



HAL
open science

Commande et stabilité des systèmes commutés : Application Fluid Power

Omar Ameur

► **To cite this version:**

Omar Ameur. Commande et stabilité des systèmes commutés : Application Fluid Power. Automatique / Robotique. Ecole Centrale Lyon, 2015. Français. NNT: . tel-01988971

HAL Id: tel-01988971

<https://theses.hal.science/tel-01988971>

Submitted on 22 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE LYON, DÉLIVRÉ PAR L'ÉCOLE CENTRALE
DE LYON

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

Ecole Doctorale EEA de Lyon (ED160)

Spécialité : Automatique

par

Omar AMEUR

Commande et stabilité des systèmes commutés : Application Fluid Power

Soutenance le 12/11/2015 devant le jury composé de :

M. NACER K. M'SIRDI	Professeur, Polytech' Marseille	Président
M. MARC JUNGERS	Chargé de recherche, CNRS, CRAN, Nancy	Rapporteur
M. YANN LE GORREC	Professeur, ENSMM Besançon	Rapporteur
M. ALEXANDRE TROFINO	Professeur, UFSC, Florianópolis, Brésil	Examinateur
M. GÉRARD SCORLETTI	Professeur, Centrale Lyon	Directeur de Thèse
M. XAVIER BRUN	Professeur, INSA de Lyon	Co-directeur de Thèse
M. PAOLO MASSIONI	Maître de conférences, INSA de Lyon	Encadrant de Thèse
M. MOHAMED SMAOUI	Maître de conférences, INSA de Lyon	Encadrant de Thèse

Thèse préparée au sein du Laboratoire Ampère

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire Ampère, à la fois à l'ECL et à l'INSA de Lyon. Je tiens tout particulièrement à remercier mes encadrants de thèse "Gérard SCORLETTI, Xavier BRUN, Paolo MASSIONI et Mohamed SMAOUI", qui m'ont accompagné tout au long de ma formation. Leurs disponibilités et leurs généreux secours au cours de certains de mes moments difficiles ont été d'une très grande qualité, et d'un immense réconfort. J'ai été extrêmement sensible à leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à Monsieur Marc JUNGERS, Chargé de recherche CNRS au CRAN (Nancy), et Monsieur Yann LE GORREC, Professeur à l'ENSM Besançon, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ces travaux, pour leur analyse soignée, ainsi que pour les remarques constructives émises dans leurs rapports.

Que Monsieur Nacer K. M ?SIRDI, Professeur à Polytech' Marseille, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, soit vivement remercié.

Je tiens à assurer toute ma reconnaissance à Monsieur Alexandre TROFINO, Professeur à l'UFSC Florianópolis (Brésil), pour avoir été membre de mon jury, pour toutes les discussions que nous avons eues et pour ses commentaires judicieux, lesquels m'ont permis d'affiner davantage certains aspects de ce travail.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur E. BIDEAUX, professeur à l'INSA de Lyon et mon encadrant de stage de Master GSA, pour ses conseils, son efficacité, ses connaissances et ses qualités humaines.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire Ampère, en particulier à Damien EBERARD, Sylvie SESMAT, Alaa HIJAZI, Minh Tu PHAM, Arnaud LELÈVE, Daniel THOMASSET, Jean-François TREGOUËT, Romain DELPOUX, Federico BRIBIESCA, Jean Pierre SIMON, Alan CHAUVIN, Martin GENDRIN, Thomas SCHAEF, Nicolas HERZIG, Khia Duc NGUYEN, Fei LIU, Lu XIAOSHAN, Anton KORNIENKO, Laurent BAKO, Eric BLANCO, Emmanuel BOUTTEUX et Sergio WAITMAN. Merci à tous pour l'accueil, l'ambiance et l'aide qu'ils m'ont apporté.

A tous mes amis qui m'ont soutenu durant ce parcours doctoral : Habib, Chemseddine, Mohamed, Khaled, Saïd, Rédha, Chouaïb, Abdelmalek, Mohamed, Reda, Rachid, Djamel, Djarwad, Houssine, Bingo, Toufik, Rafik, Chmissou, Imad, les 2 Zaki.

Enfin, Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à mes parents, pour leurs prières et encouragements. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, motivé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Je remercie également ma famille et en particulier mon frère et mes deux sœurs pour m'avoir fait partager leur joie de vivre et m'avoir ainsi soutenu dans mes travaux. Je remercie très sincèrement la famille MEKHENACHE et la famille HAMDI pour leur soutien moral et psychologique. Plus personnellement, je remercie une personne de très grande importance dans ma vie, qui m'a accompagné et qui m'a soutenu tout le temps par la force et l'énergie qui lui sont disponibles.

Résumé

Ces travaux portent sur la commande et l'analyse de la stabilité d'un système électropneumatique constitué d'un axe linéaire commandé par deux servodistributeurs régulant le débit massique entrant dans chaque chambre de l'actionneur. La problématique générale est motivée par l'apparition d'un phénomène de redécollage sur ce système électropneumatique difficilement pris en compte par les études actuelles en automatique. Ce problème, rencontré depuis de nombreuses années, concerne toutes les commandes linéaires et non linéaires mono et multidimensionnelles étudiées au laboratoire. Il se traduit par des mouvements saccadés du vérin au voisinage de l'équilibre. Ce phénomène est dû à la présence de frottements secs et aux dynamiques des pressions dans les chambres pneumatiques de l'actionneur, qui continuent à évoluer (intégrer le débit massique entrant délivré par les servodistributeurs), même après l'équilibre mécanique. La première partie de ce mémoire propose une commande non linéaire commutée afin d'éviter le phénomène de redécollage de l'actionneur électropneumatique notamment vis-à-vis des variations de frottements secs qui peuvent à tout moment causer ce phénomène. Cette technique est finalement mise en œuvre et son efficacité est constatée.

La plus grande partie de ce mémoire traite l'analyse de l'actionneur électropneumatique avec sa loi de commande commutée. La présence de frottements secs et l'application d'une loi de commande commutée nous a amené à concilier une démarche d'analyse de stabilité, en considérant une classe de systèmes commutés appelée systèmes affines par morceaux. La principale difficulté de cette démarche réside dans l'obtention de fonctions de Lyapunov adéquates, qui se transforme en un problème d'optimisation sous contraintes LMI (Linear Matrix Inequality) en utilisant la S-procédure. Afin d'analyser la stabilité d'un système PWA (PieceWise Affine), la première démarche proposée permet le calcul d'une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI, en imposant des conditions suffisantes de stabilité. Ces dernières permettent, contrairement aux méthodes classiques, d'assurer la convergence de trajectoires d'état non pas vers un point d'équilibre, mais vers un ensemble des points d'équilibre d'un système PWA. L'approche proposée permet aussi l'étude de la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques dans le système.

Nous proposons aussi une deuxième approche pour la construction d'un type de fonctions de Lyapunov dites polynomiales par morceaux, via l'utilisation des "sum of square" et de la "power transformation", afin d'analyser la stabilité d'un ensemble de points d'équilibre d'un système PWA, en présence de phénomènes de glissement et de variations paramétriques. Cette approche propose des conditions suffisantes moins conservatives que celles imposées par les fonctions de Lyapunov quadratique par morceaux. En effet, sur des exemples de systèmes PWA présentant de dynamiques discontinues sur les frontières entre les cellules, pouvant générer à tout moment des phénomènes de glissement, ces dernières s'avèrent inefficaces et ne permettent pas d'assurer la stabilité des systèmes PWA en présence de ces phénomènes. Par conséquent, les résultats sur la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sont étendus pour pouvoir calculer des fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux d'ordre supérieur, en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Ces dernières permettent de garantir des conditions plus générales et moins conservatives par rapport à celles développées dans la littérature.

Ces deux approches ont été appliquées afin d'analyser la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre du système électropneumatique, en considérant à la fois un modèle de frottements sous la forme d'une saturation et un autre sous la forme d'un relais présentant une dynamique discontinue. Les résultats sont satisfaisants, c'est-à-dire la stabilité est assurée ainsi que la robustesse vis-à-vis des variations de seuils de frottements secs. La possibilité d'avoir des phénomènes de glissement est aussi traitée pour le cas de relais en considérant la deuxième approche proposée.

Mots clés : Redécollage des vérins électropneumatiques, commande commutée, Systèmes affine par morceaux, analyse de stabilité.

Abstract

This work focuses on the control and stability analysis of an electro-pneumatic system, i.e. a linear pneumatic cylinder controlled by two servo valves regulating the mass flow entering each chamber of the actuator. The general problem is motivated by the appearance of stick-slip on the electro-pneumatic system, hardly taken into account by the current studies in automatic control. This problem, encountered throughout the years, concerns all mono- and multidimensional linear and non-linear controls systems studied at the laboratory. In pneumatic cylinders, the phenomenon consists in a displacement of the rod a while after it has come to a rest ; this is due to the fact that the force acting on the rod initially becomes smaller than the threshold which is necessary for a motion, and then this threshold is overcome later on. In this case, stick-slip is caused by the presence of dry friction and by the pressure dynamics in the chambers, which continue to evolve (integrating the net incoming mass flow from the servovalves) even after the rod has stopped. The first part of this thesis proposes a nonlinear switching control law in order to avoid stick-slip on pneumatic cylinder, taking into account with the variations of dry friction that may occur at any time causing this phenomenon. This technique is implemented and its effectiveness is recognized.

The greatest part of this thesis deals with the stability analysis of the pneumatic cylinder with its switched control law. The presence of dry friction and the application of a switched control law requires an appropriate method for approaching the stability analysis; this method is based on considering the closed-loop system as belonging to a class of switched systems called piecewise affine systems (PWA). The main difficulty in this approach lies in obtaining adequate Lyapunov functions for proving stability, which turns into an optimization problem under LMI constraints (Linear Matrix Inequality) using the S-procedure. In order to analyze the stability of a PWA system, a first method is proposed allowing the computation of a piecewise quadratic Lyapunov function through an optimization problem under LMI constraints. The method takes into account, in contrast to conventional methods, that the states might converge not to a single point but to a set of equilibrium points. The proposed approach allows also the study of robustness with respect to parametric variations in the system.

A second method is also proposed for the construction of a type of Lyapunov functions called piecewise polynomial, using the “sum of squares” and “power transformation” techniques. This approach proposes less conservative sufficient conditions than those imposed by the piecewise quadratic Lyapunov functions, yielding a more successful stability test when for PWA systems featuring sliding modes and parametric variations. In fact, on PWA systems with discontinuous dynamics (which can generate sliding phenomena), piecewise quadratic Lyapunov functions might prove ineffective to prove the stability. Therefore, the results on piecewise quadratic Lyapunov functions are extended in order to compute piecewise polynomial Lyapunov functions of higher order, by solving an optimization problem under LMI constraints. These functions are more general and allow less conservative conditions compared to those formerly developed in the literature.

Both of these methods have been applied to the stability analysis of the set of equilibrium points of the pneumatic cylinder, considering first a friction model in saturation form and then a model in relay form with a discontinuous dynamics. The application of the methods is successful, i.e. the robust stability is proven under dry friction threshold variations, with possibility of sliding modes.

KEYWORDS : Stick-slip phenomena of pneumatic cylinders, switching control law, piecewise affine system, stability analysis, Lyapunov functions.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
NOTATIONS	1
INTRODUCTION GÉNÉRALE	3
1 A PROPOS DU REDÉCOLLAGE DANS LES SYSTÈMES ELECTROPNEUMATIQUES	9
1 INTRODUCTION	10
2 DESCRIPTION ET MODÉLISATION DU PROCÉDÉ	10
3 PROBLÉMATIQUE DE REDÉCOLLAGE	14
3.1 Phénomène du Redécollage	14
3.2 Solution proposée par [130] pour éviter ce phénomène	16
3.3 Inconvénients et points faibles	17
3.4 Solution proposée	18
3.5 Synthèse de lois de commande	21
4 PROBLÈME DE LA STABILITÉ DE LA SOLUTION PROPOSÉE	25
4.1 Description de ce problème	25
4.2 Mise en forme de modèle du vérin	30
2 LES SYSTÈMES AFFINES PAR MORCEAUX (PWA)	33
1 INTRODUCTION	34
2 DÉFINITION DES SYSTÈMES PWA	35
3 L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ D'UNE SOLUTION D'UN SYSTÈME PWA	37
4 ANALYSE DE LA STABILITÉ	38
4.1 Différentes formes de stabilité	39
4.2 Stabilité au sens de Lyapunov	42
4.3 Analyse de stabilité des systèmes linéaires temps invariant (LTI)	44
4.4 Extension aux systèmes affines par morceaux	45
4.5 Méthodes de référence : convergence vers un point d'équilibre	48
5 APPLICATION AU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE	57
5.1 Modèle électropneumatique considéré	58
5.2 Retour d'état avec des gains sur tous les états	60
5.3 Retour d'état avec des gains sur les erreurs en pression	63
6 ANNEXES	68
6.1 Optimisation LMI	68
6.2 Application au système électropneumatique	71
3 ANALYSE DE STABILITÉ DES SYSTÈMES PWA	75
1 INTRODUCTION	76

2	CONVERGENCE VERS UN ENSEMBLE DE POINTS D'ÉQUILIBRE	76
2.1	Extension et contribution	76
2.2	Cellules dont l'intérieur contient l'origine	85
3	ANALYSE DE SYSTÈMES PWA INCERTAINS	86
3.1	Stabilité robuste vis-à-vis de variations paramétriques	86
3.2	Systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps	86
3.3	Système affine par morceaux à paramètres variant dans le temps	87
4	APPLICATION AU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE	89
4.1	Analyse de la stabilité	89
4.2	Suivi de trajectoires désirées	98
5	CONCLUSION	105
6	ANNEXES	109
6.1	Lemme de Finsler	109
6.2	Caractéristiques des cellules : suivi de trajectoires désirées	109
4	EXTENSION DE L'ANALYSE DE STABILITÉ DES SYSTÈMES PWA	113
1	INTRODUCTION	114
2	SYSTÈME PWA PRÉSENTANT DES PHÉNOMÈNES DE GLISSEMENT	115
3	FONCTION DE LYAPUNOV POLYNOMIALE PAR MORCEAUX	117
3.1	Définition	117
3.2	Propriétés	119
3.3	Analyse de stabilité	120
4	SYSTÈMES PWA VARIANT DANS LE TEMPS AVEC PHÉNOMÈNES DE GLISSEMENT	125
5	APPLICATION AU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE	132
5.1	Frottement modélisé par une saturation	133
5.2	Frottement modélisé par un relais	144
6	CONCLUSION	155
7	ANNEXES	160
7.1	Frottement sous forme d'une saturation	160
7.2	Frottement sous forme d'un relais	164
	CONCLUSION GÉNÉRALE	173
	BIBLIOGRAPHIE	177

LISTE DES FIGURES

1	Actionneur électropneumatique	3
2	Actionneur électropneumatique : les servodistributeurs	4
3	Vérin électropneumatique : la partie mobile	5
1.1	Système Electropneumatique : principe de base	11
1.2	Vérin électropneumatique	11
1.3	Modèle de frottements secs.	13
1.4	Phénomène de redécollage sur le vérin électropneumatique	15
1.5	Commutation entre deux modèles en boucle fermée	17
1.6	Mesures expérimentales du phénomène de redécollage pour la méthode [130]	18
1.7	Effort pneumatique nul	19

1.8	Effort pneumatique dans le cas effort pneumatique désiré nul	20
1.9	Schéma de commutation au niveau de la commande	21
1.10	Trajectoires en simulation obtenues en appliquant une commande commutée entre (1.17) et (1.20)	26
1.11	Résultats expérimentaux 1 obtenus en appliquant une commande commutée entre (1.17) et (1.20)	27
1.12	Résultats expérimentaux 2 obtenues en appliquant une commande commutée entre (1.17) et (1.20)	28
1.13	Algorithme de commutation entre les deux modèles en boucle fermée (1.18) et (1.21)	29
2.1	Système linéaire connecté à une saturation	36
2.2	Les cellules de système linéaire connecté à une saturation	36
2.3	Les cellules du système PWA (2.9).	37
2.4	La fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2)	51
2.5	Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2)	51
2.6	La fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2)	53
2.7	Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2)	54
2.8	Stabilité dans le cas de domaine borné D ; (C) : courbe de niveaux maximale de la fonction de Lyapunov ; x_{01} , x_{02} : des conditions initiales.	55
2.9	Cellule dont l'intérieur contient l'origine	57
2.10	Les cellules du système PWA (2.70).	58
2.11	Les cellules X_i dans le cas de frottements sous forme d'une saturation, intersection avec le plan (e_v, e_y)	59
2.12	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y)	62
2.13	Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y)	63
2.14	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y)	64
2.15	Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y)	64
3.1	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de la stabilité asymptotique	90
3.2	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de stabilité asymptotique	91
3.3	Evolution de l'erreur en position pour différentes condition initiales	92
3.4	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de la stabilité exponentielle	93
3.5	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de la stabilité exponentielle	94
3.6	Ensemble des non linéarités considérées pour représenter le phénomène de frottements	95
3.7	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , robustesse sans contrainte de taux de décroissance	96
3.8	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , robustesse sans contrainte de taux de décroissance	96
3.9	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , robustesse avec contrainte de taux de décroissance	97
3.10	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , robustesse avec contrainte de taux de décroissance	98
3.11	Vitesse désirée	100
3.12	Position désirée	100
3.13	Évolution de position par rapport à la position désirée	102
3.14	Les cellules X_i dans le cas de suivi des trajectoires désirées.	103
3.15	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation	104
3.16	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation	105

3.17	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (e_y, v, v_d) , cas de trois contraintes de commutation.	106
3.18	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation, robustesse vis-à-vis de frottements	107
3.19	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation, robustesse vis-à-vis de frottements	107
3.20	Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (e_y, v, v_d) , cas de trois contraintes de commutation, robustesse vis-à-vis de frottements.	108
4.1	Modes glissants.	116
4.2	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité asymptotique	134
4.3	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité asymptotique	135
4.4	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité exponentielle	136
4.5	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité exponentielle	137
4.6	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance	138
4.7	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance	139
4.8	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance	140
4.9	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance	140
4.10	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi de trajectoires désirées.	143
4.11	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi de trajectoires désirées.	143
4.12	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (v, e_y, v_d) , frottements sous forme de saturation, suivi de trajectoires désirées.	144
4.13	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi robuste de trajectoires désirées.	145
4.14	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi robuste de trajectoires désirées.	145
4.15	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (v, e_y, v_d) , frottements sous forme de saturation, suivi robuste de trajectoires désirées.	146
4.16	Modèle de frottements sous forme d'un relais	146
4.17	Les cellules X_i dans le cas de frottements sous forme d'un relais, intersection avec le plan (e_v, e_y)	147
4.18	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité asymptotique	148
4.19	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité asymptotique	148
4.20	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité exponentielle	150
4.21	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité exponentielle	150
4.22	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance	152
4.23	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance	152

4.24	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance	153
4.25	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance	153
4.26	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, suivi de trajectoires désirées.	154
4.27	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (v, e_y, v_d) , relais, suivi de trajectoires désirées.	154
4.28	Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, suivi robuste de trajectoires désirées	155
4.29	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, suivi robuste de trajectoires désirées	156
4.30	Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (e_y, v, v_d) , relais, suivi robuste de trajectoires désirées	156

Liste des tableaux

2.1	Résultats d'analyse de stabilité par les méthodes [69] et [54].	66
4.1	Tous les cas d'étude sur le vérin électropneumatique	157

NOTATIONS

a	Accélération linéaire [$m.s^{-2}$]
a_d	Accélération désirée [$m.s^{-2}$]
a_i	Terme affine de système affine par morceaux
$A_i, \bar{A}_i, \tilde{A}_i$	Matrice d'état
B	Matrice de commande
E_{eq}	Ensemble d'équilibre de système affine par morceaux
$F_f(v)$	Force des frottements [N]
F_{ext}	Force extérieure [N]
F_{pneu}	Effort pneumatique [N]
I	L'ensemble des indices de cellules
I_0	L'ensemble des indices de cellules qui incluent l'origine
I_1	L'ensemble des indices de cellules qui n'incluent pas l'origine
j	jerk [$m.s^{-3}$]
K_y, K_v, K_a, K_P, K_N	Gains de retour d'état
k	Constante de gaz polytropique
l	Course du vérin [m]
M	Masse [Kg]
max	Maximum
min	Minimum
N	Nombre de cellules
P_P	Pression dans la chambre P [Pa]
P_N	Pression dans la chambre N [Pa]
P_i	Matrice de Lyapunov de la cellule X_i
q_{mP}, q_{mN}	Débits massiques [$kg.s^{-1}$]
\mathbb{R}^n	L'ensemble des vecteurs réels de dimension n
\mathbb{R}	ensemble des réels
\mathbb{R}_+	ensemble des réels positifs
r	Constante des gaz parfaits relative à l'unité de masse [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]
S_P	Section du piston dans la chambre P [m^2]
S_N	Section du piston dans la chambre N [m^2]
T	Température absolue [K]
u	Tension [V]
v	Vitesse [$m.s^{-1}$]
v_d	Vitesse désirée [$m.s^{-1}$]
$V(x)$	Fonction de Lyapunov
V_{DP}	Volume mort de la chambre pneumatique P [m^3]
V_{DN}	Volume mort de la chambre pneumatique N [m^3]
$V_P(y)$	Volume dans la chambre P [m^3]
$V_N(y)$	Volume dans la chambre N [m^3]

x	Vecteur d'état
X_i	La $i^{\text{ème}}$ cellule
y	Position $[m]$
y_d	Position désirée $[m]$
α	Borne inférieure sur le taux de décroissance
\wedge	Opérateur ET
\vee	Opérateur OU
$A \succ 0$	A est définie positive
$A \implies B$	A implique B , si A est vraie alors B est vraie

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce rapport de thèse a été effectué au laboratoire Ampère¹, au sein du département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes (MIS). L'objectif général des travaux de recherche menés dans ce laboratoire consiste à gérer et utiliser l'énergie dans le système de façon rationnelle en relation avec leur environnement. Ce laboratoire est contractualisé avec trois établissements dans la région Lyonnaise : l'Ecole Centrale de Lyon (ECL), l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) et l'Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL1).

La particularité des recherches développées au Laboratoire Ampère est d'être à cheval entre l'automatique et de nombreux domaines de l'ingénierie, plus particulièrement le domaine Fluid Power, le Laboratoire Ampère possédant un centre d'essais Fluid Power (systèmes pneumatiques, systèmes hydrauliques, lois de commande études de performances Fluid Power).

Nos travaux de recherche s'inscrivent dans cette démarche. Au cours de cette thèse, nous sommes attachés à la fois à tester expérimentalement le bon fonctionnement des lois de commande et à le démontrer théoriquement

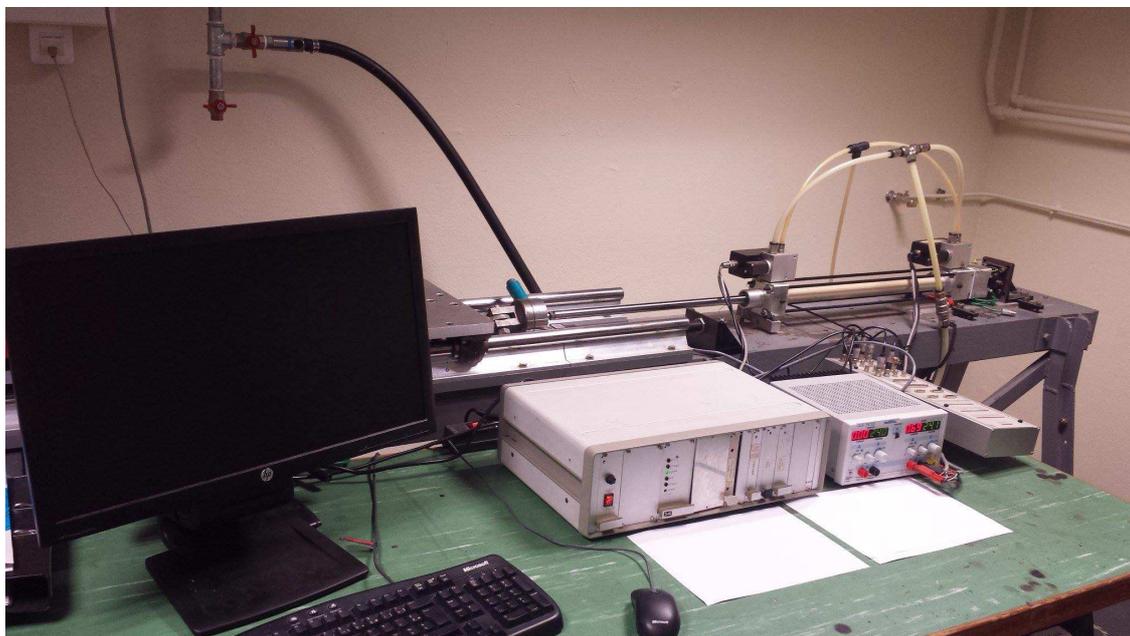


FIGURE 1 – Actionneur électropneumatique

1. <http://www.ampere-lyon.fr/>

CONTEXTE DE RECHERCHE

En automatique, on fait appel à de nombreux types d'actionneurs pneumatiques connus pour leur bonne robustesse et leur bonne vitesse d'exécution tels que les vérins, les moteurs rotatifs oscillants, les moteurs rotatifs à piston. Les actionneurs pneumatiques, retenus principalement pour ces qualités, occupent une large place dans le milieu industriel, surtout après l'intégration d'un nouveau modulateur de puissance à la place des électrovannes ou distributeurs « tout ou rien » : les servodistributeurs, voir Figure 3, qui ont permis de répondre à l'augmentation toujours croissante des performances souhaitées. Par ailleurs, l'introduction de ces derniers est considérée comme une évolution technologique par les industriels, qui a permis, avec les avancées théoriques de la commande durant ces dernières années, l'implantation de plusieurs lois de commande modernes sur des actionneurs électropneumatiques.

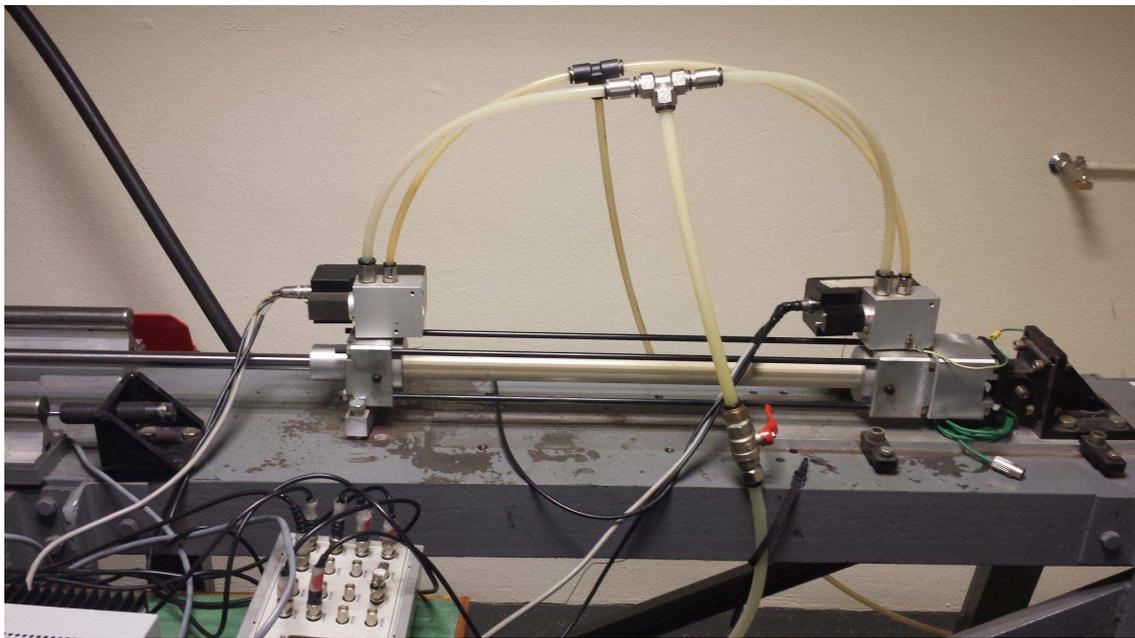


FIGURE 2 – Actionneur électropneumatique : les servodistributeurs

Spécialement au Laboratoire Ampère, de nombreux travaux de recherche ont été menés pour tester l'applicabilité de différentes méthodes de commande aux systèmes électropneumatiques. Ainsi [104] a synthétisé des lois de commande linéaires et non linéaires pour asservir en position un axe électropneumatique rotatif. [37] a abordé des problèmes de commande en position et en effort et a étudié la faisabilité d'une pince à souder électropneumatique. [80] a développé des approches pour la commande des vérins de grande longueur. [16] a traité de la commande linéaire et non linéaire adaptative d'un asservissement de position électropneumatique et d'un dispositif de contrôle de pression. [17] a appliqué une commande par modes glissants d'ordre 1 sur un axe électropneumatique rotatif. [20] a testé des lois de commandes linéaires et non linéaires (commande non linéaire linéarisante) ainsi qu'une loi de commande non linéaire multivariable basée sur la théorie de la platitude sous contrainte de critères énergétiques. [117] a développée des lois de commandes non linéaires basée sur la technique de backstepping, des modes glissants d'ordre un et d'ordre supérieur.

Cependant, l'un des problèmes majeurs de l'actionneur électropneumatique, lors de l'application de lois de commandes sur un actionneur électropneumatique destiné à des applications en mouvements rectilignes comme le positionnement d'une charge à masse variable, voir Figure 3, est le phénomène de « redécollage » qui se présente comme un mouvement de secousses ou un

déplacement de la partie mobile de l'actionneur électropneumatique (masse, tige,..., voir Figure 3) après avoir rejoint l'équilibre. Dans ce cas, ce phénomène est dû à la présence de frottement sec et à la dynamique de pression dans les chambres pneumatiques de l'actionneur, qui continuent à évoluer (intégrer le débit massique entrant délivré par les servodistributeurs), même après que la partie mobile soit arrêtée.

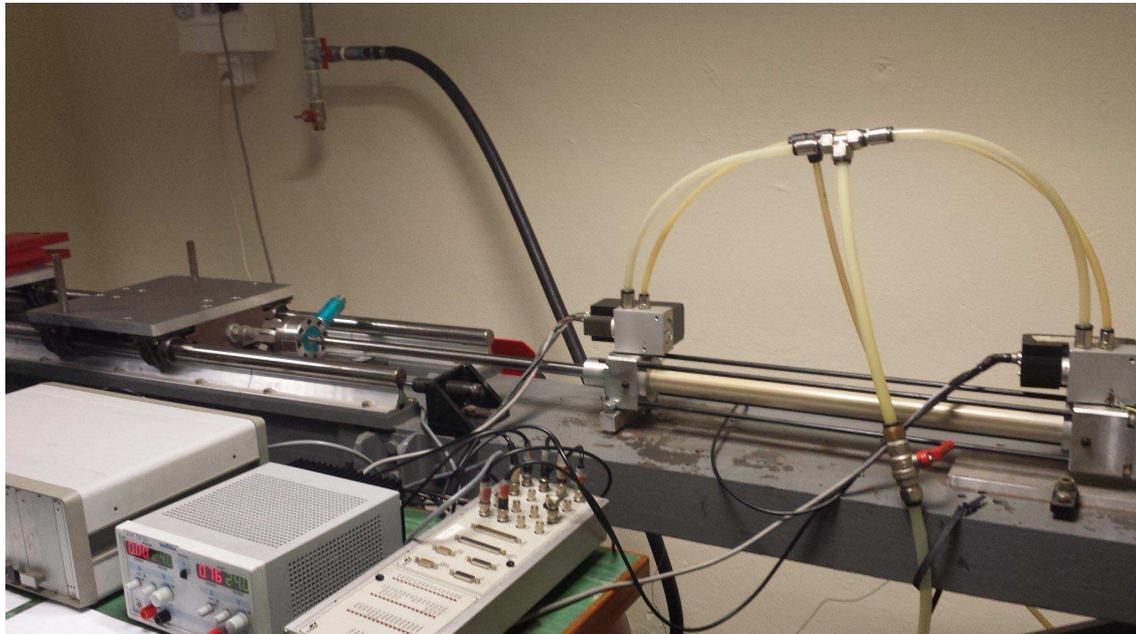


FIGURE 3 – Vérin électropneumatique : la partie mobile

Afin d'éviter ce phénomène fortement indésirable en industrie, une loi de commande a été proposée récemment dans [130, 129]. Cette solution consiste en une commande non linéaire linéarisante, qui compense les non-linéarités dans le modèle pneumatique, avec une loi de commutation appropriée. Le contrôleur commute à partir d'un suivi de trajectoires en position et en pression vers une régulation des pressions après que la partie mobile soit en équilibre, en compensant la différence de pression entre les deux chambres, tout en évitant une évolution incontrôlée des pressions qui pourrait éventuellement faire redémarrer cette partie mobile. Cette approche a été implémentée sur le vérin électropneumatique, les résultats expérimentaux ont été très satisfaisants et le phénomène de redécollage a été limité.

Néanmoins, cette solution proposée ne permet pas de garantir d'une part, la robustesse vis-à-vis des variations de paramètres pouvant déclencher le phénomène de redécollage, notamment la diminution des frottements secs, influencés par des variations climatiques et d'autre part, aucune démonstration mathématique d'analyse de stabilité n'a été proposée.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte, c'est-à-dire d'une part, elle traite de la commande non linéaire commutée afin d'éviter le phénomène de redécollage de l'actionneur électropneumatique, en étendant celle développée dans [130], notamment vis-à-vis des variations de frottements secs qui peuvent à tout moment causer ce phénomène. D'autre part, l'analyse de l'actionneur électropneumatique avec sa loi de commande commutée est effectuée. La présence de frottements secs et l'application d'une loi de commande commutée nous a amené à concilier une démarche d'analyse de stabilité, en considérant une classe de systèmes commutés appelée systèmes affines par morceaux, et en se basant sur le principe d'optimisation sous contraintes « LMI » (Linear Matrix Inequality).

Les systèmes affines par morceaux ont fait l'objet d'études depuis de longues années. Ils ont été développés pour modéliser différents systèmes non linéaires complexes, notamment des

systèmes hybrides et des systèmes commutés. L'analyse de tels systèmes a été largement abordée et différents résultats intéressants ont été proposés, basés essentiellement sur un type de fonctions de Lyapunov appelés fonctions de Lyapunov par morceaux, plus approprié que des fonctions de Lyapunov quadratiques. Dans la littérature [69, 54, 137], la recherche de ces fonctions de Lyapunov se transforme en un problème d'optimisation sous contraintes LMI en utilisant la S-procédure. Cependant, on retiendra que ces méthodes développées dans la littérature ne traitent que le cas d'analyse de stabilité d'un point d'équilibre et non pas l'analyse d'un ensemble des points d'équilibre d'un système affine par morceaux.

Les problèmes d'optimisation sont généralement évoqués comme une classe générale de problèmes mathématiques permettant l'étude des propriétés d'un modèle. Spécialement l'optimisation convexe sous contraintes « LMI », considérée comme une sous classe de problèmes « faciles », c'est-à-dire dotée d'algorithmes de résolution en temps polynomial, apparaît actuellement comme une des plus larges classes d'optimisation pour laquelle on dispose d'algorithmes de résolution efficace proposés dans les logiciels de calcul scientifique généraux comme Matlab ou Scilab et qui a eu d'importantes applications en Sciences de l'Ingénieur.

CONTRIBUTIONS DE LA THÈSE

Les principales contributions de ces travaux de thèse sont répertoriés comme suit :

1. Dans un premier temps, et afin d'éviter le phénomène de redécollage même en présence des variations de frottements, le résultat de [130] est adapté en proposant une approche alternative qui consiste à empêcher l'évolution de l'effort pneumatique en le maintenant constant, voire nul, pendant l'équilibre partiel mécanique. Cette technique est testée en simulation, puis elle est appliquée sur le vérin électropneumatique. Les résultats sont très satisfaisants en simulation et expérimentalement.
2. Afin d'analyser la stabilité d'un système PWA (PieceWise Affine), nous proposons un premier résultat inspiré de ceux développés dans [69] et [54], qui permet le calcul d'une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI, en imposant des conditions suffisantes de stabilité. Ces dernières permettent, contrairement aux méthodes classiques, d'assurer la convergence de trajectoires d'état non pas vers un point d'équilibre, mais vers un ensemble des points d'équilibre d'un système PWA. L'approche proposée permet aussi l'étude de la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques dans le système. Cette méthode est appliquée afin d'analyser la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre du système électropneumatique, en considérant un modèle de frottements sous forme d'une saturation. Les résultats sont satisfaisants, c'est-à-dire la stabilité est assurée et la robustesse vis-à-vis des variations de seuils de frottements secs est garantie.
3. Nous proposons aussi une deuxième approche pour la construction d'un type de fonctions de Lyapunov dites polynomiales par morceaux, via l'utilisation des SOS et power transformation, afin d'analyser la stabilité d'un ensemble de point d'équilibre d'un système PWA, en présence de phénomènes de glissement et des variations paramétriques. Cette approche dispose de conditions suffisantes moins conservatives que celles imposées par la forme quadratique. En effet, dans le cas de système PWA présentant de dynamiques discontinues sur les frontières entre les cellules, qui peut générer à tout moment des phénomènes de glissement, l'utilisation de la fonction de Lyapunov s'avère inefficace et ne permet pas d'assurer la stabilité des systèmes PWA en présence de ces phénomènes. Par conséquent, les

résultats sur la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sont étendus pour pouvoir calculer les fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux d'ordre supérieur, en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Ces dernières permettent de garantir des conditions plus générales et moins conservatives par rapport à la première approche et par rapport à celles développées dans la littérature [69, 54, 137]. L'approche proposée est appliquée aussi afin d'analyser la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre du système électropneumatique, en considérant cette fois-ci un modèle de frottement sous forme d'un relais présentant une dynamique discontinue. Les résultats d'application sont satisfaisants, c'est-à-dire la stabilité est assurée, sous la possibilité d'avoir des phénomènes de glissement, et la robustesse vis-à-vis des variations de seuils de frottements secs est garantie.

ORGANISATION DE LA THÈSE

Si le lecteur n'est pas familiarisé avec le domaine du Fluid power, il trouvera au Chapitre 1 les éléments nécessaires à la compréhension du problème posé en terme d'analyse de stabilité. Les chapitres suivants sont sur le plan théorique décorrélés du domaine Fluid Power qui n'est dans cette thèse qu'un champ d'application possible de théorèmes développés dans ces travaux.

Ce mémoire de thèse se décompose en quatre chapitres qui s'articulent comme suit.

Chapitre 1 : A propos du redécollage dans les systèmes Electropneumatiques

Dans ce chapitre, le phénomène de redécollage sur le système électropneumatique est étudié. Dans un premier temps, nous faisons une étude sur la description du système électropneumatique, la source du phénomène de redécollage et comment palier ce problème en littérature. Nous proposons ensuite une solution pour éviter ce phénomène, même en présence de variations de frottements secs. Ce chapitre se termine par une discussion sur l'analyse de stabilité du système électropneumatique avec sa loi de commande en présentant les difficultés et les différents objectifs de ce travail de recherche.

Chapitre 2 : Les systèmes affines par morceaux (PWA)

Ce chapitre traite de la notion de systèmes affines par morceaux et les différentes méthodes de base d'analyse de stabilité de ces systèmes via l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Dans un premier temps, les deux méthodes de référence pour analyser la stabilité de cette classe de systèmes avec quelques exemples d'application sont exposés. Ensuite, ces deux méthodes seront appliquées afin d'analyser la stabilité du système électropneumatique présenté au Chapitre 1. Le chapitre se termine par une discussion sur les différents résultats exposés.

Chapitre 3 : Analyse de stabilité des systèmes PWA

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la stabilité des systèmes affines par morceaux présentant un ensemble des points d'équilibre, via l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. D'abord, les différentes hypothèses sur le système PWA (2.1) et la démarche à suivre pour analyser la stabilité de ce dernier sont introduits. Nous présentons ensuite un résultat pour assurer la convergence vers un ensemble des points d'équilibre, et un autre en présence des variations paramétriques. Ce chapitre se termine par une application des différents résultats pour analyser le système électropneumatique.

Chapitre 4 : Extension de l'analyse de stabilité des systèmes PWA

Dan ce chapitre, nous faisons l'analyse de la stabilité des systèmes PWA via l'utilisation des fonctions polynomiales par morceaux en présence de modes de glissement et des variations de paramètres du système. Nous présentons tout d'abord les nouvelles hypothèses sur le système PWA et la démarche à suivre pour analyser la stabilité de ce dernier. Nous proposons ensuite un premier résultat pour assurer la convergence vers un ensemble des points d'équilibre en présence de modes de glissement. Puis, le résultat est étendu pour analyser la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques. Ce chapitre se termine par une application des résultats proposés pour analyser le vérin électropneumatique avec sa loi de commande présentant un ensemble des points d'équilibre, la possibilité d'avoir des modes de glissement et des incertitudes sur les paramètres.

PUBLICATIONS

Reuves internationales avec comité de lecture

- O. Ameer, P. Massioni, G. Scorletti, X. Brun and M. Smaoui. Lyapunov stability analysis of switching controllers in presence of sliding modes and parametric uncertainties with application to pneumatic systems, IEEE Transactions on Control Systems Technology (accepté). [4]

Conférences internationales avec comité de lecture

- O. Ameer, P. Massioni, G. Scorletti, X. Brun and M. Smaoui. A piecewise-affine approach to the analysis of non-linear control laws for pneumatic systems , IEEE Conference on Decision and Control, pages 3963 - 3969 2014, Los Angeles, USA [3]

- O. Ameer, P. Massioni, G. Scorletti, X. Brun and M. Smaoui. A piecewise-polynomial approach to the stability analysis of non-linear switching controllers in presence of sliding modes with application to pneumatic systems, IEEE Conference on Decision and Control 2015 (accepté) [5]

Chapitre 1

A propos du redécollage dans les systèmes Electropneumatiques

Résumé.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un vérin électropneumatique, et plus particulièrement du phénomène indésirable sur ce système qui est le phénomène de redécollage. Nous présentons d'abord une description du vérin et de ses différentes caractéristiques. Puis, une brève discussion est faite sur le redécollage et la solution développée en littérature pour surmonter ce phénomène. Ensuite, nous présentons les points faibles de cette solution, notamment la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et l'analyse de stabilité. Nous proposons alors une meilleure solution et terminons par fixer les différents objectifs de ce travail de recherche.

1 INTRODUCTION

Les systèmes électropneumatiques sont très utilisés en industrie. Leur bonne utilisation dépend de la maîtrise de leur commande, ce qui constitue un axe de recherche au laboratoire Ampère. Différentes lois de commandes ont été synthétisées afin de répondre aux différents cahiers des charges testés sur les « benchmark » du laboratoire.

En effet, le vérin électropneumatique est parmi les « benchmark » les plus utilisés du laboratoire, pour lequel des lois de commandes en position et en pression ont été synthétisées. Cette application pneumatique souffre d'un problème majeur dit "phénomène de redécollage" lors de l'application de ces lois de commandes. Il se traduit par un mouvement de secousses saccadées quand le système est à l'arrêt et constitue un problème crucial pour la mise en œuvre industrielle de cette technologie. Afin d'éviter ce phénomène, des lois de commandes commutées ont été synthétisées et proposées par [130, 129]. Cette approche a été implémentée sur le vérin électropneumatique; les résultats expérimentaux ont été très satisfaisants et le phénomène de redécollage a été limité.

Néanmoins, la solution proposée présente des inconvénients majeurs qui rend son utilisation limitée. En effet, d'une part, elle n'est pas robuste vis-à-vis des variations de paramètres causant le phénomène de redécollage, notamment la diminution des frottements secs, qui peuvent être influencés par les variations de la température par exemple. Par conséquent, la variation de tels paramètres peut à tout moment engendrer un phénomène de redécollage de la partie mobile.

D'autre part, le vérin électropneumatique avec des lois de commandes commutées, pour des conditions initiales données, n'a causé aucun phénomène d'instabilité. Cependant, aucune démonstration mathématique d'analyse de stabilité n'a été fait dans [130, 129].

Ce chapitre est subdivisé en deux parties afin de répondre aux deux problématiques précédentes.

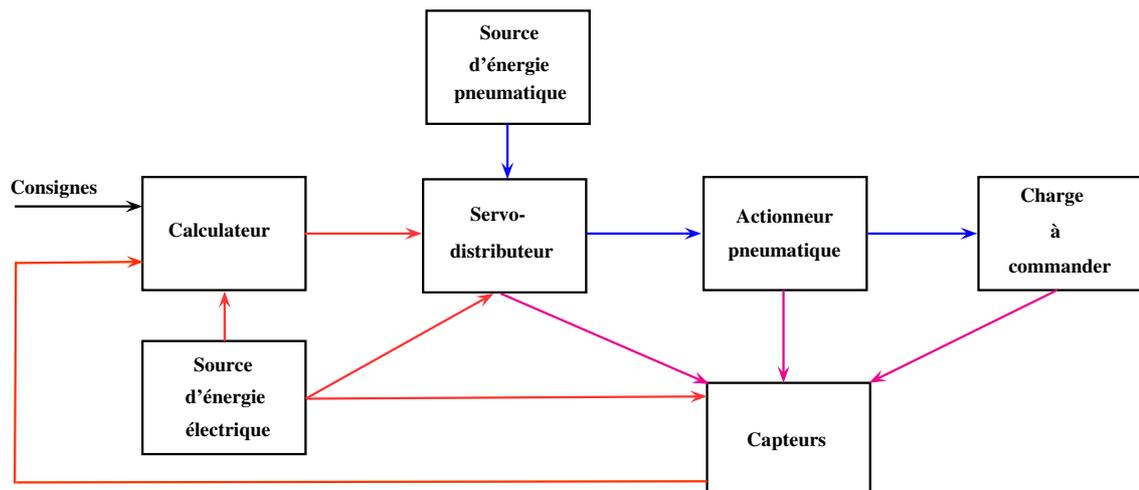
Dans un premier temps, il s'agit de faire une description du procédé électropneumatique, de sa modélisation et de ses caractéristiques. Puis nous décrivons la problématique rencontrée sur ce procédé liée au phénomène de redécollage en proposant ensuite une solution issue des travaux de [130, 129]. Ensuite, nous discutons le premier point faible de la méthode de [130], en proposant ensuite une nouvelle solution. Des résultats de simulation et expérimentaux sont présentés à la fin de cette partie.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse de la stabilité du vérin électropneumatique avec sa loi de commande commutée proposée dans la nouvelle solution, en éclaircissant la difficulté, les obstacles qui empêchent cette analyse et comment résoudre cette problématique.

2 DESCRIPTION ET MODÉLISATION DU PROCÉDÉ

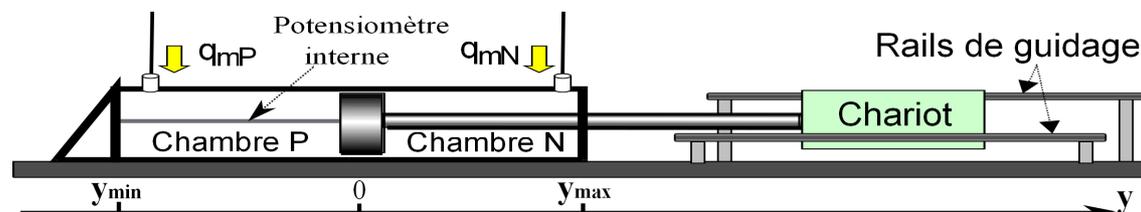
Nous pouvons représenter les différents éléments et les différents étages de puissance qui constituent un système électropneumatique ou tout système "Fluid Power" concernant l'asservissement en position d'un axe de la façon générale donnée dans la Figure 1.1 [20].

D'après cette figure et dans le but de répondre aux différents cahiers des charges imposés par l'utilisateur, que ce soit en temporel ou fréquentiel, l'asservissement électropneumatique de position est réalisé via un actionneur pneumatique qui entraîne une charge et qui utilise l'énergie délivrée via les servodistributeurs (modulateur de puissance). Des capteurs sont mis en place pour délivrer des informations sur les différents états du système, notamment la position, l'accélération et les pressions.

FIGURE 1.1 – *Système Electropneumatique : principe de base*

La Figure 1.2 représente un prototype du banc d'essais du Laboratoire Ampère à l'INSA qui est destiné à des applications en mouvements rectilignes comme le positionnement d'une charge à masse variable. Le banc d'essais peut être alimenté par de l'air comprimé et contient deux servodistributeurs pour réguler le débit fourni aux deux chambres du vérin, il présente un actionneur sous la forme d'un vérin linéaire pneumatique double effet avec une tige qui relie un chariot guidé sur rail.

Dans cette figure, on n'a représenté que les parties nécessaires à l'élaboration des modèles d'analyse du système électropneumatique. En effet, après quelques hypothèses simplificatrices, la partie concernant les servodistributeurs a été négligée car les dynamiques sont plus rapides que la dynamique de positionnement du vérin [16].

FIGURE 1.2 – *Vérin électropneumatique*

Concernant la modélisation, en plus de l'hypothèse précédente, et en tenant compte des travaux antérieurs réalisés au laboratoire Ampère, d'autres hypothèses ont été imposées afin d'aboutir à un modèle d'analyse simplifié et affine en la commande [114, 20].

Parmi ces hypothèses, on peut citer celles concernant les chambres pneumatiques du vérin [65] :

- les conduites de mise sous pression et de mise à l'échappement sont à la même hauteur ;
- l'air est supposé être un gaz parfait ;
- l'écoulement s'effectue sans échange de travail, ni de chaleur avec l'extérieur ;
- l'énergie cinétique est négligeable dans la chambre ;
- l'échange de travail avec le piston est réversible ;
- le modèle de quantité de chaleur échangée est supposé polytropique ;

- les variations de température dans les deux chambres du vérin ont été négligées devant la température source T_s .

Le modèle non linéaire du système électropneumatique après les hypothèses simplificatrices est donné comme suit [20, 130, 129, 24, 21, 120] :

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{M}(S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_f(v) - F_{ext}) \\ \dot{p}_N = \frac{krT}{V_N(y)} \left(\frac{S_N}{rT} p_N v + q_{mN} \right) \\ \dot{p}_P = \frac{krT}{V_P(y)} \left(\frac{-S_P}{rT} p_P v + q_{mP} \right) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec :

$$\begin{cases} V_P(y) = V_P(0) + S_P y \\ V_N(y) = V_N(0) - S_N y \end{cases}, \quad \begin{cases} V_P(0) = V_{DP} + S_P \frac{l}{2} \\ V_N(0) = V_{DN} + S_N \frac{l}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

où les signaux sont définis dans la table de notation.

Dans ce modèle, les deux premières dynamiques de la position y et de la vitesse v sont obtenues à partir de la modélisation de la partie mécanique en appliquant la deuxième loi de Newton sur le solide en mouvement et sous les hypothèses d'une liaison tige/chariot rigide et d'un solide indéformable. Les deux autres dynamiques sont obtenues par la modélisation des chambres pneumatiques à volumes variables.

M est la masse équivalente de toute la partie mobile (chariot, piston, tige,...) qui se déplace horizontalement sur lequel agit une force extérieure qui sera supposée constante F_{ext} .

$F_f(v)$ est la force de frottements secs, dont le modèle non linéaire est donné dans la littérature par plusieurs relations [8, 36, 131, 27]. Dans nos travaux de thèse, nous considérons deux modèles des forces de frottements secs, l'un dans une forme de saturation continue (M_2) et un autre dans une forme de "relay" discontinu (M_1), comme indiqué dans la Figure 1.3 tel que :

$$M_1 : \quad F_f(v) \begin{cases} = +F_s & \text{pour } v > 0 \\ \in [-F_s, +F_s] & \text{pour } v = 0 \\ = -F_s & \text{for } v < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

et

$$M_2 : \quad F_f(v) = \begin{cases} F_s & \text{pour } v > \varepsilon \\ \frac{F_s}{\varepsilon} v & \text{pour } -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon \\ -F_s & \text{pour } v < -\varepsilon \end{cases} \quad (1.4)$$

q_{mP} et q_{mN} sont les débits massiques entrant et sortant des chambres du vérin électropneumatique. Ils sont liés d'une part aux tensions de commande du servo-distributeur et d'autre part, au rapport de pression amant/aval. Ils interviennent de manière non linéaire sur les dynamiques des pressions p_P et p_N dans les deux chambres pneumatiques. Les expressions de ces deux débits obtenues via les caractéristiques du servo-distributeur et issues des mesures expérimentales ont été approximées au sens des moindres carrées dans les travaux précédents [114, 20, 11] et elles ne seront pas prises en comptes dans la suite de ces travaux. Par conséquent, ces deux débits sont considérés directement comme vecteur de commande, c'est-à-dire :

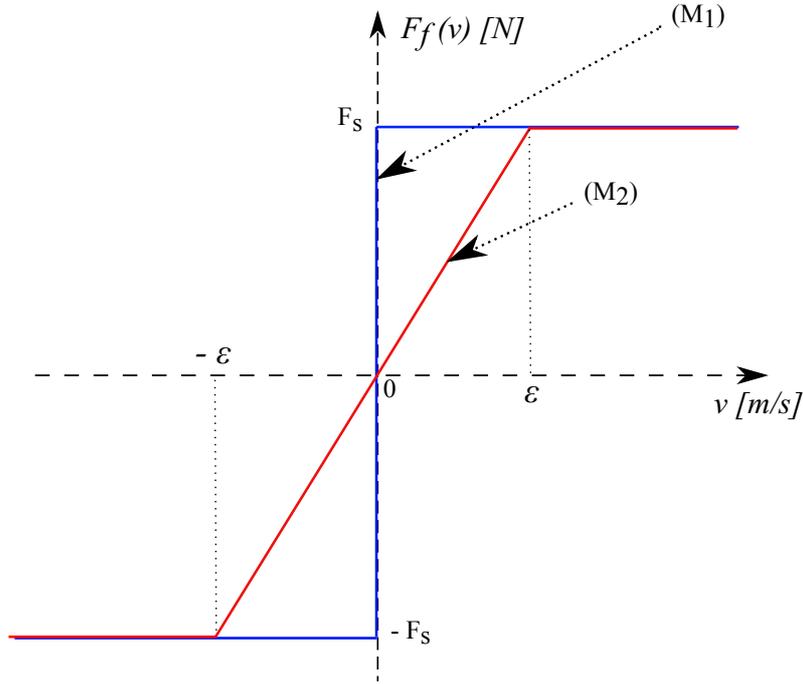


FIGURE 1.3 – Modèle de frottements secs.

$$U = \begin{bmatrix} q_{mN} \\ q_{mP} \end{bmatrix}$$

Des contraintes physiques sur les variables d'état du vecteur $x^T = [y \ v \ p_P \ p_N]^T$, qui correspondent au domaine physique de fonctionnement données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in [y_{min}; y_{max}] \\ v \in [v_{min}; v_{max}] \\ p_P \in [p_E; p_S] \\ p_N \in [p_E; p_S] \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Dans ce domaine physique, l'évolution de la position est limitée par les fins de course sur le vérin. Le domaine physique de la commande correspond aux saturations sur les sorties de la carte d'entrée/sortie. Les pressions dans les deux chambres pneumatiques sont limitées par la pression atmosphérique et la pression source. Pratiquement, ces domaines physiques sont donnés comme suit :

$$D \subset \mathbb{R}^4 = \begin{bmatrix} -0.25 \leq y \leq 0.25 \\ -2.7 \leq v \leq 2.7 \\ 1 \leq p_P \leq 7 \\ 1 \leq p_N \leq 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m/s \\ bar \\ bar \end{bmatrix}$$

Afin de synthétiser des lois de commande et de répondre aux différents critères de performance du cahier de charges, beaucoup de travaux ont procédé au changement de variables d'état du système, en prenant le vecteur d'état suivant $x^T = [y \ v \ a \ p_P]^T$. Les dynamiques de ce nouveau vecteur d'état sont exprimées alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = v \\ \dot{v} = a \\ \dot{a} = -\frac{kS_P^2 v}{MV_P(y)} p_P - \frac{kS_N^2 v}{MV_N(y)} p_N - \frac{b_v}{M} a - \frac{1}{M} \dot{F}_f(v) + \frac{S_P k r T}{MV_P(y)} q_{mP} - \frac{S_N k r T}{MV_N(y)} q_{mN} \\ \dot{p}_P = \frac{k r T}{V_P(y)} \left(-\frac{S_P}{r T} p_P v + q_{mP} \right) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

A partir de ce modèle, le choix de la position y et la pression p_P comme sorties est un choix judicieux car contrôler la position et la pression peut permettre de contrôler l'énergie délivrée par la source [119].

Sur ces modèles du vérin électropneumatique, différents types de lois de commande ont été développées dans la littérature avec pour objectif de satisfaire les différentes contraintes du cahier des charges. Cependant, certaines lois de commandes conduisent parfois à un phénomène indésirable et peu apprécié par les industriels, dont la définition et les différentes causes pouvant l'engendrer sont expliquées ci-dessous. Ce phénomène nommé dans cette thèse "redécollage" est plus complexe que la notion de stick-slip plus connue.

3 PROBLÉMATIQUE DE REDÉCOLLAGE

3.1 Phénomène du Redécollage

Les systèmes pneumatiques et plus particulièrement les actionneurs électropneumatiques souffrent d'un problème majeur qui rend plus délicat leur développement et qui favorise la concurrence des autres domaines (les procédés électriques...). Ce phénomène appelé phénomène du redécollage dans l'actionneur électropneumatique se présente sous la forme de mouvements ou secousses brèves et saccadées. Ce phénomène peut se produire pour deux raisons soit par la présence de l'action intégrale de la loi de commande des servo-distributeurs générant le phénomène de "Stick-Slip", soit par l'évolution de l'effort pneumatique dans les chambres comparée à la force de frottements sur le vérin, et qui est défini par :

$$F_{pneu} = S_P p_P - S_N p_N - F_{ext} \quad (1.7)$$

La Figure 1.4 montre l'enregistrement d'une expérience sur le vérin électropneumatique, à partir de laquelle le redécollage peut être clairement vu. En effet, la position de la tige reste constante pendant un certain temps puis, elle commence à se déplacer à nouveau sans aucune modification de la consigne ou perturbation.

Le phénomène de "Stick-Slip", qui est souvent observé expérimentalement [7, 75, 115, 20, 130, 129] entraîne des résultats néfastes au niveau des performances d'un système asservi. Il peut être traduit par des phases de collage et des phases de glissement d'un solide en mouvement en contact avec une surface et se déplaçant de façon saccadée. Dans certain cas on parle de cycles limites dûs à la présence conjointe de frottements secs et d'une action intégrale dans la loi de commande. La présence de ces phénomènes peut être vue comme l'oscillation du système entre deux positions situées autour de la position de référence en régime statique. En effet, le système peut redécoller, si l'erreur statique est non nulle, pour se stabiliser à chaque fois sur un coté de la position de référence car elle est sommée de part la présence de l'action intégrale. Par conséquent, l'utilisation de l'action intégrale est souvent évitée sauf en ajoutant quelques considérations pour éviter le "Stick-Slip", par exemple empêcher l'effet de l'action intégrale sur le régime statique en ajoutant une zone morte à sa sortie, ce qui ne permet pas malheureusement d'annuler l'erreur statique. D'autres solutions ont été aussi suggérées, dans [123]. On applique, lorsque le système est à l'arrêt,

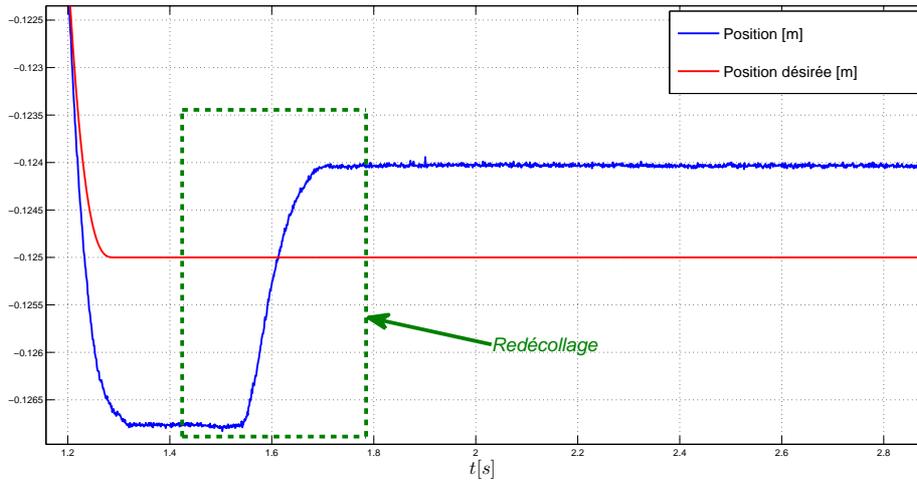


FIGURE 1.4 – Phénomène de redécollage sur le vérin électropneumatique

une série d’impulsions pour vaincre la force de collage, ce qui va détériorer malheureusement la forme de la réponse du système. Dans [29], on propose une méthode de réglage des gains du P.I.D en se basant sur la technique d’“anti-windup” qui est plus efficace que les deux précédentes. Cependant, la nécessité de la présence d’un modèle explicite de frottements a conduit à une utilisation limitée de cette technique.

Nous allons maintenant expliquer brièvement le phénomène du redécollage causé cette fois par l’évolution de l’effort pneumatique dans les systèmes électropneumatiques présentant des frottements secs, sans trop entrer dans les détails car ce phénomène est largement expliqué dans les travaux précédents réalisés au laboratoire Ampère [129, 130, 22, 23]. La différence avec le phénomène de “stick-slip” (ou collé-glissé), connu dans le domaine mécanique et expliqué ci-dessus, est qu’il ne présente pas des oscillations et des phénomènes d’hystérésis autour de la position désirée mais uniquement un changement de position pendant l’équilibre mécanique. Il peut se présenter ou apparaître à n’importe quel moment et quelque soit la commande appliquée. En d’autres termes, ce phénomène peut facilement apparaître si le système n’est pas dans un équilibre dit total. En effet, pour un actionneur électropneumatique, on peut distinguer trois notions d’équilibre dans le modèle (1.1) :

Définition 1.1 (Notion d’équilibre dans un système électropneumatique).

- **un équilibre total** : correspond à la nullité de toutes les dérivées temporelles des variables d’état,
- **un équilibre mécanique** : est considéré comme un équilibre partiel et qui correspond à un système à l’arrêt, c’est-à-dire l’accélération et la vitesse sont nulles et les pressions peuvent continuer à évoluer,
- **un équilibre pneumatique** : est atteint lorsque les pressions sont stabilisées dans les deux chambres de l’actionneur alors que la partie mobile est en mouvement et qui est aussi considéré comme un équilibre partiel.

Par conséquent, si le système est à l’arrêt, c’est-à-dire que l’équilibre partiel mécanique et

l'équilibre pneumatique ne sont pas atteints, alors le phénomène de redécollage peut être observé.

La condition de redécollage est liée d'une part, à l'évolution des pressions dans les chambres pneumatiques et d'autre part, à la présence de frottements secs à vitesse nulle. En effet, d'après l'équation mécanique dans le modèle du vérin électropneumatique (1.1), pour une vitesse nulle, les forces de frottements sont égales à :

$$F_f(0) = S_p p_P(t) - S_N p_N(t) - F_{ext} \quad (1.8)$$

Pour un système à l'équilibre mécanique satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} v = 0 \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

et si l'effort pneumatique à vitesse nulle satisfait la condition suivante, en tenant en compte du modèle de frottement M_1 dans (1.3) :

$$-F_s(t) + F_{ext} \leq S_p p_P(t) - S_N p_N(t) \leq +F_s(t) + F_{ext} \quad (1.10)$$

alors le phénomène de redécollage n'aura pas lieu $\forall t$.

Par ailleurs, si le vérin n'est pas dans un équilibre total et qu'il y a toujours une évolution des pressions dans les chambres pneumatiques, alors l'effort pneumatique $S_p p_P(t) - S_N p_N(t) - F_{ext}$ peut devenir supérieur aux forces de frottements secs et le vérin va s'écarter de sa position en influençant sur l'erreur en position qui aura tendance à augmenter. La commande va de nouveau agir pour ramener le piston à sa position d'où le phénomène saccadé.

3.2 Solution proposée par [130] pour éviter ce phénomène

Afin d'éviter ce phénomène de redécollage, une solution a été proposée dernièrement dans les travaux de [130, 129]. L'idée principale consiste à maintenir les pressions constantes dans les chambres pneumatiques en régime statique.

En d'autres termes, l'asservissement de trajectoire en position et/ou en pression est fait en régime dynamique, puis durant l'équilibre mécanique le système est commandé en régulation des pressions pour atteindre l'équilibre total.

Pour assurer un bon fonctionnement, la commutation entre les deux systèmes bouclés s'effectue selon des critères qui reposent sur les mesures de position, de vitesse et sur la vitesse désirée de la façon suivante :

Critère 01 : vérifier que la trajectoire désirée de vitesse est nulle, en vérifiant le critère :

$$v_d = 0$$

Critère 02 : vérifier que l'erreur en position soit faible et inférieure à une certaine valeur fixée ε_1 en vérifiant le critère :

$$|y - y_d| \leq \varepsilon_1$$

Critère 03 : vérifier que le système soit à l'arrêt, c'est-à-dire que numériquement la vitesse soit inférieure à une certaine valeur très faible ε_2 en vérifiant le critère :

$$|v| \leq \varepsilon_2$$

Les pressions désirées p_{P_d} et p_{N_d} choisies pour la régulation des pressions, sont fixées aux valeurs des pressions quand le système est au repos. Puis, à chaque commutation vers la régulation des pressions, ces pressions désirées prennent les valeurs de pressions $p_{P_{stop}}$ et $p_{N_{stop}}$ dans les chambres du vérin au moment de la commutation.

L'objectif des commandes étant un suivi en position et en pression une base d'erreur entre la position, la vitesse, l'accélération, les pressions et leurs trajectoires désirées est crée :

$$\begin{cases} e_y = y - y_d \\ e_v = v - v_d \\ e_a = a - a_d \\ e_P = p_P - p_{P_d} \\ e_N = p_N - p_{N_d} \end{cases}$$

La commande non linéaire par retour de sortie est appliquée dans chaque mode de fonctionnement. Le système commuté en boucle fermée est présenté sur la Figure 1.5.

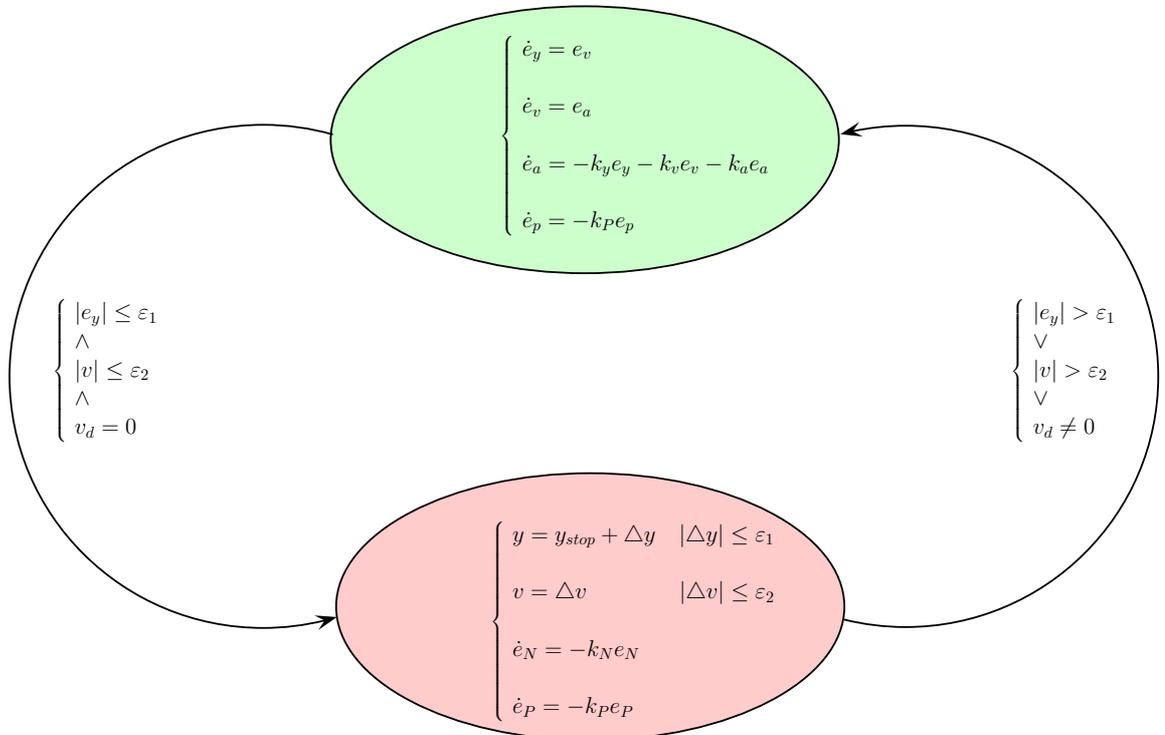


FIGURE 1.5 – Commutation entre deux modèles en boucle fermée

Cette solution a été implémentée sur le vérin électropneumatique. Les résultats expérimentaux ont été satisfaisants que ce soit en commande multidimensionnelle ou mono-dimensionnelle ($q_{mP} = -q_{mN}$).

3.3 Inconvénients et points faibles

La solution proposée par [130] a été fondée sur l'hypothèse que les frottements secs ne diminuent pas. Par ailleurs, si les frottements diminuent alors cette solution peut poser problème. En effet, pour une trajectoire de référence donnée :

$$y_d(t), \dot{y}_d(t) = v_d$$

telle que

$$y_d(t > T) = cte, v_d = 0$$

synthétiser une loi de commande telle que :

$$\forall T_{stop} > T : |\dot{y}(T_{stop})| < \epsilon \implies |\dot{y}(t > T_{stop})| < \epsilon$$

L'objectif de cette commande est d'empêcher le redécollage du piston après l'arrêt (l'équilibre partiel) à $t = T_{stop}$. Assurer cet objectif revient à garantir l'équilibre pneumatique en plus de l'équilibre mécanique, c'est-à-dire équilibrer les pressions dans les deux chambres pneumatiques. Ceci évite le redécollage car l'effort pneumatique F_{pneu} sera inférieur au seuil des frottements secs, c'est-à-dire :

$$\forall t > T_{stop}, F_{pneu}(t) = |S_{PPP}(t) - S_{NP}(t) - F_{ext}| < F_s(t) \quad (1.11)$$

Cependant, en choisissant des pressions désirées comme étant les pressions de stop au moment de la commutation vers la phase de régulation des pressions, l'effort pneumatique résultant tend vers des valeurs constantes et il est parfois proche des seuils de frottements secs, voir Figure 1.6, c'est-à-dire $F_{pneu} = S_{PPP} - S_{NP} - F_{ext} \approx F_s$ ou $F_{pneu} = S_{PPP} - S_{NP} - F_{ext} \approx -F_s$. Par conséquent, si les seuils de frottements secs sont variables, ce qui est généralement le cas (à cause de la température, déformation des joints,...), alors ce choix des pressions désirées dans les chambres pneumatiques peut ne pas vérifier la condition de non redécollage (1.11) et ce phénomène peut apparaître sur le système.

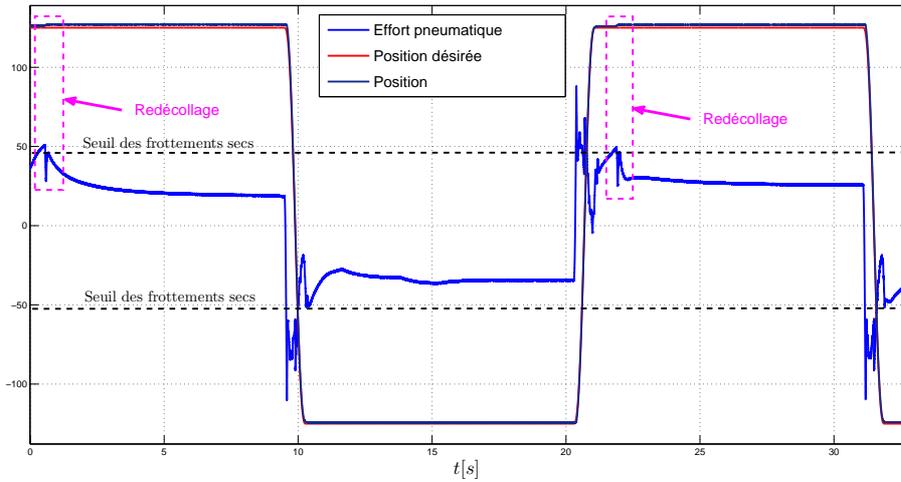


FIGURE 1.6 – Mesures expérimentales du phénomène de redécollage pour la méthode [130]

D'autre part et d'après la Figure 1.6, le phénomène de redécollage a été observé au début de l'équilibre mécanique, c'est-à-dire au début de la phase de régulation des pressions. En effet, l'effort pneumatique devient supérieur au seuil des frottements à cause de la différence entre les dynamiques des pressions au moment de la convergence vers les pressions de stop. Une fois que les pressions sont stabilisées, la position de la partie mobile reste constante et il n'y a plus de redécollage.

3.4 Solution proposée

Pour faire face au risque de diminution de frottements secs qui peut causer le phénomène de redécollage, la solution de [130] est adaptée en agissant sur les trajectoires désirées en phase de régulations des pressions, c'est-à-dire au moment de l'équilibre partiel mécanique. En effet, on ne va pas procéder au choix des trajectoires désirées de pressions au moment du stop comme dans

[130] qui conduit à un effort constant, mais plutôt on procède directement au choix de l'effort pneumatique désiré que l'on fixe à 0, voir Figure 1.7, c'est-à-dire :

$$F_{pneu}^d = S_P p_P - S_N p_N - F_{ext} = 0 \quad (1.12)$$

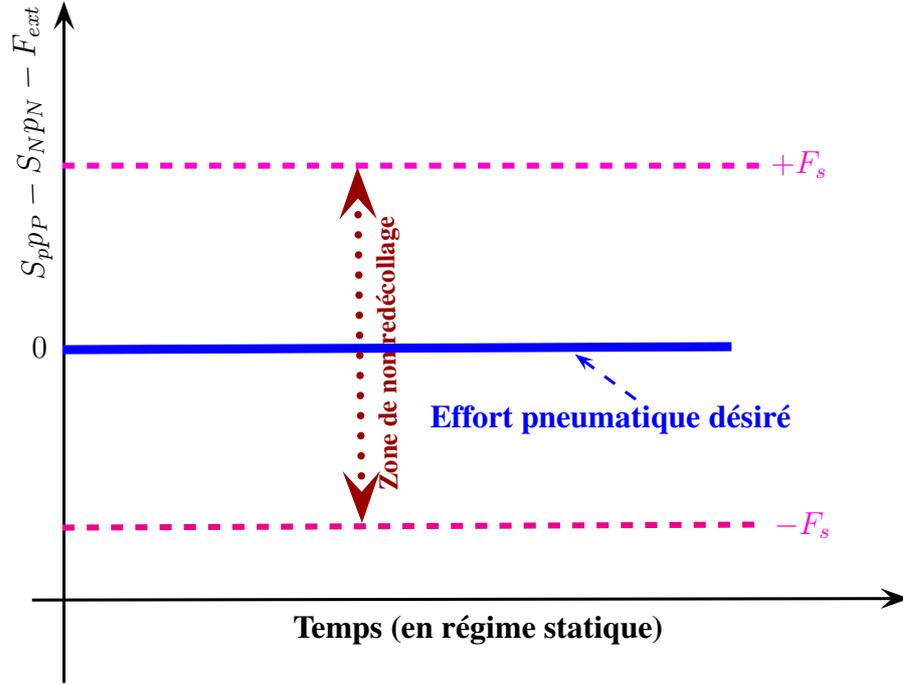


FIGURE 1.7 – Effort pneumatique nul

À partir de la Figure 1.7, on remarque bien qu'il n'y a aucun risque de redécollage une fois l'effort pneumatique atteint l'effort pneumatique désiré, car il se trouvera toujours entre les deux seuils de frottements quelque soit la diminution de ces derniers, c'est-à-dire que le vérin sera toujours en équilibre total.

Concernant le choix des pressions désirées p_{P_d} et p_{N_d} , la procédure ci-dessus est valable même pour des pressions désirées connues a priori. En effet, pour une commande multi-dimensionnelle commutée, où un asservissement de position et de pression p_P est appliqué en régime dynamique et une régulation des deux pressions p_P et p_N est appliquée en régime statique, la pression désirée p_{P_d} dans la chambre P est la même pour les deux modes de réglage, tandis que la pression désirée p_{N_d} dans la chambre N dans la phase de régulation de pression est déduite à partir de l'équation de l'effort pneumatique nul (1.12), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} p_{P_d} = p_P^0 = cte \text{ (définie en } t=0s) \\ p_{N_d} = \frac{1}{S_N}(S_P p_{P_d} - F_{ext}) \end{cases} \quad (1.13)$$

La Figure 1.8 montre un résultat expérimental de l'application d'une commande commutée sur le vérin en considérant l'effort nul comme l'effort désiré. On remarque bien qu'à chaque mode statique l'effort pneumatique devient nul et reste borné par les deux seuils de frottements après

une large variation en mode dynamique.

On remarque sur la Figure 1.8 que le temps de convergence vers 0 des efforts pneumatiques sont très faible et de l'ordre de 0,03s. Pour être certain que le redécollage n'ait pas lieu, il ne faut pas que la dynamique de variation des frottements secs soit plus rapide que le temps de convergence vers 0 de l'effort pneumatique. Or comme expliqué précédemment, ces variations de frottements sont essentiellement dues à des effets thermiques, ou à des phénomènes liés aux forces de contact entre un matériau élastomère (joint du piston) et un métal (paroi interne du vérin) qui sont des variations très lentes au regard des trois dixièmes de seconde, raison pour laquelle cette solution a été développée dans cette thèse.

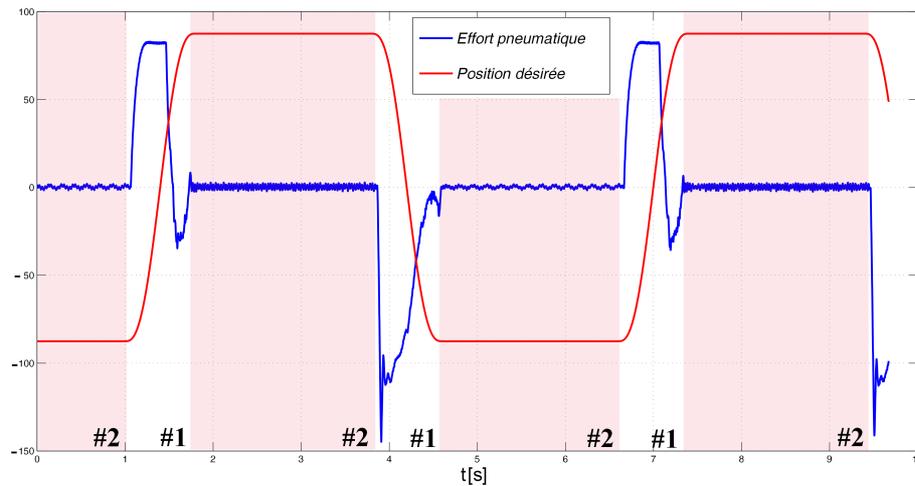


FIGURE 1.8 – Effort pneumatique dans le cas effort pneumatique désiré nul

Discussion 1 (Avantages d'un effort pneumatique nul).

L'intérêt de cette méthode par rapport à celle de [130] est présenté dans les points suivants :

1. La solution est valable même si les frottements secs diminuent au cours du temps car l'effort après le moment de l'arrêt est réduit à zéro et il est toujours entre les seuils de ces frottements secs, c'est-à-dire dans ce cas là on ne peut avoir un effort pneumatique supérieur à l'effort au moment de l'arrêt : $F_{pneu}(t > T_{stop}) < F_{pneu}(t = T_{stop})$, ce qui n'est pas le cas par rapport aux travaux de [130].
2. Le deuxième point intéressant de cette méthode, c'est qu'on n'a pas besoin de mesurer les pressions au moment de stop pour déterminer les pressions désirées en régulation des pressions et on peut se contenter des valeurs de pressions désirées définies a priori.
3. L'utilisation de la linéarisation exacte dans [130] peut aussi causer le phénomène de redécollage, car des erreurs sur la modélisation et sur la linéarisation exacte peuvent engendrer des dynamiques différentes sur l'évolution des deux pressions et qui peut causer à certains moments après l'arrêt un effort pneumatique supérieur aux seuils de frottements et donc le phénomène de redécollage, ce qui n'est pas le cas pour un effort désiré nul, car même si l'effort pneumatique ne sera pas complètement nul, il sera quasiment proche de 0.

Discussion 2 (Inconvénients).

L'inconvénient du choix de l'effort pneumatique désiré nul est que ce dernier dépend de la valeur de la force extérieure F_{ext} supposée connue au départ et constante, ce qui n'est pas le cas dans [130], car les trajectoires désirées en régulation des pressions sont indépendantes de cette force extérieure.

3.5 Synthèse de lois de commande

Pour la synthèse de lois de commande et afin d'éviter le phénomène de redécollage, nous allons nous baser sur la méthode développée dans [130]. En effet, une commande commutée est appliquée entre un asservissement de position et en pression pour rejoindre l'équilibre mécanique, et en régulation des pressions dans les chambres pneumatiques pour rejoindre l'équilibre total, voir Définition 1.1. Cette loi de commande commutée est adaptée en considérant les nouveaux changements d'une part, sur les trajectoires désirées en prenant en régime statique comme trajectoire désirée un effort pneumatique nul et d'autre part, sur les critères de commutations entre les deux modes de régulation. Sur la Figure 1.9, la stratégie de commutation des lois de commande entre les deux modèles en boucle fermée est présentée. À partir de cette figure, le choix de la commande à appliquer (U_1 ou U_2) dépend des critères de l'algorithme de commutation, dépendant à leur tour des mesures sur la position et la vitesse du vérin et la vitesse désirée du cahier des charges. En effet, soit le mode d'asservissement de position est activé, et dans ce cas les trajectoires désirées sur la position et une pression seront prises en compte ou bien, en équilibre mécanique où la régulation des pressions est activée, et dans ce cas l'effort pneumatique nul est considéré comme trajectoire désirée.

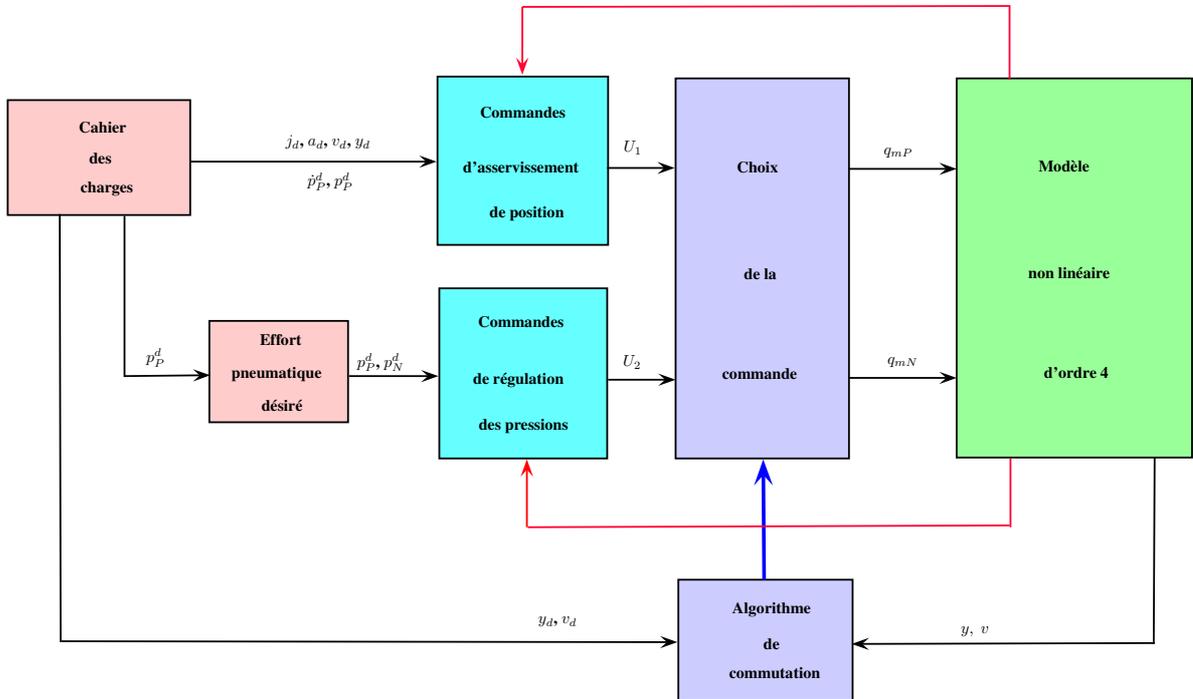


FIGURE 1.9 – Schéma de commutation au niveau de la commande

Pour ces deux modes de fonctionnement, on aura besoin de spécifier, à partir des modèles

du vérin électropneumatique (1.1) et (1.6), des modèles de commandes afin de synthétiser les différentes lois de commande.

Modèle de commande

La commande non-linéaire appliquée sur le modèle non linéaire de l'actionneur électropneumatique est la technique de commande non linéaire linéarisante par retour de sortie [63]. Cette loi de commande ainsi définie transforme le système non-linéaire en chaîne d'intégrateurs en compensant toutes les dynamiques non linéaires sauf celles estimées incertaines, notamment les frottements secs. On effectue également un retour d'état ayant pour objectif soit, le suivi de trajectoires en position et en pression, soit la régulation des pressions. Prenons alors comme modèles de commande, les modèles présentés ci-dessous, qui découlent des modèles (1.1) et (1.6) sans frottements secs.

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{M}(S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_{ext}) \\ \dot{p}_N = \frac{krT}{V_N(y)} \left(\frac{S_N}{rT} p_N v + q_{mN} \right) \\ \dot{p}_P = \frac{krT}{V_P(y)} \left(-\frac{S_P}{rT} p_P v + q_{mP} \right) \end{cases} \quad (1.14)$$

Suivis de trajectoire en position et pression (#1)

Le modèle de commande considéré dans ce mode de contrôle est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = a \\ \dot{a} = -\frac{kS_P^2 v}{MV_P(y)} p_P - \frac{kS_N^2 v}{MV_N(y)} p_N - \frac{b_v}{M} a + \frac{S_P krT}{MV_P(y)} q_{mP} - \frac{S_N krT}{MV_N(y)} q_{mN} \\ \dot{p}_P = \frac{krT}{V_P(y)} \left(-\frac{S_P}{rT} p_P v + q_{mP} \right) \end{cases} \quad (1.15)$$

Dans le but de faire le suivi de trajectoire en position et pression, un vecteur d'état constitué des erreurs entre la position, la vitesse, l'accélération, la pression p_P et leurs trajectoires désirées est créée avec :

$$\begin{cases} e_y = y - y_d \\ e_v = v - v_d \\ e_a = a - a_d \\ e_P = p_P - p_{Pd} \end{cases} \quad (1.16)$$

L'application de la commande non linéaire linéarisante conduit à la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} q_{mP} = \frac{V_P(y)}{krT} \left[\frac{kS_P}{V_P(y)} v p_P + \dot{p}_{Pd} - k_p e_P \right] \\ q_{mN} = \frac{MV_N(y)}{S_N krT} \left[\frac{S_P krT}{MV_P(y)} q_{mP} - \frac{S_P^2 kv}{MV_P(y)} p_P - \frac{S_N^2 kv}{MV_N(y)} p_N - \frac{b_v}{M} a - \dot{v}_d + k_a e_a + k_v e_v + k_y e_y \right] \end{cases} \quad (1.17)$$

avec k_y , k_v , k_a , k_p les gains du retour d'état.

En remplaçant les commandes synthétisées (1.17) dans le modèle d'analyse (1.6), le modèle en boucle fermée est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = e_v \\ \dot{e}_v = e_a \\ \dot{e}_a = -k_a e_a - k_v e_v - k_y e_y - \frac{1}{M} \dot{F}_f(v) \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \end{cases} \quad (1.18)$$

Régulations des deux pressions (#2)

Une fois que les critères de commutation sont satisfaits, le système en boucle fermée commute vers un autre système bouclé qui consiste en deux régulations de pressions dans les chambres du vérin.

Pour la régulation en pressions, la même méthode a été utilisée. Le but de la commande étant dans cette phase une régulation de pression, un vecteur d'état constitué des erreurs a été créé :

$$\begin{cases} e_y = y - y_d \\ e_v = v - v_d \\ e_P = p_P - p_{P_d} \\ e_N = p_N - p_{N_d} \end{cases} \quad (1.19)$$

La loi de commande en régulation des deux pressions est donnée comme suit :

$$\begin{cases} q_{mP} = \frac{V_P(y)}{krT} \left[\frac{kS_P}{V_P(y)} v p_P + \dot{p}_{P_d} + \omega_1 \right] \\ q_{mN} = \frac{V_N(y)}{krT} \left[-\frac{kS_N}{V_N(y)} v p_N + \dot{p}_{N_d} + \omega_2 \right] \end{cases} \quad (1.20)$$

Cette loi de commande permet d'écrire le modèle (1.1) en boucle fermée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{M} (S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_f(v) - F_{ext}) \\ \dot{e}_N = \omega_2 \\ \dot{e}_P = \omega_1 \end{cases} \quad (1.21)$$

Les deux commande ω_1 et ω_2 sont calculées via une synthèse par retour d'état. Deux façons de synthèse peuvent être distinguées :

- soit le retour d'état est synthétisé en considérant uniquement des gains sur les dynamiques de pressions, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \omega_1 = -k_P e_P \\ \omega_2 = -k_N e_N \end{cases} \quad (1.22)$$

car on s'intéresse uniquement à la régulation des deux pressions pneumatiques ;

- soit il est synthétisé en considérant des gains sur tous les états (cas standard), c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} y \\ v \\ e_N \\ e_P \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$\text{avec : } K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.1.

Pour ce deuxième cas de retour d'état, il est synthétisé uniquement pour des raisons d'analyse de stabilité dans le prochain chapitre et non pas pour assurer un bon suivi ou éviter le redécollage. Par conséquent, en simulation et en implémentation expérimentale, on ne considère que le retour d'état (1.22).

Critères de commutation

Afin d'assurer un meilleur suivi de trajectoires en évitant le phénomène de redécollage, des critères de commutation ont été bien imposés entre les deux modes de contrôle. Ces critères sont adaptés à ceux imposés dans [130] et ils sont présentés comme suit avec ε_1 , ε_2 , ε_3 constantes strictement positives :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \\ |v_d| \leq \varepsilon_3 \end{cases} \quad (1.24)$$

Le premier critère exige que l'erreur de position en régime statique doit être inférieure à une constante faible ε_1 fixée auparavant. Le deuxième critère assure que le système est bien à l'arrêt en vérifiant que la vitesse tend vers 0 au bruit numérique près. Pour le troisième critère sur la vitesse désirée, il a été légèrement modifié de celui imposé par [130], qui a imposé une vitesse désirée nulle afin de vérifier que la trajectoire désirée de la position est bien en régime statique. En effet, on a toléré une faible variation de la vitesse désirée en équilibre mécanique pour des raisons d'analyse de stabilité que nous verrons dans les prochains chapitres.

Par conséquent, la commutation entre les deux modes de contrôle (#1) et (#2) se fait de la façon suivante :

$$\#1 \rightarrow \#2 : |e_y| \leq \varepsilon_1 \wedge |v| \leq \varepsilon_2 \wedge |v_d| \leq \varepsilon_3$$

$$\#2 \rightarrow \#1 : |e_y| > \varepsilon_1 \vee |v| > \varepsilon_2 \vee |v_d| > \varepsilon_3$$

Résultats en Simulation

La loi de commande commutée synthétisée a été validée en simulation en se basant sur le schéma de commande présenté dans la Figure 1.9. Les résultats de simulation sont présentés dans la Figure 1.10.

La figure montre une très faible erreur entre la position et la position désirée. On voit très bien aussi que l'effort pneumatique devient presque nul en équilibre mécanique, ce qui va éviter tout risque de redécollage de la partie mobile.

Résultats Expérimentaux

Les lois de commandes (1.17) et (1.20) en commutation ont été implémentées sur le vérin électropneumatique. Les résultats expérimentaux sont montrés sur la Figure 1.12 qui montre bien que le phénomène de redécollage a été évité.

La Figure 1.11 montre qu'un bon suivi de trajectoire en position et en pression a été obtenu. En effet, l'erreur entre la position et la position désirée dans la Figure 1.12 est de l'ordre de 1% du déplacement total effectué. En raison de la dissymétrie du vérin et de frottements secs [20], l'erreur en position est aussi dissymétrique.

La pression dans la chambre P reste constante suite à l'imposition d'une pression désirée constante où l'erreur entre les deux est de quelques centièmes de bar. Les deux pressions p_P et p_N , avec la commande imposée, restent constantes durant le régime statique, qui a conduit à un effort nul imposé comme effort pneumatique désiré, ce qui évite de dépasser la zone de non redécollage limitée par les frottements secs.

La Figure 1.12 montre aussi des commandes faibles et non saturées ($|u_{max}| = 10V$). Le chattering en équilibre mécanique est dû aux grands gains utilisés pour réguler les pressions.

4 PROBLÈME DE LA STABILITÉ DE LA SOLUTION PROPOSÉE

4.1 Description de ce problème

Le phénomène de redécollage a été un des problèmes majeurs rencontré dans les travaux précédent dans le cadre d'asservissement d'axe électropneumatique : la commande linéarisante et par platitude [20, 22, 23], la synthèse par la technique de backstepping et modes glissants [119, 118, 120]. En appliquant la solution proposée précédemment, qui consiste à une commutation entre deux lois de commandes, d'une commande de suivi de trajectoire en position et en pression à une commande en régulation de pressions lorsque trois critères de commutation sont respectées simultanément. Ceci dans le but de maintenir l'effort pneumatique constant pour éviter le "redécollage". Cette approche a été implémentée sur le vérin électropneumatique, les résultats expérimentaux ont été très satisfaisants, le phénomène de redécollage a été évité et aucun mouvement saccadé n'a donc été observé. L'application de cette loi de commande commutée, en simulation et expérimentalement pour des conditions initiales données, n'a entraîné aucun phénomène d'instabilité. Cependant, aucune démonstration mathématique de stabilité n'existait au début de mes travaux.

Par ailleurs, Il ne faut pas perdre de vue que le fait de simuler un système à partir d'un état initial n'est pas suffisant pour évaluer le comportement global du système. En effet, à chaque point initial correspond une trajectoire différente, il faudrait donc simuler à partir d'une infinité de points initiaux pour étudier correctement le comportement du système en général, ce qui est évidemment impossible à réaliser.

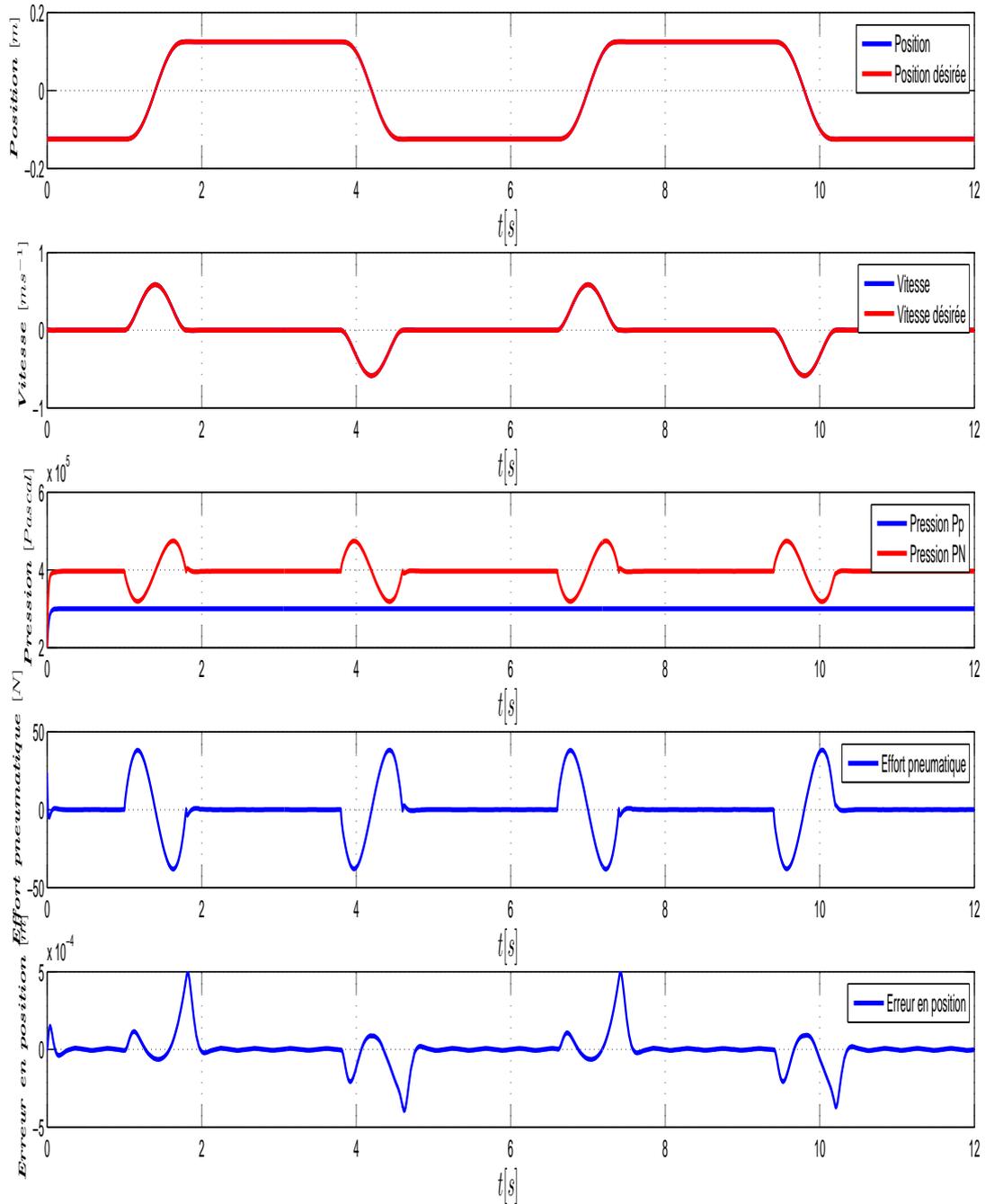


FIGURE 1.10 – Trajectoires en simulation obtenues en appliquant une commande commutée entre (1.17) et (1.20)

La présence de frottements secs et la commutation entre les lois de commande rend l'analyse de

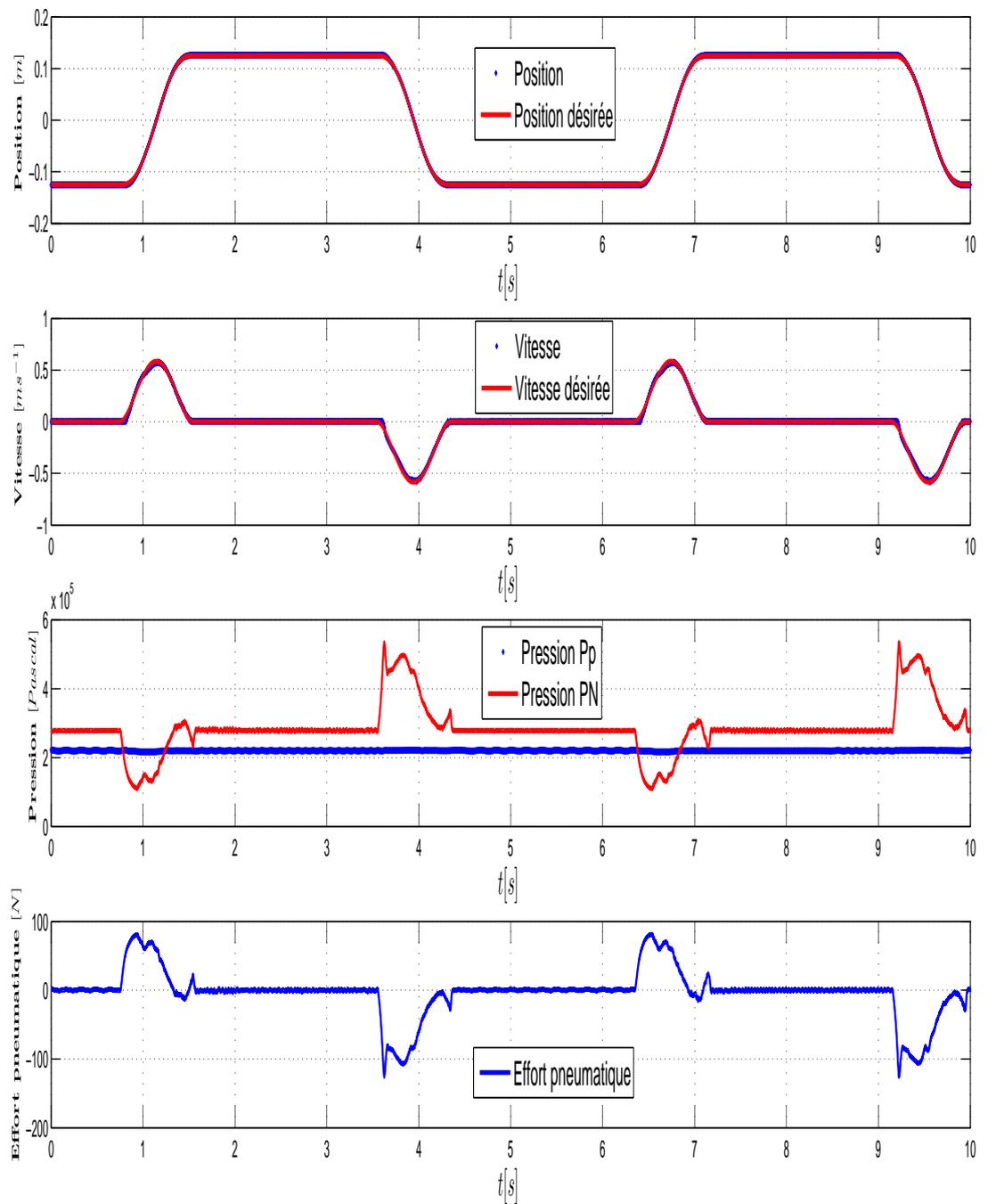


FIGURE 1.11 – Résultats expérimentaux 1 obtenus en appliquant une commande commutée entre (1.17) et (1.20)

stabilité du système en boucle fermée très compliquée à réaliser. En effet, d'après la Figure 1.13,

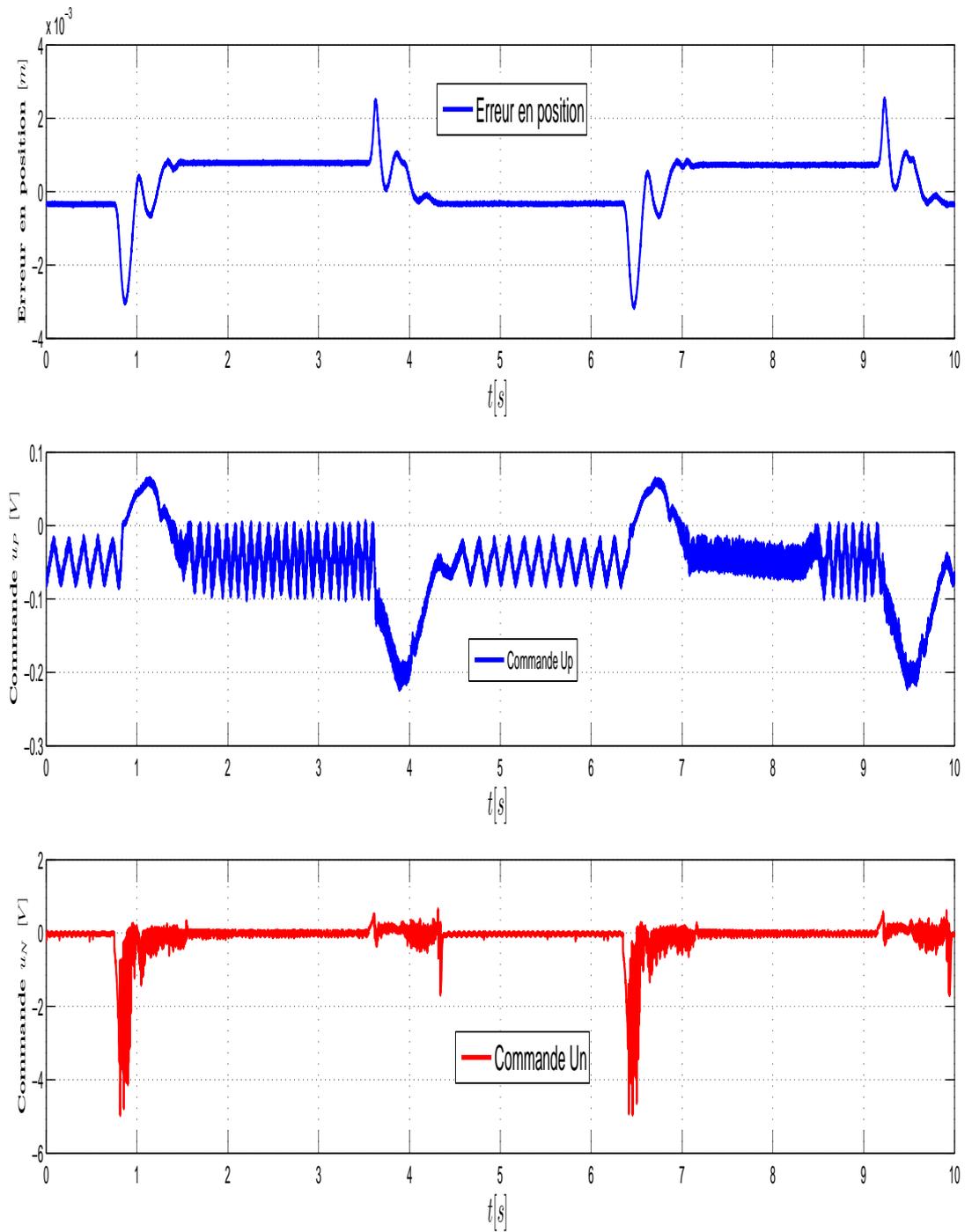


FIGURE 1.12 – Résultats expérimentaux 2 obtenues en appliquant une commande commutée entre (1.17) et (1.20)

il est évident que la distinction entre les conditions de commutations causées par les frottements

secs et celles causées en changeant la loi de commande n'est pas assez claire. Les deux modèles ne sont pas exprimés dans la même base, ce qui complique l'étude du phénomène de redécollage. De plus, les variations incertaines des frottements secs influencent fortement l'analyse de stabilité. Par ailleurs, les critères de commutation entre les lois de commande sont des critères suivant les états, ce qui classe ce système commuté parmi les classes de systèmes commutés les plus difficiles à analyser.

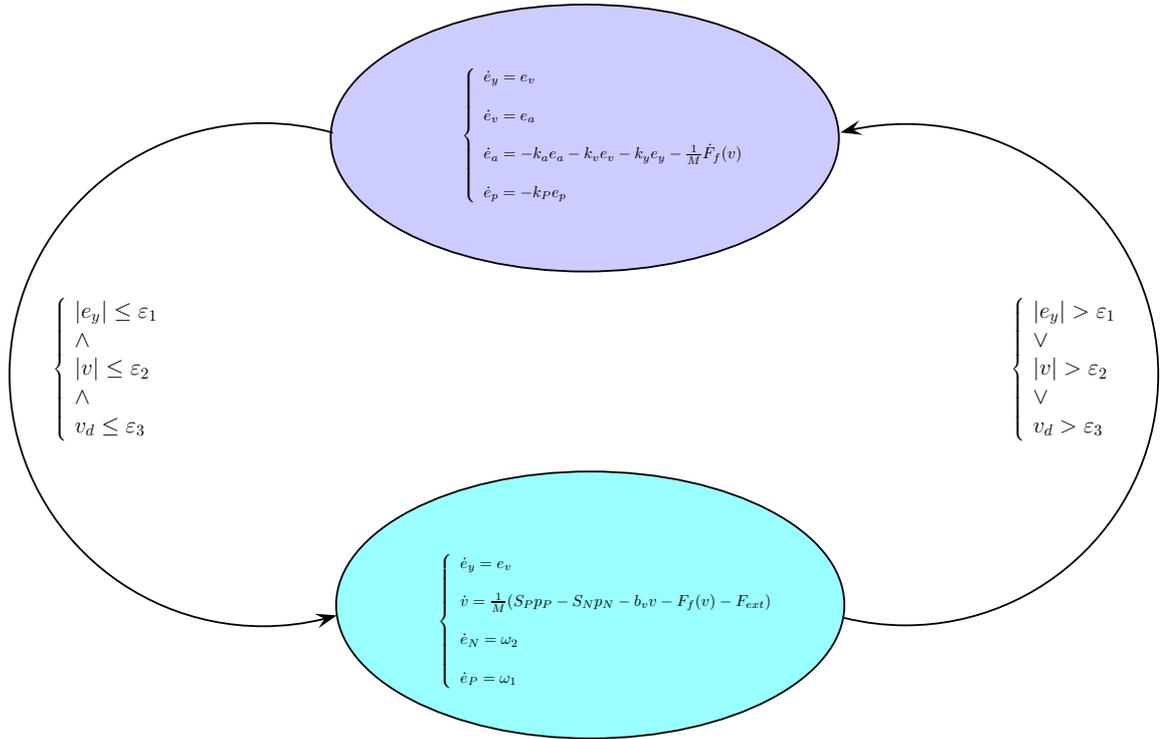


FIGURE 1.13 – *Algorithme de commutation entre les deux modèles en boucle fermée (1.18) et (1.21)*

Ces dernières raisons nous ont forcé à étudier le problème autrement et mener ce travail de recherche afin d'analyser la stabilité du vérin électropneumatique soumis à des lois de commande commutées.

Les dynamiques des pressions dans les chambres pneumatiques, et la présence de frottements secs rendent l'actionneur électropneumatique fortement non-linéaire. Typiquement, la commande linéarisante peut être utilisée pour éliminer les non-linéarités, en sachant que l'incertitude dans le modèle peut conduire à des effets catastrophiques. Pour cette raison, dans nos travaux, nous avons analysé une loi de commande basée sur celle développée dans [130] qui annule les effets non linéaires grâce au retour linéarisant à l'exception des frottements. Afin d'analyser la stabilité, il faut donc disposer d'un modèle suffisamment détaillé, tel qu'il soit capable de prendre en compte à la fois la commutation causée par les frottements sur le vérin électropneumatique et celle entre les lois de commandes dépendant de l'état.

Dans la littérature [69, 54], une sous classe de système commuté appelée "systèmes affines par morceaux" et qui constitue une classe des systèmes non linéaires, permettent de répondre à ces contraintes. L'analyse et la description de cette classe de système sera l'objet d'étude des prochains chapitres.

Avant de parler de systèmes affines par morceaux et de leur caractéristiques, nous devons mettre

le modèle en boucle fermée du vérin électropneumatique dans ses deux modes de contrôle dans la même base afin de simplifier son analyse.

4.2 Mise en forme de modèle du vérin

Suivis de trajectoire en position et pression

Considérons le modèle (1.18) du vérin en mode dynamique. Afin d'éviter de dériver des frottements, nous avons procédé au changement de base suivant.

$$\begin{bmatrix} e_y \\ v \\ e_a \\ e_P \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} e_y \\ v \\ e_{af} \\ e_P \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } e_{af} = e_a + \frac{1}{M}F_f(v)$$

Le modèle dans la nouvelle base est exprimé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M}F_f(v) + a_d \\ \dot{e}_{af} = -k_y e_y - k_v v - k_a e_{af} + \frac{k_a}{M}F_f(v) + k_v v_d \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \end{cases} \quad (1.25)$$

Régulations des deux pressions

Afin d'analyser la stabilité, le modèle (1.21) du vérin à l'équilibre mécanique, avec les deux lois de commande par retour d'état précédemment définies, est exprimé dans la même base, c'est-à-dire $x^T = [e_y \ v \ e_{af} \ e_P]$.

Le premier modèle

En considérant (1.21) et (1.22), le modèle du vérin en équilibre mécanique est rappelé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = e_v \\ \dot{v} = \frac{1}{M}(S_{PP} - S_{NP} - b_v v - F_f(v) - F_{ext}) \\ \dot{e}_N = -k_N e_N \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \end{cases} \quad (1.26)$$

On procède au changement de base suivant :

$$[e_y \ v \ e_N \ e_P]^T \longrightarrow [e_y \ v \ e_{af} \ e_P]^T \quad (1.27)$$

En considérant un effort pneumatique désiré nul, c'est-à-dire $S_{PP} = S_{NP} + F_{ext}$, le modèle du vérin en boucle fermée en régulation de pression est exprimé dans la nouvelle base de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M}F_f(v) + a_d \\ \dot{e}_{af} = \frac{S_P}{M}(k_N - k_P)e_P - (k_N + \frac{b_v}{M})e_{af} - \frac{b_v}{M}k_N v - (k_N + \frac{b_v}{M})a_d - j_d + \frac{b_v}{M^2}F_f(v) \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \end{cases} \quad (1.28)$$

avec v_d , a_d et j_d respectivement la vitesse désirée, l'accélération désirée et le jerk désiré ($j_d = \dot{a}_d$).

Le deuxième modèle :

En considérant (1.21) et (1.23) et en prenant $S_P p_{P_d} = S_N p_{N_d} + F_{ext}$, on a :

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{M}(S_P e_P - S_N e_N - b_v v - F_f(v)) \\ \dot{e}_P = -K_{11}e_y - K_{12}e_v - K_{13}e_P - K_{14}e_N - K_{11}y_d - K_{12}v_d \\ \dot{e}_N = -K_{21}e_y - K_{22}e_v - K_{23}e_P - K_{24}e_N - K_{21}y_d - K_{22}v_d \end{cases} \quad (1.29)$$

En appliquant le changement de base (1.27), le modèle du vérin en boucle fermée en régulation des pressions, avec la deuxième loi de commande par retour d'état, est exprimé dans la nouvelle base de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M}F_f(v) + a_d \\ \dot{e}_{af} = \frac{1}{M}(S_N K_{21} - S_P K_{11})e_y + \frac{1}{M}(S_N K_{22} - S_P K_{12} - b_v(K_{24} - \frac{S_P}{S_N}K_{14}))v \\ \quad - (\frac{b_v}{M} + K_{24} - \frac{S_P}{S_N}K_{14})e_{af} + \frac{1}{M}(S_P K_{24} + S_N K_{23} - S_P K_{13} - \frac{S_P^2}{S_N}K_{14})e_P \\ \quad + \frac{1}{M}(S_N K_{21} - S_P K_{11})y_d - (\frac{b_v}{M} + K_{24} - \frac{S_P}{S_N}K_{14})a_d - j_d + \frac{b_v}{M^2}F_f(v) \\ \dot{e}_P = -K_{11}e_y - (K_{12} - \frac{b_v}{S_N}K_{14})v + \frac{M}{S_N}K_{14}e_{af} - (K_{13} - \frac{S_P}{S_N}K_{14})e_P - K_{11}y_d + \frac{M}{S_N}K_{14}a_d \end{cases} \quad (1.30)$$

CONCLUSION

Dans ce chapitre, le phénomène de redécollage du vérin électropneumatique a été étudié. Les conditions d'existence de ce phénomène ont été abordées et identifiées. Une solution a été proposée, adaptée de celle proposée dans [130], qui se base sur une commande commutée entre une commande en position et en pression en régime dynamique vers une régulation des pressions dans les chambres pneumatiques avec des pressions désirées choisies de manière à assurer un effort pneumatique nul au repos. Cette solution a été implémentée sur le vérin électropneumatique. Les résultats expérimentaux ont été très satisfaisants et aucun phénomène de redécollage n'a été

observé.

En seconde partie, le problème de la stabilité a été discuté ce qui a permis d'illustrer la complexité de l'analyse dépendant de la commutation entre les lois de commande et des frottements secs qui sont fortement non linéaires. L'utilisation de la commande non linéaire linéarisante a permis d'éliminer toutes les non linéarités en laissant uniquement celles des frottements secs, qui peuvent être modélisés comme des modèles affines par morceaux, et comme les critères de commutation dépendent de l'état, les systèmes commutés définis par les équations (1.25), (1.28) et (1.30) sont considérés alors comme des systèmes affines par morceaux. En effet, les deux modèles du système en boucle fermée dans les deux modes de contrôle, asservissement de position et régulation des pressions, sont écrits dans la même base. En prenant les critères de commutation sur la loi de commande et les modèles (1.3) ou (1.4) comme modèles de frottements.

La dynamique du vecteur d'état est affine, en considérant les deux modèles de frottements précédents, et appartient à des secteurs (morceaux) définies par les contraintes de commutation de la commande et des modèles de frottements.

Les différentes méthodes d'analyse de stabilité des systèmes affines par morceaux développées en littérature seront alors étudiées dans les chapitres suivants, afin d'analyser la stabilité du système commuté présenté dans ce chapitre.

Chapitre 2

Les systèmes affines par morceaux (PWA)

Résumé.

Ce chapitre introduit la notion de systèmes affines par morceaux, et il regroupe les méthodes de base d'analyse de stabilité de ces systèmes via l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Nous présentons d'abord les deux méthodes de référence pour analyser la stabilité de cette classe de systèmes avec quelques exemples d'application. Ensuite, ces deux méthodes seront appliquées afin d'analyser la stabilité des deux modèles d'actionneur pneumatique avec loi de commande commutée présentés au Chapitre 1. Le chapitre se termine par une discussion sur les points forts et les points faibles de chaque méthode en fixant les objectifs des prochaines étapes.

1 INTRODUCTION

Les systèmes affines par morceaux (Piece-Wise Affine systems ou PWA) sont considérés comme une classe importante de systèmes hybrides. Ils sont caractérisés par un nombre fini de modèles dynamiques linéaires qui commutent entre eux selon des lois de commutation données dépendantes de l'état. Par conséquent, cette description du modèle provoque une subdivision de l'espace d'état en plusieurs cellules. Ces cellules ont des propriétés différentes pour lesquelles la dynamique au sein de chaque cellule est décrite par des équations différentielles linéaires.

Les études sur les systèmes PWA commencent à partir des années 1940 dans les travaux d'Andronov sur les oscillations dans les systèmes non linéaires, et elles se sont développées durant ces vingt dernières années [68, 78, 99, 138], où ils ont été utilisés dans de nombreuses applications en ingénierie et en sciences [13, 68, 72, 96]. Depuis, plusieurs travaux sur l'analyse [135, 43, 68, 100, 137, 62] et la synthèse de contrôleurs [35, 124, 68, 42] ont été élaborés, sans oublier la modélisation et l'approximation des systèmes par des systèmes PWA [25, 50, 42, 41, 109], et l'identification de ces derniers [83, 44, 13, 92].

Dans ces travaux de thèse, nous nous focalisons sur la partie analyse de systèmes PWA, plus particulièrement l'analyse de la stabilité. La quasi-totalité de travaux d'analyse de stabilité sont basés sur les fonctions dites de Lyapunov [74, 18]. La fonction de Lyapunov est une fonction telle que si on en trouve une on démontre la stabilité. Cependant, trouver une fonction de Lyapunov quelconque pour un système est difficile, donc on ramène le problème à la recherche de fonctions de Lyapunov particulières, ce qui peut introduire du conservatisme [74]. De nombreux types de fonctions de Lyapunov sont proposées pour résoudre ce problème, telles que les fonctions linéaires, les fonctions quadratiques ou polynomiales.

Dans la littérature, plusieurs travaux se basent sur les fonctions de Lyapunov quadratiques, qui ont l'avantage de la simplicité et de l'efficacité de calcul [69, 54]. Pour les systèmes linéaires temps invariants (LTI), considérés comme un cas particulier des systèmes PWA, ce choix de la fonction de Lyapunov est suffisant et même nécessaire pour démontrer la stabilité de ces systèmes. Cependant, dans le cas général de systèmes PWA, l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques n'est pas nécessaire et leur utilisation dans certains cas s'avère inefficace [35, 68]. Par conséquent et pour surmonter ce problème, d'autres formes de fonctions de Lyapunov plus générales ont été définies, notamment les fonctions de Lyapunov paramétrées [96], les fonctions de Lyapunov homogènes [64, 31] et les fonctions de Lyapunov bi-quadratiques [10, 127]. On a ainsi abouti au concept de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux qui est une extension des fonctions quadratiques dans le but de garder l'avantage de la simplicité de calcul tout en réduisant le conservatisme [59, 2, 88, 67]. En effet, l'objectif est de procéder de la même façon que dans le cas des systèmes LTI où on a des méthodes efficaces pour analyser la stabilité. En d'autres termes, l'avantage d'utiliser les systèmes PWA est de chercher une extension des méthodes utilisées dans les systèmes LTI sans trop s'écarter des méthodes développées pour ces systèmes et tout en gardant l'avantage de l'efficacité de calcul. Par ailleurs, on ne cherche pas à avoir des conditions nécessaires et suffisantes qui seraient probablement difficiles à résoudre, mais des conditions suffisantes dont la résolution serait efficace en faisant l'extension des méthodes appliquées sur les systèmes LTI.

Ce chapitre est consacré à la présentation de travaux de base sur l'analyse de la stabilité des systèmes PWA. Il est organisé en sous parties qui s'articulent comme suit.

Dans un premier temps, nous présentons les systèmes PWA, leur définition et leurs propriétés avec quelques exemples simples.

Nous entamons après l'analyse de la stabilité en commençant tout d'abord par montrer la différence entre le cas des systèmes LTI et le cas des systèmes PWA.

Nous faisons ensuite une analyse de stabilité des systèmes PWA en considérant des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux utilisées par une large communauté [66, 94, 68, 126, 91, 116, 89, 107, 38], où leurs résultats sont généralement basés sur les deux

travaux de référence présentés dans [69] et [54]. Ces travaux ramènent la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux à la résolution efficace d'un problème d'optimisation sous des contraintes LMI (Linear Matrix Inequalities).

Nous terminerons le chapitre par l'application des deux méthodes de [69] et [54] à l'analyse de la stabilité du vérin électropneumatique lorsqu'une commande commutée est appliquée sur ce dernier pour résoudre le problème de redécollage expliqué au Chapitre 1. Une discussion sera faite pour présenter les avantages, les inconvénients et les limitations de chaque méthode.

2 DÉFINITION DES SYSTÈMES PWA

Définition 2.1.

Les systèmes PWA sont une classe de systèmes non linéaires. Ils sont représentés de manière générale par l'équation différentielle suivante [68, 54, 137].

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + a_i \quad \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. L'espace d'état \mathbb{R}^n est subdivisé en N cellules X_i polyédriques convexes à intérieur disjoint, avec $i \in \mathcal{I}$ l'ensemble de N indices, et les dynamiques $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ caractérisant chacune de ces cellules X_i .

Pour certaines considérations que nous spécifions après, nous pouvons distinguer deux types de cellules X_i , des cellules contenant l'origine indexées par \mathcal{I}_0 et d'autres ne contenant pas l'origine indexées par \mathcal{I}_1 . En d'autres termes :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1 \quad (\text{avec } \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_1 = \emptyset) \quad \text{tels que } \begin{cases} i \in \mathcal{I}_0, & \text{si } 0 \in X_i \\ i \in \mathcal{I}_1, & \text{si } 0 \notin X_i \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 2.2.

Nous pouvons généraliser la représentation (2.1) d'un système PWA, en définissant le nouveau vecteur d'état étendu \bar{x} , tel que $\bar{x}(t)^T = [x(t)^T \ 1]$, comme suit.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}_i} \bar{x}(t) \quad \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I} \quad (2.3)$$

Le domaine de chaque cellule polyédrique convexe, résultant de l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, peut être exprimé à l'aide d'une matrice $\bar{E}_i = [E_i \ e_i] \in \mathbb{R}^{l_i \times (n+1)}$, telle que :

$$x \in X_i \iff \bar{E}_i \bar{x} \geq 0 \quad (2.4)$$

Nous pouvons aussi définir la frontière entre deux cellules X_i et X_j représentée par l'ensemble Γ , qui est défini par la relation suivante :

$$\Gamma = \{(i, j) \mid X_i \cap X_j \neq \emptyset\} \quad (2.5)$$

Alors, il existe des matrices $\bar{F}_{ij} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times (n+1)}$ telles que la condition suivante est vérifiée.

$$\forall (i, j) \in \Gamma, X_i \cap X_j \subseteq \{ x \mid \bar{F}_{ij} \bar{x} = 0 \}. \quad (2.6)$$

Pour mieux comprendre la notion de systèmes affines par morceaux, nous allons illustrer quelques exemples [67].

Exemple 2.1. *Le meilleur exemple illustrant un système affine par morceaux est quand un système LTI est connecté à une non-linéarité statique, telle qu'une saturation ou un relais, voir la figure 2.1.*

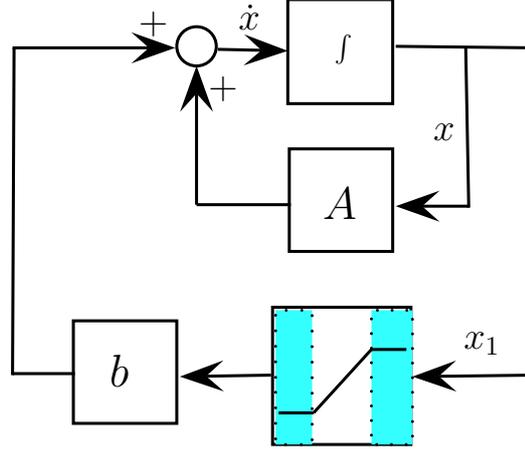


FIGURE 2.1 – Système linéaire connecté à une saturation

L'exemple est un système d'équation :

$$\dot{x} = Ax + b \text{ sat}(x_1), \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b = [1 \ 0]^T, \quad x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad (2.7)$$

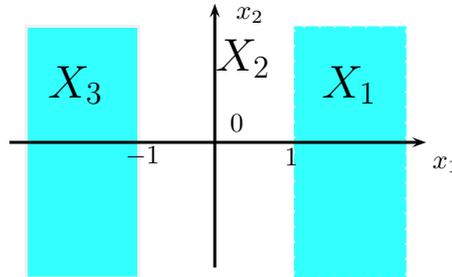


FIGURE 2.2 – Les cellules de système linéaire connecté à une saturation

La présence de saturation subdivisera naturellement l'espace d'état en trois cellules ($N = 3$) en fonction de la valeur de x_1 qui est la première composante du vecteur x , voir figure 2.2. Le système est donc affine par morceaux présenté comme suit.

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + b, & \text{si } x_1 \geq 1 \\ Ax + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1, & \text{si } -1 \leq x_1 \leq 1 \\ Ax - b, & \text{si } x_1 \leq -1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Le domaine de chaque cellule peut être construit à partir de la relation (2.4), en respectant les différentes contraintes sur la variable x_1 .

- Cellule X_1 : $x_1 \geq 1 \Rightarrow \overline{E}_1 = [1 \ 0 \ -1]$
- Cellule X_2 : $-1 \leq x_1 \leq 1 \Rightarrow \overline{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Cellule X_3 : $x_1 \leq -1 \Rightarrow \overline{E}_3 = [-1 \ 0 \ -1]$

Exemple 2.2. *Considérons le système PWA dont la dynamique est exprimée comme suit [69] :*

$$\dot{x} = A_i x \quad (2.9)$$

$$\text{avec : } A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ -5 & -0.1 \end{bmatrix}, A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} -0.1 & 5 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

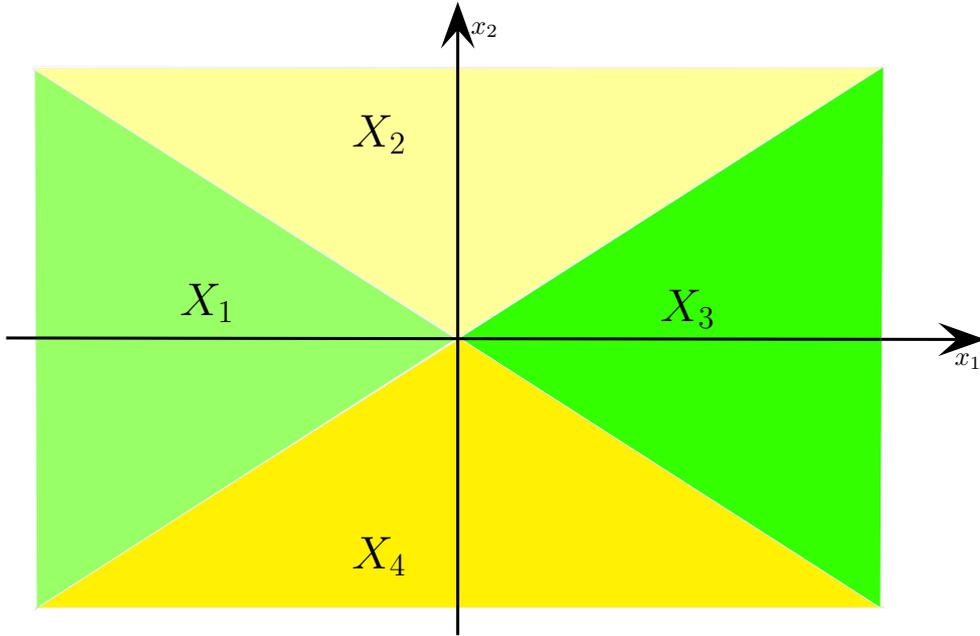


FIGURE 2.3 – Les cellules du système PWA (2.9).

L'espace d'état cette fois-ci est subdivisé en quatre cellules X_i , $N = 4$, représentées sur la figure 2.3. À partir de la relation (2.4), les matrices E_i caractérisant chaque cellule sont données comme suit.

$$E_1 = E_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = E_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3 L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ D'UNE SOLUTION D'UN SYSTÈME PWA

Pour discuter l'existence et l'unicité de la solution d'un système PWA, nous allons nous baser sur celle d'un système dynamique $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pour ce système, démontrer l'existence et l'unicité de la solution revient à vérifier la condition de Lipschitz suivante.

Lemme 2.1 (Existence et unicité [74]).

Si $f(x)$ est une fonction continue et satisfait la condition de Lipschitz, c'est-à-dire : il existe $L > 0$ telle que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

alors l'équation d'état $\dot{x} = f(x)$ a une solution unique, pour toute condition initiale x_0 .

Pour le système PWA (2.1), on peut distinguer deux cas de figure selon la continuité ou la discontinuité sur les frontières entre les différentes cellules X_i .

Continuité : Si la dynamique de système PWA est continue sur toutes les frontières alors la condition de Lipschitz est forcément vérifiée pour un système affine ou linéaire continu, même par morceaux.

Discontinuité : Dans le cas de discontinuité de la dynamique \dot{x} sur une frontière entre deux cellules X_i et X_j , la solution peut ne pas exister ou ne pas être unique. En effet, selon Filippov [45], la discontinuité peut être résolue en faisant l'hypothèse que la dérivée de x sur la frontière soit une combinaison convexe entre les dynamiques $f_i(x)$ et $f_j(x)$ des deux cellules X_i et X_j et qui est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \theta f_i(x) + (1 - \theta) f_j(x), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (2.11)$$

D'après (4.26), on peut avoir plusieurs solutions selon la variation du paramètre θ . D'autre part, cette combinaison convexe peut engendrer des phénomènes complexes, notamment les modes glissants et les hystérésis, et augmenter la difficulté d'analyse de tels systèmes.

Hypothèse 2.1.

Dans ce chapitre, nous supposons que le système PWA (2.1) admet une solution unique. Par conséquent, nous écartons la possibilité d'avoir de phénomènes de glissement sur les frontières entre les cellules.

Même s'ils semblent proches des systèmes LTI, les systèmes PWA ont un comportement de systèmes dynamiques non linéaires, qui n'existent pas dans les systèmes LTI. Comme l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires est plus difficile que celle des systèmes LTI, l'analyse des systèmes PWA est donc un problème difficile. L'objectif est néanmoins d'avoir des méthodes efficaces d'analyse de la stabilité comme dans le cas des systèmes LTI.

4 ANALYSE DE LA STABILITÉ

La stabilité est l'une des propriétés fondamentales des systèmes dynamiques et de la théorie du contrôle. Intuitivement, la stabilité est la propriété qui assure que l'état d'un système ne diverge pas. Dans de nombreux systèmes de contrôle, on cherche à parvenir à des formes particulières

de stabilité, notamment la stabilité asymptotique, qui assure que l'état du système converge vers un point d'équilibre ou un ensemble de points d'équilibre après un transitoire initial. On s'intéresse aussi à la stabilité exponentielle, qui assure que la convergence de l'état du système à son point d'équilibre ou à son ensemble des points d'équilibre peut être délimitée par une fonction exponentielle du temps.

4.1 Différentes formes de stabilité

Point d'équilibre d'un système dynamique

Pour un système dynamique temps-invariant ayant comme vecteur d'état $x(t)$ et donné par :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.12)$$

on appelle point d'équilibre tout point x_e satisfaisant $f(x_e) = 0$, c'est-à-dire [74] :

$$\text{Si pour } t = t_1, x(t_1) = x_e \text{ alors } \forall t > t_1, x(t) = x_e.$$

Concernant les systèmes PWA (2.1), tout point $x_e \in X_i$ satisfaisant

$$A_i x_e + a_i = 0 \quad (2.13)$$

est un point d'équilibre pour ce système PWA.

Ensemble des points d'équilibre d'un système dynamique

On peut également définir un ensemble de points d'équilibre E_{eq} donné par :

$$E_{eq} = \{ x \mid f(x) = 0 \}. \quad (2.14)$$

Dans le cas de système PWA (2.1), si $E_{eq} \subset X_i, i \in \mathcal{I}_0$, Par simplicité, nous prenons le cas de $0 \in E_{eq}$ et donc $a_i = 0$, alors :

$$E_{eq} = \{ x \in X_i \mid A_i x = 0 \}. \quad (2.15)$$

Néanmoins, il est valable pour tout ensemble des points d'équilibre car on peut toujours trouver un changement de repère pour revenir au cas précédent.

Remarque 2.1.

L'ensemble des points d'équilibre n'est pas nécessairement réduit au point 0, c'est-à-dire nous pouvons avoir $0 \in E_{eq}$ et $E_{eq} \neq \{0\}$.

Stabilité de point d'équilibre d'un système dynamique

Les définitions ci-dessous sont adaptées de [74].

Définition 2.3 (Stabilité).

Le point d'équilibre x_e du système (2.12) est stable si : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que :

$$d(x_0, x_e) < \delta \Rightarrow d(x(t), x_e) < \epsilon \quad \forall t > 0 \quad (2.16)$$

avec : $d(a, z) = \|a - z\|$.

Cette définition signifie qu'il est toujours possible de choisir une certaine boule de taille δ telle que, pour toutes les conditions initiales comprises dans cette boule et quelle que soit la boule d'exigence de taille ϵ , les trajectoires résultantes seront, en tout temps, comprises dans cette boule d'exigence.

Définition 2.4 (Instabilité).

Le point d'équilibre x_e du système (2.12) est instable s'il n'est pas stable au sens de la définition 2.3.

La convergence de vecteur d'état vers un point d'équilibre définit d'autres formes de stabilité, notamment la stabilité asymptotique et exponentielle, qui sont plus fortes que la stabilité dans la Définition 2.3.

Définition 2.5 (Stabilité asymptotique).

Le point d'équilibre x_e du système (2.12) est localement asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$d(x_0, x_e) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), x_e) = 0 \quad (2.17)$$

Si (2.17) est valable $\forall \delta$ alors le point d'équilibre x_e du système (2.12) est globalement asymptotiquement stable.

La stabilité exponentielle est un cas particulier de la stabilité asymptotique et qui a les caractéristiques suivantes :

Définition 2.6 (Stabilité exponentielle).

Le point d'équilibre x_e du système (2.12) est localement exponentiellement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$d(x_0, x_e) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} d(x(t), x_e) = 0. \quad (2.18)$$

Si (2.18) est valable $\forall \delta$ alors le point d'équilibre x_e du système (2.12) est globalement exponentiellement stable.

En plus de la stabilité exponentielle, nous pouvons aussi déterminer une borne inférieure sur le taux de décroissance des trajectoires d'état du système dynamique comme suit.

Définition 2.7.

Le taux de décroissance représente le plus grand α positif tel que (2.18) soit satisfaite.

Stabilité d'un ensemble de points d'équilibre d'un système dynamique

De la même façon, les différents types de la stabilité d'un ensemble de points d'équilibre sont définis ci-dessous.

Définition 2.8 (Stabilité).

L'ensemble des points d'équilibre E_{eq} (2.14) est stable si : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que :

$$d(x_0, E_{eq}) < \delta \Rightarrow d(x(t), E_{eq}) < \epsilon \quad \forall t > 0 \quad (2.19)$$

avec : $d(a, E_{eq}) = \inf_{z \in E_{eq}} \|a - z\|$.

Définition 2.9 (Instabilité).

L'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.12) est instable s'il n'est pas stable au sens de la définition 2.8.

Définition 2.10 (Stabilité asymptotique).

L'ensemble des points d'équilibre E_{eq} (2.14) est localement asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$d(x_0, E_{eq}) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), E_{eq}) = 0 \quad (2.20)$$

Si (2.30) est valable $\forall \delta$ alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.12) est globalement asymptotiquement stable.

La stabilité exponentielle est toujours un cas particulier de la stabilité asymptotique et est définie comme suit.

Définition 2.11 (Stabilité exponentielle).

L'ensemble des points d'équilibre E_{eq} (2.14) est localement exponentiellement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$d(x_0, x_e) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} d(x(t), E_{eq}) = 0. \quad (2.21)$$

Si (2.21) est valable $\forall \delta$ alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.12) est globalement exponentiellement stable.

On peut également déterminer une borne inférieure sur le taux de décroissance des trajectoires d'état du système dynamique comme suit.

Définition 2.12.

Le taux de décroissance représente le plus grand α positif tel que (2.21) soit satisfaite.

4.2 Stabilité au sens de Lyapunov**Stabilité dans le cas d'un point d'équilibre**

Pour démontrer la stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov a introduit certaines fonctions V dites par conséquent "fonctions de Lyapunov". Soit :

$$V : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.22)$$

une fonction continue, dérivable et définie dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant le point d'équilibre telle que :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (2.23)$$

avec $\dot{V}(x)$ la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires de (2.12).
Le théorème de stabilité proposé par Lyapunov est le suivant.

Lemme 2.2 ([74]).

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_e ; le point d'équilibre x_e du système (2.12) est stable si $\exists V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable telle que :

$$\begin{cases} V(x) > 0 \text{ pour } x \in D \setminus \{x_e\} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \text{ pour } x \in D \setminus \{x_e\} \end{cases} \quad (2.24)$$

Ce point d'équilibre x_e est localement asymptotiquement stable, si V vérifie la première relation dans (2.24) et la relation :

$$\begin{cases} \dot{V}(x) < 0 \text{ pour } x \in D \setminus \{x_e\} \\ \dot{V}(x_e) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Il est localement exponentiellement stable si V satisfait :

$$\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x) \text{ pour } x \in D \setminus \{x_e\} \quad (2.26)$$

Si $\|x\| \longrightarrow \infty \Rightarrow V(x) \longrightarrow \infty$ et $D = \mathbb{R}^n$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable. Si $V(x)$ est quadratique en x alors la borne inférieure sur le taux de décroissance est au moins α .

Stabilité dans le cas d'un ensemble de points d'équilibre

Dans le cas de la stabilité d'un ensemble de points d'équilibre, les conditions imposées sur la fonction de Lyapunov sont des conséquences directes de théorème d'invariance de LaSalle ([74] Théorème 4.4 page 128). Les trois types de stabilité sont présentés ci-dessous.

Lemme 2.3.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que E_{eq} est inclus dans l'intérieur de D , l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.12) est stable si $\exists V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable telle que :

$$\begin{cases} V(x) > 0 \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq} \end{cases} \quad (2.27)$$

Cet ensemble des points d'équilibre E_{eq} est localement asymptotiquement stable si V vérifie la première relation dans (2.27) et la relation :

$$\begin{cases} \dot{V}(x) < 0 \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq} \\ \dot{V}(x) = 0, x \in E_{eq}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Si $V(x)$ est quadratique en x alors il est localement exponentiellement stable si V satisfait :

$$\dot{V}(\pi(x)) \leq -2\alpha V(\pi(x)) \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq} \quad (2.29)$$

avec $\pi(x) \in D$ un opérateur quelconque de projection tel que

$$\begin{cases} x \rightarrow E_{eq} \Leftrightarrow \pi(x) \rightarrow 0 \\ x \in E_{eq} \Leftrightarrow \pi(x) = 0 \end{cases}$$

De plus, la borne inférieure sur le taux de décroissance est au moins α .

Si $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ et $D = \mathbb{R}^n$ alors l'ensemble des points d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.

Démonstration. *Démontrons que (2.27) et (2.28) sont satisfaits alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} est localement asymptotiquement stable. C'est une conséquence du théorème de LaSalle*

Lemme 2.4 (Théorème de LaSalle[74]).

Soit

- $\Omega \subset D$ un ensemble compact qui est positivement invariant pour le système (2.12) ;
- $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour $x \in \Omega$;
- E l'ensemble de tous les points de Ω tels que $\dot{V}(x) = 0$;
- M le plus grand ensemble invariant de E .

Alors, toute solution x dont la condition initiale appartient à Ω approche M quand t tend vers l'infini.

Puisque E_{eq} est inclus dans l'intérieur de D , il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, E_{eq}) \leq \delta\} \subset D.$$

Soit $\eta = \min_{d(x, E_{eq})=\delta} V(x)$. Alors $\eta > 0$. En prenant $\beta \in]0, \eta[$, on définit :

$$\Omega_\beta = \{x \in \mathcal{B}_\delta \mid V(x) \leq \beta\}.$$

Alors Ω_β est inclus dans D . D'après (2.27) et (2.28), l'ensemble compact Ω_β est un ensemble positivement invariant pour (2.12). De plus, $\dot{V}(x) \leq 0$ pour $x \in \Omega_\beta$. Par suite, d'après le Théorème de LaSalle, $\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), E_{eq}) = 0$.

En conclusion, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$d(x_0, E_{eq}) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), E_{eq}) = 0 \quad (2.30)$$

ce qui démontre la stabilité asymptotique de l'ensemble E_{eq} .

Si $V(x)$ est quadratique en x alors il existe $\alpha_\pi > 0$ et $\beta_\pi > 0$ tels que :

$$\alpha_\pi \|\pi(x)\|^2 \leq V(\pi(x)) \leq \beta_\pi \|\pi(x)\|^2 \quad (2.31)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne.

D'autre part, l'équation (2.29) se réécrit :

$$\dot{V}(\pi(x))e^{2\alpha t} + 2\alpha V(\pi(x))e^{2\alpha t} < 0 \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq} \quad (2.32)$$

soit

$$\frac{d}{dt}(V(\pi(x))e^{2\alpha t}) < 0 \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq} \quad (2.33)$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}(\|\pi(x(t))\|^2 e^{2\alpha t}) < 0 \Leftrightarrow \|\pi(x(t))\| < e^{-\alpha t} \|\pi(x(0))\| \text{ pour } x \in D \setminus E_{eq}. \quad (2.34)$$

En conclusion,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} d(x(t), E_{eq}) = 0.$$

4.3 Analyse de stabilité des systèmes linéaires temps invariant (LTI)

Dans le cas de systèmes linéaires LTI, dont l'équilibre est l'origine, l'équation différentielle est la suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.35)$$

Il s'agit d'un cas particulier de système PWA, nous avons donc tout l'espace d'état considéré comme une seule cellule contenant l'origine, c'est-à-dire $N = 1$. Si nous prenons la structure définie précédemment dans (2.3), les caractéristiques de ce système (2.35) sont décrites comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_0 = \{0\} \text{ avec } X_0 = \mathbb{R}^n \\ \mathcal{I}_1 = \emptyset \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour les systèmes LTI, une condition nécessaire et suffisante pour démontrer la stabilité est de trouver une fonction de Lyapunov quadratique de la forme $V(x) = x^T P x$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ telle que [18] :

$$\begin{cases} V(x) = x^T P x > 0 \\ \dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A)x < 0 \end{cases} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (2.37)$$

Comme la relation (2.37) est valable $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors :

$$(2.37) \iff \begin{cases} P \succ 0 \\ A^T P + P A \prec 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

C'est un problème d'optimisation sous contraintes inégalités matricielles linéaires (LMI), appelé problème de faisabilité, voir annexe 6.1 page 68 sur optimisation, où P , dite "matrice de Lyapunov", est à calculer.

4.4 Extension aux systèmes affines par morceaux

Prenons le système linéaire par morceaux représenté par (2.1), où l'espace d'état est subdivisé en plusieurs cellules X_i . Si nous prenons cette fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$, les conditions pour démontrer la stabilité sont données comme suit.

$$\begin{cases} V(x) = x^T P x > 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \dot{V}(x) = x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0 \text{ pour } x \in X_i \setminus \{0\} \end{cases} \quad (2.39)$$

Alors, le passage vers les inégalités matricielles linéaires ne se fera pas de façon directe car la contrainte quadratique dans la deuxième inégalité de (2.39) ne doit pas être vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ mais pour $x \in X_i \neq \mathbb{R}^n$ ($X_i \subset \mathbb{R}^n$), en d'autres termes :

$$(2.39) \stackrel{\neq}{\iff} \begin{cases} P \succ 0 \\ A_i^T P + P A_i \prec 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

À ce stade, il faut penser à une démarche qui permette d'accéder aux inégalités matricielles linéaires à partir des conditions sur la fonction de Lyapunov imposées à chaque cellule de l'espace d'état. Cette démarche se base sur ce qu'on appelle la S-procédure, présentée ci-dessous.

La S-procédure

Principe de la S-procédure pour deux formes quadratiques

Soit $F_0 = F_0^T, F_1 = F_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

On veut que $z^T F_0 z$ soit positive pour les z tels que $z^T F_1 z$ est positive.

Lemme 2.5 ([70]).

L'implication :

$$z^T F_1 z \geq 0 \implies z^T F_0 z > 0 \quad (2.41)$$

qui est équivalente à :

$$z^T F_0 z > 0 \quad \forall z, z^T F_1 z \geq 0$$

est vraie si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 : F_0 - \lambda F_1 \succ 0. \quad (2.42)$$

Principe de la S-procédure pour des formes quadratiques multiples

Le principe est le même, selon le lemme suivant.

Lemme 2.6 ([18]).

Soient $F_0 = F_0^T, \dots, F_k = F_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'implication :

$$z^T F_1 z \geq 0, \dots, z^T F_k z \geq 0 \implies z^T F_0 z > 0 \quad (2.43)$$

qui est équivalente à :

$$z^T F_0 z > 0 \quad \forall z, \quad z^T F_1 z \geq 0, \dots, z^T F_k z \geq 0$$

est vraie si la condition suivante est vérifiée :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0 : F_0 - \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i \succ 0. \quad (2.44)$$

Remarque 2.2.

Dans le Lemme 2.5, on a une seule contrainte dans ce cas là, on peut démontrer que le passage entre (2.41) et (2.42) est une condition nécessaire et suffisante (non conservatif) et la S-procédure dans ce cas est dite « sans perte ».

Cependant, dans le Lemme 2.6, on a plusieurs contraintes donc le passage entre (2.43) et (2.44) est une condition suffisante (conservatif) et la S-procédure dans ce cas est dite « avec perte ».

Utilisation de la S-procédure dans le cas des systèmes PWA

D'après (2.4), les cellules du système PWA sont définies par des inégalités linéaires en x . Cependant, nous avons besoin d'inégalités sous formes quadratiques pour pouvoir utiliser la S-procédure. Par conséquent, nous allons transformer ces inégalités linéaires en formes quadratiques et appliquer ensuite la S-procédure sur chaque cellule pour obtenir des conditions sous forme de LMI. On peut représenter ces formes quadratiques par un ensemble appelé Ω_i défini par la relation :

$$\Omega_i = \{ \bar{x} \mid \bar{x}^T \bar{Q}_i \bar{x} \geq 0 \} \quad (2.45)$$

tel que :

$$X_i \subseteq \Omega_i$$

Dans ce qui suit, nous proposons une petite justification de ce passage vers les nouveaux ensembles, et comment les inégalités matricielles linéaires peuvent être obtenues.

Justification Prenons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$\begin{cases} V(x) = \bar{x}^T \bar{P} \bar{x} > 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \dot{V}(x) = \bar{x}^T (\bar{A}_i^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_i) \bar{x} < 0 \text{ pour } x \in X_i \setminus \{0\} \end{cases} \quad (2.46)$$

Du fait que $X_i \subseteq \Omega_i$, on a :

$$\bar{x}^T (\bar{A}_i^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_i) \bar{x} < 0 \quad \forall x \in \Omega_i \implies \bar{x}^T (\bar{A}_i^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_i) \bar{x} < 0 \quad \forall x \in X_i \quad (2.47)$$

En appliquant la S-procédure, d'après le Lemme 2.5, on a que :

$$\bar{x}^T (\bar{A}_i^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_i) \bar{x} < 0 \quad \forall \bar{x}, \quad \bar{x}^T \bar{Q}_i \bar{x} \geq 0$$

est vraie si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, \quad \bar{A}_i^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_i - \lambda_i \bar{Q}_i < 0. \quad (2.48)$$

ce qui est bien une inégalité matricielle linéaire avec variables de décision \bar{P} et λ_i .

Compte tenu des considérations précédentes, nous pouvons arriver au lemme suivant, qui révèle que la fonction de Lyapunov peut être calculée grâce à une optimisation sous des contraintes LMI.

Lemme 2.7 (Adapté de [54]).

S'il existe :

- $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$;
- $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

avec :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

tels que les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A_i^T P + P A_i < 0, \quad i \in \mathcal{I}_0 \\ \bar{A}_i^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_i + \lambda_i \bar{Q}_i < 0, \quad i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (2.50)$$

Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ du système PWA (2.1) est asymptotiquement stable.

Remarque 2.3.

Le Lemme 2.7 est valable pour les système PWA présentant un équilibre à l'origine. Néanmoins, il est aussi valable pour tout point d'équilibre $x_e \neq 0$, car il peut être déplacé vers l'origine via une translation donnée.

Dans cette approche, on utilise une seule matrice de Lyapunov, qui couvre l'espace d'état entier. L'avantage avec ce type de fonctions de Lyapunov, utilisées pour certains travaux d'analyse de systèmes PWA et dites "communes" [112, 15], réside dans sa simplicité et son efficacité de calcul. Cependant, dans d'autres travaux de recherche, nous pouvons trouver des systèmes où il est difficile, voire impossible, de trouver une telle fonction de Lyapunov, et c'est le cas de l'exemple traité par [69], voir Figure 2.3 page 37.

Dans la prochaine section, des extensions développées sur les fonctions de Lyapunov seront présentées dans les travaux de base [69] et [54].

4.5 Méthodes de référence : convergence vers un point d'équilibre

Dans la littérature, plusieurs travaux démontrent la convergence des trajectoires d'état dans un système PWA via l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. En effet, dans les années 1990, il y a eu l'apparition de quelques travaux de base qui proposaient des conditions suffisantes sur ce type de fonctions de Lyapunov afin d'analyser la stabilité des systèmes PWA. Avec ces conditions, le calcul de fonctions de Lyapunov peut être exprimé comme un problème d'optimisation sous contraintes LMI en utilisant le principe de la S-procédure. Parmi ces méthodes de base, nous pouvons citer les idées développées dans [69] et [54] utilisées par une large communauté de recherche en littérature.

Les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux

Afin de minimiser le conservatisme des fonctions de Lyapunov quadratiques communes et de trouver l'inspiration pour des nouvelles alternatives, un nouveau concept a été adopté par la communauté de chercheurs sur les systèmes PWA appelé fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Elles sont définies par :

$$V(x) = V_i(x), \quad \forall x \in X_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.51)$$

Afin de démontrer la stabilité des systèmes PWA, ces fonctions quadratiques par morceaux, d'après la littérature, doivent vérifier certaines conditions exprimées comme suit.

(Fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux).

$$1. \quad \begin{cases} V(0) = 0 \\ V_i(x) > 0, \quad \forall x \in X_i \setminus \{0\} \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ \dot{V}_i(x) < 0, \quad \forall x \in X_i \setminus \{0\} \quad \forall i \in \mathcal{I} \end{cases} \quad (2.52)$$

2. Condition de continuité sur la frontière entre les cellules adjacentes X_i et X_j .

$$V_i(x) = V_j(x), \quad \forall x \in X_i \cap X_j \quad (2.53)$$

Remarque 2.4.

La fonction de Lyapunov (2.51) a été découpée en morceaux en considérant les cellules définies dans (2.4), mais ce choix n'est pas nécessaire car nous pouvons avoir deux ensembles de cellules différents (celui de la modélisation et celui de la fonction de Lyapunov). Par simplicité, nous prenons généralement les mêmes cellules que celles définies dans (2.4).

La recherche de telles fonctions a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, et c'est ce que nous allons présenter dans le prochain paragraphe, où nous exposons quelques travaux de base pour l'analyse de stabilité des systèmes PWA en utilisant les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux.

Méthode développée par Johansson/Rantzer [69]

Dans [69], on propose des conditions suffisantes de stabilité des systèmes PWA en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Les auteurs développent une méthode pour calculer ces fonctions de Lyapunov via l'optimisation sous contraintes LMI, en utilisant les informations de partition de l'espace d'état pour relaxer le conservatisme de l'analyse de stabilité.

Cette méthode a été réintégré dans plusieurs travaux de recherche, on peut citer : analyse de stabilité et synthèse de contrôleur par retour d'état [39, 88], filtrage et synthèse de contrôleurs fréquentiels robustes (H_∞ , H_2) [139, 66], analyse des système PWA incertains [94], détection des défauts à base d'observateur [136] et analyse des systèmes PWA discrets [40, 88].

L'idée principale dans les travaux de [69] est de trouver tout d'abord sur chaque cellule une fonction de Lyapunov quadratique, puis de combiner toutes ces fonctions pour former une fonction de Lyapunov globale. Pour répondre aux conditions (2.52) et (2.53), les auteurs de [69] ont choisi une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux de la forme :

$$\begin{cases} V_i(x) = x^T P_i x & \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}_0 \\ V_i(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \overline{P}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} & \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (2.54)$$

D'après [69], les conditions (2.52) et (2.53) sur la fonction de Lyapunov se transforment en contraintes inégalités matricielles linéaires (LMI) via l'utilisation de la S-procédure. Les résultats de [69] sont présentés dans le Lemme ci-dessous.

Lemme 2.8 ([69]).

S'il existe :

- $\Lambda \in \mathbb{R}^{m_L \times m_L}$;
- U_i, W_i dont les coefficients sont non négatifs ;
- $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{P}_i = \bar{P}_i^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$

avec :

$$\begin{cases} P_i = L_i^T \Lambda L_i & \text{pour } i \in \mathcal{I}_0 \\ \bar{P}_i = \bar{L}_i^T \Lambda \bar{L}_i & \text{pour } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (2.55)$$

où $\bar{L}_i = [L_i \ l_i] \in \mathbb{R}^{m_L \times (n+1)}$ vérifient la relation de continuité :

$$\bar{L}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{L}_j \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } x \in X_i \cap X_j, (i, j) \in \Gamma \quad (2.56)$$

tels que :

$$\begin{cases} \begin{cases} A_i^T P_i + P_i A_i + E_i^T U_i E_i < 0 \\ P_i - E_i^T W_i E_i > 0 \end{cases} & \text{pour } i \in \mathcal{I}_0 \\ \begin{cases} \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \bar{E}_i^T U_i \bar{E}_i < 0 \\ \bar{P}_i - \bar{E}_i^T W_i \bar{E}_i > 0 \end{cases} & \text{pour } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ du système PWA (2.1) est globalement asymptotiquement stable.

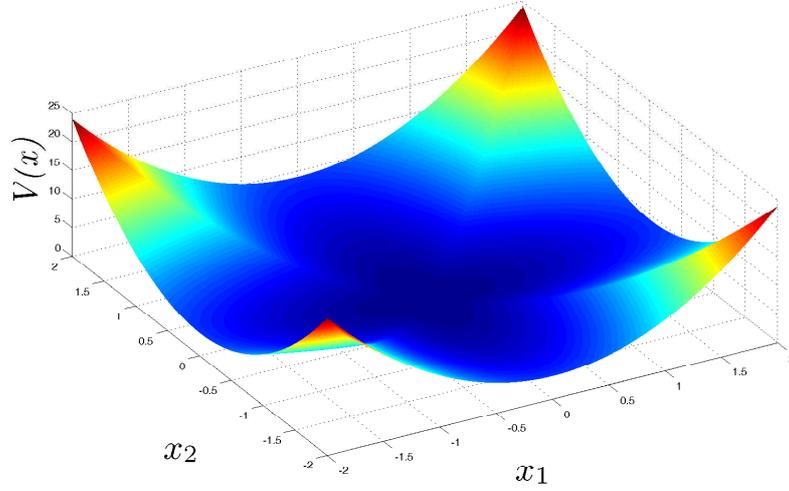
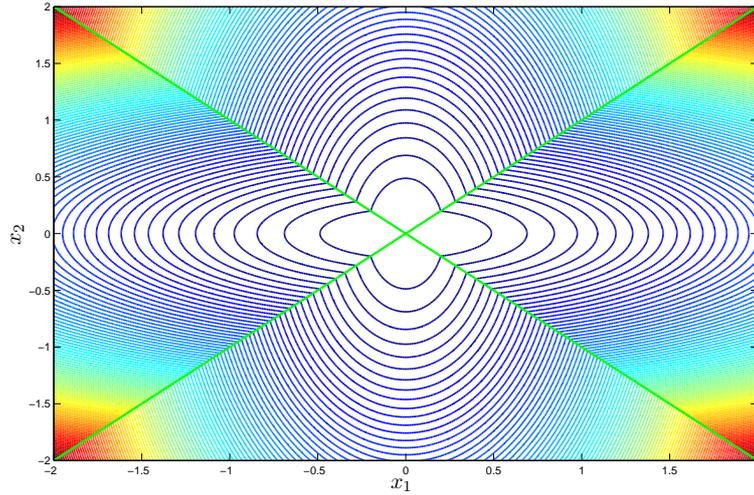
Exemple 2.3. Reprenons l'exemple 2.2. La fonction de Lyapunov quadratique par morceaux définie par les matrices de Lyapunov suivantes :

$$P_1 = P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vérifient les conditions (2.55) et (2.57) imposées par [69], avec $L_i = [E_i^T \ I]^T$, $i = 1, 2, 3, 4$, ce qui démontre la stabilité.

La fonction de Lyapunov et ses courbes de niveaux¹ ont été tracées sur le plan (x_1, x_2) dans les figures 2.4 et 2.5. D'après ces figures, la décroissance vers l'équilibre et la continuité de la fonction de Lyapunov sur les frontières sont bien vérifiées.

1. Une courbe de niveau est l'ensemble de points pour laquelle la fonction de Lyapunov est constante.

FIGURE 2.4 – La fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2) .FIGURE 2.5 – Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2) .**Remarque 2.5.**

Le choix de la structure particulière (2.55) de la fonction de Lyapunov et la condition (2.56) indiquée dans [69] afin d'assurer la continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière entre deux cellules n'est pas une condition nécessaire et suffisante, ce qui rend cette méthode conservatrice. Pour diminuer le conservatisme, une autre condition moins conservatrice a été proposée dans [68] et qui est équivalente à celle proposée dans les travaux de [54] présentés ci-dessous. Les conditions (2.55) et (2.56) sont remplacées alors par la condition suivante :

$$\bar{P}_i = \bar{P}_j + \bar{F}_{ij}^T T_{ij}^T + T_{ij} \bar{F}_{ij} \quad (2.58)$$

avec \bar{P}_i , \bar{P}_j et T_{ij} des variables de décision et \bar{F}_{ij} , $i, j \in \mathcal{I}$ définies dans (2.6).

Méthode développée par Hassibi/Boyd [54]

Dans les travaux de [54], une autre approche a été proposée pour l'analyse de la stabilité d'un point d'équilibre de système PWA, basée toujours sur la transformation de l'analyse de stabilité en un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI. Cependant, les auteurs dans [54] ont proposé des conditions moins conservatives que celles développées dans les travaux de [69]. En effet, ils ont suivi les mêmes étapes que dans [69], c'est-à-dire utiliser les informations tirées du partitionnement de l'espace d'état en plusieurs cellules et de l'utilisation de la S-procédure pour obtenir des conditions sous la forme de contraintes LMI. Néanmoins, le passage qui a été fait par [54] en utilisant la S-procédure était moins conservatif. Ils ont aussi proposé une relation générale qui exprime la condition de continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière entre deux cellules, qui est une égalité directe des fonctions de Lyapunov. Les conditions tirées à partir de cette égalité sur la frontière imposent moins de conservatisme par rapport à la stratégie suivie par [69]. Nous avons indiqué précédemment que les auteurs dans [69] ont proposé plus tard une condition de continuité équivalente à cette condition de continuité imposée par [54] et qui est exprimée ci-dessous.

Les résultats de [54] ont été largement utilisés dans la littérature, on peut citer : synthèse de contrôleur robuste et par retour d'état [105, 71, 93, 107, 89, 108, 106], analyse de systèmes incertains [90], analyse de stabilité pour les systèmes PWA via l'approche polynomiale [137] et analyse de systèmes PWA en présence de phénomènes de glissements [38].

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique définie dans (2.54). Afin d'assurer la décroissance et la continuité de cette fonction de Lyapunov, [54] propose les résultats suivants :

Lemme 2.9 ([54]).

S'il existe :

- $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}_+^{l_i \times 1}$ ayant des coefficients non-négatifs ;
- $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ pour $i \in \mathcal{I}$;

tels que :

$$\Upsilon_{ij}^T (\bar{P}_i - \bar{P}_j) \Upsilon_{ij} = 0 \quad (2.59)$$

où : $\Upsilon_{ij} = \bar{F}_{ij}^\perp$, c'est-à-dire Υ_{ij} est la matrice orthogonale à la matrice \bar{F}_{ij}

et les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \bar{P}_i - Q_i(\mathcal{T}'_i) \succ 0 \\ \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + Q_i(\mathcal{T}_i) \prec 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

où : $Q_i(\mathcal{T}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_i^T \bar{E}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{E}_i^T \mathcal{T}_i \end{bmatrix}$.

Alors, le point d'équilibre $x_e = 0$ du système PWA (2.1) est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 2.6.

La relation de continuité (2.59) est équivalente à celle développée par [68] dans (2.58). Cependant, cette relation n'a pas été démontrée dans ces deux travaux. Elle peut être démontrée en utilisant le lemme de Finsler, comme est expliqué dans le Chapitre 3.

Exemple 2.4. Reprenons l'exemple 2.2 page 37. La fonction de Lyapunov quadratique par morceaux définie par les matrices de Lyapunov suivantes, obtenues en procédant à la programmation numérique sur Matlab via l'utilisation des bibliothèques "YALMIP et SeDuMi", avec $\bar{F}_{12} = \bar{F}_{34} = [1 \ 1]$, $\bar{F}_{14} = \bar{F}_{23} = [1 \ -1]$:

$$P_1 = P_3 = \begin{bmatrix} 4.7876 & -0.0495 \\ -0.0495 & 0.9593 \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_4 = \begin{bmatrix} 1.4491 & -0.0495 \\ -0.0495 & 4.2977 \end{bmatrix}$$

vérifient les conditions (2.58) et (2.60) imposées par [54], ce qui démontre la stabilité.

La fonction de Lyapunov et ses courbes de niveaux ont été tracées sur le plan (x_1, x_2) dans les figures 2.6 et 2.7. D'après ces figures, la décroissance vers l'équilibre et la continuité de la fonction de Lyapunov sur les frontières sont bien assurées.

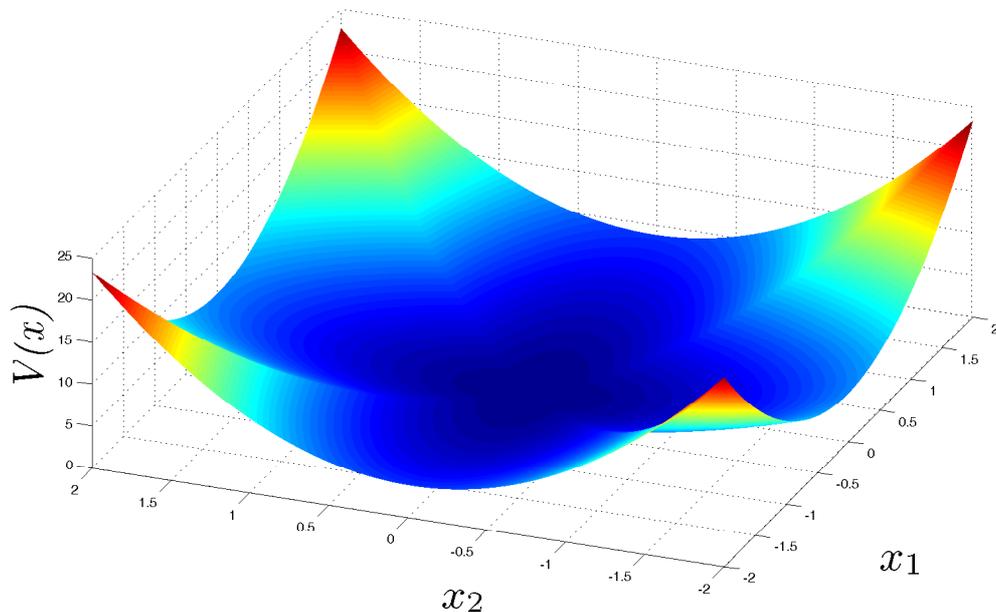


FIGURE 2.6 – La fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2) .

Stabilité locale d'un point d'équilibre

Les résultats de la littérature [69] et [54] présentés ci-dessus testent la stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre. Il est cependant parfois difficile de démontrer cette stabilité au sens global. Par conséquent, on s'intéresse au concept de stabilité locale qui est très intéressant,

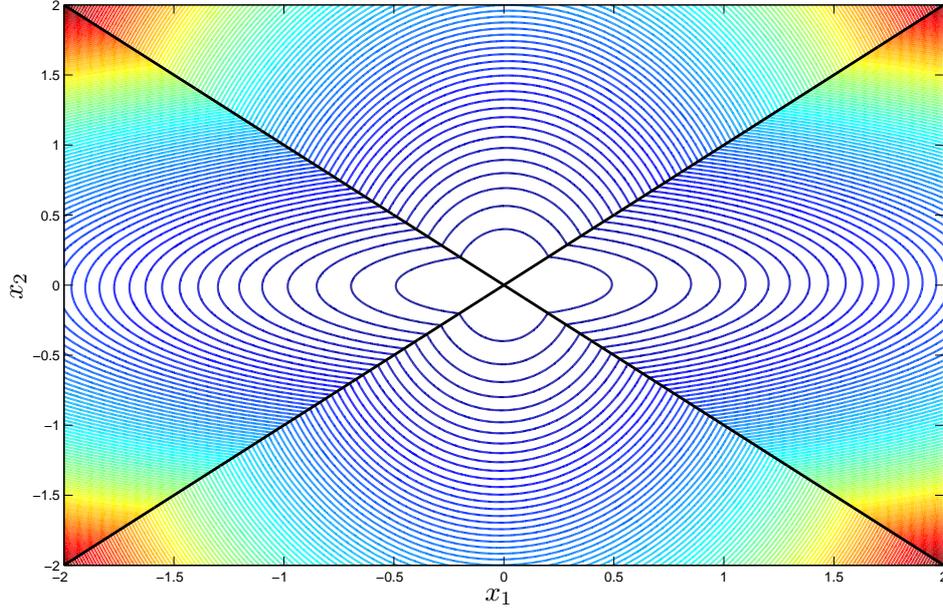


FIGURE 2.7 – Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov dans le plan (x_1, x_2) .

car les domaines de validité physique sont des ensembles bornés et la stabilité locale dans ce cas est suffisante. En effet, pour les systèmes PWA (2.1), parfois on rajoute des bornes fictives sur les cellules X_i pour avoir plus d'efficacité dans la résolution de contraintes LMI et pour faciliter le calcul de la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux. Les résultats précédents restent applicables même pour démontrer la stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, voir le lemme ci-dessous.

Lemme 2.10.

Si $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i \neq \mathbb{R}^n$ et si les conditions du Lemme 2.8 et Lemme 2.9 sont vérifiées alors le point d'équilibre $x_e = 0$ du système PWA (2.1) est localement asymptotiquement stable.

L'ensemble de conditions initiales x_0 pour lesquelles le système converge est alors donné par le plus grand des ensembles $\Omega_\beta = \{x \mid V(x) \leq \beta\}$ tels que $\Omega_\beta \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ tel que la stabilité est vérifiée. En effet, la stabilité n'est pas vérifiée pour toutes les conditions initiales appartenant à l'union des X_i , mais elle est vérifiée uniquement pour celles appartenant à l'espace défini par Ω_β . Comme on peut le voir dans la figure 2.8, la fonction de Lyapunov trouvée assure la convergence asymptotique uniquement pour des conditions initiales dans l'ensemble Ω_β , c'est le cas du point x_{01} , mais elle ne garantit pas cette convergence pour les autres conditions initiales de l'espace d'état D , qui est le cas du point x_{02} .

Propriétés et cas particuliers

À travers cette partie, nous illustrons quelques cas particuliers de système PWA où il est inutile d'utiliser la S-procédure pour avoir des conditions sous contraintes LMI. En d'autres termes, le passage vers les inégalités matricielles linéaires se fait de la même façon que dans le cas des systèmes LTI.

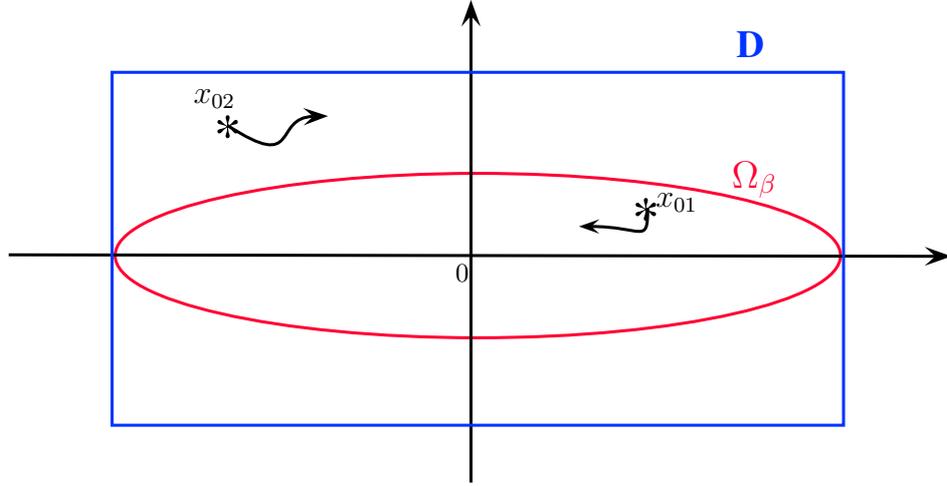


FIGURE 2.8 – Stabilité dans le cas de domaine borné D ; (C) : courbe de niveaux maximale de la fonction de Lyapunov; x_{01} , x_{02} : des conditions initiales.

1) Propriété de symétrie

Dans le cas de systèmes PWA présentant des cellules symétriques deux par deux par rapport à l'origine, dont les dynamiques sont aussi symétriques, le nombre de contraintes LMI dans le programme d'optimisation sera réduit, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre chaque cellule séparément et d'écrire ses contraintes, nous prenons une seule cellule avec des contraintes valables pour les deux cellules symétriques.

Imaginons deux cellules X_i et $X_{i_{sym}}$ géométriquement symétriques par rapport l'origine. Supposons aussi que les deux dynamiques dans les deux cellules sont symétriques, c'est-à-dire que si la cellule X_i a une dynamique $\dot{x} = A_i x + a_i$ alors la dynamique dans la cellule symétrique $X_{i_{sym}}$ est $\dot{x} = A_i x - a_i$.

La définition de la fonction de Lyapunov sera telle que pour la cellule X_i , il y aura $V_i(x)$ de la forme suivante :

$$V_i(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & q_i \\ q_i^T & r_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

telle que :

$$\begin{cases} x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i > 0 \\ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & A_i^T q_i + P_i a_i \\ a_i^T P_i + q_i A_i & a_i^T q_i + q_i a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \in X_i \quad (2.62)$$

Sur la cellule symétrique $X_{i_{sym}}$, ces conditions deviennent :

$$\begin{cases} (-x)^T P_i (-x) - 2q_i^T x + r_i > 0 \\ \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & A_i^T q_i + P_i a_i \\ a_i^T P_i + q_i A_i & a_i^T q_i + q_i a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \in X_{i_{sym}} \quad (2.63)$$

on aura alors :

$$\begin{cases} x^T P_i x - 2q_i^T x + r_i > 0 \\ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & -A_i^T q_i + P_i a_i \\ a_i^T P_i - q_i A_i & -a_i^T q_i - q_i a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \in X_{i_{sym}} \quad (2.64)$$

On remarque que, si (2.62) est vérifiée par un triplet (P_i, q_i, r_i) alors (2.64) est vérifiée pour $P_{i_{sym}} = P_i, q_{i_{sym}} = -q_i, r_{i_{sym}} = r_i$.

Par conséquent, dans le cas de cellules symétriques présentant des dynamiques symétriques, il suffit de trouver une matrice de Lyapunov sur une cellule et la symétrique est trouvée automatiquement. Cela va permettre de réduire le nombre de contraintes LMI à considérer dans le programme d'optimisation car le nombre de cellules considérées est réduit.

2) Cellules contenant l'origine

Pour les cellules dont l'intérieur contient l'origine, le passage vers les LMI se fait de manière directe sans utiliser la S-procédure. Par conséquent, les termes de la S-procédure seront inutiles.

La définition de la fonction de Lyapunov est telle que pour cette cellule, il y aura une fonction $V_0 = x^T P_0 x$ telle que :

$$\begin{cases} V_0 = x^T P_0 x > 0 \\ \dot{V}_0 = x^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) x < 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \in X_0 \quad (2.65)$$

Montrons que nécessairement :

$$\begin{cases} V_0 = x^T P_0 x > 0 \\ \dot{V}_0 = x^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) x < 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.66)$$

Pour cela multiplions l'inégalité (2.65) par ϱ^2 avec $\varrho \in \mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} (\varrho x)^T P_0 (\varrho x) > 0 \\ (\varrho x)^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) (\varrho x) < 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Comme $0 \in$ intérieur de X_0 , il existe une boule $\mathcal{B}_0^r \subset X_0$ de centre 0 et de rayon non nul r , voir figure 2.9. Puisque $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \varrho$ et $\exists x \in \mathcal{B}_0^r$, avec $\tilde{x} = \varrho x$ tels que :

$$\begin{cases} \tilde{x}^T P_0 \tilde{x} > 0 \\ \tilde{x}^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) \tilde{x} < 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

Du fait que (2.68) doit être vérifiée pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\begin{cases} P_0 \succ 0 \\ A_0^T P_0 + P_0 A_0 \prec 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Il est inutile donc d'utiliser la S-procédure.

3) Espace d'état subdivisé en deux cellules symétriques

Montrons que nécessairement, dans le cas d'espace d'état subdivisé uniquement en deux cellules X_1 et X_2 symétriques par rapport à l'origine où $0 \in X_1 \cap X_2$, le passage vers les contraintes LMI se fait de manière directe sans ajouter les termes de la S-procédure.

Avec cette configuration, pour avoir l'équilibre, la dynamique ne doit pas contenir de termes affines, c'est-à-dire $a_i = 0$. Dans ce cas, nous avons le système PWA suivant, où $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x & x_1 \geq 0 \\ \dot{x} = A_2 x & x_1 \leq 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

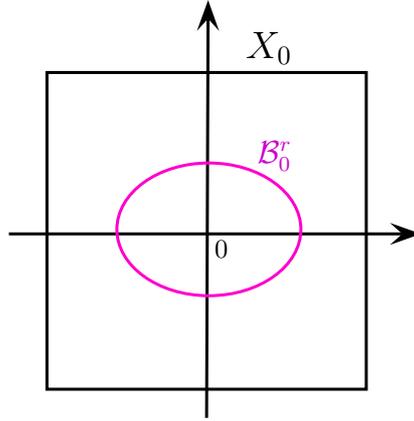


FIGURE 2.9 – Cellule dont l'intérieur contient l'origine

L'objectif est de démontrer la stabilité pour le système, c'est-à-dire de chercher dans chaque région une fonction de Lyapunov d'une forme quadratique $V_i(x) = x^T P_i x$, $i = 1, 2$ pour $x \in X_i$ telle que :

$$\begin{cases} V_i = x^T P_i x > 0 \\ \dot{V}_i = x^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \text{ pour } x \in X_i \quad (2.71)$$

Montrons que nécessairement :

$$\begin{cases} V_i = x^T P_i x > 0 \\ \dot{V}_i = x^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.72)$$

Par symétrie, si $x \in X_1$ alors $-x \in X_2$. Si les conditions dans (2.71) pour $i = 1$ sont valables dans X_1 alors forcément elles sont valables dans X_2 . Avec cette configuration, comme $a_i = 0$, la fonction de Lyapunov, si elle existe, est une fonction de Lyapunov commune, c'est-à-dire $P_1 = P_2 = P$. Nous pouvons écrire alors $\forall x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} P \succ 0 \\ A_i^T P + P A_i \prec 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (2.73)$$

Il est inutile donc d'utiliser la S-procédure pour avoir les contraintes LMI, c'est le cas de l'exemple de la Figure 2.10.

5 APPLICATION AU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE

À travers cette partie, nous allons essayer de répondre à la problématique posée au Chapitre 1, c'est-à-dire démontrer la stabilité du système électropneumatique lorsqu'une commande commutée est appliquée sur ce dernier (voir Chapitre 1). L'étude de stabilité sera faite via l'utilisation des méthodes d'analyse exposées ci-dessus, c'est-à-dire la méthode présentée dans [69] et celle présentée dans [54].

L'application des deux méthodes concerne les deux modèles commutés du système électropneumatique présentés au Chapitre 1, c'est-à-dire un modèle commuté avec des gains de retour d'état sur tous les états en phase de régulation des pressions, voir (1.30) page 31, et un autre modèle commuté où nous insérons uniquement des gains de retour d'état sur les erreurs en pression toujours dans la phase régulation des pressions, voir (1.28) page 31. La différence entre les deux

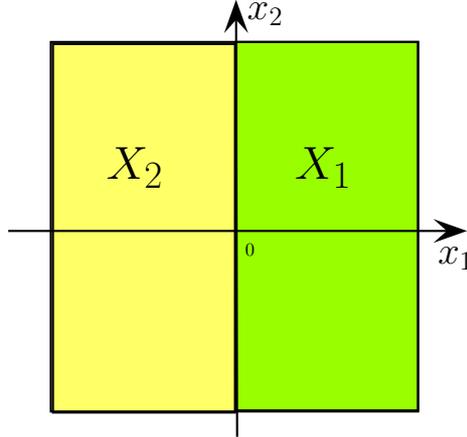


FIGURE 2.10 – Les cellules du système PWA (2.70).

modèles au niveau de l'analyse de stabilité est que la convergence dans le premier est vers un seul point d'équilibre qui est l'origine, tandis que dans le deuxième modèle, la convergence se fait vers un ensemble de points d'équilibre.

L'objectif est de tester l'efficacité de chaque méthode et de voir leurs avantages et inconvénients. Pour cela, nous considérons une configuration des cellules obtenue à partir d'un modèle de frottement sous forme de saturation, voir (1.4) page 12, et uniquement deux contraintes de commutation sur la commande pour les deux modèles commutés cités précédemment. Cette partie est subdivisée en sous parties selon les considérations prises sur les cellules et la méthode choisie pour faire l'étude de stabilité.

Nous présentons tout d'abord les cellules considérées pour l'analyse de la stabilité et leurs caractéristiques. Nous commençons par les cellules où l'asservissement de position est appliqué car elles sont les mêmes dans les deux modèles commutés.

Puis, nous analysons la stabilité des deux modèles commutés par les deux méthodes. Premièrement, nous étudions le premier modèle commuté en appliquant tout d'abord la méthode de [69] présentée dans le Lemme 2.8 sur plusieurs cas de figures, ensuite l'application de celle de [54] développée dans le Lemme 2.9 en présentant des résultats numériques. Deuxièmement, nous discutons l'analyse de stabilité sur le deuxième modèle commuté et les résultats d'application des deux méthodes.

Nous terminerons par une discussion sur les résultats trouvés tout en clarifiant les limitations de chaque méthode sur l'analyse de stabilité.

5.1 Modèle électropneumatique considéré

Nous faisons l'étude de stabilité qui est la réponse du système à des conditions initiales, et c'est pour cette raison que les trajectoires désirées et les contraintes de commutations sur les variables désirées ne seront pas prises en compte dans cette partie. Nous considérons donc que deux contraintes de commutation sur la loi de commande qui reposent sur l'erreur en position et l'évolution de la vitesse. D'après le Chapitre 1, si les deux conditions décrites dans ce qui suit, sont toutes satisfaites alors le système est commandé en régulation de pression. Sinon, si au moins l'une des conditions n'est pas satisfaite, le système est commandé en suivi de trajectoire en position et en pression. Ces critères sont donnés comme suit.

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

Suivant les critères de commutation entre les lois de commande et celles causées par les frottements choisis, le système électropneumatique est sous la forme d'un système affine par morceaux (voir Chapitre 1). L'espace d'état est donc subdivisé en plusieurs cellules de commutation, qui peuvent être représentées comme suit, voir Figure 2.11.

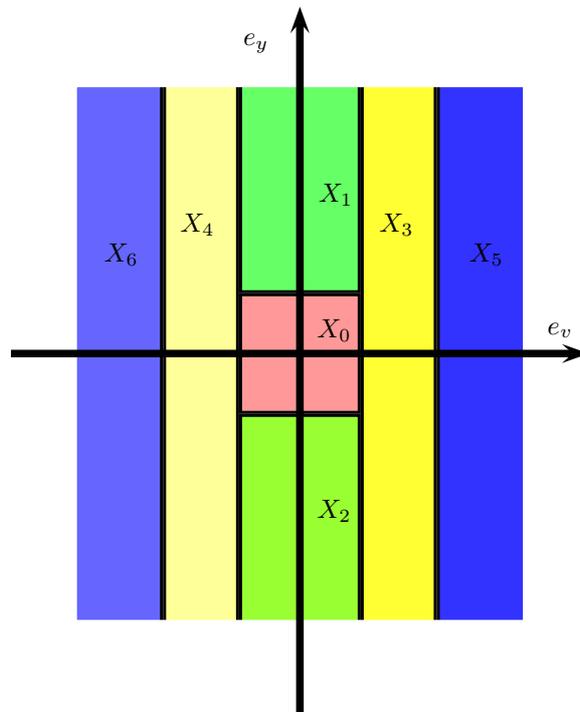


FIGURE 2.11 – Les cellules X_i dans le cas de frottements sous forme d'une saturation, intersection avec le plan (e_v, e_y) .

Remarque 2.7.

Les cellules : X_1 avec X_2 , X_3 avec X_4 et X_5 avec X_6 sont symétriques par rapport à l'origine. D'après la remarque 4.5, vérifier la condition de stabilité pour une cellule implique la vérification de la condition de stabilité de la cellule symétrique. Les conditions de stabilité seront donc vérifiées que pour : X_0 , X_1 , X_3 et X_5 .

Caractéristiques de chaque cellule X_i

Les caractéristiques des cellules X_i considérées dans le programme d'optimisation sous contraintes LMI, c'est-à-dire les matrices d'état \bar{A}_i , les matrices \bar{E}_i liées aux contraintes de commutation sur les cellules et les frontières \bar{F}_{ij} entre deux cellules adjacentes, sont exprimées

dans l'Annexe 6.2, page 71.

Pour ce qui concerne la dynamique de la cellule centrale, selon le type de retour d'état vu au Chapitre 1, c'est-à-dire un retour d'état avec des gains uniquement sur les erreurs de pressions ou bien sur tous les états, nous avons deux dynamiques différentes dans chaque modèle commuté. Elles sont exposées lors de l'analyse de stabilité présentée ci-dessous.

5.2 Retour d'état avec des gains sur tous les états

Considérons (1.30), la dynamique de la cellule centrale peut être écrite comme suit, voir (2.74) : avec : K_{ij} , $i = 1, 2$ et $j = 1, 4$ sont les gains du retour d'état.

Dans cette dynamique, toutes les valeurs propres sont à parties réelles négatives. Il n'y a pas de valeurs propres nulles.

D'après (2.13), ce modèle considéré a un seul point d'équilibre qui est l'origine, c'est-à-dire :

$$x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.75)$$

La convergence des trajectoires d'état dans ce cas est vers un seul point d'équilibre. Nous avons toutes les informations sur les cellules, nous pouvons donc étudier la stabilité de ce système affine par morceaux via l'utilisation des méthodes expliquées auparavant.

Application du Lemme 2.8 [69], page 50

Nous commençons par appliquer la méthode présentée dans [69] sur plusieurs cas de figures. En effet, d'une part les auteurs dans [69] ont proposé deux structures de fonction de Lyapunov et qui seront testées toutes les deux et d'autre part, les cellules présentées précédemment ne sont pas bornées par le haut ou en d'autres termes elles sont ouvertes, nous allons donc tester ces deux structures avec les deux types de cellules ouvertes et fermées et voir dans quel cas la méthode de [69] est valable.

Cas de cellules extérieures ouvertes avec la première structure de la fonction de Lyapunov

La première analyse de stabilité concerne l'application du Lemme 2.8, page 50 en prenant des cellules ouvertes, c'est-à-dire nous prenons les mêmes matrices \bar{E}_i exprimées précédemment. Afin de démontrer la stabilité asymptotique pour le système affine par morceaux précédent, nous procédons à la programmation numérique des LMI exprimées dans (2.57) sur Matlab en utilisant les bibliothèques "YALMIP et SeDuMi" [82, 84, 52, 57, 77, 121].

Malheureusement, les résultats ne sont pas satisfaisants et le programme est infaisable, c'est-à-dire il n'arrive pas à trouver des matrices de Lyapunov satisfaisant les LMI programmées. En considérant alors cette structure de fonction de Lyapunov et des cellules non bornées, la démonstration de la stabilité est impossible.

Cas de cellules extérieures ouvertes avec la deuxième structure de la fonction de Lyapunov

Dans ce deuxième cas, le Lemme 2.8 est appliqué en remplaçant les relations (2.55) et (2.56) par (2.58), et en considérant toujours des cellules ouvertes.

Le programme d'optimisation sous contraintes LMI a été modifié en considérant cette nouvelle structure de fonction de Lyapunov. Cependant, les résultats sont aussi non satisfaisants et le programme reste infaisable. Donc, nous n'arrivons pas à trouver des matrices de Lyapunov assurant

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 \\ \frac{1}{M}(S_N K_{21} - S_P K_{11}) & \frac{1}{M}(S_N K_{22} - S_P K_{12} - b_v(K_{24} - \frac{S_P}{S_N} K_{14})) & -(\frac{b_v}{M} + K_{24} - \frac{S_P}{S_N} K_{14}) & \frac{1}{M}(S_P(K_{24} - K_{13}) + S_N K_{23} - \frac{S_P^2}{S_N} K_{14}) \\ -K_{11} & -(K_{12} - \frac{b_v}{S_N} K_{14}) & \frac{M}{S_N} K_{14} & -(K_{13} + \frac{S_P}{S_N} K_{14}) \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

la stabilité de ce système.

Cas de cellules extérieures fermées avec la première structure de la fonction de Lyapunov

Dans le troisième cas, nous revenons à la première structure de fonction de Lyapunov en considérant le Lemme 2.8 mais cette fois-ci en bornant les cellules de l'extrémité par des bornes supérieures suffisamment grandes. En effet, dans les deux cas précédent, nous n'avons pas pu démontrer la stabilité globale en prenant des cellules ouvertes (non bornées), c'est-à-dire en considérant tout l'espace d'état \mathbb{R}^n . Par conséquent, nous allons essayer de démontrer la stabilité locale en prenant des cellules fermées, c'est-à-dire un sous espace de l'espace d'état \mathbb{R}^n , voir page 53. Les nouvelles contraintes de commutation sur chaque cellule en ajoutant les bornes supérieures sont présentées dans l'Annexe 6.2, page 73.

Nous avons modifié le programme d'optimisation avec ces nouvelles caractéristiques afin de chercher les matrices de Lyapunov mais malheureusement, les résultats sont toujours non satisfaisants et le programme est aussi infaisable.

Cas de cellules extérieures fermées avec la deuxième structure de la fonction de Lyapunov

Pour ce dernier cas, nous prenons la deuxième structure de fonction de Lyapunov, voir le deuxième cas, avec des cellules bornées comme le cas précédent. Le programme cette fois ci a été appliqué avec succès. Nous avons pu trouver des matrices de Lyapunov qui assurent la stabilité locale pour ce système affine par morceaux. Nous avons tracé l'intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) et ses courbes de niveaux, voir Figure 2.12 et 2.13.

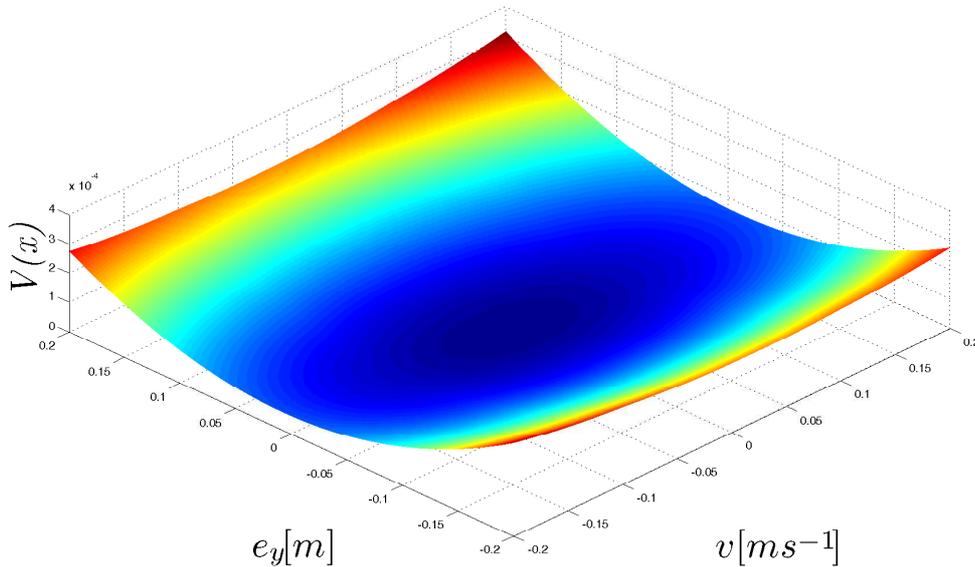


FIGURE 2.12 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) .

D'après les deux figures, nous pouvons remarquer la décroissance des courbes de niveaux vers l'origine, donc la condition de décroissance de la fonction de Lyapunov est vérifiée. Ces courbes de niveaux sont continues sur les frontières représentées par des droites alors, la condition de continuité de la fonction de Lyapunov est aussi assurée.

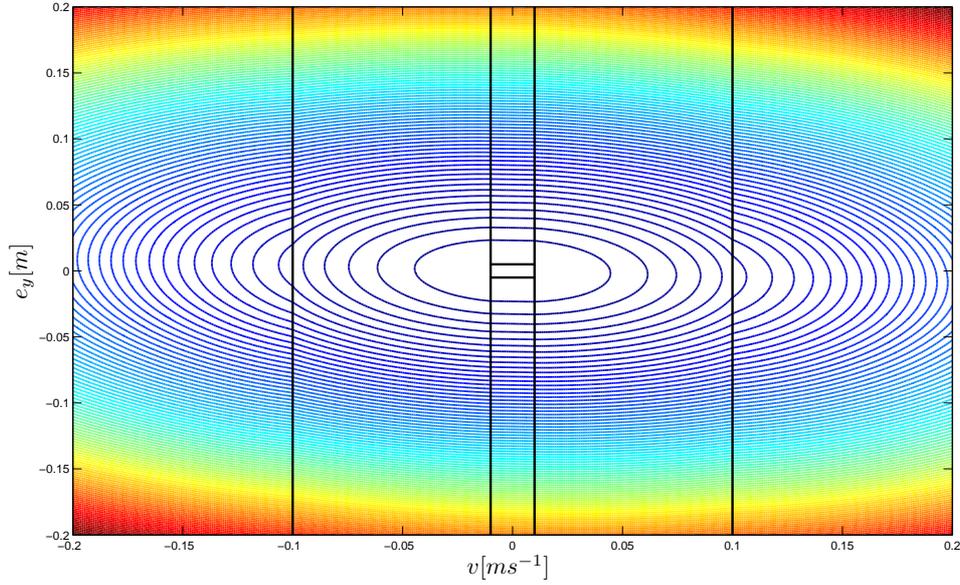


FIGURE 2.13 – Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) .

Application du Lemme 2.9 [54], page 52

Maintenant, nous allons appliquer la méthode de [54], présentée dans le Lemme 2.9, sur le système précédent. Nous procédons toujours à la programmation des contraintes LMI en Matlab sous la bibliothèque Yalmip. Dans ce cas, en appliquant le Lemme 2.9 en prenant des cellules ouvertes, le programme d'optimisation donne des résultats satisfaisants et nous avons pu trouver des matrices de Lyapunov qui démontrent la stabilité du système et cette fois-ci sans borner les cellules. De la même façon, nous avons tracé l'intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) et ses courbes de niveaux (voir figure 2.12 et 2.15).

Nous pouvons illustrer à partir des deux figures la décroissance de la fonction de Lyapunov trouvée tout en respectant la continuité sur les frontières représentées par des droites. À partir de la figure des courbes de niveaux, nous pouvons bien remarquer la déformation de ces courbes sur les frontières, c'est-à-dire nous n'avons pas les mêmes courbes sur chaque cellule et ce que nous ne pouvons pas l'avoir avec une fonction de Lyapunov commune.

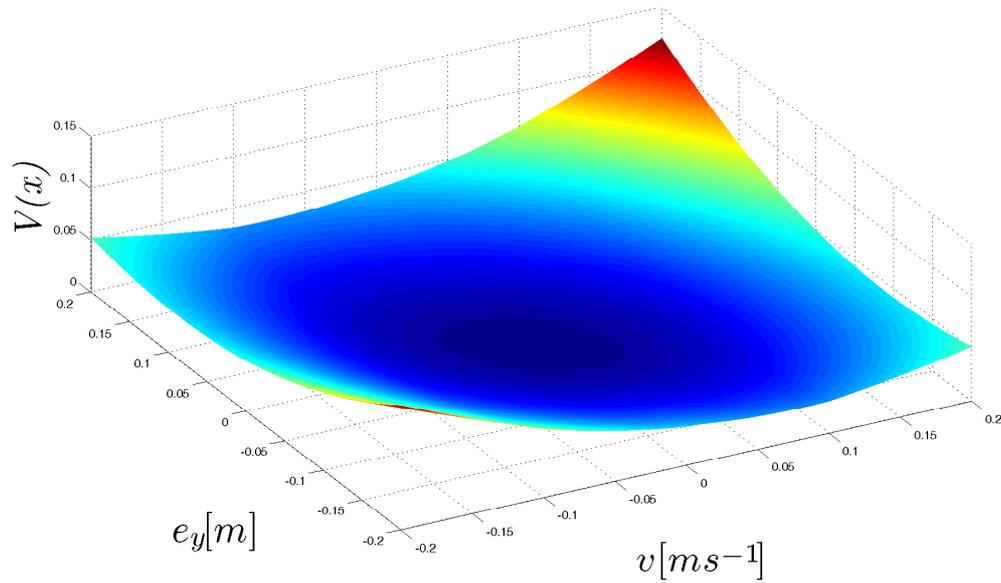
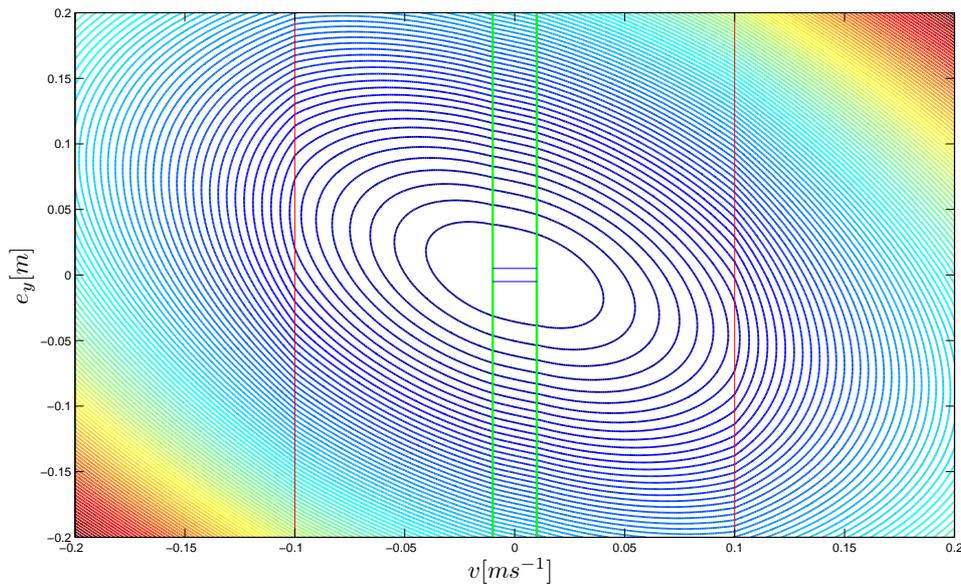
5.3 Retour d'état avec des gains sur les erreurs en pression

Considérons (1.28), la dynamique dans la cellule centrale peut être écrite comme suit.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b_v k_N}{M} & -(\frac{b_v}{M} + k_N) & \frac{S_P(k_N - k_P)}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

avec : k_N, k_P les gains du retour d'état.

La différence entre cette dynamique et la dynamique (2.74) présentée dans le premier modèle commuté et que dans ce cas là, elle présente une valeur propre nulle. En d'autres termes, l'origine n'est pas le seul point d'équilibre de ce système, mais on a un ensemble de points d'équilibre qui

FIGURE 2.14 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) .FIGURE 2.15 – Les courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) .

correspond à plusieurs positions d'équilibre situées entre $-\varepsilon_2$ et ε_2 .

D'après (2.14), ce modèle considéré a un ensemble de points d'équilibre donné comme suit.

$$E_{eq} = [x_1^e \ 0 \ 0 \ 0]^T, \text{ avec } -\varepsilon_2 \leq x_1^e \leq \varepsilon_2 \quad (2.77)$$

L'application des deux méthodes précédentes d'analyse de stabilité en considérant cette nouvelle dynamique n'est pas suffisante, avec toutes les possibilités, c'est-à-dire cellules bornées et non bornées et avec les deux structures de la fonction de Lyapunov car d'une part, le système n'est

pas asymptotiquement stable vers l'origine et la convergence dans ce cas est vers un ensemble de points d'équilibre et d'autre part, pour des raisons de conservatisme que nous discutons ci-dessous.

Discussion

Les méthodes développées dans [69] et [54] sont uniquement utilisables pour démontrer la convergence vers un point d'équilibre. Dans le cas de systèmes présentant un ensemble d'équilibre ces méthodes deviennent inapplicables.

Pour les travaux de [69] :

- le problème se pose en premier lieu au niveau du choix de la forme quadratique pour pouvoir utiliser la S-procédure et faire le passage vers les conditions LMI dans le Lemme 2.8. Parfois, le terme $x^T E_i^T U_i E_i x$ se révèle être inutile, comme il n'a aucune influence sur la positivité ou la non positivité des LMI, c'est le cas des cellules décrites par une seule inégalité où les matrices U_i seront forcément des scalaires (voir les deux premiers cas de l'application de la méthode de [69]). Par ailleurs, comme nous l'avons vu précédemment, ces formes quadratiques auront plus d'influence sur les LMI dans le cas des cellules bornées complètement ou partiellement, en d'autres termes il faut qu'elles soient décrites par au moins deux inégalités (voir le dernier cas de l'application de [69]).
- La plus grande difficulté dans les travaux de [69] est sur la façon d'imposer la condition de la continuité sur la frontière et c'est là en grande partie la source de conservatisme (voir le premier et le troisième cas de l'application de [69]). En effet, d'après la condition de continuité imposée par [69], il n'y a pas une méthode générale pour choisir les matrices \bar{F}_i et \bar{F}_j .
 1. En choisissant la matrice \bar{F}_i , la matrice \bar{F}_j sera déterminée en fonction de cette matrice à partir de la condition (2.56). En imposant plus de contraintes, il n'est pas évident de déterminer les matrices de Lyapunov qui satisfont ces contraintes.
 2. Si en exprimant de manière générale les termes de \bar{F}_j en fonction de ceux de \bar{F}_i , on obtient un problème bilinéaire non convexe dont la solution n'est pas évidente.

De plus, le choix de la fonction de Lyapunov dans ces travaux est restreint à une structure particulière (2.55). En effet, on ne considère qu'une partie des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux continues et non pas toutes les fonctions de Lyapunov, et c'est pour cette raison, d'après la Remarque 2.5, que les auteurs de [69] ont proposé une relation plus générale qui considère toutes les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux continues et qui est exprimée dans (2.58).

Pour les travaux de [54], le passage vers les inégalités matricielles linéaires devient conservatif quand les contraintes sont sous forme de plusieurs inégalités.

Dans le Tableau 2.1, un récapitulatif de résultats d'application des méthodes de [69] et [54] sur les deux modèles de commutation. Nous pouvons voir à partir de ce tableau, que démontrer la stabilité dans le cas de convergence vers un ensemble d'équilibre en utilisant les deux méthodes s'avère infaisable.

L'objectif de ce travail de thèse dans les prochains chapitres est d'étendre les résultats de [69] et [54] afin de démontrer la stabilité asymptotique, voire exponentielle, du système PWA (2.1) contenant un ensemble de points d'équilibre.

	Méthode de [69]				Méthode de [54]
	Cellules ouvertes + 1ère relation de continuité	Cellules ouvertes + 2ème relation de continuité	Cellules fermées + 1ère relation de continuité	Cellules fermées + 2ème relation de continuité	
Cellule centrale avec gain sur la position	infaisable	infaisable	infaisable	faisable	faisable
Cellule centrale sans gain sur la position	inapplicable	inapplicable	inapplicable	inapplicable	inapplicable

TABLE 2.1 – Résultats d'analyse de stabilité par les méthodes [69] et [54].

6 ANNEXES

6.1 Optimisation LMI

Cette section est reprise de la référence [76], pour plus de détails, voir [18].

Après une définition formelle du problème d'optimisation, on présente dans une brève discussion les problèmes d'optimisation convexe ou quasi-convexe ainsi que les algorithmes pour les résoudre efficacement. Enfin, nous définirons trois problèmes d'optimisation sous contrainte LMI généralement considérés dans la littérature et utilisés dans ce document.

Définition 2.13 (Problème d'optimisation).

Un problème d'optimisation est défini de la manière suivante.

Soient n_ξ un entier naturel non nul, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_\xi}$ un ensemble non vide et

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^{n_\xi} \rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto f(\xi) \end{aligned}$$

Alors un problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{\xi \in \mathbb{D}} f(\xi)$$

où

- \mathbb{D} est appelé l'ensemble des contraintes ;
- $\xi = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_{n_\xi}]^T$ est appelé le vecteur des variables de décision ;
- f est appelée la fonction de coût.

On dit que :

- $\xi_{opt} \in \mathbb{D}$ est un optimum local s'il existe un voisinage ouvert \mathbb{U} de ξ_{opt} tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{U} \cap \mathbb{D}$, on a $f(\xi_{opt}) \leq f(\xi)$;
- $\xi_{opt} \in \mathbb{D}$ est un optimum global si, pour tout $\xi \in \mathbb{D}$, on a $f(\xi_{opt}) \leq f(\xi)$.

Résoudre le problème d'optimisation signifie trouver un optimum global (et la valeur de la fonction de coût f en ce point).

On distingue différentes classes de problème d'optimisation en fonction des propriétés de f et de \mathbb{D} . Deux classes importantes de problèmes sont les problèmes d'optimisation convexes et les problèmes d'optimisation quasi-convexes.

Définition 2.14.

Un problème d'optimisation est dit convexe si

- \mathbb{D} est un ensemble convexe : pour tout $\xi_1 \in \mathbb{D}$, pour tout $\xi_2 \in \mathbb{D}$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \in \mathbb{D}$;
- f est une fonction convexe : pour tout $\xi_1 \in \mathbb{D}$, pour tout $\xi_2 \in \mathbb{D}$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $f(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \leq \lambda f(\xi_1) + (1 - \lambda)f(\xi_2)$.

Un problème d'optimisation est dit quasi-convexe si

- \mathbb{D} est un ensemble convexe : pour tout $\xi_1 \in \mathbb{D}$, pour tout $\xi_2 \in \mathbb{D}$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \in \mathbb{D}$;
- f est une fonction quasi-convexe : pour tout $\xi_1 \in \mathbb{D}$, pour tout $\xi_2 \in \mathbb{D}$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $f(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \leq \max\{f(\xi_1), f(\xi_2)\}$.

Les deux classes de problèmes d'optimisation convexe mentionnées ci-dessus admettent une résolution numérique efficace. En effet, la convexité implique que tout optimum local est en réalité un optimum global et donc le problème de trouver un optimum global se réduit à un problème de trouver un optimum local. Ce dernier type de problème est « facile » à résoudre numériquement [14], *i.e.* il existe au moins un algorithme de résolution, dit « efficace », dont le temps de résolution (temps de calcul nécessaire à cet algorithme pour se terminer) est « raisonnable ». Un algorithme de résolution permet effectivement de résoudre un problème d'optimisation particulier, mais surtout il permet de résoudre tous les problèmes d'optimisation de même classe. Dans ce cadre, une mesure usuelle du temps de résolution d'un algorithme est son évolution en fonction de la « taille » du problème d'optimisation qu'il résout. Un algorithme est dit efficace si l'évolution de son temps de résolution est bornée par une fonction polynomiale de la taille du problème d'optimisation. On dit aussi dans ce cas-là que le problème est P-difficile. Dans le cas contraire, l'algorithme est dit non-efficace et le problème d'optimisation correspondant est dit NP-difficile. Nous ne développerons pas plus cet aspect. Les lecteurs intéressés pourront se référer au livre [51] pour une introduction à la complexité algorithmique.

Du fait qu'ils peuvent être résolus efficacement, les problèmes d'optimisation convexes et quasi-convexes sont donc appréciés. Des sous-problèmes importants sont les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. D'une part, ces problèmes apparaissent actuellement comme des problèmes importants pour lesquels des algorithmes de résolution efficaces ont été programmés dans les logiciels de calcul scientifique généraux comme `Matlab` [49] ou `Scilab`. D'autre part, les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI ont d'importantes applications en Sciences de l'Ingénieur (en Automatique [18] ou dans d'autres domaines [14]). Ils permettent par exemple de résoudre le problème H_∞ -standard ainsi que d'autres problèmes.

Définition 2.15 (Contrainte LMI).

Soient n_ξ un entier naturel non nul et $F_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i = 0, \dots, n_\xi$, des matrices symétriques. Une contrainte LMI est définie comme l'ensemble de vecteurs suivant

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \mid F(\xi) \succ 0\}, \quad (2.78)$$

avec

$$F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i F_i. \quad (2.79)$$

Les matrices F_i , $i = 0, \dots, n_\xi$, sont appelées les données et le vecteur ξ est appelé le vecteur des variables de décision de la contrainte LMI.

Dans l'expression (2.78), $F(\xi) \succ 0$ signifie que la matrice $F(\xi)$ est définie positive (de la même façon, $F(\xi) \prec 0$ signifie que $F(\xi)$ est définie négative). Une contrainte est une contrainte LMI lorsque ξ apparaît de façon affine dans $F(\xi)$. Dans la suite de ce document, l'expression $F(\xi) \succ 0$ sera aussi appelée contrainte LMI.

Si, dans la Définition 2.13, l'ensemble des contraintes \mathbb{D} est défini par l'expression (2.79), le problème d'optimisation est alors appelé un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ces problèmes seront écrits plus simplement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}} \quad & f(\xi) \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) \succ 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Il est ainsi possible de définir plusieurs problèmes selon le choix de f . Deux choix sont généralement considérés : f est linéaire ou f est la valeur propre généralisée de deux matrices. Un autre problème important est le problème de faisabilité qui consiste à trouver $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que $F(\xi) \succ 0$. En résumé, on a les trois problèmes suivants.

Problème de faisabilité Tester s'il existe $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que $F(\xi) \succ 0$, et si oui, déterminer un tel $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$:

$$\begin{aligned} \text{trouver} \quad & \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) \succ 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Le problème de faisabilité peut se formuler comme un problème d'optimisation au sens de la Définition 2.13. Il revient au problème d'optimisation suivant : $\min_{(\xi, t) \in \mathbb{D}} t$ avec $\mathbb{D} = \{(\xi, t) \mid F(\xi) + tI \succ 0\}$. Si la valeur minimale de t est strictement positive, alors le Problème de faisabilité (2.81) n'a pas de solution ; si elle est négative ou nulle, alors le Problème de faisabilité (2.81) a une solution donnée par la valeur de ξ_{opt} pour laquelle (ξ_{opt}, t) est un optimum global.

Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire Tester s'il existe $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que $F(\xi) \succ 0$, et si oui, déterminer $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que $F(\xi) \succ 0$ et qui minimise $c^T \xi$ où $c \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ est un vecteur donné :

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}} \quad & (c^T \xi) \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) \succ 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale Tester s'il existe $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que $F(\xi) \succ 0$ et $H(\xi) \succ 0$ où $H(\xi)$ est de la forme (2.79), et si oui, déterminer $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ tel que $F(\xi) \succ 0$ et $H(\xi) \succ 0$ et qui minimise la valeur propre généralisée maximale $\lambda_{max}(G(\xi), F(\xi))$ de $F(\xi)$ et $G(\xi)$ où $G(\xi)$ est de la forme (2.79) et où $\lambda_{max}(G(\xi), F(\xi))$ est la valeur minimale de λ pour laquelle $\lambda F(\xi) - G(\xi)$ est définie positive² :

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}} \quad & \lambda_{max}(G(\xi), F(\xi)) \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) \succ 0 \text{ et } H(\xi) \succ 0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Remarque 2.8.

Lorsqu'il y a plusieurs contraintes LMI $F_i(\xi) \succ 0$, $i = 1, \dots, n_F$ (comme dans le Problème (2.83)), il est toujours possible de les réécrire sous la forme d'une seule contrainte :

$$F(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\xi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_{n_F}(\xi) \end{bmatrix} \succ 0.$$

Il n'y a donc pas de perte de généralité à définir les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI avec une seule contrainte LMI.

Jusqu'à présent, nous avons considéré une contrainte LMI avec un vecteur de variables de décision scalaires. En Automatique, il est plus courant et naturel d'utiliser des variables de décision matricielles. L'expression (2.83) peut se réécrire (et inversement) sous la forme :

$$F(\xi) \triangleq F_c + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g \mathcal{R}_i(\xi) F_i^d + \left(F_c + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g \mathcal{R}_i(\xi) F_i^d \right)^T, \tag{2.84}$$

où $F_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $F_i^g \in \mathbb{R}^{m \times a_i}$ et $F_i^d \in \mathbb{R}^{b_i \times m}$ sont données et où les $\mathcal{R}_i(\xi) \in \mathbb{R}^{a_i \times b_i}$, $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$, linéaires et possiblement structurées en ξ , sont les variables de décision matricielles. Par exemple, l'expression (2.84) peut être trouvée à partir de l'expression (2.79) en choisissant $F_c = \frac{1}{2}F_0$, F_i^g et F_i^d telles que $F_i^g F_i^d = \frac{1}{2}F_i$ et $\mathcal{R}_i(\xi) = \xi_i I$.

6.2 Application au système électropneumatique

Nous spécifions dans cette partie les caractéristiques des cellules X_i considérées pour analyser la stabilité du système électropneumatique, voir page 59, et qui sont présentées sur la Figure 2.11.

Caractéristiques de chaque cellule X_i :

Cas de cellules ouvertes Cellule extérieure X_1 :

Concernant cette cellule, la contrainte est donnée par :

$$\begin{cases} e_y > \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

² $\lambda_{max}(A, B)$ est aussi définie comme la plus grande valeur propre de $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ et n'est définie que dans le cas où B est définie positive. Dans le problème d'optimisation (2.83), $F(\xi) \succ 0$ est une contrainte du problème; ce problème est donc bien posé.

Dans ce cas là, le critère de commutation sur la position n'est pas satisfait, nous sommes donc dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, nous sommes toujours dans la cellule centrale où on a uniquement les frottements visqueux. La dynamique dans cette cellule peut être alors écrite comme suit.

avec $\bar{A}_1 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 & 0 \\ -k_y & \frac{F_s k_a}{M\varepsilon} - k_v & -k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\bar{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Cellule extérieure X_3 :

La cellule X_3 est définie par :

$$\varepsilon_2 < v < \varepsilon$$

Dans cette cellule, nous sommes toujours dans la phase poursuite de position avec des frottements dynamiques. La dynamique est la même que dans la cellule X_1 .

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\bar{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Cellule extérieure X_5 :

La contrainte est donnée par :

$$v > \varepsilon$$

Dans ce cas là, c'est le critère de commutation sur la vitesse qui n'est pas satisfait, nous sommes donc dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, nous sommes dans les cellules extérieures où nous avons uniquement la partie statique. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

avec $\bar{A}_5 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$

$$\bar{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{F_s}{M} \\ -k_y & -k_v & -k_a & 0 & \frac{F_s k_a}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\bar{E}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Les matrices \overline{F}_{ij} exprimant la frontière entre chaque cellule X_i et X_j :

Nous allons maintenant chercher les matrices \overline{F}_{ij} décrivant les frontières en se basant sur la relation (2.6) afin d'imposer la continuité de la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sur chaque frontière. Toutes les matrices \overline{F}_{ij} sont exprimées comme suit.

- entre les cellules X_1 et X_0 : $\overline{F}_{10} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_1)$
- entre les cellules X_1 et X_3 : $\overline{F}_{13} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_2)$
- entre les cellules X_3 et X_0 : $\overline{F}_{30} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_2)$
- entre les cellules X_3 et X_5 : $\overline{F}_{35} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon)$

Cellule centrale X_0 :

Dans cette cellule, les critères de commutation sur la commande sont satisfaites, nous sommes donc dans la phase régulation des deux pressions. Et vis-à-vis des frottements, nous sommes dans la cellule centrale où on a uniquement les frottements visqueux.

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\overline{E}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Cas de cellules fermées Pour la cellule extérieure X_1 , la contrainte est donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < e_y < \delta_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule est donnée alors comme suit.

$$\overline{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Pour la cellule extérieure X_3 , la contrainte est donnée par :

$$\begin{cases} -\delta_2 < e_y < \delta_2 \\ \varepsilon_2 < v < \varepsilon \end{cases} \quad (2.92)$$

La matrice \overline{E}_3 sera donc comme suit.

$$\bar{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Pour la cellule extérieure X_5 , la contrainte est donnée par :

$$\begin{cases} -\delta_3 < e_y < \delta_3 \\ v > \varepsilon \end{cases} \quad (2.94)$$

La matrice \bar{E}_5 décrivant cette cellule est donnée alors par.

$$\bar{E}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

avec : δ_i , $i = 1, 2, 3$ sont des constantes suffisamment grandes à choisir.

Chapitre 3

Analyse de stabilité des systèmes PWA

Résumé.

Ce chapitre est dédié à l'analyse de la stabilité des systèmes affines par morceaux via l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Nous commençons tout d'abord par introduire les différentes hypothèses sur le système PWA (2.1) et la démarche à suivre pour analyser la stabilité de ce dernier. Ensuite, nous présentons un premier résultat pour assurer la convergence vers un ensemble de points d'équilibre, puis un deuxième résultat pour analyser la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques. Pour terminer, ces résultats seront appliqués pour analyser le système électropneumatique avec sa loi de commande présentant un ensemble de points d'équilibre.

1 INTRODUCTION

Dans le Chapitre 2, Section 4.5 page 48, nous avons rappelé quelques méthodes d'analyse de stabilité de la littérature pour cette classe de systèmes affines par morceaux et qui se basent sur les idées développées dans [69] et [54]. Dans ces travaux, une condition suffisante pour démontrer la stabilité de ce type de systèmes est de trouver une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux. Le calcul de ce type de fonctions peut être traduit en appliquant la S-procédure à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Cependant, nous avons montré que, dans le cas de systèmes PWA présentant un ensemble de points d'équilibres, ces méthodes ne suffisent pas.

L'approche adoptée dans ce chapitre consiste dans un premier temps à travailler et à étendre les résultats de [69] et [54] en proposant un moyen pour démontrer la convergence des trajectoires d'états dans un système PWA, non pas vers un point d'équilibre mais plutôt vers un ensemble de points d'équilibre. D'autre part, nous proposons aussi de réduire le conservatisme de l'application de la S-procédure en choisissant des formes quadratiques plus adaptées.

Ce chapitre est articulé autour de trois parties.

La première partie traite de l'étude de la stabilité exponentielle des systèmes PWA. Nous introduisons d'abord les différentes hypothèses sur le système PWA (2.1), notamment la présence d'un ensemble de points d'équilibre, et comment imposer les conditions sur la fonction de Lyapunov choisie. Ensuite, nous expliquons le passage vers les inégalités matricielles linéaires (LMI) en appliquant la S-procédure et en mettant en œuvre un moyen afin de respecter la continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière. Cette partie se termine par un théorème rassemblant les différents résultats.

La deuxième partie traite de la notion de stabilité robuste de cette classe de systèmes PWA. En effet, le résultat précédent a été étendu afin de préserver la stabilité malgré des variations paramétriques sur le système. Un théorème plus général est proposé à la fin de cette partie.

Nous terminerons ce chapitre par une partie dédiée à l'application des deux approches précédentes afin d'étudier la stabilité, la stabilité robuste, le suivi de trajectoires désirées et le suivi robuste sur le système électropneumatique.

2 CONVERGENCE VERS UN ENSEMBLE DE POINTS D'ÉQUILIBRE

2.1 Extension et contribution

Pour les systèmes affines par morceaux décrits par (2.1), l'approche dominante afin de démontrer la stabilité est ce qu'on appelle les fonctions de Lyapunov quadratique par morceaux [103, 105, 108, 126, 106]. Cependant, la difficulté réside dans le calcul de ces fonctions de Lyapunov lorsqu'il s'agit de démontrer la convergence des trajectoires d'état vers un ensemble de points d'équilibre. C'est cette difficulté qu'a abordé ce travail de thèse, c'est-à-dire comment développer un outil efficace pour calculer ces fonctions de Lyapunov quadratiques qui démontrent la convergence que ce soit asymptotique ou exponentielle vers l'ensemble des points d'équilibre. La démarche est présentée dans le paragraphe ci-dessous.

Démarche à suivre

L'objectif est de proposer pour le système affine par morceaux (2.1) des conditions sur la fonction de Lyapunov candidate choisie afin d'assurer la convergence exponentielle des trajectoires d'état $x(t)$ vers un ensemble de points d'équilibre. Nous supposons que le système (2.1) vérifie les hypothèses suivantes dans ce chapitre.

Hypothèse 3.1.

Il n'y a pas de phénomène de glissement et le système PWA (2.1) admet une solution unique pour une condition initiale donnée.

L'Hypothèse 3.1 implique qu'aucune conclusion ne peut être tirée sur la stabilité du système PWA (2.1) présentant des phénomènes de glissements en appliquant la démarche ci-dessous.

Hypothèse 3.2.

L'ensemble des points d'équilibre $E_{eq} \supseteq \{0\}$ est un ensemble de $\bigcup_{i \in \mathcal{I}_0} X_i$.

On appelle qu'il n'y a aucun point d'équilibre en dehors des cellules X_i , $i \in \mathcal{I}_0$, c'est-à-dire :

$$E_{eq} = \{ x \in X_i \mid A_i x = 0, i \in \mathcal{I}_0 \}. \quad (3.1)$$

Hypothèse 3.3.

Les dynamiques A_i , $i \in \mathcal{I}_0$ peuvent avoir des valeurs propres nulles.

Cette hypothèse implique que l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} n'est pas nécessairement réduit à l'élément 0, c'est-à-dire nous pouvons avoir $E_{eq} \neq \{0\}$.

Par la suite, si A_i a des valeurs propres nulles, on considère l'ensemble des vecteurs h qui forme une famille libre et génératrice du noyau de l'application linéaire associée à A_i : le même noyau pour tout A_i , $i \in \mathcal{I}_0$. Nous appelons $Z \in \mathbb{R}^{n \times h}$ la matrice de rang plein de ces vecteurs propres ($A_i Z = 0$, $i \in \mathcal{I}_0$). L'ensemble des points d'équilibre peut être ré-exprimé de la façon suivante.

$$E_{eq} = \{ x \in X_i, i \in \mathcal{I}_0 \mid \exists \xi, x = Z \xi \}. \quad (3.2)$$

Nous définissons également la matrice $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times (n-h)}$ comme étant le complément orthogonal de Z , normalisé tel que $\Pi^T \Pi = I$, c'est-à-dire $[Z \ \Pi]$ est unitaire et de rang plein.

L'objectif est de proposer des conditions afin d'assurer la convergence exponentielle des trajectoires d'état du système $x(t)$ vers l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} pour cette classe de systèmes.

Dans notre démarche, nous nous basons sur des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Ces fonctions $V(x)$ sont définies comme suit.

$$V(x) = V_i(x) \text{ pour } x \in X_i \quad (3.3)$$

avec

$$V_i(x) = \begin{cases} x^T P_i x & \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}_0 \\ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \overline{P}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} & \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ces fonctions quadratiques par morceaux peuvent permettre de garantir la stabilité dans le cas de systèmes contenant un point d'équilibre, voir Chapitre 2. Dans ce qui suit, nous démontrons à travers quelques étapes que ces fonctions par morceaux permettent aussi la garantie de la stabilité pour le cas de systèmes présentant un ensemble de points d'équilibre.

La présence de valeurs propres nulles peut être interprétée comme la possibilité de décomposer le vecteur d'état en la somme d'un terme convergent et un terme borné. À ce niveau, nous pouvons voir la différence avec le cas classique. En effet, la présence de ce terme borné rend l'utilisation des méthodes de la littérature inefficace. Pour remédier à ce problème, nous proposons d'étudier la convergence vers l'ensemble des points d'équilibre en s'appuyant sur une projection orthogonale par rapport à cet ensemble des points d'équilibre.

Nous proposons alors de séparer les deux parties en faisant une projection sur le terme convergent.

Avec cette projection, nous assurons la convergence vers l'ensemble des points d'équilibre des trajectoires d'état qui est dirigée par les vecteurs propres du système hormis les vecteurs propres dans Z .

Afin d'assurer la continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière entre deux cellules X_i et X_j voisines, elle doit vérifier la condition suivante :

$$V_i(x) = V_j(x) \quad \forall x \in X_i \cap X_j. \quad (3.5)$$

Après avoir parlé de la notion d'un ensemble de points d'équilibre d'un système affine par morceaux, le lien entre la présence de l'ensemble des points d'équilibre, son influence sur la stabilité de ce système, la procédure à mettre en œuvre pour imposer la convergence uniquement en dehors de cet ensemble et la continuité de la fonction de Lyapunov sur les frontières, nous allons concrétiser ces notions sous forme de conditions suffisantes à imposer. Ces conditions sont inspirées de celles imposées dans les travaux de [69] et [54].

Comme une conséquence directe du théorème de LaSalle, comme dans le Lemme 2.3 (au Chapitre 2 page 43), ces conditions sont données dans le lemme suivant.

Lemme 3.1.

Pour le système PWA (2.1), la convergence asymptotique de x vers E_{eq} pour $t > 0$, $t \rightarrow \infty$ est assurée si les conditions suivantes sont satisfaites.

- La fonction de Lyapunov doit être continue sur la frontière entre deux cellules X_i et X_j , c'est-à-dire elle vérifie la condition (3.5).
- La fonction de Lyapunov doit être positive en dehors de E_{eq} , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} V_i(x) > 0, & x \in X_i \setminus E_{eq}, i \in \mathcal{I}_0 \\ V_i(x) > 0, & x \in X_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (3.6)$$

- La dérivée de la fonction de Lyapunov doit être négative en dehors de E_{eq} , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{V}_i(x) < 0, & x \in X_i \setminus E_{eq}, i \in \mathcal{I}_0 \\ \dot{V}_i(x) < 0, & x \in X_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

- La dérivée de la fonction de Lyapunov doit être nulle uniquement dans E_{eq} , c'est-à-dire :

$$\dot{V}(x) = 0, \quad x \in E_{eq}. \quad (3.8)$$

Nous pouvons également démontrer la convergence exponentielle de x vers E_{eq} et calculer une borne inférieure sur le taux de décroissance des trajectoires d'état via le corollaire ci-dessous.

Lemme 3.2.

Pour le système PWA (2.1), si les conditions (3.5), (3.6) et (3.8) sont vérifiées et si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{cases} \dot{V}_i(\Pi\Pi\Pi^T x) \leq -2\alpha V_i(\Pi\Pi\Pi^T x), & x \in X_i \setminus E_{eq}, i \in \mathcal{I}_0 \\ \dot{V}_i(x) \leq -2\alpha V_i(x), & x \in X_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

avec Π la matrice de projection définie à la page 77

alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Remarque 3.1.

Le Lemme 3.2 vient du Lemme 2.3, (2.29) pour :

$$\pi(x) = \begin{cases} \Pi\Pi\Pi^T x & \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}_0 \\ x & \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous allons décrypter ces conditions et les justifier une par une. La première condition (3.5) consiste à imposer la continuité de la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sur la

frontière séparant deux cellules voisines du système PWA.

La deuxième condition exprimée dans (3.6) assure que la fonction de Lyapunov par morceaux est positive à la fois à l'intérieur des cellules contenant l'origine X_i , $i \in \mathcal{I}_0$, en dehors de l'ensemble des points d'équilibre, et aussi sur les cellules extérieures X_i , $i \in \mathcal{I}_1$. Ces conditions sont la réponse sur la condition classique de la fonction de Lyapunov imposant la positivité de cette fonction sur tout l'espace d'état.

La condition (3.9) exige que la fonction de Lyapunov décroisse exponentiellement le long des trajectoires d'état en imposant une condition sur sa dérivée. Sur les cellules X_i , $i \in \mathcal{I}_0$, nous avons parlé de la projection sur le terme convergent pour éviter la stabilité marginale, et cela nous pouvons l'envisager dans la première inégalité de (3.9) via l'insertion de la matrice Π orthogonale aux vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles. Ces conditions imposent aussi une borne inférieure α sur le taux de décroissance des trajectoires d'état, donc une information supplémentaire par rapport au temps de réponse de système.

Avec la condition (3.8), nous imposons que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit nulle une fois arrivée sur l'ensemble des points d'équilibre, c'est-à-dire nous n'exigeons pas la décroissance de la fonction de Lyapunov sur l'ensemble des points d'équilibre, ce qui laisse un degré de liberté pour trouver la solution.

Nous avons donc exprimé les conditions à imposer sur la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux afin d'assurer la convergence exponentielle des trajectoires d'état vers l'ensemble des points d'équilibre. Nous proposons le théorème ci-dessous où nous présentons un problème d'optimisation sous contraintes LMI dont la solution donne des fonctions de Lyapunov qui satisfont ces conditions imposées. L'intérêt de ce passage vers des contraintes LMI consiste à une résolution efficace du problème.

Théorème 3.1.

Supposons que le système (2.3) satisfait l'Hypothèse 3.1. Soit $\alpha \geq 0$ est un scalaire donné. S'il existe :

- $U_i = U_i^T, W_i = W_i^T, \bar{U}_i = \bar{U}_i^T, \bar{W}_i = \bar{W}_i^T \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ et $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{l_i \times 1}$ ayant des coefficients non-négatifs;
- $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ pour $i \in \mathcal{I}_1$, $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $i \in \mathcal{I}_0$ et $L_{ij} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r_{ij}}$, pour $i, j \mid (i, j) \in \Gamma_{ij}$;

tels que :

$$\bar{P}_j = \bar{P}_i + \bar{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \bar{F}_{ij}, \text{ pour } i, j \mid (i, j) \in \Gamma_{ij} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \Pi^T A_i^T P_i Z = 0 \\ E_i Z = 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0 \quad (3.12)$$

et les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} P_i - \Psi_i(\mathcal{T}'_i) - E_i^T W_i E_i \succ 0 \\ \Pi^T (A_i^T P_i + P_i A_i + \Psi_i(\mathcal{T}_i) + E_i^T U_i E_i) \Pi + 2\alpha \Pi^T P_i \Pi \prec 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0 \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \bar{P}_i - Q_i(\mathcal{T}'_i) - \bar{E}_i^T \bar{W}_i \bar{E}_i \succ 0 \\ \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \Psi_i(\mathcal{T}_i) + \bar{E}_i^T \bar{U}_i \bar{E}_i + 2\alpha \bar{P}_i \prec 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_1 \quad (3.14)$$

$$\text{avec : } \Psi_i(\mathcal{T}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_i^T \bar{E}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{E}_i^T \mathcal{T}_i \end{bmatrix}.$$

Alors, l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Démonstration. Nous considérons la fonction de Lyapunov candidate $V(x)$ définie par (3.3).

À partir de la condition :

$$\bar{P}_j = \bar{P}_i + \bar{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \bar{F}_{ij}, \text{ pour } (i, j) \in \Gamma_{ij} \quad (3.15)$$

on a

$$(3.15) \iff \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} (\bar{P}_j - \bar{P}_i) \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} (L \bar{F}_{ij})^T \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} L \bar{F}_{ij} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

sachant que sur la frontière, c'est-à-dire $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in X_i \cap X_j$:

$$\bar{F}_{ij} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

en remplaçant cette condition dans (3.16), on aura :

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} (\bar{P}_j - \bar{P}_i) \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} (L \bar{F}_{ij})^T \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} L \bar{F}_{ij} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

et donc :

$$V_i(x) = V_j(x) \quad \forall x \in X_i \cap X_j. \quad (3.18)$$

Cette paramétrisation linéaire, en utilisant le lemme de Finsler, voir page 84, est une condition nécessaire et suffisante pour préserver la propriété de la continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière.

Ensuite, la première inégalité de (3.14) implique

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T (\bar{P}_i - \Psi_i(\mathcal{T}'_i) - \bar{E}_i^T \bar{W}_i \bar{E}_i) \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} > 0;$$

Cela veut dire que, en appliquant la S-procédure, $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \bar{P}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} > 0$ lorsque

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \bar{E}_i^T \bar{W}_i \bar{E}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \Psi_i(\mathcal{T}'_i) \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

ce qui implique que $V_i(x) > 0$ pour $x \in X_i$, $i \in \mathcal{I}_1$.

De la même façon, la première inégalité dans (3.13) implique la première inégalité dans (3.6), et la deuxième inégalité dans (3.14) implique la deuxième inégalité dans (3.9).

Pour ce qui concerne la seconde inégalité dans (3.13). Rappelons que

$$\dot{V}_i(x) = x^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x,$$

Par ailleurs, en se basant sur l'Hypothèse 4.4, nous pouvons toujours écrire une décomposition du vecteur x , de la forme $x = Z\xi + \Pi\zeta$, avec $x \in X_i$, $i \in \mathcal{I}_0$ et $\zeta \in \mathbb{R}^{(n-h) \times 1}$. Comme $A_i Z = 0$ pour $x \in E_{eq}$, c'est-à-dire $x = Z\xi$, alors la première égalité dans (3.12) implique (3.8).

Pour $x \notin E_{eq}$, lorsque la dynamique active est A_i , $i \in \mathcal{I}_0$, grâce à (3.12), on a :

$$\dot{V}_i(x) = (Z\xi + \Pi\zeta)^T (A_i^T P_i + P_i A_i) (Z\xi + \Pi\zeta) = \zeta^T \Pi^T (A_i^T P_i + P_i A_i) \Pi \zeta$$

Notons aussi que la deuxième égalité dans (3.12) implique que $E_i x \geq 0 \Rightarrow E_i \Pi \zeta \geq 0$. Alors, grâce à la S-procédure, la deuxième inégalité dans (3.13) implique $\zeta^T \Pi^T A_i^T P_i \Pi \zeta < -2\alpha \zeta^T P_i \zeta$ pour $x \notin E_{eq}$, comme on a $\zeta^T \Pi^T E_i^T U_i E_i \Pi \zeta \geq 0$, grâce à (3.12), $\zeta^T \Pi^T \Psi_i(\mathcal{T}'_i) \Pi \zeta \geq 0$.

D'autre part $V_i(\Pi\Pi^T x) = x^T \Pi\Pi^T P_i \Pi\Pi^T x = \zeta^T \Pi^T P_i \Pi \zeta$, alors :

$$\dot{V}_i(\Pi\Pi^T x) = \dot{x}^T \Pi\Pi^T P_i \Pi\Pi^T x + x^T \Pi\Pi^T P_i \Pi\Pi^T \dot{x}.$$

En remplaçant : $x = Z\xi + \Pi\zeta$ et en considérant les propriétés suivantes : $\Pi^T Z = Z^T \Pi = 0$, $A_i Z = 0$ et $\Pi^T A_i^T P_i Z = 0$, on aura alors :

$$\dot{V}_i(\Pi\Pi^T x) = \zeta^T \Pi^T A_i^T \Pi\Pi^T P_i \Pi\Pi^T \Pi \zeta + \zeta^T \Pi^T \Pi\Pi^T P_i \Pi\Pi^T A_i \Pi \zeta$$

en sachant que $\Pi\Pi^T \Pi = \Pi$ et $\Pi\Pi^T A_i = A_i$, on a alors :

$$\dot{V}_i(\Pi\Pi^T x) = \zeta^T \Pi^T A_0^T P_i \Pi \zeta + \zeta^T \Pi^T P_i A_0 \Pi \zeta$$

ce qui implique la première dans (3.9).

Donc, nous avons montré que les conditions requises par le théorème impliquent (3.5), (3.6), (3.8) et (3.9), en satisfaisant les hypothèses du Lemme 3.2, ce qui démontre le Théorème 3.1.

Discussion

Nous avons décrit les inégalités matricielles linéaires qui dépendent à la fois des matrices de Lyapunov P_i recherchées et les différents paramètres venant de l'utilisation de la S-procédure. Dans ce qui suit, nous discutons les résultats proposés et des différences avec les méthodes de base dans [69] et [54].

- En plus des inégalités linéaires matricielles (LMI) (3.13) et (3.14), le Théorème 3.1 comporte quelques égalités matricielles linéaires (LME), (3.12) et (3.12). Ces LME peuvent être résolues par une paramétrisation appropriée des matrices concernées.
- Un problème intéressant est de trouver le plus grand α tel que (3.18), (3.13) et (3.14) soient vérifiées. Ce problème peut être résolu grâce à une recherche par dichotomie par rapport à α .

Corollaire 3.1.

Prenons $\alpha = 0$ dans le Théorème 3.1. Si les hypothèses de ce théorème sont satisfaites alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} est asymptotiquement stable.

Comparaison avec les méthodes [69] et [54]

Le Théorème 3.1 est une extension de ces deux résultats de base ; il est moins conservatif car il dispose de conditions plus générales, et en même temps, il permet l'analyse de la convergence vers un ensemble de points d'équilibre autre que l'origine seule.

- Le Théorème 1 dans [69], présenté au Chapitre 2 page 50, est considéré comme un cas particulier du Théorème 3.1, pour $E_{eq} = \{0\}$, $\mathcal{T}_i = 0$ et $\alpha = 0$.
- La méthode développée dans [54], présentée au Chapitre 2 page 52, est aussi considérée comme un cas particulier du Théorème 3.1, pour $E_{eq} = \{0\}$, $U_i = 0$ and $\alpha = 0$.

Utilisation de la S-procédure

Dans le Chapitre 2, nous avons vu que le choix de la forme quadratique pour pouvoir appliquer la S-procédure n'est pas unique [69, 54, 60, 61] et qu'il dépend du problème traité. Assurer le bon fonctionnement de la méthode revient donc à trouver la bonne forme quadratique qui génère moins de conservatisme lors du passage vers les conditions LMI.

Dans notre travail de thèse, nous avons choisi de relâcher ce choix de formes quadratiques, en se basant sur les travaux de [69] et [54] et de laisser plus de liberté pour le problème d'optimisation. En effet, nous avons décidé de prendre, d'une part, la forme quadratique $\overline{E}_i^T \overline{U}_i \overline{E}_i$ définie dans [69], qui a plus d'influence sur le signe de l'inégalité matricielle linéaire quand \overline{U}_i n'est pas un scalaire et d'autre part, une forme quadratique, équivalente à celle utilisée dans les travaux de [54], qui devient une condition nécessaire et suffisante dans le cas de cellules décrites par une seule

inégalité où \overline{E}_i est juste un vecteur ligne, car la S-procédure est sans perte.

Par conséquent, les termes de la S-procédure dans le Théorème 3.1 sont composés des deux termes suivants :

$$\begin{cases} \overline{E}_i^T \overline{U}_i \overline{E}_i, \quad \overline{U}_i \in \mathbb{R}_+^{l_i \times l_i} \\ \Psi_i(\mathcal{T}_i), \quad \mathcal{T}_i \in \mathbb{R}_+^{l_i \times 1} \end{cases}$$

L'avantage de l'insertion de ces deux formes est d'apporter plus de degrés de liberté dans la résolution du programme d'optimisation.

Continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière

Vue l'importance de la continuité de la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux dans le cas de systèmes PWA, voir Chapitre 2 page 48, la façon selon laquelle elle est imposée est un facteur clé pour réduire le conservatisme du programme d'optimisation sous contraintes LMI. En effet, nous avons vu que l'application de la méthode citée dans [69] pour imposer la continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière n'est pas efficace et cause des problèmes de résolution numérique. Par conséquent, nous considérons comme relation de continuité dans le Théorème 3.1, la relation proposée par [68] et qui est équivalente à celle proposée dans les travaux de [54]. Cependant, la démonstration de cette relation de continuité n'a pas été abordée par ces deux travaux de base. Dans ce qui suit, nous proposons une démonstration de cette relation en se basant sur le lemme de Finsler [48, 128].

D'après (3.5), la condition de continuité de la fonction de Lyapunov sur la frontière entre la région X_j et X_i impose :

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \overline{P}_j \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \overline{P}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

Comme les matrices de Lyapunov \overline{P}_j et \overline{P}_i sont des variables de décision dans le programme d'optimisation sous contraintes LMI, alors une première façon pour pouvoir décrire cette condition de continuité, est d'exprimer tous les paramètres de la matrice \overline{P}_j en fonction de ceux de la matrice \overline{P}_i et les remplacer dans les différentes LMI. Cette façon de faire est pratique dans le cas de matrices de Lyapunov de petites dimensions où la paramétrisation manuelle est faisable. Cependant, cette méthode reste compliquée surtout dans le cas des matrices de grandes dimensions. Pour cette raison, nous proposons d'exprimer cette condition de continuité de manière plus simple et plus générale.

- (3.20) peut être formulée

$$\text{pour tout } \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid \overline{F}_{ij} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

on a

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T (\overline{P}_i - \overline{P}_j) \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

- (3.21) signifie que $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ appartient au noyau de l'application linéaire associée à \overline{F}_{ij} . Introduisons la matrice \overline{F}_{ij}^{orth} dont ses colonnes génèrent ce noyau. Donc, la condition définie par (3.21) et (3.22) est équivalente à la condition suivante :

$$(\overline{F}_{ij}^{orth})^T (\overline{P}_i - \overline{P}_j) \overline{F}_{ij}^{orth} = 0 \quad (3.23)$$

En appliquant le Lemme 6.1, voir Annexe 6.1 page 109, en prenant $\Omega = \bar{P}_i - \bar{P}_j$, $V = \bar{F}_{ij}$ et $K = L_{ij}$, la condition (3.23) est équivalente à l'existence d'une matrice T_{ij} telle que

$$\bar{P}_j = \bar{P}_i + \bar{F}_{ij}^T T_{ij}^T + T_{ij} \bar{F}_{ij}, \text{ for } (i, j) \in \Gamma_{ij}$$

ce qui conclut la preuve de la continuité de la fonction de Lyapunov.

Les matrices \bar{P}_i et T_{ij} seront considérées comme variables de décision dans le programme d'optimisation sous contraintes LMI.

2.2 Cellules dont l'intérieur contient l'origine

Dans le cas de système PWA où l'origine appartient à l'intérieur d'une cellule X_i , $i \in \mathcal{I}_0$, qui est appelée cellule centrale de dynamique $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le Théorème 3.1 se simplifie au corollaire ci-dessous.

Corollaire 3.2 ([3]).

Supposons que le système (2.3) satisfait l'Hypothèse 3.1. $\alpha \geq 0$ est un scalaire donné. S'il existe :

- $\bar{U}_i = \bar{U}_i^T, \bar{W}_i = \bar{W}_i^T \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ et $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{l_i \times n}$ ayant des coefficients non-négatifs ;
- $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ pour $i \in \mathcal{I}_1$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $i \in \mathcal{I}_0$ et $L_{ij} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r_{ij}}$, pour $i, j \mid (i, j) \in \Gamma_{ij}$;

tels que :

$$\bar{P}_j = \bar{P}_i + \bar{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \bar{F}_{ij}, \text{ pour } i, j \mid (i, j) \in \Gamma_{ij} \quad (3.24)$$

$$\Pi^T A_0^T P_0 Z = 0 \quad (3.25)$$

et les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} P_0 \succ 0 \\ \Pi^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) \Pi + 2\alpha \Pi^T P_0 \Pi \prec 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \bar{P}_i - \Psi_i(\mathcal{T}'_i) - \bar{E}_i^T \bar{W}_i \bar{E}_i \succ 0 \\ \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \Psi_i(\mathcal{T}_i) + \bar{E}_i^T \bar{U}_i \bar{E}_i + 2\alpha \bar{P}_i \prec 0 \\ \text{pour } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (3.27)$$

avec : $\Psi_i(\mathcal{T}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}_i^T \bar{E}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{E}_i^T \mathcal{T}_i \end{bmatrix}$, $\mathcal{T}_i \in \mathbb{R}_+^{l_i \times 1}$.

Alors, l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Grâce à la propriété expliquée au Chapitre 2 page 57, les conditions (3.12) et (3.13) dans le Théorème 3.1 se simplifient en les conditions (3.25) et (3.26) dans le Corollaire 3.2. Cette simplification vient du fait que sur une cellule dont l'intérieur contient l'origine, l'utilisation de la S-procédure devient inutile d'où l'absence de ces termes. Par conséquent, la deuxième égalité dans (3.12) n'est pas nécessaire dans ce cas aussi.

3 ANALYSE DE SYSTÈMES PWA INCERTAINS

3.1 Stabilité robuste vis-à-vis de variations paramétriques

La notion de robustesse actuellement occupe une place très importante dans la conception des systèmes. Un système est dit robuste s'il est possible de garantir son bon comportement dynamique malgré les dispersions de ses caractéristiques lors de sa fabrication, lors des variations de l'environnement ou encore lors de son vieillissement. L'étude de la stabilité robuste est un des sujet actuel qui intéresse une large communauté où l'intérêt majeur est d'assurer un comportement invariant global du système malgré de fortes incertitudes [132, 79, 28, 85, 53, 81].

L'objectif de cette partie est de présenter l'analyse de la robustesse en étudiant la stabilité en présence de variations des paramètres du système PWA. La démarche se base sur l'analyse qui a été faite auparavant, c'est-à-dire en prenant comme fonctions de Lyapunov candidates les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux pour démontrer la stabilité malgré ces variations paramétriques. Cependant, les conditions imposées dans le Théorème 3.1 ne sont pas suffisantes pour répondre à cet objectif et il fallait les adapter en prenant en compte ce type d'incertitudes.

Nous allons maintenant expliquer brièvement sur un système linéaire classique non stationnaire la notion de variations de paramètres et l'analyse de stabilité dans le cas standard [113].

3.2 Systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps

Nous considérons que le système dépend de paramètres incertains supposés temps variants. Le système linéaire avec dépendance affine des paramètres incertains temps-variants est défini par, avec A_k , k allant de 1 à q , matrices carrées :

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) A_k x(t) \quad (3.28)$$

avec $\lambda_k(t)$ les paramètres variant dans le temps et qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles telles que :

$$\begin{cases} \lambda_k(t) \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, q\} \\ \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) = 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Analyse de la stabilité

L'objectif est de démontrer la stabilité du système défini par (3.28) malgré les variations paramétriques. Dans la littérature, une condition suffisante de stabilité a été proposée qui consiste à rechercher une matrice $\underline{P} \succ 0$ telle que la condition suivante soit vérifiée.

$$\forall \lambda_k(t) \geq 0, \sum_k \lambda_k(t) = 1, \left(\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) A_k \right)^T \underline{P} + \underline{P} \left(\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) A_k \right) \prec 0 \quad (3.30)$$

Dans cette condition, nous supposons que la matrice \underline{P} n'est pas influencée par les variations paramétriques, ce qui revient à dire que cette matrice de Lyapunov est équivalente à une matrice de Lyapunov commune à toutes les dynamiques constituant le système linéaire non stationnaire.

La difficulté est que trouver $\underline{P} \succ 0$ telle que (3.30) soit satisfaite est un problème d'optimisation défini par un nombre infini de contraintes paramétrisées par λ_k . Néanmoins il est possible de le transformer en un problème d'optimisation de dimension finie par le lemme suivant.

Lemme 3.3.

$$\forall \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^q \lambda_k = 1, \Omega_0 + \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \Omega_k \succ 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, q\}, \Omega_0 + \Omega_k \succ 0$$

Revenons au problème de dimension infinie décrit par la condition (3.30). Ce problème en appliquant le Lemme 3.3 se transforme en la recherche de $\underline{P} \succ 0$ telle que :

$$\forall k \in \{1, \dots, q\}, A_k^T \underline{P} + \underline{P} A_k \prec 0 \quad (3.31)$$

ce qui est un problème d'optimisation de dimension finie.

3.3 Système affine par morceaux à paramètres variant dans le temps

En se basant sur (2.1) et (3.28), un système PWA variable dans le temps (système à paramètres incertains) peut être représenté comme suit.

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{q_i} \lambda_{ik}(t) (A_{ik} x(t) + a_{ik}) \quad \text{pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I}, \forall k \in \{1, \dots, q_i\} \quad (3.32)$$

Définition 3.1.

De manière équivalente, en prenant $\bar{x}(t)^T = [x(t)^T \ 1]$, on peut généraliser la représentation d'un système PWA incertain comme suit.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \underbrace{\begin{bmatrix} A_{i,k} & a_{i,k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}_{i,k}} \bar{x}(t), \text{ for } x(t) \in X_i, i \in \mathcal{I} \quad (3.33)$$

On suppose que l'Hypothèse 3.1 et l'Hypothèse 3.3 sont aussi valables pour le système PWA (3.32). La généralisation du Théorème 3.1 pour démontrer la stabilité exponentielle de systèmes PWA (3.32) à paramètres incertains repose sur le lemme 3.3 qui conduit au résultat suivant.

Théorème 3.2.

Supposons que le système (2.3) satisfait l'Hypothèse 3.1. Soit $\alpha \geq 0$ est un scalaire donné. S'il existe :

- $U_{ik} = U_{ik}^T, W_i = W_i^T, \bar{U}_{ik} = \bar{U}_{ik}^T, \bar{W}_i = \bar{W}_i^T \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ et $\mathcal{T}_{ik}, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{l_i \times 1}$ ayant des coefficients non-négatifs;
- $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ pour $i \in \mathcal{I}_1$, $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $i \in \mathcal{I}_0$ et $L_{ij} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r_{ij}}$, pour $i, j \mid (i, j) \in \Gamma$;

tels que :

$$\bar{P}_j = \bar{P}_i + \bar{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \bar{F}_{ij}, \text{ pour } i, j \mid (i, j) \in \Gamma \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} \Pi^T A_0^T P_i Z = 0 \\ E_i Z = 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0 \quad (3.35)$$

et les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} P_i - \Psi_i(\mathcal{T}'_i) - E_i^T W_i E_i \succ 0 \\ \Pi^T (A_{ik}^T P_i + P_i A_{ik} + \Psi_i(\mathcal{T}_{ik}) + E_i^T U_{ik} E_i) \Pi + 2\alpha \Pi^T P_i \Pi \prec 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \bar{P}_i - Q_i(\mathcal{T}'_i) - \bar{E}_i^T \bar{W}_i \bar{E}_i \succ 0 \\ \bar{A}_{ik}^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_{ik} + \Psi_i(\mathcal{T}_{ik}) + \bar{E}_i^T \bar{U}_{ik} \bar{E}_i + 2\alpha \bar{P}_i \prec 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_1, k = 1, \dots, q \quad (3.37)$$

Alors, l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance supérieur ou égal à α .

Démonstration. Le passage vers les inégalités matricielles linéaires (LMI) se fait via l'utilisation de la *S*-procédure, de la même façon que dans la Démonstration 2.1.

Pour le système (3.32), démontrer la stabilité revient à trouver \bar{P}_i telle que l'inégalité suivante soit vérifiée, adaptée du Théorème 3.1 :

$$\forall \lambda_{ik}(t) \geq 0, \sum_k \lambda_k(t) = 1, \left(\sum_{k=1}^{q_i} \lambda_k(t) \bar{A}_{ik} \right)^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \left(\sum_{k=1}^{q_i} \lambda_k(t) \bar{A}_{ik} \right) + \left(\sum_{k=1}^{q_i} \lambda_k(t) \Psi_i(\mathcal{T}_{ik}) \right) + \left(\sum_{k=1}^{q_i} \lambda_k(t) \bar{E}_i^T \bar{U}_{ik} \bar{E}_i \right) + 2\alpha \bar{P}_i \prec 0 \quad (3.38)$$

$$(3.38) \Leftrightarrow \forall \lambda_{ik}(t) \geq 0, \sum_k \lambda_k(t) = 1, \sum_{k=1}^{q_i} \lambda_k(t) \left(\bar{A}_{ik} \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_{ik} + \Psi_i(\mathcal{T}_{ik}) + \bar{E}_i^T \bar{U}_{ik} \bar{E}_i + 2\alpha \bar{P}_i \right) \prec 0 \quad (3.39)$$

Et d'après le Lemme 3.3, la condition (3.39) se transforme en la condition de stabilité suivante, c'est-à-dire trouver \bar{P}_i telle que.

$$\forall k \in \{1, \dots, q_i\}, \bar{A}_{ik}^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_{ik} + \Psi_i(\mathcal{T}_{ik}) + \bar{E}_i^T \bar{U}_{ik} \bar{E}_i + 2\alpha \bar{P}_i < 0 \quad (3.40)$$

qui correspondent à la deuxième inégalité matricielle linéaire dans (3.37). Le même raisonnement peut être suivi pour démontrer la deuxième inégalité matricielle linéaire dans (3.36).

La démonstration de la première inégalité dans (3.36) et de la première inégalité dans (3.37) est la même que dans la Démonstration 2.1.

4 APPLICATION AU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE

Cette partie a pour double objectif, de tester l'efficacité des approches proposées précédemment en démontrant la stabilité du système électropneumatique présentant un ensemble de points d'équilibre, voir Chapitre 2 page 63, et d'assurer la stabilité de ce dernier malgré des variations paramétriques en faisant varier la partie incertaine du modèle électropneumatique qui correspond au frottements.

Cette partie est subdivisée en plusieurs sous parties.

Nous présentons tout d'abord l'étude de la stabilité du système électropneumatique en prenant comme modèle de frottements une saturation et uniquement deux contraintes de commutation sur la commande. Le Théorème 3.1 sera donc appliqué dans ce cas pour étudier la stabilité asymptotique et la stabilité exponentielle en présentant quelques figures et résultats numériques.

Dans la deuxième sous-partie, nous étudions la stabilité robuste en faisant varier les seuils de frottements. Dans ce cas-là, le Théorème 3.2 sera aussi appliqué et dans le cas de l'étude de la stabilité asymptotique et le cas de la stabilité exponentielle en analysant les résultats numériques.

Dans la dernière sous-partie, nous augmentons un peu plus la complexité en ajoutant le troisième critère de commutation sur la commande, qui concerne une variable désirée. Nous verrons donc une étude de performance en prenant en compte les trajectoires désirées. Les Théorème 3.1 et Théorème 3.2 seront aussi appliqués afin d'étudier le suivi de trajectoires désirées et le suivi robuste en montrant la complexité par rapport à la configuration plane de cellules de commutation. Pour terminer, les résultats d'application seront présentés pour valider les performances des approches proposées.

4.1 Analyse de la stabilité

Cas du système avec deux contraintes de commutation sur la commande

Cette première sous-partie consiste à analyser la stabilité pour le deuxième modèle commuté du vérin, ayant une cellule centrale sans gain sur la position, où les deux méthodes de [69] et [54] ne s'appliquent pas, voir Chapitre 2 page 63. La convergence de ce système commuté, présenté sous forme d'un système PWA, est vers un ensemble de points d'équilibre (2.77). Les caractéristiques de toutes les cellules sont présentées au Chapitre 2, Annexe 6.2, page 71.

Résultats numériques

Nous allons exposer les résultats numériques de l'application du Théorème 3.1 sur ce système PWA en répondant aux différents objectifs spécifiés dans les parties suivantes.

Stabilité asymptotique

Le Théorème 3.1 a été appliqué pour $\alpha = 0$ afin de démontrer la stabilité asymptotique pour le système PWA précédent, en procédant à la programmation numérique sur Matlab via l'utilisation des bibliothèques YALMIP et SeDuMi [82, 84, 52, 57, 77, 121].

Ce programme nous a permis de trouver numériquement toutes les variables de décision apparues dans ce théorème, notamment les matrices de Lyapunov P_i et les termes issus de l'application de la S-procédure.

Afin de vérifier les différentes contraintes sur la fonction de Lyapunov, nous avons tracé ses courbes de niveau et son intersection avec le plan (v, e_y) , voir Figure 3.1 et Figure 3.2.

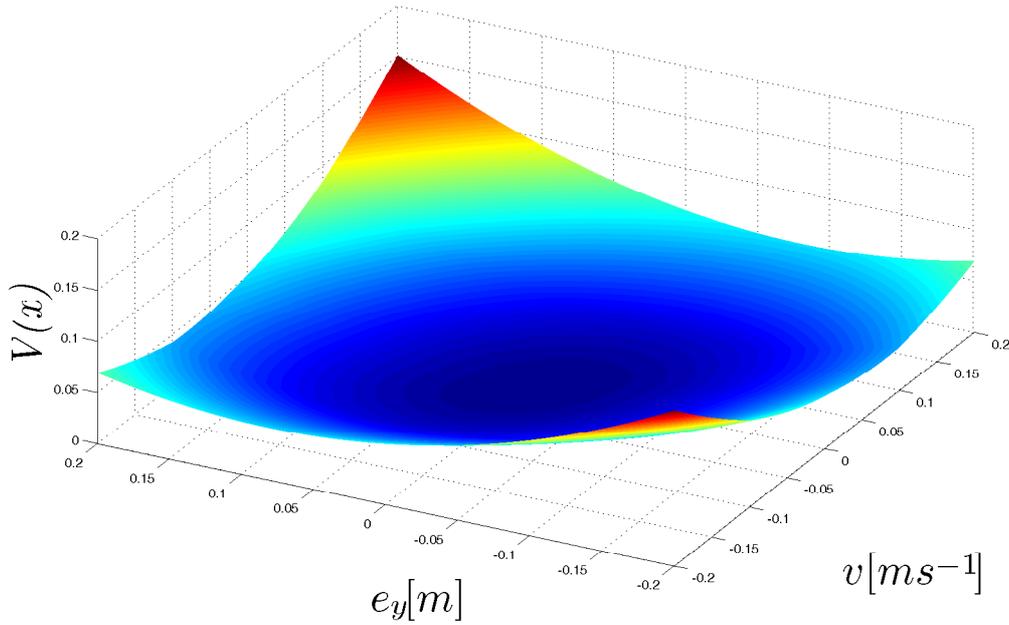


FIGURE 3.1 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de la stabilité asymptotique

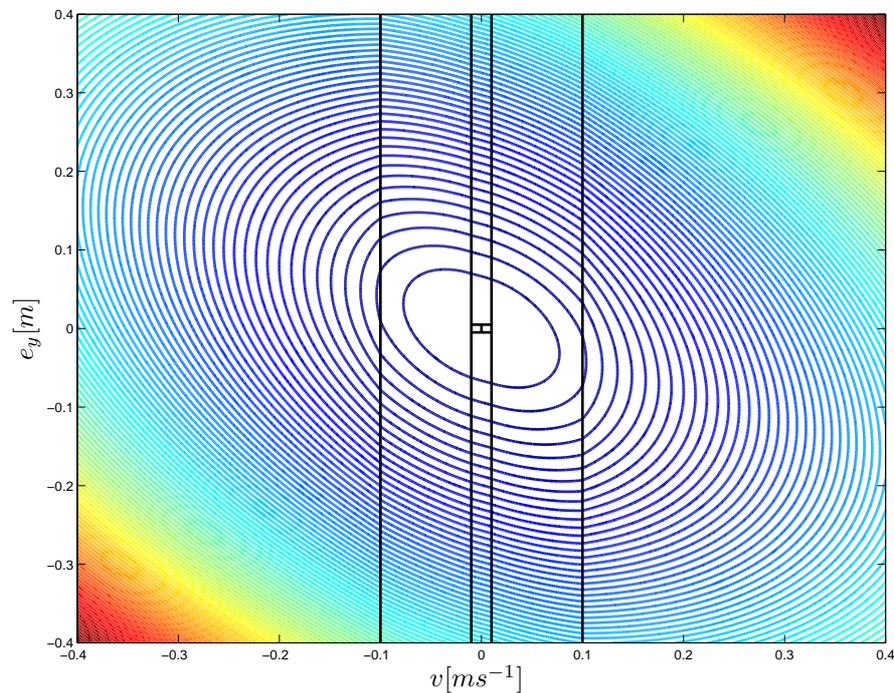


FIGURE 3.2 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de stabilité asymptotique

Discussion 3.

D'après les Figures 3.1 et 3.2 :

- Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov trouvée décroissent vers l'ensemble des points d'équilibre. Les contraintes de décroissance de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre imposées dans le Théorème 3.1 sont donc vérifiées.
- Ces courbes de niveau sont continues sur deux cellules adjacentes, ce qui vérifie la contrainte de continuité imposée dans le Théorème 3.1.

Les conditions imposées par le Théorème 3.1 sont vérifiées, l'ensemble des points d'équilibre est donc asymptotiquement stable.

Stabilité exponentielle et taux de décroissance

Le Théorème 3.1 a été aussi appliqué pour $\alpha \neq 0$, afin d'une part de démontrer la stabilité exponentielle pour le système PWA précédent et d'autre part, de déterminer une borne inférieure α sur le taux de décroissance des trajectoires d'état.

La borne inférieure α sur le taux de décroissance, définie par le Théorème (3.1), calculée par exécution de l'algorithme d'optimisation sur Matlab est donnée comme suit :

$$\alpha = 0.4747. \quad (3.41)$$

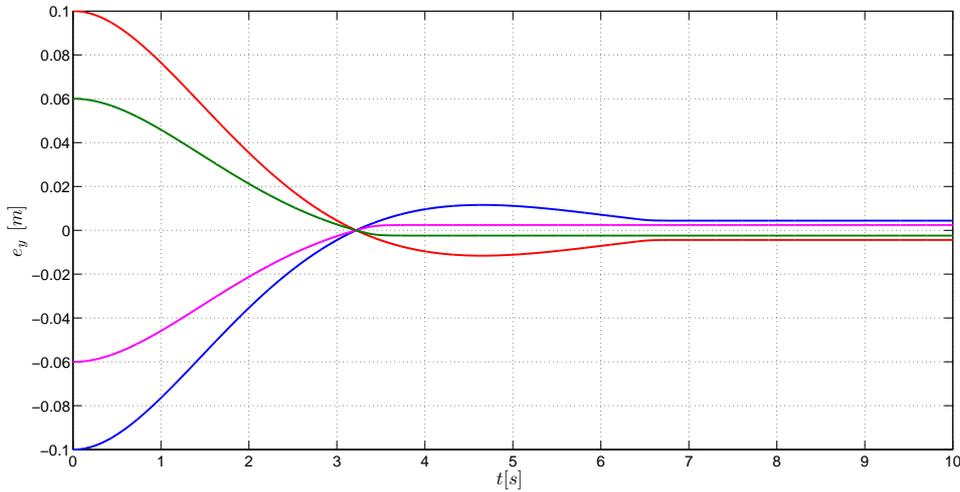


FIGURE 3.3 – Evolution de l'erreur en position pour différentes conditions initiales

La Figure 3.3 montre l'évolution de l'erreur de position pour différentes conditions initiales. Considérons la valeur α trouvée, nous pouvons estimer que l'erreur est réduit à 5% de la valeur initiale après $t_{5\%} = \frac{\ln(0.05)}{-\alpha} \approx 6.31$ s. En effet, nous pouvons remarquer que pour tous les cas le système atteint le régime statique dans environ 6.2s.

De la même façon, nous avons tracé les courbes de niveau et l'intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , voir Figure 3.4 et Figure 3.5, afin de vérifier les différentes contraintes imposées.

Discussion 4.

D'après les Figures 3.4 et 3.5 :

- Nous vérifions bien la décroissance de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre sur chaque cellule.
- La continuité sur les frontières (représentées par des droites) entre chaque deux cellules est aussi assurée.
- Nous pouvons remarquer les déformations des courbes de niveau de la fonction de Lyapunov, c'est-à-dire la matrice qui définit la fonction de Lyapunov change d'une cellule à l'autre. Cette déformation suggère qu'on peut ne pas avoir une fonction de Lyapunov quadratique commune pour toutes les cellules.

La fonction de Lyapunov calculée vérifie donc bien les conditions imposées par le Théorème 3.1.

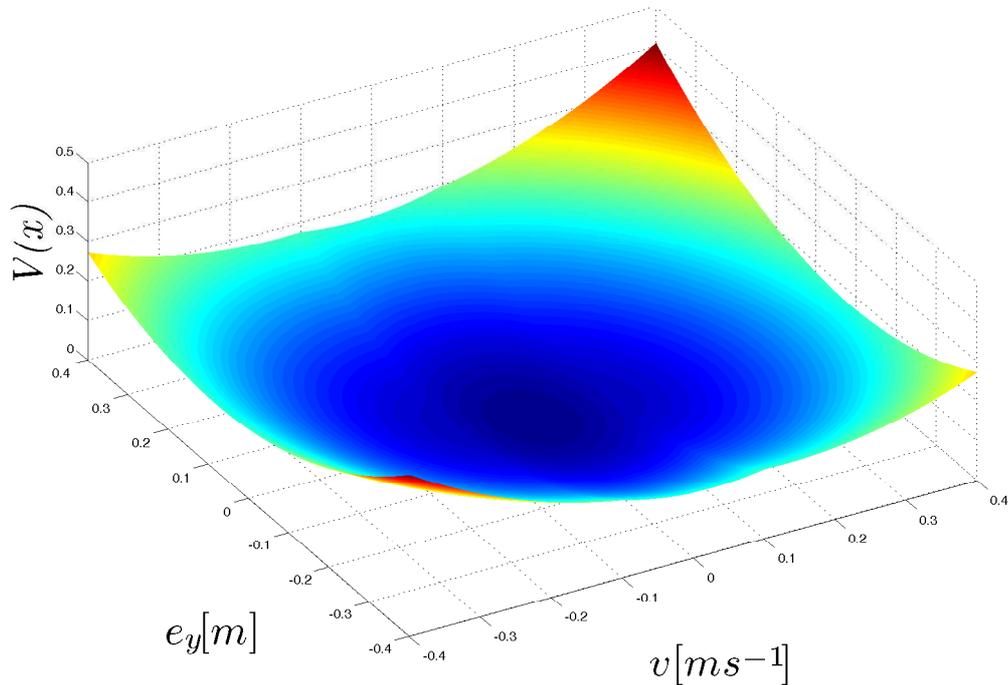


FIGURE 3.4 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de la stabilité exponentielle

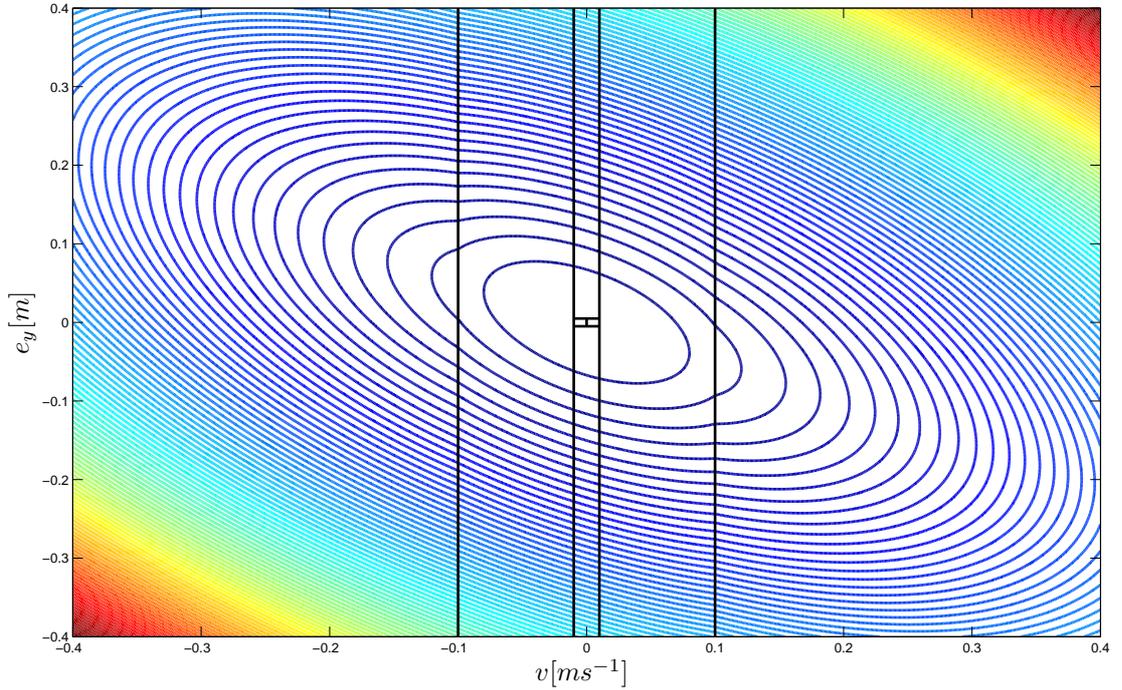


FIGURE 3.5 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de la stabilité exponentielle

Étude de robustesse vis-à-vis de la variation des frottements

En réalité, les frottements sont généralement en fonction de la vitesse et peuvent être différents d'un système physique à un autre. Dans la littérature, de nombreux auteurs ont proposé différents modèles physiques et mathématiques dans le but d'analyser et de représenter ce phénomène complexe [131, 36, 73, 8, 27, 26, 58]. La présence de ces phénomènes est la source de plusieurs dégradations de performance, notamment les erreurs statiques, les erreurs de suivi de trajectoire et peut aussi retarder la mise en mouvement du système. Par conséquent, nous aurons besoin de pouvoir reproduire ces frottements en simulation dans le but d'obtenir une représentation correspondant au mieux à son procédé expérimental afin de minimiser au maximum ces dégradations.

Certain auteurs estiment que les modèles de frottement sont symétriques : c'est le cas de modèle sous forme de saturation ou de relais, mais ceci n'est pas le cas sur les procédés réels, plus particulièrement sur le vérin électropneumatique. Par ailleurs, les paramètres de frottements dans un procédé réel peuvent évoluer avec le temps et changer le comportement du système.

Concernant l'étude de la stabilité du système électropneumatique et pour faire face à toutes les contraintes que nous venons de citer, nous avons modifié le modèle de frottements choisi en insérant une plage de variation sur les seuils de frottements de telle sorte que le phénomène de frottements réel appartienne à cette plage de variation, c'est-à-dire que le modèle de frottement considéré dans la prochaine étude de la stabilité est un modèle incertain et qui représente un ensemble de modèles y compris les frottements réels sur le procédé, comme nous pouvons le voir sur la Figure 3.6. Au delà de la plage de variation, il est ainsi possible de considérer toute non linéarité dont la courbe caractéristique est comprise dans la zone délimitée en vert.

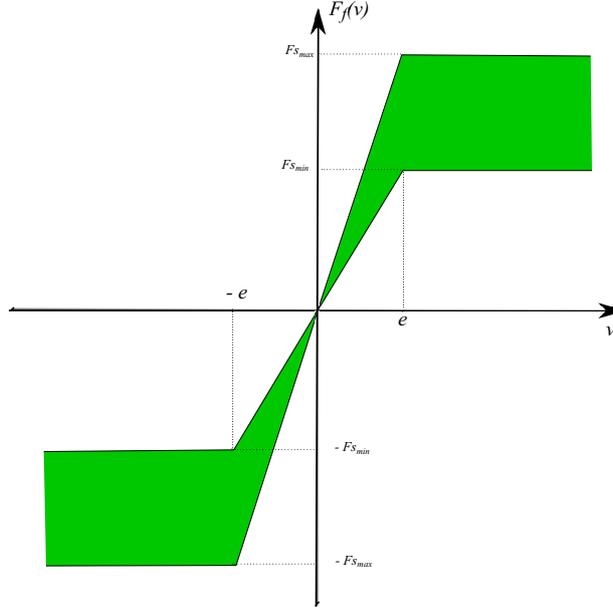


FIGURE 3.6 – Ensemble des non linéarités considérées pour représenter le phénomène de frottements

Dans notre cas d'étude, nous avons considéré une variation entre $F_{s_{min}} = 20 N$ et $F_{s_{max}} = 40 N$, sachant que le seuil nominal sur le procédé réel est environ $38 N$. Cette plage de variation peut être provoquée par des variations de température. Dans ce cas, le modèle de frottements est incertain avec $q = 2$ et peut être présenté comme suit :

$$\begin{cases} F_s(\lambda) = \lambda_1 F_{s_{max}} + \lambda_2 F_{s_{min}} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

Avec ce modèle de frottements, le modèle de vérin électropneumatique est PWA avec des paramètres incertains.

Le théorème 3.2 s'interprète de la façon suivante : la stabilité sera assurée pour toute valeur du frottement dans l'intervalle $F_{s_{min}}, F_{s_{max}}$ si on établit la stabilité pour les deux valeurs extrêmes $F_{s_{min}}, F_{s_{max}}$ en utilisant la même fonction de Lyapunov quadratique par morceaux.

D'après le Théorème 3.2 et grâce aux propriétés de l'optimisation convexe sous contraintes LMI, qui assure la stabilité en étudiant uniquement la stabilité pour les cas extrêmes, la stabilité sera étudiée pour les valeurs de $F_s = 40 N$ et $F_s = 20 N$ et qui sera valable pour toute valeur de frottements entre ces deux bornes.

Le Théorème 3.2 a été aussi appliqué en deux temps : premièrement, pour $\alpha = 0$ afin de démontrer la stabilité asymptotique malgré la variation de frottements et deuxièmement, pour $\alpha \neq 0$ afin de démontrer la stabilité exponentielle et d'essayer de préserver ou d'améliorer la borne inférieure α sur le taux de décroissance trouvée précédemment. Nous procédons toujours à la programmation numérique sur Matlab via l'utilisation des bibliothèques YALMIP et SeDuMi.

1) Robustesse sans contrainte de taux de décroissance

Le Théorème 3.2 a été appliqué avec succès afin de préserver la stabilité asymptotique malgré la variation de frottements. Les résultats de programmation sont montrés sur les Figures 3.7 et 3.8.

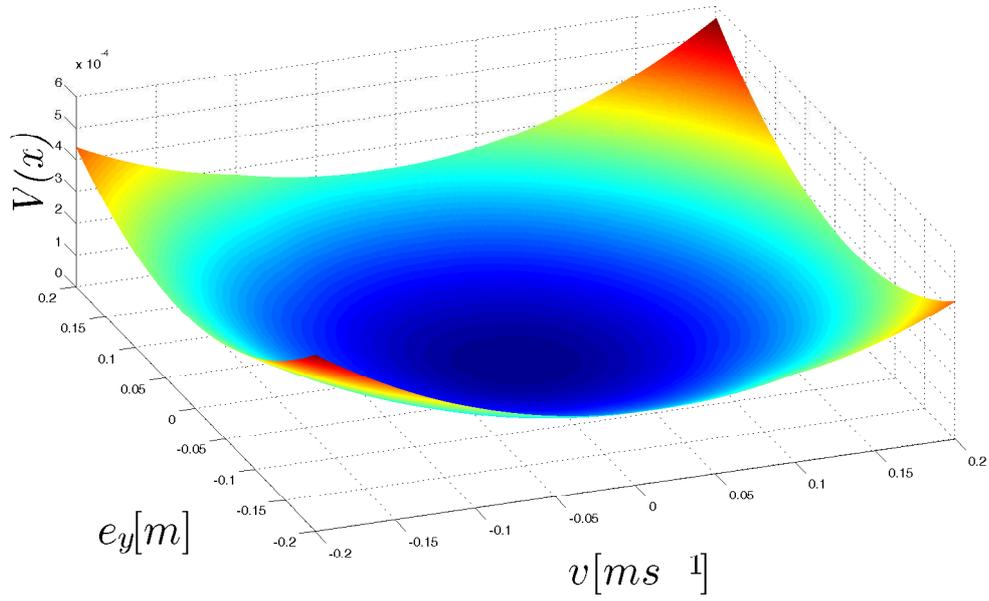


FIGURE 3.7 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , robustesse sans contrainte de taux de décroissance

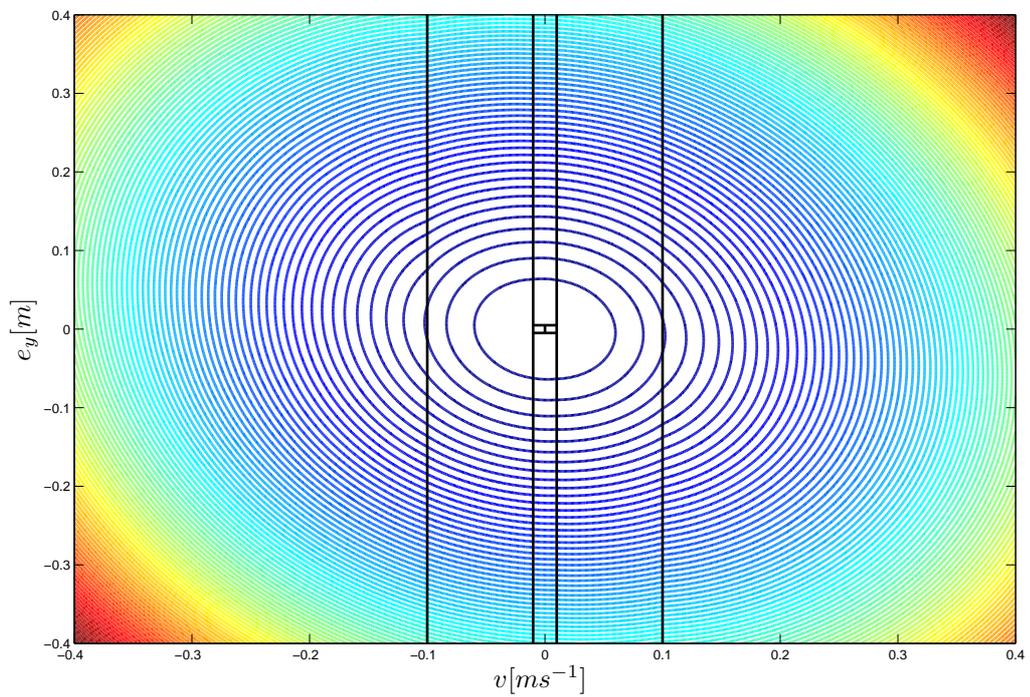


FIGURE 3.8 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , robustesse sans contrainte de taux de décroissance

Discussion 5.

Les Figures 3.7 et 3.8 nous montrent que les conditions imposées par le Théorème 3.2 sont bien vérifiées malgré la variation des caractéristiques du modèle de frottements, c'est-à-dire :

- la décroissance de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre est vérifiée ;
- la continuité sur les frontières est assurée.

Nous remarquons aussi la déformation des courbes de niveau entre les cellules, c'est-à-dire que probablement on ne peut pas avoir une fonction de Lyapunov commune qui préserve cette stabilité asymptotique vis-à-vis des variations de frottements.

2) Robustesse avec contrainte de taux de décroissance garanti

En plus de l'étude de robustesse vis-à-vis de variation de frottements, nous avons aussi réussi à calculer une borne inférieure sur le taux de décroissance malgré cette variation. Les Figures 3.9 et 3.10 nous montrent les résultats d'application du Théorème 3.2 pour $\alpha \neq 0$.

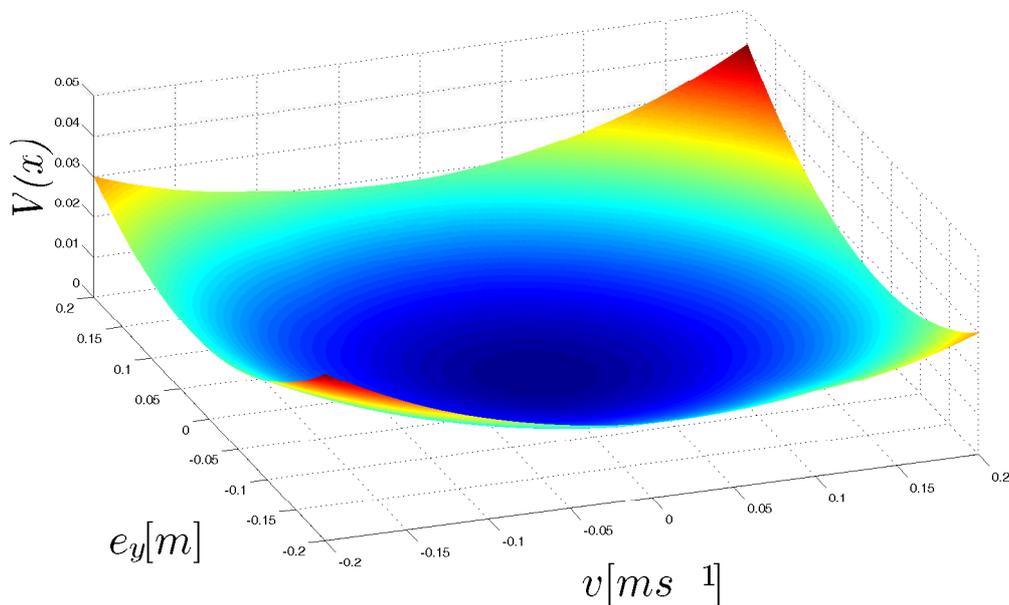


FIGURE 3.9 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , robustesse avec contrainte de taux de décroissance

La borne inférieure sur le taux de décroissance trouvée est :

$$\alpha = 0.3625.$$

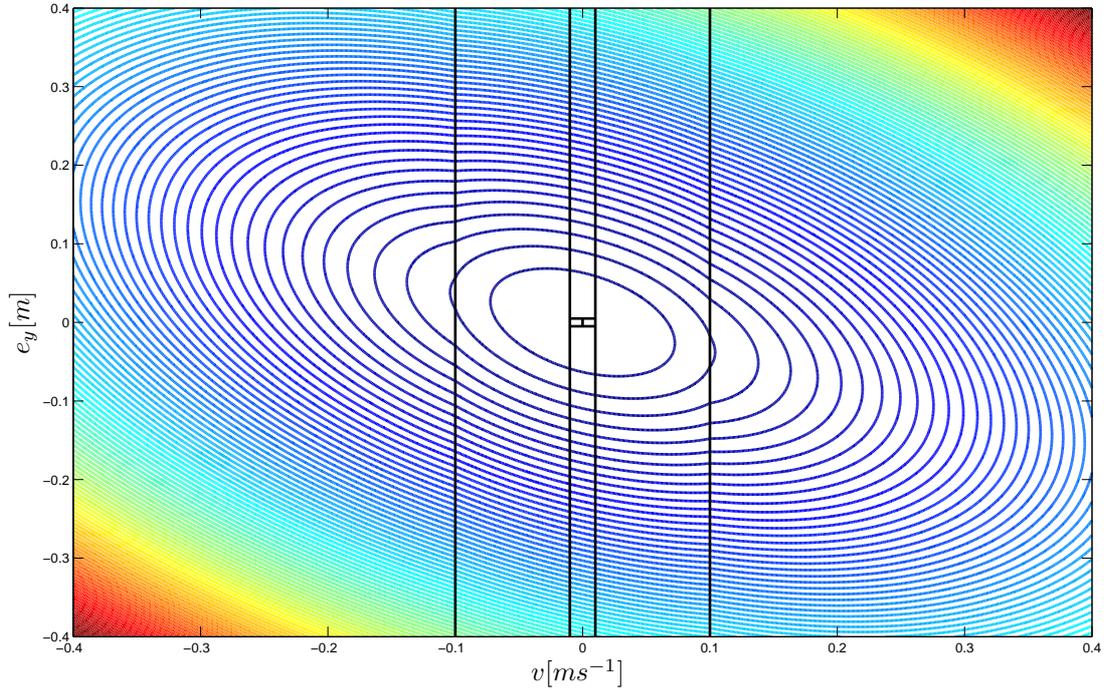


FIGURE 3.10 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , robustesse avec contrainte de taux de décroissance

Discussion 6.

La stabilité exponentielle a été démontrée malgré la variation des caractéristiques du modèle de frottements, avec une diminution de la valeur de la borne inférieure sur le taux de décroissance trouvée par rapport au cas sans variation de frottements. Cette dégradation de la borne inférieure sur le taux de décroissance est tout à fait logique car on garantit cette borne inférieure sur le taux de décroissance pour un ensemble de valeurs de F_s plutôt que pour une seule valeur.

4.2 Suivi de trajectoires désirées

Dans cette dernière partie, nous étudions le suivi de trajectoires désirées, c'est-à-dire assurer que l'erreur entre la trajectoire d'état et la trajectoire désirée tend vers zéro. En d'autres termes, cela revient à ajouter un troisième critère de commutation, sur la variable désirée (voir Chapitre 1). Cette trajectoire désirée est la sortie d'un modèle dynamique linéaire et elle sera considérée comme une variable d'état du système. Les cellules du système PWA seront modifiées en considérant un troisième critère de commutation sur la trajectoire désirée.

Nous commençons donc par réécrire les modèles d'état avec les nouvelles variables d'état insérées, subdiviser de nouveau l'espace d'état et redéfinir les cellules.

Les critères de commutation choisis entre les deux lois de commande dans ce cas reposent sur les trois contraintes de commutation : l'erreur en position, l'évolution de la vitesse et la vitesse désirée. Si toutes les conditions décrites dans ce qui suit sont satisfaites alors le système est commandé en régulation de pressions. Sinon, si au moins une des conditions n'est pas satisfaite, le système est commandé en suivi de trajectoire en position et en pression. Ces critères sont rappelés comme suit.

$$\#1 \rightarrow \#2 : |e_y| \leq \varepsilon_1 \wedge |e_v| \leq \varepsilon_2 \wedge |v_d| \leq \varepsilon_3$$

$$\#2 \rightarrow \#1 : |e_y| > \varepsilon_1 \vee |e_v| > \varepsilon_2 \vee |v_d| > \varepsilon_3$$

avec : #1 est la phase d'asservissement de position et #2 est la phase de régulation de pressions.

Prise en compte des trajectoires désirées

Dans cette partie, l'étude de performance ou le suivi des trajectoires désirées est traité en prenant en compte les variables désirées dans le modèle et dans les contraintes de commutation. La trajectoire désirée est la sortie d'un modèle exogène présentant une dynamique linéaire, et qui est donné ci-dessous.

Modèle exogène

Afin d'appliquer la méthode d'analyse de la stabilité présentée auparavant, on considère un modèle exogène linéaire d'ordre 2 présenté comme suit.

$$\begin{cases} \dot{\varsigma} = -\alpha_d \varsigma \\ \dot{v}_d = -\epsilon_d v_d + \varsigma \end{cases} \quad (3.43)$$

Avec α_d et ϵ_d des constantes choisies a priori dans le cahier des charges.

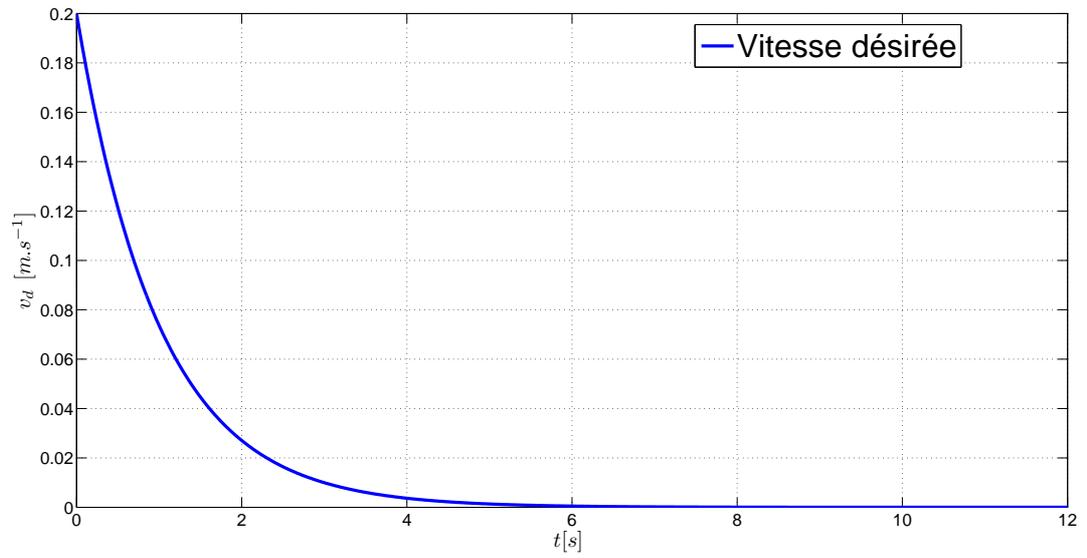
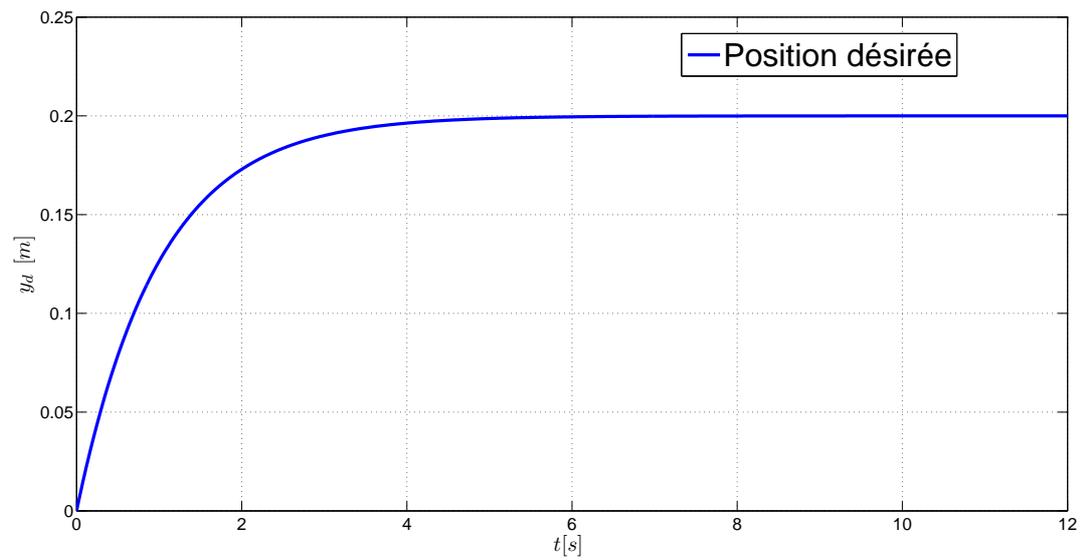
Afin d'assurer un bon positionnement de la masse sur une position donnée, le modèle exogène est choisi de façon à garantir une trajectoire désirée comportant des phases statiques où la vitesse désirée est faible, comme le cas des trajectoires de vitesse et de position désirées présentées dans les figures (3.11) et (3.12).

Pour l'analyse de stabilité, les variables désirées du modèle exogène ci-dessus sont considérées comme des variables d'état dans le système PWA précédent. Les modèles dans les deux phases asservissement de position et régulation des pressions sont rappelés comme suit.

Asservissement de position :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M} F_f(v) + a_d \\ \dot{e}_{af} = -k_a e_{af} - k_v v - k_y e_y + \frac{k_a}{M} F_f(v) + k_v v_d \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \end{cases}$$

Régulation des pressions :

FIGURE 3.11 – *Vitesse désirée*FIGURE 3.12 – *Position désirée*

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M}F_f(v) + a_d \\ \dot{e}_{af} = \frac{S_P}{M}(k_N - k_P)e_P - (k_N + \frac{b_v}{M})e_{af} - \frac{b_v}{M}k_N v - (k_N + \frac{b_v}{M})a_d - \dot{j}_d + \frac{b_v}{M^2}F_f(v) \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \dot{v}_d = a_d \\ \dot{a}_d = j_d \\ e_{af} = e_a + \frac{1}{M}F_f(v) \end{cases}$$

En insérant les variables désirées du modèle exogène dans les deux modèles ci-dessus, les deux modèles augmentés dans les deux phases, asservissement de position et régulation des pressions, sont représentés donc comme suit.

Asservissement de position :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M}F_f(v) - \epsilon_{d1}v_d + \varsigma \\ \dot{e}_{af} = -k_a e_{af} - k_v v - k_y e_y + \frac{k_a}{M}F_f(v) + k_v v_d \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \\ \dot{\varsigma} = -\alpha_{d1} \varsigma \\ \dot{v}_d = -\epsilon_{d1} v_d + \varsigma \end{cases}$$

avec $a_d = -\epsilon_{d1}v + \varsigma$.

Régulation des pressions :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = v - v_d \\ \dot{v} = e_{af} - \frac{1}{M}F_f(v) - \epsilon_{d2}v_d + \varsigma \\ \dot{e}_{af} = \frac{S_P}{M}(k_N - k_P)e_P - (k_N + \frac{b_v}{M})e_{af} - \frac{b_v}{M}k_N v + \epsilon_{d2}(k_N + \frac{b_v}{M} - \epsilon_{d2})v_d + (\epsilon_{d2} + \alpha_{d2} - k_N - \frac{b_v}{M})\varsigma \\ \dot{e}_P = -k_P e_P \\ \dot{\varsigma} = -\alpha_{d2} \varsigma \\ \dot{v}_d = -\epsilon_{d2}v_d + \varsigma \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_d = -\epsilon_{d2}v_d + \varsigma \\ j_d = \epsilon_{d2}^2 v_d - (\epsilon_{d2} + \alpha_{d2})\varsigma \end{cases}$$

Simulation Les résultats de simulation, en considérant les trajectoires désirées dans les Figures 3.11 et 3.12, sont présentés dans la Figure 3.13.

La figure montre un bon suivi et une très faible erreur entre la position et la position désirée.

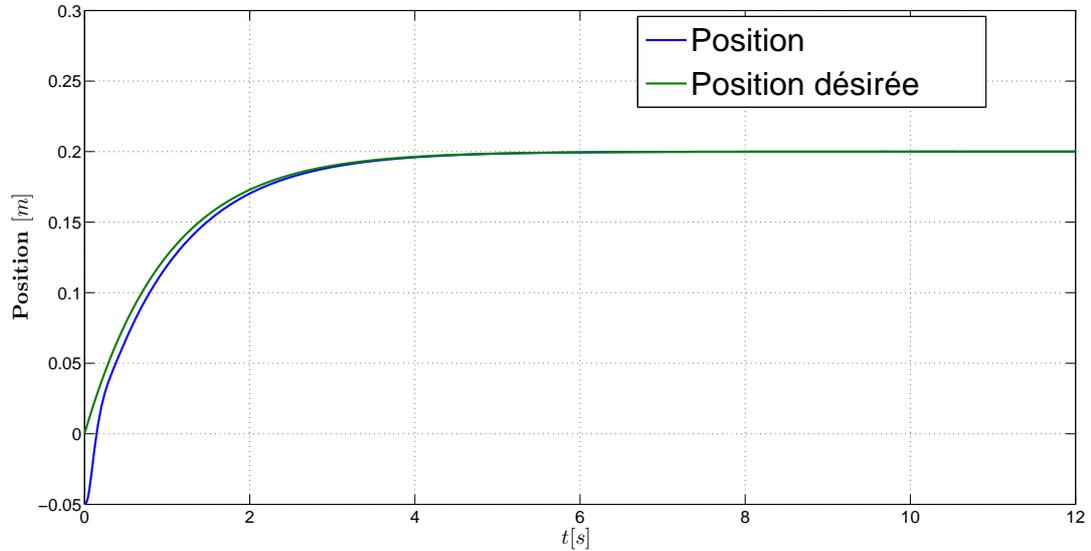


FIGURE 3.13 – Évolution de position par rapport à la position désirée

Analyse de stabilité

Afin d'étudier la stabilité, nous procédons de la même façon que dans le cas du modèle sans variable désirée. Nous sommes quasiment face au même système PWA dont les caractéristiques de chaque cellule sont prédéfinies précédemment. La différence dans ce cas là est que d'une part, la dimension des différents éléments dans chaque cellule est augmentée suite à l'ajout de deux variables exogènes qui génèrent la trajectoire désirée et d'autre part, l'apparition d'autres cellules extérieures dépendant de la troisième contrainte de commutation rajoutée.

Selon les critères de commutation entre les lois de commande et ceux causés par les frottements choisis, les cellules peuvent être présentées comme suit, voir Figure 3.14.

Remarque 3.2.

Dans ce cas aussi, les cellules sont symétriques deux à deux par rapport à l'origine. Alors, d'après la propriété de symétrie dans le Chapitre 2 page 54, lorsque les conditions sur la fonction de Lyapunov sont vérifiées pour une cellule, elles sont satisfaites pour la cellule symétrique. On ne considère donc dans le programme d'analyse de la stabilité que les cellules : X_0 , X_1 , X_2 , X_3 et X_4 .

Caractéristiques de chaque cellule X_i :

De la même façon, nous devons décrire à nouveau les caractéristiques de chaque cellule X_i , c'est-à-dire identifier les matrices d'état \bar{A}_i , les matrices \bar{E}_i liées aux contraintes de commutation sur la cellule et les matrices \bar{F}_{ij} caractérisant les frontières entre chaque deux cellules. Toutes les caractéristiques sont exprimées dans l'Annexe 6.2 page 109.

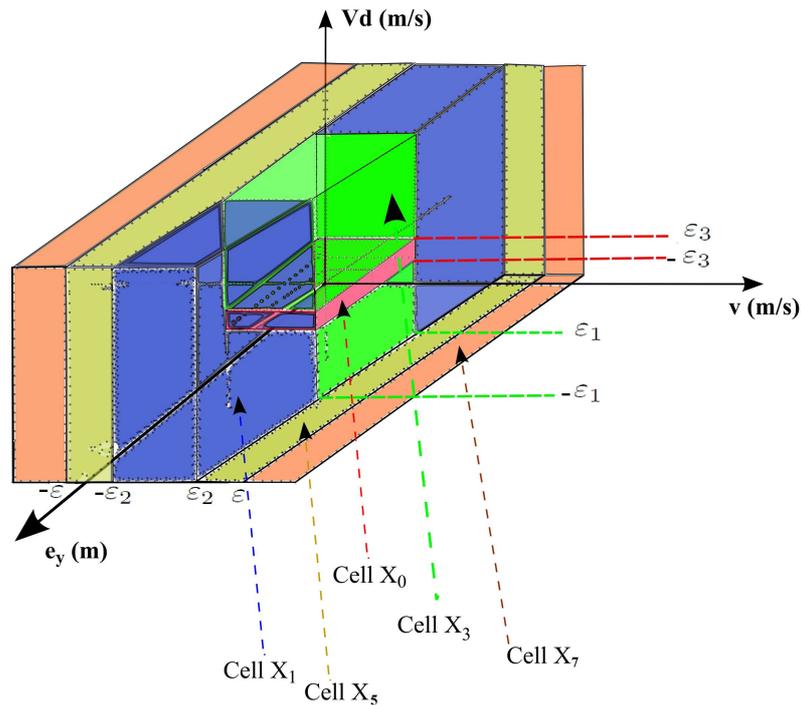


FIGURE 3.14 – Les cellules X_i dans le cas de suivi des trajectoires désirées.

Résultats numériques

Dans ce cas aussi, nous allons exposer les résultats numériques de l'application des Théorèmes 3.1 et 3.2 sur ce système PWA en répondant aux différents objectifs spécifiés¹, notamment pour l'étude de la stabilité asymptotique et le suivi robuste de trajectoires de référence.

Suivi de trajectoire

Le Théorème (3.1) a été appliqué pour $\alpha = 0$ afin de démontrer la stabilité asymptotique de suivi de trajectoire pour le système affine par morceaux précédent, en procédant toujours à la programmation numérique sur Matlab via l'utilisation des bibliothèques YALMIP et SeDuMi.

Nous avons aussi tracé l'intersection et les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov trouvée sur le plan (v, e_y) , voir Figure 3.15 et 3.16 et sur l'espace (e_y, v, v_d) , voir Figure 3.17.

1. L'étude de taux de décroissance ne sera pas abordée dans ce cas-là à cause de la présence de variables désirées et donc ça n'a aucun sens de le calculer

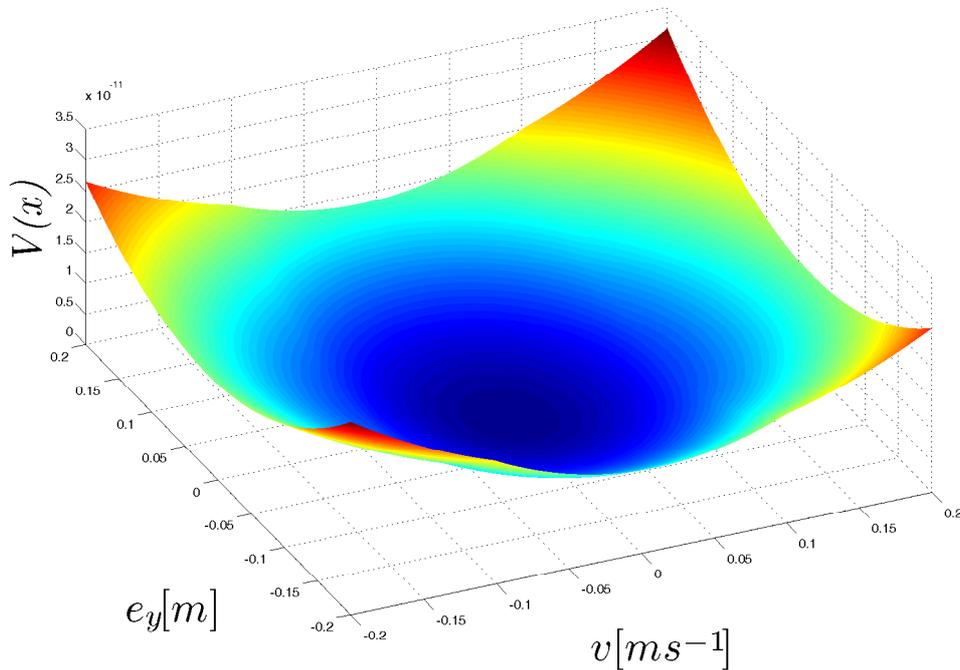


FIGURE 3.15 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation

Discussion 7.

D'après les Figures 3.15 et 3.16 :

- La décroissance asymptotique de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre est vérifiée.
- La continuité sur les frontières est assurée.
- La déformation des courbes de niveau est assez remarquable et dans ce cas-là aussi une fonction de Lyapunov commune peut ne pas être suffisante.

Donc, les conditions imposées par le Théorème 3.1 pour $\alpha = 0$ sont bien vérifiées, ce qui démontre la stabilité de ce suivi de trajectoires désirées.

Robustesse : variation de frottements

Comme nous l'avons expliqué précédemment dans la page 94, la robustesse vis-à-vis de variations de frottements a été testée dans cette partie en faisant varier le seuil entre $F_{s_{max}} = 40 N$ et $F_{s_{min}} = 20 N$. Le Théorème 3.2 a été appliqué avec succès en étudiant la stabilité pour ces deux

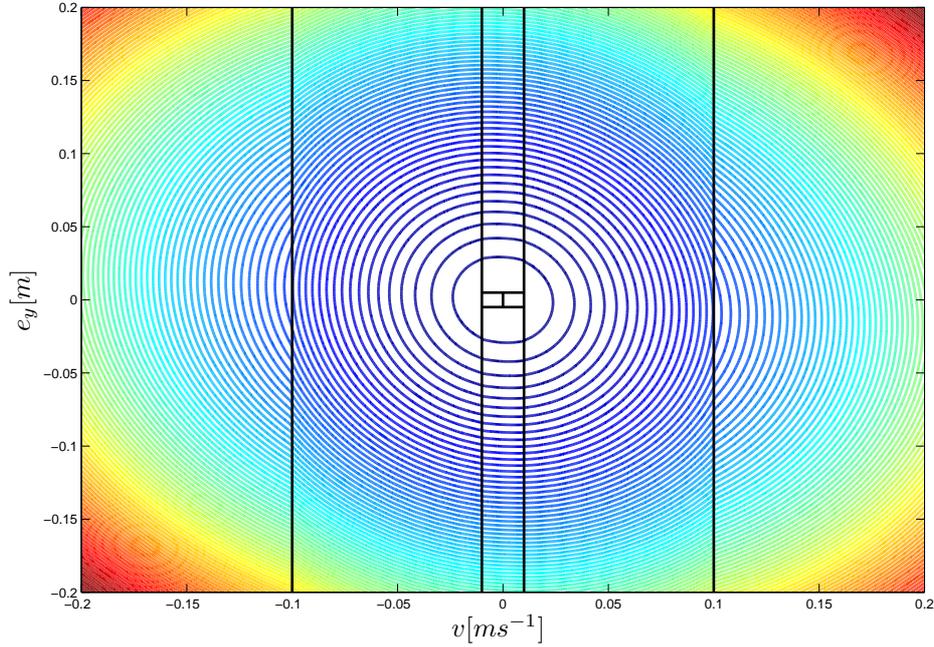


FIGURE 3.16 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation

valeurs extrêmes. L'intersection et les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov trouvée sont représentées sur les Figures 3.18 et 3.19 et sur l'espace (e_y, v, v_d) , voir Figure 3.20.

Discussion 8.

Malgré les variations des caractéristiques du modèle de frottements, le résultat est très satisfaisant, voir Figure 3.18 et 3.19, c'est-à-dire nous avons réussi à préserver les conditions imposées par le Théorème 3.2 pour $\alpha = 0$. La stabilité de suivi de trajectoire est alors garantie et la robustesse est vérifiée vis-à-vis des variations de frottements.

5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé de nouvelles stratégies pour analyser la stabilité et la robustesse des systèmes PWA.

Deux approches ont été proposées. Dans un premier temps, nous avons montré que le problème d'analyse de la stabilité d'un système PWA peut être traité en utilisant les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux. Bien qu'elle soit très bien adoptée par une large communauté dans la littérature, cette approche ne permettait pas l'étude de convergence vers un ensemble de points d'équilibre et démontre uniquement celle vers un point d'équilibre. Alors, nous avons via des conditions suffisantes en termes d'inégalités matricielles linéaires démontré que de telles fonctions permet d'assurer cet objectif.

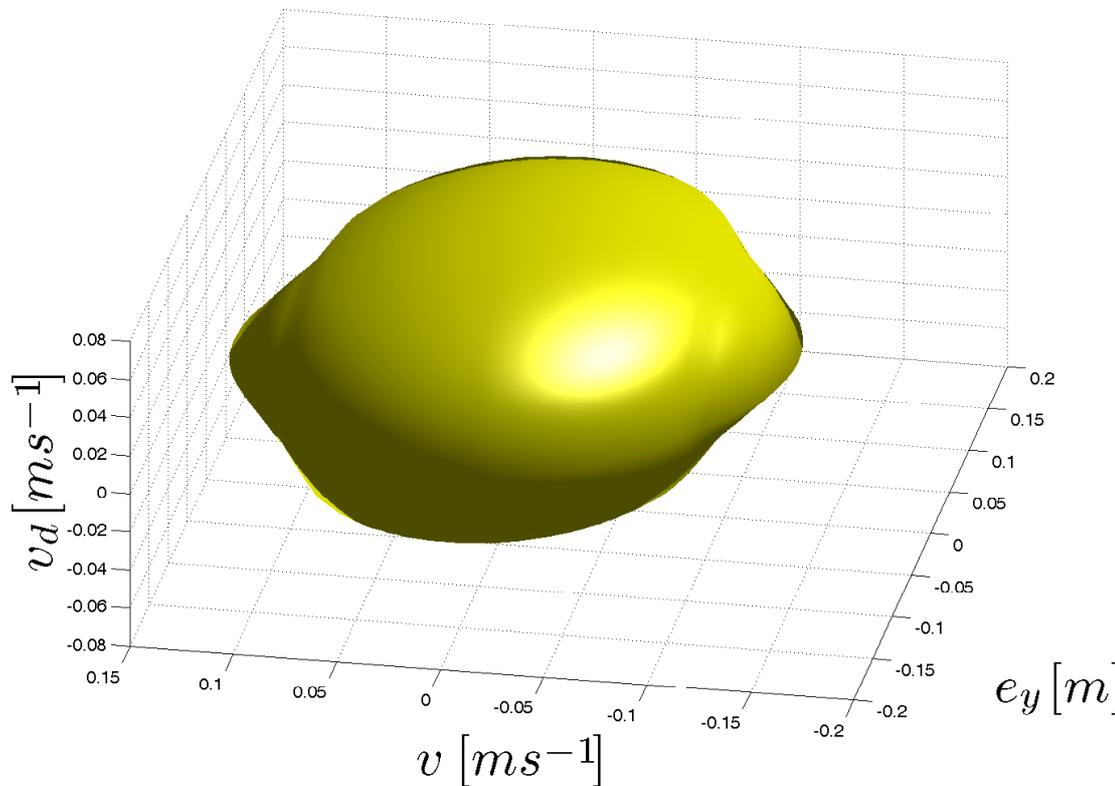


FIGURE 3.17 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (e_y, v, v_d) , cas de trois contraintes de commutation.

La méthode proposée nous permet aussi de trouver une borne inférieure sur le taux de décroissance et donc d'avoir une information sur le temps de réponse du système considéré.

L'approche a été étendue dans un deuxième temps pour démontrer aussi la robustesse vis-à-vis des variations et l'évolution des paramètres incertains de système.

Nous avons validé les méthodes proposées en répondant à la problématique du vérin électropneumatique et en démontrant sa stabilité lorsque ce dernier est soumis à une commande commutée entre deux lois de commandes.

Les résultats trouvés nous permettent de dire que les méthodes proposées apportent des contributions pour l'étude de la stabilité de systèmes PWA.

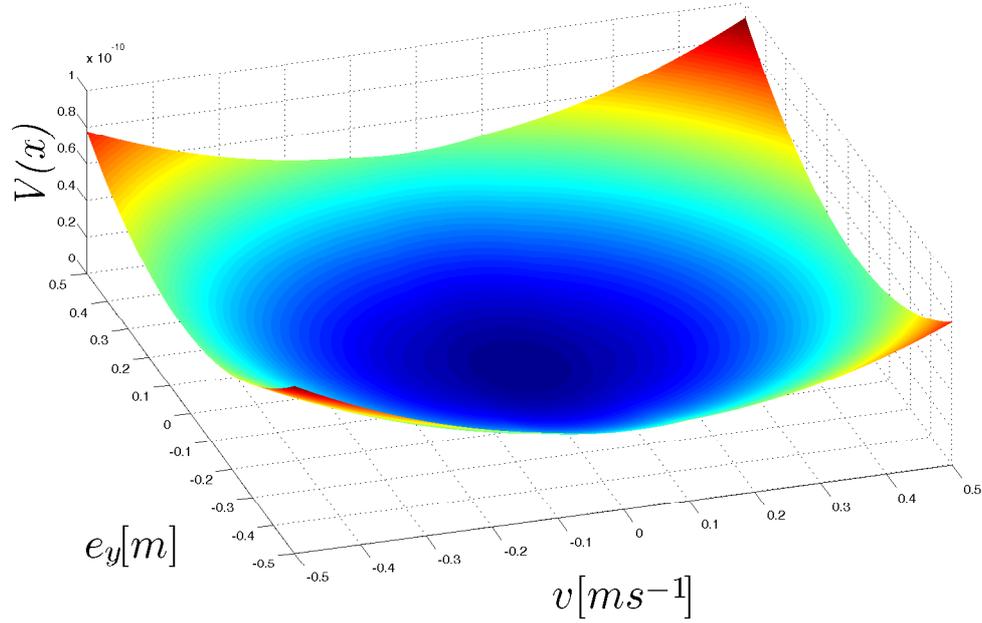


FIGURE 3.18 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation, robustesse vis-à-vis de frottements

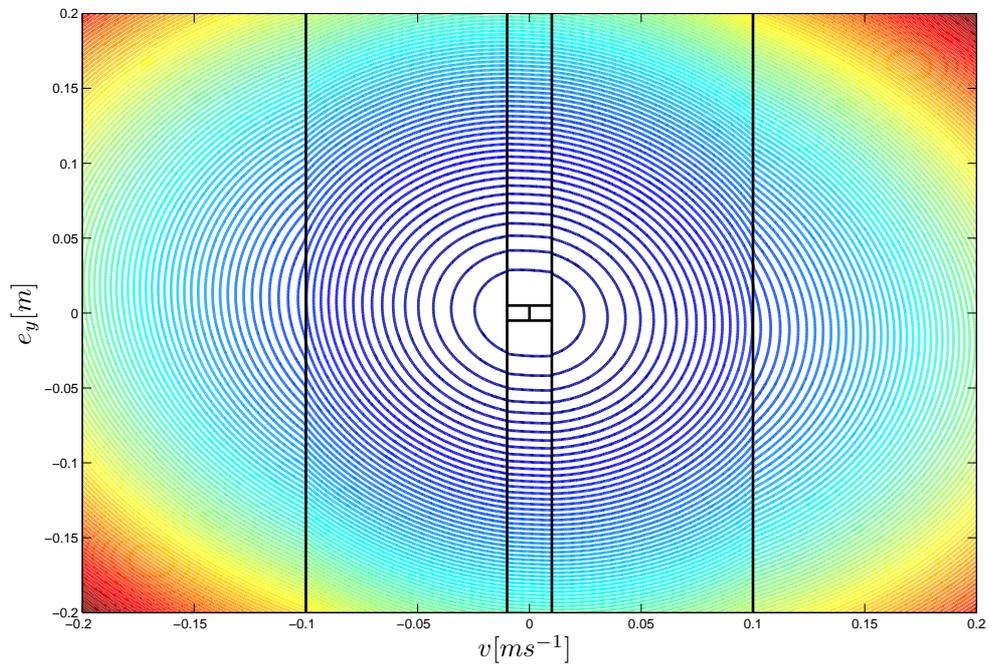


FIGURE 3.19 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (v, e_y) , cas de trois contraintes de commutation, robustesse vis-à-vis de frottements

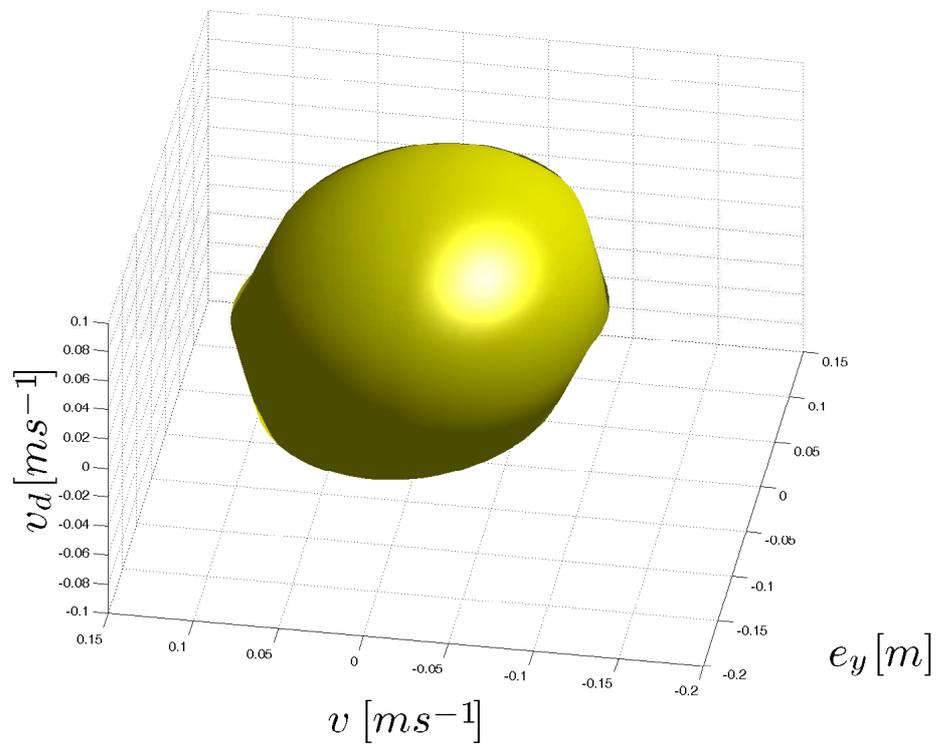


FIGURE 3.20 – Courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (e_y, v, v_d) , cas de trois contraintes de commutation, robustesse vis-à-vis de frottements.

6 ANNEXES

6.1 Lemme de Finsler

Lemme 3.4 ([18]).

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique, $V \in \mathbb{R}^{p \times n}$ une matrice de rang plein. Il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ telle que :

$$(i) \quad \Omega + KV + V^T K^T = 0 \quad (3.44)$$

si et seulement si :

$$(ii) \quad V_{orth}^T \Omega V_{orth} = 0 \quad (3.45)$$

avec V_{orth} désigne la matrice W de rang maximal telle que $VW = 0$.

Démonstration. Introduisons X_V comme étant une base de $\text{Ker}(V)$ et une matrice Y telle que la matrice $[X_V \ Y]$ soit carrée et non-singulière. Alors, (i) est vérifiée si et seulement si :

$$[X_V \ Y]^T (\Omega + KV + V^T K^T) [X_V \ Y] = 0 \quad (3.46)$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_V^T \Omega X_V & X_V^T \Omega Y \\ Y^T \Omega X_V & Y^T \Omega Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_V^T \\ Y^T \end{bmatrix} K [0 \ VY] + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ Y^T V^T \end{bmatrix} K^T [X_V \ Y] = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Comme V est de rang plein, on introduit le changement de variable suivant :

$$Q = [Q_1 \ Q_2] = \begin{bmatrix} X_V^T \\ Y^T \end{bmatrix} K V Y \quad (3.48)$$

qui est équivalent à trouver deux matrices Q_1 et Q_2 telles que :

$$\begin{bmatrix} 0 & X_V^T \Omega Y + Q_1^T \\ Y^T \Omega X_V + Q_1 & Y^T \Omega Y + Q_2 + Q_2^T \end{bmatrix} = 0 \quad (3.49)$$

Avec $Q_1 = -Y^T \Omega X_V$ et $Q_2 = -\frac{1}{2} Y^T \Omega Y$ et (ii), on obtient le résultat.

6.2 Caractéristiques des cellules : suivi de trajectoires désirées

Nous spécifions dans cette partie les caractéristiques des cellules X_i considérées afin d'étudier le suivi de trajectoires désirées pour le système électropneumatique, voir page 98, et qui sont présentées sur la Figure 3.14.

Cellule centrale X_0 :

Dans cette cellule, les critères de commutation sur la commande sont satisfaites, nous sommes donc dans la phase régulation des deux pressions. Vis-à-vis des frottements, nous sommes dans la cellule centrale où on a uniquement les frottements visqueux. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

Il n'y a pas de terme affine $a_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Alors, $A_0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 & 1 & -\epsilon_{d_2} \\ 0 & -\left(\frac{b_v k_N}{M} - \frac{b_v F_s}{M^2 \varepsilon}\right) & -\left(\frac{b_v}{M} + k_N\right) & \frac{S_P(k_N - K_P)}{M} & \alpha_{d_2} - \left(k_N + \frac{b_v}{M}\right) + \epsilon_{d_2} & \left(k_N + \frac{b_v}{M}\right)\epsilon_{d_2} - \epsilon_{d_2}^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\epsilon_{d_2} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \\ |v_d| \leq \varepsilon_3 \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule en tenant compte de la relation (2.4) est donnée comme suit.

$$\overline{E}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_1 :

Concernant cette cellule, les contraintes de commutation sont données par :

$$\begin{cases} e_y > \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

Dans ce cas-là, le critère de commutation sur la position n'est pas satisfait, nous sommes donc dans la phase poursuite de position. Vis-à-vis des frottements, nous sommes toujours dans la cellule centrale où nous avons uniquement les frottements visqueux. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit, avec $\overline{A}_1 \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$.

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 & 1 & -\epsilon_{d_1} & 0 \\ -k_y & \frac{F_s k_a}{M \varepsilon} - k_v & -k_a & 0 & 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\epsilon_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Suivant la relation (2.4), la matrice \overline{E}_1 qui définit cette cellule et satisfait les contraintes de commutation est donnée comme suit.

$$\overline{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Cellule extérieure X_3 :

Dans cette cellule et d'après la figure 3.14, la contrainte sur la vitesse désirée n'est plus vérifiée, alors les contraintes de commutation peuvent être données comme suit.

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \\ v_d \geq \varepsilon_3 \end{cases}$$

Dans ce cas là, nous sommes toujours dans la phase poursuite de position avec des frottements dynamiques. La dynamique est la même que dans la cellule X_1 , c'est-à-dire $\overline{A}_3 = \overline{A}_1$.

La matrice qui définit cette cellule en faisant référence toujours à la relation (2.4) est donnée comme suit.

$$\overline{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Cellule extérieure X_5 :

Concernant cette cellule, la commutation dépend uniquement de la vitesse et elle est donnée par la relation suivante.

$$\varepsilon_2 < v < \varepsilon \quad (3.54)$$

Dans ce cas là aussi, nous avons la même dynamique que dans le cas de cellules X_1 et X_3 .

La matrice \overline{E}_5 qui définit cette cellule et vérifie la contrainte (3.54) est donnée comme suit.

$$\overline{E}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_7 :

La contrainte de commutation sur cette cellule est donnée par :

$$v > \varepsilon$$

Dans ce cas là, c'est le critère de commutation sur la vitesse qui n'est pas satisfait, nous sommes donc dans la phase poursuite de position. Vis-à-vis des frottements, nous sommes dans les cellules extérieures où nous avons uniquement la partie statique. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit, avec $\overline{A}_7 \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$.

$$\bar{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\epsilon_{1d} & -\frac{F_s}{M} \\ -k_y & -k_v & -k_a & 0 & 0 & k_v & \frac{F_s k_a}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\epsilon_{1d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

La matrice \bar{E}_7 qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\bar{E}_7 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon)$$

Chapitre 4

Extension de l'analyse de stabilité des systèmes PWA

Résumé.

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la stabilité des systèmes PWA via l'utilisation des fonctions polynomiales par morceaux en présence de modes glissants et des variations de paramètres du système. Nous commençons tout d'abord par introduire de nouvelles hypothèses sur le système PWA et la démarche à suivre pour analyser la stabilité de ce dernier. Ensuite, nous présentons un premier résultat pour assurer la convergence vers un ensemble de points d'équilibre en présence de modes glissants. Puis, le résultat est étendu pour analyser la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques. Ces résultats seront appliqués ensuite pour analyser le système électropneumatique avec sa loi de commande présentant un ensemble de points d'équilibre, la possibilité de modes glissants et des incertitudes sur les paramètres.

1 INTRODUCTION

Nous avons vu dans les sections précédentes, pour les systèmes PWA présentés par (2.1), qu'un des objectifs usuel est de proposer pour cette classe de systèmes des conditions afin d'assurer la convergence des trajectoires d'état $x(t)$ vers l'équilibre. En effet, dans la littérature, des conditions suffisantes ont été imposées sur un type de fonctions de Lyapunov qui sont les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux pour démontrer la stabilité de l'origine de ces systèmes. Ces approches ont été adaptées dans nos travaux pour l'étendre dans le cas de présence d'un ensemble de points d'équilibre. Bien que ces méthodes soient très intéressantes, nous ne pouvons pas parfois conclure sur la stabilité du système PWA en les utilisant, notamment en présence de phénomènes de glissement sur les frontières entre les cellules constituant ce système. En effet, la présence de ce phénomène peut à tout moment déstabiliser le système même si les dynamiques de toutes les cellules sont stables [112, 68].

La présence de dynamiques discontinues dans les systèmes PWA rend l'analyse et la simulation de ces systèmes très compliquées [86, 87], et pire encore, provoquer des phénomènes de glissements sur les frontières. Ces phénomènes très complexes, jouent un rôle théorique très important et sont représentés par des modèles mathématiques complexes [46, 45]. Pour ces raisons, et à cause de la complexité de ce phénomène de glissement, peu de travaux dans la littérature considèrent la présence de ce phénomène.

Malgré cette difficulté, des auteurs ont fait l'effort d'analyser la stabilité des systèmes PWA en prenant en compte ce phénomène [68, 38, 19, 55, 112]. Dans [68], une extension de la méthode présentée dans [69] a été proposée pour l'analyse de mode glissant attractif mais uniquement dans le cas où le point d'équilibre n'appartient pas aux frontières entre les cellules, notamment celles qui présentent un phénomène de glissement. Dans [38], des conditions suffisantes ont été proposées pour l'étude de stabilité de systèmes PWA en présence de phénomènes de glissement même dans le cas de points d'équilibre appartenant à la frontière entre deux cellules. Ces conditions combinent les travaux de [112] qui traitent l'analyse de la stabilité des systèmes PWA et les travaux de [95] sur la stabilisation des systèmes PWA en présence de modes glissants. Cependant, cette méthode est très conservatrice et compliquée car elle se base sur la combinaison convexe des fonctions de Lyapunov par morceaux. Dans [19], les modes glissants sont considérés comme une dynamique du système. L'inconvénient dans ce cas est les pré-requis de plusieurs informations sur le phénomène de glissement. Cet inconvénient a été évité dans les travaux de [112] mais de façon conservatrice car on utilise les fonctions de Lyapunov communes.

Tous ces travaux sont non seulement conservatifs mais aussi ils traitent uniquement le cas de convergence vers un point d'équilibre et non pas vers un ensemble de points d'équilibre en présence de phénomène de glissement. Dans nos travaux [3], présentés en détails dans le Chapitre 3, nous avons exposé une méthodologie d'analyse de stabilité vers un ensemble de points d'équilibre via l'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux.

L'approche développée dans ce chapitre consiste à étendre les résultats proposés au Chapitre 3. Des conditions suffisantes vont être établies afin de démontrer la convergence des trajectoires d'état dans un système PWA vers un ensemble de points d'équilibre, en présence de phénomènes de glissement et de variations des paramètres du système PWA.

Ce chapitre est articulé autour de trois parties.

La première partie traite de l'étude de la stabilité exponentielle des systèmes PWA en présence de modes glissants. Nous commençons par introduire les nouvelles hypothèses sur le système PWA (2.1) présentant un ensemble de points d'équilibre, notamment les hypothèses de modes glissants. Puis une autre forme de fonction de Lyapunov va être proposée dite fonction de Lyapunov polynomiale et qui prend en considération toutes ces hypothèses. Ensuite, des conditions

suffisantes de stabilité vont être proposées tout en expliquant le passage vers les inégalités matricielles linéaires (LMI) en appliquant la "power transformation" [142, 137] et la S-procédure. Cette partie se termine par un théorème rassemblant les différents résultats.

Dans la deuxième partie, le résultat précédent est étendu afin de garantir la stabilité malgré des variations paramétriques des systèmes PWA. Un théorème plus général est proposé à la fin de cette partie.

Ce chapitre se termine par une partie consacrée à l'application des deux approches précédentes afin d'étudier la stabilité, la stabilité robuste, le suivi de trajectoires désirées et le suivi robuste sur le système électropneumatique.

2 SYSTÈME PWA PRÉSENTANT DES PHÉNOMÈNES DE GLISSEMENT

L'objectif est de démontrer la convergence exponentielle des trajectoires d'état $x(t)$ vers un ensemble de points d'équilibre de système 2.1 présentant des phénomènes de glissement. La démarche est présentée dans le paragraphe ci-dessous.

Démarche à suivre

Dans ce chapitre, nous supposons que le système (2.1) vérifie les hypothèses suivantes.

Hypothèse 4.1.

Sur toute frontière lorsque le vecteur d'état appartient à une frontière de Γ entre deux cellules adjacentes X_i et X_j , un mode glissant peut se produire, voir Figure 4.1, c'est-à-dire pour $x \in X_i \cap X_j$, $(i, j) \in \Gamma$ on a la dynamique suivante (selon Filippov [45]) :

$$\dot{\bar{x}}(t) = (\theta \bar{A}_i + (1 - \theta) \bar{A}_j) \bar{x}(t), 0 \leq \theta \leq 1. \quad (4.1)$$

Notons que $\theta = \theta(t)$.

L'Hypothèse 4.1 implique que le système PWA (2.1) peut avoir une dynamique discontinue en admettant plusieurs solutions, ce qui peut générer des phénomènes de glissement sur les frontières entre les cellules de système. D'après Filippov [45], la dynamique sur la frontière sera la combinaison convexe des deux dynamiques des deux cellules adjacentes, voir Chapitre 2 page 37.

Hypothèse 4.2.

L'ensemble des points d'équilibre $E_{eq} \supseteq \{0\}$ est un sous ensemble de $\bigcup_{i \in \mathcal{I}_0} X_i$ (notons que E_{eq} peut être sur les frontières présentant des modes glissants).

L'Hypothèse 4.2 implique que l'ensemble des points d'équilibre peut ne pas appartenir à une seule cellule dite cellule centrale, mais à l'union de plusieurs cellules dites cellules centrales. L'hypothèse est aussi valable pour un ensemble de points d'équilibre appartenant à des frontières entre des cellules centrales présentant des phénomènes de glissement.

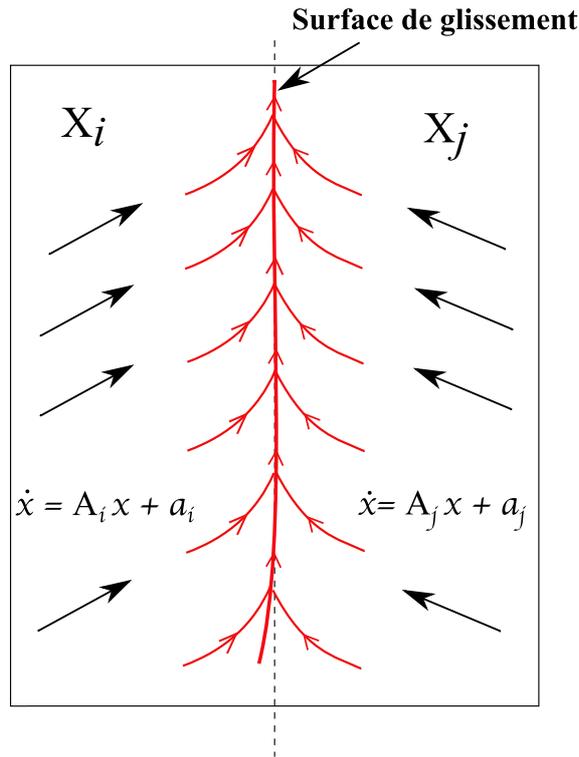


FIGURE 4.1 – Modes glissants.

Hypothèse 4.3.

Selon l'Hypothèse 4.1, on peut distinguer deux cas :

- Si l'origine appartient à l'intérieur d'une cellule X_i (pour laquelle on a donc $\mathcal{I}_0 = \{i\}$) : la dynamique \bar{A}_i dans cette cellule n'a pas alors un terme constant ($a_i = 0$) ; on peut définir donc $\bar{\mathcal{A}}_0 = \bar{A}_i$;
- Si l'origine se situe sur la frontière entre les deux cellules X_i et X_j : il existe un $\bar{\theta}$, avec $0 \leq \bar{\theta} \leq 1$, pour lequel $\bar{\theta}a_i + (1 - \bar{\theta})a_j = 0$; on peut définir donc $\bar{\mathcal{A}}_0 = \bar{\theta} \bar{A}_i + (1 - \bar{\theta}) \bar{A}_j$.

L'Hypothèse 4.3 implique que pour avoir la convergence vers l'ensemble des points d'équilibre il faut ajouter des hypothèses sur le terme affine. En effet, si l'ensemble de point d'équilibre, y compris l'origine, appartient à l'intérieur d'une cellule alors forcément pour avoir l'équilibre, le terme affine doit être nul. Par ailleurs, s'il appartient à la frontière entre deux cellules alors pour avoir l'équilibre, il existe un $\bar{\theta}$ pour lequel la combinaison convexe des termes affines soit nulle.

Hypothèse 4.4.

La dynamique $\bar{\mathcal{A}}_0$ peut avoir des valeurs propres nulles.

Cette hypothèse implique que l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} n'est pas nécessairement réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire nous pouvons avoir $E_{eq} \neq \{0\}$.

Nous supposons que \overline{A}_0 peut avoir des valeurs propres nulles, on considère l'ensemble de vecteurs h qui forme une famille libre et génératrice du noyau de l'application linéaire associée à \overline{A}_0 : le même noyau pour tout $\overline{A}_i, \overline{A}_j$. Nous appelons $Z \in \mathbb{R}^{(n+1) \times h}$ la matrice de rang plein de ces vecteurs propres, avec $\overline{A}_0 Z = \overline{A}_j Z = \overline{A}_i Z = 0$.

Ensuite, nous définissons la matrice $\Pi \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1-h)}$ comme étant le complément orthogonal de Z , normalisée tel que $\Pi^T \Pi = I$, c'est-à-dire $\begin{bmatrix} Z & \Pi \end{bmatrix}$ est unitaire de rang plein.

L'objectif est de proposer un ensemble de conditions suffisantes afin d'assurer la convergence exponentielle des trajectoires d'état du système $x(t)$ vers l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} pour cette classe de systèmes, malgré la présence de modes glissants. Tout d'abord, nous devons étendre les méthodes développées au chapitre précédent afin de prendre en compte les modes glissants. Deuxièmement, afin de réduire au minimum le conservatisme, nous avons besoin d'aller au-delà des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux classiques. Par conséquent, nous allons utiliser des fonctions de Lyapunov de degré plus élevé, notamment les fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux, présentées ci-dessous.

3 FONCTION DE LYAPUNOV POLYNOMIALE PAR MORCEAUX

Les SOS (sum of squares) permette de tester la positivité d'un polynôme pour tout x en l'écrivant sous une forme quadratique, ce qui ramène le problème vers un problème d'optimisation sous contraintes LMI. En utilisant ces propriétés, une large communauté en littérature ont fait le lien avec la théorie de Lyapunov afin de calculer un type de fonctions de Lyapunov appelées fonctions de Lyapunov polynomiales [31, 33, 64, 56, 102, 122]. En effet, dans [125, 134], l'optimisation polynomiale a été utilisée pour construire des fonctions de Lyapunov polynomiales. Les SOS polynomiales ont été explorés pour remédier à des problèmes d'analyse et de contrôle des systèmes [56, 6, 64, 100, 101, 32, 1, 9]. Les conditions sur les SOS polynomiales peuvent être données de manières explicites sous forme de contraintes LMI [30, 33, 56, 64], ou de manière implicite en utilisant une formulation polynomiale positive [64, 97, 100, 101].

Pour les systèmes PWA, cette théorie a été utilisée afin d'analyser la stabilité de ces derniers en utilisant des fonctions de Lyapunov dites fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux [12, 64, 100, 138, 137]. L'idée est de pouvoir imposer des conditions suffisantes sur ces fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux en adaptant les méthodes développées sur les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux [137, 140]. Cette technique a été exploitée et élargie plus tard pour analyser les systèmes hybrides et commutés [100, 137], et aussi pour les systèmes discrets [12, 137].

3.1 Définition

On appelle une fonction de Lyapunov polynomiale par morceaux, une fonction $V(x)$ définie par :

$$V(x) = V_i(x) \text{ pour } x \in X_i, i \in \mathcal{I} \quad (4.2)$$

telle que $V_i(x)$ est un polynôme de degré $2m$ en n variables donné par :

$$V_i(x) = \chi(x)^T P_i \chi(x) \quad (4.3)$$

avec :

- $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$,
- $\chi(x) \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}$ qui présente le vecteur de tous les monômes de degré inférieur ou égale à m qui peut être construit à partir des éléments du vecteur d'état x . La dimension de ce nouveau vecteur d'état $\chi(x)$ est définie par :

$$\rho = \binom{m+n}{m} \quad (4.4)$$

où la notation $\binom{n}{k}$ indique le coefficient binomial, pour lequel on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Selon le positionnement et le type de monômes choisis, il existe plusieurs façons de choisir ce nouveau vecteur d'état. Dans ce travail de thèse, nous avons choisi la structure suivante :

$$\chi(x) = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_n, x_2x_3, \dots, \dots, x_2x_n, \dots, x_{n-1}x_n, \dots, x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m, 1]^T. \quad (4.5)$$

Comme il a été indiqué dans [98], le choix de la matrice P_i n'est pas unique pour un certain polynôme $V_i(x)$ donné ; on peut construire un nombre ι de matrices $Q_\nu = Q_\nu^T \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ linéairement indépendantes, pour lesquelles :

$$\chi(x)^T Q_\nu \chi(x) = 0 \text{ pour } \nu = 1, \dots, \iota \quad (4.6)$$

avec

$$\iota = \frac{1}{2} \left(\binom{m+n}{m}^2 + \binom{m+n}{m} \right) - \binom{n+2m}{2m}. \quad (4.7)$$

et qui implique que :

$$V_i(x) = \chi(x)^T P_i \chi(x) = \chi(x)^T \left(P_i + \sum_{\nu=1}^{\iota} Q_\nu \tau(\nu) \right) \chi(x), \quad \forall \tau(\nu) \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Cela est dû au fait que certains des monômes dans V_i peuvent être obtenus en tant que produits de différents éléments dans χ . Par exemple : $x_1^2 = x_1 \cdot x_1 = 1 \cdot x_1^2 = x_1^2 \cdot 1$.

Exemple 4.1. Soit $p(x)$ un polynôme de quatrième degré avec deux variables x_1 et x_2 .

$$p(x) = 4x_1^4 + 4x_1^3x_2 - 7x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 + 10x_2^4 \quad (4.9)$$

$p(x)$ peut s'écrire comme une fonction quadratique des monômes comme suit :

$$p(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après (4.8), $p(x)$ peut être représenté de la façon suivante :

$$p(x) = \chi(x)^T Q \chi(x) = \chi(x)^T (Q_0 + \sum_{\nu=1}^{\iota} Q_{\nu} \tau(\nu)) \chi(x), \quad \forall \tau(\nu) \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

avec : $Q = Q_0 + \sum_{\nu=1}^{\iota} Q_{\nu} \tau(\nu)$

Selon (4.7), comme $n = 2$ et $m = 2$, le nombre ι de matrices Q_{ν} est $\iota = 6$

En appliquant la condition (4.6), Q_0 et les différentes matrices Q_{ν} peuvent être représentées comme suit :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3.5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$Q_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{x_1 x_2}, \quad Q_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{x_1^2}, \quad Q_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{x_2^2}$$

$$Q_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{x_1^2 x_2}, \quad Q_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{x_2^2 x_1}, \quad Q_6 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{x_1^2 x_2^2}$$

3.2 Propriétés

Afin d'appliquer les différentes conditions sur cette fonction de Lyapunov temps invariant, on aura besoin de spécifier de nouveau les différentes dynamiques dans chaque cellule du système PWA (2.1).

Suivant la "power transformation", qui consiste à faire le passage d'un vecteur d'état vers ses puissances, nous pouvons obtenir la dynamique de $\chi(x(t)) = \chi(t)$, avec laquelle nous serons en mesure de calculer la dérivée de la fonction de Lyapunov. A savoir, la dynamique sera toujours PWA, c'est-à-dire nous aurons :

$$\dot{\chi}(t) = \tilde{A}_i \chi(t) \text{ pour } \chi \in \tilde{X}_i, i \in \mathcal{I} \quad (4.11)$$

avec une nouvelle description des cellules, grâce à des matrices $\tilde{E}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \rho}$ telles que :

$$\begin{cases} x \in X_i \Rightarrow \chi \in \tilde{X}_i \\ \chi \in \tilde{X}_i \Rightarrow \tilde{E}_i \chi \geq 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

et une nouvelle définition des matrices définissant les frontières entre les cellules voisines, avec les matrices $\tilde{F}_{ij} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_{ij} \times \rho}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \Gamma, \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j \subseteq \{\chi | \tilde{F}_{ij} \tilde{\chi} = 0\} \quad (4.13)$$

Pour le nouveau système (4.11), nous supposons que l'Hypothèse 4.1, l'Hypothèse 4.2 et l'Hypothèse 4.3 sont toujours vérifiées, c'est-à-dire que :

1. les modes glissants peuvent se produire, avec une dynamique :

$$\dot{\chi}(t) = (\theta \tilde{A}_i + (1 - \theta) \tilde{A}_j) \chi(t), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (4.14)$$

2. il existe un ensemble de points d'équilibre $\tilde{E}_{eq} | \chi \in \tilde{E}_{eq} \Leftrightarrow \dot{\chi} = 0$; $\chi \in \tilde{E}_{eq} \Leftrightarrow x \in E_{eq}$; $\tilde{E}_{eq} \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_0} \tilde{X}_i$,
3. De la même façon que dans la Section 2 page 115, on peut aussi distinguer deux cas :

- si l'origine appartient à l'intérieur de la cellule \tilde{X}_i ; \tilde{A}_i ne contient pas alors un terme affine ($a_i = 0$); $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \tilde{A}_i$;
- si l'origine est sur la frontière entre les deux cellules \tilde{X}_i et \tilde{X}_j : il existe alors un $\tilde{\theta}$, $0 \leq \tilde{\theta} \leq 1$, pour lequel les termes affines disparaissent, on peut définir alors $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \tilde{\theta} \tilde{A}_i + (1 - \tilde{\theta}) \tilde{A}_j$.

$\tilde{\mathcal{A}}_0$ peut avoir des valeurs propres nulles, on considère l'ensemble de vecteurs \tilde{h} qui forment une famille libre et génératrice du noyau de l'application linéaire associée à $\tilde{\mathcal{A}}_0$: le même noyau pour tout \tilde{A}_i, \tilde{A}_j . Nous appelons $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{\rho \times \tilde{h}}$ la matrice de rang plein de ces vecteurs propres, avec $\tilde{\mathcal{A}}_0 \tilde{Z} = \tilde{A}_j \tilde{Z} = \tilde{A}_i \tilde{Z} = 0$.

Ensuite, nous définissons la matrice $\tilde{\Pi} \in \mathbb{R}^{\rho \times (\rho - \tilde{h})}$ comme étant le complément orthogonal de \tilde{Z} , normalisée tel que $\tilde{\Pi}^T \tilde{\Pi} = I$, c'est-à-dire $[\tilde{Z} \quad \tilde{\Pi}]$ est unitaire de rang plein.

3.3 Analyse de stabilité

Prenons la fonction polynomiale $V(\chi)$ dans (4.2) comme fonction de Lyapunov candidate pour le système PWA (2.1).

Afin d'assurer la continuité de cette fonction de Lyapunov sur les frontières entre les deux cellules \tilde{X}_i et \tilde{X}_j , $(i, j) \in \Gamma$, la condition suivante doit être vérifiée :

$$V_i(\chi) = V_j(\chi) \quad \forall \chi(x) \in \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j. \quad (4.15)$$

Comme il a été indiqué au Chapitre 3 concernant les systèmes présentant un ensemble de points d'équilibre dans le Lemme 3.1, considéré comme une conséquence directe du théorème de LaSalle [?], qui est exprimé dans le Lemme 2.3 au Chapitre 2 page 43, les conditions que la fonction de Lyapunov (4.2) doit satisfaire sont exprimées dans le lemme ci-dessous.

Lemme 4.1.

Pour le système PWA (2.1), la convergence asymptotique de x vers E_{eq} (qui coïncide avec la convergence asymptotique de χ dans (4.11) vers \tilde{E}_{eq}) pour $t > 0$, $t \rightarrow \infty$ est assurée s'il existe une fonction de Lyapunov qui satisfait les conditions suivantes :

1. La fonction de Lyapunov doit être continue sur la frontière entre deux cellules X_i et X_j , c'est-à-dire elle vérifie la condition (4.15) ;
2. La fonction de Lyapunov doit être positive en dehors de \tilde{E}_{eq} , c'est-à-dire :

$$V_i(\chi(x)) > 0 \text{ for } \chi(x) \in \tilde{X}_i / \tilde{E}_{eq}, i \in \mathcal{I}; \quad (4.16)$$

3. La dérivée de la fonction de Lyapunov doit être négative en dehors de \tilde{E}_{eq} , c'est-à-dire :

$$\dot{V}_i(\chi(x)) < 0 \text{ for } \chi(x) \in \tilde{X}_i / \tilde{E}_{eq}, i \in \mathcal{I} \quad (4.17)$$

même dans le cas de dynamique de mode glissant ;

4. La dérivée de la fonction de Lyapunov doit être nulle uniquement dans \tilde{E}_{eq} , c'est-à-dire :

$$\dot{V}_i(\chi(x)) = 0 \text{ for } \chi(x) \in \tilde{E}_{eq} \cap \tilde{X}_i, i \in \mathcal{I}_0. \quad (4.18)$$

Nous pouvons également démontrer la convergence exponentielle de x vers E_{eq} (qui coïncide avec la convergence exponentielle de χ dans (4.11) vers \tilde{E}_{eq}) et calculer une borne inférieure sur le taux de décroissance des trajectoires d'état via le corollaire ci-dessous.

Lemme 4.2.

Pour le système PWA (2.1), si les conditions (4.15), (4.16) et (4.18) sont vérifiées et si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{cases} \dot{V}_i(\tilde{\Pi}\tilde{\Pi}^T\chi(x)) < -2\alpha V_i(\tilde{\Pi}\tilde{\Pi}^T\chi(x)) \text{ for } \chi(x) \in \tilde{X}_i / \tilde{E}_{eq}, i \in \mathcal{I}_0 \\ \dot{V}_i(\chi(x)) < -2\alpha V_i(\chi(x)) \text{ for } \chi(x) \in \tilde{X}_i, i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad (4.19)$$

alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Nous avons exprimé donc les conditions à imposer sur la fonction de Lyapunov polynomiale par morceaux afin d'assurer la convergence exponentielle des trajectoires d'état vers l'ensemble des points d'équilibre. Afin de calculer toutes les matrices de Lyapunov P_i dans (4.10) en prenant en compte toutes les considérations précédentes, nous allons adapter le Théorème 3.1 dans le chapitre précédent, page 81, qui permet en utilisant la S-procédure de faire le passage vers un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Ce dernier va permettre le calcul de toutes les variables de décision dans les conditions imposées sur la fonction de Lyapunov, notamment les matrices de Lyapunov sur chaque cellule du système PWA et aussi la borne inférieure α sur le taux de décroissance. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.1.

Supposons que le système (2.1) satisfait l'Hypothèse 4.1, l'Hypothèse 4.2 et l'Hypothèse 4.3. Soit $\alpha \geq 0$ est un scalaire donné. Soit \tilde{A}_i la matrice présentant la dynamique du vecteur χ de degré m dérivant à partir de x , comme dans (4.11), avec $\tilde{X}_i, \tilde{E}_i, \tilde{F}_{ij}, \tilde{Z}, \tilde{\Pi}, \tilde{A}_0$ telles que définies précédemment.

S'il existe :

- $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ pour $i \in \mathcal{I}$;
- $U_i = U_i^T, W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \tilde{l}_i}$ and $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times 1}$; ayant des coefficients non-négatifs pour $i \in \mathcal{I}$;
- $U_{ij} = U_{ij}^T, U'_{ij} = U'_{ij}{}^T \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \tilde{l}_i}, \mathcal{T}_{ij}, \mathcal{T}'_{ij} \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times 1}$, ayant des coefficients non-négatifs pour $i, j | (i, j) \in \Gamma$;
- $L_{ij} \in \mathbb{R}^{\rho \times \tilde{r}_{ij}}$ pour $i, j | (i, j) \in \Gamma$;
- $\tau_i(\nu), \tau'_i(\nu), \tau''_i(\nu), \tau_{ij}(\nu), \tau'_{ij}(\nu) \in \mathbb{R}$, pour $i, j \in \mathcal{I}, \nu = 1, \dots, \iota$

tels que

$$P_j = P_i + \tilde{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \tilde{F}_{ij} + H(\tau_{ij}) \text{ pour } (i, j) \in \Gamma \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_i^T P_i \tilde{Z} = 0 \\ \tilde{E}_i \tilde{Z} = 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0 \quad (4.21)$$

et si les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T (P_i + H(\tau'_i) - N_i(\mathcal{T}'_i) - \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} \succ 0 \\ \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + H(\tau''_i) + N_i(\mathcal{T}_i) + \tilde{E}_i^T U_i \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_i \tilde{\Pi} \prec 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0 \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} P_i + H(\tau'_i) - N_i(\mathcal{T}'_i) - \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i \succ 0 \\ \tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + H(\tau''_i) + N_i(\mathcal{T}_i) + \tilde{E}_i^T U_i \tilde{E}_i + 2\alpha P_i \prec 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_1 \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_i^T P_j + P_j \tilde{A}_i + H(\tau'_{ij}) + N_i(\mathcal{T}_{ij}) + N_j(\mathcal{T}'_{ij}) + \tilde{E}_i^T U_{ij} \tilde{E}_i + \tilde{E}_j^T U'_{ij} \tilde{E}_j) \tilde{\Pi} \\ + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_i \tilde{\Pi} \prec 0 \\ \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_j^T P_i + P_i \tilde{A}_j + H(\tau'_{ji}) + N_i(\mathcal{T}_{ji}) + N_j(\mathcal{T}'_{ji}) + \tilde{E}_j^T U_{ji} \tilde{E}_j + \tilde{E}_i^T U'_{ji} \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} \\ + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_i \tilde{\Pi} \prec 0 \\ \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_i^T P_j \tilde{Z} = 0, \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_j^T P_i \tilde{Z} = 0 \end{cases} \text{ pour } (i \in \mathcal{I}_0, j \in \mathcal{I}_0) \in \Gamma \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \tilde{A}_i^T P_j + P_j \tilde{A}_i + H(\tau'_{ij}) + N_i(\mathcal{T}_{ij}) + N_j(\mathcal{T}'_{ij}) + \tilde{E}_i^T U_{ij} \tilde{E}_i + \tilde{E}_j^T U'_{ij} \tilde{E}_j \\ + 2\alpha P_i < 0 \\ \tilde{A}_j^T P_i + P_i \tilde{A}_j + H(\tau'_{ji}) + N_i(\mathcal{T}_{ji}) + N_j(\mathcal{T}'_{ji}) + \tilde{E}_j^T U_{ji} \tilde{E}_j + \tilde{E}_i^T U'_{ji} \tilde{E}_i \\ + 2\alpha P_i < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

pour $(i \notin \mathcal{I}_0 \vee j \notin \mathcal{I}_0) \in \Gamma$

avec $N_i(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}^T \tilde{E}_i \end{bmatrix} + [0 \quad \tilde{E}_i^T \mathcal{T}]$ et $H(\tau) = \sum_{\nu=1}^l \tau(\nu) Q_\nu$

Alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Démonstration. Nous considérons la fonction de Lyapunov candidate $V(\chi(x))$ définie par (4.2).

Pour démontrer les inégalités (4.20) et (4.21), nous utilisons la même approche que dans le Chapitre 3, voir page 83.

Alors, pour $\chi(x) \in \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$, on a $\tilde{F}_{ij} \chi(x) = 0$.

En remplaçant cette condition dans (4.20), en multipliant à droite par $\chi(x)$ et à gauche par $\chi(x)^T$, sans oublier que $\chi(x)^T H(\tau) \chi(x) = 0$, $\forall \tau$, on aura : $\chi(x)^T P_j \chi(x) = \chi(x)^T P_i \chi(x)$, qui est (4.15), c'est-à-dire (4.20) implique la continuité de la fonction de Lyapunov polynomiale sur les frontières entre les cellules.

Considérons maintenant (4.21) et (4.22). En se basant sur l'Hypothèse 4.3, nous pouvons toujours écrire une décomposition du vecteur $\chi(x)$, de la forme :

$\chi(x) = \tilde{Z} \xi + \tilde{\Pi} \zeta$, avec $\chi(x) \in \tilde{X}_i, i \in \mathcal{I}_0$ et $\zeta \in \mathbb{R}^{(n+1)-\tilde{h}} \times 1$.

Comme $\tilde{A}_0 \tilde{Z} = 0$ pour $\chi(x) \in \tilde{E}_{eq}$, c'est-à-dire $\chi(x) = \tilde{Z} \xi$, alors la première égalité dans (4.21) implique (4.18).

Pour $\chi(x) \notin \tilde{E}_{eq}$, la dynamique active est $\tilde{A}_i, i \in \mathcal{I}_0$.

La deuxième égalité dans (4.21) implique que $\tilde{E}_i \chi \geq 0 \Rightarrow \tilde{E}_i \tilde{\Pi} \zeta \geq 0$. Alors, grâce à la S-procédure et à la première dans (4.21), la deuxième inégalité dans (4.22) implique $\dot{V}(\tilde{\Pi} \tilde{\Pi}^T \chi(x)) < -2\alpha V_i(\tilde{\Pi} \tilde{\Pi}^T \chi(x))$ pour $\chi(x) \notin \tilde{E}_{eq}$, qui est l'inégalité (4.17) pour $i \in \mathcal{I}_0$, comme on a $\zeta^T \tilde{\Pi}^T \tilde{E}_i^T U_i \tilde{E}_i \tilde{\Pi} \zeta \geq 0$, grâce à (4.12) et (4.21), $\zeta^T \tilde{\Pi}^T N_i(\mathcal{T}'_i) \tilde{\Pi} \zeta \geq 0$, grâce à (4.6).

De la même façon, la première inégalité dans (4.22) implique naturellement l'inégalité (4.16) pour les cellules avec $i \in \mathcal{I}_0$.

Ensuite, grâce aussi à la S-procédure, la première inégalité dans (4.23) implique que $\chi(x)^T P_i \chi(x) > 0$ lorsque $\chi(x)^T \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i \chi(x) \geq 0$, qui est valable grâce à (4.12) si $\chi(x) \in \tilde{X}_i$, $\chi(x)^T N_i(\mathcal{T}'_i) \chi(x) \geq 0$, qui est valable aussi grâce à (4.12), et $\chi(x)^T H(\tau'_i) \chi(x) = 0$, qui est valable grâce à (4.6), qui à son tour implique que $V_i(\chi(x)) > 0$ pour $\chi(x) \in \tilde{X}_i$, c'est-à-dire l'inégalité (4.16) pour les cellules avec $i \in \mathcal{I}_1$.

De la même façon, la deuxième inégalité dans (4.23) assure l'inégalité (4.17) pour les cellules

avec $i \in \mathcal{I}_1$.

Les conditions (4.24) et (4.25) concernent la possibilité d'avoir de modes glissant sur la frontière entre deux cellules. En effet, en multipliant la deuxième inégalité dans (4.25) par θ et la deuxième inégalité dans (4.23) par $1 - \theta$ et en sommant les deux, nous auront, grâce à la S -procédure :

$$\chi(x)^T ((\theta \tilde{A}_j^T + (1 - \theta) \tilde{A}_i^T) P_i + P_i (\theta \tilde{A}_j + (1 - \theta) \tilde{A}_i + 2\alpha P_i)) \chi(x) < 0$$

Pour tout $\chi \in \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$, qui assure que la dérivée de V_i est négative pour toutes dynamiques possibles de modes glissants.

Nous pouvons avoir aussi de la même façon, à partir de la première inégalité dans (4.25), l'inégalité complémentaire :

$$\chi(x)^T ((\theta \tilde{A}_i^T + (1 - \theta) \tilde{A}_j^T) P_j + P_j (\theta \tilde{A}_i + (1 - \theta) \tilde{A}_j + 2\alpha P_i)) \chi(x) < 0$$

La condition (4.24) concerne les modes glissants contenant l'ensemble des points d'équilibre, ces inégalités peuvent être démontrées en suivant le même raisonnement comme pour (4.25) et (4.22).

Donc, nous avons montré que les conditions requises par le théorème impliquent (4.15), (4.16), (4.18) et (4.19), en satisfaisant les hypothèses du Lemme 4.1, ce qui démontre le Théorème 4.1.

Discussion

Le Théorème 4.1 implique un problème de faisabilité sous contraintes inégalités matricielles linéaires (LMI) et égalités matricielles linéaires (LME). Dans ce qui suit, nous discutons les résultats proposés et les différences avec les méthodes développées précédemment et les méthodes de référence de [69] et [54].

- Les égalités matricielles linéaires (LME) (4.20) et (4.21) peuvent être résolues par une paramétrisation appropriée des matrices concernées.
- Chercher le plus grand α tel que (4.15), (4.16), (4.18) et (4.19) soient vérifiées, peut être résolu toujours grâce à une recherche par dichotomie par rapport à α .

Corollaire 4.1 ([5]).

Les hypothèses et les conditions du Théorème 4.1 sont suffisantes pour démontrer que l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} est asymptotiquement stable.

Comparaison

Le Théorème 4.1 est une extension des méthodes précédentes ; il est moins conservatif car il dispose d'une présentation plus générale d'une fonction de Lyapunov par morceaux en assurant des conditions moins conservatives, et en même temps, il permet l'analyse de la convergence vers un ensemble de points d'équilibre autre que l'origine seule malgré la présence de modes glissants.

Corollaire 4.2.

Le Théorème 3.1 au Chapitre 3, page 81, est un cas particulier du Théorème 4.1, pour une fonction de Lyapunov polynomiale d'ordre 2, c'est-à-dire $m = 1$, et sans présence de modes glissants sur les frontières entre les cellules.

Par rapport aux méthodes développées en littérature :

- le Théorème 1 dans [69], présenté au Chapitre 2 page 50, est considéré comme un cas particulier du Théorème 4.1, pour une fonction de Lyapunov polynomiale d'ordre 2, c'est-à-dire $m = 1$, et sans présence de modes glissants sur les frontières entre les cellules, avec $E_{eq} = \{0\}$, $\mathcal{T}_i = 0$ et $\alpha = 0$.
- la méthode développée dans [54], présentée au Chapitre 2 page 52, est aussi considérée comme un cas particulier du Théorème 4.1, pour une fonction de Lyapunov polynomiale d'ordre 2, c'est-à-dire $m = 1$, et sans présence de modes glissants sur les frontières entre les cellules, avec $E_{eq} = \{0\}$, $U_i = 0$ and $\alpha = 0$.
- la condition (4.20) qui assure la continuité de la fonction de Lyapunov polynomiale, est adaptée de celle développée dans le Théorème 3.1 qui est équivalente à celle de [54]. Donc, par cette relation, toutes les fonctions possibles continues, polynomiales par morceaux sont paramétrées.
- nous pouvons remarquer que les conditions (4.25) qui assurent la convergence des modes glissants sont moins conservatives que celles imposées dans [38] qui nécessitent la combinaison convexe des matrices de Lyapunov.

Remarque 4.1.

Les premières conditions dans (4.22) et (4.23) peuvent être interprétées comme une propriété de somme des carrés (SOS) [64, 98, 34]. En effet, nous recherchons un polynôme défini positif $V_i(\chi)$ comme une forme quadratique en χ . Les termes dans $H(\tau)$ permettent de réduire le conservatisme des conditions.

4 SYSTÈMES PWA VARIANT DANS LE TEMPS AVEC PHÉNOMÈNES DE GLISSEMENT

L'objectif de cette partie est l'analyse des systèmes PWA incertains (3.33) présentés au Chapitre 3, page 87. La stabilité sera étudiée à la fois en présence des variations de paramètres du système PWA, et en présence de modes glissant sur les frontières entre les cellules voisines.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une fonction de Lyapunov quadratique est parfois suffisante pour démontrer la stabilité des systèmes PWA présentant des variations paramétriques, ce qui n'est pas le cas en présence de modes glissants. En effet, dans la première partie de ce chapitre, nous avons établi une autre stratégie pour répondre à cet objectif en se basant sur une autre forme de fonctions de Lyapunov qui sont les fonctions de Lyapunov polynomiales par

morceaux. L'objectif est alors de démontrer que ces fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux seront suffisantes pour analyser la stabilité en présence de variations paramétriques sur le système PWA.

Considérons le système PWA (3.33). Nous formulons des hypothèses sur ce système qui seront vérifiées à travers la démarche présentée ci-dessous.

Hypothèse 4.5.

Un mode glissant peut se produire sur toute frontière dans Γ entre deux cellules adjacentes X_i et X_j , c'est-à-dire pour $x \in X_i \cap X_j$, $(i, j) \in \Gamma$ on a la dynamique suivante :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \left(\theta(\lambda) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{i,k} + (1-\theta(\lambda)) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{j,k} \right) \bar{x}(t), \quad (4.26)$$

$$0 \leq \theta(\lambda) \leq 1.$$

avec : $\lambda^T = [\lambda_1 \dots \lambda_q]^T$.

Hypothèse 4.6.

L'ensemble des points d'équilibre $E_{eq} \supseteq \{0\}$ pour le système (3.33), est un sous ensemble de $\bigcup_{i \in \mathcal{I}_0} X_i$ (notons que E_{eq} peut être aussi sur les frontières présentant de modes glissants).

Hypothèse 4.7.

Selon l'Hypothèse 4.1, on peut distinguer deux cas :

- Si l'origine appartient à l'intérieur d'une cellule X_i (pour laquelle on a donc $\mathcal{I}_0 = \{i\}$) : la dynamique $\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{i,k}$ dans cette cellule n'a pas alors un terme constant ($a_{i,k} = 0$, pour $k = 1, \dots, q$) ; on peut définir donc $\bar{\mathcal{A}}_0(\lambda) = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{i,k}$;
- Si l'origine se situe sur la frontière entre les deux cellules X_i et X_j : il existe un $\bar{\theta}(\lambda)$, avec $0 \leq \bar{\theta}(\lambda) \leq 1$, pour lequel $\bar{\theta}(\lambda) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) a_{i,k} + (1-\bar{\theta}(\lambda)) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) a_{j,k} = 0$; on peut définir donc $\bar{\mathcal{A}}_0(\lambda) = \bar{\theta}(\lambda) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{i,k} + (1-\bar{\theta}(\lambda)) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{j,k}$.

Hypothèse 4.8.

La dynamique $\bar{\mathcal{A}}_0(\lambda)$ peut avoir des valeurs propres nulles.

Si $\bar{\mathcal{A}}_0(\lambda)$ a des valeurs propres nulles, on considère l'ensemble des vecteurs \bar{h} , indépendants de λ , qui forme une famille libre et génératrice du noyau de l'application linéaire associée à $\bar{\mathcal{A}}_0$: le même noyau pour tout $\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{i,k}$ et $\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \bar{A}_{j,k}$, $i, j \in \mathcal{I}_0$.

Nous appelons $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times \bar{h}}$ la matrice de rang plein de ces vecteurs propres, avec $\bar{A}_0(\lambda)\bar{Z} = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t)\bar{A}_{j,k}\bar{Z} = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t)\bar{A}_{i,k}\bar{Z} = 0$, qui implique que l'ensemble des points d'équilibre n'est pas nécessairement réduit à l'origine seule, c'est-à-dire $E_{eq} \supseteq \{0\}$.

Ensuite, nous définissons également la matrice $\bar{\Pi} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times ((n+1) - \bar{h})}$ comme étant le complément orthogonal de \bar{Z} , normalisée tel que $\bar{\Pi}^T \bar{\Pi} = I$, c'est-à-dire $[\bar{Z} \ \bar{\Pi}]$ est unitaire de rang plein.

L'objectif est de pouvoir calculer une fonction de Lyapunov polynomiale par morceaux, telle définie à la page 117, afin de démontrer la convergence exponentielle des trajectoires d'état vers l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} , en présence de modes glissants et des variations polytopiques sur les paramètres du système. Cet objectif peut être assuré en répondant aux conditions développées dans le Lemme 4.1, page 121.

Pour cela, nous allons spécifier les nouvelles dynamiques incertaines dans chaque cellule du système (3.33), afin d'appliquer les différentes conditions sur cette fonction de Lyapunov.

Suivant la "power transformation", cela a été expliquée à la page 119, nous pouvons obtenir la dynamique de $\chi(x(t)) = \chi(t)$. Cette dynamique sera toujours PWA et incertaine, c'est-à-dire nous aurons :

$$\dot{\chi}(t) = \sum_{k=1}^{q_i} \lambda_k(t) \tilde{A}_{i,k} \chi(t), \quad \forall k \in \{1, \dots, q\}, \text{ pour } \chi \in \tilde{X}_i, i \in \mathcal{I} \quad (4.27)$$

La description des cellules et la définition de la frontière sont définies de la même façon que dans (4.12) et (4.13), page 119.

Remarque 4.2.

La "power transformation" permet de préserver λ comme un terme linéaire dans la nouvelle dynamique de χ . On peut définir :

$$\tilde{A}_i(\lambda) = \sum_{k=1}^q \lambda_k \tilde{A}_{i,k} \quad (4.28)$$

Pour le nouveau système (4.27), on suppose que l'Hypothèse 4.5, l'Hypothèse 4.6 et l'Hypothèse 4.7 sont toujours vérifiées, c'est-à-dire :

1. les modes glissants peuvent se produire, avec une dynamique :

$$\dot{\chi}(t) = \left(\theta(\lambda) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{i,k} + (1 - \theta(\lambda)) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{j,k} \right) \chi(t), \quad (4.29)$$

$$0 \leq \theta(\lambda) \leq 1$$

2. il existe un ensemble de points d'équilibre \tilde{E}_{eq} tel que $\chi \in \tilde{E}_{eq} \Leftrightarrow \dot{\chi} = 0$; $\chi \in \tilde{E}_{eq} \Leftrightarrow x \in E_{eq}$; $\tilde{E}_{eq} \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_0} \tilde{X}_i$
3. on peut aussi distinguer deux cas :

- si l'origine appartient à l'intérieur de la cellule \tilde{X}_i ; $\tilde{A}_{i,k}(\lambda)$ ne contient pas alors un terme affine pour tout λ ($a_i = 0$); $\tilde{A}_0(\lambda) = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{i,k} = \tilde{A}_{i,k}(\lambda)$;

- si l'origine est sur la frontière entre les deux cellules \tilde{X}_i et \tilde{X}_j : il existe alors un $\tilde{\theta}(\lambda)$, $0 \leq \tilde{\theta}(\lambda) \leq 1$, pour lequel les termes affines disparaissent, on peut définir alors $\tilde{A}_0(\lambda) = \tilde{\theta}(\lambda) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{i,k} + (1 - \tilde{\theta}(\lambda)) \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{j,k} = \tilde{\theta}(\lambda) \tilde{A}_i(\lambda) + (1 - \tilde{\theta}(\lambda)) \tilde{A}_j(\lambda)$.

Si $\tilde{A}_0(\lambda)$ a des valeurs propres nulles, on considère l'ensemble des vecteurs \tilde{h} , indépendants de λ , qui forme une famille libre et génératrice du noyau de l'application linéaire associée à \tilde{A}_0 : le même noyau pour tout $\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{i,k}$ et $\sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{j,k}$, $i, j \in \mathcal{I}_0$.

On peut appeler $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{\rho \times \tilde{h}}$ la matrice de rang plein de ces vecteurs propres, avec $\tilde{A}_0(\lambda) \tilde{Z} = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{j,k} \tilde{Z} = \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \tilde{A}_{i,k} \tilde{Z} = 0$.

Ensuite, nous définissons la matrice $\tilde{\Pi} \in \mathbb{R}^{\rho \times (\rho - \tilde{h})}$ comme étant le complément orthogonal de \tilde{Z} , normalisée tel que $\tilde{\Pi}^T \tilde{\Pi} = I$ c'est-à-dire $\begin{bmatrix} \tilde{Z} & \tilde{\Pi} \end{bmatrix}$ est unitaire de rang plein.

En prenant en compte toutes les considérations précédentes, le Théorème 4.1 est adapté afin de calculer toutes les matrices de Lyapunov P_i dans (4.8), qui assurent la convergence exponentielle des trajectoires d'état vers l'ensemble des points d'équilibre, en présence de modes glissants et des variations des paramètres du système PWA.

Le résultat ci-dessous permet, en utilisant la S-procédure, de faire le passage vers un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Ce dernier va permettre le calcul de toutes les variables de décision dans les conditions imposées sur la fonction de Lyapunov, notamment les matrices de Lyapunov sur chaque cellule du système PWA et aussi la borne inférieure α sur le taux de décroissance. Nous pouvons alors énoncer le théorème général suivant.

Théorème 4.2 ([4]).

Supposons que le système (2.1) satisfait l'Hypothèse 4.5, l'Hypothèse 4.6, l'Hypothèse 4.7 et l'Hypothèse 4.8. $\alpha \geq 0$ est un scalaire donné. Soit $\tilde{A}_{i,k}, \forall k \in \{1, \dots, q\}$ matrices incertaines décrivant les dynamiques du vecteur χ de degré m dérivant à partir de x , comme dans (4.11), avec $\tilde{X}_i, \tilde{E}_i, \tilde{F}_{ij}, \tilde{Z}, \tilde{\Pi}, \tilde{A}_0$ telles que définies précédemment.

S'il existe :

- $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ pour $i \in \mathcal{I}$;
- $U_{i,k} = U_{i,k}^T, W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \tilde{l}_i}$ et $\mathcal{T}_{i,k}, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times 1}$; ayant des coefficients non-négatifs pour $i \in \mathcal{I}, k = 1, \dots, q$;
- $U_{ij,k}, U'_{ij,k} \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \tilde{l}_i}, \mathcal{T}_{ij,k}, \mathcal{T}'_{ij,k} \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times 1}$, ayant des coefficients non-négatifs pour $i, j \mid (i, j) \in \Gamma, k = 1, \dots, q$;
- $L_{ij} \in \mathbb{R}^{\rho \times \tilde{r}_{ij}}$ pour $i, j \mid (i, j) \in \Gamma$;
- $\tau_i(\nu), \tau'_i(\nu), \tau''_{i,k}(\nu), \tau_{ij,k}(\nu), \tau_{ij}(\nu) \in \mathbb{R}$, pour $i, j \in \mathcal{I}, \nu = 1, \dots, \iota, k = 1, \dots, q$

tels que

$$P_j = P_i + \tilde{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \tilde{F}_{ij} + H(\tau_{ij}) \text{ pour } (i, j) \in \Gamma \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_{i,k}^T P_i \tilde{Z} = 0 \\ \tilde{E}_i \tilde{Z} = 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q \quad (4.31)$$

et si les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T (P_i + H(\tau'_i) - N_i(\mathcal{T}'_i) - \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} \succ 0 \\ \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_{i,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} \\ + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_i \tilde{\Pi} \prec 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

pour $i \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q$

$$\begin{cases} P_i + H(\tau'_i) - N_i(\mathcal{T}'_i) - \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i \succ 0 \\ \tilde{A}_{i,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i \\ + 2\alpha P_i \prec 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

pour $i \in \mathcal{I}_1, k = 1, \dots, q$

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_{i,k}^T P_j + P_j \tilde{A}_{i,k} + H(\tau_{ij,k}) + N_i(\mathcal{T}_{ij,k}) + N_j(\mathcal{T}'_{ij,k}) \\ + \tilde{E}_i^T U_{ij,k} \tilde{E}_i + \tilde{E}_j^T U'_{ij,k} \tilde{E}_j) \tilde{\Pi} + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_j \tilde{\Pi} \prec 0 \\ \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_{j,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{j,k} + H(\tau_{ji,k}) + N_i(\mathcal{T}_{ji,k}) + N_j(\mathcal{T}'_{ji,k}) \\ + \tilde{E}_j^T U_{ji,k} \tilde{E}_j + \tilde{E}_i^T U'_{ji,k} \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_i \tilde{\Pi} \prec 0 \\ \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_{i,k}^T P_j \tilde{Z} = 0, \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_{j,k}^T P_i \tilde{Z} = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

pour $(i, j) \in \Gamma, i, j \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q$

$$\begin{cases} \tilde{A}_{i,k}^T P_j + P_j \tilde{A}_{i,k} + H(\tau_{ij,k}) + N_i(\mathcal{T}_{ij,k}) + N_j(\mathcal{T}'_{ij,k}) \\ + \tilde{E}_i^T U_{ij,k} \tilde{E}_i + \tilde{E}_j^T U'_{ij,k} \tilde{E}_j + 2\alpha P_j \prec 0 \\ \tilde{A}_{j,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{j,k} + H(\tau_{ji,k}) + N_i(\mathcal{T}_{ji,k}) + N_j(\mathcal{T}'_{ji,k}) \\ + \tilde{E}_j^T U_{ji,k} \tilde{E}_j + \tilde{E}_i^T U'_{ji,k} \tilde{E}_i + 2\alpha P_i \prec 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

pour $(i, j) \in \Gamma, i \notin \mathcal{I}_0 \vee j \notin \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q$

avec $N_i(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}^T \tilde{E}_i \end{bmatrix} + [0 \quad \tilde{E}_i^T \mathcal{T}]$ et $H(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\ell} \tau(\nu) Q_\nu$

Alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Démonstration. Dans le Théorème 4.2, toutes les inégalités impliquant $\tilde{A}_{i,k}$ sont présentes pour toutes les valeurs de k , en assurant qu'elles soient aussi vérifiées pour $\tilde{A}_i(\lambda)$ pour tout λ valide (système affine en λ et multi-affine en λ et θ en cas de mode glissant [?]).

Par exemple, si $\tilde{A}_{i,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i + 2\alpha P_i \prec 0$ est vérifiée pour tout k alors $\tilde{A}_i(\lambda)^T P_i + P_i \tilde{A}_i(\lambda) + H(\tau''_i) + N_i(\mathcal{T}_i) + \tilde{E}_i^T U_i \tilde{E}_i + 2\alpha P_i \prec 0$ est vérifiée pour tout λ , avec $\tau''_i, \mathcal{T}_i, U_i$ proprement choisis. Avec ces considérations, nous revenons au cas du Théorème 4.1 dont la démonstration est donnée ci-dessus, page 123.

Discussion

Le Théorème 4.2 implique aussi un problème de faisabilité sous contraintes inégalité matricielles linéaires (LMI) et égalités matricielles linéaires (LME).

Chercher le plus grand α tel que (4.15), (4.16), (4.18) et (4.19) soient vérifiées, peut être résolu toujours grâce à une recherche par dichotomie par rapport à α .

Corollaire 4.3.

Les hypothèses et les conditions du Théorème 4.2 pour $\alpha = 0$ sont suffisantes pour assurer que l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} soit asymptotiquement stable.

Comparaison

Le Théorème 4.2 est une extension des résultats précédents; il est moins conservatif car il dispose de conditions plus générales. Il permet aussi l'analyse de la convergence vers un ensemble de points d'équilibre autre que l'origine seule malgré la présence de modes glissants et les incertitudes sur les paramètres du système.

Corollaire 4.4.

Le Théorème 4.1, page 122, est un cas particulier du Théorème 4.2, sans présence des incertitudes sur les paramètres du système.

Concernant les méthodes développées dans la littérature :

- le Théorème 1 dans [69], présenté au Chapitre 2 page 50, est considéré comme un cas particulier du Théorème 4.2, pour une fonction de Lyapunov polynomiale d'ordre 2, c'est-à-dire $m = 1$, et sans présence de modes glissants sur les frontières entre les cellules et sans incertitudes sur les paramètres du système, avec $E_{eq} = \{0\}$, $\mathcal{T}_\bullet = 0$ et $\alpha = 0$.
- le théorème développé dans [54], présenté au Chapitre 2 page 52, peut être aussi considéré comme un cas particulier du Théorème 4.2, pour une fonction de Lyapunov polynomiale d'ordre 2, c'est-à-dire $m = 1$, et sans présence de modes glissants sur les frontières entre les cellules et sans incertitudes sur les paramètres du système, avec $E_{eq} = \{0\}$, $U_\bullet = 0$ and $\alpha = 0$.

Cas particuliers de systèmes PWA**Systèmes PWA sans modes glissants**

Pour un système PWA ne présentant pas de phénomènes de glissement, le Théorème 4.2 se simplifie au corollaire ci-dessous.

Corollaire 4.5.

Supposons que le système (2.1) satisfait l'Hypothèse 4.7 et l'Hypothèse 4.8. Soit $\alpha \geq 0$ est un scalaire donné. Soit $\tilde{A}_{i,k}, \forall k \in \{1, \dots, q\}$ matrices incertaines décrivant les dynamiques du vecteur χ de degré m dérivant à partir de x , comme dans (4.11), avec $\tilde{X}_i, \tilde{E}_i, \tilde{F}_{ij}, \tilde{Z}, \tilde{\Pi}, \tilde{A}_0$ telles que définies précédemment.

S'il existe :

- $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ pour $i \in \mathcal{I}$;
- $U_{i,k} = U_{i,k}^T, W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \tilde{l}_i}$ et $\mathcal{T}_{i,k}, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i}$; ayant des coefficients non-négatifs pour $i \in \mathcal{I}, k = 1, \dots, q$;
- $L_{ij} \in \mathbb{R}^{\rho \times \tilde{r}_{ij}}$ pour $i, j \mid (i, j) \in \Gamma$;
- $\tau_i(\nu), \tau'_i(\nu), \tau''_{i,k}(\nu), \tau_{ij}(\nu) \in \mathbb{R}$, pour $i, j \in \mathcal{I}, \nu = 1, \dots, \iota, k = 1, \dots, q$

tels que

$$P_j = P_i + \tilde{F}_{ij}^T L_{ij}^T + L_{ij} \tilde{F}_{ij} + H(\tau_{ij}) \text{ pour } (i, j) \in \Gamma \quad (4.36)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_{i,k}^T P_i \tilde{Z} = 0 \\ \tilde{E}_i \tilde{Z} = 0 \end{cases} \text{ pour } i \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q \quad (4.37)$$

et si les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T (P_i + H(\tau'_i) - N_i(\mathcal{T}'_i) - \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} \succ 0 \\ \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_{i,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} \\ + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P_i \tilde{\Pi} \prec 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

pour $i \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q$

$$\begin{cases} P_i + H(\tau'_i) - N_i(\mathcal{T}'_i) - \tilde{E}_i^T W_i \tilde{E}_i \succ 0 \\ \tilde{A}_{i,k}^T P_i + P_i \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i \\ + 2\alpha P_i \prec 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

pour $i \in \mathcal{I}_1, k = 1, \dots, q$

avec $N_i(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}^T \tilde{E}_i \end{bmatrix} + [0 \quad \tilde{E}_i^T \mathcal{T}]$ et $H(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\iota} \tau(\nu) Q_\nu$

Alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Dans ce cas, les inégalités (4.39) et (4.34) sur les modes glissants dans le Théorème 4.2 ne sont pas nécessaires, car il n'y a pas de phénomène de glissement, elles ont été donc éliminées.

Fonction de Lyapunov polynomiale commune

La recherche d'une fonction de Lyapunov polynomiale par morceaux est une méthode générale pour démontrer la stabilité d'un système PWA. Cependant, dans des cas particuliers, une fonction de Lyapunov commune existe, voir Chapitre 2 page 47, et est suffisante pour assurer cette stabilité. Dans ce cas-là, en imposant moins de contraintes, le théorème précédent se simplifie et se réduit au théorème ci-dessous.

Corollaire 4.6.

Supposons que le système (2.1) satisfait l'Hypothèse 4.5, l'Hypothèse 4.6 et l'Hypothèse 4.7. Soit $\alpha \geq 0$ un scalaire donné. Soit $\tilde{A}_{i,k}, \forall k \in \{1, \dots, q\}$ matrices incertaines décrivant les dynamiques du vecteur χ de degré m dérivant à partir de x , comme dans (4.11), avec $\tilde{X}_i, \tilde{E}_i, \tilde{F}_{ij}, \tilde{Z}, \tilde{\Pi}, \tilde{A}_0$ telles que définies précédemment. S'il existe :

- $P = P^T \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$
- $U_{i,k} = U_{i,k}^T, W_i = W_i^T \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i \times \tilde{l}_i}$ et $\mathcal{T}_{i,k}, \mathcal{T}'_i \in \mathbb{R}^{\tilde{l}_i}$; ayant des coefficients non-négatifs pour $i \in \mathcal{I}, k = 1, \dots, q$;
- $\tau_i(\nu), \tau'_i(\nu), \tau''_{i,k}(\nu) \in \mathbb{R}$, pour $i \in \mathcal{I}, \nu = 1, \dots, \iota, k = 1, \dots, q$

tels que

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}^T \tilde{A}_{i,k}^T P \tilde{Z} = 0 \\ \tilde{E}_i \tilde{Z} = 0 \end{cases} \quad \text{pour } i \in \mathcal{I}_0, k = 1, \dots, q \quad (4.40)$$

et si les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & \tilde{\Pi}^T (P + H(\tau'_i)) \tilde{\Pi} \succ 0 \quad (4.41) \\ & \begin{cases} \tilde{\Pi}^T (\tilde{A}_{i,k}^T P + P \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i) \tilde{\Pi} + 2\alpha \tilde{\Pi}^T P \tilde{\Pi} \prec 0 \\ \quad \text{pour } i \in \mathcal{I}_0 \\ \tilde{A}_{i,k}^T P + P \tilde{A}_{i,k} + H(\tau''_{i,k}) + N_i(\mathcal{T}_{i,k}) + \tilde{E}_i^T U_{i,k} \tilde{E}_i + 2\alpha P \prec 0 \\ \quad \text{pour } i \in \mathcal{I}_1 \end{cases} \quad k = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (4.42)$$

avec $N_i(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{T}^T \tilde{E}_i \end{bmatrix} + [0 \quad \tilde{E}_i^T \mathcal{T}]$ et $H(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\iota} \tau(\nu) Q_\nu$

Alors l'ensemble des points d'équilibre E_{eq} du système (2.1) est exponentiellement stable, avec un taux de décroissance plus grand que α .

Dans ce cas, la matrice de Lyapunov est la même pour toutes les cellules du système, ce qui a permis d'éliminer certaines contraintes. En effet, les conditions (4.39) et (4.34) sur les modes glissants dans le Théorème 4.2 ont été éliminées car elles sont équivalentes, dans le cas de fonction de Lyapunov commune, aux conditions (4.42) dans le Corollaire 4.6, c'est-à-dire que la fonction de Lyapunov commune rend la vérification des modes glissants incluse dans les autres inégalités. Par ailleurs, la condition de la positivité de la fonction de Lyapunov sur chaque cellule est imposée qu'une seule fois dans l'inégalité (4.41).

5 APPLICATION AU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE

Cette partie est subdivisée en deux sous parties.

Dans la première sous partie, les méthodes présentées ci-dessus seront testées sur le système électropneumatique présentant un ensemble de points d'équilibre, voir Chapitre 2 page 63, pour un modèle de frottements sous forme d'une saturation afin d'analyser la stabilité, la robustesse et le suivi de trajectoires désirées. Les modes glissants ne seront pas prises en comptes dans ce cas car le modèle de frottement ne présente pas de discontinuité.

Dans la deuxième sous partie, nous faisons la même étude mais cette fois-ci pour un modèle de frottements sous forme d'un relais. Le nouveau modèle du vérin électropneumatique présente donc une discontinuité sur la dynamique dû au modèle de frottements considéré. Les méthodes développées dans ce chapitre seront appliquées en considérant la possibilité d'avoir des phénomènes de glissement sur les frontières entre les cellules voisines. Cette sous partie se termine par une comparaison avec les résultats obtenus en appliquant la méthode basée sur les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux.

5.1 Frottement modélisé par une saturation

Prenons d'abord un modèle de frottements sous forme d'une saturation. Le modèle du vérin électropneumatique pour ce modèle de frottement est donné au chapitre précédent page 89.

Analyse de stabilité

Dans un premier temps, nous faisons l'analyse de la stabilité du système en considérant uniquement les deux contraintes de commutation sur la position et la vitesse.

Résultats numériques

Les résultats d'application du Corollaire 4.5 sur ce système affine par morceaux sont présentés ci-dessous.

L'ordre minimal de la fonction de Lyapunov polynomiale supérieur à celui de la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux est égal à 4, c'est-à-dire $m = 2$.

Remarque 4.3.

La fonction de Lyapunov quadratique par morceaux est un cas particulier de la fonction de Lyapunov polynomiale pour un ordre égal à 2 de cette dernière. Alors, pour garantir moins de conservatisme et des résultats différents par rapport à ceux obtenus en utilisant la forme quadratique, il faut choisir un ordre plus élevé, c'est-à-dire un ordre supérieur ou égal à 4.

Alors, en utilisant la relation (4.7), le nombre des matrices Q_ν linéairement indépendantes à utilisées pour chaque forme polynomiale est $\iota = 50$.

Le nouveau vecteur d'état $\chi(x)$ formé à partir du vecteur d'état augmenté $\bar{x}(t)$ et dépendant de l'ordre de la fonction de Lyapunov choisie, est donné à partir de la relation (4.5) comme suit.

$$\begin{pmatrix} e_y \\ v \\ e_{af} \\ e_P \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \chi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_4 \\ x_2 x_3 \\ x_2 x_4 \\ x_3 x_4 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Pour ce nouveau vecteur d'état, les nouvelles dynamiques et les descriptions des cellules ont été définies, à partir de la procédure de la page 119. Toutes les caractéristiques des cellules sont présentées à l'Annexe 7.1 page 160.

On suppose pour cette partie qu'il n'y a pas de variation de frottements, c'est-à-dire $\lambda = 1$ et $k = 1$. L'analyse de stabilité est faite pour une consigne constante, c'est-à-dire nous prenons y_d constant et $v_d = 0$, $a_d = 0$, qui implique dans ce cas $e_v = v$, $e_a = a$.

Stabilité asymptotique

Le Corollaire 4.5 a été appliqué pour $\alpha = 0$ afin de démontrer la stabilité asymptotique. Les différentes contraintes ont été vérifiées en traçant les courbes de niveau et l'intersection de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , voir Figure 4.2 et Figure 4.3.

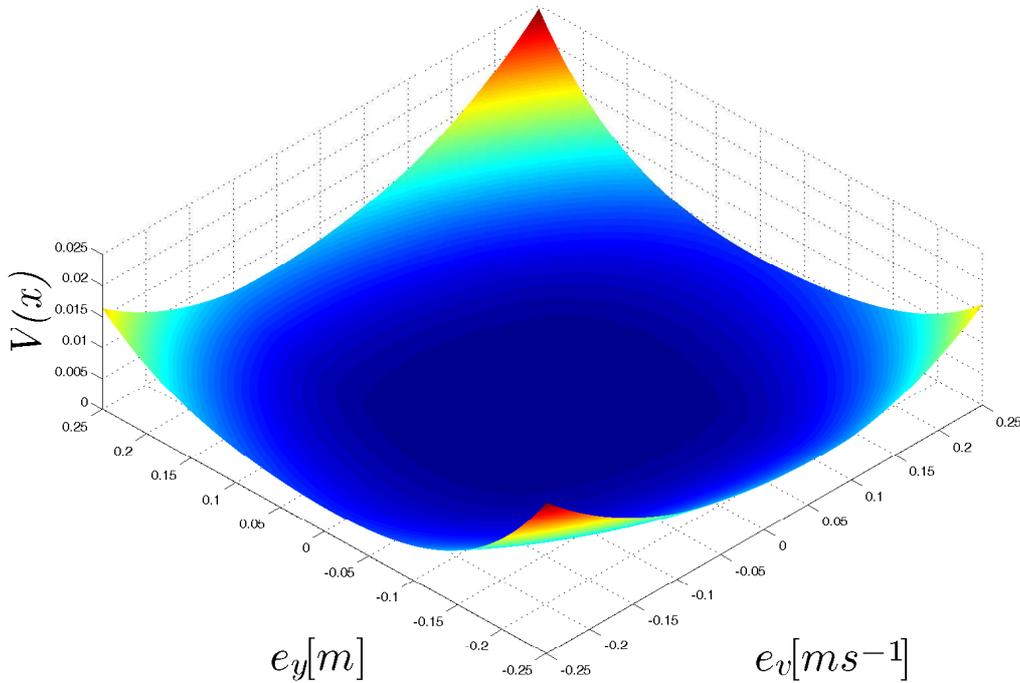


FIGURE 4.2 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité asymptotique

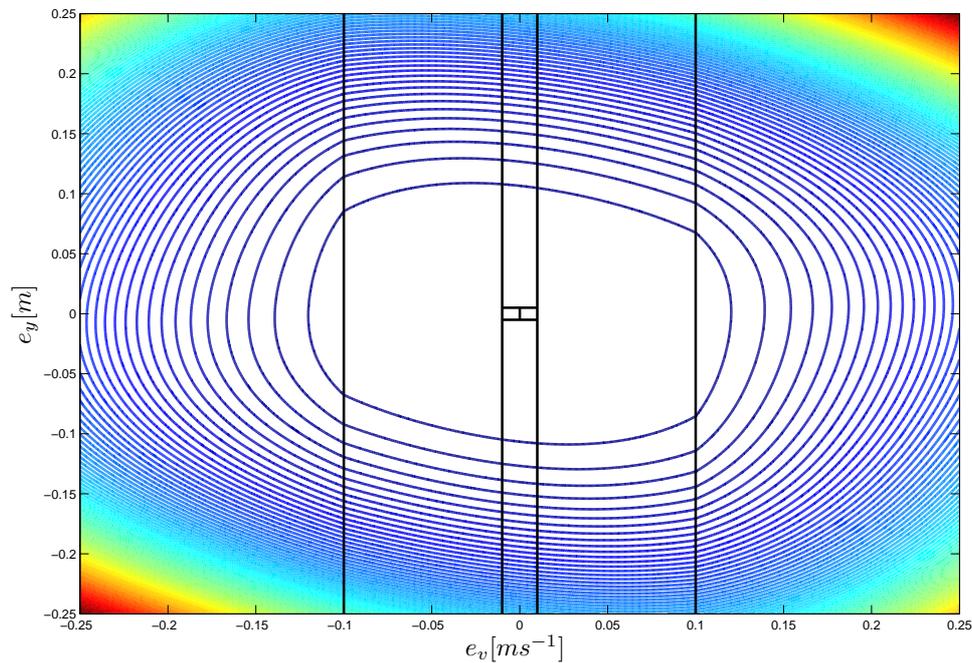


FIGURE 4.3 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité asymptotique

Discussion 9.

D'après les Figures 4.2 et 4.3 :

- Les contraintes de décroissance de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre imposées dans le Corollaire 4.5 sont vérifiées car toutes les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov trouvée décroissent vers l'ensemble des points d'équilibre.
- La contrainte de continuité de cette fonction de Lyapunov est assurée car ses courbes de niveaux sont continues sur les frontières (représentées par des droites) entre deux cellules voisines.

Les conditions imposées par le Corollaire 4.5 sont vérifiées, l'ensemble des points d'équilibre est stable asymptotiquement.

Stabilité exponentielle et taux de décroissance

Le Corollaire 4.5 a été aussi appliqué pour $\alpha \neq 0$ afin de démontrer la stabilité exponentielle pour le système PWA précédent. Toutes les variables de décision apparues dans ce corollaire ont été déterminées numériquement, notamment les matrices de Lyapunov et la borne inférieure sur

le taux de décroissance qui démontrent la stabilité exponentielle de ce système commuté.

Le taux de décroissance α trouvé est donné comme suit.

$$\alpha = 0.4753$$

Les courbes de niveau et l'intersection de la fonction de Lyapunov ont été tracées sur le plan (e_v, e_y) , voir Figure 4.4 et Figure 4.5.

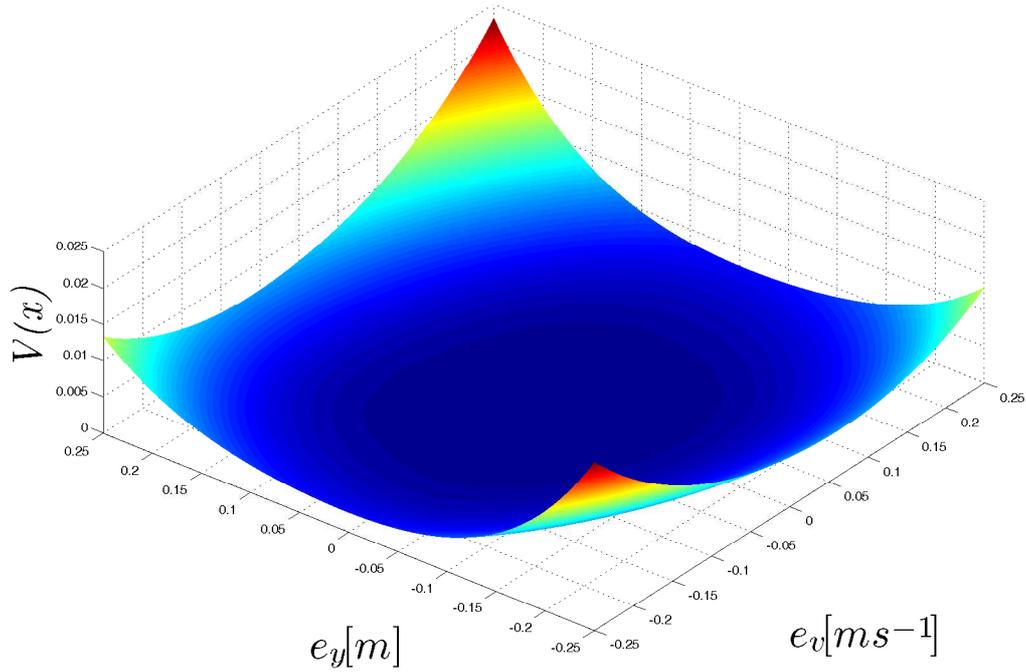


FIGURE 4.4 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité exponentielle

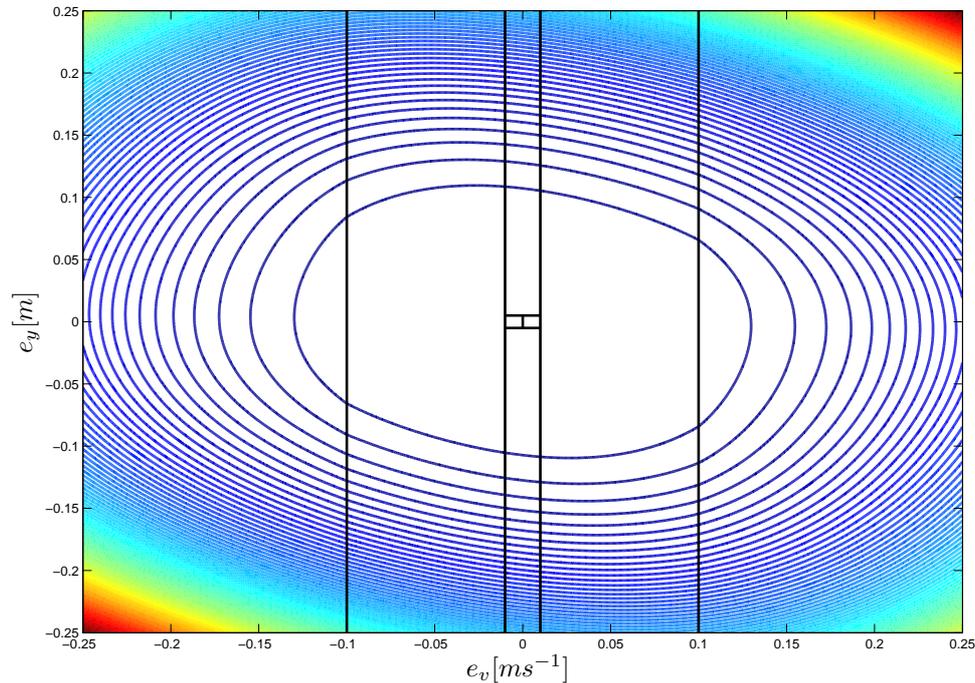


FIGURE 4.5 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , saturation, stabilité exponentielle

Discussion 10.

D'après les figures 4.4 et 4.5 :

- La décroissance de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre est vérifiée.
- La continuité sur les frontières (représentées par des droites) entre deux cellules voisines est assurée.
- Les déformations des courbes de niveaux de la fonction de Lyapunov est remarquable, c'est-à-dire la matrice qui définit la fonction de Lyapunov change entre une cellule et une autre. Cette déformation suggère qu'on peut ne pas avoir une fonction de Lyapunov polynomiale commune pour toutes les cellules.

On vérifie bien donc les conditions imposées par le Corolaire (4.5). L'ensemble des points d'équilibre est alors exponentiellement stable.

Étude de Robustesse vis-à-vis de la variation des frottements

La robustesse vis-à-vis des variations de frottements a été testée comme dans le cas de fonction de Lyapunov quadratique, voir Chapitre 3 page 94, en considérant le modèle de frottement incertain suivant, avec $k = 1, 2$:

$$\begin{cases} F_s(\lambda) = \lambda_1 F_{s_{max}} + \lambda_2 F_{s_{min}} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (4.44)$$

1) Robustesse sans contrainte de taux de décroissance

Le Corolaire 4.5 a été appliqué avec succès et les résultats de la programmation sont montrés sur les Figures 4.6 et 4.7.

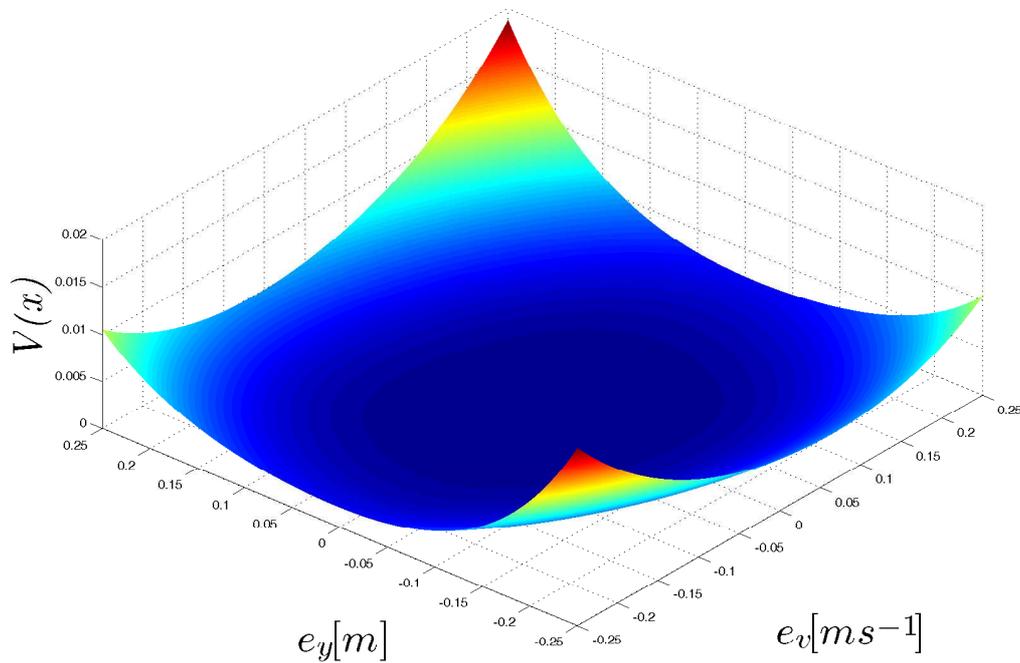


FIGURE 4.6 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance

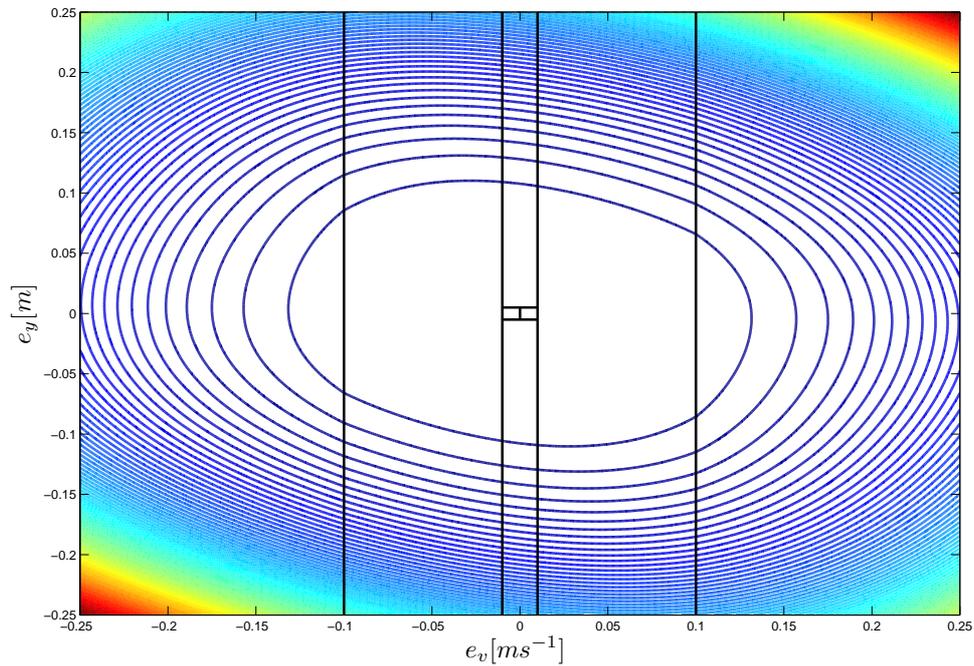


FIGURE 4.7 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance

Discussion 11.

D'après les Figures 4.6 et 4.7, les conditions imposées par le Corolaire 4.5 sont bien vérifiées malgré la variation de frottements, c'est-à-dire :

- La décroissance de La fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre est vérifiée.
- La continuité est assurée sur les frontières.

La stabilité asymptotique de l'ensemble des points d'équilibre a été préservée malgré la variations de paramètres de frottements.

2) Robustesse avec taux de décroissance

Une borne inférieure sur le taux de décroissance a été aussi calculée malgré la variation de frottements. les Figures 4.8 et 4.9 nous montrent les résultats de programmation, avec une borne inférieure sur le taux de décroissance trouvée : $\alpha = 0.4375$.

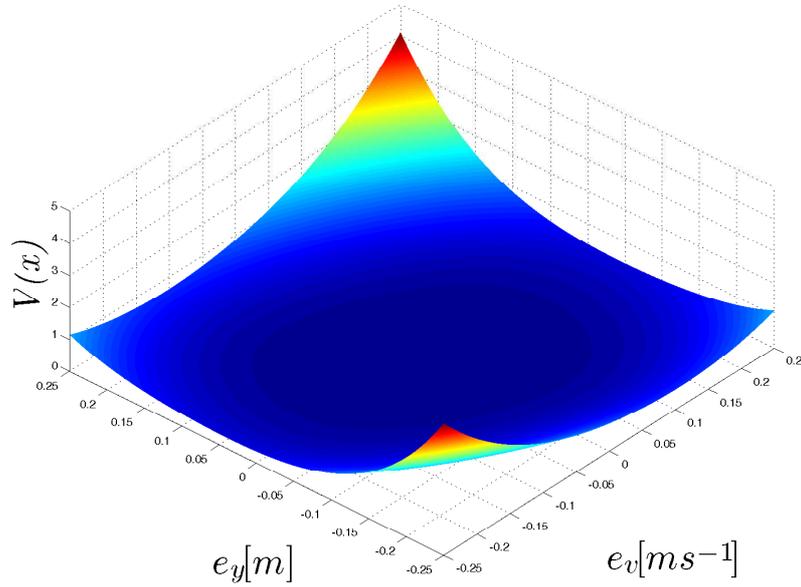


FIGURE 4.8 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance

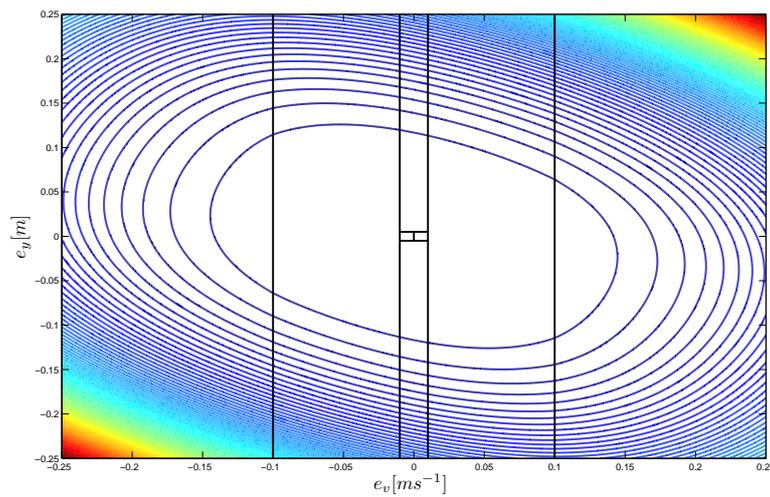


FIGURE 4.9 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance

Discussion 12.

Le résultat est très satisfaisant car d'après les deux figures, les conditions imposées par le Corolaire 4.5 sont bien vérifiées. La stabilité exponentielle de l'ensemble du point d'équilibre a été assurée malgré les variations de frottements avec une légère détérioration de la valeur de la borne inférieure sur le taux de décroissance trouvée par rapport au cas sans variation de frottements.

Suivi de trajectoires désirées

Dans cette partie, le suivi de trajectoires désirées est étudié comme dans le Chapitre 3 page 98. Nous considérons alors la troisième contrainte de commutation concernant la vitesse désirée, et le modèle du système électropneumatique est augmenté par les deux variables générant les trajectoires désirées, voir page 99.

Nous procédons de la même façon que dans le cas deux contraintes de commutation. Alors, nous prenons une fonction polynomiale d'ordre 4, c'est-à-dire $m = 2$. Par ailleurs, le nombre de matrices Q_ν linéairement indépendantes est $\iota = 196$.

Le nouveau vecteur d'état $\chi(x)$ formé à partir du vecteur d'état augmenté $\bar{x}(t)$ est donné comme suit.

$$\begin{pmatrix} e_y \\ v \\ e_{af} \\ e_P \\ \varsigma \\ v_d \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Z(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_4 \\ x_1 x_5 \\ x_1 x_6 \\ x_2 x_3 \\ x_2 x_4 \\ x_2 x_5 \\ x_2 x_6 \\ x_3 x_4 \\ x_3 x_5 \\ x_3 x_6 \\ x_4 x_5 \\ x_4 x_6 \\ x_5 x_6 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Toutes les caractéristiques des cellules, en considérant ce nouveau vecteur d'état, sont présentées à l'Annexe 7.1 page 162.

Résultats numériques

Le Corolaire 4.5 a été appliqué avec succès pour $\alpha = 0$ afin de démontrer la stabilité asymptotique de suivi de trajectoire désirées pour le système PWA précédent.

Nous avons tracé l'intersection et les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov trouvée sur le plan (v, e_y) , voir Figure 4.10 et 4.11, et sur l'espace (v, e_y, v_d) , voir Figure 4.12.

Discussion 13.

D'après les figures 4.10 et 4.11 :

- La décroissance asymptotique de La fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre est vérifiée
- La continuité sur les frontières est assurée.

La stabilité asymptotique de suivi de trajectoire désirées a été assurée car les conditions imposées par le Corolaire 4.5 pour $\alpha = 0$ sont bien vérifiées.

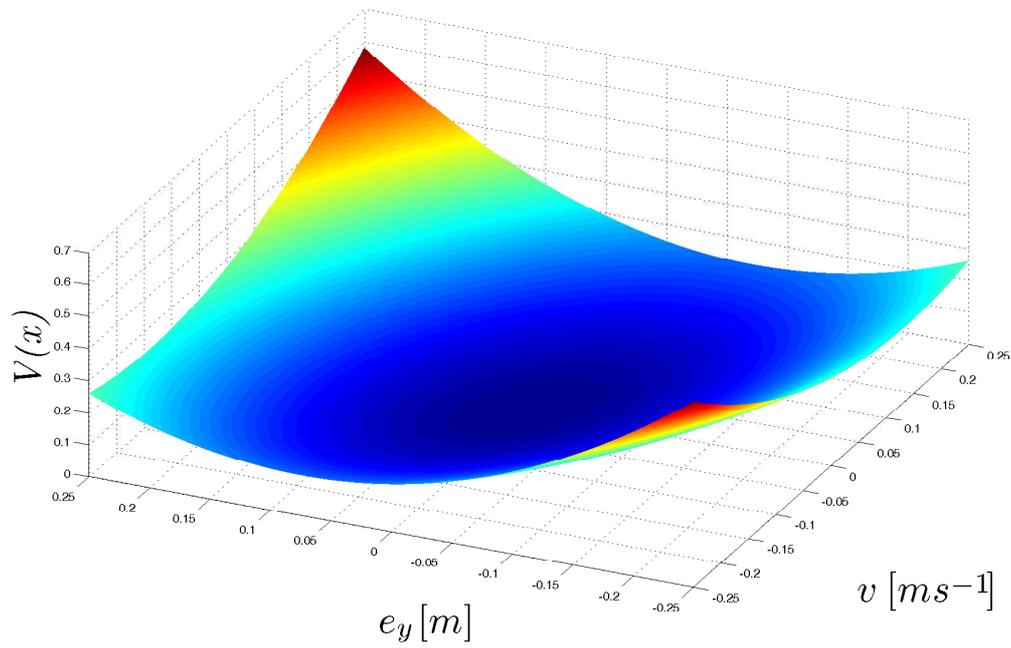


FIGURE 4.10 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi de trajectoires désirées.

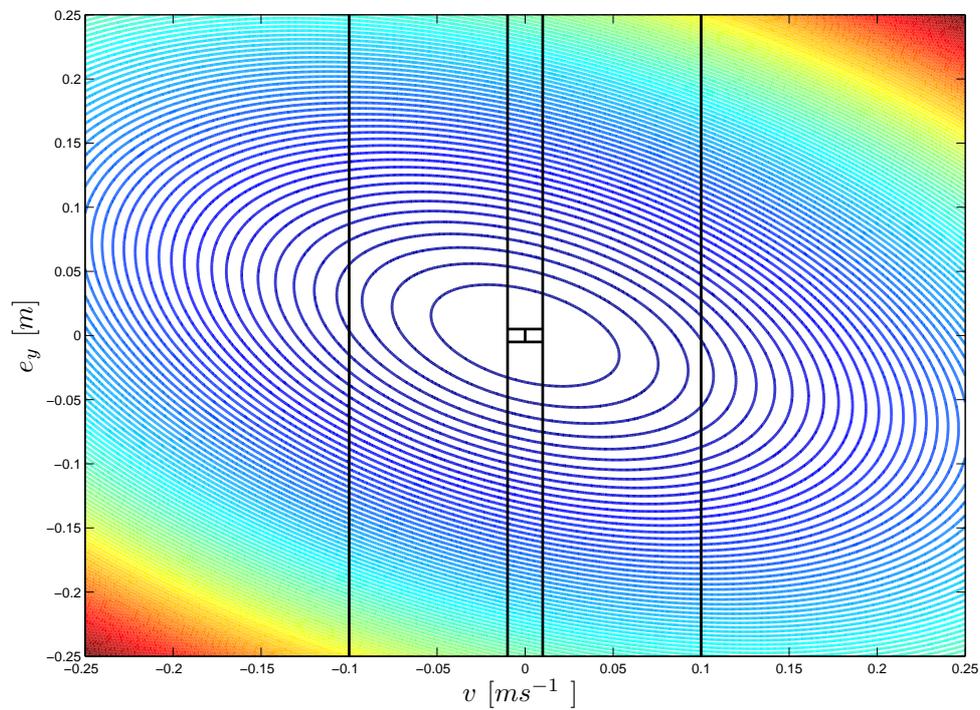


FIGURE 4.11 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi de trajectoires désirées.

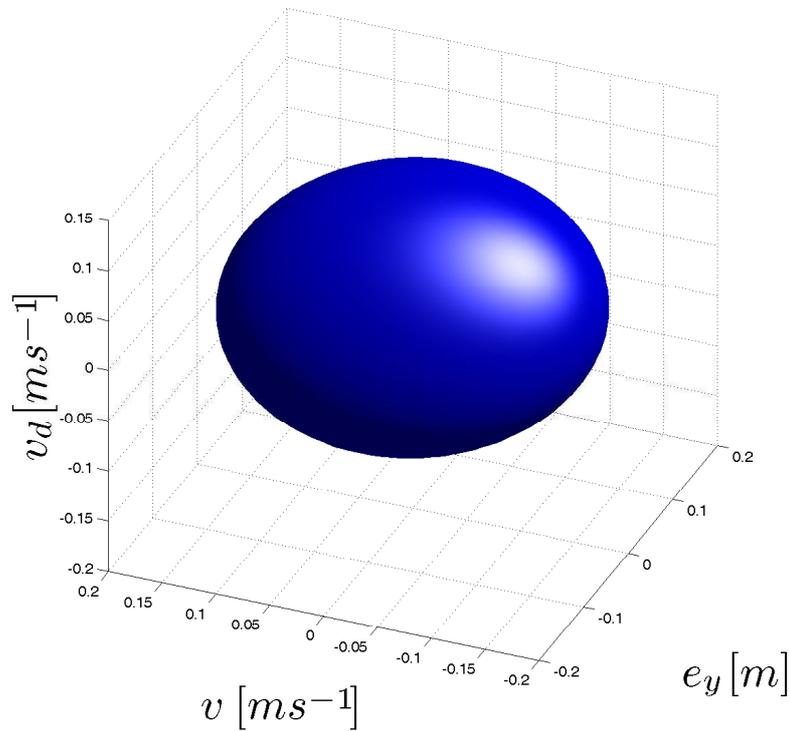


FIGURE 4.12 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (v, e_y, v_d) , frottements sous forme de saturation, suivi de trajectoires désirées.

Étude de Robustesse vis-à-vis de la variation des frottements

Nous avons testé la robustesse vis-à-vis la variation de frottement de la même façon que le cas précédent. L'intersection et les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov ont été tracées sur le plan (v, e_y) , voir Figures 4.13 et 4.14, et sur l'espace (v, e_y, v_d) , voir Figure 4.15.

Discussion 14.

Malgré la variation de frottements, le résultat est très satisfaisant et nous avons réussi à préserver les conditions imposées par le Corolaire 4.5 pour $\alpha = 0$. Alors, la stabilité asymptotique de suivi des trajectoires désirées est garantie et la robustesse est vérifiée vis-à-vis la variation des frottements.

5.2 Frottement modélisé par un relais

Prenons maintenant un modèle de frottements sous forme d'un relais, voir Figure 4.16. Ce modèle présente une discontinuité pour $v = 0$.

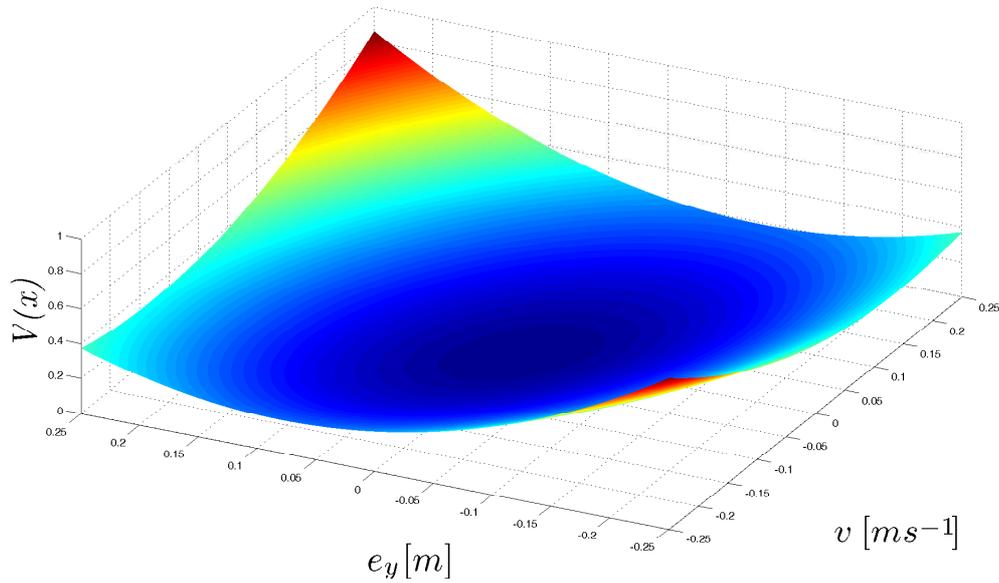


FIGURE 4.13 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi robuste de trajectoires désirées.

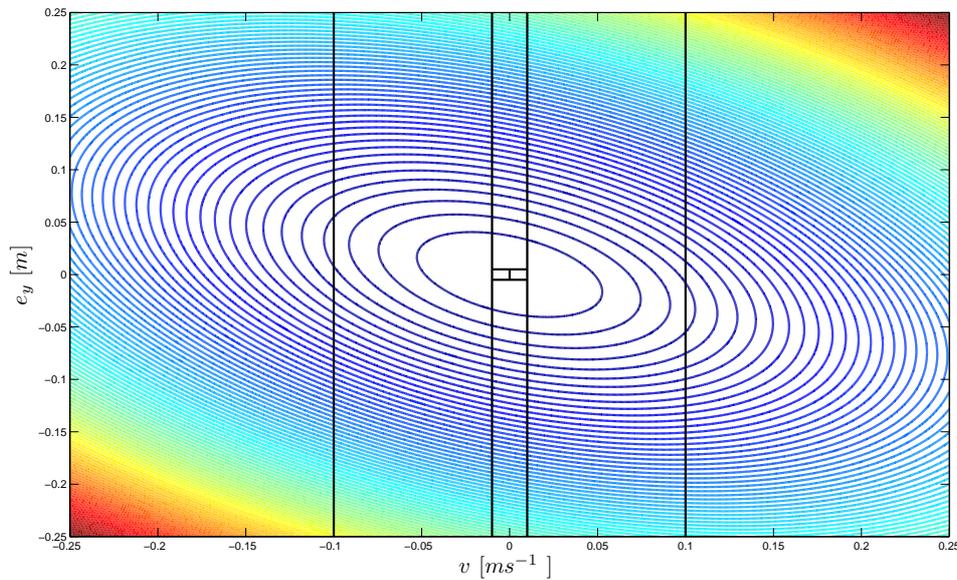


FIGURE 4.14 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , frottements sous forme de saturation, suivi robuste de trajectoires désirées.

Analyse de stabilité

Les commutations dans le système, dues au modèle de frottement et aux lois de commande (deux contraintes de commutation sur la commande), subdivise l'espace d'état en un ensemble de huit cellules, voir Figure 4.17, avec :

- Deux cellules X_{01} and X_{02} contenant l'origine (0 est sur la frontière entre ces deux cellules).

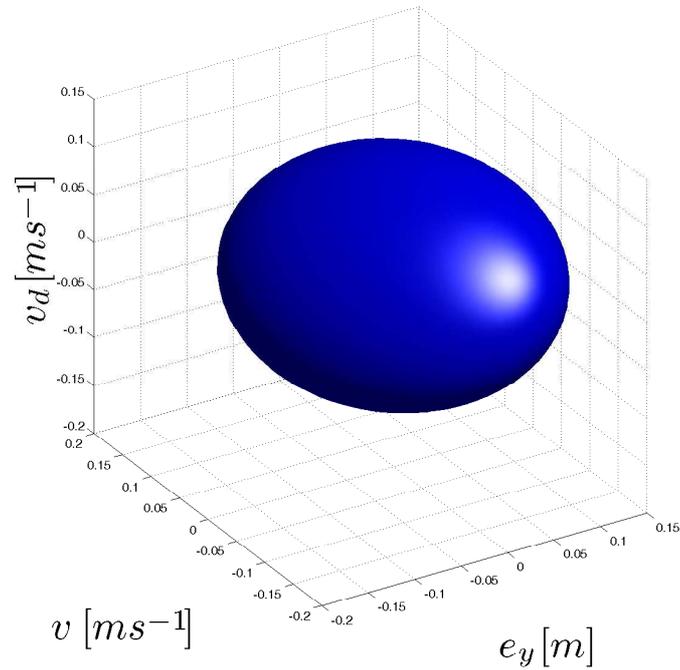


FIGURE 4.15 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (v, e_y, v_d) , frottements sous forme de saturation, suivi robuste de trajectoires désirées.

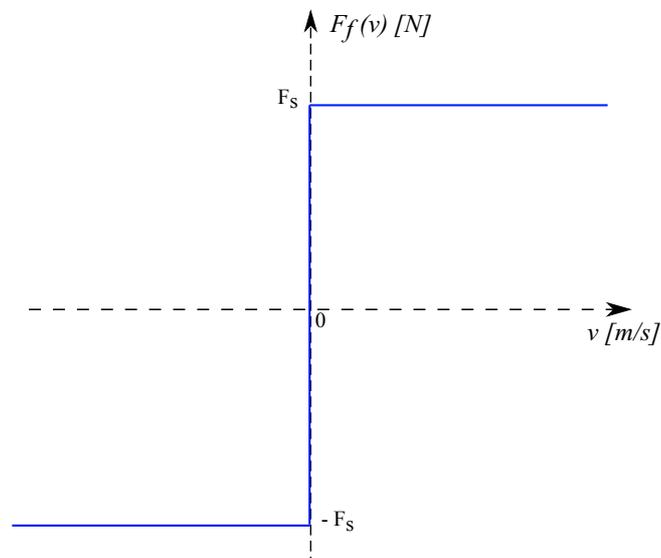


FIGURE 4.16 – Modèle de frottements sous forme d'un relais

- six cellules externes $X_1, X_{1s}, X_2, X_{2s}, X_3$ et X_{3s} , deux par deux symétriques par rapport à l'origine.

La discontinuité du modèle de frottement peut générer des phénomènes de glissement sur la frontière correspondant $v = 0$. Alors, afin de démontrer la stabilité, même en présence de modes glissants, nous sommes obligés de considérer les cellules associées à cette frontière.

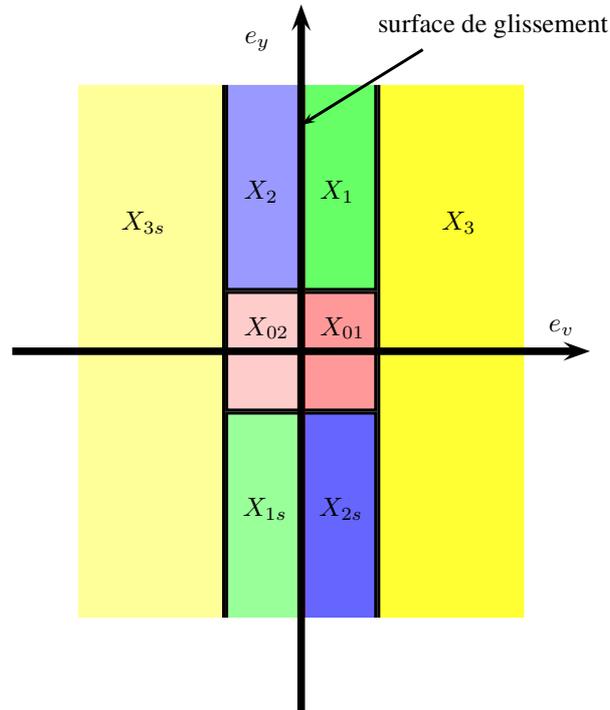


FIGURE 4.17 – Les cellules X_i dans le cas de frottements sous forme d'un relais, intersection avec le plan (e_v, e_y)

Comme dans le cas de frottements sous forme d'une saturation et grâce à la propriété de symétrie vue au Chapitre 2 page 55, on ne considère que les cellules suivantes : X_{01} , X_{02} , X_1 , X_2 et X_3 . Les conditions imposées sur ces cellules seront nécessairement vérifiées par symétrie pour les autres.

La fonction de Lyapunov polynomiale choisie dans ce cas aussi est de degré 4, c'est-à-dire $m = 2$. Alors, le nouveau vecteur d'état χ a la même structure que dans (4.43).

Les nouvelles dynamiques, en considérant le nouveau modèle de frottements, et les descriptions des cellules sont présentées à l'Annexe 7.2 page 164.

On suppose pour cette partie qu'il n'y a pas de variations de frottements, c'est-à-dire $\lambda = 1$ et $k = 1$. Nous faisons aussi l'analyse de stabilité pour une consigne statique, c'est-à-dire nous prenons y_d constant et $v_d = 0$, $a_d = 0$, qui implique dans ce cas $e_v = v$, $e_a = a$.

Stabilité asymptotique

Le Corolaire 4.1 a été appliqué afin de démontrer la stabilité asymptotique avec la possibilité d'avoir des modes glissants. Les différentes contraintes ont été vérifiées en traçant les courbes de niveau et l'intersection de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , voir Figure 4.18 et Figure 4.19.

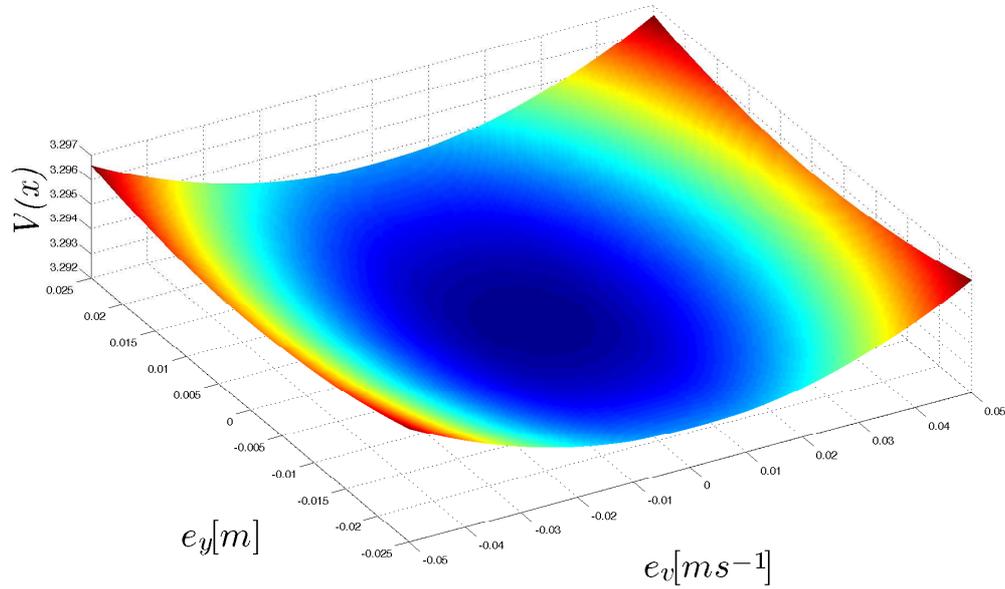


FIGURE 4.18 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité asymptotique

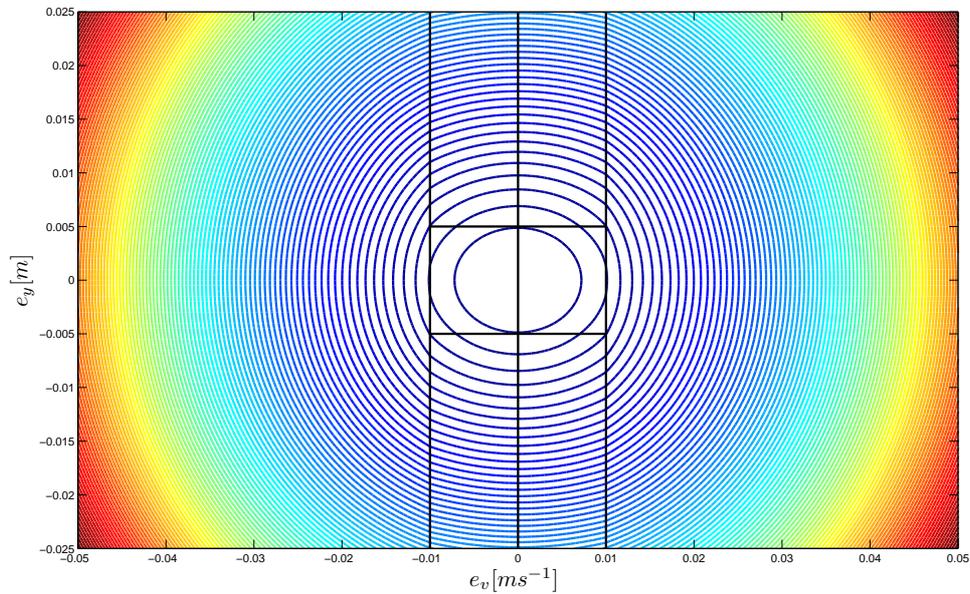


FIGURE 4.19 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité asymptotique

Discussion 15.

D'après les Figures 4.18 et 4.19 :

- Les différentes contraintes imposées dans le Théorèmes 4.1 sont vérifiées, notamment la décroissance de La fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre et la continuité sur les frontières entre deux cellules voisines.
- Nous pouvons remarquer une déformation des courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur les frontières entre les cellules, une fonction de Lyapunov commune peut ne pas être suffisante dans ce cas.
- Les contraintes sur les phénomènes de glissement à $v = 0$ sont bien vérifiées, nous assurons donc la convergence de ces phénomènes, au cas où ils apparaissent, vers l'ensemble des points d'équilibre.

Les conditions imposées par le Corolaire 4.1 sont vérifiées alors l'ensemble des points d'équilibre est stable asymptotiquement.

Stabilité exponentielle et taux de décroissance

Le Théorème 4.1 a été appliqué afin de démontrer la stabilité exponentielle de l'ensemble des points d'équilibre. Toutes les variables de décision apparues dans ce théorème ont été calculées numériquement, notamment les matrices de Lyapunov et la borne inférieure sur le taux de décroissance qui démontrent la stabilité exponentielle de ce système commuté. On a trouvé une faible borne inférieure sur le taux de décroissance, c'est-à-dire $\alpha \approx 0$.

Les courbes de niveau et l'intersection de la fonction de Lyapunov ont été tracées sur le plan (e_v, e_y) , voir Figure 4.20 et Figure 4.21.

Discussion 16.

Les Figures 4.20 et 4.21 montrent que :

- La décroissance de la fonction de Lyapunov vers l'ensemble des points d'équilibre est vérifiée.
- La continuité sur les frontières (représentées par des droites) entre deux cellules voisines est assurée.

Les conditions imposées par le Théorème 4.1 sont vérifiées, l'ensemble des points d'équilibre est stable exponentiellement, avec une borne inférieure sur le taux de décroissance de valeur proche de 0.

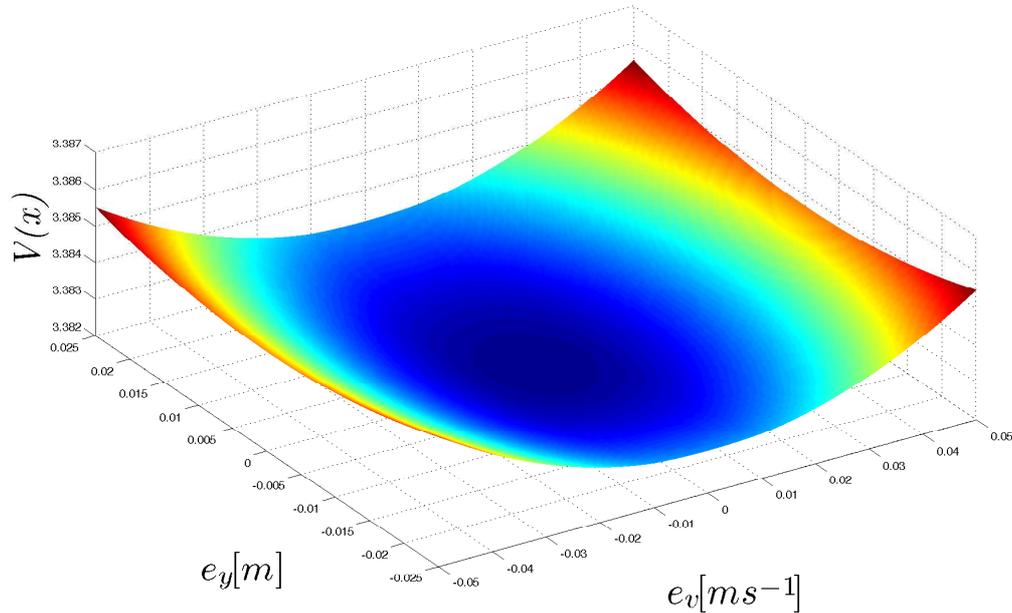


FIGURE 4.20 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité exponentielle

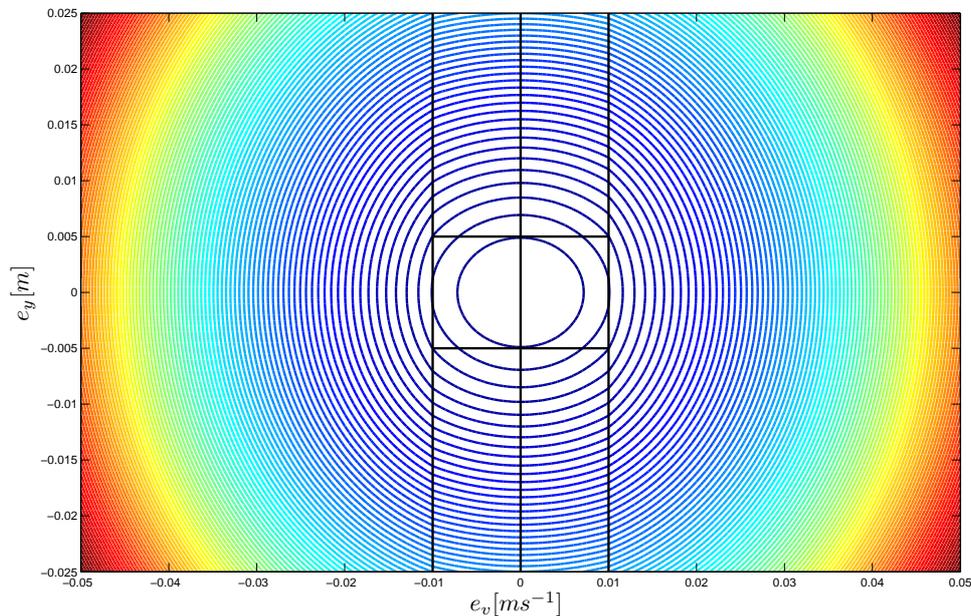


FIGURE 4.21 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, stabilité exponentielle

Étude de Robustesse vis-à-vis de la variation des frottements :

La robustesse vis-à-vis des variations de frottements a été testée comme dans le cas de frottement sous forme d'une saturation, en considérant le modèle de frottement incertain dans la Figure 3.6 qui est présenté comme suit, avec $k = 1, 2$:

$$\begin{cases} F_s(\lambda) = \lambda_1 F_{s_{max}} + \lambda_2 F_{s_{min}} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (4.46)$$

1) Robustesse sans taux de décroissance

Le Corolaire 4.3 a été appliqué afin de préserver la stabilité asymptotique malgré la variation de frottements.

Les résultats d'application sont montrés dans les Figures 4.22 et 4.23.

Discussion 17.

D'après les deux Figures 4.22 et 4.23, nous avons réussi à préserver les conditions imposées par le Corolaire 4.3 malgré les variations de paramètres de frottements. Alors, la stabilité asymptotique est garantie et la robustesse est vérifiée vis-à-vis de la variation de frottements.

2) Robustesse avec taux de décroissance

Le Théorème (4.2) a été appliqué dans ce cas afin de préserver la stabilité exponentielle et calculer une borne inférieure sur le taux de décroissance malgré la variation de frottements.

Les résultats d'application sont présentés dans les Figures 4.24 et 4.25, avec une borne inférieure sur le taux de décroissance trouvée toujours proche de 0.

Discussion 18.

D'après les deux figures, les conditions imposées par le Théorème 4.2 sont bien vérifiées. La stabilité exponentielle de l'ensemble du point d'équilibre a été assurée et nous avons pu trouver une borne inférieure sur le taux de décroissance malgré les variations de frottements .

Suivi de trajectoires désirées

Dans cette partie, le suivi de trajectoires désirées est étudié comme dans le cas de frottements sous forme d'une saturation, voir page 141. nous prenons toujours une fonction polynomiale d'ordre 4, c'est-à-dire $m = 2$. Le nombre de matrices Q_ν linéairement indépendantes est $\iota = 196$. Le nouveau vecteur d'état $\chi(x)$ formé à partir du vecteur d'état augmenté $\bar{x}(t)$ a la même structure que dans (4.45).

Toutes les caractéristiques des cellules, en considérant ce nouveau vecteur d'état et ce modèle de frottements, sont présentées à l'Annexe 7.2 page 168.

Résultats numériques

Le Corolaire 4.1 a été appliqué avec succès afin de démontrer la stabilité asymptotique de suivi de trajectoire désirées. Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov trouvée ont été tracées

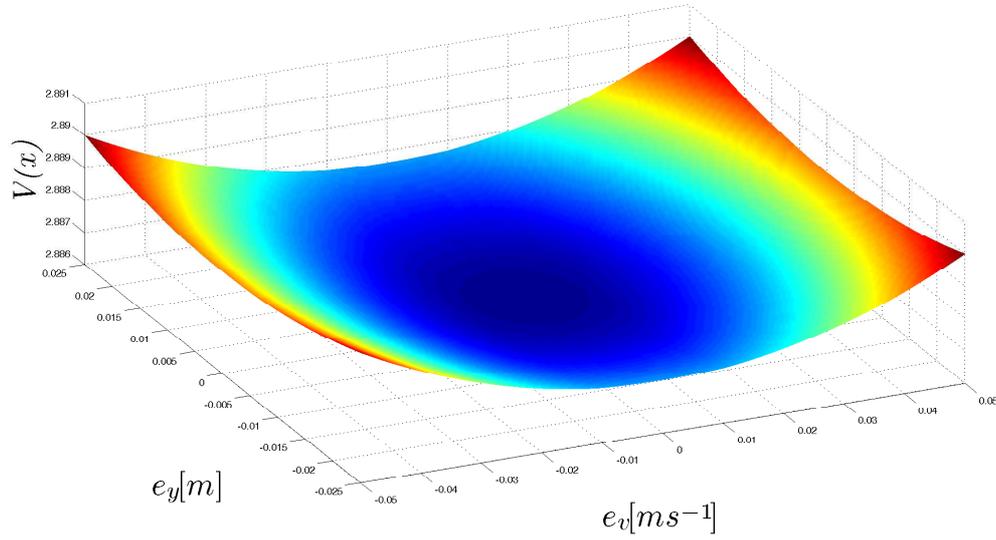


FIGURE 4.22 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance

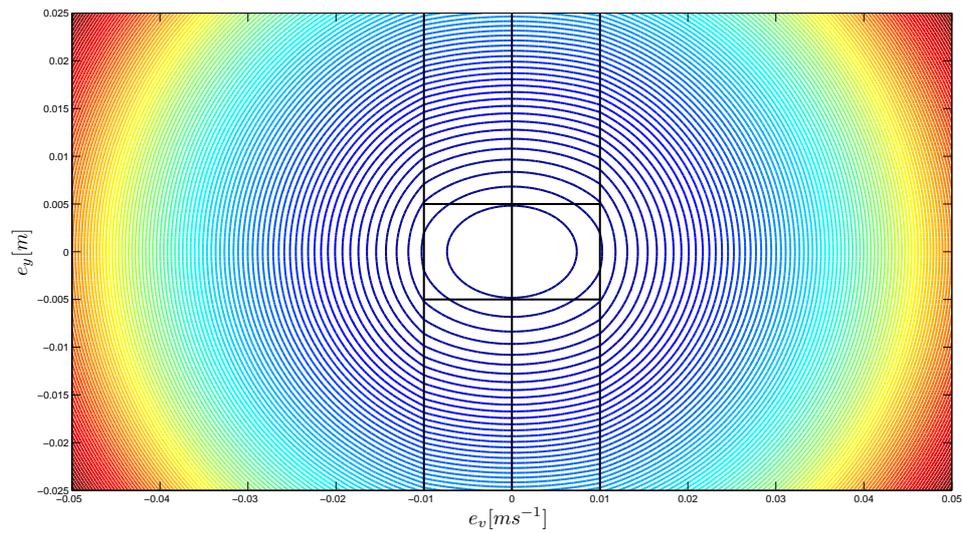


FIGURE 4.23 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse sans taux de décroissance

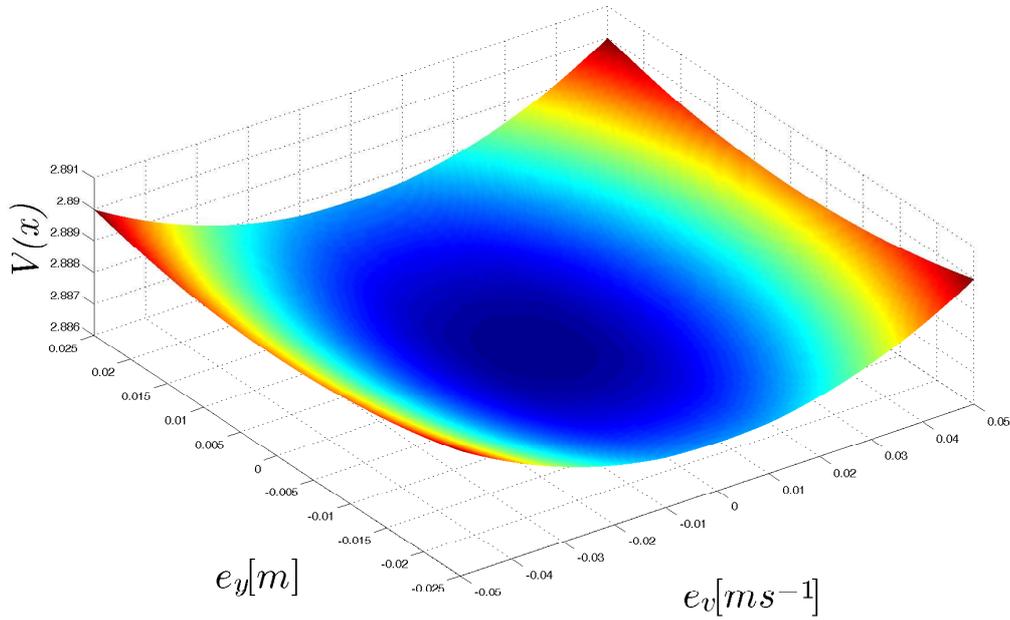


FIGURE 4.24 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance

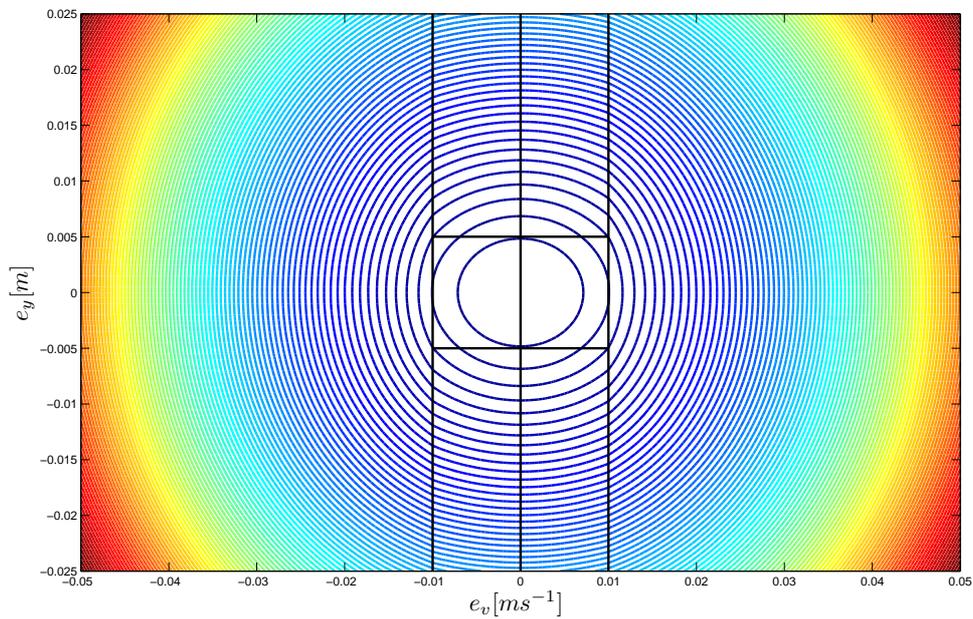


FIGURE 4.25 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, analyse de stabilité, robustesse avec taux de décroissance

sur le plan (e_v, e_y) , voir Figure 4.26, et sur l'espace (v, e_y, v_d) , voir Figure 4.27.

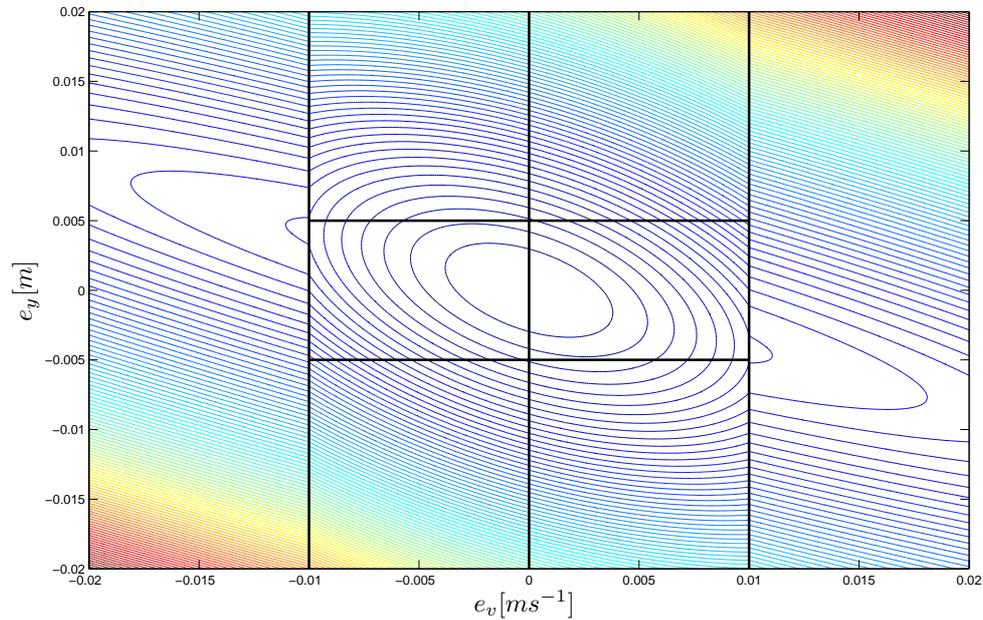


FIGURE 4.26 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, suivi de trajectoires désirées.

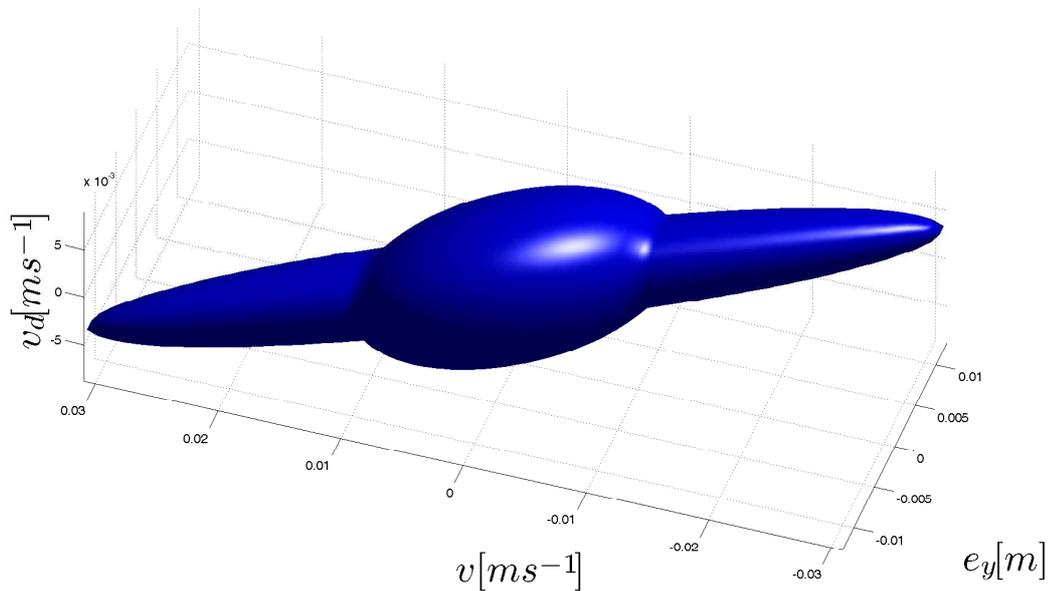


FIGURE 4.27 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (v, e_y, v_d) , relais, suivi de trajectoires désirées.

Discussion 19.

D'après les deux Figures 4.26 et 4.27, la stabilité asymptotique de suivi de trajectoires désirées a été assurée car les conditions imposées par le Corolaire 4.1 sont bien vérifiées. nous pouvons remarquer de grandes déformations des courbes de niveaux sur les frontières entre les cellules voisines, qui suggère qu'une fonction de Lyapunov polynomiale commune peut ne pas être suffisante.

Stabilité robuste

Nous avons aussi testé la robustesse vis-à-vis de la variation de frottement en appliquant le Corollaire 4.3. L'intersection et les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov ont été tracées sur le plan (e_v, e_y) , voir Figures 4.28 et 4.29, et sur l'espace (v, e_y, v_d) , voir Figure 4.30.

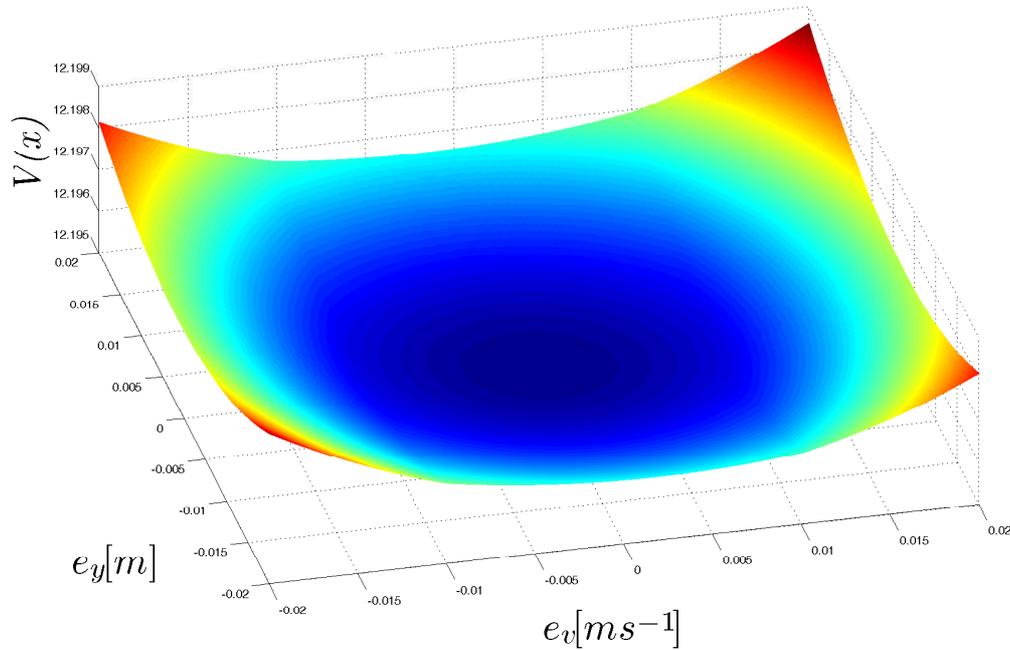


FIGURE 4.28 – Intersection de la fonction de Lyapunov avec le plan (e_v, e_y) , relais, suivi robuste de trajectoires désirées

Discussion 20.

Nous avons aussi réussi à préserver la stabilité du suivi de trajectoires désirées en vérifiant les conditions imposées par le Corollaire 4.3, voir les deux figures, malgré la variation de frottements et la possibilité d'avoir de modes glissants sur les frontières entre les cellules voisines.

6 CONCLUSION

Le Tableau 4.1 contient les résultats de tous les cas d'application des théorèmes proposés sur le système électropneumatique ; à savoir la stabilité, stabilité robuste, suivi de trajectoires désirées et le suivi robuste, en considérant les deux modèles de frottement et les deux formes de fonction de Lyapunov.

Nous pouvons remarquer l'efficacité de l'approche basée sur les fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux pour démontrer d'une part, la stabilité même en présence de modes glissants et incertitudes paramétriques et d'autre part, trouver une borne inférieure moins conservatrice sur le taux de décroissance par rapport aux fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux, à la

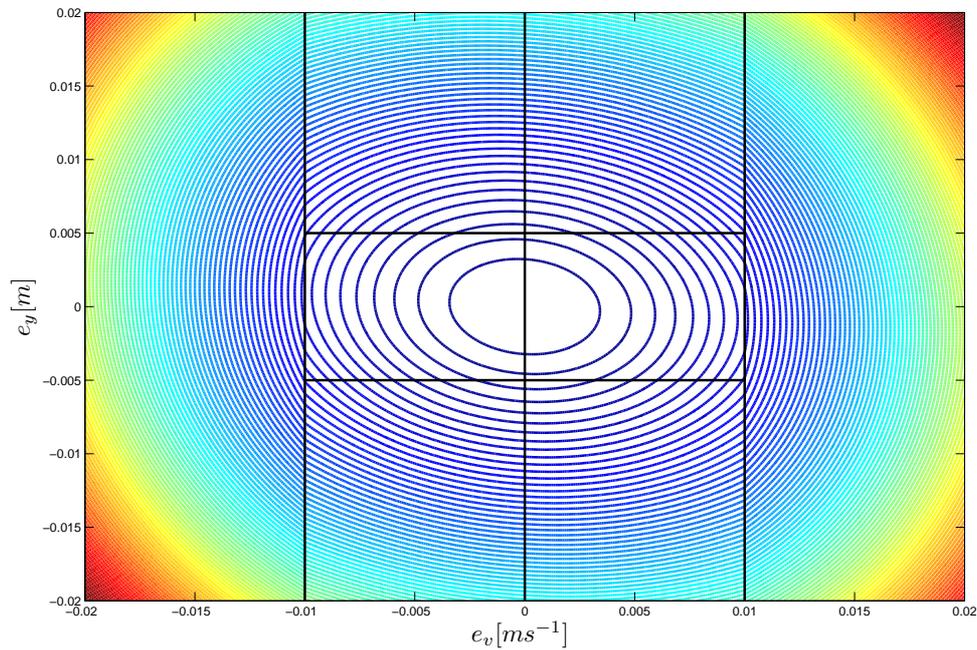


FIGURE 4.29 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur le plan (e_v, e_y) , relais, suivi robuste de trajectoires désirées

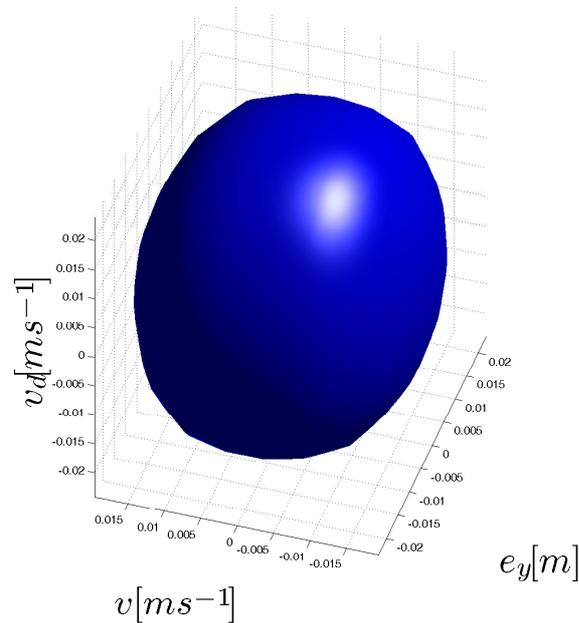


FIGURE 4.30 – Les courbes de niveau de la fonction de Lyapunov sur l'espace (e_y, v, v_d) , relais, suivi robuste de trajectoires désirées

fois pour les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux et polynomiales par morceaux ce qui va permettre de faire la comparaison des résultats obtenus dans les deux cas.

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes ont été proposées pour trouver des fonctions de

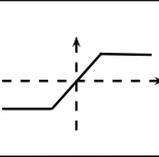
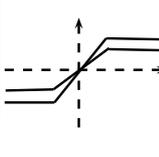
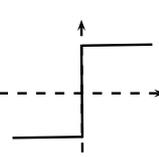
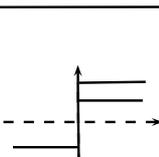
	Degré de la fonction de Lyapunov	Analyse de la Stabilité	Suivi de trajectoires désirées	Variables (a) Taille des LMI (b) Taille des LME (c)
	$m = 1$	faisable avec $\alpha = 0.4747$	faisable	a = 151 b = 36 c = 20
	$m = 2$	faisable avec $\alpha = 0.4753$	faisable	a = 1115 b = 114 c = 60
	$m = 1$	faisable avec $\alpha = 0.3625$	faisable	a = 171 b = 54 c = 20
	$m = 2$	faisable avec $\alpha = 0.4375$	faisable	a = 1135 b = 171 c = 60
	$m = 1$	infaisable	infaisable	infaisable
	$m = 2$	faisable avec $\alpha \approx 0$	infaisable	a = 1451 b = 200 c = 121
	$m = 1$	infaisable	infaisable	infaisable
	$m = 2$	faisable avec $\alpha \approx 0$	faisable	a = 1645 b = 323 c = 121

TABLE 4.1 – Tous les cas d'étude sur le vérin électropneumatique

Lyapunov polynomiales par morceaux pour les systèmes PWA avec des modes glissants, en présence d'incertitudes sur le modèle de frottements et présentant un ensemble de points d'équilibre autre que l'origine, et potentiellement sur un mode glissant.

Cette nouvelle approche a été appliquée sur le système électropneumatique avec sa commande modélisé comme un système PWA avec des modes glissants et des incertitudes dues à la présence de frottements, pour lequel les approches basées sur la fonction de Lyapunov quadratique par morceaux n'étaient pas applicables.

Avec cette approche, on a réussi à trouver une fonction de Lyapunov polynomiale par morceaux de degré 4 à travers un problème d'optimisation en termes d'inégalités matricielles linéaires. Par ailleurs, d'après le Tableau 4.1, le nombre de variables de décision et les contraintes LMI a augmenté lors du passage de la forme quadratique à la forme polynomiales, ce qui augmente un peu plus la complexité de résolution. Cependant, cette complexité reste raisonnable vis-à-vis la capacité des algorithmes de résolution.

7 ANNEXES

7.1 Frottement sous forme d'une saturation

Nous spécifions dans cette partie les caractéristiques des cellules X_i considérées pour analyser la stabilité du système électropneumatique, voir page 133.

Analyse de stabilité

Cellule centrale X_0 :

Dans cette cellule, les critères de commutation sur la commande sont satisfaites, on est donc dans la phase régulation des deux pressions. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule centrale où on a uniquement les frottements visqueux. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

Il n'y a pas de terme affine $a_0 = 0$, donc $\tilde{A}_0 \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$.

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 - \frac{F_s}{M\varepsilon} & a_3 & 0 & 0 & \frac{F_s b_v}{M^2 \varepsilon} - \frac{k_N}{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P - \frac{F_s}{M\varepsilon} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -k_N - k_P - \frac{b_v}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2F_s}{M\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_1 & 0 & 2a_3 & 0 & 0 & -2k_N - \frac{2b_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \begin{cases} a_1 = \frac{k_N b_v}{M} - \frac{F_s b_v}{M^2 \varepsilon} \\ a_2 = -k_N - \frac{b_v}{M} \\ a_3 = \frac{S_P (K_N - k_P)}{M} \end{cases}$$

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule en tenant compte de la relation (4.12) est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_1 :

Concernant cette cellule, la contrainte est donnée par :

$$\begin{cases} |e_y| > \varepsilon_1 \\ |v| \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

Dans ce cas là, le critère de commutation sur la position n'est pas satisfait, on est donc dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, on est toujours dans la cellule centrale où on a uniquement les frottements visqueux. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

$$\tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_y & a_6 & -k_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & -k_a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & -k_a + a_4 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P + a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 & a_6 & -k_a - k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_y & 0 & 2a_5 - 2k_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} a_4 = -\frac{F_s}{M\varepsilon} \\ a_5 = \frac{F_s k_a}{M\varepsilon} \\ a_6 = a_2 - k_v \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_3 :

La contrainte de commutation sur cette cellule est donnée par :

$$\varepsilon_2 < v < \varepsilon$$

Dans ce cas là, on est toujours dans la phase poursuite de position avec des frottements dynamiques. La dynamique est la même que dans la cellule X_1 .

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_5 :

Les contraintes sont données par :

$$|v| > \varepsilon$$

Dans ce cas là, c'est le critère de commutation sur la vitesse qui n'est pas satisfait, on est donc dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, on est dans les cellules extérieures où on a uniquement la partie statique. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

$$\tilde{A}_5 \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$$

$$\tilde{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M} \\ -k_y & -k_v & -k_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_s k_a}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_s k_a}{M} & 0 & 0 & 0 & -k_v & -k_a & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_s k_a}{M} & -\frac{F_s}{M} & 0 & -k_y & 0 & 0 & -k_a & 0 & 0 & 0 & -k_v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_s k_a}{M} & 0 & 0 & -k_y & 0 & -k_v & -k_a & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2F_s k_a}{M} & 0 & 0 & -2k_y & 0 & -2k_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_5 = (01000000000000-\varepsilon)$$

Les matrices \tilde{F}_{ij} exprimant la frontière entre chaque cellule X_i et X_j :

- entre les cellules X_1 et X_0 : $\tilde{F}_{10} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_1)$
- entre les cellules X_1 et X_3 : $\tilde{F}_{13} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_2)$
- entre les cellules X_3 et X_0 : $\tilde{F}_{30} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_2)$
- entre les cellules X_3 et X_5 : $\tilde{F}_{35} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon)$

Suivi de trajectoires désirées

Dans cette partie, nous spécifions les caractéristiques des cellules X_i considérées pour étudier le suivi de trajectoires désirées pour le système électropneumatique, voir page 141.

Cellule centrale X_0 :

Dans cette cellule, les critères de commutation sur la commande sont satisfaites, on est donc dans la phase régulation des deux pressions. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule centrale où on a uniquement les frottements visqueux. Alors, la dynamique dans cette cellule est $\tilde{A}_0 \in \mathbb{R}^{27 \times 27}$ (elle n'est pas affichée à cause de sa grande dimension). Il n'y a pas de terme affine $a_0 = 0$.

$\tilde{A}_{01} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M} \\ 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & a_8 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_s b_v}{M^2} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_s b_v}{M^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & a_8 & a_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_s b_v}{M^2} & -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_7 & 0 & 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_s b_v}{M^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & -k_P + a_8 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2F_s b_v}{M^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2k_N b_v}{M} & 0 & 2a_7 & 0 & 0 & 2a_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} a_7 = \frac{S_P (K_N - k_P)}{M} \\ a_8 = -k_N - \frac{b_v}{M} \end{cases}$$

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ 0 \leq v \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule en tenant compte de la relation (4.12) est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_{02} :

Dans cette cellule, les critères de commutation sur la commande sont aussi satisfaites, on est donc toujours dans la phase régulation des deux pressions. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule où on a la partie statique négative de frottements. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

$$\tilde{A}_{02} \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$$

$$\tilde{A}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_s}{M} \\ 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & a_8 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s b_v}{M^2} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{F_s b_v}{M^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_N b_v}{M} a_8 & a_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s b_v}{M^2} & \frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_7 & 0 & 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s b_v}{M^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_N b_v}{M} & -k_P + a_8 & 0 & 0 & 0 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2F_s b_v}{M^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2k_N b_v}{M} & 0 & 2a_7 & 0 & 0 & 2a_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \leq v \leq 0 \end{cases}$$

La matrice qui définit cette cellule en tenant compte de la relation (4.12) est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_1 :

Concernant cette cellule, la contrainte est donnée par :

$$\begin{cases} e_y > \varepsilon_1 \\ 0 \leq v \leq \varepsilon_2 \end{cases}$$

Dans ce cas là, le critère de commutation sur la position n'est pas satisfait, on est donc dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule où on a la partie statique positive de frottements. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

$$\tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$$

$\tilde{A}_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M} \\ -k_y & -k_v & -k_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_s k_a}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_s k_a}{M} & 0 & 0 & 0 & -k_v & -k_a & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_s k_a}{M} & -\frac{F_s}{M} & 0 & -k_y & 0 & 0 & -k_a & 0 & 0 & 0 & -k_v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_s k_a}{M} & 0 & 0 & -k_y & 0 & -k_v & -k_a & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2F_s k_a}{M} & 0 & 0 & -2k_y & 0 & -2k_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice \tilde{E}_1 qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_2 :

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} e_y > \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \leq v \leq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas là, le critère de commutation sur la position n'est pas aussi satisfait, on est donc toujours dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule où on a la partie statique négative de frottements. Alors, la dynamique dans cette cellule peut être écrite comme suit.

$$\tilde{A}_2 \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$$

$\tilde{A}_2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_s}{M} \\ -k_y & -k_v & -k_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s k_a}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_s k_a}{M} & 0 & 0 & 0 & -k_v & -k_a & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_s k_a}{M} & \frac{F_s}{M} & 0 & -k_y & 0 & 0 & -k_a & 0 & 0 & 0 & -k_v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F_s k_a}{M} & 0 & 0 & -k_y & 0 & -K_v - k_a - k_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2F_s}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2F_s k_a}{M} & 0 & 0 & -2k_y & 0 & -2k_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice \tilde{E}_2 qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_3 :

Concernant cette cellule, la dynamique est la même que celle de la cellule x_1 , dans ce cas donc :

$$\tilde{A}_3 \in \mathbb{R}^{15 \times 15} \text{ avec } \tilde{A}_3 = \tilde{A}_1.$$

La matrice \tilde{E}_3 qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_3 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\varepsilon_2)$$

Suivi de trajectoires désirées

Nous spécifions dans cette partie les caractéristiques des cellules X_i considérées afin d'analyser le suivi de trajectoires désirées pour système électropneumatique, voir page 151.

Cellule centrale X_{01} :

Dans cette cellule, les critères de commutation sur la commande sont satisfaites, on est donc dans la phase régulation des deux pressions. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule où on a la partie statique positive de frottements. Alors, la dynamique dans cette cellule est $\tilde{A}_{01} \in \mathbb{R}^{28 \times 28}$

$$\tilde{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00000000000000000000000000000000 & -\varepsilon_1 \\ 0 & -1 & 00000000000000000000000000000000 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & 00000000000000000000000000000000 & 0 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_{12} :

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} e_y > \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \leq v \leq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas là, le critère de commutation sur la position n'est pas aussi satisfait, on est donc toujours dans la phase poursuite de position. Et vis-à-vis des frottements, on est dans la cellule où on a la partie statique négative de frottements. La dynamique dans cette cellule est $\tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}^{28 \times 28}$.

La matrice \tilde{E}_{12} qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00000000000000000000000000000000 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 00000000000000000000000000000000 & \varepsilon_2 \\ 0 & -1 & 00000000000000000000000000000000 & 0 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_{21} :

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ 0 \leq v \leq \varepsilon_2 \\ v_d \geq \varepsilon_3 \end{cases}$$

La dynamique est la même que dans la cellule X_{11} , c'est à dire $\tilde{A}_{21} = \tilde{A}_{11}$.
La matrice qui définit cette cellule est donnée comme suit.

$$\tilde{E}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00000000000000000000000000000000 & \varepsilon_1 \\ -1 & 0 & 00000000000000000000000000000000 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 00000000000000000000000000000000 & 0 \\ 0 & -1 & 00000000000000000000000000000000 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 00010000000000000000000000000000 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Cellule extérieure X_{22} :

Les contraintes sur cette cellule sont données par :

$$\begin{cases} |e_y| \leq \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \leq v \leq 0 \\ v_d \geq \varepsilon_3 \end{cases}$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

AU cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés d'une part, à l'étude du phénomène de redécollage d'une application Fluid Power (l'actionneur électropneumatique) en proposant une technique de synthèse basée sur une loi de commande commutée afin d'éviter ce phénomène et d'autre part, à l'analyse de la stabilité de ce système avec sa loi de commande commutée modélisé comme un système affine par morceaux, en proposant deux approches basées sur les fonctions de Lyapunov dites par morceaux, quadratiques et polynomiales.

Du point de vue de l'application, ce phénomène de redécollage est rencontré dans le domaine Fluid Power depuis de nombreuses années. Il concerne toutes les commandes mono et multidimensionnelles développées dans le laboratoire (retour d'état sur linéarisé tangent, backstepping, mode glissant,...) et se traduit par le redécollage du vérin électropneumatique du fait que le système atteint l'équilibre mécanique alors que l'équilibre pneumatique n'est pas obtenu. Autrement dit, comme les températures des chambres ne sont pas stabilisées, l'effort pneumatique continue à évoluer du fait de l'évolution des pressions dans les chambres pneumatiques alors que la position est en équilibre partiel mécanique.

Afin de limiter ce phénomène de redécollage, l'idée de base développée dans [130] est alors d'utiliser une commande en position pour le suivi de trajectoire en position et en pression, et si celui-ci comporte des phases d'équilibre mécanique, de commuter sur deux régulations de pressions avec des pressions désirées choisies comme étant les pressions au moment de la commutation. Cette méthode a permis d'avoir un effort pneumatique constant qui limite l'apparition du phénomène de redécollage pendant l'équilibre mécanique. Cependant, comme nous l'avons remarqué au Chapitre 1, dans le cas de variation de frottements secs, cette solution peut alors poser problème et peut ne pas empêcher le redécollage.

Durant ces travaux de thèse, nous avons proposé une approche alternative afin d'éviter ce phénomène de redécollage même en présence des variations de frottements. Tout comme dans [130], notre approche consiste à maintenir l'effort pneumatique constant ; par contre, contrairement à [130] cette valeur est prise égale à 0 pendant l'équilibre partiel mécanique. Cette technique a été mise en œuvre en simulation, puis elle a été appliquée sur le vérin électropneumatique et des résultats satisfaisants ont ainsi été obtenus.

Concernant l'analyse de stabilité, considérée comme un deuxième objectif de ces travaux, la présence de frottements secs et la commutation entre les lois de commande a rendu au départ l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée très compliquée à réaliser. Par ailleurs, l'utilisation de la commande non linéaire linéarisante, qui annule les effets non linéaires grâce au retour linéarisant à l'exception des frottements, et l'approximation des frottements secs par des dynamiques par morceaux nous a permis de modéliser le système en boucle fermée comme un système affine par morceaux, pour lequel plusieurs résultats d'analyse de stabilité ont été proposés dans la littérature. Pour cette classe de systèmes, nous nous sommes intéressés aux fonctions de Lyapunov par morceaux, quadratiques et polynomiales, car ces fonctions donnent de meilleurs résultats d'analyse que d'autres. Cependant, les travaux de la littérature, qui proposent des conditions suffisantes en transformant le calcul de fonctions de Lyapunov en un problème d'optimisation sous contraintes LMI via la S-procédure, peuvent analyser la stabilité uniquement

d'un point d'équilibre des systèmes PWA, et ne permettent pas de l'assurer pour des systèmes présentant un ensemble de points d'équilibre, qui est le cas de l'actionneur électropneumatique avec sa loi de commande commutée. L'objectif principal de cette thèse était la réalisation de cette démarche, c'est-à-dire étendre les résultats de la littérature, en proposant un moyen pour analyser la stabilité d'un ensemble de points d'équilibre du système PWA, en présence des modes de glissements et de variations paramétriques dans le système PWA.

À l'issue de ces trois ans d'étude, nous pouvons dire que les objectifs ont été atteints et que les exigences ont été respectées. En effet, nous avons développé les résultats ci-dessous.

- Le premier résultat est inspiré de ceux développés dans [69] et [54]. Des conditions suffisantes de stabilité ont été proposées, qui permettent le calcul d'une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI. L'avantage de la méthode proposée, contrairement aux méthodes classiques, est qu'elle permet l'analyse de la stabilité d'un ensemble de points d'équilibre d'un système PWA, et aussi l'étude de la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques dans le système. Nous avons appliqué cette méthode avec succès pour le cas du système électropneumatique. La stabilité a été assurée en prenant un modèle de frottements sous forme d'une saturation, et la robustesse a été garantie en faisant varier les seuils de ce modèle de frottements.
- Cependant, comme nous avons pu le voir précédemment, les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux peuvent ne pas être le bon choix pour analyser la stabilité des systèmes PWA, spécialement pour ceux présentant des modes de glissement. Ce qui nous a motivé dans nos travaux de recherche pour proposer une alternative tout en assurant des conditions moins conservatives de stabilité. En effet, dans le Chapitre 4, nous avons proposé des conditions suffisantes moins conservatives basées sur des fonctions de Lyapunov polynomiales par morceaux, via l'utilisation des SOS et de la power transformation. Ces conditions peuvent être vérifiées, en étendant le résultat précédent sur les fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux, en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Ce passage vers des fonctions de Lyapunov polynomiales de degré plus élevé que celui de la fonction quadratique nous a permis d'imposer des critères plus généraux et moins conservatifs afin d'analyser la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre des PWA, présentant des modes de glissement et des variations paramétriques. Concernant le système électropneumatique, en prenant un modèle de frottements sous forme d'un relais, le système en boucle fermée avec sa loi de commande commutée peut présenter des phénomènes de glissement à cause de la discontinuité du modèle de frottements; l'application de la méthode proposée nous a donc permis d'assurer la stabilité de l'ensemble des points d'équilibre pour ce système électropneumatique en considérant la possibilité d'avoir des phénomènes de glissement et/ou des variations de paramètres du système.

PERSPECTIVES

Les travaux de recherche effectués durant les trois années de thèse ont donné lieu à plusieurs perspectives intéressantes.

- Sur le plan applicatif, la contribution principale de la thèse, c'est-à-dire une méthode d'analyse de stabilité des systèmes modélisés sous forme de PWA, peut être appliquée à d'autres domaines d'application, notamment en Génie Électrique, au Laboratoire Ampère, sur les convertisseurs et les moteurs électriques présentant un ensemble de points d'équilibre en asservissement de position. Par ailleurs, il serait intéressant aussi d'appliquer ces méthodes afin d'analyser la stabilité des systèmes commutés entre plusieurs actionneurs comme dans

le cas de domaine aéronautique.

- La deuxième perspective concerne l'étude de performances des systèmes non linéaires. En effet, après l'apparition des méthodes H_∞ par [141], une grande importance a été accordée à des propriétés d'entrée/sortie de système, utilisées comme un moyen pour parvenir à réduire la sensibilité, même en présence de perturbations et d'incertitudes. Pour les systèmes LTI, les méthodes H_∞ et L_2 -gain [133] assurent efficacement les performances de cette classe de systèmes. Cependant, pour les systèmes non linéaires, ces méthodes deviennent inefficaces. Un nouveau concept, appelé norme incrémentale, est alors proposé dans la littérature [47], qui est considéré comme un candidat très convenable pour l'élaboration d'une théorie non linéaire de la méthode H_∞ . Cependant, la complexité des conditions à vérifier généralement dans ces méthodes rend leur utilisation très limitée.

La modélisation des systèmes non linéaires par des système PWA simplifie énormément l'analyse de performances de tels systèmes. En effet, la notion de L_2 -gain incrémental a été introduit dans la littérature [110, 111] pour analyser les systèmes PWA. Cependant, cette méthode a été limitée pour certaines fonctions quadratiques. Il est donc intéressant, en utilisant des modèles PWA, de réduire le conservatisme des conditions utilisées pour assurer les propriétés de la norme incrémentale proposées dans la littérature, en étendant les résultats développés dans ces travaux de recherche afin d'assurer les performances des systèmes non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. Ahmadi, P. Parrilo, et al. Non-monotonic Lyapunov functions for stability of discrete time nonlinear and switched systems. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 614–621, 2008. (Cité page 117.)
- [2] R. Ambrosino, E. Garone, M. Ariola, and F. Amato. Piecewise quadratic functions for finite-time stability analysis. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6535–6540, 2012. (Cité page 34.)
- [3] O. Ameer, P. Massioni, G. Scorletti, X. Brun, and M. Smaoui. A piecewise-affine approach to the analysis of non-linear control laws for pneumatic systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3963 – 3969, December 2014. (Cité pages 8, 85 et 114.)
- [4] O. Ameer, P. Massioni, G. Scorletti, X. Brun, and M. Smaoui. Lyapunov stability analysis of switching controllers in presence of sliding modes and parametric uncertainties with application to pneumatic systems. In *Preprint submitted to IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015. (Cité pages 8 et 128.)
- [5] O. Ameer, P. Massioni, G. Scorletti, X. Brun, and M. Smaoui. A piecewise-polynomial Lyapunov approach for non-linear switching controllers for pneumatic systems in presence of sliding modes. In *Preprint submitted to 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 2015. (Cité pages 8 et 124.)
- [6] M. Ariola, D. Balandin, B. Barmish, F. Blanchini, P. A. Bliman, N. Bose, R. Braatz, D. Coutinho, J. Daafouz, F. Dabbene, et al. Guest editorial : Special issue on positive polynomials in control. volume 54, page 935, 2009. (Cité page 117.)
- [7] B. Armstrong-Helouvry. Stick-slip arising from stribeck friction. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1377–1382, 1990. (Cité page 14.)
- [8] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas De Wit. A survey of analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. In *Automatica*, volume 30, pages 1083–1138, July 1994. (Cité pages 12 et 94.)
- [9] E. M. Aylward, P. A. Parrilo, and J. J. E. Slotine. Stability and robustness analysis of nonlinear systems via contraction metrics and sos programming. volume 44, pages 2163–2170, 2008. (Cité page 117.)
- [10] S. P. Bean, D. F. Coutinho, A. Trofino, and J. Cury. Stability analysis and guaranteed domain of attraction for a class of hybrid systems : an LMI approach. In *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, volume 13, pages 465–481, 2003. (Cité page 34.)
- [11] M. Belgharbi, S. Sesmat, S. Scavarda, and D. Thomasset. Analytical model of the flow stage of a pneumatic servo-distributor for simulation and nonlinear control. In *Scandinavian international conference on fluid power*, pages 847–860, 1999. (Cité page 12.)
- [12] A. Bemporad, G. Bianchini, F. Brogi, and G. Chesi. Passivity analysis of discrete-time hybrid systems using piecewise polynomial storage functions. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC'05*, volume 2005, pages 5421–5426, 2005. (Cité page 117.)

- [13] A. Bemporad, A. Garulli, S. Paoletti, and A. Vicino. A bounded-error approach to piecewise affine system identification. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 50, pages 1567–1580, 2005. (Cité page 34.)
- [14] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. *Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms and Engineering Applications*. SIAM, 2001. (Cité page 69.)
- [15] S. Bernd. *Solving systems of polynomial equations*. Number 97. American Mathematical Soc., 2002. (Cité page 47.)
- [16] A. Bouhal. *Contribution à la commande linéaire et non linéaire adaptative des systèmes électropneumatiques*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1994. (Cité pages 4 et 11.)
- [17] M. Bouri. *Contribution à la commande non linéaire par mode de glissement Application aux actionneurs électropneumatiques*. PhD thesis, 1997. (Cité page 4.)
- [18] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. (Cité pages 34, 44, 46, 68, 69 et 109.)
- [19] M.S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 43, pages 475–482, April 1998. (Cité page 114.)
- [20] X. Brun. *Commandes linéaires et non linéaires en électropneumatique. Méthodologies et Applications*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1999. (Cité pages 4, 10, 11, 12, 14 et 25.)
- [21] X. Brun, M. Belgharbi, S. Sesmat, D. Thomasset, and S. Scavarda. Control of an electro-pneumatic actuator, comparison between some linear and non-linear control laws. In *Proceedings of the institution of mechanical engineers Part I - Journal of Systems and Control Engineering*, volume 213, pages 387–406, 1999. (Cité page 12.)
- [22] X. Brun, S. Sesmat, S. Scavarda, and D. Thomasset. Simulation and experimental study of the partial equilibrium of an electro-pneumatic positioning system, cause of the sticking and restarting phenomenon. In *Proceedings of the JFPS International Symposium on Fluid Power*, volume 1999, pages 125–130, 1999. (Cité pages 15 et 25.)
- [23] X. Brun, S. Sesmat, D. Thomasset, and S. Scavarda. Study of "sticking and restarting phenomenon" in electro-pneumatic positioning systems. In *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control (Transactions of the ASME)*, volume 127, pages 173–184, 2005. (Cité pages 15 et 25.)
- [24] X. Brun, D. Thomasset, and E. Bideaux. Influence of the process design on the control strategy : application in electro-pneumatic field. In *Control Engineering Practice*, volume 10, pages 727–735, 2002. (Cité page 12.)
- [25] M. K. Camlibel, W. P. M. H. Heemels, and J. M. Schumacher. Stability and controllability of planar bimodal linear complementarity systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1651–1656, 2003. (Cité page 34.)
- [26] C. Canudas De Wit, P. Noël, A. Aubin, and B. Brogliato. Adaptive friction compensation in robot manipulators : low velocities. In *Int. Journal of Robotics Research*, volume 10-3, pages 189–199, 1991. (Cité page 94.)
- [27] C. Canudas De Wit, H. Olsson, K.J. Åström, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 40, pages 419–425, March 1995. (Cité pages 12 et 94.)

- [28] J. Chen, D. M. Xu, and B. Shafai. On sufficient conditions for stability independent of delay. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 40, page 675–680, 1995. (Cité page 86.)
- [29] C. C. Cheng and C. Y. Chen. A PID approach to suppressing stick-slip in the positioning of transmission mechanisms. In *Control Engineering Practice*, volume 6, pages 471–479, 1998. (Cité page 15.)
- [30] G. Chesi. Estimating the domain of attraction for uncertain polynomial systems. volume 40, pages 1981–1986, 2004. (Cité page 117.)
- [31] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. In *Automatica*, volume 39, pages 1027–1035, 2003. (Cité pages 34 et 117.)
- [32] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems : an LMI approach. volume 50, pages 365–370, 2005. (Cité page 117.)
- [33] G. Chesi, A. Tesi, A. Vicino, and R. Genesio. An lmi approach to constrained optimization with homogeneous forms. volume 42, pages 11–19, 2001. (Cité page 117.)
- [34] M.D. Choi, T.Y. Lam, and B. Reznick. Sums of squares of real polynomials. In *Proceedings of Symposia in Pure mathematics*, volume 58, pages 103–126, 1995. (Cité page 125.)
- [35] F. A. Cuzzola and M. Morari. A generalized approach for analysis and control of discrete-time piecewise affine and hybrid systems. In *Hybrid Systems : Computation and Control*, pages 189–203, 2001. (Cité page 34.)
- [36] P. R. Dahl. Measurement of solid friction parameters of ball bearings. In *Proceeding of 6th Annual Symposium on Incremental Motion Control System and Devices*, pages 49–60, March 1977. (Cité pages 12 et 94.)
- [37] F. Det. *Modelisation en bond graph, simulation et commande d'une pince a souder electro-pneumatique*. PhD thesis, Villeurbanne, INSA, 1991. (Cité page 4.)
- [38] T. Dezuo, L. Rodrigues, and A. Trofino. Stability analysis of piecewise affine systems with sliding modes. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 2005–2010, June 2014. (Cité pages 34, 52, 114 et 125.)
- [39] D. W. Ding and G. H. Yang. State-feedback control design for continuous-time piecewise linear systems : an LMI approach. In *IEEE American Control Conference*, pages 1104–1108, 2008. (Cité page 49.)
- [40] G. Feng. Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 47, page 1109, 2002. (Cité page 49.)
- [41] G. Feng. H_∞ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions. In *IEEE Transactions on Systems*, volume 34, pages 283–292, 2004. (Cité page 34.)
- [42] G. Feng, C. L. Chen, D. Sun, and Y. Zhu. H_∞ controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions and bilinear matrix inequalities. In *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, volume 13, pages 94–103, 2005. (Cité page 34.)
- [43] G. Ferrari-Trecate, F. A. Cuzzola, D. Mignone, and M. Morari. Analysis of discrete-time piecewise affine and hybrid systems. In *Automatica*, volume 38, pages 2139–2146, 2002. (Cité page 34.)

- [44] G. Ferrari-Trecate, M. Muselli, D. Liberati, and M. Morari. A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. In *Automatica*, volume 39, pages 205–217, 2003. (Cité page 34.)
- [45] A.F. Filippov and F.M. Arscott. *Differential equations with discontinuous righthand sides : control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 1988. (Cité pages 38, 114 et 115.)
- [46] L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte. *Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century : State of the Art*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2011. (Cité page 114.)
- [47] V. Fromion, S. Monaco, and D. Normand-Cyrot. A possible extension of h_∞ control to the nonlinear context. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, volume 2, pages 975–980, 1995. (Cité page 175.)
- [48] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. volume 4, pages 421–448, 1994. (Cité page 84.)
- [49] P. Gahinet, A. Nemirovsky, A. L. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox*. The Mathworks Inc., 1995. (Cité page 69.)
- [50] X. Gao, Y. Jiang, D. Huang, and Z. Xiong. A novel high level canonical piecewise linear model based on the simplicial partition and its application. In *ISA transactions*, volume 53, pages 1420–1426, 2014. (Cité page 34.)
- [51] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability : A guide to the theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979. (Cité page 69.)
- [52] M Grant and S Boyd. CVX : MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 beta, 2013. (Cité pages 60 et 90.)
- [53] Y. R. Gu, S. C. Wang, Q. Q. Li, Z. Q. Cheng, and J. X. Qian. On delay-dependent stability and decay estimate for uncertain systems with time-varying delay. In *Automatica*, volume 34, page 1035–1039, 1998. (Cité page 86.)
- [54] A. Hassibi and S. Boyd. Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 6, pages 3659–3664, Juin 1998. (Cité pages x, 6, 7, 29, 34, 35, 47, 48, 51, 52, 53, 57, 58, 63, 65, 66, 76, 78, 83, 84, 89, 124, 125, 130 et 174.)
- [55] S. Hedlund and M. Johansson. A toolbox for computational analysis of piecewise linear systems. In *Proceedings of European Control Conference*, 1999. (Cité page 114.)
- [56] D. Henrion and A. Garulli. *Positive polynomials in control*, volume 312. Springer Science & Business Media, 2005. (Cité page 117.)
- [57] D. Henrion and J. B. Lasserre. Gloptipoly : Global optimization over polynomials with MATLAB and SeDuMi. In *ACM Trans. Math. Softw.*, volume 29, pages 165–194, 2003. (Cité pages 60 et 90.)
- [58] D.P. Hess and A. Soom. Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities. In *Journal of Tribology*, volume 112, pages 147–152, 1990. (Cité page 94.)
- [59] T. Hu, T. Thibodeau, and A. R. Teel. Analysis of oscillation and stability for systems with piecewise linear components via saturation functions. In *American Control Conference*, pages 1911–1916, 2009. (Cité page 34.)
- [60] R. Iervolino and F Vasca. Cone-copositivity for absolute stability of linear systems. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2014. (Cité page 83.)

- [61] R. Iervolino, F. Vasca, and L. Lannelli. A cone-copositive approach for the stability of piecewise linear differential inclusions. In *50th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1062–1067, 2011. (Cité page 83.)
- [62] J. Imura. Well-posedness analysis of switch-driven piecewise affine systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 48, pages 1926–1935, 2003. (Cité page 34.)
- [63] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 1995. (Cité page 22.)
- [64] Z.W. Jarvis-Wloszek. *Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 2003. (Cité pages 34, 117 et 125.)
- [65] H. S. Jebar. *Design of Pneumatic Actuator Systems*. PhD thesis, University of Nottingham, 1977. (Cité page 11.)
- [66] Q. Jianbin, F. Gang, and G. Huijun. Controller synthesis of continuous-time piecewise linear systems based on piecewise Lyapunov functions. In *Chinese Control Conference (CCC)*, pages 6481–6486, 2011. (Cité pages 34 et 49.)
- [67] M. Johansson. Piecewise quadratic estimates of domains of attraction for linear systems with saturation. In *15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*, 2002. (Cité pages 34 et 36.)
- [68] M. Johansson. *Piecewise linear control systems*. Springer, 2003. (Cité pages 34, 35, 51, 53, 84 et 114.)
- [69] M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. In *IEEE Transaction in Automatic Control*, volume 43, pages 555–559, April 1998. (Cité pages x, 6, 7, 29, 34, 35, 37, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 57, 58, 60, 65, 66, 76, 78, 83, 84, 89, 114, 124, 125, 130 et 174.)
- [70] U. Jönsson. *The S-Procedure and its applications in IQC Analysis*. Optimisation and Systems Theory, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden, February 2004. (Cité page 45.)
- [71] L. Kai, Y. Yu, S. Dengfeng, and B. Venkataramanan. PWA state feedback controller synthesis for piecewise-linear systems. In *Chinese Control Conference CCC*, pages 1252–1257, 2011. (Cité page 52.)
- [72] M. Kantner. Robust stability of piecewise linear discrete time systems. In *IEEE American Control Conference*, volume 2, pages 1241–1245, 1997. (Cité page 34.)
- [73] D. Karnopp. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. In *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, volume 107, pages 100–103, March 1985. (Cité page 94.)
- [74] H.K. Khalil. *Non Linear Systems, Third Edition*. Prentice Hall, 2002. (Cité pages 34, 38, 39, 42 et 43.)
- [75] T. Kimura, S. Hara, T. Fujita, and T. Kagawa. Feedback linearization for pneumatic actuator systems with static friction. In *Control engineering practice*, volume 5, pages 1385–1394, 1997. (Cité page 14.)
- [76] A. Korniienko. *Distributed PLL network for automatic clock synthesis of synchronous MP-SOCs*. Thèse, Université de Lyon, Ecole Centrale de Lyon, December 2011. (Cité page 68.)

- [77] Y. Labit, D. Peaucelle, and D. Henrion. SeDuMi interface 1.02 : a tool for solving LMI problems with SeDuMi. In *IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design.*, pages 272–277, 2002. (Cité pages 60 et 90.)
- [78] D. M. W. Leenaerts. Further extensions to Chua’s explicit piecewise linear function descriptions. In *International Journal of Circuit Theory and Applications*, volume 24, pages 621–633, 1996. (Cité page 34.)
- [79] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, and S. Tarbouriech. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *In Proceedings of the 3rd IFAC International Workshop on Linear Time Delay Systems*, 2003. (Cité page 86.)
- [80] X. Lin. *Contribution a la modelisation et a la commande d’un verin pneumatique de grande longueur*. PhD thesis, Villeurbanne, INSA, 1992. (Cité page 4.)
- [81] P. L. Liu and T. J. Su. Robust stability of interval timedelay systems with delay-dependence. In *Systems & Control Letters*, volume 33, page 231–239, 1998. (Cité page 86.)
- [82] J Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 284–289, 2004. (Cité pages 60 et 90.)
- [83] G. K. Lowe and M. A. Zohdy. Modeling nonlinear systems using multiplepiecewise linear equations. In *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, volume 15, pages 451–458, 2010. (Cité page 34.)
- [84] Wu-Sheng Lu. SeDuMi : Remarks and examples. 2012. (Cité pages 60 et 90.)
- [85] J. S. Luo, A. Johnson, and P. P. J. Van den Bosch. Delayindependent robust stability of uncertain linear-systems. In *Systems & Control Letters*, volume 24, pages 33–39, 1995. (Cité page 86.)
- [86] J. Malmberg. *Analysis and Design of Hybrid Control Systems*. PhD thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998. (Cité page 114.)
- [87] S. E. Mattsson. On object oriented modeling of relays and sliding mode behaviour. In *IFAC*, volume 96, pages 259–264, 1996. (Cité page 114.)
- [88] D. Mignone, G. F. Trecate, and M. Morari. Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems : An LMI approach. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 504–509, 2000. (Cité pages 34 et 49.)
- [89] M. Moarref and L. Rodrigues. Asymptotic stability of piecewise affine systems with sampled-data piecewise linear controllers. In *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pages 8315–8320, December 2011. (Cité pages 34 et 52.)
- [90] K. Moezzi, L. Rodrigues, and A. G. Aghdam. Stability of uncertain piecewise affine systems with time delay : delay-dependent Lyapunov approach. In *International Journal of Control*, volume 82, pages 1423–1434, 2009. (Cité page 52.)
- [91] E. F. Mulder and K. V. Mayuresh. Synthesis of stabilizing antiwindup controllers using piecewise quadratic Lyapunov functions. In *American Control Conference*, volume 5, pages 3239–3243, 2000. (Cité page 34.)
- [92] H. Nakada, K. Takaba, and T. Katayama. Identification of piecewise affine systems based on statistical clustering technique. In *Automatica*, volume 41, pages 905–913, 2005. (Cité page 34.)

- [93] N. Nayebpanah, L. Rodrigues, and Y. Zhang. Fault-tolerant controller synthesis for piecewise-affine systems. In *IEEE American Control Conference*, pages 222–226, 2009. (Cité page 52.)
- [94] Y. Ohta and H. Yokoyama. Stability analysis of uncertain piecewise linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions. In *IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC)*, pages 2112–2117, 2010. (Cité pages 34 et 49.)
- [95] M.C. Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S.O.Reza Moheimani, editor, *Perspectives in robust control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 241–257. Springer London, 2001. (Cité page 114.)
- [96] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions : Asymptotically exact LMI conditions. In *Linear algebra and its applications*, volume 405, pages 209–228, 2005. (Cité page 34.)
- [97] P. A. Parrilo. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2000. (Cité page 117.)
- [98] P.A. Parrilo. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. In *Mathematical programming*, volume 96, pages 293–320, May 2003. (Cité pages 118 et 125.)
- [99] N. B. O. L. Pettit and E. P. Wellstead. Analyzing piecewise linear dynamical systems. In *IEEE on Control Systems*, volume 15, pages 43–50, 1995. (Cité page 34.)
- [100] S. Prajna and A. Papachristodoulou. Analysis of switched and hybrid systems-beyond piecewise quadratic methods. In *IEEE on American Control Conference*, volume 4, pages 2779–2784, 2003. (Cité pages 34 et 117.)
- [101] Stephen Prajna, Pablo Parrilo, Anders Rantzer, et al. Nonlinear control synthesis by convex optimization. volume 49, pages 310–314, 2004. (Cité page 117.)
- [102] A. Prestel and C. Delzell. *Positive polynomials : from Hilbert's 17th problem to real algebra*. Springer Science & Business Media, 2013. (Cité page 117.)
- [103] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. In *IEEE Transaction in Automatic Control*, volume 45, pages 629–637, 2000. (Cité page 76.)
- [104] É. Richard. *De la commande linéaire et non linéaire en position des systèmes électropneumatiques*. PhD thesis, Villeurbanne, INSA, 1990. (Cité page 4.)
- [105] L. Rodrigues. State feedback control of piecewise-affine systems with norm bounded noise. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, pages 1793–1798, June 2005. (Cité pages 52 et 76.)
- [106] L. Rodrigues and S. Boyd. Piecewise-affine state feedback for piecewise-affine slab systems using convex optimization. In *Systems and Control Letters*, volume 54, pages 835–853, 2005. (Cité pages 52 et 76.)
- [107] L. Rodrigues, A. Hassibi, and J. P. How. Output feedback controller synthesis for piecewise-affine systems with multiple equilibria. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, pages 1784–1789, 2000. (Cité pages 34 et 52.)
- [108] L. Rodrigues and Jonathan P. How. Observer-based control of piecewise-affine systems. In *International Journal of Control*, volume 76, pages 459–477, 2003. (Cité pages 52 et 76.)
- [109] J. Roll, A. Bemporad, and L. Ljung. Identification of piecewise affine systems via mixed integer programming. In *Automatica*, volume 40, pages 37–50, 2004. (Cité page 34.)

- [110] B. G. Romanchuk and M. R. James. Characterization of the l^p incremental gain for nonlinear systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3270–3275, 1996. (Cité page 175.)
- [111] B. G. Romanchuk and M. C. Smith. Incremental gain analysis of piecewise linear systems and application to the antiwindup problem. In *Automatica*, volume 35, pages 1275–1283, 1999. (Cité page 175.)
- [112] B. Samadi and L. Rodrigues. A unified dissipativity approach for stability analysis of piecewise smooth systems. In *Automatica*, volume 47, pages 2735–2742, December 2011. (Cité pages 47 et 114.)
- [113] G. Scorletti. Outils pour la robustesse : inégalités matricielles affines. Master’s thesis, Master-2 Recherche Sciences de l’Automatique et du Traitement du Signal, Université d’Orsay SUPELEC, 2006. (Cité page 86.)
- [114] S. Sesmat. *Modélisation, simulation et commande d’une servovalve électropneumatique*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1996. (Cité pages 11 et 12.)
- [115] S. Sesmat and S. Scavarda. Study of the behaviour of an electro pneumatic positioning system near the equilibrium state. In *Proceedings of the International Fluid Colloquium*, volume 2, pages 321–334, 1998. (Cité page 14.)
- [116] Z. She and B. Xue. Discovering multiple Lyapunov functions for switched hybrid systems. In *SIAM Journal on Control and Optimization*, volume 52, pages 3312–3340, 2014. (Cité page 34.)
- [117] M. Smaoui. *Commandes non linéaires robustes mono et multidimensionnelles de dispositifs électropneumatiques : synthèse et applications*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 2004. (Cité page 4.)
- [118] M. Smaoui, X. Brun, and D. Thomasset. A study on tracking position control of an electro-pneumatic system using backstepping design. In *Control Engineering Practice*, volume 14, pages 923–933, 2006. (Cité page 25.)
- [119] M. Smaoui, X. Brun, and D. Thomasset. Systematic control of an electropneumatic system : integrator backstepping and sliding mode control. In *Transactions on Control Systems Technology*, volume 14, pages 905–913, 2006. (Cité pages 14 et 25.)
- [120] M. Smaoui, X. Brun, and D. Thomasset. High order sliding mode for an electropneumatic system : a differentiator-controllers design. In *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, volume 18, pages 481–501, 2008. (Cité pages 12 et 25.)
- [121] Jos F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. volume 11, pages 625–653, 1999. (Cité pages 60 et 90.)
- [122] B. Sturmfels. *Solving systems of polynomial equations*. Number 97. American Mathematical Soc., 2002. (Cité page 117.)
- [123] A. Suzuki and M. Tomizuka. Design and implementation of digital servo controller for high speed machine tools. In *American Control Conference*, pages 1246–1251, 1991. (Cité page 14.)
- [124] S. M. Tabatabaeipour, M. Gholami, and T. Bak. Configuration selection for reconfigurable control of piecewise affine systems. In *International Journal of Control*, pages 1–30, 2015. (Cité page 34.)
- [125] W. Tan. *Nonlinear Control Analysis and Synthesis using Sum-of-Square Programming*. PhD thesis, University of California, 2006. (Cité page 117.)

- [126] P. Y. Tiwari, E. F. Mulder, and V. K. Mayuresh. Synthesis of stabilizing antiwindup controllers using piecewise quadratic Lyapunov functions. In *IEEE Control Systems Society*, volume 52, pages 2341–2345, 2007. (Cité pages 34 et 76.)
- [127] A Trofino. Bi-quadratic stability for nonlinear systems. In *Proc. 3rd IFAC Symp. Robust Control Design*, 2000. (Cité page 34.)
- [128] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. volume 9, pages 324–332, 2001. (Cité page 84.)
- [129] K. Turki. *Nouvelles approches pour la synthèse de lois de commande non linéaires robustes. Application à un actionneur électropneumatique et proposition d’une solution au problème de redécollage*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2010. (Cité pages 5, 10, 12, 14, 15 et 16.)
- [130] K. Turki, M. Smaoui, D. Thomasset, and X. Brun. A solution to the “stick-slip” problem for an electropneumatic drive. In *International Journal of Fluid Power*, volume 12, pages 19–29, January 2011. (Cité pages vi, vii, 5, 6, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 29, 31 et 173.)
- [131] A. Tustin. The effect of backlash and speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems. In *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, volume 94, pages 143–151, January 1947. (Cité pages 12 et 94.)
- [132] J. Valter and L. De Souza. *Sur la stabilité robuste de systèmes linéaires : une approche par des fonctions dépendantes de paramètres*. PhD thesis, INSA de Toulouse, 2005. (Cité page 86.)
- [133] A. J. Van der Schaft. l_2 gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback h_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :770–784, 1992. (Cité page 175.)
- [134] T. Wang. *Polynomial level-set methods for nonlinear dynamics and control*. PhD thesis, Stanford University, 2007. (Cité page 117.)
- [135] W. Xiang, G. Zhai, and J. Xiao. Stability analysis and failure tolerant control for discrete-time linear systems with controller failure. In *International Journal of Control*, volume 88, pages 559–570, 2015. (Cité page 34.)
- [136] J. Xu, A. P. Loh, and K. Y. Lum. Observer-based fault detection for piecewise linear systems : Continuous-time cases. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 379–384, 2007. (Cité page 49.)
- [137] J. Xu and L. Xie. Homogeneous polynomial Lyapunov functions for piecewise affine systems. In *American Control Conference*, volume 1, pages 581–586, June 2005. (Cité pages 6, 7, 34, 35, 52, 115 et 117.)
- [138] J. Xu and L. Xie. *Control and estimation of piecewise affine systems*. Elsevier, 2014. (Cité pages 34 et 117.)
- [139] J. Xu, L. Xie, and Y. C. Soh. H_∞ and generalized H_2 estimation of continuous-time piecewise linear systems. In *IEEE on Asian Control Conference*, 2004. (Cité page 49.)
- [140] Jun Xu, Lihua Xie, and Youyi Wang. Simultaneous stabilization and robust control for polynomial nonlinear systems using sos. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 5384–5389, 2007. (Cité page 117.)
- [141] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 26, pages 301–320, 1981. (Cité page 175.)

- [142] A.L. Zelentsovsky. Nonquadratic Lyapunov functions for robust stability analysis of linear uncertain systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 39, pages 135–138, January 1994. (Cité page [115](#).)