* \quad (218)$$

avec \tilde{A} le coefficient complexe de diffusion vers le mode transmis, ε réfléchi (ε pour extérieur), ι négatif (ι pour intérieur). Les flèches indiquent le signe de la vitesse de groupe dans le référentiel du laboratoire.

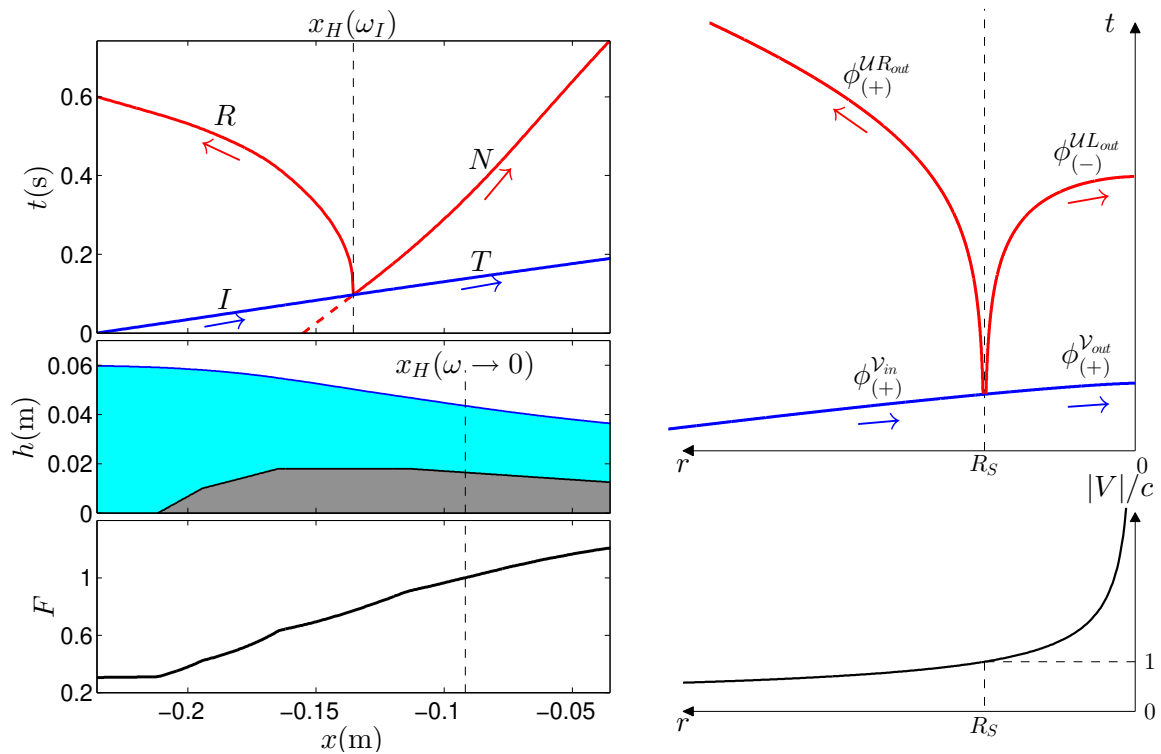


Figure 6.12 – Gauche : Haut : Diagramme espace-temps des trajectoires des quatre modes décrites par $\partial x/\partial t = \partial \omega/\partial k$ pour une fréquence incidente $\omega_I = 1,88\text{Hz}$, le mode négatif apparaît au niveau de la conversion ($x = x_H$) mais comme il est existant dans la zone $x < x_H$, il est alors présenté en pointillé dans cette zone. Centre : position de la surface libre. Bas : nombre de Froude en fonction de la position spatiale. La position de l’horizon pour la fréquence incidente $x_H(\omega_I)$ diffère de celle de l’horizon non-dispersif $x_H(\omega \rightarrow 0)$ correspondant à une nombre Froude $F = 1$. Plus la fréquence sera élevée, plus l’horizon dispersif s’éloignera vers l’amont.

Droite : Haut : Diagramme espace-temps des trajectoires des quatre modes présents dans le cas d’un trou noir astrophysique. Bas : évolution du rapport de la vitesse de libération sur la vitesse de la lumière.

Afin de connaître la norme de ces coefficients, on passe par l'action d'onde :

$$\mathcal{A} \sim \frac{a^2}{\sigma} v_g, \quad |\tilde{A}|^2 = \frac{|\mathcal{A}_T|}{|\mathcal{A}_I|}, \quad |\varepsilon|^2 = \frac{|\mathcal{A}_R|}{|\mathcal{A}_I|}, \quad |\iota|^2 = \frac{|\mathcal{A}_N|}{|\mathcal{A}_I|} \quad (219)$$

avec \mathcal{A} le flux d'action d'onde, a l'amplitude, σ la fréquence relative et $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ la vitesse de groupe.

Les vitesses de groupe et fréquences relatives de chaque mode sont obtenues grâce à la relation de dispersion théorique. Il reste donc à mesurer l'amplitude de chaque mode.

VI.3.1 Méthodes d'extraction

Pour connaître l'amplitude de chacun des modes, nous réalisons une série de 22 expériences en envoyant une onde continue en co-courant (le batteur n°2 étant positionné juste avant la région sous-critique) avec différentes fréquences et amplitudes (table VI.1).

			Amplitude mécanique du batteur a_{wm}		
			0,25 mm	0,50 mm	1,00 mm
Fréquence	$f=0,2$ Hz	$\omega=1,26$ Hz	x		x
	$f=0,3$ Hz	$\omega=1,88$ Hz	x		x
	$f=0,4$ Hz	$\omega=2,51$ Hz	x		x
	$f=0,5$ Hz	$\omega=3,14$ Hz	x		x
	$f=0,6$ Hz	$\omega=3,77$ Hz	x	x	
	$f=0,7$ Hz	$\omega=4,40$ Hz	x	x	
	$f=0,8$ Hz	$\omega=5,03$ Hz	x	x	
	$f=0,9$ Hz	$\omega=5,65$ Hz	x	x	
	$f=1,0$ Hz	$\omega=6,28$ Hz	x	x	
	$f=1,1$ Hz	$\omega=6,91$ Hz	x	x	
	$f=1,2$ Hz	$\omega=7,54$ Hz	x	x	

Table VI.1 – Plan d'expériences pour l'étude du trou noir stimulé.

Pour illustrer les résultats, nous choisissons d'étudier le cas d'une fréquence envoyée de $f=1,2$ Hz ($\omega=7,54$ Hz) avec une amplitude batteur de $a_{wm}=0,5$ mm. En soustrayant le mode zéro (courbe bleue figure 6.5 haut), les fluctuations de surface libre $\delta h(x, t)$ (figure 6.13) nous montrent que l'onde incidente est bien transmise vers la région super-critique. Mais nous observons aussi la présence d'interférences dans la région sous-critique comme dans la région super-critique, ce qui implique la présence d'autres modes.

Pour vérifier la nature de ces modes, nous calculons les transformées de Fourier 2D dans les deux régions (figure 6.14). Elles nous révèlent la présence d'un mode réfléchi R dans la région sous-critique, et d'un mode négatif N (car de fréquence relative négative $\sigma < 0$) dans la région super-critique.

La première méthode pour obtenir l'amplitude de chacun des modes, consiste à extraire les maxima des pics dans les transformées de Fourier 2D (figure 6.14). Pour plus de lisibilité, on trace seulement le spectre à la fréquence incidente $\delta h(\omega_I, k)$ (figure 6.15). Les pics obtenus pour chacun des modes étant bien distincts, il est facile d'en lire l'amplitude.

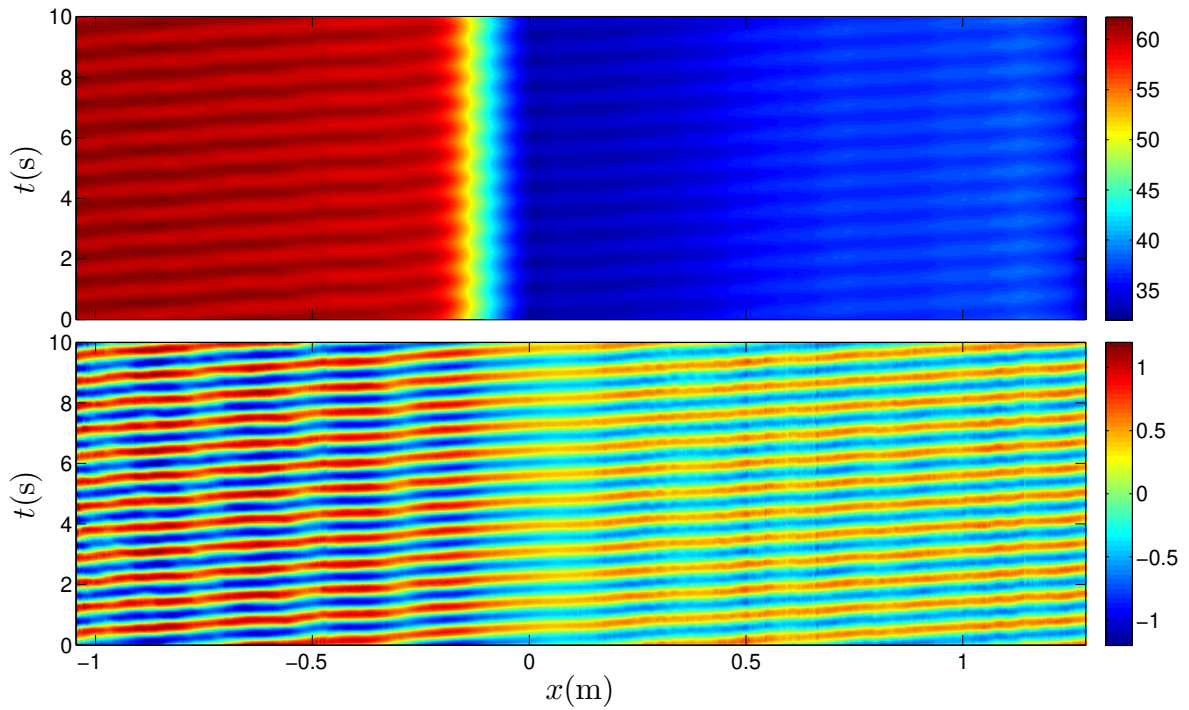


Figure 6.13 – Haut : diagramme espace-temps des mesures de surface libre $h(x,t)$. Bas : diagramme espace-temps des fluctuations de surface libre $\delta h(x,t)$ (en ayant soustrait l'ondulation stationnaire). Cas d'une onde envoyée avec une fréquence $\omega_I=7,54$ Hz et une amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=0,5$ mm. L'échelle de couleur des amplitudes est en mm.

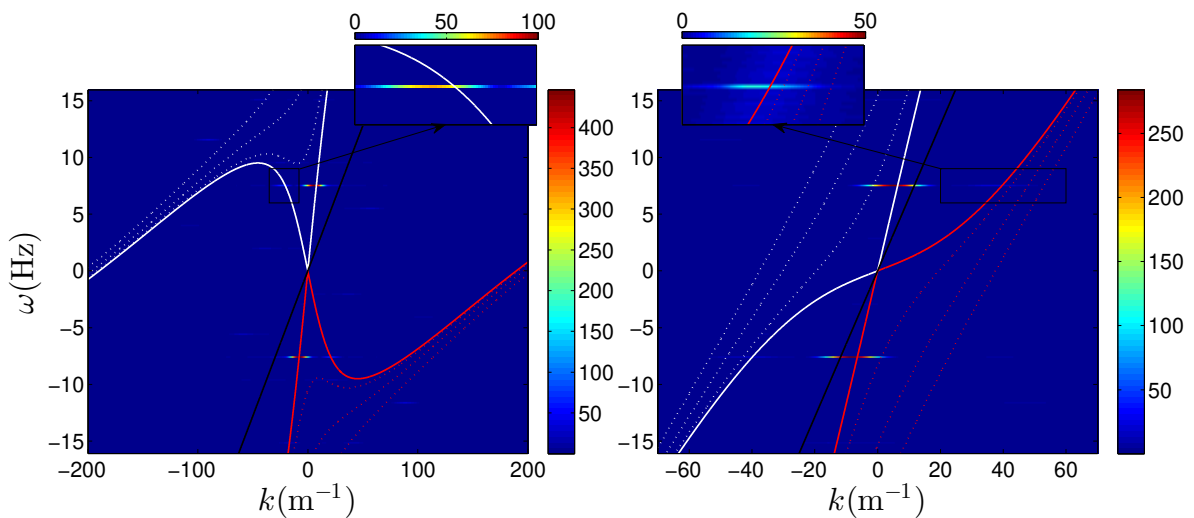


Figure 6.14 – Transformée de Fourier 2D $\delta\hat{h}(\omega, k)$ des fluctuations de surface libre dans le cas d'une onde envoyée avec une fréquence $\omega_I=7,54$ Hz et une amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=0,5$ mm (même système de couleur de courbes que la figure 6.8). Les amplitudes sont en μm

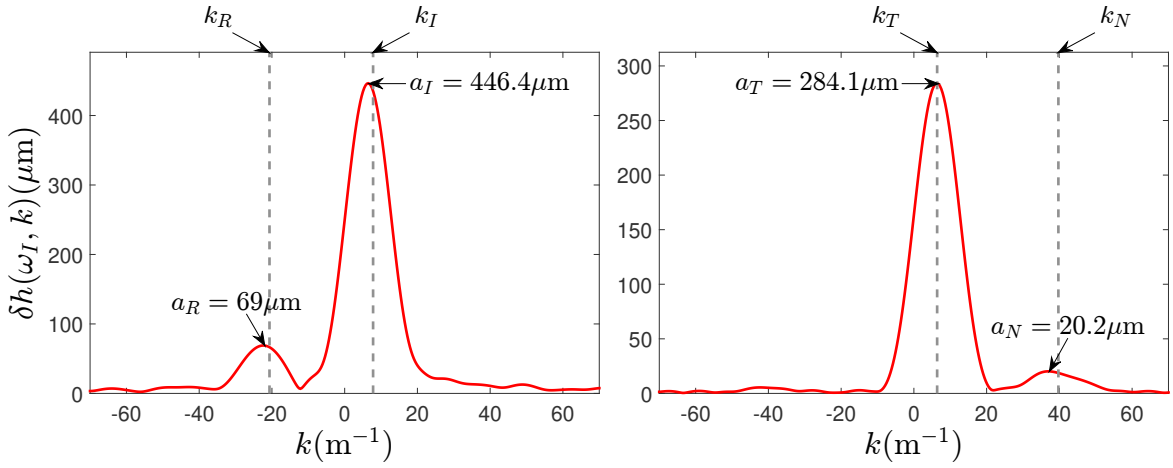


Figure 6.15 – Spectre des fluctuations de surface libre à la fréquence envoyée $\delta\hat{h}(\omega_I, k)$ (extrait de la figure 6.14 montrant les différents pics pour chaque mode (fréquence incidente $\omega_I=7,54$ Hz, amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=0,5$ mm). À gauche : région sous-critique, à droite : région super-critique. Les droites en tirés représentent les nombres d’onde théoriques de chacun des modes.

La seconde méthode revient à considérer les motifs d’interférence observés dans les deux zones asymptotiques. En effet, l’enveloppe de l’interférence $A(x)$ créée par deux ondes de même fréquence mais de nombres d’onde et amplitudes différents ($y_1(x, t) = a_1 \cos(\omega t + k_1 x + \phi_1)$, $y_2(x, t) = a_2 \cos(\omega t + k_2 x + \phi_2)$ avec $a_1 > a_2$) est décrite par l’équation 220 :

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos((k_1 - k_2)x + \phi_1 - \phi_2)} \\
 \left. \begin{aligned}
 \min(A(x)) &= a_1 - a_2 \\
 \max(A(x)) &= a_1 + a_2
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 a_1 &= (\max(A(x)) + \min(A(x)))/2 \\
 a_2 &= (\max(A(x)) - \min(A(x)))/2
 \end{aligned} \quad (220)
 \end{aligned}$$

Grâce à une détection d’extrema, on peut donc remonter à l’amplitude des deux ondes intervenant dans l’interférence de chacune des deux zones (figure 6.16).

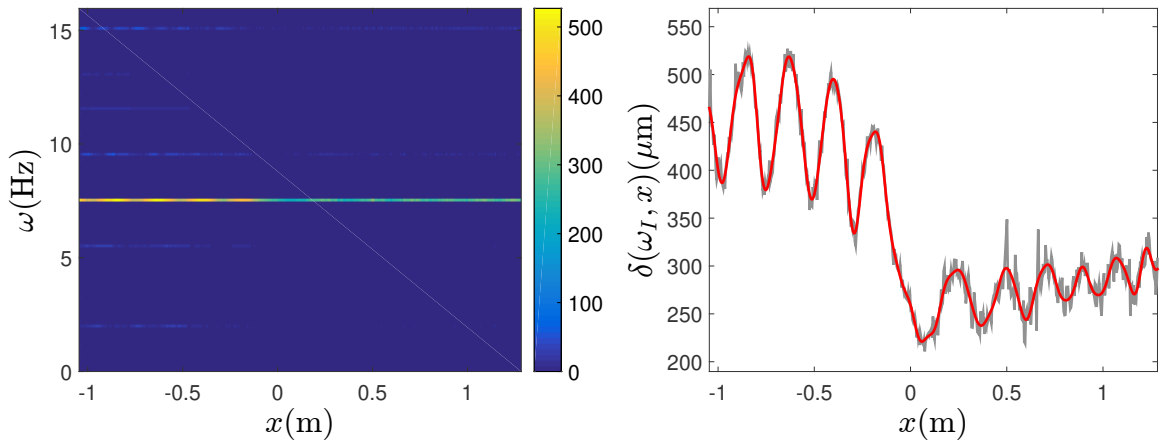


Figure 6.16 – À gauche : transformée de Fourier temporelle des fluctuations sur toute la fenêtre d’acquisition $\delta\hat{h}(\omega, x)$. À droite : enveloppe des interférences filtrée à la fréquence envoyée $\delta\hat{h}(\omega_I, x)$, en gris le signal brut et en rouge le signal filtré. Fréquence incidente $\omega_I=7,54$ Hz, amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=0,5$ mm.

Une comparaison des deux méthodes (table VI.2), nous permet de dire que les deux méthodes donnent approximativement le même résultat. Les légères différences viennent du fait que, pour le cas de la première méthode sur l’étude du spectre, une fenêtre de

Hamming a été utilisée qui donne plus d'importance aux amplitudes au centre de la fenêtre que sur les bords, ce qui n'est pas le cas pour la seconde méthode.

	Méthode 1 : Spectre	Méthode 2 : Interférence
$a_I(\mu\text{m})$	446,4	440,3
$a_R(\mu\text{m})$	69	70,5
$a_T(\mu\text{m})$	284,1	281,6
$a_N(\mu\text{m})$	20,2	20,7

Table VI.2 – Comparaison des deux méthodes d'extraction d'amplitude de mode (fréquence incidente $\omega_I=7,54$ Hz, amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=0,5$ mm).

La première méthode (même si elle est plus simple à mettre en place), n'est pas utilisable pour toutes les fréquences, en effet, si la fréquence est trop faible, les nombres d'onde des solutions se rapprochent tel qu'il est impossible de discerner deux pics distincts (comme l'illustre la figure 6.17 pour une fréquence incidente $\omega_I=1,88$ Hz). La seconde méthode (figure 6.18) reste quant à elle valable tant qu'il reste au moins deux extrema visibles dans chacune des régions, ce qui ne sera pas le cas de la fréquence la plus basse ($\omega=1,26$ Hz) pour laquelle aucune donnée ne pourra être extraite.

Pour la première méthode, la limite de son utilisation est basée sur la largeur des pics présents dans le spectre qui est due à la fenêtre Hamming. La largeur d'un pic dans l'espace de Fourier pour une fenêtre de Hamming est $L_k = 4\Delta_k = 4 \cdot 2\pi/L_x$, où L_x indique la largeur de la fenêtre dans l'espace réel (pour une fenêtre rectangulaire on a $L_k = 2\Delta_k = 2 \cdot 2\pi/L_x$). La distance entre deux pics doit donc être au minimum égale à L_k pour bien les différencier (exemple $k_T - k_I > 8\pi/L_x$). Dans la seconde méthode, il suffit d'observer deux extrema, soit une demi-longueur d'interférence, dans le fenètre de visualisation (exemple $\pi/(k_T - k_I) < L_x$ soit $k_T - k_I > \pi/L_x$). On comprend donc vite la limitation de la première méthode en comparaison de la seconde.

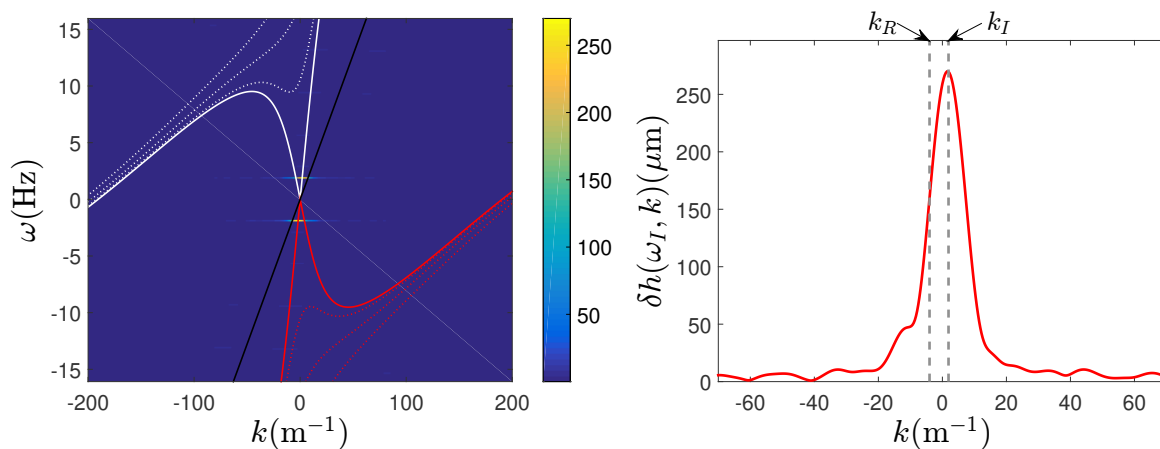


Figure 6.17 – À gauche : Transformée de Fourier 2D $\delta\hat{h}(\omega, k)$ des fluctuations de surface libre. À droite : Spectre des fluctuations de surface libre à la fréquence envoyée. Région sous-critique, fréquence incidente $\omega_I=1,88$ Hz, amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=1$ mm. Les droites en tirés représentent les nombres d'onde théoriques de chacun des modes.

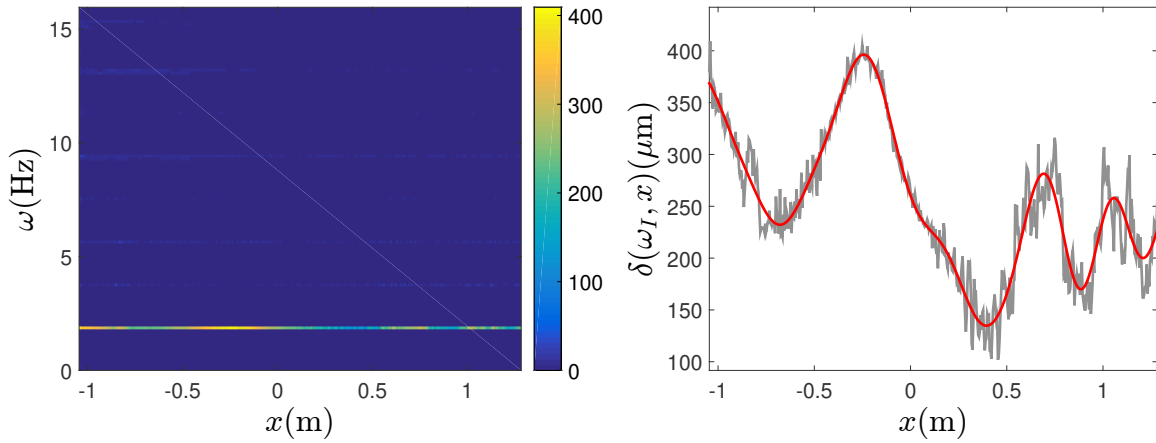


Figure 6.18 – À gauche : Transformée de Fourier temporelle des fluctuations sur toute la fenêtre d’acquisition $\delta\hat{h}(\omega, x)$. À droite : enveloppe des interférences filtrée à la fréquence envoyée $\delta\hat{h}(\omega_I, x)$, en gris le signal brut et en rouge le signal filtré. Fréquence incidente $\omega_I=1,88$ Hz, amplitude batteur de $a_{wm}=1$ mm).

VI.3.2 Linéarité

Considérant l’équation de diffusion (218) basée sur la conservation de la fréquence, il faut vérifier que l’on se trouve bien dans un régime linéaire. C’est pour cela que différentes amplitudes batteur ont été utilisées pour chaque fréquence. Dans l’exemple d’une fréquence incidente de $\omega_I=5,03$ Hz ($f_s=0,8$ Hz), nous observons très peu de différence dans les résultats obtenus sur les spectres $\delta h(\omega_I, k)$ (figure 6.19) ou sur les enveloppes $\delta h(\omega_I, x)$ (figure 6.20 gauche). On peut noter que l’amplitude mesurée pour la première fréquence harmonique (figure 6.20 droite) reste toujours assez faible (de l’ordre de 5% à 10%). Cette observation est aussi vraie pour les autres fréquences incidentes présentées (figure 6.16 et 6.18 gauche).

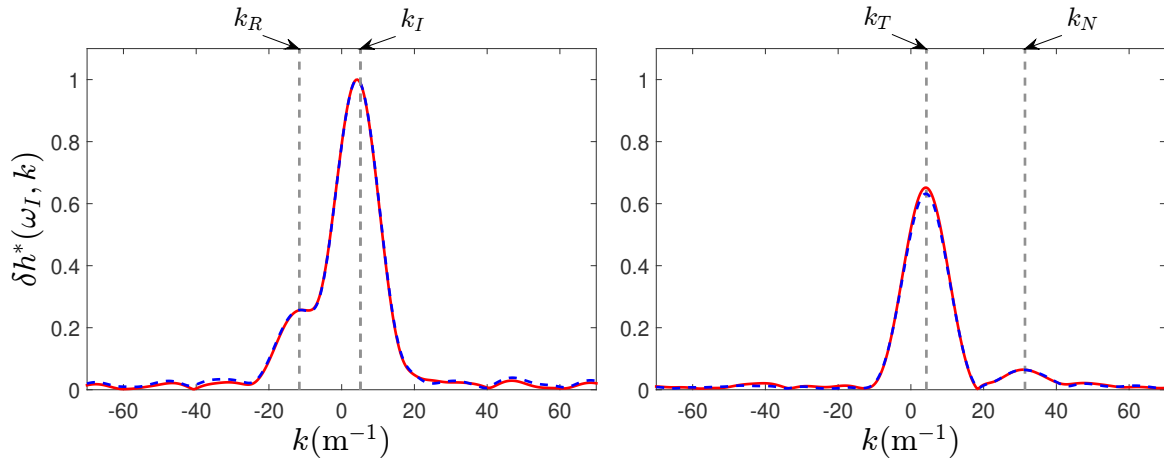


Figure 6.19 – Spectres adimensionnés par la valeur maximum du spectre de la région sous-critique $\delta\hat{h}^*(\omega_I, k)=\delta\hat{h}(\omega_I, k)/\max(\delta\hat{h}_{sub}(\omega_I, k))$ pour une fréquence incidente $\omega_I=5,03$ Hz, en rouge continu une amplitude mécanique du batteur de $a_{wm}=0,5$ mm et en bleu pointillé de $a_{wm}=0,25$ mm. À gauche : région sous-critique, à droite : région super-critique.

VI.3.3 Résultats

Ayant maintenant obtenu l’amplitude de chacun des modes (avec la seconde méthode) pour des fréquences $f=[0,3 : 1,2]$ Hz ($\omega=[1,88 : 7,54]$ Hz) et vérifier la linéarité des résul-

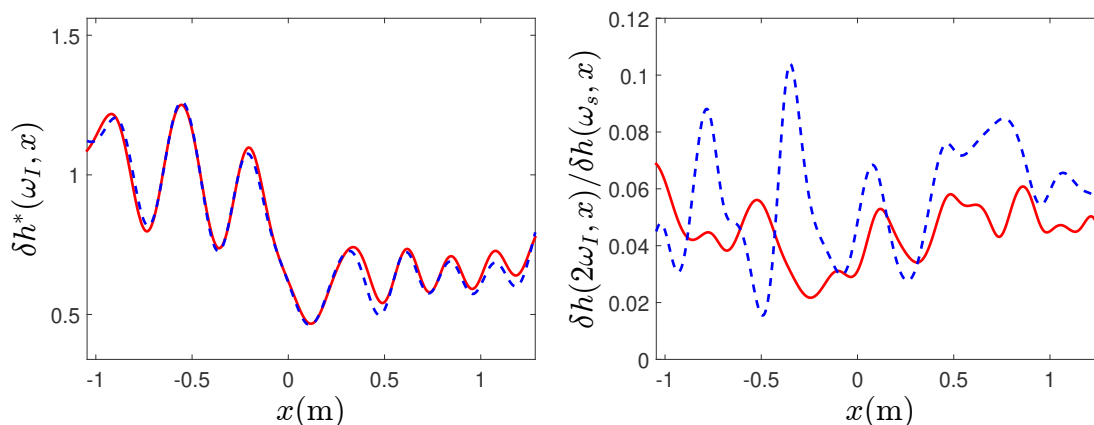


Figure 6.20 – À gauche : Enveloppe des interférences filtrée à la fréquence envoyée $\delta \hat{h}^*(\omega_I, x)$ adimensionnée par la valeur maximum du spectre de la région sous-critique $\delta \hat{h}^*(\omega_I, x) = \delta h(\omega_I, x) / \max(\delta \hat{h}_{sub}(\omega_I, k))$. À droite : Amplitude de la première harmonique adimensionnée par celle de la fondamentale $\delta \hat{h}(2\omega_I, x) / \delta \hat{h}(\omega_I, x)$. Fréquence incidente $\omega_I = 5,03$ Hz, en rouge continu une amplitude mécanique du batteur de $a_{wm} = 0,5$ mm et en bleu pointillé de $a_{wm} = 0,25$ mm.

tats, on peut maintenant calculer la norme des coefficients intervenant dans l'équation de diffusion (218) grâce aux relations d'action d'onde (219).

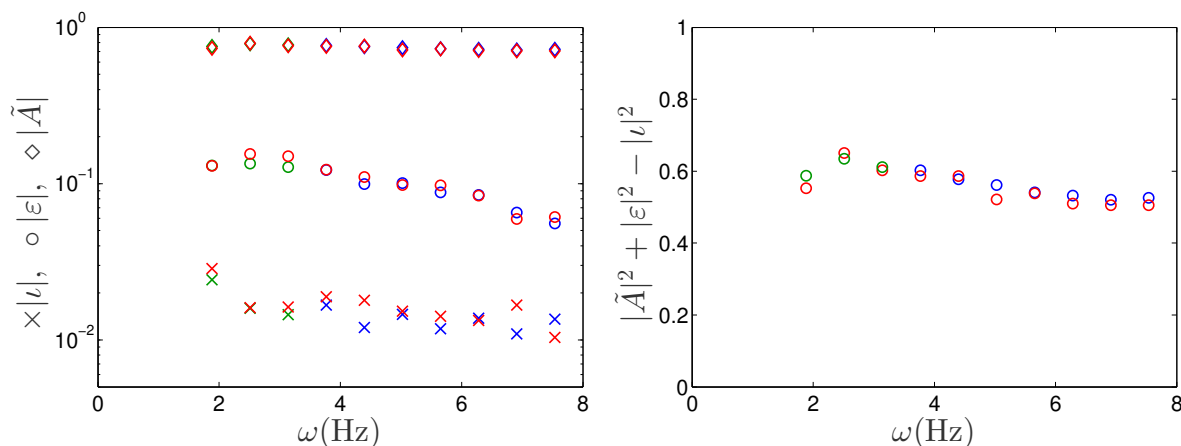


Figure 6.21 – À gauche : Normes des coefficients intervenant dans l'équation de diffusion 218. À droite : Résultats de la conservation de l'action d'onde ou Unitarité (équation 221). Pour les deux graphiques, les marqueurs rouges indiquent une amplitude batteur $a_{wm} = 0,25$ mm, bleus $a_{wm} = 0,5$ mm, vert $a_{wm} = 1$ mm.

La conservation de l'action d'onde nous dit que tout le flux d'action d'onde injecté dans le système, autrement dit par l'onde incidente I , doit, après conversion, se répartir entre les différents modes de sortie, onde transmise T , réfléchie R et négative N (celui de cette dernière étant négatif due à une fréquence relative négative). On peut donc écrire cette conservation du flux d'action sous forme d'équation normalisée par le flux d'action de l'onde incidente. L'équation de conservation du flux d'action d'onde (ou unitarité) s'écrit de la même façon que dans les chapitres précédents (221) :

$$1 = |\tilde{A}|^2 + |\varepsilon|^2 - |\iota|^2 \quad (221)$$

Dans notre cas, l'unitarité n'est pas respectée (figure 6.21 droite). Cela peut venir de trois choses, soit il existe un autre canal de sortie vers un autre mode (voire plusieurs), soit les

ondes subissent de la dissipation, soit c'est le flux d'action d'onde de l'incidente qui est mal estimé. La première suggestion semble peut probable car on n'observe pas d'autres modes sur les transformées de Fourier (exemple : figure 6.14). Pour ce qui est de la dissipation, les ondes étudiées étant de grande longueur d'onde ($|k| < 50$), l'atténuation visqueuse est négligeable sur des distances aussi courtes. La troisième hypothèse semble plus cohérente car la fenêtre de visualisation de la région sous-critique se trouve très proche du batteur, et nous remarquons que l'amplitude de la porteuse de l'interférence, qui correspond à l'onde incidente, semble diminuer dans la région sous-critique alors qu'elle devrait être constante car les paramètres de l'écoulement (vitesse, hauteur d'eau) sont constants. La mesure de l'amplitude de l'onde incidente est sûrement perturbée par des ondes évanescentes ou peut être le sillage du batteur car sa forme reste similaire à celle d'une coque de bateau (dans le plan xOz).

VI.4 Modification du batteur

À cause du problème sur la mesure de l'amplitude incidente, d'autres mesures ont été réalisées sur le même régime mais en inversant la forme du batteur, la partie plus épaisse se retrouvant en aval (initialement en amont, voir figure 6.10 gauche). De plus le batteur a été positionné plus en amont de l'écoulement. L'onde générée par le batteur devient alors d'amplitude constante même proche du batteur, contrairement à la précédente configuration. Cela pourrait être expliqué par le fait que les angles de chaque côté de l'obstacle sont très différents, on a d'un côté environ $\theta_1 = 48^\circ$ et de l'autre environ $\theta_2 = 10^\circ$ (figure 6.10 gauche). Si on considère un déplacement verticale de $\delta z = 1$ mm, alors la surface libre au niveau de la forme du batteur subit un déplacement horizontale de $\delta x = \delta z / \tan(\theta_i)$ soit $\delta x_1 \sim 0,9$ mm et $\delta x_2 \sim 5,7$ mm. Ce déplacement horizontal perturberait la mesure de l'onde incidente proche du batteur sur une distance six fois plus importante dans un cas que dans l'autre sachant, qu'en plus, le batteur a été décalé d'environ 400 mm en amont par rapport à la première configuration.

La session de mesures ayant été réalisée en fin de thèse, le matériel de mesure optique (avec ligne laser) n'a pas pu être installé. La mesure a donc été faite grâce aux sondes acoustiques. Pour rappel, les sondes acoustiques mesurent l'évolution temporelle de la surface libre ponctuellement et ne permettent donc pas d'obtenir un diagramme espace temps $h(x, t)$. Par contre, en calculant la transformée de Fourier du signal $h(x_i, t)$ obtenue en plaçant une sonde acoustique à une position x_i , on peut alors obtenir l'amplitude au niveau de la fréquence incidente du batteur $\delta \hat{h}(x_i, \omega_I)$. On peut ensuite déplacer la sonde acoustique afin d'obtenir le même résultat mais pour une autre position spatiale, et en répétant cette opération, on obtient alors l'enveloppe $\delta \hat{h}(x, \omega_I)$. Pour les résultats qui vont suivre la fréquence d'acquisition est fixée à 200 Hz (fréquence maximale des sondes acoustiques), la durée d'acquisition égale à 81,92 s pour obtenir un nombre d'échantillons en puissance de deux : 2^{14} . Les mesures sont faites entre $x = -1,15$ m et $x = 1,21$ m avec des pas de $\Delta x = 40$ mm (sauf aux endroits rendus inaccessibles par les montants du batteur). L'amplitude du batteur a été prise supérieure aux mesures précédentes afin d'améliorer le rapport signal sur bruit au niveau de la fréquence incidente et compenser le fait qu'il est faible en raison de la courte durée d'acquisition pour les mesures avec sondes acoustiques. Pour les fréquences incidentes, nous avons raffiné aux niveaux des basses fréquences.

Du côté de la région sous-critique, on observe bien l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie permettant ainsi d'obtenir leurs amplitudes respectives (figure 6.22).

Par contre, on remarque qu'il est impossible de visualiser l'interférence du côté de la zone super-critique à cause du rapport signal sur bruit dans cette région et aussi en raison du faible nombre de points en espace. Seule l'amplitude de l'onde transmise (porteuse de l'interférence) peut être extraite.

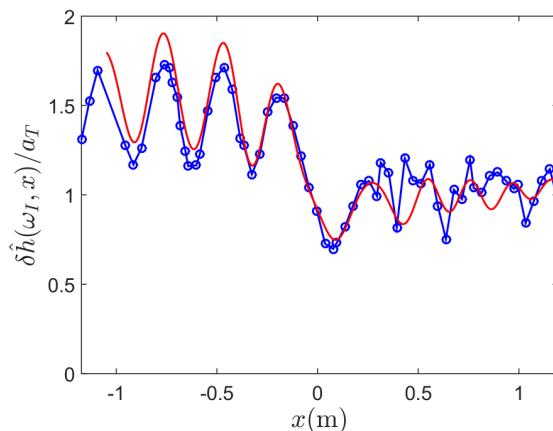


Figure 6.22 – Enveloppe $\delta \hat{h}(\omega_I, x)$ avec en rouge, la méthode laser et la première configuration du batteur et en bleu, avec les sondes acoustiques et la seconde configuration batteur, les résultats ont été divisés par l'amplitude de l'onde transmise afin de pouvoir les comparer. $\omega=6,28$ Hz, $a_{wm} = 0,5$ mm (rouge), $a_{wm} = 0,75$ mm (bleu).

Connaissant les amplitudes des modes incident, transmis et réfléchi, il est alors possible d'obtenir les coefficients $|\tilde{A}|$ et $|\varepsilon|$ grâce à l'équation 219. Pour le coefficient du mode négatif on se base sur le fait que le coefficient $|\iota|^2$ est un ordre de grandeur inférieur à $|\varepsilon|^2$ soit $|\iota|^2 < 10\%|\varepsilon|^2$, on peut alors voir sur la figure 6.23 (gauche) que le coefficient $|\varepsilon|^2 < 2,5\%$ soit $|\iota|^2 < 0,25\%$ autrement dit ce coefficient a un impact négligeable sur l'unitarité. On remarque alors pour cette seconde série de mesures, l'unitarité semble être respectée avec des valeurs entre 0,82 et 1,05 alors que la première série de mesures comportait des valeurs entre 0,5 et 0,65.

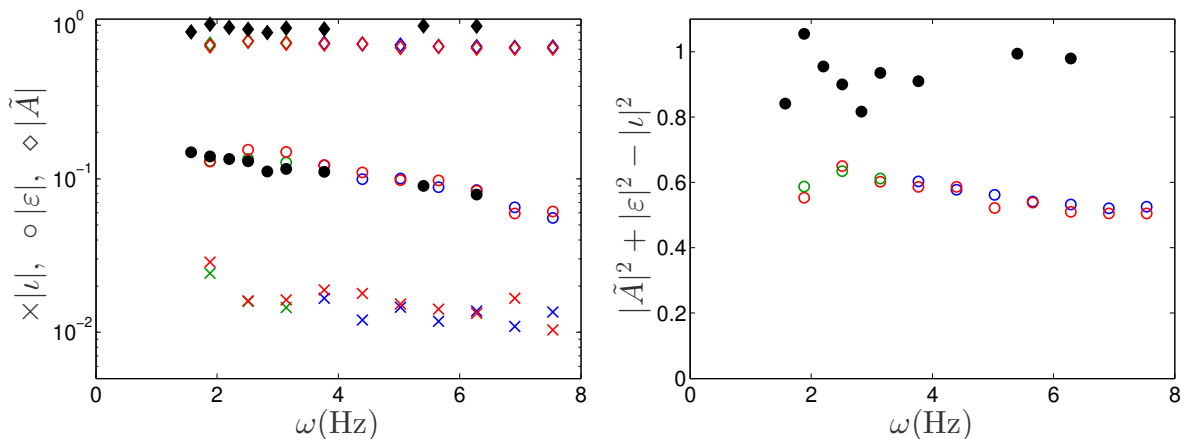


Figure 6.23 – À gauche : Normes des coefficients intervenant dans l'équation de diffusion 218. À droite : Résultats de la conservation de l'action d'onde ou Unitarité (équation 221). Pour les deux graphiques, les marqueurs de couleur indiquent les résultats des premières mesures optiques avec en rouge, une amplitude batteur $a_{wm} = 0,25$ mm, en bleu $a_{wm} = 0,5$ mm, en vert $a_{wm} = 1$ mm. Les marqueurs noirs indiquent les résultats de la seconde série de mesures avec sondes acoustiques.

Ces nouvelles mesures permettent donc de confirmer que le problème sur l'onde incidente peut être corrigé mais une autre session de mesures devra être réalisée avec la méthode

optique pour obtenir tous les coefficients de diffusion avec la meilleure précision possible. Il serait aussi intéressant de tester plusieurs régimes d'écoulement pour observer la variation de ces coefficients avec les paramètres du régime (débit, hauteur d'eau, nombres de Froude des deux régions).

VI.5 Comparaison numérique

Une comparaison théorique et numérique est actuellement réalisée par Scott Robertson et Alessandro Fabbri au Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay. La première conclusion est que le rapport entre le flux d'action d'onde (norme) de l'onde négative (que l'on a nommée $|\iota|^2$) et celui de l'onde réfléchie (que l'on a nommée $|\varepsilon|^2$) ne suit pas le spectre thermique de Hawking :

$$\frac{|\iota|^2}{|\varepsilon|^2} \neq \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \exp\left(-\frac{2\pi\omega}{\xi}\right) \quad (222)$$

avec $\xi = \left. \frac{\partial(v(x)-c(x))}{\partial x} \right|_{x_H}$.

La conversion de l'onde longue incidente I (co-courant) vers l'onde longue réfléchie R (contre-courant) est dite non-WKBJ (saut de branche dans la relation de dispersion, figure 6.11). Alors que dans le cas de l'étude d'un horizon blanc où le coefficient $|\alpha|^2$ était obtenu sur la conversion dite WKBJ d'une onde longue incidente (contre-courant) vers une onde courte bleue.

Le cas idéal serait que l'onde incidente I envoyée par le batteur soit une onde courte (dispersive) qui se convertirait au niveau de l'horizon en onde longue réfléchie R de façon WKBJ, et en onde négative N (non-WBKJ) qui se propagerait dans la région super-critique. Cette conversion est représentée figure 6.24.

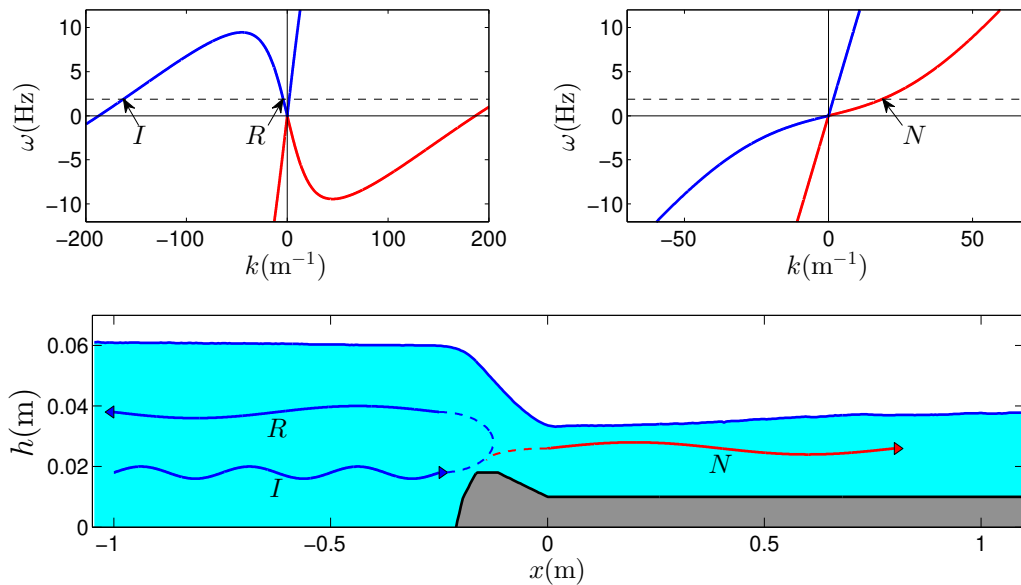


Figure 6.24 – Haut : relations de dispersion dans la région sous-critique (gauche) et super-critique (droite). La droite en tirés indique la fréquence incidente $\omega_I = 1,88$ Hz. Bas : Schéma de conversion idéal dans l'optique de mesurer l'effet Hawking analogue.

Dans ce cas en calculant les coefficients de diffusion $|\alpha|^2 = \frac{|\mathcal{A}_R|}{|\mathcal{A}_I|}$ et $|\beta|^2 = \frac{|\mathcal{A}_N|}{|\mathcal{A}_I|}$, on pourrait obtenir un rapport correspondant au spectre de Hawking (équation 222). Le problème

est que le batteur ne semble pas envoyer d'ondes courtes, tout du moins l'amplitude de tels modes n'est pas visible sur les transformées de Fourier. L'amplitude de l'onde longue incidente étant importante, l'amplitude des lobes secondaires (bien que faible car nous utilisons une fenêtre de Hamming) pourrait empêcher de visualiser des modes d'ondes courtes. Il faudrait donc trouver une méthode pour exciter les modes d'ondes courtes sans générer d'onde longue incidente.

VI.6 Corrélation dans le cas sans stimulation

En plus des mesures avec stimulation par le batteur, nous pouvons étudier les mesures effectuées sur le bruit seul en calculant une fonction d'inter-corrélation entre la région sous-critique (dont les nombres d'onde sont nommés k_{sub}) et la région super-critique (k_{sup}). Cette fonction est identique à celle utilisée dans le chapitre V :

$$G_2(\omega; k_{sub}, k_{sup}) = \left| \left\langle \delta \hat{h}(\omega, k_{sub}) \delta \hat{h}(\omega, k_{sup})^* \right\rangle \right| \quad (223)$$

Nous avons découpé la durée d'acquisition en 64 intervalles de temps de 12,5 s.

La figure 6.25 indique le résultat de cette fonction de corrélation ainsi que la carte d'inter-corrélation théorique (voir chapitre « Méthodes et outils théoriques »). On a choisi une fréquence assez élevée ($\omega = 6$ Hz) pour que les différentes solutions soient clairement séparées dans l'espace de Fourier. On appelle B la solution d'onde courte se propageant à co-courant dans la région sous-critique, le nom des autres solutions sont identiques aux cas avec stimulation. On remarque alors un pic de corrélation entre la solution incidente d'onde longue I et la solution transmise T ainsi que pour les couples RT et BT mais pour la solution négative, aucun pic ne correspond à un couple avec une solution de la région sous-critique. Les pics hors de la carte d'inter-corrélation proviennent principalement du problème de repliement de spectre. On normalise alors cette fonction de corrélation pour obtenir un taux de corrélation :

$$g_2(\omega; k_a, k_b) = \frac{G_2(\omega; k_a, k_b)}{\sqrt{G_2(\omega; k_a, k_a) G_2(\omega; k_b, k_b)}}, \quad (224)$$

a représentant une solution de la région sous-critique et b de la région super-critique. On trouve un taux de corrélation pour le couple IT de 50%, BT de 25%, RT de 15%. Pour les couples de solutions prenant en compte la solution négative N , les taux de corrélation restent inférieurs à 3%. On revient alors à la conclusion initiale que la solution négative n'est pas peuplée par un processus de conversion mais plutôt par la turbulence de volume créée par l'obstacle ou bien par les parois latérales.

VI.7 Conclusion

Le développement et l'étude d'un trou noir hydraulique analogue nous a permis d'atteindre un nouvel objectif qui était d'obtenir un écoulement trans-critique avec deux régions distinctes, sous-critique et super-critique. De plus, ce régime ne fait pas apparaître d'ondulation stationnaire, la diffusion d'onde observée est alors seulement provoquée par les gradients de vitesse sur l'obstacle et il n'y a pas de diffusion sur l'ondulation comme dans l'étude de trou blanc hydraulique. Quand on envoie une onde en co-courant à partir de la région sous-critique, en plus de pénétrer dans la région super-critique, on voit apparaître un couple d'ondes dont l'une, d'action d'onde négative, se propage en co-courant

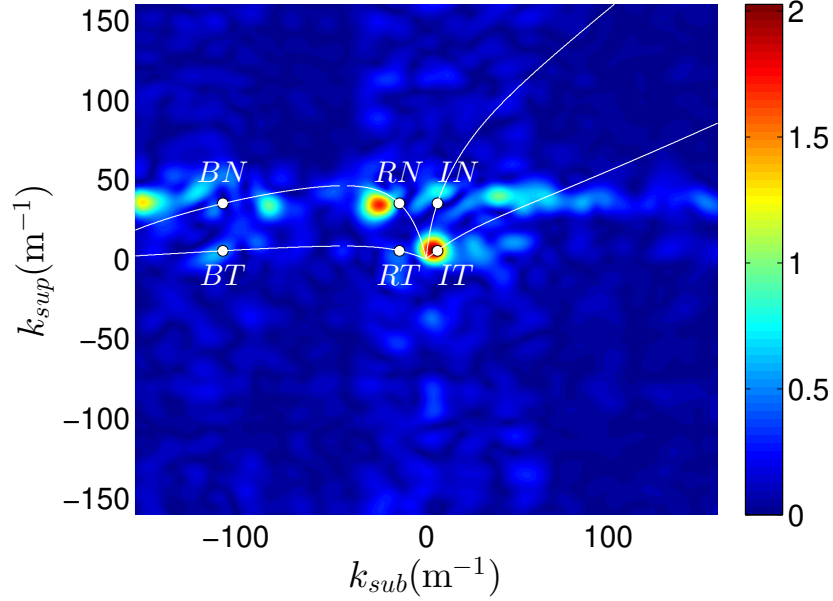


Figure 6.25 – Fonction de corrélation $G_2(\omega; k_{sub}, k_{sup})$ entre la région sous-critique et la région super-critique. Les amplitudes sont en μm^2 . Les courbes blanches indiquent la carte de d’inter-corrélation théorique et les ronds blancs correspondent à la position théorique de chaque couple de solutions ab (a : une solution de la région sous-critique et b : une solution de la région super-critique).

dans la région super-critique et l’autre, d’action d’onde positive, s’éloigne de l’horizon en se propageant à contre-courant. Ce couple montre donc une analogie encore plus proche avec la paire particule/antiparticule, la première réussissant à s’échapper de l’attraction du trou noir alors que la seconde chute au sein de l’horizon. Par contre, les normes du couple d’ondes positive et négative ne suivent pas le spectre de Hawking car le processus de conversion est différent. Malgré cela, le fait que le régime soit trans-critique et l’absence d’ondulation stationnaire permettent d’ouvrir de belles perspectives quant à la mesure de l’effet Hawking analogue.

Conclusion

Cette thèse avait pour objectif l'étude de phénomènes astrophysiques grâce à l'analogie existant entre la propagation de la lumière en espace-temps courbé par la matière et la propagation d'ondes de surface sur un écoulement inhomogène. L'un de ces phénomènes, qui intéresse de nombreux scientifiques depuis sa découverte théorique en 1974, est la radiation de Hawking, décrivant l'évaporation des trous noirs. Pour étudier cet effet Hawking analogue, deux géométries sont alors possibles.

La première est l'étude d'un horizon blanc formé au niveau d'une décélération du courant. Mais celle-ci engendre un ressaut hydraulique accompagné d'une ondulation stationnaire due à la dispersion, sans équivalent en Relativité Générale. Cette ondulation est alors à l'origine de différentes difficultés. En essayant d'augmenter le nombre de Froude maximal de l'écoulement, l'ondulation se met à déferler, rendant alors impossible d'obtenir un régime trans-critique non-déferlant. Les ondes incidentes de basses fréquences ne sont alors pas bloquées ce qui ne permet pas d'observer l'effet Hawking à basses fréquences. En se plaçant sous la limite de déferlement, l'ondulation peut tout de même être de forte cambrure, la superposition d'une onde incidente et d'ondes converties peut rendre ces dernières non-linéaires même quand l'amplitude de l'onde incidente est de l'ordre du dixième de millimètre et celle des ondes converties de l'ordre du millimètre. Ces non-linéarités se traduisent par la génération d'harmoniques libres. On remarque alors que, dans le cas des ondes converties dites bleuies, l'amplitude et donc l'énergie de la solution fondamentale peut totalement être transmise à la solution harmonique. Comprendre le mécanisme de transfert vers ces solutions d'harmoniques libres comprendre le rôle des paramètres contrôlant ce transfert, les variations de l'écoulement (vitesse de courant et hauteur d'eau) ou seulement la dérivée maximale de la surface libre ($\max_t(\partial h(x, t)/\partial x)$ liée la cambrure des ondes ka) seraient des questions très intéressantes à éluder.

Lorsque que l'on modifie le régime d'écoulement (ainsi que l'obstacle), on peut alors éviter ces problèmes tout en observant un nombre Froude maximal élevé (bien que toujours inférieur à 1). Les modes convertis se propagent alors sans génération d'harmoniques. Mais en se propageant, on observe alors, en plus de la diffusion sur l'écoulement de base correspondant à l'effet Hawking analogue, une diffusion sur l'ondulation convertissant de l'action d'onde de l'onde bleuie vers l'onde négative. Bien que cet effet pourrait être vu comme une amplification supplémentaire de l'effet Hawking, il n'est alors pas possible de calculer les coefficients de diffusion impliqués dans la diffusion sur l'écoulement sans ondulation. Il faudrait donc trouver un couple obstacle/paramètres d'écoulement qui pourrait rendre l'ondulation stationnaire négligeable.

Il a aussi été montré que les fluctuations de surface libre en aval de l'obstacle, sans stimulation par le batteur et correspondant aux modes convertis d'énergies opposées, étaient fortement corrélées montrant ainsi qu'elles étaient issues d'un même processus de conversion. Cette étude, sans stimulation, se rapproche alors de l'analogie avec l'effet Hawking spontané dû aux fluctuations quantiques du vide, bien qu'ici les fluctuations restent classiques. Ces fluctuations sont provoquées par l'écoulement turbulent sous-jacent, il faudrait étudier les spectres de Fourier en fréquence et en nombre d'onde de l'écoulement au dessus de l'obstacle ainsi que ceux correspondant aux fluctuations de surface libre pour comprendre le mécanisme de transfert entre les deux.

L'autre géométrie permettant l'étude de l'effet Hawking analogue est la configuration d'un horizon noir pouvant être créé au niveau d'une accélération du fluide. Cette géomé-

trie a alors le grand avantage de permettre d'établissement d'un écoulement trans-critique non-déferlant grâce à l'absence de ressaut. Cette aspect trans-critique est indispensable si on souhaite étudier l'effet Hawking à basse fréquence, là où l'amplification est la plus importante [Robertson *et al.*, 2016]. En envoyant une onde longue en co-courant (\mathcal{V} -mode), on observe alors la conversion vers un mode réfléchi d'énergie positive se propageant à contre-courant et s'éloignant de l'horizon noir analogue (\mathcal{U}_R -mode) et vers un mode d'énergie négative se propageant dans la région super-critique à l'intérieur du trou noir (\mathcal{U}_L -mode). Ce couple d'ondes montre alors une analogie encore plus proche avec la séparation de la paire particule/anti-particule au niveau d'un horizon noir astrophysique. Mais les coefficients de diffusion intervenant dans la conversion observée sur le trou noir hydraulique ne suivent pas la loi exponentielle de Hawking car elle fait intervenir un couplage entre \mathcal{V} et \mathcal{U} modes qui est impossible dans le cas astrophysique (dans le cas d'une unique dimension spatiale) car la vitesse des ondes c est constante. Il faudrait alors être capable d'envoyer un onde courte dispersive d'énergie positive (soit un \mathcal{U} -mode dispersif), dans ce cas, on observerait alors la même conversion que précédemment mais cette fois-ci les coefficients de diffusion devraient suivre la loi exponentielle de Hawking.

Pour reprendre le résumé de la publication de W.G. Unruh [Unruh, 2014], la mesure de l'effet Hawking et la démonstration expérimentale de son spectre thermique reposent sur trois « piliers ». Le premier est que le processus de Hawking en Physique des trous noirs astrophysiques peut être modélisé dans d'autres systèmes physiques. Le deuxième est que, l'horizon d'un trou blanc étant le renversé temporel de celui d'un trou noir, l'étude de l'une ou l'autre configuration devrait permettre la mesure de l'effet Hawking. Le troisième est que l'émission quantique, qui est au coeur de l'effet de Hawking astrophysique, est complètement déterminée par des paramètres de Physique Classique via une émission stimulée. W.G. Unruh conclut alors par « *The experiment conducted in 2010 fulfils all of these requirements, and is thus a true measurement of Hawking radiation.* » (L'expérience menée en 2010 répond à toutes ces exigences et constitue donc une véritable mesure du rayonnement Hawking, en parlant des résultats de [Weinfurtner *et al.*, 2011]). Bien qu'étant d'accord avec les trois premiers points, cette conclusion semble erronée car d'autres « piliers » devraient être pris en compte. Un quatrième est que la fréquence doit être conservée avant, pendant et après la conversion, autrement dit, on ne doit pas observer d'effets non-linéaires. Un cinquième doit imposer un régime d'écoulement trans-critique pour pouvoir étudier l'effet Hawking à basses fréquences où l'amplification est la plus importante. Un sixième est que l'ondulation (si il y en a une) doit être négligeable afin que la diffusion sur l'écoulement de base (correspondant à l'effet Hawking) ne soit pas modifiée par une diffusion sur l'ondulation. Enfin, un septième est que la contribution des \mathcal{V} -modes dans le processus de conversion doit être négligeable. Tous ces « piliers » sont nécessaires pour la mesure de l'effet Hawking et la démonstration de son spectre thermique. Dans ce manuscrit, nous avons pu montrer que la reproduction des expériences de Vancouver [Weinfurtner *et al.*, 2011], ne valide pas les points de linéarité (critique majeure qui avait été formulée à propos des résultats des expériences reportés dans [Rousseaux *et al.*, 2008]), de régime trans-critique ainsi que d'ondulation négligeable. L'amélioration de l'étude sur un trou blanc hydraulique a permis de supprimer les non-linéarités et d'augmenter le nombre de Froude, mais le régime reste sous-critique et l'ondulation stationnaire joue un rôle trop important. La dernière expérience sur le trou noir hydraulique débloque le problème trans-critique ainsi que celui de l'ondulation stationnaire mais met en jeu un couplage entre \mathcal{U} et \mathcal{V} modes ne validant alors pas la septième condition, bien qu'il offre une manière originale en matière condensée de stimuler les modes analogues à la création de paires. En résumé, cette thèse ne peut pas encore conclure sur l'affirmation de la mesure de l'effet Hawking dans le domaine des ondes de surface et de son spectre thermique,

mais les avancées faites offrent de bonnes perspectives pour trouver une configuration permettant de valider toutes les conditions.

L'étude numérique de la combinaison entre un horizon blanc et un horizon noir a permis de mettre en évidence différents scénarii tel que le trou de ver hydraulique bi-directionnel, ou encore l'effet Laser qu'il soit à une ou deux échelles dispersives. Les résultats expérimentaux ont permis d'explorer l'un de ces scénarii prouvant le caractère bi-directionnel d'un trou de ver hydraulique, bien que la dissipation visqueuse est importante dans ces expériences car mettant en jeu des ondes capillaires. Une étude numérique est actuellement en cours afin de trouver les paramètres optimaux pour observer l'effet Laser, bien que, d'après les conclusions de [Robertson et Rousseaux, 2017], cela sera impossible dans le cas capillaire (avec de l'eau). Il serait intéressant d'étudier l'effet Laser à une échelle dispersive ne mettant en jeu que des ondes gravitaires et rendant ainsi la dissipation négligeable. La complication expérimentale serait de pouvoir créer un batteur qui soit capable de générer une onde à une position spatiale où d'autres ondes doivent se propager. Cela pourrait être réalisé à l'aide d'un batteur qui génèrerait des ondes en soufflant un flux d'air sur la surface.

Le développement d'un code réalisé par Nicolas James (Laboratoire de Mathématiques et Applications de Poitiers) est actuellement en cours dans le but de simuler l'écoulement de surface libre au dessus d'un obstacle en résolvant les équations de Navier-Stokes en 2D. Les comparaisons numériques, présentées durant ce manuscrit, ne simulent que la propagation d'onde en posant des hypothèses sur l'écoulement sous-jacent. La simulation de l'écoulement pourra alors apporter une meilleure comparaison entre expérimental et numérique. De plus, les simulations permettront de connaître le profil de vitesse sous la surface libre (présence de vorticité) et ainsi, tester des régimes d'écoulement et des obstacles pouvant être plus adaptés aux mesures souhaitant être effectuées.

Pour résumer, la Physique des ondes de surface est un domaine très riche pour l'étude de la Gravitation Analogue et les expériences sont assez simples à mettre en oeuvre (si on les compare aux expériences effectuées dans les condensats de Bose-Einstein). J'espère donc que les conclusions de cette thèse pourront permettre une mesure de l'effet Hawking analogue dans peu de temps, avis aux intéressés dont je fais partie.

Pour reprendre la conclusion du séminaire de Theodore Jacobson lors de la conférence pour le 75^{ème} anniversaire de Stephen Hawking en juillet 2017 :

« *The era of experimental Hawking radiation has dawned* »

(l'ère de la radiation de Hawking expérimentale a débuté, <https://upload.sms.cam.ac.uk/media/2514498>).

Références bibliographiques

- [Abbott et al., 2016] ABBOTT, B. et AL. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett*, 116(061102).
- [Badulin et al., 1983] BADULIN, S. POKAZEYEV, K. et ROZENBERG, A. (1983). Laboratory study of the transformation of regular gravity-capillary waves in inhomogeneous currents. *Izvestiya, Astropheric and Oceanic Physics*, 19(10).
- [Balbinot et al., 2008] BALBINOT, R. FABBRI, A. FAGNOCCHI, S. RECATI, A. et CARUSOTTO, I. (2008). Nonlocal density correlations as a signature of Hawking radiation from acoustic black holes. *Physical Review A*, 78(2):021603.
- [Balbinot et al., 2013] BALBINOT, R. FABBRI, A. et MAYORAL, C. (2013). Hawking effect in BECs acoustic white holes. *The European Physical Journal Plus*, 128(2):16.
- [Barceló et al., 2001] BARCELÓ, C. LIBERATI, S. et VISSER, M. (2001). Analogue gravity from Bose-Einstein condensates. *Classical and Quantum Gravity*, 18(6):1137.
- [Barceló et al., 2011] BARCELÓ, C. LIBERATI, S. et VISSER, M. (2011). Analogue Gravity. *Living Reviews in Relativity*, 14(1):3.
- [Belgiorno et al., 2010] BELGIORNO, F. CACCIATORI, S. L. CLERICI, M. GORINI, V. ORTENZI, G. RIZZI, L. RUBINO, E. SALA, V. G. et FACCIO, D. (2010). Hawking Radiation from Ultrashort Laser Pulse Filaments. *Physical Review Letters*, 105(20):203901.
- [Belibassakis et al., 2017] BELIBASSAKIS, K. A. SIMON, B. TOUBOUL, J. et REY, V. (2017). A coupled-mode model for water wave scattering by vertically sheared currents in variable bathymetry regions. *Wave Motion*, 74:73–92.
- [Benjamin et Feir, 1967] BENJAMIN, T. B. et FEIR, J. E. (1967). The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(3):417–430.
- [Benjamin et Hasselmann, 1967] BENJAMIN, T. B. et HASSELMANN, K. (1967). A discussion on nonlinear theory of wave propagation in dispersive systems - Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 299(1456):59–76.
- [Boiron et al., 2015] BOIRON, D. FABBRI, A. LARRÉ, P.-. PAVLOFF, N. WESTBROOK, C. et ZIŃ, P. (2015). Quantum Signature of Analog Hawking Radiation in Momentum Space. *Physical Review Letters*, 115(2):025301.
- [BouhadeF, 1988] BOUHADÉF, M. (1988). *Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal : application à l'écoulement au-dessus d'un obstacle immergé*. Thèse de doctorat, Poitiers.
- [Bradley, 1727] BRADLEY, J. (1727). A Letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F.R.S. to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. Giving an Account of a New Discovered Motion of the Fixed Stars. *Philosophical Transactions*, 35(399-406):637–661.
- [Bretherton et Garrett, 1968] BRETHERTON, F. P. et GARRETT, C. J. R. (1968). Wave-trains in Inhomogeneous Moving Media. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 302(1471):529–554.
- [Brillouin, 1926] BRILLOUIN, L. (1926). Remarques sur la mécanique ondulatoire. *Journal de Physique et le Radium*, 7(12):353–368.
- [Brossard et al., 2009] BROSSARD, J. PERRET, G. BLONCE, L. et DIEDHIOU, A. (2009). Higher harmonics induced by a submerged horizontal plate and a submerged rectangular step in a wave flume. *Coastal Engineering*, 56(1):11–22.

- [Brout *et al.*, 1995a] BROUT, R. MASSAR, S. PARENTANI, R. et SPINDEL, P. (1995a). Hawking radiation without trans-Planckian frequencies. *Physical Review D*, 52(8):4559–4568.
- [Brout *et al.*, 1995b] BROUT, R. MASSAR, S. PARENTANI, R. et SPINDEL, P. (1995b). A primer for black hole quantum physics. *Physics Reports*, 260(6):329–446.
- [Busch, 2014] BUSCH, X. (2014). *Dispersive and dissipative effects in quantum field theory in curved space-time to modelize condensed matter systems*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI.
- [Bush, 2015] BUSH, J. W. (2015). Pilot-Wave Hydrodynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 47:269–292.
- [Cairns, 1979] CAIRNS, R. (1979). The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 92:1–14.
- [Carusotto *et al.*, 2008] CARUSOTTO, I. FAGNOCCHI, S. RECATI, A. BALBINOT, R. et FABBRI, A. (2008). Numerical observation of Hawking radiation from acoustic black holes in atomic Bose–Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 10(10).
- [Carusotto et Rousseaux, 2013] CARUSOTTO, I. et ROUSSEAU, G. (2013). The Cerenkov Effect Revisited : From Swimming Ducks to Zero Modes in Gravitational Analogues. *In Analogue Gravity Phenomenology - Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Springer.
- [Chaline *et al.*, 2013] CHALINE, J. JANNES, G. MAÏSSA, P. et ROUSSEAU, G. (2013). Some Aspects of Dispersive Horizons : Lessons from Surface Waves. *In Analogue Gravity Phenomenology - Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Springer.
- [Charru, 2007] CHARRU, F. (2007). *Instabilités Hydrodynamiques*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, cnrs éditions édition.
- [Cobelli *et al.*, 2009a] COBELLI, P. PETITJEANS, P. MAUREL, A. PAGNEUX, V. et MORDANT, N. (2009a). Space-Time Resolved Wave Turbulence in a Vibrating Plate. *Physical Review Letters*, 103(20):204301.
- [Cobelli *et al.*, 2009b] COBELLI, P. J. MAUREL, A. PAGNEUX, V. et PETITJEANS, P. (2009b). Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry. *Experiments in Fluids*, 46(6):1037.
- [Coppeta et Rogers, 1998] COPPETA, J. et ROGERS, C. (1998). Dual emission laser induced fluorescence for direct planar scalar behavior measurements. *Experiments in Fluids*, 25(1):1–15.
- [Corley et Jacobson, 1999] CORLEY, S. et JACOBSON, T. (1999). Black hole lasers. *Physical Review D*, 59(12):124011.
- [Couder *et al.*, 2005] COUDER, Y. PROTIÈRE, S. FORT, E. et BOUDAUD, A. (2005). Dynamical phenomena : Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437(7056):208–208.
- [Coutant, 2012] COUTANT, A. (2012). *On the phenomenology of quantum gravity : stability properties of Hawking radiation in the presence of ultraviolet violation of local Lorentz invariance*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI.
- [Coutant et Parentani, 2014] COUTANT, A. et PARENTANI, R. (2014). Undulations from amplified low frequency surface waves. *Physics of Fluids*, 26(4):044106.
- [Coutant et Weinfurtner, 2016] COUTANT, A. et WEINFURTNER, S. (2016). The imprint of the analogue Hawking effect in subcritical flows. *Physical Review D*, 94(6):064026.
- [Crapper, 1984] CRAPPER, G. D. (1984). *Introduction to water waves*. E. Horwood.

- [Cropp, 2016] CROPP, B. (2016). *Strange Horizons : Understanding Causal Barriers Beyond General Relativity*. Thèse de doctorat, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste, Italie.
- [Duhem, 1906] DUHEM, P. .-. (1906). *La théorie physique : son objet et sa structure / par P. Duhem,...* Chevalier et Rivière, Paris.
- [Eddi *et al.*, 2011] EDDI, A. SULTAN, E. MOUKHTAR, J. FORT, E. ROSSI, M. et COUDER, Y. (2011). Information stored in Faraday waves : the origin of a path memory. *Journal of Fluid Mechanics*, 674:433–463.
- [Einstein et Rosen, 1935] EINSTEIN, A. et ROSEN, N. (1935). The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Physical Review*, 48(1):73–77.
- [Eisenstaedt, 1982] EISENSTAEDT, J. (1982). Histoire et Singularités de la Solution de Schwarzschild (1915–1923). *Archive for History of Exact Sciences*, 27(2):157–198.
- [Eisenstaedt, 1987] EISENSTAEDT, J. (1987). Trajectoires et Impasses de la Solution de Schwarzschild. *Archive for History of Exact Sciences*, 37(4):275–357.
- [Elazar *et al.*, 2012] ELAZAR, M. FLEUROV, V. et BAR-AD, S. (2012). All-optical event horizon in an optical analog of a Laval nozzle. *Physical Review A*, 86(6):063821.
- [Euvé, 2014] EUVÉ, L.-P. (2014). Interaction Ondes-Courant-Obstacle : Application à la Physique des Trous Noirs. Rapport de stage, Institut Pprime, Poitiers.
- [Euvé *et al.*, 2016] EUVÉ, L.-P. MICHEL, F. PARENTANI, R. PHILBIN, T. et ROUSSEAU, G. (2016). Observation of Noise Correlated by the Hawking Effect in a Water Tank. *Physical Review Letters*, 117(12):121301.
- [Euvé *et al.*, 2015] EUVÉ, L.-P. MICHEL, F. PARENTANI, R. et ROUSSEAU, G. (2015). Wave blocking and partial transmission in subcritical flows over an obstacle. *Physical Review D*, 91(2):024020.
- [Euvé et Rousseaux, 2016] EUVÉ, L.-P. et ROUSSEAU, G. (2016). Génération non-linéaire d’harmoniques après une conversion linéaire en interaction houle-courant - XIèmes Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil. Toulon. Paralia.
- [Fabbri et Navarro-Salas, 2005] FABBRI, A. et NAVARRO-SALAS, J. (2005). *Modeling Black Hole Evaporation*. World Scientific.
- [Fabrikant et Stepanyants, 1998] FABRIKANT, A. L. et STEPANYANTS, Y. A. (1998). Propagation of waves in shear flows.
- [Faccio *et al.*, 2012] FACCIO, D. ARANE, T. LAMPERTI, M. et LEONHARDT, U. (2012). Optical black hole lasers. *Classical and Quantum Gravity*, 29(22):224009.
- [Faccio *et al.*, 2013] FACCIO, D. BELGIORNO, F. CACCIATORI, S. GORINI, V. LIBERATI, S. et MOSCHELLA, U. (2013). *Analogue Gravity Phenomenology - Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Springer.
- [Faltot *et al.*, 2014] FALTOT, P.-J. BELLANGER, R. MOUGENOT, J.-M. et ROUSSEAU, G. (2014). Interaction houle-courant : mesure de la relation de dispersion - XIIIème Journées Nationales Génie Côtier - Génie Civil. Dunkerque. Paralia.
- [Farrell et Watterson, 1985] FARRELL, B. et WATTERSON, I. (1985). Rossby waves in opposing currents. *Journal of the atmospheric sciences*, 42(16).
- [Finazzi, 2012] FINAZZI, S. (2012). *Analogue gravitational phenomena in Bose-Einstein condensates*. Thèse de doctorat, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Sissa (Italy).
- [Forbes et Schwartz, 1982] FORBES, L. K. et SCHWARTZ, L. W. (1982). Free-surface flow over a semicircular obstruction. *Journal of Fluid Mechanics*, 114:299–314.

- [Fourdrinoy, 2017] FOURDRINOY, J. (2017). Qualification d'un batteur à houle par mesure de déformée de surface libre. Rapport de stage, Institut Pprime, Poitiers.
- [Fourdrinoy *et al.*, 2018] FOURDRINOY, J. EUVÉ, L.-P. MOUGENOT, J.-M. et ROUSSEAUX, G. (2018). Générateur de houle à contre-courant via un déversoir oscillant - XVème Journées Nationales Génie Côtier - Génie Civil (article en attente de soumission). La Rochelle.
- [Garay, 2002] GARAY, L. J. (2002). Black Holes in Bose–Einstein Condensates. *International Journal of Theoretical Physics*, 41(11):2073–2090.
- [Garay *et al.*, 2000] GARAY, L. J. ANGLIN, J. R. CIRAC, J. I. et ZOLLER, P. (2000). Sonic Analog of Gravitational Black Holes in Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 85(22):4643–4647.
- [Giovanazzi, 2005] GIOVANAZZI, S. (2005). Hawking Radiation in Sonic Black Holes. *Physical Review Letters*, 94(6):061302.
- [Guinot, 2010] GUINOT, F. (2010). *Interactions houle-courant en bathymétrie variable : approches numériques et expérimentales*. Thèse de doctorat, Université de Brest.
- [Gullstrand, 1922] GULLSTRAND, A. (1922). Allgemeine lösung des statischen einkörperproblems in der Einsteinschen gravitations theorie. *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, 16(8):1–15.
- [Hawking, 1974] HAWKING, S. W. (1974). Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31.
- [Hooft, 1985] HOOFT, G. (1985). On the quantum structure of a black hole. *Nuclear Physics B*, 256:727–745.
- [Jacobson, 1991] JACOBSON, T. (1991). Black-hole evaporation and ultrashort distances. *Physical Review D*, 44(6):1731–1739.
- [Jacobson et Volovik, 1998] JACOBSON, T. A. et VOLOVIK, G. E. (1998). Event horizons and ergoregions in He3. *Physical Review D*, 58(6):064021.
- [Jacquet, 2017] JACQUET, M. J. (2017). *Negative frequency at the horizon : scattering of light at a refractive index front*. Thèse de doctorat, University of St Andrews, St Andrews (Scotland).
- [Jannes, 2009] JANNES, G. (2009). *Emergent gravity : the BEC paradigm*. Thèse de doctorat, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.
- [Jannes *et al.*, 2011a] JANNES, G. MAÏSSA, P. PHILBIN, T. G. et ROUSSEAUX, G. (2011a). Hawking radiation and the boomerang behavior of massive modes near a horizon. *Physical Review D*, 83(10):104028.
- [Jannes *et al.*, 2011b] JANNES, G. PIQUET, R. MAÏSSA, P. MATHIS, C. et ROUSSEAUX, G. (2011b). Experimental demonstration of the supersonic-subsonic bifurcation in the circular jump : A hydrodynamic white hole. *Physical Review E*, 83(5):056312.
- [Jaskula *et al.*, 2012] JASKULA, J.-C. PARTRIDGE, G. B. BONNEAU, M. LOPES, R. RUAUDEL, J. BOIRON, D. et WESTBROOK, C. I. (2012). Acoustic Analog to the Dynamical Casimir Effect in a Bose-Einstein Condensate. *Physical Review Letters*, 109(22):220401.
- [Jeffreys, 1923] JEFFREYS, H. (1923). On Certain Approximate Solutions of Linear Differential Equations of the Second Order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 23:428–436.
- [Kirby et Chen, 1989] KIRBY, J. T. et CHEN, T.-M. (1989). Surface waves on vertically sheared flows : Approximate dispersion relations. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 94(C1):1013–1027.

- [Kramers, 1926] KRAMERS, H. A. (1926). Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. *Z.Phys.*, 39:828–840.
- [Lai et al., 1989] LAI, R. J. LONG, S. R. et HUANG, N. E. (1989). Laboratory studies of wave-current interaction : Kinematics of the strong interaction. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 94(C11):16201–16214.
- [Lamb, 1932] LAMB, H. (1932). *Hydrodynamics, 6th edition*. Cambridge University Press.
- [Larré et al., 2012] LARRÉ, P.-. RECATI, A. CARUSOTTO, I. et PAVLOFF, N. (2012). Quantum fluctuations around black hole horizons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 85(1):013621.
- [Larré, 2013] LARRÉ, P.-l. (2013). *Fluctuations quantiques et effets non-linéaires dans les condensats de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat, Université Paris 11 - Orsay.
- [Lawrence, 1987] LAWRENCE, G. (1987). Steady Flow over an Obstacle. *Journal of Hydraulic Engineering*, 113(8):981–991.
- [Leonhardt, 2002] LEONHARDT, U. (2002). A laboratory analogue of the event horizon using slow light in an atomic medium. *Nature*, 415(6870):406–409.
- [Leonhardt et Philbin, 2007] LEONHARDT, U. et PHILBIN, T. (2007). Black-hole lasers revisited. In WILLIAM G. UNRUH et RALF SCHÜTZHOLD, éditeurs : *Quantum Analogues : From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology*, volume 718, pages 247–288. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Leonhardt et Philbin, 2012] LEONHARDT, U. et PHILBIN, T. (2012). *Geometry and Light : The Science of Invisibility*. Courier Corporation. Google-Books-ID : ho6KkVyZgV0C.
- [Leonhardt et Piwnicki, 2000] LEONHARDT, U. et PIWNICKI, P. (2000). Relativistic Effects of Light in Moving Media with Extremely Low Group Velocity. *Physical Review Letters*, 84(5):822–825.
- [Li et Ting, 2012] LI, F.-C. et TING, C.-L. (2012). Separation of free and bound harmonics in waves. *Coastal Engineering*, 67:29–40.
- [Liberati et al., 2012] LIBERATI, S. PRAIN, A. et VISSER, M. (2012). Quantum vacuum radiation in optical glass. *Physical Review D*, 85(8):084014.
- [Liu, 1983] LIU, P. L.-F. (1983). Wave-current interactions on a slowly varying topography. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 88(C7):4421–4426.
- [Lowery et Liapis, 1999] LOWERY, K. et LIAPIS, S. (1999). Free-surface flow over a semi-circular obstruction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30(1):43–63.
- [Macher et Parentani, 2009] MACHER, J. et PARENTANI, R. (2009). Black-hole radiation in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 80(4):043601.
- [Magne, 2005] MAGNE, R. (2005). *Réflexion et diffusion des vagues par une topographie sous-marine*. Thèse de doctorat, Université de Toulon.
- [Maïssa et al., 2016] MAÏSSA, P. ROUSSEAU, G. et STEPANYANTS, Y. (2016). Wave blocking phenomenon of surface waves on a shear flow with a constant vorticity. *Physics of Fluids*, 28(3):032102.
- [Massel, 1983] MASSEL, S. R. (1983). Harmonic generation by waves propagating over a submerged step. *Coastal Engineering*, 7(4):357–380.
- [Mayoral, 2011] MAYORAL, C. (2011). *Correlation Functions for Black Holes and White Holes in Bose-Einstein Condensates*. Thèse de doctorat, Universitat de Valencia.

- [McHugh, 1994] MCHUGH, J. P. (1994). Surface waves on an inviscid shear flow in a channel. *Wave Motion*, 19(2):135–144.
- [McKee, 1987] MCKEE, W. D. (1987). Water wave propagation across a shearing current. *Wave Motion*, 9(3):209–215.
- [Melnikov et Weinstein, 2001] MELNIKOV, K. et WEINSTEIN, M. (2001). A Canonical Hamiltonian derivation of Hawking radiation - arXiv :hep-th/0109201. arXiv :hep-th/0109201.
- [Miche, 1944] MICHE, R. (1944). *Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante : forme limite de la houle lors de son déferlement, application aux digues maritimes*, volume 114. Paris, annales des ponts et chaussées édition.
- [Michel, 2017] MICHEL, F. (2017). *Nonlinear and quantum effects in analogue gravity*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Laboratoire de Physique Théorique de l’université d’Orsay, Orsay.
- [Michell, 1784] MICHELL, J. (1784). On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, &c. of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose. By the Rev. John Michell, B. D. F. R. S. In a Letter to Henry Cavendish, Esq. F. R. S. and A. S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 74:35–57.
- [Misner et al., 1973] MISNER, C. W. THORNE, K. S. et WHEELER, J. A. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman & CO.
- [Moisy et al., 2009] MOISY, F. RABAUD, M. et SALSAC, K. (2009). A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46(6):1021.
- [Monsalve Gutiérrez, 2017] MONSALVE GUTIÉRREZ, E. (2017). *Experimental study of water waves : nonlinear effects and absorption*. Thèse de doctorat, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6.
- [Morris et al., 1988] MORRIS, M. S. THORNE, K. S. et YURTSEVER, U. (1988). Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Physical Review Letters*, 61(13):1446–1449.
- [Nardin et al., 2009] NARDIN, J.-C. ROUSSEAU, G. et COULLET, P. (2009). Wave-Current Interaction as a Spatial Dynamical System : Analogies with Rainbow and Black Hole Physics. *Physical Review Letters*, 102(12):124504.
- [Nguyen et al., 2015] NGUYEN, H. GERACE, D. CARUSOTTO, I. SANVITTO, D. GALOPIN, E. LEMAÎTRE, A. SAGNES, I. BLOCH, J. et AMO, A. (2015). Acoustic Black Hole in a Stationary Hydrodynamic Flow of Microcavity Polaritons. *Physical Review Letters*, 114(3):036402.
- [Noether, 1918] NOETHER, E. (1918). Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:235–257.
- [Ohyama et Nadaoka, 1994] OHYAMA, T. et NADAOKA, K. (1994). Transformation of a nonlinear wave train passing over a submerged shelf without breaking. *Coastal Engineering*, 24(1):1–22.
- [Ostrovskii et al., 1986] OSTROVSKII, L. RYBAK, S. et TSIMRING, L. (1986). Negative energy waves in hydrodynamics. *Soviet Physics Uspekhi*, 29(11):1040.

- [Painlevé, 1921] PAINLEVÉ, P. (1921). La mécanique classique et la théorie de la relativité. *C.R.A.S.*, T.173.
- [Parikh et Wilczek, 2000] PARIKH, M. K. et WILCZEK, F. (2000). Hawking Radiation As Tunneling. *Physical Review Letters*, 85(24):5042–5045.
- [Peloquin *et al.*, 2016] PELOQUIN, C. EUVÉ, L.-P. PHILBIN, T. et ROUSSEAUX, G. (2016). Analog wormholes and black hole laser effects in hydrodynamics. *Physical Review D*, 93(8):084032.
- [Perrard *et al.*, 2016] PERRARD, S. FORT, E. et COUDER, Y. (2016). Wave-Based Turing Machine : Time Reversal and Information Erasing. *Physical Review Letters*, 117(9):094502.
- [Philbin *et al.*, 2008] PHILBIN, T. G. KUKLEWICZ, C. ROBERTSON, S. HILL, S. KÖNIG, F. et LEONHARDT, U. (2008). Fiber-optical analog of the event horizon. *Science (New York, N. Y.)*, 319(5868):1367–1370.
- [Prain, 2012] PRAIN, A. (2012). *The Analogue Gravity Challenge The bridge from theory to experiment*. Thèse de doctorat, International School for Advanced Studies, Sissa (Italy).
- [Recati *et al.*, 2009] RECATI, A. PAVLOFF, N. et CARUSOTTO, I. (2009). Bogoliubov theory of acoustic Hawking radiation in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 80(4):043603.
- [Robertson *et al.*, 2016] ROBERTSON, S. MICHEL, F. et PARENTANI, R. (2016). Scattering of gravity waves in subcritical flows over an obstacle. *Physical Review D*, 93(12):124060.
- [Robertson et Rousseaux, 2017] ROBERTSON, S. et ROUSSEAUX, G. (2017). Viscous dissipation of surface waves and its relevance to analogue gravity experiments. *arXiv :1706.05255 [gr-qc, physics :physics]*. arXiv : 1706.05255.
- [Robertson, 2011] ROBERTSON, S. J. (2011). *Hawking Radiation in Dispersive Media*. Thèse de doctorat, University of St. Andrews.
- [Robertson, 2012] ROBERTSON, S. J. (2012). The theory of Hawking radiation in laboratory analogues. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(16):163001.
- [Roldán-Molina *et al.*, 2017] ROLDÁN-MOLINA, A. NUNEZ, A. S. et DUINE, R. (2017). Magnonic Black Holes. *Physical Review Letters*, 118(6):061301.
- [Rousseaux, 2013] ROUSSEAUX, G. (2013). The Basics of Water Waves Theory for Analogue Gravity. In *Analogue Gravity Phenomenology - Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Springer.
- [Rousseaux *et al.*, 2010] ROUSSEAUX, G. MAÏSSA, P. MATHIS, C. COULLET, P. PHILBIN, T. G. et LEONHARDT, U. (2010). Horizon effects with surface waves on moving water. *New Journal of Physics*, 12(9):095018.
- [Rousseaux *et al.*, 2008] ROUSSEAUX, G. MATHIS, C. MAÏSSA, P. PHILBIN, T. G. et LEONHARDT, U. (2008). Observation of negative-frequency waves in a water tank : a classical analogue to the Hawking effect? *New Journal of Physics*, 10(5):053015.
- [Rousseaux *et al.*, 2016] ROUSSEAUX, G. MOUGENOT, J.-M. CHATELLIER, L. DAVID, L. et CALLAUD, D. (2016). A novel method to generate tidal-like bores in the laboratory. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 55:31–38.
- [Rubino, 2013] RUBINO, E. (2013). *Hawking radiation and mode conversion at optically induced horizons*. Thèse de doctorat, Università degli Studi dell’Insubria.

- [Schützhold et Unruh, 2002] SCHÜTZHOLD, R. et UNRUH, W. G. (2002). Gravity wave analogues of black holes. *Physical Review D*, 66(4):044019.
- [Schützhold et Unruh, 2005] SCHÜTZHOLD, R. et UNRUH, W. G. (2005). Hawking radiation in an electro-magnetic wave-guide? *Physical Review Letters*, 95(3). arXiv : quant-ph/0408145.
- [Shiga, 2010] SHIGA, D. (2010). Hawking radiation glimpsed in artificial black hole - www.newscientist.com.
- [Shugan *et al.*, 2014] SHUGAN, I. SAPRYKINA, Y. KUZNETSOV, S. et YANG, R.-Y. (2014). Frequency downshifting of wave spectra and formation of freak waves on non-uniform opposing current. *Coastal Engineering Proceedings*, 1(34):24.
- [Solnyshkov *et al.*, 2011] SOLNYSHKOV, D. D. FLAYAC, H. et MALPUECH, G. (2011). Black holes and wormholes in spinor polariton condensates. *Physical Review B*, 84(23):233405.
- [Steinhauer, 2014] STEINHAUER, J. (2014). Observation of self-amplifying Hawking radiation in an analogue black-hole laser. *Nature Physics*, 10(11):864–869.
- [Steinhauer, 2016] STEINHAUER, J. (2016). Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Physics*, 12(10):959–965.
- [Stepanyants et Fabrikant, 1989] STEPANYANTS, Y. et FABRIKANT, A. L. (1989). Propagation of waves in hydrodynamic shear flows. *Soviet Physics Uspekhi*, 32(9):783.
- [Swan et James, 2000] SWAN, C. et JAMES, R. L. (2000). A simple analytical model for surface water waves on a depth-varying current. *Applied Ocean Research*, 22(6):331–347.
- [Torres *et al.*, 2017] TORRES, T. PATRICK, S. COUTANT, A. RICHARTZ, M. TEDFORD, E. W. et WEINFURTNER, S. (2017). Rotational superradiant scattering in a vortex flow. *Nature Physics*, advance online publication.
- [Touboul et Kharif, 2016] TOUBOUL, J. et KHARIF, C. (2016). Effect of vorticity on the generation of rogue waves due to dispersive focusing. *Natural Hazards*, 84:S585–S598.
- [Trulsen et Mei, 1993] TRULSEN, K. et MEI, C. C. (1993). Double reflection of capillary/gravity waves by a non-uniform current : a boundary-layer theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 251:239–271.
- [Unruh, 1981] UNRUH, W. G. (1981). Experimental Black-Hole Evaporation? *Physical Review Letters*, 46(21):1351–1353.
- [Unruh, 1995] UNRUH, W. G. (1995). Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation. *Physical Review D*, 51(6):2827–2838.
- [Unruh, 2008] UNRUH, W. G. (2008). Dumb holes : analogues for black holes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1877):2905–2913.
- [Unruh, 2014] UNRUH, W. G. (2014). Has Hawking Radiation Been Measured? *Foundations of Physics*, 44(5):532–545.
- [Unruh et Schützhold, 2003] UNRUH, W. G. et SCHÜTZHOLD, R. (2003). On slow light as a black hole analogue. *Physical Review D*, 68(2):024008.
- [Unruh et Schützhold, 2012] UNRUH, W. G. et SCHÜTZHOLD, R. (2012). Hawking radiation from “phase horizons” in laser filaments? *Physical Review D*, 86(6):064006.
- [Vigié, 2005] VIGIÉ, F. (2005). *Etude expérimentale d'un écoulement à surface libre au-dessus d'un obstacle*. Thèse de doctorat, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse - IMFT, Toulouse (France).

- [Vilenkin, 1978] VILENKIN, A. (1978). Exponential amplification of waves in the gravitational field of ultrarelativistic rotating body. *Physics Letters B*, 78(2):301–303.
- [Visser, 1998] VISSER, M. (1998). Acoustic black holes : horizons, ergospheres and Hawking radiation. *Classical and Quantum Gravity*, 15(6):1767.
- [Visser, 2003] VISSER, M. (2003). Essential and inessential features of Hawking radiation. *Int.J.Mod.Phys.*, D12:649–661.
- [Visser *et al.*, 2002] VISSER, M. BARCELÓ, C. et LIBERATI, S. (2002). Analogue Models of and for Gravity. *General Relativity and Gravitation*, 34(10):1719–1734.
- [Wang, 2017] WANG, Y.-H. (2017). *Pair creation and pair annihilation in Bose-Einstein condensates*. Thèse de doctorat, Faculty of the Graduate School of the University of Maryland.
- [Wang *et al.*, 2017] WANG, Y.-H. JACOBSON, T. EDWARDS, M. et CLARK, C. W. (2017). Mechanism of stimulated Hawking radiation in a laboratory Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 96(2):023616.
- [Weinfurtner *et al.*, 2011] WEINFURTNER, S. TEDFORD, E. W. PENRICE, M. C. J. UNRUH, W. G. et LAWRENCE, G. A. (2011). Measurement of Stimulated Hawking Emission in an Analogue System. *Physical Review Letters*, 106(2):021302.
- [Weinfurtner *et al.*, 2013] WEINFURTNER, S. TEDFORD, E. W. PENRICE, M. C. J. UNRUH, W. G. et LAWRENCE, G. A. (2013). Classical Aspects of Hawking Radiation Verified in Analogue Gravity Experiment. In *Analogue Gravity Phenomenology - Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Springer.
- [Wentzel, 1926] WENTZEL, G. (1926). Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 38(6-7):518–529.
- [White, 1999] WHITE, B. S. (1999). Wave action on currents with vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 386:329–344.
- [White, 1973] WHITE, R. W. (1973). Acoustic ray tracing in moving inhomogeneous fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 53(6):1700–1704.
- [Zapata *et al.*, 2011] ZAPATA, I. ALBERT, M. PARENTANI, R. et SOLS, F. (2011). Resonant Hawking radiation in Bose-Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 13(6):063048.

Annexes

Publications

Articles publiés

Euvé, L.-P., Michel, F., Parentani, R. & Rousseaux, G. Wave blocking and partial transmission in subcritical flows over an obstacle. *Physical Review D* **91**, 024020 (2015)

Peloquin, C., Euvé, L.-P., Philbin, T. & Rousseaux, G. Analog wormholes and black hole laser effects in hydrodynamics. *Physical Review D* **93**, 084032 (2016)

Euvé, L.-P., Michel, F., Parentani, R., Philbin, T. G. & Rousseaux, G. Observation of Noise Correlated by the Hawking Effect in a Water Tank. *Physical Review Letters* **117**, 121301 (2016)

Euvé, L.-P. & Rousseaux, G. Classical analogue of an interstellar travel through a hydrodynamic wormhole. *Physical Review D* **96**, 064042 (2017)

Euvé, L.-P. & Rousseaux, G. Génération non-linéaire d'harmoniques après une conversion linéaire en interaction houle-courant - XIVèmes Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil. (2016).

Article soumis

Fourdrinoy, J., Euvé, L.-P., Mougnot, J.-M. & Rousseaux, G. Générateur de houle à contre-courant via un déversoir oscillant - XVème Journées Nationales Génie Côtier - Génie Civil

Wave blocking and partial transmission in subcritical flows over an obstacleLéo-Paul Euvé,^{1,*} Florent Michel,^{2,†} Renaud Parentani,^{2,‡} and Germain Rousseaux^{1,§}¹*Institut Pprime, UPR 3346, CNRS-Université de Poitiers-ISAE ENSMA 11 Boulevard Marie et Pierre Curie-Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Cedex, France*²*Laboratoire de Physique Théorique, CNRS UMR 8627, Bâtiment 210, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France*

(Received 18 September 2014; published 13 January 2015)

We study and measure the transmission coefficient of counterpropagating shallow-water waves produced by a wave generator and scattered by an obstacle. To precisely compare theoretical predictions and experimental data, we consider ~ 25 frequencies for five subcritical background flows, where the maximum value of the Froude number ranges from 0.5 to 0.75. For each flow, the transmission coefficient displays a sharp transition separating total transmission from wave blocking. Both the width and the central frequency of the transition are in good agreement with their theoretical values. The shape of the obstacle is identical to that used by the Vancouver team in the recent experiment aiming at detecting the analog of stimulated Hawking radiation. Our results are compatible with the observations that have been reported. They complete them by establishing that the contribution of the transmission coefficient cannot be neglected for the lower half of the probed frequency range.

DOI: 10.1103/PhysRevD.91.024020

PACS numbers: 04.60.-m, 04.62.+v, 04.70.Dy, 47.35.Bb

I. INTRODUCTION

Following the original proposal of Unruh [1,2], according to which it should be possible to use fluids to test the Hawking prediction [3] that black holes spontaneously emit a steady thermal flux, it has been suggested in Ref. [4] that surface waves propagating on top of a water flow in a flume could be used to experimentally implement this idea [5]. Since then, several experiments have been conducted to observe the conversion of counterpropagating shallow-water waves into shorter wavelengths modes which occurs near a blocking point [6,7] of a stationary inhomogeneous flow. This process is related to the time reversed of the Hawking one, as the effective space-time metric close to that point is similar to that of a white hole. However, to have a good analogy with black hole physics, the flow should be transcritical [8–12]. That is, the flow velocity v should cross the speed of low-frequency waves c . In the hydrodynamic language, the Froude number $F = v/c$ should become larger than 1.

It turns out that this condition leads to experimental difficulties which, to our knowledge, have not yet been overcome for water waves in an analogue gravity context [13]. In fact, in the experiments [6,7], the values of the Froude number are significantly lower than 1. Therefore, to interpret the observational data of these experiments, and to understand the exact relationships with black hole physics, it is important to theoretically study the scattering in subcritical flows. These remarks motivated the recent work

[12] to which we shall often refer. One of its main conclusions is the following: because of the subcritical character of the flow, the wave blocking only occurs above a certain frequency which is rather high in the frequency ranges probed in the experiments [6,7]. As a result, it is imperative to take into account the transmission coefficient.

From a hydrodynamical point of view, it is well known that shallow water waves can be blocked by a counter-current if the velocity of the latter is sufficiently large [5,14,15]. Because of dispersion effects of surface waves, the flow velocity needed to block a stationary wave is larger when considering waves of smaller frequency. Turning this around, it means that a given stationary flow reaching a maximal subcritical velocity over an obstacle will block a counterpropagating wave if its frequency is higher than a certain critical frequency, that we shall call ω_{\min} as in Ref. [12]. The above reasoning, although correct, is too simplistic as it is based on a geometrical (WKB) approximation. When considering the solutions of the wave equation describing the propagation in a flow over a localized obstacle, one finds that counterpropagating waves are partially transmitted irrespectively of their frequency. The contact with the geometrical approximation is made when noticing that, for increasing values of the frequency, the transmission coefficient monotonically decreases from essentially 1 (i.e., total transmission) to zero (i.e., blocking), with a rather sharp transition in a narrow frequency region close to the critical frequency ω_{\min} .

The main purpose of this work is to study, both experimentally and theoretically, the behavior of the transmission coefficient as a function of the wave frequency. We shall work with a given obstacle and current, but with five different values of the asymptotic water depth giving values

*leo.paul.euve@etu.univ-poitiers.fr

†florent.michel@th.u-psud.fr

‡renaud.parentani@th.u-psud.fr

§germain.rousseau@univ-poitiers.fr

of ω_{\min} which range from 1.6 to 5.0 Hz. In spite of the experimental uncertainties and the theoretical approximations, we find a relatively good quantitative agreement between the theoretical predictions and the observations, i.e., with relative differences $\lesssim 10\%$.

Importantly, this agreement *a posteriori* validates the various approximations and the procedures that we have used. On the theoretical side, the approximations are twofold. First, we choose a simplified description of the background flow, avoiding the need to solve partial differential equations. Second, we truncate the wave equation to fourth order in the derivatives, i.e., to lowest nontrivial order in the dispersive scale. Besides the standard quartic wave equation, we introduce a new quartic equation with coefficients tuned so that the exact value of the critical frequency ω_{\min} is taken into account. Both schemes are used and compared to experimental data. On the experimental side, we used acoustic sensors to measure the free surface. The set of ~ 25 probed frequencies of the incoming wave allows us to observe, for low frequencies, rather sharp peaks in the transition coefficient which seem to be unrelated to the transmission, but due to resonant properties of the flume, probably associated with (multiple) reflections at its ends.

We believe that the quantitative agreement between theory and observations we obtain constitutes an important step both from a purely hydrodynamic point of view and for the analogue gravity program. Indeed, a good quantitative agreement is needed in order to reliably test in media longstanding predictions concerning the behavior of relativistic fields in curved space-times.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we present the experimental setup and the basic elements for describing the mode mixing occurring in a stationary flow over an obstacle. We also present the aforementioned new quartic wave equation which aims to improve the description of dispersion effects near a turning point. In Sec. III we first present the theoretical results obtained by numerically solving the standard and the improved wave equations. We then present the experimental results, that we compare with the theoretical ones. We conclude in Sec. IV. In the Appendix, we present our method to obtain an approximate description of the background flows used in the experiment.

II. EXPERIMENTAL SETUP AND THEORETICAL DESCRIPTION

A. Experimental setup

The experiments were made in a water channel of the Pprime Institute. The flume measures 6.8 m of length and 0.39 m of width, and the water height can be set up to 0.5 m. The current is generated by a PCM Moineau pump with an eccentric rotor bearing (its flow rate per unit width $q = Q/W$ can range up to $0.172 \text{ m}^2/\text{s}$). The flow passes through a honeycomb and a convergent chamber to suppress boundary layer effects, macrovortices, and turbulence; see Fig. 1. The three-dimensional shape of the convergent chamber is designed to generate a velocity profile at the entrance of the channel which is uniform in the vertical direction. The fluid moves along the water

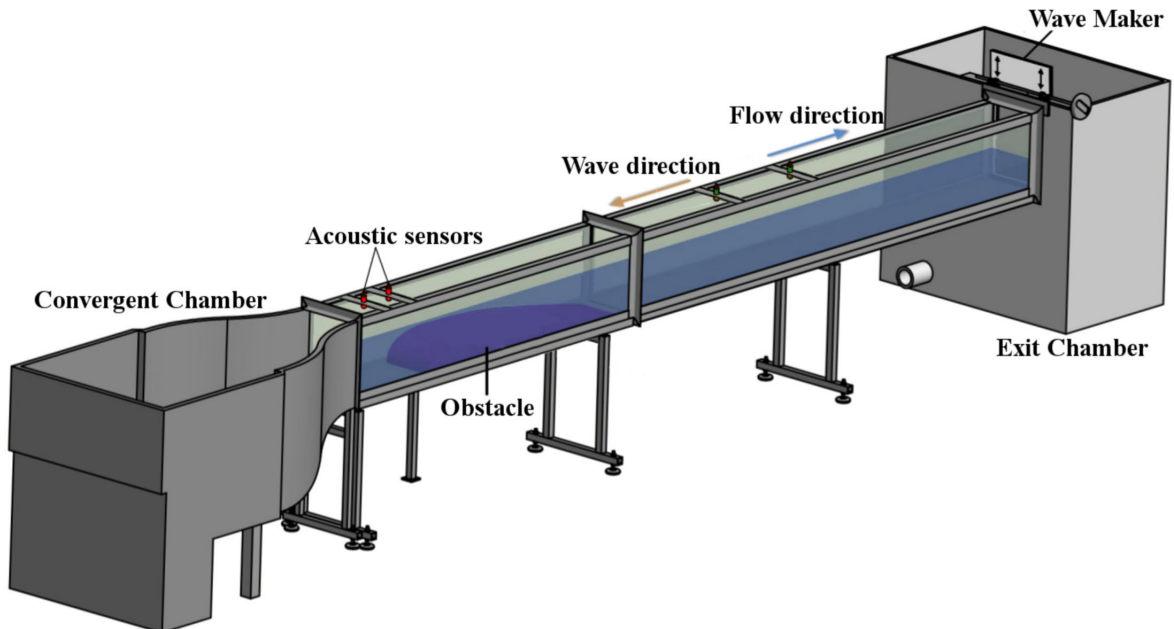


FIG. 1 (color online). A sketch of the experimental setup with the obstacle, the wave making machine, and the four acoustic sensors. The two upstream ones, the red cylinders, measure the amplitude of the transmitted wave on the left of the obstacle. The other two measure the incident wave amplitude.

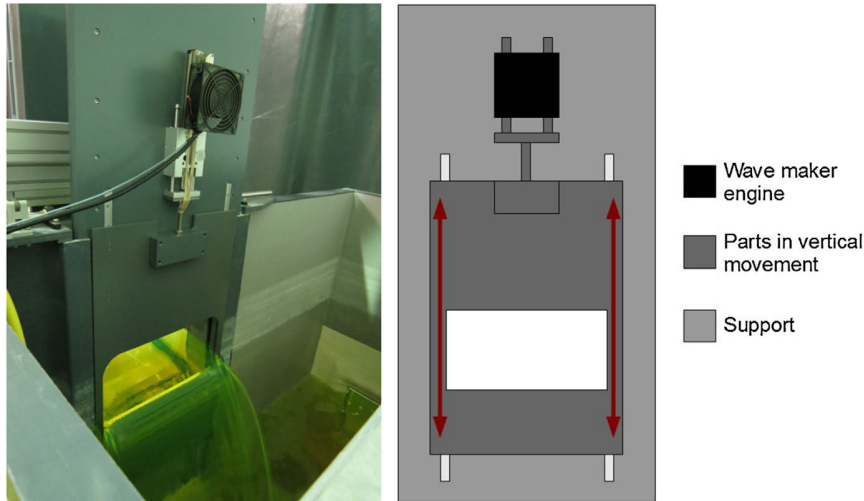


FIG. 2 (color online). (Left) The wave maker at the outlet of the water channel. (Right) A scheme of the mechanical system composing the wave maker.

channel of which the sides are made of window panes for visualizations. The fluid is sucked by the pump in the exit chamber at the end of the channel. A gate is placed at its entrance in order to control the exit water depth and flow regimes (typically with a fall at the outlet of the channel). The flow is adjusted at $Q = 10.75$ l/s, corresponding to a flow per unit with $q = 0.0276$ m²/s.

A wave maker, driven by a linear motor LH23 from Transtechnik (Fig. 2), is placed vertically on the gate at the end of the channel. It moves (in the vertical direction) a

guillotine with a rectangular geometry; see Fig. 2. The position of the gate fixes the asymptotic mean water depth in the channel for a given flow rate, whereas the motor-driven guillotine superimposes time-dependent perturbations on the mean level, which we set to be periodic. An incoming wave (with a given amplitude for a constant frequency) is thus generated and moves upstream toward the obstacle; see Fig. 3. Adjusting the position of the exit gate, five different asymptotic mean water depths are considered. Their values are 0.169, 0.1715, 0.173, 0.175, and 0.181 m.

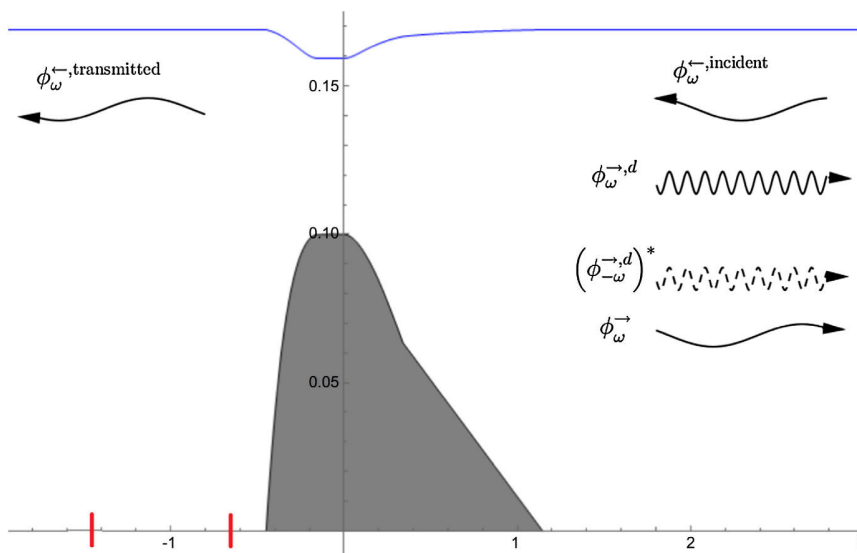


FIG. 3 (color online). Schematic drawing of the obstacle (in gray), the associated flow, and the scattering it induces. The unit of length is the meter. The free surface is represented for the value of the current used in our experiments, $q = 0.0276$ m² s⁻¹, and for an asymptotic water depth equal to 0.169 m, which is the lowest value of the five flows we used, giving the highest value of Froude number. The flow goes from left to right. The incoming counterpropagating mode generated by the moving guillotine is indicated by the upper arrow on the right side. The transmitted mode is on the left side. The names of the five modes are those of Eq. (9). The (horizontal) positions of the two upstream sensors are indicated by the red strokes.

The obstacle we use is the same as in the Vancouver experiments; see Refs. [7] and [16] for more details. Its shape is shown in Fig. 3. The leftmost part of the obstacle is placed at 0.8 m after the exit of the convergent chamber.

Two types of measurements of the free surface have been used. First, a laser sheet is created by an Argon LASER (Spectra Physics 2W) connected to a light fiber and a cylindrical lens. It lights the surface perpendicularly and penetrates on a small depth thanks to the absorption of a dye that we diluted in the water channel (see Refs. [17] and [16]). These measurements shall not be presented here. They have been performed in order to verify that our observations agree with those reported by the Vancouver team. The second type of measurements is made by acoustic sensors (Microsonic mic + 25/IU/TC). They measure the water depth as a function of time. They use an echo-radar ultrasound technology with an acquisition frequency of 31 Hz. Their accuracy is 0.1 mm. The signal produced is sent to a software developed in the Pprime Institute with Labview. Two pairs of sensors were put on either side of the obstacle to measure the amplitude of the transmitted wave and that of the incoming one. The first two are placed 0.30 and 0.70 m after the convergent chamber and the last ones 4.42 and 5.42 m after it.

B. Scattering of water waves on a flow over an obstacle

We review the key concepts needed to describe the scattering of surface water waves propagating against an inhomogeneous stationary flow such as that presented above. To this end, we first present the simplified wave equation we shall use. Then we study the roots of the dispersion relation and the set of stationary modes. Finally we recall the main properties of the mode mixing. These concepts have been recently studied in details in Ref. [12]. Therefore, in what follows, we shall be rather brief. For more details, the interested reader can consult this reference, as well as earlier ones [4,9,18–21].

1. Simplified wave equation

We consider irrotational, laminar, stationary flows of an inviscid, ideal, incompressible fluid in an elongated flume. The flow profiles are asymptotically uniform on both sides but possess nontrivial gradients induced by the obstacle put on the bottom of the flume. In the body of the text, we assume that the background flows are known. In the Appendix we explain the method we used to get an approximate analytical description of these flows. The main approximation consists of neglecting the vertical gradients of the flow and the vertical velocity. This is a legitimate approximation in our experiments because the slope of the free surface, which is equal to the ratio of the vertical and horizontal velocities, remains smaller than 10%.

Using this approximation, the flows are fully characterized by $v(x)$, the velocity in the longitudinal direction x , and the water height $h(x)$. Notice that these quantities are

related by $v(x)h(x) = q$, where q is the (uniform) value of the current. Under this approximation, one easily verifies that the wave equation derived in Appendix A.3 of Ref. [19] reduces to¹

$$[(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v\partial_x) - ig\partial_x \tanh(-ih\partial_x)]\phi = 0, \quad (1)$$

where g is the gravitational acceleration. The field $\phi(t, x)$ is the perturbation of the velocity potential. It is related to the linear variation of the water depth δh through

$$\delta h(t, x) = -\frac{1}{g}(\partial_t + v\partial_x)\phi(t, x). \quad (2)$$

Because the flows we consider are stationary, we can work with (complex) stationary waves $e^{-i\omega t}\phi_\omega(x)$ with fixed laboratory frequency ω , which can be taken positive without restriction [19]. At fixed ω , the spatial part of the waves obeys

$$[(-i\omega + \partial_x v)(-i\omega + v\partial_x) - ig\partial_x \tanh(-ih\partial_x)]\phi_\omega = 0. \quad (3)$$

Notice that the ordering of ∂_x and the functions $v(x)$ and $h(x)$ has been preserved. The dispersion relation associated with Eq. (3) is

$$(\omega - v(x)k)^2 = gk \tanh(kh(x)), \quad (4)$$

where k is the wave number. Equation (4) can be easily obtained from Eq. (3) by writing $\phi_\omega = e^{i \int^x k(x') dx'}$ and by neglecting the gradients of h and v . In the limit $kh \ll 1$, the right-hand side of the dispersion relation becomes ghk^2 , from which one recovers that the speed of long-wavelength perturbations in the fluid frame is $c(x) = \sqrt{gh(x)}$. Combining this with the conservation of the flow, one obtains the local value of the Froude number $F \equiv v/c$:

$$F(x) = \frac{q}{\sqrt{gh^3(x)}}. \quad (5)$$

2. Homogeneous flows

Before studying the mode mixing engendered by the gradients of h and v , it is appropriate to study the algebraic properties of the roots of Eq. (4) in a uniform flow. For definiteness, we assume that the flow velocity v is positive, and smaller than c . In subcritical flows, Eq. (4) has four real

¹Starting from Eq. (A25) in Ref. [19], one uses the continuity equation to write $\partial_x v_x = -\partial_y v_y \approx 0$, so that, using Eq. (A18) in this reference, $v_x G \approx g$. Integrating the definition of the stream function Ψ along the vertical direction gives $\psi_S \approx v_x h$, so that the argument of the hyperbolic tangent becomes, after neglecting v_y , $-i \frac{\psi_S v_x}{v} \partial_x \approx -ih\partial_x$.

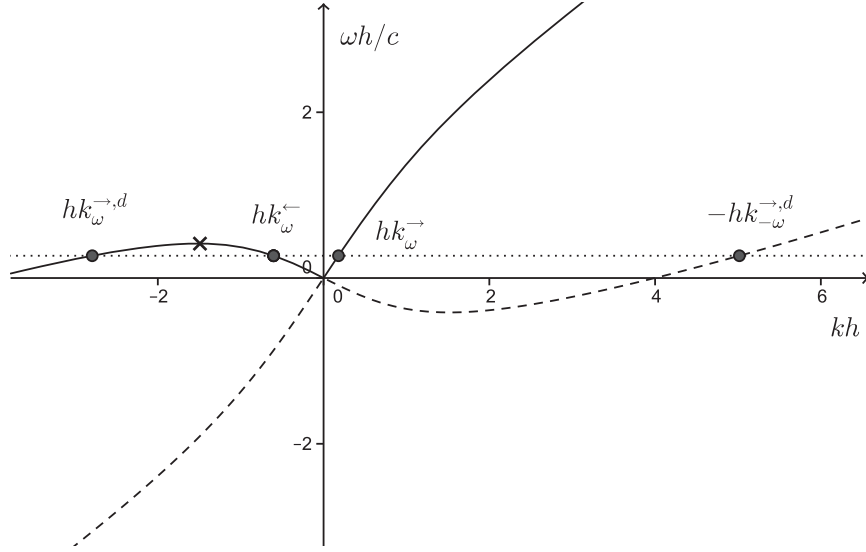


FIG. 4. Dispersion relation ω vs k [see Eq. (4)] in nondimensional units, for a Froude number $F = 0.5$. The two plain lines represent roots with a positive value of the comoving frequency $\Omega = \omega - vk$, which describe modes with a positive norm of Eq. (6). Instead, the dashed lines describe negative-norm modes with a negative comoving frequency Ω . The dotted line corresponds to $\omega = 0.23c/h < \omega_m$. The latter is given by the horizontal tangent on the curve (not represented) on the left upper quadrant and is indicated by a cross. The dots indicate the four wave vectors for this value of ω . Their meaning is explained in the text.

solutions if $0 < \omega < \omega_m$, where ω_m is the value of ω where Eq. (4) has a real double root; see Fig. 4. When $\omega > \omega_m$, there are only two real roots. In both cases, Eq. (4) also has an infinite number of complex roots.

When $0 < \omega < \omega_m$, from left to right, the four roots are

- (i) the dispersive, copropagating root $k_{\omega}^{\rightarrow,d}$;
- (ii) the hydrodynamic, counterpropagating one k_{ω}^{\leftarrow} ;
- (iii) the hydrodynamic, copropagating one k_{ω}^{\rightarrow} ;
- (iv) the dispersive, copropagating one $-k_{\omega}^{\rightarrow,d}$.

As in Ref. [12], we call a root *hydrodynamic* if it vanishes in the limit $\omega \rightarrow 0$ and *dispersive* if it does not. The superscript d is used to distinguish these two types of roots. The arrow gives the sign of the group velocity in the lab frame, and the notation for the last root underlines the fact that the corresponding wave has a *negative energy*. To understand this one should describe the plane waves $\phi_{\omega} \propto e^{ik_{\omega}x}$ associated with these four roots. They are respectively called $\phi_{\omega}^{\rightarrow,d}$, $\phi_{\omega}^{\leftarrow}$, $\phi_{\omega}^{\rightarrow}$, and $(\phi_{\omega}^{\rightarrow,d})^*$. The last one, which has a negative energy, is complex conjugated for the following reason. Each of these four (complex) waves possesses a norm which is given by the (conserved) scalar product associated with Eq. (1). Considering two complex solutions ϕ_1, ϕ_2 of Eq. (1), it is given by

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (\phi_1^* (\partial_t + v \partial_x) \phi_2 - \phi_2 (\partial_t + v \partial_x) \phi_1^*) dx. \quad (6)$$

One then verifies that the above four modes are orthogonal to each other, which means that they describe independent waves. When working with positive frequency ω , one also finds that the first three modes have both a positive energy

and a positive norm. Instead, the norm of $(\phi_{\omega}^{\rightarrow,d})^*$ is negative. This means that $\phi_{\omega}^{\rightarrow,d}$ has a positive norm and describes negative energy waves, as can be verified by direct evaluation of the wave energy functional [see Ref. [19] for details about the relationship between the sign of the norm of the complex modes $e^{-i\omega t} \phi_{\omega}$ and the sign of the energy of the corresponding physical waves $\text{Re}(e^{-i\omega t} \phi_{\omega})$]. The contact with the experiment is easily made when noticing that the wave generator will send toward the obstacle the counterpropagating mode $\phi_{\omega}^{\leftarrow}$. When scattered near the obstacle, four outgoing waves will be generated, as is schematically represented in Fig. 3.

When $\omega > \omega_m$, the two roots $k_{\omega}^{\rightarrow,d}$ and k_{ω}^{\leftarrow} become complex and conjugate to each other. The corresponding modes exponentially grow to the left or to the right and do not describe physical waves in homogeneous flows.

To conclude this subsection, it is of value to determine how ω_m depends on the Froude number. Using the adimensional quantities $\omega_m h/c$ and $k_m h$, where k_m is the double root of Eq. (4) for $\omega = \omega_m$, we get

$$F = -\frac{1}{2\sqrt{k_m h \tanh(k_m h)}} \times (\tanh(k_m h) + k_m h (1 - \tanh^2(k_m h))),$$

$$\frac{\omega_m h}{c} = \sqrt{k_m h \tanh(k_m h)} + F k_m h. \quad (7)$$

These equations implicitly give $\omega_m h/c$ as a function of F . The result is shown in Fig. 5. A straightforward calculation gives its behavior in the two limits $F \rightarrow 0$ and $F \rightarrow 1$:

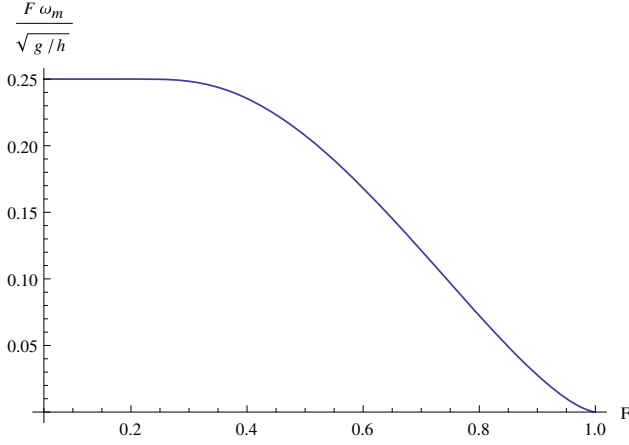


FIG. 5 (color online). Plot of the adimensional critical frequency times the Froude number, $\omega_m/\sqrt{g/h} \times F$, as a function of the Froude number F . Notice that ω_m vanishes for $F = 1$ and no longer exists for supercritical flows.

$$\frac{\omega_m h}{c} \underset{F \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4|F|}, \quad \frac{\omega_m h}{c} \underset{F \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{3}(1 - F^2)^{3/2}. \quad (8)$$

3. Mode mixing in inhomogeneous flows

When considering inhomogeneous flows in the presence of a localized obstacle, the above analysis should be reconsidered as the four modes will mix with each other. We assume that the flow is asymptotically homogeneous on both sides of the obstacle, with the same values of h and q . As a result, the asymptotic properties of the solutions of Eq. (3) can be decomposed in plane waves characterized by the four roots of Eq. (4). The scattering of the incoming mode $\phi_\omega^{\leftarrow, \text{incident}}$ from the right is thus *completely* described by the four complex coefficients appearing in

$$\phi_\omega^{\leftarrow, \text{incident}} \rightarrow \alpha_\omega \phi_\omega^{\rightarrow, d} + \beta_\omega (\phi_{-\omega}^{\rightarrow, d})^* + \tilde{A}_\omega \phi_\omega^{\leftarrow, \text{transmitted}} + A_\omega \phi_\omega^{\rightarrow}. \quad (9)$$

A schematic drawing of the scattering is shown in Fig. 3. Using the conservation of scalar product of Eq. (6), and working with incident and outgoing waves with unit norm, the four coefficients automatically obey the unitarity relation

$$|A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2 + |\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 = 1, \quad (10)$$

where the minus sign in front of $|\beta_\omega|^2$ comes from the unit negative norm of $(\phi_{-\omega}^{\rightarrow, d})^*$. The reader unfamiliar with this important relation can consult Refs. [9,12,20]. In the following we focus on the transmission coefficient \tilde{A}_ω .

In our flows, the mode mixing of Eq. (9) heavily depends on two critical frequencies, which we call ω_{\max} and ω_{\min} . These two frequencies are both defined by Eq. (8) and are respectively associated with the minimal and maximal values of the Froude number of Eq. (5):

$$\omega_{\max} = \omega_m(F = F_{\min}), \quad (11)$$

$$\omega_{\min} = \omega_m(F = F_{\max}). \quad (12)$$

Even though they are defined in a similar manner, they play very different roles, as we now explain. In our flows, F reaches its minimal value in the asymptotic (right) region. Hence, ω_{\max} is defined by the asymptotic value of Eq. (8) for $x \rightarrow \infty$. Since ω_m decreases with F , ω_{\max} is its largest value. Because no counterpropagating mode exists for $\omega > \omega_{\max}$, the wave generator put on the right of the obstacle can only send waves for $\omega < \omega_{\max}$. Hence, only frequencies *lower* than ω_{\max} should be considered.

The second frequency, ω_{\min} , is instead defined on top of the obstacle, where F reaches its maximum value F_{\max} . This frequency plays a crucial role in the mode mixing because, for $\omega < \omega_{\min}$, $\phi_\omega^{\leftarrow, \text{incident}}$ will be essentially transmitted over the obstacle, since its group velocity (in the fluid frame) is higher than the flow speed. Instead for higher frequencies, $\omega > \omega_{\min}$, the incoming wave $\phi_\omega^{\leftarrow, \text{incident}}$ is essentially blocked since it cannot propagate to the left (in a WKB sense) in the region on top of the obstacle where the flow speed is too high. This reflection can be understood from a geometrical optics point of view. When considering the mode characteristics governed by Eq. (4), one finds that they possess a turning point at $x = x_\omega^{\text{tp}}$ where Eq. (4) admits a double root that we call k_ω^{tp} . For more details about this, see Refs. [12,21]. When working at fixed $\omega > \omega_{\min}$, the value of k_ω^{tp} is given by k_m of Eq. (8). For $\omega < \omega_{\min}$, there is no turning point because Eq. (8) no longer admits a (real) double root. This indicates that the wave is essentially transmitted. These properties have been theoretically studied in Ref. [12] using a combination of analytical and numerical techniques. Our main goal is to refine this analysis and to confront the results with experimental data.

C. Standard and improved quartic equations

Because Eq. (3) contains derivatives of arbitrary high orders, standard numerical methods to solve ordinary differential equations (ODEs) require some truncation. In this work two truncations shall be used, and their outcomes shall be compared with experimental data. First, as in Ref. [12], we expand Eq. (3) to fourth order in ∂_x , to arrive at

$$\left[(\omega + i\partial_x v)(\omega + iv\partial_x) + g\partial_x h \partial_x + \frac{g}{3} \partial_x (h\partial_x)^3 \right] \phi_\omega = 0. \quad (13)$$

This fourth-order equation can be integrated using standard techniques [20]. However, as the Froude number remains rather far from unity for the flows we shall use, the above expansion around $k = 0$ is *a priori* not reliable. Indeed, the relative error between the values of ω_{\min} obtained using the full dispersion relation of Eq. (4) or the quartic dispersion relation $(\omega - vk)^2 = c^2 k^2 (1 - h^2 k^2/3)$ reaches 24% when

$F_{\max} = 0.47$ which is the lowest value in the set of five flows we shall study. Notice also that the error on ω_{\max} is even larger (close to 50%) since the corresponding values of F are smaller. For intermediate frequencies $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$, the errors on the location of the turning point x_{ω}^{tp} and that of the corresponding double root k_{ω}^{tp} are of the same order since these are also obtained from Eq. (8).

To avoid these systematic errors, we propose a new method which still consists of expanding the wave equation to fourth order in ∂_x , but do so in a ω -dependent manner so that, for all frequencies $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$, the exact value of the turning point x_{ω}^{tp} and that of the corresponding double root k_{ω}^{tp} are taken into account. That is, when using the standard WKB approximation to get the effective dispersion relation from the new wave equation, the values of x_{ω}^{tp} and k_{ω}^{tp} should coincide with those predicted by the full dispersion relation Eq. (4). Since this applies for $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$, it will also apply for the limiting cases ω_{\min} and ω_{\max} . Hence, by construction, the new method works with the exact values of ω_{\min} and ω_{\max} .

A simple way to proceed consists of taking Eq. (13) and adjusting the coefficients of the last two terms in a ω -dependent manner so as to meet the above criterion. To be more specific, we still write the wave equation as

$$\left[(\omega + i\partial_x v)(\omega + iv\partial_x) + \frac{1}{h} \mathcal{F}(\omega, \partial_x) \right] \phi_{\omega} = 0, \quad (14)$$

where the factor $1/h(x)$ is introduced for convenience. Notice that the convective derivative term is the same as that of Eq. (1). In fact, we recover Eq. (1) when setting $\mathcal{F} = -igh\partial_x \tanh(-ih\partial_x)$, while Eq. (13) is obtained for $\mathcal{F} = g((h\partial_x)^2 + (1/3)(h\partial_x)^4)$. As there exist many wave equations which meet the criterion on the values of x_{ω}^{tp} and k_{ω}^{tp} , we also impose that the new \mathcal{F} operator obeys the following properties, which are satisfied both by Eqs. (1) and (13),

- (i) $\mathcal{F}\phi_{\omega} = 0$ if $\partial_x \phi_{\omega} = 0$;
- (ii) \mathcal{F} is even in ∂_x ;
- (iii) \mathcal{F} depends on h and ∂_x only through $h\partial_x$;
- (iv) $\frac{1}{h}\mathcal{F}$ is Hermitian for the scalar product Eq. (6) to be conserved.

Assuming that \mathcal{F} is fourth order in ∂_x then gives an equation of the form

$$\left[(\omega + i\partial_x v)(\omega + iv\partial_x) + g_2 \partial_x h \partial_x + \frac{g_4}{3} \partial_x (h \partial_x)^3 \right] \phi_{\omega} = 0, \quad (15)$$

where g_2 and g_4 are two real parameters. Their values are fixed by imposing that the associated dispersion relation

$$(\omega - vk)^2 = g_2 hk^2 - \frac{g_4}{3} h^3 k^4 \quad (16)$$

is tangent to the exact one Eq. (4) at $k = k_{\omega}^{\text{tp}}$. [This guarantees that the values of x_{ω}^{tp} and k_{ω}^{tp} obtained from

Eq. (16) coincide with those derived from Eq. (4)]. A straightforward calculation gives

$$\begin{aligned} g_2(\omega) &= \frac{g}{2} \left(3 \frac{\tanh(K_{\omega}^{\text{tp}})}{K_{\omega}^{\text{tp}}} - 1 + \tanh^2(K_{\omega}^{\text{tp}}) \right), \\ g_4(\omega) &= \frac{3g}{2} \left(\frac{\tanh(K_{\omega}^{\text{tp}})}{(K_{\omega}^{\text{tp}})^3} - \frac{1 - \tanh^2(K_{\omega}^{\text{tp}})}{(K_{\omega}^{\text{tp}})^2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

where the quantity $K_{\omega}^{\text{tp}} = k_{\omega}^{\text{tp}} \times h(x_{\omega}^{\text{tp}})$ is the wave number k_{ω}^{tp} adimensionalized by the water height at the turning point. Notice that g_2 and g_4 both tend to g in the limit $K_{\omega}^{\text{tp}} \rightarrow 0$.

So far we considered cases with a turning point. In the absence of a turning point, for $\omega < \omega_{\min}$, we use the same procedure with K_{ω}^{tp} replaced by the counterpropagating root $K_{\omega}^{\text{top}} = k_{\omega}^{\text{top}}(x_{\text{top}}) \times h(x_{\text{top}})$ adimensionalized by $h(x_{\text{top}})$, the height where the water depth is minimal. Therefore, g_2 and g_4 are continuous across $\omega = \omega_{\min}$.

The main assumption underlying Eq. (15) is that the scattering mainly occurs near the turning point, when there is one, or near the top of the obstacle, when it is absent. It turns out that this condition is not well satisfied for the obstacle used in the experiments since the beginning of its upstream slope is very steep, as can be seen in Fig. 3. This may explain why the two methods give very similar results, as we shall see in the next section. Yet, we believe that for smoother, and more symmetrical obstacles, the improved description based on Eq. (15) should give a more accurate description than that based on Eq. (13). We hope to be able to validate this conjecture in the near future.

III. THEORETICAL PREDICTIONS AND EXPERIMENTAL RESULTS

A. Numerical results

We numerically computed the transmission coefficient \tilde{A}_{ω} by solving the two wave equations of Sec. II C for the obstacle used in the Vancouver experiment [7]; see Fig. 10. We considered five different flows with a fixed current $q = 0.0276 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and water depths at the top of the obstacle given by $h_{\min} = 0.0695, 0.0615, 0.058, 0.054,$ and 0.051 m , corresponding to asymptotic water depths of $0.181, 0.175, 0.173, 0.1715,$ and 0.169 m , respectively.²

²We here use h_{\min} rather than the asymptotic water height fixed by the position of the guillotine for the following reasons. First, it is h_{\min} which fixes the value of the critical frequency ω_{\min} , see eqs (7) and (12). Using the asymptotic water depth would require computing h_{\min} by a procedure which, in the absence of complete knowledge of the flow, would have introduced an error on ω_{\min} . Second, as can be easily seen from Eq. (A2), the derivative of h_{\min} with respect to the asymptotic water depth is larger than unity. Hence, matching the observed value of h_{\min} to the theoretical one automatically gives a more accurate description of the flow. We checked that this choice indeed improves the agreement between theoretical predictions and observations.

The corresponding values of F_{\max} and ω_{\min} (in hertz) are respectively given by (0.48,5.28), (0.577,3.88), (0.63,3.17), (0.701,2.30), and (0.764,1.61). We fixed the flow rate of the current with a lower value than the one of the Vancouver experiments ($q = 0.045 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) because it allows us to create currents with higher Froude numbers by diminishing the height without generating turbulence since the corresponding Reynolds number is lower in our experiments. It should be noticed that, although the values of F_{\max} for our five flows differ from each other by only 50%, ω_{\min} varies from 5.28 to 1.61 Hz. To display the common properties of the transmission coefficient \tilde{A}_ω in spite of this wide range, in Fig. 6, we plot \tilde{A}_ω as a function of $\omega - \omega_{\min}$.

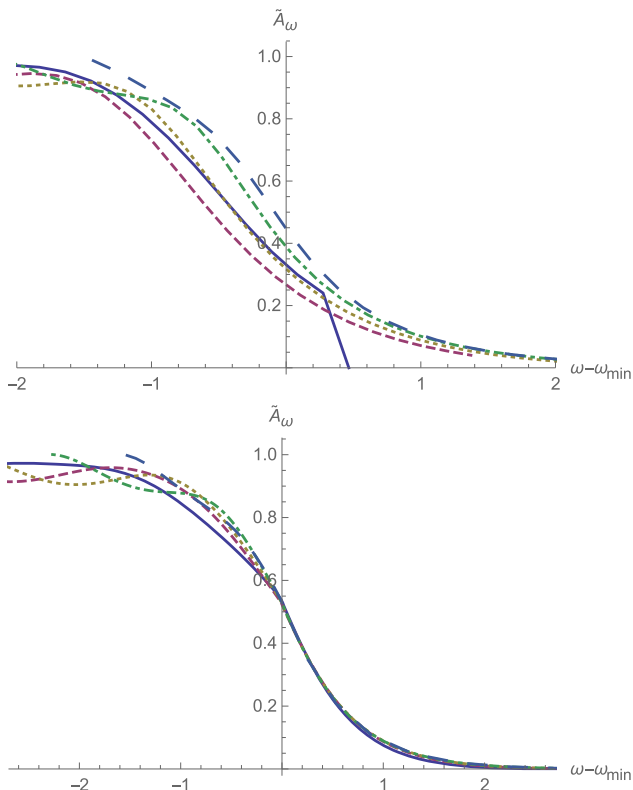


FIG. 6 (color online). Plot of the numerical value of \tilde{A}_ω vs $\omega - \omega_{\min}$ (expressed in hertz) for the five flows obtained with a fixed value of the current $q = 0.0276 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ and five different asymptotic water depths 0.181, 0.175, 0.173, 0.1715, and 0.169 m; for more details see the main text. Top: Using the standard quartic wave equation. Bottom: Using the refined wave equation of Eq. (15). The curves in (plain, blue), (purple, dashed), (yellow, dotted), (green, dot-dashed), and (lightblue, long-dashed) correspond to increasing values of the maximal value of the Froude number. The main lesson is that all curves show a sharp decrease from essentially 1 to 0 that occurs in a narrow interval of ± 1 Hz, centered at a frequency close to ω_{\min} of Eq. (12). Notice that the plain blue curve in the top panel falls off abruptly to 0 at the value of ω_{\max} computed using the naive fourth-order expansion of the dispersion relation.

We first notice that Eqs. (13) and (15) both predict that $\tilde{A}_\omega \ll 1$ for $\omega \gg \omega_{\min}$, which means that the blocking is essentially complete. We also notice that \tilde{A}_ω is close to unity for $\omega \ll \omega_{\min}$, so that the incoming wave is essentially transmitted. Interestingly, for each flow, the transmission coefficient displays a sharp decrease in a narrow frequency region which is centered around the corresponding ω_{\min} . With more precision, we found that the slope of \tilde{A}_ω where $\tilde{A}_\omega = 0.5$ is close to 0.5 seconds for the standard method and 0.7 seconds for the refined one. As a result, the transition between the two regimes occurs within a narrow interval of order 1 Hz around ω_{\min} . Since ω_{\min} varies by a factor of 3 for the five flows we considered, these results are nontrivial. Indeed, the slope could have significantly varied, and the narrow intervals could have been centered on a different frequency than ω_{\min} (which is computed using the WKB approximation). The aim of the next subsections is to experimentally verify these two properties.

It should be noticed that, even though the predictions derived from Eqs. (13) and (15) are rather similar, several differences should be noticed. First, in the upper panel, the curves stop for a smaller value of ω . This is because the value of ω_{\max} computed using the naive fourth-order expansion of the dispersion relation is significantly smaller than the exact one. Second, on the lower panel, we observe that the curves obtained are neatly superimposed for $\omega > \omega_{\min}$ and that their slopes are discontinuous at $\omega = \omega_{\min}$. These seem to be artifacts of Eq. (15) when applied to the present obstacle.

B. Experimental results

We measured the height of the free surface as a function of time using the setup described in Sec. II A, with two sensors in the downstream region and two in the upstream one. The amplitude of the incident wave was measured in the downstream side of the obstacle and found to be close to 1.6 mm. One sensor would have been sufficient, but the second one allowed us to check that the two measurements of the peak to peak amplitudes were in agreement. When the transmission was significant, these measurements were not accurate as the waves reflected at the end of the flume interfered with the incident one. We thus extrapolated the amplitude of 1.6 mm found for all larger values of ω to these frequencies. This is justified since the amplitude was found to be independent on ω for all frequencies $\omega > \omega_{\min}$.

In the upstream region, the situation is more complicated because the transmitted wave is (partially) reflected by the honeycomb in the convergent chamber. Hence, the sensors on the upstream side of the obstacle in fact measured the *superposition* of the transmitted wave and the wave reflected at the entrance of the channel. One thus anticipates an interference pattern, as the amplitude measured by a sensor can oscillate between zero and (about) twice the amplitude one would have obtained without the reflection. In fact, the sharpness of the observed peaks indicate that

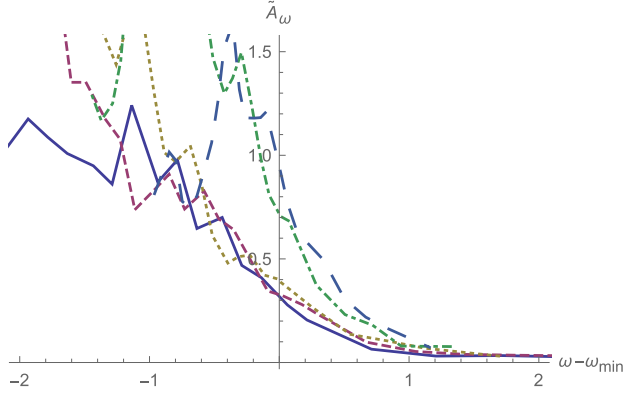


FIG. 7 (color online). Measured transmission coefficients as a function of $\omega - \omega_{\min}$, for the five flows already considered in Fig. 6. As explained in the text, the peaks at low frequencies seem to be due to multiple reflections on both ends of the flume.

there should be multiple scattering (on both ends of the flume). These should engender an interference pattern that we did not try to determine. It should be also possible to measure it by varying the distance between the upstream sensors. However, this would be very difficult since this distance, 0.4 m, is small with respect to the long wavelength of the transmitted wave. In practice, to reduce the noise and the possibility of measuring a null amplitude if one sensor would be at a node of the interference pattern (at least for not too long a wavelength), we took the mean value of the signals measured by the two upstream sensors separated by a distance taken as large as possible given the mechanical constraints. To extract the signal associated with the transmitted wave from this mean value, we performed a Fourier transform and observed a narrow signal at the frequency of the wave generator, so there is no ambiguity in measuring the amplitude of the wave in the upstream region.

Notice finally that, since the water heights are the same on both sides of the obstacle, the ratio of the transmitted and incident amplitudes should give directly (ignoring the above discussed reflections) the transmission coefficient \tilde{A}_ω of Eq. (9) which relates unit norm waves. In Fig. 7, we present the experimental results for the same set of flows as that used in Fig. 6. We clearly observe the three main theoretical predictions. First, for ω significantly larger than ω_{\min} , \tilde{A}_ω is very small. Second, \tilde{A}_ω becomes of order 1 for $\omega < \omega_{\min}$. Third, more importantly, for the five flows, the transition occurs in a narrow interval of ~ 2 Hz which, moreover, is centered close to the value of ω_{\min} of the corresponding flow.

We also observe that the curves are relatively smooth for $\omega > \omega_{\min}$ but show strong peaks for $\omega < \omega_{\min}$. As these peaks are sharp and make \tilde{A}_ω go above 1, we believe they are due to the finite size of the flume. As discussed above, reflections on both ends of the flume are expected to significantly affect the measurements of the amplitude of the transmitted wave.

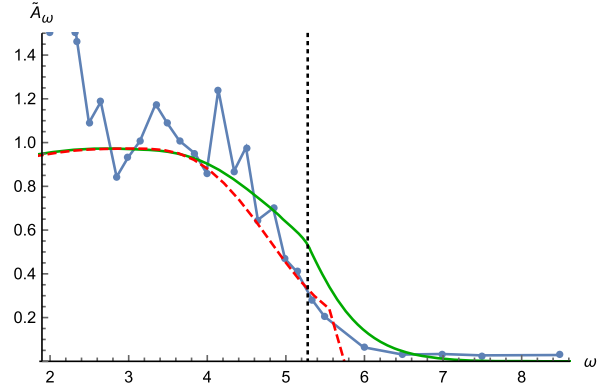


FIG. 8 (color online). Plot of the transmission coefficient \tilde{A}_ω vs the angular frequency ω (in hertz) for a flow over the obstacle. The asymptotic water depth is $h_d = 0.181$ m and the flow is $q = 0.0276$ m².s⁻¹. The green, solid curve shows the numerical prediction obtained using the method based on Eq. (15), and the red, dashed one shows results from a standard fourth-order expansion of the dispersion relation around $k = 0$. Dots are the experimental data. The dotted vertical line indicates ω_{\min} .

C. Comparison of numerical and experimental results

To illustrate the quality of the correspondence between theoretical predictions and experimental data, in Fig. 8, we plot \tilde{A}_ω as a function of $\omega - \omega_{\min}$ for the flow with the largest asymptotic water depth. Overall, we observe a good agreement between the three curves. In particular, they show the same strong decrease of \tilde{A}_ω near ω_{\min} . With more details, for small values of ω , we see that the two numerical methods agree very well with each other. They both predict that the transmission coefficient goes to 1 in the small-frequency limit $\omega \rightarrow 0$. In this domain the agreement with experimental data is rather poor. We believe this is due the reflection of the transmitted wave mentioned in Sec. III B. When approaching $\omega = \omega_{\min}$, the predictions of the two numerical methods show a non-negligible difference.

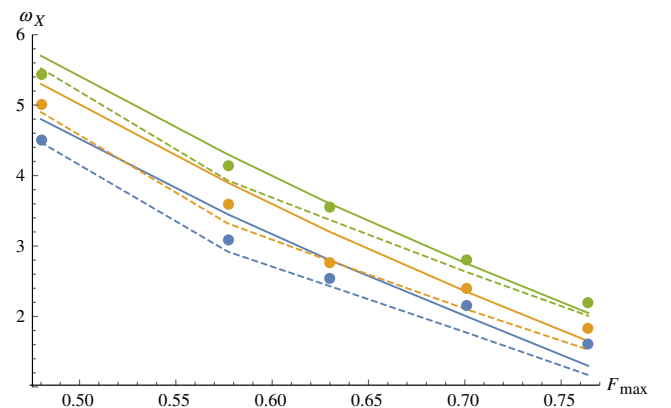


FIG. 9 (color online). Plot of the frequencies ω_X where \tilde{A}_ω reaches the value X , for $X = 1/\sqrt{2}$ (green), $1/2$ (orange), and $1/4$ (blue). Plain lines are obtained using the refined wave equation of Eq. (15), dashed ones are obtained using the standard quartic wave equation of Eq. (13), and dots are the experimental data.

Interestingly, experimental data show a better agreement with the “naive” one based on Eq. (13). However, given the expected uncertainties, this could be fortuitous.

To compare the numerical and experimental results more quantitatively, we show in Fig. 9 the theoretical and experimental values of the angular frequencies ω_X for which \tilde{A}_ω reaches $X = 1/\sqrt{2}$, $1/2$, and $1/4$, for the five flows previously described. We notice that the agreement between numerical and experimental data is quite good. Indeed, the errors are of the order of 10% or smaller, except for the two last flows for $X = 1/\sqrt{2}$ where the contribution of spurious narrow peaks is large. We find the agreement is best for $X = 1/4$, as expected since the experimental data are less noisy for higher frequencies. The present agreement between theory and experimental data with relative errors of about 10% is the main result of this work.

D. Application to the Vancouver experimental setup

To conclude this study, we consider the settings of the Vancouver experiment [7], namely with an asymptotic water depth of 0.194 m and a current flow rate of $q = 0.045 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. We recall that these have been chosen to detect the analogue Hawking radiation by observing the ratio $R_\omega = |\beta_\omega|^2/|\alpha_\omega|^2$ of the coefficients of the dispersive waves of opposite norms in Eq. (9). Before discussing the behavior of the transmission coefficient \tilde{A}_ω , we point out that we also measured R_ω using techniques similar to those used in Vancouver. In agreement with what was reported [7], we found that $\ln R_\omega$ is approximatively linear in ω with a similar value of the slope. This indicates that the forthcoming analysis, which concerns a coefficient which was not studied in Ref. [7], is compatible with the results of that work.

Given the asymptotic water depth and the flow rate, we obtain that the maximum value of F is $F_{\max} \approx 0.7$ and that the critical frequency of Eq. (12) is $\omega_{\min} \approx 2 \text{ Hz}$.³ In Fig. 10 we present our numerical and experimental results. As in the previous cases, we observe a relatively good agreement between the theoretical and the observational curves. In particular, we see that the transmission coefficient \tilde{A}_ω is larger than $1/2$ for $\omega < \omega_{\min}$. More precisely, we see that $|\tilde{A}_\omega|^2 = 1/16$ is reached for $\omega \approx 2.6 \text{ Hz}$. Accepting about 6% of

³These values of ω_{\min} and F_{\max} are computed using the measured minimal value of h and under the approximations mentioned at the beginning of Sec. II B. This minimum value of h closely matches that obtained from the analysis presented in the Appendix, as well as the refined treatment presented in Ref. [18] and applied in the Appendix A of Ref. [12]. However it must be noted that measurements of the wavelength of the undulation in the downstream region seems to indicate that the velocity at the surface is larger than expected by about 10%. We believe that the origin of the discrepancy is mainly due to the neglect of the vorticity of the flow near the bottom. This could notably affect the values of ω_{\min} and F_{\max} . We hope to shortly clarify this point using more precise data obtained from particle image velocimetry.

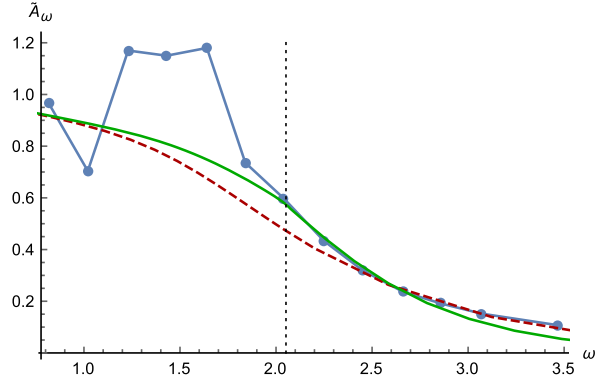


FIG. 10 (color online). Plot of the transmission coefficient \tilde{A}_ω as a function of ω for an asymptotic water depth of 0.194 m and a current flow rate $q = 0.045 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. The green plain curve is obtained using the refined numerical method, the dashed red one is obtained using the standard fourth-order expansion of the dispersion relation, and dots are the experimental data. The dotted vertical line indicates the value of the angular frequency $\omega_{\min} = 2.05 \text{ Hz}$ obtained from the simplified analysis of the background flow of the Appendix.

relative errors, this means that the contribution of the transmission coefficient to the unitarity relation Eq. (10) can be neglected only for relatively high frequencies. In fact, for five of the nine experimental points of the Fig. 5 of Ref. [7], $|\tilde{A}_\omega|^2$ is larger than $1/16$. Because of this, the unitarity relation Eq. (10) differs from the standard one which reads $|\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 = 1$. Hence, Eq. (10) cannot be used to support the interpretation of the linear behavior of $\ln R_\omega$ as an indication of the Planckianity of the spectrum. We refer to the detailed analysis of Ref. [12] for a discussion of these matters and the conditions needed to have a clear relation with the Hawking effect. In particular, it is shown that the subcritical character of the flow implies that $|\beta_\omega|^2$ of Eq. (9) remains much smaller than 1, typically of order 10^{-5} , instead of diverging as $1/\omega$, as it is found in transcritical flows where the correspondence with black hole physics is much clearer.

We also note that the good agreement between the theoretical curves and the observational data concerning the transmission coefficient \tilde{A}_ω is a strong indication that the predictions of Ref. [12] concerning the other three coefficients of Eq. (9), see Fig. 9 left panel, are also in good agreement with the physics. We believe this is the second important outcome of the present paper.

IV. CONCLUSIONS

We studied the transmission coefficient of counterpropagating shallow-water waves over a localized obstacle, both theoretically and in an experimental setup. For a given obstacle and a given current, we considered a series of five subcritical flows obtained by varying the asymptotic value of the water height. The maximal value of the Froude number F_{\max} reached on top of the obstacle varied from

0.48 to 0.764, and the corresponding critical frequency ω_{\min} varied from 5.28 to 1.61 Hz. For each flow, the ~ 25 values of the probed frequencies ranged from $0.4\omega_{\min}$ to $1.7\omega_{\min}$. We found a clear quantitative agreement between the theoretical predictions and the experimental data.

The main property of the transmission coefficient which is common to all flows is the following: for an increasing value of the frequency, the coefficient sharply decreases from essentially 1 (transmission) to zero (blocking) in a narrow frequency interval (of ± 1 Hz) centered around the critical frequency ω_{\min} . In addition, we found that the slope in this interval hardly depends on the value of ω_{\min} . (This is correct at least for low Froude numbers. For the two highest values, the contribution of narrow peaks associated with multiple reflections seem to contaminate the slope.) To complete our analysis, we also considered the transmission coefficient in the flow used in the Vancouver experiment. We basically recovered the same properties as the above ones. These imply that the transmission coefficient cannot be neglected for about the lower half frequency range that was probed.

At this point, it should be underlined that the theoretical analysis [12] indicates that a clear correspondence with the Hawking effect, namely a mode mixing coefficient $|\beta_{\omega}|^2$ of (9) growing as $1/\omega$ in a sufficiently large frequency range, can be found only if the transmission coefficient is sufficiently small. It is therefore important to reduce the transmission at low frequency, i.e., to improve wave blocking. To this end it is necessary to increase the maximal value of the Froude number. Indeed, as shown in Eqs. (8)–(12), ω_{\min} decreases as $(1 - F_{\max}^2)^{3/2}$. In future experiments, one should thus try to work with significantly higher values of F_{\max} than those used in Refs. [6,7].

In the future, we also hope to be able to measure the scattering coefficients of the four outgoing waves and to validate the predictions obtained by using the improved quartic equation we introduced in Sec. II C. On the numerical side, it would be interesting to see how the results are affected when using a scheme which approximates the exact dispersion relation more closely. It could even be possible to take the full dispersion relation into account using the technique described in Ref. [22]. The description of the background flow should also be improved if one aims at getting relative errors $\ll 10\%$. This could be achieved by using a low gradient approximation if the Froude number does not change significantly along the flow. It would also be important to study the consequences of the multiple scattering on both ends of the flume, and those of the undulation, as was recently done in Ref. [23] in the context of atomic Bose–Einstein condensates.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Romain Bellanger, Jean-Marc Mougenot, and Patrick Braud for their help in the course

of the experiments. Yvan Jolit and Jean-Marc Mougenot designed the wave maker. We thank Scott Robertson and Iacopo Carusotto for interesting comments. We also thank Bill Unruh and Silke Weinfurter for many interesting discussions. This work has benefited from the following funding: CNRS Interdisciplinary Mission in 2013, ACI “Wave-current Interaction” from the University of Poitiers in 2013, and CNRS Interdisciplinary PEPS PTI “DEM-RATNOS” in 2014.

APPENDIX: THEORETICAL DESCRIPTION OF BACKGROUND FLOWS

We briefly explain the procedure we adopt to get an approximate description of the stationary background flows over the obstacle we used in the experiment. Because the Froude number remains sufficiently smaller than 1, it is legitimate to use Bernoulli equation and to neglect the vertical component of the flow velocity. These approximations will be justified *a posteriori* using a self-consistency criterion and ultimately by the relatively good agreement with experimental data.

Only stationary longitudinal two-dimensional flows are here considered, following Ref. [18]. The longitudinal coordinate is called x , and the vertical one is called y . We denote as $y = p(x)$ the height of the obstacle, assumed to vanish asymptotically on both sides; P the local pressure; and ρ the (constant) density of the fluid. The Bernoulli equation gives [24]

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gy + \frac{P}{\rho} \right) = 0. \quad (\text{A1})$$

Neglecting the surface tension (so that P is a constant along the free surface) and the vertical component of the velocity, one obtains

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{h(x)^2} + g(h(x) + p(x)) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{h_0^2} + g(h_0 + p_0), \quad (\text{A2})$$

where h_0 and p_0 are the water depth and obstacle height at a given point $x = x_0$. In practice we chose x_0 to be a point where p is maximal, so that the shape of the free surface is close to the actual one where the Froude number reaches its maximum. It is easily shown that Eq. (A2) has two positive solutions in h provided

$$\frac{3}{2} (gq)^{2/3} + gp < \frac{1}{2} \left(\frac{q}{h_0} \right)^2 + g(h_0 + p_0). \quad (\text{A3})$$

The smallest one is supercritical $v > c$, while the largest one is subcritical $v < c$. If Eq. (A3) is not satisfied, Eq. (A2) has no positive solution. For the parameters we shall consider, Eq. (A2) is always satisfied. Moreover, we only consider subcritical flows, so we will always choose the largest value of $h(x)$, solution of Eq. (A2).

One can now check the hypothesis that $v_y \ll v_x$. To this end, since the free surface is a streamline, we have

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{d}{dx}(h + b). \quad (\text{A4})$$

An easy calculation using Eq. (A2) shows that this is equal to

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{F^2}{F^2 - 1} \frac{db}{dx}, \quad (\text{A5})$$

which can be easily evaluated given the shape of the obstacle. For the flows we shall consider this quantity is always smaller than 10% in absolute value. So, neglecting v_y before v_x is justified. One possible loophole in this argument is the appearance of an undulation, i.e., a zero-frequency mode with nonvanishing wave vector, which is not described by Eq. (A2) but which was observed in the laboratory. Even if its amplitude is small, it could in principle have an important effect as it extends in the whole downstream region. However, the preliminary analysis of Ref. [12] indicates that its effect on the transmission coefficient is rather small.

-
- [1] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
 [2] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **51**, 2827 (1995).
 [3] S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
 [4] R. Schützhold and W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **66**, 044019 (2002).
 [5] G. Rousseaux, *Analogue Gravity Phenomenology* (Springer, New York, 2013), Chap. 5, <http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-00266-8>.
 [6] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maissa, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, *New J. Phys.* **10**, 053015 (2008).
 [7] S. Weinfurter, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021302 (2011).
 [8] S. Finazzi and R. Parentani, *J. Phys. Conf. Ser.* **314**, 012030 (2011).
 [9] S. J. Robertson, *J. Phys. B* **45**, 163001 (2012).
 [10] S. Finazzi and I. Carusotto, *Eur. Phys. J. Plus* **127**, 78 (2012).
 [11] S. Finazzi and I. Carusotto, *Phys. Rev. A* **87**, 023803 (2013).
 [12] F. Michel and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **90**, 044033 (2014).
 [13] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, *Living Rev. Relativity* **8**, 12 (2005).
 [14] M. W. Dingemans, *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms* (World Scientific, Singapore, 1997).
 [15] A. L. Fabrikant and Y. A. Stepanyants, *Propagation of Waves in Shear Flows* (World Scientific, Singapore, 1998).
 [16] P.-J. Faltot, R. Bellanger, J.-M. Mougenot, and G. Rousseaux, *Journées Nationales Génie Côtier-Génie Civil* **13**, 79 (2014).
 [17] S. Weinfurter, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and A. G. Lawrence, *Analogue Gravity Phenomenology* (Springer, New York, 2013), Chap. 8, <http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-00266-8>.
 [18] W. G. Unruh, *Analogue Gravity Phenomenology* (Springer, New York, 2013), Chap. 4, <http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-00266-8>.
 [19] A. Coutant and R. Parentani, *Phys. Fluids* **26**, 044106 (2014).
 [20] J. Macher and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **79**, 124008 (2009).
 [21] A. Coutant, R. Parentani, and S. Finazzi, *Phys. Rev. D* **85**, 024021 (2012).
 [22] S. Robertson and U. Leonhardt, *Phys. Rev. E* **90**, 053302 (2014).
 [23] X. Busch, F. Michel, and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **90**, 105005 (2014).
 [24] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 6 (Pergamon, London, 1959).

Analog wormholes and black hole laser effects in hydrodynamicsCédric Pélouquin,¹ Léo-Paul Euvé,² Thomas Philbin,³ and Germain Rousseaux²¹*Université François Rabelais de Tours, 60 Rue du Plat d'Étain, 37000 Tours, France*²*Prime Institute, UPR 3346, CNRS—Université de Poitiers—ISAE ENSMA, 11 Boulevard Marie et Pierre Curie, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Cedex, France*³*Physics and Astronomy Department, University of Exeter, Stocker Road, Exeter EX4 4QL, United Kingdom*

(Received 21 July 2015; revised manuscript received 14 December 2015; published 18 April 2016)

We numerically study water wave packets on a spatially varying countercurrent in the presence of surface tension. Depending on the details of the velocity profile, we show that traversable and bidirectional analogue wormholes exist in fluid mechanics. The limitations on traversability of wormholes in general relativity are absent here because of the dispersion of water waves and the ability to form flow profiles that are not solutions of Einstein's equations. We observe that negative energy can be trapped between analogue horizons forming a laserlike cavity. Six horizons are involved in the trapping cavity because of the existence of two dispersive scales, in contrast to previous treatments which considered two horizons and one dispersive scale.

DOI: 10.1103/PhysRevD.93.084032

I. INTRODUCTION

A wormhole is a connection between separate parts of the Universe featuring a black hole (or gravitational drain) and its time-reversed partner, a white hole (or gravitational fountain). The Einstein-Rosen bridge of general relativity is a wormhole with one black and one white hole horizon, but it is not traversable (even in one direction) because it closes up too quickly [1,2]. Thorne *et al.* hypothesized the existence of exotic matter possessing negative energy in order to stabilize wormholes that can become two-way tunnels through space-time [3]. Following these authors, one may hypothesize that an “exotic” wormhole may be traversable and bidirectional. Strictly speaking, an “exotic” wormhole would no longer feature horizons in the sense of classical general relativity.

Analogue gravity studies the similarities at the level of kinematics between the propagation of light in curved space-times and the propagation of waves in moving condensed matter media [4,5]: The Hawking radiation of a horizon is currently the archetypal example of astrophysical phenomenon that is studied by condensed matter groups in the laboratory. It is well known that the analogy breaks down at the level of dynamics since the dynamical equations are different: Einstein's equations for space-time and say, Navier-Stokes equations for classical fluid analogues. Nevertheless, Schützhold and Unruh demonstrated that water waves propagating on a flow current can be seen as a gravitational analogue for the propagation of light in a curved space-time in the long wavelength regime corresponding to shallow gravity waves [5,6]. This analogue system is currently under experimental scrutiny [7–10]. In this condensed matter system, the velocity of light is mimicked by the velocity of nondispersive long gravity waves in water with speed $|c| = \sqrt{gh}$ where h is the water

depth [5,6]. The horizon is the place where the velocity of the flow $U(x) > 0$ (the flow is positive when going to the right) is equal in modulus to the velocity of the wave $c(x) < 0$ known as the critical condition in fluid mechanics and where x is the position along the water channel. The flow current when varying in space induces an effective curved space-time for the hydrodynamic waves propagating on top of it. For example, the Schwarzschild spherical geometry is analogous to a flow with a current given by $U(r) = |c|\sqrt{r_S/r}$ where r_S is the Schwarzschild radius namely a constant which depends only on the mass of the black hole and the gravitational constant. Obviously, the “flow current” for the Schwarzschild geometry goes to zero at infinity. Analogue gravity is, in a sense, more general than general relativity since it encompasses as many velocity profiles as experimentalists in condensed matter can design. From the point of view of a relativist, the analogy is not exact even if the flow goes to zero because $U(x)$ does not reproduce exactly the flow profile of the Schwarzschild space-time even in that case. From the point of view of analogue gravity, one can generate any flow profile and look for the common features between the experiments in condensed matter physics and the relativistic predictions which are narrower since they are derived in the particular velocity profile corresponding to the Schwarzschild space-time. In water wave physics, the flow is generated with a pump in a water channel, and the variations are induced either by a changing depth or width. Hence, using a bump one can generate easily subcritical ($U < |c|$) and supercritical ($U > |c|$) regions. In the experiments performed so far, either the flow vanishes far from the bump [7,8] or it becomes uniform [9,10]. Strictly speaking, the flat space-time would correspond either to a vanishing current velocity region or a constant flow

region, whereas a curved space-time corresponds to a region with an inhomogeneous current in space.

We can possibly design “exotic wormholes” by looking at “analogue wormholes” namely pairs of horizons which are stable in analogue gravity contrary to general relativity since the dynamical equations are not the same. We look in this work at the fate of a wave packet propagating into an analogue wormhole in hydrodynamics. By looking first at the nondispersive case, we recover similar behavior to that in general relativity. Indeed, a major interest of the analogue gravity program is the inclusion of dispersion which removes the infinite blueshifting of waves close to the horizon of a black/white hole, avoiding the so-called trans-Planckian problem [11,12]. The Hawking radiation of horizons has been shown to be robust in certain regimes even in the presence of dispersion [4,5,13]. Then, the existence of bidirectional and stable “analogue” wormholes in hydrodynamics is shown. Their stability is due to dynamical effects (the Navier-Stokes equation allows such stationary flows to exist), while their bidirectionality is due to dispersive effects.

A straightforward consequence is the appearance of an analogue black hole laser effect between pairs of horizons playing the role of a laser cavity in a supercritical region. The latter effect is implemented in water wave physics with an anomalous dispersion relation following Schützhold and Unruh [6] who described a version with normal dispersion. The black hole laser effect was theoretically predicted for the first time by Corley and Jacobson [14] and is further discussed in [15]. We note also its numerical demonstration in optics [16] and its recent experimental observation in a Bose-Einstein condensate by Steinhauer [17].

II. NONDISPERSIVE WORMHOLES IN HYDRODYNAMICS

The dispersion relation in the dispersionless regime of analogue gravity is $\omega = (U \pm c)k$ where ω is the angular frequency and k is the longitudinal wave number (see Fig. 1). In water waves physics, U is the flow current, whereas c is the water wave velocity. The reader is referred to the review chapter in [5] on the dispersive effects met in water waves physics. In the supercritical region (for example, in the interior of a black hole in general relativity), negative energy waves with negative relative frequency ($\omega - Uk < 0$) are present, and they are the analogue of antiparticles in quantum field theory. Whereas the positive relative frequency solutions ($\omega - Uk > 0$) of the dispersion relation are the analogue of particles, and they only live in the subcritical region (namely outside of the black/white hole) if the system is dispersionless. The domain of existence of analogue particles/antiparticles changes due to the presence of dispersion and no longer are separated necessarily by the horizon as in the dispersionless regime.

We can create a pair of horizons in a water channel either by changing twice the depth or the width of its cross

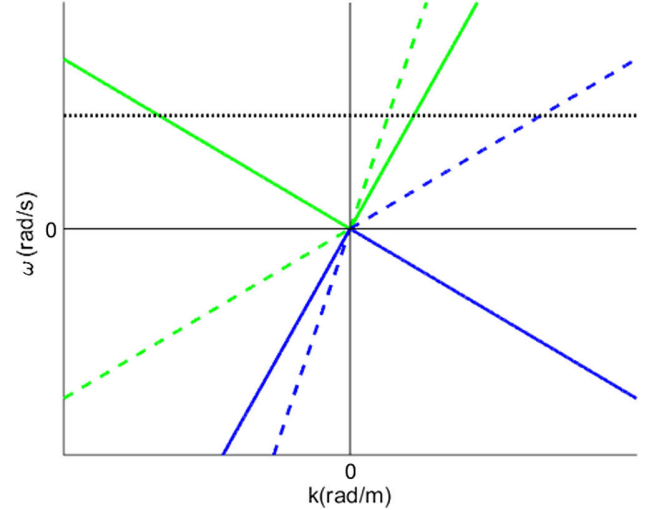


FIG. 1. Plots of the dispersion relation in the nondispersive limit for the black hole case ($\omega = (U \pm c)k$, $U > 0$) for a subcritical region where $U = 0.5 \cdot |c|$ (continuous straight lines) and for a supercritical region where $U = 1.5 \cdot |c|$ (dashed lines). The positive relative frequency $\omega' = \omega - Uk = \pm ck' = \pm ck$ corresponds to the green color (the ' corresponds to the flow current frame of reference); the negative relative frequency is in blue. The conserved frequency of an incident wave as generated by a wave maker is the horizontal line in dotted black.

section. For example, if the current flows over a bump, the current can reach first a black hole horizon in the accelerated region on the ascending slope ($dU/dx > 0$ and $U = |c|$) and then a white hole horizon in the decelerated region on the descending slope ($dU/dx < 0$ and $U = |c|$). Hence, in the interhorizons region, the flow is supercritical in the long wavelength approximation, whereas the flow is subcritical on both sides of the bump (see Fig. 2, left). Inversely, if the current flows over a trough, it generates first a white horizon and then a black horizon. In this configuration the flow is subcritical between both horizons, whereas it is supercritical outside (see Fig. 2, right). For both the bump and the trough geometries and depending on the shape of the bump (for example, by including a flat plate on the top of it), we can reach a constant flow region of a finite extent where the flow is supercritical and where dispersionless waves can only propagate in a co-current direction so are compelled to be expelled from this supercritical black/white hole region.

Contrary to general relativity, a wormhole in hydrodynamics would be stable and stationary provided the flow current is constant in time. As in general relativity, an analogue wormhole in hydrodynamics would be unidirectional if the medium is dispersionless since an incoming wave packet willing to enter into the analogue wormhole and generated in the subcritical region outside the black hole (namely in the flat space-time region) can only propagate in the co-current direction by entering first into the black hole through the black horizon, then it would

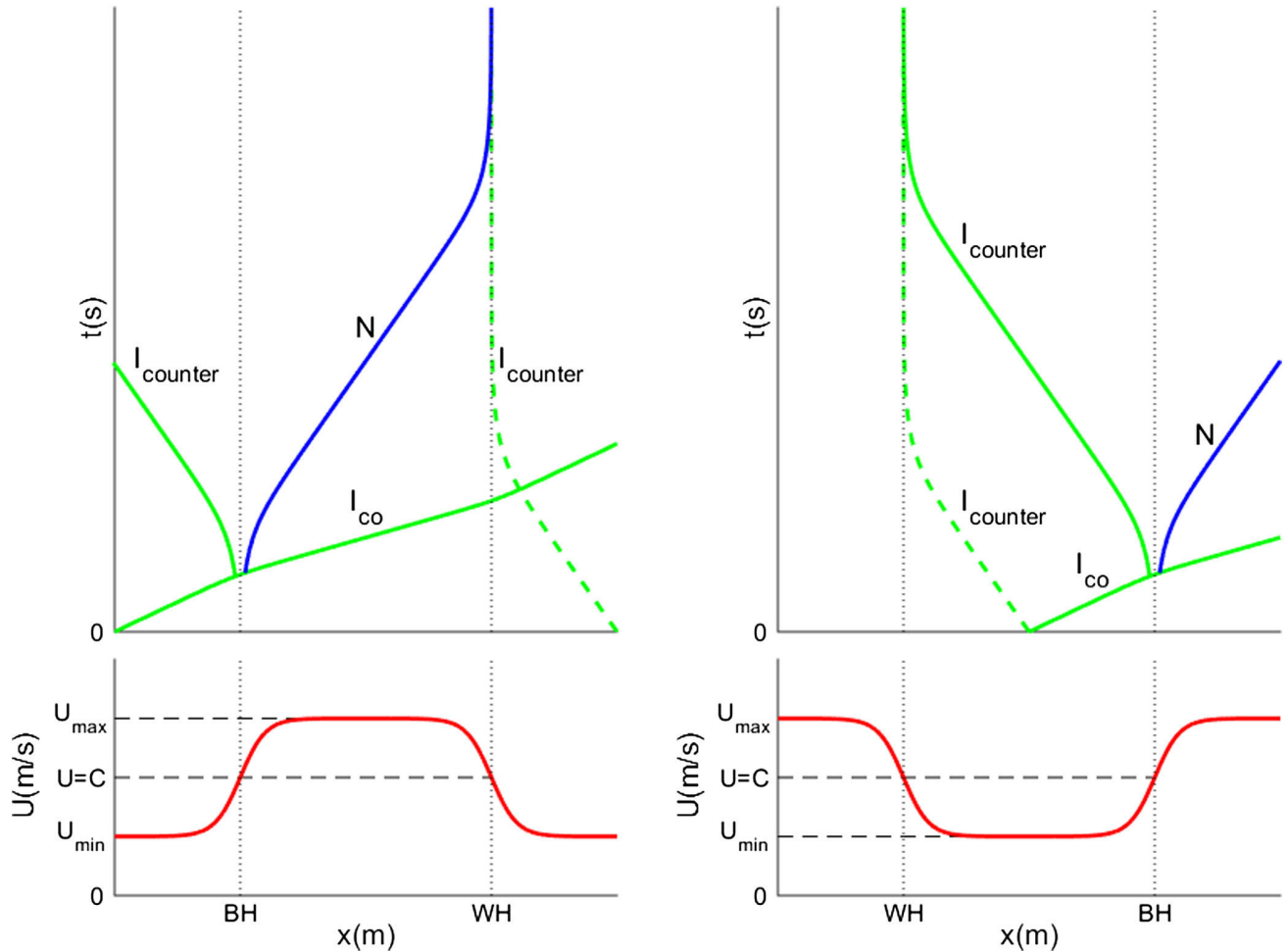


FIG. 2. Left bottom: velocity field for a bump geometry. Right bottom: velocity field for a trough geometry. Left and right top: scheme of the associated space-time diagrams. For both cases, we set $U_{min} = 0.5 \cdot c$ and $U_{max} = 1.5 \cdot c$.

proceed in the supercritical region following the current, before escaping the white hole through the white horizon where it would reach a new flat space-time region (I_{co} in Fig. 2, left top in continuous line). This case is denoted as—black \rightarrow white—in the rest of the paper where continuous lines refer to wave packets and their mode-converted partners which are generated in co-current, whereas dashed lines refer to the ones generated in countercurrent. In the dispersionless regime, the only direction of propagation which is permitted is—black \rightarrow white—(co-current): The incident wave entering into the analogue black hole is just refracted at the black horizon and at the white one by the velocity gradient. A larger velocity gradient ($\frac{\partial U}{\partial x}$) would be able to convert a part of the incident wave into a negative mode in the supercritical region and a positive countercurrent mode in the subcritical region near to the black hole. But this negative mode would suffer an infinite blueshifting when arriving on the white horizon (see the continuous lines in Fig. 2, left top). Hence, due to the flow gradient (analogue to the tidal

forces at the horizon), mode conversion happens (in continuous lines): I_{co} is converted partly into positive energy waves $I_{counter}$ and negative energy waves N (see Fig. 2, left top in continuous line). Conversely, the reverse travel of a wave packet (starting in the subcritical region on the right of the bump in Fig. 2, left, that is outside the white hole region) through the very same wormhole in the direction—white \rightarrow black—, namely against the countercurrent, would be impossible due to the infinite blueshifting at the white hole horizon ($I_{counter}$ in Fig. 2, left top in dashed line). This behavior is similar to the trans-Planckian problem in general relativity ($I_{counter}$ in Fig. 2, left top in dashed line) since the wavelength goes to zero at the horizon because $k = \omega/(c - U)$.

A similar phenomenon appears in the case of a wave packet sent in the interhorizon region in a trough velocity field (see Fig. 2, right bottom). The incident wave packet $I_{counter}$ going against the current is infinitely blueshifted at the white horizon (see Fig. 2, right top in dashed line). The incident mode I_{co} in co-current goes through the black

horizon, converts to a negative mode N in the supercritical region and a positive countercurrent mode in the subcritical region I_{counter} which is also characterized by a continuous line because it comes from the conversion of the wave packet I_{co} . To resume, we separate the two cases (continuous and dashed) by the direction in which the wave packet is sent initially. In all the cases and without dispersion, the pathology of the infinite blueshifting is present at the horizons as is well known in analogue gravity [4,13].

III. THE EFFECT OF DISPERSION IN HYDRODYNAMICS

A cascade of dispersive scales can be encountered in analogue gravity to deal with the trans-Planckian problem (see the chapter by Chaline *et al.* in [5]). In water wave physics, the first obvious scale is the water depth h [5]. At shorter wavelength, the effect of surface tension becomes relevant [5]. Rousseaux *et al.* studied the effect of the capillary length on the blocking of water waves, and they showed how it can play the role of a cutoff on analogue Hawking radiation [5,8]. Following the experimental observation of Badulin *et al.* [18] and the calculations of Trulsen and Mei [19], they provide a parameter space diagram where the blocking velocity of waves at horizons is a function of their incoming period for a white hole configuration (an incoming wave starting outside of the white hole horizon in the subcritical region propagates in the direction opposite to the current and it may be blocked and mode converted). Rousseaux *et al.* characterized the different mode conversions featuring six wave numbers and three horizons (white, blue and negative) described by the dispersion relation of water waves [5,20] ($\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ and $\gamma = 0.074 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ for water):

$$\omega = Uk \pm \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \tanh(kh)}. \quad (1)$$

The latter may be derived from the generalized Unruh equation including both the dispersive effects of the water depth and surface tension [5,8] (the numerical technique we used to solve it is described in [11]):

$$(\partial_t + \partial_x U)(\partial_t + U\partial_x)\phi = i\left(g\partial_x - \frac{\gamma}{\rho}\partial_x^3\right) \tanh(-ih\partial_x)\phi. \quad (2)$$

Its long wavelength limit describes the propagation of light in curved space-time provided the velocity of light corresponds to the velocity of long gravity waves $c = \sqrt{gh}$ [5,6].

If we introduce the two dispersive lengths into the dispersion relation (the water depth h and the capillary length $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 2.7 \text{ mm}$ in water), we get

$$\begin{aligned} (\omega - Uk)^2 &= \left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right) \tanh(kh) \\ &= gk(1 + l_c^2 k^2) \tanh(kh). \end{aligned} \quad (3)$$

If we approximate the dispersion relation by a Taylor series up to the third order and assuming $kh \ll 1$, we obtain

$$(\omega - Uk)^2 \simeq ghk^2 - \left(\frac{gh^3}{3} - gl_c^2 h\right)k^4. \quad (4)$$

Hence, the water depth induces a dispersive correction in $-k^4$, whereas the capillary length induces a correction in $+k^4$ [5,6]. The latter positive correction is reminiscent of the Bose-Einstein condensate scenario with Bogoliubov phonons [17] that can be tested with a circular jump experiment in hydrodynamics [21]. We now study the fate of a wave packet that enters into a white hole due to the two dispersive lengths and a double-bouncing scenario. To demonstrate the bidirectional nature of a wormhole in hydrodynamics, we also study the entrance into a black hole which is the case usually discussed in general relativity.

IV. GENERAL SETTINGS

A. Wave packet

We send on a flow a Gaussian wave packet (see Fig. 3) whose mathematical expression is

$$a(x) = Ae^{i k_0(x-x_0)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}, \quad (5)$$

where A is its amplitude fixed to 1 in arbitrary units since we are in the linear approximation corresponding to small perturbations of the free surface. Here, k_0 corresponds to

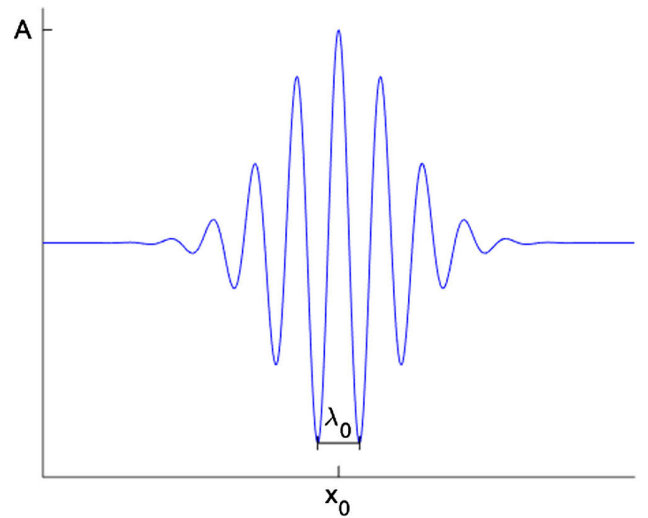


FIG. 3. The wave packet as described by Eq. (5) used in all simulations with $\sigma = \lambda_0$.

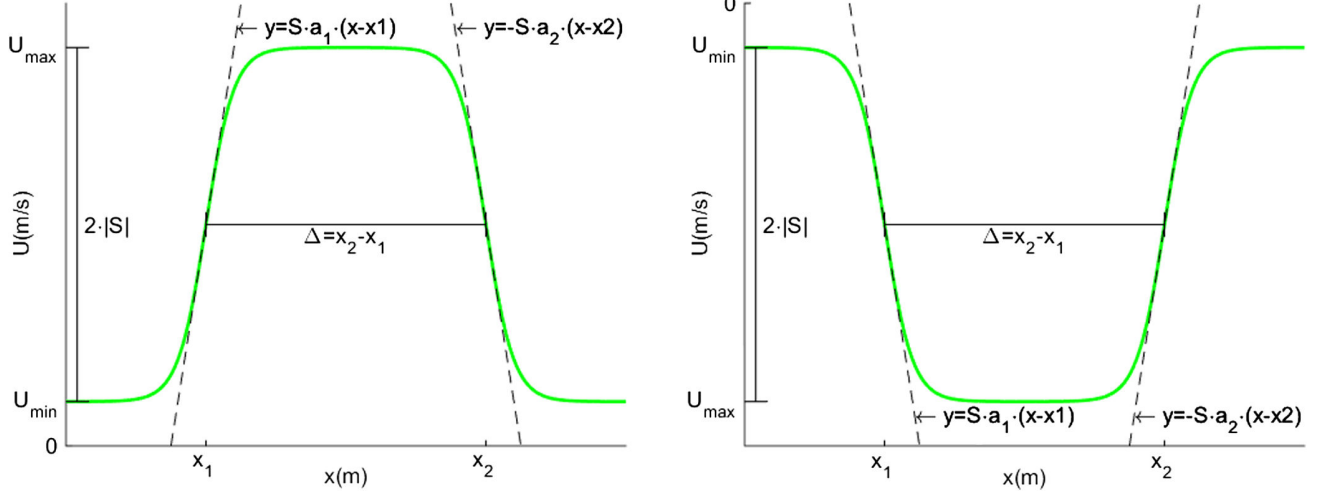


FIG. 4. Left: velocity field for the travel—black → white—(co-current $U > 0$). Right: velocity field for the travel—white → black—(countercurrent $U < 0$).

the central wave number in the spectral representation of the wave packet. Also, σ is a parameter controlling the initial width of the wave packet, and x_0 is the initial position of the wave packet center.

B. Velocity fields

As with previous simulations on the interaction of a current and a wave packet, we take as a model flow a hyperbolic tangent with two assumed nondispersive horizons (white and black) separated by a given distance (see Fig. 4):

$$U(x) = U_{\min} + S(\tanh(a_1 \cdot (x - x_1) - \tanh(a_2(x - x_2))), \quad (6)$$

where $|U_{\min}|$ is the minimal velocity far from the region where the current changes significantly, a_1 is the slope on the left side of the velocity profile and a_2 is its right counterpart. Here, $\Delta = x_2 - x_1$ is the distance between the two maxima of the velocity profile gradient. We recall that the gradient of the velocity profile taken at the nondispersive horizon in analogue gravity is the analogue of the surface gravity in general relativity and that it controls the mode conversion intensity [4]. Here, S is the step velocity between the top and the bottom of the velocity profile: $U_{\min} + 2S = U_{\max}$ is the maximum velocity reached by the fluid. The maximum gradients are (for $i = 1$ or 2)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \pm a_i \cdot S \quad (7)$$

The water depth is assumed constant in contrast to the velocity which changes with position, as if the width of the water channel were changing albeit with a fixed depth.

C. Horizons and solutions

A dispersive horizon (namely a turning point) is such that the group velocity ($v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$) is null for a certain angular frequency ω : It corresponds to an extremum in the graphical representation of the dispersion relation (see Fig. 5, left). In presence of surface tension, the combination of the two dispersive lengths mentioned above creates either three or six horizons depending on the configurations (half a bump/trough or a complete bump/trough). A nondispersive white horizon of a white hole degenerates into three dispersive horizons: the so-called white, blue and negative white horizons [5,8]. Conversely, a nondispersive black horizon also degenerate into three other dispersive horizons by time reversal symmetry: the so-called black, red and negative black horizons. At a different position from the blocking points, we can have up to six wave vector solutions for the fixed frequency sent by, say, a wave maker in a water channel (see Fig. 5, right).

D. Critical periods: T_c and T_b

The wave packet (k_0 has a frequency ω_0) is created in a constant velocity region with a subcritical velocity. Then, we follow its evolution in time. In [5,8], different regimes were distinguished (that depend on the period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ of the incoming capillary-gravity wave packet) separated by two peculiar periods T_c and T_b . When $T = T_c$ (see Fig. 6, left), both white and blue horizons merge and disappear for $T < T_c$. In that case, the incoming wave is so blueshifted by the countercurrent that it becomes a capillary wave which does not see anymore the white horizon: the so-called direct penetration scenario. This is similar to the behavior of phonons in a BEC with a Bogoliubov-type dispersion relation [4,5]. For $T = T_b$ (see Fig. 6, right), negative and white horizon are at the same position, and for $T < T_b$, the conversion from an incident mode to a negative mode is impossible due to the absence of negative solution

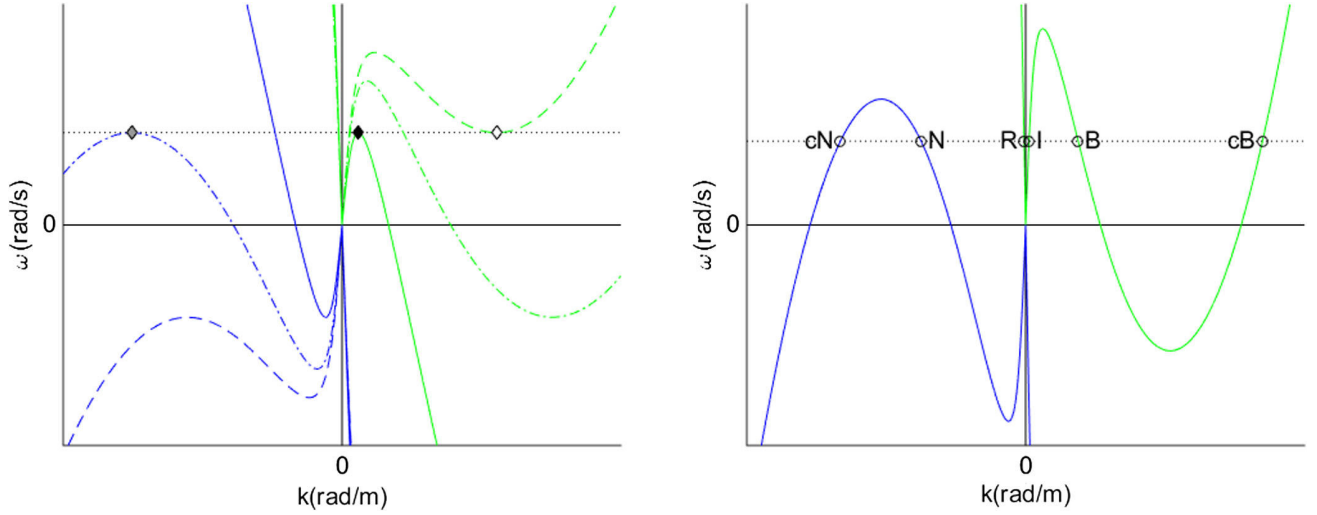


FIG. 5. Left: The horizons in the Fourier space (for the dispersion relation of capillary-gravity waves with $U < 0$); white/black horizon (black diamond), blue/red horizon (white diamond), negative white/negative black horizon (gray diamond); the branches with a positive relative frequency are in green and the ones with a negative relative frequency are in blue. Right: The six solutions for a given frequency for a white hole configuration: incident wave (I), retrograde (R), blueshifted (B), capillary positive (cB), negative (N), capillary negative (cN) modes.

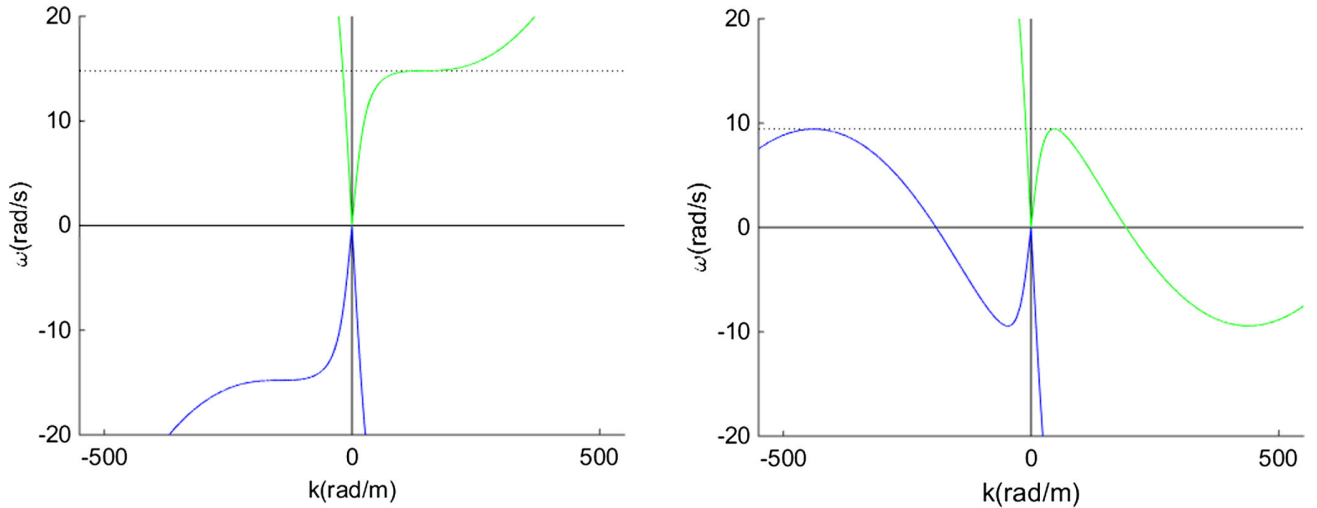


FIG. 6. Left: The dispersion relation with $U_c = -0.178 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 0.05 \text{ m}$ and $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$ (black dot), $T_c = 0.425 \text{ s}$. Right: The dispersion relation with $U_b = -0.255 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 0.05 \text{ m}$ and $\omega_b = \frac{2\pi}{T_b}$ (black dot), $T_b = 0.647 \text{ s}$.

at the white horizon. In this work, we do not report simulations on this case ($T < T_c$ or $T < T_b$) which is already known in the literature, but we do focus later on the case where $T > T_b > T_c$ with the so-called double-bouncing scenario.

V. ANALOGUE DISPERSIVE BIDIRECTIONAL WORMHOLE (DIRECTION: White \rightarrow Black)

The wave packet I is sent in a countercurrent (see Fig. 4, right, and Fig. 7, left) from the left subcritical region ($U = U_{\min}$ and $x < x_1$).

We recall that according to the theory and simulations described in Rousseau *et al.* [5,8,22], a long gravity wave propagating on a countercurrent should be blocked at an analogue white horizon. An infinite blueshifting is avoided since when the wavelength reaches the first dispersive scale (a combination of the angular frequency ω and the gravity field g , see [22] or the water depth in shallow water, see [5]), the incoming wave is either mode converted into a so-called blue shifting gravity wave whose wavelength matches the incoming wavelength at the blocking point in deep water or is blocked at a turning point which depends on the incoming period,

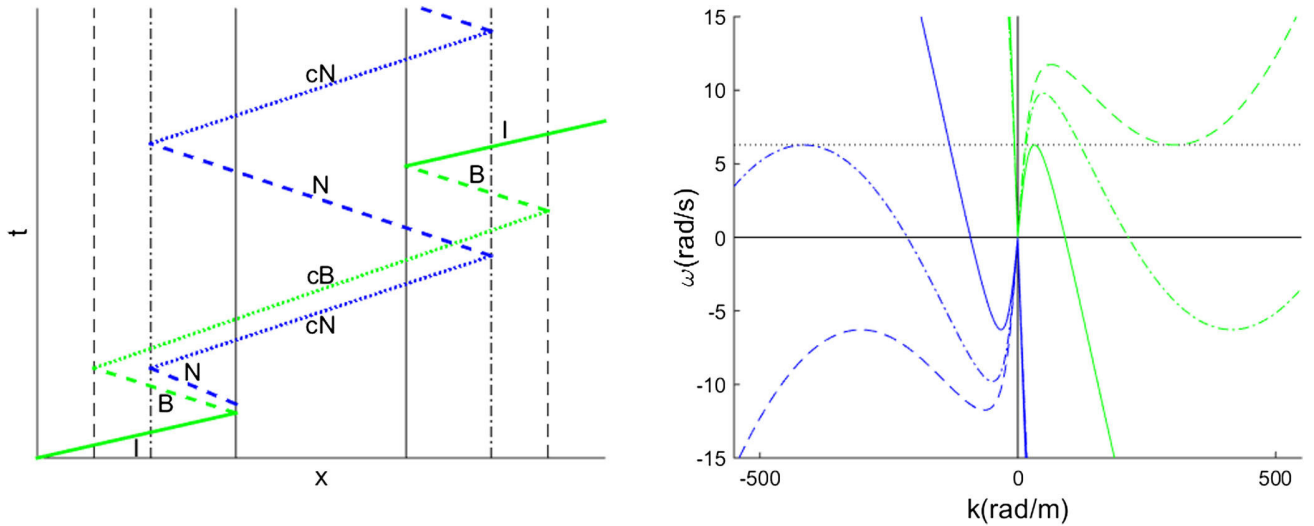


FIG. 7. Left: Scheme of the main conversions in the travel—white \rightarrow black -. The vertical lines represent the horizons positions, white (right)/black (left) horizons (continuous lines) where $U = -0.337 \text{ m}^2/\text{s}$, blue (right)/red (left) horizons (dashed lines) where $U = -0.213 \text{ m}^2/\text{s}$, negative (right)/negative black (left) horizons (dot-dashed lines) where $U = -0.248 \text{ m}^2/\text{s}$, $h = 0.05 \text{ m}$, $T = 1 \text{ s}$. Right: The corresponding dispersion relations at the different horizons for the corresponding velocities.

the water depth and the gravity field in shallow water. Unfortunately, the trans-Planckian problem is only displaced from the incoming to the blueshifted gravity waves in deep water [5,8]. The second dispersive length at a smaller scales (the capillary length) resolves the secondary trans-Planckian problem for the blueshifted gravity waves by mode converting them towards smaller capillary waves at the “blue” horizon. Partners with negative relative frequency in the current frame, necessary for Hawking radiation, are similarly mode converted into negative

capillary waves at the “negative” horizon and cannot escape to infinity (similarly to the case of massive particles which may bounce back at a “red” horizon [23]). To summarize, incoming gravity waves are mode converted toward shorter capillary waves by bouncing twice successively at the white and blue horizons, and the shorter capillary waves enter into the normally forbidden white hole region, being “superluminal” with respect to the “supercritical” flow: the double-bouncing scenario [5,8,18,19].

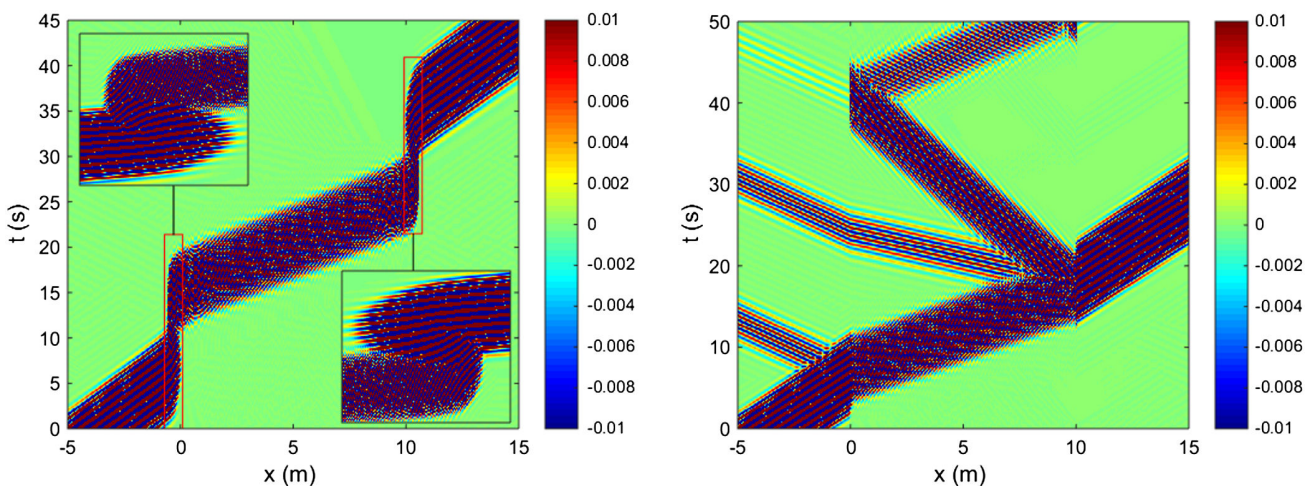


FIG. 8. Space-time diagram of the propagation of a Gaussian wave packet in an analogue dispersive bidirectional wormhole (direction: white \rightarrow black). The horizons are located roughly at $x_1 = 0 \text{ m}$ and $x_2 = 10 \text{ m}$; $h = 0.0 \text{ m}$, $T = 1 \text{ s}$, $U_{\min} = -0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $U_{\max} = -0.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Left: $a_1 = a_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$. Right: $a_1 = a_2 = 20 \text{ m}^{-1}$.

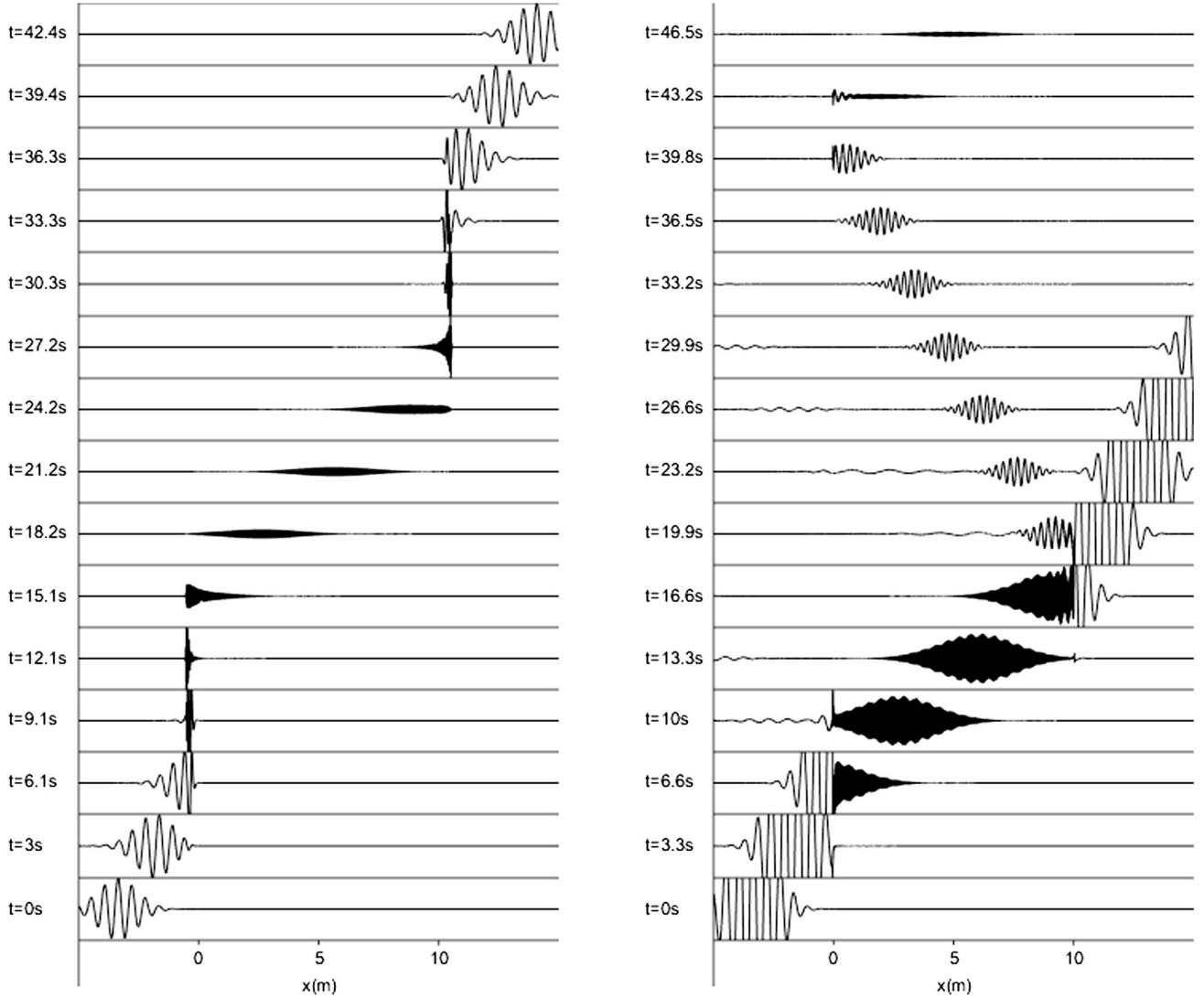


FIG. 9. Left: Successive snapshots of the propagation of a Gaussian wave packet in an analogue dispersive bidirectional wormhole (direction: white \rightarrow black) corresponding to the space-time diagram of Fig. 8, left (amplitude scale $[-1; 1]$). Right: Corresponding to the space-time diagram of Fig. 8, right (amplitude scale $[-0.2; 0.2]$).

Since the conversion to the different modes is controlled by the velocity gradient at the white horizon ($\frac{\partial U}{\partial x}|_{x^*} \sim a_1 \cdot S$), we show several cases with different velocity gradients. First, we use a small slope ($a_1 = a_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$, see Fig. 8, left, and Fig. 9, left), so that the conversion to the negative mode is negligible. We observe the path of the incident wave packet entering the white hole and leaving the analogue wormhole from the black hole side thanks to the double-bouncing scenario at the four horizons (white-blue then red-black) created by the two dispersive lengths. Indeed, the capillary positive wave cB generated by the double bouncing in the white hole region follows the reverse path in the black hole region: It is “inversely” converted and redshifted at the red horizon and reconverted at the black horizon as an incident wave.

Second, we focus on the conversion to the negative mode with a larger slope ($a_1 = a_2 = 20 \text{ m}^{-1}$, see Fig. 8, right, and Fig. 9, right). The white, blue and negative horizons are very close spatially in this case. We observe the rebound of the couple negative N /negative capillary cN waves between their respective horizons. At each rebound, parts of the wave packet energy are converted into incident and retrograde modes. The negative capillary wave cN is blocked at the negative black horizon and goes back as a negative wave N to the negative white horizon. This creates a recurrence $N - cN - N$ between these two negative horizons (see Fig. 8, right, and Fig. 9, right): the black hole laser effect. The amplification at each recurrence $N - cN - N$ is around 1% for the parameters of Figs. 7 and 8 (right).

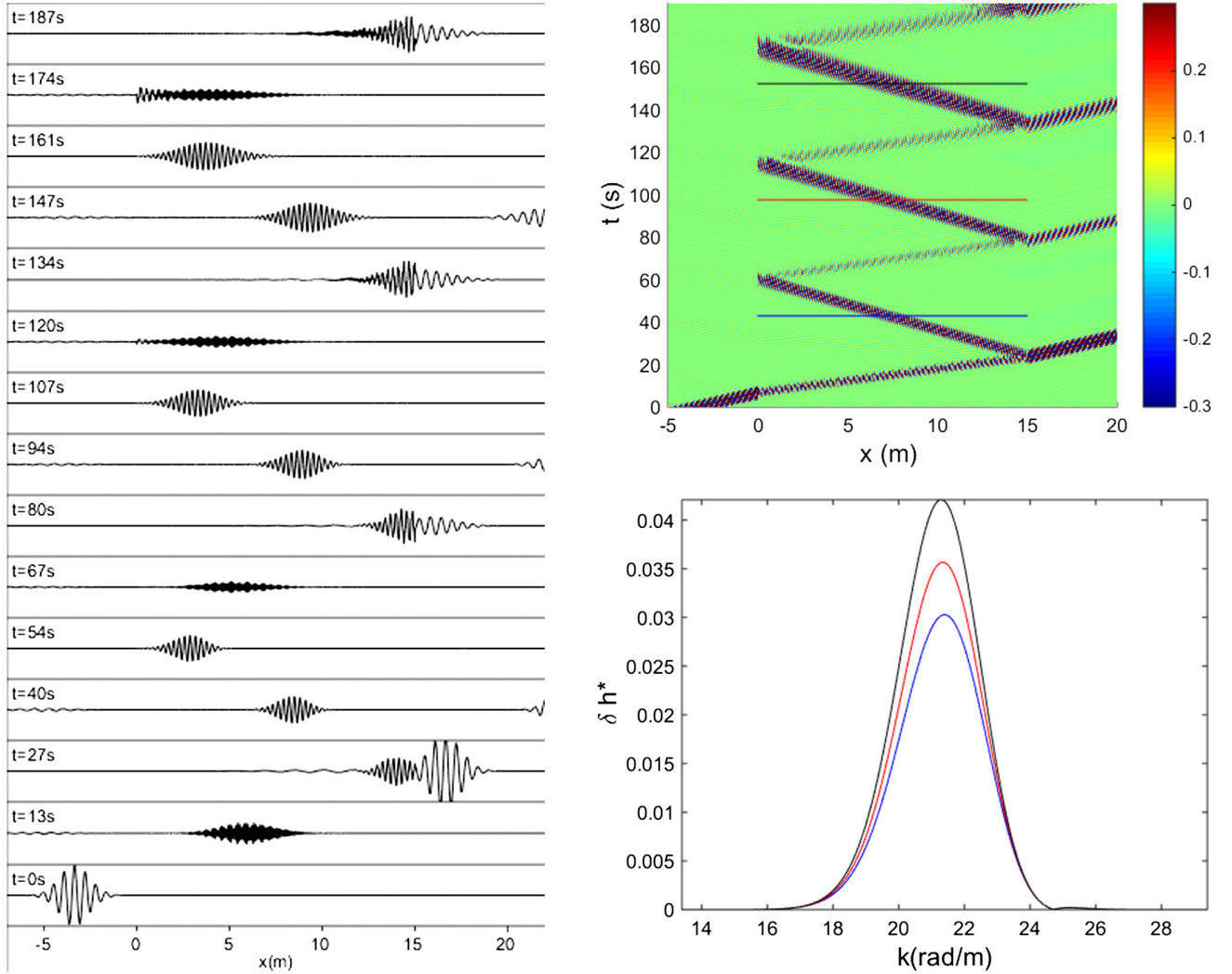


FIG. 10. Left: Successive snapshots of the propagation of a Gaussian wave packet in an analogue dispersive bidirectional wormhole (direction: white \rightarrow black). The horizons are located roughly at $x_1 = 0$ m and $x_2 = 10$ m; $h = 0.05$ m, $T = 1$ s, $U_{\min} = -0.1$ m \cdot s $^{-1}$, $U_{\max} = -0.9$ m \cdot s $^{-1}$, $a_1 = a_2 = 40$ m $^{-1}$ (amplitude scale $[-1:1]$). Top right: Space-time diagram for the same parameters. Bottom right: Spectral representation of the negative wave packets at different times $t_1 = 42.9$ s (blue), $t_2 = 97.6$ s (red) and $t_3 = 152.2$ s (black). Those time are displayed in the top right figure by the horizontal lines (same color).

To examine this amplification, which is crucial to the black hole laser effect, we changed the slopes of the velocity profile in an effort to increase the rate of conversion. First, we doubled the slopes ($a_1 = a_2 = 40$ m $^{-1}$, Fig. 10). The resulting amplification between times t_1 and t_2 , characterized by the dimensionless amplification factor computed in the Fourier space

$$\chi = \frac{\int_k \delta h(k, t_2) dk - \int_k \delta h(k, t_1) dk}{\int_k \delta h(k, t_1) dk} \quad (8)$$

is clearly visible (Fig. 10, bottom right) and of the order of about 16%. The distance between the slopes and the duration were increased in order to see recurring amplification. Then, we varied the slopes from $a_1 = a_2 = 10$ m $^{-1}$ to $a_1 = a_2 = 100$ m $^{-1}$ in order to characterize the

dependence of the amplification factor with the surface gravity a_1 (Fig. 11, left). We also looked at the effect of the first slope, $a_1 = 10$ to 100 m $^{-1}$, fixing the second one at a low value, $a_2 = 5$ m $^{-1}$ (Fig. 11, right). As expected, for an asymmetric wormhole with two different slopes, the amplification is mainly ruled by the side with the bigger slope and is evidently lower than for the symmetric wormhole.

A straightforward way to infer the amplification is by using the conservation of the norm. At each bounce on the negative black horizon (right-hand side), the negative norm wave packet emits a positive norm wave packet (I) and on the negative white horizon (left-hand side) a positive norm wave packet (R). The emission of positive norm implies a negative norm amplification of the wave packet trapped in the cavity between both horizons demonstrating the

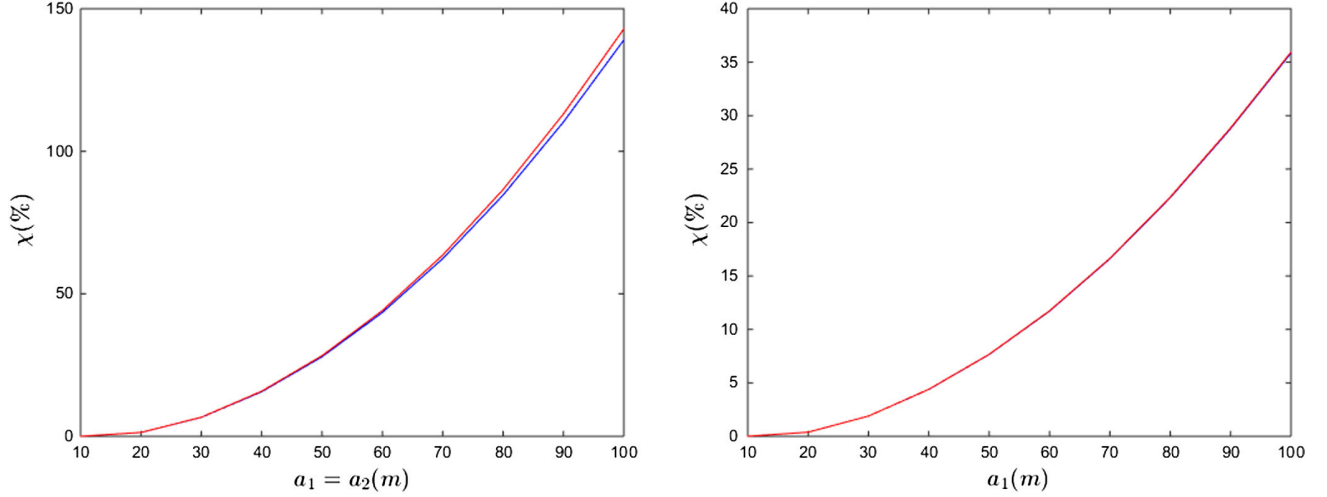


FIG. 11. Left: Amplification χ as a function of the slopes of the velocity profile $a_1 = a_2$ between $t_1 = 42.9$ s and $t_2 = 97.6$ s (blue) and between $t_2 = 97.6$ s and $t_3 = 152.2$ s (red). Right: Amplification χ as a function of the left slope of the velocity profile a_1 ; here, the right slope is fixed $a_2 = 5 \text{ m}^{-1}$.

existence of the black hole laser effect. The latter is observed here in numerical simulations for water waves with six horizons at play, and it can be considered as a generalization of the previous proposals in analogue gravity featuring only two horizons.

VI. ANALOGUE DISPERSIVE BIDIRECTIONAL WORMHOLE (DIRECTION: Black \rightarrow White)

In this case the wave packet is sent in the co-current direction—black \rightarrow white—(see Fig. 4, left) from the left subcritical region ($U = U_{\min}$ and $x < x_1$). If the slope is

small ($a_1 = a_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$, see Fig. 12, left, and Fig. 13, left), the wave packet is just refracted by the velocity gradient, but there is no conversion to other modes during the propagation. But if the slope is larger ($a_1 = a_2 = 20 \text{ m}^{-1}$, see Fig. 12, right, and Fig. 13, right), there is conversion without horizon (for the initial co-current wave packet) at the point where the gradient is stronger (x_1 and x_2), and we observe the same phenomenon as in the direction—white \rightarrow black—. Here, the double-bouncing scenario happens twice around each maximum of the velocity gradient.

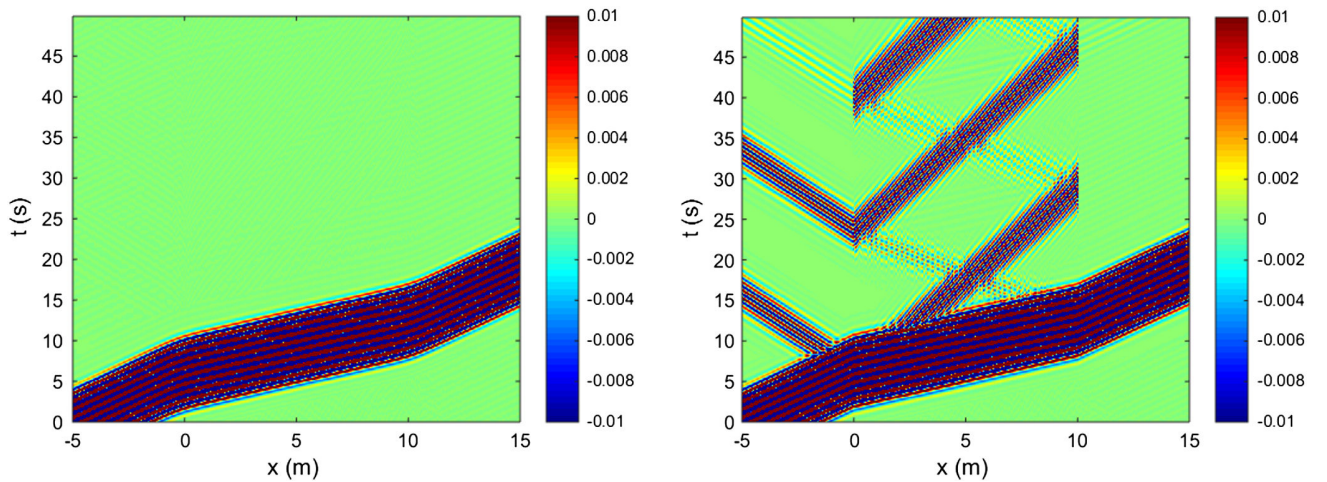


FIG. 12. Space-time diagram of the propagation of a Gaussian wave packet in an analogue dispersive bidirectional wormhole (direction: black \rightarrow white). The horizons are located roughly at $x_1 = 0$ m and $x_2 = 10$ m; $h = 0.05$ m, $T = 1$ s, $U_{\min} = 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $U_{\max} = 0.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Left: $a_1 = a_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$. Right: $a_1 = a_2 = 20 \text{ m}^{-1}$.

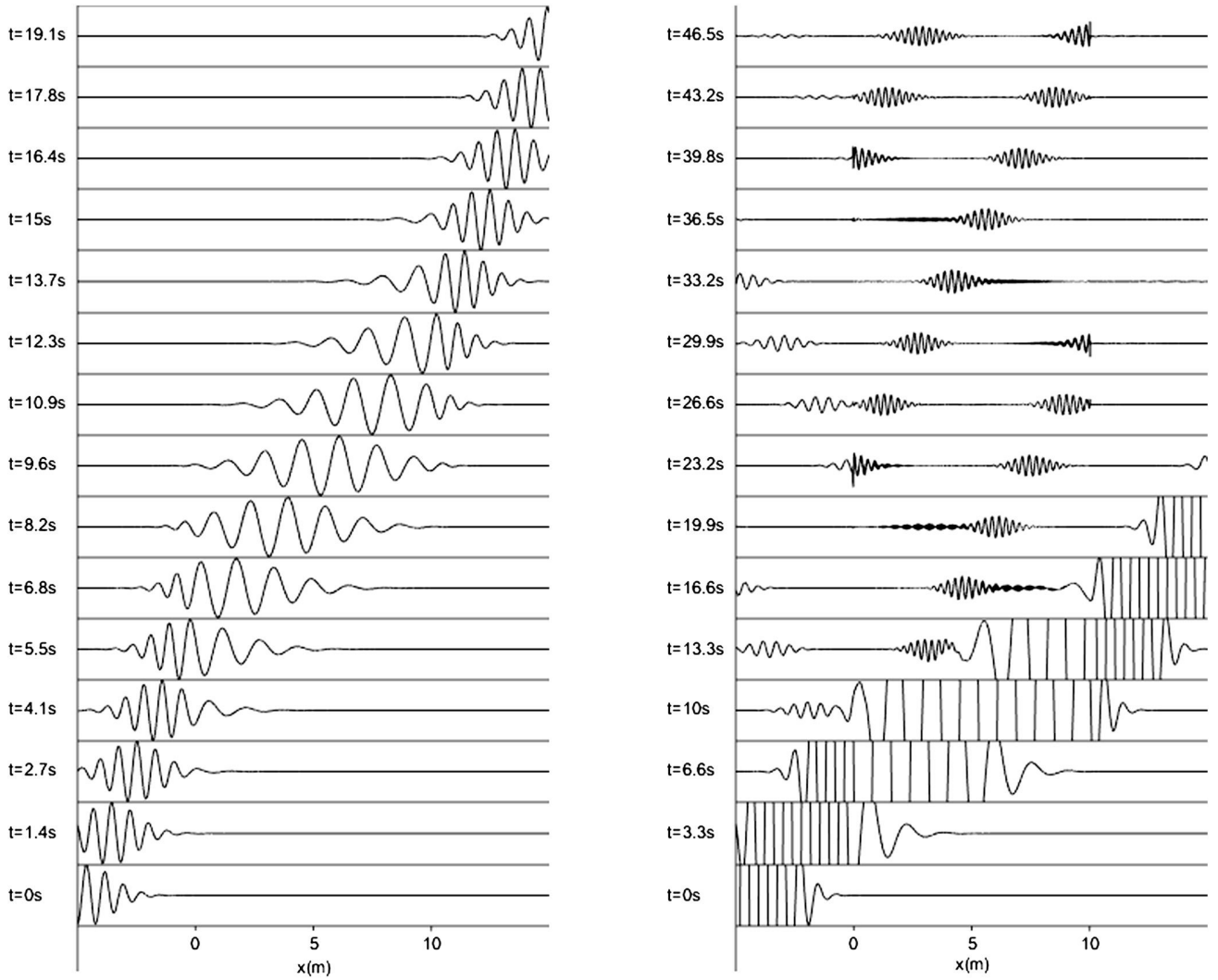


FIG. 13. Left: Successive snapshots of the propagation of a Gaussian wave packet in an analogue dispersive bidirectional wormhole (direction: black \rightarrow white) corresponding to the space-time diagram of Fig. 12, left (amplitude scale $[-1:1]$). Right: Corresponding to the space-time diagram of Fig. 12, right (amplitude scale $[-0.05:0.05]$).

VII. CONCLUSION

We have shown numerical simulations of a laser effect in the propagation of water waves in an analogue wormhole geometry (bump in the velocity profile). Six horizons are involved because of the existence of two dispersive scales contrary to the only scenario considered in analogue gravity so far with two horizons and one dispersive scale. To test these predictions experimentally is a challenge since we neglected two phenomena which modify the current picture. First, also because of dispersion, a zero frequency undulation (which is a solution of the dispersion relation $k \neq 0$ for $\omega = 0$, namely a stationary free surface deformation) may appear between both horizons [24] as observed in the BEC case by Cornell's group and discussed in [25]: this zero mode is the background free surface

deformation on which the converted waves are superposed assuming that the effects stay linear. It is precisely the stationary free surface deformation which is observed with flowing water over an obstacle. The zero frequency undulation is different from the density oscillations observed by Steinhauer [17] which are due to the black hole laser amplification mechanism. Moreover, the complex frequency modes [26] should be computed taking into account the dispersion relation. Second, in the case of an analogue wormhole geometry, the small capillary waves are damped in practice very rapidly as discussed in [27] by the viscous dissipation on a distance shorter than the interhorizon distance usually generated in current experiments. A velocity profile where the interhorizon distance is smaller than the dissipative length is required for the wormhole

geometry, and this implies additional theoretical investigations to assess the effect with the purpose of an experimental observation.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported by the University of Poitiers (ACI UP on Wave-Current Interactions 2013–2014), by the Interdisciplinary Mission of CNRS (PEPS PTI 2014

DEM RATNOS) and by the University of Tours in a joint grant with the University of Poitiers (ARC Poitiers-Tours 2014–2015). The French National Research Agency (ANR) funds the current work on the subject through Grant No. HARALAB (ANR-15-CE30-0017-04). We thank Scott Robertson, Renaud Parentani and Florent Michel for comments on the draft.

-
- [1] A. Einstein and N. Rosen, *Phys. Rev.* **48**, 73 (1935).
 [2] R. W. Fuller and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **128**, 919 (1962).
 [3] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446 (1988).
 [4] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, *Living Rev. Relativity* **8**, 12 (2011).
 [5] *Analogue Gravity Phenomenology: Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*, Lecture Notes in Physics, edited by D. Faccio, F. Belgiorno, S. Cacciatori, V. Gorini, S. Liberati, and U. Moschella (Springer, New York, 2013).
 [6] R. Schützhold and W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **66**, 044019 (2002).
 [7] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maïssa, P. Couillet, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, *New J. Phys.* **10**, 053015 (2008).
 [8] G. Rousseaux, P. Maïssa, C. Mathis, P. Couillet, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, *New J. Phys.* **12**, 095018 (2010).
 [9] S. Weinfurter, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021302 (2011).
 [10] L.-P. Euvé, F. Michel, R. Parentani, and G. Rousseaux, *Phys. Rev. D* **91**, 024020 (2015).
 [11] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **51**, 2827 (1995).
 [12] T. Jacobson, *Phys. Rev. D* **53**, 7082 (1996).
 [13] S. J. Robertson, *J. Phys. B* **45**, 163001 (2012).
 [14] S. Corley and T. Jacobson, *Phys. Rev. D* **59**, 124011 (1999).
 [15] U. Leonhardt and T. G. Philbin, in *Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology*, edited by W. G. Unruh and R. Schützhold (Springer-Verlag, Berlin, 2007), p. 229.
 [16] D. Faccio, T. Arane, M. Lamperti, and U. Leonhardt, *Classical Quantum Gravity* **29**, 224009 (2012).
 [17] J. Steinhauer, *Nat. Phys.* **10**, 864 (2014).
 [18] S. I. Badulin, K. V. Pokazeev, and A. D. Rozenberg, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmos. Okeana* **19**, 1035 (1983).
 [19] K. Trulsen and C. C. Mei, *J. Fluid Mech.* **251**, 239 (1993).
 [20] M. W. Dingemans, *Water Wave Propagation over Uneven Bottoms* (World Scientific, Singapore, 1997).
 [21] G. Jannes, R. Piquet, P. Maïssa, C. Mathis, and G. Rousseaux, *Phys. Rev. E* **83**, 056312 (2011).
 [22] J.-C. Nardin, G. Rousseaux, and P. Couillet, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 124504 (2009).
 [23] G. Jannes, P. Maïssa, T. G. Philbin, and G. Rousseaux, *Phys. Rev. D* **83**, 104028 (2011).
 [24] A. Coutant and R. Parentani, *Phys. Fluids* **26**, 044106 (2014).
 [25] I. Carusotto, S. X. Hu, L. A. Collins, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 260403 (2006).
 [26] A. Coutant and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **81**, 084042 (2010).
 [27] P. H. LeBlond and F. Mainardi, *Acta Mech.* **68**, 203 (1987).

Observation of Noise Correlated by the Hawking Effect in a Water Tank

L.-P. Euvé,^{1,*} F. Michel,^{2,†} R. Parentani,^{2,‡} T. G. Philbin,^{3,§} and G. Rousseaux^{1,||}

¹*Institut Pprime, UPR 3346, CNRS-Université de Poitiers-ISAIE ENSMA 11 Boulevard Marie et Pierre Curie-Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Cedex, France*

²*Laboratoire de Physique Théorique, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*

³*Physics and Astronomy Department, University of Exeter, Stocker Road, Exeter EX4 4QL, United Kingdom*
(Received 30 November 2015; revised manuscript received 29 July 2016; published 13 September 2016)

We measured the power spectrum and two-point correlation function for the randomly fluctuating free surface on the downstream side of a stationary flow with a maximum Froude number $F_{\max} \approx 0.85$ reached above a localized obstacle. On such a flow the scattering of incident long wavelength modes is analogous to that responsible for black hole radiation (the Hawking effect). Our measurements of the noise show a clear correlation between pairs of modes of opposite energies. We also measure the scattering coefficients by applying the same analysis of correlations to waves produced by a wave maker.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.121301

The Hawking effect in laboratory analogues of event horizons [1] has been well studied theoretically [2,3] and experiments have been performed in different systems [4–6]. Analogue horizons are created when waves propagate in a stationary counterflowing medium: at points where the flow speed reaches that of the wave, the latter is blocked and converted to other branches of the dispersion relation. At low frequency, this gives rise to a mode amplification (an over-reflection [7]) which involves a negative-energy wave [4,8–10], and which is at the root of the Hawking effect [11]. Importantly, the scattered waves of opposite energy are correlated with each other [12]. As a result, when dealing with a noisy system, the two-point correlation function of the fluctuating quantity displays specific patterns both in space-time and in Fourier space [13–18]. We here consider surface waves on a stationary countercurrent of water in a linear tank. Our work is inspired by the theoretical Refs. [9,19–21] and builds on the experiments reported in Refs. [4,6,22,23]. As in these experiments, the flow velocity near the blocking point decreases along the direction of the flow. This means that we work with an analogue white hole (the time reversed of a black hole).

Ignoring the surface tension, and assuming that the flow is incompressible and irrotational, the dispersion relation which relates the angular frequency ω and the wave vector k is

$$(\omega - Uk)^2 = gk \tanh(kh), \quad (1)$$

where U is the flow velocity, h the water depth, and g the gravitational acceleration, see the Supplemental Material [24] for some explanation about this relation, and its associated wave equation. In a flow to the right, i.e., $U > 0$, for a fixed ω , see the dotted horizontal line in Fig. 1, the three roots k_I , k_B , and k_H describe counterpropagating

waves, i.e., waves with a group velocity oriented to the left in the *co-moving frame at rest with the fluid* [3,4,9]. Instead k_R describes a copropagating mode which shall play no role in the sequel. There are also transverse modes, which have an effective mass [28] proportional to their transverse wave vector k_{\perp} .

In stationary inhomogeneous flows, such as that of Fig. 2, ω is conserved. For fixed $\omega > 0$, the roots k_I and k_B merge at a point in the tank where U becomes sufficiently large [21]. This merging describes an incident long-wavelength mode I coming from the right, that is blueshifted into a B mode with opposite group velocity $d\omega/dk$ in the laboratory frame (the slope of the curves in Fig. 1): the well-known wave blocking [9,29]. We emphasize here that the wave number k_B of the scattered mode is much larger than k_I characterizing the incident wave. This large blueshifting is the typical signature of analogue white hole flows [10,30]. Importantly, for sufficiently low ω , the wave blocking is accompanied by a nonadiabatic effect producing an additional mode which also has a large wave vector: k_H . This mode has a negative frequency $\omega - Uk$ as measured in the fluid frame, see Fig. 1, and thus carries a negative-energy [4,8–10]. Because the total wave energy is conserved, this conversion implies an amplification of the B mode. This is in strict analogy with the Hawking effect. However, it is difficult experimentally to have a flow that will block waves at all frequencies and in experiments to date [4,6,23] only waves above a critical frequency ω_{\min} were (essentially) blocked, see the Supplemental Material [24]. Above ω_{\min} , as we shall see, the main effect is the conversion of incident I modes into B and H . This effect was reported in Ref. [6] both below and above ω_{\min} .

This conversion can be stimulated by an incident wave I generated by a wave maker, as was done in Refs. [4,6]. In contrast, the quantum Hawking effect, of fundamental interest for black holes [11], arises from the amplification

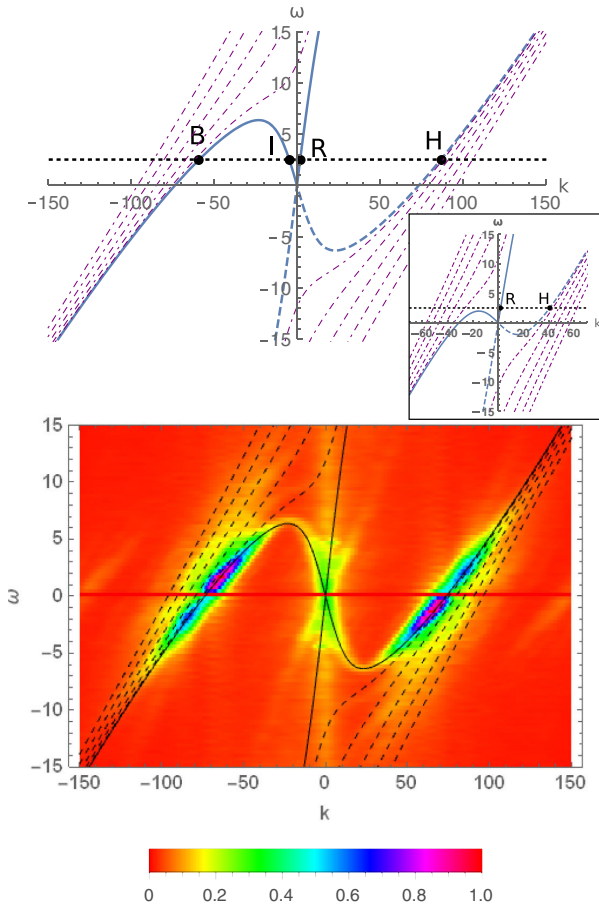


FIG. 1. Top: Dispersion relation in the homogeneous flow on the downstream side of the obstacle. k is in m^{-1} and the angular frequency ω in Hz. The effective parameters [see text below Eq. (2) for definition] are $U_{\text{eff}} = 0.37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ and $h_{\text{eff}} = 88 \text{ mm}$. The blue continuous (dashed) lines correspond to Eq. (1) with positive (negative) $\omega - Uk$. The four dots labeled by B, I, R, H give the roots k_a for a fixed $\omega > 0$ indicated by a dotted horizontal line. Purple, dot-dashed lines describe transverse modes with an even number of nodes in the transverse direction (those with an odd number are not detected by our experimental setup). The inset shows the same dispersion relation for $h = 59 \text{ mm}$, i.e., beyond the turning point for the frequency materialized by the dashed line. Bottom: Square root of the noise power $\mathcal{P}(\omega, k)$ divided by its maximum value and measured on the downstream side of the obstacle, see Fig. 2 and Eq. (2).

of vacuum fluctuations and gives rise to pairs of entangled quanta with opposite energy [12]. Surface waves in the water tank are not suitable to observe the quantum Hawking effect. But just as the quantum vacuum provides the horizon with an irreducible input, there is a stationary background noise of surface waves in the inhomogeneous flow created by both the turbulent flow and the underwater obstacle, see Fig. 1 lower panel. Because of the mode conversion near the blocking point, this noise should be *correlated*. When measured in the downstream homogeneous region, see Fig. 2, these correlations are

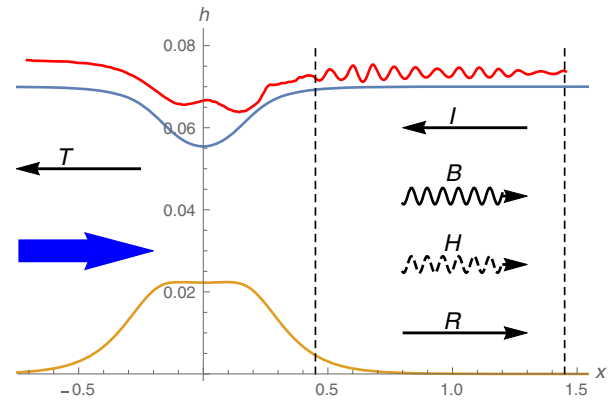


FIG. 2. Plots of the obstacle (orange line) and the observed free surface (red line, see also the Figure S3 in the Supplemental Material [24]) in meters. The two dashed vertical lines indicate the region used to study the fluctuations of the free surface δh . The blue, thick arrow shows the direction of the flow. Thin arrows show the orientation of the group velocity (measured in the laboratory frame) of the various modes produced by the scattering of the incident I mode. The letters I , B , H , R have the same meaning as in Fig. 1. The T arrow represents the transmitted wave in the upstream side. The blue curve gives the free surface chosen for determining the obstacle, see text for explanation.

nonvanishing when the k_a 's are evaluated at the same value of ω [14,15,17], see Fig. 3 and the Supplemental Material [24].

Our experiments were performed in the water channel of the Pprime Institute (for more details, see Supplemental Material [24]). The obstacle used to obtain an inhomogeneous flow was designed following the procedure outlined in appendix A of Ref. [21]. It relies on the hodograph transformation for a 2D inviscid, irrotational, incompressible flow [31]. The shape of the obstacle is determined by the profile of the free surface, the asymptotic water depth, and flow velocity, see Fig. 2. The main advantage of this obstacle over the one used in Refs. [6,23] is that it supports a flow with a relatively large Froude number: 0.86 ± 0.03 in the present experiment instead of 0.67 ± 0.02 see Sect. III D in Ref. [23]. In addition, it produces a smaller static surface deformation, or undulation [10,32], with a peak-to-peak amplitude of a few millimeters (see Supplemental Material [24]). The descending slope of the obstacle also has a larger maximum gradient: the slope of $c - U$, giving the analogue surface gravity in transcritical flows [21], has a maximum of 2 Hz instead of 1.2 Hz as used in Ref. [6] (here $c = \sqrt{gh}$ is the velocity of long-wavelength waves in the fluid frame).

We measured the fluctuations of the water height $\delta h(x, t)$, defined as the deviation from the time-averaged value of $h(x, t)$, in the downstream constant-flow region shown in Fig. 2. We first studied the noise power (which is proportional to the wave action [33]) defined by

$$\mathcal{P}(\omega, k) \equiv \langle |\delta \tilde{h}(\omega, k)|^2 \rangle \times S_k^{-2}. \quad (2)$$

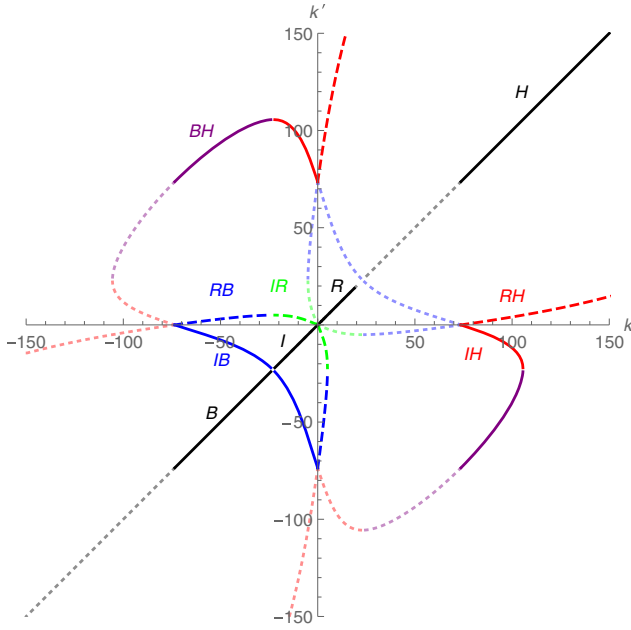


FIG. 3. Here we show the loci where k, k' are two roots of Eq. (1) for $\omega \in \mathbb{R}^+$ in a flow with the same parameters as in Fig. 1. The oblique black segments show $k = k'$ for the four modes B, I, R, H . The three continuous curves show $\{k, k'\} = \{k_I, k_B\}$ (blue), $\{k_I, k_H\}$ (red), $\{k_B, k_H\}$ (purple), while the dashed lines $\{k_I, k_R\}$ (green), $\{k_R, k_B\}$ (blue), and $\{k_R, k_H\}$ (red), involve the mode k_R . Dotted lighter curves correspond to $\omega < 0$. They are obtained from correlations with positive ω by $(k, k') \rightarrow (-k, -k')$.

Here, $\tilde{\delta h}(\omega, k)$ is the Fourier transform of $\delta h(t, x)$ and $S_k = |gk \tanh(kh)|^{1/4}$ is the structure factor relating plane waves to unit-norm modes when working at fixed k [10,21]. The Fourier transform in time is computed using a rectangular window, while we used a Hamming window function [34] with support $x \in [0.45 \text{ m}, 1.45 \text{ m}]$ to compute the spatial transform (see Supplemental Material [24]). The mean value is computed by dividing the data into 80 pieces of equal duration (12.5 s) and averaging over them. In former studies of the noise [22,35], this averaging was not performed. As a result the plots showed random values of $|\tilde{\delta h}(\omega, k)|^2$ as opposed to its mean. The square root of $\mathcal{P}(\omega, k)$ is shown in the lower panel of Fig. 1. The typical amplitude of $|\delta h(x, t)|$ in the observation window is a few tenths of millimeters.

Although the upstream water height and flow velocity were $h_{\text{up}} = 74 \text{ mm}$ and $U_{\text{up}} = 0.31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, the dispersion relation of Fig. 1 has been drawn with the effective values $h_{\text{eff}} = 88 \text{ mm}$ and $U_{\text{eff}} = 0.37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, chosen to match the observed wave numbers. The agreement of the dispersion relation with the three counterpropagating modes $I, B,$ and H is clear for all values of ω . We expect that the differences with h_{up} and U_{up} are due to boundary layer, vorticity, and turbulent effects. When using h_{eff} and U_{eff} , we find that the value of ω for which the two roots k_I

and k_B merge on top of the obstacle (respectively in the downstream asymptotic region) is $\omega_{\text{min}} \approx 0.8 \text{ Hz}$ (respectively $\omega_{\text{max}} \approx 5 \text{ Hz}$).

We then measured the two-point correlation function evaluated at the same frequency and two different wave vectors:

$$G_2(\omega; k, k') \equiv |\langle \tilde{\delta h}(\omega, k) \tilde{\delta h}(\omega, k')^* \rangle| \times (S_k S_{k'})^{-1}. \quad (3)$$

In the left plot of Fig. 4, we show $G_2(\omega; k, k')$ in the (k, k') plane for $\omega = 2.5 \text{ Hz}$. Using the effective values h_{eff} and U_{eff} , the nonvanishing correlations in the k, k' plane are found along the lines drawn in Fig. 3, as expected. We note that the B and H modes of opposite energy are well correlated. We also note that the long-wavelength modes I and R are correlated with both B and H modes. However, we cannot clearly separate the contributions of I and R modes. Since numerical simulations (see Supplemental Material [24]) indicate that the copropagating (R) mode is only weakly coupled to $I, B,$ and H , in what follows, we only study the power and the strength of correlations of these three modes.

In the upper plot of Fig. 5 we show $n_a(\omega) \equiv \mathcal{P}(\omega, k_a) / |dk_a/d\omega|$ as a function of ω , where $k_a(\omega)$ are the three counterpropagating roots. This quantity gives, up to an overall factor, the mean number of quasiparticles per unit angular frequency interval [10,21]. The power spectra of the two dispersive modes B and H are comparable except in a domain near $\omega_{\text{min}} \approx 0.8 \text{ Hz}$ where there are more B modes. The hydrodynamical I modes have less power by a factor ~ 10 , except below ω_{min} where their power is much larger. (In the absence of an obstacle, the observed noise power is completely dominated by the hydrodynamical modes I and R , and there are no significant correlations between I and B, H modes, see Supplemental Material [24]).

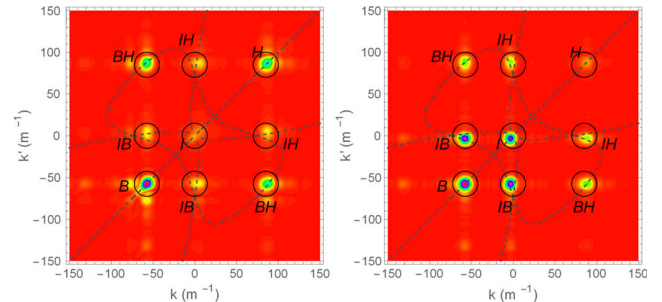


FIG. 4. In the left panel, we show the noise correlation function of Eq. (3) for $\omega = 2.5 \text{ Hz}$. The color scale is the same as in Fig. 1. Dashed lines show the dispersion relation in the (k, k') plane, see Fig. 3. The circles are centered on (k_ω, k'_ω) where k_ω and k'_ω are two roots of the dispersion relation for the considered frequency ω . The letters B and H designate the power of the short-wavelength modes with opposite energies, and BH their correlations. In the right panel, we show again Eq. (3) when the wave maker is sending the incident wave I with $\omega = 2.5 \text{ Hz}$. The IB and IH correlations are clearly visible.

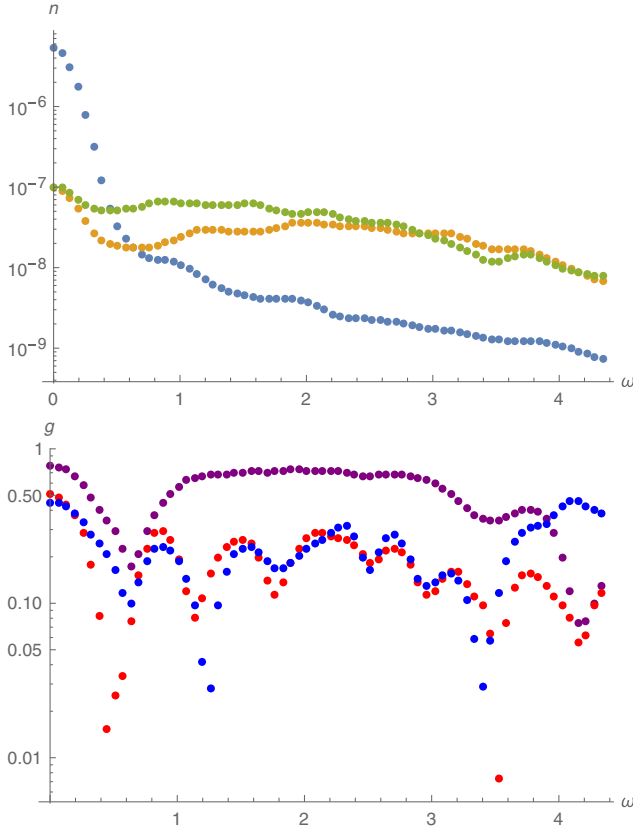


FIG. 5. The noise power $n_a(\omega)$ (upper plot, in $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$) and the relative strength of the correlations of Eq. (4) (lower plot), in logarithmic scale, for the counterpropagating modes I , B , and H . In the upper plot, the power of I is in blue, that of B in green, and in bronze that of H . In the lower plot, the correlations BH are in purple, IB in blue, and IH in red. We estimate that the uncertainties on g_2 are of order 0.1.

To quantify the strength of the correlations, we study the ratio of the cross-correlations over the square root of the product of the autocorrelations

$$g_2(\omega; a, b) \equiv \frac{G_2(\omega; k_a, k_b)}{\sqrt{G_2(\omega; k_a, k_a)G_2(\omega; k_b, k_b)}}, \quad (4)$$

where $k_a(\omega)$, $k_b(\omega)$ are two roots for a given ω . For any statistical ensemble, g_2 is necessarily smaller than 1. As explained in the Supplemental Material [24], g_2 involves the classical counterparts of the observables which are currently used in quantum settings to assert that the state of the scattered waves $k_a(\omega)$, $k_b(\omega)$ is entangled [15–18]. The lower plot of Fig. 5 shows three types of correlations: the BH correlations are stronger than the two other ones, since $g_2(\omega; B, H)$ is close to 0.7 (except near 0.6 Hz). This indicates that 70% of B and H modes are in correlated BH pairs. The IH and IB correlations are below 0.3 over most of the frequency domain. This implies that more than 50% of BH pairs do not come from observed I modes with $k_\perp = 0$. It probably means that a significant fraction of BH

pairs have a nonvanishing k_\perp . (At present we are not able to separate the contributions of B and H modes with and without transverse wave number, as the corresponding curves on the dispersion relation are very close to each other, see Fig. 1.) Some BH pairs should also be produced by incident waves H and R from the left. In addition, not all the incident I -mode noise is taken into account if some of it is generated by fluctuations in the region $x < 0.45$ m. An effective description of this generation could be obtained from adapting to the present case the driven-damped wave equation of Ref. [36].

The properties of the scattering can be more clearly studied when sending an I wave towards the obstacle, as was done in Refs. [4,6,23]. The corresponding values of G_2 are shown in the right panel of Fig. 4 for $\omega \approx 2.5$ Hz $> \omega_{\min}$. The power of the reflected B wave is close to that of the incident one, as expected from the validity of the adiabatic approximation in this regime [3]. The negative-energy H wave remains relatively small in amplitude. However, HI and HB correlations are clearly visible, showing that H and B waves are produced by the analogue Hawking effect. This is further clarified by the analysis of the scattering coefficients presented in the Supplemental Material [24].

To summarize, we observed the statistical properties of the water depth fluctuations downstream from an obstacle in a flow with a large maximum Froude number. The negative-energy modes H are highly populated, strongly correlated with the positive-energy modes B , but more weakly correlated with the I modes. The noise correlations have the main features expected from the Hawking effect, whose correlations we observed also in the stimulated case with a wave maker. Further experiments and theoretical work are required to clarify all of the processes behind these observations.

We thank Y. Stepanyants for comments. We acknowledge support from the University of Poitiers (ACI UP on Wave-Current Interactions 2013-2014), the Interdisciplinary Mission of CNRS (PEPS PTI 2014 DEMRATNOS), the University of Tours (ARC Poitiers-Tours 2014-2015), the French national research agency (ANR) HARALAB (N° ANR-15-CE30-0017-04), the FEDER 35790-2012, and a FQXi grant of the Silicon Valley Community Foundation.

*leo.paul.euve@univ-poitiers.fr

†florent.michel@th.u-psud.fr

‡Renaud.Parentani@th.u-psud.fr

§T.G.Philbin@exeter.ac.uk

||germain.rousseau@univ-poitiers.fr

[1] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).

[2] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, *Living Rev. Relativ.* **8**, 12 (2005); S. J. Robertson, *J. Phys. B* **45**, 163001 (2012).

- [3] A. Coutant, R. Parentani, and S. Finazzi, *Phys. Rev. D* **85**, 024021 (2012).
- [4] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maïssa, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, *New J. Phys.* **10**, 053015 (2008).
- [5] T. G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König, and U. Leonhardt, *Science* **319**, 1367 (2008); F. Belgiorno, S. L. Cacciatori, G. Ortenzi, V. G. Sala, and D. Faccio, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 140403 (2010); O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon, S. Rinott, A. Zayats, and J. Steinhauer, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 240401 (2010); J. Steinhauer, *Nat. Phys.* **10**, 864 (2014); H. S. Nguyen, D. Gerace, I. Carusotto, D. Sanvitto, E. Galopin, A. Lemaître, I. Sagnes, J. Bloch, and A. Amo, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 036402 (2015).
- [6] S. Weinfurter, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021302 (2011).
- [7] R. D. Acheson, *J. Fluid Mech.* **77**, 433 (1976).
- [8] A. L. Fabrikant and Y. A. Stepanyants, *Propagation of Waves in Shear Flows* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [9] J.-C. Nardin, G. Rousseaux, and P. Couillet, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 124504 (2009).
- [10] A. Coutant and R. Parentani, *Phys. Fluids* **26**, 044106 (2014).
- [11] S. W. Hawking, *Nature (London)* **248**, 30 (1974).
- [12] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and Ph. Spindel, *Phys. Rep.* **260**, 329 (1995); *Phys. Rev. D* **52**, 4559 (1995).
- [13] I. Carusotto, S. Fagnocchi, A. Recati, R. Balbinot, and A. Fabbri, *New J. Phys.* **10**, 103001 (2008).
- [14] J. Macher and R. Parentani, *Phys. Rev. A* **80** (2009) 043601.
- [15] J. R. M. deNova, I. Zapata, and F. Sols, *Phys. Rev. A* **89**, 043808 (2014).
- [16] X. Busch and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **89**, 105024 (2014).
- [17] D. Boiron, A. Fabbri, P.-É. Larré, N. Pavloff, C. I. Westbrook, and P. Zin, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 025301 (2015).
- [18] J. Steinhauer, *Nat. Phys.*, doi:10.1038/nphys3863 (2016).
- [19] R. Schützhold and W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **66**, 044019 (2002).
- [20] G. Rousseaux, P. Maïssa, C. Mathis, P. Couillet, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, *New J. Phys.* **12**, 095018 (2010).
- [21] F. Michel and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **90**, 044033 (2014).
- [22] P.-J. Faltot, R. Bellanger, J.-M. Mougenot, and G. Rousseaux, Proceedings des 13èmes Journées Génie Côtier Génie Civil à Dunkerque en Juillet 2014. Session d'Hydrodynamique Côtère, edited by D. Levacher, M. Sanchez, A. Hequette et Yves Lalaut (2014), 79–92, http://www.paralia.fr/jngcgc/13_10_faltot.pdf.
- [23] L.-P. Euvé, F. Michel, R. Parentani, and G. Rousseaux, *Phys. Rev. D* **91**, 024020 (2015).
- [24] See Supplemental Material, which includes Refs. [25–29], at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.117.121301> for the main properties of the wave equation, details on the experimental setup, a discussion of the scattering coefficients and nonlinear effects, and a comparison with [18].
- [25] G. Heintel, A. Rüdiger, and R. Schilling, Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows (2002), <http://edoc.mpg.de/395068>.
- [26] T. H. C. Herbers S. Elgar and R. T. Guza, *J. Phys. Oceanogr.* **32**, 1181 (2002).
- [27] F. Michel, J.-F. Coupechoux, and R. Parentani, arXiv:1605.09752.
- [28] G. Jannes, P. Maïssa, T. G. Philbin, and G. Rousseaux, *Phys. Rev. D* **83**, 104028 (2011).
- [29] M. W. Dingemans, *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [30] C. Mayoral, A. Recati, A. Fabbri, R. Parentani, R. Balbinot, and I. Carusotto, *New J. Phys.* **13**, 025007 (2011).
- [31] W. G. Unruh, *Lect. Notes Phys.* **870**, 63 (2013).
- [32] W. G. Unruh, *Phil. Trans. R. Soc. A* **366**, 2905 (2008).
- [33] F. P. Bretherton and C. J. R. Garrett, *Proc. R. Soc. A* **302**, 529 (1968).
- [34] K. M. M. Prabhu, *Window Functions and their Applications in Signal Processing* (CRC Press, Boca Raton, Florida, 2013).
- [35] S. Weinfurter, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, *Lect. Notes Phys.* **870**, 167 (2013).
- [36] S. Robertson and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **92**, 044043 (2015).

Observation of noise correlated by the Hawking effect in a water tank

L.-P. Euvé,¹ F. Michel,² R. Parentani,² T. G. Philbin,³ and G. Rousseaux¹

¹*Institut Pprime, UPR 3346, CNRS-Université de Poitiers-ISAIE ENSMA 11 Boulevard Marie et Pierre Curie-Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Cedex, France*

²*Laboratoire de Physique Théorique, CNRS, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*

³*Physics and Astronomy Department, University of Exeter, Stocker Road, Exeter EX4 4QL, UK*

SUPPLEMENTAL MATERIAL

Dispersion relation and critical frequencies in inhomogeneous flows

To describe theoretically the system used in the experiment, we assume water in the flume can be approximated by an ideal, incompressible fluid in laminar, irrotational motion. We also temporarily assume the velocity component along the transverse direction of the flume is negligible, so as to work with an effectively two-dimensional flow. Under these approximations, the linear fluid equations describing the evolution of small perturbations can be integrated from the bottom up to obtain an effective one-dimensional equation involving only quantities defined at the free surface, see [15?] for the detailed derivation. Assuming further that the vertical component of the velocity is negligible before the horizontal one (which is satisfied far from the obstacle), this equation takes the form

$$[(\partial_t + \partial_x U(x))(\partial_t + U(x)\partial_x) + ig\partial_x \tanh(ih(x)\partial_x)]\delta\phi(t, x) = 0, \quad (\text{S1})$$

where $\delta\phi$ denotes the perturbation of the velocity potential (i.e., $\partial_x\delta\phi$ gives the perturbation of the velocity), h is the local water depth of the background flow, and U its velocity evaluated at the free surface. We used a quartic expansion of this equation in the numerical simulations reported in the following. The total water height h_T is given by the sum the background height and the time-dependent linear fluctuation

$$h_T(t, x) = h(x) - \frac{1}{g}(\partial_t + U\partial_x)\delta\phi. \quad (\text{S2})$$

In a region where U and h are homogeneous, Eq. (S1) becomes

$$[D_t^2 + ig\partial_x \tanh(ih\partial_x)]\delta\phi(t, x) = 0, \quad (\text{S3})$$

where $D_t \equiv \partial_t + U\partial_x$ is the time derivative in the rest frame of the fluid. Since the x direction plays no particular role in this frame (except for the boundary conditions), one can relax the assumption that $\delta\phi$ be independent on y . Doing so, we obtain

$$[D_t^2 + ig\vec{\nabla} \tanh(ih\vec{\nabla})]\delta\phi(t, x, y) = 0, \quad (\text{S4})$$

where $\vec{\nabla} = (\frac{\partial_x}{\partial_y})$. One can look for plane wave solutions in

$$\delta\phi(t, x) \propto \exp(i(-\omega t + kx)) \cos(n\pi y/l), \quad (\text{S5})$$

where y is a Cartesian coordinate in the transverse direction, l is the width of the flume, $n \in \mathbb{N}$, and $(\omega, k) \in \mathbb{R}^2$. The last factor comes from the boundary conditions at the walls of the flume, i.e., that the y -component of the velocity, given by $\partial_y\delta\phi$, must vanish at $y = 0$ and $y = l$. (For definiteness, we set the origin of y on one wall of the flume.) Plugging this into Eq. (S4) and noticing that, since \tanh is an odd function, the second term involves only even-order derivatives in each direction, give the dispersion relation

$$(\omega - U \cdot k)^2 = gp(k, n) \tanh(hp(k, n)), \quad (\text{S6})$$

where $p(k, n) \equiv \sqrt{k^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}$ is the modulus of the projection of the wave vector on the free surface. Taking the small- k limit, one can see that the velocity of long-wavelength waves in the fluid frame is $c = \sqrt{gh}$. The Froude number F , defined as the local fluid velocity divided by c , is thus equal to U/\sqrt{gh} . Modes with $n = 0$ (continuous and dashed lines in the top panel of Figure 1 in the Main Text) are homogeneous along the transverse direction, while those with $n > 0$ are the transverse modes (dot-dashed lines in the Figure). For the former, we distinguished modes with positive (continuous line) and negative (dashed line) frequency $\omega - Uk$ in the rest frame of the fluid.

At fixed ω , the dispersion relation of longitudinal modes, see Eq. (1) in the Main Text, has an infinite number of roots in k , but only a few of them are real. More precisely, if the flow is subcritical, i.e., if $|F| < 1$, there are 4 real roots for $|\omega|$ smaller than a critical value $\omega_c(v, h)$, and two real roots otherwise: two roots, corresponding to the I and B modes, merge and become complex when ω crosses ω_c by increasing values. The value of ω_c depends on U and h , which leads us to define two important frequencies, see Fig. S1:

- ω_{\max} is the $x \rightarrow \infty$ limit of $\omega_c(h(x), v(x))$. It is thus the maximum value at which the wave-maker can send a counter-propagating wave.
- ω_{\min} is the minimum value of ω_c , reached close to the top of the obstacle. In the WKB approximation, an incoming counter-propagating wave with $\omega < \omega_{\min}$ has no turning point and is thus essentially transmitted across the obstacle. On the contrary, a wave with $\omega > \omega_{\min}$ has a turning point and will be essentially reflected.

If the flow is (locally) supercritical, i.e., $|F| > 1$, then there are only two real roots for any real value of ω . So, in a tran-

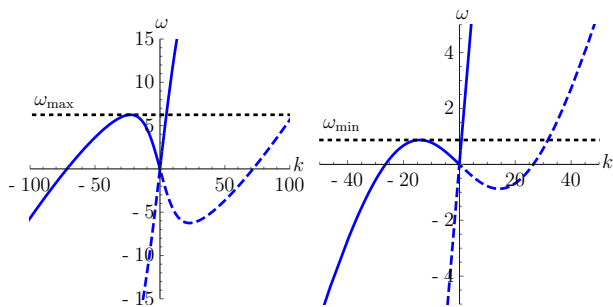


FIG. S1. Dispersion relation for the longitudinal modes ($n = 0$), evaluated in the downstream asymptotic region (left panel) and at the point where the water depth reaches its minimum (right panel). The horizontal, dotted lines show the corresponding values of ω_c where the I and B roots merge, i.e., ω_{\max} on the left panel and ω_{\min} on the right one. For the flow we used, see Figure 2 in the Main text, one has $\omega_{\max} \approx 5\text{Hz}$ and $\omega_{\min} \approx 0.8\text{Hz}$.

scritical flow (where, by definition, there is a supercritical region), $\omega_{\min} = 0$. In our setup instead, the Froude number is everywhere smaller than 1, so $\omega_{\max} > \omega_{\min} > 0$. Their respective values are $\omega_{\max} \approx 5\text{Hz}$ and $\omega_{\min} \approx 0.8\text{Hz}$.

In a stationary background flow, the frequency of linear perturbations is conserved. The outgoing waves obtained by the scattering of an incoming monochromatic wave of frequency ω thus have the same frequency as the incoming one. Hence their wave vectors k^a evaluated far away from the obstacle will be given by the real roots of Eq. (1) of the Main Text at that frequency ω . One consequence of this is that 2-point correlation function of the noise in the (k, k') plane is localized where k and k' correspond to the same frequency. This is shown in Figure 3 of the Main Text. To obtain the curves, we considered all the possible doublets $(k_a(\omega), k_b(\omega))$ where $(a, b) \in \{B, I, R, H\}^2$, and drew their locus when ω describes $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$. These curves are also shown in Figure 4 of the Main Text to verify that the location of the peaks is consistent with our analysis, and to identify the waves they involve.

Experimental Setup

Our experiments were performed in the water channel of the Pprime Institute, which is 6.8 m long and 0.39 m wide. A PCM Moineau pump creates the water current and its flow rate is regulated by a variator. The water is first injected into a convergent chamber whose geometry and honeycomb structure produce an outgoing flow devoid of practically all boundary-layer effects and macro-vortices. At the downstream end of the channel, there is a guillotine which can be set in vertical motion around a mean height to generate a wave that propagates upstream, see Fig. 1 in [10]. To measure the free surface, as in [2, 9], a laser sheet was projected from above along the center line of the channel. The laser beam is produced by an Argon LASER (Spectra Physics 2W), guided by an optical

fiber to a cylindrical lens (placed at 1.44 m above the free surface) which formed a LASER sheet. With a LASER power of 0.14 W (after the lens), the power density at the free surface is around 0.05 Wm^{-1} . A fluorescent dye was added to the water to delineate a laser line on the surface, specifically 50 g of fluorescein to reach a high concentration ($\approx 12 \text{ gm}^{-3}$) in order to obtain a minimum penetration of the LASER sheet into the fluid. Indeed, the LASER light intensity decreases by 90% at 5 mm below the free surface. Three cameras (Jai CVM2 1600x1200) captured this LASER line on a 2.16 m wide visualization window. Their resolution is 0.45 mm/px. We used a sub-pixel detection method similar to that of [2] with an accuracy of 0.1 mm, see also [9]. The Figure S3 shows the stationary undulation (represented after free surface detection with sub-pixel accuracy in Figure 2 of the Main Text by the red curve).

Windowing

The finite length L_I of the spatial integration window has two undesirable effects. First, the Fourier transform of a plane wave has a main lobe with a non-vanishing width, which limits the accuracy in determining the wave-vector k and amplitude A . Second, it also shows side-lobes which produce artefacts in the correlation functions. At fixed L_I , the magnitude of these effects depend on the shape of the window function, which must be suitably chosen to minimize the artefacts while keeping a good accuracy on k and A . We found that a convenient choice is the Hamming window [12], which strongly suppresses the amplitude of the first side-lobes at the cost of multiplying the width of the main one by two with respect to a rectangular window. As shown in Fig. S4, this suppression efficiently erases the artefacts which are clearly visible with a rectangular window.

Scattering coefficients

When sending a macroscopic coherent wave from the downstream end of the flume, we measured the scattering coefficients for the B , H and transmitted modes. Their amplitudes agree with results of numerical simulations only when the static undulation of the background flow is taken into account, as we now describe.

In Fig. S5 we show the norms of the coefficients α , β , and \tilde{A} entering in the scattering of the (unit norm) incoming mode ϕ_ω^I into the four outgoing modes [8], see Figure 2 of the Main Text,

$$\phi_\omega^I \rightarrow \alpha_\omega \phi_\omega^B + \beta_\omega \phi_\omega^H + A_\omega \phi_\omega^R + \tilde{A}_\omega \phi_\omega^T. \quad (\text{S7})$$

The most accurate way we found to measure α_ω and β_ω consists in using the constructive interferences of the G_2 of

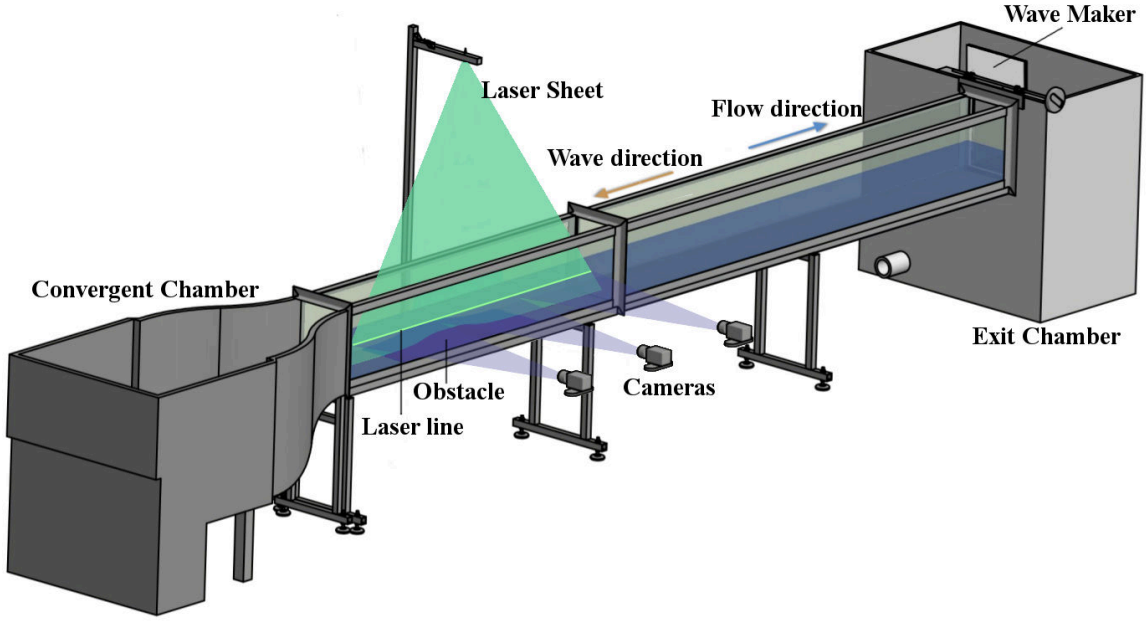


FIG. S2. A sketch of the experimental setup for measuring free surface deformation. The flow goes from left to right, as indicated by the blue arrow, while the incident mode I sent by the wave maker goes in the opposite direction, see brown arrow.



FIG. S3. Picture of the LASER line showing the stationary undulation over the obstacle. The distance between both vertical black lines is 1 m.

Eq. (4) in the Main Text:

$$|\alpha_\omega| = \frac{G_2(\omega, k_I, k_B)}{G_2(\omega, k_I, k_I)} \left| \frac{\partial_\omega k_I}{\partial_\omega k_B} \right|^{1/2},$$

$$|\beta_\omega| = \frac{G_2(\omega, k_I, k_H)}{G_2(\omega, k_I, k_I)} \left| \frac{\partial_\omega k_I}{\partial_\omega k_H} \right|^{1/2}. \quad (\text{S8})$$

In agreement with [8, 10], for $\omega \leq \omega_{\min} \sim 0.8\text{Hz}$, $|\alpha_\omega|$ and $|\beta_\omega|$ both significantly decrease whereas the transmission coefficient $|\tilde{A}_\omega|$ becomes large (it should reach 1 when $\omega \rightarrow 0$). For $\omega > \omega_{\min}$, $|\alpha_\omega|$ increases and saturates to a value close to 1. $|\beta_\omega|$ also increases and then slowly decreases. In fact, the maximal value of $|\beta_\omega|$ is significantly larger than that we obtained by solving numerically the wave equation, see below. We have not succeeded in measuring the coefficient

A_ω relating long wavelength co-propagating modes. Simulations indicate that it should be smaller than 0.2. Collecting the data, and assuming that $|A_\omega| \lesssim 0.2$, the unitarity relation $1 = |\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 + |A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2$ expressing the conservation of the norm [8] is obeyed within error bars. The amplitude of the wave sent by the wave maker was about 0.15mm.

We here summarize the numerical procedure of [8] that we applied in the present case. Under the conditions specified above Eq. (1) in the Main Text, linear perturbations obey the wave equation (S1). A quartic truncation in ∂_x gives

$$\left[(\partial_t + \partial_x U) (\partial_t + U \partial_x) - g \left(\partial_x h \partial_x + \frac{1}{3} \partial_x (h \partial_x)^3 \right) \right] \phi = 0, \quad (\text{S9})$$

where U and h are here x -dependent functions describing the

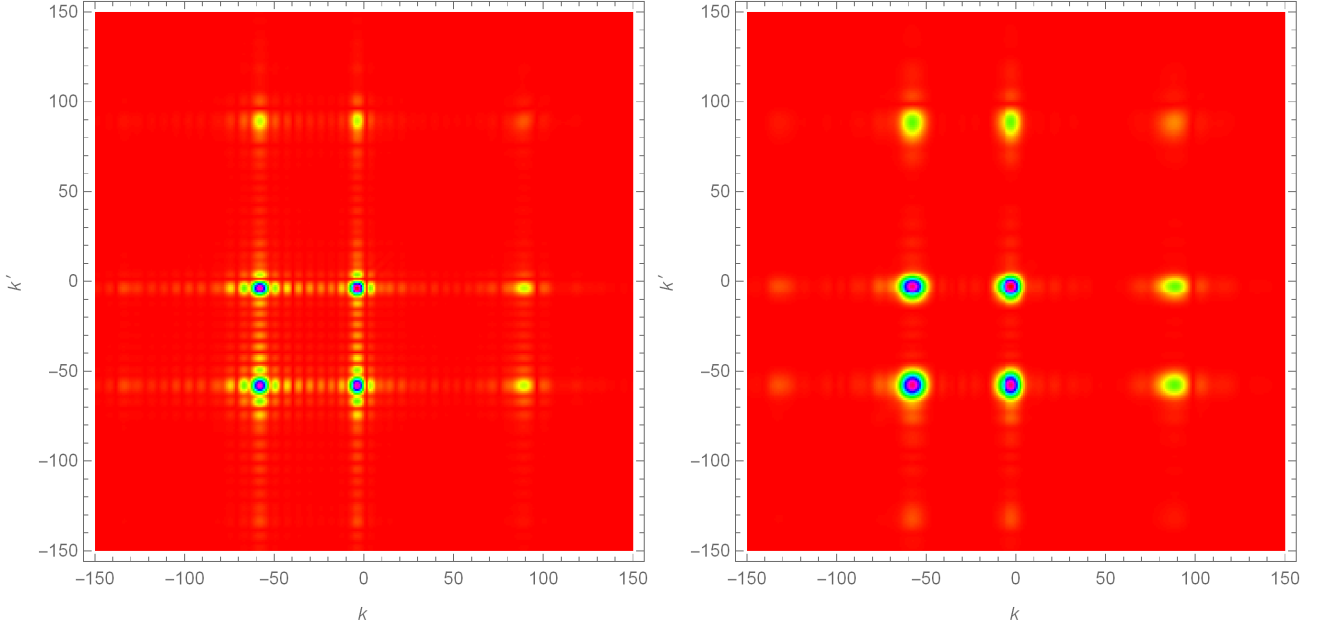


FIG. S4. Comparison of the two-point correlation function $G_2(\omega; k, k')$ of Eq. (4) of the Main Text, evaluated using a rectangular window (left) and a Hamming window (right) over $x \in [0.45\text{m}, 1.45\text{m}]$, for the case when an incident wave of angular frequency $\omega = 2.5$ Hz. k and k' are expressed in m^{-1} .

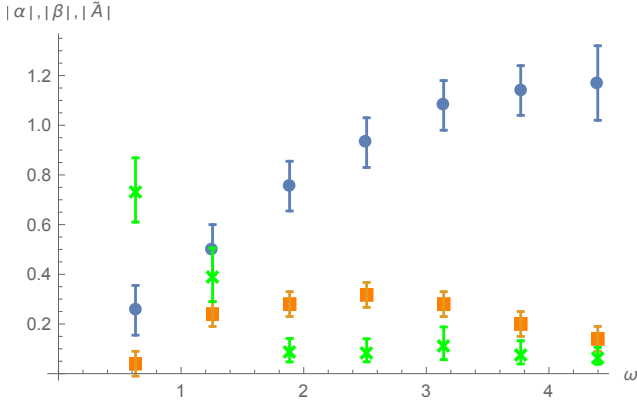


FIG. S5. Plots of the norm of the scattering coefficients $|\alpha|$ (blue circles), $|\beta|$ (orange squares), and $|\tilde{A}|$ (green crosses) observed when sending I waves for seven different frequencies. For $|\alpha|$ and $|\beta|$, error bars arise from the extension in k space over the finite integration window of 0.95m . Relative statistical uncertainties are smaller than 10% and do not contribute significantly. The transmission coefficient \tilde{A} was obtained by a method similar to that of [10] and averaged over the 80 realizations. Here, error bars show the standard deviation.

background flow and where ϕ is the perturbation of the velocity potential at the free surface. It determines the linear variation of the water depth δh through $\delta h = -\frac{1}{g}(\partial_t + U\partial_x)\phi$.

We numerically solved Eq. (S9) in a background flow with

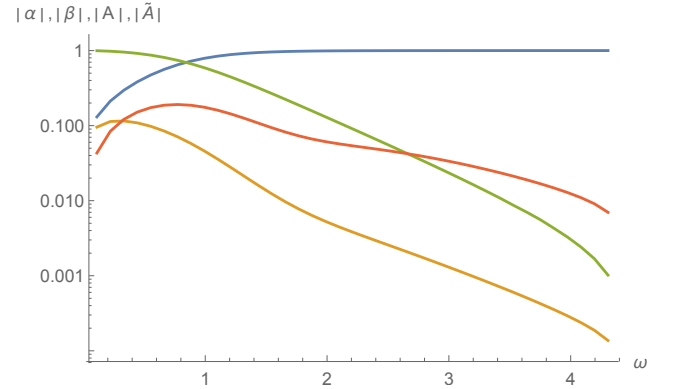


FIG. S6. In a logarithmic scale, we show the norm of 4 scattering coefficients entering Eq. (S7), namely $|\alpha_\omega|$ (blue), $|\beta_\omega|$ (orange), $|A_\omega|$ (red), and $|\tilde{A}_\omega|$ (green) as functions of ω (in Hz).

a water depth of the form

$$h(x) = h_{\text{eff}} + (h_0 - h_{\text{eff}})e^{-x^2/\sigma^2} + \frac{A_u}{4} \cos(k_u x) \quad (\text{S10})$$

$$\times \left(1 + \tanh\left(\frac{x - x_L}{\Delta_L}\right)\right) \left(1 + \tanh\left(\frac{x - x_R}{\Delta_R}\right)\right),$$

and with $U(x) = q/h(x)$. q and h_0 are such that the maximal Froude number matches the observed value $F_{\text{max}} \approx 0.85$ and the asymptotic flow velocity is given by its effective value $U_{\text{eff}} = 0.37\text{ms}^{-1}$. The parameters $x_{R/L}$ and $\Delta_{R/L}$ specify

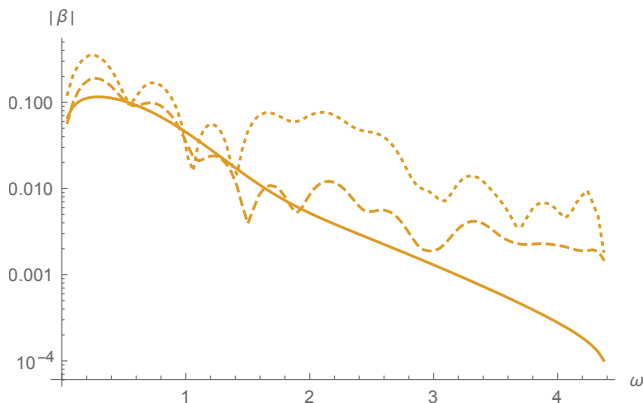


FIG. S7. We show $|\beta|$ as a function of ω (in Hz) for the background flow and for two undulations added on top of it. The corresponding three water depths are given by Eq. (S10) with $A_u = 0$ (continuous), $A_u = 3\text{mm}$ (dashed), and $A_u = 9\text{mm}$ (dotted). One clearly sees the significant increase of the norm of β_ω when including the scattering on the undulation.

the locations of the two ends of the undulation and their steepness. Its amplitude and wave vector are given by A_u and k_u .

We first considered the case without undulation $A_u = 0$, see Fig. S6 where the logarithms of the norms of the four coefficients entering Eq. (S7) are represented as functions of the angular frequency. Because of the quartic truncation of the dispersion relation, the values of ω_{\max} and ω_{\min} slightly differ from the actual ones: $\omega_{\max}^{\text{quart}} \approx 4.4$ Hz and $\omega_{\min}^{\text{quart}} \approx 0.72$ Hz. We see that the transition from transmission below ω_{\min} to blocking above ω_{\min} reproduces rather well what is found in Fig. S5, in agreement with the analysis of [10]. In fact the main difference concerns the maximal value of the norm of β_ω and its decay for $\omega > \omega_{\min}$. For instance, for $\omega = 3\omega_{\min}^{\text{quart}}$, the numerical prediction of $|\beta|$ is 0.004, whereas the observed value is $|\beta| \sim 0.3$. We believe that this large discrepancy will still be found when replacing the quartic wave equation by a more accurate one. Hence the scattering on a flow without undulation does not seem to reproduce the observed values of $|\beta_\omega|$.

This conclusion is reinforced by computing $|\beta_\omega|$ on background flows containing an undulation with similar properties as those we observed, see the red curve in Figure 2 in the Main text. With more precision, the undulation is attached on the downstream side of the obstacle, i.e. $x_L \sim 0$, it has about 15 oscillations ($k_u x_R \approx 14.3$) and is slowly damped with $k_u \Delta_R \sim 9$. The wave vector k_u in Eq. (S10) has been chosen to match the zero-frequency root of the quartic wave equation, see Eq. (S9). Its peak-to-peak amplitude is $2A_u = 6\text{mm}$ and 18mm . When including the scattering on each of these two undulations, we clearly see that the maximum value of $|\beta_\omega|$ is much larger, and its decrease for large ω slower. We therefore conjecture that the scattering on the undulation plays a significant role in the properties of the coefficients represented in Fig. S5, and in the strength of the correlations presented in

Figure 5 of the Main Text.

Nonlinear effects

We now estimate the contribution of nonlinearities in the stimulated case. To first order, their effect is to convert part of the incident waves to harmonics with frequencies which are multiples of that of the wave-maker, and/or to induce a spatial dependence of the frequency [13]. To obtain the evolution of the frequency content in space, we compute the Fourier transform in time $\delta\tilde{h}(\omega, x)$ for each position. Results are shown in Fig. S8 for the incoming frequency $\omega_i = 3.14\text{Hz}$. It clearly shows the absence of instability (increase/decrease of the incoming frequency in space) or harmonics generation. For instance, the ratio between the signal of the incoming frequency and the first harmonic is the same than the signal-to-noise ratio. We have checked that it remains true for all incident frequencies show in Fig. S5. These results indicate that nonlinear effects are negligible. Since the typical amplitude of the noise fluctuations is of the same order or smaller than that of the waves sent by the wave-maker, nonlinear effects should a fortiori play no significant role in the noise.

Correlations in a flow without obstacle

To verify that the correlations we observed are mainly due to the scattering on the flow inhomogeneities induced by the obstacle, we now briefly study the properties of the noise for a flow over a flat bottom. For these measurements, we used three cameras (Point Grey Research Grasshopper3 2048 × 2048) which provide a 2.30m wide visualization window with a resolution of 0.37mm/px. The spatial window used to compute the Fourier transform is 1m long and the experiment lasted 102s, separated into 10 intervals of equal duration to compute the averages.

The power spectrum of the noise in the (nearly homogeneous) flow is shown in Fig. S9. When comparing it with Fig. 1 of the main text, the principal difference concerns the power of the dispersive branches, which is strongly reduced. This is a first indication that the mode conversion is much smaller than in the case with obstacle. The correlation maps at fixed ω in the $k - k'$ plane show no clear cross-correlations. (This is why we do not show them.)

To quantify the low intensity of the cross-correlations, we estimated the ratios $|c_{\text{IB}}|/n_I$ and $|c_{\text{IH}}|/n_I$ for several frequencies, where

$$c_{ab}(\omega) \equiv \frac{G_2(\omega; k_a(\omega), k_b(\omega))}{\sqrt{\frac{dk_a}{d\omega} \frac{dk_b}{d\omega}}},$$

and where n_I is the normalized power spectrum of the incoming hydrodynamical I modes. Although the data seem too noisy to determine a precise value, we found that these two quantities remain smaller than 10^{-3} . By comparison, for

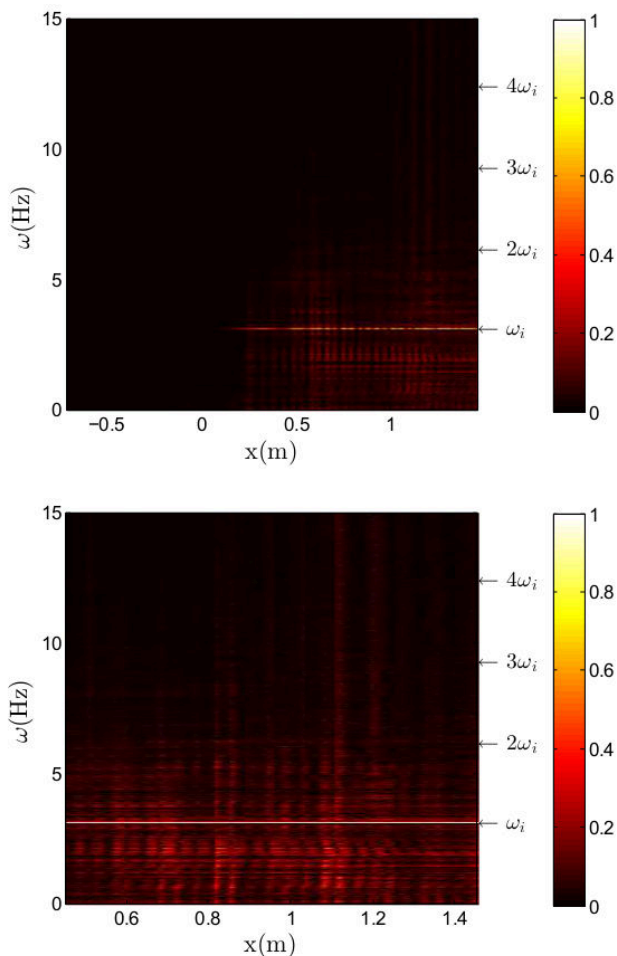


FIG. S8. Top: Absolute value of the time Fourier transform $|\delta\tilde{h}(\omega, x)|$ for the stimulated case with the incoming frequency $\omega_i = 3.14\text{Hz}$ (divided by its maximum value). Bottom: Signal-to-noise ratio $|\delta\tilde{h}(\omega, x)|/|\delta\tilde{h}(\omega_i, x)|$ against the space position (in the studied region).

the flow with obstacle these quantities are slightly larger than 10^{-2} for $\omega = 1\text{Hz}$ and larger than 0.1 for larger frequencies. This strongly suggests that most of the observed correlations presented in the main text come from the inhomogeneities of the flow due to the obstacle, and the blocking of incoming waves.

Classical and quantum correlations

It is interesting to compare the techniques we used to those recently used by J. Steinhauer in his study of density fluctuations in a condensed atom gas [7]. Before doing so, it is worth comparing the two systems.

In both cases, one studies linear perturbations propagating on top of an inhomogeneous flow. The dispersion relation is

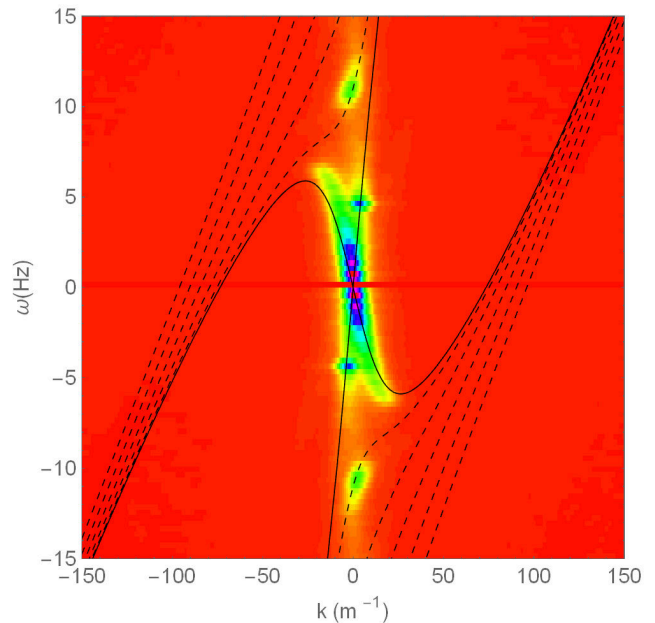


FIG. S9. Power spectrum for the flow without obstacle. As in Figure 1 of the Main Text, we show the square root of \mathcal{P} , and use the same normalization.

superluminal (anomalous) in [7] as the group velocity in the frame of the fluid increases when increasing the wave number k_x , whereas it is subluminal in our case. The main consequence of this difference appears at the level of the characteristics of the corresponding wave equations. In the superluminal case, the turning point (where the wave is blocked) is located in the supersonic region [16], whereas in our case it is located in the subsonic region [8]. However, the scattering coefficients are similar between the two cases. Indeed, as explained in [1] there exists a map between them which preserves their main properties in the weak dispersive limit.

More important differences appear at the level of the background flows. Firstly, J. Steinhauer created a (nearly) stationary flow which is analogous to a black hole (as the flow velocity increases along the direction of the flow) whereas we dealt with a stationary flow analogous to a white hole (in the downstream region). As a result, in our case, the scattered waves are described by the high wave number roots k_B and k_H which both propagate against the flow on the same side of the flow, whereas in [7] the scattered waves are described by low wave-number roots which propagate on either side of the horizon. Secondly, the flow created by J. Steinhauer is clearly trans-critical as the Mach number $M = v/c$ on the supersonic side is of the order of 5 whereas our flow is sub-critical since $F_{\max} \approx 0.85$. Hence, in our case, only waves with frequency above ω_{\min} of Fig. S1 are essentially blocked, whereas there is no such critical frequency in [7]. There is yet another difference which concerns the number of modes involved in the scattering at fixed ω . In our case, as can be seen in Eq. (S7), the scattering involves four modes. In his case instead, be-

cause the flow is transcritical and monotonic, there are only three of them [3]. Finally, our white hole flow is modulated on the downstream region by a zero-frequency undulation which induces some extra scattering, as we discussed above.

Besides these differences, the important common fact is the stationary linear mode mixing which involves negative energy waves. Hence in both cases there is a steady production of correlated pairs of modes propagating away from the horizon in the asymptotic uniform regions. Moreover, in both cases one is dealing with a statistical ensemble of density perturbations. In [7], the phonon state is described by an ultra low temperature quantum state, apparently very close to the vacuum. In our case, we have a random distribution of incoming perturbations. Hence in both cases the appropriate tool to study the effects of the scattering is to consider the two-point function of Eq. (4) of the Main Text, parametrized by the wave numbers k and k' measured in the asymptotic homogeneous regions. Then, as explained in the text, since the background flow and the probability distribution are both stationary, the cross-correlations should only involve pairs of modes with roots $k_a(\omega), k_b(\omega)$ sharing the same frequency ω . At this level, there is an important difference between observations of cold gases and surface waves. In the present work, we measured the perturbations as a function of time. From this we could extract the two-point function at two different times, and therefore its behavior at fixed ω . In [7] instead, in situ density perturbations are only measured at one time and, to obtain statistically relevant information, the measurements are repeated many times (always after the same lapse since the formation of the sonic horizon). In that case, only the equal-time correlation function is obtained. As a result, only the integral over ω of Eq. (4) of the Main Text is obtained [16], something which could induce a certain blurring of the cross-correlations.

Irrespectively of this difference, the key information concerns the relative importance of the strength of the correlation between the modes $k_a(\omega)$ and $k_b(\omega)$ with respect to their power spectrum (their auto-correlations). This comparison can be made precise by computing the ratio of Eq. (4) of the Main Text. When dealing with a classical ensemble of perturbations, this ratio is necessarily smaller than 1, as this is guaranteed by a Cauchy-Schwarz inequality. In classical terms, the value of $g_2(\omega; a, b)$ gives the fraction of modes

$k_a(\omega)$ and $k_b(\omega)$ that are correlated to each other. In quantum settings, the situation is more subtle. When using normal ordered operators to compute the auto-correlations, (i.e., the mean occupation number of quasi-particles), $g_2(\omega; a, b)$ can be larger than 1, or equivalently, the difference $\Delta = G_2(\omega; k_a, k_a) \times G_2(\omega; k_b, k_b) - |G_2(\omega; k_a, k_b)|^2$ can be negative for a small subset of (entangled) states. In this case, the bi-partite state describing the modes $k_a(\omega)$ and $k_b(\omega)$ is necessarily “non-separable”, see [4–6] for a presentation of these notions and their implementation in the context of the analog Hawking radiation.

-
- [1] A. Coutant, R. Parentani, and S. Finazzi, Phys. Rev. D **85**, 024021 (2012).
 - [2] S. Weinfurtner, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, Phys. Rev. Lett. **106**, 021302 (2011).
 - [3] J. Macher and R. Parentani, Phys. Rev. A **80** (2009) 043601.
 - [4] J. R. M. de Nova, I. Zapata and F. Sols, Phys. Rev. A **89** 043808 (2014).
 - [5] X. Busch and R. Parentani, Phys. Rev. D **89**, no. 10, 105024 (2014).
 - [6] D. Boiron, A. Fabbri, P.-É. Larré, N. Pavloff, C. I. Westbrook and P. Zin, Phys. Rev. Lett. **115**, no. 2, 025301 (2015).
 - [7] Observation of density correlations stemming from vacuum fluctuations was reported in a flowing atomic Bose condensate while we were finishing this work: J. Steinhauer, Nat Phys **10**.1038 3863 (2015).
 - [8] F. Michel and R. Parentani, Phys. Rev. D **90**, 044033 (2014).
 - [9] P.-J. Faltot, R. Bellanger, J.-M. Mougenot and G. Rousseaux, XIIIèmes Journées Nationales Génie Côtier Génie Civil (2014). <http://www.paralia.fr/jn-gcgc/13-10-faltot.pdf>
 - [10] L.-P. Euvé, F. Michel, R. Parentani and G. Rousseaux, Phys. Rev. D **91**, 024020 (2015).
 - [11] K. M. M. Prabhu, “Window Functions and their Applications in Signal Processing”, CRC Press, 2013.
 - [12] G. Heinzel, A. Rüdiger and R. Schilling, Max Planck Institute (MPI) für Gravitationsphysik, Laser Interferometry and Gravitational Wave Astronomy, 395068 (2002).
 - [13] T. H. C. Herbers S. Elgar and R.T. Guza, J. of Physical Oceanography **32**, 1181 (2012).
 - [14] W. G. Unruh, Lect. Notes Phys. **870**, 63 (2013).
 - [15] A. Coutant and R. Parentani, Phys. Fluids **26**, 044106 (2014) doi:10.1063/1.4872025 [arXiv:1211.2001 [physics.flu-dyn]]
 - [16] F. Michel, J.-F. Coupechoux, and R. Parentani, arXiv:1605.09752 [cond-mat.quant-gas].

Classical analogue of an interstellar travel through a hydrodynamic wormhole

L.-P. Euvé and G. Rousseaux

*Institut Pprime, UPR 3346, CNRS-Université de Poitiers-ISAE ENSMA,
11 Boulevard Marie et Pierre Curie-Téléport 2, B.P. 30179,
86962 Futuroscope Cedex, France*

(Received 18 July 2017; published 25 September 2017)

The classical theory of space-time, namely general relativity, suggests but does not demonstrate the existence of so-called wormholes allowing for interstellar journeys. Alternative proposals such as quantum gravity theories are developed nowadays to allow for wormhole travels by assuming hypothetical trans-Planckian effects at tiny scales. Here we show experimentally that analogue traversable and bidirectional wormholes exist in hydrodynamics following a suggestion by Wheeler. Using a water channel, we sent free surface waves on a countercurrent in an analogue gravity setup aiming at showing that hydrodynamic wormhole travels are controlled by a cascade of dispersive scales including surface tension effects: the capillary wavelength plays the role of a Planckian scale below which long gravity waves are transformed into short capillary waves that are able to move at speeds higher than the “flow” of space-time. Whereas our results do not apply to putative astrophysical wormholes *per se*, we anticipate that they will trigger new ideas to explore quantum gravity physics.

DOI: [10.1103/PhysRevD.96.064042](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.064042)

I. INTRODUCTION

The point singularity at the heart of models of black holes like the 1916 Schwarzschild-Droste solution of Einstein’s theory of general relativity leads to the failure of providing a complete history for the geodesics of massless and massive particles encountering the singularity [1,2]. In 1935, Einstein and Rosen tried to link two external solutions *à la* Schwarzschild by “a bridge” whose interior solution was geodesically incomplete [3]. In 1959, Fronsdal and separately Kruskal in 1960 designed an analytic extension of the Schwarzschild solution by coupling a black hole with its time-reversed solution (a white hole spewing rather than swallowing matter, a solution discovered by Flamm in 1916 [4]) forming a so-called “wormhole” [5,6] (a term coined by Wheeler in 1957 for a tunnel-like shortcut through space-time [7–10]) which closed too rapidly for light to travel inside. In 1973, Ellis found a way to force the Schwarzschild singularity to stay open by replacing it by a “drain hole” with a vector field on the associated space-time which can be interpreted as a velocity field for an “aether” draining through the hole [11]. In order to achieve this “plumbing” device, Ellis coupled Einstein’s vacuum field equations with a scalar field in order to open the point singularity. As Ellis imagined, the aether “is more than a mere inert medium for the propagation of electromagnetic waves; it is a restless, flowing continuum whose internal, relative motions manifest themselves to us as gravity. Mass particles appear as sinks or sources of this flowing ether.” Ellis introduced a drain hole line element with a coordinate three speed [11]. During the 1970s and independently,

White [12], Anderson and Spiegel [13] and Unruh [14] developed the so-called “rimfall” analogy between the propagation of light in a curved space-time and the way waves propagate on a moving medium [15–18]. For example, White derived the “acoustic” metric in 1971 with a velocity of the moving medium akin to Ellis’ aether flow. In 1975, Anderson and Spiegel thought that waves propagating in a moving medium could be kinematically trapped, paving the way to the seminal paper of Unruh in 1981 where he envisaged the possibility to observe in laboratory experiments the Hawking radiation emanating from an analogue black hole horizon, namely the kinematical amplification of quantum vacuum fluctuations by the tidal forces mimicked by the flow gradient at the analogue horizon [19]. Unruh’s analogy when applied to condensed matter systems solves two difficulties with Hawking’s prediction: firstly, the outgoing radiation appears to originate from arbitrarily short wavelengths in the vicinity of the horizon; secondly, the corresponding energy of the fluctuations goes to infinity transforming the horizon into a caustic. The so-called trans-Planckian problem related to the wavelength was tackled by Jacobson in 1991 who suggested that dispersion would avoid the infinite blue-shifting to the detriment of Lorentz invariance of the theory [20–22]: analogue condensed matter systems are naturally dispersive and/or dissipative at small scales. Hence, they make perfect systems in order to test the Hawking prediction and its robustness even in the presence of dispersion: analogue gravity was born [15–18]. The notion of an event horizon is extended by the notion of a dispersive group velocity horizon or turning point which can be computed from extrema of the dispersion relation.

Quite separately, theories of quantum gravity like rainbow gravity were developed allowing Lorentz symmetry breaking (see a modern discussion in [23]) following another suggestion of Wheeler known as the “quantum foam” [7–10]. Indeed, during the 1960s, he considered wormholes as ultramicroscopic objects (Planck-scale sized) forming a quantum foam connecting separate regions of space-time. He compared the situation to the free surface of ocean which looks flat from an airplane view but who becomes choppy when approaching the surface. The wave turbulence properties of space-time would be controlled by Planckian units that Wheeler was again the first to discuss in an astrophysical context [7–10]. Taking seriously the paradigms of modified gravity like rainbow gravity [23] or analogue gravity [15–18], it turns out that dispersive effects at the Planck scale may control the physics of wormhole travel. According to Wheeler [8], “obviously there is no reason to expect any direct analogy between collective disturbances in the Einstein-Maxwell field and those that take place in a crystal lattice. Let it nevertheless be insisted that one shall leave no stone unturned in searching for special phenomena associated with the propagation of energy through space... Disturbances of very short wavelength will feel out the microcurvature of space and will not propagate normally. The same will be true of disturbances of very long wavelength, comparable to the radius of the Universe. Consequently a disturbance that is originally localized will be dispersed. However, if the dispersion curve possesses a point of inflection, then disturbances made out of wavelengths near the point of inflection will keep together for a long time in the linear approximation.”

Recently, Hawking claimed that the strict notion of an “event horizon” was incompatible with quantum mechanics since according to him “there is no escape from a black hole in classical theory, but quantum theory enables energy and information to escape” [24]. Wheeler’s guess and Hawking’s conjecture (“*there are no black holes*”) are supported by analogue gravity. Indeed, high- and low-energy behavior in a condensed matter system display departures from the linear dispersion relation. For example, a Bose-Einstein condensate features a superluminal correction in the Bogoliubov dispersion relation whereas water waves can display either subluminal, superluminal or inflectional behavior *à la* Wheeler depending on the physical parameters [18]. These corrections to the linear dispersion relation are controlled by the inclusion of microscopic dispersive scales in the system reminiscent of the Planck scale: the healing length in a Bose-Einstein condensate, the water depth or the capillary wavelength in water waves. Hence, one concludes that there are no analogue black holes because of dispersion in condensed matter systems. Hawking suggested the possibility of a so-called “apparent horizon” in addition to the event horizon; the former is a frontier region where the light rays would be suspended when trying to escape from the black hole [24].

In this work, we use water waves for a condensed matter system amenable to experiments as described in [25–38]. In the long-wavelength limit, both systems in general relativity and condensed matter physics are described by the following effective metric: $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx - U dt)^2$. For surface waves, they propagate in the same way as a massless scalar field [25]. When the analogy is broken (by “entering the white hole” and “escaping from the black hole”), it is principally through the short-wavelength dispersive effects [25–37] which already breaks the exactness of the mapping to an effective metric [21,22]. The effective 1 + 1 dimensional metric is expressed in terms of both flow velocity $U(x)$ and wave speed $c(x)$ profiles that can both be tuned experimentally. One recalls that in general relativity, c is constant whereas it is often space dependent in condensed matter setups. In our experiment, both profiles are given by the geometry of the obstacle used to change the water depth. It is also of course important that this metric is only correct in the dispersionless case, whereas our experiment relies on dispersion.

The inflectional behavior of the water wave dispersion relation will allow us to prove experimentally, after our theoretical and numerical predictions, that analogue wormhole travels in hydraulic settings are controlled by a cascade of dispersive effects, one of which, the one associated to the capillary length, could be an analogue candidate for a quantum gravity behavior. To the best of our knowledge, this is the first experiment in the field of analogue gravity to demonstrate the existence of an analogue wormhole travel following our theoretical and numerical predictions [36]. Sabin has discussed recently another proposal in the context of a dc-SQUID array [39]. We will base ourselves on the concept of a *Wheeler wormhole*, a wormhole featuring dispersive horizons (analogous to the event and apparent horizons *à la* Hawking) whose bidirectionality is controlled by microphysical effects. In astrophysics, microphysical effects would correspond to trans-Planckian physics and possibly quantum gravity regimes. In hydrodynamics, microphysical effects correspond to surface tension physics. Other types of wormholes without a horizon like the Morris-Thorne wormhole have been proposed in the literature [40–45]. We will show the existence of an analogue Morris-Thorne wormhole as well by playing on the physical parameters of our experiments: hence, traversability is not necessarily a synonym of the absence of horizon. This latter kind of wormhole requires in general relativity the inclusion of either a so-called exotic matter with a nonstandard stress-energy tensor, “phantom energy” or “scalar field” and so on, to stabilize them [5,6]: it is outside the scope of the present paper to understand why, in hydrodynamics, the analogue wormholes are stable. One can simply argue that Navier-Stokes equations are different from Einstein’s equations and that stability of the hydraulic wormhole is possibly linked to the fluid dynamics. Constraints on the energy to keep open the wormhole by a “repulsive” gravity [6,45] are certainly

violated at small scales in analogue systems. Besides, the velocity profiles in hydrodynamics do not necessarily have a “central” singularity like in general relativity: for example, the Schwarzschild-Droste solution in Painlevé-Gullstrand coordinates $V(r) = -c\sqrt{r_S/r}$ (where $r_S = 2GM/c^2$ is the Schwarzschild radius) is equivalent to a radial flow which is singular at $r = 0$ [1,2]. The longitudinal speed profile $U(x)$ used in our experiments is regular in the wormhole region defined as the region between a pair of black and white hole horizons. Moreover, our experimental dispersive horizons are eternal since the flow is “pumped” continuously and there is no evaporation of the black or white holes on the time scale of the experiments. Time-dependent flow behavior is outside the scope of the present paper since it will certainly involve the underlying dynamics. As explained in Peloquin *et al.* [36], the direct travel from the black to the white horizon is rather without interest when the flow gradients dU/dx are small: a redshifting of the gravity wave entering the black horizon takes place and so does a blueshifting when getting outside from the white horizon since the wave is propagating in the same direction as the flow current. Here, we will focus on the reverse travel from the white horizon to the black horizon since it will display the effect of small-scale physics controlled by surface tension. The flow speeds are sufficiently small to avoid the appearance of negative energy waves akin to antiparticles. For the same reason, we will not look at a black hole laser effect since it is beyond the main objectives of this paper (see [36] for some numerical simulations). Negative energies are often mentioned to cause light rays to defocus at the throat of the wormhole like in the original proposal by Thorne *et al.* [40,41]: the defocusing is controlled by the underlying dynamics in our work.

II. EXPERIMENTAL SETUP, METROLOGY AND PARAMETER CHOICES

Our experiments were performed in the water channel of the Pprime Institute in Poitiers (see Fig. 1) and were inspired by the previous works [26–29,31–38].

The dimensions of the channel are length \times width \times height = 6.5m \times 0.39m \times 0.6 m (Fig. 1). A PCM Moineau pump regulated by a variable frequency drive can reach a maximum flow rate of 65 Ls⁻¹.

The spatially varying background was set up by an obstacle whose geometry $h_B(x)$ is the same as in the Vancouver experiments [29] which is 1.55 m long and 0.106 m high (Fig. 1). The volumetric flow rate is adjusted by a pump at $Q = 8.13$ Ls⁻¹ and the asymptotic water depth h_0 is set at 205 mm to get velocities U of the free surface in the range between 0.102 and 0.203 ms⁻¹ due to the presence of the bottom obstruction (the Froude number varying between 0.07 and 0.20).

As explained in [28], the maximum velocity must be in the range $[U_c = -0.178\dots U_\gamma = -0.23]$ ms⁻¹ in order not to

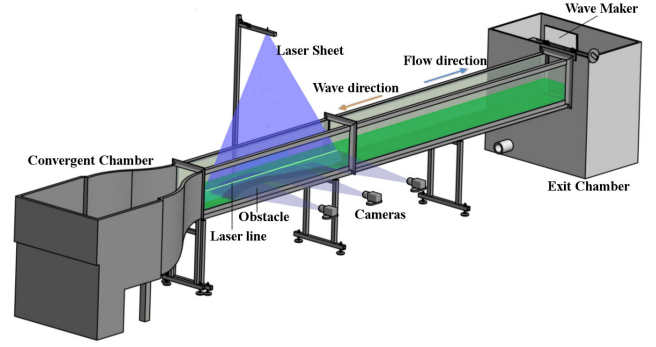


FIG. 1. Scheme of the experimental setup with the water channel with dark green fluorescein, the blue laser sheet with its light green signature on the free surface and the three measurement side cameras.

have extra features well known in analogue gravity such as the appearance of a stationary undulation or negative energy waves with a corresponding black hole laser effect [36]. Figure 2 represents the phase diagram (U, T) indicating where the blocking velocities $|U|$ at which the white (“event”), blue (“apparent”) and negative horizons occur, as a function of the wave period T (the procedure to obtain this phase diagram is explained in [28]). The incident period T_I must be less than $2\pi/\omega_{\min}$, to be blocked at the white horizon (the evolution of the frequency ω_{\min} defined in Fig. 2 as a function of the Froude number and the water depth was studied in [34]) and superior to T_c in order to observe a

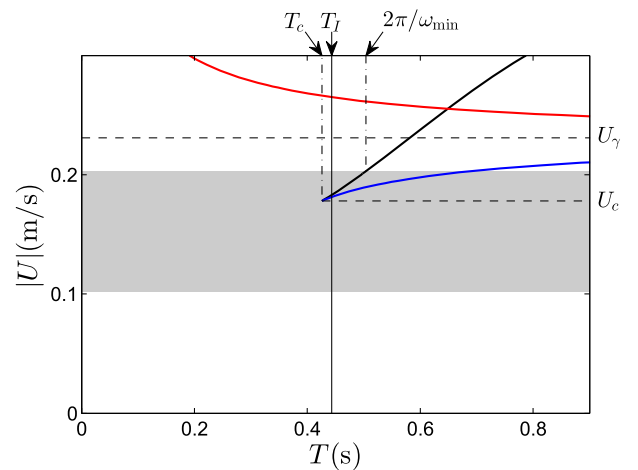


FIG. 2. Phase diagram (U, T) . The black, blue and red curves correspond to, respectively, the white, blue and negative horizons. The gray region indicates the velocity range. The horizontal dashed lines correspond to the critical velocity $U_c = -0.178$ ms⁻¹ (where the white and blue horizons merge) and $U_\gamma = -0.23$ ms⁻¹ the minimum velocity for the appearance of a stationary undulation. The vertical point-dashed lines indicate the critical period T_c and the maximum period for the blocking $2\pi/\omega_{\min}$. The vertical continuous line represents the incident period T_I .

double-bouncing behavior [28]: (T_c, U_c) is the critical point where the white (event) and blue (apparent) horizons merge. So, the period of the incident wave is fixed at $T_c = 0.425 \text{ s} < T_I = 0.443 \text{ s} < 2\pi/\omega_{\min} = 0.504 \text{ s}$ (the related angular frequency satisfying $\omega_c = 14.78 \text{ Hz} > \omega_I = 14.17 \text{ Hz} > \omega_{\min} = 12.47 \text{ Hz}$).

Thanks to a newly designed wave maker placed at the end of the channel, we create a sinusoidal wave with a very small initial amplitude at the position of the wave maker in order to stay in the linear regime during all the mode conversions. The actual mechanical amplitude of the sinusoidal wave-maker displacement is $a_m = 200 \mu\text{m}$ and the resulting amplitude of the incoming sinusoidal water wave is $a_0 = 11.53 \mu\text{m}$ for the incident wave generated in our experiments (see the discussion below for the choice of this amplitude).

To measure the free surface deformations $\delta h(\omega_I, x, t)$ for a fixed angular frequency ω_I as a function of position along the channel x and time t induced by the (reverse) wormhole travel with a good precision, we use several cameras with a total field of vision of roughly 1.1 m wide and a spatial resolution of 0.219 mm per pixel (see Fig. 1). The free surface is probed by a laser-induced fluorescence scanning technique similar to the one discussed in [29,37]. We use a laser diode (MBL-III-473 from Changchun New Industries) with a POWELL lens ($N = SF6, 75^\circ$) to generate a vertical laser sheet impacting the free surface of water in the center of the water channel [37]. Imaging of the fluorescent line delineating the free surface was done with three cameras (Grasshopper 3 CGS3.U3.41C6M from Pointgrey, 2048×2048 pixels with a maximum of 90 frames per second, Nikon objectives 35 mm) and we record movies made of 131072 (2^{17}) images at a rate of 18.02 Hz. A subpixel free surface detection method similar to the one used in [29] allows us to measure waves with amplitudes smaller than $0.1 \mu\text{m}$. It is based on laser-induced fluorescence using fluoresceine mixed with water: free surface deformations are visualized by the fluorescent emission of a laser sheet impacting the water surface and exciting the dye. We capture the free surface deformations during 2 hours corresponding to a number of images in powers of 2, namely 2^{17} for an accurate Fourier transform, the acquisition frequency being chosen to have an exact number of periods.

III. EXPERIMENTAL SPACE-TIME DIAGRAMS

In 1977, Basovich and Talanov studied carefully the kinematics of gravity-capillary waves and their transformations on inhomogeneous currents [46] (see the simultaneous theoretical work by Smith in [47]). They looked to the conditions of reflections of wave packets by a countercurrent. A gravity wave opposed to the current was predicted to be shortened (blueshifted using an optical terminology) and blocked when the group velocity cancels at a first turning point known as the wave blocking point (the analogue of a white hole horizon). Then, the

incoming wave is reflected by mode converting into another gravity wave with a shorter wavelength (the so-called blueshifted wave). The latter has positive phase velocity but negative group velocity. Hence, while drifting backward in terms of energy the blueshifted wave shortens. Up to now, this process is controlled by the water depth and the frequency of the incoming waves but does not depend on the surface tension of the fluid. When including the effect of capillarity, the blueshifted waves can be blocked at a second turning point and then mode converted into capillary waves with positive phase and group velocity propagating opposite to the current on the “back” of both the incoming and blueshifted waves. When reaching the first turning point the capillary waves are not blocked contrary to the incident gravity waves. Wavelength shortening and double reflection of gravity-capillary waves on an inhomogeneous current were observed experimentally in the works of Pokazeev and Rozenberg [48] and Badulin, Pokazeev and Rozenberg [49] in 1983. An obstacle was placed on the bottom of the water channel to vary the flow and the associated speed range was between 0.04 and $0.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (speed between 0.04 and $0.21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ over a sloping bottom in [48] and speeds up to $0.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ over a bump obstacle in [49]). The central frequencies of incoming wave packets propagating on the countercurrent were in the range of 1.5 – 11 Hz with three to ten oscillations within the envelope of the packets (in the range of 2 – 11 Hz for [48] and in the range 1.5 – 3 Hz for [49]). A huge decrease of the wavelength was observed e.g. from 20 cm down to 2 mm . The distance between both reflection points was typically of the order of one local wavelength. The transmitted capillary waves were highly dissipated by viscosity on the top of the obstacle in the fastest region of the flow speed and were not seen to reach the other side of the obstacle. It is unclear whether the waves in Badulin, Pokazeev and Rozenberg experiments were damped or if the resolution of the sensors used to measure the wave amplitude was not sufficient small to detect a (reverse) wormhole travel, namely the transmission of gravity waves after their dual mode conversion into capillary waves when propagating above the obstacle [49]. Theoretical and numerical works were subsequently done by Trulsen and Mei in 1993 [50] who added the effect of viscosity which damps the capillary waves during the double bouncing conversion without being able to make quantitative comparisons between theory and experiments because of a lack of data: we intend to fill this gap in this paper.

In the linear regime where the frequency is conserved, the ray trajectories are described by the ray theory using Hamilton equations $dk/dt = -\partial\omega/\partial x = -k\partial U/\partial x$, $dx/dt = \partial\omega/\partial k = v_g(\omega(k), U(x))$ in the geometrical optics approximation, where v_g is the group velocity namely the derivative of the dispersion relation including the water current [28,51]. Following Farrell and Watterson [51], since the total group velocity $v_g = U + C_g = \partial\omega/\partial k$ vanishes at

the blocking points, both $dk/dx = (-k\partial U/\partial x)/v_g$ (where C_g is the wave group velocity) and the wave amplitude become infinite and the ray theory breaks down (we recall that the energy of gravity waves scales as the square of the amplitude [52]): in the Appendices, we discuss the prediction of the ray theory as well as the wave theory which smoothes the related divergence to predict the wave envelope.

We plot in Fig. 3 one theoretical ray trajectory in the corresponding space-time diagram where twice the double-bouncing behavior is observed to occur in each white and black hole regions in the (reverse) wormhole travel. As recalled for the Badulin, Pokazeev and Rozenberg experiments [49], the incoming wave I is reflected in a blueshifted wave B at the white hole horizon. Then, the blueshifted wave B is reflected at the blue horizon and converted into a capillary wave C which enters into the wormhole region in between the white and black horizon. Contrary to the experiments of Badulin, Pokazeev and Rozenberg [49], the capillary wave C which is damped by viscosity is seen to reach the red horizon where it is converted into a longer gravity wave (the redshifted wave R dual to the B wave) and is converted back to an even longer gravity wave T at the black horizon where it is transmitted on the other side of the obstacle.

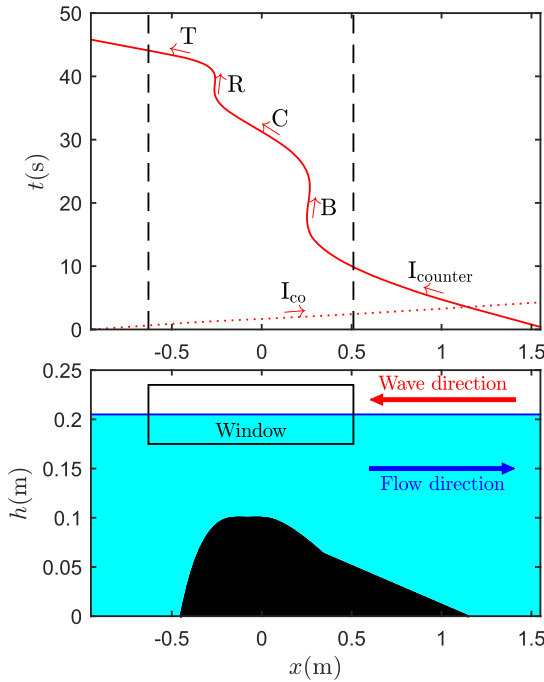


FIG. 3. Bottom: The window studied in the experiments over the obstacle. Top: Scheme of the four different conversions; the red curves represent the theoretical ray trajectories (continuous line, reverse travel from the white horizon to the black one; dashed line, direct travel from the black horizon to the white one) and the vertical black dashed lines correspond to the boundaries of the former window.

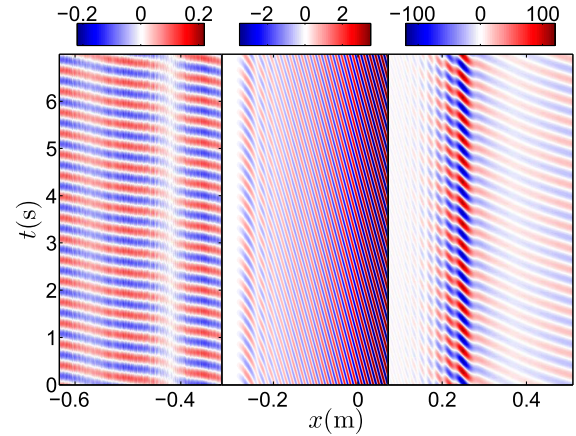


FIG. 4. Experimental space-time diagrams filtered at the frequency of the incoming wave I (the width of the observation window is roughly 1.1 m and the duration is 7 s). The color scales represent the amplitude in micrometers where we have been forced to adapt the range in three relevant zones for visualization purposes because of the huge viscous damping of the wave amplitudes.

We applied a filter around the sent frequency to clean the noise and visualize only the wave generated by the wave maker and its converted modes at the same frequency (see the space-time diagram of Fig. 4 and the rescaled water depth variations at a given time in Fig. 5). We clearly see the conversion—incident gravity wave I to capillary wave C and capillary wave C to transmitted gravity wave T (from the right to the left)—as well as the interference zones generated by the exponential tail of the Airy pattern [27] (itself due to the interference between the I and B modes) with the capillary waves in both the white and black hole

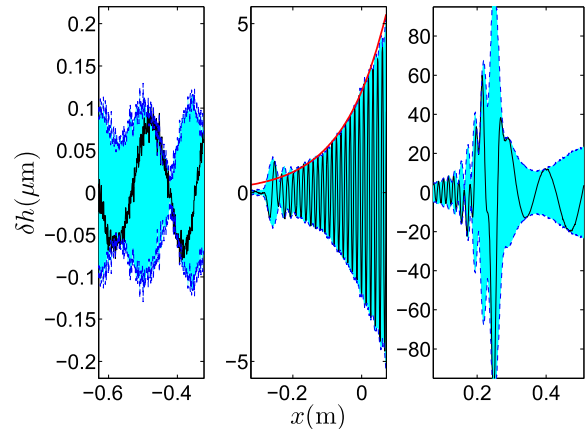


FIG. 5. The black curves show the free surface fluctuations $\delta h(\omega_I, x)$ filtered at the frequency $\omega_I = 14.17$ Hz of the incoming wave I at a fixed time, the blue dashed curves is the experimental envelope and the theoretical red one in the central window represents the exponential damping by viscosity in the capillary regime within the wormhole.

regions (around $x = -0.25$ m and $x = 0.2$ m, respectively) in Fig. 4. These interference patterns are computed theoretically in the Appendices and fit quite well with the interface extraction data.

The enormous damping [53] of the capillary wave C within the wormhole tunnel (see the red curve in the central graphic of Fig. 5) due to the viscous process in the bulk is modeled by the following spatial evolution for its amplitude a_c : $a_c(x) = a_{0c} e^{-(x-x_0)/L_d}$ with $a_{0c} = 3 \mu\text{m}$ the experimentally measured amplitude at $x_0 = 0$ m on the top of the obstacle (see Fig. 3). The procedure used to remove the exponential damping due to the dissipation is discussed in the Appendices. The related dissipative length inferred from the measurements $L_d = 0.125$ m is shorter than the interhorizon distance L_{wormhole} (black and white) which is close to $0.5\text{m} \approx 4L_d$: the viscous dissipation takes place but is not sufficient to kill completely the waves in the wormhole tunnel since the extraction method of the water fluctuations is still able to detect them [54]. Even though $L_d < L_{\text{wormhole}}$, still L_{wormhole}/L_d is not yet large enough for the outgoing waves to be beyond the sensitivity of the measuring apparatus.

IV. LINEARITY AND ABSENCE OF HARMONIC GENERATION AND WAVE BREAKING

We plot in Fig. 6 the spatial spectrogram along the water channel namely the evolution of the wave amplitude as a function of the angular frequency and the longitudinal position x , divided by the amplitude of the incident wave at frequency ω_I [37]. We observe that the frequency is conserved with no harmonic generation (at twice the frequency of the wave maker for example). Hence, there is no generation of so-called free harmonics which are solutions of the dispersion relation as can be checked in Fig. 11 of Appendix A. In the same vein, we verified that bounded harmonics *à la* Stokes such as $[2\omega, 2k]$ (which are not solutions of the dispersion relation) are not generated either.

Because the dimensionless water depth kh is always large enough (with a minimum of $kh = 6$) to consider the waves in the deep water regime, the only parameter seizing the effect of the nonlinearity is the camber ka . As discussed in any textbook on water waves, the threshold on the camber ka for the appearance of bounded harmonics is

$$(ka)_{\text{Stokes}} = 0.196 \tanh(kh) \approx 0.196, \quad kh \gg 1. \quad (1)$$

The range of camber of finite-amplitude capillary waves is not attained as well and we can safely assumed that the experiment is within the linear infinitesimal amplitude approximation (with an error less than 2.5%) without any modification of the wave frequency by the viscosity as discussed by Denner, Paré, and Zaleski [55]:

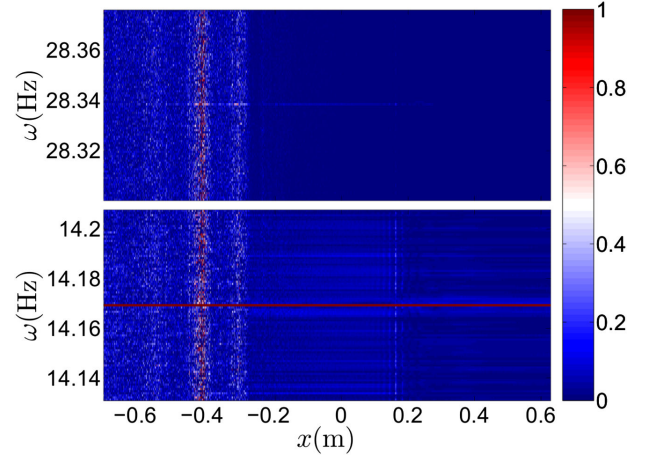


FIG. 6. Spatial spectrogram $\delta h(\omega, x)$ of the dimensionless amplitude evolution relative to the incident wave $\delta h(\omega_I, x)$ showing that the incident frequency ($\omega_I = 14.17$ Hz) is conserved and the amplitude of the first harmonic frequency ($2\omega_I = 28.34$ Hz) is negligible. Higher harmonics are not displayed since they are absent.

$$(ka)_{\text{Viscous}} \approx 0.314. \quad (2)$$

Similarly, the camber of a typical wave breaking is not reached either:

$$(ka)_{\text{Breaking}} = 0.446 \tanh(kh) \approx 0.446, \quad kh \gg 1. \quad (3)$$

To obtain the camber we use two methods, the first one by a detection of the crests and troughs providing access to the wavelength and the amplitude as a function of the spatial position x . For the second method, we consider the maximum (in time) of the spatial derivative of the free surface fluctuations. If we consider that these fluctuations are due to a wave whose expression is

$$h(x, t) = a(x) \exp[i(k(x)x - \omega_I t + \phi(x, t))] \quad (4)$$

from which we derive

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx ka \exp\left[i\left(kx - \omega_I t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

provided $\frac{\partial k}{\partial x} \ll ka$ and $\frac{\partial a}{\partial x} \ll ka$ (ray approximation), we get an estimation of the camber:

$$\max\left(\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|\right) \approx ka. \quad (5)$$

We plot in Fig. 7 the experimental value of the camber ka using both methods. We show that the camber is always 6 times smaller than the threshold for the appearance of bounded harmonics in particular.

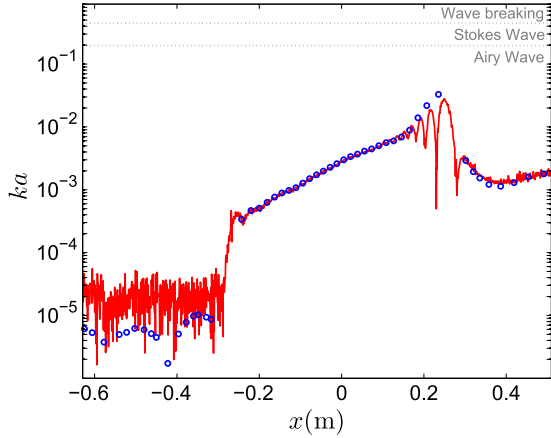


FIG. 7. Experimental value of the camber ka as a function of the spatial position using the extrema detection method (blue circles) and the maximum derivative of the free surface fluctuations method (red line). The horizontal dashed lines indicate the threshold for the appearance of bounded harmonics $(ka)_{\text{Stokes}} \approx 0.196$ and the camber for the wave breaking $(ka)_{\text{Breaking}} \approx 0.446$ in deep water.

V. PHASE SPACE

Badulin, Pokazeev and Rozenberg [49] looked to the space evolution of the wavelength (phase space diagram) of the incoming wave and the converted modes. They saw clearly the double-bouncing behavior as their physical parameters were designed to observe it. Here, as explained in [54], we focus on the (reverse) wormhole travel rather than the double bouncing; hence the optimal regime to observe the travel is such that the distance between the white and blue horizons is small and does not allow one to display the double bouncing as clearly as in Badulin, Pokazeev and Rozenberg work to which we refer the reader [49]. On the contrary, we observe the conversion to the capillary waves and the huge decreases in wavelength in Fig. 8.

We add on the latter graphics, in addition to the obstacle geometry and the local water depth, the two dispersive scales controlling the blocking at the different horizons. As we are mostly in the deep water approximation $kh \gg 1$, the water depth does not play a role in the conversions. For the white and black horizons, the relevant scale is the wavelength at blocking $\lambda^* = (cT)^2/(8\pi h) = gT^2/(8\pi)$ (with $c = \sqrt{gh}$) as explained in [27]. When the wavelength matches this dispersive scale (see Fig. 8), the flow velocity is equal in modulus to the corresponding dispersive group velocity C_g of the waves, namely $U_g = -c^2T/(8\pi h) = -gT/(8\pi)$ for the gravity regime [27] in the deep water approximation. For the blue and red horizons, the dispersive scale is the order of magnitude of the capillary length $l_c = \sqrt{\gamma g/\rho} (= 1.7 \text{ mm in water})$ as discussed in [28,32]: more precisely, it is the capillary wavelength $\lambda_c = 2\pi l_c (= 1.7 \text{ cm in water})$ obtained by looking at the

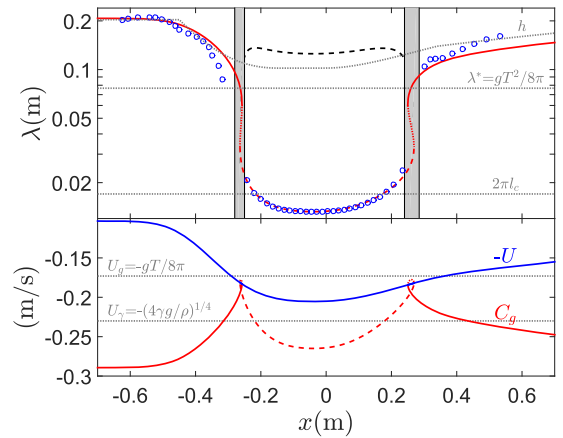


FIG. 8. (Top) Space evolution of the wavelength when reading from right to left. The red line is the theoretical prediction. The blue open dots are the experimental data. The dashed black line is the theoretical dissipative length L_d . The dotted gray lines are the theoretical scales h , λ^* and $\lambda_c = 2\pi l_c$. (Bottom) Spatial evolutions of the velocities of both the flow in blue and the waves in red. In gray, the theoretical blocking velocity for the gravity regime U_g and the threshold for the zero mode appearance U_γ regime which is not reached by the experimental flow speed $U(x)$.

minimum of the phase velocity as a function of the wavelength which is controlling the undulatory properties of the capillary waves regime. Within the wormhole (in between the blue and red horizons), the theory discussed in [28] allows one to derive the wavelength as a function of the speed by canceling the gravity constant ($g = 0$) in the dispersion relation (a detailed derivation of the wave-current interaction in the pure capillary case will be reported elsewhere since it is lacking in the literature). The dissipative length is of the order of a few wavelengths

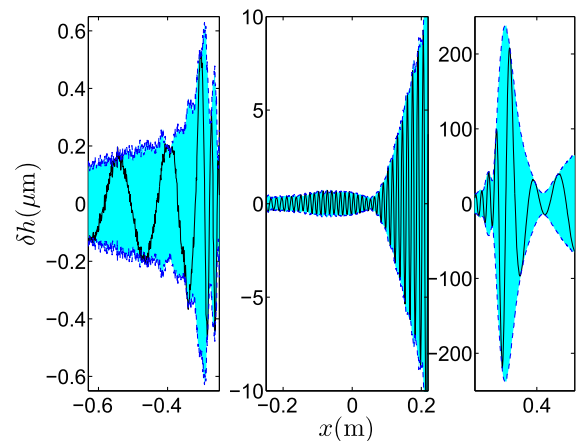


FIG. 9. Direct penetration scenario: the black curves show the free surface fluctuations $\delta h(\omega_{M-T}, x)$ filtered at the frequency $\omega_{M-T} = 16.37 \text{ Hz}$ of the incoming wave I at a fixed time; the blue dashed curves is the experimental envelope.

only in the wormhole tunnel, namely in the capillary regime, whereas it is far bigger in the gravity regime outside of the wormhole and is not represented in Fig. 8.

VI. MORRIS-THORNE WORMHOLE

For completeness and as discussed in [28,32], there is a direct penetration (without double bouncing) with a continuous blueshifting for incoming waves for an incoming period $T_{M-T} = 0.383s < T_c = 0.425s$. This case may be linked to the Morris-Thorne wormhole proposal in general relativity since there is an absence of a horizon (white and black). We confirm the qualitative visual observation of the direct penetration first reported in our previous work [32] by our new quantitative measurements within the linear regime (see Fig. 9).

VII. CONCLUSION

Can we come back from an interstellar travel after having plunged into a wormhole from the black hole side? Hydraulic traps for the water waves can be linked to hydraulic fountains thanks a tunnel-like region. In hydrodynamics, water waves which enter a black hydraulic horizon emerge from a white hydraulic horizon and do not meet singularities in the flow field (a fact well known for rotating black holes like the Kerr solution which allows wormhole travel via a path that gets around the ring singularities from one universe to another). The travel back has been demonstrated in this work for a hydraulic wormhole using water waves and for the first time in any analogue gravity experiment. Does the singularity exist in reality or is it smoothed by a regularizing process in astrophysics? In nature, waterfalls may either plunge into a body of water and the flow smoothly slows down, or crash on stones which is a more singular fate. We do not know what is inside a gravitational black hole. We do not know if white holes do exist or not in the Universe despite their reality in the kitchen sink (the circular jump). We do not know if cosmological wormholes are science-fiction objects. This paper has tried to nurture our thoughts by using an analogy and maybe humanity will have the chance to travel among stars similarly to gravity-capillary waves surfing on flowing water.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported by the University of Poitiers (ACI UP on Wave-Current Interactions 2013–2014), by the Interdisciplinary Mission of CNRS (PEPS PTI 2014 DEMRATNOS) and by the University of Tours in a joint grant with the University of Poitiers (ARC Poitiers-Tours 2014–2015). The french national research agency (ANR) funds the current work on the subject through the grant HARALAB (ANR-15-CE30-0017-04). The authors would like to thank Romain Bellanger, Patrick Braud and Jean-Marc Mougenot for their help with respect to the experimental aspects of this work. We would like to thank Scott

Robertson and Thomas Philbin for their comments about the paper.

APPENDIX A: CORRELATIONS

To verify that the long gravity wave measured upstream from the obstacle and equally that the capillary wave observed on the top of the obstacle both come from the incoming wave sent downstream, we use a two-point cross-correlation function between a window i and a window j (see Figs. 10 and 11) that was employed recently to measure the spontaneous Hawking radiation at a white hole horizon [37]:

$$G_2^{(i,j)}(\omega; k, k') = |\langle \delta\tilde{h}^{(i)}(\omega, k) \delta\tilde{h}^{(j)}(\omega, k')^* \rangle|. \quad (\text{A1})$$

We consider that the sign of the wave number is positive for the incoming wave propagating in the $-x$ direction.

We decide to separate the three cameras to have three distinct windows where the water depth and the velocity are constant (upstream from the obstacle, on the top of the obstacle and downstream from the obstacle; see Fig. 10).

Because the amplitudes of the waves are very small (they may be inferior to $0.1 \mu\text{m}$), we remove the noise in the result. First, in order to suppress the stochastic noise produced by the turbulent flow, we divide the data into 64 equal time intervals and we calculate the average of their Fourier transform. Then, to suppress the noise intrinsic to the experiment (due to either the pump vibration which may induces a global oscillation of the free surface on the total length of the water channel or any other external perturbations), we apply the same procedure to a case without an incoming wave and we subtract this determinist noise to the previous result (see Fig. 11):

$$\delta\tilde{h}(\omega, k) = \langle |\delta\tilde{h}_{\text{wave}}(\omega, k)| \rangle - \langle |\delta\tilde{h}_{\text{no wave}}(\omega, k)| \rangle. \quad (\text{A2})$$

We verify easily in Fig. 11 that the incoming/capillary/transmitted wave is a solution of the dispersion relation in

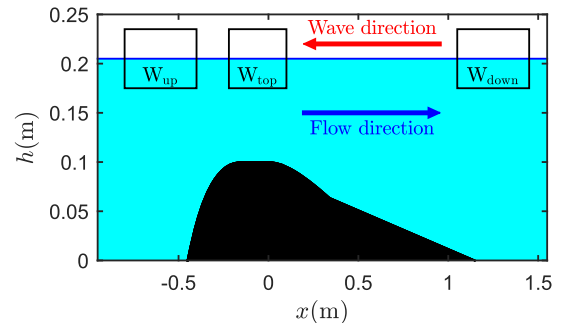


FIG. 10. The studied windows: upstream from the obstacle (W_{up}), on the top of the obstacle (W_{top}), downstream from the obstacle (W_{down}).

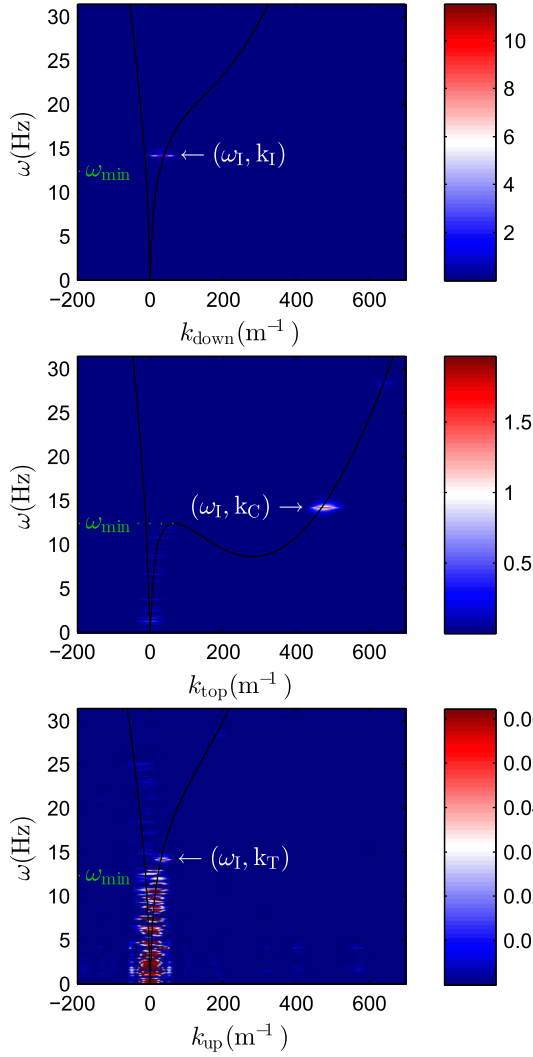


FIG. 11. Two-dimensional Fourier transforms of the free surface fluctuations $\delta\tilde{h}^{(i)}(\omega, k)$ for each i window [obtained with Eq. (A2)]. Top: Downstream from the obstacle. Center: On the top of the obstacle. Bottom: Upstream from the obstacle. The amplitudes are in microns.

the downstream/top/upstream region. In the upstream region of Fig. 11 (bottom) we observe long gravity waves which are not blocked downstream because their frequencies are smaller than ω_{\min} and their amplitudes are of the order of the transmitted wave amplitude which has suffered from viscous damping. Despite our noise-removing procedure, we are unable to cancel them but fortunately we can still isolate the incoming frequency which is slightly superior to ω_{\min} . In the downstream region, these waves are also present albeit we do not see them in Fig. 11 (top) because their amplitudes are much smaller than the one of the incoming wave.

We underline that Fig. 11 (top) allows us to extract the initial incoming amplitude before the obstacle in the window W_{down} . From the spatial Fourier transform at

$\omega_I = 14.17$ Hz, we find from the peak in the Fourier space its maximum which will be considered as our initial incoming amplitude $a_0 = 11.53 \mu\text{m}$.

To quantify the strength of the correlations, we compute

$$g_2^{(i,j)}(\omega; k_a, k_b) = \frac{G_2^{(i,j)}(\omega; k_a, k_b)}{\sqrt{G_2^{(i,i)}(\omega; k_a, k_a)G_2^{(j,j)}(\omega; k_b, k_b)}}. \quad (\text{A3})$$

We obtain for the cross correlation between the incident wave and the capillary wave a correlation strength of $g_2^{(\text{down},\text{top})}(\omega_i; k_I, k_C) = 85.11\%$, between the capillary wave and the transmitted wave $g_2^{(\text{top},\text{up})}(\omega_i; k_C, k_T) = 94.43\%$ and between the transmitted and the incident wave $g_2^{(\text{up},\text{down})}(\omega_i; k_T, k_I) = 80.98\%$.

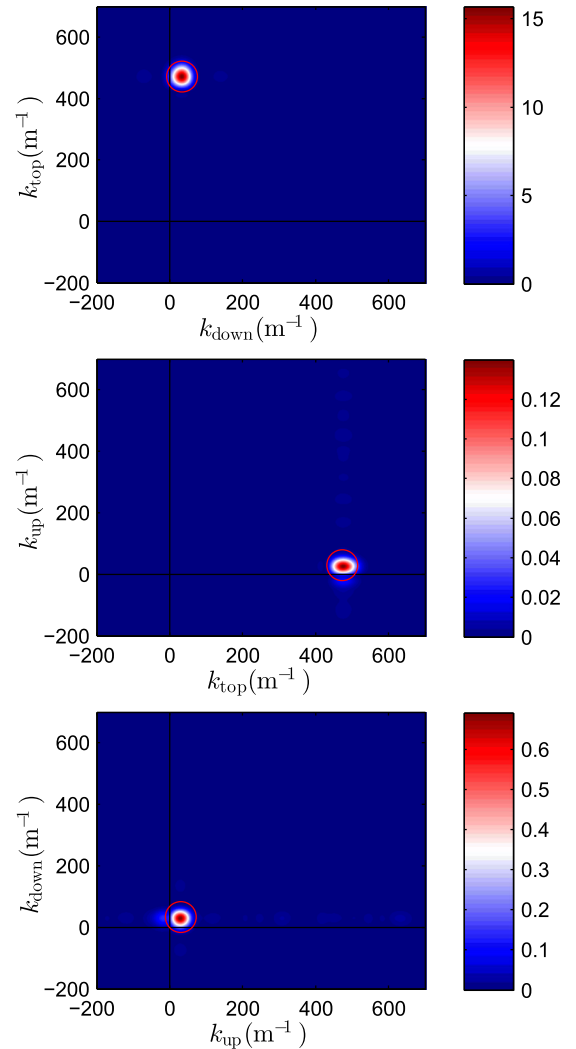


FIG. 12. Cross-correlation function $G_2^{(i,j)}(\omega; k, k')$ for each couple of windows (i, j) . Top: (d, t) couple. Center: (t, u) couple. Bottom: (u, d) couple. The amplitudes are in μm^2 .

For completeness, we plot the correlation maps $G_2^{(i,j)}(\omega; k, k')$ in the (k, k') wave-vector plane for each region in Fig. 12 [37] and we check that the experimental correlation peaks coincide with the theoretical prediction for each couple of wave vectors (symbolized by the red circles).

APPENDIX B: THEORETICAL ESTIMATION OF THE AMPLITUDE EVOLUTION CONSIDERING THE WAVE ACTION CONSERVATION AND THE DISSIPATION

First, we need to estimate the flow over the obstacle to know the parameters like $U(x)$ involved in the dispersion relation at each space position x . Past velocity measurements (not reported here) over the same obstacle but with different flow configurations (flow rate and water depth) have shown that a boundary layer is created in the downstream part due to the descending slope of the obstacle. The position of the boundary layer where it matches the uniform flow seems to be approximatively equal to the maximum height of the obstacle. This boundary layer modifies the velocity at the free surface (due to the flow rate conservation) and we need to take into account the effect of vorticity in the dispersion relation.

We base our reasoning to estimate the spatial evolution of the free surface on an analytical resolution of the dispersion relation for surface wave propagation on a shear flow with constant vorticity (see details in [35]):

$$\omega = -\left(U_0 k - \frac{\alpha}{2} \tanh(kh)\right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} \tanh(kh)\right)^2 + \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3\right) \tanh(kh)}, \quad (\text{B1})$$

where $U_0 > 0$ is the current speed at the free surface flowing in the $+x$ direction, $\alpha = U_0/h$ the parameter characterizing the flow vorticity, $\gamma = 73 \times 10^{-3}$ N/m the surface tension and $\rho = 10^3$ kg/m³ the density of water.

In our case the vertical velocity profile is not linear so we apply a simplified model to approximate the vertical flow profile where the latter is linear from the bottom (or obstacle) to the boundary layer limit and constant from the boundary layer limit to the free surface (see Fig. 13). With this assumption, we correct the parameter characterizing the flow vorticity by a coefficient equal to the thickness of the boundary layer ($\alpha = RU_0/h$ with the ratio $R = e/h$). Moreover, we can express the surface velocity as a function of the experimentally imposed flow rate $U_0 = (Q/Wh)(1 - R/2)^{-1}$.

According to Bretherton and Garrett [56], the quantity conserved in a wave-current interaction process is the wave action density $\mathcal{A}' = E'/\omega'$ with $E' = \frac{1}{2}a^2(\rho g + \gamma k^2)$ the wave energy density and ω' the relative frequency both in

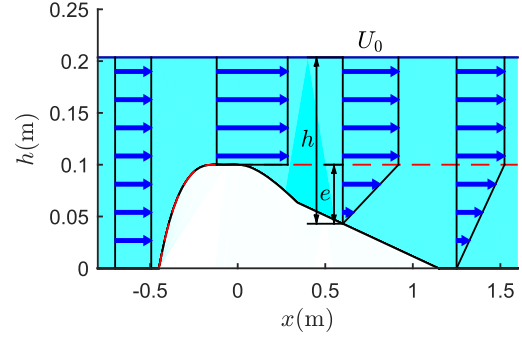


FIG. 13. Model representing the development of the boundary layer in the descending part of the obstacle. The red dashed curve corresponds to the thickness of the boundary layer (e).

the flow frame denoted by a prime (the wave energy density is not conserved since the waves exchange energy with the spatially varying flow). This conservation leads to a constant wave action flux for all space positions x (assuming stationarity) written as

$$J = \frac{1}{2} a^2 (\rho g + \gamma k^2) \frac{v_g}{\omega'} \sim a^2 (1 + l_c^2 k^2) \frac{v_g}{\omega'} \quad (\text{B2})$$

with $J = \mathcal{A}' v_g$ the wave action flux, a the wave amplitude, ρ the water density and $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ the capillary length. The group velocity in the laboratory frame v_g , the relative frequency in the flow frame ω' and the wave number k are given in each position x by the dispersion relation (B1). Equation (B2) allows one to compute the evolution of the wave amplitude when the flow varies in a nondissipative regime. We underline forcefully that we use here the expression of the wave action density assuming no vorticity. The latter enters into the dispersion relation and the group velocity in order to compute the conservation of wave action flux. This approximation is sufficient at our level. An exact expression for the wave action density for a linear shear profile was derived by Jonsson, Brink-Kjaer, and Thomas in 1978 but it implies some complications that we avoid in our simple estimation [57]. In particular, the converted waves such as the capillary waves have a wavelength smaller than $(h - e)$ so we can assume that they “feel” a uniform vertical velocity profile.

As we have been forced to rescale the amplitude scales in three separate windows to display the decrease of the wave amplitude during the propagation and thanks to the knowledge of the exponential damping [53,54], we can remove the latter and show our results cleaned from the effect of viscosity in Fig. 14, where we plot both a free surface variation at a given time within the undamped envelope (top) as well as a three-dimensional space-time diagram with the same vertical scale (bottom).

To take into account the effect of exponential dissipation of the wave amplitude, we introduce the dissipative length

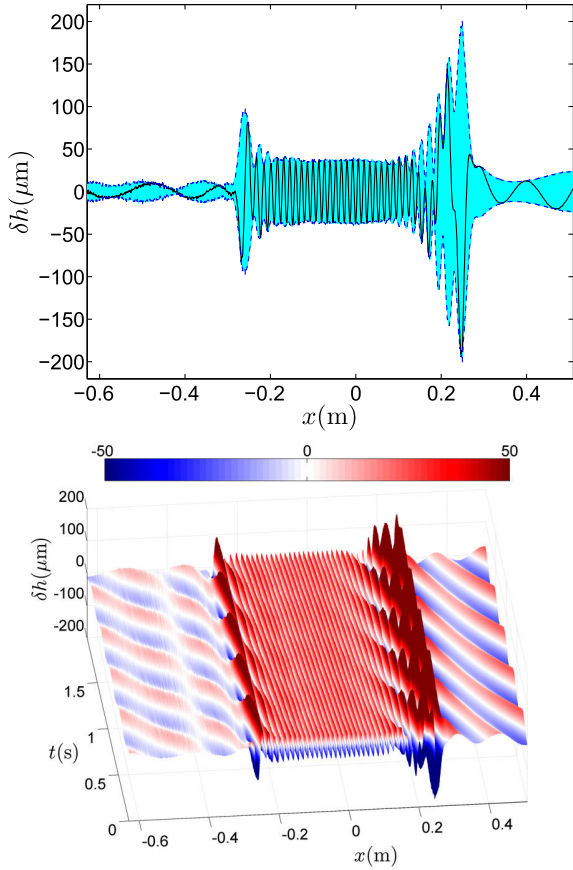


FIG. 14. (Top) Free surface variations $\delta h(\omega_l, x)$ at a given time with its corresponding envelope for the fixed frequency of the incoming wave ω_l ; (bottom) three-dimensional space-time diagram with a fixed vertical scale for the amplitude variations. For both graphics, viscous dissipation was removed to have the same vertical scale.

based on the Lamb formula (see an extensive discussion on the effect of dissipation in the context of analogue gravity in [54]):

$$L_d = \frac{v_g}{2\nu k^2}, \quad (\text{B3})$$

where $\nu = 1.05 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ is the viscosity of pure water at 18 °C. We assume that the fluorescent dye we used namely fluoresceine does not modify too much the value of viscosity.

In the wormhole tunnel, the capillary wave envelope is constant. Before the tunnel (on the right in Fig. 14), one observes an interference modulation of the envelope due to the existence of the transverse mode due to finite width of the channel. After the tunnel (on the left in Fig. 14), one also sees another interference modulation of the envelope due to the reflection on the wall of the transmitted wave T at the end of the water channel because of its finite length.

Combining the conservation of the wave action density [Eq. (B2)] and an exponential decrease due to the dissipation [considering the dissipative length (B3)], we can compute the “geometrical optics” evolution of the amplitude starting from the initial amplitude $a_0 = 11.53 \mu\text{m}$ on the downstream part (at the right of the obstacle) before the wormhole travel:

$$\frac{a_{(i+1)}}{a_{(i)}} = \sqrt{\frac{|v_g(k_{(i)})|}{|v_g(k_{(i+1)})|} \frac{\omega'(k_{(i+1)})}{\omega'(k_{(i)})} \frac{1 + l_c^2 k_{(i)}^2}{1 + l_c^2 k_{(i+1)}^2}} e^{-|\delta x|/L_d(i)}. \quad (\text{B4})$$

The subscript (i) corresponds to the variable taken at a spatial position x , and $(i + 1)$ at $x + \delta x$. The sign of δx depends of the propagation direction of the solution. Figure 15 shows a fairly good agreement between the geometrical solution obtained with Eq. (B4) and the experimental results; the differences may come from the hypotheses about the model of the velocity profile, the expression of the energy or the dispersion relation in the presence of vorticity.

We also see in Fig. 15 some undulations in the envelope: for example, between $x = -0.63 \text{ m}$ and $x = -0.28 \text{ m}$. Those interferences come from other waves existing in the experiment. We will try to identify these waves, separating four distinct zones of interferences:

- zone 1: before the first conversion (from $x = 0.27 \text{ m}$ to $x = 0.50 \text{ m}$),
- zone 2: after the first double bouncing (from $x = 0.09 \text{ m}$ to $x = 0.25 \text{ m}$),
- zone 3: before the second double bouncing (from $x = -0.25 \text{ m}$ to $x = -0.16 \text{ m}$),

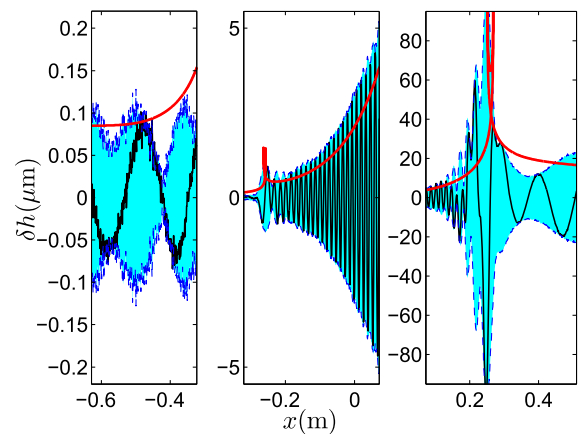


FIG. 15. The black curve shows the spatial evolution of the free surface fluctuations filtered at the frequency of the incoming wave for a given time, the blue dashed curves is the envelope $\delta h(\omega_l, x)$ and the red curve is the result of the geometrical optics calculation based on Eq. (B4).

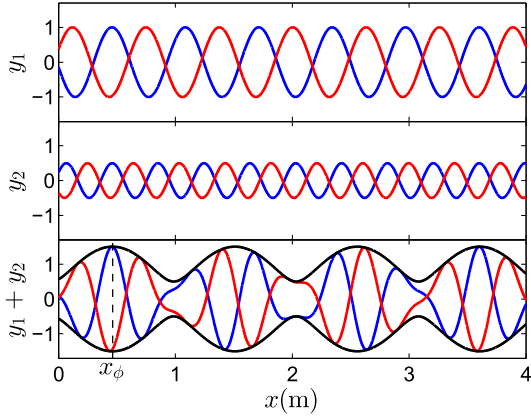


FIG. 16. Example of a two wave interference with $y_i = a_i \cos(k_i x - \omega t - \phi_i)$, $\omega = 1$ Hz; the blue curves correspond to $t = 1.5$ s and the red one to $t = 4.4$ s. Top: First wave ($i = 1$) with $a_1 = 1$ (dimensionless amplitude), $k_1 = 10$ m $^{-1}$ and $\phi_1 = 3.2$. Center: Second wave ($i = 2$) with $a_2 = 0.5$, $k_2 = 16$ m $^{-1}$ and $\phi_2 = 6.7$. Bottom: Wave superposition; the black curves indicate the spatial envelope A_2 (and $-A_2$) of the interference pattern with $x_\phi = 0.463$ m.

zone 4: after all conversions (from $x = -0.63$ m to $x = -0.28$ m).

To deduce this interferences, we use the general formula of the spatial envelope A_n of the interference pattern of n waves:

$$A_n = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \cos((k_i - k_j)x - (\phi_i - \phi_j)) \right)^{1/2}, \quad (\text{B5})$$

where ϕ_i is the phase shift and k_i the wave number of the mode i with amplitude a_i . a_i , k_i and ϕ_i can depend on the space position x .

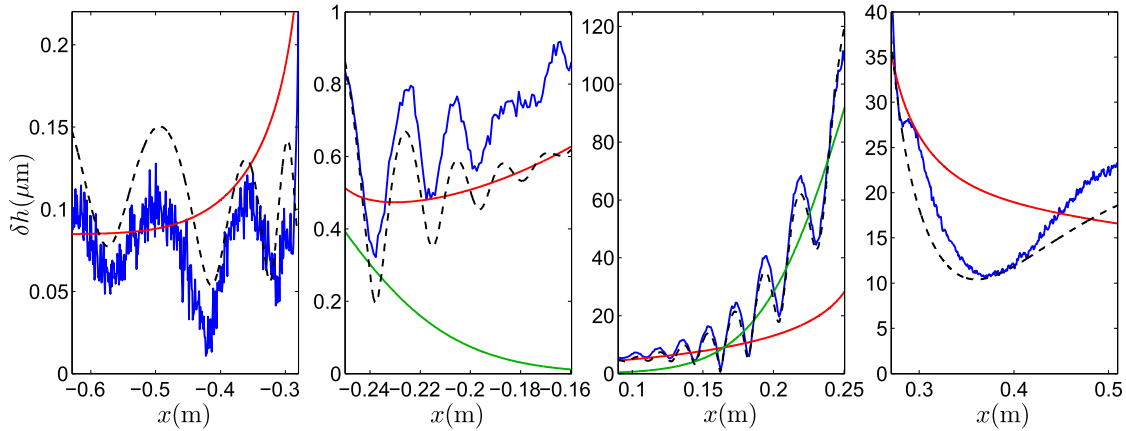


FIG. 17. Experimental envelope (blue line), geometrical solution (red line), Airy tails (green line) and interference fits (black dashed line).

For the peculiar case where there are only two waves involved, Eq. (B5) can be reduced to

$$A_2 = (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos((k_1 - k_2)x - (\phi_1 - \phi_2)))^{1/2} \quad (\text{B6})$$

and the phase shift difference of the interference pattern can be written $\phi_1 - \phi_2 = (k_1 - k_2)x_\phi$, where x_ϕ is one of the maxima of the interference pattern. Figure 16 shows an example of a two wave interference.

Zone 1 (Fig. 17 right).—The interference in the region where an oscillation around the amplitude of the incident wave is observed could be explained by the superposition of the latter with a transverse mode. Since we need to take into account the vorticity in this region, we suppose that the dispersion relation for waves with two components—longitudinal and transverse—projected on \vec{x} is

$$\omega = - \left(U_0 k_x - \frac{\alpha k_x}{2k} \tanh(k) \right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha k_x}{2k} \tanh(k) \right)^2 + \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(k)} \quad (\text{B7})$$

with $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Previously, we have considered waves with only a longitudinal component $k = k_x$ and $k_y = 0$. In this case, because of the finite width of the water channel, we have a quantization of the transverse component with $k_y = (n\pi/W)$ ($n \in \mathbb{N}$ and W is the width of the water channel).

The measurement is done in the center of the channel, so only half of the transverse modes are taken into account ($n \in 2\mathbb{N}$). We check theoretically that the only even mode existing for the incoming frequency is $n = 2$.

By assuming arbitrarily that the amplitude of the transverse component k_y is equal to half the one of the

longitudinal component k_x , we recover our experimental results with a corresponding fitting curve. This strong hypothesis relies on our visual observations of the free surface with the interference patterns between the longitudinal and transverse components over the obstacle in the probed window.

Knowing the amplitude of the two waves and their wave numbers, we apply Eq. (B6) where x_ϕ is an arbitrary maximum of interference read directly on the envelope $\delta h(\omega_I, x)$ in zone 1.

Zone 2 (Fig. 17 center right).—*Prima facie*, there is only the capillary wave if we consider the geometrical solution using Eq. (B4) but we need to consider that, when the incident wave is converted into a blueshifted wave (at the white horizon), the amplitude of this double solution does not go to zero immediately after the horizon but decreases on a certain distance. This looks like an Airy function [27], at least for the decreasing part (we are not interested in the oscillating part of the Airy function since the distance between the white and blue horizons is shorter than one local wavelength). We compute an Airy function $a_* \text{Ai}(X)$, where $-X = (x - x_*)/L_s$ (we put a minus sign before X because the decreasing part of the Airy function is defined for $x > x_*$ and in this case, it is observed for $x < x_*$), x_* is the position the blocking point, L_s is the stopping length and a_* the amplitude at x_* [32]. The stopping length can be calculating with different formulas, for example the one introduced by Trulsen and Mei in 1993 [32,50]:

$$L_s = \left(\frac{U_*^2}{2k_* \omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x_*}} \right)^{1/3}, \quad (\text{B8})$$

where U_* is the velocity, k_* the wave number, and $\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x_*}$ the velocity gradient, all taken at the blocking point x_* .

We found in our case for the white horizon (from incident to blueshifted waves) $L_s = 0.0427$ m. Then, we use Eq. (B5) to deduce the envelope.

Zone 3 (Fig. 17 center left).—We applied the same procedure as in the second zone; we have, on one hand, the capillary wave and, on the other hand, the tail of the Airy function due to the conversion from the redshifted to the transmitted waves. In this case, $X = (x - x_*)/L_s$ and the stopping length [using Eq. (B8)] is found to be $L_s = 0.0340$ m.

Zone 4 (Fig. 17 left).—Because the water tank is not infinitely long, the transmitted wave is reflected by the end wall in the convergent part of the water channel (see Fig. 1). The amplitude of this reflected wave can be calculated with Eq. (B4) (considering that all of the wave action density is reflected). In our case, this amplitude is about half the transmitted amplitude. Considering also the transverse mode, in the same way as zone 1, we obtain an interference between three waves again.

The geometrical solution [calculated with Eq. (B4), called in the next a_v^{th}] matches with the experimental result, and we can obtain another geometrical solution (called in the next a_{nv}^{th}) where the exponential term in Eq. (B4) is removed to stay in a nondissipative regime. Then, we can redress our experimental result using

$$a_{nv}^{\text{exp}}(x) = a_v^{\text{exp}}(x) \frac{a_{nv}^{th}(x)}{a_v^{th}(x)}. \quad (\text{B9})$$

This procedure allows to see more clearly in Fig. 14 the conversion from long to capillary waves within the white hole region and from capillary to long waves on the other side of the wormhole within the black hole region.

There is a lot of estimation in this method (simplified model for the velocity field, dispersion relation including vorticity, Airy function, interference pattern, etc.) but the quite good superposition of this theoretical estimation and the experimental results confirm its validity. A velocity field measurement of the flow over the obstacle would be necessary to verify our estimations but it is outside the scope of this study.

-
- [1] J. Eisenstaedt, in *Einstein and the History of General Relativity, Proceedings of the 1986 Osgood Hill Conference*, Einstein Studies Vol. 1, edited by J. Stachel and Don Howard (Birkhäuser, Boston, 1989), pp. 213–233.
 - [2] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.*, **7**, 189 (1916).
 - [3] A. Einstein and N. Rosen, The Particle Problem in the General Theory of Relativity, *Phys. Rev.* **48**, 73 (1935).
 - [4] L. Flamm, Comments on Einstein's theory of gravity, *Phys. Z.* **17**, 448 (1916).
 - [5] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (American Institute of Physics, New York, 1995).
 - [6] *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions*, Fundamental Theories of Physics Vol. 189, edited by F. S. Lobo (Springer, New York, 2017).
 - [7] C. W. Misner and J. A. Wheeler, Classical physics as geometry, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2**, 525 (1957).
 - [8] J. A. Wheeler, On the nature of quantum geometrodynamics, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2**, 604 (1957).
 - [9] J. A. Wheeler, *Geometrodynamics* (Academic, New York, 1962), Vol. 1.

- [10] R. W. Fuller and J. A. Wheeler, Causality and Multiply-Connected Space-Time, *Phys. Rev.* **128**, 919 (1962).
- [11] H. G. Ellis, Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **14**, 104 (1973); Erratum, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **15**, 520(E) (1974).
- [12] R. W. White, Acoustic ray tracing in moving inhomogeneous fluids, *J. Acoust. Soc. Am.* **53**, 1700 (1973).
- [13] J. L. Anderson and E. A. Spiegel, Radiative transfer through a flowing refractive medium, *Astrophys. J.* **202**, 454 (1975).
- [14] W. G. Unruh, Experimental Black-Hole Evaporation?, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [15] W. G. Unruh, in *Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology* (Springer, Berlin, 2007), pp. 1–4.
- [16] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, Analogue gravity, *Living Rev. Relativ.* **8**, 12 (2011).
- [17] S. J. Robertson, The theory of Hawking radiation in laboratory analogues, *J. Phys. B* **45**, 163001 (2012).
- [18] D. Faccio, F. Belgiorno, S. Cacciatori, V. Gorini, S. Liberati, and U. Moschella, *Analogue Gravity Phenomenology: Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*, Lect. Notes Phys. (Springer, New York, 2013).
- [19] S. W. Hawking, Black hole explosions, *Nature (London)* **248**, 30 (1974).
- [20] T. Jacobson, Black hole evaporation and ultrashort distances, *Phys. Rev. D* **44**, 1731 (1991).
- [21] W. G. Unruh, Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation, *Phys. Rev. D* **51**, 2827 (1995).
- [22] T. Jacobson, On the origin of the outgoing black hole modes, *Phys. Rev. D* **53**, 7082 (1996).
- [23] F. Girelli, S. Liberati, and L. Sindoni, Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry, *Phys. Rev. D* **75**, 064015 (2007).
- [24] S. W. Hawking, Information preservation and weather forecasting for black holes, [arXiv:1401.5761](https://arxiv.org/abs/1401.5761).
- [25] R. Schützhold and W. G. Unruh, Gravity wave analogues of black holes, *Phys. Rev. D* **66**, 044019 (2002).
- [26] G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maïssa, P. Couillet, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, Observation of negative phase velocity waves in a water tank: A classical analogue to the Hawking effect?, *New J. Phys.* **10**, 053015 (2008).
- [27] J.-C. Nardin, G. Rousseaux, and P. Couillet, Wave-Current Interaction as a Spatial Dynamical System: Analogies with Rainbow and Black Hole Physics, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 124504 (2009).
- [28] G. Rousseaux, P. Maïssa, C. Mathis, P. Couillet, T. G. Philbin, and U. Leonhardt, Horizon effects with surface waves on moving water, *New J. Phys.* **12**, 095018 (2010).
- [29] S. Weinfurter, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, Measurement of Stimulated Hawking Emission in an Analogue System, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021302 (2011).
- [30] G. Jannes, R. Piquet, P. Maïssa, C. Mathis, and G. Rousseaux, Experimental demonstration of the supersonic-subsonic bifurcation in the circular jump: A hydrodynamic white hole, *Phys. Rev. E* **83**, 056312 (2011).
- [31] G. Jannes, P. Maïssa, T. G. Philbin, and G. Rousseaux, Hawking radiation and the boomerang behavior of massive modes near a horizon, *Phys. Rev. D* **83**, 104028 (2011).
- [32] J. Chaline, G. Jannes, P. Maïssa, and G. Rousseaux, in *Analogue Gravity Phenomenology* (Springer, New York, 2013), pp. 145–165.
- [33] G. Rousseaux, D. Uminsky, and R. Levy, in Proceedings of the International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP8), Poitiers, France, 2013 (unpublished).
- [34] L.-P. Euvé, F. Michel, R. Parentani, and G. Rousseaux, Wave blocking and partial transmission in subcritical flows over an obstacle, *Phys. Rev. D* **91**, 024020 (2015).
- [35] P. Maïssa, G. Rousseaux, and Y. Stepanyants, Wave blocking phenomenon of surface waves on a shear flow with a constant vorticity, *Phys. Fluids* **28**, 032102 (2016).
- [36] C. Pelloquin, L.-P. Euvé, T. G. Philbin, and G. Rousseaux, Analog wormholes and black hole laser effects in hydrodynamics, *Phys. Rev. D* **93**, 084032 (2016).
- [37] L.-P. Euvé, F. Michel, R. Parentani, T. G. Philbin, and G. Rousseaux, Observation of Noise Correlated by the Hawking Effect in a Water Tank, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 121301 (2016).
- [38] T. Torres, S. Patrick, A. Coutant, M. Richartz, E. W. Tedford, and S. Weinfurter, Observation of superradiance in a vortex flow, *Nat. Phys.* **13**, 833 (2017).
- [39] C. Sabin, Quantum simulation of traversable wormhole spacetimes in a dc-SQUID array, *Phys. Rev. D* **94**, 081501 (2016).
- [40] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, Wormholes, Time Machines and Weak Energy Condition, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1446 (1988).
- [41] M. Morris and K. Thorne, Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity, *Am. J. Phys.* **56**, 395 (1988).
- [42] T. Müller, Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime, *Phys. Rev. D* **77**, 044043 (2008).
- [43] A. Doroshkevich, J. Hansen, I. Novikov, and A. Shatskiy, Passage of radiation through wormholes, *Int. J. Mod. Phys. D* **18**, 1665 (2009).
- [44] O. James, E. von Tunzelmann, P. Franklin, and K. S. Thorne, Visualizing interstellar’s wormhole, *Am. J. Phys.* **83**, 486 (2015).
- [45] F. S. Lobo, From the Flamm-Einstein-Rosen bridge to the modern renaissance of traversable wormholes, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1630017 (2016).
- [46] A. Y. Basovich and V. I. Talanov, Transformation of short surface waves on inhomogeneous currents, *Izv. Acad. Sci., USSR, Atmos. Oceanic Phys. (Engl. Transl.)* **13**, 514 (1977).
- [47] R. Smith, in *Waves on Water of Variable Depth* (Springer, Berlin, 1977), pp. 154–164.
- [48] K. V. Pokazeev and A. D. Rozenberg, Laboratory studies of regular gravity-capillary waves in currents, *Oceanology (Moscow, Russ. Fed.)* **23**, 429 (1983).
- [49] S. I. Badulin, K. V. Pokazeev, and A. D. Rozenberg, A laboratory study of the transformation of regular gravity-capillary waves in inhomogeneous flows, *Izv. Acad. Sci., USSR, Atmos. Oceanic Phys. (Engl. Transl.)* **19**, 782 (1983).
- [50] K. Trulsen and C. C. Mei, Double reflection of capillary/gravity waves by a nonuniform current: A boundary-layer theory, *J. Fluid Mech.* **251**, 239 (1993).

- [51] B. Farrell and I. Watterson, Rossby waves in opposing currents, *J. Atmos. Sci.* **42**, 1746 (1985).
- [52] M. W. Dingemans, *Water Wave Propagation over Uneven Bottoms* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [53] P. H. LeBlond and F. Mainardi, The viscous damping of capillary-gravity waves, *Acta Mech.* **68**, 203 (1987).
- [54] S. Robertson and G. Rousseaux, Viscous dissipation of surface waves and its relevance to analogue gravity experiments, [arXiv:1706.05255](https://arxiv.org/abs/1706.05255).
- [55] F. Denner, G. Paré, and S. Zaleski, Dispersion and viscous attenuation of capillary waves with finite amplitude, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **226**, 1229 (2017).
- [56] F. P. Bretherton and C. J. R. Garrett, Wavetrains in inhomogeneous moving media, *Proc. R. Soc. A* **302**, 529 (1968).
- [57] I. G. Jonsson, O. Brink-Kjaer, and G. P. Thomas, Wave action and set-down for waves on a shear current, *J. Fluid Mech.* **87**, 401 (1978).



Génération non-linéaire d'harmoniques après une conversion linéaire en interaction houle-courant

Léo-Paul EUVÉ¹, Germain ROUSSEAUX¹

1. Institut Pprime, UPR 3346, CNRS-Université de Poitiers-ISAE ENSMA,
11 Boulevard Marie et Pierre Curie - Téléport 2, BP 30179,
86962 Futuroscope Cedex, France.
germain.rousseau@univ-poitiers.fr

Résumé

L'interaction houle-courant est traitée d'un point de vue non-linéaire dans ce travail en considérant la génération d'harmoniques pendant la progression spatiale d'une houle initialement sinusoïdale créée par un batteur dans un canal hydraulique. Nous démontrons expérimentalement la coexistence entre la conversion de mode linéaire de l'onde incidente en ondes "réfléchies" par le contre-courant inhomogène (seule présente à faible amplitude de la houle incidente) et la génération non-linéaire d'harmoniques à partir des modes convertis et non pas à partir de la composante principale incidente qui reste linéaire et à fréquence conservée. Nous montrons que la génération d'harmoniques pour les ondes "réfléchies" est pilotée par la géométrie de l'obstacle, les paramètres du régime étudié ainsi que par l'amplitude de la houle linéaire incidente. Le propos est illustré par des expériences dans les canaux de l'Institut Pprime et de la société ACRI-IN de dimensions différentes. Ces mécanismes permettent d'envisager la compréhension de spectres non-linéaires de houle en présence de courant.

Mots-clés : Interaction houle-courant, Détection d'interface, Ondes de gravité, Conversion linéaire, Génération d'harmoniques.

1. Introduction

L'interaction houle-courant est un sujet classique en génie côtier qui a fait l'objet de nombreux articles de revue (PEREGRINE, 1976 ; JONSSON, 1990 ; THOMAS & KLOPMAN, 1997 ; MAISSA *et al.*, 2013). Nous avons récemment rapporté des mesures de la relation de dispersion des vagues en présence d'un courant homogène dans l'approximation linéaire dans ce journal (FALTOT *et al.*, 2013) : on observe des modes convertis à fréquence relative (dans le référentiel du courant) avec les deux signes positif ou négatif selon que la vitesse de phase des ondes est plus grande ou plus petite que la vitesse (moyenne) du courant supposé uniforme selon la direction verticale. Nous souhaitons aborder le problème de la conversion de modes lorsqu'une vague se propage sur un courant inhomogène spatialement créé par un obstacle de fond. Il est bien connu que de nouveaux modes à longueurs d'onde différentes apparaissent à fréquence fixée par conversion linéaire comme décrit théoriquement par l'analyse de la

relation de dispersion (ROUSSEAUX *et al.*, 2008, NARDIN *et al.*, 2009). Une première expérience en 2008 avait cherché à mettre en évidence cette conversion linéaire dans le canal à houle et courant de la société ACRI-IN (ROUSSEAUX *et al.*, 2008). En raison de l'apparition de recirculation dans l'écoulement, une géométrie d'obstacle avec une pente descendante plus douce avait été utilisée en 2010 (ROUSSEAUX *et al.*, 2010, CHALINE *et al.*, 2013). La figure 1 montre le principe du montage expérimental ainsi qu'une photographie de perspective de la surface libre avec la superposition d'une onde longue incidente (non-bloquée par le contre-courant inhomogène) avec des ondes courtes converties (de manière linéaire ou non-linéaire selon les régimes, voir ci-dessous) se propageant sur le "dos" de l'onde "porteuse" générée par le batteur en bout de canal. L'analyse de 2008 des diagrammes spatio-temporels de la surface libre sur le bord du canal et observée avec une caméra en vue de côté indiquait que la fréquence des modes convertis n'était apparemment pas conservée et l'étude avait conclu sur la possibilité d'un mécanisme de conversion non-linéaire (en modes à fréquence relative positive ou négative) restant à élucider théoriquement: "Could it be a nonlinear mode conversion, a nonlinear process generating harmonics with negative frequencies?". Parmi les mécanismes qui pourraient expliquer une non-conservation de la fréquence de l'onde incidente, l'instabilité de Benjamin-Feir (qui est amplifiée en présence d'un contre-courant), est un candidat éventuel et souvent rencontré en génie côtier (BENJAMIN & FEIR, 1967 ; SHUGAN *et al.*, 2014). Dans ce cas, la fréquence centrale d'un paquet d'onde diminue au cours de la propagation dans un canal suffisamment long en l'absence de courant ou sur une distance plus courte à contre-courant. Cette instabilité est souvent associée au caractère non-parfait de la sinusoïde générée par le batteur à houle et fait intervenir des interactions non-linéaires ondes-ondes entre la fréquence principale et deux fréquences satellites (BENJAMIN & FEIR, 1967).

2. Matériel et méthodes

Dans cette nouvelle étude, nous allons suivre une onde de gravité se propageant à contre-courant sur un obstacle qui fait varier spatialement la vitesse du courant jusqu'au blocage. En mesurant la déformée de surface libre, nous allons distinguer les modes principaux (dit incidents et bleus) de leur harmoniques afin de conclure sur le mode de conversion : en particulier, est-ce que la conversion est linéaire/non-linéaire ? Les non-linéarités apparaissent-elles durant la propagation (par une instabilité du type Benjamin-Feir et/ou par la génération d'harmoniques) ?

A des fins de comparaisons et dans l'optique de minimiser les recirculations de l'écoulement, nous employons à Poitiers et dans cette étude l'obstacle ainsi que les paramètres (hauteur asymptotique $h=19.4\text{cm}$, débit par unité de largeur $q=0.045\text{ m}^2/\text{s}$) du régime de l'équipe de Vancouver (WEINFURTNER *et al.*, 2011). La technique de mesure de surface libre est identique à celle décrite dans (FALTOT *et al.*, 2014). Le

générateur d'onde (batteur) placé en sortie du canal utilise la technologie d'un moteur linéaire afin de produire des ondes purement sinusoïdales (figure 2).

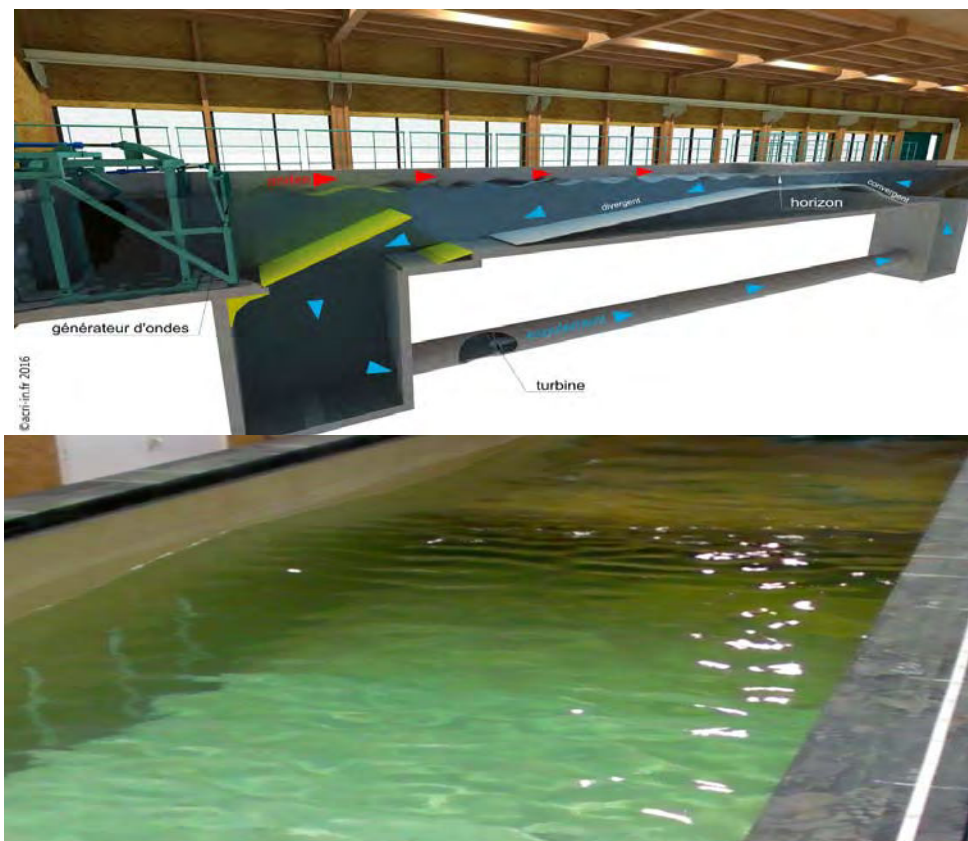


Figure 1. (Haut) Schéma du montage d'interaction houle-courant dans le canal de la société ACRI-IN (<http://www.acri-in.fr/fr/outils-methodes/laboratoire-hydrodynamique-acri-in>); (Bas) Superposition d'une onde incidente longue avec des ondes converties courtes sur la pente descente pour le courant de l'obstacle de fond.

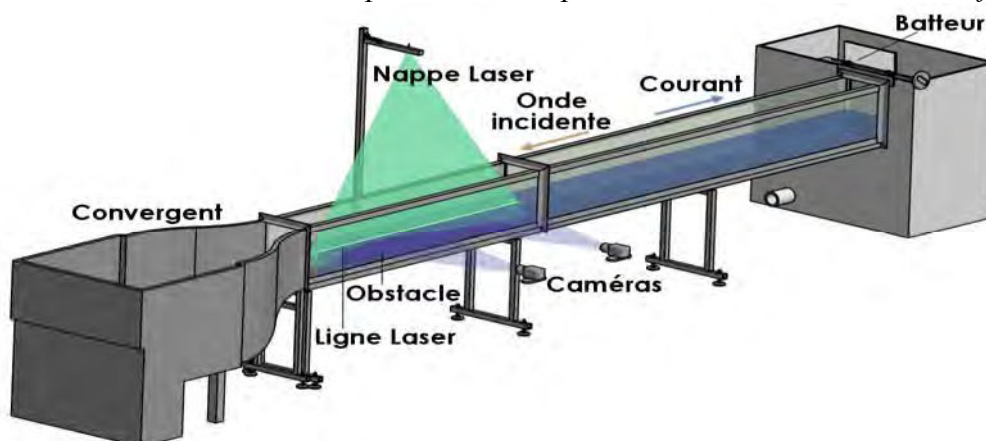


Figure 2. Schéma du montage d'interaction houle-courant dans le canal SédHyde de l'institut Pprime (<http://www.univ-poitiers.fr/recherche/plateformes-technologiques/hydrodynamique-environnementale-phe/>).

3. Résultats

La fréquence incidente envoyée au niveau du batteur est $f=0.47\text{Hz}$ et son amplitude est de $A=0.9\text{ mm}$ afin que l'onde soit totalement bloquée par le contre-courant au niveau de l'obstacle (EUVÉ *et al.* 2015). La mesure de surface libre a permis d'obtenir le diagramme spatio-temporel duquel a été soustraite la hauteur moyenne en chaque position pour ne visualiser que les fluctuations de surface libre. Dans le but de prouver la présence d'un processus non-linéaire ainsi que d'en déterminer la nature, une transformée de Fourier temporelle a été appliquée à partir du diagramme spatio-temporel (figure 3).

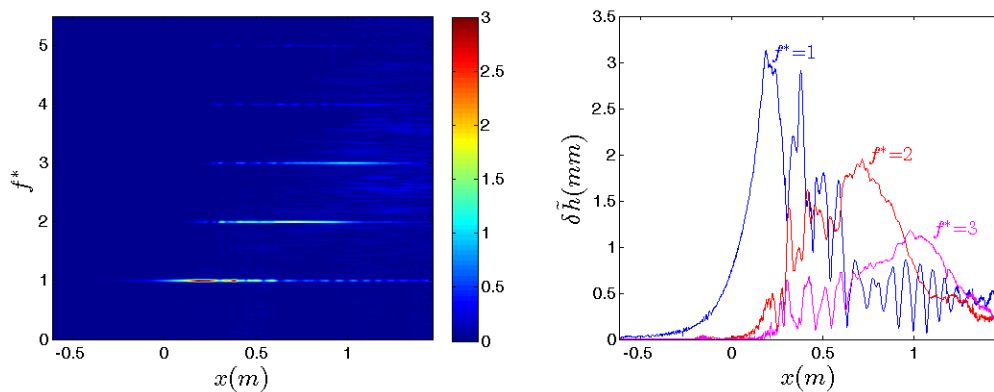


Figure 3. (Gauche) Fréquences adimensionnées par la fréquence du batteur à houle en fonction de la position dans le canal de Pprime ($x=0$ correspond à la limite droite de la partie supérieure de l'obstacle ; la barre de couleur correspond à l'amplitude des ondes en mm). (Droite) Coupes du diagramme spatio-fréquentiel précédent au niveau de la fréquence fondamentale et de ses harmoniques.

Sur la figure 3, on observe que la fréquence incidente ne subit pas d'instabilité de type Benjamin-Feir (diminution progressive de la fréquence au cours de la propagation). Mais on peut très clairement voir l'apparition d'harmoniques ($f^*=2, 3, \dots$), on remarque qu'elles semblent apparaître progressivement de la gauche vers la droite dans le sens de propagation de l'énergie des ondes converties (dites "bleuies") dont la vitesse de groupe est négative et opposée à la vitesse de phase qui, elle, est dans le même sens que l'onde incidente. En filtrant temporellement autour des fréquences principalement présentes ($f^*=1, 2, 3$), on peut visualiser, dans l'espace réel, la contribution de chacune d'entre elles (figure 4). On remarque que pour les harmoniques, les longueurs d'onde sont courtes, ce qui correspondrait aux ondes converties ($\sim 0.1\text{ m}$) et non à l'onde incidente ($\sim 2\text{ m}$).

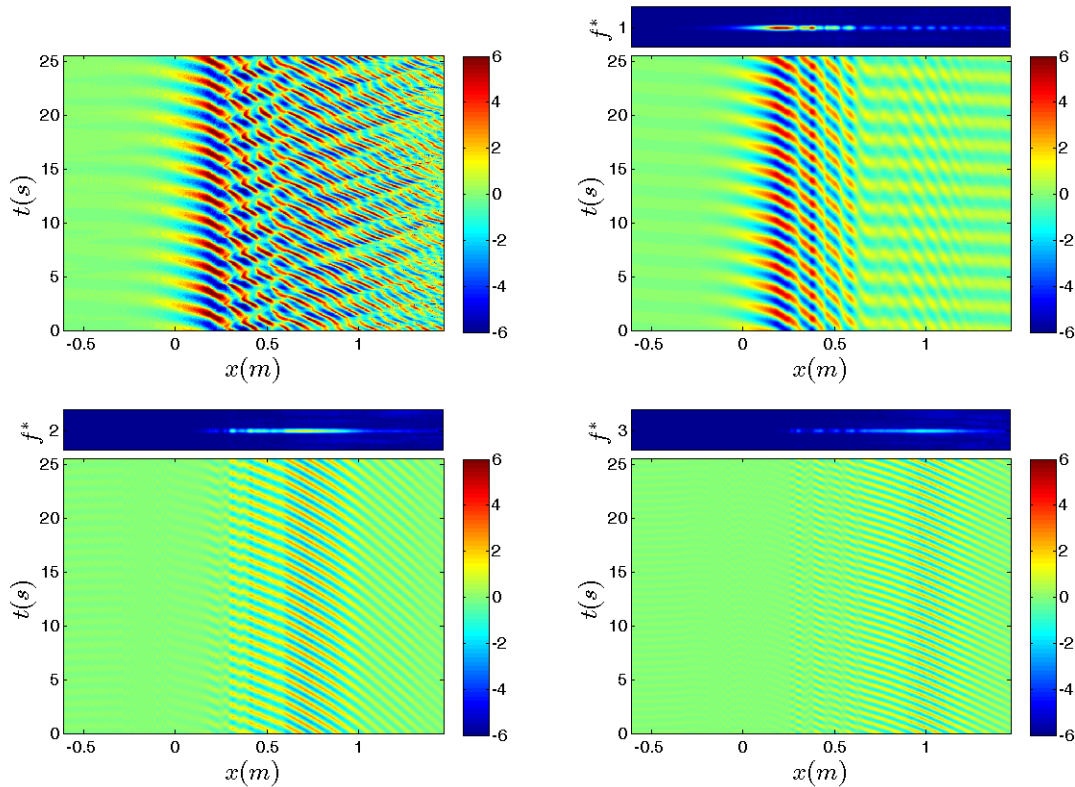


Figure 4. (Haut gauche) Diagramme spatio-temporel des fluctuations de surface libre. (Haut droite) Diagramme spatio-temporel après filtrage autour de la fréquence adimensionnée $f^*=1$, (Bas gauche) $f^*=2$, (Bas droite) $f^*=3$ (la barre de couleur correspond à l'amplitude des ondes en mm).

En choisissant une fenêtre d'observation ne comprenant pas la position du point de blocage ($x \sim 0.1$ m, là où les solutions de l'onde incidente et convertie sont identiques), on peut appliquer des filtres en espace et en temps autour des différentes solutions : incidente fondamentale ($I^{(1)}$), bleuie fondamentale ($B^{(1)}$), bleuie harmonique ($B^{(2)}$), transverse harmonique ($T^{(3)}$). Ces solutions ont été choisies de telle manière que leurs longueurs d'onde correspondent à celles observées sur les diagrammes spatio-temporels (figure 4). Ces filtres nous permettent d'obtenir l'amplitude de chaque solution en fonction de la position spatiale. Nous décidons d'adimensionner ces amplitudes (figure 5) grâce à leur nombre d'onde obtenu par le biais de la relation de dispersion en chaque position.

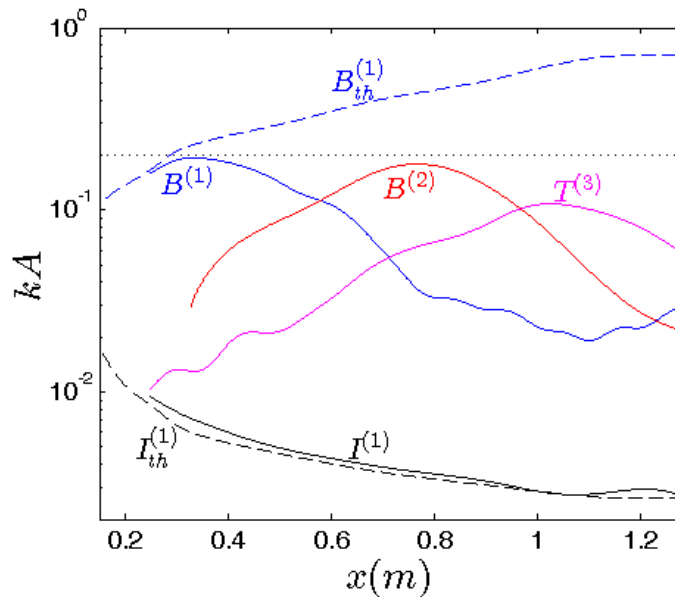


Figure 5. Amplitudes adimensionnées du mode incidents (linéaire $I^{(1)}$) et convertis (bleu linéaire $B^{(1)}$, bleu harmonique $B^{(2)}$, transverse harmonique $T^{(3)}$). Les courbes en tirets correspondent aux prédictions théoriques dans le cas d'une conversion uniquement linéaire. La droite en pointillés horizontale correspond à la cambrure limite $kA \sim 0.2$.

Les courbes théoriques présentées sur la figure 5 sont obtenues grâce au principe de conservation linéaire de l'action d'onde (BRETHERTON & GARRETT, 1969) calculée à partir de l'onde incidente en aval de l'obstacle. On remarque que la courbe de l'onde incidente $I^{(1)}$ suit parfaitement la courbe théorique signifiant que la propagation de cette onde reste linéaire. On montre que la conversion est linéaire car l'amplitude de l'onde convertie $B^{(1)}$ correspond, elle aussi, à la prédiction théorique linéaire près du point de blocage et que le processus non-linéaire de génération d'harmoniques apparaît durant la propagation de cette onde convertie linéairement. On peut aussi remarquer qu'il y a une cambrure limite ($kA \sim 0.2$) que les ondes ne dépassent pas. Ce critère est cohérent avec celui discuté dans le livre de KOMAR (1976) décrivant la limite entre la houle linéaire d'Airy et la houle de Stokes du 3^{ème} ordre $H/\lambda = 0.0625 \cdot \tanh(kh)$ (où H est l'amplitude crête à creux de l'onde, λ sa longueur d'onde, k le nombre d'onde et h la hauteur d'eau). Pour les ondes converties, la hauteur d'eau adimensionnée est "grande" $kh > 2$, on se trouve donc dans la limite eaux profondes avec $\tanh(kh) \sim 1$. Dans cette approximation, ce critère revient à $kA = 0.196$ (réécrit sous une forme similaire au nôtre). On peut aussi comparer ce seuil d'apparition des harmoniques avec le critère de Miche décrivant la limite du déferlement $H/\lambda = 0.142 \cdot \tanh(kh)$, ou encore dans l'approximation eaux profondes, $kA = 0.446$. Ce critère de déferlement n'est jamais atteint dans les expériences car il est supérieur au critère de génération des harmoniques.

Pour une position spatiale donnée, on remarque que le nombre d'onde k du premier harmonique ($f^*=2$) est toujours plus faible que celui du fondamental ($f^*=1$) pour les ondes converties, la génération d'harmoniques est donc un "bon" procédé pour éviter une cambrure trop importante (kA).

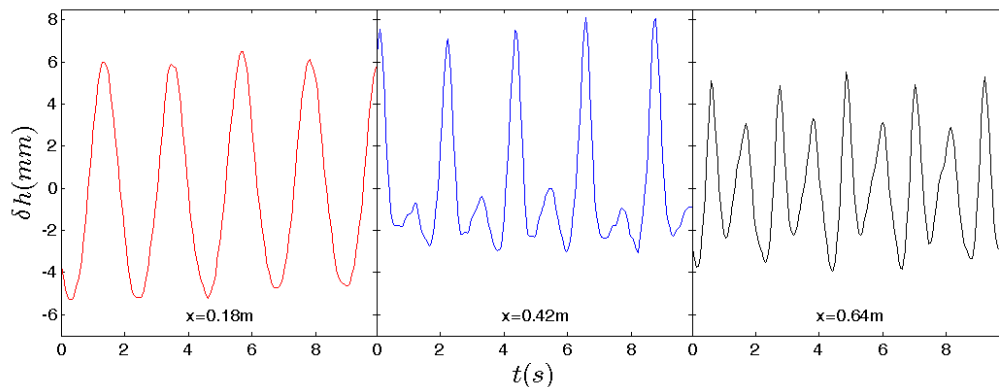


Figure 6. Déformées de surface libre en fonction du temps pour différentes positions spatiales ($x=0$ correspond à la limite droite de la partie supérieure de l'obstacle).

Les trois positions spatiales représentées sur la figure 6 ont été choisies afin d'illustrer sous un autre angle la génération d'harmoniques au cours de la propagation. On voit sur la première courbe ($x=0.18\text{ m}$) que seule la fréquence fondamentale est présente, sur la seconde ($x=0.42\text{ m}$) l'amplitude de la composante fondamentale et celle du premier harmonique sont du même ordre de grandeur et enfin sur la troisième ($x=0.64\text{ m}$) l'amplitude de la fondamentale est faible devant celle de l'harmonique.

Pour ce couple obstacle/régime d'écoulement, le seul moyen d'éviter la génération d'harmoniques serait de limiter l'amplitude maximale de l'onde convertie, autrement dit, en considérant la conservation linéaire de l'action d'onde, il faudrait diminuer celle de l'onde incidente en aval de l'obstacle. En envoyant une onde incidente d'amplitude réelle $A=0.2\text{ mm}$ ($A=0.9\text{ mm}$ dans le cas étudié ici), l'amplitude adimensionnée kA théorique de l'onde bleue (courbe bleue en tirets de la figure 5) ne dépasserait en aucune position spatiale la valeur critique $kA=0.2$, la propagation des ondes converties serait alors théoriquement linéaire.

4. Conclusions

La génération d'harmonique est un moyen de redistribuer l'énergie afin d'éviter une cambrure trop forte. Dans le cas des interactions houle-courant, nous montrons ici que ce processus non-linéaire peut intervenir après une conversion linéaire et qu'il semble être piloté par un critère sans dimension tout comme le déferlement. Des études expérimentales ainsi que théoriques pourraient montrer si ce critère est universel et

examiner ses conséquences sur l'interprétation des spectres non-linéaires de houle (KROGSTAD & TRULSEN, 2010).

5. Remerciements

G.R. souhaite remercier vivement les organismes suivants pour leur soutien et les subventions accordées : la Mission Interdisciplinaire du CNRS (PEPS PTI 2014 DEMRATNOS) ; les Universités de Poitiers et de Tours à travers l'ACI Interaction Houle-Courant de l'Université de Poitiers 2013 et l'ARC Poitiers-Tours 2014 ; l'ANR à travers le programme HARALAB (ANR-15-CE30-0017-04) ainsi que le FEDER 35790-2012 qui a financé le canal. Les auteurs remercient les personnes suivantes de l'institut Pprime pour leur aide technique : Jean-Marc Mougnot, Patrick Braud et Romain Bellanger.

Cet article est dédié à la mémoire de Pierre Guevel (1929-2007) qui a suivi les premières expériences dans le canal d'ACRI-IN discutées dans ce travail (figure 7).



Figure 7. Philippe Maïssa, Pierre Guevel et Germain Rousseaux sur le bord du canal d'ACRI-IN.

6. Références bibliographiques

- BENJAMIN T.B., FEIR J.E. (1967). *Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 27, pp 417-430. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1967.0123>
- BRETHERTON F.P., GARRETT C.J.R. (1968). *Wavetrains in inhomogeneous moving media*, Proc Roy. Soc. A., Vol. 302, pp 529-554. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1968.0034>
- CHALINE J., JANNES G., MAÏSSA P., ROUSSEAUX G. (2013). Some aspects of dispersive horizons: lessons from surface waves. In : *Analogue Gravity Phenomenology*. Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-00266-8_7
- EUVE L.-P., MICHEL F., PARENTANI R., ROUSSEAUX G. (2015). *Wave blocking and partial transmission in subcritical flows over an obstacle*, Physical Review D, 91, 024020. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.024020>
- FALTOT P.-J., BELLANGER R., MOUGENOT J.-M., ROUSSEAUX G. (2014). *Interaction Houle-Courant : Mesure de la Relation de Dispersion*. XIII^{èmes} Journées Génie Côtier Génie Civil, pp 79-92. <http://dx.doi.org/10.5150/jngcgc.2014.010>
- JONSSON I.G. (1990). *Wave-current interactions*. In The Sea (ed. B. Le Mehaute and D. M. Hanes), pp 65-120, John Wiley.
- KOMAR P.D. (1976). *Beach Processes and Sedimentation*, Prentice-Hall.
- KROGSTAD H.E., TRULSEN K. (2010), *Interpretations and observations of ocean wave spectra*, Ocean Dynamics, Vol. 60, pp 973-991. <http://dx.doi.org/10.1007/s10236-010-0293-3>
- MAÏSSA P., ROUSSEAUX G., STEPANYANTS Y. (2013). *Influence of shear-flow vorticity on wave-current interaction*. 7th International Conference on Coastal Dynamics, Arcachon, pp 1137-1146.
- NARDIN J.-C., ROUSSEAUX G., COULLET P. (2009). *Wave-current interaction as a spatial dynamical system : analogies with rainbow and black hole Physics*. Physical Reviews Letters, Vol. 102(12), pp 124504-1/4.
- PEREGRINE D.H. (1976). *Interaction of water waves and currents*. Adv. Appl. Mech., 16, pp 9-117. [http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70087-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70087-5)
- ROUSSEAUX G., MATHIS C., MAÏSSA P., PHILBIN T., LEONHARDT U. (2008). *Observation of negative phase velocity waves in a water tank: A classical analogue to the Hawking effect ?* New Journal of Physics, Vol. 10, 053015. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/10/5/053015>
- ROUSSEAUX G., MAÏSSA P., MATHIS C., PHILBIN T., LEONHARDT U. (2010). *Horizons effects with surface waves on moving water*. New Journal of Physics, Vol. 12, 095018. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/12/9/095018>
- SHUGAN I., SAPRYKINA Y., KUZNETSOV S., YANG R. (2014). *Frequency downshifting of wave spectra and formation of freak waves on non-uniform opposing current*, Coastal Engineering Proceedings, 1 (34), waves.24. <http://dx.doi.org/10.9753/icce.v34.waves.24>

Thème 1 – Hydrodynamique côtière

THOMAS G.P., KLOPMAN G. (1997). *Wave-current interactions in the nearshore region*. In Gravity Waves in Water of Finite Depth. J. N. Hunt, Editor, Advances in Fluid Mechanics, Vol. 10, CMP, Southampton.

WEINFURTNER S., TEDFORD E.W., PENRICE M.C.J., UNRUH W.G., LAWRENCE G.A. (2011). *Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system*. Physical Review Letters, Vol. 106, 021302.

<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.021302>

Matériel

Méthode optique

Diode Laser

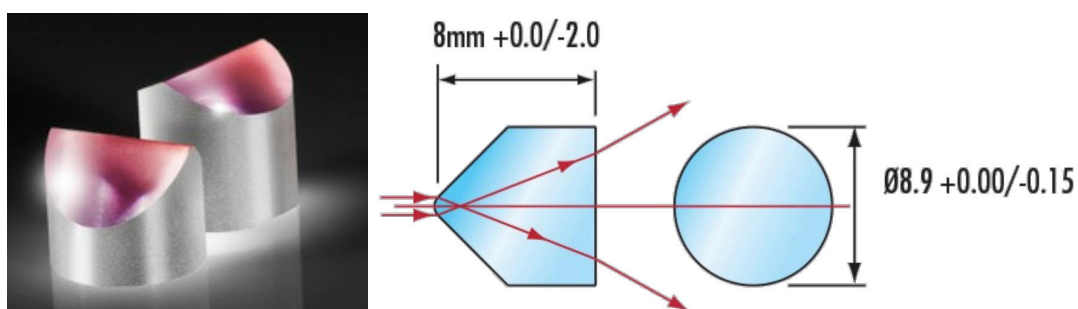


Modèle	MBL-III-473
Fabricant	Changchun New Industries
Longueur d'onde	473±1
Puissance	150 mW
Temps de préchauffage (minute)	10
Diamètre du faisceau à l'ouverture (mm)	~ 2
Amplitude du bruit (rms, 1 20MHz)	~ 30 %
Température de fonctionnement	10~35
Alimentation électrique (90-264VAC ou 5V DC)	PSU-III-LED
Durée de vie prévu (heure)	10000
Masse ensemble	~ 3 kg

Table VI.3 – Caractéristiques de la Diode Laser (www.cnilaser.com)

Lentille Powell

Cette lentille fut inventée par le Dr. Ian Powell, en 1986 at the Conseil national de recherches du Canada à Ottawa. Elle représente une grande amélioration en comparaison à la lentille cylindrique simple. En effet, une lentille cylindrique produit une ligne mal éclairée, limitée par le faisceau laser gaussien non uniforme. La surface arrondie de la lentille Powell est en fait une courbe asphérique bidimensionnelle complexe qui génère une énorme quantité d'aberration sphérique qui redistribue la lumière le long de la ligne, diminuant ainsi la lumière dans la zone centrale tout en augmentant le niveau de lumière aux extrémités de la ligne.



Substrat	N-SF6
Angle de Dispersion	75°
Indice de Réfraction n_d	1.805
Traitement	VIS-NIR
Spécification du Traitement	BBAR @ 450 - 900nm
Diamètre (mm)	9.0
Tolérance Diamètre (mm)	+0.00/-0.05
Gamme de Longueur d'Onde (nm)	450 - 900
Type	Beam Shaping Lens
RoHS	Conforme

Table VI.4 – Caractéristiques de la lentille Powell (www.edmundoptics.fr)

Caméras



Numéro de Modèle	GS3U341C6MC
Composante d'Imagerie	CMOSIS CMV4000
Type de Capteur	1"
Capteur	Progressive Scan CMOS
Pixels (H x V)	2048 x 2048
Taille de Pixel, H x V (μm)	5.5 x 5.5
Profondeur de Pixel	8, 12, 16 and 24 bit digital data
Taux d'Image (fps)	90
Type d'Obturateur	Global
Obturateur Électronique	0.04 ms 4 s
Format Image	Mono8, Mono12, Mono16
Vitesse de Transfert (Gbit/s)	5
Tampon d'Image	128MB frame buffer
Mémoire (MB)	2MB nonvolatile Flash memory
Synchronisation	External or Via Software
Connecteur	USB 3.0 interface with screw locks
Filetage	CMount
Dimensions (mm)	44 x 29 x 58
Température d'Utilisation ($^{\circ}\text{C}$)	0 to +50
Température de Stockage ($^{\circ}\text{C}$)	30 to +60
Poids (g)	90
Type	Monochrome Camera
Sortie Vidéo	USB 3.0
Résolution (MegaPixels)	4.2
Fabricant	Point Grey
Famille de Caméras	Grasshopper ®3
RoHS	Conforme

Table VI.5 – Caractéristiques des caméras Point Grey (www.edmundoptics.fr)

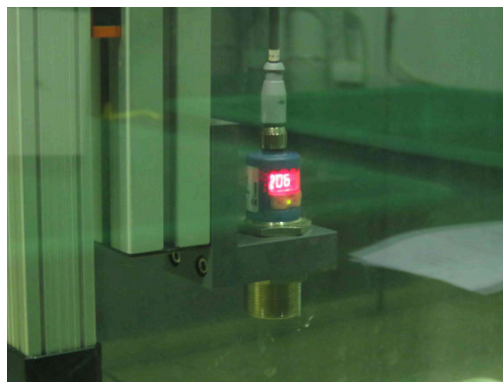
Objectifs



Fabricant	Nikon	Nikon
Modèle	AF Nikkor 28 mm 1 :2.8 D	AF Nikkor 35 mm 1 :2 D
Monture	Nikon F	Nikon F
Numéro de série	633432	649280
Distance focale	28 mm	35 mm
Ouverture maximale	f/2,8	f/2
Rapport de grandissement maximal	1/5,6	1/4,2
Diamètre de filtre	52 mm	52 mm
Masse	200 g	200 g

Table VI.6 – Caractéristiques des objectifs Nikon (www.metrologie.cnrs.pprime.fr)

Sondes acoustiques



Fabricant	Microsonic
Modèle	mic+340/IU/TC
Portée de service	5-350 mm
Mode de fonctionnement	mesures de distance analogiques
Fréquence du transducteur	120 kHz
Résolution	0,18 mm à 1,5 mm
Reproductibilité	±15%
Précision	±1%
Température de service	-25°C à 70°C
Masse	165g

Table VI.7 – Caractéristiques des sondes acoustiques (www.microsonic.de)

Vélocimétrie par Image de Particules (PIV)

Caméras



Fabricant	Allied Vision Technology
Modèle	CMC-4000 (Bonito CL400B/C)
Numéro de série	00120
Année d'acquisition	2012
Type de capteur	CMOS
Taille du capteur	16,24 x 12,08 mm ²
Taille d'un pixel	7 x 7 μm ²
Résolution	2320 x 1726 pixels
Vitesse à pleine résolution	193 images/s
Compatibilité logicielle	Dantec
Monture d'objectif	Nikon F
Masse	375 g

Table VI.8 – Caractéristiques des caméras PIV (www.metrologie.cnrs.pprime.fr)

Laser



Cavités

Fabricant	Litron Lasers
Modèle	Nano L 50-50 PIV
Numéro de série	LM1580
Type	Nd-YAG
Longueur d'onde utile	532 nm
Energie nominale	2 x 50 mJ à 100 μ s
Diamètre des faisceaux	4 mm
Durée des impulsions	8 ns
Fréquence maximale	50 Hz
Masse	13 kg

Alimentation

Fabricant	Litron Lasers
Modèle	LPU 550
Numéro de série	90218/0144
Masse	32 kg
Consommation électrique (max)	1000 W

Table VI.9 – Caractéristiques du laser PIV (www.metrologie.cnrs.pprime.fr)