HAL
open science

Développement, analyse et implémentation d'un modèle financier continu en temps

Tarik Chakkour

To cite this version:

Tarik Chakkour. Développement, analyse et implémentation d'un modèle financier continu en temps. Analyse numérique [math.NA]. Université de Bretagne Sud, 2017. Français. NNT : 2017LORIS468 . tel-01981807

HAL Id: tel-01981807

https://theses.hal.science/tel-01981807v1

Submitted on 15 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE / Université de Bretagne-Sud
sous le sceau de l'Université de Bretagne Loire
pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD
Mention : Mathématiques et interactions des mathématiques
Ecole doctorale SICMA

présentée par
Tarik Chakkour
Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (UMR 6205 du CNRS)

Développement, analyse et implémentation d'un modèle financier continu en temps.

Thèse soutenue le 16 Novembre 2017
devant le jury composé de :

Emmanuel Frénod
Professeur (Université de Bretagne-Sud), directeur de thèse
Raymond Brummelhuis
Professeur (Birkbeck Université de London, rapporteur
Jacques Printems
Maître de conférence (Université de Paris-Est créteil), rapporteur
Liu Quansheng
Professeur (Université de Bretagne-Sud), examinateur
Béatrice Vedel
Maîtresse de conférence (Université de Bretagne-Sud), examinateur
Diaraf Seck
*Professeur (*Université Cheikn Anta Diop de Dakar)

Résumé

SOFI est un outil logiciel commercialisé par la société MGDIS. Il est destiné aux institutions publiques comme des collectivités locales pour élaborer un budget pluriannuel. SOFI est basé sur une modélisation financière discrète. Par conséquent, le défaut de SOFI est qu'il utilise des tableaux de type Excel. Dans ce travail, nous avons conçu un nouveau modèle utilisant un autre paradigme. Ce nouveau modèle se base sur une modélisation en temps continu et utilise des outils mathématiques de types convolution, intégration, etc.

Le modèle financier continu en temps s'appuie sur la théorie de la mesure. Nous avons créé des mesures et des champs, nous les avons utilisés dans notre modélisation pour montrer la cohérence de ce modèle. Nous avons montré dans cette modélisation comment certains aspects du fonctionnement d'un emprunt à taux fixe peuvent être insérés dans un modèle continu en temps. Nous avons construit un modèle financier à taux variable qui permet de modéliser un taux d'emprunt fixe défini à la date d'emprunt

Nous établissons la densité de dépense algébrique σ en fonction de la densité d'emprunt κ_E par un opérateur mathématique. Cet opérateur n'est pas toujours inversible. Nous étudions ce problème inverse du modèle financier sur l'espace des fonctions de carré intégrable définies sur un compact, et sur l'espace de mesure de Radon.

Nous avons développé deux librairies industrielles pour implémenter des mesures et des champs pour le modèle financier continu en temps. Nous les avons appelées LemfAN (Library Embedded Finance And Numerical Analysis) et Lemf (Library Embedded Finance). L'intégration et la validation de ces deux librairies dans SOFI ont été effectuées avec succès.

Abstract

SOFI is a software tool marketed by the company MGDIS. It is designed to the public institutions such local communities to set out multiyear budgets. SOFI is based on a discrete financial modeling. Consequently, the default of SOFI is using tables of type Excel. In this thesis, we build a new model with using an other paradigm. This new model is based on continuous-in-time modeling and uses the mathematical tools such convolution and integration, etc.

The continuous-in-time financial model relies on measure theory. We created measures and fields and we used them in our modeling in order to show the consistency of the model. We have showed in this modeling how some aspects of functionning of loan with constant rate could be inserted in continuous-in-time model. We build a financial model with variable rate which allows model a rate of constant loan which is defined at borrowed time.

We set the algebraic spending density σ in terms of the loan density κ_E by a mathematical operator. This operator is not always invertible. We study this inverse problem of the financial model on the space of square-integrable functions defined on a compact, and on radon measure space.

We have developed two industrials libraries to implement measures and fields for the continuous-in-time financial model. We called them LemfAN (Library Embedded Finance And Numerical Analysis) and Lemf (Library Embedded Finance). The integration and the validation of these libraries in SOFI are succefully made.

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse le professeur Emmanuel Frénod qui m'a proposé ce sujet, sa disponibilité, sa patience et son encouragements, et pour la confiance qu'il m'a accordé et l'aide inestimable qui m'a permis de développer mes capacités scientifiques et de réaliser ce projet de thèse.

Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance envers Jean-Philippe Gouigoux, directeur technique de MGDIS, qui a supervisé le développement informatique de l'API tout au long de ma thèse. Ce travail a pu se faire grâce au financement de l'entreprise MGDIS. Un grand merci également à Jean-Marc Bienvenu pour sa participation à l'élaboration du cas d'étude de programmation physico-financière, et à Davy Hélard pour ses conseils en informatique.

Je remercie les rapporteurs Raymond Brummelhuis (professeur au Laboratoire de Mathématiques de Reims) et Jacques Printemps (Maître de conférence au Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées à l'Université de Paris-Est créteil), pour leur relecture avec une vision scientifique, leurs rapports ainsi que pour leurs suggestions.

Il me tient à coeur de remercier les membres de ma famille, mes parents, frères et soeurs pour leur grand soutien moral, leurs encouragements, leur patience et leur confiance. Un grand merci à mon père et à ma mère pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Table des matières

Chapitre I Intoduction générale **13**
I.1 Description du logiciel SOFI 14
I.2 Problématique 17
I.2.1 Problématique industrielle 17
I.2.2 Objets mathématiques utilisés dans la modélisation discrète 18
I.3 Solution à la problématique : la modélisation financière continue en temps 18
I.3.1 Les tâches à effectuer pour construire un modèle financier continu en temps . 19
I.4 Un scénario de construction d'une cantine 20
I.4.1 La planification de l'investissement 20
I.4.1.1 L'établissement de la fiche d'opérations 20
I.4.1.2 La recherche de subventions 21
I.4.1.3 La recherche d'emprunt 21
I.4.1.4 La planification physique 21
I.4.1.5 Le choix de l'investissement de construction de la nouvelle cantine . 21
I.4.1.5.1 Les deux solutions à départager 21
I.4.1.5.2 La recherche des équilibres 22
I.4.1.5.3 La décision du conseil 22
I.4.1.5.4 La nécessité d'une aide à la décision 22
I.4.2 Le suivi du budget d'investissement 23
I.4.2.1 La construction du bâtiment 23
I.4.2.1.1 Le retard dans la construction du bâtiment pour cause d'intempéries 23
I.4.2.1.2 Le retard dans la construction du bâtiment ne respectant pas le contrat 24
I.4.2.2 Les subventions 24
I.4.3 Le suivi du budget de fonctionnement 24
I.4.3.1 Le paiement par les familles 24
I.4.3.2 La gestion des repas 24
I.4.3.3 Les subventions de la CAF au fonctionnement 25
I.4.3.4 Le bilan financier 25
I.4.3.5 Ouverture de la nouvelle cantine 25
Bibliographie 26

Chapitre II Les objets mathématiques du modèle financier continu en temps . **27**
II.1 Rappel mathématique 28
II.1.1 Rappel de la définition d'une mesure 28
II.1.2 Rappels de certains résultats concernant les mesures 29
II.1.3 Enveloppe convexe du support d'une mesure 31
II.1.3.1 Support d'une mesure 31
II.1.3.2 Enveloppe convexe du support d'une mesure 32
II.1.3.2.1 Premier exemple 32
II.1.3.2.2 Deuxième exemple 32

II.2 Les objets mathématiques qui seront utilisés dans la modélisation continue 33
II.3 Choix numériques du modèle financier continu en temps 35
Bibliographie 37

Chapitre III Le modèle financier à taux fixe 39
III.1 L'espace du modèle financier 40
III.2 Les variables financières 40
III.3 Justifications mathématique et financière de la convolution 48
III.3.1 Convolution des mesures à densité 48
III.3.2 Convolution d'une mesure à densité et d'une mesure de Dirac 51
III.3.3 Convolution des mesures de Dirac 55
III.3.4 Convolution des mesures par morceaux 57
III.4 Validation du modèle financier par des simulations numériques 60
Bibliographie 67

Chapitre IV Les modèles financiers à taux variable 69
IV.1 Introduction 70
IV.2 Le modèle financier à taux variable 70
IV.3 Le modèle financier à taux variable, fixé aux instants de l'emprunt 71
IV.3.1 Résultats sur des densités 71
IV.3.2 Résultats sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ 77
IV.4 Le modèle financier à taux variable aux instants de l'emprunt 78
IV.4.1 Résultats sur des densités 78
IV.4.2 Résultats sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ 78
IV.5 Le modèle financier au pattern de remboursement variable 79
Bibliographie 81

Chapitre V Problème inverse du modèle financier 83
V.1 Généralités 84
V.2 Problème inverse dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ 85
V.2.1 Définition des opérateurs 85
V.2.2 Compacité d'opérateur 86
V.2.3 Calcul d'opérateur adjoint 92
V.2.4 Opérateurs de non Fredholm 98
V.2.5 Théorème d'inversion 100
V.2.5.1 Points de singularité 102
V.2.5.2 Existence et unicité 106
V.2.5.3 Stabilité de la solution 114
V.2.5.4 Un exemple d'inversion 119
V.3 Problème inverse dans l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ 120
V.3.1 Définition des opérateurs 120
V.3.2 Propriétés des opérateurs 121
V.3.3 Théorème d'inversion 124
V.4 Stratégie financière 126
V.5 Simulation numérique sur le problème inverse 127
Bibliographie 131

Chapitre VI Méthode numérique concentrant une mesure 133
VI.1 Mesure concentrée 134
VI.1.1 Construction de la partition de l'unité 134
VI.1.1.1 Étape d'initialisation 135
VI.1.1.2 Étape d'itération 136
VI.2 Exemples de partition de l'unité 137

VI.3 Simulations numériques sur la concentration d'une mesure 138

Chapitre VII Développement des librairies Lemf et LemfAN en $C\#$ 143
VII.1 Environnement de développement 144
VII.1.1 Technologie utilisée : Visual Studio 144
VII.1.2 Language $C\#$ 144
VII.2 Composition des librairies Lemf et LemfAN 144
VII.2.1 Les interfaces 144
VII.2.1.1 Interfaces des mesures 144
VII.2.1.2 Interfaces des champs 145
VII.2.1.3 Interface générique 145
VII.2.1.4 Les contrats sur les interfaces des mesures et des champs 146
VII.2.1.5 Interfaces pour chaque mesure et chaque champ 146
VII.2.2 Les classes abstraites 147
VII.2.3 Les classes 148
VII.3 Composition des librairies des tests LemfTest et LemfANTest 148
VII.3.1 Les tests unitaires de validation 148
VII.4 Optimisation de la librairie LemfAN 149
VII.4.1 Principe du cache 149
VII.4.2 Approche par la parallélisation 149
VII.4.3 Utilisation de Math.Net Numerics 149

Chapitre VIII Intégration des mesures et évaluation des champs pour le modèle financier 151
VIII.1 Mesures 156
VIII.1.1 Définition du haut et du bas niveaux 156
VIII.1.2 Intégration numérique d'une mesure 157
VIII.1.2.1 Intégration numérique d'une mesure dans le bas niveau 159
VIII.1.2.2 Intégration numérique d'une mesure dans le haut niveau 159
VIII.1.3 Introduction du maillage universel dans le bas niveau 159
VIII.1.4 Principe d'intégration des mesures dans le bas niveau 163
VIII.2 Les mesures simples 163
VIII.2.1 Mesure nulle 164
VIII.2.1.1 Définition 164
VIII.2.1.2 Intégration d'une mesure nulle dans le haut niveau 164
VIII.2.1.3 Discrétisation d'une mesure nulle dans le bas niveau 164
VIII.2.2 Mesure constante 164
VIII.2.2.1 Définition 164
VIII.2.2.2 Intégration d'une mesure constante dans le haut niveau 165
VIII.2.2.3 Discrétisation d'une mesure constante dans le bas niveau 165
VIII.2.2.3.1 Un exemple de discrétisation d'une mesure constante . . . 165
VIII.2.3 Mesure affine 166
VIII.2.3.1 Définition 166
VIII.2.3.2 Intégration d'une mesure affine dans le haut niveau 166
VIII.2.3.3 Discrétisation d'une mesure affine dans le bas niveau 166
VIII.2.4 Mesure quadratique 166
VIII.2.4.1 Définition 167
VIII.2.4.2 Intégration d'une mesure quadratique dans le haut niveau 167
VIII.2.4.3 Discrétisation d'une mesure quadratique dans le bas niveau 167
VIII.2.5 Mesure polynomiale 167
VIII.2.5.1 Définition 167
VIII.2.5.2 Intégration d'une mesure polynomiale dans le haut niveau 168
VIII.2.5.3 Discrétisation d'une mesure polynomiale dans le bas niveau 168

VIII.2.6 Mesure sinus . . . 168
VIII.2.6.1 Définition . . . 168
VIII.2.6.2 Intégration d'une mesure sinus dans le haut niveau . . . 169
VIII.2.6.3 Discrétisation d'une mesure sinus dans le bas niveau . . . 169
VIII.2.7 Mesure cosinus . . . 169
VIII.2.7.1 Définition . . . 169
VIII.2.7.2 Intégration d'une mesure cosinus dans le haut niveau . . . 169
VIII.2.7.3 Discrétisation d'une mesure cosinus dans le bas niveau . . . 170
VIII.2.8 Mesure gaussienne . . . 170
VIII.2.8.1 Définition . . . 170
VIII.2.8.2 Intégration d'une mesure gaussienne dans le haut niveau . . . 170
VIII.2.8.3 Discrétisation d'une mesure gaussienne dans le bas niveau . . . 170
VIII.2.9 Mesure exponentielle . . . 171
VIII.2.9.1 Définition . . . 171
VIII.2.9.2 Intégration d'une mesure exponentielle dans le haut niveau . . . 171
VIII.2.9.3 Discrétisation d'une mesure exponentielle dans le bas niveau . . . 171
VIII.2.10 Mesure de Dirac . . . 171
VIII.2.10.1 Définition . . . 172
VIII.2.10.2 Intégration d'une mesure de Dirac dans le haut niveau . . . 172
VIII.2.10.3 Discrétisation d'une mesure de Dirac dans le bas niveau . . . 172
VIII.3 Les mesures composées . . . 173
VIII.3.1 Somme de mesures . . . 173
VIII.3.1.1 Définition . . . 173
VIII.3.1.2 Intégration d'une mesure somme dans le haut niveau . . . 173
VIII.3.1.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure somme dans le haut niveau . . . 173
VIII.3.1.3 Somme de deux mesures discrètes . . . 174
VIII.3.1.3.1 Un exemple de somme de deux mesures de Dirac discrètes 175
VIII.3.2 Soustraction de deux mesures . . . 175
VIII.3.2.1 Définition . . . 175
VIII.3.2.2 Intégration d'une mesure soustraction dans le haut niveau . . . 176
VIII.3.2.3 Soustraction de deux mesures discrètes . . . 176
VIII.3.3 Produit de mesures . . . 176
VIII.3.3.1 Produit de deux mesures discrètes . . . 176
VIII.3.3.1.1 Un exemple de validation du produit discret . . . 176
VIII.3.3.1.2 Un exemple de produit de deux mesures discrètes . . . 177
VIII.3.3.2 Intégration d'une mesure produit discrète . . . 177
VIII.3.3.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure produit discrète . . 177
VIII.3.4 Division de deux mesures . . . 178
VIII.3.4.1 Division de deux mesures discrètes . . . 178
VIII.3.4.1.1 Un exemple de validation de la mesure division discrète . . 178
VIII.3.4.2 Intégration d'une mesure division discrète . . . 178
VIII.3.5 Mesure par morceaux . . . 179
VIII.3.5.1 Définition . . . 179
VIII.3.5.2 Intégration d'une mesure par morceaux entre deux points . . . 180
VIII.3.5.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure par morceaux entre deux points . . . 182
VIII.3.5.3 Intégration d'une mesure par morceaux dans le bas niveau . . . 185
VIII.3.5.4 Discrétisation d'une mesure par morceaux . . . 186
VIII.3.5.4.1 Un exemple de discrétisation d'une mesure par morceaux dans le bas niveau . . . 186
VIII.3.6 Mesure tronquée . . . 187

VIII.3.6.1 Définition . . . 187
VIII.3.6.2 Intégration d'une mesure tronquée entre deux points . . . 188
VIII.3.6.3 Intégration d'une mesure tronquée dans le bas niveau . . . 190
VIII.3.6.4 Discrétisation d'une mesure tronquée . . . 190
VIII.3.7 Mesure tabulée . . . 190
VIII.3.7.1 Définition . . . 191
VIII.3.7.2 Intégration d'une mesure tabulée entre deux points . . . 191
VIII.3.7.3 Intégration d'une mesure tabulée dans le bas niveau . . . 194
VIII.3.7.4 Discrétisation d'une mesure tabulée . . . 194
VIII.3.8 Produit de convolution de deux mesures . . . 194
VIII.3.8.1 Définition . . . 195
VIII.3.8.2 Calcul de produit de convolution avec la FFT . . . 195
VIII.3.8.2.1 Méthode N° 1 : produit de convolution en utilisant directement la transformée de Fourier rapide FFT . . . 195
VIII.3.8.2.2 Méthode N° 2 : produit de convolution avec changement de coordonnées sur l'enveloppe convexe du support . . . 196
VIII.3.8.2.3 Comparaison des deux méthodes . . . 198
VIII.3.8.3 La convolution discrète de deux mesures discrètes . . . 198
VIII.3.8.4 La convolution discrète de deux mesures quelconques . . . 199
VIII.3.8.4.1 Un exemple de convolution discrète de deux mesures de Dirac non discrètes . . . 199
VIII.3.8.5 Intégration d'une convolution discrète . . . 201
VIII.4 Complément sur les mesures . . . 201
VIII.4.1 Zoologie de certaines mesures . . . 201
VIII.4.2 Mesure translatée . . . 203
VIII.4.2.1 Intégration d'une mesure translatée dans le haut niveau . . . 203
VIII.4.2.2 Intégration d'une mesure translatée dans le bas niveau . . . 203
VIII.5 Champs . . . 203
VIII.5.1 Définition d'un champ . . . 204
VIII.5.2 Évaluation d'un champ dans le haut niveau . . . 204
VIII.5.3 Évaluation d'un champ dans le bas niveau . . . 204
VIII.5.4 Discrétisation d'un champ dans le bas niveau . . . 205
VIII.5.4.1 Interpolation constante . . . 205
VIII.5.4.2 Interpolation du point milieu . . . 205
VIII.5.4.3 Interpolation linéaire . . . 206
VIII.5.4.4 Interpolation quadratique . . . 206
VIII.5.5 Évaluation d'un champ discret avec un pas d'évaluation . . . 207
VIII.5.6 La primitive d'une mesure est un champ . . . 208
VIII.5.6.1 Discrétisation de la primitive d'une mesure dans le bas niveau . . . 208
VIII.5.6.2 Évaluation de la primitive d'une mesure dans le haut niveau . . . 210
VIII.5.7 Produit d'une mesure par un champ . . . 211
VIII.5.7.1 Produit d'une mesure discrète par un champ discret . . . 211
VIII.5.7.2 Intégration d'un produit d'une mesure discrète par un champ discret 211
VIII.6 Les champs simples . . . 211
VIII.6.1 Champ nul . . . 212
VIII.6.1.1 Définition . . . 212
VIII.6.1.2 Évaluation d'un champ nul dans le haut niveau . . . 212
VIII.6.1.3 Évaluation d'un champ nul dans le bas niveau . . . 212
VIII.6.1.4 Discrétisation d'un champ nul dans le bas niveau . . . 212
VIII.6.2 Champ constant . . . 212
VIII.6.2.1 Définition . . . 212
VIII.6.2.2 Évaluation d'un champ constant dans le haut niveau . . . 212

VIII.6.2.3 Évaluation d'un champ constant dans le bas niveau 213
VIII.6.2.4 Discrétisation d'un champ constant dans le bas niveau 213
VIII.6.3 Champ affine 213
VIII.6.3.1 Définition 213
VIII.6.3.2 Évaluation d'un champ affine dans le haut niveau 213
VIII.6.3.3 Évaluation d'un champ affine dans le bas niveau 213
VIII.6.3.4 Discrétisation d'un champ affine dans le bas niveau 213
VIII.6.4 Champ quadratique 214
VIII.6.4.1 Définition 214
VIII.6.4.2 Évaluation d'un champ quadratique dans le haut niveau 214
VIII.6.4.3 Évaluation d'un champ quadratique dans le bas niveau 214
VIII.6.4.4 Discrétisation d'un champ quadratique dans le bas niveau 214
VIII.6.5 Champ polynomial 214
VIII.6.5.1 Définition 215
VIII.6.5.2 Évaluation d'un champ polynomial dans le haut niveau 215
VIII.6.5.3 Évaluation d'un champ polynomial dans le bas niveau 215
VIII.6.5.4 Discrétisation d'un champ polynomial dans le bas niveau 215
VIII.6.6 Champ sinus 215
VIII.6.6.1 Définition 215
VIII.6.6.2 Évaluation d'un champ sinus dans le haut niveau 215
VIII.6.6.3 Évaluation d'un champ sinus dans le bas niveau 216
VIII.6.6.4 Discrétisation d'un champ sinus dans le bas niveau 216
VIII.6.7 Champ cosinus 216
VIII.6.7.1 Définition 216
VIII.6.7.2 Évaluation d'un champ cosinus dans le haut niveau 216
VIII.6.7.3 Évaluation d'un champ cosinus dans le bas niveau 216
VIII.6.7.4 Discrétisation d'un champ cosinus dans le bas niveau 216
VIII.6.8 Champ exponentiel 217
VIII.6.8.1 Définition 217
VIII.6.8.2 Évaluation d'un champ exponentiel dans le haut niveau 217
VIII.6.8.3 Évaluation d'un champ exponentiel dans le bas niveau 217
VIII.6.8.4 Discrétisation d'un champ exponentiel dans le bas niveau 217
VIII.7 Les champs composés 217
VIII.7.1 Somme de champs 218
VIII.7.1.1 Évaluation d'une somme de champs dans le haut niveau 218
VIII.7.1.2 Évaluation ou discrétisation d'une somme de champs dans le bas niveau 218
VIII.7.1.2.1 Somme de deux champs discrets par interpolation 218
VIII.7.1.2.2 Somme de deux champs évalués 218
VIII.7.2 Soustraction de deux champs 218
VIII.7.2.1 Évaluation d'une soustraction de champs dans le haut niveau . . . 219
VIII.7.2.2 Évaluation ou discrétisation d'une soustraction de champs dans le bas niveau 219
VIII.7.2.2.1 Soustraction de deux champs discrets par interpolation . . 219
VIII.7.2.2.2 Soustraction de deux champs évalués 219
VIII.7.3 Produit de champs 219
VIII.7.3.1 Évaluation d'un champ produit dans le haut niveau 219
VIII.7.3.2 Évaluation ou discrétisation d'un champ produit dans le bas niveau 219
VIII.7.3.2.1 Produit de deux champs discrets par interpolation 220
VIII.7.3.2.2 Produit de deux champs évalués 220
VIII.7.4 Division de deux champs 220
VIII.7.4.1 Évaluation d'un champ division dans le haut niveau 220

VIII.7.4.2 Évaluation ou discrétisation d'un champ division dans le bas niveau 220
VIII.7.4.2.1 Division de deux champs discrets par interpolation 220
VIII.7.4.2.2 Division de deux champs évalués 221
VIII.7.5 Champ par morceaux 221
VIII.7.5.1 Définition 221
VIII.7.5.2 Évaluation d'un champ par morceaux en un point 222
VIII.7.5.3 Évaluation d'un champ par morceaux dans le bas niveau 222
VIII.7.5.4 Discrétisation d'un champ par morceaux 223
VIII.7.6 Champ tronqué 223
VIII.7.6.1 Définition 223
VIII.7.6.2 Évaluation d'un champ tronqué en un point 224
VIII.7.6.3 Évaluation d'un champ tronqué dans le bas niveau 225
VIII.7.6.4 Discrétisation d'un champ tronqué 225
VIII.8 Discussion sur la discrétisation de l'opérateur $\tilde{\sigma} = \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}]$ 225
Bibliographie 228

Chapitre IX Conclusions et perspectives 229
IX.1 Le bilan de la thèse 230
IX.1.1 Production scientifique 230
IX.1.2 Production logicielle 230
IX.2 Conclusions et perspectives 230
Bibliographie 233

Annexe Chapitre A Complément logiciel 235
A.1 Les mesures de la librairie LemfAN 237
A.1.1 Les mesures simples 237
A.1.1.1 Mesure constante 237
A.1.1.2 Mesure affine 238
A.1.1.3 Mesure quadratique 239
A.1.1.4 Mesure polynomiale 240
A.1.1.5 Mesure gaussienne 242
A.1.1.6 Mesure nulle 243
A.1.1.7 Mesure exponentielle 244
A.1.1.8 Mesure de Dirac 245
A.1.1.9 Mesure sinus 246
A.1.1.10 Mesure cosinus 247
A.1.2 Les mesures composées 249
A.1.2.1 Mesure translatée 249
A.1.2.2 Mesure produit 251
A.1.2.3 Mesure division 252
A.1.2.4 Mesure somme 254
A.1.2.5 Mesure soustraction 256
A.1.2.6 Mesure convolution 258
A.1.2.7 Mesure par morceaux 263
A.2 Les champs de la librairie LemfAN 267
A.2.1 Les champs simples 267
A.2.1.1 Champ constant 267
A.2.1.2 Champ affine 268
A.2.1.3 Champ quadratique 269
A.2.1.4 Champ polynomial 270
A.2.1.5 Champ null 271
A.2.1.6 Champ exponentiel 272
A.2.1.7 Champ sinus 273

A.2.1.8 Champ cosinus 274
A.2.2 Les champs composés 274
A.2.2.1 Champ translaté 274
A.2.2.2 Champ somme 276
A.2.2.3 Champ soustraction 277
A.2.2.4 Champ produit 279
A.3 Les tests unitaires sur mesures par morceaux 279
A.3.1 Dans la librairie Lemf 280
A.3.2 Dans la librairie LemfAN 282

Table des figures

I.1 Illustration de la saisie des données et de la vision par tableau dans le logiciel SOFI. 15

I.2 Illustration de la vue graphique discrète et des tendances financières dans le logiciel SOFI. 15

I.3 Illustration du diagramme de Gantt permettant d'observer l'impact des investissements au cours du temps dans le logiciel SOFI. 16

I.4 Illustration des possibilités de discrétisation qu'offre la modélisation continue. 19

I.5 La vue d'ensemble du budget d'investissement et de fonctionnement. 21

II.1 La mesure $\tilde{f}$ est la somme de deux mesures de Dirac M_1 et M_2. 33

III.1 La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction constante sur l'intervalle $[2, 6]$ de constante $\frac{1}{4}$, et nulle ailleurs. Cette densité γ est obtenue avec $S = 2$ et $\Theta_\gamma = 4$ dans l'équation (III.8). 42

III.2 La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction linéaire sur l'intervalle $[0, 4]$ de pente $\frac{1}{8}$, et nulle ailleurs. Cette densité γ est obtenue avec $\Theta_\gamma = 4$ dans l'équation (III.11). 43

III.3 La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction par morceaux, constante sur l'intervalle $[0, 2]$ de constante $\frac{5}{16}$, linéaire de pente $\frac{1}{16}$ sur l'intervalle $[4, 6]$, et nulle ailleurs. Cette densité γ est obtenue avec $\Theta_\gamma = 4$ et $S = 2$ dans l'équation (III.12). 43

III.4 Résultat de la convolution $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ définie par la mesure à densité $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$. La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le haut, la densité d'emprunt κ_E est présentée dans le milieu et la densité de remboursement $\rho_\mathcal{K}$ est présentée dans le bas. 49

III.5 La convolution de la mesure à densité $\tilde{\gamma}$, et de la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure à densité $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$. La densité de pattern de remboursement γ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu et la densité de remboursement $\rho_\mathcal{K}$ est présentée en bas. 53

III.6 La convolution de la mesure concentrée $\tilde{\gamma}$, et de la mesure à densité $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure à densité $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la densité d'emprunt κ_E est présentée au milieu, et la densité de remboursement $\rho_\mathcal{K}$ est présentée en bas. 54

III.7 La convolution des deux mesures concentrées $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure concentrée $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu, et la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$ est présentée en bas. 56

III.8 La convolution des deux mesures par morceaux $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure concentrée $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu, et la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_\mathcal{K}$ est présentée en bas. 59

III.9 Première simulation numérique pour valider le modèle financier. La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le premier diagramme du haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le deuxième diagramme, la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est présentée dans le troisième diagramme, le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est présenté dans le quatrième diagramme, la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le cinquième diagramme, l'instantiation de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité mensuelle est présentée dans le sixième diagramme, et l'instantiation de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité annuelle est présentée dans le septième diagramme. 65

III.10 Deuxième simulation numérique pour valider le modèle financier. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée dans le premier diagramme du haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le deuxième diagramme, la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est présentée dans le troisième diagramme, le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est présenté dans le quatrième diagramme, la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le cinquième diagramme, la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le sixième diagramme, l'instantiation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité mensuelle est présentée dans le septième diagramme, et l'instantiation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité annuelle est présentée dans le huitième diagramme. 66

IV.1 Présentation graphique de l'égalité des domaines définie dans la relation (IV.15) . . 73

V.1 Graphe de la fonction $\xi\Theta_\gamma \to \xi\Theta_\gamma\left(1+\frac{3(\xi\Theta_\gamma)^2}{2}\right)-\left(1+\frac{9(\xi\Theta_\gamma)^2}{4}\right)\sin(\xi\Theta_\gamma)$ montrant que zéro est l'unique point où elle s'annule. 103

V.2 Graphe de la fonction $(\xi\Theta_\gamma, c_2\Theta_\gamma^2) \to \sin(\xi\Theta_\gamma) - \xi\Theta_\gamma\left(\frac{c_2\Theta_\gamma^2+(\xi\Theta_\gamma)^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2})}{c_2\Theta_\gamma^2+(\xi\Theta_\gamma)^2(1+\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2}+\frac{c_2\Theta_\gamma^2}{4})}\right)$ sur l'intervalle $[-20,20]\times[-2,20]$ montrant que zéro est l'unique point où elle s'annule. 105

V.3 Graphe de la fonction $\xi\Theta_\gamma \to \frac{|\xi\Theta_\gamma|}{\sqrt{(\xi\Theta_\gamma-\sin(\xi\Theta_\gamma))^2+(\cos(\xi\Theta_\gamma)-1)^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montrant qu'il n'admet pas de borne supérieure. 115

V.4 La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le premier diagramme du haut, la densité d'emprunt κ_E est présentée dans le deuxième diagramme, la densité de dépense isolée β est présentée dans le troisième diagramme, la densité de dépense isolée modifiée β_{M} est présentée dans le quatrième diagramme, la densité d'emprunt conséquente κ_E^c est présentée dans le cinquième diagramme, la densité d'emprunt modifiée κ_E^{M} est présentée dans le sixième diagramme, et la densité de dépense isolée conséquente β_{V} est présentée dans le septième diagramme. 129

V.5 La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le premier diagramme du haut, la densité de dépense algébrique σ est présentée dans le troisième diagramme, la densité d'emprunt κ_E est présentée dans le troisième diagramme. 130

VI.1 Définition des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ lorsque $FI = 0$. 135

VI.2 Définition des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ lorsque $FI = 1$. 136

VI.3 Définition des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ lorsque $FI \geq 2$. 136

VI.4 Dans chacune des deux Figures, l'indice de floutage est nul. Dans la Figure de gauche, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.10) et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas. dans la Figure à droite, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.11) avec les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$ et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas. 140

VI.5 Dans chacune des deux Figures, l'indice de floutage est égale à 1. Dans la Figure de gauche, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.10) et leur somme $\phi_1+\phi_2$ présentée dans le diagramme du bas. dans la Figure à droite, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.11) avec les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$ et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas. 141
VI.6 Dans chacune des deux Figures. Dans la Figure de gauche, l'indice de floutage FI est nul, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le diagramme du haut, au milieu la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ est calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.4 de guache, dans le diagramme du bas la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ est calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.4 de droite. Dans la Figure à droite, l'indice de floutage FI est égale à 1, $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le diagramme du haut, au milieu la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.5 de guache, dans le diagramme du bas la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.5 de droite. 142

VII.1 Couverture à $96,4\%$ de la librairie LemfTest de tests unitaires 150

VIII.1 Le haut et le bas niveaux. 157
VIII.2 Illustration de l'échelle temporelle du modèle continu. 158
VIII.3 Maillage universel sur $\mathbb{R}$. 159
VIII.4 La mesure somme m des deux mesures de Dirac de haut niveau $m_1 = M_1\delta_{p_1}$ et $m_2 = M_2\delta_{p_2}$. 174
VIII.5 La mesure somme m des deux mesures de Dirac de bas niveau $m_1 = M_1\delta_{p_1}$ et $m_2 = M_2\delta_{p_2}$. 175
VIII.6 Mesure par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ constituée des mesures m_0 et m_1 et de la frontière Fr_0. 179
VIII.7 Mesure par morceaux $\tilde{m}_{\mathrm{Piecewise}}$ constituée des mesures $(m_i)_{0\leq i\leq n+1}$ et des frontières $(Fr_i)_{0\leq i\leq n}$. 180
VIII.8 Intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\mathrm{Piecewise}}$ lorsque $p \leq q-2$. 182
VIII.9 Intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\mathrm{Piecewise}}$ lorsque $p = q-1$. 182
VIII.10 Intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\mathrm{Piecewise}}$ lorsque $p = q$. 182
VIII.11 Mesure par morceaux $\tilde{m}_{\mathrm{Piecewise}}$ de haut niveau composée des mesures de Dirac m_0, m_1, m_2 localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et Fr_1+1, de masses M_0, M_1 et M_2. 183
VIII.12 Mesure par morceaux $\tilde{m}_{\mathrm{Piecewise}}$ de bas niveau composée des mesures de Dirac m_0, m_1, m_2 localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et Fr_1+1, de masses M_0, M_1 et M_2. 186
VIII.13 Mesure tronquée $\tilde{m}_{\mathrm{Truncated}}$ constituée des deux mesures nulles m_0 et m_2 et de la mesure m_1 et des deux frontières Fr_0 et Fr_1. 187
VIII.14 Mesure tronquée $\tilde{m}_{\mathrm{Truncated}}$ constituée de la mesure nulle m_0 et de la mesure m_1 et de la frontière Fr_0. 188
VIII.15 Mesure tronquée $\tilde{m}_{\mathrm{Truncated}}$ constituée de la mesure m_1 et de la mesure nulle m_2 et de la frontière Fr_1. 188
VIII.16 Mesure tabulée $\tilde{m}_{\mathrm{Tabulated}}$ constituée des densités $(m_i)_{0\leq i\leq n+1}$ et des frontières $(Fr_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que m_0 et m_{n+1} sont deux densités nulles et telle que chaque densité m_{j+1} est une densité constante de constante $\frac{l_j}{T_{\mathrm{tab}}}$ définie sur l'intervalle fermé $[Fr_j, Fr_{j+1}]$ pour tout entier j allant de 0 à $n-1$. 191
VIII.17 Champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ constitué des champs F_0 et F_1, et de la frontière Fr_0. 221

VIII.18 Champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ constitué des champs $(F_i)_{0\leq i\leq n+1}$ et des frontières $(Fr_i)_{0\leq i\leq n}$. 222
VIII.19 Champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ constitué des deux champs nuls F_0 et F_2 et du champ F_1 et des deux frontières Fr_0 et Fr_1. 223
VIII.20 Champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ constitué du champ nul F_0 et du champ F_1 et de la frontière Fr_0. 224
VIII.21 Champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ constitué du champ F_1 et du champ nul F_2 et de la frontière Fr_1. 224

IX.1 Un prototype d'interface graphique sur SOFI continu 231

I Intoduction générale

Sommaire

I.1 Description du logiciel SOFI . . . 14
I.2 Problématique . . . 17
I.2.1 Problématique industrielle . . . 17
I.2.2 Objets mathématiques utilisés dans la modélisation discrète . . . 18
I.3 Solution à la problématique : la modélisation financière continue en temps . . . 18
I.3.1 Les tâches à effectuer pour construire un modèle financier continu en temps . . . 19
I.4 Un scénario de construction d'une cantine . . . 20
I.4.1 La planification de l'investissement . . . 20
I.4.1.1 L'établissement de la fiche d'opérations . . . 20
I.4.1.2 La recherche de subventions . . . 21
I.4.1.3 La recherche d'emprunt . . . 21
I.4.1.4 La planification physique . . . 21
I.4.1.5 Le choix de l'investissement de construction de la nouvelle cantine . . . 21
I.4.1.5.1 Les deux solutions à départager . . . 21
I.4.1.5.2 La recherche des équilibres . . . 22
I.4.1.5.3 La décision du conseil . . . 22
I.4.1.5.4 La nécessité d'une aide à la décision . . . 22
I.4.2 Le suivi du budget d'investissement . . . 23
I.4.2.1 La construction du bâtiment . . . 23
I.4.2.1.1 Le retard dans la construction du bâtiment pour cause d'intempéries . . . 23
I.4.2.1.2 Le retard dans la construction du bâtiment ne respectant pas le contrat . . . 24
I.4.2.2 Les subventions . . . 24
I.4.3 Le suivi du budget de fonctionnement . . . 24
I.4.3.1 Le paiement par les familles . . . 24
I.4.3.2 La gestion des repas . . . 24
I.4.3.3 Les subventions de la CAF au fonctionnement . . . 25
I.4.3.4 Le bilan financier . . . 25
I.4.3.5 Ouverture de la nouvelle cantine . . . 25
Bibliographie . . . 26

Résumé. Nous allons décrire dans ce chapitre le logiciel SOFI défini comme étant un outil logiciel permettant de planifier et d'optimiser un budget pluriannuel d'une collectivité territoriale. Ce qui nous permettra d'exposer la problématique industrielle et scientifique de cette thèse. En effet, comme les modèles financiers utilisés dans le logiciel SOFI sont assez flexibles, il était nécessaire de concevoir des modèles utilisant un autre paradigme. Ces nouveaux modèles se basent sur une modélisation en temps continu.

Nous terminons notre chapitre par une description d'un scénario de construction d'une cantine. Ce scénario nous montre comment un tel projet est géré par une collectivité territoriale. Cet exemple a pour objectif d'établir un équilibre financier de ce projet dans SOFI.

I.1 Description du logiciel SOFI

SOFI est un outil logiciel commercialisé par la société MGDIS. Cet outil logiciel est destiné aux institutions publiques comme des collectivités territoriales et des centres hospitaliers pour élaborer un budget pluriannuel. Le logiciel SOFI de programmation financière permet d'analyser la situation financière actuelle, de définir la stratégie d'une collectivité territoriale. En effet, comme les élus disposent de toutes les informations nécessaires pour décider, piloter et communiquer clairement la stratégie financière de la collectivité, SOFI est utilisé pour satisfaire la cohérence des objectifs financiers avec le plan stratégique de la collectivité.

Nous allons maintenant donner un exemple d'utilisation du logiciel SOFI dans un projet d'une collectivité. Dans cet exemple, SOFI est utilisé pour planifier un budget pluriannuel d'un projet de construction d'une route. Cette planification a pour objectif de simuler et ajuster le budget pour construire cette route. En effet, les élus utilisent SOFI pour planifier en années les crédits de paiement, tandis que le service technique de la collectivité utilise SOFI pour planifier en mois les opérations de construction.

Nous rappelons que SOFI est un outil d'aide à la communication pour les élus. En effet, les élus sont toujours à la recherche d'un équilibre financier de leurs budgets en temps réel. Cet équilibre est déterminé par un autofinancement ou une capacité dynamique de désendettement. Cela donne aux élus une capacité financière pour investir. Par conséquent, SOFI offre une vision claire et synthétique de la politique d'investissement de la collectivité.

Le logiciel SOFI se présente dans la Figure I.1 sous la forme d'un tableau de saisie de type Excel où le client intégre ses données budgétaires passées et inclut différents projets d'investissements.

Une vue graphique discrète des tendances annuelles peut être obtenue dans la Figure I.2. Ainsi un diagramme de Gantt permettant de visualiser l'impact temporel des investissements dans la Figure I.3 et d'en dégager les marges de manœuvre.

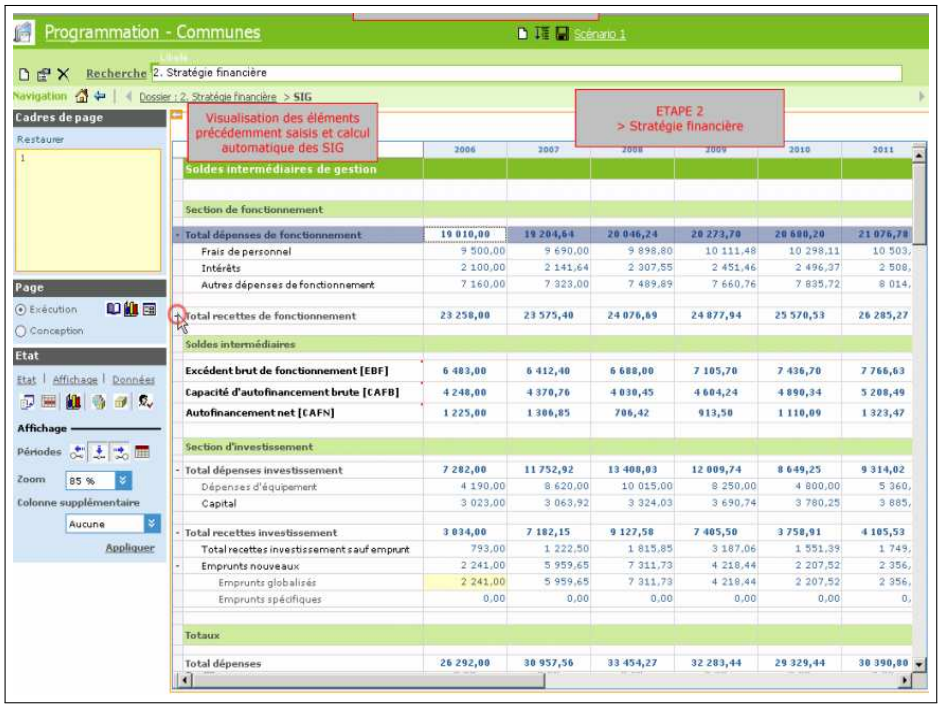

FIGURE I.1 – Illustration de la saisie des données et de la vision par tableau dans le logiciel SOFI.

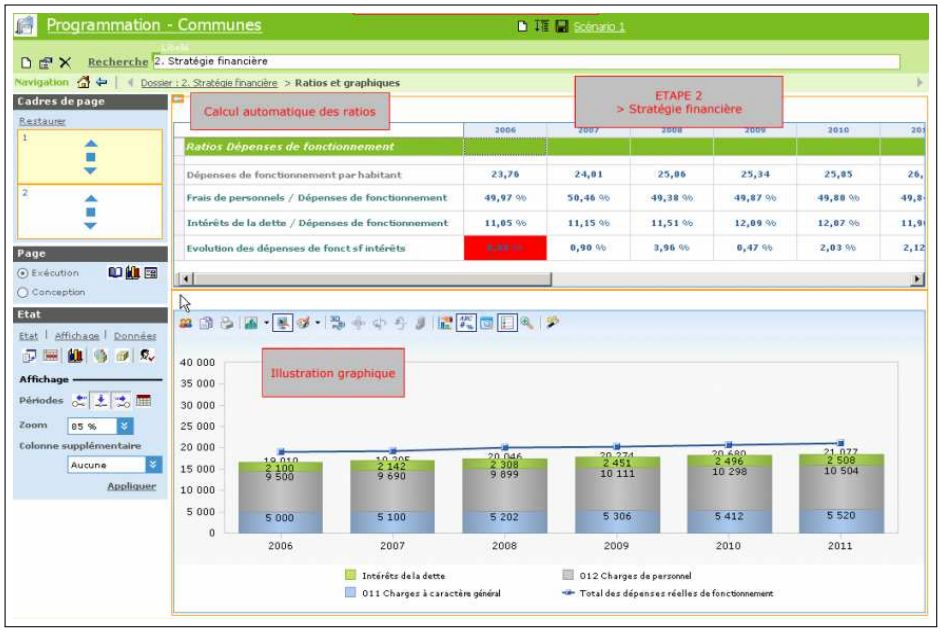

FIGURE I.2 – Illustration de la vue graphique discrète et des tendances financières dans le logiciel SOFI.

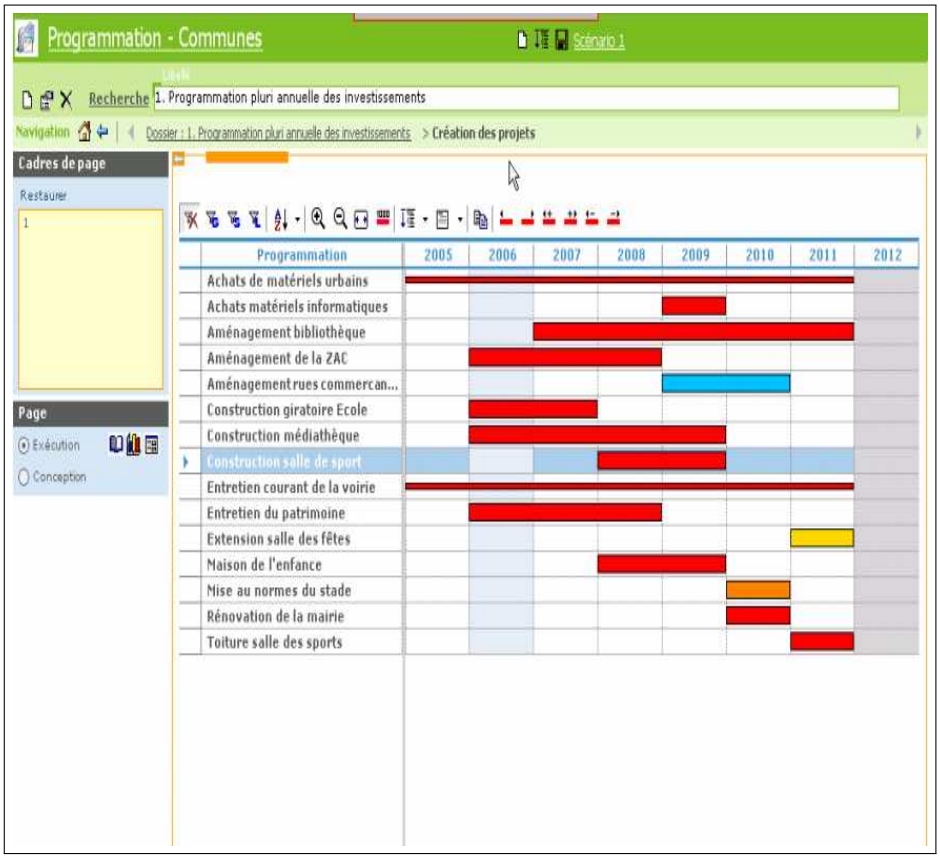

FIGURE I.3 – Illustration du diagramme de Gantt permettant d'observer l'impact des investissements au cours du temps dans le logiciel SOFI.

Nous allons maintenant donner un exemple pour montrer comment nous pouvons établir un équilibre financier d'un projet dans SOFI. Ce projet est la construction d'un centre hospitalier. Pour cela, nous allons définir le budget de fonctionnement et d'investissement.

Le budget de fonctionnement est une enveloppe budgétaire attribuée par un établissement public ou privé à une collectivité pour un exercice financier. Cette enveloppe permet à la collectivité de répondre aux besoins propres à son plan d'organisation, d'assurer le bon fonctionnement de ses activités et de pourvoir à la prestation adéquate des services qu'il est appelé à fournir. Le budget de fonctionnement peut prendre la forme de subventions, comme des aides des allocations familiales.

Le budget d'investissement retrace les programmes d'investissements en cours ou à venir. Il y a plusieurs sources d'investissements comme les emprunts qui sont financées par les ressources propres de la collectivité. Le budget d'investissement a pour objectif de développer le patrimoine de la collectivité.

Revenons à notre exemple. Établir un équilibre financier dans le projet de construction d'un centre hospitalier consiste à planifier les dépenses et les recettes de façon à obtenir un équilibre. Dans ce projet, la planification financière porte sur son budget de fonctionnement ainsi que sur le budget d'investissement de sa construction. Le budget de fonctionnement est équilibré en tenant compte des dépenses liées à sa construction.

I.2 Problématique

Nous rappelons que nous avons défini SOFI comme un outil logiciel permettant de planifier et d'optimiser un budget dans la section I.1. Par conséquent, afin d'exposer la problématique de la thèse, nous allons montrer que les modèles financiers utilisés dans le logiciel SOFI sont assez flexibles. Nous allons prouver que les objets mathématiques utilisés dans ceux-ci sont des suites et des séries.

I.2.1 Problématique industrielle

Actuellement, les modèles financiers utilisés dans le logiciel SOFI sont à temps discret. Nous appelons ces modèles des "modèles discrets". La période de temps (annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle) d'un modèle est choisie lors d'une étape préliminaire à sa construction. Cette façon de procéder est conforme aux standards de la comptabilité publique et à l'état de l'art des finances des collectivités territoriales et des hôpitaux.

La modélisation discrète représente le temps par une succession de périodes de longueur identique. Cette modélisation utilise deux échelles de temps : une échelle avec des périodes annuelles et une autre avec des périodes mensuelles. Nous précisons que la modélisation discrète impose de choisir la périodicité avant de modéliser.

Nous allons maintenant justifier pourquoi la modélisation discrète n'utilise pas une échelle avec des périodes de temps plus petites qu'un mois. Une telle échelle n'est pas possible puisqu'elle a besoin d'un coût de calcul plus élevé. En effet, un modèle discret utilise un tableau dont les lignes sont des variables fiancières et les colonnes sont des périodes de temps. Plus les périodes sont fines, plus le nombre de colonnes croît, et par conséquent plus le coût de calcul sera plus élevé. En conclusion, la modélisation discrète est fortement liée à la périodicité choisie pour exprimer les modèles.

Nous venons de montrer que la modélisation discrète ne permet pas d'utiliser des périodes plus petites qu'un mois pour des raisons de performances. En plus, la modélisation discrète ne permet pas un passage d'une variable annuelle vers une variable mensuelle. En revanche, le passage d'une variable mensuelle vers une variable annuelle dans la modélisation discrète est possible. En effet, nous sommons les valeurs de la variable mensuelle sur chaque mois pendant une année pour obtenir la valeur annuelle de notre variable.

L'efficience de la modélisation discrète n'est pas à remettre en cause. Cependant, elle peut poser quelques difficultés marginales, encore rarement rencontrées à l'heure actuelle, mais qu'il serait souhaitable de lever. Par exemple, le couplage de deux modèles définis à des périodes différentes est fastidieux. Il faut en effet développer des techniques d'agrégation-redistribution temporelle pour pouvoir échanger les données entre les deux modèles. D'autre part, il est également fastidieux de construire une instantiation d'un modèle déjà existant, mais à une autre période.

Nous avons montré que la modélisation discrète pose problème, puisque le choix des périodes est dépendant de la modélisation. Ainsi, une gestion particulière dans le modèle est nécessaire pour que les périodes soient indépendantes de la modélisation discrète.

La modélisation discrète est traduite par des tableaux qui apportent peu de visiblité et nécessitent une attention approfondie pour en extraire les informations pertinentes.

En conclusion, la modélisation discrète n'est pas flexible puisqu'elle est restreinte sur un ensemble fini de valeurs, car les variables financières comme l'emprunt ou le remboursement sont liées à cet ensemble de valeurs. Cette modélisation permet une approximation moins bonne sur l'espace temps. Par conséquent, cette modélisation apporte moins d'informations financières sur les variables de ce modèle.

I.2.2 Objets mathématiques utilisés dans la modélisation discrète

Actuellement, les objets mathématiques impliqués dans les modèles discrets sont les suites et les séries. En simplifiant à l'extrême, à un instant n, l'état du système modélisé est représenté par un vecteur U_n, de dimension p a priori grande. L'état à l'instant $n+1$ est donné par une relation de récurrence du type

$$U_{n+1} = F(U_n), \tag{I.1}$$

$$U_{n+1} = F(U_n, U_{n-1}, \ldots, U_0). \tag{I.2}$$

Nous précisons que tous ces objets sont de même nature. Par conséquent, certains objets peuvent être calculés par des formules du type

$$W_n = \sum_{m=0}^{m=n} a_m U_m. \tag{I.3}$$

I.3 Solution à la problématique : la modélisation financière continue en temps

Dans la perspective de l'évolution des marchés, et pour la conquête de nouveaux segments de marché, il est pertinent de développer un outil de modélisation plus souple, n'impliquant pas la définition de la période en phase préliminaire. Par conséquent, il était nécessaire de concevoir un modèle performant permettant de pouvoir répondre à un besoin du marché. Nous appelons ce modèle "le modèle continu".

L'idée générale pour arriver à de tels objectifs est de développer une version continue des modèles financiers existants, puis de développer des méthodes de discrétisation temporelle de ces modèles. Les méthodes de discrétisation à explorer sont celles inspirées de l'analyse numérique des équations différentielles ordinaires, qui permettent de choisir un pas de temps presque quelconque.

La modélisation continue permet de réaliser une modélisation plus proche de la réalité en levant les contraintes de périodicité. Par conséquent, les variables d'une modélisation continue peuvent être évaluées selon n'importe quelle périodicité. En plus, la modélisation continue permet un passage d'une variable annuelle vers une variable mensuelle. La modélisation continue apporterait une réelle souplesse, puisqu'il serait possible d'utiliser des périodes plus petites qu'un mois, par exemple une semaine, un jour, une heure, etc.

La modélisation continue des données apporterait une vision par graphiques qui serait plus confortable et source de plus de souplesse pour le client.

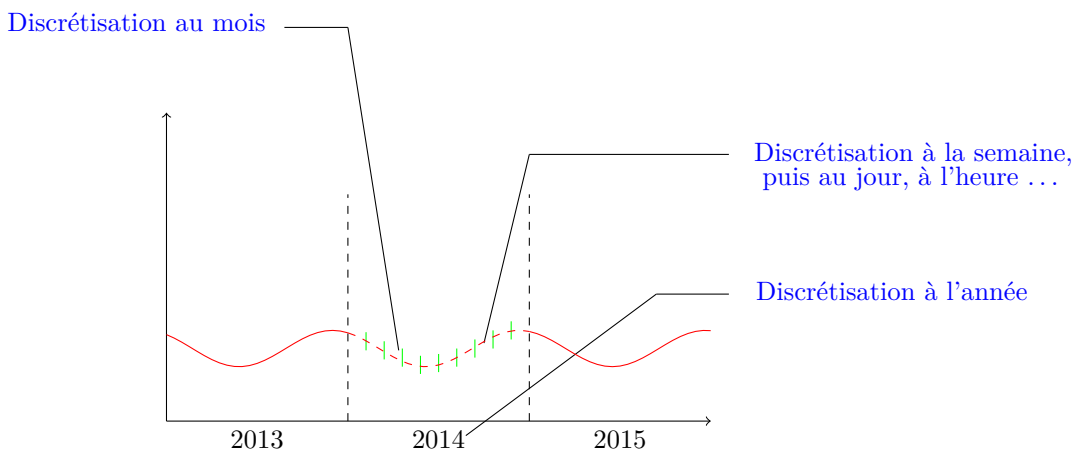

FIGURE I.4 – Illustration des possibilités de discrétisation qu'offre la modélisation continue.

I.3.1 Les tâches à effectuer pour construire un modèle financier continu en temps

Nous établissons plusieurs tâches pour construire un modèle financier continu en temps et ses instantiations à temps discret :

1. La première tâche consiste à établir les objets mathématiques qui seront utilisés dans la modélisation continue.

2. La deuxième tâche consiste à concevoir des niveaux des objets. Nous répartissons nos objets en deux niveaux. Nous appelons le premier niveau "le haut niveau" et nous appelons le deuxième niveau "le bas niveau". Nous avons construit le haut niveau pour une raison purement commercial. Ce qui signifie que les sommes des variables financières du modèle continu sont accessibles directement par les utilisateurs de SOFI. Nous avons construit le bas niveau pour qu'il soit utilisé par celui de haut niveau et qu'il soit encapsulé par les utilisateurs de SOFI.

   Nous instantions à temps continu nos objets du haut niveau et nous instantions à temps discret nos objets du bas niveau. Par conséquent, les objets du haut niveau peuvent utiliser ou pas ceux du bas niveau en fonction de la nature de ces objets. Par exemple, si nous voulons faire le produit de deux mesures dans le haut niveau, nous créons le même produit discret dans le bas niveau et nous le remontons dans le haut niveau afin qu'il soit utilisé. En revanche, les objets du bas niveau n'utilisent jamais ceux du haut niveau.

3. La troisième tâche consiste à choisir la durée d'observation minimale du modèle définie par la durée de la résolution temporelle minimale du modèle. Toutes les quantités financières du modèle seront moyennées sur une durée supérieure à cette durée d'observation minimale. Ainsi, les phénomènes ayant une durée inférieure à cette durée d'observation minimale ne pourront être ni distingués clairement ni observés finement. Seules leurs résultantes sur un intervalle de temps de longueur au moins égale à la durée de periodicité seront observables.

   En conséquence, cette durée d'observation minimale devra être sensiblement plus petite que la plus petite échelle à laquelle le modèle sera observé ou, dit autrement, sensiblement plus petite que la plus petite période à laquelle le modèle sera finalement instantié. (a priori, si le modèle doit être instantié à une période hebdomadaire, choisir le jour comme durée semble

raisonnable.)

4. La quatrième tâche consiste à répartir ces objets sur l'échelle associée à la durée. En effet, certains objets financiers ont une période définie : par exemple, un crédit peut être à remboursement mensuel ou annuel.

5. La cinquième tâche consiste à écrire les relations liant les quantités en jeu dans le modèle. Elles seront la traduction des relations déjà implémentées dans le modélisateur de SOFI.

6. La dernière tâche consiste à concevoir les méthodes de discrétisation temporelle du modèle continu qui aura été construit.

I.4 Un scénario de construction d'une cantine

Cette section est une partie commune avec le mansucrit de thèse [1]. En effet, nous avons écrit ce scénario de construction d'une cantine en collaboration avec MGDIS. Cette section relate l'histoire d'une municipalité fictive qui planifie le budget d'une restauration scolaire. De nouveaux quartiers résidentiels sont prévus dans la ville, les infrastructures doivent donc être adaptées à l'accroissement de la population. Une cantine pouvant accueillir plus d'élèves est nécessaire. La cantine actuelle étant éloignée des établissements scolaires, une nouvelle cantine doit être construite.

La planification de la restauration scolaire est réalisée par trois acteurs qui ont chacun une perspective différente. Les élus prennent des décisions politiques en tenant compte du budget. Le service scolaire planifie le budget de fonctionnement de la cantine. La direction des services techniques planifie le budget d'investissement de la construction de la nouvelle cantine.

La figure ci-dessous présente une vue d'ensemble du modèle utilisé au cours de ce scénario. Les flèches symbolisent l'impact du budget de construction sur le budget de fonctionnement.

I.4.1 La planification de l'investissement

La municipalité décide de la construction d'une nouvelle cantine pour remplacer l'existante. Le conseil municipal est réuni afin de décider de l'emplacement et de la capacité de la cantine. Les élus qui font partie du conseil municipal, demandent au service technique de leur proposer un budget d'investissement pour cette construction.

La planification du budget d'investissement de la construction d'une nouvelle cantine permet d'estimer les ressources nécessaires et l'impact sur le budget de fonctionnement du service de restauration communale.

I.4.1.1 L'établissement de la fiche d'opérations

La première étape de la planification de l'investissement consiste à établir la fiche des opérations en déterminant le coût de chaque opération de la construction. Les entreprises qui participent à la construction ne sont pas choisies directement. La collectivité passe par un appel d'offres afin de respecter la loi sur les marchés publics. La rédaction de l'appel d'offres est réalisée en collaboration avec un architecte et un maître d'œuvre. Les entreprises sont amenées à proposer plusieurs offres en fonction de l'efficacité énergétique visée.

Investissement Et Fonctionnement			
Investissement		**Fonctionnement**	
Dépense d'investissement	Recette d'investissement	Dépenses de fonctionnement	Recettes de fonctionnement
• Opérations en tranches	• Amortissement	• Services externes (cuisine ...)	• Participation des familles (tickets)
• Acquisition travaux	• Subventions d'investissement (État, CAF, Région, Département ...)	• Personnel	• Subventions de fonctionnement (CAF, conseil départemental)
• Remboursement de capital	• Recettes affectées (TVA)	• Consommations	• Participation à l'équilibre du budget général
	• Montant de l'emprunt	• Entretien	
		• Amortissement	
		• Intérêt de la dette	

FIGURE I.5 – La vue d'ensemble du budget d'investissement et de fonctionnement.

Après la date limite de soumission des offres, qui sont présentées aux élus décidant lesquelles retenir en concertation avec la direction des services techniques.

I.4.1.2 La recherche de subventions

Une fois le coût total des opérations connu, le service des finances commence la recherche de subventions. Il envoie des demandes de subventions pour la construction de la cantine à la Caisse d'Allocations Familiales, au conseil régional et au conseil départemental. Après négociations entre le maire et le département, le conseil départemental promet de subventionner 30% du coût de construction avec un plafond fixé à 100 000 €.

I.4.1.3 La recherche d'emprunt

Le conseil municipal délibère afin de déterminer le montant et la durée de l'emprunt. La durée de l'emprunt dépend de la durée d'amortissement de la construction de la cantine. Généralement, un bâtiment est amorti en 20 ou 30 ans (voir [2]). Le service des finances contacte plusieurs banques et retient la banque qui propose la meilleure offre.

I.4.1.4 La planification physique

La planification physique consiste à placer dans le temps les opérations de construction. La durée de chaque opération est définie dans les réponses aux appels d'offres. Le service technique et celui des finances se concertent pour planifier les dates des opérations.

I.4.1.5 Le choix de l'investissement de construction de la nouvelle cantine

I.4.1.5.1 Les deux solutions à départager

Le conseil municipal se réunit afin de décider de l'appel d'offres à retenir. Les réponses au lot

de l'isolation ainsi que celui du chauffage ciblent plusieurs catégories d'efficacité énergétique. Pour chacun de ces lots, deux réponses sont plus intéressantes que les autres sans qu'il soit possible de les départager facilement, car l'une nécessite un investissement financier moindre alors que l'autre possède une efficacité énergétique plus importante. L'électorat de la municipalité n'étant dans notre cas d'étude pas particulièrement préoccupé par l'écologie, seul l'aspect financier jouera sur la décision de retenir l'une des deux solutions (en fonction ou non d'un retour sur investissement démontré d'une meilleure efficacité énergétique).

Construire une cantine possédant une meilleure efficacité énergétique permettrait de réduire les dépenses de consommation d'énergie. Cependant, le coût de la construction serait plus élevé et ceci entraînerait une augmentation de l'amortissement et des intérêts. Les dépenses de consommation énergétique, l'amortissement ainsi que les intérêts font partie des dépenses de fonctionnement. La réduction d'une dépense entraîne l'augmentation d'une autre, et inversement. C'est pourquoi il n'est pas évident d'estimer laquelle des deux solutions est au final la plus avantageuse financièrement.

I.4.1.5.2 La recherche des équilibres

Le service financier apporte son expertise du domaine de la planification financière afin de permettre au conseil municipal de faire un choix. L'objectif est d'établir un équilibre financier pour les deux réponses d'appel d'offres. Pour réaliser l'équilibre du budget de fonctionnement, le conseil municipal peut décider d'augmenter sa participation financière au fonctionnement de la cantine. Cependant, il existe d'autres leviers qui permettent aux élus de réaliser l'équilibre : le prix des tickets de cantine ainsi que la durée d'amortissement.

Le prix des tickets de cantine peut être augmenté dans l'objectif de générer davantage de recettes. Néanmoins, l'augmentation du prix des tickets peut réduire la fréquentation des élèves et atténuer l'effet bénéfique sur l'équilibre. La durée d'amortissement est choisie en fonction de la durée de vie du bâtiment. Une estimation optimale de la durée de vie du bâtiment permet de réduire la valeur annuelle de l'amortissement. Par contre, plus l'amortissement est long, plus l'emprunt sera long également, et plus les intérêts augmentent. Une fois l'amortissement déclaré, la durée d'amortissement ne peut pas être reprogrammée.

Les dépenses liées aux opérations de construction du budget d'investissement sont amorties sur le budget de fonctionnement. De plus, l'emprunt contracté pour financer ces dépenses génère des intérêts qui font partie des dépenses de fonctionnement. Le budget de fonctionnement doit être équilibré en prenant en compte l'amortissement des opérations ainsi que le paiement des intérêts.

I.4.1.5.3 La décision du conseil

Deux planifications financières sont réalisées : l'une pour la solution à faible investissement et l'autre pour la solution à forte efficacité énergétique. Leurs budgets de fonctionnement sont ajustés au niveau des leviers présentés dans les paragraphes précédents jusqu'à ce qu'un compromis satisfaisant soit atteint avec un budget équilibré. Ces deux planifications financières montrent que la solution à forte efficacité énergétique est plus intéressante financièrement à partir de dix ans de fonctionnement.

Le conseil municipal décide d'augmenter sa participation financière les premières années afin de réduire la participation globale sur plusieurs dizaines d'années. Cette décision est en adéquation avec le plan de réduction des dépenses publiques promis lors des précédentes élections municipales.

I.4.1.5.4 La nécessité d'une aide à la décision

Comme cela a été vu dans les paragraphes précédents, les choix de construction concernant l'efficacité énergétique du bâtiment impactent la programmation physique et donc le budget d'investissement de la construction de la cantine au niveau des dépenses des opérations, de leur amortissement ainsi que de l'emprunt. L'amortissement et les intérêts de l'emprunt font partie des dépenses dans le budget de fonctionnement. L'augmentation de ces dépenses est nuancée par rapport aux économies réalisées sur les dépenses de consommation énergétique.

L'impact des choix concernant les opérations de construction doit être évalué sur le budget afin de pouvoir prendre une décision. Cette évaluation doit être rapide afin d'aboutir à une solution la plus avantageuse possible par rapport aux objectifs de la municipalité. En effet, plus les options envisagées sont nombreuses, moins il y a de risques de passer à côté d'une solution intéressante.

I.4.2 Le suivi du budget d'investissement

I.4.2.1 La construction du bâtiment

Nous nous référons le document [3] pour cette sous-sous-section. La construction du bâtiment de la nouvelle cantine est prévue pour se dérouler entre le 1er octobre 2015 et le 1er mars 2016. La construction du bâtiment est décomposée en plusieurs opérations. Pour simplifier le cas d'étude, ces opérations sont limitées à la maçonnerie, à l'isolation, au chauffage. Chacune de ces 3 opérations est amortie indépendamment à la fin de sa réalisation. L'opération de maçonnerie est prévue entre le 1er octobre 2015 et le 1er janvier 2016. L'échelonnage du paiement est prévu en trois paiements :

— paiement du premier tiers de la construction du bâtiment le 1er novembre 2015

— paiement du deuxième tiers de la construction du bâtiment le 1er décembre 2015

— paiement du dernier tiers de la construction du bâtiment le 1er janvier 2016

L'opération d'isolation est prévue entre le 1er janvier 2016 et le 15 février 2016. Elle est payée en deux fois :

— paiement de la première moitié de la construction du bâtiment le 8 février 2016

— paiement de la deuxième moitié de la construction du bâtiment le 15 février 2016

L'opération de chauffage est prévue entre 15 février 2016 et 1er mars 2016. Elle est payée à la fin des travaux.

I.4.2.1.1 Le retard dans la construction du bâtiment pour cause d'intempéries

Le 6 novembre 2015, le maître d'œuvre prévient le service financier que la construction du bâtiment va être retardée de 15 jours pour cause d'intempéries. Les tranches de la programmation physique doivent être décalées pour prendre en compte ce retard. Ceci impacte également la programmation financière, et ce aussi bien au niveau de l'investissement que du fonctionnement. En effet, les subventions, les paiements des travaux et les amortissements sont décalés en conséquence. Il est possible que cela entraîne un report de l'ouverture de la cantine. La direction du service technique, le service scolaire ainsi que les élus se concertent donc pour prendre en compte cet imprévu.

I.4.2.1.2 Le retard dans la construction du bâtiment ne respectant pas le contrat

La construction du bâtiment prend trois mois de retard pour des raisons injustifiées. Le contrat permet jusqu'à deux mois de retard avec des pénalités. La municipalité hésite à engager des poursuites. Un procès coûte cher. Elle doit être sûre d'avoir assez de trésorerie pour le mener à terme. Le budget futur doit être connu avant de prendre une décision, or cet imprévu nécessite de revoir celui-ci. La municipalité a donc besoin d'obtenir rapidement une nouvelle prévision dans laquelle elle peut avoir confiance.

I.4.2.2 Les subventions

Le conseil départemental subventionne la construction de la cantine en trois versements :

— à 20% de l'avancement des travaux qui est prévu le 14 novembre 2015

— à 40% de l'avancement des travaux qui est prévu le 13 décembre 2015

— à 60% de l'avancement des travaux qui est prévu le 15 janvier 2016

Le deuxième versement de la subvention de la construction de la cantine par le conseil départemental qui devait avoir lieu en fin d'année n'est pas reçu à la date prévue. Le service financier estime que ce versement devrait avoir lieu le mois suivant. Le service des finances négocie une ligne de trésorerie avec la banque.

L'emprunt génère des intérêts à rembourser qui s'ajoutent aux dépenses de fonctionnement. Le budget de fonctionnement doit être équilibré afin de compenser cette nouvelle dépense. Afin de rétablir l'équilibre du budget de fonctionnement, des économies sont réalisées sur les repas servis au cours du mois.

I.4.3 Le suivi du budget de fonctionnement

I.4.3.1 Le paiement par les familles

Le paiement des repas est effectué par la vente de tickets. Les parents n'ont pas tous la même stratégie pour acheter les tickets de cantine. Certains achètent beaucoup de tickets à l'avance alors que d'autres achètent les billets plus fréquemment. La répartition des achats de tickets est à peu près similaire d'une année sur l'autre. Dans notre exemple, cette répartition possède un pic en début d'année scolaire, puis est répartie en fonction de l'affluence. Les tickets achetés en début d'année représentent un surplus de trésorerie important. Ce surplus permet de réduire les emprunts contractés pour la construction.

I.4.3.2 La gestion des repas

Les dépenses liées à l'achat d'aliments varient au cours de l'année pour plusieurs raisons :

— le prix des fruits et des légumes varie en fonction des saisons,

— les commandes sont interrompues pendant les vacances,

— les commandes sont réduites les semaines contenant un ou plusieurs jours fériés.

De plus, une incertitude s'ajoute concernant le paiement des fournisseurs au niveau du délai d'encaissement des chèques. Le Grenelle de l'environnement recommande aux restaurations collectives de composer leurs repas avec 20% d'aliments biologiques. Comme le respect des directives du Grenelle de l'environnement fait partie des promesses électorales du maire, le gestionnaire de la cantine tient compte de cette contrainte. Partant du constat que les aliments biologiques sont moins chers le printemps que l'hiver, il décide de servir des repas sans aliments biologiques l'hiver et de compenser en proposant davantage d'aliments biologiques au printemps. Nous nous référons l'exemple de répartition du bio dans [4]. Par conséquent, le gestionnaire de la cantine choisit cette répartition :

— de septembre à décembre, aucune composante bio ;

— de décembre à mars, deux composantes bio ;

— de mars à juin, une seule composante bio.

I.4.3.3 Les subventions de la CAF au fonctionnement

Chaque mois, la CAF subventionne la cantine d'un montant de 4 000 €.

I.4.3.4 Le bilan financier

Le bilan financier est établi à la fin de chaque année. Dans le cas où le suivi n'a pas été réalisé correctement, les évènements imprévus ont entraîné des coûts supplémentaires qui n'ont pas été équilibrés par des mesures de réduction de dépenses. Le gestionnaire de la cantine doit demander une participation supplémentaire à la mairie pour équilibrer son budget.

I.4.3.5 Ouverture de la nouvelle cantine

Le 27 mars 2016, la nouvelle cantine est ouverte. Cette nouvelle cantine a une efficacité énergétique plus avantageuse que l'ancienne. Son ouverture permet de réduire les dépenses de fonctionnement. Ainsi, la participation de la municipalité peut être réduite.

Bibliographie

[1] Davy Helard : *Un métamodèle de calcul en temps continu pour les systèmes d'aide à la décision appliqués à la planification financière*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 11/2015.

[2] Fiche n° 8. les emprunts. `www.lagazettedescommunes.com`.

[3] Projet de construction d'une cantine scolaire. Rapport technique, GROUPEMENT DE MAITRE D'ŒUVRE, 2009.

[4] Budgets : un surcoût certain, maîtrisable et assumé. `www.lagazettedescommunes.com`.

[5] Guide sofi analyse financière et programmation. Rapport technique, MGDIS, 2010.

[6] Sofi e-programmation approche epci. Rapport technique, MGDIS, 2008.

[7] Sofi programmation financière. Rapport technique, MGDIS, 2008.

[8] Anne-Hermine Allain : Modélisation mathématique d'une vue théorique de l'évaluation continue. Mémoire de D.E.A., Institut Polytechnique de Grenoble ENSIMAG, Grenoble, France, Août 2012. Rapport de stage de première année.

[9] Sofi programmation financière. `www.mgdis.fr`.

[10] Guide de la restauration scolaire-cahier des charges. Rapport technique, FNOGEC, Juin 2008.

II Les objets mathématiques du modèle financier continu en temps

Sommaire

II.1 Rappel mathématique 28

II.1.1 Rappel de la définition d'une mesure 28

II.1.2 Rappels de certains résultats concernant les mesures 29

II.1.3 Enveloppe convexe du support d'une mesure 31

II.1.3.1 Support d'une mesure 31

II.1.3.2 Enveloppe convexe du support d'une mesure 32

II.1.3.2.1 Premier exemple 32

II.1.3.2.2 Deuxième exemple 32

II.2 Les objets mathématiques qui seront utilisés dans la modélisation continue 33

II.3 Choix numériques du modèle financier continu en temps 35

Bibliographie 37

Résumé. Nous rappelons dans ce chapitre certains éléments de la théorie de la mesure et certains résultats concernant les mesures qui sont nécessaires dans la modélisation continue. Ensuite, nous établissons les objets mathématiques de plusieurs natures qui sont des mesures et des champs. Nous précisons que parmi ces mesures, nous avons une mesure à densité dont la densité est une fonction continue par morceaux à support compact avec un nombre fini de morceaux et une mesure de Dirac.

Nous avons créé le modèle financier continu en temps qui s'appuie sur la théorie de la mesure. C'est-à-dire, nous avons créé des mesures et des champs. Pour cela, nous allons expliquer leurs utilisations dans notre modélisation. Nous allons exposer les choix numériques sur la mesure de Dirac afin de montrer la cohérence du modèle financier continu en temps. Nous applelons ces choix numériques nos objectifs du modèle.

II.1 Rappel mathématique

II.1.1 Rappel de la définition d'une mesure

Nous allons maintenant rappeler le sens mathématique précis de la notion de mesure pour justifier pourquoi des quantités financières comme l'emprunt et le remboursement sont représentées par des mesures. Dans tout ce chapitre, nous considérons un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$ qui est définie par un ensemble de parties de E vérifiant : $\mathcal{E}$ n'est pas vide, $\mathcal{E}$ est stable par union dénombrable et par passage au complémentaire.

On appelle espace mesurable le couple $(E, \mathcal{E})$, sur cet espace mesurable. Si $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable, on appelle une application σ-additive, une application μ définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant : si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties de E appartenant à $\mathcal{E}$, et si ces parties sont deux-à-deux disjointes (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), alors l'application μ de l'union de toutes les parties $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est égale à la somme des applications μ des parties $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k). \tag{II.1}$$

Nous allons maintenant définir une mesure ν sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Une application ν définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, est appelée "mesure" lorsque les deux propriétés suivantes sont satisfaites : la mesure ν de l'ensemble vide est nulle, ν est σ-additive.

On appelle "mesure finie", une mesure μ sur $\mathcal{E}$ telle que $\mu(E) < \infty$. Cela permet de définir une mesure signée m comme la différence de deux mesures finies : $m = \mu_+ - \mu_-$.

Une mesure peut avoir une valeur non finie. En effet, le fait que $\mu(A)$ puisse être infinie pour certains $A \in \mathcal{E}$ est indispensable pour les applications. On cite, parmi ces applications, le fait d'intégrer des fonctions sur des ensembles de mesure infinie ou d'intégrer des fonctions pouvant naturellement prendre une valeur infinie en certains points. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et si μ représente la mesure de longueur, $\mu(\mathbb{R})$ (qui est la "longueur totale" de $\mathbb{R}$) vaut $+\infty$.

La notion de mesure permet de construire une théorie de l'intégration. La notion de σ-additive est essentielle pour cette construction afin de permettre de définir une notion satisfaisante d'inté-

grale par rapport à ces mesures σ-additives.

On rappelle la définition d'un sous-ensemble des mesures qui s'appelle mesures σ-finies. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une mesure μ sur $(E, \mathcal{E})$ est dite σ-finie, lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de E par des sous-ensembles de mesure finie, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telle que :

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < \infty. \tag{II.2}$$

II.1.2 Rappels de certains résultats concernant les mesures

Nous avons rappelé, dans la sous-section précédente, certains éléments de la théorie de la mesure. Nous allons rappeler dans cette sous-section certains résultats concernant les mesures (voir [1], [2], [3], [4]) qui sont nécessaires pour justifier nos objectifs, que nous allons développer dans la section II.3. Nous allons justifier notre objectif concernant la mesure de Dirac. Pour cela, nous allons rappeler la notion de mesure de Radon (voir section 2.D dans [2]), ensuite, nous allons rappeler qu'une mesure de Radon agit sur l'ensemble des fonctions continues. En outre, nous allons justifier notre objectif concernant les mesures absolument continues qui font parties des mesures de notre modélisation. Pour cela, nous allons rappeler la définition d'une mesure à densité et la définition d'une mesure absolument continue, et rappeler le Théorème RADON-NIKODYM (voir [1], [3], [4]).

Si X est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, nous définissons $\mathcal{C}_c(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles et à support inclus dans X. Nous munissons l'espace $\mathcal{C}_c(X)$ de la norme L^∞ définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c(X), \|\phi\|_{L^\infty(X)} = \sup_{x\in X} |\phi(x)|, \tag{II.3}$$

afin que cet espace $\mathcal{C}_c(X)$ soit un espace de Banach. On appelle "mesure de Radon" toute forme linéaire continue T_R sur $\mathcal{C}_c(X)$. En d'autres termes, $T_R : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{R}$ est linéaire et s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c(X), \quad |T_R(\phi)| \leq C \|\phi\|_{L^\infty(X)}. \tag{II.4}$$

On appelle "mesure de Radon positive" sur X une forme linéaire T_R sur $\mathcal{C}_c(X)$ qui satisfait la relation de positivité

$$\phi \in \mathcal{C}_c(X), \phi \geq 0 \Rightarrow T_R(\phi) \geq 0. \tag{II.5}$$

Nous rappelons qu'une mesure de Radon positive est une mesure de Radon, et nous allons montrer ce résultat. Pour cela, il faut considérer une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c(X)$. On introduit les fonctions suivantes :

$$\psi_1 = \|\phi\|_{L^\infty(X)} - \phi, \psi_2 = \|\phi\|_{L^\infty(X)} + \phi. \tag{II.6}$$

Par définition (II.3) de la norme L^∞

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c(X), |\phi| \leq \|\phi\|_{L^\infty(X)}, \tag{II.7}$$

ce qui montre que les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont positives

$$\psi_1 \geq 0, \psi_2 \geq 0. \tag{II.8}$$

À partir de l'inégalité (II.8), on utilise la relation (II.5) pour obtenir $T_R(\psi_1) \geq 0$ et $T_R(\psi_2) \geq 0$. Ensuite, on applique la forme linéaire T_R aux fonctions ψ_1 et ψ_2 pour obtenir :

$$T_R(\phi) \leq \|\phi\|_{L^\infty(X)}, -\|\phi\|_{L^\infty(X)} \leq T_R(\phi). \tag{II.9}$$

Par conséquent, on a :

$$|T_R(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty(X)}. \tag{II.10}$$

Ce qui prouve que T_R est une "mesure de Radon" d'après la définition (II.4).

$\Diamond$

On note $\mathcal{M}(X)$ l'espace vectoriel des mesures de Radon sur X. C'est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme duale

$$\|T_R\|_{\mathcal{M}(X)} = \sup_{\phi \neq 0, \phi \in \mathcal{C}_c(X)} \left\{ \frac{|T_R(\phi)|}{\|\phi\|_{L^\infty(X)}} \right\}. \tag{II.11}$$

On rappelle que l'espace $\mathcal{M}(X)$ est le dual de l'espace $\mathcal{C}_c(X)$. Pour insister sur ces aspects de dualité, et pour simplifier les notations de ce chapitre, le crochet de dualité $< \mu, f >$ sera utilisé pour représenter l'intégration d'une fonction continue $f \in \mathcal{C}_c(X)$ par une mesure de Radon μ sur le domaine X. Le crochet de dualité est donné par l'application de $\mathcal{M}(X) \times \mathcal{C}_c(X)$

$$(\lambda, f) \rightarrow < \lambda, f > = \int_X f(x)\, d\lambda(x). \tag{II.12}$$

La norme duale donnée dans la relation (II.11) permet de munir l'espace $\mathcal{M}(X)$ d'une topologie forte. Cette topologie forte engendre une notion de convergence forte qui consiste à dire qu'une suite de mesures de Radon (μ_n) converge fortement vers μ si

$$\|\mu_n - \mu\|_{\mathcal{M}(X)} \rightarrow 0. \tag{II.13}$$

L'espace $\mathcal{M}(X)$ est muni aussi de la topologie faible-$\star$. Cette topologie faible-$\star$ est définie comme la topologie la moins fine sur l'espace $\mathcal{M}(X)$ rendant les applications $\mu \rightarrow < \mu, f >$ continues, pour toute fonction f dans l'espace $\mathcal{C}_c(X)$. Par conséquent, le fait de munir l'espace $\mathcal{M}(X)$ de la topologie forte nous permet d'avoir aussi la topologie faible-$\star$.

Pour rappeler le contenu du Théorème de RADON-NIKODYM, nous avons besoin de rappeler les deux définitions suivantes pour deux mesures ν et μ définies sur $(E, \mathcal{E})$. La première définition consiste à dire qu'une mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure μ, et on note $\nu << \mu$, si

$$\forall A \in \mathcal{E} \;\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0. \tag{II.14}$$

La deuxième définition est la définition d'une mesure à densité. On définit une nouvelle mesure ν à densité par rapport à μ, s'il existe une fonction mesurable positive g telle que la mesure ν s'écrit

sous la forme $g.\mu$.

On rappelle maintenant le contenu du Théorème de RADON-NIKODYM (voir le théorème $F.1$ de [4]) qui établit un lien entre la notion d'une mesure absolument continue et une mesure à densité. Soient ν et μ deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$. Si ν et μ sont σ-finies, et si $\nu << \mu$, alors ν est une mesure à densité par rapport à μ. Il existe alors une fonction mesurable positive g appelée la densité de RADON-NIKODYM de ν par rapport à μ vérifiant $\nu = g.\mu$.

Nous allons rappeler la définition d'une tribu Borélienne pour rappeler la définition de quelques mesures sur cette tribu, qui sont la mesure de Dirac et celle de Lebesgue. Soit Y un espace topologique. On appelle tribu Borélienne la tribu engendrée par les ouverts (ou les fermés) de Y, on la note $\mathcal{B}_Y$. On munit Y de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}_Y$. Si $Y = \mathbb{R}$, la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles, car tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts. Une mesure Borélienne de Y est la donnée d'une application $\mu : \mathcal{B}_Y \to \overline{\mathbb{R}_+}$ qui est σ-additive.

Le modèle financier continu en temps possède des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour des questions de modélisation, nous rappelons la définition de la mesure de Lebesgue. Il existe une unique mesure sur la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, appelée la mesure de Lebesgue notée $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ vérifiant pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$

$$\lambda_{\text{Lebesgue}}([a, b]) = b - a. \tag{II.15}$$

Dans notre modélisation, nous n'avons pas pris de restriction sur les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue que nous disposons.

II.1.3 Enveloppe convexe du support d'une mesure

La notion de support d'une mesure est importante en particulier pour les mesures à support compact. Nous avons besoin de calculer l'enveloppe convexe du support d'une mesure pour extraire l'information utile de cette mesure. Cette information nous permet de calculer numériquement le produit de convolution. En effet, pour que le produit de convolution de deux mesures soit calculé rapidement au moyen de la transformée de Fourier rapide, cela nécessite que ces deux mesures soient à support compact.

II.1.3.1 Support d'une mesure

Pour rappeler la définition d'enveloppe convexe du support d'une fonction, on rappelle la définition de support d'une fonction. Soit f une fonction continue à valeurs réelles, définie sur un espace topologique I. Le support de la fonction f noté $\text{Supp}(f)$ est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction f ne s'annule pas :

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in I, f(x) \neq 0\}}. \tag{II.16}$$

On peut étendre la définition précédente du support d'une fonction pour définir de façon générale le support d'une mesure quelconque. On considère une mesure $\tilde{f}$ définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Le support de la mesure $\tilde{f}$ noté $\text{Supp}(\tilde{f})$ est le complémentaire dans E du plus grand ouvert ω de E tel que la restriction de $\tilde{f}$ à ω soit nulle : $\tilde{f}_{|\omega} = 0$. Il y a cohérence entre la notion de support établie par la théorie des fonctions et celle issue de la théorie des mesures. Soit $a \in \mathbb{R}$, à titre d'exemple le support d'une mesure de Dirac δ_a au point a de masse 1 est le singleton $\{a\}$:

$$\text{Supp}(\delta_a) = \{a\}. \tag{II.17}$$

II.1.3.2 Enveloppe convexe du support d'une mesure

Rappelons maintenant la notion d'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$, notée EC(S), est le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$ qui contienne S. Par conséquent, l'enveloppe convexe du support d'une mesure est le plus petit intervalle fermé qui contient le support.

Nous allons développer un exemple pour valider le résultat de l'enveloppe convexe du support de certaines mesures dans quelques exemples de notre modélisation. Cet exemple consiste à calculer l'enveloppe convexe du support d'une mesure $\tilde{f}$, quand le support de la mesure $\tilde{f}$ est une union finie d'intervalle fermé $([a_i, b_i])_{0\leq i\leq n}$ qui sont disjoints deux-à-deux, où n est un entier. On précise que chaque intervalle $[a_i, b_i]$ peut se réduire à un singleton non vide

$$\mathrm{Supp}(\tilde{f}) = \bigcup_{i=0}^{n} \{x \in [a_i, b_i], a_i \leq b_i, f(x) \neq 0\}, \tag{II.18}$$

alors l'enveloppe convexe du support de la mesure $\tilde{f}$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f})) = [\min_{0\leq i\leq n} a_i, \max_{0\leq i\leq n} b_i]. \tag{II.19}$$

Par hypothèse (II.18) du support de la mesure $\tilde{f}$, nous allons montrer l'égalité (II.19). Nous rappelons que l'enveloppe convexe d'un ensemble de points S est la frontière du plus petit domaine convexe contenant tous les points de l'ensemble S. Par hypothèse (II.18), les frontières du domaine $\mathrm{Supp}(\tilde{f})$ sont $\min_{0\leq i\leq n} \{a_i\}$ et $\max_{0\leq i\leq n} \{b_i\}$ qui regroupent l'ensemble des points du domaine $\mathrm{Supp}(\tilde{f})$. Ce qui prouve l'égalité (II.19).

Nous allons donner deux exemples avec pour objectif de déterminer l'enveloppe convexe du support d'une mesure :

II.1.3.2.1 Premier exemple

Notre premier exemple consiste à déterminer l'enveloppe convexe du support d'une mesure $\tilde{f}$ à densité dont la densité f est une fonction dans l'espace $\mathcal{C}_c(X)$. Nous définissons le point a de X, le point qui est associé à la valeur minimale où la fonction f ne s'annule pas. Nous définissons le point b de X, le point qui est associé à la valeur maximale où la fonction f ne s'annule pas. L'enveloppe convexe $\mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f}))$ est l'intervalle $[a, b]$.

II.1.3.2.2 Deuxième exemple

Soient m_1 et m_2 deux réels et soient p_1 et p_2 deux décimaux avec $p_1 \leq p_2$. Nous considérons deux mesures M_1 et M_2. La première mesure $M_1 = m_1\delta_{p_1}$ est une mesure de Dirac au point p_1 de masse m_1. La deuxième mesure $M_2 = m_2\delta_{p_2}$ est une mesure de Dirac au point p_2 de masse m_2. Le 2e exemple consiste à déterminer l'enveloppe convexe du support d'une mesure $\tilde{f}$ qui est la somme des deux mesures de Dirac M_1 et M_2

$$\tilde{f} = M_1 + M_2.$$

Nous distinguons 4 cas possibles pour déterminer le support $\mathrm{Supp}(\tilde{f})$ de la mesure $\tilde{f}$ et l'enveloppe convexe du support $\mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f}))$ de la mesure $\tilde{f}$ en fonction des réels m_1 et m_2 :

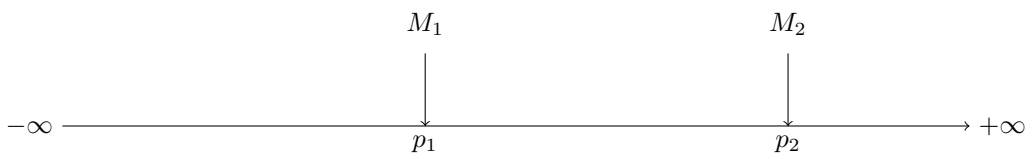

FIGURE II.1 – La mesure $\tilde{f}$ est la somme de deux mesures de Dirac M_1 et M_2.

<u>1er cas : $m_1 = 0, m_2 = 0$</u>

Si les deux masses m_1 et m_2 sont nulles, la mesure $\tilde{f}$ est la mesure nulle. Par conséquent, le support et l'enveloppe convexe du support de la mesure $\tilde{f}$ est l'ensemble vide

$$\mathrm{Supp}(\tilde{f}) = \mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f})) = \emptyset. \tag{II.20}$$

<u>2e cas : $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$</u>

Si les deux masses m_1 et m_2 sont non nulles, le support de la mesure $\tilde{f}$ est l'union de support des deux mesures M_1 et M_2. Par conséquent, l'enveloppe convexe du support de la mesure $\tilde{f}$ est l'intervalle $[p_1, p_2]$ en utilisant la relation (II.19)

$$\mathrm{Supp}(\tilde{f}) = \{p_1\} \cup \{p_2\}, \mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f})) = [p_1, p_2]. \tag{II.21}$$

<u>3e cas : $m_1 = 0$, $m_2 \neq 0$</u>

Si la masse m_1 est nulle, la mesure $\tilde{f}$ est égale à la mesure de Dirac M_2. Par conséquent, le support et l'enveloppe convexe du support de la mesure $\tilde{f}$ est le singleton $\{p_2\}$

$$\mathrm{Supp}(\tilde{f}) = \mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f})) = \{p_2\}. \tag{II.22}$$

<u>4e cas : $m_1 \neq 0$, $m_2 = 0$</u>

Si la masse m_2 est nulle, la mesure $\tilde{f}$ est égale à la mesure de Dirac M_1. Par conséquent, le support et l'enveloppe convexe du support de la mesure $\tilde{f}$ est le singleton $\{p_1\}$

$$\mathrm{Supp}(\tilde{f}) = \mathrm{EC}(\mathrm{Supp}(\tilde{f})) = \{p_1\}. \tag{II.23}$$

II.2 Les objets mathématiques qui seront utilisés dans la modélisation continue

Le premier travail de réflexion à mener sera d'établir la liste des objets financiers à manipuler et, selon leur nature intrinsèque, de choisir la nature des objets mathématiques qui les représenteront le mieux.

Nous allons expliquer maintenant pourquoi des variables financières de notre modèle continu sont représentées par des mesures. D'une manière générale, la notion de mesure est une extension naturelle des concepts de longueur, de surface et de volume. Pour associer des grandeurs financières aux sommes sur un intervalle de temps, nous faisons correspondre une mesure à cet intervalle de

temps. Cette mesure doit vérifier des propriétés mathématiques que nous avons décrit dans la sous-section II.1.1.

Si μ est une mesure sur un intervalle de temps $[t_i, t_f]$, la valeur de la mesure $\mu([t_i, t_f])$ est une somme. Plus précisément, nous avons utilisé des mesures comme la mesure d'emprunt pour calculer la somme empruntée pendant un intervalle de temps. Pour cela, nous allons donner un exemple pour montrer cette utilisation d'une mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$. Cet exemple a pour objectif de montrer que la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est associée à une somme par la mesure μ sur l'intervalle $[t_i, t_f]$. Nous pouvons présenter la valeur de la mesure μ sur l'intervalle $[t_i, t_f]$ par la quantité

$$\mu([t_i, t_f]) = \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\kappa}_E, \tag{II.24}$$

qui est la somme empruntée pendant la période $[t_i, t_f]$. En effet, si nous intégrons la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ sur l'intervalle $[t_i, t_f]$, nous obtenons la somme empruntée pendant cette période $[t_i, t_f]$.

Nous allons expliquer pourquoi des variables financières de notre modèle sont représentées par des mesures de Dirac. Comme nous disposons par exemple d'une somme empruntée à un instant donné, nous avons créé un objet de type mesure de Dirac pour représenter une grandeur financière comme un emprunt dont la somme empruntée l'est à un instant donné. Si p est un point réel, nous définissons une mesure de Dirac δ_p localisée au point p, de masse M sur une tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \delta_p(A) = \begin{cases} \mathrm{M} & \text{si } p \in A, \\ 0 & \text{si } p \notin A. \end{cases} \tag{II.25}$$

où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu Borélienne définie dans la sous-section II.1.2. Cette définition nous montre que si $p \in [t_i, t_f[$, la somme empruntée pendant la période de temps $[t_i, t_f[$ est la masse M

$$\int_{t_i}^{t_f} \delta_p = M. \tag{II.26}$$

Si $p \notin [t_i, t_f[$, la somme empruntée pendant la période de temps $[t_i, t_f[$ est nulle

$$\int_{t_i}^{t_f} \delta_p = 0. \tag{II.27}$$

Nous allons expliquer dans la section II.3 pourquoi l'intervalle de temps $[t_i, t_f[$ doit être ouvert du point t_f pour satisfaire la relation (II.26).

Parmi les mesures, nous avons créé des mesures à densité dont la densité est une fonction continue par morceaux à support compact avec un nombre fini de morceaux pour représenter des grandeurs financières comme des emprunts. Soit une fonction f constante sur un intervalle $[a, b]$ et nulle ailleurs, et soit une mesure d'emprunt à densité $\tilde{f}$ dont la densité est la fonction f. Nous allons expliquer maintenant l'utilisation de la mesure à densité $\tilde{f}$ dans notre modélisation. La mesure $\tilde{f}$ signifie que nous n'avons pas commencé d'emprunter avant l'instant a, que nous avons emprunté uniformément pendant l'intervalle de temps $[a, b]$, et que nous avons fini d'emprunter à partir de l'instant b. La somme empruntée pendant la période de temps $[t_i, t_f] \subset [a, b]$ est la quantité

$$\int_{t_i}^{t_f} f(x)\, d\lambda_{\text{Lebesgue}}, \tag{II.28}$$

où $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ est la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ définie dans la relation (II.15).

Nous allons expliquer maintenant pourquoi des variables financières de notre modèle sont représentées par des champs. En effet, nous avons défini un champ dans notre modélisation pour associer aux instants de nos variables financières, des sommes.

Un champ dans notre modélisation est défini par une fonction continue par morceaux, continue par valeur supérieure. Nous rappelons que le capital restant dû est la somme du capital restant à rembourser par un emprunteur à son créancier. Pour cela, nous avons utilisé des champs comme le capital restant dû pour calculer la somme du capital restant à rembourser à un instant donné.

En conclusion, le taux d'un emprunt, le capital restant dû ou un capital sont des champs. Une mensualité ou une annuité à rembourser dans le cadre d'un emprunt est associée à une densité. Cette densité est la somme de la densité d'intérêts et de l'opposé de la vitesse de variation du capital restant dû dans le cadre de l'emprunt. La mensualité ou l'annuité en tant que telle est calculée en intégrant cette densité sur une période d'un mois ou d'un an.

II.3 Choix numériques du modèle financier continu en temps

Nous avons rappelé, dans le chapitre I, le modèle financier existant qui est le modèle financier discret pour montrer ce que nous avons créé afin de passer au modèle financier continu en temps. Un outil logiciel basé sur un modèle financier discret de planification financière pluriannuelle est conçu et commercialisé par la société MGDIS. Cet outil logiciel est destiné aux institutions publiques comme des collectivités territoriales et permet d'élaborer un budget pluriannuel. Le défaut de cet outil logiciel est qu'il utilise des tableaux. Par conséquent, il n'est pas flexible et est restreint sur un ensemble fini de valeurs.

Il était nécessaire de concevoir un modèle performant permettant de pouvoir répondre à un besoin du marché. Nous appelons ce modèle "le modèle financier continu en temps".

Le modèle financier continu en temps s'appuie sur la théorie de la mesure. Nous avons créé des mesures et des champs. Pour cela, nous allons expliquer leurs utilisations dans notre modélisation afin de montrer la cohérence du modèle financier continu en temps.

Nous allons maintenant exposer nos objectifs concernant la mesure de Dirac, qui sont nécessaires pour notre modélisation. Si ϕ est une fonction régulière, continue en un point donné p, alors la mesure de Dirac δ_p de masse 1 au point p agit sur la fonction ϕ. La valeur de cette action est $\phi(p)$. On rappelle qu'une mesure de Dirac est un objet agissant de manière linéaire et continue sur l'ensemble des fonctions régulières à support compact. Nous allons exposer nos objectifs dans cette section concernant la mesure de Dirac. Notre 1er objectif est de maintenir cette action dans notre modélisation. Plus précisément, notre objectif est de faire agir une mesure de Dirac sur l'ensemble des champs.

Nous allons maintenant expliquer le choix que nous avons fait afin de réaliser notre 1er objectif dans la théorie de la mesure. Pour cela, nous précisons que la valeur de l'action de la mesure de Dirac δ_p sur des fonctions $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ et $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ qui sont des champs, n'est pas définie. Pour définir la valeur de cette action de manière consistante dans notre modélisation, nous prenons un choix sur la mesure de Dirac δ_p défini par

$$< \delta_p, \phi >= \lim_{x \to p^+} \phi(x). \tag{II.29}$$

Pour des raisons opérationnelles, nous prenons certaine liberté sur la mesure de Dirac δ_p. Cette liberté est exprimée par notre choix sur la mesure de Dirac δ_p dans la relation (II.29). Notre choix nous permet de vérifier que la valeur de l'action de la mesure de Dirac δ_p sur la fonction ϕ qui est continue par valeur supérieure est définie. Nous avons fait ce choix pour la raison qu'il est difficile de décrire le dual de l'espace vectoriel des fonctions réelles continues par morceaux avec un nombre fini de morceaux, continues par valeurs supérieures.

Notre choix sur la mesure de Dirac δ_p exprimé et justifié dans la relation (II.29) a pour objectif de faire agir la mesure de Dirac δ_p sur l'ensemble des champs. Nous allons maintenant montrer la consistance de ce choix. En effet, si nous faisons ce choix, alors, la valeur de l'action de la mesure de Dirac δ_p sur le champ $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ est nulle et la valeur de l'action de la mesure de Dirac δ_p sur le champ $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ est la masse 1. Par conséquent, la valeur de l'action de la mesure de Dirac δ_p sur les champs $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ et $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ est définie.

Nous disposons dans notre modélisation du produit d'une mesure par un champ. Par exemple, la mesure de paiement d'intérêts est calculée en multipliant la mesure de taux d'emprunt par le capital restant dû. Nous avons besoin de multiplier une mesure de Dirac par un champ. Par conséquent, notre 2e objectif est de multiplier la mesure de Dirac δ_p par un champ. Pour cela, nous remarquons que le produit de la mesure de Dirac δ_p par les champs $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ et $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ n'est pas défini. Pour définir ce produit de manière consistante dans notre modélisation, nous prenons notre choix sur la mesure de Dirac δ_p exprimé dans la relation (II.29) pour réaliser notre 2e objectif.

Nous allons maintenant expliquer et justifier notre choix pour réaliser notre 2e objectif. En effet, supposons que nous faisons le choix exprimé dans la relation (II.29), alors, le produit de la mesure de Dirac δ_p par le champ $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ est une mesure nulle et le produit de la mesure de Dirac δ_p par le champ $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ est une mesure de Dirac de masse 1 au point p. Par conséquent, le produit de la mesure de Dirac δ_p par les champs $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ et $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ est bien défini.

Nous voulons montrer avec un exemple que la théorie de l'intégration d'une fonction continue par morceaux par rapport à la mesure de Dirac est très complexe et est même mal définie. Cet exemple consiste à intégrer la fonction continue par morceaux $\mathbb{1}_{]-\infty,p]}$ ou $\mathbb{1}_{[p,+\infty[}$ par rapport à la mesure de Dirac δ_p

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,p]}\, d\delta_p(x) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[p,+\infty[}\, d\delta_p(x), \tag{II.30}$$

qui présente une quantité mal définie, car nous ne pouvons pas la calculer. En revanche, nous savons calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} d\delta_p(x)$, qui vaut la masse 1. Nous rappelons, que dans la section II.2, nous avons défini un champ par une fonction par morceaux continue par valeur supérieure. Ce qui nous permet de rappeler que notre objectif est de faire agir une mesure de Dirac sur l'ensemble des champs. Pour cette raison, nous avons pris un choix de restriction sur le support des fonctions qui approchent la mesure de Dirac δ_p.

Bibliographie

[1] André Gramain : *Intégration.* Hermann Éditeurs des sciences et des arts édition, 1994.

[2] Claude Wagschal : *Dérivation et intégration.* Hermann éditeurs édition, 2009.

[3] P. Barbe et M. Ledoux : *Probabilité.* Collection Enseignement sup. Mathématiques. EDP Sciences, 2007.

[4] Jacques GAPAILLARD : *Intégration pour la licence.* Masson édition, 1997.

III Le modèle financier à taux fixe

Sommaire

III.1 L'espace du modèle financier 40
III.2 Les variables financières 40
III.3 Justifications mathématique et financière de la convolution 48
III.3.1 Convolution des mesures à densité 48
III.3.2 Convolution d'une mesure à densité et d'une mesure de Dirac 51
III.3.3 Convolution des mesures de Dirac 55
III.3.4 Convolution des mesures par morceaux 57
III.4 Validation du modèle financier par des simulations numériques . . 60
Bibliographie 67

Résumé. Nous allons décrire dans ce chapitre le modèle financier à taux fixe. Ce modèle est défini lorsque le taux d'emprunt est constante. Comme l'espace du modèle financier est l'espace de mesure de Radon, nous donnons une définition mathématique et financière des variables financières (mesure d'emprunt, mesure de remboursement, ...) qui font parties de cet espace, et la relation entre eux.

Nous allons justifier l'opérateur de convolution qui lie la mesure de remboursement et la mesure d'emprunt par des simulations numériques. Nous adoptons des justifications mathématiques et financières. Finalement, nous allons valider le modèle financier à taux fixe par des simulations numériques pour montrer qu'il reflète une réalité financière.

III.1 L'espace du modèle financier

Nous avons rappelé, dans la sous-section II.1.2, certains éléments de la théorie de la mesure. Ces éléments concernent l'espace $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ défini par l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles et à support inclus dans $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$. Nous munissons l'espace $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ de la norme L^∞ définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]), \|\phi\|_{L^\infty([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} = \sup_{x \in [t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]} |\phi(x)|, \tag{III.1}$$

afin que cet espace $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ soit un espace de Banach. Nous avons rappelé, dans la même sous-section II.1.2 la définition d'une mesure de Radon. Nous notons $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ l'espace du modèle financier. L'espace $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ est l'espace vectoriel des mesures de Radon sur $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$ muni de la norme duale

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} = \sup_{\phi \in \mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]), \phi \neq 0} \left\{ \frac{|\langle \mu, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{L^\infty([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])}} \right\}. \tag{III.2}$$

Nous avons aussi rappelé la mesure de Lebesgue définie par la relation (II.15). En effet, l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ possède des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et des mesures concentrées comme la mesure de Dirac.

Si nous avons une mesure μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors nous l'appelons dans notre modélisation une mesure à densité. C'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme : $\mu = f(t)dt$, où f est la densité de la mesure μ, et où t est la variable temporelle.

III.2 Les variables financières

La première quantité est la mesure d'emprunt de capital $\tilde{\kappa}_E$. Elle est définie de sorte que la somme empruntée entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{\kappa}_E. \tag{III.3}$$

Nous définissons le capital total de l'emprunt $\mathcal{K}_{max}$ par la somme des sommes empruntées. Par conséquent, la mesure d'emprunt de capital est liée à la valeur $\mathcal{K}_{max}$ par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\kappa}_E = \mathcal{K}_{max} \ . \tag{III.4}$$

La deuxième quantité est la mesure de remboursement de capital $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. Elle est définie de sorte que ce qui, en terme de capital, doit être remboursé entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} \ . \tag{III.5}$$

La mesure d'emprunt de capital $\tilde{\kappa}_E$ et la mesure de remboursement de capital $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ sont reliées par un opérateur de convolution :

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} = \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \tag{III.6}$$

où $\tilde{\gamma}$ est la mesure de pattern de remboursement, qui est une mesure à support dans $\mathbb{R}_+$, d'intégrale égale à 1, i.e :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma} = 1. \tag{III.7}$$

La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant 0. Nous allons maintenant donner quelques exemples des mesures $\tilde{\gamma}$ qui sont des mesures à densité de densité γ :

Premier exemple

La densité de pattern de remboursement γ présentée dans la Figure III est une fonction constante sur l'intervalle $[S, S + \Theta_\gamma]$, et nulle ailleurs. Cette densité γ vérifie que l'écart entre l'instant où une somme est empruntée et l'instant où son remboursement commence est S. La durée du remboursement d'une somme empruntée est Θ_γ. Par conséquent, l'expression de γ est :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < S, \\ \frac{1}{\Theta_\gamma} & \text{si } S \leq t \leq S + \Theta_\gamma, \\ 0 & \text{si } t > S + \Theta_\gamma. \end{cases} \tag{III.8}$$

Si nous souhaitons commencer à rembourser après un instant S, et que nous voulons rembourser uniformément pendant une durée Θ_γ. La durée avant le début du remboursement est définie par :

$$S = \inf\{t \in [t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}] \text{ tel que } \gamma(t) \neq 0\}. \tag{III.9}$$

La durée de la fin du remboursement est définie par :

$$S + \Theta_\gamma = \sup\{t \in [t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}] \text{ tel que } \gamma(t) \neq 0\}. \tag{III.10}$$

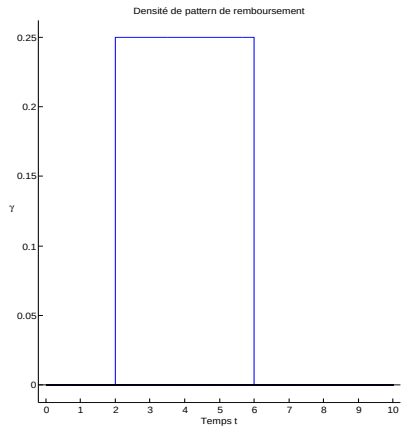

FIGURE III.1 – La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction constante sur l'intervalle $[2, 6]$ de constante $\frac{1}{4}$, et nulle ailleurs. Cette densité γ est obtenue avec $S = 2$ et $\Theta_\gamma = 4$ dans l'équation (III.8).

Deuxième exemple

La densité de pattern de remboursement γ présentée dans la Figure III.2 est une fonction affine sur l'intervalle $[0, \Theta_\gamma]$, et nulle ailleurs. Cette densité γ satisfait que l'instant où une somme est empruntée et l'instant où son remboursement commence est le même. La durée du remboursement de la somme empruntée est Θ_γ. Nous concluons que l'expression de γ s'écrit sous la forme :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{2t}{\Theta_\gamma^2} & \text{si } 0 \leq t \leq \Theta_\gamma, \\ 0 & \text{si } t > \Theta_\gamma. \end{cases} \tag{III.11}$$

Troisième exemple

La densité de pattern de remboursement γ (présentée dans la Figure III.3) est une fonction par morceaux, constante sur l'intervalle $[0, \frac{\Theta_\gamma}{2}]$ de constante $\frac{5}{4\Theta_\gamma}$, linéaire sur l'intervalle $[S+\frac{\Theta_\gamma}{2}, S+\Theta_\gamma]$ de pente $\frac{1}{\Theta_\gamma^2}$, et nulle ailleurs. L'expression de γ s'écrit sous la forme :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{5}{4\Theta_\gamma} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\Theta_\gamma}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{\Theta_\gamma}{2} < t < S + \frac{\Theta_\gamma}{2}, \\ \frac{t-S}{\Theta_\gamma^2} & \text{si } S + \frac{\Theta_\gamma}{2} \leq t \leq S + \Theta_\gamma, \\ 0 & \text{si } t > S + \Theta_\gamma. \end{cases} \tag{III.12}$$

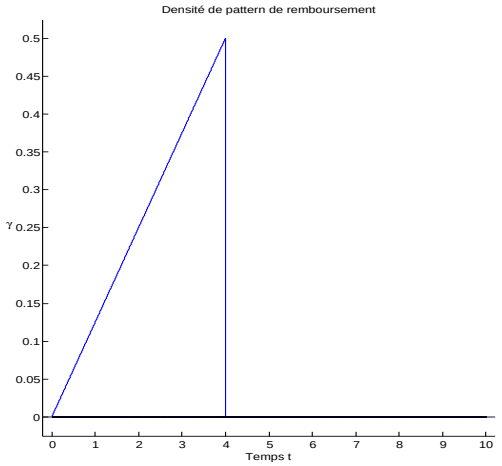

FIGURE III.2 – La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction linéaire sur l'intervalle $[0, 4]$ de pente $\frac{1}{8}$, et nulle ailleurs. Cette densité γ est obtenue avec $\Theta_\gamma = 4$ dans l'équation (III.11).

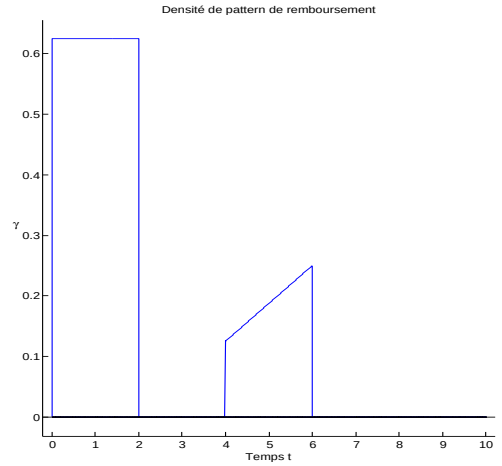

FIGURE III.3 – La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction par morceaux, constante sur l'intervalle $[0, 2]$ de constante $\frac{5}{16}$, linéaire de pente $\frac{1}{16}$ sur l'intervalle $[4, 6]$, et nulle ailleurs. Cette densité γ est obtenue avec $\Theta_\gamma = 4$ et $S = 2$ dans l'équation (III.12).

Pour un réel strictement positif Θ_γ tel que $\Theta_\gamma < \Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}$, la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ définie dans la relation (III.7) doit avoir un support compact contenu dans l'intervalle $[0, \Theta_\gamma]$:

$$\tilde{\gamma} \in \mathcal{M}([0, \Theta_\gamma]). \tag{III.13}$$

Afin que la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ possède un support contenu dans l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$, nous choisissons une mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ à support dans l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$. En effet, le support de la convolution des deux mesures $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\gamma}$ à support compact est inclus dans la somme de leurs supports

$$Supp(\tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}) \subset Supp(\tilde{\kappa}_E) + Supp(\tilde{\gamma}). \tag{III.14}$$

Si, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction κ_E, i.e. $\tilde{\kappa}_E = \kappa_E(t)dt$, et si la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction γ, i.e. $\tilde{\gamma} = \gamma(t)dt$, alors la convolution $\tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction $\kappa_E \star \gamma$, i.e. $\tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} = (\kappa_E \star \gamma)(t)dt$, où

$$\rho_{\mathcal{K}}(t) = \kappa_E \star \gamma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_E(y)\gamma(t-y)\, dy. \tag{III.15}$$

Nous allons montrer que la relation (III.6) est consistante en unité monétaire. Pour cela, nous allons montrer que la relation (III.15) l'est.

Il est important de noter que la grandeur des mesures $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ s'exprime en unité monétaire. Nous rappelons également que la grandeur dt est l'unité de temps. Lorsque les mesures $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ sont des mesures à densité, la grandeur de leurs densités κ_E et $\rho_{\mathcal{K}}$ s'exprime en unité monétaire sur l'unité de temps. Par conséquent, la relation (III.15) exprime que la densité γ a donc la dimension physique de l'inverse de temps. Ce dernier résultat est cohérent en utilisant la définition (III.7) de pattern de rembousement $\tilde{\gamma}$, qui montre qu'elle n'a pas de dimension physique.

La troisième quantité est le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ qui est la somme du capital restant à rembourser par un emprunteur à son créancier.

La quatrième quantité est la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ qui décrit comment rembourser la somme du capital restant dû à l'instant initial $t_{\mathtt{I}}$. Nous appelons la mesure $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ le schéma de remboursement, qui satisfait l'égalite suivante :

$$\int_{t_{\mathtt{I}}}^{+\infty} \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}), \tag{III.16}$$

où $\mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}})$ est la valeur du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ à l'instant initial $t_{\mathtt{I}}$. Le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est lié à la mesure d'emprunt de capital $\tilde{\kappa}_E$, à la mesure de remboursement de capital $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$, et à la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d\mathcal{K}_{RD}}{dt} = \kappa_E(t) - \rho_{\mathcal{K}}(t) - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t). \tag{III.17}$$

La solution peut s'exprimer par :

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}. \tag{III.18}$$

Comme la valeur $\mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}})$ du capital restant dû à l'instant $t_{\mathtt{I}}$ exprimée dans la relation (III.16) est connue, nous l'injectons dans l'égalité (III.18) pour obtenir :

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \int_{t}^{+\infty} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}. \tag{III.19}$$

Comme le taux d'emprunt α est fixe, la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ est une mesure à densité dont la densité $\rho_{\mathcal{I}}$ est liée au capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ par la relation de proportionnalité suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha \mathcal{K}_{RD}(t). \tag{III.20}$$

Nous utilisons l'expression de la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ définie dans la relation (III.6) en fonction de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ pour que l'expression de la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ devient :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} + \alpha \int_{t}^{+\infty} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}. \tag{III.21}$$

Lorsque la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$, et la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ sont des mesures à densité, nous exprimons la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E(s)\, ds - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E \star \gamma(s)\, ds + \alpha \int_{t}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds. \tag{III.22}$$

Comme la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ possède un support contenu dans l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$, la relation (III.22) devient :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E(s)\, ds - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E \star \gamma(s)\, ds + \alpha \int_{t}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds. \tag{III.23}$$

Nous voulons maintenant exprimer la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$. Pour cela, nous rappelons que la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}} = \rho_{\mathcal{I}}(t)dt$ est une mesure à densité dans le modèle financier à taux fixe. La relation (III.23) devient pour la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$:

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{I}} = \alpha \Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathtt{I}}, t[} \Big\rangle dt + \alpha \Big\langle \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}, \mathbb{1}_{|[t, \Theta_{\max}[} \Big\rangle dt. \tag{III.24}$$

Nous allons maintenant montrer que la grandeur du taux d'emprunt α est l'inverse du temps. Pour cela, nous supposons que si le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ reste le même (et égal à $\overline{K}$) sur une période $[t_{\mathtt{I}}, t_{\mathtt{I}} + 1\text{an}]$, nous avons :

$$\int_{t_{\mathtt{I}}}^{t_{\mathtt{I}}+1\text{an}} \rho_{\mathcal{I}}(t)\, dt = \tau \overline{K}, \tag{III.25}$$

où τ est le taux fixe annuel de l'emprunt. La relation (III.25) exprime que les intérêts payés sur l'année $[t_{\mathtt{I}}, t_{\mathtt{I}} + 1\text{an}]$ sont calculés en multipliant le taux τ par la valeur du capital restant dû $\overline{K}$. D'après la relation (III.20), et comme le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ reste le même, nous avons :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha\overline{K}. \tag{III.26}$$

La relation (III.25) devient :

$$(1\text{an})\alpha\overline{K} = \tau\overline{K}. \tag{III.27}$$

Par conséquent

$$\alpha = \frac{\tau}{(1\text{an})}. \tag{III.28}$$

Nous allons maintenant montrer que τ n'a pas de dimension physique (car il lie des grandeurs qui s'expriment toutes les deux en unité monétaire). Plus précisément, comme la grandeur de $\int_{t_{\mathtt{I}}}^{t_{\mathtt{I}}+1\text{an}} \rho_{\mathcal{I}}(t)\, dt$ et du capital restant dû $\overline{K}$ est l'unité monétaire, nous utilisons la relation (III.25) pour déduire que τ n'a pas de dimension physique. Par conséquent, la relation (III.28) montre que la grandeur du taux α est l'inverse du temps.

Nous allons maintenant définir la suite des variables financières qui sont :

— La mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$ est la différence entre les recettes et les dépenses usuelles. Nous définissons ces dépenses usuelles par toutes dépenses qui ne sont pas liées à la réalisation du projet. La somme nécessaire pour satisfaire le besoin de financement entre les instants t_1 et t_2 est définie par :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{\sigma}. \tag{III.29}$$

— La mesure de dépense isolée $\tilde{\beta}$ est liée à la notion du projet. Nous considérons dans un budget modélisé via un modèle continu que certaines dépenses peuvent être assemblées parce qu'elles contribuent toutes à un objectif commun. Nous appelons cet assemblage un projet et nous appelons $\tilde{\beta}$ le schéma de dépenses lié à sa réalisation.

— La mesure de dépense courante $\tilde{\sigma}_g$ est le schéma associé aux dépenses indépendamment au projet définie par :

$$\tilde{\sigma}_g = \tilde{\sigma} - \tilde{\beta}. \tag{III.30}$$

Afin d'établir un équilibre financier d'un budget en temps réel entre les dépenses et les recettes, nous imposons que la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est égale à la somme de la mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$ et les mesures associées aux variables de paiement et de repaiements. Cet équilibre est exprimé par l'équation suivante :

$$\tilde{\kappa}_E = \tilde{\sigma} + \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}. \tag{III.31}$$

Tout ce qui n'est pas alloué aux dépenses usuelles l'est à la réalisation du projet. L'équilibre ponctuel défini par la relation (III.31) du budget imposé ici est critiquable et pourrait être judicieusement

remplacé par un équilibre sur une période de temps qui reste à définir. Cependant l'équilibre ponctuel semblait être plus simple pour une première approche. Nous précisons que cet équilibre est déterminé par un autofinancement ou une capacité dynamique de désendettement dans notre modélisation.

Nous allons maintenant utiliser l'équation d'équilibre définie dans la relation (III.31) pour exprimer la mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$ en fonction des mesures $\tilde{\kappa}_E$, $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$. En effet, nous utilisons l'expression de la mesure de remboursement définie dans la relation (III.6) pour que la relation (III.31) devient :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} - \tilde{\rho}_{\mathcal{I}} - \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}. \tag{III.32}$$

Cet équation d'équilibre devient pour des mesures à densité :

$$\sigma = \kappa_E - \kappa_E \star \gamma - \rho_{\mathcal{I}} - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}. \tag{III.33}$$

Ensuite, nous utilisons l'expression de la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ définie dans la relation (III.24) pour que la relation (III.32) devient :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} - \alpha\Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathtt{I}},t[}\Big\rangle dt - \alpha\Big\langle \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}, \mathbb{1}_{|[t,\Theta_{\max}[}\Big\rangle dt - \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}. \tag{III.34}$$

Lorsque la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$, la mesure de pattern de remboursement, et la mesure de remboursement de la dette $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ sont des mesures à densité, nous utilisons la relation (III.33) et l'expression de la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ définie dans la relation (III.22) pour obtenir :

$$\sigma(t) = \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds - \alpha \int_{t}^{\Theta_{\max}} \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(s)\, ds - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t). \tag{III.35}$$

Exemple de Cauchy

Nous précisons que nous avons défini une collection de mesures à densités implémentées dans notre modèle pour répondre à la solution de l'équation (III.17). Nous allons maintenant parler du problème de Cauchy qui peut être bien posé ou mal posé. On peut prendre dans cette équation à titre d'exemple :

$$\frac{d\mathcal{K}_{RD}}{dt} = \sqrt{2|\mathcal{K}_{RD}(t)|}, \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) = 0. \tag{III.36}$$

L'objectif de cet exemple est de montrer qu'il y a un problème de calcul mal posé. Dans cet exemple, le problème (III.36) est mal posé, car la solution n'est pas unique. Prenons un autre exemple

$$\frac{d\mathcal{K}_{RD}}{dt} = -\mathcal{K}_{RD}(t), \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) = 1. \tag{III.37}$$

L'utilisation du schéma d'Euler explicite pour la résolution de problème (III.37) permet de fournir une solution qui n'est pas stable numériquement :

$$\mathcal{K}_{RD}(t_n) = (1 - \Delta t)^n. \tag{III.38}$$

Cette solution converge vers la fonction exponentielle. Or, si nous prenons $\Delta t = 2$, on obtient alors $\mathcal{K}_{RD}(t_n) = (-1)^n$, ce qui n'est pas clairement une bonne approximation de la solution numérique. Dans l'exemple présent, le schéma d'Euler explicite ne donne pas une solution approchée raisonnable pour un pas de temps grand.

III.3 Justifications mathématique et financière de la convolution

Nous avons exprimé dans la relation (III.6) la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ par la convolution de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$, et de la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$. Nous allons justifier dans cette section cet opérateur de convolution avec des argumentations mathématiques et financières. Pour cela, nous effectuons des simulations numériques pour montrer sa cohérence.

Nous voulons montrer à travers de ces simulations définies par des figures comment mesurer des quantités financières sur des intervalles de temps. Lorsque, nous considérons des mesures à densité, nous supposons que l'abscisse des figures est en années, et l'ordonnée est en unité monétaire arbitraire (par exemple en Euro) par année. Lorsque ces mesures sont des mesures concentrées, nous supposons que l'abscisse des figures est en années, et l'ordonnée est en unité monétaire (par exemple en Euro).

III.3.1 Convolution des mesures à densité

Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ deux mesures à densité de densités respectives γ et κ_E. La densité de pattern de remboursement γ est une fonction constante sur la période de temps $[2, 6]$ de constante $\frac{1}{4}$, et nulle ailleurs. Nous rappelons que la densité γ décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant 0. La densité d'emprunt κ_E est une fonction constante sur la période de temps $[3, 4]$ de constante 2, et nulle ailleurs. Cette densité d'emprunt κ_E signifie que nous n'avons pas commencé d'emprunter avant l'instant 3, que nous avons emprunté uniformément la somme 2 pendant la période de temps $[3, 4]$, et que nous avons fini d'emprunter à partir de l'instant 4. Nous présentons les densités γ et κ_E respectivement dans le diagramme du haut et du milieu de la Figure III.4.

Nous allons maintenant expliquer comment représenter l'action de la mesure $\tilde{\gamma}$ sur la mesure $\tilde{\kappa}_E$. Nous utilisons la relation (III.6) pour calculer le résultat de cet action étant la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. Cette mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est une mesure à densité dont la densité est la fonction $\rho_{\mathcal{K}}$ présentée dans le diagramme du bas de la Figure III.4. L'interprétation financière de la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ peut se justifier comme suit. Nous remboursons d'une manière croissante sur la période de temps $[5, 6]$, uniformément sur la période de temps $[6, 9]$, et d'une manière décroissante sur la période de temps $[9, 10]$.

Nous allons maintenant justifier ce résultat de la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ en utilisant la relation (III.15). Pour cela, nous présentons un cadre théorique de la convolution de deux fonctions constantes de constantes C_1 et C_2 définies sur les intervalles respectifs $[a, b]$ et $[c, d]$, et nulles ailleurs. Cette convolution est définie par :

$$C_1 \mathbb{1}_{[a,b]} \star C_2 \mathbb{1}_{[c,d]}(x) = C_1 C_2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) \mathbb{1}_{[c,d]}(x-y)\, dy. \tag{III.39}$$

Comme $x - y \in [c, d]$, nous avons $y \in [x - d, x - c]$. La relation (VIII.37) devient :

$$C_1 \mathbb{1}_{[a,b]} \star C_2 \mathbb{1}_{[c,d]}(x) = C_1 C_2 \times \int_{[a,b]\cap[x-d,x-c]} dy. \tag{III.40}$$

Nous distinguons quatre cas possibles pour calculer la convolution définie dans la relation (III.40) :

— Lorsque $\max\{b + c, a + d\} \leq x \leq b + d$, nous avons $a \leq x - d \leq b \leq x - c$. Par conséquent, l'intersection des deux intervalles $[a, b]$ et $[x - d, x - c]$ est l'intervalle $[x - d, b]$. La relation (III.40) devient :

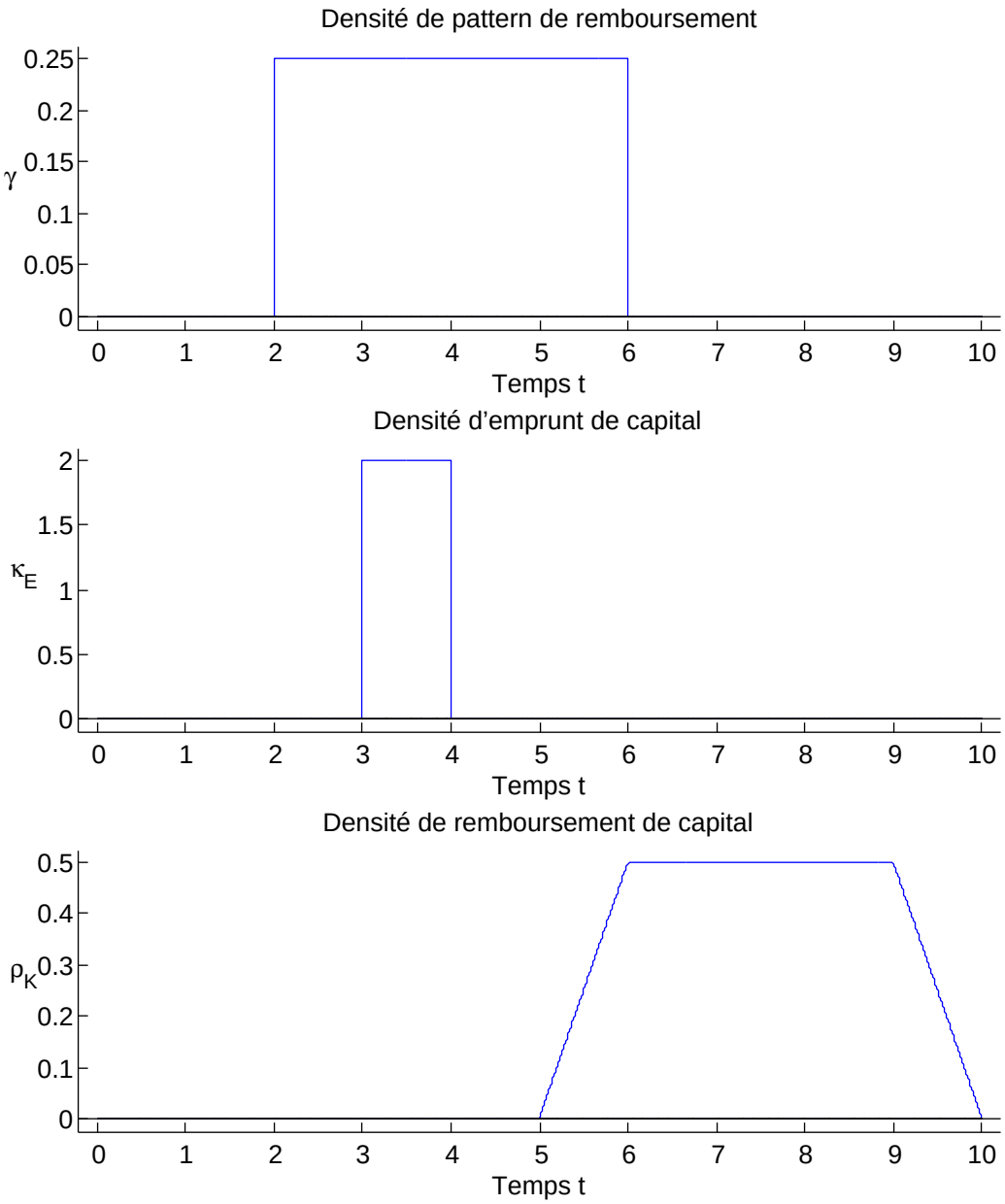

FIGURE III.4 – Résultat de la convolution $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ définie par la mesure à densité $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le haut, la densité d'emprunt κ_E est présentée dans le milieu et la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est présentée dans le bas.

$$C_1\mathbb{1}_{[a,b]} \star C_2\mathbb{1}_{[c,d]}(x) = C_1C_2 \times (b+d-x)\mathbb{1}_{[\max\{b+c,a+d\},b+d]}(x). \tag{III.41}$$

— Lorsque $b+c \leq x \leq a+d$, nous avons $x-d \leq a$ et $b \leq x-c$. Par conséquent, l'intersection des deux intervalles $[a,b]$ et $[x-d,x-c]$ est l'intervalle $[a,b]$. À partir de la relation (III.40) nous obtenons :

$$C_1\mathbb{1}_{[a,b]} \star C_2\mathbb{1}_{[c,d]}(x) = C_1C_2 \times (b-a)\mathbb{1}_{[b+c,a+d]}(x). \tag{III.42}$$

— Lorsque $a+d \leq x \leq b+c$, nous avons $a \leq x-d$ et $x-c \leq b$. Comme l'intersection des deux intervalles $[a,b]$ et $[x-d,x-c]$ est l'intervalle $[x-d,x-c]$, la relation (III.40) devient :

$$C_1\mathbb{1}_{[a,b]} \star C_2\mathbb{1}_{[c,d]}(x) = C_1C_2 \times (d-c)\mathbb{1}_{[a+d,b+c]}(x). \tag{III.43}$$

— Lorsque $a+c \leq x \leq \min\{a+d,b+c\}$, nous avons $x-d \leq a \leq x-c \leq b$. Par conséquent, l'intersection des deux intervalles $[a,b]$ et $[x-d,x-c]$ est l'intervalle $[a,x-c]$. La relation (III.40) devient :

$$C_1\mathbb{1}_{[a,b]} \star C_2\mathbb{1}_{[c,d]}(x) = C_1C_2 \times (x-(a+c))\mathbb{1}_{[a+c,\min\{a+d,b+c\}]}(x). \tag{III.44}$$

Revenons à notre exemple, nous prenons $[a,b]=[2,6]$, $[c,d]=[3,4]$, $C_1=\frac{1}{4}$ et $C_2=2$. Nous allons utiliser les relations (III.41), (III.43) et (III.45) pour exprimer la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ présentée dans le diagramme du bas de la Figure III.4. Nous distinguons trois cas pour l'exprimer :

— Lorsque $5 \leq x \leq 6$, nous utilisons la relation (III.44) pour montrer que la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{K}}(x) = \frac{1}{2} \times (x-5)\mathbb{1}_{[5,6]}(x). \tag{III.45}$$

La densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est une fonction affine de pente $\frac{1}{2}$ sur la période de temps $[5,6]$. Par conséquent, elle est croissante sur cette période.

— Lorsque $6 \leq x \leq 9$, nous utilisons la relation (III.43) pour affirmer que la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est une fonction constante de constante $\frac{1}{2}$ sur la période de temps $[6,9]$.

— Lorsque $9 \leq x \leq 10$, nous utilisons la relation (III.41) pour montrer que la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{K}}(x) = \frac{1}{2} \times (10-x)\mathbb{1}_{[9,10]}(x). \tag{III.46}$$

La densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est une fonction affine de pente $-\frac{1}{2}$ sur la période de temps $[9,10]$. Par conséquent, elle est décroissante sur cette période.

Nous concluons que l'expression de la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est définie par :

$$\rho_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 5, \\ \frac{x-5}{2} & \text{si } 5 \leq t \leq 6, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 6 \leq t \leq 9, \\ \frac{10-x}{2} & \text{si } 9 \leq t \leq 10, \\ 0 & \text{si } t \geq 10. \end{cases} \tag{III.47}$$

III.3.2 Convolution d'une mesure à densité et d'une mesure de Dirac

Nous voulons dans cette sous-section simuler la convolution d'une mesure à densité et d'une mesure de Dirac. Pour cela, nous considérons que la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité dont la densité γ est une fonction constante de constante $\frac{1}{4}$ sur la période de temps $[2, 6]$, et nulle ailleurs. Nous présentons la densité γ dans le diagramme en haut de la Figure III.5.

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq t \leq 6, \\ 0 & \text{si } t > 6. \end{cases} \tag{III.48}$$

Nous définissons la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ (voir le diagramme présenté au milieu de la Figure III.5) par la mesure de Dirac localisée à l'instant 1, de masse 20. C'est-à-dire :

$$\tilde{\kappa}_E = 20 \times \delta_{t=1}. \tag{III.49}$$

La mesure $\tilde{\kappa}_E$ signifie que nous empruntons la somme 20 à l'instant 1. L'action de la mesure $\tilde{\gamma}$ sur la mesure $\tilde{\kappa}_E$ définie une mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ qui est une mesure à densité de densité $\rho_{\mathcal{K}}$. Nous présentons la densité $\rho_{\mathcal{K}}$ dans le diagramme en bas de la Figure III.5. Cette densité $\rho_{\mathcal{K}}$ est une fonction constante de constante 5 sur la période de temps $[3, 7]$, et nulle ailleurs. Elle signifie que nous n'avons pas commencé de rembourser avant l'instant 3, que nous avons remboursé uniformément la somme 5 pendant la période de temps $[3, 7]$, et que nous avons fini de rembourser à partir de l'instant 7.

$$\rho_{\mathcal{K}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3, \\ 5 & \text{si } 3 \leq t \leq 7, \\ 0 & \text{si } t > 7. \end{cases} \tag{III.50}$$

Le résultat de cet action peut se justifier par la propriété de la convolution. En effet, la densité $\rho_{\mathcal{K}}$ est la translaté de la densité $20 \times \gamma$ par la valeur 1.

Nous allons maintenant réaliser l'action d'une mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ étant une mesure de Dirac localisée à l'instant 1, de masse 20 définie par :

$$\tilde{\gamma} = 20 \times \delta_{t=1}, \tag{III.51}$$

sur une mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$. Cette mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est une mesure à densité de densité κ_E. Cette densité κ_E est une fonction constante de constante $\frac{1}{4}$ sur la période de temps $[2, 6]$, et nulle ailleurs. Plus formellement :

$$\kappa_E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq t \leq 6, \\ 0 & \text{si } t > 6. \end{cases} \tag{III.52}$$

Nous présentons la mesure $\tilde{\gamma}$ et la densité κ_E respectivement dans le diagramme en haut et en bas de la Figure III.6. L'interprétation financière de la densité κ_E peut se donner comme suit. Elle signifie que nous n'avons pas commencé d'emprunter avant l'instant 2, que nous avons emprunté uniformément la somme $\frac{1}{4}$ pendant la période de temps $[2, 6]$, et que nous avons fini d'emprunter à partir de l'instant 6.

Le résultat de cet action est définie par une mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ étant une mesure à densité de densité $\rho_{\mathcal{K}}$. Nous présentons la densité $\rho_{\mathcal{K}}$ dans le diagramme du milieu de la Figure III.6. La densité $\rho_{\mathcal{K}}$ est une fonction constante de constante 5 sur la période de temps $[3, 7]$, et nulle ailleurs.

Nous pouvons justifier le résultat de la densité $\rho_{\mathcal{K}}$ par la propriété de commutativité de la convolution. En effet, nous obtenons la même densité de remboursement définie dans la relation (III.50) car elle est la translaté de la densité $20 \times \kappa_E$ par la valeur 1.

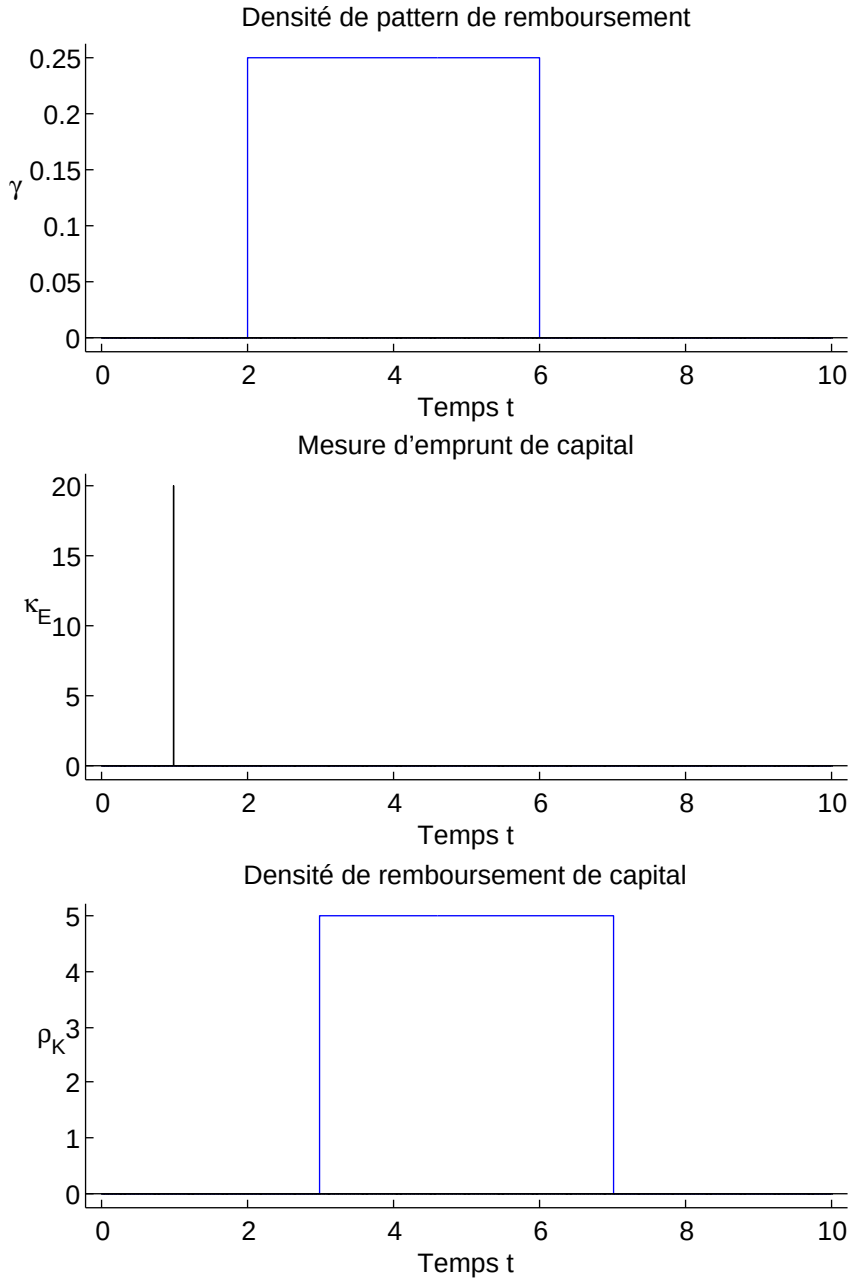

FIGURE III.5 – La convolution de la mesure à densité $\tilde{\gamma}$, et de la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure à densité $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. La densité de pattern de remboursement γ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu et la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est présentée en bas.

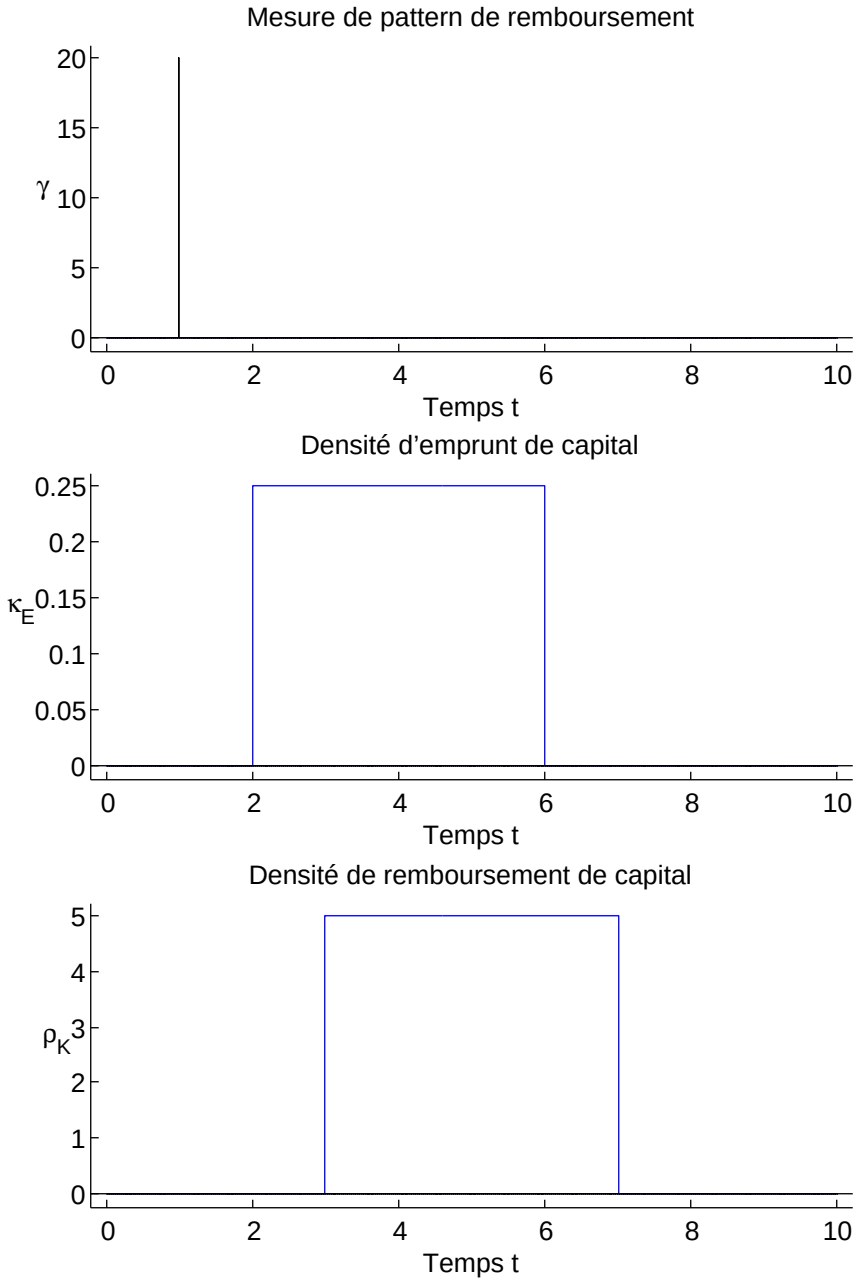

FIGURE III.6 – La convolution de la mesure concentrée $\tilde{\gamma}$, et de la mesure à densité $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure à densité $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la densité d'emprunt κ_E est présentée au milieu, et la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est présentée en bas.

III.3.3 Convolution des mesures de Dirac

Nous rappelons que nous avons effectué la convolution d'une mesure à densité et d'une mesure concentrée dans la sous-section III.3.2. Nous avons retenu que le résultat de cet action est une mesure à densité. Par ailleurs, comme la convolution est un opérateur commutatif, la convolution d'une mesure concentrée et d'une mesure à densité est une mesure à densité.

Nous voulons maintenant réaliser des simulations numériques pour montrer la cohérence de l'opérateur de convolution sur des mesures concentrées. Nous allons y donner une interprétation financière et mathématique.

Nous définissons la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ (voir le diagramme présenté en haut de la Figure III.7) par une combinaison de sept mesures de Dirac, les trois mesures de Dirac sont localisées aux points 0.3, 0.4, 0.5, de masse $\frac{5}{19}$, les quatre mesures de Dirac sont localisées aux points 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, de masse $\frac{1}{19}$. La mesure $\tilde{\gamma}$ s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\gamma} = \frac{5}{19} \times (\delta_{t=0.3} + \delta_{t=0.4} + \delta_{t=0.5}) + \frac{1}{19} \times (\delta_{t=0.25} + \delta_{t=0.35} + \delta_{t=0.45} + \delta_{t=0.55}). \tag{III.53}$$

Nous rappelons que la mesure $\tilde{\gamma}$ décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant 0. Pour cette raison, la mesure $\tilde{\gamma}$ vérifie la relation (III.7).

Ensuite, nous définissons la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ (voir le diagramme présenté au milieu de la Figure III.7) par une mesure concentrée, concentrée aux instants 0.1 et 0.17, de masse 20, et concentrée aux instants 0.07, 0.13 et 0.2, de masse 10. Plus formellement :

$$\tilde{\kappa}_E = 20 \times (\delta_{t=0.1} + \delta_{t=0.17}) + 10 \times (\delta_{t=0.07} + \delta_{t=0.13} + \delta_{t=0.2}). \tag{III.54}$$

La mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ définie dans la relation (III.54) signifie que nous avons emprunté la somme 20 aux instants 0.1 et 0.17, et que nous avons emprunté la somme 10 aux instants 0.07, 0.13 et 0.2.

Nous allons maintenant donner une interprétation financière de cette simulation. En effet, la Figure III.7 montre l'action de la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ sur la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$. Le résultat de cet action est la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ étant calculée en utilisant la relation (III.6). En effet, le plan de remboursement associé à la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ selon le pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est constitué de quatre parties qui sont définies par :

— La première partie est le remboursement de la somme $\frac{100}{19}$ localisée aux instants 0.4, 0.47, 0.5, 0.57, 0.6 et 0.67.

— La deuxième partie est le remboursement de la somme $\frac{20}{19}$ localisée aux instants 0.35, 0.42, 0.45, 0.52, 0.55, 0.62, 0.65 et 0.72.

— La troisième partie est le remboursement de la somme $\frac{50}{19}$ localisée aux instants 0.37, 0.43, 0.47, 0.5, 0.53, 0.57, 0.6, 0.63 et 0.7.

— La quatrième partie est le remboursement de la somme $\frac{10}{19}$ localisée aux instants 0.32, 0.38, 0.42, 0.45, 0.48, 0.52, 0.55, 0.58, 0.62, 0.65, 0.68 et 0.75.

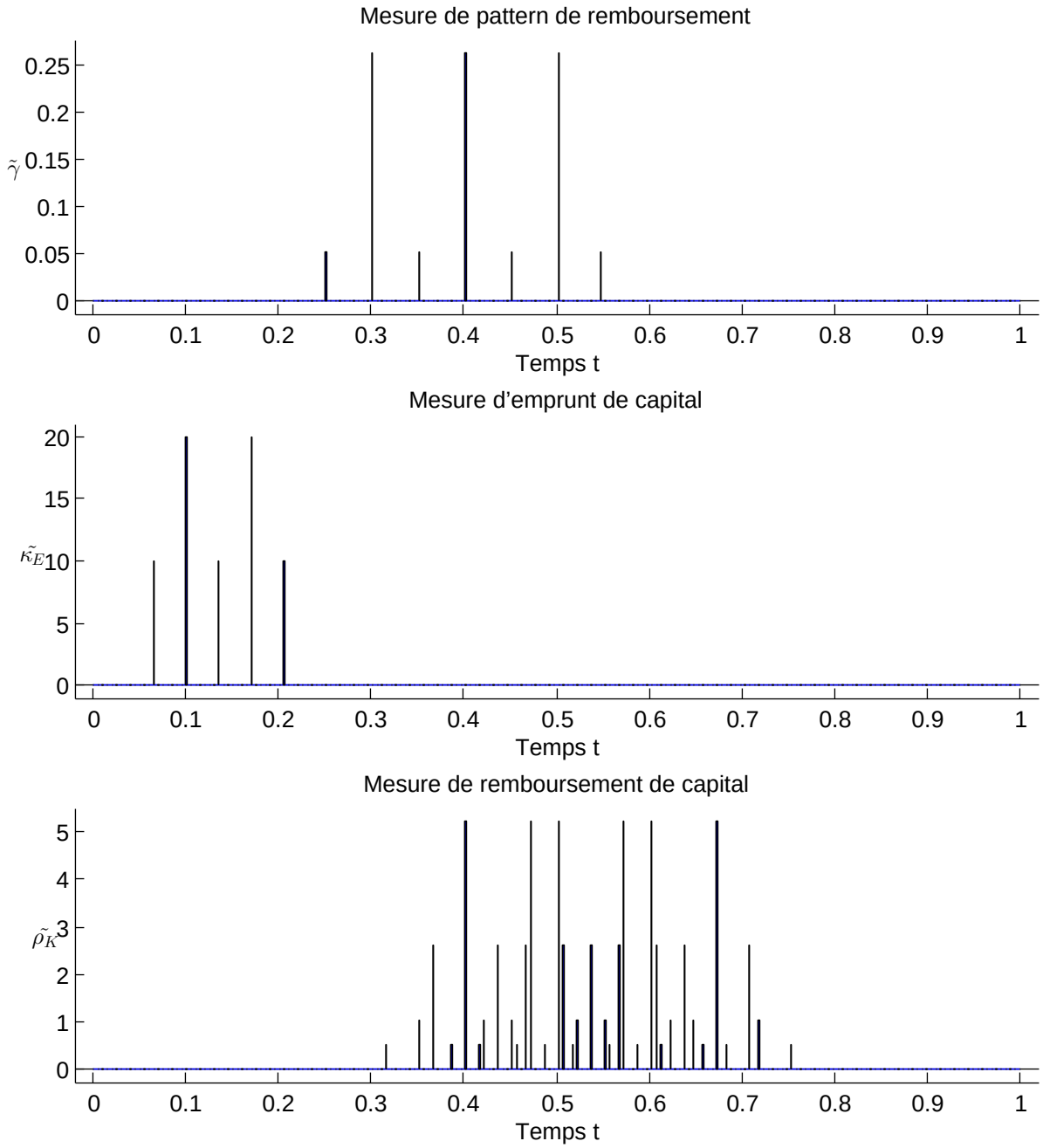

FIGURE III.7 – La convolution des deux mesures concentrées $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure concentrée $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu, et la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est présentée en bas.

Nous voulons maintenant calculer le remboursement total sur la période de temps $[0, 1]$. Le remboursement total est constitué de quatre parties définies par :

— La première partie du remboursement total est constituée de six fois la somme $\frac{100}{19}$ qui est égale à $\frac{600}{19}$.

— La deuxième partie du remboursement total est constituée de huit fois la somme $\frac{20}{19}$ qui est égale à $\frac{160}{19}$.

— La troisième partie du remboursement total est constituée de neuf fois la somme $\frac{50}{19}$ qui est égale à $\frac{450}{19}$.

— La quatrième partie du remboursement total est constituée de douze fois la somme $\frac{10}{19}$ qui est égale à $\frac{120}{19}$.

Le remboursement total sur la période de temps $[0, 1]$ est la somme de ces quatres remboursements. Par conséquent, le remboursement total est la somme $\frac{1330}{19}$. Nous concluons que cette simulation illustre que la relation (III.6) modèlise correctement la manière de calculer le remboursement en fonction de l'emprunt.

Nous allons maintenant donner une expression mathématique de la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. Comme nous pouvons calculer explicitement la convolution de deux mesures de Dirac, la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ peut s'exprimer en utilisant la relation (III.6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} = &\frac{100}{19} \times (\delta_{t=0.4} + \delta_{t=0.47} + \delta_{t=0.5} + \delta_{t=0.57} + \delta_{t=0.6} + \delta_{t=0.67}) \\ &+ \frac{20}{19} \times (\delta_{t=0.35} + \delta_{t=0.42} + \delta_{t=0.45} + \delta_{t=0.52} + \delta_{t=0.55} + \delta_{t=0.62} + \delta_{t=0.65} + \delta_{t=0.72}) \\ &+ \frac{50}{19} \times (\delta_{t=0.37} + \delta_{t=0.43} + \delta_{t=0.47} + \delta_{t=0.5} + \delta_{t=0.53} + \delta_{t=0.57} + \delta_{t=0.6} + \delta_{t=0.63} + \delta_{t=0.7}) \\ &+ \frac{10}{19} \times (\delta_{t=0.32} + \delta_{t=0.38} + \delta_{t=0.42} + \delta_{t=0.45} + \delta_{t=0.48} + \delta_{t=0.52} + \delta_{t=0.55} + \delta_{t=0.58} + \delta_{t=0.62} \\ &+ \delta_{t=0.65} + \delta_{t=0.68} + \delta_{t=0.75}).\end{aligned} \tag{III.55}$$

Nous pouvons constater que la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ définie dans la relation (III.55) est exactement la même mesure convolée résultante présentée dans la Figure III.7. Nous en déduisons une cohérence de l'opérateur de convolution puisque le résultat calculé explicitement correspond au résultat numérique.

III.3.4 Convolution des mesures par morceaux

Nous allons simuler la convolution de deux mesures par morceaux. L'objectif de cet exemple est de montrer la complexité de notre modèle. Nous pouvons convoler une mesure par morceaux, avec un nombre fini de morceaux par une autre mesure par morceaux de même nature.

La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure par morceaux composée. En effet, elle est constituée de deux frontières $Fr_0 = 0$ et $Fr_1 = 1.5$. La restriction de cette mesure $\tilde{\gamma}$ sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1.5, +\infty[$ génère une mesure nulle. Par ailleurs, la mesure intermédiaire de $\tilde{\gamma}$ restreinte sur l'intervalle $[0, 1.5]$ est une mesure composée de deux mesures. La première mesure

est une mesure de Dirac de masse $\frac{1}{2}$ localisée à l'instant 0.25. La deuxième mesure est une mesure à densité de constante 1 sur l'intervalle $[1, 1.5]$. Plus formellement :

$$\tilde{\gamma} \mid_{[Fr_0, Fr_1]} = 0.5 \times \delta_{t=0.25} + \mathbb{1}_{[1,1.5]}(x). \tag{III.56}$$

Nous pouvons vérifier que l'intégrale de cette mesure est égale à 1. En effet, l'intégrale de la mesure $\tilde{\gamma}$ sur $\mathbb{R}$ peut se décomposer sous la frome suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma} = \int_{Fr_0}^{Fr_1} 0.5 \times \delta_{t=0.25} + \mathbb{1}_{[1,1.5]}(x)\, dx, \tag{III.57}$$

qui peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma} = 0.5 \int_{Fr_0}^{Fr_1} \delta_{t=0.25} + \int_{[Fr_0, Fr_1] \cap [1,1.5]} dx. \tag{III.58}$$

Comme la localisation de Dirac 0.25 appartient à l'intervalle $[Fr_0, Fr_1[$, et que l'intersection des deux intervalles $[Fr_0, Fr_1]$ et $[1, 1.5]$ se réduit à l'intervalle $[1, 1.5]$, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma} = 1. \tag{III.59}$$

Nous définissons la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ à partir de deux réels $Fr_0^{'}$ et Fr_1 permettant de générer une mesure nulle sur les deux intervalles $]-\infty, 0.5]$ et $[1.5, +\infty[$. Nous définissons sur l'intervalle $[0.5, 1.5]$ une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\tilde{\kappa}_E}$. Nous disons que la mesure $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la composition de mesure par morceaux. En effet, cette mesure d'emprunt est composée en réalité de plusieurs emprunts définis sur des intervalles de temps. Nous allons maintenant donner la suite de cette définition. La mesure $\tilde{m}_{\tilde{\kappa}_E}$ est constituée de 3 mesures. La première mesure est une mesure à densité dont la densité est constante sur l'intervalle $[0.5, 0.8]$ de constante égale 1. La deuxième mesure est une mesure de Dirac localisée à l'instant 1, et de masse 1. La troisième mesure est une mesure à densité dont la densité est une fonction constante sur l'intervalle $[1.2, 1.5]$ de constante égale 1. Autrement dit :

$$\tilde{\kappa}_E \mid_{[Fr_0^{'}, Fr_1]} = \mathbb{1}_{[0.5,0.8]}(x) + \delta_{t=1} + \mathbb{1}_{[1.2,1.5]}(x). \tag{III.60}$$

Nous présentons cette simulation avec les trois variables $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ dans la Figure III.8. La mesure $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu de la Figure III.8. L'action de la mesure $\tilde{\gamma}$ sur la mesure $\tilde{\kappa}_E$ définie une mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ qui est une mesure constituée d'une mesure concentrée, et d'une mesure à densité. Nous présentons la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ dans le diagramme du bas. La mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est une mesure par morceaux permettant de générer une mesure nulle sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[3, +\infty[$. La restriction de cette mesure sur $[0, 3]$ est une mesure constituée d'une mesure de Dirac localisée à l'instant 1.25 de masse 0.5, et d'une mesure à densité. Dans le cadre de notre API, nous avons défini dans la section A.3 quelques tests unitaires sur cette mesure par morceaux.

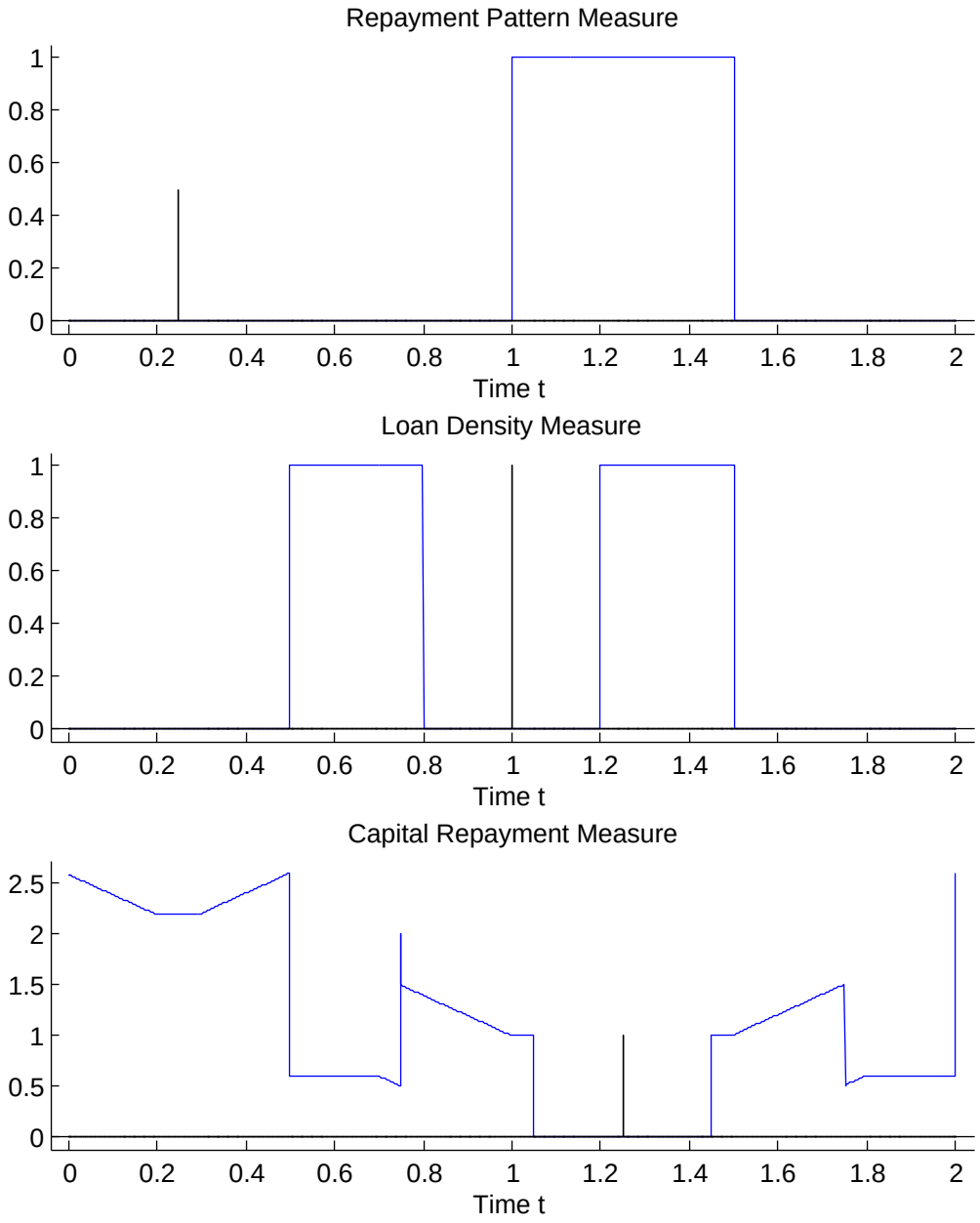

FIGURE III.8 – La convolution des deux mesures par morceaux $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ est définie par la mesure concentrée $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée en haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée au milieu, et la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est présentée en bas.

III.4 Validation du modèle financier par des simulations numériques

Nous voulons montrer que le modèle financier à taux fixe reflète une réalité financière. Pour cela, nous allons le valider par des simulations numériques définies dans les Figures III.9 et III.10. Dans un premier temps, nous détaillons la simulation numérique III.9. Pour cela, nous définissons la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ par la mesure à densité dont la densité est une fonction constante sur l'intervalle $[2, 6]$ de constante égale $\frac{1}{4}$, et nulle ailleurs. Nous précisons que cette densité γ est obtenue avec $S = 2$ et $\Theta_\gamma = 4$ dans l'équation (III.8). Nous avons présenté cette densité γ dans la Figure III et nous la présentons dans le diagramme en haut de la Figure III.9.

Ensuite, nous définissons la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ (voir le deuxième diagramme du haut présenté dans la Figure III.9) par une mesure concentrée, concentrée à l'instant 1.25 de masse 1, et concentrée à l'instant 2.25 de masse 2. La mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ signifie que nous empruntons la somme 1 à l'instant 1.25, et que nous empruntons la somme 2 à l'instant 2.25. Plus formellement :

$$\tilde{\kappa}_E = \delta_{t=1.25} + 2 \times \delta_{t=2.25}. \tag{III.61}$$

Nous rappelons que nous avons justifié comment calculer la convolution d'une mesure à densité et d'une mesure de Dirac dans la sous-section III.3.2. Nous voulons maintenant justifier comment calculer la mesure convolée $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ de la mesure $\tilde{\gamma}$ étant une mesure à densité, et de la mesure $\tilde{\kappa}_E$ étant une somme de deux mesures de Dirac. La mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est une mesure à densité dont la densité $\rho_{\mathcal{K}}$ est présentée dans le troisième diagramme de la Figure III.9.

La mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est définie par l'action de la mesure $\tilde{\gamma}$ sur la mesure $\tilde{\kappa}_E$. Cet action est définie par deux actions. La première action de la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ sur la première mesure de Dirac $\delta_{t=1.25}$ est une mesure à densité $\tilde{\rho}^1_{\mathcal{K}}$ de densité $\rho^1_{\mathcal{K}}$. Cette densité $\rho^1_{\mathcal{K}}$ est la translaté de la densité γ par la valeur 1.25 définie par :

$$\rho^1_{\mathcal{K}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3.25, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 3.25 \leq t \leq 7.25, \\ 0 & \text{si } t > 7.25. \end{cases} \tag{III.62}$$

La deuxième action de la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ sur la deuxième mesure de Dirac $2 \times \delta_{t=2.25}$ est une mesure à densité $\tilde{\rho}^2_{\mathcal{K}}$ de densité $\rho^2_{\mathcal{K}}$. Cette densité $\rho^2_{\mathcal{K}}$ est la translaté de la densité $2 \times \gamma$ par la valeur 2.25 définie par :

$$\rho^2_{\mathcal{K}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4.25, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 4.25 \leq t \leq 8.25, \\ 0 & \text{si } t > 8.25. \end{cases} \tag{III.63}$$

La mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est une mesure à densité de densité $\rho_{\mathcal{K}}$ puisqu'elle est la mesure convolée de la mesure à densité $\tilde{\gamma}$ et de la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$. Cette densité $\rho_{\mathcal{K}}$ est la somme des deux densités $\rho^1_{\mathcal{K}}$ et $\rho^2_{\mathcal{K}}$ définies respectivement dans les relations (III.62) et (III.63). Par conséquent, la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est une fonction constante par morceaux de constante $\frac{1}{4}$ sur la période de temps $[3.25, 4.25[$, de constante $\frac{3}{4}$ sur la période de temps $[4.25, 7.25]$, de constante $\frac{1}{2}$ sur la période de temps $]7.25, 8.25]$, et nulle ailleurs. Elle signifie que nous n'avons pas commencé de rembourser avant l'instant 3.25. Elle signifie aussi que nous avons remboursé uniformément :

la somme $\frac{1}{4}$ pendant la période de temps $[3.25, 4.25[$, la somme $\frac{3}{4}$ pendant la période de temps $[4.25, 7.25]$, et la somme $\frac{1}{2}$ pendant la période de temps $]7.25, 8.25]$. Elle signifie aussi que nous avons fini de rembourser à partir de l'instant 8.25. Plus formellement :

$$\rho_{\mathcal{K}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3.25, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 3.25 \leq t < 4.25, \\ \frac{3}{4} & \text{si } 4.25 \leq t \leq 7.25, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 7.25 < t \leq 8.25, \\ 0 & \text{si } t > 8.25. \end{cases} \tag{III.64}$$

Nous considérons dans cette simulation que la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}$ est nulle, que le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ à l'instant initial 0 est nul, et que le taux d'emprunt α est de constante 0.1, i.e. $\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_{RD}(0) = 0$, $\alpha = 0.1$. Nous utilisons la relation (III.18) pour calculer le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ présenté dans le quatrième diagramme du haut de la Figure III.9 défini par :

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1.25, \\ 1 & \text{si } 1.25 < t \leq 2.25, \\ 3 & \text{si } 2.25 < t \leq 3.25, \\ 3 - \frac{1}{4}(t - 3.25) & \text{si } 3.25 < t \leq 4.25, \\ 3 - \frac{3}{4}(t - 4.25) & \text{si } 4.25 < t \leq 7.25, \\ 3 - \frac{1}{2}(t - 7.25) & \text{si } 7.25 < t \leq 8.25, \\ 0 & \text{si } t > 8.25. \end{cases} \tag{III.65}$$

Nous constatons que le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est un capital constant de constante 1 sur la période de temps $]1.25, 2.25]$, et de constante 3 sur la période de temps $]2.25, 3.25]$. Ensuite, le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ décroît linéairement à partir de l'instant 3.25 pour s'annuler à partir de l'instant 8.25.

Nous présentons dans le cinquième diagramme de la Figure III.9 la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ de ce qu'il y a à payer à l'établissement financier définie par la somme de deux densités. La première est la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ présentée dans le troisième diagramme de la Figure III.9. La deuxième est la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$. La densité $\rho_{\mathcal{I}}$ est calculée en multipliant le taux d'emprunt α qui égale 0.1 par le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$. Nous pouvons donner une signification financière de cette densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ comme suit. Elle signifie que le paiement est uniforme sur les périodes de temps $]1.25, 2.25]$ et $]2.25, 3.25]$, que le paiement est pratiquement uniforme sur les périodes de temps $]3.25, 4.25]$ et $]7.25, 8.25]$, et que le paiement est décroissante sur la période de temps $]4.25, 7.25]$. Le remboursement total plus les intérêts sur la période de temps $[0, 10]$ est constitué de cinque remboursements définis par :

— Le premier remboursement sur la période de temps $]1.25, 2.25]$ est égal à la somme 0.1.

— Le deuxième remboursement sur la période de temps $]2.25, 3.25]$ est égal à la somme 0.3.

— Le troisième remboursement sur la période de temps $]3.25, 4.25]$ est égal à la somme $\frac{4.3}{8}$ puisque c'est une accumulation de la densité $\frac{1}{4} + 0.1 \times (3 - \frac{1}{4}(t - 3.25))$ sur cette période.

— Le quatrième remboursement sur la période de temps $]4.25, 7.25]$ est égal à la somme $\frac{22.5}{8}$ puisque c'est une accumulation de la densité $\frac{3}{4} + 0.1 \times (3 - \frac{3}{4}(t - 4.25))$ sur cette période.

— Le cinquième remboursement sur la période de temps $]7.25, 8.25]$ est égal à la somme $\frac{3.1}{4}$ puisque c'est une accumulation de la densité $\frac{1}{2} + 0.1 \times (3 - \frac{1}{2}(t - 7.25) - \frac{5}{2})$ sur cette période.

Le remboursement total sur la période de temps $[0, 10]$ est la somme de ces cinques remboursements. Par conséquent, il est égal à la somme $\frac{36.2}{8}$.

Nous présentons dans le sixième diagramme de la Figure III.9 l'instanciation de ce qu'il a à payer à l'établissement financier avec des intérêts mensuels. C'est-à-dire, si nous considérons qu'il y a N_{M} mois de paiement, l'instantiation de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur la période de temps $[0, N_{\mathrm{M}}]$ est définie par N_{M} sommes mensuelles $(SM(j))_{1 \leq j \leq N_{\mathrm{M}}}$. Pour tout entier j compris entre 1 et N_{M}, chaque j^{e} paiement mensuel $SM(j)$ est défini par l'intégration de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur la période de temps qui commence le début du $(j-1)^{\mathrm{e}}$ mois, et qui se termine le début du j^{e} mois. Plus formellement :

$$\forall j \in [\![1; N_{\mathrm{M}}]\!], SM(j) = \int_{\text{Début du } (j-1)^{\mathrm{e}} \text{ mois}}^{\text{Début du } j^{\mathrm{e}} \text{ mois}} (\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}})(s)\, ds. \tag{III.66}$$

Nous voulons maintenant instantier la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur la période de temps $[0, N_{\mathrm{A}}]$ qui est définie par N_{A} sommes annuelles $(SA(j))_{1 \leq j \leq N_{\mathrm{A}}}$. Nous présentons dans le septième diagramme de la Figure III.9 le résultat de cet instantiation. Si j est un entier compris entre 1 et N_{A}, la quantité $SA(j)$ est définie par l'intégration de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur la période de temps qui commence le début de la $(j-1)^{\mathrm{e}}$ année, et qui se termine le début de la j^{e} année pour tout entier j compris entre 1 et N_{A}. Plus formellement :

$$\forall j \in [\![1; N_{\mathrm{A}}]\!], SA(j) = \int_{\text{Début du } (j-1)^{\mathrm{e}} \text{ année}}^{\text{Début du } j^{\mathrm{e}} \text{ année}} (\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}})(s)\, ds. \tag{III.67}$$

Nous allons maintenant détailler la simulation définie dans la Figure III.10 pour montrer la cohérence du modèle financier à taux fixe. Nous allons justifier avec des argumentations mathématiques et financières cette simulation numérique.

Nous définissons la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ par la somme de deux mesures. La première mesure est une mesure à densité dont la densité est une fonction linéaire de pente $\frac{1}{32}$ sur la période de temps $[2, 6]$ prenant la valeur $\frac{1}{16}$ à l'instant $t = 2$, et nulle ailleurs. La deuxième mesure est une mesure de Dirac localisée à l'instant 6.5, de masse $\frac{1}{2}$. Nous présentons la mesure $\tilde{\gamma}$ dans le diagramme en haut de la Figure III.10, et nous l'exprimons sous la forme suivante :

$$\tilde{\gamma} = \frac{t}{32} \mathbb{1}_{[2,6]}(t) dt + \frac{1}{2} \delta_{t=6.5}. \tag{III.68}$$

Nous rappelons que la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ définie dans la relation (III.68) exprime comment rembourser la somme 1 à l'instant 0. Ensuite, nous définissons la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ par la somme d'une mesure à densité dont la densité est la fonction $2 + \sin_{|[0.2,3]}$, et d'une mesure concentrée à l'instant 1.5, de masse 1. Nous présentons la mesure $\tilde{\kappa}_E$ dans le deuxième diagramme du haut de la Figure III.10. Plus formellement :

$$\tilde{\kappa}_E = (2 + \sin(t))\mathbb{1}_{[0.2,3]}(t)dt + \delta_{t=1.5}. \tag{III.69}$$

La mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ définie dans la relation (III.69) signifie que nous n'avons pas commencé d'emprunter avant l'instant 0.2, que nous avons effectué un emprunt sinusoïdal pendant la période de temps $[0.2, 3]$, que nous avons emprunté la somme 1 à l'instant 1.5, et que nous avons fini d'emprunter à partir de l'instant 3.

Comme la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est définie par l'action de la mesure $\tilde{\gamma}$ définie dans la relation (III.68) sur la mesure $\tilde{\kappa}_E$ définie dans la relation (III.69), nous allons utiliser la relation (III.6) pour la calculer. En effet, la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est définie par la somme de deux mesures. La première mesure est une mesure de Dirac localisée à l'instant $t = 8$, de masse $\frac{1}{2}$. La deuxième mesure est une mesure à densité définie par la somme de la translaté de la fonction $t \to \frac{t}{32}\mathbb{1}_{[2,6]}(t)$ par la valeur 1.5, de la translaté de la fonction $1 + \frac{1}{2}\sin_{|[0.2,3]}$ par la valeur 6.5, et de la densité définie par :

$$\frac{1}{32}\int_{[0.2,3]\cap[t-6,t-2]} (t-x)(2+\sin(x))\, dx. \tag{III.70}$$

Nous présentons la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ dans le troisième diagramme de la Figure III.10. Nous constatons que nous remboursons d'une manière croissante sur la période de temps $[2.2, 6.7]$, que nous remboursons uniformément sur la période de temps $[6.7, 7.5]$, et que nous remboursons d'une manière décroissante sur la période de temps $[7.5, 9.5]$. Plus particulièrement, nous remboursons ponctuellement la somme $\frac{1}{2}$ à l'instant 8.

Nous considérons dans cette simulation que la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}$ est nulle, que le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ à l'instant initial 0 est nul, et que le taux d'emprunt α est fixé à 0.07. Nous utilisons la relation (III.18) pour calculer le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ présenté dans le quatrième diagramme du haut de la Figure III.10. En effet, la valeur du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ à l'instant t est la différence de deux accumulations. La première accumulation est définie par l'accumulation de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ entre l'instant initial 0 et l'instant t. La deuxième accumulation est définie par l'accumulation de la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ entre l'instant initial 0 et l'instant t. Nous terminons de rembourser le reste du capital à partir de l'instant 9.5.

Nous présentons dans le cinquième diagramme de la Figure III.10 la densité de paiement d'intérêts qui est calculée en multipliant le taux d'emprunt α égale 0.07 par le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ présenté dans le quatrième diagramme.

Nous présentons dans le sixième diagramme de la Figure III.10 la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ qui est définie par la somme de la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ présentée dans le troisième diagramme, et de la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ dont la densité $\rho_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le cinquième diagramme. La mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ définie la mesure de ce qu'il y a à payer à l'établissement financier. Comme nous commençons de rembourser à partir de l'instant 2.2, et comme nous commençons de rembourser le restant du capital à partir de l'instant 0.2, le paiement à l'établissement financier est très important sur la période de temps $[0.2, 6.7]$. Par ailleurs, le paiement à l'établissement financier est uniforme sur la période de temps $[6.7, 7.5]$. Comme nous remboursons le capital d'une manière décroissante sur la période de temps $[7.5, 9.5]$, et comme les intérêts sont faibles pendant cette période, le paiement à l'établissement financier décroît pendant cette période.

Nous présentons dans le septième diagramme de la Figure III.10 l'instanciation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ sur la période de temps $[0, N_{\mathrm{M}}]$ définie par N_{M} sommes mensuelles $(SM(j))_{1\leq j\leq N_{\mathrm{M}}}$:

$$\forall j \in [\![1; N_{\mathrm{M}}]\!], SM(j) = \int_{\text{Début du } (j-1)^{\text{e}} \text{ mois}}^{\text{Début du } j^{\text{e}} \text{ mois}} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}. \tag{III.71}$$

Nous présentons dans le dernier diagramme de la Figure III.10 l'instanciation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ sur la période de temps $[0, N_{\mathrm{A}}]$ définie par N_{A} sommes annuelles $(SA(j))_{1 \leq j \leq N_{\mathrm{A}}}$:

$$\forall j \in [\![1; N_{\mathrm{A}}]\!], SA(j) = \int_{\text{Début du } (j-1)^{\text{e}} \text{ année}}^{\text{Début du } j^{\text{e}} \text{ année}} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}. \tag{III.72}$$

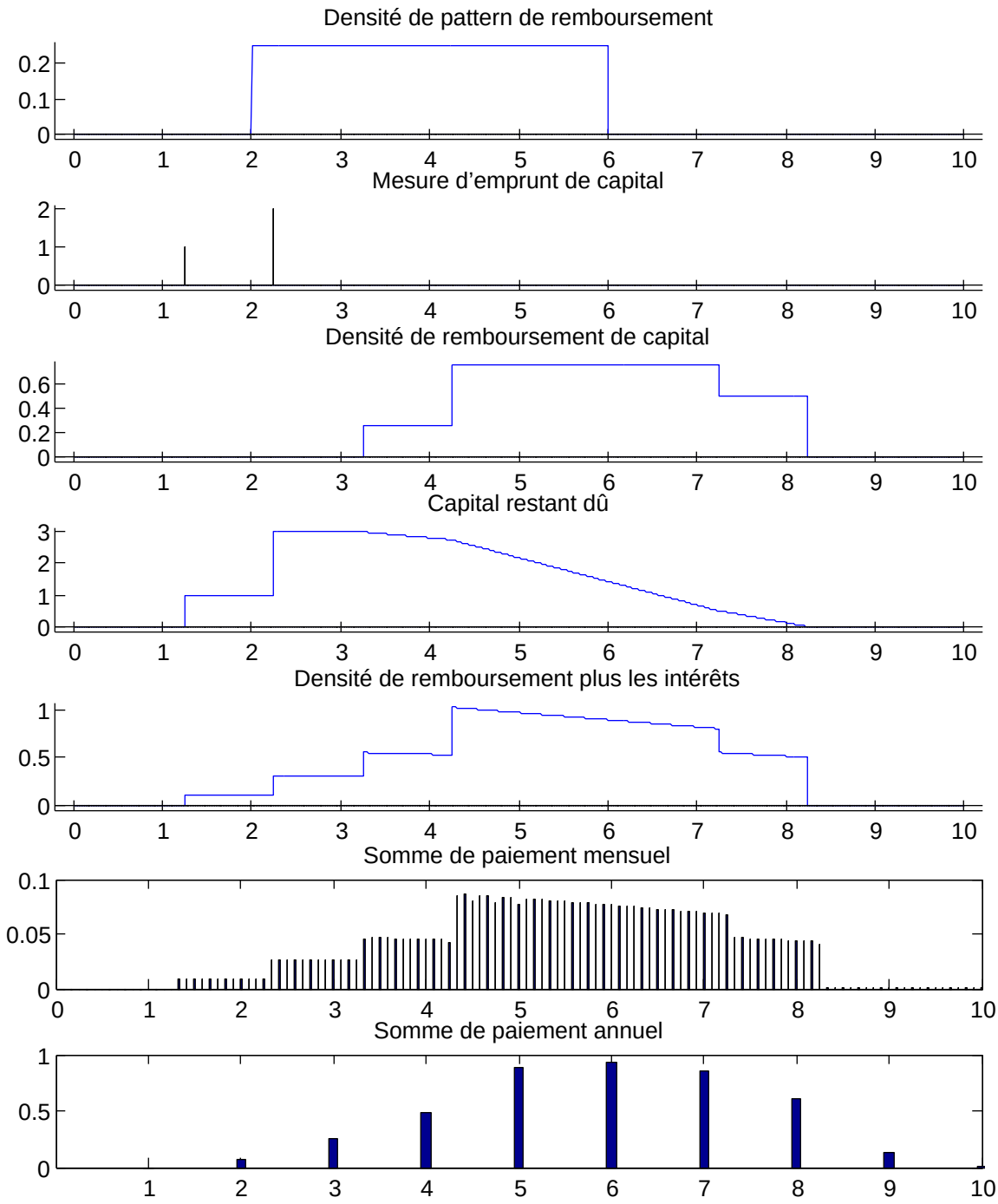

FIGURE III.9 – Première simulation numérique pour valider le modèle financier. La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le premier diagramme du haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le deuxième diagramme, la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ est présentée dans le troisième diagramme, le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est présenté dans le quatrième diagramme, la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le cinquième diagramme, l'instantiation de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité mensuelle est présentée dans le sixième diagramme, et l'instantiation de la densité $\rho_{\mathcal{K}} + \rho_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité annuelle est présentée dans le septième diagramme.

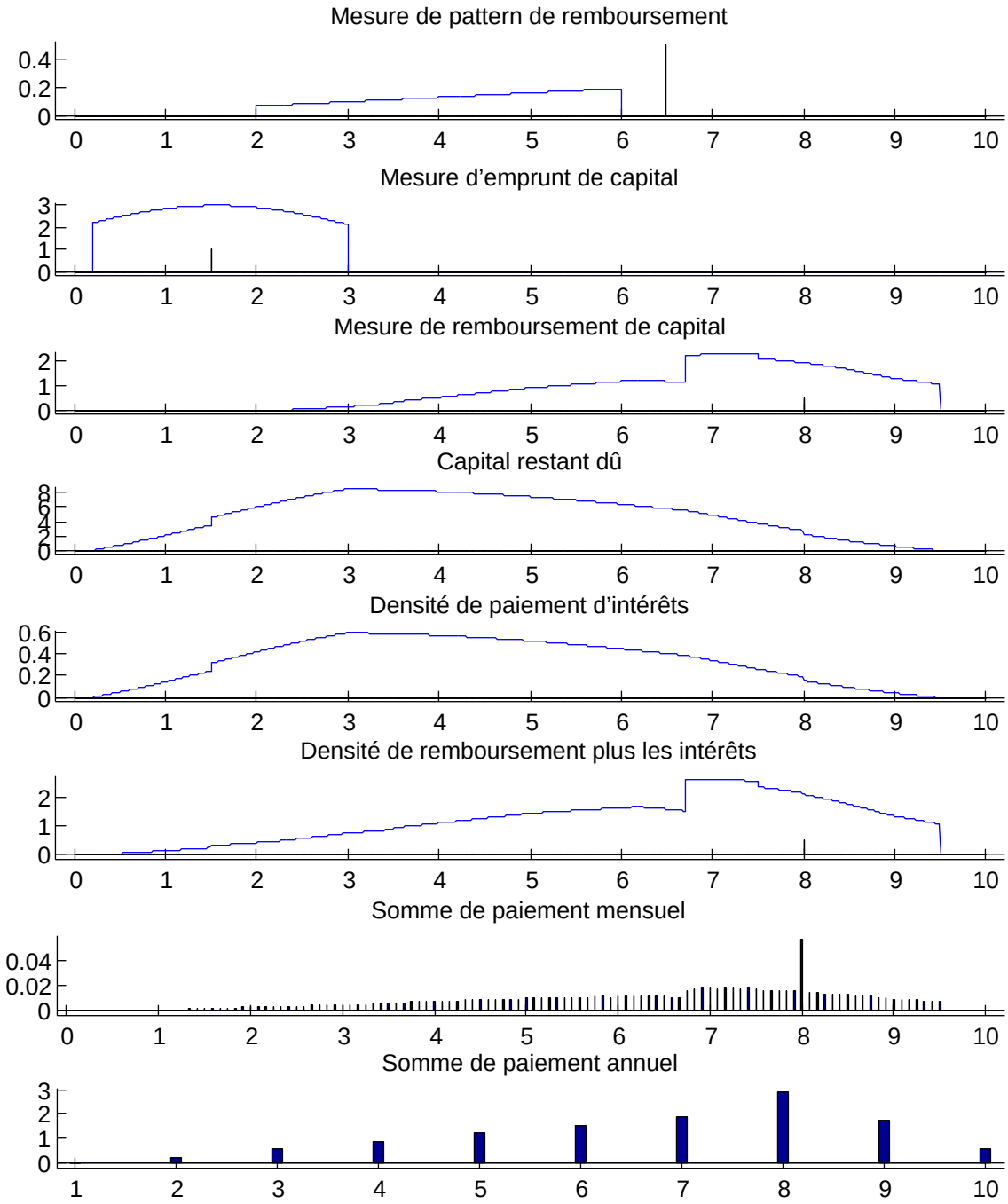

FIGURE III.10 – Deuxième simulation numérique pour valider le modèle financier. La mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est présentée dans le premier diagramme du haut, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le deuxième diagramme, la mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ est présentée dans le troisième diagramme, le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est présenté dans le quatrième diagramme, la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le cinquième diagramme, la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ est présentée dans le sixième diagramme, l'instantiation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité mensuelle est présentée dans le septième diagramme, et l'instantiation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}} + \tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ sur une périodicité annuelle est présentée dans le huitième diagramme.

Bibliographie

[1] Anne Hanselmann, Oliver C Schrempf et Uwe D Hanebeck : Optimal parametric density estimation by minimizing an analytic distance measure. *In Information Fusion, 2007 10th International Conference on*, pages 1–8. IEEE, 2007.

[2] H Neunzert et J Wick : Theoretische und numerische ergebnisse zur nichtlinearen vlasov-gleichung. *In Numerische Lösung nichtlinearer partieller Differential-und Integrodifferentialgleichungen*, pages 159–185. Springer, 1972.

[3] Stéphane Mischler et Clément Mouhot : Kac's program in kinetic theory. *Inventiones mathematicae*, 193(1):1–147, 2013.

[4] Stéphane Mischler, Clément Mouhot et Bernt Wennberg : A new approach to quantitative propagation of chaos for drift, diffusion and jump processes. *Probability Theory and Related Fields*, 161(1-2):1–59, 2015.

[5] C Villani : Limite de champ moyen. *Cours de DEA*, 2002:49, 2001.

IV Les modèles financiers à taux variable

Sommaire

IV.1 Introduction **70**
IV.2 Le modèle financier à taux variable **70**
IV.3 Le modèle financier à taux variable, fixé aux instants de l'emprunt **71**
IV.3.1 Résultats sur des densités 71
IV.3.2 Résultats sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$ 77
IV.4 Le modèle financier à taux variable aux instants de l'emprunt . . . **78**
IV.4.1 Résultats sur des densités 78
IV.4.2 Résultats sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$ 78
IV.5 Le modèle financier au pattern de remboursement variable **79**
Bibliographie **81**

Résumé. Nous avons construit le modèle financier à taux fixe dans le chapitre III. Ce modèle est caractérisé par un taux d'intérêt α fixe. Dans ce chapitre, nous construisons plusieurs modèles financiers. Ces nouveaux modèles utilisent un autre paradigme impliquant la modélisation en temps continu. Pour cela, nous utilisons des outils mathématiques de type d'intégration et de crochet de dualité. Il y a le modèle financier à taux variable (qui est une évolution simple du celui à taux fixe). Il y a aussi le modèle financier à taux variable qui permet de modéliser un taux d'emprunt fixe défini à la date d'emprunt. Nous généralisons ce dernier modèle sur un taux d'intérêt α qui dépend de la date d'emprunt. Nous finalisons notre chapitre en décrivant le modèle financier au pattern de remboursement variable.

Nous donnons dans chaque modèle financier l'équation différentielle ordinaire pour caractériser l'évolution du capital restant dû k_{RD} au cours du temps. Par ailleurs, nous donnons aussi les expressions de certaines variables financières comme la mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$. Plus précisément, nous donnons ces expressions pour des mesures et pour des densités.

IV.1 Introduction

La théorie de la finance fournit un nombre important de modèles dont la structure dépend du taux d'intérêt. On peut, par exemple, classer les modèles en fonction du nombre de variables financières qui interviennent dans le modèle. Dans notre modèle financier continu en temps, nous classons nos modèles en fonction du caractère déterministe du taux d'intérêt. Dans [1], nous montrons qu'un modèle financier repose le plus souvent sur une représentation formalisée des prix des actifs financiers ou des taux d'intérêt. Une telle représentation abstraite peut être recherchée dans une perspective pour améliorer la gestion financière.

Nous construirons le modèle financier à taux variable pour donner à l'emprunteur la possibilité de modifier en cours de route le montant de son emprunt pour s'engager à rembourser le capital emprunté ainsi que des intérêts selon des modalités et les règles de la finance publique. Ceci permet notamment de mettre à disposition des particuliers des produits comme des emprunts à taux variable, que les établissements bancaires synthétisent à partir de refinancements à taux variable.

Des taux d'intérêt élevés signalent que les organismes publics exigent un dédommagement élevé de la part des emprunteurs. Ce qui conduit les emprunteurs à éviter de consommer au moment présent et à reporter cette consommation à plus tard. Le taux d'intérêt est gouverné par l'offre et la demande, et reflète la politique monétaire. Le taux d'intérêt engendre un risque que l'emprunteur fasse défaut, et soit donc dans l'impossibilité de rembourser sa dette.

IV.2 Le modèle financier à taux variable

Nous rappelons que nous avons construit le modèle financier à taux fixe dans le chapitre III. Ce modèle est caractérisé par un taux d'intérêt α fixe. C'est-à-dire qu'il est constant au cours du temps. Si nous considérons maintenant que la variable α varie au cours du temps t, le modèle devient un modèle financier à taux variable. Ce qui signifie que le nouveau taux d'intérêt α dépend du temps t, et nous le notons $\alpha(t)$.

La mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ est une mesure à densité dont la densité $\rho_{\mathcal{I}}$ est liée au capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ par la relation de proportionnalité suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha(t)\mathcal{K}_{RD}(t). \tag{IV.1}$$

Comme l'évolution du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ est définie dans la relation (III.17) par l'équation différentielle ordinaire dont la solution est exprimée dans la relation (III.19), la relation (IV.1) devient :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha(t)\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E - \alpha(t)\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} + \alpha(t)\int_{t}^{+\infty} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}. \tag{IV.2}$$

Par ailleurs, comme la densité de dépense algébrique σ est définie dans la relation (III.35) pour le modèle financier à taux fixe, nous pouvons l'exprimer dans le modèle financier à taux variable en échangeant la variable α par $\alpha(t)$:

$$\sigma(t) = \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \alpha(t)\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds - \alpha(t)\int_{t}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}(s)\, ds - \rho_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}(t). \tag{IV.3}$$

IV.3 Le modèle financier à taux variable, fixé aux instants de l'emprunt

Dans la réalité financière, le taux fixe associé à un emprunt n'est pas identique au cours du temps. En effet, il est défini à l'instant de l'emprunt. L'objectif dans cette section est d'enrichir le modèle construit dans la section IV.2 afin de tenir compte de cette réalité. Nous appelons ce nouveau modèle le modèle financier à taux constant fixé aux instants de l'emprunt. Nous allons le construire pour des mesures à densité. Ensuite, nous le généralisons pour des mesures quelconques.

IV.3.1 Résultats sur des densités

Nous définissons $k_{RD}(t,s)$ par la densité de capital restant dû à l'instant t associée à la somme empruntée à l'instant s. Nous précisons que $k_{RD}(t,s)$ est une densité par rapport à la variable s. Autrement dit, la somme du capital restant à payer à l'instant t associée à des sommes empruntées entre les deux instants s_1 et s_2 est définie par :

$$\int_{s_1}^{s_2} k_{RD}(t,s)\, ds. \tag{IV.4}$$

Nous allons maintenant montrer que le capital restant dû k_{RD} est lié à la densité d'emprunt de capital κ_E, et à la densité de pattern de remboursement γ par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dk_{RD}(t,s)}{dt} = -\gamma(t-s)\kappa_E(s), \tag{IV.5}$$

dont la condition initiale est donnée par la relation suivante :

$$k_{RD}(s,s) = \kappa_E(s), \tag{IV.6}$$

qui exprime que la valeur du capital restant dû k_{RD} à l'instant s est la somme empruntée au même instant s.

Pour justifier l'équation différentielle ordinaire définie dans la relation (IV.5), nous rappelons que la densité de pattern de remboursement γ décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant 0. Ce qui implique que lorsque A représente une somme empruntée à l'instant s, $\gamma(t-s)\times A$ représente le remboursement à l'instant t de la somme empruntée A. Par conséquent, étant donné une densité d'emprunt κ_E, $\gamma(t-s)\kappa_E(s)$ représente la densité de ce qui est remboursé à l'instant t associée à ce qui est emprunté à l'instant s. Par ailleurs, le signe $-$ impliqué dans la relation (IV.5) signifie un remboursement négatif de $\gamma(t-s)\kappa_E(s)$. Nous concluons que nous avons justifié la relation (IV.5).

La solution de l'équation différentielle ordinaire définie dans la relation (IV.5) peut s'exprimer par :

$$k_{RD}(t,s) = k_{RD}(s,s) - \int_s^t \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy. \tag{IV.7}$$

Nous remplaçons la condition (IV.6) dans la relation (IV.7) pour obtenir l'expression du capital restant dû k_{RD} sous la forme suivante :

$$k_{RD}(t,s) = \kappa_E(s) - \int_s^t \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy. \tag{IV.8}$$

Nous rappelons que nous avons défini l'expression du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ dans la relation (III.18). Nous allons maintenant montrer que la définition (IV.8) du capital restant dû k_{RD} est consistante par rapport à la définition du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ du modèle financier à taux fixe. Pour cela, nous allons exprimer le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ en fonction de celui k_{RD}. C'est-à-dire que nous allons montrer l'égalité suivante :

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathrm{I}}) + \int_{t_{\mathrm{I}}}^t k_{RD}(t,s)\, ds - \int_{t_{\mathrm{I}}}^t \rho_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}(s)\, ds. \tag{IV.9}$$

Nous rappelons que nous avons défini la densité de remboursement $\rho_{\mathcal{K}}$ dans la relation (III.15) par l'égalité suivante :

$$\rho_{\mathcal{K}}(y) = \kappa_E \star \gamma(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, ds. \tag{IV.10}$$

Comme la densité de pattern de remboursement γ a un support compact dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$, alors elle est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Nous obtenons $s \leq y$ pour les variables s et y définies dans la relation (IV.10). Par ailleurs, comme nous choisissons une densité d'emprunt κ_E à support compact dans l'intervalle $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$, nous obtenons $t_{\mathrm{I}} \leq s$. Par conséquent, la relation (IV.10) devient :

$$\rho_{\mathcal{K}}(y) = \kappa_E \star \gamma(y) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, ds. \tag{IV.11}$$

Nous utilisons la relation (III.18) pour exprimer le capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ en fonction de la densité d'emprunt de capital κ_E, de la densité de pattern de remboursement γ, et de la densité de remboursement de la dette courante $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}$

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E(y)\, dy - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \rho_{\mathcal{K}}(y)\, dy - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(y)\, dy. \tag{IV.12}$$

En utilisant la relation (IV.11), la relation (IV.12) devient :

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E(s)\, ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \left(\int_{t_{\mathtt{I}}}^{y} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, ds \right) dy - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds. \tag{IV.13}$$

Nous voulons maintenant montrer l'égalité suivante :

$$\int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \left(\int_{t_{\mathtt{I}}}^{y} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, ds \right) dy = \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \left(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy \right) ds. \tag{IV.14}$$

Pour cela, nous allons montrer l'égalité d'ensemble suivante :

$$\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq y, t_{\mathtt{I}} \leq y \leq t\} = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq t, s \leq y \leq t\}. \tag{IV.15}$$

Considérons qu'un couple $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ est dans l'ensemble $\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq y, t_{\mathtt{I}} \leq y \leq t\}$. Nous avons : $t_{\mathtt{I}} \leq v \leq w$ et $t_{\mathtt{I}} \leq w \leq t$. Par conséquent, nous avons $t_{\mathtt{I}} \leq v \leq t$ et $v \leq w \leq t$. Nous obtenons l'inclusion suivante :

$$\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq y, t_{\mathtt{I}} \leq y \leq t\} \subset \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq t, s \leq y \leq t\}. \tag{IV.16}$$

Supposons qu'un couple $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ est dans l'ensemble $\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq t, s \leq y \leq t\}$. Nous avons $t_{\mathtt{I}} \leq v \leq t$ et $v \leq w \leq t$. Par conséquent, nous avons $t_{\mathtt{I}} \leq v \leq w$ et $t_{\mathtt{I}} \leq w \leq t$. D'où l'inclusion réciproque :

$$\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq t, s \leq y \leq t\} \subset \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 / t_{\mathtt{I}} \leq s \leq y, t_{\mathtt{I}} \leq y \leq t\}. \tag{IV.17}$$

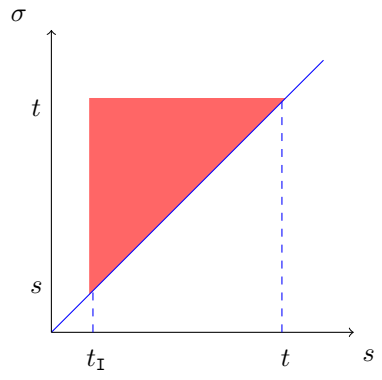

FIGURE IV.1 – Présentation graphique de l'égalité des domaines définie dans la relation (IV.15)

Nous concluons que les inclusions définies dans les relations (IV.16) et (IV.17) impliquent l'égalité (IV.15). Ensuite, nous utilisons le théorème de Fubini-Tonelli en tenant compte de l'égalité (IV.15) pour obtenir l'égalité (IV.14). Cette égalité (IV.14) est injectée dans la relation (IV.13) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{RD}(t) &= \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E(s)\, ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \left(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy \right) ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds, \\ &= \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \left(\kappa_E(s) - \int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy \right) ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds.\end{aligned} \tag{IV.18}$$

Nous injectons l'expression (IV.8) de la densité k_{RD} dans la relation (IV.18) pour obtenir la relation suivante :

$$\mathcal{K}_{RD}(t) = \mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}}) + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} k_{RD}(t,s)\, ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds. \tag{IV.19}$$

La relation (IV.19) exprime que la valeur du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ à l'instant t est la somme de deux quantités moins le remboursement de la dette courante pendant la période de temps $[t_{\mathtt{I}}, t]$. La première quantité est la valeur $\mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}})$ du capital restant dû à l'instant initial $t_{\mathtt{I}}$. La deuxième quantité est la somme du capital restant à payer à l'instant t associée à des sommes empruntées entre les deux instants $t_{\mathtt{I}}$ et t.

Nous définissons la densité $r_{\mathcal{I}}(t,s)$ par rapport aux variables t et s par la densité de paiement d'intérêts à l'instant t liée à la somme empruntée à l'instant s. La densité de paiement d'intérêts $r_{\mathcal{I}}$ est liée au capital restant dû k_{RD} par la relation de proportionnalité suivante :

$$r_{\mathcal{I}}(t,s) = \alpha_{\text{SAB}}(s)\, k_{RD}(t,s), \tag{IV.20}$$

où $\alpha_{\text{SAB}}(s)$ est la valeur du taux de l'emprunt à l'instant s. À l'aide de la relation (IV.8) du capital restant dû k_{RD}, la relation (IV.20) devient :

$$r_{\mathcal{I}}(t,s) = \alpha_{\text{SAB}}(s)\kappa_E(s) - \alpha_{\text{SAB}}(s) \int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy. \tag{IV.21}$$

Nous allons maintenant montrer que la densité de paiement d'intérêts $r_{\mathcal{I}}$ définie dans la relation (IV.21) est consistante par rapport à l'expression de la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ du modèle financier à taux fixe, définie dans la relation (III.22). Pour cela, nous allons calculer la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ en fonction de la densité $r_{\mathcal{I}}$. En effet, comme la variable s exprime l'instant de l'emprunt, nous intégrons la densité de paiement d'intérêts $r_{\mathcal{I}}(t,s)$ par rapport à la variable s pour exprimer la densité $\rho_{\mathcal{I}}$ sous la forme :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} r_{\mathcal{I}}(t,s)\, ds + \rho_{\mathcal{I}}^{\mathtt{I}}(t), \tag{IV.22}$$

où $\rho_{\mathcal{I}}^{\mathtt{I}}$ est une densité donnée, c'est la densité de paiement d'intérêts associée au capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}})$ à l'instant initial $t_{\mathtt{I}}$. En effet, comme la valeur $\mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}})$ et la densité de remboursement de la dette courante $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ sont données, alors la densité $\rho_{\mathcal{I}}^{\mathtt{I}}$ est connue. Les relations (IV.21) et (IV.22) impliquent que la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ s'écrit sous la forme :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\kappa_E(s)\ ds - \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\ dy\Big)ds + \rho_{\mathcal{I}}^{\mathrm{I}}(t). \tag{IV.23}$$

Lorsque le taux d'emprunt α_{SAB} à l'instant s est constante, nous avons $\alpha_{\mathrm{SAB}}(s) = \alpha$ pour n'importe quel instant d'emprunt s. La relation (IV.23) devient :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \kappa_E(s)\ ds - \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\ dy\Big)ds + \rho_{\mathcal{I}}^{\mathrm{I}}(t), \tag{IV.24}$$

qui est exactement la même expression de la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ définie dans la relation (III.22) par

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \kappa_E(s)\ ds - \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\ dy\Big)ds + \alpha \int_{t}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}(s)\ ds, \tag{IV.25}$$

où la densité $\rho_{\mathcal{I}}^{\mathrm{I}}$ est définie par :

$$\rho_{\mathcal{I}}^{\mathrm{I}}(t) = \alpha \int_{t}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathrm{I}}(s)\ ds. \tag{IV.26}$$

En permutant la variable s par la variable y dans le terme :

$$\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\ dy\Big)ds, \tag{IV.27}$$

nous obtenons le terme suivant :

$$\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\gamma(y-s)\kappa_E(s)\ ds\Big)dy. \tag{IV.28}$$

En effet, nous avons utilisé le théorème de Fubini-Tonelli en tenant compte de l'égalité d'ensemble définie dans la relation (IV.15). Finalement, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\ dy\Big)ds = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\gamma(y-s)\kappa_E(s)\ ds\Big)dy. \tag{IV.29}$$

En utilisant la relation (IV.29), l'expression (IV.24) de la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ se met sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\kappa_E(s)\ ds - \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\gamma(y-s)\kappa_E(s)\ ds\Big)dy + \rho_{\mathcal{I}}^{\mathrm{I}}(t). \tag{IV.30}$$

Nous voulons maintenant exprimer la densité de dépense algébrique $\sigma_{\mathcal{I}}$ du modèle financier à taux variable qui est une densité par rapport aux variables t et s. Pour cela, nous remplaçons l'expression (III.17) de la variation du capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}$ dans l'équation d'équilibre (III.33) pour exprimer la densité de dépense algébrique σ du modèle financier à taux fixe sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \frac{d\mathcal{K}_{RD}(t)}{dt} - \rho_{\mathcal{I}}(t). \tag{IV.31}$$

Nous allons nous reposer sur l'expression de la densité σ définie dans la relation (IV.31) pour exprimer la densité de dépense algébrique $\sigma_{\mathcal{I}}$. La densité $\sigma_{\mathcal{I}}$ est définie par la variation du capital restant dû k_{RD} par rapport à la variable temporelle $t > s$, plus la même variation lorsque $t = s$ moins deux quantités. La première quantité $r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ est la densité de remboursement de la dette courante à l'instant t associée à un emprunt effectué à l'instant s. La deuxième quantité $r_{\mathcal{I}}$ est la densité de paiement d'intérêts définie dans la relation (IV.21). Plus formellement :

$$\sigma_{\mathcal{I}}(t,s) = \frac{dk_{RD}(t,s)}{dt} + \frac{dk_{RD}(s,s)}{ds} - r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t,s) - r_{\mathcal{I}}(t,s). \tag{IV.32}$$

Nous précisons que la variable s signifie l'instant de l'emprunt. Pour montrer la cohérence de l'égalité définie dans la relation (IV.32), nous intégrons la densité de dépense algébrique $\sigma_{\mathcal{I}}$ par rapport à la variable s pour exprimer la densité σ sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \sigma_{\mathcal{I}}(t,s)\, ds + \sigma^{I}(t), \tag{IV.33}$$

où σ^{I} est une densité à déterminer, c'est la densité de dépense algébrique associée au capital restant dû $\mathcal{K}_{RD}(t_{\mathtt{I}})$ à l'instant initial $t_{\mathtt{I}}$.

$$\sigma(t) = -\int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \gamma(t-s)\kappa_E(s)\, ds + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} d\kappa_E - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t,s)\, ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} r_{\mathcal{I}}(t,s)\, ds + \sigma^{I}(t). \tag{IV.34}$$

Nous utilisons la relation (IV.11) pour remplacer le premier terme de l'égalité (IV.34) par l'opposé de la densité de remboursement $-\kappa_E \star \gamma$. Ensuite, nous utilisons l'expression (IV.21) de la densité de paiement d'intérêts $r_{\mathcal{I}}$ pour que la relation (IV.34) devienne :

$$\begin{aligned}\sigma(t) = \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \kappa_E(t_{\mathtt{I}}) - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t,s)\, ds - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\kappa_E(s)\, ds \\ + \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \alpha_{\mathrm{SAB}}(s)\Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy\Big) ds + \sigma^{I}(t).\end{aligned} \tag{IV.35}$$

Lorsque nous intégrons la densité de remboursement de la dette courante $r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ par rapport à la variable d'emprunt s, nous obtenons :

$$\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t) = \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t,s)\, ds + \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t_{\mathtt{I}}). \tag{IV.36}$$

Lorsque le taux d'emprunt α_{SAB} à l'instant s est constante, nous utilisons la relation (IV.36) pour simplifier la densité σ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \kappa_E(t_{\mathtt{I}}) - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} r^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t,s)\, ds - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \kappa_E(s)\, ds \\ &\quad + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \Big(\int_{s}^{t} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, dy\Big) ds + \sigma^{I}(t), \\ &= \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t) - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \Big(\kappa_E(s) - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{y} \gamma(y-s)\kappa_E(s)\, ds\Big)\, dy \\ &\quad - \kappa_E(t_{\mathtt{I}}) + \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t_{\mathtt{I}}) + \sigma^{I}(t), \\ &= \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t) - \kappa_E(t_{\mathtt{I}}) + \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t_{\mathtt{I}}) + \sigma^{I}(t).\end{aligned} \tag{IV.37}$$

Nous obtenons exactement la même expression de la densité de dépense algébrique σ définie dans la relation (III.35), où la densité σ^I est définie par :

$$\sigma^I(t) = \kappa_E(t_{\mathtt{I}}) - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t_{\mathtt{I}}) - \alpha \int_t^{\Theta_{\max}} \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(s)\, ds. \tag{IV.38}$$

Nous pouvons justifier la consistance de la densité σ^I définie dans la relation (IV.38) comme suit. Nous utilisons la relation (IV.37) pour obtenir la valeur de la densité σ à l'instant $t_{\mathtt{I}}$ sous la forme suivante :

$$\sigma(t_{\mathtt{I}}) = -\kappa_E \star \gamma(t_{\mathtt{I}}) + \sigma^I(t_{\mathtt{I}}). \tag{IV.39}$$

En conséquence, nous utilisons la relation (IV.38) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\sigma(t_{\mathtt{I}}) = \kappa_E(t_{\mathtt{I}}) - \kappa_E \star \gamma(t_{\mathtt{I}}) - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t_{\mathtt{I}}) - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(s)\, ds. \tag{IV.40}$$

La relation (IV.40) exprime la densité σ définie dans la relation (III.35) à l'instant initial $t_{\mathtt{I}}$. D'où la consistance de la densité σ^I.

IV.3.2 Résultats sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$

Nous rappelons que nous avons exprimé la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ définie dans la relation (IV.30) pour des mesures à densité. Nous allons généraliser l'expression de la densité $\rho_{\mathcal{I}}$ pour des mesures qui ne sont pas nécessairement des mesures à densité. Supposons que les mesures $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\gamma}$ sont respectivement dans l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ et $\mathcal{M}([0, \Theta_\gamma])$. La densité $\rho_{\mathcal{I}}$ se met sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \left\langle \tilde{\kappa}_E, \alpha_{\mathrm{SAB}|[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle - \left\langle \tilde{\gamma} \star (\alpha_{\mathrm{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\mathtt{I}},y[}, \mathbb{1}_{[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle + \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{I}}(t). \tag{IV.41}$$

Nous voulons maintenant montrer que les crochets de dualité exprimés par la relation (IV.41) sont bien définis. Pour cela, nous rappelons dans la section II.3 que nous avons exposé nos objectifs concernant la mesure de Dirac, qui sont nécessaires pour notre modélisation. Ces objectifs permettent que la valeur de l'action d'une mesure quelconque sur un champ soit définie. En effet, lorsque $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\gamma} \star (\alpha_{\mathrm{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\mathtt{I}},y[}$ sont des mesures concentrées, la valeur de l'action de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ sur le champ $\alpha_{\mathrm{SAB}|[t_{\mathtt{I}},t[}$ et la valeur de l'action de la mesure $\tilde{\gamma} \star (\alpha_{\mathrm{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\mathtt{I}},y[}$ sur le champ $\mathbb{1}_{[t_{\mathtt{I}},t[}$ sont définies. Les valeurs de ces actions sont définies en utilisant la relation (II.29). Par conséquent, la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{I}} = \left\langle \tilde{\kappa}_E, \alpha_{\mathrm{SAB}|[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle dt - \left\langle \tilde{\gamma} \star (\alpha_{\mathrm{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\mathtt{I}},y[}, \mathbb{1}_{[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle dt + \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}, \tag{IV.42}$$

où $\left\langle \tilde{\kappa}_E, \alpha_{\mathrm{SAB}|[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle dt$ est une mesure à densité dont la densité est la fonction

$$t \mapsto \left\langle \tilde{\kappa}_E, \alpha_{\mathrm{SAB}|[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle, \tag{IV.43}$$

et où $\left\langle \tilde{\gamma} \star (\alpha_{\mathrm{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\mathtt{I}},y[}, \mathbb{1}_{[t_{\mathtt{I}},t[} \right\rangle dt$ est une mesure à densité dont la densité est la fonction

$$t \mapsto \left\langle \tilde{\gamma} \star (\alpha_{\text{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\text{I}}, y[}, \mathbb{1}_{[t_{\text{I}}, t[} \right\rangle. \tag{IV.44}$$

Nous allons maintenant donner un exemple pour montrer comment nous avons calculé la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ pour des mesures concentrées. Plus précisément, lorsque $\tilde{\kappa}_E$ est une mesure de Dirac localisée à l'instant t, i.e. $\tilde{\kappa}_E = \delta_t$, la valeur de l'action de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ sur le champ $\alpha_{\text{SAB}|[t_{\text{I}}, t[}$ est $\lim_{s \to t^+} \alpha_{\text{SAB}|[t_{\text{I}}, t[}$ notée $\alpha_{\text{SAB}}(t^+)$. De même, lorsque $\tilde{\gamma} \star (\alpha_{\text{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\text{I}}, y[}$ est une mesure de Dirac localisée à l'instant t, la valeur de l'action de la mesure $\tilde{\gamma} \star (\alpha_{\text{SAB}} \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\text{I}}, y[}$ sur le champ $\mathbb{1}_{[t_{\text{I}}, t[}$ est nulle. Nous concluons que la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ s'exprime comme :

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{I}} = \alpha_{\text{SAB}}(t^+) \delta_t + \tilde{\rho}^{\text{I}}_{\mathcal{K}}. \tag{IV.45}$$

IV.4 Le modèle financier à taux variable aux instants de l'emprunt

IV.4.1 Résultats sur des densités

Nous pouvons généraliser le modèle financier défini dans la section IV.3 en considérant que la valeur du taux α_{SAB} de l'emprunt est variable. Pour cela, si nous considérons que la variable s est l'instant de l'emprunt et que la variable t est l'instant courant, alors le taux $\alpha_{\text{SAB}}(t, s)$ dépend des deux variables s et t. Si nous définissons α_{SAB} par le taux à l'instant t associé à une somme empruntée à l'instant s, la densité de paiement d'intérêts $r_{\mathcal{I}}$ est liée au capital restant dû k_{RD} par la relation de proportionnalité suivante :

$$r_{\mathcal{I}}(t, s) = \alpha_{\text{SAB}}(t, s)\, k_{RD}(t, s). \tag{IV.46}$$

Comme le capital restant dû k_{RD} est défini dans la relation (IV.8), la relation (IV.46) devient :

$$r_{\mathcal{I}}(t, s) = \alpha_{\text{SAB}}(t, s) \kappa_E(s) - \alpha_{\text{SAB}}(t, s) \int_s^t \gamma(y - s) \kappa_E(s)\, dy. \tag{IV.47}$$

Nous obtenons la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ définie dans la relation (IV.30) sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \int_{t_{\text{I}}}^t \alpha_{\text{SAB}}(t, s) \kappa_E(s)\, ds - \int_{t_{\text{I}}}^t \left(\int_{t_{\text{I}}}^y \alpha_{\text{SAB}}(t, s) \gamma(y - s) \kappa_E(s)\, ds \right) dy + \rho^{\text{I}}_{\mathcal{I}}(t), \tag{IV.48}$$

où la densité $\rho^{\text{I}}_{\mathcal{I}}$ est définie dans la relation (IV.26).

IV.4.2 Résultats sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\text{I}}, \Theta_{\max}])$

Nous rappelons que nous avons défini la mesure de paiement d'intérêts $\tilde{\rho}_{\mathcal{I}}$ dans la relation (IV.45). Nous pouvons généraliser son expression pour un taux $\alpha_{\text{SAB}}(t, s)$ qui dépend des deux variables s et t sous la forme suivante :

$$\tilde{\rho}_{\mathcal{I}} = \left\langle \tilde{\kappa}_E, \alpha_{\text{SAB}}(t, \bullet)_{|[t_{\text{I}}, t[} \right\rangle dt - \left\langle \tilde{\gamma} \star (\alpha_{\text{SAB}}(t, \bullet) \tilde{\kappa}_E)_{|[t_{\text{I}}, y[}, \mathbb{1}_{[t_{\text{I}}, t[} \right\rangle dt + \tilde{\rho}^{\text{I}}_{\mathcal{K}}. \tag{IV.49}$$

IV.5 Le modèle financier au pattern de remboursement variable

Nous voulons enrichir nos modèles financiers en tenant compte d'un pattern de remboursement γ variable. Pour cela, nous considérons que la variable s est l'instant de l'emprunt et que la variable t est l'instant courant. Dans ce contexte, la densité de pattern de remboursement γ signifie qu'elle est dépendante des variables s et t. Afin d'assurer que la somme empruntée à tout instant s sera remboursée, la fonction $\gamma(s, \bullet)$ doit satisfaire l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s, y)\, dy = 1. \tag{IV.50}$$

La densité d'emprunt de capital κ_E et la densité de remboursement de capital $\rho_{\mathcal{K}}$ sont liées par la relation suivante :

$$\rho_{\mathcal{K}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s, t-s)\kappa_E(s)\, ds. \tag{IV.51}$$

Grâce à la relation (IV.50), nous allons montrer la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_E(t)\, dt. \tag{IV.52}$$

En effet, nous utilisons la relation (IV.51) pour obtenir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s, t-s)\kappa_E(s)\, ds \right) dt. \tag{IV.53}$$

Ensuite, nous permutons les variables s et t pour obtenir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\mathcal{K}}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_E(s) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s, t-s)\, dt \right) ds. \tag{IV.54}$$

Nous utilisons la relation (IV.50) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s, t-s)\, dt = 1. \tag{IV.55}$$

Ce qui achève la preuve de la relation (IV.52). Nous voulons tenir en compte d'un variable pattern de remboursement. Pour cela, nous allons nous focaliser sur l'équation (IV.5), dont le second membre est

$$-\gamma(t-s)\kappa_E(s), \tag{IV.56}$$

qui représente la variation temporelle, à l'instant t, de la densité de capital restant dû associée à la somme empruntée à l'instant s. Nous considérons que cette variation à l'instant t dépend de l'instant s où la somme est empruntée. Ce qui signifie que nous considérons des patterns de remboursement

qui peuvent s'écrire sous la forme suivante : $\gamma(s,t)$. Pour cela, nous allons montrer que l'évolution du capital restant dû k_{RD} au cours du temps est décrite par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dk_{RD}(t,s)}{dt} = -\gamma(s,t-s)\kappa_E(s). \tag{IV.57}$$

La densité de pattern de remboursement $\gamma(s,t)$ décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant s en utilisant la définition (IV.51). Ce qui implique que lorsque A représente une somme empruntée à l'instant s, $\gamma(s,t-s)\times A$ représente le remboursement à l'instant t de la somme A. Si nous considérons une densité d'emprunt κ_E, alors la quantité $\gamma(t-s)\kappa_E(s)$ représente la densité de ce qui est remboursé à l'instant t associée à ce qui est emprunté à l'instant s. Le signe négatif de la relation (IV.51) signifie un remboursement négatif de $\gamma(t-s)\kappa_E(s)$. Ce qui justifie la relation (IV.51) .

Pour exprimer que la valeur du capital restant dû k_{RD} à l'instant s est la somme empruntée à l'instant s, nous imposons la condition initiale suivante :

$$k_{RD}(s,s) = \kappa_E(s). \tag{IV.58}$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire définie dans la relation (IV.57) peut s'exprimer par :

$$k_{RD}(t,s) = k_{RD}(s,s) - \int_s^t \gamma(s,y-s)\kappa_E(s)\,dy. \tag{IV.59}$$

Ensuite, nous tenons compte de la condition (IV.58), pour que la solution (IV.8) devienne :

$$k_{RD}(t,s) = \kappa_E(s) - \int_s^t \gamma(s,y-s)\kappa_E(s)\,dy. \tag{IV.60}$$

La densité de paiement d'intérêts $r_{\mathcal{I}}$ à l'instant t liée à la somme empruntée à l'instant s peut s'exprimer comme :

$$r_{\mathcal{I}}(t,s) = \alpha_{\text{SAB}}(s)\kappa_E(s) - \alpha_{\text{SAB}}(s)\int_s^t \gamma(s,y-s)\kappa_E(s)\,dy. \tag{IV.61}$$

D'après la relation (IV.30), la densité de paiement d'intérêts $\rho_{\mathcal{I}}$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\rho_{\mathcal{I}}(t) = \int_{t_{\text{I}}}^t \alpha_{\text{SAB}}(s)\kappa_E(s)\,ds - \int_{t_{\text{I}}}^t \left(\int_{t_{\text{I}}}^y \alpha_{\text{SAB}}(s)\gamma(s,y-s)\kappa_E(s)\,ds\right)dy + \rho_{\mathcal{I}}^{\text{I}}(t). \tag{IV.62}$$

Bibliographie

[1] JP LAURENT : Modèles de prix de produits financiers. 1996.

[2] J-P. Laurent F. Pehau-Parciboula B. Decombe, L. Gelineau : Marché de la dette publique italienne : cas des obligations à taux variable (cct's). Rapport technique, Institut des Actuaires Français, 1992.

[3] *Évaluation d'emprunts à taux variable*, 1993.

V Problème inverse du modèle financier

Sommaire

V.1 Généralités **84**
V.2 Problème inverse dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$ **85**
V.2.1 Définition des opérateurs 85
V.2.2 Compacité d'opérateur 86
V.2.3 Calcul d'opérateur adjoint 92
V.2.4 Opérateurs de non Fredholm 98
V.2.5 Théorème d'inversion 100
V.2.5.1 Points de singularité 102
V.2.5.2 Existence et unicité 106
V.2.5.3 Stabilité de la solution 114
V.2.5.4 Un exemple d'inversion 119
V.3 Problème inverse dans l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$ **120**
V.3.1 Définition des opérateurs 120
V.3.2 Propriétés des opérateurs 121
V.3.3 Théorème d'inversion 124
V.4 Stratégie financière **126**
V.5 Simulation numérique sur le problème inverse **127**
Bibliographie **131**

Résumé. Nous rappelons que nous avons exprimé dans la relation (III.35) la densité de dépense algébrique σ en fonction de la densité d'emprunt κ_E par un calcul direct. Ce calcul est défini par un opérateur mathématique. L'inversion de cet opérateur n'est pas forcément évidente du point de vue numérique. Nous traitons dans ce chapitre ce problème inverse du modèle financier sur différents espaces.

Nous étudions ce problème inverse sur l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ des fonctions de carré intégrable définies sur l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$. Plus précisément, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution sous certaines hypothèses. Cette approche permet d'exprimer la densité κ_E en fonction de la densité σ. Ensuite, nous étendons notre étude du problème inverse sur l'espace de mesure de Radon $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ afin de déterminer la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ en fonction de la mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$.

Nous exploitons cette étude du problème inverse pour montrer comment utiliser notre modèle financier pour élaborer un plan de stratégie financière. Nous l'illustons par des simulations numériques pour montrer qu'il reflète une réalité en matière d'aide à la décision financière.

V.1 Généralités

Soient H et K deux espaces de Hilbert. Formellement, un problème inverse s'exprime sous la forme d'une équation

$$Af = g, \tag{V.1}$$

où $A : H \to K$ représente un opérateur linéaire. On cherche à exprimer f en fonction de g sous la forme suivante : $f = A^{-1}g$. Cette approche est beaucoup plus délicate que le cas direct où l'on cherche simplement à calculer g à partir de f. En effet, même en supposant que g et A sont connus, résoudre $Af = g$ nécessite l'inversion d'un opérateur. Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique. Par ailleurs, de nombreux problèmes se posent concernant l'existence, l'unicité ou la continuité de la solution par rapport à la donnée g. Ces propriétés ont été mises en évidence par J. Hadamard et sont au coeur de la théorie des problèmes inverses. Si elles sont satisfaites, c'est-à-dire si la solution de l'équation (V.1) existe, est unique, et dépend continûment de g, on dira alors que le problème est **bien posé**.

Nous disons que le problème inverse défini par l'équation (V.1) est **bien posé** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

— l'opérateur A est bijectif,
— l'opérateur inverse $A^{-1} : K \to H$ est continu.

Nous disons que le problème inverse défini par l'équation (V.1) est **mal posé** si une des trois conditions suivantes n'est pas satisfaite :

— la solution existe,
— la solution est unique,
— l'opérateur A^{-1} est continu.

La non-existence d'une solution correspond à la situation où l'opérateur A n'est pas surjectif dans K. En supposant qu'une solution existe, le problème d'unicité se pose alors : l'opérateur A peut ne pas être injectif. Dans ce cas, il faut réfléchir à quelle solution parmi celles existantes sera privilégiée. Enfin, le dernier cas, et non des moindres, concerne la non-continuité de l'opérateur inverse $A^{-1} : K \to H$. Dans cette situation, de petites perturbations dans la donnée g peuvent mener à des solutions f radicalement différentes.

Dans cette thèse, nous ne considérerons que des problèmes inverses **mal posés** au sens où l'opérateur n'est pas continûment inversible. Deux données initiales proches en norme peuvent conduire à des solutions radicalement différentes. Nous travaillerons essentiellement avec des opérateurs compacts.

Nous rappelons qu'un opérateur linéaire $A : H \to K$ est compact si l'image par A de chaque ensemble borné dans H est relativement compact dans K.

V.2 Problème inverse dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$

Nous définissons $\mathcal{A} : \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]) \to \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ par l'opérateur qui agit sur la densité d'emprunt κ_E pour exprimer la densité de dépense algébrique σ sous la forme suivante :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}[\kappa_E](t). \tag{V.2}$$

La relation (III.35) permet de définir l'opérateur $\mathcal{A}$ sous la forme :

$$\mathcal{A}[\kappa_E](t) = \kappa_E(t) - \kappa_E \star \gamma(t) - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds - \alpha \int_{t}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\, ds - \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(t). \tag{V.3}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ n'est pas toujours inversible. Nous allons poser le problème dans cette section concernant l'existence, l'unicité ou la continuité de la solution par rapport à la densité σ. Nous allons montrer que ce problème est bien posé sous certaines hypothèses. Pour un réel strictement positif Θ_γ vérifiant l'inégalité suivante :

$$\Theta_\gamma < \Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}, \tag{V.4}$$

nous fixons la densité de pattern de remboursement γ telle que :

$$\gamma \in \mathbb{L}^2([0, \Theta_\gamma]). \tag{V.5}$$

Nous rappelons que nous avons justifié dans la section III.2 ce choix de la densité γ afin que la relation (III.14) soit satisfaite.

V.2.1 Définition des opérateurs

Nous définissons $\mathcal{L} : \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]) \to \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ par l'opérateur qui agit sur la densité d'emprunt κ_E, et qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}[\kappa_E](t) = (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(t) - \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds, \tag{V.6}$$

et nous définissons $\mathcal{D} : \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]) \to \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ par l'opérateur qui agit sur la densité de remboursement de la dette courante $\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$, et qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}](t) = -\alpha \int_t^{\Theta_{\max}} \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(s)\, ds - \rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}(t). \tag{V.7}$$

Nous rappelons que nous avons établi l'expression de la densité de dépense algébrique σ dans la relation (III.35). De cette relation, la densité σ se décompose sous la forme d'une somme des deux opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{D}$ définis respectivement dans les relations (V.6) et (V.7) :

$$\sigma = \mathcal{L}[\kappa_E] + \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}]. \tag{V.8}$$

V.2.2 Compacité d'opérateur

La principale difficulté d'étudier la compacité d'opérateur en dimension infinie est que les boules fermées ne sont jamais compacte. Deux approches peuvent être envisagée pour surmonter cette difficulté. La première est de relaxer la topologie, et de chercher des ensembles compacts pour une topologie plus faible, associée à une notion de convergence faible. La deuxième est la plus directe qui consiste à chercher des critères de compacité. C'est par exemple le cas du théorème d'Ascoli, qui caractérise les sous-ensembles compact de l'ensemble des fonctions continues. Nous nous référons les documents [1, 2, 3] où on illustre leurs applications : d'une part, le calcul des variations, ou de l'optimisation ; d'autre part l'analyse des opérateurs linéaires compacts, qui partagent de nombreuses similitudes avec les applications linéaires en dimension finie. Nous envisageons de choisir la deuxième approche pour entamer notre étude.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien défini. Pour cela, nous allons montrer que lorsque κ_E est dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$, la fonction $\mathcal{L}[\kappa_E]$ est de carré intégrable sur l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$. C'est-à-dire, il suffit de montrer pour toute densité κ_E dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ que nous avons l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} \leq (1 + \mid \alpha \mid (\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}))(1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0, \Theta_\gamma])})\|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])}. \tag{V.9}$$

D'abord, nous appliquons l'inégalité triangulaire à l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par la relation (V.6) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} \leq \|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} + \mid \alpha \mid \times C_E, \tag{V.10}$$

où la quantité C_E est définie, et ensuite est majorée par :

$$\begin{aligned} C_E &= \left\| \int_{t_{\mathtt{I}}}^t \kappa_E(s) - \kappa_E \star \gamma(s)\, ds \right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])}, \\ &= \sqrt{\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathtt{I}}}^t \kappa_E(s) - \kappa_E \star \gamma(s)\, ds \right)^2 dt}, \\ &\leq \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}} \times \|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])}. \end{aligned} \tag{V.11}$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} 1\times \mid \kappa_E(s) - \kappa_E \star \gamma(s) \mid \; ds, \\
&\leq \sqrt{\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} 1^2 \; ds.} \\
&\sqrt{\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\kappa_E(s) - \kappa_E \star \gamma(s)\right)^2 ds}, \\
&\leq \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times \|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}.
\end{aligned} \tag{V.12}$$

En utilisant les relations (V.11) et (V.12), nous avons :

$$C_E \leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}) \times \|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.13}$$

Nous utilisons les relations (V.10) et (V.13) pour obtenir l'inégalité (V.9).

$$\|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \leq (1+ \mid \alpha \mid (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}))\|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.14}$$

Les inégalités triangulaire et de Young impliquent :

$$\begin{aligned}
&\|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \\
&\leq \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])} + \|\kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}, \\
&\leq \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])} + \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])}\|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])}, \\
&\leq (1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])})\|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])}.
\end{aligned} \tag{V.15}$$

Nous utilisons les relations (V.14) et (V.15) pour obtenir l'inégalité (V.9). Ce qui achève la preuve de la continuité de l'opérateur $\mathcal{L}$. Par ailleurs, comme la densité γ vérifie la relation (V.5), alors $\gamma \in \mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])$. Nous en déduisons que cette inégalité a un sens. Nous décomposons l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par la relation (V.6) sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}[\kappa_E] + \tilde{\mathcal{V}}[\kappa_E] = Id_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma]\to\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}, \tag{V.16}$$

où l'opérateur $\tilde{\mathcal{V}} : \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max} - \Theta_\gamma]) \to \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])$ est défini par l'opérateur qui agit sur la densité d'emprunt κ_E, s'écrivant sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{V}}[\kappa_E](t) = \kappa_E \star \gamma(t) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s) \; ds, \tag{V.17}$$

et où l'opérateur $Id_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}$ est l'injection canonique définie de l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])$ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])$:

$$Id_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}[\kappa_E](t) = [\kappa_E](t). \tag{V.18}$$

L'objectif de cette décomposition est de montrer par absurde que l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est pas compact. Pour émerger une contradiction, il suffit pour la suite de montrer que l'opérateur $\tilde{\mathcal{V}}$ est compact dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])$. En effet, si nous le montrerons, et comme nous savons que la somme de deux

opérateurs compacts est compact, nous obtenons que l'opérateur $Id_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}$ définie dans la relation (V.16) est un opérateur compact. Nous obtenons une contradiction puisque l'identité n'est pas un opérateur compact.

Nous rappelons que nous avons défini dans la sous-section II.1.2 $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ par l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles et à support inclus dans l'intervalle $[t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}]$. Nous avons muni l'espace $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ de la norme L^∞ définie par :

$$\forall\phi\in\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}]),\|\phi\|_{L^\infty([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}=\sup_{x\in[t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}]}|\phi(x)|. \tag{V.19}$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{V}:\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ défini par le même opérateur $\tilde{\mathcal{V}}$ considéré comme opérateur de $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])$ dans $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ est un opérateur compact. Pour cela, nous définissons les boules ouverts de rayon r respectivement dans les espaces $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])$ et $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ par les ensembles suivants :

$$B_r=\{e\in\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma]):\|e\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])}<r\}. \tag{V.20}$$

$$B_r^{'}=\{e\in\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}]):\|e\|_{L^\infty([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}<r\}. \tag{V.21}$$

Nous allons montrer que pour toute densité d'emprunt κ_E dans la boule unité B_1, l'ensemble

$$E=\mathcal{V}(B_1), \tag{V.22}$$

est un sous-ensemble relativement compact dans $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$. Pour cela, nous allons vérifier les critères de compacité du théorème d'Ascoli afin de montrer que E est relativement compact dans $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ pour la norme L^∞ définie par la relation (V.19). En effet, les parties bornées et équicontinues de $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ sont relativement compactes. C'est-à-dire, nous allons montrer les deux conditions suivantes :

1. l'ensemble E est une partie bornée de $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$,
2. l'ensemble E est équicontinu en tout point de $[t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}]$.

Nous précisons que l'opérateur $\mathcal{V}$ est visiblement linéaire, et est bien à valeurs dans $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ car l'intégrale d'une fonction localement intégrable est une fonction continue. Nous allons montrer le premier point qui consiste à montrer que l'ensemble E défini par la relation (V.22) est une partie bornée de $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$. D'abord, nous appliquons l'inégalité triangulaire à l'opérateur $\mathcal{V}$ défini par la relation (V.17) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}|\mathcal{V}[\kappa_E](t)|&\leq|\kappa_E\star\gamma(t)|+|\alpha|\left|\int_{t_{\mathtt{I}}}^t(\kappa_E-\kappa_E\star\gamma)(s)\,ds\right|,\\&\leq|\kappa_E\star\gamma(t)|+|\alpha|\int_{t_{\mathtt{I}}}^t\left|(\kappa_E-\kappa_E\star\gamma)(s)\right|ds,\\&\leq|\kappa_E\star\gamma(t)|+|\alpha|\|\kappa_E-\kappa_E\star\gamma\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}.\end{aligned} \tag{V.23}$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz afin d'obtenir :

$$
\begin{aligned}
|\kappa_E \star \gamma(t)| &= \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \gamma(t-s)\kappa_E(s)\, ds \right|, \\
&\leq \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left| \gamma(t-s)\kappa_E(s) \right| ds, \\
&\leq \sqrt{\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\gamma(t-s))^2\, ds} \sqrt{\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\kappa_E(s))^2\, ds}.
\end{aligned}
\tag{V.24}
$$

Comme les densités κ_E et γ sont respectivement à support dans les intervalles $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$ et $[0, \Theta_\gamma]$, nous avons pour tout réel t dans l'intervalle $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]$, $\kappa_E \star \gamma(t)$ est définie et bornée sur cet intervalle. L'inégalité (V.24) se met sous la forme suivante :

$$
|\kappa_E \star \gamma(t)| \leq \|\gamma\|_{\mathbb{L}^2([0,\Theta_\gamma])} \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])}. \tag{V.25}
$$

Nous utilisons les inégalités (V.12), (V.15), (V.23) et (V.25) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$
|\mathcal{V}[\kappa_E](t)| \leq \left(\|\gamma\|_{\mathbb{L}^2([0,\Theta_\gamma])} + |\alpha| \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times (1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])}) \right) \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])}. \tag{V.26}
$$

Nous utilisons la norme L^∞ définie par la relation (V.19) pour que l'inégalité (V.26) implique :

$$
\| |\mathcal{V}[\kappa_E]| \|_{L^\infty([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} \leq \left(\|\gamma\|_{\mathbb{L}^2([0,\Theta_\gamma])} + |\alpha| \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times (1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])}) \right) \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])}. \tag{V.27}
$$

Comme la densité κ_E est dans la boule unité B_1, et puisque la densité γ satisfait la relation (V.5), alors nous utilisons l'inégalité (V.27) pour montrer qu'il existe une constante réelle C_1 strictement positive définie par :

$$
C_1 = \|\gamma\|_{\mathbb{L}^2([0,\Theta_\gamma])} + |\alpha| \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times (1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])}), \tag{V.28}
$$

telle que nous avons :

$$
\| |\mathcal{V}[\kappa_E]| \|_{L^\infty([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} \leq C_1. \tag{V.29}
$$

L'inégalité (V.29) traduit que la partie E est contenue dans la boule fermée de centre 0, et de rayon C_1, i.e. $E \subset \overline{B'_{C_1}}$. Par conséquent, l'ensemble E défini par la relation (V.22) est une partie bornée de $\mathcal{C}_c([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$.

Nous allons maintenant montrer le deuxième point qui consiste à montrer que l'ensemble E défini par la relation (V.22) est une partie équicontinue de $\mathcal{C}_c([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$. Soit une densité κ_E dans la boule unité B_1, nous avons pour tous réels x et y dans $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]$, l'inégalité suivante :

$$
|\mathcal{V}[\kappa_E](y) - \mathcal{V}[\kappa_E](x)| \leq \left| \int_x^y \gamma(t-s)\kappa_E(s)\, ds \right| + |\alpha| \left| \int_x^y (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds \right|. \tag{V.30}
$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$|\mathcal{V}[\kappa_E](y) - \mathcal{V}[\kappa_E](x)| \leq \sqrt{|y-x|} \times \left(\sqrt{\left| \int_x^y (\gamma(t-s)\kappa_E(s))^2 \, ds \right|} + |\alpha| \sqrt{\left| \int_x^y (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s))^2 \right|} \, ds \right). \tag{V.31}$$

Comme les réels x et y sont dans l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$, l'inégalité (V.31) implique :

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}[\kappa_E](y) - \mathcal{V}[\kappa_E](x)| &\leq \sqrt{|y-x|} \times \left(\sqrt{\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} (\gamma(t-s)\kappa_E(s))^2 \, ds} + |\alpha| \sqrt{\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s))^2 \, ds} \right), \\ &\leq \sqrt{|y-x|} \times \left(\|\kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} + |\alpha| \|\kappa_E - \kappa_E \star \gamma\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])} \right). \end{aligned} \tag{V.32}$$

Ensuite, nous utilisons la norme de la convolution des deux densités κ_E et γ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$, et l'inégalité (V.15) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$|\mathcal{V}[\kappa_E](y) - \mathcal{V}[\kappa_E](x)| \leq \sqrt{|y-x|} \times \left(\|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])} + |\alpha|(1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])}) \right) \|\kappa_E\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])}. \tag{V.33}$$

Comme par hypothèse $\kappa_E \in B_1$, l'inégalité (V.33) implique :

$$|\mathcal{V}[\kappa_E](y) - \mathcal{V}[\kappa_E](x)| < \sqrt{|y-x|} \times \left(\|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])} + |\alpha|(1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])}) \right). \tag{V.34}$$

Étant donné $\epsilon > 0$, on peut donc fixer

$$\eta = \left(\frac{\epsilon}{\|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])} + |\alpha|(1 + \|\gamma\|_{\mathbb{L}^1([0,\Theta_\gamma])})} \right)^2, \tag{V.35}$$

de sorte que pour tous éléments x et y dans $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$, et pour toute densité κ_E dans la boule unité B_1, on a l'implication suivante :

$$|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |\mathcal{V}[\kappa_E](y) - \mathcal{V}[\kappa_E](x)| < \epsilon. \tag{V.36}$$

Nous en déduisons que l'ensemble E défini par la relation (V.22) est une partie équicontinue de $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{V}$ est un opérateur compact. Par ailleurs, par définition des opérateurs $\mathcal{V}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$, nous avons $\tilde{\mathcal{V}} = i \circ \mathcal{V}$, où i est l'injection canonique de $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max})$. Par conséquent, l'opérateur $\tilde{\mathcal{V}}$ reste compact puisqu'il est la composé de deux opérateurs compacts.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $\mathcal{D}$ défini par la relation (V.7) est bien défini. Pour cela, nous allons montrer que lorsque la densité de remboursement de la dette courante $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ est dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$, la fonction $\mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}]$ est de carré intégrable sur l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$. C'est-à-dire, il suffit de montrer pour toute densité $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])} \leq (|\ \alpha\ |\ (\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}) + 1)\|\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.37}$$

Nous appliquons l'inégalité triangulaire à l'opérateur $\mathcal{D}$ défini dans la relation (V.7) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])} \leq |\ \alpha\ | \left\| \int_t^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\ ds \right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])} + \|\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.38}$$

Comme nous avons $\left\| \int_t^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\ ds \right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])} \leq (\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}})\|\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}$, nous obtenons l'inégalité (V.37) qui achève la continuité de l'opérateur $\mathcal{D}$ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$.

De la même manière, nous utilisons le raisonnement par l'absurde pour montrer que l'opérateur $\mathcal{D}$ n'est pas compact. Pour cela, nous le décomposons sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}] + \tilde{\mathcal{W}}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}] = Id_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}, \tag{V.39}$$

où l'opérateur $\tilde{\mathcal{W}} : \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]) \to \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ est défini par l'opérateur qui agit sur la densité de remboursement de la dette courante $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$, s'écrivant sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{W}}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}](t) = \alpha \int_t^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(s)\ ds. \tag{V.40}$$

Nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{W} : \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]) \to \mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ défini par le même opérateur $\tilde{\mathcal{W}}$ considéré comme opérateur de $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ dans $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ est un opérateur compact. Pour cela, nous allons montrer que l'ensemble défini par l'image de la boule unité par l'opérateur $\mathcal{W}$

$$F = \mathcal{W}(B_1), \tag{V.41}$$

est un sous-ensemble relativement compact dans $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$. Montrons que l'ensemble F défini par la relation (V.41) est une partie bornée de $\mathcal{C}_c([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$. D'abord, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz afin d'obtenir l'inégalité suivante :

$$|\mathcal{W}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}](t)| \leq |\alpha|\sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}}\|\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.42}$$

Ensuite, nous utilisons la norme L^∞ définie par la relation (V.19) pour que l'inégalité (V.42) implique :

$$\left\||\mathcal{W}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}]\right\|_{L^\infty([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])} \leq |\alpha|\sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}}\|\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.43}$$

Comme la densité $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ est dans la boule unité B_1, alors il existe une constante réelle C_2 strictement positive définie par :

$$C_2 = |\alpha|\sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathtt{I}}}, \tag{V.44}$$

telle que nous avons :

$$\|\mathcal{W}[\kappa_E]\|_{L^\infty([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])} \leq C_2. \tag{V.45}$$

L'inégalité (V.45) signifie que la partie F est contenue dans la boule fermée de centre 0, et de rayon C_2, i.e. $F \subset \overline{B'_{C_2}}$. En conséquence, l'ensemble F est une partie bornée de $\mathcal{C}_c([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$. Nous allons maintenant montrer que l'ensemble F défini par la relation (V.41) est une partie équicontinue de $\mathcal{C}_c([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$. Soit une densité κ_E dans la boule unité B_1, nous avons pour tous réels x et y dans $[t_\mathtt{I},\Theta_{\max}]$, l'inégalité suivante :

$$|\mathcal{W}[\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}](y) - \mathcal{W}[\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}](x)| = |\alpha| \left| \int_y^x \rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}(s)\, ds \right|. \tag{V.46}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons à partir de l'égalité (V.46) :

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}[\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}](y) - \mathcal{W}[\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}](x)| &\leq |\alpha|\sqrt{|y-x|}\sqrt{\left|\int_y^x (\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}(s))^2\, ds\right|}, \\ &\leq |\alpha|\sqrt{|y-x|}\|\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}\|_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}. \end{aligned} \tag{V.47}$$

Étant donné $\epsilon > 0$, on peut donc fixer

$$\eta = \left(\frac{\epsilon}{|\alpha|}\right)^2, \tag{V.48}$$

tel que pour tous éléments x et y dans $[t_\mathtt{I},\Theta_{\max}]$, et pour toute densité $\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}$ dans la boule unité B_1, on a :

$$|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |\mathcal{W}[\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}](y) - \mathcal{W}[\rho^\mathtt{I}_\mathcal{K}](x)| < \epsilon. \tag{V.49}$$

Nous en déduisons que l'ensemble F défini par la relation (V.41) est une partie équicontinue de $\mathcal{C}_c([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$. Par ailleurs, comme F est une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}_c([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$, d'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{W}$ est un opérateur compact. Par définition des opérateurs $\mathcal{W}$ et $\tilde{\mathcal{W}}$, nous avons $\tilde{\mathcal{W}} = i \circ \mathcal{W}$, où i est l'injection canonique de $\mathcal{C}_c([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$ dans $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])$. Nous déduisons que l'opérateur $\tilde{\mathcal{W}}$ est compact puisqu'il est la composé de deux opérateurs compacts.

Montrons par absurde que l'opérateur $\mathcal{D}$ n'est pas compact. Supposons qu'il l'est, d'après la relation (V.39), nous obtenons que l'identité $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$ est un opérateur compact puisqu'il est la somme de deux opérateurs compacts. Ce qui est contradictoire puisque l'identité $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$ n'est pas un opérateur compact dans $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{D}$ n'est pas compact.

V.2.3 Calcul d'opérateur adjoint

Nous allons calculer l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^*$ de l'opérateur $\mathcal{L}$. Pour cela, nous allons calculer le produit scalaire $\left\langle \mathcal{L}[\kappa_E], \kappa_F \right\rangle$ pour toutes densités κ_E et κ_F appartenant aux espaces respectifs $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])$ et $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])$. Ce produit est défini par :

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathcal{L}[\kappa_E], \kappa_F \Big\rangle &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \mathcal{L}[\kappa_E](x)\kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(x)\kappa_F(x)\, dx - \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\kappa_E \star \gamma)(x)\kappa_F(x)\, dx \\ &- \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{x} \kappa_E(y)\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{x} \kappa_E \star \gamma(y)\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx.\end{aligned} \tag{V.50}$$

Nous allons maintenant exprimer le produit scalaire $\Big\langle \mathcal{L}[\kappa_E], \kappa_F \Big\rangle$ défini par la relation (V.50) en fonction de quatres termes. Comme le premier terme $\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(x)\kappa_F(x)\, dx$ est déja simplifié, nous simplifions le deuxième terme en introduisant la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\{y \leq x\}}$, et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\kappa_E \star \gamma)(x)\kappa_F(x)\, dx &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{x} \gamma(x-y)\kappa_E(y)\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \gamma(x-y)\kappa_E(y)\mathbb{1}_{\{y \leq x\}}\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(y) \left(\int_{y}^{\Theta_{\max}} \gamma(x-y)\kappa_F(x)\, dx \right) dy.\end{aligned} \tag{V.51}$$

Ensuite, nous simplifions de la même manière le troisième terme :

$$\begin{aligned}\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{x} \kappa_E(y)\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(y)\mathbb{1}_{\{y \leq x\}}\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(y) \left(\int_{y}^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\, dx \right) dy.\end{aligned} \tag{V.52}$$

Le dernier terme est simplifié sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{x} \kappa_E \star \gamma(y)\, dy \right) \kappa_F(x)\, dx &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{x} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \gamma(y-t)\kappa_E(t)\, dt \right) dy \right) \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \gamma(y-t)\kappa_E(t)\mathbb{1}_{\{t \leq y\}}\, dt \right) dy \right) \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(t)\mathbb{1}_{\{t \leq x\}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \gamma(y-t)\mathbb{1}_{\{t \leq y \leq x\}}\, dy \right) dt \right) \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\mathbb{1}_{\{t \leq x\}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \gamma(y-t)\mathbb{1}_{\{t \leq y \leq x\}}\, dy \right) dx \right) \kappa_E(t)\, dt.\end{aligned} \tag{V.53}$$

Nous utilisons les relations (V.51), (V.52) et (V.53) pour que l'expression (V.50) du produit scalaire $\Big\langle \mathcal{L}[\kappa_E], \kappa_F \Big\rangle$ se mette sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathcal{L}[\kappa_E], \kappa_F \Big\rangle = \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_E(y) \Bigg(\kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \gamma(x-y)\kappa_F(x)\, dx - \alpha \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\, dx \\ + \alpha \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x) \Bigg(\int_y^x \gamma(z-y)\, dz \Bigg)\, dx \Bigg)\, dy.\end{aligned} \tag{V.54}$$

Comme l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^*$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall \kappa_E \in \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]), \forall \kappa_F \in \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]), \Big\langle \mathcal{L}[\kappa_E], \kappa_F \Big\rangle = \Big\langle \kappa_E, \mathcal{L}^*[\kappa_F] \Big\rangle, \tag{V.55}$$

nous utilisons la relation (V.54) pour obtenir l'expression de l'operateur $\mathcal{L}^*$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*[\kappa_F](y) &= \kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \gamma(x-y)\kappa_F(x)\, dx - \alpha \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\, dx \\ &\quad + \alpha \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x) \Bigg(\int_y^x \gamma(z-y)\, dz \Bigg)\, dx, \\ &= \kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x) \Bigg(\gamma(x-y) + \alpha - \alpha \int_y^x \gamma(z-y)\, dz \Bigg)\, dx.\end{aligned} \tag{V.56}$$

Une intégration par parties implique que le produit scalaire $\Big\langle \mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}], \kappa_F \Big\rangle$ est calculé pour toutes densités $\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ et κ_F dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}], \kappa_F \Big\rangle &= \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \mathcal{D}[\rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}](x)\kappa_F(x)\, dx, \\ &= -\alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \Bigg(\int_x^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(y)\, dy \Bigg) \kappa_F(x)\, dx - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(x)\kappa_F(x)\, dx, \\ &= \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(x) \Bigg(\int_x^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\, dy \Bigg)\, dx + \alpha \Bigg(\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(y)\, dy \Bigg) \Bigg(\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\, dy \Bigg) \\ &\quad - \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(x)\kappa_F(x)\, dx, \\ &= \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \rho_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(x) \Bigg(\alpha \int_x^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\, dy + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\, dy - \kappa_F(x) \Bigg)\, dx.\end{aligned} \tag{V.57}$$

Nous déduisons que l'opérateur $\mathcal{D}^*$ est défini par :

$$\mathcal{D}^*[\kappa_F](x) = \alpha \int_x^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\, dy + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\, dy - \kappa_F(x). \tag{V.58}$$

Nous rappelons que nous avons construit dans le chapitre IV les modèles financiers à taux variable. Si nous considérons maintenant que la variable α varie au cours du temps t, les opérateurs $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{D}^*$ sont définis par :

$$\mathcal{L}^*[\kappa_F](y) = \kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\left(\gamma(x-y) + \alpha(x) - \alpha(x)\int_y^x \gamma(z-y)\,dz\right)dx. \tag{V.59}$$

$$\mathcal{D}^*[\kappa_F](x) = \alpha(x)\int_x^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\,dy + \alpha(x)\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \kappa_F(y)\,dy - \kappa_F(x). \tag{V.60}$$

Lemme 1. *Si la densité de pattern de remboursement γ est définie par :*

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Theta_\gamma}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}(x), & si\ \alpha = 0 \\ \frac{\alpha e^{\alpha x}}{e^{\alpha\Theta_\gamma}-1}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}(x), & sinon \end{cases} \tag{V.61}$$

alors l'orthogonal de l'image de l'opérateur $\mathcal{L}$ est l'ensemble nul :

$$Im(\mathcal{L})^\perp = \{0\}. \tag{V.62}$$

Démonstration. Pour montrer ce lemme, nous allons montrer que le noyau de l'opérateur $\mathcal{L}^*$ se réduit à l'ensemble nul en utilisant la propriété suivante :

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L})^\perp = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}^*). \tag{V.63}$$

Lorsque la densité κ_F est nulle, la valeur de la densité κ_F par l'opérateur $\mathcal{L}^*$ est nulle. C'est-à-dire que nous avons l'inclusion suivante :

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{L}^*). \tag{V.64}$$

Nous allons maintenant montrer l'inclusion réciproque. Pour cela, nous supposons que la densité κ_F est dans $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}^*)$, et nous allons montrer que la densité κ_F est nulle. C'est-à-dire que nous allons prouver l'inclusion réciproque suivante :

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}^*) \subset \{0\}. \tag{V.65}$$

Nous considérons dans cette preuve que $\kappa_F(t_{\mathtt{I}})$ est définie par la valeur de la densité κ_F à droite en $t_{\mathtt{I}}$, et que $\gamma(0)$ est définie par la valeur de la densité γ à droite en 0. Nous supposons également que la densité κ_F est dérivable sur son support inclus dans $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$. Nous avons à l'aide de la relation (V.56) l'égalité suivante :

$$\kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\left(\gamma(x-y) + \alpha - \alpha\int_y^x \gamma(z-y)\,dz\right)dx = 0. \tag{V.66}$$

L'équation intégrale (V.66) est équivalente à :

$$\underbrace{\kappa_F(y) - (\alpha+\gamma(0))\int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\,dx}_{I_1(y)} + \underbrace{\int_y^{\Theta_{\max}}\left(-\gamma(x-y) + \gamma(0) + \alpha\int_y^x \gamma(z-y)\,dz\right)dx}_{I_2(y)} = 0. \tag{V.67}$$

Soit la fonction I_2 définie par la forme suivante :

$$I_2(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\, dx, \tag{V.68}$$

où les foncions u, v et f sont définies comme suit :

$$u(y) = y, v(y) = \Theta_{\max}, f(x,y) = -\gamma(x-y) + \gamma(0) + \alpha \int_y^x \gamma(z-y)\, dz. \tag{V.69}$$

Nous rappelons que la dérivée de la fonction I_2 est définie par :

$$I_2^{'}(y) = v'(y) f(v(y),y) - u'(y) f(u(y),y) + \int_{u(y)}^{v(y)} \partial_y f(x,y)\, dy. \tag{V.70}$$

Comme la fonction v est constante, sa dérivée est nulle, la dérivée de la fonction I_2 se réduit à :

$$I_2^{'}(y) = -f(y,y) + \int_y^{\Theta_{\max}} \partial_y f(x,y)\, dy. \tag{V.71}$$

En remplaçant x par y dans l'expression de la fonction f, nous obtenons :

$$f(y,y) = -\gamma(0) + \gamma(0) + \alpha \int_y^y \gamma(z-y)\, dz, \tag{V.72}$$

qui est la fonction nulle. Par conséquent, la fonction I_2 se réduit à :

$$I_2^{'}(y) = \int_y^{\Theta_{\max}} (\gamma'(x-y) - \alpha\gamma(x-y))\, dy \tag{V.73}$$

Nous précisons que l'intégrale de la densité γ définie par la relation (V.61) sur l'ensemble réel est égale à 1. Dans le cas où le taux d'emprunt α est non nul, la densité γ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\gamma'(x-y) - \alpha\gamma(x-y) = 0. \tag{V.74}$$

Comme l'intégrale d'une fonction nulle est nulle, la fonction I_2 est constante puisque sa dérivée est nulle. De même, lorsque le taux d'emprunt α est nul, la densité γ est constante, et donc sa dérivée est nulle, en s'appuyant sur l'égalité (V.73), la dérivée $I_2^{'}$ est nulle dans ce cas. En conséquence, la fonction I_2 est égale à une constante réelle C à déterminer :

$$\forall y \in [t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}], I_2(y) = C. \tag{V.75}$$

Nous remplaçons y par $\Theta_{\max}$ dans l'égalité définie par la relation (V.75) pour montrer que la constante C est nulle. Nous concluons que l'égalité (V.75) implique :

$$\forall y \in [t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}], I_2(y) = 0. \tag{V.76}$$

L'équation définie par la relation (V.67) est couplée avec l'équation (V.76) pour obtenir l'équation suivante :

$$\forall y \in [t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}], I_1(y) = 0. \tag{V.77}$$

Lorsque nous avons $\alpha = -\gamma(0)$, nous obtenons à partir de l'équation (V.77) que la valeur de la densité κ_F est nulle. Dans ce cas, nous avons l'inclusion (V.63). Dans la suite de la preuve, nous considérons que $\alpha \neq -\gamma(0)$. Ensuite, nous dérivons l'équation intégrale (V.77) pour obtenir l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\kappa_F'(y) - (\alpha + \gamma(0))\kappa_F(y) = 0. \tag{V.78}$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire définie dans la relation (V.78) peut s'exprimer par :

$$\kappa_F(y) = \kappa_F(t_{\mathtt{I}})\mathrm{e}^{-(\alpha+\gamma(0))(y-t_{\mathtt{I}})}, \tag{V.79}$$

dont la condition initiale $\kappa_F(t_{\mathtt{I}})$ signifie la valeur de la densité κ_F à l'instant inital $t_{\mathtt{I}}$. Nous allons montrer que toute solution κ_F s'écrivant sous la forme (V.79), et qui est solution de l'équation $I_1(y) = 0$ est nulle. Nous remplaçons la densité κ_F définie par la relation (V.79) dans le premier terme I_1 de l'équation (V.67) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} I_1(y) &= \kappa_F(y) - (\alpha + \gamma(0)) \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\, dx, \\ &= \frac{-\alpha\kappa_F(t_{\mathtt{I}})}{\alpha + \gamma(0)} \mathrm{e}^{-(\alpha+\gamma(0))(\Theta_{\max}-t_{\mathtt{I}})}. \end{aligned} \tag{V.80}$$

Les relations (V.77) et (V.80) impliquent l'égalité suivante :

$$\frac{-\alpha\kappa_F(t_{\mathtt{I}})}{\alpha + \gamma(0)} \mathrm{e}^{-(\alpha+\gamma(0))(\Theta_{\max}-t_{\mathtt{I}})} = 0. \tag{V.81}$$

Comme la fonction exponentielle définie dans l'égalité (V.81) est strictement positive, nous distinguons deux possibilités :

— Lorsque $\kappa_F(t_{\mathtt{I}})$ est nulle, nous utilisons la relation (V.79) pour obtenir que la densité κ_F est nulle. Dans ce cas, nous avons l'inclusion (V.63).

— Lorsque le taux d'empunt α est nul, nous utilisons la relation (V.66) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\gamma(x-y)\, dx = 0, \tag{V.82}$$

où l'expression de la densité κ_F est déterminée en utilisant la relation (V.79) :

$$\kappa_F(y) = \kappa_F(t_{\mathtt{I}})\mathrm{e}^{-\gamma(0)(y-t_{\mathtt{I}})}. \tag{V.83}$$

Dans ce cas, nous injectons l'expression (V.83) de la densité κ_F dans l'équation définie par la relation (V.82) pour obtenir :

$$\kappa_F(y) - \int_y^{\Theta_{\max}} \kappa_F(x)\gamma(x-y)\,dx = \kappa_F(t_{\mathtt{I}})\Bigg(\underbrace{\mathrm{e}^{-\gamma(0)(y-t_{\mathtt{I}})} - \int_y^{\Theta_{\max}} \mathrm{e}^{-\gamma(0)(x-t_{\mathtt{I}})}\gamma(x-y)\,dx}_{I_3(y)}\Bigg). \tag{V.84}$$

Les deux égalités (V.82) et (V.84) impliquent l'égalité suivante :

$$\kappa_F(t_{\mathtt{I}}) \times I_3(y) = 0. \tag{V.85}$$

Nous précisons que la fonction I_3 est constante, puisque sa dérivée est nulle :

$$\begin{aligned} I_3^{'}(y) &= -\gamma(0)\mathrm{e}^{-\gamma(0)(y-t_{\mathtt{I}})} + \gamma(0)\mathrm{e}^{-\gamma(0)(y-t_{\mathtt{I}})}, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{V.86}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} I_3(y) &= I_3(\Theta_{\max}), \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma(0)(\Theta_{\max}-t_{\mathtt{I}})}. \end{aligned} \tag{V.87}$$

Nous remplaçons l'expression I_3 définie par la relation (V.87) dans l'équation (V.85) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\kappa_F(t_{\mathtt{I}}) \times \mathrm{e}^{-\gamma(0)(\Theta_{\max}-t_{\mathtt{I}})} = 0. \tag{V.88}$$

Comme la fonction exponentielle définie dans la relation (V.88) est strictement positive, nous obtenons que la valeur $\kappa_F(t_{\mathtt{I}})$ est nulle. Comme la densité κ_F est exprimée en fonction de $\kappa_F(t_{\mathtt{I}})$ par la relation (V.79), nous obtenons que la densité κ_F est nulle. D'où l'inclusion (V.63).

L'étude de ces deux cas montre que le noyau de l'opérateur $\mathcal{L}^*$ s'identifie à l'ensemble nul. Ensuite, nous utilisons la relation (V.63) pour achever l'égalité (V.62) du lemme.

$\Diamond$

V.2.4 Opérateurs de non Fredholm

Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de E dans F. On dit que T est un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

— l'image de T est fermée ;
— le noyau de T est de dimension finie ;
— l'image de T est de codimension finie.

Nous définissons $\mathrm{Ind}(T)$ par l'indice de l'opérateur T :

$$\mathrm{Ind}(T) = dim(\ker(T)) - codim(\mathrm{Im}(T)). \tag{V.89}$$

Nous allons maintenant annoncer le théorème d'Alternative de Fredholm comme suit. Si K est un opérateur compact de E dans E, et si l'opérateur T s'écrit sous la forme :

$$T = Id_E - K, \tag{V.90}$$

alors T est un opérateur de Fredholm et $\mathrm{Ind}(T) = 0$. Nous nous référons les documents [4] (voir section 4) et [5] pour ce théorème.

Nous ne pouvons pas appliquer le théorème d'Alternative de Fredholm sur l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par la relation (V.6) puisque le théorème est vrai que lorsque l'ensemble de départ et d'arrivé est le même. En effet, l'opérateur $\mathcal{L}$ se décompose sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}[\kappa_E](x) = Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}[\kappa_E](x) - \tilde{\mathcal{V}}[\kappa_E](x), \tag{V.91}$$

qui n'est pas la forme définie par la relation (V.90), où les opérateurs $\tilde{\mathcal{V}}$ et $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$ sont définis respectivement par les relations (V.17) et (V.18). Par conséquent, nous ne pouvons pas utiliser le théorème d'Alternative de Fredholm.

Pour montrer que l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est pas un opérateur de Fredholm, nous allons utiliser la propriété suivante. Étant donné E et F deux espaces de Banach, $\mathcal{F} : E \to F$ un opérateur de Fredholm, et $\mathcal{C} : E \to F$ un opérateur compact. Alors $\mathcal{F} + \mathcal{C}$ est un opérateur de Fredholm, et nous avons $\mathrm{Ind}(\mathcal{F} + \mathcal{C}) = \mathrm{Ind}(\mathcal{F})$.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$ n'est pas un opérateur de Fredholm. Pour cela, il nous suffit de montrer que son image est de codimension infinie. Par définition de l'opérateur $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$, son image est l'espace $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$. Plus formellement :

$$\mathrm{Im}(Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}) = \mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]). \tag{V.92}$$

Le complémentaire de l'image $\mathrm{Im}(Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])})$ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max}])$ est défini par l'ensemble suivant :

$$\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max}])\backslash\mathrm{Im}(Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}) = \mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max}])\backslash\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]). \tag{V.93}$$

Comme il existe une infinité de fonctions dans $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max}])$, et qui ne sont pas dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$, nous en déduisons que le complémentaire de $\mathrm{Im}(Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])})$ est de dimension infinie. Par conséquent, l'image $\mathrm{Im}(Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])})$ est de codimension infinie. D'où l'opérateur $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$ n'est pas un opérateur de Fredholm.

Nous allons utiliser la décomposition définie par la relation (V.16) afin de montrer par absurde que l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est pas un opérateur de Fredholm. Pour émerger une contradiction, nous allons utiliser la propriété évoquée précédemment. Supposons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est un opérateur de Fredholm. Nous rappelons que nous avons montré dans la sous-section V.2.2 que l'opérateur $\tilde{\mathcal{V}}$ est compact. Nous obtenons que l'opérateur $Id_{\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])\to\mathbb{L}^2([t_\mathtt{I},\Theta_{\max}])}$ est un opérateur de Fredholm. Ce qui est contradictoire puisque nous avons montré précédemment qu'il ne l'est pas.

V.2.5 Théorème d'inversion

Le théorème d'inversion du modèle financier continu consiste à construire une densité d'emprunt κ_E afin de parvenir à une densité de dépense algébrique souhaitée σ. Nous définissons l'application $\mathcal{F}$ par l'opérateur de transformée de Fourier. Nous allons démontrer dans cette section le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit γ une densité de pattern de remboursement vérifiant la relation* (V.5) *tel qu'il existe un réel ϵ strictement positif vérifiant la relation suivante :*

$$\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)}_{|]-\infty,-\epsilon[\cup]\epsilon,+\infty[} \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{V.94}$$

Soit

$$F = \frac{\mathcal{F}\Big(\sigma - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}] + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet} (\sigma(s) - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}](s))\, \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{1-\mathcal{F}(\gamma)} \tag{V.95}$$

une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle qu'il existe un entier N et une certaine constante positive C vérifiant, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ l'inégalité suivante :

$$|F(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N \mathrm{e}^{2\pi|\Theta_{\max}-\Theta_\gamma||\xi|}. \tag{V.96}$$

Si la mesure de remboursement de la dette courante $\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ est dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$, pour toute mesure de dépense algébrique $\sigma \in \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ qui satisfait la relation suivante :

$$\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\sigma(y) - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}](y) + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{y} (\sigma(s) - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}](s)) \mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\right) dy = 0. \tag{V.97}$$

il existe une unique dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$, qui peut s'exprimer par la formule suivante :

$$\kappa_E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\Big(\sigma - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}] + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet} (\sigma(s) - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}](s))\, \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{1-\mathcal{F}(\gamma)}\right). \tag{V.98}$$

L'hypothèse (V.96) signifie que la fonction F est à décroissance rapide. Nous utilisons le théorème de Paley-Wiener-Schwartz qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier holomorphe, pour que la densité κ_E soit à support compact dans $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$. Ce théorème relie les propriétés de décroissance à l'infini de la fonction F avec l'analyticité de sa transformée de Fourier inverse, qui est en occurence la densité κ_E.

Nous allons maintenant simplifier ce théoèrme. Pour cela, nous allons justifier certaines hypothèses pour montrer qu'elles sont crédibles, et qui peuvent se réaliser à la fois sur l'aspect théorique et numérique. Pour montrer que l'hypoyhèse (V.94) est réalisable, nous supposons que la densité γ admet une borne inférieure sur son support, c'est-à-dire, il existe un réel positif M tel que :

$$\inf_{z\in[0,\Theta_\gamma]} \Big\{ |\gamma(z)| \Big\} = M. \tag{V.99}$$

Nous voulons montrer que sous l'hypothèse (V.99), que la relation (V.94) est satisfaite. Par un calcul direct, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right|^2 &= \frac{1}{\left|\displaystyle\int_0^{\Theta_\gamma}\gamma(x)(1-\mathrm{e}^{-ix\xi})\,dx\right|^2},\\ &\leq \frac{1}{M^2}\times\frac{1}{\left|\displaystyle\int_0^{\Theta_\gamma}(1-\mathrm{e}^{-ix\xi})\,dx\right|^2}.\end{aligned} \tag{V.100}$$

L'intégration par parties de la fonction exponentielle $x \to \mathrm{e}^{-ix\xi}$ implique :

$$\int_0^{\Theta_\gamma}(1-\mathrm{e}^{-ix\xi})\,dx = \Theta_\gamma + \frac{(\mathrm{e}^{-i\Theta_\gamma\xi}-1)}{i\xi}. \tag{V.101}$$

Nous prenons la fonction carrée de l'expression définie par (V.101) pour obtenir :

$$\left|\int_0^{\Theta_\gamma}(1-\mathrm{e}^{-ix\xi})\,dx\right|^2 = \Theta_\gamma^2 + \frac{2(1-\cos(\Theta_\gamma\xi))}{\xi^2} - \frac{2\Theta_\gamma\sin(\Theta_\gamma\xi)}{\xi}. \tag{V.102}$$

Remarquons que la fonction

$$\xi \to \frac{1}{\Theta_\gamma^2 + \frac{2(1-\cos(\Theta_\gamma\xi))}{\xi^2} - \frac{2\Theta_\gamma\sin(\Theta_\gamma\xi)}{\xi}},$$

est paire. Nous utilisons maintenant le développement de Taylor des fonctions $\sin(\Theta_\gamma\xi)$ et $\cos(\Theta_\gamma\xi)$ au point 0 respectivement d'ordre 3 et 2 pour obtenir les inégalits suivantes :

$$\sin(\Theta_\gamma\xi) \leq \Theta_\gamma\xi - \frac{(\Theta_\gamma\xi)^3}{6}, \cos(\Theta_\gamma\xi) \leq 1 - \frac{(\Theta_\gamma\xi)^2}{2}. \tag{V.103}$$

À partir de cette relation, pour des réels positifs, nous avons :

$$\frac{1}{\Theta_\gamma^2 + \frac{2(1-\cos(\Theta_\gamma\xi))}{\xi^2} - \frac{2\Theta_\gamma\sin(\Theta_\gamma\xi)}{\xi}} \leq \frac{3}{\Theta_\gamma^4\xi^2}. \tag{V.104}$$

Prenons par exemple $\epsilon = 0.01\sqrt{3}$, nous obtenos :

$$\frac{1}{\Theta_\gamma^2 + \frac{2(1-\cos(\Theta_\gamma\xi))}{\xi^2} - \frac{2\Theta_\gamma\sin(\Theta_\gamma\xi)}{\xi}} \leq \frac{1}{\Theta_\gamma^4 10^{-4}}. \tag{V.105}$$

Cette preuve montre finalement que la relation (V.94) est satisfaite, ce qui achève notre raisonnement. Nous allons maintenant donner un exemple qui fonctionne. En effet, prennons une densité de pattern de remboursement constante sur son support $[0, \Theta_\gamma]$, i.e : $\gamma = \frac{1}{\Theta_\gamma}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}$. La borne inférieure de cette densité γ est égale à 1. Par conséquent, cette densité satisfait l'hypothèse (V.94). Nous allons montrer dans la partie V.2.5.4 en utlisant un autre raisonnement (définition de Transformée de Fourrier) que cette densité satisfait l'hypothèse évoquée.

V.2.5.1 Points de singularité

Nous allons déterminer les points $\xi \in \mathbb{R}$ où la fonction $\xi \to 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)$ s'annule lorsque la densité de pattern de remboursement γ est une fonction constante et une fonction affine sur l'intervalle $[0, \Theta_\gamma]$:

— Lorsque la densité de pattern de remboursement γ est une fonction constante définie par : $\gamma = \frac{1}{\Theta_\gamma}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}$, nous avons :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi) = 1 - \frac{i}{\xi\Theta_\gamma}(e^{-i\xi\Theta_\gamma} - 1). \tag{V.106}$$

La relation (V.106) implique :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^*, 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi) = 0 &\Rightarrow \xi\Theta_\gamma = \sin(\xi\Theta_\gamma) \text{ et } \cos(\xi\Theta_\gamma) = 1, \\ &\Rightarrow (\xi\Theta_\gamma)^2 + 1 = 1, \\ &\Rightarrow \xi\Theta_\gamma = 0. \end{aligned} \tag{V.107}$$

Comme le réel Θ_γ est strictement positif, nous en déduisons que la fonction $\xi \to 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Réciproquement, si le réel ξ est nul, la fonction $\xi \to 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)$ s'annule. En effet, la transformée de Fourier de n'importe quelle densité γ à l'origine est définie par :

$$\mathcal{F}(\gamma)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t)\, dt. \tag{V.108}$$

Nous utilisons la propriété (III.7) de la densité γ pour que la relation (V.108) implique :

$$\mathcal{F}(\gamma)(0) = 1. \tag{V.109}$$

— Lorsque la densité de pattern de remboursement γ est une fonction affine définie par : $\gamma(t) = (\frac{t}{\Theta_\gamma^2} + \frac{1}{2\Theta_\gamma})\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}(t)$, nous obtenons par une intégration par parties l'égalité suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi) = 1 - \left(\frac{1}{(\xi\Theta_\gamma)^2} + \frac{i}{2\xi\Theta_\gamma}\right)(e^{-i\xi\Theta_\gamma} - 1) - \frac{i}{\xi\Theta_\gamma}e^{-i\xi\Theta_\gamma}. \tag{V.110}$$

Comme la fonction $1 - \mathcal{F}(\gamma)$ s'annule en les points de singularité, nous obtenons, en séparant sa partie réelle et sa partie imaginaire, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (\cos(\xi\Theta_\gamma) - 1) + \frac{3\xi\Theta_\gamma}{2}\sin(\xi\Theta_\gamma) = (\xi\Theta_\gamma)^2, \\ -\sin(\xi\Theta_\gamma) + \xi\Theta_\gamma\cos(\xi\Theta_\gamma) + \frac{\xi\Theta_\gamma}{2}(\cos(\xi\Theta_\gamma) - 1) = 0. \end{cases} \tag{V.111}$$

Le système d'équations défini dans la relation (V.111) implique l'équation suivante :

$$\xi\Theta_\gamma\left(1 + \frac{3(\xi\Theta_\gamma)^2}{2}\right) - \left(1 + \frac{9(\xi\Theta_\gamma)^2}{4}\right)\sin(\xi\Theta_\gamma) = 0. \tag{V.112}$$

Nous concluons que l'équation définie dans la relation (V.112) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^*$ en s'appuyant sur la Figure V.1. Par conséquent, la fonction $\xi \to 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Réciproquement, si le réel ξ est nul, nous avons :

$$
\begin{aligned}
1-\mathcal{F}(\gamma)(0) &= 1-\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(t)\,dt,\\
&= 1-\frac{1}{\Theta_\gamma^2}\int_0^{\Theta_\gamma} t\,dt-\frac{1}{2\Theta_\gamma}\int_0^{\Theta_\gamma}\,dt,\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{V.113}
$$

Nous avons montré que la fonction $1-\mathcal{F}(\gamma)$ s'annule qu'en 0.

Nous allons maintenant étendre ce résultat pour n'importe quelle fonction affine définie par $\gamma(t)=(c_2t+c_1)\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}(t)$, où les coefficients c_1 et c_2 vérifient l'égalité suivante :

$$
c_1+\frac{c_2\Theta_\gamma}{2}=\frac{1}{\Theta_\gamma}. \tag{V.114}
$$

Nous utilisons une intégration par parties pour obtenir l'égalité suivante :

$$
\forall\xi\in\mathbb{R}^*, 1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)=1-c_2\left(\frac{e^{-i\xi\Theta_\gamma}-1}{\xi^2}+\frac{i\Theta_\gamma e^{-i\xi\Theta_\gamma}}{\xi}\right)-\frac{ic_1(e^{-i\xi\Theta_\gamma}-1)}{\xi}=0. \tag{V.115}
$$

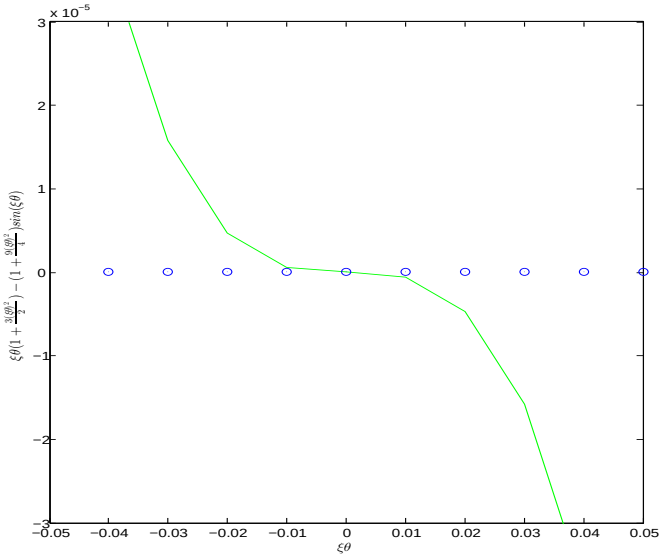

FIGURE V.1 – Graphe de la fonction $\xi\Theta_\gamma\to\xi\Theta_\gamma\left(1+\frac{3(\xi\Theta_\gamma)^2}{2}\right)-\left(1+\frac{9(\xi\Theta_\gamma)^2}{4}\right)\sin(\xi\Theta_\gamma)$ montrant que zéro est l'unique point où elle s'annule.

Comme la fonction $1-\mathcal{F}(\gamma)$ s'annule, nous obtenons, en séparant sa partie réelle et sa partie imaginaire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1-c_2\left(\frac{\cos(\xi\Theta_\gamma)-1}{\xi^2}+\frac{\Theta_\gamma\sin(\xi\Theta_\gamma)}{\xi}\right)-\frac{c_1\sin(\xi\Theta_\gamma)}{\xi}=0, \\ c_2\left(-\frac{\sin(\xi\Theta_\gamma)}{\xi^2}+\frac{\Theta_\gamma\cos(\xi\Theta_\gamma)}{\xi}\right)+\frac{c_1(\cos(\xi\Theta_\gamma)-1)}{\xi}=0. \end{cases} \tag{V.116}$$

Nous pouvons justifier la cohérence du système d'équations défini dans la relation (V.116) comme suit. Lorsque les coefficients c_1 et c_2 sont égaux respectivement aux valeurs $\frac{1}{2\Theta_\gamma}$ et $\frac{1}{\Theta_\gamma^2}$, nous obtenons l'égalité définie dans la relation (V.112). Ensuite, en supposant que c_2 est non nul, nous remplaçons l'expression de la fonction $\cos(\xi\Theta_\gamma)$ définie dans la première ligne du système (V.116) dans celle du deuxième pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{c_2\Theta_\gamma}{\xi}+\xi\Theta_\gamma+\frac{c_1\xi}{c_2}=\left(\frac{c_2}{\xi^2}+\Theta_\gamma(c_2\Theta_\gamma+c_1)+\frac{c_1(c_2\Theta_\gamma+c_1)}{c_2}\right)\sin(\xi\Theta_\gamma). \tag{V.117}$$

Nous utilisons la relation (V.114) pour obtenir à partir de la relation (V.117) :

$$\frac{c_2\Theta_\gamma}{\xi}+\xi\Theta_\gamma+\frac{c_1\xi}{c_2}=\left(\frac{c_2}{\xi^2}+2+\frac{c_1^2}{c_2}\right)\sin(\xi\Theta_\gamma). \tag{V.118}$$

Nous pouvons justifier la consistance de la relation (V.118) comme suit. Lorsque les coefficients c_1 et c_2 sont égaux respectivement aux valeurs $\frac{1}{2\Theta_\gamma}$ et $\frac{1}{\Theta_\gamma^2}$, nous obtenons l'équation définie dans la relation (V.112). Par ailleurs, nous pouvons mettre l'égalité (V.118) sous la forme suivante :

$$\sin(\xi\Theta_\gamma)-\xi\Theta_\gamma\left(\frac{c_2\Theta_\gamma^2+(\xi\Theta_\gamma)^2(1+\frac{c_1}{c_2\Theta_\gamma})}{c_2\Theta_\gamma^2+(\xi\Theta_\gamma)^2(2+\frac{c_1^2}{c_2})}\right)=0. \tag{V.119}$$

Nous multiplions l'équation définie dans la relation (V.114) par $\frac{c_1}{c_2}$, et nous utilisons la même relation pour obtenir :

$$\frac{c_1^2}{c_2}=-1+\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2}+\frac{c_2\Theta_\gamma^2}{4}. \tag{V.120}$$

Ensuite, nous divisons l'équation définie dans la relation (V.114) par $c_2\Theta_\gamma$ pour obtenir :

$$\frac{c_1}{c_2\Theta_\gamma}=\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2}-\frac{1}{2}. \tag{V.121}$$

Les deux équations (V.120) et (V.121) définissent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{c_1^2}{c_2}=-1+\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2}+\frac{c_2\Theta_\gamma^2}{4}, \\ \frac{c_1}{c_2\Theta_\gamma}=\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2}-\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{V.122}$$

Nous injectons les deux égalités du système (V.122) dans la relation (V.119) pour obtenir :

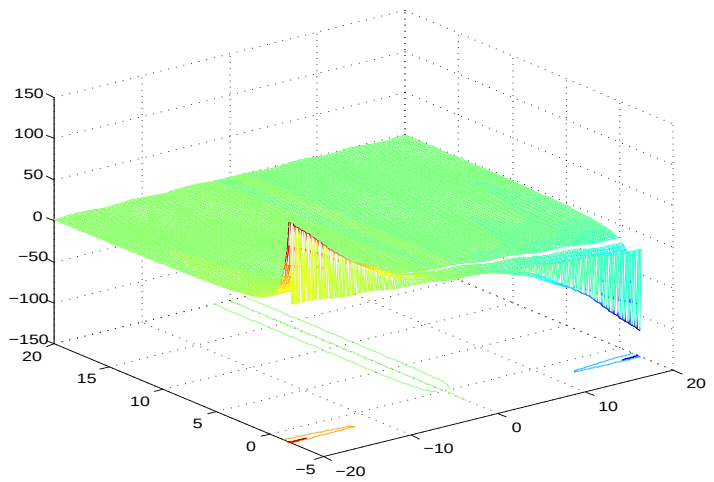

FIGURE V.2 – Graphe de la fonction $(\xi\Theta_\gamma, c_2\Theta_\gamma^2) \to \sin(\xi\Theta_\gamma) - \xi\Theta_\gamma\left(\frac{c_2\Theta_\gamma^2+(\xi\Theta_\gamma)^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2})}{c_2\Theta_\gamma^2+(\xi\Theta_\gamma)^2(1+\frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2}+\frac{c_2\Theta_\gamma^2}{4})}\right)$ sur l'intervalle $[-20, 20] \times [-2, 20]$ montrant que zéro est l'unique point où elle s'annule.

$$\sin(\xi\Theta_\gamma) - \xi\Theta_\gamma\left(\frac{c_2\Theta_\gamma^2 + (\xi\Theta_\gamma)^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2})}{c_2\Theta_\gamma^2 + (\xi\Theta_\gamma)^2(1 + \frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2} + \frac{c_2\Theta_\gamma^2}{4})}\right) = 0. \tag{V.123}$$

Comme nous avons :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{\sin(\xi\Theta_\gamma)}{\xi\Theta_\gamma}\right| \leq 1, \tag{V.124}$$

nous obtenons à partir de l'équation (V.123) l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2} \leq 1 + \frac{1}{c_2\Theta_\gamma^2} + \frac{c_2\Theta_\gamma^2}{4}. \tag{V.125}$$

Nous simplifions l'inégalité (V.125) pour obtenir :

$$-2 \leq c_2 \Theta_\gamma^2. \tag{V.126}$$

La Figure V.2 montre que l'équation définie dans la relation (V.123) dont le paramètre $c_2\Theta_\gamma^2$ satisfait la relation (V.126) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^*$. En effet, les lignes de contour ne se croisent pas à l'origine. Par conséquent, nous avons montré que la fonction $1 - \mathcal{F}(\gamma)$ s'annule qu'en 0 pour n'importe quelle densité affine γ.

V.2.5.2 Existence et unicité

Lemme 3. *Si la densité d'emprunt κ_E est dans $\mathbb{L}^2([t_\mathrm{I}, \Theta_\max - \Theta_\gamma])$, et si la densité de pattern de remboursement γ satisfait la relation* (V.5)*, nous avons l'égalité suivante :*

$$(1 - \mathcal{F}(\gamma))\mathcal{F}(\kappa_E) = \mathcal{F}\Big(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_\mathrm{I}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big), \tag{V.127}$$

où

$$\mathcal{F}\Big(\int_{t_\mathrm{I}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big) \tag{V.128}$$

signifie la transformée de Fourier de la fonction

$$t \mapsto \int_{t_\mathrm{I}}^{t} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds. \tag{V.129}$$

Démonstration. En appliquant la formule d'intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{t_\mathrm{I}}^{t} \left(\int_{t_\mathrm{I}}^{s} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(y)\, dy \right) \times \alpha \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds \\ = \int_{t_\mathrm{I}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s) \times \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds - \int_{t_\mathrm{I}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds.\end{aligned} \tag{V.130}$$

La relation (V.130) entraîne l'égalité suivante :

$$\int_{t_\mathrm{I}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds = \int_{t_\mathrm{I}}^{t} \left((\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s) - \alpha \int_{t_\mathrm{I}}^{s} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(y)\, dy \right) \times \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds. \tag{V.131}$$

En utilisant la définition (V.6) de l'opérateur $\mathcal{L}$, nous multiplions l'égalité (V.131) par α pour obtenir l'égalité suivante :

$$\alpha \int_{t_\mathrm{I}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds = \alpha \int_{t_\mathrm{I}}^{t} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds. \tag{V.132}$$

En remplaçant le terme $\alpha \int_{t_\mathrm{I}}^{t} (\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(s)\, ds$ défini dans la relation (V.132) par la quantité $(\kappa_E - \kappa_E \star \gamma)(t) - \mathcal{L}[\kappa_E](t)$, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\kappa_E - \kappa_E \star \gamma = \mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds. \tag{V.133}$$

Nous appliquons la transformée de Fourier sur l'égalité définie dans la relation (V.133) pour obtenir l'égalité (V.127), ce qui prouve ce lemme.

◊

Lemme 4. *Si la densité de pattern de remboursement γ satisfait la relation* (V.5)*, l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ défini dans la relation* (V.6) *est injectif.*

Démonstration. Supposons que la densité d'emprunt κ_E est dans le noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$, nous obtenons, en utilisant la relation (V.133), l'égalité suivante :

$$\kappa_E - \kappa_E \star \gamma = 0. \tag{V.134}$$

Par conséquent, nous avons l'inclusion suivante :

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \subset \left\{\kappa_E \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]), \kappa_E - \kappa_E \star \gamma = 0\right\}. \tag{V.135}$$

Supposons maintenant que la densité d'emprunt κ_E satisfait l'équation (V.134), alors elle est dans le noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$. Nous obtenons l'inclusion suivante :

$$\left\{\kappa_E \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]), \kappa_E - \kappa_E \star \gamma = 0\right\} \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{L}). \tag{V.136}$$

Nous concluons l'égalité suivante :

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \left\{\kappa_E \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]), \kappa_E - \kappa_E \star \gamma = 0\right\}. \tag{V.137}$$

Pour montrer l'injectivité de l'opérateur $\mathcal{L}$, nous allons traiter deux méthodes :

1er méthode

Nous allons résoudre dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ pour toute densité de pattern de remboursement γ qui satisfait l'hypothèse (V.5) l'équation suivante :

$$\kappa_E - \kappa_E \star \gamma = 0. \tag{V.138}$$

Ensuite, nous appliquons l'opérateur de la transformée de Fourier directe sur les termes de l'égalité (V.138) afin d'obtenir l'égalité suivante :

$$\mathcal{F}(\kappa_E) \times (1 - \mathcal{F}(\gamma)) = 0. \tag{V.139}$$

Nous allons deux situations qui se présentent :

— La première situation est lorsque $\mathcal{F}(\gamma)$ est différente de 1. Dans ce cas, la fonction $\mathcal{F}(\kappa_E)$ est nulle. Par conséquent, la densité κ_E est nulle.

  La deuxième situation est lorsque $\mathcal{F}(\gamma)$ est égale à 1. Nous allons montrer en utilisant un raisonnement par absurde que cette situation ne peut pas se produire. En effet, il n'existe aucune fonction $\gamma \in \mathbb{L}^2([0, \Theta_\gamma])$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(\gamma)(\xi) = 1. \tag{V.140}$$

Dans ce cas, supposons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{L}^2([0, \Theta_\gamma])$ tel que :

$$\mathcal{F}(\gamma) = 1. \tag{V.141}$$

En dérivant cette égalité, nous obtenons :

$$\mathcal{F}'(\gamma) = 0. \tag{V.142}$$

Sous l'hypothèse que $x \to x\gamma(x)$ est une fonction intégrable sur $[0, \Theta_\gamma]$, la condition d'analycité est :

$$x \to x\gamma(x) \in \mathbb{L}^1([0, \Theta_\gamma]). \tag{V.143}$$

Ensuite, nous utilisons la propriété de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}'(\gamma) = \mathcal{F}(-ix\gamma(x)). \tag{V.144}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(-x\gamma(x)) = 0. \tag{V.145}$$

Comme l'opérateur de la transformée de Fourier est une isométrie dans l'espace $\mathbb{L}^2([0, \Theta_\gamma])$, nous obtenons :

$$x = 0 \text{ ou } \gamma(x) = 0. \tag{V.146}$$

Or, la densité nulle γ ne répond pas à la définition $\mathcal{F}(\gamma) = 1$.

$2^{\text{ème}}$ méthode

Étant donné un entier naturel n, nous définissons V_n par l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré n restreintes sur l'intervalle $]t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma[$. Par ailleurs, comme l'espace V_m est dense dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ pour tout entier naturel m, nous avons pour toute fonction de carré intégrable sur un compact contenu dans l'intervalle $]t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma[$, elle est approchée uniformément par des polynômes sur ce compact. Nous allons montrer pour toute densité $\gamma \in \mathrm{V}_m$ s'écrivant sous la forme suivante :

$$\gamma(t) = \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i t^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \frac{\Theta_\gamma^{i+1}}{i+1}} \right) \times \mathbb{1}_{[0, \Theta_\gamma]}(t), \tag{V.147}$$

que nous avons :

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \cap \mathrm{V}_n = \{0\}. \tag{V.148}$$

Pour montrer la relation (V.148), nous allons montrer que les coefficients de la densité κ_E sont nuls pour toute densité $\kappa_E \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \cap \mathrm{V}_n$. Autrement dit, les coefficients $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ de la fonction polynomiale κ_E sont nuls pour toute densité $\kappa_E \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \cap \mathrm{V}_n$ s'écrivant sous la forme :

$$\kappa_E(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \right) \times \mathbb{1}_{[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]}(x). \tag{V.149}$$

Comme l'expression de la densité γ est définie dans la relation (V.147), l'expression $\kappa_E \star \gamma$ est simplifiée en utilisant la relation (V.149)

$$\kappa_E \star \gamma(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \frac{\Theta_\gamma^{i+1}}{i+1}} \times \sum_{i=0}^{n} c_i \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \int_{[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma] \cap [x - \Theta_\gamma, x]} y^i (x-y)^j \, dy. \tag{V.150}$$

Puisque nous avons :

$$(x-y)^j = \sum_{p=0}^{j} C_j^p (x)^{j-p} (-y)^p, \tag{V.151}$$

l'expression (V.150) se met sous la forme suivante :

$$\kappa_E \star \gamma(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \frac{\Theta_\gamma^{i+1}}{i+1}} \times \sum_{i=0}^{n} c_i \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \left[\sum_{p=0}^{j} C_j^p (-1)^p (x)^{j-p} \times \left(\int_{[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma] \cap [x - \Theta_\gamma, x]} y^{i+p} \, dy \right) \right]. \tag{V.152}$$

Nous allons maintenant montrer que les coefficients $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont nuls dans les deux situations suivantes :

— Lorsque $t_{\mathrm{I}} + \Theta_\gamma \leq \Theta_{\max} - \Theta_\gamma$, nous supposons que la variable x est choisie à l'extérieur du support de la densité d'emprunt κ_E telle que $t_{\mathrm{I}} + \Theta_\gamma \leq \Theta_{\max} - \Theta_\gamma < x < \Theta_{\max}$. Alors la densité κ_E est nulle. Par conséquent, l'intersection des deux intervalles $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$ et $[x - \Theta_\gamma, x]$ est l'intervalle $[x - \Theta_\gamma, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$. Comme la densité κ_E est nulle, nous utilisons les relations (V.134) et (V.152) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \sum_{j=0}^{j=m} \alpha_j \left[\sum_{p=0}^{p=j} \frac{C_j^p (-1)^p (x)^{j-p}}{i+p+1} \times \left((\Theta_{\max} - \Theta_\gamma)^{i+p+1} - (x - \Theta_\gamma)^{i+p+1} \right) \right] = 0. \tag{V.153}$$

Nous obtenons un polynôme nul sur l'intervalle $]\Theta_{\max} - \Theta_\gamma, \Theta_{\max}[$ en utilisant la relation (V.153).

— Lorsque $\Theta_{\max} - \Theta_\gamma < t_{\mathrm{I}} + \Theta_\gamma$, nous supposons que la variable x est choisie à l'extérieur du support de la densité d'emprunt κ_E telle que $\Theta_{\max} - \Theta_\gamma < t_{\mathrm{I}} + \Theta_\gamma < x < \Theta_{\max}$. Alors la densité κ_E est nulle. Par conséquent, l'intersection des deux intervalles $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$ et $[x - \Theta_\gamma, x]$ est l'intervalle $[x - \Theta_\gamma, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$. Nous obtenons le même polynôme défini dans la relation (V.153). Ce polynôme est nul sur l'intervalle $]\Theta_{\max} - \Theta_\gamma, \Theta_{\max}[$.

Ces deux situations montrent que les coefficients $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ sont nuls. Ce qui achève la preuve du lemme.

$\Diamond$

Après avoir montré que l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ défini dans la relation (V.6) est injectif pour toute densité γ qui satisfait la relation (V.5), nous allons maintenant vérifier que l'opérateur $\mathcal{L}$ est injectif lorsque la densité γ est égale à $\frac{1}{\Theta_\gamma}$ sur l'intervalle $[0,\Theta_\gamma]$, et nulle ailleurs, i.e. $\gamma = \frac{1}{\Theta_\gamma}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}$. Pour cela, nous allons montrer que les coefficients $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ de la fonction polynomiale κ_E sont nuls pour toute densité $\kappa_E \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \cap \mathrm{V}_n$ définie dans la relation (V.149). Par ailleurs, la densité $\kappa_E \star \gamma$ se simplifie comme suit :

$$(\kappa_E \star \gamma)(x) = \frac{1}{\Theta_\gamma}\sum_{i=0}^{n} c_i \int_{[t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma]\cap[x-\Theta_\gamma,x]} y^i \, dy. \tag{V.154}$$

Pour montrer que les coefficients $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ sont nuls, nous allons montrer que nous obtenons un polynôme nul en distinguant deux cas :

— Lorsque $t_{\mathtt{I}} + \Theta_\gamma \leq \Theta_{\max} - \Theta_\gamma$, nous supposons que la variable x est choisie à l'extérieur du support de la densité d'emprunt κ_E telle que $t_{\mathtt{I}} + \Theta_\gamma \leq \Theta_{\max} - \Theta_\gamma < x < \Theta_{\max}$. Ensuite, nous utilisons les relations (V.134) et (V.152) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{c_i}{i+1} \times [(\Theta_{\max} - \Theta_\gamma)^{i+1} - (x - \Theta_\gamma)^{i+1}] = 0, \tag{V.155}$$

puisque la densité κ_E est nulle et l'intersection des deux intervalles $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$ et $[x - \Theta_\gamma, x]$ est l'intervalle $[x - \Theta_\gamma, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$. Nous obtenons un polynôme nul sur l'intervalle $]\Theta_{\max} - \Theta_\gamma, \Theta_{\max}[$.

— Lorsque $\Theta_{\max} - \Theta_\gamma < t_{\mathtt{I}} + \Theta_\gamma$, nous supposons que la variable x est choisie à l'extérieur du support de la densité d'emprunt κ_E telle que $\Theta_{\max} - \Theta_\gamma < t_{\mathtt{I}} + \Theta_\gamma < x < \Theta_{\max}$. Par conséquent, nous obtenons le même polynôme défini dans la relation (V.155).

Nous concluons que nous avons montré que les coefficients $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ sont nuls dans les deux situations $t_{\mathtt{I}} + \Theta_\gamma \leq \Theta_{\max} - \Theta_\gamma$ et $\Theta_{\max} - \Theta_\gamma < t_{\mathtt{I}} + \Theta_\gamma$.

Lemme 5. *Si la densité de pattern de remboursement γ satisfait l'hypothèse suivante :*

$$\int_0^{\Theta_\gamma} y\gamma(y)\, dy \neq 0, \tag{V.156}$$

et si l'opérateur $\mathcal{L}$ défini dans la relation (V.6) *satisfait l'égalité suivante :*

$$\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds \right) dy = 0, \tag{V.157}$$

alors, $\mathcal{F}(\kappa_E) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ tel que :

$$\lim_{\xi\to 0} \mathcal{F}(\kappa_E)(\xi) = -\frac{2}{\Theta_\gamma}\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\Theta_{\max}} y \times \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds \right) dy. \tag{V.158}$$

Si l'opérateur $\mathcal{L}$ ne satisfait pas l'égalité (V.157), *$\mathcal{F}(\kappa_E)$ possède une limite infinie en* 0.

Démonstration. Nous rappelons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien défini de l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$. Pour cela, nous allons montrer la relation suivante :

$$\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]). \tag{V.159}$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds \right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} &= \sqrt{\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds \right)^2 dt}, \\ &\leq \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\Theta_{\max} - s)}\, ds \right|, \end{aligned} \tag{V.160}$$

puisque nous avons $t \leq \Theta_{\max}$. Comme $s \in [t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]$, nous avons $\mid \mathrm{e}^{\alpha(\Theta_{\max} - s)} \mid \leq \mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})}$. De la relation (V.160), nous obtenons :

$$\left\| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds \right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} \leq \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times \mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})} \times \|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])}. \tag{V.161}$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} \leq \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times \|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])}. \tag{V.162}$$

Finalement, nous utilisons les relations (V.161) et (V.162) pour avoir :

$$\left\| \mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds \right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} \leq (1 + \mid \alpha \mid (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}) \mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})}) \|\mathcal{L}[\kappa_E]\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])}. \tag{V.163}$$

Ce qui prouve la relation (V.159).

Nous utilisons maintenant le développement de Taylor au point 0 d'ordre 1 de la fonction exponentielle $\xi \to e^{-iy\xi}$ pour obtenir :

$$e^{-iy\xi} = 1 - iy\xi + O(\xi^2). \tag{V.164}$$

La définition de la transformée de Fourier de la fonction $\mathcal{F}(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds)$ implique :

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds \right)(\xi) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(y - s)}\, ds \right) e^{-iy\xi}\, dy. \tag{V.165}$$

Ensuite, nous utilisons la relation (V.164) pour effectuer le développement de Taylor au point 0 d'ordre 1 de la fonction $\mathcal{F}(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds)$ pour obtenir :

$$\mathcal{F}\Big(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)(\xi) = \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\right) dy$$
$$-i\xi \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} y \times \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\right) dy + O(\xi^2). \tag{V.166}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{L}$ satisfait l'égalité (V.157), la relation (V.166) devient :

$$\mathcal{F}\Big(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)(\xi)$$
$$= -i\xi \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} y \times \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\right) dy + O(\xi^2). \tag{V.167}$$

Comme la densité γ satisfait la relation (V.5), nous effectuons le développement de Taylor au point 0 d'ordre 1 de la fonction $1 - \mathcal{F}(\gamma)$ pour obtenir :

$$1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi) = i\xi \int_0^{\Theta_\gamma} y\gamma(y)\, dy + O(\xi^2) = i\xi \frac{\Theta_\gamma}{2} + O(\xi^2). \tag{V.168}$$

Nous injectons les deux développements de Taylor définis dans les relations (V.167) et (V.168) dans l'égalité (V.127) afin d'obtenir l'égalité (V.158). En utilisant la relation (V.127), $\mathcal{F}(\kappa_E)$ est une quantité finie sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, $\mathcal{F}(\kappa_E)$ possède une limite finie en 0 sous l'hypothèse (V.157). Nous concluons que $\mathcal{F}(\kappa_E) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que l'égalité (V.157) n'est pas satisfaite. Nous utilisons les relations (V.127), (V.166) et (V.168) pour montrer que le développement de Taylor au point 0 d'ordre 1 de la fonction $\mathcal{F}(\kappa_E)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\kappa_E)(\xi) = \frac{2}{i\xi\Theta_\gamma^2} \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\right) dy \\ -\frac{2}{\Theta_\gamma} \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} y \times \left(\mathcal{L}[\kappa_E](y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\right) dy + O(\xi^2).\end{aligned} \tag{V.169}$$

Nous concluons à partir de la relation (V.169) que la quantité $\mathcal{F}(\kappa_E)$ possède une limite infinie en 0. Ce qui achève la preuve du lemme.

$\Diamond$

Soit γ une densité de pattern de remboursement fixée, qui satisfait la relation (V.5). Nous allons maintenant montrer la surjectivité de l'opérateur $\mathcal{L}$. C'est-à-dire, nous allons montrer pour tout élément κ_G de $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$, qu'il existe au moins une densité d'emprunt κ_E de $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ tel que $\mathcal{L}[\kappa_E] = \kappa_G$.

L'égalité définie par la relation (V.127) est équivalente à :

$$\mathcal{F}(\kappa_E) = \frac{\mathcal{F}\Big(\kappa_G + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \kappa_G(s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)}. \tag{V.170}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien défini de l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$, la relation (V.159) permet de fournir :

$$\kappa_G + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \kappa_G(s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]). \tag{V.171}$$

Nous précisons que le produit d'une densité dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$ par une densité dans $\mathbb{L}^\infty(]-\infty, -\epsilon[\cup]\epsilon, +\infty[)$ est une densité dans l'espace $\mathbb{L}^2(]-\infty, -\epsilon[\cup]\epsilon, +\infty[)$ pour tout ϵ strictement positif. L'hypothèse (V.94) sur la densité γ permet d'obtenir à partir de la relation (V.170), que $\mathcal{F}(\kappa_E)$ est une fonction de carré intégrable à support inclus dans $]-\infty, -\epsilon[\cup]\epsilon, +\infty[$. Par ailleurs, comme l'opérateur $\mathcal{L}$ satisfait l'équation intégrale définie par la relation (V.157), nous obtenons le carré intégrabilité de la fonction analytique $\mathcal{F}(\kappa_E)$ sur l'intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$. En effet, la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\kappa_E)(\xi)$ tend vers une quantité finie lorsque ξ tend vers le point de singularité 0 (résultat du lemme 5). Ce qui veut dire que la fonction $\mathcal{F}(\kappa_E)$ est de carré intégrable sur un voisinage de 0, typiquement sur un intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$ contenant ce point de singularité. Nous concluons que la fonction $\mathcal{F}(\kappa_E)$ est de carré intégrable sur l'ensemble des réels. Étant donnée κ_G de $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$, sous l'hypothèse de l'équation d'équilibre définie par :

$$\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\kappa_G(y) + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{y} \kappa_G(s) \mathrm{e}^{\alpha(y-s)}\, ds\, dy \right) = 0, \tag{V.172}$$

nous obtenons au voisinage de 0, le résultat suivant :

$$\frac{\mathcal{F}\Big(\kappa_G + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \kappa_G(s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)} \in \mathbb{L}^2([-\epsilon, \epsilon]), \tag{V.173}$$

pour tout ϵ strictement positif. Le résultat est vrai lorsque ξ est égale à 0, puisque $\frac{0}{0}$ est définie. Le résultat du lemme 5 est très important dans cette démonstration de la surjectivité de l'opérateur $\mathcal{L}$. Sous les hypothèses évoquées au cours de cette preuve, nous avons montré que :

$$G = \frac{\mathcal{F}\Big(\kappa_G + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \kappa_G(s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}). \tag{V.174}$$

G est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle qu'il existe un entier N et une certaine constante positive C vérifiant, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ l'inégalité suivante :

$$|G(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N \mathrm{e}^{2\pi |\Theta_{\max} - \Theta_\gamma||\xi|}. \tag{V.175}$$

Nous utilisons le théorème de Paley-Wiener-Schwartz qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier holomorphe, pour que la densité κ_E soit à support compact dans $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$. Par conséquent, toute densité κ_G de $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$ a au moins un antécédent κ_E de $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$ qui peut se déterminer sous la forme suivante :

$$\kappa_E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\Big(\kappa_G + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \kappa_G(s) \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)} \right). \tag{V.176}$$

Au cours de cette preuve, nous avons montré :

$$\forall \kappa_G \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]),\ \exists \kappa_E \in \mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]),\ \mathcal{L}[\kappa_E] = \kappa_G\ . \tag{V.177}$$

Nous en déduisons que l'opérateur $\mathcal{L}$ est surjectif. Comme nous avons montré que l'opérateur est injectif, ensuite il est surjectif, il existe une unique densité d'emprunt κ_E vérifiant la relation suivante :

$$\kappa_E(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\Big(\sigma(t) - \mathcal{D}[\rho^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}](t) + \alpha \displaystyle\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} (\sigma(s) - \mathcal{D}[\rho^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}](s))\, \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds\Big)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)}\right). \tag{V.178}$$

V.2.5.3 Stabilité de la solution

Nous rappelons que nous avons montré l'existence et l'unicité de la densité d'emprunt κ_E définie dans la relation (V.178). Nous voulons maintenant montrer la stabilité de notre solution κ_E. Si nous supposons que notre perturbation définie par l'erreur entre la deuxième densité de dépense algébrique modifiée σ_2^I et la première densité de dépense algébrique modifiée σ_1^I est petite au sens de la norme $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$, i.e. $\|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])} \leq \delta$, la variation entre la deuxième densité d'emprunt κ_{E_2} et la première densité d'emprunt κ_{E_1} correspond à la variation infinitésimale de la valeur $\|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])}$. Nous précisons que dans ce problème, il coexiste une relation entre la densité de dépense algébrique modifiée σ_1^I et la densité de dépense algébrique σ_1.

Autrement dit, pour toutes densités d'emprunt κ_{E_1} et κ_{E_2} dans $\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$, il existe une constante positive C telle que : $\|\kappa_{E_2} - \kappa_{E_1}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])} \leq C \times \delta$.

Nous ne pouvons pas traiter ce problème de stabilité numérique dans le sens où la borne supérieure de la fonction $\xi \to \frac{1}{|1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)|}$ n'est pas atteinte sur $\mathbb{R}^*$. Par exemple, lorsque la densité de pattern de remboursement est définie par : $\gamma = \frac{1}{\Theta_\gamma}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}$, la borne supérieure de la fonction $\xi \to \frac{1}{|1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)|}$ n'est pas atteinte. D'abord, nous avons :

$$\left|\frac{1}{1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right| = \frac{|\xi\Theta_\gamma|}{\sqrt{(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma))^2 + (\cos(\xi\Theta_\gamma) - 1)^2}}. \tag{V.179}$$

Comme cette fonction est paire sur $\mathbb{R}^*$, nous la traçons sur $\mathbb{R}_+^*$, et nous la présentons dans la Figure V.3.

Nous pouvons justifier notre étude comme suit, la limite de $\mathcal{F}(\gamma)(\xi)$ tend vers 1 quand ξ tend vers 0, donc celle de la fonction $\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}$ est plus infinie, et donc la borne supérieure est plus infinie.

La densité de pattern de remboursement γ ne peut pas vérifier la relation suivante :

$$\frac{1}{|\ 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)\ |} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}). \tag{V.180}$$

Par conséquent, il n'existe pas une constante positive C telle que :

$$\left\|\frac{1}{|\ 1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)\ |}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq C. \tag{V.181}$$

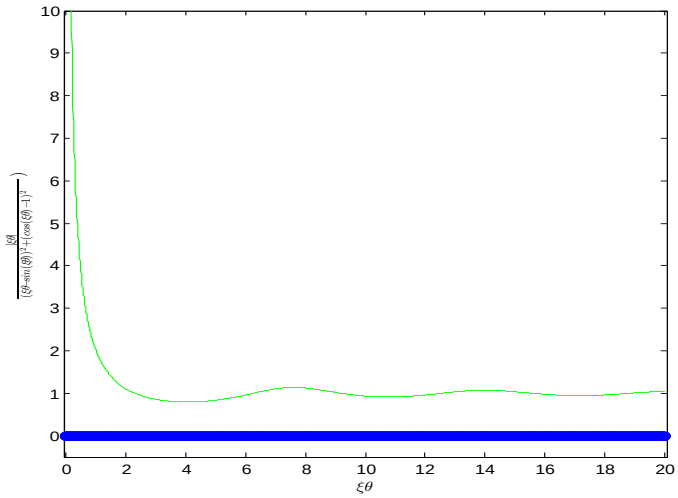

FIGURE V.3 – Graphe de la fonction $\xi\Theta_\gamma \to \frac{|\xi\Theta_\gamma|}{\sqrt{(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma))^2 + (\cos(\xi\Theta_\gamma)-1)^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montrant qu'il n'admet pas de borne supérieure.

Nous avons testé deux exemples de γ qui ne satisfont pas l'hypothèse (V.180). Dans le cas où la densité est affine, définie par : $\gamma(t) = t\mathbb{1}_{[0,\sqrt{2}]}(t)$, nous avons :

$$\left\| \frac{1}{|\,1 - \mathcal{F}(\gamma)(\xi)\,|} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\left((1 + \frac{1}{\xi^2}) - (\frac{\cos(\sqrt{2}\xi)}{\xi^2} + \frac{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\xi)}{\xi}) \right)^2 + \left(\frac{\sin(\sqrt{2}\xi)}{\xi^2} - \frac{\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\xi)}{\xi} \right)^2} \tag{V.182}$$

Nous allons tester à travers Matlab si la fonction définie par la relation (V.182) est intégrable, Matlab nous fournit que l'intégrale diverge. Par conséquent, la densité γ ne satisfait pas l'hypothèse (V.180).

```
fun = @(x) 1./ ( ( (1.+1./(x.^2))- (cos(sqrt(2).*x)./(x.^2) + sqrt(2).*sin(sqrt(2).*
    x)./x) ).^2 +(sin(sqrt(2).*x)./(x.^2) -
sqrt(2).*cos(sqrt(2).*x)./x).^2);
q = integral(fun,-Inf,Inf)
```

De même pour la densité de pattern de remboursement γ définie par : $\gamma = \frac{1}{\Theta_\gamma}\mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}$, nous avons à l'aide de la relation (V.179) :

$$\left|\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right|^2 = \frac{(\xi\Theta_\gamma)^2}{\left(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)\right)^2 + \left(\cos(\xi\Theta_\gamma)-1\right)^2}. \tag{V.183}$$

Matlab nous fournit que l'intégrale de cette fonction diverge :

```
fun = @(x) (x.^2)./((x-sin(x)).^2+(cos(x)-1).^2);
q = integral(fun,0,Inf)
```

Nous supposons qu'il existe une fonction $\phi \in \mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ avec $\mathcal{F}(\phi)(0) = 0$ telle que :

$$\left|\frac{\mathcal{F}(\phi)(\xi)}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right| \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \tag{V.184}$$

Par conséquent, il existe une constante positive C' tel que :

$$\left\|\left|\frac{\mathcal{F}(\phi)(\xi)}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right|\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq C'. \tag{V.185}$$

Par hypothèse, les relations qui coexistent entre les deux densités σ_1 et σ_1^I, et entre les deux densités σ_2 et σ_2^I est la suivante :

$$\sigma_1 = \sigma_1^I \star \phi, \sigma_2 = \sigma_2^I \star \phi. \tag{V.186}$$

Nous allons montrer dans la suite qu'il existe un problème inverse entre les densités d'emprunts et les densités σ_1^I et σ_2^I, puisqu'il n'existe pas un problème inverse direct entre ces densités d'emprunts et les densités de dépenses algébriques σ_1 et σ_2.

Sous l'hypothèse du théorème 2, pour toutes densités de dépense algébrique σ_1 et σ_2 qui satisfont la relation (V.97), il existe deux uniques densités d'emprunts κ_{E_1} et κ_{E_2} vérifiant la relation :

$$\kappa_{E_2} - \kappa_{E_1} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\Big(\sigma_2 - \sigma_1 + \alpha\displaystyle\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet}(\sigma_2-\sigma_1)(s)\,\mathrm{e}^{\alpha(\bullet-s)}\,ds\Big)}{1-\mathcal{F}(\gamma)}\right). \tag{V.187}$$

Comme la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$ conserve la norme de l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ dans l'espace $\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$, nous obtenons, à partir de la relation (V.187), l'égalité de norme suivante :

$$\|\kappa_{E_2} - \kappa_{E_1}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])} = \left\|\frac{\mathcal{F}\Big(\sigma_2 - \sigma_1 + \alpha\displaystyle\int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet}(\sigma_2-\sigma_1)(s)\,\mathrm{e}^{\alpha(\bullet-s)}\,ds\Big)}{\mathcal{F}(\phi)} \times \frac{\mathcal{F}(\phi)}{1-\mathcal{F}(\gamma)}\right\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.188}$$

Dans la suite de l'égalité (V.188), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\kappa_{E_2} - \kappa_{E_1}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])} &\leq \left\| \frac{\mathcal{F}\Big(\sigma_2 - \sigma_1 + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} (\sigma_2 - \sigma_1)(s)\, \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \left\| \frac{\mathcal{F}(\phi)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)} \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}, \\
&\leq C' \left\| \frac{\mathcal{F}(\sigma_2 - \sigma_1) + \alpha \mathcal{F}\Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} (\sigma_2 - \sigma_1)(s)\, \mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds\Big)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}
\end{aligned} \tag{V.189}$$

Nous allons maintenant utiliser l'expression des densités σ_1^I et σ_2^I définies par la relation (V.186) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\mathcal{F}\Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} (\sigma_2 - \sigma_1)(s)\, \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds\Big)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} &= \left\| \frac{\mathcal{F}\Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} ((\sigma_2^I - \sigma_1^I) \star \phi)(s)\, \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds\Big)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}, \\
&= \left\| \frac{\mathcal{F}\Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy\Big) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds\Big)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{V.190}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{F}\Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy\Big) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds\Big)(\xi) \right| &\leq \left\| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy\Big) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds \right\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\mathrm{ma}}} \\
&\leq \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \left\| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy\Big)\, ds \right\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}, \\
&\leq \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \left\| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\mathrm{e}^{+i\xi y}\phi(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy\Big)\, ds \right\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}, \\
&\leq \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\mathrm{e}^{+i\xi y}\phi(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy\Big)\, ds \right| dt, \\
&\leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}) \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\mathrm{e}^{+i\xi y}\phi(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy\Big)\, ds \right|, \\
&\leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}) \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \|\,|(\sigma_2^I - \sigma_1^I)\mathrm{e}^{+i\xi y}|\,\|_{\mathbb{L}^\infty([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \phi(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy\Big)\, ds \right|, \\
&\leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}) \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \|\,|(\sigma_2^I - \sigma_1^I)\mathrm{e}^{+i\xi y}|\,\|_{\mathbb{L}^\infty([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \phi(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy \right| ds, \\
&\leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})^2 \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \|\,|(\sigma_2^I - \sigma_1^I)\mathrm{e}^{+i\xi y}|\,\|_{\mathbb{L}^\infty([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \left| \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \phi(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy \right|, \\
&\leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})^2 \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} |\mathcal{F}(\phi)(\xi)| \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^\infty([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}.
\end{aligned} \tag{V.191}$$

Nous supposons également sur les densités σ_1^I et σ_2^I la relation suivante :

$$\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy \right) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds \right) dt = 0. \tag{V.192}$$

L'inégalité (V.191) est homogène puisque les termes de gauche et de droite dépendent de ξ, nous obtenons finalement,

$$\left| \frac{\mathcal{F}\left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy \right) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds \right)(\xi)}{\mathcal{F}(\phi)(\xi)} \right| \leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})^2 \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^\infty([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.193}$$

Afin de trouver un résultat de stabilité consistant, nous devons imposer sur la densité $\sigma_2^I - \sigma_1^I$, la relation suivante :

$$\|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^\infty([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \leq \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.194}$$

Les relations (V.193) et (V.194) fournissent l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{\mathcal{F}\Big(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} \left(\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\Theta_{\max}} (\sigma_2^I - \sigma_1^I)(s-y)\phi(y)\, dy \right) \mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\, ds \right)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq (\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})^2 \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.195}$$

Concernant le premier terme, d'après la définition (V.186) des densités σ_2^I et σ_1^I nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathcal{F}(\sigma_2 - \sigma_1)}{\mathcal{F}(\phi)} \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} &\leq \|\mathcal{F}(\sigma_2^I - \sigma_1^I)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}, \\ &\leq \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \end{aligned} \tag{V.196}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz afin d'obtenir :

$$\|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^1([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])} \leq \sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} \times \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.197}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\|\kappa_{E_2} - \kappa_{E_1}\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}-\Theta_\gamma])} \leq C' \left(\sqrt{\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}}} + |\alpha|(\Theta_{\max} - t_{\mathrm{I}})^2 \sup_{s\in[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}]} \{\mathrm{e}^{|\alpha|(\Theta_{\max}-s)}\} \right) \|\sigma_2^I - \sigma_1^I\|_{\mathbb{L}^2([t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}])}. \tag{V.198}$$

V.2.5.4 Un exemple d'inversion

Nous voulons montrer que la densité de pattern de remboursement, définie par :

$$\gamma = \frac{1}{\Theta_\gamma} \mathbb{1}_{[0,\Theta_\gamma]}, \tag{V.199}$$

satisfait l'hypothèse (V.94) du théorème 2. C'est-à-dire, nous allons montrer que :

$$\left(\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)}\right)_{|]-\infty,-\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}[\cup]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma},+\infty[} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}). \tag{V.200}$$

Par définition de la transformée de Fourier de la densité γ définie dans la relation (V.199), nous avons :

$$\mathcal{F}(\gamma)(\xi) = \frac{1}{\Theta_\gamma} \int_0^{\Theta_\gamma} e^{-ix\xi}\, dx. \tag{V.201}$$

Par intégration de la fonction exponentielle, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(\gamma)(\xi) = \frac{i(e^{-i\Theta_\gamma \xi} - 1)}{\Theta_\gamma \xi}. \tag{V.202}$$

Nous calculons le carré du module de la fonction complexe $\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)}$ comme suit :

$$\left|\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right|^2 = \frac{(\xi\Theta_\gamma)^2}{(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma))^2 + (\cos(\xi\Theta_\gamma) - 1)^2}. \tag{V.203}$$

Comme la quantité $(\cos(\xi\Theta_\gamma) - 1)^2$ est positive, nous obtenons, à partir de la relation (V.203), l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right|^2 \leq \left(\frac{\xi\Theta_\gamma}{\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)}\right)^2. \tag{V.204}$$

Nous voulons montrer que la fonction définie par $\xi \to 2 - \left(\frac{\xi\Theta_\gamma}{\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)}\right)^2$ est positive sur l'intervalle $]-\infty, -\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}[\cup]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}, +\infty[$. Pour cela, nous allons montrer qu'elle est positive sur l'intervalle $]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}, +\infty[$ puisque c'est une fonction paire :

$$\begin{aligned} 2 - \left(\frac{\xi\Theta_\gamma}{\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)}\right)^2 &= \frac{2(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma))^2 - {\xi\Theta_\gamma}^2}{(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma))^2}, \\ &= \frac{(\sqrt{2}(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)) - \xi\Theta_\gamma) \times (\sqrt{2}(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)) + \xi\Theta_\gamma)}{(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma))^2}. \end{aligned} \tag{V.205}$$

Comme nous avons :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+, \sin(\xi\Theta_\gamma) \leq \xi\Theta_\gamma, \tag{V.206}$$

parce que nous avons $\Theta_\gamma > 0$, alors la fonction définie par $\xi \to \sqrt{2}(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)) + \xi\Theta_\gamma$ est positive sur l'intervalle $]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}, +\infty[$. D'un autre côté, comme nous avons $\xi > \frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}$, nous obtenons l'inégalité suivante : $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times \xi\Theta_\gamma > 1$. Par ailleurs, comme la fonction sinus est minorée par la valeur 1, nous obtenons l'inégalité $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times \xi\Theta_\gamma > \sin(\xi\Theta_\gamma)$. Par conséquent, la fonction définie par $\xi \to \sqrt{2}(\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)) - \xi\Theta_\gamma$ est strictement positive sur l'intervalle $]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}, +\infty[$. Plus formellement, nous avons montré :

$$\forall \xi \in \left]-\infty, -\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}\right[\bigcup \left]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}, +\infty\right[, \left(\frac{\xi\Theta_\gamma}{\xi\Theta_\gamma - \sin(\xi\Theta_\gamma)}\right)^2 \leq 2. \tag{V.207}$$

Nous utilisons les relations (V.204) et (V.207) pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\forall \xi \in \left]-\infty, -\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}\right[\bigcup \left]\frac{2+\sqrt{2}}{\Theta_\gamma}, +\infty\right[, \left|\frac{1}{1-\mathcal{F}(\gamma)(\xi)}\right|^2 \leq 2. \tag{V.208}$$

Ce qui achève la preuve de la relation (V.200).

V.3 Problème inverse dans l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$

Nous voulons que la convolution des deux mesures $\tilde{\kappa}_E$ et $\tilde{\gamma}$ possède un support contenu dans l'intervalle $[t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]$. Pour cela, nous considérons pour tout réel strictement positif Θ_γ vérifiant la relation (V.4), que la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est définie telle que :

$$\tilde{\gamma} \in \mathcal{M}([0, \Theta_\gamma]). \tag{V.209}$$

V.3.1 Définition des opérateurs

Nous définissons $\mathcal{L}_1 : \mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]) \to \mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ par l'opérateur qui agit sur la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$, et qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] = \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} - \alpha\Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathtt{I}}, t[}\Big\rangle dt, \tag{V.210}$$

où $\Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathtt{I}}, t[}\Big\rangle dt$ est une mesure à densité dont la densité est la fonction

$$t \mapsto \int_{t_{\mathtt{I}}}^{t} \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \tag{V.211}$$

et nous définissons $\mathcal{D}_1 : \mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}]) \to \mathcal{M}([t_{\mathtt{I}}, \Theta_{\max}])$ par l'opérateur qui agit sur la densité de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$, et qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}] = -\alpha\Big\langle \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}, \mathbb{1}_{|[t, \Theta_{\max}[}\Big\rangle dt - \tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}, \tag{V.212}$$

où $\left\langle \tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}, \mathbb{1}_{|[t,\Theta_{\max}[} \right\rangle dt$ est une mesure à densité dont la densité est la fonction

$$t \mapsto \int_t^{\Theta_{\max}} \tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}. \tag{V.213}$$

V.3.2 Propriétés des opérateurs

Nous définissons $\tilde{\mathrm{e}}_\alpha$ par la mesure à densité dont la densité e_α est une fonction exponentielle de coefficient α, définie par :

$$\tilde{\mathrm{e}}_\alpha = \mathrm{e}_\alpha(t)dt, \tag{V.214}$$

où la fonction e_α est définie par :

$$\mathrm{e}_\alpha(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{V.215}$$

Lemme 6. *Si la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est dans l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$, et si la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ satisfait la relation* (V.209)*, nous avons l'égalité suivante :*

$$(1 - \mathcal{F}(\tilde{\gamma}))\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E) = \mathcal{F}\Big(\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha\Big\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[}\Big\rangle\Big), \tag{V.216}$$

où l'application $\mathcal{F}$ est l'opérateur de transformée de Fourier.

Démonstration. Nous avons l'égalité suivante :

$$\left\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle dt = \tilde{\mathrm{e}}_\alpha \Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} - \alpha \Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},s[} \Big\rangle ds, \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \Big\rangle. \tag{V.217}$$

En effet, la relation (V.217) est obtenue par la formule d'intégration par parties suivante :

$$\Big\langle \Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \alpha \mathrm{e}_{\alpha|[t_{\mathrm{I}},s[} \Big\rangle ds, \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \Big\rangle dt = \tilde{\mathrm{e}}_\alpha \Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \Big\rangle - \Big\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},t[} \Big\rangle dt. \tag{V.218}$$

Nous utilisons la définition (V.210) de l'opérateur $\mathcal{L}_1$ pour que l'égalité (V.217) soit multipliée par α afin d'obtenir la relation suivante :

$$\left\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \alpha \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle dt = \alpha \tilde{\mathrm{e}}_\alpha \Big\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \Big\rangle. \tag{V.219}$$

En remplaçant le terme $\left\langle \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}, \alpha \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle dt$ par $\tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} - \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E]$ dans la relation (V.219), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} = \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha \tilde{\mathrm{e}}_\alpha \Big\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \Big\rangle. \tag{V.220}$$

Nous appliquons la transformée de Fourier sur les termes de la relation (V.220) pour obtenir l'égalité (V.216), ce qui prouve ce lemme.

$\Diamond$

Lemme 7. *Supposons que la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ satisfait l'hypothèse suivante :*

$$\left\langle \tilde{\gamma}, t\mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle \neq 0. \tag{V.221}$$

Si l'opérateur $\mathcal{L}_1$ défini dans la relation (V.210) *satisfait :*

$$\left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle, \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle = 0, \tag{V.222}$$

alors la quantité $\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E)$ est dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\lim_{\xi\to 0} \mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E)(\xi) = -\frac{\left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle, t\mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle}{\left\langle \tilde{\gamma}, t\mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle}. \tag{V.223}$$

Si l'opérateur $\mathcal{L}_1$ ne satisfait pas l'égalité (V.222)*, $\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E)$ possède une limite infinie en* 0.

Démonstration. Comme $\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] \in \mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}])$, nous avons :

$$\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle \in \mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]). \tag{V.224}$$

En effet, nous considérons que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ définit bien une mesure finie sur son support $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]$. Ensuite, nous utilisons le développement de Taylor au point 0 d'ordre 1 de la fonction $\mathcal{F}\Bigg(\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle\Bigg)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Bigg(\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle\Bigg)(\xi) &= \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle, \mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle \\ &\quad - i\xi \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle, t\mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle + O(\xi^2).\end{aligned} \tag{V.225}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{L}_1$ satisfait la relation (V.222), la relation (V.225) devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Bigg(\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle\Bigg)(\xi) &= -i\xi \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_\alpha \left\langle \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathrm{I}},t[} \right\rangle, t\mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle \\ &\quad + O(\xi^2).\end{aligned} \tag{V.226}$$

Ensuite, nous effectuons le développement de Taylor au point 0 d'ordre 1 de la fonction $1 - \mathcal{F}(\gamma)$ pour obtenir :

$$1 - \mathcal{F}(\tilde{\gamma})(\xi) = i\xi \left\langle \tilde{\gamma}, t\mathbb{1}_{|[t_{\mathrm{I}},\Theta_{\max}[} \right\rangle + O(\xi^2). \tag{V.227}$$

Nous injectons les deux développements de Taylor définis dans les relations (V.226) et (V.227) dans l'égalité (V.216) afin d'obtenir l'égalité (V.223). Par ailleurs, nous rappelons que les mesures $\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E]$ et $\tilde{\gamma}$ sont des mesures finies sur leurs supports respectifs $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max}]$ et $[0, \Theta_\gamma]$. Ce qui implique que le numérateur et le dénominateur définis dans le terme droit de la relation (V.223) sont des quantités finies. Nous concluons que la quantité $\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E)$ possède une limite finie en 0, et que nous avons $\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$.

$\Diamond$

Lemme 8. *Si la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est différente de la mesure de Dirac δ_0 à l'origine, l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_1$ défini dans la relation* (V.210) *est injectif.*

Démonstration. Supposons que la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est dans le noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_1)$, nous obtenons, en utilisant la relation (V.220), l'égalité suivante :

$$\tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} = 0. \tag{V.228}$$

Supposons maintenant que la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ satisfait l'équation (V.228), alors elle est dans le noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_1)$. Nous obtenons l'égalité suivante :

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_1) = \left\{\tilde{\kappa}_E \in \mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]), \tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma} = 0\right\}. \tag{V.229}$$

Supposons maintenant que la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est égale à la mesure de Dirac δ_0, i.e. $\tilde{\gamma} = \delta_0$. La relation (V.229) montre que le noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_1)$ se réduit à l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma])$, puisque la mesure δ_0 est l'élément neutre de l'opérateur de convolution. Nous concluons que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ n'est pas injectif. Dans le cas où la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est différente de la mesure de Dirac δ_0, i.e. $\tilde{\gamma} \neq \delta_0$, nous distinguons quatre cas pour montrer l'injectivité de l'opérateur $\mathcal{L}_1$:

— Lorsque $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité. Nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est injectif quelle que soit la mesure à densité $\tilde{\kappa}_E$. Pour cela, nous rappelons que nous avons montré dans le lemme 4 que l'opérateur $\mathcal{L}$ est injectif pour toute mesure à densité γ qui satisfait la relation (V.5). Nous s'appuyons sur ce résultat pour déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est injectif lorsque la mesure $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité quelle que soit la mesure à densité $\tilde{\kappa}_E$. En effet, dans ce cas nous avons l'égalité des opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}$.

— Lorsque la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité. Nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est injectif quelle que soit la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$. Comme la convolution $\tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}$ de la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$ et de la mesure à densité $\tilde{\gamma}$ est une mesure à densité, alors l'égalité définie par la relation (V.228) implique que la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$ est égale à la mesure à densité $\tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}$. Cette égalité s'exprime sous la forme suivante :

$$\underbrace{\tilde{\kappa}_E}_{\text{mesure concentrée}} = \underbrace{\tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}}_{\text{mesure à densité}}. \tag{V.230}$$

Pour que l'égalité (V.230) aurait lieu, il faut que la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ soit nulle, puisque une mesure concentrée ne peut pas être égale à une mesure à densité.

— Lorsque la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure concentrée qui s'écrit sous la forme d'une combinaison d'une mesure de Dirac :

$$\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^{m} e_j \delta_{a_j}. \tag{V.231}$$

Nous utilisons la relation (V.228) pour que la mesure à densité $\tilde{\kappa}_E$ de densité κ_E satisfasse la relation suivante :

$$\kappa_E(x) = \sum_{j=1}^{m} e_j \kappa_E(x + a_j). \tag{V.232}$$

Comme la relation (V.232) est vraie pour toute densité κ_E à support compact contenu dans l'intervalle $[t_{\mathrm{I}}, \Theta_{\max} - \Theta_\gamma]$, la densité κ_E est nulle.

— Lorsque la mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ est une mesure concentrée. Nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est injectif quelle que soit la mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$. Comme la mesure $\tilde{\gamma}$ est une mesure concentrée, elle s'écrit sous la forme définie dans la relation (V.231). Pour montrer que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est injectif, nous allons montrer, pour toute mesure concentrée $\tilde{\kappa}_E$ s'écrivant sous la forme suivante :

$$\tilde{\kappa}_E = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_{b_i}, \tag{V.233}$$

que les coefficients $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ sont nuls. La relation (V.228) implique, pour les mesures $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\kappa}_E$ définies respectivement dans les relations (V.231) et (V.233), l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \times \left(\delta_{b_i} - \sum_{j=1}^{m} e_j \delta_{b_i+a_j}\right) = 0. \tag{V.234}$$

Comme la mesure $\tilde{\gamma}$ est différente de la mesure de Dirac δ_0, nous avons l'implication suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} e_j \delta_{a_j} \neq \delta_0 &\Longrightarrow \delta_{b_i} \star \left(\sum_{j=1}^{j=m} e_j \delta_{a_j}\right) \neq \delta_{b_i} \star \delta_0, \\ &\Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} e_j \delta_{a_j+b_i} \neq \delta_{b_i}. \end{aligned} \tag{V.235}$$

Nous précisons que l'implication définie dans la relation (V.235) est valable même si le réel b_i est nul pour tout entier i compris entre 1 et n. La quantité

$$\delta_{b_i} - \sum_{j=1}^{m} e_j \delta_{b_i+a_j}, \tag{V.236}$$

exprime une combinaison de mesure de Dirac répartie sur des positions différentes. Par conséquent, la relation (V.234) implique que les coefficients $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ sont nuls. Nous allons maintenant vérifier que les coefficients $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ sont nuls lorsque m est égal à 1. Si $m = 1$, nous avons $e_m \neq 1$ et $a_m = 0$. Nous obtenons que la mesure de Dirac δ_{b_i} est différente de la mesure de Dirac $e_1\delta_{b_i+a_1}$ pour tout entier i compris entre 1 et n. Plus formellement :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \delta_{b_i} \neq e_1 \delta_{b_i+a_1}. \tag{V.237}$$

$\Diamond$

V.3.3 Théorème d'inversion

Théorème 9. *Soit une mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ telle qu'il existe un réel ϵ strictement positif vérifiant la relation suivante :*

$$\frac{1}{1-\mathcal{F}(\tilde{\gamma})}_{|]-\infty,-\epsilon[\cup]\epsilon,+\infty[} \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{V.238}$$

Soit

$$F = \frac{\mathcal{F}\Big(\tilde{\sigma} - \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_{\alpha}\Big\langle \tilde{\sigma} - \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathtt{I}},t[}\Big\rangle\Big)}{1-\mathcal{F}(\tilde{\gamma})} \tag{V.239}$$

une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ *telle qu'il existe un entier* N *et une certaine constante positive* C *vérifiant, pour tout* $\xi \in \mathbb{C}$ *l'inégalité suivante :*

$$|F(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{N}\mathrm{e}^{2\pi|\Theta_{\max}-\Theta_{\gamma}||\xi|}. \tag{V.240}$$

Supposons que la mesure de remboursement de la dette courante $\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ *et la mesure de dépense algébrique* $\tilde{\sigma}$ *sont dans* $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$*. S'il existe une mesure d'emprunt* $\tilde{\kappa}_E$ *dans* $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_{\gamma}])$*, qui peut s'exprimer par la formule suivante :*

$$\tilde{\kappa}_E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\Big(\tilde{\sigma} - \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_{\alpha}\Big\langle \tilde{\sigma} - \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathtt{I}},t[}\Big\rangle\Big)}{1-\mathcal{F}(\tilde{\gamma})}\right), \tag{V.241}$$

alors la mesure $\tilde{\kappa}_E$ *est unique dans l'espace* $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}-\Theta_{\gamma}])$*.*

Démonstration. L'égalité (V.216) implique :

$$\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E) = \frac{\mathcal{F}\Big(\tilde{\sigma} - \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}] + \alpha\tilde{\mathrm{e}}_{\alpha}\Big\langle \tilde{\sigma} - \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}], \mathrm{e}_{-\alpha|[t_{\mathtt{I}},t[}\Big\rangle\Big)}{1-\mathcal{F}(\tilde{\gamma})}, \tag{V.242}$$

parce que la mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$ se décompose comme la somme des deux opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{D}_1$ définis respectivement dans les relations (V.210) et (V.212).

Comme la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$ n'est pas une application surjective de l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dans l'espace $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$, nous n'obtenons pas l'existence de la solution $\tilde{\kappa}_E$ du problème inverse. Par ailleurs, si cette solution existe vérifiant la relation (V.241), alors elle est unique puisque l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est injectif (voir lemme 8).

$\Diamond$

Nous allons maintenant évoquer le problème inverse sur l'espace de mesure $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$. Nous allons montrer que ce problème inverse est mal posé. Cela revient à montrer que l'opérateur $\mathcal{L}_1$ n'est pas continûment inversible. Nous précisons jusqu'à présent, nous avons exprimé $\mathcal{F}(\tilde{\kappa}_E)$ à travers la relation (V.242) en terme des crochets de dualités entre des mesures, et des densités définies sur des supports. Comme l'application $\mathcal{F}^{-1}$ n'est pas une application inversible de l'espace des mesures. Or, cet application est inversible sur l'espace des fonctions de carré intégrable. Nous ne pouvons pas exprimer $\tilde{\kappa}_E$ par l'aplication inverse de la terme de droite définie dans (V.242). Nous avons montré à travers ce raisonnement que le problème inverse est mal posé sur l'espace de mesure $\mathcal{M}([t_{\mathtt{I}},\Theta_{\max}])$ puisque la solution n'est pas unique s'il existe dans cet espace.

V.4 Stratégie financière

Une organisation financière, comme une collectivité locale, définit une stratégie qui doit aller au-delà de ses prévisions. En effet, elle planifie un budget pluriannuel d'un projet, ensuite elle estime son impact dans le futur. Cela permet d'orienter ses choix stratégiques et de répondre à leurs besoins majeurs en matière d'aide à la décision financière. L'analyse financière d'une collectivité locale consiste à examiner l'évolution de sa situation au cours des années passées pour disposer d'une base raisonnée de prévision et de planification de sa situation future. Nous nous référons au document [6] qui décrit une méthode d'observation des situations financières dégradées de la comptabilité publique.

Nous allons montrer dans cette section comment utiliser notre modèle financier pour élaborer un plan de stratégie financière. Les questions liées à cette stratégie se réduisent à la question d'inverser l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans la relation (V.3), qui n'est pas toujours inversible. Pour cela, nous allons donner un exemple pour illustrer un cas pour élaborer une stratégie financière de notre modèle financier. Dans cet exemple, nous supposons que la densité de dépense courante σ_g est nulle. Par conséquent, nous utilisons la relation (III.30) pour établir que la densité de dépense algébrique σ est égale à la densité de dépense isolée β, i.e. $\sigma = \beta$. Nous fixons le taux d'emprunt α à 0,07 et nous fixons le schéma de remboursement $\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$. Notre objectif qui suit consiste à déterminer la densité d'emprunt κ_E en fonction de la densité de dépense isolée β. Nous précisons que la densité β est une fonction qui associe le temps à la somme mise dans un projet mené par l'organisation.

Dans notre exemple, nous allons choisir la stratégie la plus avantageuse. Ce qui évoque la possibilité de réaliser un gain sans risque. Cette stratégie assure un profit et ne nécessite aucune mise de fonds initiale. Nous validons notre stratégie à travers la simulation numérique définie dans la Figure V.4 possèdant sept diagrammes. Chaque variable financière est présentée dans chaque diagramme, dont nous allons donner la signification. Nous présentons la première variable, qui est la densité de pattern de remboursement γ dans le premier diagramme. La densité γ est une fonction constante sur la période de temps $[0,1]$ de constante $\frac{1}{4}$, affine sur la période de temps $[3,4]$ de pente 1 qui vaut $\frac{1}{4}$ à l'instant 3, et nulle ailleurs. Nous rappelons que la densité γ décrit comment rembourser la somme 1 empruntée à l'instant 0. Nous exprimons la densité γ sous la forme suivante :

$$\gamma(t) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \left(t - \frac{11}{4}\right)\mathbb{1}_{[3,4]}(t). \tag{V.243}$$

Ensuite, nous définissons la densité d'emprunt κ_E par la fonction $2 + \sin_{|[0,3]}$. Nous présentons la densité κ_E dans le deuxième diagramme du haut de la Figure V.4. Plus formellement :

$$\kappa_E(t) = (2 + \sin(t))\mathbb{1}_{[0,3]}(t). \tag{V.244}$$

Nous rappelons que la densité de dépense algébrique σ et la densité de dépense isolée β sont égales. Comme la relation (III.35) permet de calculer la densité de dépense algébrique σ, nous l'utilisons pour calculer la densité de dépense isolée β présentée dans le troisième diagramme. Nous pouvons considérer que la densité β ne correspond pas à la prévision financière attendue. Pour cela, nous orientons notre stratégie financière vers une nouvelle stratégie. Cette stratégie consiste à modifier cette densité β en l'annulant sur la période de temps $[3,7]$. Nous notons β_{M} la densité modifiée de dépense isolée, et nous la présentons dans le quatrième diagramme. Dans ce contexte, nous définissons l'opérateur $\mathcal{T}$ pour cibler une nouvelle dépense isolée β_{M} estimée dans l'avenir en modifiant celle β du projet, i.e. $\mathcal{T}[\beta] = \beta_{\mathrm{M}}$.

Nous allons maintenant expliquer comment nous allons calculer la nouvelle densité d'emprunt κ^c_E associée à la densité β_{M}. En effet, nous calculons la densité κ^c_E présentée dans le cinquième

diagramme en fonction de la densité β_{M} en deux étapes :

— La première étape consiste à calculer $\mathcal{L}[\kappa_E]$ en fonction des densités β_{M} et $\mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}]$ en utilisant la relation (V.8), puisque le schéma de remboursement $\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}$ est donné :

$$\mathcal{L}[\kappa_E] = \beta_{\mathrm{M}} - \mathcal{D}[\rho^{\mathtt{I}}_{\mathcal{K}}]. \tag{V.245}$$

— La deuxième étape consiste à calculer la transformée de Fourier des densités γ et $\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds$. Par ailleurs, si la transformée de Fourier inverse de la quantité

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds)}{(1 - \mathcal{F}(\gamma))} \tag{V.246}$$

existe, alors la densité d'emprunt κ^c_E est calculée en terme de la densité β_{M} en utilisant la relation (V.127). Plus formellement :

$$\kappa^c_E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(\mathcal{L}[\kappa_E] + \alpha \int_{t_{\mathtt{I}}}^{\bullet} \mathcal{L}[\kappa_E](s)\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\, ds)}{1 - \mathcal{F}(\gamma)}\right). \tag{V.247}$$

La densité d'emprunt κ^c_E est obtenue en utilisant la relation (V.247) et qui présente des fluctuations sur la période de temps $[3, 10]$. Nous allons corriger ces fluctuations autour de l'origine afin de modifier la densité κ^c_E en l'annulant sur la période de temps $[3, 10]$. Nous notons κ^{M}_E la densité modifiée d'emprunt à partir de la densité κ^c_E, et nous la présentons dans le sixième diagramme. Autrement dit, nous définissons l'opérateur $\mathcal{C}$ par l'opérateur de correction permettant d'associer la densité κ^c_E à la densité κ^{M}_E en annulant ces fluctuations, i.e. $\mathcal{C}[\kappa^c_E] = \kappa^{\mathrm{M}}_E$.

Nous présentons dans le dernier diagramme la densité β_{V} calculée en fonction de la densité d'emprunt κ^{M}_E en utilisant la relation (III.35). Nous constatons que cette densité β_{V} coïncide avec la densité β_{M} présentée dans le quatrième diagramme.

$$\kappa_E \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \beta \overset{\mathcal{T}}{\longmapsto} \beta_{\mathrm{M}} \overset{\mathcal{A}^{-1}}{\longmapsto} \kappa^c_E \overset{\mathcal{C}}{\longmapsto} \kappa^{\mathrm{M}}_E \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \beta_{\mathrm{V}}.$$

V.5 Simulation numérique sur le problème inverse

Nous allons montrer dans cette section comment utiliser le problème inverse développé au cours de cette thèse afin de le montrer en pratique à travers des simulations numériques. L'objectif est de déterminer la densité d'emprunt κ_E à partir des densités données de dépense algébrique σ et de densité de pattern de remboursement γ. Plus précisément, nous allons illustrer la forumule (V.98) à travers de ces simulations.

la simulation numérique définie dans la Figure V.5 possèdant trois diagrammes. Chaque variable financière est présentée dans chaque diagramme, dont nous allons donner la signification. Nous présentons la première variable, qui est la densité de pattern de remboursement γ dans le premier diagramme. La densité γ est une fonction constante sur la période de temps $[0, 1]$ de constante $\frac{1}{4}$, et de constante $\frac{3}{4}$ sur la période de temps $[3, 4]$. L'expression de la densité γ est la suivante :

$$\gamma(t) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[3,4]}(t). \tag{V.248}$$

Nous présentons la deuxième variable, qui est la densité de dépense algébrique σ dans le deuxième diagramme. La densité σ est une fonction constante sur la période de temps $[0,1]$ de constante 2, de constante 5 sur la période de temps $[1,3]$, de constante 4.2 sur la période de temps $[3,4]$. La densité de dépense algébrique σ signifie que nous dépensons uniformément les sommes 2, 5 et 4.2 respectivement sur les périodes de temps $[0,1]$, $[1,3]$ et $[3,4]$. Elle signifie que nous avons commencé de dépenser à partir de l'instant 2, et que nous avons fini de dépenser à partir de l'instant 4. Comme le shéma de remboursement est supposé nulle, la relation (V.98) montre que la densité d'emprunt κ_E est calculée sous la forme suivante :

$$\kappa_E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\Big(\sigma + \alpha \displaystyle\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \sigma(s)\,\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\,ds\Big)}{1-\mathcal{F}(\gamma)}\right). \tag{V.249}$$

Nous présentons la troisième variable, qui est la densité d'emprunt κ_E dans le troisième diagramme. Cette variable est obtenue par la discrétisation de la Transformée de Fourier directe et inverse. Nous obtenons un emprunt un peu croissant sur la période de temps $[0,1]$, ensuite elle décroit à partir de l'instant 1 jusqu'à l'instant 3 pour ensuite se stabiliser sur la période de temps $[3,4]$.

Nous allons maintenant décrire comment la densité d'emprunt κ_E est calculée. L'étape de calcul consiste à calculer la transformée de Fourier des densités γ et $\sigma + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \sigma(s)\,\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\,ds$. Par ailleurs, si la transformée de Fourier inverse de la quantité

$$\frac{\mathcal{F}\Big(\sigma + \alpha \displaystyle\int_{t_{\mathrm{I}}}^{\bullet} \sigma(s)\,\mathrm{e}^{\alpha(\bullet - s)}\,ds\Big)}{1-\mathcal{F}(\gamma)} \tag{V.250}$$

existe, alors la densité d'emprunt κ_E est calculée en terme de la densité σ en utilisant la relation (V.249).

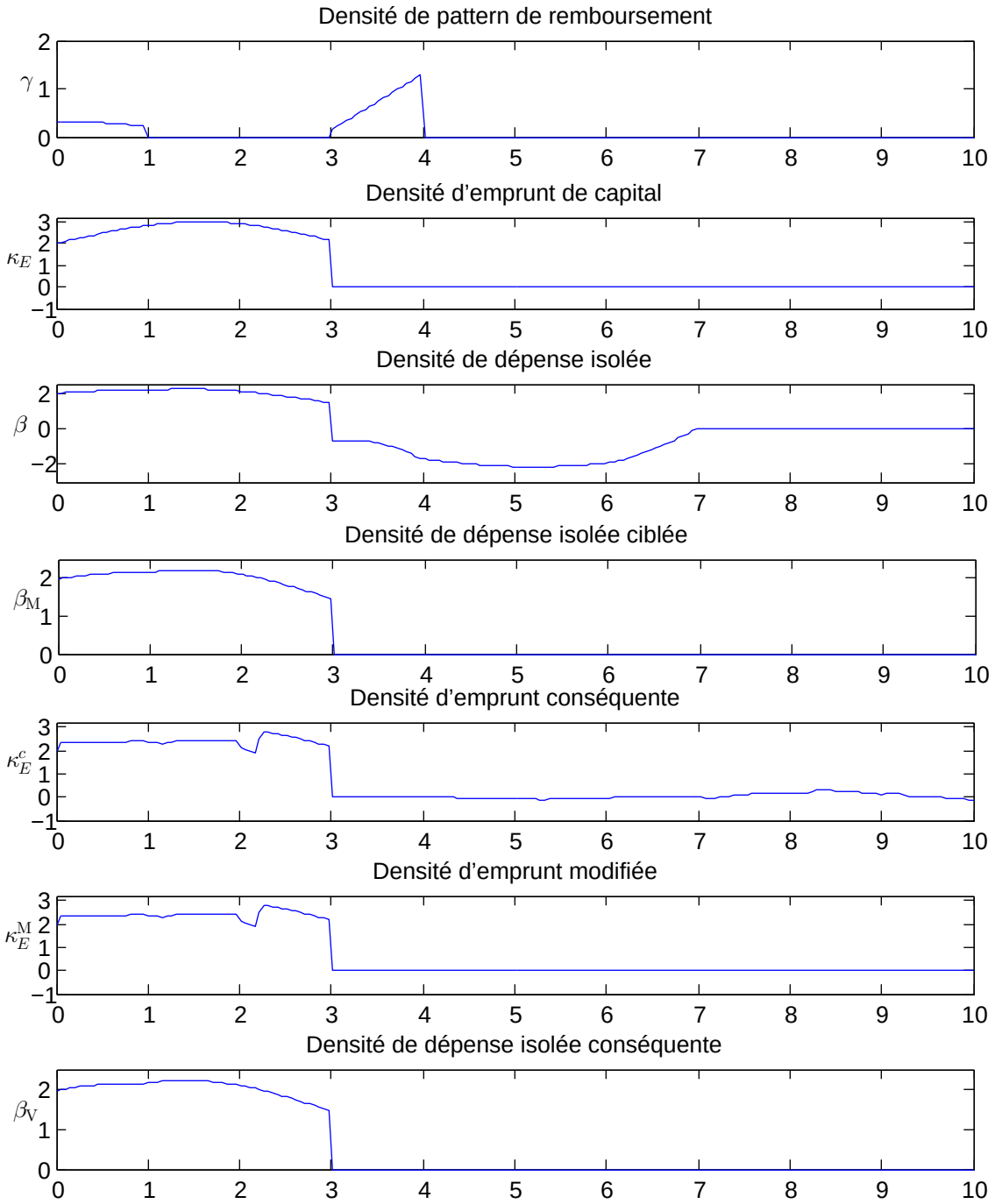

FIGURE V.4 – La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le premier diagramme du haut, la densité d'emprunt κ_E est présentée dans le deuxième diagramme, la densité de dépense isolée β est présentée dans le troisième diagramme, la densité de dépense isolée modifiée β_{M} est présentée dans le quatrième diagramme, la densité d'emprunt conséquente κ_E^c est présentée dans le cinquième diagramme, la densité d'emprunt modifiée κ_E^{M} est présentée dans le sixième diagramme, et la densité de dépense isolée conséquente β_{V} est présentée dans le septième diagramme.

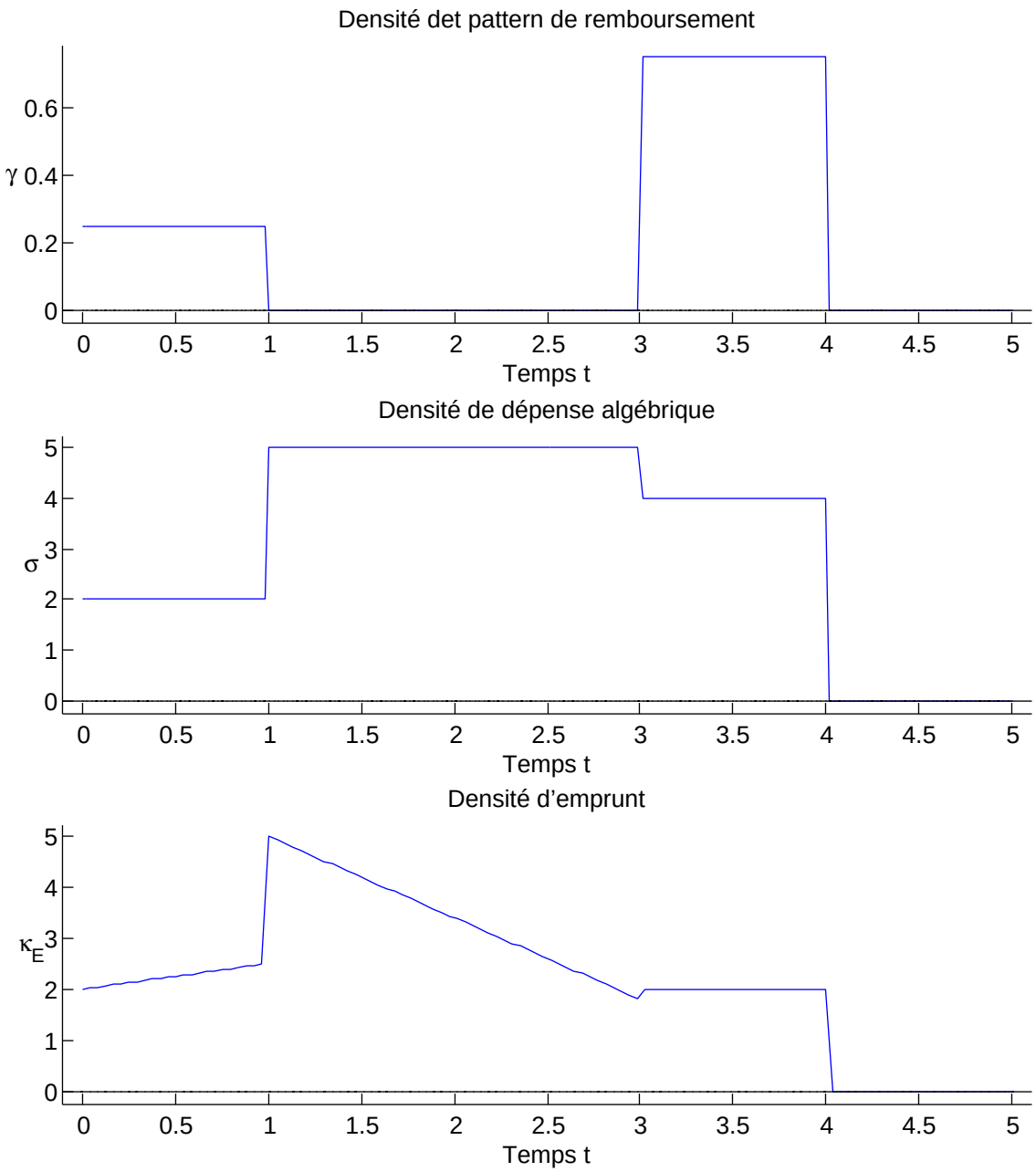

FIGURE V.5 – La densité de pattern de remboursement γ est présentée dans le premier diagramme du haut, la densité de dépense algébrique σ est présentée dans le troisième diagramme, la densité d'emprunt κ_E est présentée dans le troisième diagramme.

Bibliographie

[1] Haɪm Brezis : Analyse fonctionnelle. collection mathématiques appliquées pour la maɪtrise.[collection of applied mathematics for the master's degree], 1983.

[2] Fredi Tröltzsch : Optimal control of partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, 112, 2010.

[3] Laurent Schwartz : Analyse. ii, volume 43 of collection enseignement des sciences [collection : The teaching of science], 1992.

[4] Guillaume Roy-Fortin : *The Fredholm alternative in the study of PDE*. UNIVERSITAS ARHUSIENSIS, Reading, Massachusetts, 2010.

[5] Folkmar Bornemann : On the numerical evaluation of fredholm determinants. *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, 79(270):871–915, April 2010.

[6] Philippe Laurent et Bénédicte Boyer : *La stratégie financière des collectivités locales*. LGDJ, 1997.

[7] Tarik Chakkour : Some notes about the continuous-in-time financial model. *In Abstract and Applied Analysis*, volume 2017. Hindawi, 2017.

[8] Tarik Chakkour : Implementing some mathematical operators for a continuous-in-time financial model. *Engineering Mathematics Letters*, 2017, 2017.

[9] Tarik Chakkour : Inverse problem stability of a continuous-in-time financial model. *Acta Mathematica Scientia*, 2018, 2018.

[10] Tarik Chakkour et Emmanuel Frénod : Inverse problem and concentration method of a continuous-in-time financial model. *International Journal of Financial Engineering*, 3(2): 1650016, 2016.

[11] Emmanuel Frénod et Tarik Chakkour : A continuous-in-time financial model. *Mathematical Finance Letters*, pages 1–36, ID2, 2016.

[12] Clément Marteau : *Recherche d'inégalités oracles pour des problèmes inverses*. Thèse de doctorat, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2007.

[13] Konrad Schmüdgen : *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] George W. Hanson et Alexander B. Yakovlev : *Operator Theory for Electromagnetics*. Springer Science & Business Media, 2002.

[15] C. D. Aliprantis : *An Invitation to Operator Theory*, volume 50. American Mathematical Society, 2002.

VI Méthode numérique concentrant une mesure

Sommaire

VI.1 Mesure concentrée 134

VI.1.1 Construction de la partition de l'unité 134

VI.1.1.1 Étape d'initialisation 135

VI.1.1.2 Étape d'itération 136

VI.2 Exemples de partition de l'unité 137

VI.3 Simulations numériques sur la concentration d'une mesure 138

VI.1 Mesure concentrée

Nous avons défini un objet qui concentre une mesure $\tilde{m}$ sur un ensemble de valeurs comme étant une mesure concentrée. Cette mesure concentrée est une somme de mesures de Dirac localisées aux points définis par des positions et qui discrétise la mesure $\tilde{m}$ sur des valeurs définies par la partition de l'unité.

Nous avons besoin de construire une partition de l'unité adéquate afin de définir une mesure concentrée de la mesure $\tilde{m}$. Pour cela, nous définissons les trois paramètres suivants :

Le premier paramètre est un ensemble d'intervalles $(I_i)_{i\in J}$ tel que chaque intervalle I_i s'écrit sous la forme $I_i = [d_i, f_i]$, où, d_i, f_i sont respectivement le début et la fin de l'intervalle I_i, pour tout entier $i \in J$, avec $J = [\![1; n]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que l'intersection des 2 intervalles $[d_i, f_i]$ et $[d_{i+1}, f_{i+1}]$ ne soit pas vide pour $i \in J \setminus \{n\}$, nous imposons sur les intervalles $(I_i)_{i\in J}$ l'hypothèse suivante

$$\forall i \in J \setminus \{n\}, d_{i+1} < f_i. \tag{VI.1}$$

Le deuxième paramètre est l'indice de floutage FI. Ce paramètre FI influence sur les masses de Dirac calculées. Le troisième paramètre $(CL_i)_{i\in J}$ est un ensemble de valeurs utilisé pour éviter le chevauchement éventuel des masses de Dirac ; en effet, il permettra d'établir un équilibre des masses de Dirac sur chaque intersection des intervalles $(I_i)_{i\in J}$. Nous précisons que les deux paramètres $(I_i)_{i\in J}$ et FI sont des paramètres obligatoires, tandis que le dernier paramètre $(CL_i)_{i\in J}$ est un paramètre facultatif.

Nous imposons en particulier pour une mesure concentrée des conditions de régularité sur les fonctions de la partition de l'unité, c'est pourquoi il faut que ces fonctions soient continues. Par conséquent, nous choisissons une partition continue de l'unité. Nous précisons qu'il est possible de choisir une partition $\mathcal{C}^1$ de l'unité, mais cela n'est pas nécessaire pour concentrer une mesure. Nous supposons dans toute cette section que les fonctions de la partition de l'unité sont uniquement continues.

Les masses de Dirac $(M_i)_{i\in J}$ sont calculées comme suit :

$$\forall i \in J, M_i = \int_{d_i}^{f_i} m \times \phi_i, \tag{VI.2}$$

où, la mesure $m \times \phi_i$ représente le produit de la mesure m par la fonction ϕ_i. Nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m = \sum_{i\in J} M_i, \tag{VI.3}$$

VI.1.1 Construction de la partition de l'unité

Il est difficile de construire une partition de l'unité pour concentrer la mesure $\tilde{m}$. Cette difficulté vient du fait que nous ne pouvons pas déterminer explicitement cette partition de l'unité en fonction des paramètres dont nous disposons. Par conséquent, nous déterminons cette partition de l'unité par une méthode numérique approchée définie en deux étapes. La première étape consiste à réaliser une initialisation, tandis que la deuxième étape consiste à réaliser une itération.

VI.1.1.1 Étape d'initialisation

L'objectif de l'étape d'initialisation est d'initialiser les fonctions positives $(\phi_i^0)_{i\in J}$ telles que chaque fonction ϕ_i^0 est définie sur $\mathbb{R}$ et dépendante des réels d_i et f_i pour tout entier i dans J et de l'indice de floutage FI. Nous précisons que la famille des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ est continue par morceaux et n'est pas nécessairement une partition de l'unité. Nous supposons que le support de chaque fonction ϕ_i^0 est l'intervalle I_i pour tout entier i dans J. Plus formellement :

$$\forall i \in J, \mathrm{Supp}(\phi_i^0) = [d_i, f_i]. \tag{VI.4}$$

Nous allons maintenant déterminer les fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ dans chaque cas d'indice de floutage FI, qui sont :

— Lorsque $FI = 0$, nous définissons chaque fonction ϕ_i^0 comme étant une fonction constante par morceaux, qui prend la valeur 1 sur l'intervalle $[d_i, f_i]$, et la valeur nulle en dehors de l'intervalle $[d_i, f_i]$ pour tout entier i dans J. C'est-à-dire :

$$\text{Si } \ FI = 0, \forall i \in J, \forall x \in \mathbb{R}, \phi_i^0(x) = \mathbb{1}_{[d_i,f_i]}(x). \tag{VI.5}$$

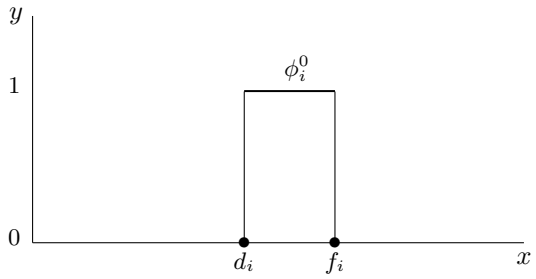

FIGURE VI.1 – Définition des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ lorsque $FI = 0$.

— Lorsque $FI = 1$, nous définissons chaque fonction ϕ_i^0 comme étant une fonction affine par morceaux pour tout entier i dans J. Pour cela, nous définissons c_i un point dans l'intervalle ouvert $]d_i, f_i[$ et nous pouvons choisir ce point c_i comme étant le point du milieu de l'intervalle $[d_i, f_i]$. La restriction de la fonction ϕ_i^0 sur l'intervalle $[d_i, c_i]$ est une fonction affine qui prend la valeur nulle en le point d_i et la valeur 1 en le point c_i pour tout entier i dans J. La restriction de la fonction ϕ_i^0 sur l'intervalle $[c_i, f_i]$ est une fonction affine qui prend la valeur 1 en le point c_i et la valeur nulle en le point f_i pour tout entier i dans J. C'est-à-dire :

$$\text{Si } \ FI = 1, \forall i \in J, \forall x \in \mathbb{R}, \phi_i^0(x) = \frac{x - d_i}{c_i - d_i}\mathbb{1}_{[d_i,c_i[}(x) + \frac{x - f_i}{c_i - f_i}\mathbb{1}_{[c_i,f_i]}(x). \tag{VI.6}$$

— Lorsque $FI \geq 2$, nous définissons chaque fonction continue par morceaux ϕ_i^0 comme étant une fonction affine par morceaux pour tout entier i dans J. Pour cela, nous définissons la valeur d_i' par une valeur d_j à déterminer divisée par 2 puissance d'exposant FI. Nous déterminons la valeur d_j par la valeur inférieure à d_i qui minimise la distance entre le point d_i pour tout entier i dans J différent de j. S'il n'existe aucun point strictement inférieur à d_i, nous prenons $d_j = d_i$. Plus formellement, les points $(d_i^{'})_{i\in J}$ sont définis par :

$$\forall i \in J, d_i^{'} = \{\frac{d_j}{2^{FI}}, \min_{d_j}(d_i - d_j) > 0\} \cup \{\frac{d_i}{2^{FI}}\}. \tag{VI.7}$$

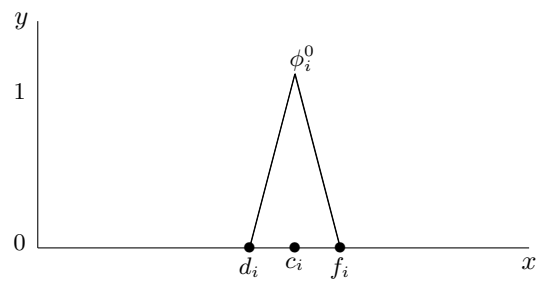

FIGURE VI.2 – Définition des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ lorsque $FI = 1$.

De même, nous définissons la valeur f_i' par une valeur f_j à déterminer divisée par 2 puissance d'exposant FI. Nous déterminons la valeur f_j par la valeur supérieure à f_i, qui minimise la distance entre le point f_i pour tout entier i dans J différent à j. S'il n'existe aucun point strictement supérieur à f_i, nous prenons $f_j = f_i$. Plus formellement, les points $(f_i^{'})_{i\in J}$ sont définis par :

$$\forall i \in J, f_i^{'} = \{\frac{f_j}{2^{FI}}, \min_{f_j}(f_j - f_i) > 0\} \cup \{\frac{f_i}{2^{FI}}\}. \tag{VI.8}$$

Nous définissons le point c_i' par le point du milieu de l'intervalle $[d_i', f_i']$. La restriction de la fonction ϕ_i^0 sur l'intervalle $[d_i', c_i']$ est une fonction affine qui prend la valeur nulle en le point d_i' et la valeur 1 en le point c_i' pour tout entier i dans J. La restriction de la fonction ϕ_i^0 sur l'intervalle $[c_i', f_i']$ est une fonction affine qui prend la valeur 1 en le point c_i' et la valeur nulle en le point f_i' pour tout entier i dans J. C'est-à-dire :

$$\text{Si } \ FI \geq 2, \forall i \in J, \forall x \in \mathbb{R}, \phi_i^0(x) = \frac{x - d_i'}{c_i' - d_i'}\mathbb{1}_{[d_i', c_i'[}(x) + \frac{x - f_i'}{c_i' - f_i'}\mathbb{1}_{[c_i', f_i']}(x). \tag{VI.9}$$

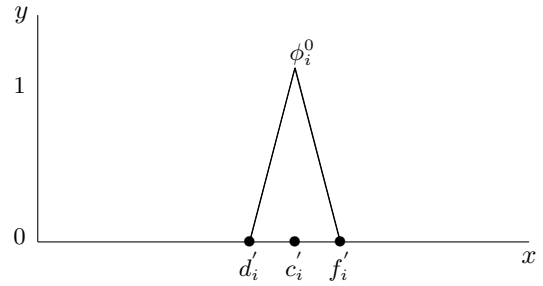

FIGURE VI.3 – Définition des fonctions $(\phi_i^0)_{i\in J}$ lorsque $FI \geq 2$.

VI.1.1.2 Étape d'itération

L'objectif de l'étape d'itération est de calculer les fonctions $(\phi_i)_{i\in J}$ qui forment la partition de l'unité en terme des fonctions initialisées $(\phi_i^0)_{i\in J}$ définies dans la sous-sous-section VI.1.1.1.

Comme le paramètre $(CL_i)_{i\in J}$ est un paramètre optionnel, nous avons deux possibilités pour déterminer les fonctions $(\phi_i)_{i\in J}$. Lorsque nous n'utilisons pas les coefficients $(CL_i)_{i\in J}$, les fonctions $(\phi_i)_{i\in J}$ peuvent s'exprimer dans l'étape itérative

$$\forall i \in J, \phi_i = \frac{{\phi_i}^0}{\sum_{i \in J} {\phi_i}^0}. \tag{VI.10}$$

Lorsque nous utilisons les coefficients $(CL_i)_{i \in J}$, les fonctions $(\phi_i)_{i \in J}$ peuvent s'exprimer dans l'étape itérative

$$\forall i \in J, \phi_i = \frac{CL_i \times {\phi_i}^0}{\sum_{i \in J} CL_i \times {\phi_i}^0}. \tag{VI.11}$$

Nous pouvons vérifier que la famille des fonctions $(\phi_i)_{i \in J}$ définie dans les relations (VI.10) et (VI.11) est une partition de l'unité. En effet, nous pouvons démontrer ceci pour les fonctions définies dans la relation (VI.11). Comme les coefficients $(CL_i)_{i \in J}$ sont positifs et que les fonctions $(\phi_i^0)_{i \in J}$ sont des fonctions positives, il en résulte que la famille des fonctions $(\phi_i)_{i \in J}$ est positive. La famille des fonctions continues $(\phi_i)_{i \in J}$, définies sur $\bigcup_{i \in J} I_i$ est à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. La somme sur toutes les fonctions $(\phi_i)_{i \in J}$ des valeurs prises par chacune d'elle vaut 1 : $\sum_{i \in J} \phi_i(x) = 1$. Nous utilisons le même raisonnement pour montrer que la famille des fonctions $(\phi_i)_{i \in J}$ définies dans la relation (VI.10) est aussi une partition de l'unité.

VI.2 Exemples de partition de l'unité

Afin d'illuster la construction de la partition de l'unité, développée dans la sous-section VI.1.1, nous traçons des exemples de fonctions ϕ_1 et ϕ_2 présentées dans les Figures VI.4 et VI.5, qui sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de supports respectifs $[0, 6]$ et $[2, 4]$, i.e. $d_1 = 0$, $f_1 = 6$, $d_2 = 2$ et $f_2 = 4$. Comme l'indice de floutage FI est nul dans la simulation présentée dans la Figure VI.4, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions contantes par morceaux, et qui sont calculées respectivement par les relations (VI.10) et (VI.11).

La Figure VI.4 de gauche montre la partition de l'unité formée par les fonctions ϕ_1 et ϕ_2, qui sont calculées en utilisant la relation (VI.10). Le diagramme du haut présente la fonction ϕ_1, qui est égale à $\frac{1}{2}$ entre les deux instants 2 et 4 et égale à 1 entre les deux instants 0 et 2 et entre 4 et 6, et nulle ailleurs. Le diagramme du bas présente la fonction $\phi_1 + \phi_2$ qui est égale à 1 entre les deux instants 0 et 6. Cet exemple illustre la formule (VI.10) qui calcule correctement la partition de l'unité.

La Figure VI.4 de droite montre la partition de l'unité formée par les fonctions ϕ_1 et ϕ_2, qui sont calculées en utilisant la relation (VI.11) en utilisant les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$. Le diagramme du haut présente la fonction ϕ_1, qui est égale à $\frac{1}{11}$ entre les deux instants 2 et 4, égale à 1 entre les deux instants 0 et 2 et entre les deux instants 4 et 6. Le diagramme du milieu présente la fonction ϕ_2, qui est égale à $\frac{10}{11}$ entre les deux instants 2 et 4, et qui est nulle ailleurs. Le diagramme du bas montre la somme des deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 qui est égale à 1 entre les deux instants 0 et 6. Cet exemple illustre la formule (VI.11) qui calcule correctement la partition de l'unité.

Si nous fixons maintenant l'indice de floutage à 1 dans la simulation présentée dans la Figure VI.5, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont des fractions par morceaux sur les périodes de temps $[2, 3]$ et $[3, 4]$.

La Figure VI.5 de gauche montre la partition de l'unité formée par les fonctions ϕ_1 et ϕ_2, qui sont calculées en utilisant la relation (VI.10). Le diagramme du haut présente la fonction ϕ_1, qui

est égale à une fraction de fonction sur les périodes de temps $[2,3]$ et $[3,4]$, et égale à $\frac{1}{2}$ à l'instant 3. La fonction ϕ_1 est égale à 1 sur les périodes de temps $[0,2]$ et $[4,6]$. Le diagramme du bas montre la somme des deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 qui est égale à 1 entre les deux instants 0 et 6. Cet exemple illustre la formule (VI.10) qui calcule correctement la partition de l'unité.

La Figure VI.5 de droite montre la partition de l'unité formée par les fonctions ϕ_1 et ϕ_2, qui sont calculées en utilisant la relation (VI.11) en utilisant les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$. Le diagramme du haut présente la fonction ϕ_1, et le diagramme du milieu présente la fonction ϕ_2. Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions fractionnells sur les périodes de temps $[2,3]$ et $[3,4]$. La fonction ϕ_1 est égale à 1 sur les périodes de temps $[0,2]$ et $[4,6]$, tandis que la fonction ϕ_2 est nulle sur les périodes de temps $[0,2]$ et $[4,6]$. Le diagramme du bas montre la somme des deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 étant égale à 1 entre les deux instants 0 et 6.

VI.3 Simulations numériques sur la concentration d'une mesure

Nous allons maintenant justifier dans cette section la relation (VI.2), qui calcule les masses de Dirac d'une mesure concentrée. Pour cela, nous adoptons deux significations, l'une est mathématique, et l'autre financière.

La Figure VI.6 de gauche montre deux mesures concentrées de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$. Cette mesure $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le diagramme du haut, qui est une fonction par morceaux, qui est égale à 1 entre les deux instants 0 et 0.5, égale à 4 entre les deux instants 1 et 2, égale à 6 entre les deux instants 3 et 4, égale à 8 entre les deux instants 4 et 5, égale à 3 entre les deux instants 5 et 5.5, et qui est nulle ailleurs. La première mesure concentrée (voir diagramme du milieu) est calculée avec un indice de floutage nul $FI = 0$. La deuxième mesure concentrée (voir diagramme du bas) est calculée avec un nul indice de floutage $FI = 0$ avec les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$. Nous précisons que nous utilisons la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.4 de gauche et de droite afin de calculer respectivement la première et la deuxième mesure concentrée.

La mesure présentée dans le diagramme du milieu est calculée en utilisant la relation (VI.2). C'est une combinaison de deux mesures de dirac (la première mesure de Dirac est de masse 17 localisée à l'instant 2.5, la deuxième mesure de Dirac est de masse 3 localisée à l'instant 3.5). Cette simulation peut s'interprétée financièrement comme suit. Elle signifie que l'emprunt est partagée en deux morceaux, le premier morceau consiste à emprunter la somme 17 à l'instant 2.5, et le deuxième morceau consiste à emprunter la somme 3 à l'instant 3.5. Par conséquent, la somme totale empruntée est $17+3 = 20$. Ce qui montre que la formule (VI.3) est consistante dans cette simulation.

Le diagramme du bas montre que la mesure concentrée est calculée à partir de la relation (VI.2). C'est une combinaison de deux mesures de dirac (la première mesure de Dirac est de masse $\frac{160}{11}$ localisée à l'instant 2.5, la deuxième mesure de Dirac est de masse $\frac{60}{11}$ localisée à l'instant 3.5). La signification financière de cette simulation est donnée comme suit. Elle signifie que l'emprunt est partagée en deux morceaux, le premier morceau consiste à emprunter la somme $\frac{160}{11}$ à l'instant 2.5, et le deuxième morceau consiste à emprunter la somme $\frac{60}{11}$ à l'instant 3.5. Par conséquent, la somme totale empruntée est $\frac{160}{11} + \frac{60}{11} = 20$. Ce qui prouve que la relation (VI.3) est homogène.

Nous allons maintenant illustrer l'utilisation des deux formules (VI.2) et (VI.3), dans la Figure VI.6 de droite. Pour cela, nous traçons des exemples d'une mesure concentrée de la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ avec un indice de floutage étant égale à 1. Cette Figure montre trois mesures, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ présentée dans le diagramme du haut qui est la même mesure utilisée précédemment. Les deux mesures restantes présentent les deux mesures concentrées de $\tilde{\kappa}_E$. Nous avons utilisé la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.5 de gauche et de droite afin de calculer respective-

ment la première mesure concentrée (voir diagramme du milieu) et la deuxième mesure concentrée (voir diagramme du bas).

Ces deux mesures concentrées sont calculées en utilisant la formule (VI.2). La première mesure concentrée est présentée dans le diagramme du milieu étant la mesure $17.5\delta_{t=2.5} + 2.5\delta_{t=3.5}$. Ce qui illustre que la mesure d'emprunt modèlise la façon d'emprunter la somme 17.5 à l'instant 2.5, et la somme 2.5 à l'instant 3.5. Par conséquent, la somme totale empruntée est égale à 20. La deuxième mesure concentrée est présentée dans le diagramme du bas, et est définie par $15.2\delta_{t=2.5} + 4.8\delta_{t=3.5}$. Cette mesure concentrée signifie que la somme 15.2 est empruntée à l'instant 2.5, et que la somme 4.8 est empruntée à l'instant 3.5. Par conséquent, en manipulant les mesures concentrées, cette simulation reflète la réalité financière.

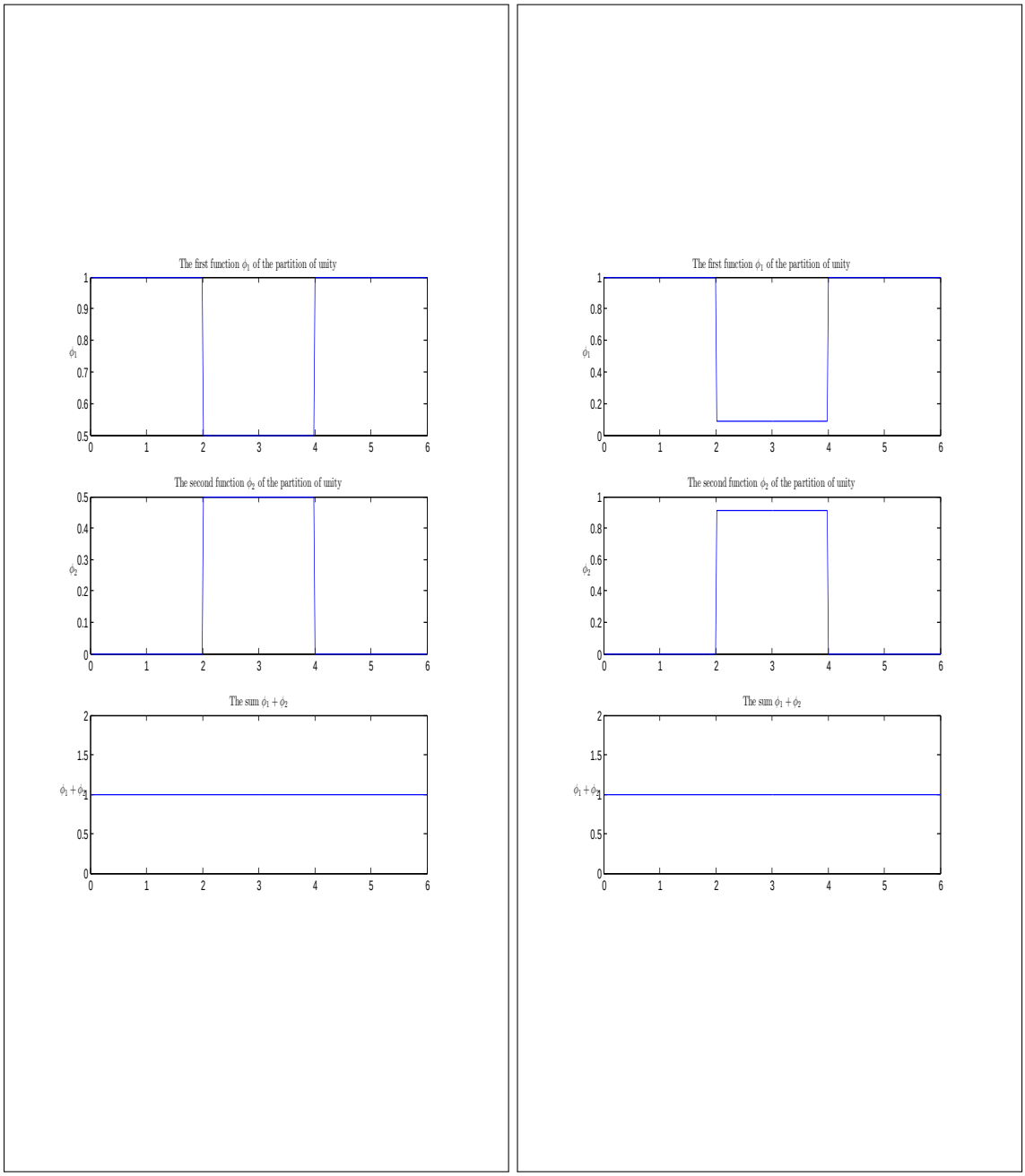

FIGURE VI.4 – Dans chacune des deux Figures, l'indice de floutage est nul. Dans la Figure de gauche, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.10) et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas. dans la Figure à droite, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.11) avec les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$ et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas.

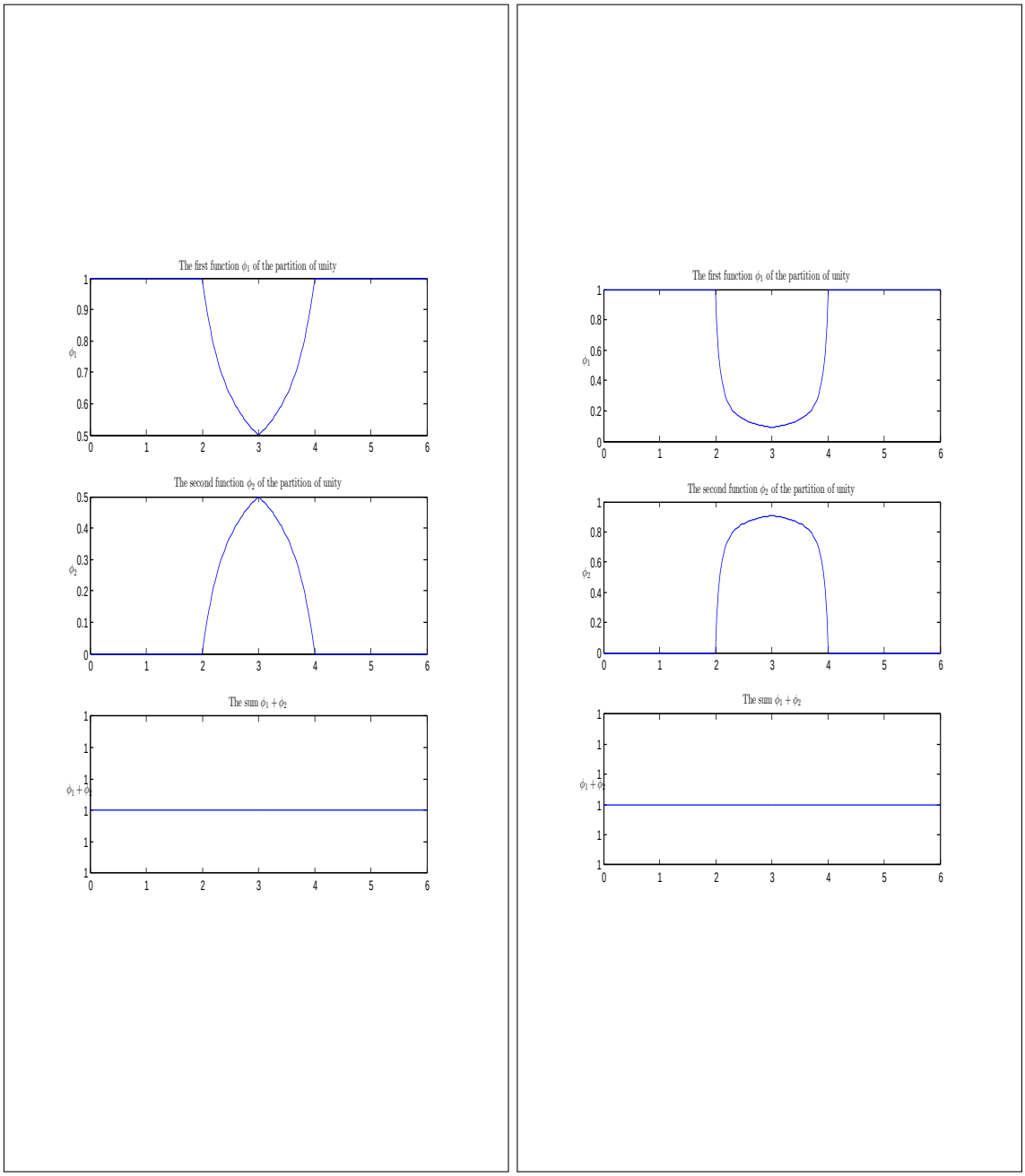

FIGURE VI.5 – Dans chacune des deux Figures, l'indice de floutage est égale à 1. Dans la Figure de gauche, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.10) et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas. dans la Figure à droite, la fonction ϕ_1 est présentée en haut, la fonction ϕ_2 est présentée dans le milieu, calculées en utilisant la relation (VI.11) avec les coefficients $CL_1 = 1$ et $CL_2 = 10$ et leur somme $\phi_1 + \phi_2$ présentée dans le diagramme du bas.

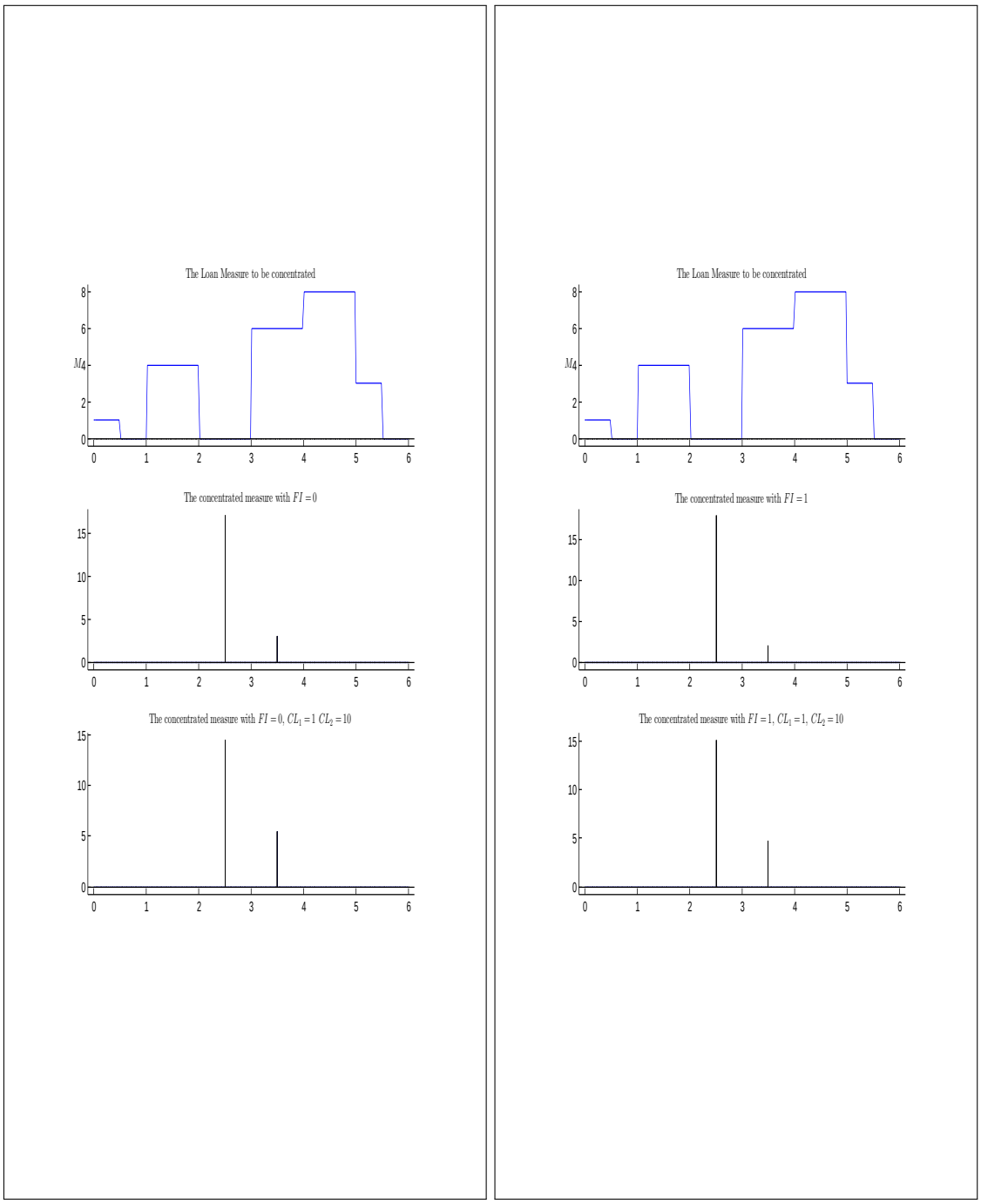

FIGURE VI.6 – Dans chacune des deux Figures. Dans la Figure de gauche, l'indice de floutage FI est nul, la mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le diagramme du haut, au milieu la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ est calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.4 de guache, dans le diagramme du bas la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ est calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.4 de droite. Dans la Figure à droite, l'indice de floutage FI est égale à 1, $\tilde{\kappa}_E$ est présentée dans le diagramme du haut, au milieu la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.5 de guache, dans le diagramme du bas la mesure concentrée de $\tilde{\kappa}_E$ calculée avec la partition de l'unité présentée dans la Figure VI.5 de droite.

VII Développement des librairies Lemf et LemfAN en *C#*

Sommaire

VII.1 Environnement de développement 144
VII.1.1 Technologie utilisée : Visual Studio 144
VII.1.2 Language *C#* 144
VII.2 Composition des librairies Lemf et LemfAN 144
VII.2.1 Les interfaces 144
VII.2.1.1 Interfaces des mesures 144
VII.2.1.2 Interfaces des champs 145
VII.2.1.3 Interface générique 145
VII.2.1.4 Les contrats sur les interfaces des mesures et des champs . . 146
VII.2.1.5 Interfaces pour chaque mesure et chaque champ 146
VII.2.2 Les classes abstraites 147
VII.2.3 Les classes 148
VII.3 Composition des librairies des tests LemfTest et LemfANTest . . . 148
VII.3.1 Les tests unitaires de validation 148
VII.4 Optimisation de la librairie LemfAN 149
VII.4.1 Principe du cache 149
VII.4.2 Approche par la parallélisation 149
VII.4.3 Utilisation de Math.Net Numerics 149

Résumé. Nous avons développé deux librairies industrielles pour réaliser un ensemble d'opérations mathématiques sur les mesures et les champs pour la modélisation financière continue en temps. Nous les avons appelées LemfAN (Library Embedded Finance And Numerical Analysis) et Lemf (Library Embedded Finance).

VII.1 Environnement de développement

Notre environnement de développement logiciel est constitué d'une technologie appelée Visual Studio avec un langage de programmation *C#*. Nous définissons cette technologie dans la sous-section VII.1.1 et ce langage de programmation *C#* dans la sous-section VII.1.2.

VII.1.1 Technologie utilisée : Visual Studio

L'outil de développement en Visual Studio est un ensemble complet d'outils de développement développé par Microsoft permettant de générer des applications Web ASP.NET, des services Web XML, des applications bureautiques et des applications mobiles. Visual Basic, Visual *C#* et Visual *C++* utilisent tous le même environnement de développement intégré (IDE) permettant de faciliter la création de solutions à plusieurs langages. Par ailleurs, ces langages utilisent les fonctionnalités du .NET Framework, qui fournit un accès à des technologies clés simplifiant le développement d'applications Web ASP et de services Web XML. Nous précisons que Visual Studio est utilisé par la plupart des développeurs chez MGDIS.

VII.1.2 Language *C#*

Créé en 2001, *C#* est le langage de programmation qui reflète le mieux l'architecture Microsoft.NET. *C#* peut faire fonctionner toutes les applications .NET. Il contient beaucoup de mécanismes comme les classes, interfaces, délégués, et exceptions.

VII.2 Composition des librairies Lemf et LemfAN

Les librairies Lemf et LemfAN sont constituées d'un ensemble d'objets informatiques qui sont des interfaces, des classes et des classes abstraites. Nous définissons ces interfaces dans la sous-section VII.2.1

VII.2.1 Les interfaces

Nous avons utilisé des interfaces dans les librairies LemfAN et Lemf pour définir uniquement les signatures des méthodes et des propriétés. Nous définissons dans la suite les principales interfaces des mesures et des champs.

VII.2.1.1 Interfaces des mesures

Nous avons défini l'interface IMeasureAN par l'interface de discrétisation d'une mesure de bas niveau dans la librairie LemfAN. Nous précisons que toutes les mesures de bas niveau implémentent l'interface IMeasureAN. Cette interface IMeasureAN contient une méthode appelée EvaluateDiscrete permettant de discrétiser une mesure de bas niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'observation minimal $T_{\min}$ et un pas d'observation T_{obs}. La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul qui contient un ensemble de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs.

```
1 interface IMeasureAN
2 {
```

```
Task<IEnumerable<double>> EvaluateDiscrete(decimal a, decimal b, decimal T_obs,
decimal T_min) {}
}
```

Nous avons défini l'interface IMeasure par l'interface d'intégration d'une mesure de haut niveau dans la librairie Lemf. Nous précisons que toutes les mesures de haut niveau implémentent l'interface IMeasure. Cette interface IMeasure contient une méthode appelée Evaluate permettant d'intégrer une mesure de haut niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'observation minimal $T_{\min}$ pour retourner une valeur.

```
interface IMeasure
{
double Evaluate(decimal a, decimal b, decimal T_obs) {}
}
```

VII.2.1.2 Interfaces des champs

L'interface IFieldAN est définie par l'interface d'évaluation d'un champ de bas niveau dans la librairie LemfAN et contient une méthode EvaluateField. La méthode EvaluateField permet d'évaluer un champ de bas niveau entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul générant un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs. Nous précisons que tous les champs de bas niveau implémentent l'interface IFieldAN.

```
interface IFieldAN
{
Task<IEnumerable<double>> EvaluateField(decimal a, decimal b, decimal T_dF) {}
}
```

Nous avons défini l'interface IField par l'interface d'évaluation d'un champ de haut niveau dans la librairie Lemf. Nous précisons que tous les champs de haut niveau implémentent l'interface IField. Cet interface IField est définie à partir d'une méthode appelée Evaluate qui permet d'évaluer un champ de haut niveau en une valeur v pour retourner une valeur.

```
interface IField
{
double Evaluate(decimal v) {}
}
```

VII.2.1.3 Interface générique

Nous avons défini l'interface IComputationElementAN pour englober la notion d'une mesure ou de champ en une seule interface.

```
public interface IComputationElementAN
{
IEnumerable<IComputationElementAN> Children
{
get;
}
}
```

VII.2.1.4 Les contrats sur les interfaces des mesures et des champs

Nous précisons que nous avons utilisé les Codes Contracts notamment pour les tests unitaires (définis dans la section suivante) afin d'éviter une duplication de ces tests. Par exemple, cela permettra d'éviter de faire un test unitaire d'intégration pour chaque mesure. Nous les avons utilisés dans les interfaces IMeasure, IMeasureAN et IFieldAN.

Nous avons utilisé les Codes Contracts sur l'interface IMeasure pour imposer dans la librairie Lemf que la borne supérieure d'intégration soit strictement supérieure à la borne inférieure d'intégration. Si la borne supérieure d'intégration est inférieure ou égale à la borne inférieure d'intégration, la méthode Evaluate génère une exception.

```
[ContractClassFor(typeof(IMeasure))]
internal abstract class MesureContract : IMeasure
{
public double Evaluate(decimal a, decimal b)
{
Contract.Requires<ArgumentException>(b > a, The end must be strictly greater
than the beginning);

return Contract.Result<double>();
}

public double Evaluate(decimal a, decimal b, decimal Tobs)
{
Contract.Requires<ArgumentException>(b > a, The end must be strictly
greater than the beginning);

Contract.Requires<ArgumentException>(Tobs > 0, The step decimal value
must be strictly greater than zero);

return Contract.Result<double>();
}
```

Nous avons utilisé les Codes Contracts sur l'interface IMeasureAN pour imposer dans notre librairie LemfAN que la borne supérieure de discrétisation doit être strictement supérieure à la borne inférieure de discrétisation. Si la borne supérieure de discrétisation est inférieure ou égale à la borne inférieure de discrétisation, la méthode EvaluateDiscrete génère une exception.

De même, nous avons utilisé les Codes Contracts sur l'interface IFieldAN pour que la valeur supérieure d'évaluation doit être strictement supérieure à la valeur inférieure d'évaluation.

VII.2.1.5 Interfaces pour chaque mesure et chaque champ

Nous avons dévéloppé pour chaque mesure et pour chaque champ sa propre interface. Par exemple, l'interface IAffineMeasure présente l'interface de la mesure affine $\tilde{m}_{\text{Affine}}$ de bas niveau qui hérite de l'interface IMeasureAN et qui contient les attributs C_1 et C définissant la densité affine m_{Affine} dans la relation (VIII.32). Par conséquent, l'interface IAffineMeasure est une interface d'une mesure de bas niveau IMeasureAN.

```
public interface IAffineMeasure : IMeasureAN
{
double C
{
get;
}

double C1
{
get;
}
}
```

VII.2.2 Les classes abstraites

Une classe abstraite est une classe dont l'implémentation n'est pas complète et qui n'est pas instanciable. Elle sert de base à d'autres classes dérivées (héritées). Nous avons créé des classes abstraites dans la librairie LemfAN, comme AbstractLeafMeasureAN pour caractériser les mesures simples, AbstractComposedMeasureAN pour caractériser les mesures composées et AbstractMeasureAN pour caractériser les mesures simples et composées. Par exemple, nous avons créé la classe abstraite AbstractLeafMeasureAN puisque nous ne pouvons pas définir la méthode EvaluateDiscrete dans l'interface IMeasureAN.

Nous allons maintenant exposer la relation entre ces classes abstraites. La classe abstraite AbstractLeafMeasureAN hérite la classe abstraite AbstractMeasureAN. Cet héritage signifie que toute mesure simple est une mesure. La classe abstraite AbstractComposedMeasureAN hérite la classe abstraite AbstractMeasureAN. Cet héritage signifie que toute mesure composée est une mesure. En revanche, il n'y pas de connexion possible entre les 2 classes abstraites AbstractLeafMeasureAN et AbstractComposedMeasureAN.

Nous allons maintenant justifier pourquoi le mécanisme de la classe abstraite AbstractMeasureAN permet de définir un comportement général pour toutes les mesures de bas niveau. En effet, comme l'interface IInternalMeasureAN ne peut pas décrire la méthode EvaluateDiscrete qu'une classe devra implémenter, nous avons créé la classe abstraite AbstractMeasureAN pour définir la méthode EvaluateDiscrete pour toutes les mesures de bas niveau. Cette méthode EvaluateDiscrete de type MeasureEvaluation somme les valeurs de la mesure discrète sur chaque pas d'observation T_{obs} en utilisant la relation (VIII.25) ou les deux relations (VIII.25) et (VIII.26). La classe MeasureEvaluation permet de récupérer les valeurs d'intégration d'une mesure discrète sur chaque pas d'observation T_{obs}.

Les classes abstraites AbstractLeafMeasureAN et AbstractComposedMeasureAN possèdent une propriété commune appelée Children dont l'implémentation est différente. En effet, elle retourne une liste des mesures constituant la mesure composée dans la classe abstraite AbstractComposedMeasureAN et une liste vide de mesure dans la classe abstraite AbstractLeafMeasureAN .

Comme nous venons de justifier la création et l'utilisation des classes abstraites AbstractLeafMeasureAN, AbstractComposedMeasureAN et AbstractMeasureAN, nous avons créé pour les mêmes raisons les classes abstraites AbstractLeafMeasure, AbstractComposedMeasure et AbstractMeasure dans la librairie Lemf.

VII.2.3 Les classes

Nous avons utilisé la notion de classe pour instancier un objet mesure qui peut être une mesure simple ou composée. Par exemple, la classe ConstantMeasureAN permet de définir une mesure constante m_{Constant} de bas niveau de constante C.

Puisque les classes abstraites AbstractLeafMeasureAN, AbstractComposedMeasureAN et AbstractMeasureAN ne définissent pas toutes leurs méthodes, il n'est pas possible d'instancier ces classes abstraites. En revanche, ces classes abstraites servent de classes de base dans le cadre de la dérivation. Toutes les méthodes et tous les attributs définis dans une classe abstraite sont disponibles dans les classes qui en dérivent. Par conséquent, toutes les mesures simples comme la mesure constante $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ (définie dans la relation (VIII.30)) dérivent de la classe abstraite AbstractLeafMeasureAN et toutes les mesures composées comme la mesure par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ (définie dans l'une des relations (VIII.78) et (VIII.79)) dérivent de la classe abstraite AbstractComposedMeasure.

```
1  class ConstantMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IConstantMeasure
2  {
3  public double Constant { get; private set; }
4
5  public ConstantMeasureAN(double C)
6  {
7  this.Constant = C;
8  }
9
10 public override Task<IEnumerable<double>> EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment
11 discretizedAxeSegment)
12 {
13 double value = Constant * (double)discretizedAxeSegment.Step;
14 return Task.FromResult<IEnumerable<double>>(Enumerable.Repeat(value,
15 discretizedAxeSegment.ValuesCount));
16 }
```

VII.3 Composition des librairies des tests LemfTest et LemfANTest

VII.3.1 Les tests unitaires de validation

Nous avons créé deux librairies de tests unitaires qui contiennent un ensemble de projet de tests. Nous les avons appelées LemfANTest et LemfTest qui correspondent respectivement aux librairies de tests unitaires pour l'implémentation des librairies LemfAN et Lemf.

Chaque projet de test a pour objectif d'examiner les résultats d'implémentation. Par exemple, nous pouvons examiner les résultats de l'intégration d'une mesure ou de l'évaluation d'un champ ou d'autre opération mathématique décrite dans le chapitre 3. Ensuite, nous pouvons modifier notre code et réexécuter les tests.

Les tests unitaires doivent couvrir une proportion importante de notre code. Pour cela, nous avons utilisé la couverture des tests (voir Figure VII) pour déterminer la proportion de code de notre librairie qui sera réellement testée par des tests codés, par exemple des tests unitaires. Cela permet d'apporter une protection efficace contre les bogues.

Les équipes de développement visent généralement une couverture de code qui avoisine 80%. Une version de la librairie Lemf a montré des résultats indiquant une couverture basse. Nous avons recherché les parties du code dans la librairie Lemf qui ne sont pas testées, puis nous avons élaboré d'autres tests pour les couvrir. Par conséquent, nous avons réussi à atteindre une couverture de code qui est $96,4\%$.

VII.4 Optimisation de la librairie LemfAN

VII.4.1 Principe du cache

Le principe du cache a pour objectif d'éviter de refaire les mêmes calculs. En effet, supposons que nous discrétisons une mesure m de bas niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM}. Si nous voulons discrétiser à nouveau la même mesure m avec les mêmes paramètres a, b et T_{dM}, nous récupérons les valeurs discrètes de l'espace mémoire sans même faire de calculs.

VII.4.2 Approche par la parallélisation

Nous avons intégré dans la librairie LemfAN un service qui a été défini avec la parallélisation comme objectif. L'objectif de ce service est d'affecter sur des ressources multiples un ensemble de tâches de calcul de façon à diviser au mieux le temps de traitement total, avant de réagréger les résultats.

La parallélisation de discrétisation des mesures et des champs dans le bas niveau est réalisée avec une bibliothèque de Microsoft dédiée au calcul parallèle appelée Task Parallel Library. Cette bibliothèque parallèle de tâches est la meilleure méthode pour écrire le code multithread et parallèle et permet de maximiser les performances de notre librairie LemfAN. De plus, elle gère le partitionnement du travail, la planification de threads, la prise en charge de l'annulation, et la gestion d'état.

VII.4.3 Utilisation de Math.Net Numerics

Math.Net Numerics est une librairie open source développé en *C#* contenant des méthodes et des algorithmes pour le calcul numérique. Elle cible les besoins des développeurs .NET et aborde plusieurs sujets portant sur les mathématiques, comme l'algèbre linéaire, les modèles de probabilité, les nombres aléatoires, l'interpolation, l'intégration, la régression, les problèmes d'optimisation et plus encore.

Nous avons utilisé la bibliothèque Math.Net Numerics pour calculer la transformée de Fourier rapide **FFT** d'un vecteur. Pour paralléliser les opérations de calcul de la méthode **FFT**, nous avons utilisé l'expression Invoke dans la bibliothèque parallèle de tâches. Nous nous référons dans la sous-sous-section A.1.2.6 à l'implémentation du produit de la convolution discrète en utilisant la parallélisation de la méthode **FFT**. Nous précisons qu'avec Invoke, nous avons exprimé les actions qui doivent s'exécuter simultanément.

Hierarchy	Not Covered (Blocks)	Not Covered (% Blocks)	Covered (Blocks)	Covered (% Blocks)
helard-d_AFI-PC 2013-12-09 15_14_48.coverage	170	3,60 %	4553	96,40 %
expressionparser.dll	28	22,40 %	97	77,60 %
mathembedded.dll	65	12,10 %	472	87,90 %
MathEmbedded	65	12,10 %	472	87,90 %
AbstractLeafMeasure	9	100,00 %	0	0,00 %
get_Children()	9	100,00 %	0	0,00 %
AffineMeasure	0	0,00 %	20	100,00 %
ApproximateDoubleComparer	3	42,86 %	4	57,14 %
Compare(object, object)	3	42,86 %	4	57,14 %
ConstantMeasure	0	0,00 %	14	100,00 %
CosinusMeasure	0	0,00 %	29	100,00 %
DiracMeasure	0	0,00 %	23	100,00 %
ErrorApproxiamtion	0	0,00 %	3	100,00 %
Extensions	0	0,00 %	16	100,00 %
GaussianMeasure	0	0,00 %	18	100,00 %
GaussianMeasure.<>c__DisplayClass2	0	0,00 %	5	100,00 %
IdentityMeasure	14	100,00 %	0	0,00 %
Evaluate(decimal, decimal)	9	100,00 %	0	0,00 %
IdentityMeasure(MathEmbedded.IMeasure)	2	100,00 %	0	0,00 %
get_Measure()	2	100,00 %	0	0,00 %
set_Measure(MathEmbedded.IMeasure)	1	100,00 %	0	0,00 %
IdentityMeasure.<get_Children>d__0	2	100,00 %	0	0,00 %
NullMeasure	0	0,00 %	10	100,00 %
PiecewiseMeasure	0	0,00 %	53	100,00 %
PolynomialMeasure	0	0,00 %	22	100,00 %
QuadraticMeasure	0	0,00 %	24	100,00 %
RescaledMeasure	0	0,00 %	15	100,00 %
RescaledMeasure.<get_Children>d__0	3	100,00 %	0	0,00 %
MoveNext()	3	100,00 %	0	0,00 %
ShiftMeasure	3	10,34 %	26	89,66 %
ShiftMeasure.<get_Children>d__0	3	100,00 %	0	0,00 %
MoveNext()	3	100,00 %	0	0,00 %
SinusMeasure	0	0,00 %	29	100,00 %
StepMeasure	0	0,00 %	20	100,00 %
SubstractionMeasure	0	0,00 %	12	100,00 %
SubstractionMeasure.<get_Children>d__0	3	100,00 %	0	0,00 %
MoveNext()	3	100,00 %	0	0,00 %
SumMeasure	13	18,06 %	59	81,94 %
Add(MathEmbedded.IMeasure)	3	17,65 %	14	82,35 %
Evaluate(decimal, decimal)	0	0,00 %	15	100,00 %
Remove(MathEmbedded.IMeasure)	10	30,30 %	23	69,70 %
SumMeasure(MathEmbedded.IMeasure[])	0	0,00 %	3	100,00 %
SumMeasure(System.Collections.Generic.ICollectio...	0	0,00 %	2	100,00 %
get_Children()	0	0,00 %	2	100,00 %
TabulatedMeasure	9	20,93 %	34	79,07 %
Evaluate(decimal, decimal)	9	100,00 %	0	0,00 %
Tabulate(decimal, decimal, System.Collections.Gen...	0	0,00 %	32	100,00 %
TabulatedMeasure()	0	0,00 %	2	100,00 %
TruncatedMeasure	0	0,00 %	36	100,00 %
TruncatedMeasure.<get_Children>d__0	3	100,00 %	0	0,00 %
MoveNext()	3	100,00 %	0	0,00 %

FIGURE VII.1 – Couverture à $96,4\%$ de la librairie LemfTest de tests unitaires

VIII Intégration des mesures et évaluation des champs pour le modèle financier

Sommaire

VIII.1 Mesures . . . 156
VIII.1.1 Définition du haut et du bas niveaux . . . 156
VIII.1.2 Intégration numérique d'une mesure . . . 157
VIII.1.2.1 Intégration numérique d'une mesure dans le bas niveau . . . 159
VIII.1.2.2 Intégration numérique d'une mesure dans le haut niveau . . . 159
VIII.1.3 Introduction du maillage universel dans le bas niveau . . . 159
VIII.1.4 Principe d'intégration des mesures dans le bas niveau . . . 163
VIII.2 Les mesures simples . . . 163
VIII.2.1 Mesure nulle . . . 164
VIII.2.1.1 Définition . . . 164
VIII.2.1.2 Intégration d'une mesure nulle dans le haut niveau . . . 164
VIII.2.1.3 Discrétisation d'une mesure nulle dans le bas niveau . . . 164
VIII.2.2 Mesure constante . . . 164
VIII.2.2.1 Définition . . . 164
VIII.2.2.2 Intégration d'une mesure constante dans le haut niveau . . . 165
VIII.2.2.3 Discrétisation d'une mesure constante dans le bas niveau . . . 165
VIII.2.2.3.1 Un exemple de discrétisation d'une mesure constante 165
VIII.2.3 Mesure affine . . . 166
VIII.2.3.1 Définition . . . 166
VIII.2.3.2 Intégration d'une mesure affine dans le haut niveau . . . 166
VIII.2.3.3 Discrétisation d'une mesure affine dans le bas niveau . . . 166
VIII.2.4 Mesure quadratique . . . 166
VIII.2.4.1 Définition . . . 167
VIII.2.4.2 Intégration d'une mesure quadratique dans le haut niveau . . . 167
VIII.2.4.3 Discrétisation d'une mesure quadratique dans le bas niveau . . . 167
VIII.2.5 Mesure polynomiale . . . 167
VIII.2.5.1 Définition . . . 167
VIII.2.5.2 Intégration d'une mesure polynomiale dans le haut niveau . . . 168
VIII.2.5.3 Discrétisation d'une mesure polynomiale dans le bas niveau . . . 168
VIII.2.6 Mesure sinus . . . 168
VIII.2.6.1 Définition . . . 168

VIII.2.6.2 Intégration d'une mesure sinus dans le haut niveau 169
VIII.2.6.3 Discrétisation d'une mesure sinus dans le bas niveau 169
VIII.2.7 Mesure cosinus 169
VIII.2.7.1 Définition 169
VIII.2.7.2 Intégration d'une mesure cosinus dans le haut niveau 169
VIII.2.7.3 Discrétisation d'une mesure cosinus dans le bas niveau 170
VIII.2.8 Mesure gaussienne 170
VIII.2.8.1 Définition 170
VIII.2.8.2 Intégration d'une mesure gaussienne dans le haut niveau . . . 170
VIII.2.8.3 Discrétisation d'une mesure gaussienne dans le bas niveau . . 170
VIII.2.9 Mesure exponentielle 171
VIII.2.9.1 Définition 171
VIII.2.9.2 Intégration d'une mesure exponentielle dans le haut niveau . 171
VIII.2.9.3 Discrétisation d'une mesure exponentielle dans le bas niveau . 171
VIII.2.10 Mesure de Dirac 171
VIII.2.10.1 Définition 172
VIII.2.10.2 Intégration d'une mesure de Dirac dans le haut niveau 172
VIII.2.10.3 Discrétisation d'une mesure de Dirac dans le bas niveau . . . 172
VIII.3 Les mesures composées 173
VIII.3.1 Somme de mesures 173
VIII.3.1.1 Définition 173
VIII.3.1.2 Intégration d'une mesure somme dans le haut niveau 173
VIII.3.1.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure somme dans le haut niveau 173
VIII.3.1.3 Somme de deux mesures discrètes 174
VIII.3.1.3.1 Un exemple de somme de deux mesures de Dirac discrètes 175
VIII.3.2 Soustraction de deux mesures 175
VIII.3.2.1 Définition 175
VIII.3.2.2 Intégration d'une mesure soustraction dans le haut niveau . . 176
VIII.3.2.3 Soustraction de deux mesures discrètes 176
VIII.3.3 Produit de mesures 176
VIII.3.3.1 Produit de deux mesures discrètes 176
VIII.3.3.1.1 Un exemple de validation du produit discret 176
VIII.3.3.1.2 Un exemple de produit de deux mesures discrètes . . 177
VIII.3.3.2 Intégration d'une mesure produit discrète 177
VIII.3.3.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure produit discrète 177
VIII.3.4 Division de deux mesures 178
VIII.3.4.1 Division de deux mesures discrètes 178
VIII.3.4.1.1 Un exemple de validation de la mesure division discrète 178
VIII.3.4.2 Intégration d'une mesure division discrète 178
VIII.3.5 Mesure par morceaux 179
VIII.3.5.1 Définition 179
VIII.3.5.2 Intégration d'une mesure par morceaux entre deux points . . 180
VIII.3.5.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure par morceaux entre deux points 182
VIII.3.5.3 Intégration d'une mesure par morceaux dans le bas niveau . . 185
VIII.3.5.4 Discrétisation d'une mesure par morceaux 186
VIII.3.5.4.1 Un exemple de discrétisation d'une mesure par morceaux dans le bas niveau 186

VIII.3.6 Mesure tronquée 187
VIII.3.6.1 Définition 187
VIII.3.6.2 Intégration d'une mesure tronquée entre deux points 188
VIII.3.6.3 Intégration d'une mesure tronquée dans le bas niveau 190
VIII.3.6.4 Discrétisation d'une mesure tronquée 190
VIII.3.7 Mesure tabulée 190
VIII.3.7.1 Définition 191
VIII.3.7.2 Intégration d'une mesure tabulée entre deux points 191
VIII.3.7.3 Intégration d'une mesure tabulée dans le bas niveau 194
VIII.3.7.4 Discrétisation d'une mesure tabulée 194
VIII.3.8 Produit de convolution de deux mesures 194
VIII.3.8.1 Définition 195
VIII.3.8.2 Calcul de produit de convolution avec la FFT 195
VIII.3.8.2.1 Méthode N° 1 : produit de convolution en utilisant directement la transformée de Fourier rapide FFT . 195
VIII.3.8.2.2 Méthode N° 2 : produit de convolution avec changement de coordonnées sur l'enveloppe convexe du support 196
VIII.3.8.2.3 Comparaison des deux méthodes 198
VIII.3.8.3 La convolution discrète de deux mesures discrètes 198
VIII.3.8.4 La convolution discrète de deux mesures quelconques 199
VIII.3.8.4.1 Un exemple de convolution discrète de deux mesures de Dirac non discrètes 199
VIII.3.8.5 Intégration d'une convolution discrète 201
VIII.4 Complément sur les mesures 201
VIII.4.1 Zoologie de certaines mesures 201
VIII.4.2 Mesure translatée 203
VIII.4.2.1 Intégration d'une mesure translatée dans le haut niveau . . . 203
VIII.4.2.2 Intégration d'une mesure translatée dans le bas niveau . . . 203
VIII.5 Champs 203
VIII.5.1 Définition d'un champ 204
VIII.5.2 Évaluation d'un champ dans le haut niveau 204
VIII.5.3 Évaluation d'un champ dans le bas niveau 204
VIII.5.4 Discrétisation d'un champ dans le bas niveau 205
VIII.5.4.1 Interpolation constante 205
VIII.5.4.2 Interpolation du point milieu 205
VIII.5.4.3 Interpolation linéaire 206
VIII.5.4.4 Interpolation quadratique 206
VIII.5.5 Évaluation d'un champ discret avec un pas d'évaluation 207
VIII.5.6 La primitive d'une mesure est un champ 208
VIII.5.6.1 Discrétisation de la primitive d'une mesure dans le bas niveau 208
VIII.5.6.2 Évaluation de la primitive d'une mesure dans le haut niveau . 210
VIII.5.7 Produit d'une mesure par un champ 211
VIII.5.7.1 Produit d'une mesure discrète par un champ discret 211
VIII.5.7.2 Intégration d'un produit d'une mesure discrète par un champ discret 211
VIII.6 Les champs simples 211
VIII.6.1 Champ nul 212
VIII.6.1.1 Définition 212
VIII.6.1.2 Évaluation d'un champ nul dans le haut niveau 212
VIII.6.1.3 Évaluation d'un champ nul dans le bas niveau 212

VIII.6.1.4 Discrétisation d'un champ nul dans le bas niveau 212
VIII.6.2 Champ constant 212
VIII.6.2.1 Définition 212
VIII.6.2.2 Évaluation d'un champ constant dans le haut niveau 212
VIII.6.2.3 Évaluation d'un champ constant dans le bas niveau 213
VIII.6.2.4 Discrétisation d'un champ constant dans le bas niveau 213
VIII.6.3 Champ affine 213
VIII.6.3.1 Définition 213
VIII.6.3.2 Évaluation d'un champ affine dans le haut niveau 213
VIII.6.3.3 Évaluation d'un champ affine dans le bas niveau 213
VIII.6.3.4 Discrétisation d'un champ affine dans le bas niveau 213
VIII.6.4 Champ quadratique 214
VIII.6.4.1 Définition 214
VIII.6.4.2 Évaluation d'un champ quadratique dans le haut niveau . . . 214
VIII.6.4.3 Évaluation d'un champ quadratique dans le bas niveau . . . 214
VIII.6.4.4 Discrétisation d'un champ quadratique dans le bas niveau . . 214
VIII.6.5 Champ polynomial 214
VIII.6.5.1 Définition 215
VIII.6.5.2 Évaluation d'un champ polynomial dans le haut niveau . . . 215
VIII.6.5.3 Évaluation d'un champ polynomial dans le bas niveau 215
VIII.6.5.4 Discrétisation d'un champ polynomial dans le bas niveau . . 215
VIII.6.6 Champ sinus 215
VIII.6.6.1 Définition 215
VIII.6.6.2 Évaluation d'un champ sinus dans le haut niveau 215
VIII.6.6.3 Évaluation d'un champ sinus dans le bas niveau 216
VIII.6.6.4 Discrétisation d'un champ sinus dans le bas niveau 216
VIII.6.7 Champ cosinus 216
VIII.6.7.1 Définition 216
VIII.6.7.2 Évaluation d'un champ cosinus dans le haut niveau 216
VIII.6.7.3 Évaluation d'un champ cosinus dans le bas niveau 216
VIII.6.7.4 Discrétisation d'un champ cosinus dans le bas niveau 216
VIII.6.8 Champ exponentiel 217
VIII.6.8.1 Définition 217
VIII.6.8.2 Évaluation d'un champ exponentiel dans le haut niveau . . . 217
VIII.6.8.3 Évaluation d'un champ exponentiel dans le bas niveau 217
VIII.6.8.4 Discrétisation d'un champ exponentiel dans le bas niveau . . 217
VIII.7 Les champs composés 217
VIII.7.1 Somme de champs 218
VIII.7.1.1 Évaluation d'une somme de champs dans le haut niveau . . . 218
VIII.7.1.2 Évaluation ou discrétisation d'une somme de champs dans le bas niveau 218
VIII.7.1.2.1 Somme de deux champs discrets par interpolation . . 218
VIII.7.1.2.2 Somme de deux champs évalués 218
VIII.7.2 Soustraction de deux champs 218
VIII.7.2.1 Évaluation d'une soustraction de champs dans le haut niveau 219
VIII.7.2.2 Évaluation ou discrétisation d'une soustraction de champs dans le bas niveau 219
VIII.7.2.2.1 Soustraction de deux champs discrets par interpolation 219
VIII.7.2.2.2 Soustraction de deux champs évalués 219
VIII.7.3 Produit de champs 219

VIII.7.3.1 Évaluation d'un champ produit dans le haut niveau 219
VIII.7.3.2 Évaluation ou discrétisation d'un champ produit dans le bas niveau 219
VIII.7.3.2.1 Produit de deux champs discrets par interpolation . 220
VIII.7.3.2.2 Produit de deux champs évalués 220
VIII.7.4 Division de deux champs 220
VIII.7.4.1 Évaluation d'un champ division dans le haut niveau 220
VIII.7.4.2 Évaluation ou discrétisation d'un champ division dans le bas niveau 220
VIII.7.4.2.1 Division de deux champs discrets par interpolation . 220
VIII.7.4.2.2 Division de deux champs évalués 221
VIII.7.5 Champ par morceaux 221
VIII.7.5.1 Définition 221
VIII.7.5.2 Évaluation d'un champ par morceaux en un point 222
VIII.7.5.3 Évaluation d'un champ par morceaux dans le bas niveau . . 222
VIII.7.5.4 Discrétisation d'un champ par morceaux 223
VIII.7.6 Champ tronqué 223
VIII.7.6.1 Définition 223
VIII.7.6.2 Évaluation d'un champ tronqué en un point 224
VIII.7.6.3 Évaluation d'un champ tronqué dans le bas niveau 225
VIII.7.6.4 Discrétisation d'un champ tronqué 225
VIII.8 Discussion sur la discrétisation de l'opérateur $\tilde{\sigma} = \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}]$. 225
Bibliographie 228

Résumé. Nous avons conçu dans le chapitre I deux niveaux de nos objets. Nous les avons appelé le haut niveau et le bas niveau. Nous allons définir dans ce chapitre les différents pas de temps qui sont nécessaires pour notre modélisation. Ils sont le pas d'observation minimal $T_{\min}$, le pas d'observation T_{obs}, et le pas de discrétisation T_{dM}.

Le modèle financier continu en temps s'appuie sur la théorie de la mesure. Comme elle est complexe, nous ne la développons pas pour l'implémenter. Cependant, nous faisons certains choix définis dans le chapitre II pour montrer la cohérence du modèle concernant son implémentation dans ce chapitre.

Nous allons expliquer comment intégrer une mesure de haut niveau entre une borne inférieure et une borne supérieure avec un pas d'observation minimal $T_{\min}$ pour retourner une valeur. Ensuite, nous introduisons dans ce chapitre le maillage universel pour calculer l'intégration d'une mesure de bas niveau entre les points de ce maillage. L'intégration de cette mesure retourne une tâche de calcul qui génère un ensemble de valeurs discrètes.

Nous utilisons des mesures simples et des mesures composées dans notre modélisation. L'objectif de ce chapitre est de définir quelques mesures simples. Ces mesures simples peuvent être des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ comme la mesure constante, affine, quadratique, polynomiale, exponentielle, ou des mesures qui ne peuvent pas l'être. Les mesures composées sont les mesures sommes, soustractions, produits, divisions, par morceaux, tronquées, tabulées, convolées. Par ailleurs, nous allons exprimer l'intégration des mesures simples et des mesures composées de bas niveau et de haut niveau.

Nous avons défini un champ de haut niveau ou de bas niveau par une fonction par morceaux continue par valeur supérieure. Nous allons expliquer comment évaluer un champ de haut niveau en un point, et comment le discrétiser dans le bas niveau. Nous discrétisons ce champ sur les points du maillage universel défini par le pas de discrétisation. Ensuite, nous développons quelques interpolations numériques comme une interpolation constante, du point milieu, linéaire ou quadratique pour estimer les valeurs de ce champ en tous points.

Nous utilisons des champs simples et des champs composés dans notre modélisation. Ces champs simples sont les champs nuls, constants, affines, quadratiques, polynomiaux, sinus, cosinus, exponentiels. L'objectif du chapitre est de définir quelques champs composés qui sont les champs sommes, soustractions, produits, divisions, par morceaux et tronqués.

VIII.1 Mesures

VIII.1.1 Définition du haut et du bas niveaux

Il est difficile de définir mathématiquement une mesure de haut niveau ou une mesure de bas niveau, puisque nous avons introduit ces terminologies pour simplifier l'implémentation de nos objets mathématiques, et aussi pour une raison purement commerciale. Mais, nous allons donner dans cette sous-section la définition mathématique appropriée.

Nous appelons une mesure de haut niveau toute mesure définie sur la tribue borélienne à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble vide est nulle, et que cette mesure est

σ-additive. Nous nous rappelons que nous avons à priori introduit la définition d'une mesure dans la sous-section II.1.1. Une mesure de haut niveau est toute mesure appartenant au haut niveau (un emplacement de niveau de mesure). Nous appelons une mesure de bas niveau toute mesure à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, ou toute mesure discrète qui est définie à partir d'un ensemble de valeurs.

Nous appelons $(j-1)^{\text{e}}$ valeur discrète de la mesure m_d, la quantité $m_d(j-1)$ qui est la valeur de l'intégrale de la mesure m_d entre la borne inférieure x_{j-1} et la borne supérieure $x_{j-1} + T_{\text{dM}}$, avec T_{dM} le pas de discrétisation :

$$\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], m_d(j-1) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1}+T_{\text{dM}}} m_d. \tag{VIII.1}$$

où x_{j-1} est un point du maillage universel dont nous allons expliquer sa signification dans la sous-section II.1.1. Nous précisons que nous allons donner une définition mathématique d'une mesure discrète dans la sous-section VIII.1.3. Une mesure de bas niveau est toute mesure appartenant au bas niveau. Nous présentons dans la Figure VIII.1 les composantes des deux niveaux :

Haut niveau	Mesure définie sur $\mathbb{R}$ Champ défini sur $\mathbb{R}$ Primitive d'une mesure définie comme un champ Mesure convolée définie sur $\mathbb{R}$
Bas niveau	Mesure discrète Mesure définie sur $\mathbb{R}$ Champ discret Champ défini sur $\mathbb{R}$ Convolution discrète Mesure convolée définie sur $\mathbb{R}$ Accumulation d'une mesure définie par un champ discret

FIGURE VIII.1 – Le haut et le bas niveaux.

VIII.1.2 Intégration numérique d'une mesure

Pour des questions de modélisation, nous allons définir trois pas de temps qui sont le pas d'observation minimal $T_{\min}$, le pas d'observation T_{obs} et le pas de discrétisation T_{dM}. Nous disons qu'une mesure $\tilde{m}$ est observée pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, si la quantité suivante

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{m}, \tag{VIII.2}$$

est calculée, pour 2 instants t_1 et t_2 vérifiant $t_2 - t_1 > T_{\min}$. Nous définissons le pas d'observation minimal $T_{\min}$, comme étant l'intervalle de temps en dessous duquel notre modèle n'est jamais observé. Nous avons besoin dans notre modélisation du pas d'observation T_{obs} pour observer notre

modèle. Par conséquent, nous imposons que le pas d'observation T_{obs} soit strictement supérieur à $T_{\min}$

$$T_{\text{obs}} > T_{\min}. \tag{VIII.3}$$

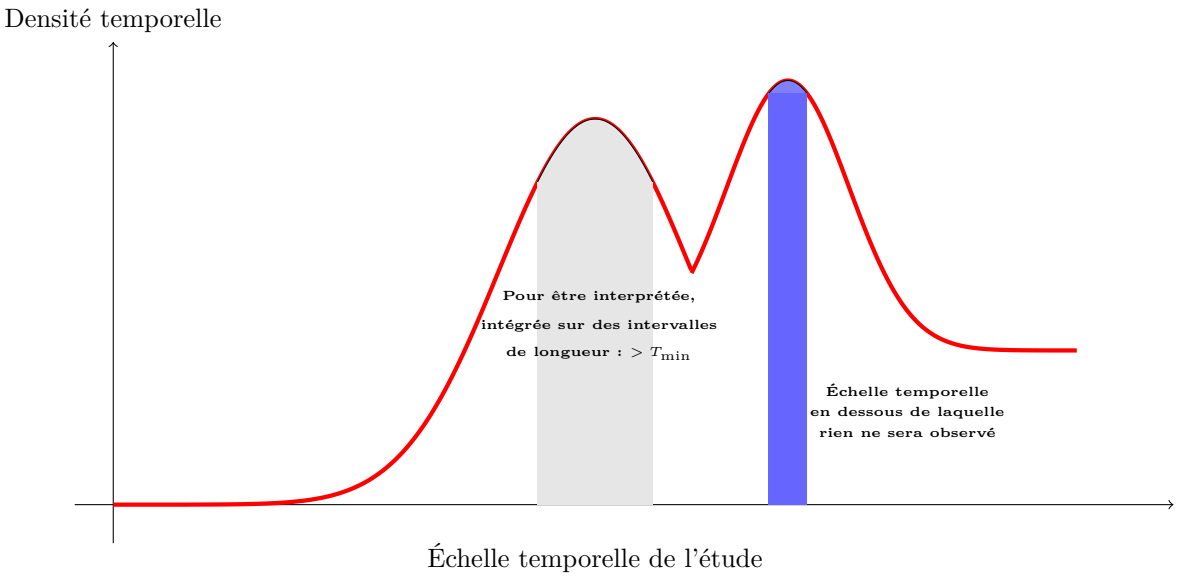

FIGURE VIII.2 – Illustration de l'échelle temporelle du modèle continu.

Nous définissons le pas de discrétisation T_{dM}, le pas qui doit être beaucoup plus petit que le pas d'observation minimal $T_{\min}$ pour discrétiser les mesures de bas niveau

$$T_{\text{dM}} \leq T_{\min}. \tag{VIII.4}$$

Nous définissons n_{Sub}, le nombre pour subdiviser le pas d'observation minimal $T_{\min}$ en n_{Sub} pas de discrétisation T_{dM}

$$T_{\text{dM}} = \frac{T_{\min}}{n_{Sub}}. \tag{VIII.5}$$

Dans notre modélisation, nous avons fixé n_{Sub} à 20

$$T_{\text{dM}} = \frac{T_{\min}}{20}. \tag{VIII.6}$$

Le pas d'observation T_{obs} est réparti en n_D pas de discrétisation T_{dM} :

$$n_D = \left\lfloor \frac{T_{\text{obs}}}{T_{\text{dM}}} \right\rfloor. \tag{VIII.7}$$

VIII.1.2.1 Intégration numérique d'une mesure dans le bas niveau

Dans le début de la sous-section VIII.1.2, nous avons défini les trois pas de temps $T_{\min}$, T_{obs} et T_{dM}, qui sont utilisés dans le bas niveau. Une mesure de bas niveau est intégrée entre une borne inférieure et une borne supérieure avec un pas d'observation minimal $T_{\min}$ et un pas d'observation T_{obs}. Le pas de discrétisation T_{dM} est calculé en fonction du pas d'observation minimal $T_{\min}$ en utilisant la relation (VIII.5).

Nous allons maintenant expliquer pourquoi l'intégration d'une mesure de bas niveau retourne une tâche de calcul qui génère un ensemble de valeurs discrètes. Nous avons utilisé des tâches de calcul pour que les calculs prennent un temps relativement moins long. Par conséquent, nous avons créé des tâches de calcul pour que la parallélisation de ses tâches dans l'avenir soit efficace et facile. Cela nous permettra d'améliorer la productivité de notre outil logiciel.

VIII.1.2.2 Intégration numérique d'une mesure dans le haut niveau

Une mesure de haut niveau est intégrée entre une borne inférieure et une borne supérieure avec un pas d'observation minimal $T_{\min}$ pour retourner une valeur. Nous allons maintenant justifier pourquoi l'intégration d'une mesure de haut niveau retourne une valeur. Si nous prenons une mesure de haut niveau comme une mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$, l'intégration de la mesure $\tilde{\kappa}_E$ est la somme empruntée pendant un intervalle de temps présentée par une valeur réelle. Ce qui explique pourquoi l'intégration d'une mesure de haut niveau retourne une valeur.

VIII.1.3 Introduction du maillage universel dans le bas niveau

Nous avons construit le maillage universel appelé "DiscretizedAxeSegment" dans notre modélisation pour trois raisons. La première raison est pour mieux structurer le bas niveau. La deuxième raison est pour réaliser le produit de convolution discret ; en effet, il n'est pas possible de réaliser le produit de convolution discret au moyen de la transformée de Fourier rapide avec un pas variable. Par conséquent, le maillage universel DiscretizedAxeSegment est un maillage à pas constant. La troisième raison est que si nous discrétisons une mesure m_d^1 de bas niveau avec un pas de discrétisation T_{dM} sur son enveloppe convexe du support $[a, b]$ et si nous discrétisons une mesure m_d^2 de bas niveau avec le pas de discrétisation T_{dM} sur son enveloppe convexe du support $[c, d]$, nous pouvons discrétiser le produit de convolution $m_d^1 \star m_d^2$ avec le même pas T_{dM} sur son enveloppe convexe du support qui est un intervalle fermé inclus dans $[a+c, b+d]$. Nous détaillons la troisième raison dans la sous-section VIII.3.8.

Nous allons maintenant définir le maillage universel $\text{DiscretizedAxeSegment}_{\text{T}_{\text{dM}}}$ associé au pas de discrétisation T_{dM}, qui est présenté par un ensemble de points $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ qui sont des multiples de pas de discrétisation T_{dM}

$$\text{DiscretizedAxeSegment}_{\text{T}_{\text{dM}}} = \{x_k = k \times T_{\text{dM}}, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{VIII.8}$$

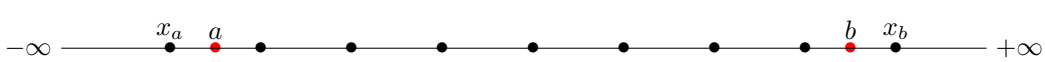

FIGURE VIII.3 – Maillage universel sur $\mathbb{R}$.

Comme nous avons justifié dans la sous-section VIII.1.2 l'utilisation des trois pas de temps $T_{\min}$, T_{obs} et T_{dM} et des méthodes d'intégration dans le haut et le bas niveaux, nous allons décrire dans cette sous-section le mécanisme de calcul sur le maillage universel. Ce mécanisme de calcul a pour objectif de montrer le concept de calcul des méthodes d'intégration utilisées dans notre modélisation. Nous allons maintenant définir les terminologies "point décalé inférieurement" et "point décalé supérieurement" dans notre modélisation. Si a est un réel, nous appelons "point décalé inférieurement" de a, le point x_a du maillage universel qui satisfait l'inégalité :

$$a - T_{\text{dM}} < x_a \leq a. \tag{VIII.9}$$

Si le pas de discrétisation T_{dM} n'est pas divisible par un réel b, nous appelons "point décalé supérieurement" de b, le point x_b du maillage universel qui satisfait l'inégalité :

$$b < x_b \leq b + T_{\text{dM}}. \tag{VIII.10}$$

Si le pas de discrétisation T_{dM} est divisible par b, nous appelons "point décalé supérieurement" de b, le point lui-même.

Soient a et b deux réels, avec $T_{\text{dM}} < b - a$. Nous définissons x_a le point décalé inférieurement de a et x_b le point décalé supérieurement de b. Nous avons utilisé une approximation d'intégrale d'une mesure de bas niveau m_d avec pour objectif d'intégrer la mesure m_d entre les valeurs du maillage universel. Cette approximation consiste à approcher l'intégration de la mesure m_d entre la borne inférieure a et la borne supérieure b par l'intégration de la mesure m_d entre la borne inférieure x_a et la borne supérieure x_b. Comme l'intégration de la mesure m_d retourne une tâche de calcul qui génère un ensemble de valeurs, nous exprimons cette approximation par l'égalité

$$\forall i \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{b-a}{T_{\text{dM}}} \right\rfloor\right\}, \int_{a+i\times T_{\text{dM}}}^{a+(i+1)\times T_{\text{dM}}} m_d \simeq \int_{x_a+i\times T_{\text{dM}}}^{x_a+(i+1)\times T_{\text{dM}}} m_d. \tag{VIII.11}$$

Nous voulons exprimer les bornes d'intégration x_a et x_b en fonction des valeurs a, b et T_{dM}. Comme les points x_a et x_b appartiennent au maillage universel, il existe un entier n_a tel que

$$x_a = n_a \times T_{\text{dM}}. \tag{VIII.12}$$

Si T_{dM} n'est pas divisible par b, il existe un entier n_b tel que

$$x_b = n_b \times T_{\text{dM}}. \tag{VIII.13}$$

En utilisant les relations (VIII.9) et (VIII.10), nous obtenons

$$\begin{cases} a - T_{\text{dM}} < n_a \times T_{\text{dM}} \leq a, \\ b < n_b \times T_{\text{dM}} \leq b + T_{\text{dM}}. \end{cases}$$

Par simplification

$$\begin{cases} n_a \leq \frac{a}{T_{\text{dM}}} < n_a + 1, \\ n_b - 1 \leq \frac{b}{T_{\text{dM}}} < n_b. \end{cases}$$

On déduit

$$n_a = \left\lfloor \frac{a}{T_{\mathrm{dM}}} \right\rfloor, \tag{VIII.14}$$

$$n_b = \left\lfloor \frac{b}{T_{\mathrm{dM}}} \right\rfloor + 1. \tag{VIII.15}$$

Nous concluons que l'entier n_b est défini par

$$n_b = \begin{cases} \frac{b}{T_{\mathrm{dM}}} & \text{si } T_{\mathrm{dM}} \text{ est divisible par } b, \\ \left\lfloor \frac{b}{T_{\mathrm{dM}}} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.16}$$

Nous introduisons la notation suivante dans tout ce chapitre

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > \alpha, \mathcal{N}_\alpha^\beta = n_\beta - n_\alpha. \tag{VIII.17}$$

Le nombre $\mathcal{N}_a^b + 1$ est le nombre de points du maillage universel définis entre les 2 points x_a et x_b

$$\mathcal{N}_a^b = n_b - n_a. \tag{VIII.18}$$

Ensuite, nous utilisons les relations (VIII.12), (VIII.13), (VIII.14) et (VIII.16) pour obtenir les bornes d'intégration x_a et x_b en fonction des valeurs a, b et T_{dM}

$$x_a = \left\lfloor \frac{a}{T_{\mathrm{dM}}} \right\rfloor \times T_{\mathrm{dM}}. \tag{VIII.19}$$

$$x_b = \begin{cases} b & \text{si } T_{\mathrm{dM}} \text{ est divisible par } b, \\ \left(\left\lfloor \frac{b}{T_{\mathrm{dM}}} \right\rfloor + 1 \right) \times T_{\mathrm{dM}} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.20}$$

Si j est un entier compris entre 1 et $\mathcal{N}_a^b$, nous appelons $(n_a + j - 1)^{\mathrm{e}}$ valeur de la mesure m_d, la quantité $m_d(n_a + j - 1)$ qui est la valeur de l'intégrale de la mesure m_d entre la borne inférieure $(n_a + j - 1) \times T_{\mathrm{dM}}$ et la borne supérieure $(n_a + j) \times T_{\mathrm{dM}}$

$$\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], m_d(n_a + j - 1) = \int_{(n_a+j-1)\times T_{\mathrm{dM}}}^{(n_a+j)\times T_{\mathrm{dM}}} m_d. \tag{VIII.21}$$

Nous pouvons justifier que la définition (VIII.18) de l'entier $\mathcal{N}_a^b$ est en consistance avec la relation (VIII.21) à travers l'exemple suivant. Si nous intégrons la mesure m_d entre la borne inférieure $a = 0$ et la borne supérieure $b = 1$ avec le pas de discrétisation $T_{\mathrm{dM}} = 1$, nous obtenons une seule valeur $m_d(0)$ de la mesure m_d puisque nous avons $\mathcal{N}_a^b = 1$ en utilisant la relation (VIII.18). La valeur $m_d(0)$ est définie par la 0e valeur de la mesure m_d.

En revanche, si nous intégrons la mesure m entre la borne inférieure $a = 0$ et la borne supérieure $b = 1.1$ avec le pas de discrétisation $T_{\mathrm{dM}} = 1$, nous obtenons 2 valeurs $m_d(0)$ et $m_d(1)$ de la mesure m_d puisque nous avons $\mathcal{N}_a^b = 2$ en utilisant la relation (VIII.18). La valeur $m_d(0)$ est définie par la 0e valeur de la mesure m_d et la valeur $m_d(1)$ est définie par la 1re valeur de la mesure m_d.

Nous rappelons que l'intégration de la mesure m_d entre la borne inférieure a et la borne supérieure b retourne une tâche de calcul qui génère un ensemble $(m_d(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_a^b}$ de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs définies dans la relation (VIII.21). Nous allons maintenant récupérer les valeurs d'intégration de la mesure m_d sur chaque pas d'observation T_{obs}. Si i est un entier compris entre 1 et $\left\lfloor \dfrac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \right\rfloor$, nous définissons la quantité $m_d^{\mathrm{obs}}(i)$ comme étant la valeur de l'intégrale de la mesure m_d entre la borne inférieure $n_a \times T_{\mathrm{dM}} + (i-1) \times T_{\mathrm{obs}}$ et la borne supérieure $n_a \times T_{\mathrm{dM}} + i \times T_{\mathrm{obs}}$

$$m_d^{\mathrm{obs}}(i) = \int_{n_a \times T_{\mathrm{dM}} + (i-1) \times T_{\mathrm{obs}}}^{n_a \times T_{\mathrm{dM}} + i \times T_{\mathrm{obs}}} m_d. \tag{VIII.22}$$

Nous pouvons décomposer l'intégrale définie dans la relation (VIII.22) en utilisant la relation de Chasles

$$m_d^{\mathrm{obs}}(i) = \sum_{k=1}^{k=n_D} \int_{(n_a+k-1) \times T_{\mathrm{dM}} + (i-1) \times T_{\mathrm{obs}}}^{(n_a+k-n_D) \times T_{\mathrm{dM}} + i \times T_{\mathrm{obs}}} m_d. \tag{VIII.23}$$

Nous utilisons la relation (VIII.7) et nous effectuons le changement d'indice $l = k + (i-1) \times n_D$ pour approcher l'intégrale présentée dans la relation (VIII.23)

$$m_d^{\mathrm{obs}}(i) \simeq \sum_{l=1+(i-1) \times n_D}^{l=i \times n_D} \int_{(n_a+l-1) \times T_{\mathrm{dM}}}^{(n_a+l) \times T_{\mathrm{dM}}} m_d. \tag{VIII.24}$$

Ensuite, nous utilisons les relations (VIII.21) et (VIII.24) pour obtenir que chaque valeur $m_d^{\mathrm{obs}}(i)$ est la somme de toutes les valeurs $m_d(n_a + l - 1)$ pour tout entier l compris entre $1 + (i-1) \times n_D$ et $i \times n_D$

$$m_d^{\mathrm{obs}}(i) \simeq \sum_{l=1+(i-1) \times n_D}^{l=i \times n_D} m_d(n_a + l - 1). \tag{VIII.25}$$

Nous distinguons deux situations qui sont le calcul des valeurs $(m_d^{\mathrm{obs}}(i))_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \rfloor}$ ou des valeurs $(m_d^{\mathrm{obs}}(i))_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \rfloor + 1}$. La première situation est lorsque $\mathcal{N}_a^b$ est divisible par n_D, dans cette situation, il y a $\left\lfloor \dfrac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \right\rfloor$ valeurs d'intégration de la mesure m_d sur chaque pas d'observation T_{obs}. Tandis que la deuxième situation est lorsque $\mathcal{N}_a^b$ n'est pas divisible par n_D, dans cette situation, il y a $\left\lfloor \dfrac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \right\rfloor + 1$ valeurs d'intégration de la mesure m_d sur chaque pas d'observation T_{obs}. Dans les deux situations, les $\left\lfloor \dfrac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \right\rfloor$ valeurs d'intégration m_d^{obs} sont calculées en utilisant la relation (VIII.25). Dans la deuxième situation, la valeur $m_d^{\mathrm{obs}}\left(\left\lfloor \dfrac{\mathcal{N}_a^b}{n_D} \right\rfloor + 1 \right)$ est calculée en utilisant la relation suivante

$$m_d^{\text{obs}}\left(\left\lfloor\frac{\mathcal{N}_a^b}{n_D}\right\rfloor+1\right)\simeq\sum_{k=n_D\times\lfloor\frac{\mathcal{N}_a^b}{n_D}\rfloor+1}^{k=\mathcal{N}_a^b} m_d(n_a+k-1). \tag{VIII.26}$$

VIII.1.4 Principe d'intégration des mesures dans le bas niveau

Nous avons développé un mécanisme de calcul concernant le maillage universel dans la sous-section VIII.1.3. Nous allons maintenant synthétiser ce mécanisme de calcul pour généraliser l'intégration de toutes les mesures de bas niveau entre les points du maillage universel.

Nous intégrons toutes les mesures dans le bas niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'observation T_{obs} et un pas d'observation minimal $T_{\min}$. Le pas de discrétisation T_{dM} est calculé en fonction du pas d'observation minimal $T_{\min}$ en utilisant la relation (VIII.5). Ensuite, le maillage universel $\text{DiscretizedAxeSegment}_{\text{T}_{\text{dM}}}$ associé au pas T_{dM}, défini dans la relation (VIII.8), est créé. Si le maillage universel existe avec le même pas T_{dM}, il ne sera pas créé. Ensuite, les mesures de bas niveau sont discrétisées avec le pas T_{dM}.

La discrétisation de chaque mesure dans le bas niveau est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs, où la variable $\mathcal{N}_a^b$ est définie dans la relation (VIII.18). Par conséquent, si cette tâche de calcul est générée en utilisant la relation (VIII.21), nous pouvons calculer les valeurs d'intégration de cette mesure sur chaque pas d'observation T_{obs} en utilisant la relation (VIII.25) ou les deux relations (VIII.25) et (VIII.26).

VIII.2 Les mesures simples

Nous avons exposé et justifié nos objectifs concernant la mesure de Dirac dans la section précédente. Nous avons aussi justifié notre objectif concernant les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue définies dans la relation (II.14). Nous rappelons que nous avons défini la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ dans la relation (II.15).

Nous utilisons des mesures simples dans notre modélisation. Pour cela, l'objectif de cette section est de définir quelques mesures simples. Les mesures simples peuvent être des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ comme la mesure constante, affine, quadratique, polynomiale, exponentielle, ou des mesures, qui ne sont pas absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ comme la mesure de Dirac.

Pour définir des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ de nos mesures simples, nous nous plaçons dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$ et nous considérons dans toute cette section que t est une variable temporelle dans $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant décrire la discrétisation des mesures simples dans le bas niveau. Nous rappelons que nous avons développé le principe de discrétisation de toutes les mesures de bas niveau dans la sous-section VIII.1.4. Nous allons utiliser ce principe de discrétisation pour montrer comment nous allons discrétiser des mesures simples dans le bas niveau.

Dans cette section, nous discrétisons toutes nos mesures simples dans le bas niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM}. Pour cela, nous considérons dans toute cette section que j est un entier compris entre 1 et $\mathcal{N}_a^b$, x_a est la nouvelle borne inférieure d'intégration calculée en utilisant la relation (VIII.19) et x_b est la nouvelle borne

supérieure d'intégration calculée en utilisant la relation (VIII.20).

Le but de cette section est de donner l'expression de toutes les valeurs de chaque mesure simple de bas niveau en utilisant la relation (VIII.21). Ensuite, nous pouvons calculer les valeurs d'intégration de nos mesures simples sur chaque pas d'observation T_{obs} en utilisant la relation (VIII.25) ou les deux relations (VIII.25) et (VIII.26). Nous allons donner un exemple d'intégration d'une mesure constante pour montrer comment nous avons calculé l'intégration de cette mesure constante sur chaque pas d'observation T_{obs}.

Nous allons décrire aussi l'intégration des mesures simples dans le haut niveau. En effet, nous allons exprimer formellement dans cette section l'intégration de chaque mesure simple dans le haut niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b.

VIII.2.1 Mesure nulle

Nous avons créé un objet de type mesure nulle dans notre modélisation, par exemple pour emprunter une somme nulle sur un intervalle de temps.

VIII.2.1.1 Définition

Si μ est une mesure définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, on dit que la mesure μ est une mesure nulle, si pour tout ensemble de parties A de $\mathcal{E}$, on a

$$\eta(A) = 0. \tag{VIII.27}$$

VIII.2.1.2 Intégration d'une mesure nulle dans le haut niveau

Nous intégrons la mesure nulle $\tilde{m}_{\text{Null}}$ définie dans la relation (VIII.27) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la valeur nulle.

VIII.2.1.3 Discrétisation d'une mesure nulle dans le bas niveau

La discrétisation de la mesure nulle $\tilde{m}_{\text{Null}}$ définie dans la relation (VIII.27) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs, définies par

$$\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Null}}(n_a + j - 1) = 0. \tag{VIII.28}$$

VIII.2.2 Mesure constante

Nous avons créé un objet de type mesure constante dans notre modélisation, par exemple pour emprunter uniformément sur un intervalle de temps. Nous allons donner une définition de la mesure constante dans la sous-sous-section VIII.2.2.1. Nous allons décrire comment la mesure constante est intégrée dans le haut niveau dans la sous-sous-section VIII.2.2.2 et dans le bas niveau dans la sous-sous-section VIII.2.2.3.

VIII.2.2.1 Définition

Nous définissons la densité constante m_{Constant}, la fonction qui ne prend qu'une seule valeur réelle $\text{C} \in \mathbb{R}$, indépendamment de la variable temps t

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\text{Constant}}(t) = \text{C}. \tag{VIII.29}$$

Comme la mesure constante $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Constant}} = m_{\text{Constant}}(t) \times \lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.30}$$

VIII.2.2.2 Intégration d'une mesure constante dans le haut niveau

Nous intégrons la mesure constante $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ définie dans la relation (VIII.30) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la valeur

$$\text{C} \times (b - a).$$

VIII.2.2.3 Discrétisation d'une mesure constante dans le bas niveau

La discrétisation de la mesure constante $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ définie dans la relation (VIII.30) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs dont chaque valeur est

$$\text{C} \times T_{\text{dM}}. \tag{VIII.31}$$

VIII.2.2.3.1 Un exemple de discrétisation d'une mesure constante

Nous allons donner un exemple pour montrer comment nous allons calculer l'intégration d'une mesure constante $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ de constante 2 entre une borne inférieure $a = 0.12$ et une borne supérieure $b = 1.4$ avec un pas d'observation $T_{\text{obs}} = 1.1$ et un pas d'observation minimal $T_{\text{min}} = 1$. Ensuite, le pas de discrétisation T_{dM} est calculé en utilisant la relation (VIII.6)

$$T_{\text{dM}} = 0.05.$$

La nouvelle borne inférieure d'intégration x_a est calculée à partir de la relation (VIII.19)

$$x_a = \left\lfloor \frac{0.12}{0.05} \right\rfloor \times 0.05 = 0.1.$$

La nouvelle borne supérieure d'intégration x_b est calculée à partir de la relation (VIII.20)

$$x_b = 1.4.$$

Ensuite, le maillage universel $\text{DiscretizedAxeSegment}_{\text{T}_{\text{dM}}}$ est créé entre les valeurs x_a et x_b avec le pas de discrétisation T_{dM} en utilisant la relation (VIII.8)

$$\text{DiscretizedAxeSegment}_{\text{T}_{\text{dM}}} = \{x_a \leq x_k = k \times 0.05 \leq x_b, k \in \mathbb{Z}\}.$$

La discrétisation de la mesure $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ est une tâche de calcul qui génère un ensemble de 26 valeurs dont chaque valeur est calculée en utilisant la relation (VIII.28) et égale à la valeur

$$0.1.$$

Ensuite, nous récupérons l'intégration de la mesure constante sur chaque pas d'observation T_{obs} qui sont 2 valeurs. La première valeur $m_d^{\text{obs}}(1)$ est définie par la valeur de l'intégrale de la mesure $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ entre la borne inférieure x_a et la borne supérieure $x_a + T_{\text{obs}}$. Par conséquent, la valeur $m_d^{\text{obs}}(1)$ est la somme de 22 valeurs, calculée grâce à la relation (VIII.25)

$$m_d^{\text{obs}}(1) \simeq 2.2.$$

La deuxième valeur $m_d^{\text{obs}}(2)$ est définie par la valeur de l'intégrale de la mesure $\tilde{m}_{\text{Constant}}$ entre la borne inférieure $x_a + T_{\text{obs}}$ et la borne supérieure x_b. Par conséquent, la valeur $m_d^{\text{obs}}(2)$ est la somme de 4 valeurs, calculée grâce à la relation (VIII.26)

$$m_d^{\text{obs}}(2) \simeq 0.4.$$

VIII.2.3 Mesure affine

Nous avons créé un objet de type mesure affine dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt varie linéairement en fonction de la variable temps t, $\kappa_E(t) = \alpha t + \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cette somme empruntée sur un intervalle de temps $[0, T]$ est égale à $\dfrac{\alpha T^2}{2} + \beta T$. Nous allons donner une définition de la mesure affine dans la sous-sous-section VIII.2.3.1. Nous allons décrire comment la mesure affine est intégrée dans le haut niveau dans la sous-sous-section VIII.2.3.2 et dans le bas niveau dans la sous-sous-section VIII.2.3.3.

VIII.2.3.1 Définition

Si C_1, C sont deux réels, nous définissons la densité affine m_{Affine}, la fonction affine qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\text{Affine}}(t) = \mathrm{C}_1 \times t + \mathrm{C}. \tag{VIII.32}$$

Nous appelons C_1 la pente et C la valeur de la fonction affine m_{Affine} à l'origine. Comme la mesure affine $\tilde{m}_{\text{Affine}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Affine}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Affine}} = m_{\text{Affine}}(t) \times \lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.33}$$

VIII.2.3.2 Intégration d'une mesure affine dans le haut niveau

Nous intégrons la mesure affine $\tilde{m}_{\text{Affine}}$ définie dans la relation (VIII.33) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité

$$\frac{\mathrm{C}_1}{2} \times (b^2 - a^2) + \mathrm{C} \times (b - a).$$

VIII.2.3.3 Discrétisation d'une mesure affine dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure affine $\tilde{m}_{\text{Affine}}$ définie dans la relation (VIII.33) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs, définies par

$$\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Affine}}(n_a + j - 1) = \mathrm{C}_1 \times T_{\text{dM}} \times \left[x_a + (j - \frac{1}{2}) \times T_{\text{dM}} \right] + \mathrm{C} \times T_{\text{dM}}. \tag{VIII.34}$$

VIII.2.4 Mesure quadratique

Nous avons créé un objet de type mesure quadratique dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt est une fonction quadratique en termes de la variable

temps t. Nous allons donner une définition de la mesure quadratique dans la sous-sous-section suivante.

VIII.2.4.1 Définition

Nous définissons la densité quadratique $m_{\text{Quadratic}}$, la fonction quadratique qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\text{Quadratic}}(t) = \text{C}_2 \times t^2 + \text{C}_1 \times t + \text{C}, \tag{VIII.35}$$

où C_2, C_1 et C sont trois réels. Comme la mesure quadratique $\tilde{m}_{\text{Quadratic}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Quadratic}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Quadratic}} = m_{\text{Quadratic}}(t) \times \lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.36}$$

VIII.2.4.2 Intégration d'une mesure quadratique dans le haut niveau

Nous intégrons la mesure quadratique $\tilde{m}_{\text{Quadratic}}$ définie dans la relation (VIII.36) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité

$$\frac{\text{C}_2}{3} \times (b^3 - a^3) + \frac{\text{C}_1}{2} \times (b^2 - a^2) + \text{C} \times (b - a).$$

VIII.2.4.3 Discrétisation d'une mesure quadratique dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure quadratique $\tilde{m}_{\text{Quadratic}}$ définie dans la relation (VIII.36) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b$ valeurs, définies par

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Quadratic}}(n_a + j - 1) = \text{C}_2 \times T_{\text{dM}} \times \Bigg[x_a^2 + (2j-1) \times x_a T_{\text{dM}} + T_{\text{dM}}^2 \\ \times (j^2 - j + \frac{1}{3}) \Bigg] + \text{C}_1 \times T_{\text{dM}} \times \left[x_a + (j - \frac{1}{2}) \times T_{\text{dM}} \right] + \text{C} \times T_{\text{dM}}.\end{aligned} \tag{VIII.37}$$

VIII.2.5 Mesure polynomiale

Nous avons créé un objet de type mesure polynomiale dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt est une fonction polynomiale en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition de la mesure polynomiale dans la sous-sous-section suivante.

VIII.2.5.1 Définition

Nous définissons la densité polynomiale m_{Polynom}, la fonction polynomiale de degrée n, qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\text{Polynom}}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \text{C}_i \times t^i, \tag{VIII.38}$$

où chaque réel C_i est le coefficient du terme t^i pour tout entier i compris entre 0 et n. Comme la mesure polynomiale $\tilde{m}_{\text{Polynom}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Polynom}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Polynom}} = m_{\text{Polynom}}(t) \times \lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.39}$$

VIII.2.5.2 Intégration d'une mesure polynomiale dans le haut niveau

La mesure polynomiale $\tilde{m}_{\text{Polynom}}$ définie dans la relation (VIII.39), est intégrée entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\mathrm{C}_i}{i+1} \times (b^{i+1} - a^{i+1}).$$

VIII.2.5.3 Discrétisation d'une mesure polynomiale dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure polynomiale $\tilde{m}_{\text{Polynom}}$ définie dans la relation (VIII.39) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour calculer les valeurs de la mesure polynomiale en utilisant la relation (VIII.21), définies par

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Polynom}}(n_a + j - 1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\mathrm{C}_i}{i+1} \times \Big[(x_a + j \times T_{\text{dM}})^{i+1} - \\ (x_a + (j-1) \times T_{\text{dM}})^{i+1} \Big]. \end{aligned} \tag{VIII.40}$$

VIII.2.6 Mesure sinus

Nous avons créé un objet de type mesure sinus dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt varie sinusoïdalement en fonction de la variable temps t, $\kappa_E(t) = \sin(\alpha t + \beta)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cette somme empruntée sur un intervalle de temps $[0, T]$ est égale à $\dfrac{\cos(\beta) - \cos(\alpha T + \beta)}{\alpha}$ pour un réel α non nul. Nous allons donner une définition de la mesure sinus dans la sous-sous-section VIII.2.6.1. Nous allons décrire comment nous intégrons la mesure sinus du haut niveau dans la sous-sous-section VIII.2.6.2 et celle du bas niveau dans la sous-sous-section VIII.2.6.3.

VIII.2.6.1 Définition

Si C_1, C sont deux réels, nous définissons la densité sinus m_{Sinus}, la fonction sinus qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\text{Sinus}}(t) = \sin(\mathrm{C}_1 \times t + \mathrm{C}). \tag{VIII.41}$$

Nous appelons C_1 le coefficient directeur de la fonction sinus m_{Sinus} et C la valeur de la fonction sinus m_{Sinus} à l'instant initial. Comme la mesure sinus $\tilde{m}_{\text{Sinus}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Sinus}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Sinus}} = m_{\text{Sinus}}(t) \times \lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.42}$$

VIII.2.6.2 Intégration d'une mesure sinus dans le haut niveau

Nous intégrons la mesure sinus $\tilde{m}_{\text{Sinus}}$ définie dans la relation (VIII.42) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité

$$(b-a)\times\sin(\mathrm{C}),$$

si le réel C_1 est nul, sinon elle retourne la quantité

$$\frac{\cos(\mathrm{C}_1\times a+\mathrm{C})-\cos(\mathrm{C}_1\times b+\mathrm{C})}{\mathrm{C}_1}.$$

VIII.2.6.3 Discrétisation d'une mesure sinus dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure sinus $\tilde{m}_{\text{Sinus}}$ définie dans la relation (VIII.42) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour calculer les valeurs de la mesure sinus $\tilde{m}_{\text{Sinus}}$, définies par

$$\forall j\in[\![1;\mathcal{N}_a^b]\!],\tilde{m}_{\text{Sinus}}(n_a+j-1)=\begin{cases}(b-a)\times\sin(\mathrm{C}) & \text{si } \mathrm{C}_1=0\\ \frac{\cos(\mathrm{C}_1\times(x_a+(j-1)\times T_{\text{dM}})+\mathrm{C})-\cos(\mathrm{C}_1\times(x_a+j\times T_{\text{dM}})+\mathrm{C})}{\mathrm{C}_1} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{VIII.43}$$

VIII.2.7 Mesure cosinus

Pour les mêmes raison de la création de la mesure sinus, nous avons créé un objet de type mesure cosinus dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt est la fonction $\kappa_E(t)=\cos(\alpha t+\beta)$, où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Cette somme empruntée sur un intervalle de temps $[0,T]$ est égale à $\dfrac{\sin(\alpha T+\beta)-\sin(\beta)}{\alpha}$ pour un réel α non nul. Nous allons donner une définition de la mesure cosinus dans la sous-sous-section VIII.2.7.1. Nous allons décrire comment nous intégrons la mesure cosinus du haut niveau dans la sous-sous-section VIII.2.7.2 et celle du bas niveau dans la sous-sous-section VIII.2.7.3.

VIII.2.7.1 Définition

Si C_1, C sont deux réels, nous définissons la densité cosinus m_{Cosinus}, la fonction cosinus qui s'écrit sous la forme

$$\forall t\in\mathbb{R},m_{\text{Cosinus}}(t)=\cos(\mathrm{C}_1\times t+\mathrm{C}). \tag{VIII.44}$$

Nous appelons C_1 le coefficient directeur de la fonction cosinus m_{Cosinus} et C la valeur de la fonction cosinus m_{Cosinus} à l'instant initial. Comme la mesure cosinus $\tilde{m}_{\text{Cosinus}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Cosinus}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Cosinus}}=m_{\text{Cosinus}}(t)\times\lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.45}$$

VIII.2.7.2 Intégration d'une mesure cosinus dans le haut niveau

Nous intégrons la mesure cosinus $\tilde{m}_{\text{Cosinus}}$ définie dans la relation (VIII.45) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité

$$(b-a)\times\cos(\mathrm{C}),$$

si le réel C_1 est nul, sinon elle retourne la quantité

$$\frac{\sin(\mathrm{C}_1 \times b + \mathrm{C}) - \sin(\mathrm{C}_1 \times a + \mathrm{C})}{\mathrm{C}_1}.$$

VIII.2.7.3 Discrétisation d'une mesure cosinus dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure cosinus $\tilde{m}_{\mathrm{Cosinus}}$ définie dans la relation (VIII.45) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour calculer les valeurs de la mesure cosinus $\tilde{m}_{\mathrm{Cosinus}}$, définies par

$$\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\mathrm{Cosinus}}(n_a + j - 1) = \begin{cases} (b-a) \times \cos(\mathrm{C}) & \text{si } \mathrm{C}_1 = 0, \\ \frac{\sin(\mathrm{C}_1 \times (x_a + j \times T_{\mathrm{dM}}) + \mathrm{C}) - \sin(\mathrm{C}_1 \times (x_a + (j-1) \times T_{\mathrm{dM}}) + \mathrm{C})}{\mathrm{C}_1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.46}$$

VIII.2.8 Mesure gaussienne

Nous avons créé un objet de type mesure gaussienne dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt est une fonction gaussienne en termes de la variable temps t. Nous allons donner une définition de la mesure gaussienne dans la sous-sous-section suivante.

VIII.2.8.1 Définition

Si μ est un réel et σ un nombre réel positif, nous définissons la densité gaussienne m_{Gaussian}, la fonction gaussienne qui s'écrit sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\mathrm{Gaussian}}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}, \tag{VIII.47}$$

où σ est l'écart type et μ est l'espérance de la densité gaussienne. Comme la mesure gaussienne $\tilde{m}_{\mathrm{Gaussian}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathrm{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\mathrm{Gaussian}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\mathrm{Gaussian}} = m_{\mathrm{Gaussian}}(t) \times \lambda_{\mathrm{Lebesgue}}. \tag{VIII.48}$$

VIII.2.8.2 Intégration d'une mesure gaussienne dans le haut niveau

Nous définissons dans la sous-section VII.4.3 la librairie open source Math.Net Numerics. Nous utilisons cette librairie pour approcher l'intégration de la mesure gaussienne $\tilde{m}_{\mathrm{Gaussian}}$ définie dans la relation (VIII.48) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité suivante en une valeur approchée

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\, dt.$$

VIII.2.8.3 Discrétisation d'une mesure gaussienne dans le bas niveau

Comme pour l'intégration d'une mesure gaussienne dans le haut niveau, nous utilisons la librairie Math.Net Numerics pour approcher la discrétisation de la mesure gaussienne $\tilde{m}_{\mathrm{Gaussian}}$ définie dans la relation (VIII.48) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM}

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Gaussian}}(n_a+j-1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \int_{x_a+(j-1)\times T_{\text{dM}}}^{x_a+j\times T_{\text{dM}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\, dt. \tag{VIII.49}$$

VIII.2.9 Mesure exponentielle

Nous avons créé un objet de type mesure exponentielle dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée dont l'emprunt est une fonction exponentielle en termes de la variable temps t. Nous avons utilisé la mesure exponentielle pour modéliser la vente de tickets d'une cantine sur un intervalle de temps. Nous allons donner une définition de la mesure exponentielle dans la sous-sous-section suivante.

VIII.2.9.1 Définition

Si C est un réel, nous définissons la densité exponentielle $m_{\text{Exponential}}$, la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, m_{\text{Exponential}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{C}\times t}. \tag{VIII.50}$$

Comme la mesure exponentielle $\tilde{m}_{\text{Exponential}}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\text{Lebesgue}}$, la mesure $\tilde{m}_{\text{Exponential}}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{m}_{\text{Exponential}} = m_{\text{Exponential}}(t) \times \lambda_{\text{Lebesgue}}. \tag{VIII.51}$$

VIII.2.9.2 Intégration d'une mesure exponentielle dans le haut niveau

La mesure exponentielle $\tilde{m}_{\text{Exponential}}$ définie dans la relation (VIII.51), est intégrée entre une borne inférieure a et une borne supérieure b pour retourner la quantité

$$b-a,$$

si le réel C est nul, sinon elle retourne la quantité

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{C}\times b} - \mathrm{e}^{\mathrm{C}\times a}}{\mathrm{C}}.$$

VIII.2.9.3 Discrétisation d'une mesure exponentielle dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure exponentielle $\tilde{m}_{\text{Exponential}}$ définie dans la relation (VIII.51) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour calculer les valeurs de la mesure exponentielle $\tilde{m}_{\text{Exponential}}(j)$ pour tout entier j compris entre 1 et $\mathcal{N}_a^b$ définies par

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Exponential}}(n_a+j-1) = \begin{cases} T_{\text{dM}} & \text{si } \mathrm{C}=0, \\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{C}\times(x_a+j\times T_{\text{dM}})} - \mathrm{e}^{\mathrm{C}\times(x_a+(j-1)\times T_{\text{dM}})}}{\mathrm{C}} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.52}$$

VIII.2.10 Mesure de Dirac

Nous rappelons que nous avons créé un objet de type mesure de Dirac pour modéliser une variable financière (emprunt, remboursement, etc.) dont la somme empruntée ou remboursée l'est à

un instant donné. Nous allons donner une définition de la mesure de Dirac dans la sous-sous-section VIII.2.10.1. Nous allons décrire comment la mesure de Dirac est intégrée dans le haut niveau dans la sous-sous-section VIII.2.10.2 et dans le bas niveau dans la sous-sous-section VIII.2.10.3.

VIII.2.10.1 Définition

La mesure de Dirac fait partie des mesures de notre modèle financier continu en temps. Si Location est un point réel, nous définissons la mesure de Dirac $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ localisée au point Location, de masse Mass sur la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \tilde{m}_{\text{Dirac}}(A) = \begin{cases} \text{Mass} & \text{si Location} \in A, \\ 0 & \text{si Location} \notin A. \end{cases} \tag{VIII.53}$$

Nous allons maintenant justifier pourquoi la variable Location est une variable de type décimale. En effet, il faut que la position de Dirac soit uniformément précise. Par conséquent, cela nous permet d'éviter des problèmes d'arrondi pour la position de la mesure de Dirac dans notre modélisation.

VIII.2.10.2 Intégration d'une mesure de Dirac dans le haut niveau

Nous avons besoin des deux variables Mass et Location pour construire une mesure de Dirac de haut niveau. La variable Mass est la somme empruntée ou remboursée à l'instant Location.

Nous voulons maintenant intégrer la mesure de Dirac $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ entre une borne inférieure a et une borne supérieure b. Pour cela, nous rappelons que nous avons fait un choix exprimé dans la relation (II.29) sur la mesure de Dirac δ_p. Par conséquent, en utilisant ce choix, nous avons :

— Lorsque la position de Dirac Location est dans l'intervalle $[a, b[$, la valeur de l'action de la mesure de Dirac $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ sur le champ $\mathbb{1}_{[a,b[}$ est la masse Mass.
— Lorsque la position de Dirac Location est dans l'intervalle $]-\infty, a[$, la valeur de l'action de la mesure de Dirac $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ sur le champ $\mathbb{1}_{]-\infty,a[}$ est la valeur nulle.
— Lorsque la position de Dirac Location est dans l'intervalle $[b, +\infty[$, la valeur de l'action de la mesure de Dirac $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ sur le champ $\mathbb{1}_{[b,+\infty[}$ est la valeur nulle.

En conclusion, nous distinguons deux cas possibles pour déterminer l'intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ en fonction de la variable Location. Le premier cas est lorsque la position de Dirac Location est supérieure à la valeur a et est strictement inférieure à b. Dans ce cas, l'intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ retourne la masse Mass. Dans le cas contraire, elle retourne la valeur nulle. Nous résumons les deux cas :

1er cas : $a \leq \text{Location} < b$
l'intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ retourne la masse Mass.

2e cas : $\text{Location} < a$ ou $b \leq \text{Location}$
l'intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ retourne la valeur nulle.

VIII.2.10.3 Discrétisation d'une mesure de Dirac dans le bas niveau

Nous discrétisons la mesure de Dirac $\tilde{m}_{\text{Dirac}}$ définie dans la relation (VIII.53) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} pour calculer les valeurs de la mesure de Dirac en utilisant la relation (VIII.21), définies par

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], \tilde{m}_{\text{Dirac}}(n_a+j-1) = \begin{cases} \frac{\text{Mass}}{T_{\text{dM}}} & \text{si } (n_a+j-1)\times T_{\text{dM}} \leq \text{Location} < (n_a+j)\times T_{\text{dM}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.54}$$

VIII.3 Les mesures composées

Nous rappelons que nous avons défini dans la section VIII.2 les mesures simples. Nous utilisons des mesures composées dans notre modélisation. Pour cela, l'objectif de cette section est de définir quelques mesures composées qui sont les mesures sommes, soustractions, produits, divisions, par morceaux, tronquées, tabulées, convolées.

Nous allons exprimer l'intégration des mesures composées de bas niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'intégration T_{I} en termes de l'intégration des mesures qui les composent. Ensuite, nous pouvons obtenir les valeurs discrètes de ces mesures composées.

Nous poursuivons notre objectif de cette section en exprimant l'intégration de chaque mesure composée dans le haut niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b en fonction de l'intégration des mesures qui la composent.

VIII.3.1 Somme de mesures

Nous avons créé un objet de type mesure somme dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée d'une somme de deux emprunts sur un intervalle de temps. Nous allons donner une définition de la mesure somme dans la sous-sous-section suivante.

VIII.3.1.1 Définition

Si μ et ν sont deux mesures définies sur l'espace mesurable $(E,\mathcal{E})$, la somme de deux mesures μ et ν est définie par une nouvelle mesure η vérifiant pour tout ensemble de parties A de $\mathcal{E}$

$$\eta(A) = \mu(A) + \nu(A). \tag{VIII.55}$$

VIII.3.1.2 Intégration d'une mesure somme dans le haut niveau

L'intégration d'une somme m de deux mesures de haut niveau m_1 et m_2 entre une borne inférieure a et une borne supérieure b est la somme de deux valeurs. La première valeur est l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b. La deuxième valeur est l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b. Par conséquent, nous exprimons l'intégration de la mesure somme m par

$$\int_a^b m = \int_a^b m_1 + \int_a^b m_2. \tag{VIII.56}$$

VIII.3.1.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure somme dans le haut niveau

Nous allons donner un exemple pour montrer comment nous intégrons une somme m de deux mesures de Dirac m_1 et m_2 de haut niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b. Nous présentons les deux mesures m_1 et m_2 dans la Figure VIII.4. La première mesure $m_1 = M_1\delta_{p_1}$

est une mesure de Dirac localisée au point p_1, de masse M_1. La deuxième mesure $m_2 = M_2\delta_{p_2}$ est une mesure de Dirac localisée au point p_2, de masse M_2. Nous choisissons les décimaux p_1 et p_2 dans notre exemple tels que

$$a \leq p_1 < p_2 < b. \tag{VIII.57}$$

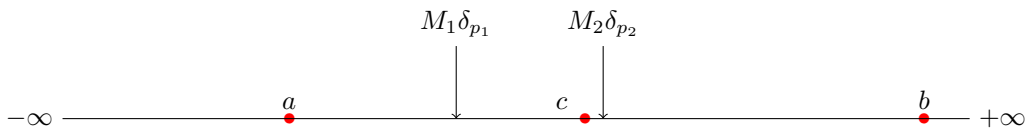

FIGURE VIII.4 – La mesure somme m des deux mesures de Dirac de haut niveau $m_1 = M_1\delta_{p_1}$ et $m_2 = M_2\delta_{p_2}$.

Nous utilisons deux méthodes d'intégration de la mesure somme m pour montrer que ce résultat d'intégration est le même. La première méthode est basée sur le fait que les positions p_1 et p_2 appartiennent à l'intervalle $[a, b[$. Par conséquent, l'intégration de la mesure somme m est la somme des deux masses de Dirac M_1 et M_2

$$\int_a^b m = M_1 + M_2. \tag{VIII.58}$$

La deuxième méthode consiste à utiliser la relation de Chasles en un point c (voir Figure VIII.4) défini par

$$p_1 < c \leq p_2, \tag{VIII.59}$$

afin d'obtenir la même valeur d'intégration $M_1 + M_2$. En effet, comme $p_1 \in [a, c[$ en utilisant les relations (VIII.57) et (VIII.59), l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure c retourne la masse M_1, et l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure c et la borne supérieure b retourne la valeur nulle. Comme $p_2 \in [c, b[$ en utilisant les relations (VIII.57) et (VIII.59), l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure a et la borne supérieure c retourne la valeur nulle, et l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure c et la borne supérieure b retourne la masse M_2

$$\begin{aligned}\int_a^b m &= \int_a^c m + \int_c^b m,\\ &= \int_a^c m_1 + \int_a^c m_2 + \int_c^b m_1 + \int_c^b m_2,\\ &= M_1 + M_2.\end{aligned} \tag{VIII.60}$$

VIII.3.1.3 Somme de deux mesures discrètes

La somme de 2 mesures discrètes $(m_1(n_a + j - 1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ et $(m_2(n_a + j - 1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définies sur le même maillage universel est une mesure discrète $(m(n_a + j - 1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ à $\mathcal{N}_a^b$ valeurs définies par

$$\forall j \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a + j - 1) = m_1(n_a + j - 1) + m_2(n_a + j - 1). \tag{VIII.61}$$

VIII.3.1.3.1 Un exemple de somme de deux mesures de Dirac discrètes

Nous définissons le maillage $\text{DiscretizedAxeSegment}_{0.5}$ par le maillage universel défini entre les 2 points $x_a = 0.5$ et $x_b = 4$ avec le pas de discrétisation $T_{\text{dM}} = 0.5$.

Nous allons donner un exemple pour montrer comment nous avons calculé la somme de 2 mesures discrètes. Pour cela, Nous définissons la mesure discrète $(m_1(j))_{1 \leq j \leq 7}$ par les valeurs d'une mesure de Dirac au point $p_1 = 2.1$, de masse M_1 sur le maillage universel $\text{DiscretizedAxeSegment}_{0.5}$

$$\forall j \in [\![1; 7]\!], m_1(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j \neq 4, \\ 2 \times M_1 & \text{si } \ j = 4. \end{cases} \tag{VIII.62}$$

et nous définissons la mesure discrète $(m_2(j))_{1 \leq j \leq 7}$ par les valeurs d'une mesure de Dirac au point $p_2 = 03.2$, de masse M_2 sur le maillage universel $\text{DiscretizedAxeSegment}_{0.5}$

$$\forall j \in [\![1; 7]\!], m_2(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j \neq 6, \\ 2 \times M_2 & \text{si } \ j = 6. \end{cases} \tag{VIII.63}$$

Par conséquent, nous utilisons la relation (VIII.61) pour calculer la mesure somme discrète $(m(j))_{1 \leq j \leq 7}$ des 2 mesures discrètes $(m_1(j))_{1 \leq j \leq 7}$ et $(m_2(j))_{1 \leq j \leq 7}$ définie par

$$\forall j \in [\![1; 7]\!], m(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ j \in \{1, 2, 3\} \cup \{5, 7\}, \\ 2 \times M_1 & \text{si } \ j = 4, \\ 2 \times M_2 & \text{si } \ j = 6. \end{cases} \tag{VIII.64}$$

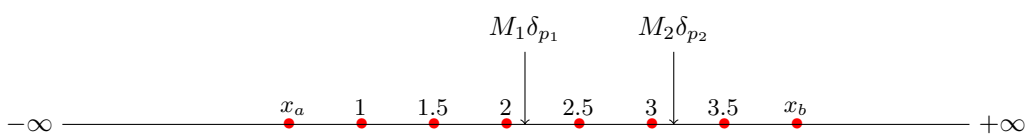

FIGURE VIII.5 – La mesure somme m des deux mesures de Dirac de bas niveau $m_1 = M_1\delta_{p_1}$ et $m_2 = M_2\delta_{p_2}$.

VIII.3.2 Soustraction de deux mesures

Nous avons créé un objet de type mesure soustraction dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée d'une différence de deux emprunts sur un intervalle de temps. Nous allons donner une définition de la mesure soustraction dans la sous-sous-section suivante.

VIII.3.2.1 Définition

Si μ et ν sont deux mesures définies sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, la soustraction de deux mesures μ et ν est définie par une nouvelle mesure η vérifiant pour tout ensemble de parties A de $\mathcal{E}$

$$\eta(A) = \mu(A) - \nu(A). \tag{VIII.65}$$

VIII.3.2.2 Intégration d'une mesure soustraction dans le haut niveau

L'intégration d'une soustraction m de deux mesures de haut niveau m_1 et m_2 entre une borne inférieure a et une borne supérieure b est une valeur qui est la différence de deux valeurs. La première valeur est l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b. La deuxième valeur est l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b. Par conséquent, nous exprimons l'intégration de la mesure m par

$$\int_a^b m = \int_a^b m_1 - \int_a^b m_2. \tag{VIII.66}$$

VIII.3.2.3 Soustraction de deux mesures discrètes

La soustraction de 2 mesures discrètes $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ et $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définies sur le même maillage universel est une mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ à $\mathcal{N}_a^b$ valeurs définies par

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a+j-1) = m_1(n_a+j-1) - m_2(n_a+j-1). \tag{VIII.67}$$

VIII.3.3 Produit de mesures

Nous avons défini le produit de deux mesures pour des raisons de nature production logicielle. Ce produit n'a pas été utilisé dans le modèle financier continu en temps. Comme le produit de deux mesures de Dirac n'a pas de sens dans la théorie de la mesure, nous interdisons ce type de produit.

VIII.3.3.1 Produit de deux mesures discrètes

Le produit de 2 mesures discrètes $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ et $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définies sur le même maillage universel est une mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ à $\mathcal{N}_a^b$ valeurs définies par

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a+j-1) = \frac{m_1(n_a+j-1)\times m_2(n_a+j-1)}{T_{\mathrm{dM}}}. \tag{VIII.68}$$

VIII.3.3.1.1 Un exemple de validation du produit discret

Nous allons donner un exemple pour calculer le produit discret de 2 mesures discrètes définies sur un maillage universel $\mathrm{DiscretizedAxeSegment}_{\mathrm{T_{dM}}}$. Pour cela, nous définissons la mesure discrète $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ par les valeurs d'une mesure constante de constante C_1

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m_1(n_a+j-1) = \mathrm{C}_1 \times T_{\mathrm{dM}}, \tag{VIII.69}$$

et nous définissons la mesure discrète $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ par les valeurs d'une mesure constante de constante C_2

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m_2(n_a+j-1) = \mathrm{C}_2 \times T_{\mathrm{dM}}. \tag{VIII.70}$$

Si nous utilisons la relation (VIII.68) pour calculer la mesure produit discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ des 2 mesures discrètes $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ et $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$, nous obtenons

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a+j-1) = \mathrm{C}_1 \times \mathrm{C}_2 \times T_{\mathrm{dM}}. \tag{VIII.71}$$

Si nous discrétisons la mesure constante de constante $\mathrm{C}_1 \times \mathrm{C}_2$ sur le même maillage universel $\mathrm{DiscretizedAxeSegment}_{\mathrm{T_{dM}}}$, nous obtenons les mêmes valeurs discrètes définies dans la relation (VIII.71). Nous concluons que la relation (VIII.68) est consistante.

VIII.3.3.1.2 Un exemple de produit de deux mesures discrètes

Nous allons donner un exemple pour montrer comment nous avons calculé le produit de 2 mesures discrètes. Pour cela, nous définissons la mesure discrète $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ par les valeurs d'une mesure constante de constante C

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m_1(n_a+j-1) = \mathrm{C} \times T_{\mathrm{dM}}, \tag{VIII.72}$$

et nous définissons la mesure discrète $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ par les valeurs d'une mesure de Dirac au point p, de masse M

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m_2(n_a+j-1) = \begin{cases} \frac{M}{T_{\mathrm{dM}}} & \text{si } (n_a+j-1)\times T_{\mathrm{dM}} \leq p < (n_a+j)\times T_{\mathrm{dM}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{VIII.73}$$

Par conséquent, nous utilisons la relation (VIII.68) pour calculer la mesure produit discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ des 2 mesures discrètes $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ et $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définies par

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a+j-1) = \begin{cases} \frac{\mathrm{C}\times M}{T_{\mathrm{dM}}} & \text{si } (n_a+j-1)\times T_{\mathrm{dM}} \leq p < (n_a+j)\times T_{\mathrm{dM}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{VIII.74}$$

VIII.3.3.2 Intégration d'une mesure produit discrète

L'intégration de la mesure produit discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définie dans la relation (VIII.68) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b est la somme de toutes les valeurs $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$

$$\sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_a^b} m(n_a+j-1).$$

L'intégration du produit discret $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ entre une borne inférieure c et une borne supérieure d dans le cas où $a \leq c < d \leq b$ est la somme de toutes les valeurs $(m(n_c+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_c^d}$

$$\sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_c^d} m(n_c+j-1).$$

VIII.3.3.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure produit discrète

Nous allons maintenant donner un exemple pour montrer comment nous avons intégré la mesure produit discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définie dans la relation (VIII.74) entre la borne inférieure

a et la borne supérieure b. Pour cela, nous distinguons 2 cas possibles pour déterminer cette intégration de la mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ en fonction de la localisation p. Nous allons montrer que cette intégration retourne la quantité $\frac{\mathrm{C}\times M}{T_{\mathrm{dM}}}$ dans le 1er cas où $x_a \leq p < x_b$ et nous allons montrer aussi que cette intégration retourne la valeur nulle dans le 2e cas où $p < x_a$ ou $x_b \leq p$.

1er cas : $x_a \leq p < x_b$

• Dans ce cas, nous utilisons la relation (VIII.74) pour montrer qu'il existe un entier $j_F \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!]$ tel que

$$m(n_a+j_F-1) = \frac{\mathrm{C}\times M}{T_{\mathrm{dM}}}, \forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!] \setminus \{j_F\}, m(n_a+j_F-1) = 0. \tag{VIII.75}$$

Comme les valeurs $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ sont toutes nulles sauf en j_F, l'intégration de la mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ retourne la valeur $\frac{\mathrm{C}\times M}{T_{\mathrm{dM}}}$.

2e cas : $p < x_a$ ou $x_b \leq p$

• Comme les valeurs $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ sont nulles dans ce cas, l'intégration de la mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ retourne la valeur nulle.

VIII.3.4 Division de deux mesures

Pour des questions de nature production logicielle, nous avons défini la division de deux mesures. Nous interdisons la division de deux mesures de Dirac.

VIII.3.4.1 Division de deux mesures discrètes

Si les valeurs de la mesure discrète $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ ne sont pas nulles, la division d'une mesure discrète $(m_1(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ par la mesure discrète $(m_2(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définie sur le même maillage universel est une mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ à $\mathcal{N}_a^b$ valeurs définies par

$$\forall j \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a+j-1) = \frac{m_1(n_a+j-1)}{m_2(n_a+j-1)} \times T_{\mathrm{dM}}. \tag{VIII.76}$$

VIII.3.4.1.1 Un exemple de validation de la mesure division discrète

Comme nous avons validé le produit discret dans l'exemple de la sous-sous-sous-section VIII.3.3.1.1, nous utilisons le même raisonnement pour valider la mesure division discrète. En effet, la discrétisation de la mesure division discrète des 2 mesures constantes discrètes de constantes C_1 et C_2 retourne la discrétisation de la mesure constante de constante $\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}$. Ce qui montre que la relation (VIII.76) est cohérente.

VIII.3.4.2 Intégration d'une mesure division discrète

L'intégration de la mesure division discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ définie dans la relation (VIII.76) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b est la somme de toutes les valeurs $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$

$$\sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_a^b} m(n_a+j-1).$$

L'intégration de la mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ entre une borne inférieure c et une borne supérieure d dans le cas où $a \leq c < d \leq b$ est la somme de toutes les valeurs $(m(n_c+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_c^d}$

$$\sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_c^d} m(n_c+j-1).$$

VIII.3.5 Mesure par morceaux

Nous avons créé un objet de type mesure par morceaux dans notre modélisation, par exemple, pour calculer la somme empruntée sur un intervalle de temps d'un emprunt composé de plusieurs emprunts définis sur des intervalles de temps. Nous allons donner une définition de la mesure par morceaux dans la sous-sous-section suivante.

VIII.3.5.1 Définition

Nous appelons une subdivision d'ordre n de $\mathbb{R}$ une partie finie $(Fr_0, Fr_1, \ldots, Fr_n)$ définissant les n intervalles fermés $([Fr_{i-1}, Fr_i])_{1\leq i\leq n}$, et les 2 intervalles $]-\infty, Fr_0]$ et $[Fr_n, +\infty[$ telle que

$$Fr_0 < Fr_1 < \cdots < Fr_n. \tag{VIII.77}$$

Nous utilisons la définition (VIII.77) pour définir une mesure par morceaux. Nous appelons mesure par morceaux, l'une des 2 méthodes de construction définie à partir :

• d'un réel Fr_0 permettant de générer les mesures m_0 et m_1 respectivement sur les intervalle $]-\infty, Fr_0]$ et $[Fr_0, +\infty[$. Plus formellement, la mesure $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ présentée dans la Figure VIII.6 est une mesure par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{gathered}\exists Fr_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \tilde{m}_{\text{Piecewise}}\,|_{]-\infty,Fr_0]} = m_0, \tilde{m}_{\text{Piecewise}}\,|_{[Fr_0,+\infty[} = m_1, \\ \text{où } m_0,\ m_1 \text{ sont des mesures}\end{gathered} \tag{VIII.78}$$

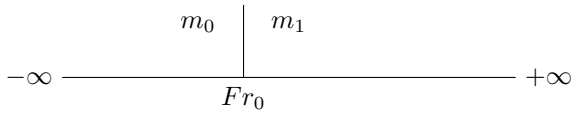

FIGURE VIII.6 – Mesure par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ constituée des mesures m_0 et m_1 et de la frontière Fr_0.

• d'une subdivision $(Fr_0, Fr_1, \ldots, Fr_n)$ définie dans la relation (VIII.77) permettant de générer la mesure m_i sur chaque intervalle fermé $[Fr_{i-1}, Fr_i]$, i allant de 1 à n, et de générer les deux mesures m_0 et m_{n+1} respectivement sur les deux intervalles $]-\infty, Fr_0]$ et $[Fr_n, +\infty[$. Plus formellement, la mesure $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ présentée dans la Figure VIII.7 est une mesure par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{gathered}\exists (Fr_0, Fr_1, \ldots, Fr_n) \text{ vérifiant la relation (VIII.77) tels que : } \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \tilde{m}_{\text{Piecewise}}\,|_{[Fr_{i-1},Fr_i]} = m_i, \tilde{m}_{\text{Piecewise}}\,|_{]-\infty,Fr_0]} = m_0, \tilde{m}_{\text{Piecewise}}\,|_{[Fr_n,+\infty[} = m_{n+1} \\ \text{où } m_0\ , m_i\ , m_{n+1} \text{ sont des mesures}\end{gathered} \tag{VIII.79}$$

FIGURE VIII.7 – Mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ constituée des mesures $(m_i)_{0\leq i\leq n+1}$ et des frontières $(Fr_i)_{0\leq i\leq n}$.

VIII.3.5.2 Intégration d'une mesure par morceaux entre deux points

Nous distinguons 3 possibilités pour l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ définie dans la relation (VIII.78) :

— Lorsque $a < Fr_0 < b$, l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la somme de 2 quantités. La 1re quantité est l'intégration de la mesure m_0 entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_0. La 2e quantité est l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure Fr_0 et la borne supérieure b. Autrement dit

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^{Fr_0} m_0 + \int_{Fr_0}^b m_1. \tag{VIII.80}$$

— Lorsque $b \leq Fr_0$, l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'intégration de la mesure m_0 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^b m_0. \tag{VIII.81}$$

— Lorsque $Fr_0 \leq a$, l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^b m_1. \tag{VIII.82}$$

Nous allons exprimer maintenant l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ définie dans la relation (VIII.79) entre la borne inférieure a et la borne supérieure b comme une somme d'intégrales des mesures $(m_i)_{p\leq i\leq q}$, où les index p et q sont respectivement les index de la première et de la dernière mesure à intégrer. De plus, si les index p et q sont connus, nous connaissons toutes les mesures m_i à intégrer pour tout entier i compris entre p et q.

Nous utilisons le principe de recherche dichotomique afin de déterminer les index p et q, et nous allons maintenant rappeler leurs définitions. Pour cela, nous considérons $l \in [\![1;n]\!]$, l'index $p \in [\![0;n+1]\!]$ est défini en utilisant la liste des frontières $(Fr_i)_{0\leq i\leq n}$

$$p = \begin{cases} 0 & \text{si } a < Fr_0, \\ l & \text{si } Fr_{l-1} \leq a < Fr_l, \\ n+1 & \text{si } Fr_n \leq a. \end{cases} \tag{VIII.83}$$

Nous cherchons l'index $q \in [\![0;n+1]\!]$ défini par

$$q = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq Fr_0, \\ l & \text{si } Fr_{l-1} < b \leq Fr_l, \\ n+1 & \text{si } Fr_n < b. \end{cases} \tag{VIII.84}$$

Nous précisons que la relation (VIII.83) nous permet de montrer dans le cas où $Fr_n \leq a$ que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre la borne inférieure a et la borne supérieure b retourne l'intégration de la mesure m_{n+1} entre la borne inférieure a et la borne supérieure b.

De même, la relation (VIII.84) nous permet de montrer dans le cas où $b \leq Fr_0$ que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre la borne inférieure a et la borne supérieure b retourne l'intégration de la mesure m_0 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b.

Nous remarquons que, dans ces deux cas, nous avons $p = q$. Afin de donner un formalisme général d'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre la borne inférieure a et la borne supérieure b, nous définissons la variable $a_\star$ comme étant la borne supérieure d'intégration de la mesure m_p et la variable $b_\star$ comme étant la borne inférieure d'intégration de la mesure m_q. Par conséquent, nous exprimons leurs définitions

$$a_\star = \begin{cases} \inf\{Fr_p, b\} & \text{si } \ a < Fr_n, \\ b & \text{si } \ Fr_n \leq a. \end{cases} \tag{VIII.85}$$

$$b_\star = \begin{cases} \sup\{Fr_{q-1}, a\} & \text{si } \ Fr_0 < b, \\ a & \text{si } \ b \leq Fr_0. \end{cases} \tag{VIII.86}$$

Nous allons maintenant définir les 3 quantités q_1, q_2 et q_3 :

— La première quantité q_1 est l'intégrale de la première mesure m_p entre la borne inférieure a et la borne supérieure $a_\star$

$$q_1 = \int_a^{a_\star} m_p. \tag{VIII.87}$$

— La deuxième quantité q_2 est la somme d'intégrales de chaque mesure m_{i+1} entre la borne inférieure Fr_i et la borne supérieure Fr_{i+1} pour tout entier i compris entre p et $q-2$

$$q_2 = \sum_{i=p}^{i=q-2} \int_{Fr_i}^{Fr_{i+1}} m_{i+1}. \tag{VIII.88}$$

— La troisième quantité q_3 est l'intégrale de la dernière mesure m_q entre la borne inférieure $b_\star$ et la borne supérieure b

$$q_3 = \int_{b_\star}^{b} m_q. \tag{VIII.89}$$

Par conséquent, nous distinguons 3 possibilités pour l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ définie dans la relation (VIII.79) :

— Lorsque $p \leq q-2$ (voir Figure VIII.8), l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la somme des 3 quantités q_1, q_2 et q_3. En effet, ce cas exprime qu'il y a au moins une mesure qui se situe entre les deux mesures m_p et m_q.

$$\text{Si } \ p \leq q-2, \int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = q_1 + q_2 + q_3. \tag{VIII.90}$$

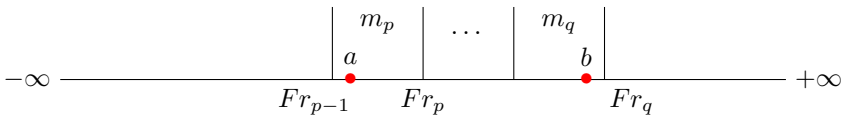

FIGURE VIII.8 – Intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ lorsque $p \leq q-2$.

— Lorsque $p = q-1$ (voir Figure VIII.9), l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la somme de la première quantité q_1 et la troisième quantité q_3.

$$\text{Si } \ p = q-1, \int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = q_1 + q_3. \tag{VIII.91}$$

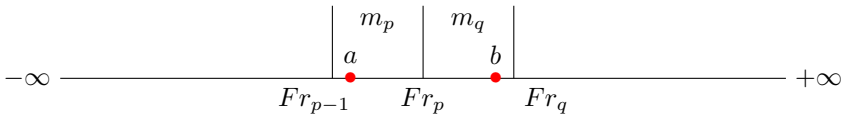

FIGURE VIII.9 – Intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ lorsque $p = q-1$.

— Lorsque $p = q$ (voir Figure VIII.10), l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la première quantité q_1 ou la troisième quantité q_3, qui sont égales dans ce cas.

$$\text{Si } \ p = q, \int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = q_1 \ \text{ ou } \ q_3. \tag{VIII.92}$$

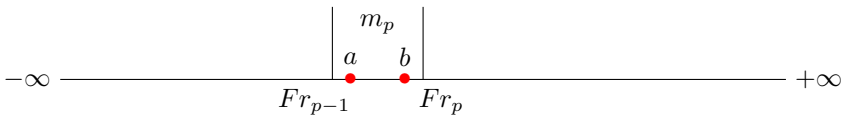

FIGURE VIII.10 – Intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ lorsque $p = q$.

VIII.3.5.2.1 Un exemple d'intégration d'une mesure par morceaux entre deux points

Nous allons maintenant donner un exemple avec pour objectif de calculer l'intégration d'une mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ de haut niveau entre une borne inférieure a et une borne supérieure b. Cette mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ est présentée dans la Figure VIII.11 et constituée de deux frontières Fr_0, Fr_1 et de trois mesures de Dirac m_0, m_1, m_2 localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et $Fr_1 + 1$, de masses M_0, M_1 et M_2.

Nous précisons que la pertinence de cet exemple est de montrer que les masses de Dirac peuvent être concentrées aux frontières d'une mesure par morceaux. C'est le cas pour les deux mesures m_0 et m_1.

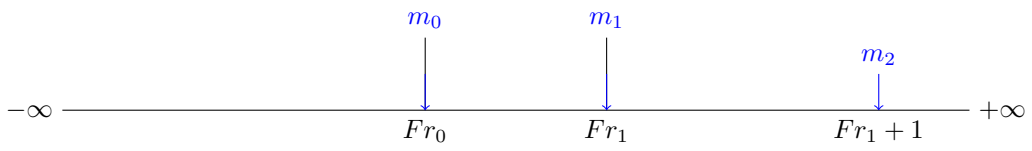

FIGURE VIII.11 – Mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ de haut niveau composée des mesures de Dirac m_0, m_1, m_2 localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et Fr_1+1, de masses M_0, M_1 et M_2.

Nous distinguons 2 cas possibles pour l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$. Nous allons montrer dans le 1er cas où $a \leq Fr_1 + 1 < b$ que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la masse M_2, et dans le 2e cas où $Fr_1 + 1 < a$ ou $b \leq Fr_1 + 1$ que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la valeur nulle.

<u>1er cas : $a \leq Fr_1 + 1 < b$</u>

Comme $a \leq Fr_1+1$, il y a 3 possibilités pour la borne inférieure a, qui sont $a < Fr_0$, $Fr_0 \leq a < Fr_1$ et $Fr_1 \leq a \leq Fr_1 + 1$. En effet, nous déterminons une valeur différente de p dans chacune de ces 3 possibilités. Comme $Fr_1 + 1 < b$, nous avons $q = 2$ en utilisant la relation (VIII.84). Nous allons justifier que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la masse M_2 dans chacune des 3 possibilités :

• Lorsque $a < Fr_0$, nous avons $p = 0$ en utilisant la relation (VIII.83). Nous avons aussi $a_\star = Fr_0$ et $b_\star = Fr_1$ en utilisant respectivement les relations (VIII.85) et (VIII.86). Comme $p \leq q - 2$, nous utilisons la relation (VIII.90) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^{Fr_0} m_0 + \int_{Fr_0}^{Fr_1} m_1 + \int_{Fr_1}^b m_2. \tag{VIII.93}$$

Puisque les mesures de Dirac m_0 et m_1 sont localisées respectivement aux points Fr_0 et Fr_1, l'intégration de la mesure m_0 entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_0 et l'intégration de la mesure m_1 entre la frontière inférieure Fr_0 et la frontière supérieure Fr_1 retournent la valeur nulle. Comme $Fr_1 + 1 \in [Fr_1, b[$, l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure Fr_1 et la borne supérieure b retourne la masse M_2. Par conséquent, nous obtenons de la relation (VIII.93), la relation suivante :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_{Fr_1}^b m_2 = M_2. \tag{VIII.94}$$

• Lorsque $Fr_0 \leq a < Fr_1$, nous avons $p = 1$ en utilisant la relation (VIII.83) et nous avons $a_\star = b_\star = Fr_1$ en utilisant les relations (VIII.85) et (VIII.86). Comme $p = q - 1$, nous utilisons la relation (VIII.91) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^{Fr_1} m_1 + \int_{Fr_1}^b m_2. \tag{VIII.95}$$

Puisque la mesure de Dirac m_1 est localisée au point Fr_1, l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_1 retourne la valeur nulle. Par conséquent, grâce à la relation (VIII.95), nous obtenons la relation suivante :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_{Fr_1}^b m_2 = M_2. \tag{VIII.96}$$

• Lorsque $Fr_1 \leq a \leq Fr_1 + 1$, nous avons $p = 2$, $a_\star = b$ et $b_\star = a$ en utilisant respectivement les relations (VIII.83), (VIII.85) et (VIII.86). Comme $p = q$, nous utilisons la relation (VIII.92) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^b m_2. \tag{VIII.97}$$

Comme $Fr_1 + 1 \in [a, b[$, l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b retourne la masse M_2. Par conséquent, grâce à la relation (VIII.97), nous obtenons la relation suivante :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = M_2. \tag{VIII.98}$$

2e cas : $Fr_1 + 1 < a$ ou $b \leq Fr_1 + 1$

• Lorsque $Fr_1 + 1 < a$, nous avons $p = 2$, $q = 2$, $a_\star = b$ et $b_\star = a$ en utilisant respectivement les relations (VIII.83), (VIII.84), (VIII.85) et (VIII.86). Comme $p = q$, nous utilisons la relation (VIII.92) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^b m_2. \tag{VIII.99}$$

Comme $Fr_1 + 1 < a$, qui exprime que la localisation de la mesure m_2 est strictement inférieure à la borne inférieure a, l'intégration de la mesure m_2 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b retourne la valeur nulle. De la relation (VIII.99), nous obtenons :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = 0. \tag{VIII.100}$$

• Lorsque $b \leq Fr_1 + 1$, nous allons montrer que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la valeur nulle. Pour cela, il y a 4 possibilités :

— Lorsque $a < Fr_0$ et $Fr_1 < b \leq Fr_1 + 1$, nous avons $p = 0$ et $q = 2$ en utilisant respectivement les relations (VIII.83) et (VIII.84). Comme $p \leq q - 2$, nous utilisons la relation (VIII.90) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^{Fr_0} m_0 + \int_{Fr_0}^{Fr_1} m_1 + \int_{Fr_1}^b m_2. \tag{VIII.101}$$

— Lorsque $Fr_0 \leq a < Fr_1 < b \leq Fr_1 + 1$, nous avons $p = 1$ et $q = 2$ en utilisant respectivement les relations (VIII.83) et (VIII.84). Comme $p = q - 1$, nous utilisons la relation (VIII.91) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^{Fr_1} m_1 + \int_{Fr_1}^b m_2. \tag{VIII.102}$$

— Lorsque $a < Fr_0 < b \leq Fr_1$, nous avons $p = 0$ et $q = 1$ en utilisant respectivement les relations (VIII.83) et (VIII.84). Comme $p = q - 1$, nous utilisons la relation (VIII.91) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^{Fr_0} m_0 + \int_{Fr_0}^b m_1. \tag{VIII.103}$$

— Lorsque $b \leq Fr_0$, nous avons $p = q = 0$ en utilisant les relations (VIII.83) et (VIII.84). Ensuite, nous utilisons la relation (VIII.92) pour obtenir :

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = \int_a^b m_0. \tag{VIII.104}$$

Comme les mesures de Dirac m_0, m_1 et m_2 sont localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et $Fr_1 + 1$, les relations (VIII.101), (VIII.102), (VIII.103), (VIII.104) montrent que l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ retourne la valeur nulle

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Piecewise}} = 0. \tag{VIII.105}$$

VIII.3.5.3 Intégration d'une mesure par morceaux dans le bas niveau

Nous voulons intégrer la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ définie dans l'une des relations (VIII.78) et (VIII.79) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'intégration T_{I}. Le nombre N_I des sous-intervalles de l'intervalle $[a, b]$ est défini par

$$N_I = \begin{cases} \left\lfloor \frac{b-a}{T_{\text{I}}} \right\rfloor & \text{si } T_{\text{I}} \text{ est divisible par } b - a, \\ \left\lfloor \frac{b-a}{T_{\text{I}}} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.106}$$

Nous pouvons justifier la relation (VIII.106) à travers l'exemple suivant. Si nous intégrons la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre la borne inférieure $a = 0$ et la borne supérieure $b = 1$ avec le pas d'intégration $T_{\text{I}} = 1$, nous obtenons un seul sous-intervalle de l'intervalle $[a, b]$ qui est l'intervalle lui-même, i.e $N_I = 1$. Cependant, si nous intégrons la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre la borne inférieure $a = 0$ et la borne supérieure $b = 1.1$ avec le pas d'intégration $T_{\text{I}} = 1$, nous obtenons 2 sous-intervalles de l'intervalle $[a, b]$ qui sont $[0, 1]$ et $[1, 2]$, i.e $N_I = 2$.

Nous définissons les points d'intégration $(x_k)_{1 \leq k \leq N_I + 1}$ entre les 2 points a et b avec le pas T_{I} par

$$\forall k \in [\![1; N_I + 1]\!], x_k = a + (k - 1) \times T_{\text{I}}. \tag{VIII.107}$$

Pour intégrer la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$, nous intégrons la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre les 2 points x_k et x_{k+1} pour tout entier $k \in [\![1; N_I]\!]$. Pour cela, nous prenons $a = x_k$ et $b = x_{k+1}$ dans la sous-sous-section VIII.3.5.2 pour chaque entier fixé $k \in [\![1; N_I]\!]$ afin de déterminer chaque valeur d'intégration. Par conséquent, nous allons parcourir l'entier k entre 1 et N_I pour déterminer toutes les valeurs d'intégration.

VIII.3.5.4 Discrétisation d'une mesure par morceaux

La discrétisation de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ définie dans l'une des relations (VIII.78) ou (VIII.79) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dM} est une intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ entre la borne inférieure x_a et la borne supérieure x_b avec le pas T_{dM}. Dans le cas discrétisation de la mesure $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ définie dans la relation (VIII.79), le pas T_{dM} doit être strictement inférieur à la différence des frontières successives

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!], T_{\text{dM}} < Fr_{i+1} - Fr_i. \tag{VIII.108}$$

Comme nous avons décrit l'intégration de la mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ de bas niveau dans la sous-sous-section VIII.3.5.3, nous pouvons en déduire sa discrétisation.

VIII.3.5.4.1 Un exemple de discrétisation d'une mesure par morceaux dans le bas niveau

Nous allons maintenant donner un exemple afin de calculer la mesure par morceaux discrète $(\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(j))_{0\leq j\leq 7}$ définie entre les deux points $x_a = 0$ et $x_b = 4.0$ du maillage universel avec le pas de discrétisation $T_{\text{dM}} = 0.5$. La mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ présentée dans la Figure VIII.12 est constituée de 2 frontières $Fr_0 = 1.2$, $Fr_1 = 2.3$ et de 3 mesures de Dirac m_0, m_1 et m_2 localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et $Fr_1 + 1$, de masses M_0, M_1 et M_2.

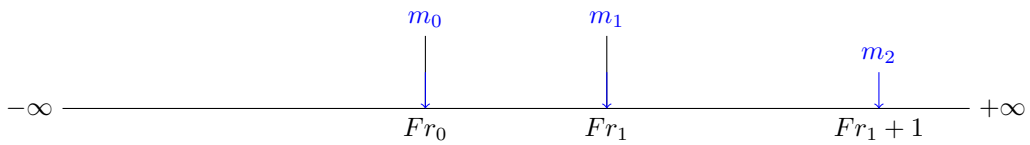

FIGURE VIII.12 – Mesure par morceaux $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}$ de bas niveau composée des mesures de Dirac m_0, m_1, m_2 localisées respectivement aux points Fr_0, Fr_1 et $Fr_1 + 1$, de masses M_0, M_1 et M_2.

Les 2 premières valeurs de la mesure par morceaux discrète $(\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(j))_{0\leq j\leq 7}$ sont définies par les 2 premières valeurs de la mesure m_0

$$\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(0) = m_0(0), \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(1) = m_0(1). \tag{VIII.109}$$

Puisque la localisation de la mesure de Dirac m_0 est supérieure ou égale au point 1 du maillage universel, nous obtenons :

$$\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(0) = \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(1) = 0. \tag{VIII.110}$$

Ensuite, nous déterminons la 2e et la 3e valeurs de la mesure par morceaux discrète $(\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(j))_{0\leq j\leq 7}$ définies par la 2e et la 3e valeurs de la mesure m_1

$$\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(2) = m_1(2), \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(3) = m_1(3). \tag{VIII.111}$$

Comme la localisation de la mesure de Dirac m_1 est supérieure ou égale au point 2 du maillage universel, nous obtenons :

$$\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(2) = \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(3) = 0. \tag{VIII.112}$$

Finalement, la 4e, la 5e, la 6e et la 7e valeurs de la mesure par morceaux discrète $(\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(j))_{0\leq j\leq 7}$ sont définies respectivement par la 4e, la 5e, la 6e et la 7e valeurs de la mesure m_2

$$\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(4) = m_2(4), \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(5) = m_2(5), \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(6) = m_2(6), \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(7) = m_2(7). \tag{VIII.113}$$

Comme la localisation de la mesure de Dirac m_2 est supérieure ou égale à 3 et strictement inférieure à 3.5, la valeur discrète $\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(6)$ définie entre les 2 points 3 et 3.5 est la masse M_2. Par conséquent, nous obtenons :

$$\tilde{m}_{\text{Piecewise}}(4) = \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(5) = \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(7) = 0, \tilde{m}_{\text{Piecewise}}(6) = M_2. \tag{VIII.114}$$

VIII.3.6 Mesure tronquée

Nous avons créé un objet de type mesure tronquée dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée sur un intervalle de temps dont l'emprunt est défini sur un intervalle fermé et borné ou sur un intervalle de type $]-\infty, a]$ ou sur un intervalle de type $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Nous allons donner une définition de la mesure tronquée dans la sous-sous-section suivante.

VIII.3.6.1 Définition

Nous appelons mesure tronquée, l'une des 3 méthodes de construction définie à partir :

• d'une subdivision (Fr_0, Fr_1) définie dans la relation (VIII.77) permettant de générer la mesure m_1 sur l'intervalle $[Fr_0, Fr_1]$, et de générer les deux mesures nulles m_0 et m_2 respectivement sur les deux intervalles $]-\infty, Fr_0]$ et $[Fr_1, +\infty[$. Plus formellement, la mesure $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ présentée dans la Figure VIII.13 est une mesure tronquée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\exists (Fr_0, Fr_1), \quad \text{vérifiant la relation (VIII.77) tels que : } \tilde{m}_{\text{Truncated}}\mid_{]-\infty, Fr_0]} = m_0, \\ &\tilde{m}_{\text{Truncated}}\mid_{[Fr_0, Fr_1]} = m_1, \tilde{m}_{\text{Truncated}}\mid_{[Fr_1, +\infty[} = m_2, \\ &\text{où } m_0,\ m_2 \text{ sont des mesures nulles et } m_1 \text{ est une mesure quelconque.} \end{aligned} \tag{VIII.115}$$

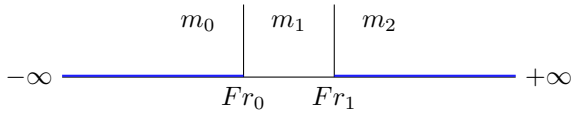

FIGURE VIII.13 – Mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ constituée des deux mesures nulles m_0 et m_2 et de la mesure m_1 et des deux frontières Fr_0 et Fr_1.

• d'un réel Fr_0 permettant de générer la mesure nulle m_0 sur l'intervalle $]-\infty, Fr_0]$, et de générer la mesure m_1 sur l'intervalle $[Fr_0, +\infty[$. Plus formellement, la mesure $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ présentée dans la Figure VIII.14 est une mesure tronquée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists Fr_0 \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } \tilde{m}_{\text{Truncated}}\,|_{]-\infty,Fr_0]} = m_0, \tilde{m}_{\text{Truncated}}\,|_{[Fr_0,+\infty[} = m_1,$$
$$\text{où } m_0 \text{ est une mesure nulle et } m_1 \text{ est une mesure quelconque.} \tag{VIII.116}$$

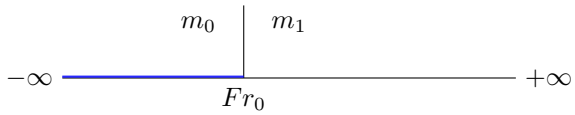

FIGURE VIII.14 – Mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ constituée de la mesure nulle m_0 et de la mesure m_1 et de la frontière Fr_0.

• d'un réel Fr_1 permettant de générer la mesure m_1 sur l'intervalle $]-\infty, Fr_1]$, et de générer la mesure nulle m_2 sur l'intervalle $[Fr_1, +\infty[$. Plus formellement, la mesure $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ présentée dans la Figure VIII.15 est une mesure tronquée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists Fr_1 \in \mathbb{R}, \text{ tel que : } \tilde{m}_{\text{Truncated}}\,|_{]-\infty,Fr_1]} = m_1, \tilde{m}_{\text{Truncated}}\,|_{[Fr_1,+\infty[} = m_2,$$
$$\text{où } m_1 \text{ est une mesure quelconque et } m_2 \text{ est une mesure nulle.} \tag{VIII.117}$$

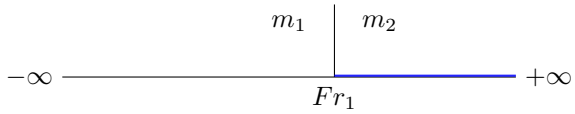

FIGURE VIII.15 – Mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ constituée de la mesure m_1 et de la mesure nulle m_2 et de la frontière Fr_1.

VIII.3.6.2 Intégration d'une mesure tronquée entre deux points

Nous voulons intégrer la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ définie dans les relations (VIII.115), (VIII.116) et (VIII.117) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b. Comme la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ est constituée d'une mesure nulle ou de deux mesures nulles, la méthode d'intégration utilisée consiste à éviter de calculer l'intégration de cette mesure nulle ou de ces deux mesures nulles.

• Nous distinguons 5 possibilités pour l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ définie dans la relation (VIII.115) :

— Lorsque $a < Fr_0 < Fr_1 < b$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure Fr_0 et la borne supérieure Fr_1

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_{Fr_0}^{Fr_1} m_1. \tag{VIII.118}$$

— Lorsque $Fr_1 \leq a$ ou $b \leq Fr_0$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne la valeur nulle

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = 0. \tag{VIII.119}$$

— Lorsque $Fr_0 \leq a < Fr_1 < b$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_1

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_a^{Fr_1} m_1. \tag{VIII.120}$$

— Lorsque $a < Fr_0 < b \leq Fr_1$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure Fr_0 et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_{Fr_0}^b m_1. \tag{VIII.121}$$

— Lorsque $Fr_0 \leq a < b \leq Fr_1$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_a^b m_1. \tag{VIII.122}$$

• Nous distinguons 3 possibilités pour l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ définie dans la relation (VIII.116) :

— Lorsque $a < Fr_0 < b$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure Fr_0 et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_{Fr_0}^b m_1. \tag{VIII.123}$$

— Lorsque $b \leq Fr_0$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne la valeur nulle

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = 0. \tag{VIII.124}$$

— Lorsque $Fr_0 \leq a$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_a^b m_1. \tag{VIII.125}$$

• Nous distinguons 3 possibilités pour l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ définie dans la relation (VIII.117) :

— Lorsque $a < Fr_1 < b$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_1

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_a^{Fr_1} m_1. \tag{VIII.126}$$

— Lorsque $b \leq Fr_1$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne l'intégration de la mesure m_1 entre la borne inférieure a et la borne supérieure b

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = \int_a^b m_1. \tag{VIII.127}$$

— Lorsque $Fr_1 \leq a$, l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ retourne la valeur nulle

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Truncated}} = 0. \tag{VIII.128}$$

VIII.3.6.3 Intégration d'une mesure tronquée dans le bas niveau

Nous voulons intégrer la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ définie dans l'une des relations (VIII.115), (VIII.116) et (VIII.117) entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'intégration T_{I}. Pour cela, nous précisons que nous avons défini les points d'intégration $(x_k)_{1 \leq k \leq N_I+1}$ dans la relation (VIII.107), où N_I est le nombre des sous-intervalles de $[a, b]$ défini dans la relation (VIII.106).

Pour intégrer la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$, nous intégrons la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ entre les 2 points x_k et x_{k+1} pour tout entier $k \in [\![1; N_I]\!]$. Pour cela, nous prenons $a = x_k$ et $b = x_{k+1}$ pour tout entier $k \in [\![1; N_I]\!]$ dans la sous-sous-section VIII.3.6.2.

VIII.3.6.4 Discrétisation d'une mesure tronquée

La discrétisation de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} est une intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ entre les 2 points du maillage universel x_a et x_b avec le pas T_{dM}. Comme nous avons décrit l'intégration de la mesure tronquée $\tilde{m}_{\text{Truncated}}$ de bas niveau dans la sous-sous-section VIII.3.6.3, nous pouvons en déduire sa discrétisation.

VIII.3.7 Mesure tabulée

Nous avons créé un objet de type mesure tabulée dans notre modélisation pour plusieurs raisons :

1. La 1re raison est pour traduire un tableau de valeurs en une mesure discrète.
2. La 2e raison est pour calculer la convolution de deux mesures de haut niveau. Pour cela, nous discrétisons ces deux mesures sur l'enveloppe convexe de leurs supports. Ensuite, nous complétons par des zéros ces deux mesures discrètes de façon qu'elles aient toutes les deux une puissance de 2. Ensuite, nous calculons leurs transformées de Fourier directes pour obtenir 2 vecteurs. Puis, nous calculons le produit deux à deux de ces deux vecteurs pour obtenir un vecteur S et nous appliquons la transformée de Fourier inverse au vecteur S pour obtenir un vecteur E. Finalement, nous construisons une mesure tabulée avec les valeurs du vecteur E. Cette mesure tabulée discrète définit les valeurs recherchées pour la convolution discrète. Ensuite, nous la remontons dans le haut niveau et nous l'intégrons pour calculer la valeur d'intégration de notre convolution dans le haut niveau. Nous précisons que nous avons défini la convolution discrète de deux mesures discrètes dans la sous-sous-section VIII.3.8.3.
3. La 3e raison est pour créer une mesure discrète dans le bas niveau et la remonter dans le haut niveau.

VIII.3.7.1 Définition

Nous voulons construire une mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ entre une valeur inférieure V_I et une valeur supérieure V_S qui est strictement supérieure à V_I avec un ensemble de n valeurs $(l_i)_{0\leq i\leq n-1}$. Pour cela, nous utilisons un pas de tabulation T_{tab} pour répartir les valeurs $(l_i)_{0\leq i\leq n-1}$ entre la valeur inférieure V_I et la valeur supérieure V_S, défini par

$$T_{\text{tab}} = \frac{V_S - V_I}{n}. \tag{VIII.129}$$

Nous appelons mesure tabulée, présentée dans la Figure VIII.16, une méthode de construction définie à partir d'une subdivision $(Fr_0, Fr_1, \ldots, Fr_n)$ définie dans la relation (VIII.77), donnée par des frontières

$$\forall i \in [\![0; n]\!], Fr_i = V_I + i \times T_{\text{tab}}, \tag{VIII.130}$$

permettant de générer la densité constante m_{j+1} de constante $\frac{l_j}{T_{\text{tab}}}$ sur chaque intervalle fermé $[Fr_j, Fr_{j+1}]$, j allant de 0 à $n-1$, et de générer les deux densités nulles m_0 et m_{n+1} respectivement sur les deux intervalles $]-\infty, Fr_0]$ et $[Fr_n, +\infty[$.

FIGURE VIII.16 – Mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ constituée des densités $(m_i)_{0\leq i\leq n+1}$ et des frontières $(Fr_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que m_0 et m_{n+1} sont deux densités nulles et telle que chaque densité m_{j+1} est une densité constante de constante $\frac{l_j}{T_{\text{tab}}}$ définie sur l'intervalle fermé $[Fr_j, Fr_{j+1}]$ pour tout entier j allant de 0 à $n-1$.

VIII.3.7.2 Intégration d'une mesure tabulée entre deux points

Nous voulons intégrer la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ définie dans la sous-sous-section VIII.3.7.1 entre une borne inférieure a et une borne supérieure b. Pour cela, nous utilisons des index p et q définis respectivement dans les relations (VIII.83) et (VIII.84). Nous précisons que nous utilisons ces index pour localiser les valeurs tabulées exprimant l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$. Comme la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ est constituée des deux densités nulles m_0 et m_{n+1} et de n densités constantes $(m_i)_{1\leq i\leq n}$, nous distinguons 5 possibilités pour calculer explicitement cette intégration

1. Lorsque $a < V_I < V_S < b$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ retourne la valeur $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} l_i$

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} l_i. \tag{VIII.131}$$

2. Lorsque $V_S \leq a$ ou $b \leq V_I$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ retourne la valeur nulle

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = 0. \tag{VIII.132}$$

3. Lorsque $V_I \leq a < V_S < b$, il y a 2 possibilités :
   (a) Lorsque $Fr_{n-1} \leq a < V_S$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ retourne la valeur $(V_S - a) \times \frac{l_{n-1}}{T_{\text{tab}}}$

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = (V_S - a) \times \frac{l_{n-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.133}$$

   (b) Lorsque $V_I \leq a < Fr_{n-1}$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ est la somme de 2 quantités. La 1re quantité est l'intégration de la densité constante m_p entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_p qui retourne la valeur

$$(Fr_p - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.134}$$

   La 2e quantité est la somme d'intégration de chaque densité m_{i+1} entre la borne inférieure Fr_i et la borne supérieure Fr_{i+1} pour i allant de p à $n-1$, qui retourne la valeur

$$\sum_{i=p}^{i=n-1} l_i. \tag{VIII.135}$$

   Autrement dit

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = (Fr_p - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}} + \sum_{i=p}^{i=n-1} l_i. \tag{VIII.136}$$

4. Lorsque $a < V_I < b \leq V_S$, il y a 2 possibilités :
   (a) Lorsque $V_I < b \leq Fr_1$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ retourne la valeur $(b - V_I) \times \frac{l_0}{T_{\text{tab}}}$

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = (b - V_I) \times \frac{l_0}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.137}$$

   (b) Lorsque $Fr_1 < b \leq V_S$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ est la somme de 2 quantités. La 1re quantité est la somme d'intégration de chaque densité m_{i+1} entre la borne inférieure Fr_i et la borne supérieure Fr_{i+1} pour i allant de 0 à $q-2$, qui retourne la valeur

$$\sum_{i=0}^{i=q-2} l_i. \tag{VIII.138}$$

La 2e quantité est l'intégration de la densité constante m_q entre la borne inférieure Fr_{q-1} et la borne supérieure b qui retourne la valeur

$$(b - Fr_{q-1}) \times \frac{l_{q-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.139}$$

Autrement dit

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = \sum_{i=0}^{i=q-2} l_i + (b - Fr_{q-1}) \times \frac{l_{q-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.140}$$

5. Lorsque $V_I \leq a < b \leq V_S$, il y a 3 possibilités :

   (a) Lorsque $p = q$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ retourne la valeur $(b - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}}$. En effet, la situation $p = q$ exprime que les bornes d'intégration a et b se sont comprises entre 2 frontières successives.

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = (b - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.141}$$

   (b) Lorsque $p = q - 1$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ est la somme de 2 quantités. En effet, la situation $p = q - 1$ exprime qu'il existe une seule frontière qui se situe entre la borne inférieure a et la borne supérieure b. La 1re quantité est l'intégration de la densité m_p entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_p qui retourne la valeur

$$(Fr_p - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.142}$$

   La 2e quantité est l'intégration de la densité m_q entre la borne inférieure Fr_p et la borne supérieure b qui retourne la valeur

$$(b - Fr_p) \times \frac{l_p}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.143}$$

   Autrement dit

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = (Fr_p - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}} + (b - Fr_p) \times \frac{l_p}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.144}$$

   (c) Lorsque $p \leq q - 2$, l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ est la somme de 3 quantités. En effet, la situation $p \leq q - 2$ exprime qu'il y a au moins une densité qui se situe entre les deux densités m_p et m_q. La 1re quantité est l'intégration de la densité m_p entre la borne inférieure a et la borne supérieure Fr_p qui retourne la valeur

$$(Fr_p - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.145}$$

   La 2e quantité est la somme d'intégration de chaque densité m_{i+1} entre la borne inférieure Fr_i et la borne supérieure Fr_{i+1} pour i allant de p à $q - 2$, qui retourne la valeur

$$\sum_{i=p}^{i=q-2} l_i. \tag{VIII.146}$$

La 3e quantité est l'intégration de la densité m_q entre la borne inférieure Fr_{q-1} et la borne supérieure b qui retourne la valeur

$$(b - Fr_{q-1}) \times \frac{l_{q-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.147}$$

Autrement dit

$$\int_a^b \tilde{m}_{\text{Tabulated}} = (Fr_p - a) \times \frac{l_{p-1}}{T_{\text{tab}}} + \sum_{i=p}^{i=q-2} l_i + (b - Fr_{q-1}) \times \frac{l_{q-1}}{T_{\text{tab}}}. \tag{VIII.148}$$

VIII.3.7.3 Intégration d'une mesure tabulée dans le bas niveau

Comme nous avons justifié dans la sous-sous-section VIII.3.6.3 l'intégration d'une mesure tronquée de bas niveau, nous utilisons la même justification pour intégrer une mesure tabulée de bas niveau basée sur son intégration entre 2 points (voir la sous-sous-section VIII.3.7.2).

VIII.3.7.4 Discrétisation d'une mesure tabulée

La discrétisation de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} est une intégration de la mesure $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ entre les 2 points du maillage universel x_a et x_b avec le pas T_{dM}. Comme nous avons justifié l'intégration de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ de bas niveau dans la sous-sous-section VIII.3.7.3, nous pouvons en déduire sa discrétisation.

VIII.3.8 Produit de convolution de deux mesures

Nous avons créé la mesure convolée dans notre modélisation pour calculer une mesure de remboursement $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}$ en fonction d'une mesure d'emprunt $\tilde{\kappa}_E$ pour une mesure de pattern de remboursement $\tilde{\gamma}$ donnée. Il existe plusieurs méthodes de calcul rapide de produit de convolution. Nous nous référons aux documents [1], [2], [3], [4], qui montrent les méthodes utilisées pour calculer ce produit. Ces documents montrent la complexité de ces méthodes, qui se mesure par deux grandeurs : le nombre d'opérations à effectuer et la quantité de mémoire nécessaire. Par exemple, on estime dans [2] les erreurs numériques de la transformation de Fourier discrète et rapide pour calculer le produit de convolution. L'article [4] décrit le calcul de la convolution de deux chaînes de texte de taille variable au moyen de la transformée de Fourier rapide **FFT**.

Nous allons maintenant justifier pourquoi nous avons calculé le produit de convolution de deux mesures au moyen de la transformée de Fourier rapide **FFT**. En effet, la transformée de Fourier rapide **FFT** est l'un des algorithmes les plus efficaces qui implémente la transformée de Fourier discrète **DFT**. Si N désigne la taille d'un vecteur, un calcul de transformée de Fourier discrète est un calcul de produit d'une matrice par un vecteur. Il nécessite N^2 multiplications et $N \times (N-1)$ additions de nombres complexes. Par conséquent, le nombre total d'opération est $N^2 + N \times (N-1)$, qui

est équivalent à $2N^2$ quand N est grand. La transformée de Fourier rapide réduit considérablement le nombre d'opérations à effectuer : au lieu d'effectuer N^2 opérations, il suffira d'en faire $N \log_2(N)$.

La transformée de Fourier rapide **FFT** est simplement une **DFT** calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations, et en particulier le nombre de multiplications à effectuer. Il existe différents algorithmes de **FFT**. Le plus connu est celui de Cooley-Tukey.

La transformée de Fourier rapide **FFT** d'un vecteur $(x(0), x(1), x(2), \ldots, x(N-1))$ de N valeurs consiste à le couper en deux paquets de façon répétée. Ce qui explique que, pour appliquer la méthode **FFT**, nous devons choisir N comme une puissance de 2. Un paquet formé des données d'indices pairs $(x(0), x(2), \ldots, x(N-2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(x(1), x(3), \ldots, x(N-1))$. Puis sur chaque paquet on effectue une **DFT** d'ordre $\frac{N}{2}$ et on combine les résultats de ces 2 **DFT** pour obtenir celle d'ordre N. Si nous définissons $T(N)$ le temps de calcul pour évaluer un vecteur de taille N par la méthode **FFT**

$$T(N) = 2T(N/2) + N, \tag{VIII.149}$$

alors, $T(N)$ est d'ordre $N \log_2(N)$.

VIII.3.8.1 Définition

Le produit de convolution de deux mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ est une mesure notée $\tilde{f} \star \tilde{g}$. Si, $\tilde{f}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction f, i.e $\tilde{f} = f(t)dt$, et $\tilde{g}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction g, i.e $\tilde{g} = g(t)dt$, alors la convolution $\tilde{f} \star \tilde{g}$ est une mesure à densité dont la densité est une fonction $f \star g$, i.e $\tilde{f} \star \tilde{g} = (f \star g)(t)dt$, où

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\, dy. \tag{VIII.150}$$

VIII.3.8.2 Calcul de produit de convolution avec la FFT

Comme nous nous somme posés la question qui consiste à savoir comment calculer le produit de convolution de deux mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ au moyen de la méthode **FFT**, nous avons exploré deux méthodes pour le calculer. Par conséquent, nous exposons ci-dessous ces deux méthodes. La première méthode est le calcul de la convolution par la transformée de Fourier rapide **FFT** directement sans changement de coordonnées. Comme nous étions à la recherche d'une méthode pour calculer efficacement ce produit, nous avons exploré la deuxième méthode qui consiste à faire un changement de coordonnées sur l'enveloppe convexe du support des deux mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ pour se ramener à l'intervalle $[0, 1]$, puis à effectuer la transformée de Fourier rapide **FFT** sur l'intervalle $[0, 1]$.

VIII.3.8.2.1 Méthode N° 1 : produit de convolution en utilisant directement la transformée de Fourier rapide FFT

Dans [5] page 184, on montre que, pour deux mesures finies $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, la transformée de Fourier de produit de convolution de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ est le produit de la transformée de Fourier de la mesure $\tilde{f}$ par la transformée de Fourier de la mesure $\tilde{g}$:

$$\mathcal{F}(\tilde{f} \star \tilde{g}) = \mathcal{F}(\tilde{f}) \times \mathcal{F}(\tilde{g}), \tag{VIII.151}$$

où $\mathcal{F}(\tilde{f})$ désigne la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ et $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})$ désigne la transformée de Fourier inverse de $\tilde{f}$. La relation (VIII.151) exprime que l'opérateur de convolution dans le domaine temporel

correspond à l'opérateur de multiplication dans le domaine de l'espace de Fourier. De plus, si la transformée de Fourier inverse de la quantité $\mathcal{F}(\tilde{f}) \times \mathcal{F}(\tilde{g})$ existe, le produit de convolution $\tilde{f} \star \tilde{g}$ dans le domaine temporel peut s'exprimer à partir de la transformée de Fourier directe et inverse

$$\tilde{f} \star \tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f}) \times \mathcal{F}(\tilde{g})). \tag{VIII.152}$$

VIII.3.8.2.2 Méthode N° 2 : produit de convolution avec changement de coordonnées sur l'enveloppe convexe du support

Nous supposons que les enveloppes convexes du support des mesures à densité $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, i.e $\tilde{f} = f(t)dt$, $\tilde{g} = g(t)dt$, sont respectivement $[a, b]$ et $[c, d]$, alors, la mesure à densité $\tilde{f} \star \tilde{g}$ possède une enveloppe convexe du support contenu dans l'intervalle $[a + c, b + d]$

$$\mathrm{EC}(\tilde{f}) = [a, b], \mathrm{EC}(\tilde{g}) = [c, d] \Longrightarrow \mathrm{EC}(\tilde{f} \star \tilde{g}) \subset [a + c, b + d]. \tag{VIII.153}$$

Nous voulons exprimer le produit de convolution $f \star g$ en fonction du produit de convolution de 2 fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour cela, nous définissons la fonction f_T par la fonction translatée de f

$$f_T(y) = f(y - c + a). \tag{VIII.154}$$

La définition (VIII.154) de la fonction f_T nous permet d'établir que l'enveloppe convexe du support de la fonction f_T est l'intervalle $[c, e]$, où $e = c + (b - a)$. Nous voulons maintenant exprimer le produit de convolution $f \star g$ en fonction du produit de convolution $f_T \star g$:

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)\ dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y + c - a)g(x - y)\ dy. \end{aligned} \tag{VIII.155}$$

En faisant un changement de variable $Y = y + c - a$ dans la relation (VIII.155), nous obtenons

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(Y)g(x - Y + c - a)\ dY \\ &= f_T \star g(x + c - a). \end{aligned} \tag{VIII.156}$$

Nous définissons les fonctions $f^{0,1}$ et $g^{0,1}$ par les fonctions contractées de f_T et g sur l'intervalle $[0, 1]$

$$f^{0,1}(x) = f_T((\max(e, d) - c)x + c), g^{0,1}(x) = g((\max(e, d) - c)x + c). \tag{VIII.157}$$

Nous allons exprimer le produit de convolution $f_T \star g$ en fonction du produit de convolution $f^{0,1} \star g^{0,1}$

$$\begin{aligned} f_T \star g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x - y)g(y)\ dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{0,1}\left(\frac{x - y - c}{\max(e, d) - c}\right) g^{0,1}\left(\frac{y - c}{\max(e, d) - c}\right)\ dy. \end{aligned} \tag{VIII.158}$$

En faisant un changement de variable $z = \frac{y-c}{\max(e,d)-c}$ dans la relation (VIII.158), nous obtenons

$$\begin{aligned} f_T \star g(x) &= (\max(e,d)-c) \times \int_{-\infty}^{+\infty} f^{0,1}\left(\frac{x-2c}{\max(e,d)-c} - z\right) g^{0,1}(z)\, dz \\ &= (\max(e,d)-c) \times f^{0,1} \star g^{0,1}\left(\frac{x-2c}{\max(e,d)-c}\right). \end{aligned} \tag{VIII.159}$$

Nous utilisons les relations (VIII.156) et (VIII.159) pour déterminer le produit de convolution $f \star g$ en fonction du produit de convolution $f^{0,1} \star g^{0,1}$

$$f \star g(x) = (\max(e,d)-c) \times f^{0,1} \star g^{0,1}\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right). \tag{VIII.160}$$

Nous venons de montrer que la relation (VIII.160) exprimant la convolution de deux mesures est vraie pour deux mesures à densité quelconques.

Nous allons montrer que la relation (VIII.160) est vraie pour la convolution d'une mesure à densité f et une mesure de Dirac δ_p au point p. À partir de la relation (VIII.160), nous avons

$$f \star g_\epsilon(x) = (\max(e,d)-c) \times f^{0,1} \star g_\epsilon^{0,1}\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right). \tag{VIII.161}$$

Comme la convolution de la mesure à densité f et la mesure à densité g_ϵ converge vers la mesure convolée $f \star \delta_p$ lorsque ϵ tend vers 0, et puisque la convolution de la mesure à densité $f^{0,1}$ et la mesure à densité $g_\epsilon^{0,1}$ converge vers la mesure convolée $f^{0,1} \star \delta_p^{0,1}$ lorsque ϵ tends vers 0

$$\lim_{\epsilon \to 0} f \star g_\epsilon = f \star \delta_p, \quad \lim_{\epsilon \to 0} f^{0,1} \star g_\epsilon^{0,1} = f^{0,1} \star \delta_p^{0,1}, \tag{VIII.162}$$

nous obtenons en utilisant la relation (VIII.161), la relation suivante :

$$f \star \delta_p(x) = (\max(e,d)-c) \times f^{0,1} \star \delta_p^{0,1}\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right). \tag{VIII.163}$$

Nous allons maintenant montrer que la relation (VIII.160) est vraie pour la convolution de 2 mesures de Dirac δ_q et δ_p localisées aux points q et p. Si les fonctions f_ϵ et g_ϵ représentent respectivement l'approximation des 2 mesures de Dirac δ_q et δ_p, les 2 mesures convolées $f_\epsilon \star g_\epsilon$ et $f_\epsilon^{0,1} \star g_\epsilon^{0,1}$ convergent respectivement aux mesures convolées $\delta_q \star \delta_p$ et $\delta_q^{0,1} \star \delta_p^{0,1}$ lorsque ϵ tends vers 0. De la définition (VIII.160), nous avons

$$f_\epsilon \star g_\epsilon(x) = (\max(e,d)-c) \times f_\epsilon^{0,1} \star g_\epsilon^{0,1}\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right). \tag{VIII.164}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, nous obtenons

$$\delta_q \star \delta_p(x) = (\max(e,d)-c) \times \delta_q^{0,1} \star \delta_p^{0,1}\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right). \tag{VIII.165}$$

Nous concluons que le produit de convolution $f \star g$ des 2 mesures quelconques f et g s'écrit en fonction du produit de convolution $f^{0,1} \star g^{0,1}$

$$f \star g(x) = (\max(e,d) - c) \times f^{0,1} \star g^{0,1}\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right). \tag{VIII.166}$$

Ensuite, nous utilisons la relation (VIII.152) pour établir que

$$f \star g(x) = (\max(e,d) - c) \times \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f^{0,1})\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right) \times \mathcal{F}(g^{0,1})\left(\frac{x-c-a}{\max(e,d)-c}\right)\right). \tag{VIII.167}$$

VIII.3.8.2.3 Comparaison des deux méthodes

Nous utilisons la relation (VIII.152) pour calculer la convolution de deux mesures finies $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ à partir de la transformée de Fourier rapide **FFT**. En effet, nous multiplions les transformées de Fourier respectives des deux mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ pour calculer le produit $\mathcal{F}(\tilde{f}) \times \mathcal{F}(\tilde{g})$ et nous recherchons la transformée de Fourier inverse de ce produit. Par conséquent, la méthode N° 1 ne nécessite pas un changement de coordonnées. Ce qui explique que le calcul de produit de convolution $\tilde{f} \star \tilde{g}$ avec la transformée de Fourier rapide **FFT** est une méthode qui est plus efficace que la méthode N° 2 qui consiste à faire un changement de coordonnées sur l'intervalle $[0,1]$ définie dans la relation (VIII.166) puis à effectuer la transformée de Fourier rapide **FFT** afin d'obtenir la relation (VIII.167). C'est pour cette raison que nous choisissons la méthode N° 1 pour la suite.

VIII.3.8.3 La convolution discrète de deux mesures discrètes

La convolution d'une mesure discrète $(\tilde{f}(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_a^b}$ définie avec un pas T_{dM} sur l'enveloppe convexe de son support

$$\mathrm{EC}(\tilde{f}) = [x_{a_1}, x_{b_1}], \tag{VIII.168}$$

et d'une mesure discrète $(\tilde{g}(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_c^d}$ définie avec le pas T_{dM} sur l'enveloppe convexe de son support

$$\mathrm{EC}(\tilde{g}) = [x_{c_1}, x_{d_1}], \tag{VIII.169}$$

est une mesure discrète $(\tilde{f} \star \tilde{g}(n_e + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_e^f}$ définie entre 2 points donnés x_e et x_f du maillage universel avec le pas T_{dM}.

Nous allons maintenant expliquer comment nous déterminons les valeurs de la convolution discrète $(\tilde{f} \star \tilde{g}(n_e + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_e^f}$ par la méthode de transformée de Fourier rapide **FFT**. Nous avons expliqué dans le début de cette sous-section que la méthode **FFT** s'applique sur un vecteur de valeurs étant une puissance de 2. Pour cette raison, nous complétons par des zéros les valeurs $(\tilde{f}(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_a^b}$ et $(\tilde{g}(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_c^d}$ de façon qu'elles aient toutes les deux N valeurs, où N est une puissance de 2 telle qu'elle est la plus petite valeur vérifiant $N \geq \mathcal{N}_a^b + \mathcal{N}_c^d$. Appelons $(\tilde{f}^1(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$ et $(\tilde{g}^1(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$ ces valeurs prolongées par des zéros. Ensuite, nous calculons la **FFT** directe des 2 vecteurs $(\tilde{f}^1(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$ et $(\tilde{g}^1(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$ et nous les appelons $(x(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$ et $(y(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$. Ensuite, nous calculons le vecteur $z(j-1)_{1 \leq j \leq N}$ défini par le produit 2 à 2 du vecteur $(x(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$ par le vecteur $(y(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq N}$:

$$\forall j \in [\![1; N]\!], z(j-1) = x(n_a + j - 1) \times y(n_c + j - 1). \tag{VIII.170}$$

Nous calculons le vecteur $(h(j-1))_{1\leq j\leq N}$ défini par la **FFT** inverse du vecteur $(z(j-1))_{1\leq j\leq N}$. Finalement, nous construisons une mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ entre la valeur inférieure $x_{a_1}+x_{c_1}$ et la valeur supérieure $x_{b_1}+x_{d_1}$ avec l'ensemble des premières valeurs $\mathcal{N}_a^b+\mathcal{N}_c^d$ de h. Par conséquent, la discrétisation de la mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ entre la borne inférieure x_e et la borne supérieure x_f avec le pas T_{dM} est un ensemble de $\mathcal{N}_e^f$ valeurs qui sont les valeurs recherchées pour la convolution discrète $(\tilde{f}\star\tilde{g}(n_e+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_e^f}$.

VIII.3.8.4 La convolution discrète de deux mesures quelconques

Pour calculer le produit de convolution de deux mesures quelconques à support compact, il est nécessaire de déterminer l'enveloppe convexe de leurs supports. Ce qui explique pourquoi il existe dans notre modélisation une méthode permettant de déterminer l'enveloppe convexe du support d'une mesure quelconque μ.

Lorsque cette mesure μ est une mesure discrète notée $(\tilde{l}(n_\alpha+j-1))_{1\leq j\leq n_\beta}$ définie sur $\mathbb{R}$, cette méthode consiste à déterminer les 2 points x et y de $\mathbb{R}$ définis comme suit. Le point x est associé à la valeur minimale où la mesure discrète $(\tilde{l}(n_\alpha+j-1))_{1\leq j\leq n_\beta}$ ne s'annule pas, et le point y est associé à la valeur maximale où la mesure discrète $(\tilde{l}(n_\alpha+j-1))_{1\leq j\leq n_\beta}$ ne s'annule pas. Par conséquent, l'enveloppe convexe $\text{EC}(\tilde{l}(n_\alpha+j-1))_{1\leq j\leq n_\beta})$ de la mesure discrète $(\tilde{l}(n_\alpha+j-1))_{1\leq j\leq n_\beta}$ est l'intervalle $[x,y]$.

Lorsque cette mesure μ est une mesure de Dirac $M\delta_p$ définie au point p, de masse M, nous avons considéré que l'enveloppe convexe de son support est définie par

$$\text{EC}(M\delta_p)=[n_p\times T_{\text{dM}},(n_p+1)\times T_{\text{dM}}],\ \text{avec}\ n_p=\left\lfloor\frac{p}{T_{\text{dM}}}\right\rfloor, \tag{VIII.171}$$

où T_{dM} est le pas de discrétisation.

Nous voulons calculer le produit de convolution de deux mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. Pour cela, nous distinguons 3 possibilités :

- Lorsque l'une des 2 mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ est une mesure discrète (par exemple $\tilde{f}$) et l'autre mesure est une mesure non discrète qui est la mesure $\tilde{g}$, nous discrétisons la mesure $\tilde{g}$ sur l'enveloppe convexe de son support $\text{EC}(\tilde{g})$. Ensuite, nous allons nous baser sur la sous-sous-section VIII.3.8.3 pour calculer le produit de convolution discret de ces deux mesures discrètes.
- Lorsque aucune de ces 2 mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ n'est une mesure discrète, nous discrétisons les 2 mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ respectivement sur l'enveloppe convexe de leurs supports $\text{EC}(\tilde{f})$ et $\text{EC}(\tilde{g})$. Ensuite, nous allons nous baser sur la sous-sous-section VIII.3.8.3 pour calculer le produit de convolution discret de ces deux mesures discrètes.
- Lorsque les 2 mesures $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des mesures discrètes, nous nous référons à la sous-sous-section VIII.3.8.3 pour calculer le produit de convolution discret de ces deux mesures discrètes.

VIII.3.8.4.1 Un exemple de convolution discrète de deux mesures de Dirac non discrètes

Nous définissons la mesure $\tilde{f}$ par la mesure de Dirac au point $p_f=12.6$, de masse M_f et la mesure $\tilde{g}$ par la mesure de Dirac au point $p_g=2.5$, de masse M_g.

Nous voulons calculer le produit de convolution discret de la mesure $\tilde{f}$ et la mesure $\tilde{g}$ entre les deux points $x_e=0$ et $x_f=36$ du maillage universel avec le pas de discrétisation $T_{\text{dM}}=6$. Pour

cela, nous discrétisons la mesure $\tilde{f}$ sur l'enveloppe convexe de son support $[12, 18]$ pour définir la mesure discrète $\tilde{f}(2) = M_f$ et nous discrétisons la mesure $\tilde{g}$ sur l'enveloppe convexe de son support $[0, 6]$ pour définir la mesure discrète $\tilde{g}(0) = M_g$.

Pour déterminer la convolution discrète $(\tilde{f} \star \tilde{g}(j))_{0 \leq j \leq 5}$, nous complétons par un zéro les deux valeurs $\tilde{f}(2)$ et $\tilde{g}(0)$ pour obtenir les valeurs prolongées $(\tilde{f}^1(j))_{2 \leq j \leq 3}$ et $(\tilde{g}^1(j))_{0 \leq j \leq 1}$ définies par

$$\forall j \in [\![2; 3]\!], \tilde{f}^1(j) = \begin{cases} M_f & \text{si } j = 2, \\ 0 & \text{si } j = 3. \end{cases} \tag{VIII.172}$$

$$\forall j \in [\![0; 1]\!], \tilde{g}^1(j) = \begin{cases} M_g & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j = 1. \end{cases} \tag{VIII.173}$$

Nous calculons la transformée de Fourier rapide **FFT** des vecteurs $(\tilde{f}^1(j))_{2 \leq j \leq 3}$ et $(\tilde{g}^1(j))_{0 \leq j \leq 1}$ pour obtenir les 2 vecteurs résultats $(x(j))_{2 \leq j \leq 3}$ et $(y(j))_{0 \leq j \leq 1}$ définis par

$$\forall j \in [\![2; 3]\!], x(j) = M_f, y(j-2) = M_g. \tag{VIII.174}$$

Ensuite, nous calculons le vecteur $(z(j))_{0 \leq j \leq 1}$ défini par le produit 2 à 2 du vecteur $(x(j))_{2 \leq j \leq 3}$ par le vecteur $(y(j))_{0 \leq j \leq 1}$

$$\forall j \in [\![0; 1]\!], z(j) = M_f \times M_g. \tag{VIII.175}$$

Ensuite, nous calculons le vecteur $(h(j))_{0 \leq j \leq 1}$ par la transformée de Fourier inverse du vecteur $(z(j))_{0 \leq j \leq 1}$ défini par

$$\forall j \in [\![0; 1]\!], h(j) = \begin{cases} M_f \times M_g & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j = 1. \end{cases} \tag{VIII.176}$$

Ensuite, nous construisons une mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ entre la valeur inférieure 12 et la valeur supérieure 24 avec les 2 valeurs de h définies dans la relation (VIII.176). Cette mesure tabulée $\tilde{m}_{\text{Tabulated}}$ est constituée de 3 densités. La 1re densité est une densité nulle définie sur l'intervalle $]-\infty, 12]$, la 2e densité est une densité constante de constante $\dfrac{M_f \times M_g}{6}$ définie sur l'intervalle $[12, 18]$ et la 3e densité est une densité nulle définie sur l'intervalle $[18, +\infty[$.

Par conséquent, les valeurs de la convolution discrète $(\tilde{f} \star \tilde{g}(j))_{0 \leq j \leq 5}$ sont les valeurs de la mesure tabulée discrète $(\tilde{m}_{\text{Tabulated}}(j))_{0 \leq j \leq 5}$ définie entre la borne inférieure x_e et la borne supérieure x_f avec le pas T_{dM}. Les 6 valeurs de la mesure discrète $(\tilde{f} \star \tilde{g}(j))_{0 \leq j \leq 5}$ sont définies par

$$\forall j \in [\![0; 5]\!], \tilde{f} \star \tilde{g}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 2, \\ M_f \times M_g & \text{si } j = 2. \end{cases} \tag{VIII.177}$$

Nous pouvons vérifier le résultat défini dans la relation (VIII.177) par la justification suivante. Comme le produit de convolution des deux mesures de Dirac $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ est une mesure de Dirac $\tilde{l}$ localisée au point $p_f + p_g = 15.1$, de masse $M_f \times M_g$, la discrétisation de cette mesure de Dirac $\tilde{l}$ entre la borne inférieure x_e et la borne supérieure x_f avec le pas T_{dM} fournit les mêmes 6 valeurs définies dans la relation (VIII.177).

VIII.3.8.5 Intégration d'une convolution discrète

Nous voulons intégrer la convolution discrète $(\tilde{f} \star \tilde{g})(n_e + j - 1)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_e^f}$ définie dans la sous-sous-section VIII.3.8.3 d'une mesure discrète $(\tilde{f}(n_a + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_a^b}$ et d'une mesure discrète $(\tilde{g}(n_c + j - 1))_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_c^d}$ entre une borne inférieure e et une borne supérieure f. Cette intégration est la somme de toutes les valeurs $\tilde{f} \star \tilde{g}(n_e + j - 1)_{1 \leq j \leq \mathcal{N}_e^f}$

$$\sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_e^f} \tilde{f} \star \tilde{g}(n_e + j - 1).$$

VIII.4 Complément sur les mesures

L'objectif de cette section est de présenter une zoologie de certaines mesures afin de les calculer sans aucune discrétisation. Nous continuons notre objectif en définissant une mesure translatée pour translater une mesure simple ou composée.

VIII.4.1 Zoologie de certaines mesures

Il est possible de calculer certains modèles de SOFI sans aucune discrétisation. Certains opérateurs qui agissent sur des mesures comme la convolution, produit, somme, division et soustraction peuvent être déterminés sans discrétisation. L'une des deux solutions proposées consiste à traiter les cas particuliers, ces points sont détaillés comme suit :

La méthode qui calculera la convolution ne prendra comme paramètres que des mesures à supports compacts. (il existe une méthode pour déterminer si une mesure est à support compact).

Une méthode basée sur la discrétisation des mesures impliquées, qu'on appellera : convolution discrète, existe dans le bas niveau. Cette méthode peut être utilisée par la convolution de haut niveau pour calculer le produit de convolution de deux mesures à supports compacts, quelles qu'elles soient.

Dans certains cas particuliers, la convolution peut se faire de façon simple. Pour ces cas, nous proposons de ne pas faire appel à la convolution discrète. Ces cas sont les suivants :

1. Une des deux mesures est une mesure de Dirac.
2. Une des deux mesures est une mesure par morceaux constituée uniquement de mesures de Dirac.
3. Les deux mesures sont des mesures tronquées, chacune étant la troncature d'une mesure constante.
4. Les deux mesures sont des mesures par morceaux, chacune constituée de trois morceaux : le premier morceau est la mesure nulle, le deuxième est une mesure constante, le troisième est la mesure nulle.
5. Les deux mesures sont des mesures par morceaux, chacune constituée de trois morceaux : le premier morceau est la mesure constante avec la valeur de 0, le deuxième est une mesure constante, le troisième est la mesure constante avec la valeur 0.
6. Les deux mesures sont des mesures par morceaux
    - dont le premier et le dernier morceau sont
        - des mesures de Dirac ou
        - des mesures nulles ou
        - des mesures constantes avec la valeur 0
    - dont chaque autre morceau est

- une mesure de Dirac ou
- une mesure constante ou
- la mesure nulle.

7. Les deux mesures sont des mesures par morceaux
    - dont le premier et le dernier morceau sont
        - des mesures de Dirac ou
        - des mesures nulles ou
        - des mesures constantes avec la valeur 0 ou
        - une mesure du type décrit dans 6 :
            - dont chaque autre morceau est
            - une mesure de Dirac ou
            - une mesure constante ou
            - la mesure nulle
            - une mesure par morceaux dont chaque morceau est
                - une mesure de Dirac ou
                - une mesure constante ou
                - la mesure nulle.
8. Une version récursive de 7.

Nous précions que les points 3, 4 et 5 correspondent à la même réalité mathématique et demandent une implémentation différente.

Concernant le choix de l'implémentation, nous proposons que la détermination entre effectuer le calcul de la convolution basée sur la convolution discrète et effectuer un calcul ad hoc pour chaque cas particulier listé ci-dessus se fasse dans la méthode "evaluate" (une méthode d'évaluation des mesures).

Contrairement à la mesure convolution, le produit de haut niveau prend comme paramètres des mesures sans restrictions sur ses supports.

Actuellement, le produit fait appel au produit du bas niveau qui discrétise les mesures impliquées. Il fonctionne pour toutes les mesures.

Dans certains cas particuliers, ce produit peut se réaliser de façon plus simple. Nous proposons alors une évolution du produit qui prenne en considération cette évolution. Pour ces cas, nous proposons de ne pas faire appel au produit discret :

1. Les deux mesures ont des supports dont l'intersection est vide.
2. Une des deux mesures est la mesure nulle, alors le produit sera une mesure nulle.
3. Une des deux mesures est une mesure de Dirac, le produit sera une mesure de Dirac.
4. Une des deux mesures est une mesure constante.
5. Une des deux mesures est une mesure par morceaux constituée uniquement des mesures constantes. Le produit de cette mesure par morceaux par une mesure quelconque est une mesure par morceaux dont chaque morceau est le produit de la constante par la mesure quelconque.
6. Les deux mesures sont des mesures affines, le produit sera une mesure quadratique.
7. Une des deux mesures est une mesure affine et l'autre mesure est une mesure quadratique. Le produit est une mesure polynôme.

8. Les deux mesures sont des mesures quadratiques. Le produit sera une mesure polynôme.
9. Les deux mesures sont des mesures polynômes. Le produit sera une mesure polynôme.
10. Une des deux mesures est une mesure affine et l'autre mesure est une mesure polynôme. Le produit est une mesure polynôme.
11. Une des deux mesures est une mesure quadratique et l'autre mesure est une mesure polynôme. Le produit est une mesure polynôme.
12. Les deux mesures sont des mesures gaussiennes. Le produit sera une mesure gaussienne.
13. Les deux mesures sont des mesures par morceaux, dont chacune est constituée de trois morceaux : le premier morceau est la mesure nulle, le deuxième est une mesure de type de 1 à 11, le troisième est la mesure nulle.
14. Les deux mesures sont des mesures trigonométriques :
    - les deux mesures sont des mesures sinus.
    - les deux mesures sont des mesures cosinus.
    - une des deux mesures est une mesure sinus, tandis que l'autre mesure est une mesure cosinus.
15. La généralisation du produit de plusieurs mesures est fait de façon récursive, permettant de calculer le produit pour n'importe quelle collection des mesures.

VIII.4.2 Mesure translatée

Si μ est une mesure définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, la translatée de la mesure μ par une valeur $v \in \mathbb{R}$ est définie par une nouvelle mesure ν vérifiant pour tout ensemble de parties A de $\mathcal{E}$

$$\nu(A) = \mu(A + v). \tag{VIII.178}$$

VIII.4.2.1 Intégration d'une mesure translatée dans le haut niveau

L'intégration de la mesure translatée ν entre une borne inférieure a et une borne supérieure b retourne l'intégration de la mesure μ entre la borne inférieure $a - v$ et la borne supérieure $b - v$

$$\int_a^b \nu = \int_{a-v}^{b-v} \mu. \tag{VIII.179}$$

VIII.4.2.2 Intégration d'une mesure translatée dans le bas niveau

La discrétisation de la mesure translatée ν entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM} retourne la discrétisation de la mesure μ entre la borne inférieure $a - v$ et la borne supérieure $b - v$ avec le pas de discrétisation T_{dM}.

VIII.5 Champs

L'objectif de cette section est de définir un champ. Nous allons décrire dans la sous-section VIII.5.2 comment nous évaluons un champ dans le haut niveau. Nous allons exposer dans la sous-section VIII.5.3 l'évaluation d'un champ F_d de bas niveau et dans la sous-section VIII.5.4 la discrétisation du champ F_d. Nous allons expliquer la différence entre eux comme suit.

Dans le cas de discrétisation du champ F_d, nous discrétisons le champ F_d sur les points du maillage universel défini par le pas de discrétisation. Ensuite, nous développons quelques interpolations numériques comme une interpolation constante, du point milieu, linéaire ou quadratique pour estimer les valeurs du champ F_d en tous points. Dans le cas d'évaluation du champ F_d, nous évaluons le champ F_d avec un pas d'évaluation sans utiliser un maillage universel ni une interpolation afin de déterminer les valeurs du champ F_d.

Nous allons traiter différentes approches afin de définir une primitive d'une mesure dans notre modélisation qui sera considérée comme un champ. Finalement, puisque nous disposons dans notre modélisation du produit d'une mesure par un champ, nous allons définir ce produit dans le bas et le haut niveau.

VIII.5.1 Définition d'un champ

Nous définissons un champ de haut niveau ou de bas niveau par une fonction par morceaux continue par valeur supérieure. Par exemple, la fonction constante sur $\mathbb{R}$ est un champ.

VIII.5.2 Évaluation d'un champ dans le haut niveau

Si F^H est un champ de haut niveau, l'évaluation du champ F^H en un point a est une valeur $F^H(a)$. Par exemple, si nous définissons le champ F^H par

$$F^H = -\mathbb{1}_{]-\infty,a[} + \mathbb{1}_{[a,+\infty[}, \tag{VIII.180}$$

alors, l'évaluation du champ F^H en le point a est la valeur 1. En effet, comme le champ F^H est continu par valeur supérieure, cela justifie l'évaluation du champ F^H à droite en le point a.

VIII.5.3 Évaluation d'un champ dans le bas niveau

Nous voulons évaluer un champ F_d de bas niveau entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} défini par

$$0 < T_{\mathrm{eF}} \leq b - a. \tag{VIII.181}$$

Pour cela, nous définissons dans tout ce chapitre les points $(z_k)_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ par les points d'évaluation entre a et b avec le pas d'évaluation T_{eF}

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], z_k = a + (k-1) \times T_{\mathrm{eF}}. \tag{VIII.182}$$

Nous évaluons le champ F_d entre la valeur inférieure a et la valeur supérieure b avec le pas d'évaluation T_{eF} pour obtenir une tâche de calcul qui génère un ensemble $(F_d^{\mathrm{E}}(n_a + k - 1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs, avec

$$\mathcal{R}_a^b = \begin{cases} \left\lfloor \frac{b-a}{T_{\mathrm{eF}}} \right\rfloor - 1 & \text{si } T_{\mathrm{eF}} \text{ est divisible par } b-a, \\ \left\lfloor \frac{b-a}{T_{\mathrm{eF}}} \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases} \tag{VIII.183}$$

Nous pouvons justifier la relation (VIII.183) comme suit. Si nous évaluons le champ F_d entre la valeur inférieure $a = 0$ et la valeur supérieure $b = 1$ avec le pas d'évaluation $T_{\mathrm{eF}} = 1$, nous obtenons

$\mathcal{R}_a^b + 2 = 2$ points d'évaluation qui sont 0 et 1. Cependant, si nous évaluons le champ F_d entre la valeur inférieure $a = 0$ et la valeur supérieure $b = 1.1$ avec le pas d'évaluation $T_{\mathrm{eF}} = 1$, nous obtenons $\mathcal{R}_a^b + 2 = 3$ points d'évaluation qui sont 0, 1 et 2.

Nous utilisons la relation (VIII.182) pour exprimer les valeurs du champ évalué $(F_d^{\mathrm{E}}(n_a + k - 1))_{1 \leq k \leq \mathcal{R}_a^b + 2}$ définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_d^{\mathrm{E}}(n_a + k - 1) = F_d(z_k). \tag{VIII.184}$$

VIII.5.4 Discrétisation d'un champ dans le bas niveau

Nous imposons, dans tout ce chapitre sur le pas de discrétisation T_{dF} qu'il soit suffisamment petit, vérifiant la relation :

$$0 < T_{\mathrm{dF}} \leq b - a. \tag{VIII.185}$$

Nous définissons les points $(y_k)_{1 \leq k \leq \mathcal{N}_a^b + 1}$ dans tout ce chapitre par les points du maillage universel définis entre les 2 points x_a et x_b avec un pas de discrétisation T_{dF}

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], y_k = x_a + (k - 1) \times T_{\mathrm{dF}}. \tag{VIII.186}$$

La discrétisation du champ F_d entre les 2 points x_a et x_b avec le pas T_{dF} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1) = F_d(y_k). \tag{VIII.187}$$

Ensuite, nous choisissons une interpolation pour estimer les valeurs du champ F_d définies dans la relation (VIII.187) en tous points de l'intervalle $[x_a, x_b]$. Pour cela, nous utilisons les points $(y_k)_{1 \leq k \leq \mathcal{N}_a^b + 1}$ pour une interpolation constante, du point milieu, linéaire et quadratique. En revanche, nous définissons un point supplémentaire $y_{\mathcal{N}_a^b + 2} = x_a + (\mathcal{N}_a^b + 1) \times T_{\mathrm{dF}}$ pour une interpolation quadratique. Nous définissons la fonction F par la fonction continue par morceaux qui interpole les valeurs $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)$ aux points y_k pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!]$. Par conséquent, nous allons déterminer les valeurs de la fonction F dans chaque type d'interpolation :

VIII.5.4.1 Interpolation constante

Dans le cas d'une interpolation constante, nous déterminons la valeur de la fonction en escalier F sur chaque morceau $[y_k, y_{k+1}[$ par la valeur du champ discret $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)$ défini dans la relation (VIII.187) pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!]$

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \forall x \in [y_k, y_{k+1}[, F(x) = F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1). \tag{VIII.188}$$

VIII.5.4.2 Interpolation du point milieu

Dans le cas d'une interpolation du point milieu, nous déterminons la valeur de la fonction en escalier F sur chaque morceau $[y_k, y_{k+1}[$ par la moyenne des champs discrets $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)$ et $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k)$ définis dans la relation (VIII.187) pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!]$

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \forall x \in [y_k, y_{k+1}[, F(x) = \frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1) + F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k)}{2}. \tag{VIII.189}$$

VIII.5.4.3 Interpolation linéaire

Nous allons maintenant améliorer l'approximation du champ F_d en utilisant une interpolation linéaire. Par conséquent, nous allons déterminer la restriction de la fonction linéaire F sur chaque morceau $[y_k, y_{k+1}[$ qui est une fonction affine qui prend la valeur $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)$ en le point y_k et la valeur $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k)$ en le point y_{k+1} pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!]$. Par conséquent, la fonction linéaire F peut se mettre sous la forme

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \forall x \in [y_k, y_{k+1}[, F(x) = \alpha x + \beta, \tag{VIII.190}$$

où α et β sont des variables qui dépendent du pas de discrétisation T_{dF} et des valeurs du champ $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1))_{1 \leq k \leq \mathcal{N}_a^b + 1}$ définies dans la relation (VIII.187). Nous allons maintenant déterminer les variables α et β. Pour cela, nous rappelons qu'une fonction affine est caractérisée par un taux d'accroissement constant. Cette propriété nous permet de déterminer le coefficient α. En effet, l'accroissement $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)$ est proportionnel à $y_{k+1} - y_k$, comme le montre l'égalité

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1) = \alpha \times (y_{k+1} - y_k). \tag{VIII.191}$$

De cette relation, nous déduisons l'expression des variables α et β

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \alpha = \frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)}{T_{\mathrm{dF}}}. \tag{VIII.192}$$

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \beta = F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1) - \left(\frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)}{T_{\mathrm{dF}}} \right) \times y_k. \tag{VIII.193}$$

Nous déduisons l'expression de la fonction F

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \forall x \in [y_k, y_{k+1}[, F(x) = & \frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)}{T_{\mathrm{dF}}} \times (x - y_k) \\ & + F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1). \end{aligned} \tag{VIII.194}$$

VIII.5.4.4 Interpolation quadratique

Nous voulons maintenant améliorer l'approximation du champ F_d en utilisant une interpolation quadratique au lieu d'une interpolation linéaire. Par conséquent, nous allons déterminer explicitement la restriction de la fonction F sur chaque morceau $[y_k, y_{k+2}[$ qui est une fonction quadratique qui prend la valeur discrète $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1)$ en le point y_k du champ F_d, la valeur discrète $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k)$ en le point y_{k+1} du champ F_d et la valeur discrète $F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k + 1)$ en le point y_{k+2} du champ F_d pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!]$. Par conséquent, la fonction F peut se mettre sous la forme

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b]\!], \forall x \in [y_k, y_{k+2}[, F(x) = \zeta x^2 + \alpha x + \beta, \tag{VIII.195}$$

où ζ, α et β sont des variables qui dépendent du pas de discrétisation T_{dF} et des valeurs du champ $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a + k - 1))_{1 \leq k \leq \mathcal{N}_a^b + 1}$ définies dans la relation (VIII.187). Nous allons maintenant déterminer les variables ζ, α et β. Pour cela, nous établissons le système d'équations suivant

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], \begin{cases} \zeta y_k^2 + \alpha y_k + \beta = F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) \\ \zeta y_{k+1}^2 + \alpha y_{k+1} + \beta = F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) \\ \zeta y_{k+2}^2 + \alpha y_{k+2} + \beta = F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k+1) \end{cases} \tag{VIII.196}$$

La relation (VIII.196) nous permet d'exprimer les accroissements $F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k+1) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k)$ et $F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)$ en fonction de ζ et α pour obtenir deux équations. Ces deux équations nous permettent de déterminer le coefficient ζ

$$\zeta = \frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k+1) - 2F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) + F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)}{2T_{\mathrm{dF}}^2}. \tag{VIII.197}$$

Puisque l'expression ζ est connue, l'expression de l'accroissement $F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)$ nous permet de déterminer le coefficient α

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)}{T_{\mathrm{dF}}} - (2y_k + T_{\mathrm{dF}}) \\ & \times \left(\frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k+1) - 2F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) + F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)}{2T_{\mathrm{dF}}^2} \right). \end{aligned} \tag{VIII.198}$$

Finalement, nous obtenons l'expression de la variable β

$$\begin{aligned} \beta = & F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) - \frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) - F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)}{T_{\mathrm{dF}}} + (y_k^2 + y_k T_{\mathrm{dF}}) \\ & \times \left(\frac{F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k+1) - 2F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k) + F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1)}{2T_{\mathrm{dF}}^2} \right). \end{aligned} \tag{VIII.199}$$

Nous déduisons l'expression de la fonction F.

VIII.5.5 Évaluation d'un champ discret avec un pas d'évaluation

Après avoir défini le champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ avec un pas de discrétisation T_{dF} dans la relation (VIII.187), nous voulons évaluer le champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ avec un pas d'évaluation T_{eF} défini dans la relation (VIII.181) pour déterminer un ensemble $(F_d^{\mathrm{N}}(k))_{1\leq k\leq N_{\mathrm{e}}}$ de N_{e} valeurs, où N_{e} est le nombre de points d'évaluation défini par

$$N_{\mathrm{e}} = \left\lfloor \mathcal{N}_a^b \times \frac{T_{\mathrm{dF}}}{T_{\mathrm{eF}}} \right\rfloor + 1. \tag{VIII.200}$$

Nous appelons les valeurs $(F_d^{\mathrm{N}}(k))_{1\leq k\leq N_{\mathrm{e}}}$ par les valeurs d'évaluation du champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$. Nous allons nous baser sur l'expression de la fonction F définie dans la sous-section VIII.5.4 avec différents types d'interpolation pour déterminer les valeurs $(F_d^{\mathrm{N}}(k))_{1\leq k\leq N_{\mathrm{e}}}$. En effet, nous définissons chaque valeur $F_d^{\mathrm{N}}(k)$ par la valeur prise de la fonction F en point $x_a + (k-1)\times T_{\mathrm{eF}}$ du maillage universel pour tout entier k compris entre 1 et N_{e}

$$\forall k \in [\![1;N_{\mathrm{e}}]\!], F_d^{\mathrm{N}}(k) = F(x_a + (k-1)\times T_{\mathrm{eF}}). \tag{VIII.201}$$

VIII.5.6 La primitive d'une mesure est un champ

Il existe deux approches afin de définir une primitive d'une mesure (signifie également une accumulation dans notre modélisation). Dans les deux approches considérées, la primitive d'une mesure est un champ. La première approche, qui est aussi le premier choix proposé, consiste à faire certains calculs ad hoc pour réaliser ce choix. La deuxième approche, étant aussi le deuxième choix possible consiste à approcher la primitive d'une mesure par une fonction par morceaux. La deuxième approche fonctionne pour toutes les mesures.

Nous pouvons détailler le premier choix comme suit. Il existe une infinité de primitives d'une mesure. En revanche, ce qui existe, une unique primitive d'une mesure qui s'annule en un point.

La primitive qui s'annule en un point d'une mesure simple peut se déterminer explicitement, mais elle demande un calcul spécifique. Ce calcul spécifique peut devenir complexe pour la primitive qui s'annule en un point d'une mesure par morceaux. Faire ce choix de développement est coûteux en développement et maintenance. En effet, il faut établir une liste de cas particuliers pour lesquels un traitement spécifique peut être implémenté. Faire cette liste revient à faire une zoologie de la primitive d'une mesure et ressemble à ce que nous avons fait pour la zoologie de certaines mesures dans la sous-section VIII.4.1. Par exemple, la primitive qui s'annule en un point d'une mesure constante est un champ affine, et la primitive qui s'annule en un point d'une mesure affine est un champ quadratique.

Nous avons utilisé la deuxième approche dans notre modélisation. Par conséquent, la méthode qui calculera la primitive est basée sur une approche numérique. Nous précisons que la primitive qui s'annule en un point d'une mesure est un champ quelle que soit cette mesure. Nous rappelons dans cette sous-section que les points $\{y_k\}_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ sont définis dans la relation (VIII.186).

VIII.5.6.1 Discrétisation de la primitive d'une mesure dans le bas niveau

Par définition, la primitive qui s'annule en un point c d'une mesure de bas niveau m_d est un champ de bas niveau F_d quelle que soit cette mesure m_d. La discrétisation du champ F_d avec le pas de discrétisation T_{dF} est obtenue par accumulation des valeurs de la mesure m_d. Pour discrétiser la mesure m_d avec le pas de discrétisation T_{dF}, nous définissons le point x_c par le point décalé inférieurement de c

$$x_c = n_c \times T_{\mathrm{dF}}, \tag{VIII.202}$$

avec

$$n_c = \left\lfloor \frac{c}{T_{\mathrm{dF}}} \right\rfloor. \tag{VIII.203}$$

Nous définissons le champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ par

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \int_{x_c}^{y_k} m_d. \tag{VIII.204}$$

Nous rappelons que nous avons défini la notation $\mathcal{N}_\alpha^\beta$ dans la relation (VIII.17) pour 2 réels quelconques α et β avec $\beta > \alpha$. Nous définissons $\mathcal{N}_c^a$ par le nombre des sous-intervalles formés entre les 2 points x_a et x_c du maillage universel quand $x_a < x_c$, et nous définissons $\mathcal{N}_a^c$ par le nombre des sous-intervalles formés entre les 2 points x_c et x_a du maillage universel quand $x_c < x_a$. De la même manière, nous définissons $\mathcal{N}_c^b$. Nous distinguons 3 cas pour calculer le champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$:

<u>1er cas : $x_c < x_a$</u>

Dans ce cas, nous discrétisons la mesure m_d entre les 2 points x_c et x_b du maillage universel avec le pas de discrétisation T_{dF} pour calculer les valeurs $(m_d(n_c+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_c^b}$. Nous utilisons la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale définie dans la relation (VIII.204) pour obtenir

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \int_{x_c}^{x_a} m_d + \int_{x_a}^{y_k} m_d. \tag{VIII.205}$$

Ensuite, nous pouvons décomposer l'intégrale définie dans la relation (VIII.205) par

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_c^a} \int_{x_c+(j-1)\times T_{\mathrm{dF}}}^{x_c+j\times T_{\mathrm{dF}}} m_d + \sum_{j=1}^{j=k-1} \int_{x_a+(j-1)\times T_{\mathrm{dF}}}^{x_a+j\times T_{\mathrm{dF}}} m_d. \tag{VIII.206}$$

Nous remplaçons x_a par $x_c + \mathcal{N}_c^a \times T_{\mathrm{dF}}$ dans la relation (VIII.206) pour obtenir

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_c^a} \int_{x_c+(j-1)\times T_{\mathrm{dF}}}^{x_c+j\times T_{\mathrm{dF}}} m_d + \sum_{j=1}^{j=k-1} \int_{x_c+(j-1+\mathcal{N}_c^a)\times T_{\mathrm{dF}}}^{x_c+(j+\mathcal{N}_c^a)\times T_{\mathrm{dF}}} m_d. \tag{VIII.207}$$

Nous utilisons la relation (VIII.21) qui définit les valeurs de la mesure m_d pour obtenir

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_c^a} m_d(n_c+j-1) + \sum_{j=1+\mathcal{N}_c^a}^{j=k-1+\mathcal{N}_c^a} m_d(n_c+j-1). \tag{VIII.208}$$

Nous précisons que la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=\mathcal{N}_c^a} m_d(n_c+j-1)$ est calculée une seule fois pour exprimer les valeurs $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ dans la relation (VIII.208).

<u>2e cas : $x_c > x_b$</u>

Dans ce cas, nous discrétisons la mesure m_d entre les 2 points x_a et x_c du maillage universel avec le pas de discrétisation T_{dF} pour calculer les valeurs de la mesure $(m_d(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^c}$. Nous allons décomposer l'intégrale définie dans la relation (VIII.204) par

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = -\sum_{j=k}^{j=\mathcal{N}_a^c} \int_{x_a+(j-1)\times T_{\mathrm{dF}}}^{x_a+j\times T_{\mathrm{dF}}} m_d. \tag{VIII.209}$$

Ensuite, nous utilisons la relation (VIII.21) qui définit les valeurs de la mesure m_d pour obtenir

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = -\sum_{j=k}^{j=\mathcal{N}_a^c} m_d(n_a+j-1). \tag{VIII.210}$$

Par conséquent,

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = -\sum_{j=k}^{j=\mathcal{N}_a^b+1} m_d(n_a+j-1) - \sum_{j=\mathcal{N}_a^b+2}^{j=\mathcal{N}_a^c} m_d(n_a+j-1). \tag{VIII.211}$$

Nous précisons que la somme $\sum_{j=\mathcal{N}_a^b+2}^{j=\mathcal{N}_a^c} m_d(n_a+j-1)$ est calculée une seule fois pour exprimer les valeurs $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ dans la relation (VIII.211).

<u>3e cas : $x_a \leq x_c \leq x_b$</u>

Dans ce cas, nous discrétisons la mesure m_d entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec le pas de discrétisation T_{dF} pour calculer les valeurs $(m_d(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$. Nous allons accumuler ces valeurs $(m_d(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ pour calculer les valeurs $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$. Pour cela, nous déterminons l'entier $L \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!]$ vérifiant l'inégalité suivante

$$y_L < x_c \leq y_{L+1}. \tag{VIII.212}$$

Par conséquent, nous avons $x_c > y_k$ pour tout entier k compris entre 1 et L. Ensuite, nous utilisons le résultat du 2e cas pour décomposer l'intégrale définie dans la relation (VIII.204) par

$$\forall k \in [\![1;L]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = -\sum_{j=k}^{j=\mathcal{N}_a^c} m_d(n_a+j-1). \tag{VIII.213}$$

Nous allons maintenant déterminer les valeurs $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{L+1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ en utilisant la relation (VIII.204)

$$\forall k \in [\![L+1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \int_{x_c}^{y_k} m_d. \tag{VIII.214}$$

Nous remplaçons x_c par $x_a+\mathcal{N}_a^c\times T_{\mathrm{dF}}$ pour décomposer l'intégrale définie dans la relation (VIII.214) par

$$\forall k \in [\![L+1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \sum_{j=1}^{j=k-1-\mathcal{N}_a^c} \int_{x_a+(j-1+\mathcal{N}_a^c)\times T_{\mathrm{dF}}}^{x_a+(j+\mathcal{N}_a^c)\times T_{\mathrm{dF}}} m_d. \tag{VIII.215}$$

En conclusion :

$$\forall k \in [\![L+1;\mathcal{N}_a^b+1]\!], F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1) = \sum_{j=1+\mathcal{N}_a^c}^{j=k-1} m_d(n_a+j-1). \tag{VIII.216}$$

VIII.5.6.2 Évaluation de la primitive d'une mesure dans le haut niveau

Comme nous avons décrit dans la sous-sous-section VIII.5.6.1 la discrétisation de la primitive d'une mesure dans le bas niveau considérée comme un champ discret et puisque nous avons décrit

l'évaluation d'un champ discret dans la sous-section VIII.5.5, nous pouvons déduire l'évaluation de la primitive d'une mesure dans le haut niveau.

VIII.5.7 Produit d'une mesure par un champ

Nous rappelons que nous disposons dans notre modélisation du produit d'une mesure par un champ. Par exemple, la mesure de paiement d'intérêts est calculée en multipliant la mesure de taux d'emprunt par le capital restant dû. Nous rappelons que nous avons justifié dans le début de la section VIII.1 notre objectif qui est de multiplier une mesure de Dirac par un champ.

VIII.5.7.1 Produit d'une mesure discrète par un champ discret

Le produit d'une mesure discrète $(m_1(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b}$ par un champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b}$ défini sur le même maillage universel est une mesure discrète $(m(n_a+j-1))_{1\leq j\leq \mathcal{N}_a^b}$ à $\mathcal{N}_a^b$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{N}_a^b]\!], m(n_a+k-1) = m_1(n_a+k-1)\times F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1). \tag{VIII.217}$$

VIII.5.7.2 Intégration d'un produit d'une mesure discrète par un champ discret

L'intégration de la mesure discrète $(m(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b}$ définie dans la relation (VIII.217) par un produit d'une mesure discrète par un champ discret entre une borne inférieure a et une borne supérieure b est la somme de toutes les valeurs $(m(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b}$

$$\sum_{k=1}^{k=\mathcal{N}_a^b} m(n_a+k-1).$$

VIII.6 Les champs simples

Nous utilisons des champs simples dans notre modélisation. Pour cela, l'objectif de cette section est de les définir.

Nous rappelons que nous avons décrit la discrétisation d'un champ de bas niveau avec un pas de discrétisation dans la sous-section VIII.5.4.

Nous rappelons que nous avons décrit l'évaluation d'un champ de bas niveau avec un pas d'évaluation dans la sous-section VIII.5.3. Pour cela, nous utilisons les points $(z_k)_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ définis dans la relation (VIII.182) pour exprimer dans cette section l'évaluation de chaque champ simple de bas niveau entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} défini dans la relation (VIII.181).

Nous rappelons que nous avons décrit la discrétisation d'un champ de bas niveau avec un pas de discrétisation dans la sous-section VIII.5.4. Pour cela, nous utilisons les points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ définis dans la relation (VIII.186) pour exprimer dans cette section la discrétisation de chaque champ simple de bas niveau entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} défini dans la relation (VIII.185).

D'un autre côté, nous allons exprimer dans cette section l'évaluation de chaque champ simple de haut niveau en une valeur quelconque, et nous considérons dans toute cette section que t est une variable temporelle dans $\mathbb{R}$.

VIII.6.1 Champ nul

Nous avons créé un objet de type champ nul dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction nulle. Nous allons donner une définition du champ nul dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.1.1 Définition

Nous définissons un champ nul F_{Null}, la fonction qui ne prend qu'une seule valeur nulle

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Null}}(t) = 0. \tag{VIII.218}$$

VIII.6.1.2 Évaluation d'un champ nul dans le haut niveau

L'évaluation du champ nul F_{Null} de haut niveau défini dans la relation (VIII.218) à n'importe quel instant retourne la valeur nulle.

VIII.6.1.3 Évaluation d'un champ nul dans le bas niveau

L'évaluation du champ nul F_{Null} de bas niveau défini dans la relation (VIII.218) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs nulles

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Null}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = 0. \tag{VIII.219}$$

VIII.6.1.4 Discrétisation d'un champ nul dans le bas niveau

La discrétisation du champ nul F_{Null} défini dans la relation (VIII.218) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs nulles

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Null}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = 0. \tag{VIII.220}$$

VIII.6.2 Champ constant

Comme le capital restant dû fait partie des champs, nous avons créé un objet de type champ constant dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme du capital restant à rembourser à un instant donné dont le capital restant dû est une fonction constante. Nous allons donner une définition du champ constant dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.2.1 Définition

Nous définissons un champ constant F_{Constant}, la fonction qui ne prend qu'une seule valeur réelle $\text{C} \in \mathbb{R}$, indépendamment de la variable temps t

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Constant}}(t) = \text{C}. \tag{VIII.221}$$

VIII.6.2.2 Évaluation d'un champ constant dans le haut niveau

L'évaluation du champ constant F_{Constant} de haut niveau défini dans la relation (VIII.221) à n'importe quel instant retourne la même valeur C.

VIII.6.2.3 Évaluation d'un champ constant dans le bas niveau

Nous évaluons le champ constant F_{Constant} de bas niveau défini dans la relation (VIII.221) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs dont chaque valeur est la valeur C

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Constant}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = \text{C}. \tag{VIII.222}$$

VIII.6.2.4 Discrétisation d'un champ constant dans le bas niveau

Nous discrétisons le champ constant F_{Constant} de bas niveau défini dans la relation (VIII.221) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs dont chaque valeur est la valeur C

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Constant}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = \text{C}. \tag{VIII.223}$$

VIII.6.3 Champ affine

Nous avons créé un objet de type champ affine dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction affine en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition du champ affine dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.3.1 Définition

Nous définissons un champ affine F_{Affine}, la fonction affine qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Affine}}(t) = \text{C}_1 t + \text{C}, \tag{VIII.224}$$

où C_1 et C sont respectivement la pente et la valeur du champ affine F_{Affine} à l'origine.

VIII.6.3.2 Évaluation d'un champ affine dans le haut niveau

Nous évaluons le champ affine F_{Affine} de haut niveau défini dans la relation (VIII.224) à un instant d pour retourner la valeur $\text{C}_1 d + \text{C}$.

VIII.6.3.3 Évaluation d'un champ affine dans le bas niveau

Nous évaluons le champ affine F_{Affine} de bas niveau défini dans la relation (VIII.224) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Affine}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = \text{C}_1 \times z_k + \text{C}. \tag{VIII.225}$$

VIII.6.3.4 Discrétisation d'un champ affine dans le bas niveau

Nous discrétisons le champ affine F_{Affine} de bas niveau défini dans la relation (VIII.224) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Affine}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = \text{C}_1 \times y_k + \text{C}. \tag{VIII.226}$$

VIII.6.4 Champ quadratique

Nous avons créé un objet de type champ quadratique dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction quadratique en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition du champ quadratique dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.4.1 Définition

Nous définissons un champ quadratique $F_{\text{Quadratic}}$, la fonction quadratique qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Quadratic}}(t) = \text{C}_2 t^2 + \text{C}_1 t + \text{C}, \tag{VIII.227}$$

où C_2, C_1 et C sont trois réels.

VIII.6.4.2 Évaluation d'un champ quadratique dans le haut niveau

Nous évaluons le champ quadratique $F_{\text{Quadratic}}$ de haut niveau défini dans la relation (VIII.227) à un instant d pour retourner la valeur $\text{C}_2 d^2 + \text{C}_1 d + \text{C}$.

VIII.6.4.3 Évaluation d'un champ quadratique dans le bas niveau

L'évaluation du champ quadratique $F_{\text{Quadratic}}$ défini dans la relation (VIII.227) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Quadratic}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = \text{C}_2 z_k^2 + \text{C}_1 z_k + \text{C}. \tag{VIII.228}$$

VIII.6.4.4 Discrétisation d'un champ quadratique dans le bas niveau

La discrétisation du champ quadratique $F_{\text{Quadratic}}$ défini dans la relation (VIII.227) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} est une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Quadratic}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = \text{C}_2 y_k^2 + \text{C}_1 y_k + \text{C}. \tag{VIII.229}$$

VIII.6.5 Champ polynomial

Nous avons créé un objet de type champ polynomial dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction polynomiale en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition du champ polynomial dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.5.1 Définition

Nous définissons un champ polynomial F_{Polynom}, la fonction polynomiale de degrée n, qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Polynom}}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{C}_i \times t^i, \tag{VIII.230}$$

où chaque réel C_i est le coefficient du terme t^i pour tout entier i compris entre 0 et n.

VIII.6.5.2 Évaluation d'un champ polynomial dans le haut niveau

Nous évaluons le champ polynomial F_{Polynom} de haut niveau défini dans la relation (VIII.230) à un instant d pour retourner la valeur $\sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{C}_i \times d^i$.

VIII.6.5.3 Évaluation d'un champ polynomial dans le bas niveau

Nous évaluons le champ polynomial F_{Polynom} de bas niveau défini dans la relation (VIII.230) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F^{\text{E}}_{\text{Polynom}}(n_a + k - 1) = \sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{C}_i \times z_k^i. \tag{VIII.231}$$

VIII.6.5.4 Discrétisation d'un champ polynomial dans le bas niveau

Nous discrétisons le champ polynomial F_{Polynom} de bas niveau défini dans la relation (VIII.230) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F^{\text{D}}_{\text{Polynom}}(n_a + k - 1) = \sum_{i=0}^{i=n} \mathrm{C}_i \times y_k^i. \tag{VIII.232}$$

VIII.6.6 Champ sinus

Nous avons créé un objet de type champ sinus dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction sinus en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition du champ sinus dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.6.1 Définition

Nous définissons un champ sinus F_{Sinus}, la fonction sinus qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Sinus}}(t) = \sin(\mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}), \tag{VIII.233}$$

où C_1 et C sont des réels.

VIII.6.6.2 Évaluation d'un champ sinus dans le haut niveau

Nous évaluons le champ sinus F_{Sinus} de haut niveau défini dans la relation (VIII.233) à un instant d pour retourner la valeur $\sin(\mathrm{C}_1 d + \mathrm{C})$.

VIII.6.6.3 Évaluation d'un champ sinus dans le bas niveau

Nous évaluons le champ sinus F_{Sinus} de bas niveau défini dans la relation (VIII.233) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Sinus}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = \sin(\mathrm{C}_1 \times z_k + \mathrm{C}). \tag{VIII.234}$$

VIII.6.6.4 Discrétisation d'un champ sinus dans le bas niveau

Nous discrétisons le champ sinus F_{Sinus} de bas niveau défini dans la relation (VIII.233) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Sinus}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = \sin(\mathrm{C}_1 \times y_k + \mathrm{C}). \tag{VIII.235}$$

VIII.6.7 Champ cosinus

Nous avons créé un objet de type champ cosinus dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction cosinus en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition du champ cosinus dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.7.1 Définition

Nous définissons un champ cosinus F_{Cosinus}, la fonction cosinus qui s'écrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Cosinus}}(t) = \cos(\mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}), \tag{VIII.236}$$

où C_1 et C sont des réels.

VIII.6.7.2 Évaluation d'un champ cosinus dans le haut niveau

Nous évaluons le champ cosinus F_{Cosinus} de haut niveau défini dans la relation (VIII.236) à un instant d pour retourner la valeur $\cos(\mathrm{C}_1 d + \mathrm{C})$.

VIII.6.7.3 Évaluation d'un champ cosinus dans le bas niveau

Nous évaluons le champ cosinus F_{Cosinus} de bas niveau défini dans la relation (VIII.236) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Cosinus}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = \cos(\mathrm{C}_1 \times z_k + \mathrm{C}). \tag{VIII.237}$$

VIII.6.7.4 Discrétisation d'un champ cosinus dans le bas niveau

Nous discrétisons le champ cosinus F_{Cosinus} de bas niveau défini dans la relation (VIII.236) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Cosinus}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = \cos(\text{C}_1 \times y_k + \text{C}). \tag{VIII.238}$$

VIII.6.8 Champ exponentiel

Nous avons créé un objet de type champ exponentiel dans notre modélisation, par exemple pour calculer la somme empruntée à un instant donné dont l'emprunt est une fonction exponentielle en terme de la variable temps t. Nous allons donner une définition du champ exponentiel dans la sous-sous-section suivante.

VIII.6.8.1 Définition

Nous définissons un champ exponentiel $F_{\text{Exponential}}$, la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\text{Exponential}}(t) = \text{e}^{\text{C} \times t}, \tag{VIII.239}$$

où C est un réel.

VIII.6.8.2 Évaluation d'un champ exponentiel dans le haut niveau

Nous évaluons le champ exponentiel $F_{\text{Exponential}}$ de haut niveau défini dans la relation (VIII.239) à un instant d pour retourner la valeur $\text{e}^{\text{C} \times d}$.

VIII.6.8.3 Évaluation d'un champ exponentiel dans le bas niveau

Nous évaluons le champ exponentiel $F_{\text{Exponential}}$ de bas niveau défini dans la relation (VIII.239) entre une valeur inférieure a et une borne supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{R}_a^b + 2$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!], F_{\text{Exponential}}^{\text{E}}(n_a + k - 1) = \text{e}^{\text{C} \times z_k}. \tag{VIII.240}$$

VIII.6.8.4 Discrétisation d'un champ exponentiel dans le bas niveau

Nous discrétisons le champ exponentiel $F_{\text{Exponential}}$ de bas niveau défini dans la relation (VIII.239) entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} pour retourner une tâche de calcul qui génère un ensemble de $\mathcal{N}_a^b + 1$ valeurs, définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_{\text{Exponential}}^{\text{D}}(n_a + k - 1) = \text{e}^{\text{C} \times y_k}. \tag{VIII.241}$$

VIII.7 Les champs composés

Nous utilisons des champs composés dans notre modélisation. Pour cela, l'objectif de cette section est de définir quelques champs composés qui sont les champs sommes, soustractions, produits, divisions, par morceaux et tronqués.

VIII.7.1 Somme de champs

Nous avons créé un objet de type champ somme dans notre modélisation pour calculer la somme de deux champs à un instant donné. Par exemple, nous pouvons calculer la somme de deux capitaux restant dûs à un instant donné.

VIII.7.1.1 Évaluation d'une somme de champs dans le haut niveau

L'évaluation de la somme F de deux champs de haut niveau F_1 et F_2 à un instant t retourne une valeur qui est la somme de deux valeurs. La première valeur est l'évaluation du champ F_1 à l'instant t, et la deuxième valeur est l'évaluation du champ F_2 à l'instant t. Nous exprimons l'évaluation du champ F par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_1(t) + \mathrm{F}_2(t). \tag{VIII.242}$$

VIII.7.1.2 Évaluation ou discrétisation d'une somme de champs dans le bas niveau

VIII.7.1.2.1 Somme de deux champs discrets par interpolation

Nous définissons les fonctions F et G comme les fonctions qui interpolent respectivement les champs discrets $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ et $(G_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ aux points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ définis dans la relation (VIII.186) avec le même type d'interpolation constante, du point milieu, linéaire ou quadratique. Par exemple, pour une interpolation constante, les fonctions F et G sont déterminées en utilisant la relation (VIII.188), pour une interpolation du point milieu, les fonctions F et G sont déterminées en utilisant la relation (VIII.189) pour une interpolation linéaire, les fonctions F et G sont déterminées en utilisant la relation (VIII.204), et pour une interpolation quadratique, les fonctions F et G sont déterminées en utilisant la relation (VIII.195).

La valeur de la fonction H qui interpole la somme des 2 champs discrets $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ et $(G_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ aux points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ en un point p est définie par

$$H(p) = F(p) + G(p). \tag{VIII.243}$$

VIII.7.1.2.2 Somme de deux champs évalués

Nous rappelons que nous avons défini un champ évalué dans la relation (VIII.184). Pour cela, nous allons définir la somme de 2 champs évalués.

La somme de 2 champs évalués $(F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ et $(G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ définis entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} est un champ évalué $(H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ à $\mathcal{R}_a^b+2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b+2]\!], H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1) = F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1) + G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1). \tag{VIII.244}$$

VIII.7.2 Soustraction de deux champs

Nous avons créé un objet de type champ soustraction dans notre modélisation pour calculer la différence de deux champs à un instant donné. Par exemple, nous pouvons calculer la différence de deux capitaux restant dûs à un instant donné.

VIII.7.2.1 Évaluation d'une soustraction de champs dans le haut niveau

L'évaluation d'une soustraction F de deux champs de haut niveau F_1 et F_2 à un instant t est la différence de deux valeurs. La première valeur est l'évaluation du champ F_1 à l'instant t, et la deuxième valeur est l'évaluation du champ F_2 à l'instant t. Nous exprimons l'évaluation du champ F par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_1(t) - \mathrm{F}_2(t). \tag{VIII.245}$$

VIII.7.2.2 Évaluation ou discrétisation d'une soustraction de champs dans le bas niveau

VIII.7.2.2.1 Soustraction de deux champs discrets par interpolation

Comme nous avons défini la somme de deux champs discrets par interpolation dans la sous-sous-sous-section VIII.7.1.2.1, nous définissons de façon similaire la soustraction de deux champs discrets. Par conséquent, la valeur de la fonction H qui interpole la soustraction des 2 champs discrets $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ et $(G_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ aux points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ définis dans la relation (VIII.186) en un point p est définie par

$$H(p) = F(p) - G(p). \tag{VIII.246}$$

VIII.7.2.2.2 Soustraction de deux champs évalués

La soustraction de 2 champs à valeurs $(F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ et $(G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ définies entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} est un champ $(H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ à $\mathcal{R}_a^b+2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b+2]\!], H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1) = F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1) - G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1). \tag{VIII.247}$$

VIII.7.3 Produit de champs

Nous avons créé un objet de type champ produit dans notre modélisation pour calculer le produit de deux champs à un instant donné. Par exemple, nous pouvons calculer le produit de deux capitaux restant dûs à un instant donné.

VIII.7.3.1 Évaluation d'un champ produit dans le haut niveau

L'évaluation du produit F de deux champs de haut niveau F_1 et F_2 à un instant t retourne une valeur qui est le produit de deux valeurs. La première valeur est l'évaluation du champ F_1 à l'instant t, et la deuxième valeur est l'évaluation du champ F_2 à l'instant t. Nous exprimons l'évaluation du champ F par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_1(t) \times \mathrm{F}_2(t). \tag{VIII.248}$$

VIII.7.3.2 Évaluation ou discrétisation d'un champ produit dans le bas niveau

VIII.7.3.2.1 Produit de deux champs discrets par interpolation

Comme nous avons défini la soustraction de deux champs discrets par interpolation dans la sous-sous-sous-section VIII.7.2.2.1, nous définissons de façon similaire le produit de deux champs discrets. Par conséquent, la valeur de la fonction H qui interpole le produit des 2 champs discrets $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ et $(G_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ aux points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ en un point p est définie par

$$H(p) = F(p) \times G(p). \tag{VIII.249}$$

VIII.7.3.2.2 Produit de deux champs évalués

Le produit de 2 champs à valeurs $(F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ et $(G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ définies entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} est un champ $(H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ à $\mathcal{R}_a^b+2$ valeurs définies par

$$\forall k \in [\![1;\mathcal{R}_a^b+2]\!], H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1) = F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1) \times G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1). \tag{VIII.250}$$

VIII.7.4 Division de deux champs

Nous avons créé un objet de type champ division dans notre modélisation pour calculer la division de deux champs à un instant donné. Par exemple, nous pouvons calculer la division de deux capitaux restant dûs à un instant donné.

VIII.7.4.1 Évaluation d'un champ division dans le haut niveau

L'évaluation de la division F d'un champ de haut niveau F_1 par un champ de haut niveau F_2 à un instant t retourne une valeur qui est le quotient de deux valeurs. La première valeur est l'évaluation du champ F_1 à l'instant t, la deuxième valeur est l'évaluation du champ F_2 à l'instant t. Nous exprimons l'évaluation du champ F par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_2(t) \neq 0, \mathrm{F}(t) = \frac{\mathrm{F}_1(t)}{\mathrm{F}_2(t)}. \tag{VIII.251}$$

VIII.7.4.2 Évaluation ou discrétisation d'un champ division dans le bas niveau

VIII.7.4.2.1 Division de deux champs discrets par interpolation

Comme nous avons défini le produit de deux champs discrets par interpolation dans la sous-sous-sous-section VIII.7.3.2.1, nous définissons de façon similaire la division de deux champs discrets. Par conséquent, la valeur de la fonction H qui interpole le champ discret $(F_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ par le champ discret $(G_d^{\mathrm{D}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ aux points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ en un point p est définie si la valeur G(p) ne s'annule pas par

$$H(p) = \frac{F(p)}{G(p)}. \tag{VIII.252}$$

VIII.7.4.2.2 Division de deux champs évalués

Si les valeurs d'un champ $(G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ sont non nulles, la division d'un champ à valeurs $(F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ par le champ à valeurs $(G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ définies entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un pas d'évaluation T_{eF} est un champ $(H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ à $\mathcal{R}_a^b+2$ valeurs définies par

$$\forall k\in [\![1;\mathcal{R}_a^b+2]\!], H_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1)=\frac{F_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1)}{G_d^{\mathrm{E}}(n_a+k-1)}. \tag{VIII.253}$$

VIII.7.5 Champ par morceaux

Comme nous disposons dans notre modélisation des champs simples, nous avons créé un objet de type champ par morceaux constitué de ces champs simples définis sur une subdivision d'intervalles de temps (voir définition (VIII.77)). Par exemple, un champ F défini par un champ constant de constante 1 sur l'intervalle de temps $]-\infty,0[$ et par un champ constant de constante 2 sur l'intervalle de temps $[0,+\infty[$

$$F=\mathbb{1}_{]-\infty,0[}+2\times\mathbb{1}_{[0,+\infty[}, \tag{VIII.254}$$

est un champ par morceaux. Nous allons donner une définition du champ par morceaux dans la sous-sous-section suivante.

VIII.7.5.1 Définition

Nous appelons champ par morceaux, l'une des 2 méthodes de construction définie à partir :

• d'un réel Fr_0 permettant de générer le champ F_0 sur l'intervalle $]-\infty,Fr_0]$, et de générer le champ F_1 sur l'intervalle $[Fr_0,+\infty[$. Plus formellement, le champ $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ présenté dans la Figure VIII.17 est un champ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{aligned}\exists Fr_0\in\mathbb{R},\ \text{ tel que : } \mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}\mid_{]-\infty,Fr_0]}=F_0, \mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}\mid_{[Fr_0,+\infty[}=F_1,\\ \text{où } F_0,\ F_1 \text{ sont des champs quelconques.}\end{aligned} \tag{VIII.255}$$

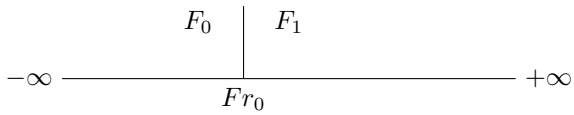

FIGURE VIII.17 – Champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ constitué des champs F_0 et F_1, et de la frontière Fr_0.

• d'une subdivision $(Fr_0,Fr_1,\ldots,Fr_n)$ définie dans la relation (VIII.77) permettant de générer le champ F_i sur chaque intervalle fermé $[Fr_{i-1},Fr_i]$, i allant de 1 à n, et de générer les deux champs F_0 et F_{n+1} respectivement sur les deux intervalles $]-\infty,Fr_0]$ et $[Fr_n,+\infty[$. Plus formellement, le champ $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ présenté dans la Figure VIII.18 est un champ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists (Fr_0, Fr_1, \ldots, Fr_n), \text{ vérifiant la relation (VIII.77) telle que : } \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}\,|_{[Fr_{i-1}, Fr_i]} = F_i, \mathrm{F}_{\text{Piecewise}}\,|_{]-\infty, Fr_0]} = F_0, \mathrm{F}_{\text{Piecewise}}\,|_{[Fr_n, +\infty[} = F_{n+1},$$
$$\text{où } F_i,\ F_0,\ F_{n+1} \text{ sont des champs quelconques.} \tag{VIII.256}$$

FIGURE VIII.18 – Champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ constitué des champs $(F_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ et des frontières $(Fr_i)_{0 \leq i \leq n}$.

VIII.7.5.2 Évaluation d'un champ par morceaux en un point

Nous voulons évaluer le champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ défini dans l'une des relations (VIII.255) ou (VIII.256) à un instant t.

Nous distinguons 2 possibilités pour l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ défini dans la relation (VIII.255) à l'instant t :

— Lorsque $t < Fr_0$, l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'évaluation du champ F_0 à l'instant t.

— Lorsque $t \geq Fr_0$, l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'évaluation du champ F_1 à l'instant t.

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_{\text{Piecewise}}(t) = \begin{cases} F_0(t) & \text{si } t < Fr_0, \\ F_1(t) & \text{si } t \geq Fr_0. \end{cases} \tag{VIII.257}$$

Nous distinguons 3 possibilités pour l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ défini dans la relation (VIII.256) à l'instant t :

— Lorsque $t < Fr_0$, l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'évaluation du champ F_0 à l'instant t.

— Lorsque $t \in [Fr_i, Fr_{i+1}[$ pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'évaluation du champ F_{i+1} à l'instant t.

— Lorsque $t \geq Fr_n$, l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ retourne l'évaluation du champ F_{n+1} à l'instant t.

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_{\text{Piecewise}}(t) = \begin{cases} F_0(t) & \text{si } t < Fr_0, \\ F_{i+1}(t) & \text{si } \forall i \in [\![0; n-1]\!], t \in [Fr_i, Fr_{i+1}[, \\ F_{n+1}(t) & \text{si } t \geq Fr_n. \end{cases} \tag{VIII.258}$$

VIII.7.5.3 Évaluation d'un champ par morceaux dans le bas niveau

Nous voulons évaluer le champ par morceaux $\mathrm{F}_{\text{Piecewise}}$ de bas niveau défini dans l'une des relations (VIII.255) ou (VIII.256) entre une valeur inférieure a et une valeur supérieure b avec un

pas d'évaluation T_{eF} défini dans la relation (VIII.181). Pour cela, nous rappelons que nous avons défini dans la relation (VIII.182) les points $(z_k)_{1\leq k\leq \mathcal{R}_a^b+2}$ par les points d'évaluation entre a et b avec le pas T_{eF}.

Pour évaluer le champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$, nous évaluons le champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ en les points z_k pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!]$. Pour cela, nous prenons $t = z_k$ pour tout entier $k \in [\![1; \mathcal{R}_a^b + 2]\!]$ dans la sous-sous-section VIII.7.5.2 afin de déterminer ces valeurs d'évaluation.

VIII.7.5.4 Discrétisation d'un champ par morceaux

La discrétisation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ entre les 2 points x_a et x_b du maillage universel avec un pas de discrétisation T_{dF} est une évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ en les points $(y_k)_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ définis dans la relation (VIII.186). Comme nous avons décrit l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ en un point dans la sous-sous-section VIII.7.5.2, nous pouvons en déduire sa discrétisation.

VIII.7.6 Champ tronqué

Nous avons créé un objet de type champ tronqué dans notre modélisation pour restreindre un champ quelconque (simple ou par morceaux) sur un intervalle borné ou sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ ou de type $]-\infty, a[$, où $a \in \mathbb{R}$. Par exemple, un champ F défini par un champ constant de constante 1 sur l'intervalle de temps $[0, 2[$

$$F = \mathbb{1}_{[0,2[}, \tag{VIII.259}$$

est un champ tronqué. Nous allons donner une définition du champ tronqué dans la sous-sous-section suivante.

VIII.7.6.1 Définition

Nous appelons $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ champ tronqué, l'une des 3 méthodes de construction définie à partir

• d'une subdivision (Fr_0, Fr_1) définie dans la relation (VIII.77) permettant de générer les 2 champs nuls F_0 et F_2 respectivement sur les deux intervalles $]-\infty, Fr_0]$ et $[Fr_1, +\infty[$, et de générer le champ F_1 sur l'intervalle fermé $[Fr_0, Fr_1]$. Plus formellement, le champ $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ présenté dans la Figure VIII.19 est un champ tronqué sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{gathered}\exists (Fr_0, Fr_1), \quad \text{vérifiant la relation (VIII.77) tels que : } \mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}\,|_{[Fr_0,Fr_1]} = F_1, \\ \mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}\,|_{]-\infty,Fr_0]} = F_0, \mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}\,|_{[Fr_1,+\infty[} = F_2, \\ \text{où } F_0,\ F_2 \text{ sont des champs nuls et } F_1 \text{ est un champ quelconque.}\end{gathered} \tag{VIII.260}$$

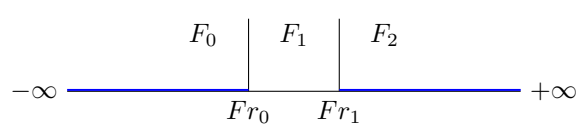

FIGURE VIII.19 – Champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ constitué des deux champs nuls F_0 et F_2 et du champ F_1 et des deux frontières Fr_0 et Fr_1.

• d'un réel Fr_0 permettant de générer le champ nul F_0 sur l'intervalle $]-\infty, Fr_0]$, et de générer le champ F_1 sur l'intervalle $[Fr_0, +\infty[$. Plus formellement, le champ $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ présenté dans la Figure VIII.20 est un champ tronqué sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists Fr_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{tel que : } \mathrm{F}_{\text{Truncated}}\,|_{]-\infty,Fr_0]} = F_0, \mathrm{F}_{\text{Truncated}}\,|_{[Fr_0,+\infty[} = F_1, \quad \text{où } F_0 \text{ est un champ nul et } F_1 \text{ est un champ quelconque.} \tag{VIII.261}$$

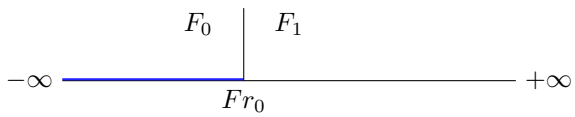

FIGURE VIII.20 – Champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ constitué du champ nul F_0 et du champ F_1 et de la frontière Fr_0.

• d'un réel Fr_1 permettant de générer le champ F_1 sur l'intervalle $]-\infty, Fr_1]$ et le champ nul F_2 sur l'intervalle $[Fr_1, +\infty[$. Plus formellement, le champ $F_{\text{Truncated}}$ présenté dans la Figure VIII.21 est un champ tronqué sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists Fr_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{tel que : } \mathrm{F}_{\text{Truncated}}\,|_{]-\infty,Fr_1]} = F_1, \mathrm{F}_{\text{Truncated}}\,|_{[Fr_1,+\infty[} = F_2, \quad \text{où } F_1 \text{ est un champ quelconque et } F_2 \text{ est un champ nul.} \tag{VIII.262}$$

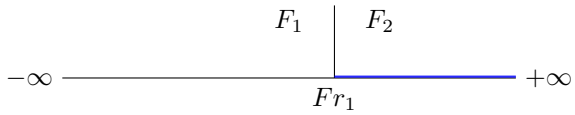

FIGURE VIII.21 – Champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ constitué du champ F_1 et du champ nul F_2 et de la frontière Fr_1.

VIII.7.6.2 Évaluation d'un champ tronqué en un point

Nous voulons évaluer le champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ défini dans les relations (VIII.260), (VIII.261) et (VIII.262) à un instant t.

Nous distinguons 2 possibilités pour l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ défini dans la relation (VIII.260) à l'instant t.

— Lorsque $t < Fr_0$ ou $t \geq Fr_1$, l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ retourne la valeur nulle.

— Lorsque $t \in [Fr_0, Fr_1[$, l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ retourne l'évaluation du champ F_1 à l'instant t.

Autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_{\text{Truncated}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < Fr_0 \text{ ou } t \geq Fr_1, \\ F_1(t) & \text{si } t \in [Fr_0, Fr_1[. \end{cases} \tag{VIII.263}$$

Nous distinguons 2 possibilités pour l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\text{Truncated}}$ défini dans la relation (VIII.261) à l'instant t.

— Lorsque $t < Fr_0$, l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ retourne la valeur nulle.
— Lorsque $t \geq Fr_0$, l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ retourne l'évaluation du champ F_1 à l'instant t.

Autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < Fr_0, \\ F_1(t) & \text{si } \ t \geq Fr_0. \end{cases} \tag{VIII.264}$$

Nous distinguons 2 possibilités pour l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ défini dans la relation (VIII.262) à l'instant t.

— Lorsque $t < Fr_1$, l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ retourne l'évaluation du champ F_1 à l'instant t.
— Lorsque $t \geq Fr_1$, l'évaluation du champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ retourne la valeur nulle.

Autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}(t) = \begin{cases} F_1(t) & \text{si } \ t < Fr_1, \\ 0 & \text{si } \ t \geq Fr_1. \end{cases} \tag{VIII.265}$$

VIII.7.6.3 Évaluation d'un champ tronqué dans le bas niveau

Comme nous avons justifié l'évaluation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ de bas niveau dans la sous-sous-section VIII.7.5.3, nous utilisons le même raisonnement pour évaluer le champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$ de bas niveau.

VIII.7.6.4 Discrétisation d'un champ tronqué

Comme nous avons justifié la discrétisation du champ par morceaux $\mathrm{F}_{\mathrm{Piecewise}}$ de bas niveau dans la sous-sous-section VIII.7.5.4, nous utilisons le même raisonnement pour discrétiser le champ tronqué $\mathrm{F}_{\mathrm{Truncated}}$.

VIII.8 Discussion sur la discrétisation de l'opérateur $\tilde{\sigma} = \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}]$

Après avoir défini le mécanisme de discrétisation de l'ensemble des mesures et de l'ensemble des champs, nous voulons maintenant discuter la discrétisation de la mesure de dépense algébrique $\tilde{\sigma}$ entre une borne inférieure a et une borne supérieure b avec un pas de discrétisation T_{dM}. La densité $\tilde{\sigma}$ est définie précédemment par :

$$\tilde{\sigma} = \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] + \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}], \tag{VIII.266}$$

où les opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{D}_1$ sont définis respectivement par les relations (V.210) et (V.212).

Nous allons calculer dans un premier temps la borne décalée inférieurement x_a à partir de la relation (VIII.19), et la borne décalée supérieurement à partir de la relation (VIII.20). Nous précisons que si le maillage universel est créé dans une autre discrétisation avec le même pas T_{dM}, nous ne le créons pas (principe du cache). Sinon, nous créons ce maillage universel appelé $\mathrm{DiscretizedAxeSegment}_{\mathrm{T_{dM}}}$ entre les deux valeurs x_a et x_b défini par la relation (VIII.8).

Nous allons maintenant décrire la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{D}_1[\rho^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}]$ comme suit. La primitive qui s'annule en un point $\Theta_{\max}$ de la mesure $\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}$ est un champ de bas niveau noté F^1_d. La discrétisation

de ce champ F_d^1 avec le pas de discrétisation T_{dM} est obtenue par accumulation des valeurs de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$. Soit $x_{\Theta_{\max}}$ le point décalé inférieurement de $\Theta_{\max}$ défini par :

$$x_{\Theta_{\max}} = n_{\Theta_{\max}} \times T_{\mathrm{dM}}. \tag{VIII.267}$$

Nous définissons la discrétisation du champ F_d^1 par :

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_d^1(n_a + k - 1) = \int_{x_{\Theta_{\max}}}^{y_k} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}. \tag{VIII.268}$$

Nous pouvons distinguer trois cas pour calculer le champ discret $(F_d^1(n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ qui sont $x_{\Theta_{\max}} < x_a$, $x_{\Theta_{\max}} > x_b$ et finalement $x_a \leq x_{\Theta_{\max}} \leq x_b$. Par exemple, dans le cas où $x_{\Theta_{\max}} < x_a$, nous avons

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_d^1(n_a + k - 1) = \sum_{j=1}^{k-1+\mathcal{N}_{\Theta_{\max}}^a} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(n_{\Theta_{\max}} + j - 1). \tag{VIII.269}$$

La discrétisation de la mesure $\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}$ entre les deux points du maillage x_a et x_b avec le pas de discrétisation T_{dM} est définie par :

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(n_a + k - 1) = \int_{y_k}^{y_{k+1}} \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}. \tag{VIII.270}$$

Par conséquent, la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{D}_1$ est définie par :

$$\mathcal{D}_1[\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}](n_a + k - 1) = \alpha F_d^1(n_a + k - 1) - \tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(n_a + k - 1). \tag{VIII.271}$$

Concernant le calcule du champ discret $(\mathcal{D}_1[\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}](n_a+k-1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$, nous avons besoin de l'opération qui consiste à multiplier un scalaire par un champ discret, et de champ soustraction permettant de soustraire les deux champs $(\alpha F_d^1(n_a + k - 1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$ et $(\tilde{\rho}_{\mathcal{K}}^{\mathtt{I}}(n_a + k - 1))_{1\leq k\leq \mathcal{N}_a^b+1}$.

Nous allons maintenant décrire la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E]$ comme suit. Nous avons implémenté dans notre modélisation, la mesure soustraction et la mesure convolution, nous renvoyons le lecteur respectivement aux sous-sections VIII.3.2 et VIII.3.8. Pour cela, nous construisons la mesure m définie par :

$$m = -(\tilde{\kappa}_E - \tilde{\kappa}_E \star \tilde{\gamma}). \tag{VIII.272}$$

La primitive qui s'annule en un point $t_{\mathtt{I}}$ de la mesure m est un champ de bas niveau noté F_d^2. La discrétisation de ce champ F_d^2 avec le pas de discrétisation T_{dM} est obtenue par accumulation des valeurs de la mesure m. Soit $x_{t_{\mathtt{I}}}$ le point décalé inférieurement de $t_{\mathtt{I}}$ défini par :

$$x_{t_{\mathtt{I}}} = n_{t_{\mathtt{I}}} \times T_{\mathrm{dM}}. \tag{VIII.273}$$

Nous définissons la discrétisation du champ F_d^2 par :

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], F_d^2(n_a + k - 1) = \int_{x_{t_{\mathtt{I}}}}^{y_k} m. \tag{VIII.274}$$

L'opérateur $\mathcal{L}_1$ peut s'écrire d'une manière similaire à l'opérateur $\mathcal{D}_1$, en posant $m = \tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}$ puisque :

$$\mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E] = -m + \alpha \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t} m. \tag{VIII.275}$$

Comme, nous avons décrit précédemment la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{D}_1$, d'une manière similaire, la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est définie par :

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E](n_a + k - 1) = \alpha F_d^2(n_a + k - 1) - m(n_a + k - 1). \tag{VIII.276}$$

Finalement, nous avons besoin d'une somme de deux champs discrets, et d'une somme de deux mesures discrètes afin d'obtenir à partir de la discrétisation définies par les relations (VIII.271) et (VIII.276), l'égalité discrète suivante :

$$\forall k \in [\![1; \mathcal{N}_a^b + 1]\!], \tilde{\sigma}(n_a + k - 1) = \mathcal{L}_1[\tilde{\kappa}_E](n_a + k - 1) + \mathcal{D}_1[\tilde{\rho}^{\mathrm{I}}_{\mathcal{K}}](n_a + k - 1). \tag{VIII.277}$$

Bibliographie

[1] Tristan A Hearn et Lothar Reichel : Fast computation of convolution operations via low-rank approximation. *Applied Numerical Mathematics*, 75:136–153, 2014.

[2] Peter Schaller et Grigory Temnov : Efficient and precise computation of convolutions : applying fft to heavy tailed distributions. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, 8(2):187–200, 2008.

[3] Michael Mathieu, Mikael Henaff et Yann LeCun : Fast training of convolutional networks through ffts. *arXiv preprint arXiv :1312.5851*, 2013.

[4] Toshiya Tanaka, I Tomohiro, Shunsuke Inenaga, Hideo Bannai et Masanori Takeda : Computing convolution on grammar-compressed text. *In Data Compression Conference (DCC), 2013*, pages 451–460. IEEE, 2013.

[5] Jacques GAPAILLARD : *Intégration pour la licence.* Masson édition, 1997.

[6] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe.* Masson édition, 1997.

[7] Grégoire Allaire : *Analyse numérique et optimisation.* Les éditions de l'école polytechnique édition, 2007.

[8] Claude Wagschal : *Dérivation et intégration.* Hermann éditeurs édition, 2009.

[9] André Gramain : *Intégration.* Hermann Éditeurs des sciences et des arts édition, 1994.

[10] P. Barbe et M. Ledoux : *Probabilité.* Collection Enseignement sup. Mathématiques. EDP Sciences, 2007.

IX Conclusions et perspectives

Sommaire

IX.1 Le bilan de la thèse 230
IX.1.1 Production scientifique 230
IX.1.2 Production logicielle 230
IX.2 Conclusions et perspectives 230
Bibliographie 233

IX.1 Le bilan de la thèse

IX.1.1 Production scientifique

Du point de vue de la production scientifique, nous avons produit l'article [1] où nous avons construit et étudié le modèle financier continu en temps. Nous avons réalisé dans cet article des simulations numériques sur le modèle financier continu en temps avec Matlab pour montrer la cohérence et la consistance de ce modèle, et pour montrer que la modélisation continue est plus proche de la réalité. Ensuite, le modèle est utilisé sur des exemples simplifiés afin de montrer sa capacité à être utilisé pour établir une stratégie financière. Par conséquent, l'article [1] apporte une construction complète du modèle financier continu en temps et sa validation à travers des simulations.

IX.1.2 Production logicielle

Le premier objectif de la thèse était de développer les deux librairies LemfAN (Library Embedded Finance And Numerical Analysis) et Lemf (Library Embedded Finance). Nous avons validé les 2 librairies LemfAN et Lemf respectivement par les 2 librairies des tests unitaires LemfANTest et LemfTest. Chacune des 2 librairies LemfANTest et LemfTest contient un ensemble de projet de test pour examiner les résultats d'implémentation et pour couvrir une proportion importante du code de la librairie.

Par conséquent, la thèse a abouti à la réalisation d'une nouvelle version du logiciel SOFI en temps continu. Nous précisons que l'intégration des librairies LemfAN et Lemf dans SOFI a été effectuée par Davy Helard pour son projet de thèse [2]. Nous précisons que les résultats d'un modèle financier de SOFI continu construit sur des périodicités inconnues ont été validés par les experts financiers de MGDIS.

Nous avons montré dans la sous-section I.2.1 que la modélisation discrète ne permet pas d'utiliser des périodes plus petites qu'un mois pour des raisons de performances. Actuelement, la discrétisation au jour d'un modèle de SOFI continu s'étalant sur vingt ans est possible. De plus, un modèle de SOFI continu permet de réaliser une modélisation plus proche de la réalité en levant les contraintes de périodicité.

En conclusions, la validation de SOFI continu est un point très positif pour le résultat de la présente thèse, car tel était le premier objectif fixé par MGDIS.

Le second objectif de cette thèse est d'améliorer les performances des librairies LemfAN et Lemf. Cela a permis d'optimiser dans SOFI continu le temps de calcul, qui est souvent critique dans SOFI discret. Pour cela, nous avons discrétisé des mesures et des champs de la librairie LemfAN avec la bibliothèque de Microsoft dédiée au calcul parallèle appelée "Task Parallel Library".

IX.2 Conclusions et perspectives

Nous précisons que le logiciel SOFI est relativement monolithique et que les liaisons entre le moteur de calcul et les autres fonctionnalités (stockage, affichage, modélisation, etc.) sont complexes. Ce qui explique pourquoi il est difficile d'optimiser le temps de calcul et le nombre des opérations sur SOFI discret. Le fait de disposer d'un moteur de calcul en mode continu utilisable

		Présent					Futur
		2015	2016	2017	2018	2019	2020
Dépenses des opérations	0,00	100 000,00	250 000,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Acquisition travaux	0,00	0,00	50 000,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Remboursement de capital	0,00	3 625,00	14 500,00	14 500,00	14 500,00	14 500,00	14 500,00
Dépenses d'investissement	0,00	103 625,00	314 500,00	14 500,00	14 500,00	14 500,00	14 500,00
Amortissement des opérations	0,00	0,00	18 812,93	20 874,95	20 818,52	20 633,88	20 559,37
Subventions d'investissement	0,00	140 000,00	70 000,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Recettes affectées (TVA)	0,00	0,00	70 000,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Capital emprunté	0,00	145 000,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Recettes d'investissement	0,00	285 000,00	158 812,93	20 874,95	20 818,52	20 633,88	20 559,37

Semaine Mois Année

FIGURE IX.1 – Un prototype d'interface graphique sur SOFI continu

comme un service autonome va permettre de relancer fortement cette approche d'optimisation. Par conséquent, le moteur de calcul de SOFI en mode continu ouvre la porte à plusieurs réalisation, qui pourrait porter sur la robustesse.

Nous pouvons envisager plusieurs pistes entièrement nouvelles, comme la parallélisation, qui est le mode le plus logique d'accélération des traitements dans l'industrie logicielle. En effet, si nous parallélisons les calculs des librairies LemfAN et Lemf sur GPU (Graphical Processing Unit), nous réalisons une forte accélération des traitements pour aboutir à une solution optimisée. La parallélisation réduit l'ensemble des opérations demandées en autant de tâches indépendantes et les affecte sur des ressources multiples, de façon à diviser au mieux le temps de traitement total, avant de réagréger les résultats.

Comme la réalisation d'un projet nécessite des outils pour surveiller et ajuster son évolution au fil du temps, il était intéressant de développer un outil de contrôle afin de mener efficacement les objectifs du projet. Dans les articles [3, 4, 5], Frénod et Safa ont adapté le modèle financier continu en temps développé dans [1] afin de l'utiliser dans le cadre de la théorie de contrôle. Pour cela, ils ont mis en place une méthode de contrôle optimal de la phase d'élaboration de la stratégie, afin de mieux ajuster la mise en œuvre de l'implémentation du projet.

Nous pouvons envisager comme perspective de la thèse de développer une librairie de contrôle optimal afin de déterminer la stratégie d'emprunt optimale pour atteindre les objectifs d'un projet. Cette librairie va s'appuyer sur les objets développés dans les librairies LemfAN et Lemf.

Bibliographie

[1] Emmanuel Frénod et Tarik Chakkour : A continuous-in-time financial model. *Mathematical Finance Letters*, 2016.

[2] Davy Helard : *Un métamodèle de calcul en temps continu pour les systèmes d'aide à la décision appliqués à la planification financière.* Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 12/2015.

[3] Emmanuel Frénod, Pierre Menard et Mohamad Safa : Optimal control of a continuous-in-time financial model. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2013.

[4] Emmanuel Frénod, Pierre Menard et Mohamad Safa : Two optimization problems using a continuous-in-time financial model. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2014.

[5] Emmanuel Frénod et Mohamad Safa : Continuous-in-time financial model for public communities. pages 1–10, 2013.

A Complément logiciel

Sommaire

A.1 Les mesures de la librairie LemfAN . . . 237
A.1.1 Les mesures simples . . . 237
A.1.1.1 Mesure constante . . . 237
A.1.1.2 Mesure affine . . . 238
A.1.1.3 Mesure quadratique . . . 239
A.1.1.4 Mesure polynomiale . . . 240
A.1.1.5 Mesure gaussienne . . . 242
A.1.1.6 Mesure nulle . . . 243
A.1.1.7 Mesure exponentielle . . . 244
A.1.1.8 Mesure de Dirac . . . 245
A.1.1.9 Mesure sinus . . . 246
A.1.1.10 Mesure cosinus . . . 247
A.1.2 Les mesures composées . . . 249
A.1.2.1 Mesure translatée . . . 249
A.1.2.2 Mesure produit . . . 251
A.1.2.3 Mesure division . . . 252
A.1.2.4 Mesure somme . . . 254
A.1.2.5 Mesure soustraction . . . 256
A.1.2.6 Mesure convolution . . . 258
A.1.2.7 Mesure par morceaux . . . 263
A.2 Les champs de la librairie LemfAN . . . 267
A.2.1 Les champs simples . . . 267
A.2.1.1 Champ constant . . . 267
A.2.1.2 Champ affine . . . 268
A.2.1.3 Champ quadratique . . . 269
A.2.1.4 Champ polynomial . . . 270
A.2.1.5 Champ null . . . 271
A.2.1.6 Champ exponentiel . . . 272
A.2.1.7 Champ sinus . . . 273
A.2.1.8 Champ cosinus . . . 274
A.2.2 Les champs composés . . . 274
A.2.2.1 Champ translaté . . . 274
A.2.2.2 Champ somme . . . 276
A.2.2.3 Champ soustraction . . . 277
A.2.2.4 Champ produit . . . 279
A.3 Les tests unitaires sur mesures par morceaux . . . 279

A.3.1 Dans la librairie Lemf 280
A.3.2 Dans la librairie LemfAN 282

A.1 Les mesures de la librairie LemfAN

A.1.1 Les mesures simples

A.1.1.1 Mesure constante

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class ConstantMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IConstantMeasure
    {   //Déclaration de l'attribut Constant pour construire
        //une mesure constante
        public double Constant { get; private set; }
        //Définition d'une mesure constante de constante constant
        public ConstantMeasureAN(double constant)
        {
            this.Constant = constant;
        }
        //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes de la mesure constante
        //en utilisant la relation (VIII.31)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            double value = Constant * (double)discretizedAxeSegment.Step;
            return Task.FromResult<IEnumerable<double>>
            (Enumerable.Repeat(value, discretizedAxeSegment.ValuesCount));
        }
        //Une mesure constante définie sur ℝ n'a pas d'enveloppe
        //convexe du support puisqu'il est le singleton {∅}
        //(défini par new Interval()) si et seulement si Constant
        //est nulle. Sinon, son enveloppe convexe du support
        //est ℝ (défini par null).
        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            bool isCompactSupported = Constant == 0;
            //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état vrai,
            //interval est le singleton {∅}
            if (isCompactSupported)
            {
                interval = new Interval();
            }
            //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état faux,
            //interval est l'ensemble ℝ
            else
            {
                interval = null;
            }
            //Retourne le booléen isCompactSupported
            return isCompactSupported;
        }
    }
```

```
}
```

A.1.1.2 Mesure affine

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class AffineMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IAffineMeasure
    {
        //Déclaration des attributs Constant et Coefficient pour construire
        //une mesure affine
        public double Constant { get; private set; }
        public double Coefficient { get; private set; }
        //Définition d'une mesure affine de pente constant et de coefficient
        //directeur coefficient
        public AffineMeasureAN(double constant, double coefficient)
        {
            this.Constant = constant;
            this.Coefficient = coefficient;
        }

        //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes de la mesure affine
        //en utilisant la relation (VIII.34)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                //count est le nombre des valeurs discrètes
                int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount;
                //step est le pas de discrétisation
                double step = (double)discretizedAxeSegment.Step;
                double beginning = (double)discretizedAxeSegment.
                ActualBeginning;
                double value2 = Coefficient * step * step;
                double value1 = (Constant + Coefficient * beginning) * step
                + value2 / 2;
                //values est l'ensemble des valeurs discrètes de la mesure
                //affine définies à partir de la relation (VIII.34)
                List<double> values = new List<double>(count);
                //Remplissage des valeurs discrètes
                for (int i = 0; i < count; i++)
                {
                    values.Add(value1 + i * value2);
                }

                return values;
            });
        }
        //Une mesure affine définie sur ℝ n'a pas d'enveloppe
        //convexe du support puisqu'il est le singleton {∅}
        //(défini par new Interval()) si et seulement si Constant
        //et Coefficient sont nulles. Sinon, son enveloppe  convexe du
        //support ℝ (défini par null).
```

```
58          public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
59          {
60              bool isCompactSupported = Constant == 0 && Coefficient == 0;
61              //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état vrai,
62              //interval est le singleton {∅}
63              if (isCompactSupported)
64              {
65                  interval = new Interval();
66              }
67              //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état faux,
68              //interval est l'ensemble ℝ
69              else
70              {
71                  interval = null;
72              }
73              //Retourne le booléen isCompactSupported
74              return isCompactSupported;
75          }
76
77      }
78  }
```

A.1.1.3 Mesure quadratique

```
1   using System;
2   using System.Collections.Generic;
3   using System.Linq;
4   using System.Runtime.CompilerServices;
5   using System.Text;
6   using System.Threading.Tasks;
7
8   namespace MathEmbeddedAN
9   {
10      class QuadraticMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IQuadraticMeasure
11      {
12          //Déclaration des attributs Constant, FirstDegreeCoefficient et
13          //SecondDegreeCoefficient pour construire une mesure quadratique
14          public double Constant { get; set; }
15          public double FirstDegreeCoefficient { get; set; }
16          public double SecondDegreeCoefficient { get; set; }
17          //Définition d'une mesure quadratique de constante constant,
18          //de coefficient du premier degré firstDegreeCoefficient et de
19          //coefficient du second degré secondDegreeCoefficient
20          public QuadraticMeasureAN(double constant, double firstDegreeCoefficient
21          , double secondDegreeCoefficient)
22          {
23              this.Constant = constant;
24              this.FirstDegreeCoefficient = firstDegreeCoefficient;
25              this.SecondDegreeCoefficient = secondDegreeCoefficient;
26          }
27          //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
28          //générant les valeurs discrètes de la mesure quadratique
29          //en utilisant la relation (VIII.37)
30          public override Task<IEnumerable<double>>
31          EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
32          {
33              return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
34              {
35                  //count est le nombre des valeurs discrètes
36                  int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount;
37                  //step est le pas de discrétisation
```

```
                double step = (double)discretizedAxeSegment.Step;
                //beginning représente la borne inférieure décalée étant
                //calculée en utilisant la relation (VIII.19)
                double beginning = (double)discretizedAxeSegment.
                ActualBeginning;
                double step2 = step * step;
                double step3 = step2 * step;
                double beginning2 = beginning * beginning;
                double value1 = (Constant + FirstDegreeCoefficient * beginning)
                * step + FirstDegreeCoefficient * step2 / 2 +
                SecondDegreeCoefficient * ((step * beginning2)
                + (step3 / 3) + (step2 * beginning));
                double value2 = FirstDegreeCoefficient * step2
                + SecondDegreeCoefficient * step2 * (2 * beginning + step);
                double value3 = SecondDegreeCoefficient * step3;
                //values est l'ensemble des valeurs discrètes définies dans
                //la relation (VIII.37)
                List<double> values = new List<double>(count);
                for (int i = 0; i < count; i++)
                {
                    values.Add(value1 + i * value2 + i * i * value3);
                }

                return values;
            });
        }

        //Une mesure quadratique définie sur ℝ n'a pas d'enveloppe
        //convexe du support puisqu'il est le singleton {∅}
        //(défini par new Interval()) si et seulement si Constant,
        //FirstDegreeCoefficient et SecondDegreeCoefficient sont nulles.
        //Sinon, son enveloppe convexe du support est ℝ (défini par null).
        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            bool isCompactSupported =  Constant ==0  &&
            FirstDegreeCoefficient == 0 && SecondDegreeCoefficient == 0;
            //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état vrai,
            //interval est le singleton {∅}
            if (isCompactSupported)
            {
                interval = new Interval();
            }
            //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état faux,
            //interval est l'ensemble ℝ
            else
            {
                interval = null;
            }
            //Retourne le booléen isCompactSupported
            return isCompactSupported;
        }
    }
}
```

A.1.1.4 Mesure polynomiale

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
```

```
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class PolynomialMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IPolynomialMeasure
    {
        //Déclaration de l'attribut coefficients
        //pour construire une mesure polynomiale
        public IEnumerable<double> Coefficients { get; private set; }
        //Définition d'une mesure polynomiale de coefficients définis par
        //les valeurs coefficients
        public PolynomialMeasureAN(IEnumerable<double> coefficients)
        {
            this.Coefficients = coefficients;
        }
        //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes de la mesure polynomiale
        //en utilisant la relation (VIII.40)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                return EvaluateDiscreteEnum(discretizedAxeSegment);
            });
        }

        private IEnumerable<double>
        EvaluateDiscreteEnum(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            double stepBeginning = (double)discretizedAxeSegment.Frontiers.
            First();
            foreach (double stepEnd in discretizedAxeSegment.Frontiers.Skip(1))
            {
                int i = 1;
                double evaluation = 0;
                foreach (double OneCoefficient in Coefficients)
                {
                //evaluation est l'une des valeurs discrètes définies dans
                //la relation (VIII.40)
                    evaluation += (OneCoefficient / i) * (Math.Pow(stepEnd, i)
                     - Math.Pow(stepBeginning, i));
                    i++;
                }
                yield return evaluation;
                stepBeginning = stepEnd;
            }
        }
        //Une mesure polynomiale définie sur ℝ n'a pas d'enveloppe convexe
        //du support puisqu'il est le singleton {∅} (défini par
        //new Interval()) si et seulement si les valeurs Coefficients sont
        //nulles. Sinon, son enveloppe convexe du support est ℝ
        //(défini par null).
        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            bool isCompactSupported = Coefficients.All() == 0;
            //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état vrai,
            //interval est le singleton {∅}
            if (isCompactSupported)
            {
                interval = new Interval();
            }
            //Lorsque le booléen isCompactSupported est à l'état faux,
            //interval est l'ensemble ℝ
            else
```

```
            {
                interval = null;
            }
            //Retourne le booléen isCompactSupported
            return isCompactSupported;
        }
    }
}
```

A.1.1.5 Mesure gaussienne

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class GaussianMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IGaussianMeasure
    {   //Déclaration des attributs Mean et StandardDeviation
        //pour construire une mesure gaussienne
        public double Mean { get; set; }
        public double StandardDeviation { get; set; }
        public Func<double, double> GausianFunction;
        //Définition d'une mesure gaussienne d'espérance mean
        //et d'écart type standardDeviation
        public GaussianMeasureAN(double mean, double standardDeviation)
        {
            this.Mean = mean;
            this.StandardDeviation = standardDeviation;
            //Définition de la fonction gaussienne  GausianFunction
            //d'espérance Mean et d'écart type StandardDeviation
            GausianFunction = x => (1 / (StandardDeviation
            * Math.Sqrt(2 * Math.PI)))* Math.Exp(-Math.Pow(x - Mean, 2)
            / (2 * Math.Pow(StandardDeviation, 2)));
        }

        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                return EvaluateDiscreteEnum(discretizedAxeSegment);
            });
        }

        private IEnumerable<double>
        EvaluateDiscreteEnum(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            double stepBeginning = (double)discretizedAxeSegment.Frontiers.
            First();
            //on parcourt chaque intervalle de discrétisation
            //[stepBeginning, stepEnd] pour approcher l'intégration
            //de la densité gaussienne entre une borne inférieure
            //stepBeginning et une borne supérieure stepEnd
            foreach (double stepEnd in discretizedAxeSegment.Frontiers.Skip(1))
            {
                yield return Integrate.OnClosedInterval(GausianFunction,
                stepBeginning, stepEnd, 1);
```

```
                stepBeginning = stepEnd;
            }
        }

        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            interval = null;
            return false;
        }
    }
}
```

A.1.1.6 Mesure nulle

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class NullMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, INullMeasure
    {
        //Déclaration d'un objet constant appelé instance de type NullMeasureAN
        private static readonly NullMeasureAN instance = new NullMeasureAN();

        private NullMeasureAN()
        {

        }
        //La variable constant Instance de type  NullMeasureAN est
        //en lecture pour retourner la variable instance.
        public static NullMeasureAN Instance
        {
            get
            {
                return instance;
            }
        }
        //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes de la mesure nulle
        //en utilisant la relation (VIII.28)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            return Task.FromResult<IEnumerable<double>>
            (Enumerable.Repeat(0.0, discretizedAxeSegment.ValuesCount));
        }

        //Une mesure nulle définie sur ℝ n'a pas d'enveloppe
        //convexe du support puisqu'il est le singleton {∅}
        //(défini par new Interval())
        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {   //interval est le singleton {∅}
            interval = new Interval();
            //Retourne l'état vrai
            return true;
        }
```

```
47      }
48  }
```

A.1.1.7 Mesure exponentielle

```
1   using System;
2   using System.Collections.Generic;
3   using System.Linq;
4   using System.Runtime.CompilerServices;
5   using System.Text;
6   using System.Threading.Tasks;
7
8   namespace MathEmbeddedAN
9   {
10      class ExponentialMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IExponentialMeasure
11      {
12          //Déclaration de l'attribut Coefficient pour construire
13          //une mesure exponentielle
14          public double Coefficient { get; private set; }
15          //Définition d'une mesure exponentielle de coefficient coefficient
16          public ExponentialMeasureAN(double coefficient)
17          {
18              this.Coefficient = coefficient;
19          }
20          //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
21          //générant les valeurs discrètes de la mesure  exponentielle
22          //en utilisant la relation (VIII.52)
23          public override Task<IEnumerable<double>>
24          EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
25          {   //Déclaration d'une tâche de calcul task
26              Task<IEnumerable<double>> task;
27              //La tâche de calcul task est la tâche de discrétisation de
28              //la mesure exponentielle lorsque Coefficient est nulle
29              if (Coefficient == 0)
30              {
31                  task = Task.FromResult<IEnumerable<double>>
32                  (Enumerable.Repeat((double)
33                  discretizedAxeSegment.ObservationStepMinimal,
34                  discretizedAxeSegment.ValuesCount));
35              }
36              //La tâche de calcul task est la tâche de discrétisation de
37              //la mesure exponentielle lorsque Coefficient est non nulle
38              else
39              {
40                  task = Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
41                  {
42                      return EvaluateDiscreteEnum(discretizedAxeSegment);
43                  });
44              }
45              //Retourne la tâche de calcul task
46              return task;
47          }
48          //La méthode privée EvaluateDiscreteEnum retourne la discrétisation de
49          //la mesure exponentielle lorsque la constante est non nulle.
50          private IEnumerable<double>
51          EvaluateDiscreteEnum(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
52          {
53              double expBeginning = Math.Exp(Coefficient * (double)
54              discretizedAxeSegment.Frontiers.First());
55              foreach (double stepEnd in discretizedAxeSegment.Frontiers.Skip(1))
56              {
```

```
                double expEnd = Math.Exp(Coefficient * stepEnd);
                yield return (expEnd - expBeginning) / Coefficient;
                expBeginning = expEnd;
            }
        }

        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            interval = null;
            return false;
        }
    }
}
```

A.1.1.8 Mesure de Dirac

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class DiracMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, IDiracMeasure
    {
        //Déclaration des attributs Location et Mass
        public decimal Location { get; private set; }
        public double Mass { get; set; }
        //Définition d'une mesure de Dirac localisée au point Location,
        //de masse Mass
        public DiracMeasureAN(decimal location, double masse)
        {
            this.Location = location;
            this.Mass = masse;
        }

        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                IEnumerable<double> values;

                int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount;
                //Détermination de l'index de la position de Dirac par
                //rapport au maillage universel
                int locationIndex = discretizedAxeSegment.IndexOf(Location);
                if (0 <= locationIndex && locationIndex < count)
                {
                    values = ZeroesAndMass(count, locationIndex);
                }
                else
                {
                    values = Enumerable.Repeat(0.0, count);
                }
                //values est l'ensemble des valeurs discrètes définies dans
                //la relation (VIII.54)
                return values;
            });
```

```
        }

        //Une fonction qui retourne une liste de valeurs constituée
        //d'une masse et des valeurs nulles
        private IEnumerable<double> ZeroesAndMass(int count, int index)
        {
            int beforeCount = Math.Min(index, count);
            for (int i = 0; i < beforeCount; i++)
            {
                yield return 0;
            }
            yield return Mass/discretizedAxeSegment.Step;
            for (int i = index + 1; i < count; i++)
            {
                yield return 0;
            }
        }
        //Une mesure de Dirac a une enveloppe convexe du support qui est
        //le singleton {Location} si et seulement si la masse n'est pas
        //nulle.  Si la masse est nulle, son  enveloppe convexe du support
        //est le singleton {∅} (défini par new Interval())
        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            if (Mass == 0)
            {
                interval = new Interval();
            }
            else
            {
                interval = new Interval(Location, Location);
            }
            //Retourne l'état vrai puisque un singleton ou
            //un ensemble vide est compact
            return true;
        }
    }
}
```

A.1.1.9 Mesure sinus

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class SinusMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, ISinusMeasure
    {
        //Déclaration des attributs Constant et Coefficient pour construire
        //une mesure sinus
        public double Constant { get; private set; }
        public double Coefficient { get; private set; }
        //Définition d'une mesure sinus d'une fonction affine de pente
        //constant et de coefficient directeur coefficient
        public SinusMeasureAN(double constant, double coefficient)
        {
            this.Constant = constant;
            this.Coefficient = coefficient;
```

```
22          }
23
24          //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul générant
25          //les valeurs discrètes de la mesure sinus en utilisant
26          //la relation (VIII.43)
27          public override Task<IEnumerable<double>>
28          EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
29          {   /Déclaration d'une tâche de calcul task
30              Task<IEnumerable<double>> task;
31              //La tâche de calcul task est la tâche de discrétisation de
32              //la mesure sinus lorsque Coefficient est nulle
33              if (Coefficient == 0)
34              {
35                  task = Task.FromResult<IEnumerable<double>>
36                  (Enumerable.Repeat(Math.Sin(Constant) * (double)
37                  discretizedAxeSegment.Step, discretizedAxeSegment.ValuesCount));
38              }
39              //La tâche de calcul task est la tâche de discrétisation de
40              //la mesure sinus lorsque Coefficient est non nulle
41              else
42              {
43                  task = Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
44                  {
45                      return EvaluateDiscreteEnum(discretizedAxeSegment);
46                  });
47              }
48              //Retourne la tâche de calcul task
49              return task;
50          }
51          //EvaluateDiscreteEnum est une méthode privée qui retourne la
52          //discrétisation de la mesure sinus en utilisant la relation (VIII.43)
53          //lorsque Coefficient n'est pas nulle.
54          private IEnumerable<double>
55          EvaluateDiscreteEnum(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
56          {
57              double cosBeginning = Math.Cos(Coefficient *
58             (double)discretizedAxeSegment.Frontiers.First() + Constant);
59              foreach (double stepEnd in discretizedAxeSegment.Frontiers.Skip(1))
60              {
61                  double cosEnd = Math.Cos(Coefficient * stepEnd + Constant);
62                  yield return (cosBeginning - cosEnd) / Coefficient;
63                  cosBeginning = cosEnd;
64              }
65          }
66
67          public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
68          {
69              interval = null;
70              return false;
71          }
72      }
73  }
```

A.1.1.10 Mesure cosinus

```
1  using System;
2  using System.Collections.Generic;
3  using System.Linq;
4  using System.Runtime.CompilerServices;
5  using System.Text;
6  using System.Threading.Tasks;
```

```
7
8   namespace MathEmbeddedAN
9   {
10      class CosinusMeasureAN : AbstractLeafMeasureAN, ICosinusMeasure
11      {
12          //Déclaration des attributs Constant et Coefficient en mode
13          //lecture public et écriture privée pour construire une mesure
14          //cosinus de constante Constant et de coefficient Coefficient
15          public double Constant { get; private set; }
16          public double Coefficient { get; private set; }
17          //Définition d'une mesure cosinus d'une fonction affine de pente
18          //constant et de coefficient directeur coefficient
19          public CosinusMeasureAN(double constant, double coefficient)
20          {
21              this.Constant = constant;
22              this.Coefficient = coefficient;
23          }
24          //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul générant
25          //les valeurs discrètes de la mesure cosinus en utilisant
26          //la relation (VIII.46)
27          public override Task<IEnumerable<double>>
28          EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
29          {   /Déclaration d'une tâche de calcul task
30              Task<IEnumerable<double>> task;
31              //La tâche de calcul task est la tâche de discrétisation de
32              //la mesure cosinus lorsque Coefficient est nulle
33              if (Coefficient == 0)
34              {
35                  task = Task.FromResult<IEnumerable<double>>
36                  (Enumerable.Repeat(Math.Cos(Constant) * (double)
37                  discretizedAxeSegment.Step, discretizedAxeSegment.ValuesCount));
38              }
39              //La tâche de calcul task est la tâche de discrétisation de
40              //la mesure cosinus lorsque Coefficient est non nulle
41              else
42              {
43                  task = Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
44                  {
45                      return EvaluateDiscreteEnum(discretizedAxeSegment);
46                  });
47              }
48              //Retourne la tâche de calcul task
49              return task;
50          }
51          //EvaluateDiscreteEnum est une méthode privée qui retourne la
52          //discrétisation de la mesure cosinus en utilisant la relation
53          //(VIII.46) lorsque Coefficient n'est pas nulle.
54          private IEnumerable<double>
55          EvaluateDiscreteEnum(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
56          {
57              double sinBeginning = Math.Sin(Coefficient *
58              (double)discretizedAxeSegment.Frontiers.First() + Constant);
59              foreach (double stepEnd in discretizedAxeSegment.Frontiers.Skip(1))
60              {
61                  double sinEnd = Math.Sin(Coefficient * stepEnd + Constant);
62                  yield return (sinEnd - sinBeginning) / Coefficient;
63                  sinBeginning = sinEnd;
64              }
65          }
66
67          public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
68          {
69              interval = null;
70              return false;
71          }
```

```
    }
}
```

A.1.2 Les mesures composées

A.1.2.1 Mesure translatée

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class ShiftMeasureAN : AbstractComposedMeasureAN, IShiftMeasure
    {
        //Déclaration des attributs constant et measure pour translater
        //la mesure measure de type IInternalMeasureAN par une valeur
        //constant de type décimal
        private IInternalMeasureAN measure;
        private decimal constant;
        //Définition d'une mesure translatée de la mesure measure par la
        //valeur constant
        public ShiftMeasureAN(IInternalMeasureAN measure, decimal constant)
        {
            this.measure = measure;
            this.constant = constant;
        }
        //La méthode EvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul générant
        //les valeurs discrètes de la mesure translatée
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            //Déclaration et définition du maillage universel
            //childDiscretizedAxeSegment translatée
            //du maillage universel discretizedAxeSegment
            DiscretizedAxeSegment childDiscretizedAxeSegment;
            childDiscretizedAxeSegment = new DiscretizedAxeSegment
                (
                    discretizedAxeSegment.ExactBeginning - constant,
                    discretizedAxeSegment.ExactEnd - constant,
                    discretizedAxeSegment.ObservationStepMinimal,
                    discretizedAxeSegment.SubStepCount
                );

            //Retourne la discrétisation de la mesure measure entre
            //les points du maillage universel childDiscretizedAxeSegment
            return measure.EvaluateDiscrete(childDiscretizedAxeSegment);
        }

        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get { yield return measure; }
        }

        public IInternalMeasureAN Measure
        {
            get { return measure; }
```

```
            set
            {
                OnChildRemoved(measure);
                measure = value;
                OnChildAdded(measure);
                Invalidate();
            }
        }

        public decimal Constant
        {
            get { return constant; }
            set
            {
                constant = value;
                Invalidate();
            }
        }

        public decimal Coefficient
        {
            get { return coefficient; }
            set
            {
                coefficient = value;
                Invalidate();
            }
        }

        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            bool isCompactSupported;

            Interval childInterval;
            isCompactSupported = Measure.IsCompactSupported(out childInterval);
            if (isCompactSupported)
            {
                if (childInterval.IsEmpty)
                {
                    interval = childInterval;
                }
                else
                {
                    interval = new Interval
                    (
                        childInterval.Bounds.Beginning + constant,
                        childInterval.Bounds.End + constant
                    );
                }
            }
            else
            {
                interval = null;
            }

            return isCompactSupported;
        }

        IMeasureAN IShiftMeasure.Measure
        {
            get { return Measure; }
            set { Measure = (IInternalMeasureAN)value; }
        }
    }
}
```

A.1.2.2 Mesure produit

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class ProductMeasureAN : AbstractCachedMeasureAN, IProductMeasure
    {
        //Déclaration d'une liste privée de mesures de type IInternalMeasureAN
        private IEnumerable<IInternalMeasureAN> children;
        //Définition d'une mesure produit d'un tableau de mesures de type
        //IInternalMeasureAN
        public ProductMeasureAN(params IInternalMeasureAN[] measures)
            : this((IEnumerable<IInternalMeasureAN>)measures)
        {
        }
        //Définition d'une mesure produit d'une liste de mesures de type
        //IInternalMeasureAN
        public ProductMeasureAN(IEnumerable<IInternalMeasureAN> measures)
            : base(measures)
        {
            this.children = measures;
        }
        //La méthode DoEvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes de la mesure produit en
        //utilisant la relation (VIII.68)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        DoEvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //Définition d'une liste de tâche de calcul childrenTasks
            //dont chacune contient les valeurs discrètes de chaque
            //mesure de la liste children
            Task<IEnumerable<double>>[] childrenTasks = children.Select
            (m => m.EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment)).ToArray();
            //Retourne une tâche de calcul générant la mesure
            //produit discrète
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                double step = (double)discretizedAxeSegment.Step;
                return childrenTasks.Select(t => t.Result).Aggregate
                ((values1, values2) => values1.Zip(values2, (value1, value2)
                => value1 * value2 / step)).ToArray();
            });
        }
        //La propriété Children retourne la liste des mesures children
        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get { return children; }
        }

        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            bool isCompactSupported = true;

            interval = new Interval(decimal.MinValue, decimal.MaxValue);
            foreach (IInternalMeasureAN child in children)
            {
```

```
60                  //Déclaration d'un objet childBounds de type Interval
61                  Interval childBounds;
62                  //Récupération de l'enveloppe convexe du support de
63                  //chaque mesure child de la liste children si elle
64                  //existe définie par childBounds
65                  bool isChildSupported = child.IsCompactSupported
66                  (out childBounds);
67                  isCompactSupported |= isChildSupported;
68                  if (isChildSupported)
69                  {   //L'enveloppe convexe du support de la mesure produit
70                      //est définie par l'intersection de toutes les enveloppes
71                      //convexes du support childBounds
72                      interval = interval.Intersection(childBounds);
73                      if (interval.IsEmpty)
74                      {
75                          isCompactSupported = true;
76                          break;
77                      }
78                  }
79              }
80              //Ce cas produit lorsque toutes les mesures child de la liste
81              //children ne possèdent pas une enveloppe convexe du support.
82              //On génère l'ensemble vide  {∅} (défini par new
83              //Interval()) lorsque isCompactSupported est à l'état faux
84              if (!isCompactSupported)
85              {
86                  interval = null;
87              }
88
89              return isCompactSupported;
90          }
91          //Propriété Measures qui retourne la liste des mesures children
92          public IEnumerable<IInternalMeasureAN> Measures
93          {
94              get
95              {
96                  return children;
97              }
98              set
99              {
100                 foreach (var child in children)
101                 {
102                     OnChildRemoved(child);
103                 }
104                 children = value;
105                 foreach (var child in children)
106                 {
107                     OnChildAdded(child);
108                 }
109                 Invalidate();
110             }
111         }
112     }
113 }
```

A.1.2.3 Mesure division

```
1  using System;
2  using System.Collections.Generic;
3  using System.Linq;
4  using System.Runtime.CompilerServices;
```

```
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class DivisionMeasureAN : AbstractCachedMeasureAN, IDivisionMeasure
    {
        //Déclaration des attributs left et right pour construire une
        //mesure division
        private IInternalMeasureAN left;
        private IInternalMeasureAN right;
        //Définition de la mesure division DivisionMeasureAN de la mesure
        //left par la mesure right
        public DivisionMeasureAN(IInternalMeasureAN left,
        IInternalMeasureAN right): base(right, left)
        {
            this.left = left;
            this.right = right;
        }
        //La méthode DoEvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul générant
        //les valeurs discrètes de la mesure division en utilisant
        //la relation (VIII.76)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        DoEvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //La tâche de calcul leftTask génère les valeurs
            //discrètes de la mesure left
            Task<IEnumerable<double>> leftTask = left.
            EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);
            //La tâche de calcul rightTask génère les valeurs
            //discrètes de la mesure right
            Task<IEnumerable<double>> rightTask = right.
            EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);
            //La tâche de calcul définie par la division
            //de chaque valeur de la tâche leftTask par chaque valeur
            //de la tâche rightTask et par le pas de discrétisation step
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                double step = (double)discretizedAxeSegment.Step;
                return leftTask.Result.Zip(rightTask.Result, (leftValue,
                rightValue) => leftValue * step / rightValue).ToArray();
            });
        }
        //La propriété Children retourne la liste des mesures constituées
        //de left et de right
        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get
            {
                yield return left;
                yield return right;
            }
        }
        //La méthode Left de l'interface IDivisionMeasure retourne
        //la mesure left
        public IInternalMeasureAN Left
        {
            get { return left; }
        }
        //La méthode Right de l'interface IDivisionMeasure retourne
        //la mesure right
        public IInternalMeasureAN Right
        {
            get { return right; }
        }

```

```
        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            interval = new Interval();
            return true;
        }

        IMeasureAN IDivisionMeasure.Left
        {
            get { return Left; }
        }

        IMeasureAN IDivisionMeasure.Right
        {
            get { return Right; }
        }
    }
}
```

A.1.2.4 Mesure somme

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class SumMeasureAN : AbstractCachedMeasureAN, ISumMeasure
    {   //Déclaration d'une liste de mesures children de type
        //IInternalMeasureAN pour construire une mesure somme
        private IEnumerable<IInternalMeasureAN> children;
        //Définition d'une somme d'un tableau de mesures de type
        //IInternalMeasureAN
        public SumMeasureAN(params IInternalMeasureAN[] measures)
            : this((IEnumerable<IInternalMeasureAN>)measures)
        {
        }
        //Définition d'une somme d'une liste de mesures de type
        //IInternalMeasureAN
        public SumMeasureAN(IEnumerable<IInternalMeasureAN> measures)
        :base(measures)
        {
            this.children = measures;
        }
        //La méthode DoEvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul générant
        //les valeurs discrètes de la mesure somme en utilisant
        //la relation (VIII.61)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        DoEvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //Déclaration d'une tâche de calcul
            Task<IEnumerable<double>> task;
            //Si la liste de mesures children est vide, la tâche de calcul
            //task est une tâche de calcul générant un ensemble de valeurs
            //nulles
            if (!children.Any())
            {
                task = NullMeasureAN.Instance.
                EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);
            }
```

```
42              //Si la liste de mesures children contient une seule mesure
43              //qui est la mesure children.First(), la tâche de calcul task
44              //est la tâche générant les valeurs de la discrétisation
45              //de cette mesure
46              else if (children.Count() == 1)
47              {
48                  task = children.First().EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);
49              }
50              //Si la liste de mesures children contient plus d'une mesure,
51              //on définit une liste de tâche de calcul childrenTasks dont
52              //chacune contient les valeurs discrètes de chaque mesure de
53              //la liste children. Ensuite, on somme les valeurs de la
54              //tâche childrenTasks
55              else
56              {
57                  Task<IEnumerable<double>>[] childrenTasks = children.
58                  Select(m => m.EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment)).
59                  ToArray();
60                  task = Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
61                  {
62                      return childrenTasks.Select(t => t.Result).Aggregate(
63                      (values1, values2) => values1.Zip(values2,
64                      (value1, value2) => value1 + value2)).ToArray();
65                  });
66              }
67              //Retourne la tâche de calcul task
68              return task;
69          }
70          //La propriété Children retourne la liste des mesures children
71          public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
72          {
73              get { return children; }
74          }
75
76          public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
77          {
78              bool isCompactSupported = true;
79
80              interval = new Interval();
81              foreach (IInternalMeasureAN child in children)
82              {   //Déclaration d'un objet childBounds de type Interval
83                  Interval childBounds;
84                  //Récupération de l'enveloppe convexe du support de
85                  //chaque mesure child de la liste children si elle
86                  //existe définie par childBounds
87                  isCompactSupported &= child.IsCompactSupported(out childBounds);
88                  //Lorsque la mesure somme possède une enveloppe convexe
89                  //du support, alors elle est définie par l'union de
90                  //toutes les enveloppes convexes du support childBounds
91                  //des mesures children
92                  if (isCompactSupported)
93                  {
94                      interval = interval.Union(childBounds);
95                  }
96                  //Lorsque la mesure somme ne possède pas une enveloppe convexe
97                  //du support, l'enveloppe convexe du support de la mesure somme
98                  //est le singleton {∅} (défini par null)
99                  else
100                 {
101                     interval = null;
102                     break;
103                 }
104             }
105
106             return isCompactSupported;
```

```
107         }
108
109         public IEnumerable<IInternalMeasureAN> Measures
110         {
111             get
112             {
113                 return children;
114             }
115             set
116             {
117                 foreach (var child in children)
118                 {
119                     OnChildRemoved(child);
120                 }
121                 children = value;
122                 foreach (var child in children)
123                 {
124                     OnChildAdded(child);
125                 }
126                 Invalidate();
127             }
128         }
129     }
130 }
```

A.1.2.5 Mesure soustraction

```
1  using System;
2  using System.Collections.Generic;
3  using System.Linq;
4  using System.Runtime.CompilerServices;
5  using System.Text;
6  using System.Threading.Tasks;
7
8  namespace MathEmbeddedAN
9  {
10     class SubstractionMeasureAN : AbstractCachedMeasureAN, ISubstractionMeasure
11     {
12         //Déclaration des attributs left et right de type IInternalMeasureAN
13         //pour construire une mesure soustraction
14         private IInternalMeasureAN left;
15         private IInternalMeasureAN right;
16
17         //Définition d'un constructeur de copie pour soustraire la
18         //mesure left de la mesure right
19         public SubstractionMeasureAN(IInternalMeasureAN left,
20         IInternalMeasureAN right): base(right, left)
21         {
22             this.left = left;
23             this.right = right;
24         }
25
26         //La méthode DoEvaluateDiscrete retourne une tâche de calcul générant
27         //les valeurs discrètes de la mesure soustraction en utilisant
28         //la relation (VIII.67)
29         public override Task<IEnumerable<double>>
30         DoEvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
31         {   //La tâche de calcul leftTask génère
32             //les valeurs discrètes de la mesure left
33             Task<IEnumerable<double>> leftTask = left.
34             EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);
```

```
            //La tâche de calcul rightTask génère
            //les valeurs discrètes de la mesure right
            Task<IEnumerable<double>> rightTask = right.
            EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);
            //Retourne une tâche de calcul définie par la différence
            //entre chaque valeur de la tâche leftTask et chaque valeur
            //de la tâche rightTask
            return Task.Factory.StartNew<IEnumerable<double>>(() =>
            {
                return leftTask.Result.Zip(rightTask.Result,
                (leftValue, rightValue) => leftValue - rightValue).ToArray();
            });

        }
        //La propriété Children retourne la liste des mesures constituées
        //de left et de right
        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get
            {
                yield return left;
                yield return right;
            }
        }

        public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
        {
            bool isCompactSupported = true;

            interval = new Interval();
            foreach (IInternalMeasureAN child in Children)
            {
                Interval childBounds;
                isCompactSupported &= child.IsCompactSupported(out childBounds);
                interval = interval.Union(childBounds);

                if (!isCompactSupported)

                {
                    break;
                }
            }


            return isCompactSupported;
        }
        //La méthode Left de l'interface ISubstractionMeasure retourne
        //la mesure left
        public IInternalMeasureAN Left

        {
            get { return left; }
        }
        //La méthode Right de l'interface ISubstractionMeasure retourne
        //la mesure right
        public IInternalMeasureAN Right
        {
            get { return right; }
        }

        IMeasureAN ISubstractionMeasure.Left
        {
            get { return Left; }
        }

```

```
100
101         IMeasureAN ISubstractionMeasure.Right
102         {
103             get { return Right; }
104         }
105     }
106
107 }
```

A.1.2.6 Mesure convolution

```
1  using System;
2  using System.Collections.Generic;
3  using System.Linq;
4  using System.Runtime.CompilerServices;
5  using System.Text;
6  using System.Threading.Tasks;
7
8  namespace MathEmbeddedAN
9  {
10     class ConvolutionMeasureAN : AbstractCachedMeasureAN, IConvolutionMeasure
11     {   //Déclaration des attributs left et right de type IInternalMeasureAN
12         //pour construire une mesure convolution
13         public IInternalMeasureAN Left { get; private set; }
14         public IInternalMeasureAN Right { get; private set; }
15
16         //Déclaration de l'attribut result de type IInternalMeasureAN
17         //pour construire la mesure convolée résultante
18         private Task<IInternalMeasureAN> result;
19         //Définition d'un constructeur de copie pour le produit de
20         //convolution des mesures left et right
21         public ConvolutionMeasureAN(IInternalMeasureAN left,
22         IInternalMeasureAN right) : base (left, right)
23         {
24             this.Left = left;
25             this.Right = right;
26             result = null;
27         }
28         //La propriété Children retourne la liste des mesures constituées
29         //de left et de right
30         public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
31         {
32             get
33             {
34                 yield return Left;
35                 yield return Right;
36             }
37         }
38
39         public override bool IsCompactSupported(out Interval interval)
40         {
41             bool isCompactSupported;
42
43             Interval leftChildBounds;
44             Interval rightChildBouds;
45
46             //Le booléen isCompactSupportedLeft est à l'état vrai si
47             //la mesure Left possède une enveloppe convexe du support
48             //compact, sinon le booléen isCompactSupportedLeft est à
49             //l'état faux
50             bool isCompactSupportedLeft = Left.IsCompactSupported
```

```
            (out leftChildBounds);
            //Le booléen isCompactSupportedRight est à l'état vrai si
            //la mesure Right possède une enveloppe convexe du support
            //compact, sinon le booléen isCompactSupportedRight est à
            //l'état faux
            bool isCompactSupportedRight = Right.IsCompactSupported
            (out rightChildBouds);
            //Le booléen isCompactSupported est à l'état vrai si
            //la mesure convolution possède une enveloppe convexe du support,
            //ce qui est équivalent que les 2 mesures Left et
            //Right en possèdent. Sinon le booléen isCompactSupported
            //est à l'état faux
            isCompactSupported = isCompactSupportedLeft &&
            isCompactSupportedRight;
            //interval est l'enveloppe convexe du support
            //de la mesure convolution contenue dans la somme
            //des 2 enveloppes convexes du support si elle existe
            interval = new Interval(leftChildBounds.Bounds.Beginning +
            rightChildBouds.Bounds.Beginning, leftChildBounds.Bounds.End
            + rightChildBouds.Bounds.End);
            //Retourne le booléen isCompactSupported
            return isCompactSupported;
        }

        public override Task<IEnumerable<double>>
        DoEvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            if (result == null)
            {
                Interval SupportLeft;
                Interval SupportRight;
                //On génère une exception si la mesure Left ne possède pas
                //une enveloppe convexe du support
                if (!Left.IsCompactSupported(out SupportLeft))
                {
                    throw new Exception("Left measure has not support");
                }
                //On génère une exception si la mesure Right ne possède pas
                //une enveloppe convexe du support
                if (!Right.IsCompactSupported(out SupportRight))
                {
                    throw new Exception("Right measure has not support");
                }

                if (SupportLeft.IsEmpty || SupportRight.IsEmpty)
                {
                    result = Task.FromResult<IInternalMeasureAN>
                    (NullMeasureAN.Instance);
                }

                else
                {
                    DiscretizedAxeSegment leftDiscretizedAxeSegment;
                    DiscretizedAxeSegment rightDiscretizedAxeSegment;

                    decimal leftBeginning = SupportLeft.Bounds.Beginning;
                    decimal leftEnd;
                    //Lorsque l'enveloppe convexe du support SupportLeft est
                    //un singleton (Left est une mesure de Dirac), nous
                    //la définissons en utilisant la relation (VIII.171)
                    if (SupportLeft.Bounds.Beginning == SupportLeft.Bounds.End)
                    {
                        int index1 = discretizedAxeSegment.
                        IndexOf(leftBeginning);
```

```
65                          //leftBeginning est le point d'extrémité gauche
66                          //de l'enveloppe convexe du support SupportLeft
67                          leftBeginning = discretizedAxeSegment.ActualBeginning
68                          + index1 * discretizedAxeSegment.Step;
69                          //leftEnd est le point d'extrémité droite de
70                          //l'enveloppe convexe du support SupportLeft
71                          //plus un pas de discrétisation
72                          leftEnd = leftBeginning + discretizedAxeSegment.Step;
73                          //leftDiscretizedAxeSegment est un maillage universel
74                          //défini entre les 2 points leftBeginning et leftEnd
75                          leftDiscretizedAxeSegment = new DiscretizedAxeSegment
76                          (leftBeginning, leftEnd, discretizedAxeSegment.Step, 1);
77                      }
78                      //Lorsque l'enveloppe convexe du support SupportLeft n'est
79                      //pas un singleton
80                      else
81                      {   //leftEnd est le point d'extrémité droite de
82                          //l'enveloppe convexe du support SupportLeft
83                          leftEnd = SupportLeft.Bounds.End;
84                          //leftDiscretizedAxeSegment est un maillage universel
85                          //défini entre les 2 points leftBeginning et leftEnd
86                          leftDiscretizedAxeSegment = new DiscretizedAxeSegment
87                          (leftBeginning, leftEnd, discretizedAxeSegment.
88                          ObservationStepMinimal, discretizedAxeSegment.
89                          SubStepCount);
90                      }
91                      //La tâche de calcul leftTask est définie par la
92                      //discrétisation de la mesure Left
93                      Task<IEnumerable<double>> leftTask = Left.
94                      EvaluateDiscrete(leftDiscretizedAxeSegment);
95
96                      decimal rightBeginning = SupportRight.Bounds.Beginning;
97                      decimal rightEnd;
98
99
100                     //Lorsque l'enveloppe convexe du support SupportRight est
101                     //un singleton (Right est une mesure de Dirac), nous
102                     //la définissons en utilisant la relation (VIII.171)
103                     if (SupportRight.Bounds.Beginning ==
104                     SupportRight.Bounds.End)
105                     {
106                         int index2 = discretizedAxeSegment.
107                         IndexOf(rightBeginning);
108                         //rightBeginning est le point d'extrémité gauche
109                         //de l'enveloppe convexe du support SupportRight
110                         rightBeginning = discretizedAxeSegment.ActualBeginning
111                         + index2 * discretizedAxeSegment.Step;
112                         //rightEnd est le point d'extrémité droite de
113                         //l'enveloppe convexe du support SupportRight
114                         //plus un pas de discrétisation
115                         rightEnd = rightBeginning + discretizedAxeSegment.Step;
116                         //rightDiscretizedAxeSegment est un maillage universel
117                         //défini entre les 2 points rightBeginning et rightEnd
118                         rightDiscretizedAxeSegment = new DiscretizedAxeSegment
119                         (rightBeginning, rightEnd, discretizedAxeSegment.Step,
120                         1);
121                     }
122                     //Lorsque l'enveloppe convexe du support SupportRight n'est
123                     //pas un singleton
124                     else
125                     {   //rightEnd est le point d'extrémité droite de
126                         //l'enveloppe convexe du support SupportRight
```

```
                    rightEnd = SupportRight.Bounds.End;
                    //rightDiscretizedAxeSegment est un maillage universel
                    //défini entre les 2 points rightBeginning et rightEnd
                    rightDiscretizedAxeSegment = new
                    DiscretizedAxeSegment(rightBeginning,
                    rightEnd, discretizedAxeSegment.ObservationStepMinimal,
                    discretizedAxeSegment.SubStepCount);
                }
                //La tâche de calcul rightTask est définie par la
                //discrétisation de la mesure  Right entre les points
                //du maillage universel rightDiscretizedAxeSegment
                Task<IEnumerable<double>> rightTask =
                Right.EvaluateDiscrete(rightDiscretizedAxeSegment);
                result = Task<IInternalMeasureAN>.Factory.StartNew(() =>
                {   //leftCount est le nombre de points
                    //du maillage universel leftDiscretizedAxeSegment
                    int leftCount = leftDiscretizedAxeSegment.ValuesCount;
                    //rightCount est le nombre de points
                    //du maillage universel rightDiscretizedAxeSegment
                    int rightCount = rightDiscretizedAxeSegment.ValuesCount;
                    //count est le nombre total de points de la
                    //mesure convolée discrète
                    int count = leftCount + rightCount;

                    Complex[] leftValues = new Complex[count];
                    Complex[] rightValues = new Complex[count];
                    Parallel.Invoke
                    (
                        () =>
                        {
                            //On génère une mesure discrète leftReals
                            //à partir de la tâche de calcul leftTask
                            double[] leftReals = leftTask.Result.ToArray();
                            //Conversion la mesure discrète réelle
                            //leftReals en une mesure discrète
                            //complexe leftValues
                            for (int i = 0; i < leftCount; i++)
                            {
                                leftValues[i] = new Complex(leftReals[i],
                                0.0);
                            }
                            //On complète par des zéros la mesure
                            //discrète leftValues. On précise que
                            //la méthode rapide FFT de Math.Net
                            //Numerics cherche la valeur minimale
                            //d'une puissance de 2 supérieure à count

                            for (int i = leftCount; i < count; i++)
                            {
                                leftValues[i] = Complex.Zero;
                            }
                            //Application de la transformée de Fourier
                            //rapide FFT à la mesure discrète leftValues
                            Transform.FourierForward
                            (leftValues, FourierOptions.NumericalRecipes);
                        },
                        () =>
                        {   //On génère une mesure discrète rightReals
                            //à partir de la tâche de calcul rightTask
                            double[] rightReals = rightTask.Result.
                            ToArray();
                            //Conversion la mesure discrète réelle
                            //rightReals en une mesure discrète complexe
                            //rightValues
```

```
                                for (int i = 0; i < rightCount; i++)
                                {
                                    rightValues[i] = new Complex(rightReals[i],
                                    0.0);
                                }
                                //On complète par des zéros la mesure
                                //discrète rightValues. On précise que
                                //la méthode rapide FFT de Math.Net
                                //Numerics cherche la valeur minimale
                                //d'une puissance de 2 supérieure à count
                                for (int i = rightCount; i < count; i++)
                                {
                                    rightValues[i] = Complex.Zero;
                                }
                                //Application de la transformée de Fourier
                                //rapide FFT à la mesure discrète rightValues
                                Transform.FourierForward
                                (rightValues, FourierOptions.NumericalRecipes);
                            }
                        );

                        Complex[] productValues = leftValues;
                        //Multiplication des transformées de
                        //Fourier respectives des 2 mesures
                        //discrètes leftValues et rightValues
                        for (int i = 0; i < count; i++)
                        {
                            productValues[i] = leftValues[i] * rightValues[i];
                        }
                        //Application de la transformée de Fourier
                        //inverse FFT à la mesure discrète productValues
                        Transform.FourierInverse(productValues,
                         FourierOptions.NumericalRecipes);
                        //Retourne une mesure tabulée définie entre
                        //les 2 points leftBeginning + rightBeginning
                        //et leftEnd + rightEnd avec l'ensemble des
                        //premières valeurs ToReal(productValues)
                        return new TabulatedMeasureAN(leftBeginning +
                        rightBeginning, leftEnd + rightEnd,
                        Product(productValues).ToArray());
                    });
                }
            }
            return result.Result.EvaluateDiscrete(discretizedAxeSegment);

        }
        //La méthode ToReal transforme un vecteur complex en un
        //vecteur réel divisé par la taille de ce vecteur
        private IEnumerable<double> ToReal(Complex[] complexes)
        {
            foreach (Complex complex in complexes)
            {
                yield return complex.Real / complexes.Count();
            }
        }

        public override void Invalidate()
        {
            result = null;
            base.Invalidate();
        }

        IMeasureAN IConvolutionMeasure.Left
        {
            get { return Left; }
```

```
        }

        IMeasureAN IConvolutionMeasure.Right
        {
            get { return Right; }
        }

    }
}
```

A.1.2.7 Mesure par morceaux

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{

    class PiecewiseMeasureAN : AbstractCachedMeasureAN, IPiecewiseMeasure
    {
        private List<IInternalMeasureAN> measures;
        private List<decimal> frontiers;
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 2
        //mesures Measure1, Measure2 et de la frontière Frontier1
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1,
        decimal Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2):
        this(new IInternalMeasureAN[] { Measure1,
        Measure2 }, new decimal[] { Frontier1 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 3
        //mesures Measure1, Measure2, Measure3 et des 2 frontières
        //Frontier1 et Frontier2
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1,
        decimal Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2, decimal
        Frontier2, IInternalMeasureAN Measure3): this(new IInternalMeasureAN[]
        { Measure1, Measure2, Measure3 },
        new decimal[] { Frontier1, Frontier2 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 4
        //mesures Measure1, Measure2, Measure3, Measure4 et des 3
        //frontières Frontier1, Frontier2 et Frontier3
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1, decimal
        Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2, decimal Frontier2,
        IInternalMeasureAN Measure3, decimal Frontier3, IInternalMeasureAN
        Measure4): this(new IInternalMeasureAN[] { Measure1, Measure2,
        Measure3, Measure4 }, new decimal[] {Frontier1, Frontier2, Frontier3 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 5
        //mesures Measure1, Measure2, Measure3, Measure4, Measure5
        //et des 4 frontières Frontier1, Frontier2, Frontier3 et Frontier4
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1, decimal
        Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2, decimal Frontier2,
        IInternalMeasureAN Measure3, decimal Frontier3, IInternalMeasureAN
```

```
        Measure4, decimal Frontier4, IInternalMeasureAN Measure5):
        this(new IInternalMeasureAN[] { Measure1, Measure2, Measure3,
        Measure4, Measure5 }, new decimal[] { Frontier1, Frontier2,
        Frontier3, Frontier4 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 6
        //mesures Measure1, Measure2, Measure3, Measure4, Measure5, Measure6
        //et des 5 frontières Frontier1, Frontier2, Frontier3, Frontier4
        //et Frontier5
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1, decimal
        Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2, decimal Frontier2,
        IInternalMeasureAN Measure3, decimal Frontier3, IInternalMeasureAN
        Measure4, decimal Frontier4, IInternalMeasureAN Measure5, decimal
        Frontier5, IInternalMeasureAN Measure6): this(new IInternalMeasureAN[]
        {Measure1, Measure2, Measure3, Measure4, Measure5, Measure6 }, new
        decimal[] {Frontier1, Frontier2, Frontier3, Frontier4, Frontier5 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 7
        //mesures Measure1, Measure2, Measure3, Measure4, Measure5,
        //Measure6, Measure7 et des 6 frontières Frontier1, Frontier2,
        //Frontier3, Frontier4, Frontier5 et Frontier6
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1, decimal
        Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2, decimal Frontier2,
        IInternalMeasureAN Measure3, decimal Frontier3, IInternalMeasureAN
        Measure4, decimal Frontier4, IInternalMeasureAN Measure5, decimal
        Frontier5, IInternalMeasureAN Measure6, decimal Fronter6,
        IInternalMeasureAN Measure7): this(new IInternalMeasureAN[]
        {Measure1, Measure2, Measure3, Measure4, Measure5, Measure6,
        Measure7 }, new decimal[] { Frontier1, Frontier2, Frontier3,
        Frontier4, Frontier5, Fronter6 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée des 8
        //mesures Measure1, Measure2, Measure3, Measure4, Measure5, Measure6,
        //Measure7, Measure8 et des 7 frontières Frontier1, Frontier2,
        //Frontier3, Frontier4, Frontier5, Frontier6 et Frontier7
        public PiecewiseMeasureAN(IInternalMeasureAN Measure1, decimal
        Frontier1, IInternalMeasureAN Measure2, decimal Frontier2,
        IInternalMeasureAN Measure3, decimal Frontier3, IInternalMeasureAN
        Measure4, decimal Frontier4, IInternalMeasureAN Measure5, decimal
        Frontier5, IInternalMeasureAN Measure6, decimal Fronter6,
        IInternalMeasureAN Measure7, decimal Frontier7, IInternalMeasureAN
        Measure8): this(new IInternalMeasureAN[] { Measure1, Measure2,
        Measure3, Measure4, Measure5, Measure6, Measure7, Measure8 },
        new decimal[] { Frontier1, Frontier2, Frontier3, Frontier4,
        Frontier5, Fronter6, Frontier7 })
        {
        }
        //Définition d'une mesure par morceaux constituée d'une liste
        //des mesures children et une liste des frontières frontiers
        public PiecewiseMeasureAN(IEnumerable<IInternalMeasureAN> children,
        IEnumerable<decimal> frontiers)
        : this(children.ToList(), frontiers.ToList())
        {
        }

        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children

        public PiecewiseMeasureAN(List<IInternalMeasureAN> children,
        List<decimal> frontiers): base(children)
        {   //Utilisation des Codes de Contracts pour imposer que le nombre
            //de la liste children se diffère de la liste frontiers par 1
```

```
            Contract.Requires<ArgumentException>(children.Count() ==
            frontiers.Count() + 1, "The lists of measures and frontiers
            are not consistent");
            //Lorsque les valeurs de la liste des frontières ne sont pas
            //strictement croissantes, on génère une exception
            if (!frontiers.IsStrictlyIncreasing())
                throw new ArgumentException("The frontiers are not
                strictly creasing");

            this.measures = children;
            this.frontiers = frontiers;
        }

        public override Task<IEnumerable<double>>
        DoEvaluateDiscrete(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            Task<IEnumerable<double>> task;
            //firstMeasureIndex est l'index de la première mesure
            //qui constitue la mesure par morceaux à intégrer
            int firstMeasureIndex = FindFirstMeasureIndex
            (discretizedAxeSegment.ActualBeginning);
            //lastMeasureIndex est l'index de la dernière mesure
            //qui constitue la mesure par morceaux à intégrer
            int lastMeasureIndex = FindLastMeasureIndex
            (discretizedAxeSegment.ActualEnd);
            //Lorsque les deux index firstMeasureIndex et lastMeasureIndex
            //sont égales, la tâche de calcul task est définie par la
            //discrétisation de la mesure measures[firstMeasureIndex] entre
            //les points du maillage universel discretizedAxeSegment. Pour
            //cela, nous allons se baser sur la relation (VIII.92)
            if (firstMeasureIndex == lastMeasureIndex)
            {
                task = measures[firstMeasureIndex].EvaluateDiscrete
               (discretizedAxeSegment);
            }
            else
            {
                List<Task<IEnumerable<double>>> childrenTasks = new
                List<Task<IEnumerable<double>>>(lastMeasureIndex -
                firstMeasureIndex + 1);
                decimal infFrontier = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
                for (int i = firstMeasureIndex; i < lastMeasureIndex; i++)
                {   //Localisation de la mesure measure à intégrer
                    IInternalMeasureAN measure = measures[i];
                    //Localisation de la frontière supérieure supFrontier
                    //parmi la liste des frontières
                    decimal supFrontier = frontiers[i];

                    DiscretizedAxeSegment childDiscretizedAxeSegment;
                    //Lorsque le pas de discrétisation est strictement
                    //inférieur à la différence des frontières
                    if (discretizedAxeSegment.Step < supFrontier - infFrontier
                    && supFrontier - infFrontier < discretizedAxeSegment.
                    ObservationStepMinimal)
                    //childDiscretizedAxeSegment est le maillage
                    //universel défini entre les 2 points infFrontier
                    //et supFrontier
                    childDiscretizedAxeSegment = new
                    DiscretizedAxeSegment(infFrontier, supFrontier,
                    supFrontier - infFrontier, (int)Math.Round((
                    (supFrontier - infFrontier)/discretizedAxeSegment.Step)));
                    //On alimente la liste childrenTasks par les valeurs
                    //discrètes de la mesure measure
```

```
                    childrenTasks.Add(measure.EvaluateDiscrete
                    (childDiscretizedAxeSegment));
                    infFrontier = childDiscretizedAxeSegment.ActualEnd;
                    }
                    DiscretizedAxeSegment childDiscretizedAxeSegment2 = new
                    DiscretizedAxeSegment(infFrontier, discretizedAxeSegment.
                    ActualEnd, discretizedAxeSegment.ObservationStepMinimal,
                    discretizedAxeSegment.SubStepCount);
                    //Lorsque le pas de discrétisation est strictement
                    //inférieur à la différence des frontières
                    if (discretizedAxeSegment.Step < discretizedAxeSegment.
                    ActualEnd - infFrontier && discretizedAxeSegment.
                    ActualEnd - infFrontier < discretizedAxeSegment.
                    ObservationStepMinimal)
                    //On discrétise la dernière mesure sur le
                    //maillage universel childDiscretizedAxeSegment2
                        childDiscretizedAxeSegment2 = new DiscretizedAxeSegment
                        (infFrontier, discretizedAxeSegment.ActualEnd,
                        discretizedAxeSegment.ActualEnd - infFrontier,
                        (int)Math.Round(((discretizedAxeSegment.ActualEnd -
                        infFrontier) / discretizedAxeSegment.Step)));


                //On alimente la liste childrenTasks par les valeurs
                //discrètes de la dernière mesure
                //measures[lastMeasureIndex]
                childrenTasks.Add(measures[lastMeasureIndex].
                EvaluateDiscrete(childDiscretizedAxeSegment2));
                //On fusionne les tâches de calcul childrenTasks
                //pour retourner la tâche de calcul totale
                task = Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
                {
                    return Fusion(childrenTasks);
                });
            }
            //Retourne la tâche de calcul task
            return task;
        }

        private IEnumerable<double>
        Fusion(List<Task<IEnumerable<double>>> childrenTasks)
        {
            foreach (Task<IEnumerable<double>> childrenTask in childrenTasks)
            {
                foreach (double value in childrenTask.Result)
                {
                    yield return value;
                }
            }
        }
        //L'index firstMeasureIndex est défini dans la relation  (VIII.83)
        //par l'index de la première mesure à intégrer. Nous
        //utilisons le principe de recherche dichotomique
        //afin de le déterminer.
        private int FindFirstMeasureIndex(decimal beginning)
        {
            int firstMeasureIndex;

            int firstFrontierIndex = frontiers.
            BinarySearch(beginning);
            if (firstFrontierIndex < 0)
            {
                firstFrontierIndex = ~firstFrontierIndex;
            }
```

```
            else
            {
                firstFrontierIndex++;
            }

            firstMeasureIndex = firstFrontierIndex;
            return firstMeasureIndex;
        }
         //L'index lastMeasureIndex est défini dans la relation (VIII.84) par
         //l'index de la dernière mesure à intégrer. Nous
         //utilisons le principe de recherche dichotomique
         //afin de le déterminer.
        private int FindLastMeasureIndex(decimal end)
        {
            int lastMeasureIndex;

            int lastFrontierIndex = frontiers.BinarySearch(end);
            if (lastFrontierIndex < 0)
            {
                lastFrontierIndex = ~lastFrontierIndex;
            }
            lastFrontierIndex--;

            lastMeasureIndex = lastFrontierIndex + 1;
            return lastMeasureIndex;
        }

        public List<IInternalMeasureAN> Measures
        {
            get { return measures; }
        }

        public List<decimal> Frontiers
        {
            get { return frontiers; }
        }

        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get { return measures; }
        }
    }
}

```

A.2 Les champs de la librairie LemfAN

A.2.1 Les champs simples

A.2.1.1 Champ constant

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

```

```
namespace MathEmbeddedAN
{
    class ConstantFieldAN : AbstractLeafFieldAN, IConstantField
    {   //Déclaration de l'attribut Constant en mode lecture
        //public et écriture privée pour construire un champ constant
        public double Constant { get; private set; }
        //Définition d'un champ constant de constante constant
        public ConstantFieldAN(double constant)
        {
            this.Constant = constant;
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes du champ constant en utilisant
        //la relation (VIII.223)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ constant
            //défini par le nombre de points du maillage
            //universel discretizedAxeSegment plus 2
            int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
            //Retourne une tâche de calcul générant les count valeurs
            //discrètes dont chacune est égale à Constant
            return Task.FromResult<IEnumerable<double>>
            (Enumerable.Repeat(Constant, count));
        }
    }
}
```

A.2.1.2 Champ affine

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class AffineFieldAN : AbstractLeafFieldAN, IAffineField
    {   //Déclaration des attributs Constant et Coefficient pour construire
        //un champ affine
        public double Constant { get; private set; }
        public double Coefficient { get; private set; }
        //Définition d'un champ affine de pente constant et de coefficient
        //directeur coefficient
        public AffineFieldAN(double constant, double coefficient)
        {
            this.Constant = constant;
            this.Coefficient = coefficient;
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes du champ affine en utilisant
        //la relation (VIII.226)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //firstvalue est la borne inférieure décalée du maillage
            //universel discretizedAxeSegment. Elle est calculée
            //en utilisant la relation (VIII.19)
            decimal firstvalue = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
            //step est le pas de discrétisation du maillage
```

```
            //universel discretizedAxeSegment
            decimal step = discretizedAxeSegment.Step;

            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ affine
                //défini par le nombre de points du maillage
                //universel discretizedAxeSegment plus 2
                int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
                //Création dynamique à partir de la commande new
                //d'une liste de count valeurs de type double
                List<double> list = new List<double>(count);
                //Ajout chaque valeur discrète dans list
                for (int i = 0; i < count; i++)
                    list.Add(Constant + Coefficient *
                    (double)(firstvalue + i * step));
                //Retourne la liste list
                return list;
            });
        }
    }
}
```

A.2.1.3 Champ quadratique

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class QuadraticFieldAN : AbstractLeafFieldAN, IQuadraticField
    {   //Déclaration des attributs Constant, FirstDegreeCoefficient et
        //SecondDegreeCoefficient pour construire un champ quadratique
        public double Constant { get; set; }
        public double FirstDegreeCoefficient { get; set; }
        public double SecondDegreeCoefficient { get; set; }
        //Définition d'un champ quadratique de constante constant,
        //de coefficient du premier degré firstDegreeCoefficient et de
        //coefficient du second degré secondDegreeCoefficient
        public QuadraticFieldAN(double constant, double firstDegreeCoefficient,
        double secondDegreeCoefficient)
        {
            this.Constant = constant;
            this.FirstDegreeCoefficient = firstDegreeCoefficient;
            this.SecondDegreeCoefficient = secondDegreeCoefficient;
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes du champ quadratique
        //en utilisant la relation (VIII.229)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //firstvalue est la borne inférieure décalée du maillage
            //universel discretizedAxeSegment. Elle est calculée
            //en utilisant la relation (VIII.19)
            decimal firstvalue = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
            //step est le pas de discrétisation du maillage
            //universel discretizedAxeSegment
            decimal step = discretizedAxeSegment.Step;
```

```
38
39              return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
40              {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ
41                  //quadratique défini par le nombre de points du maillage
42                  //universel discretizedAxeSegment plus 2
43                  int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
44                  //Création dynamique à partir de la commande new
45                  //d'une liste de count valeurs de type double
46                  List<double> list = new List<double>(count);
47                  double mesh;
48                  //Ajout chaque valeur discrète dans list
49                  for (int i = 0; i < count; i++)
50                  {
51                      mesh = (double)(firstvalue + i * step);
52                      list.Add(Constant + FirstDegreeCoefficient * mesh +
53                      SecondDegreeCoefficient * Math.Pow(mesh, 2));
54                  }
55                  //Retourne la liste list
56                  return list;
57              });
58          }
59      }
60  }
```

A.2.1.4 Champ polynomial

```
1   using System;
2   using System.Collections.Generic;
3   using System.Linq;
4   using System.Runtime.CompilerServices;
5   using System.Text;
6   using System.Threading.Tasks;
7
8
9
10  namespace MathEmbeddedAN
11  {
12      class PolynomialFieldAN : AbstractLeafFieldAN, IPolynomialField
13      {   //Déclaration de l'attribut coefficients
14          //pour construire un champ polynomial
15          public IEnumerable<double> Coefficients { get; private set; }
16          //Définition d'un champ polynomial de coefficients définis par
17          //les valeurs coefficients
18          public PolynomialFieldAN(IEnumerable<double> coefficients)
19          {
20              this.Coefficients = coefficients;
21          }
22          //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
23          //générant les valeurs discrètes du champ polynomial
24          //en utilisant la relation (VIII.232)
25          public override Task<IEnumerable<double>>
26          EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
27          {   //firstvalue est la borne inférieure décalée du maillage
28              //universel discretizedAxeSegment. Elle est calculée
29              //en utilisant la relation (VIII.19)
30              decimal firstvalue = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
31              //step est le pas de discrétisation du maillage
32              //universel discretizedAxeSegment
33              decimal step = discretizedAxeSegment.Step;
34
35              return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
```

```
36                {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ polynomial
37                    //défini par le nombre de points du maillage
38                    //universel discretizedAxeSegment plus 2
39                    int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
40                    //Création dynamique à partir de la commande new
41                    //d'une liste de count valeurs de type double
42                    List<double> list = new List<double>(count);
43
44                    for (int j = 0; j < count; j++)
45                    {
46                        int i = 0;
47                        double evaluation1 = 0.0;
48                        double evaluation2 = evaluation1;
49                        foreach (double OneCoefficient in Coefficients)
50                        {
51                            evaluation1 += OneCoefficient * Math.Pow
52                            ((double)(firstvalue + j * step), i);
53                            i++;
54                        }
55                       //Ajout chaque valeur discrète evaluation1 dans list
56                        list.Add(evaluation1);
57                    }
58                    //Retourne la liste list
59                    return list;
60                });
61            }
62        }
63    }
```

A.2.1.5 Champ null

```
1   using System;
2   using System.Collections.Generic;
3   using System.Linq;
4   using System.Runtime.CompilerServices;
5   using System.Text;
6   using System.Threading.Tasks;
7
8
9   namespace MathEmbeddedAN
10  {
11      class NullFieldAN : AbstractLeafFieldAN, INullField
12      {   //Déclaration d'un objet constant appelé instance de type  NullFieldAN
13          private static readonly NullFieldAN instance = new NullFieldAN();
14          //Définition d'un constructeur par défaut NullFieldAN()
15          private NullFieldAN()
16          {
17
18          }
19          //La variable constant Instance de type NullMeasureAN est
20          //en lecture pour retourner la variable instance.
21          public static NullFieldAN Instance
22          {
23              get
24              {
25                  return instance;
26              }
27          }
28          //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
29          //générant les valeurs discrètes du champ null en utilisant
30          //la relation (VIII.220)
```

```
31          public override Task<IEnumerable<double>>
32          EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
33          {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ nul
34              //défini par le nombre de points du maillage
35              //universel discretizedAxeSegment plus 2
36              int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
37              //Retourne une tâche de calcul de count valeurs nulles
38              return Task.FromResult<IEnumerable<double>>
39              (Enumerable.Repeat(0.0, count));
40          }
41      }
42  }
```

A.2.1.6 Champ exponentiel

```
1   using System;
2   using System.Collections.Generic;
3   using System.Linq;
4   using System.Runtime.CompilerServices;
5   using System.Text;
6   using System.Threading.Tasks;
7
8   namespace MathEmbeddedAN
9   {
10      class ExponentialFieldAN : AbstractLeafFieldAN, IExponentialField
11      {   //Déclaration de l'attribut Coefficient pour construire
12          //un champ exponentiel
13          public double Coefficient { get; private set; }
14          //Définition d'un champ exponentiel de coefficient coefficient
15          public ExponentialFieldAN(double coefficient)
16          {
17              this.Coefficient = coefficient;
18          }
19          //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
20          //générant les valeurs discrètes du champ exponentiel
21          //en utilisant la relation (VIII.241)
22          public override Task<IEnumerable<double>>
23          EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
24          {   //firstvalue est la borne inférieure décalée du maillage
25              //universel discretizedAxeSegment. Elle est calculée
26              //en utilisant la relation (VIII.19)
27              decimal firstvalue = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
28              //step est le pas de discrétisation du maillage
29              //universel discretizedAxeSegment
30              decimal step = discretizedAxeSegment.Step;
31              return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
32              {  //count est le nombre des valeurs discrètes du champ
33                 //exponentiel défini par le nombre de points du maillage
34                 //universel discretizedAxeSegment plus 2
35                  int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
36                  //Création dynamique à partir de la commande new
37                  //d'une liste de count valeurs de type double
38                  List<double> list = new List<double>(count);
39                  //Ajout chaque valeur discrète dans list
40                  for (int i = 0; i < count; i++)
41                      list.Add(Math.Exp(Coefficient *
42                      (double)(firstvalue + i * step)));
43                  //Retourne la liste list
44                  return  list;
45              });
46          }
```

```
    }

}
```

A.2.1.7 Champ sinus

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class SinusFieldAN : AbstractLeafFieldAN, ISinusField
    {   //Déclaration des attributs Constant et Coefficient pour construire
        //un champ sinus
        public double Constant { get; private set; }
        public double Coefficient { get; private set; }
        //Définition d'un champ sinus d'une fonction affine de pente
        //constant et de coefficient directeur coefficient
        public SinusFieldAN(double constant, double coefficient)
        {
            this.Constant = constant;
            this.Coefficient = coefficient;
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes du champ sinus en utilisant
        //la relation (VIII.235)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //firstvalue est la borne inférieure décalée du maillage
            //universel discretizedAxeSegment. Elle est calculée
            //en utilisant la relation (VIII.19)
            decimal firstvalue = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
            //step est le pas de discrétisation du maillage
            //universel discretizedAxeSegment
            decimal step = discretizedAxeSegment.Step;

            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ sinus
                //défini par le nombre de points du maillage
                //universel discretizedAxeSegment plus 2
                int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
                //Création dynamique à partir de la commande new
                //d'une liste de count valeurs de type double
                List<double> list = new List<double>(count);
                //Ajout chaque valeur discrète dans list
                for (int i = 0; i < count; i++)
                    list.Add(Math.Sin(Constant + Coefficient *
                    (double)(firstvalue + i * step)));
                 //Retourne la liste list
                return list;
            });
        }
    }
}
```

A.2.1.8 Champ cosinus

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class CosinusFieldAN : AbstractLeafFieldAN, ICosinusField
    {   //Déclaration des attributs Constant et Coefficient en mode
        //lecture public et écriture privée pour construire un champ
        //cosinus de constante Constant et de coefficient Coefficient
        public double Constant { get; private set; }
        public double Coefficient { get; private set; }
        //Définition d'un champ cosinus d'une fonction affine
        //de pente constant et de coefficient directeur coefficient
        public CosinusFieldAN(double constant, double coefficient)
        {
            this.Constant = constant;
            this.Coefficient = coefficient;
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul
        //générant les valeurs discrètes du champ cosinus en utilisant
        //la relation (VIII.238)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {   //firstvalue est la borne inférieure décalée du maillage
            //universel discretizedAxeSegment. Elle est calculée
            //en utilisant la relation (VIII.19)
            decimal firstvalue = discretizedAxeSegment.ActualBeginning;
            //step est le pas de discrétisation du maillage
            //universel discretizedAxeSegment
            decimal step = discretizedAxeSegment.Step;

            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {   //count est le nombre des valeurs discrètes du champ cosinus
                //défini par le nombre de points du maillage
                //universel discretizedAxeSegment plus 2
                int count = discretizedAxeSegment.ValuesCount + 2;
                //Création dynamique à partir de la commande new
                //d'une liste de count valeurs de type double
                List<double> list = new List<double>(count);
                //Ajout chaque valeur discrète dans list
                for (int i = 0; i < count; i++)
                    list.Add(Math.Cos(Constant + (Coefficient * (double)
                    (firstvalue + i * step))));
                //Retourne la liste list
                return list;
            });
        }
    }
}
```

A.2.2 Les champs composés

A.2.2.1 Champ translaté

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class ShiftFieldAN : AbstractOperationFieldAN, IShiftField
    {   //Déclaration des attributs constant et field pour translater
        //le champ field de type IInternalFieldAN par une valeur
        //constant de type décimal
        private IInternalFieldAN field;
        private decimal constant;
        //Définition d'un champ translaté du champ field par la
        //valeur constant
        public ShiftFieldAN(IInternalFieldAN field, decimal constant)
        {
            this.field = field;
            this.constant = constant;
        }
        //La propriété Children retourne le champ field en mode
        //lecture/écriture
        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get
            {
                yield return field;
            }
        }
        //La propriété Field de l'interface IShiftField retourne le
        //champ field en mode lecture/écriture
        public IInternalFieldAN Field
        {
            get { return field; }
            set
            {
                OnChildRemoved(field);
                field = value;
                OnChildAdded(field);
                Invalidate();
            }
        }
        //La propriété Constant de l'interface IShiftField retourne la
        //valeur constant
        public decimal Constant
        {
            get { return constant; }
            set
            {
                constant = value;
                Invalidate();
            }
        }

        IFieldAN IShiftField.Field
        {
            get { return Field; }
            set { Field = (IInternalFieldAN)value; }
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul générant
        //les valeurs discrètes du champ translaté
        public override Task<IEnumerable<double>>
```

```
65          EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
66          {
67                //Définition du maillage universel translaté par la valeur
68                //constante
69                DiscretizedAxeSegment childDiscretizedAxeSegment =
70                new DiscretizedAxeSegment
71                (
72                      discretizedAxeSegment.ExactBeginning - constant,
73                      discretizedAxeSegment.ExactEnd - constant,
74                      discretizedAxeSegment.ObservationStepMinimal,
75                      discretizedAxeSegment.SubStepCount
76                );
77               //Retourne les valeurs discrètes du champ field aux points du
78               //maillage universel childDiscretizedAxeSegment
79               return field.EvaluateAllValues(childDiscretizedAxeSegment);
80          }
81      }
82  }
```

A.2.2.2 Champ somme

```
1   using System;
2   using System.Collections.Generic;
3   using System.Linq;
4   using System.Runtime.CompilerServices;
5   using System.Text;
6   using System.Threading.Tasks;
7
8   namespace MathEmbeddedAN
9   {
10      class SumFieldAN : AbstractOperationFieldAN, ISumField
11      {   //Déclaration d'une liste de champ appelée children de type
12          //IInternalFieldAN pour construire un champ somme
13          private IEnumerable<IInternalFieldAN> children;
14          //Définition d'une somme d'un tableau de champs de type
15          //IInternalFieldAN
16          public SumFieldAN(params IInternalFieldAN[] fieldAN)
17              : this((IEnumerable<IInternalFieldAN>)fieldAN)
18          {
19          }
20          //Définition d'une somme d'une liste de champs de type
21          //IInternalFieldAN
22          public SumFieldAN(IEnumerable<IInternalFieldAN> fieldAN)
23          {
24              this.children = fieldAN;
25          }
26          //La propriété Children retourne la liste des champs children
27          public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
28          {
29              get { return children; }
30          }
31          //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul générant
32          //les valeurs discrètes du champ somme par interpolation en utilisant
33          //la relation (VIII.243) (voir la sous-sous-sous-section VIII.7.1.2.1)
34          public override Task<IEnumerable<double>>
35          EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
36          {
37              Task<IEnumerable<double>> task;
38              //Si la liste des champs children est vide, la tâche de calcul
39              //task est une tâche de calcul générant un ensemble de valeurs
40              //nulles
```

```
            if (!children.Any())
            {
                task = NullFieldAN.Instance.
                EvaluateAllValues(discretizedAxeSegment);
            }
            //Si la liste des champs children contient un seul champ
            //qui est le champ children.First(), la tâche de calcul task
            //est la tâche générant les valeurs discrètes
            //de ce champ
            else if (children.Count() == 1)
            {
                task = children.First().
                EvaluateAllValues(discretizedAxeSegment);
            }
            //Si la liste des champs children contient plus d'un champ,
            //on définit une liste de tâche de calcul childrenTasks dont
            //chacune contient les valeurs discrètes de chaque champ de
            //la liste children. Ensuite, on somme les valeurs interpolées de la
            //tâche childrenTasks. Nous précisons que cette interpolation est
            //définie dans la classe abstraite AbstractFieldAN
            else
            {
                Task<IEnumerable<double>>[] childrenTasks = children.Select
                 (m => m.EvaluateAllValues(discretizedAxeSegment)).ToArray();
                task = Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
                {
                    return childrenTasks.Select(t => t.Result).
                    Aggregate((values1, values2) => values1.Zip(values2,
                    (value1, value2) => value1 + value2)).ToArray();
                });
            }
            //Retourne la tâche de calcul task
            return task;
        }
    }
}
```

A.2.2.3 Champ soustraction

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace MathEmbeddedAN
{
    class SubstractionFieldAN : AbstractOperationFieldAN, ISubstractionField
    {   //Déclaration des attributs left et right de type IInternalFieldAN
        //pour construire un champ soustraction
        private IInternalFieldAN left;
        private IInternalFieldAN right;
        //Définition d'un constructeur de copie pour soustraire le
        //champ left du champ right
        public SubstractionFieldAN(IInternalFieldAN left, IInternalFieldAN right
    )
        {
            this.left = left;
            this.right = right;
        }
```

```
22          //La propriété Children retourne la liste des champs constituée
23          //de left et de right
24          public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
25          {
26              get
27              {
28                  yield return left;
29                  yield return right;
30              }
31          }
32          //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul générant
33          //les valeurs discrètes du champ soustraction par interpolation
34          //en utilisant la relation (VIII.246) (voir la sous-sous-sous-
35          //section VIII.7.2.2.1)
36          public override Task<IEnumerable<double>>
37          public override Task<IEnumerable<double>>
38          EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
39          {   //Définition de la tâche de calcul leftTask générant
40              //les valeurs discrètes de la mesure left par interpolation
41              //(cette interpolation est définie dans la classe
42              //abstraite AbstractFieldAN)
43              Task<IEnumerable<double>> leftTask = left.
44              Task<IEnumerable<double>> leftTask =
45              left.EvaluateAllValues(discretizedAxeSegment);
46              //Définition de la tâche de calcul rightTask générant
47              //les valeurs discrètes de la mesure right par interpolation
48              Task<IEnumerable<double>> rightTask =
49              right.EvaluateAllValues(discretizedAxeSegment);
50              //Retourne une tâche de calcul définie par la différence
51              //entre chaque valeur de la tâche leftTask et chaque valeur
52              //de la tâche rightTask
53              return Task.Factory.StartNew<IEnumerable<double>>(() =>
54              {
55                  return leftTask.Result.Zip(rightTask.Result,
56                  (leftValue, rightValue) => leftValue - rightValue).ToArray();
57              });
58          }
59          //La méthode Left de l'interface ISubstractionField retourne
60          //le champ left
61          public IInternalFieldAN Left
62          {
63              get { return left; }
64          }
65          //La méthode Right de l'interface ISubstractionField retourne
66          //le champ right
67          public IInternalFieldAN Right
68          {
69              get { return right; }
70          }
71
72          IFieldAN ISubstractionField.Left
73          {
74              get { return Left; }
75          }
76
77          IFieldAN ISubstractionField.Right
78          {
79              get { return Right; }
80          }
81
82      }
83  }
```

A.2.2.4 Champ produit

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Runtime.CompilerServices;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;


namespace MathEmbeddedAN
{
    class ProductFieldAN : AbstractOperationFieldAN, IProductField
    {   //Déclaration d'une liste de champs de type IInternalFieldAN
        private IEnumerable<IInternalFieldAN> FieldAN;
        //Définition d'un produit d'un tableau de champs fieldAN de type
        //IInternalFieldAN
        public ProductFieldAN(params IInternalFieldAN[] fieldAN)
            : this((IEnumerable<IInternalFieldAN>)fieldAN)
        {
        }
        //Définition d'un produit d'une liste de champs de type
        //IInternalMeasureAN
        public ProductFieldAN(IEnumerable<IInternalFieldAN> fieldAN)
        {
            this.FieldAN = fieldAN;
        }
        //La propriété Children retourne la liste des champs FieldAN
        public override IEnumerable<IInternalComputationElementAN> Children
        {
            get { return FieldAN; }
        }
        //La méthode EvaluateAllValues retourne une tâche de calcul générant
        //les valeurs discrètes du champ produit par interpolation en utilisant
        //la relation (VIII.249) (voir la sous-sous-sous-section VIII.7.3.2.1)
        public override Task<IEnumerable<double>>
        EvaluateAllValues(DiscretizedAxeSegment discretizedAxeSegment)
        {
            //Définition d'une liste de tâche de calcul childrenTasks dont
            //chacune contient les valeurs discrètes de chaque champ de
            //la liste children.
            Task<IEnumerable<double>>[] childrenTasks = FieldAN.
            Select(m => m.EvaluateAllValues(discretizedAxeSegment)).ToArray();
            //On calcule le champ produit en interpolant les valeurs de la
            //tâche childrenTasks. Nous précisons que cette interpolation
            //est définie dans la classe abstraite AbstractFieldAN
            return Task<IEnumerable<double>>.Factory.StartNew(() =>
            {
                return childrenTasks.Select(t => t.Result).Aggregate
                ((values1, values2) => values1.Zip(values2, (value1, value2)
                => value1 * value2)).ToArray();
            });
        }
    }
}
```

A.3 Les tests unitaires sur mesures par morceaux

A.3.1 Dans la librairie Lemf

```
using System;
using System.Text;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using Microsoft.VisualStudio.TestTools.UnitTesting;
using MathEmbedded;


namespace MathEmbeddedTest.Piecewise
{
    [TestClass]
    public class PiecesUnitTest
    {
        private MeasureFactory mf = MeasureFactory.Instance;
        Random GenerateurHasard = new Random(DateTime.Now.Millisecond);

        [TestMethod]
        public void Test1Measure0Frontier()
        {
            decimal infBound = 0m;
            decimal supBound = 6m;

            Assert.AreEqual
            (
                mf.Constant(2).Evaluate(infBound, supBound)
                ,
                mf.Piecewise
                (
                    new IMeasure[] { mf.Constant(2) },
                    new decimal[] { }
                )
                .Evaluate(infBound, supBound)
            );
        }


        [TestMethod]
        public void TestSamePieces()
        {
            decimal infBound = 0m;
            decimal supBound = 6m;
            decimal frontier = 4m;

            Assert.AreEqual
            (
                mf.Constant(2).Evaluate(infBound, supBound)
                ,
                mf.Piecewise
                (
                    mf.Constant(2),
                    frontier,
                    mf.Constant(2)
                )
                .Evaluate(infBound, supBound)
            );
        }

        [TestMethod]
        public void Test2Constants()
        {
            decimal infBound = 0m;
            decimal supBound = 6m;
```

```
            decimal frontier = 4m;

            Assert.AreEqual
            (
                  mf.Constant(2).Evaluate(infBound, frontier)
                + mf.Constant(3).Evaluate(frontier, supBound)
                ,
                mf.Piecewise
                (
                    mf.Constant(2),
                    frontier,
                    mf.Constant(3)
                )
                .Evaluate(infBound, supBound)
            );
        }

        [TestMethod]
        public void TestConstantAndDirac()
        {
            decimal infBound = 0m;
            decimal supBound = 6m;
            decimal frontier = 3m;
            decimal diracLocation = 4m;

            Assert.AreEqual
            (
                  mf.Constant(2).Evaluate(infBound, frontier)
                + mf.Dirac(diracLocation, 22.5).Evaluate(frontier, supBound)
                ,
                mf.Piecewise
                (
                    mf.Constant(2),
                    frontier,
                    mf.Dirac(diracLocation, 22.5)
                )
                .Evaluate(infBound, supBound)
            );
        }

        [TestMethod]
        public void Test3Dirac()
        {
            decimal infBound = 0m;
            decimal supBound = 6m;
            decimal frontier1 = 0.5m;
            decimal frontier2 = 1.7m;

            Assert.AreEqual
            (
                  mf.Dirac(0.4m, 10.0).Evaluate(infBound, frontier1)
                + mf.Dirac(1.5m, 11.0).Evaluate(frontier1, frontier2)
                + mf.Dirac(2.8m, 12.0).Evaluate(frontier2, supBound)
                ,
                mf.Piecewise
                (
                    mf.Dirac(0.4m, 10.0),
                    frontier1,
                    mf.Dirac(1.5m, 11.0),
                    frontier2,
                    mf.Dirac(2.8m, 12.0)
                )
                .Evaluate(infBound, supBound)
            );
        }
```

```
    }
}
```

A.3.2 Dans la librairie LemfAN

```
namespace MathEmbeddedANTest.Piecewise
{

    [TestClass]
    public class PiecewiseUnitTest
    {
        [TestMethod]
        public void TestPiecewiseLengthFrontierInfObservationStep()
        {
            EvaluationAssert.AreEqual
            (
             new double[] { 0.0, 88.0, 0.0 },
             new PiecewiseMeasureAN(NullMeasureAN.Instance, 6.0m, new
    ConstantMeasureAN(24.0), 8.0m,
             new ConstantMeasureAN(40.0), 9.0m, NullMeasureAN.Instance).
             EvaluateDiscrete(0.0m, 15.0m, 5.0m).Values.ToArray()
            );
        }

        [TestMethod]
        public void TestPiecewise1Frontier()
        {
            double[] actualValues = new PiecewiseMeasureAN(new ConstantMeasureAN
    (2.0), 4.0m,
            new ConstantMeasureAN(3.0)).EvaluateDiscrete(0, 6, 3).Values.ToArray
    ();


            EvaluationAssert.AreEqual
            (
              new double[] { 6.0, 8.1 },
              actualValues
            );
        }

        [TestMethod]
        public void TestPiecewise1FrontierStep()
        {
            double[] actualValues = new PiecewiseMeasureAN(new ConstantMeasureAN
    (2.0), 3.0m, new
            ConstantMeasureAN(3.0)).EvaluateDiscrete(0, 6, 3).Values.ToArray();

            EvaluationAssert.AreEqual
           (
             new double[] { 6.0, 9.0 },
             actualValues
           );
        }

        [TestMethod]
        public void TestPiecewise1FrontierLarge()
        {
            double[] actualValues = new PiecewiseMeasureAN(new ConstantMeasureAN
    (2.0), 10.0m, new
            ConstantMeasureAN(3.0)).EvaluateDiscrete(0, 6, 2).Values.ToArray();

```

```
            EvaluationAssert.AreEqual
            (
              new double[] { 4.0, 4.0, 4.0 },
              actualValues
            );
        }

        [TestMethod]
        public void TestPiecewise1FrontierLow()
        {
            double[] actualValues = new PiecewiseMeasureAN(new ConstantMeasureAN(2.0), -1.0m,
            new ConstantMeasureAN(3.0)).EvaluateDiscrete(0, 6, 2).Values.ToArray();

            EvaluationAssert.AreEqual
            (
              new double[] { 6.0, 6.0, 6.0 },
              actualValues
            );
        }

        [TestMethod]
        public void TestPiecewise1Dirac()
        {
            double[] actualValues = new PiecewiseMeasureAN(new ConstantMeasureAN(2.0), 3.0m, new
            DiracMeasureAN(4.0m, 22.5)).EvaluateDiscrete(0, 6, 3).Values.ToArray();

            EvaluationAssert.AreEqual
            (
              new double[] { 6.0, 22.5 },
              actualValues
            );
        }

        [TestMethod]
        public void TestPiecewise3Diracs()
        {
            double[] actualValues = new PiecewiseMeasureAN(new DiracMeasureAN(0.4m, 10.0), 0.5m, new
              DiracMeasureAN(1.5m, 11.0), 1.7m, new DiracMeasureAN(2.8m, 12.0)).EvaluateDiscrete(0.0m, 6.0m, 1).Values.ToArray();

            EvaluationAssert.AreEqual
            (
              new double[] { 10.0, 11.0, 12.0, 0.0, 0.0, 0.0 },
              actualValues
            );
        }

    }
}
```