



HAL
open science

Méthodes pour la résolution efficace de très grands problèmes combinatoires stochastiques : application à un problème industriel d'EDF

Rodolphe Griset

► **To cite this version:**

Rodolphe Griset. Méthodes pour la résolution efficace de très grands problèmes combinatoires stochastiques : application à un problème industriel d'EDF. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de Bordeaux, 2018. Français. NNT : 2018BORD0219 . tel-01994127

HAL Id: tel-01994127

<https://theses.hal.science/tel-01994127>

Submitted on 25 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Par **Rodolphe GRISET**

**MÉTHODES POUR LA RÉOLUTION EFFICACE DE TRÈS
GRANDS PROBLÈMES COMBINATOIRES
STOCHASTIQUES**

Application à un problème industriel d'EDF

soutenue le **15 Novembre 2018** devant un jury composé de :

M. PESSOA Artur Alves,	Professeur associé , UFF,	président
M. ARTIGUES, Christian,	Directeur de Recherche, LAAS-CNRS,	rapporteur
M. SANLAVILLE, Eric,	Professeur, Université du Have,	rapporteur
M VANDERBECK François,	Professeur, Université de Bordeaux,	directeur de Thèse
M DETIENNE, Boris,	Professeur, Université de Bordeaux,	co-directeur
M PORCHERON, Marc,	Ingénieur Chercheur Senior, EDF R&D,	co-encadrant
Mme. BENDOTTI, Pascale,	Ingénieur Chercheur Expert, EDF R&D,	invité

Résumé : Cette thèse s'intéresse à la résolution de très grands problèmes d'optimisation combinatoire stochastique. Les recherches sont appliquées au problème de planification des arrêts pour rechargement des centrales nucléaires. Compte-tenu de la part prépondérante de celles-ci dans le mix-électrique, ce problème structure fortement la chaîne de management d'énergie d'EDF. Une première partie propose une formulation étendue bi-niveau dans laquelle les décisions de premier niveau fixent les plannings d'arrêt et des profils de production des centrales, et celles de second niveau évaluent le coût de satisfaction de la demande associé. Cette formulation permet la résolution à l'optimum d'instances industrielles déterministes par un solveur en PLNE. Dans le cas stochastique, une telle résolution directe du problème n'est plus possible. Nous proposons une formulation permettant d'en résoudre la relaxation linéaire par génération de colonnes et de coupes, correspondant respectivement aux reformulations de Danzig-Wolfe du premier niveau et de Benders du second. Une phase heuristique permet ensuite de déterminer des solutions entières de bonne qualité pour des instances, jusqu'à une cinquantaine de scénarios représentatifs de l'incertitude sur les données. L'apport de l'approche est estimé en utilisant les outils industriels exploités par EDF pour évaluer les plannings. Une seconde partie porte sur l'intégration de méthodes d'optimisation robuste pour la prise en compte d'aléas sur la disponibilité des centrales. Nous nous plaçons dans un cadre où les recours possibles sur les dates d'arrêts ne sont pas exercés. Nous comparons des méthodes bi-objectif et probabiliste permettant de rendre le planning robuste pour les contraintes opérationnelles dont la relaxation est envisageable. Pour les autres, nous proposons une méthode basée sur un budget d'incertitude. Cette méthode permet de renforcer la stabilité du planning en limitant les besoins de réorganisation futurs. La prise en compte d'une loi de probabilité de l'aléa permet d'affiner le contrôle du prix de cette robustesse.

Mots-clés : Très grands problèmes combinatoires mixtes, Optimisation dans l'incertain, Reformulation, Génération de coupes et de colonnes, Optimisation robuste, Problème industriel d'EDF

Abstract : The purpose of this Ph.D. thesis is to study optimization techniques for large-scale stochastic combinatorial problems. We apply those techniques to the problem of scheduling EDF nuclear power plant maintenance outages, which is of significant importance due to the major part of the nuclear energy in the French electricity system. We build on a two-stage extended formulation, the first level of which fixes nuclear outage dates and production profiles for nuclear plants, while the second evaluates the cost to meet the demand. This formulation enables the solving of deterministic industrial instances to optimality, by using a MIP solver. However, the computational time increases significantly with the number of scenarios. Hence, we resort to a procedure combining column generation of a Dantzig-Wolfe decomposition with Benders' cut generation, to account for the linear relaxation of stochastic instances. We then obtain integer solutions of good quality via a heuristic, up to fifty scenarios. We further assume that outage durations are uncertain and that unexpected shutdowns of plants may occur. We investigate robust optimization methods in this context while ignoring possible recourse on power plants outage dates. We report on several approaches, which use bi-objective or probabilistic methods, to ensure the satisfaction of constraints which might be relaxed in the operating process. For other constraints, we apply a budget uncertainty-based approach to limit future re-organizations of the scheduling. Adding probabilistic information leads to better control of the price of the robustness.

Keywords : Large-scaled stochastic combinatorial problem, Stochastic optimization, Reformulation, Row and column generation, Robust optimization, Industrial EDF problem

Thèse préparée au sein de l'équipe RealOpt de l'INRIA, 351 cours de la Libération, 33405 Talence

Table des matières

1	Problématique industrielle : le problème du placement des arrêts nucléaires	9
1.1	Enjeux pour EDF	9
1.2	Description du problème et des données	12
1.3	État de l’art à EDF	17
1.3.1	Travaux antérieurs au Challenge ROADEF 2010	17
1.3.2	Challenge ROADEF	18
1.3.3	Travaux postérieurs au Challenge ROADEF	19
1.4	Objectifs des travaux	19
2	Modélisation et méthodes de résolution	21
2.1	État de l’art des méthodes de décomposition en PLNE	22
2.1.1	Reformulation de Dantzig-Wolfe et génération de colonnes	23
2.1.2	Reformulation de Benders et génération de coupes	26
2.2	Modélisation proposée	29
2.2.1	Hypothèses retenues	29
2.2.2	Graphe de transition	30
2.2.3	Contraintes intégrées dans le graphe de transition	32
2.2.4	Contraintes d’arrêts intra-sites et inter-sites	34
2.2.5	Problème stochastique à deux niveaux	35
2.2.6	Formulation de référence	39
2.3	Reformulations et décompositions	41
2.3.1	Reformulation de Dantzig-Wolfe et génération de colonnes	42
2.3.2	Reformulation de Benders et génération de coupes	44
2.3.3	Génération de colonnes et de coupes	45
2.4	Étude comparative de différentes formulations	47
2.4.1	Description des instances utilisées	47
2.4.2	Changements de variables	48
2.4.3	Génération de coupes et de colonnes	58
2.4.4	Comparaison des approches de résolution du problème en nombres entiers	66
2.5	Synthèse et sélection des méthodes utilisées dans l’étude industrielle	70
3	Validation de l’approche et résultats industriels	72
3.1	Cadre de l’étude	72
3.1.1	Hypothèses	72
3.1.2	Jeu de données	73
3.1.3	Outils et bibliothèques utilisés	73
3.1.4	Évaluation des solutions	75
3.2	Passage à l’échelle sur les instances complètes	76

3.2.1	Résultats	76
3.2.2	Etude de cas	78
3.3	Résultats complémentaires et extensions	79
3.3.1	Désagrégation du pas de temps	80
3.3.2	Prise en compte de l'aléa de disponibilité nucléaire dans les scénarios	82
3.3.3	Recharge variable	83
3.4	Conclusion	84
4	Approches robustes pour la gestion des aléas nucléaires	86
4.1	Problématique métier	87
4.2	État de l'art	88
4.2.1	Éléments d'optimisation bi-objectifs	88
4.2.2	Approches robustes sans recours	89
4.2.3	Approches robustes avec recours	93
4.2.4	Approche probabiliste	94
4.2.5	Travaux antérieurs	95
4.3	Présentation des méthodes investiguées	96
4.4	Modèle, données et aléas	97
4.4.1	Modèle utilisé	97
4.4.2	Génération des données	99
4.4.3	Modélisation des aléas	104
4.5	Robustesse aux prolongations d'arrêt pour les contraintes d'arrêts	106
4.5.1	Étude de cas : site quatre unités	107
4.5.2	Approches basées sur l'utilisation de variables artificielles	109
4.5.3	Approche basée sur la probabilité de prolongation	110
4.5.4	Résultats numériques des approches robustes	114
4.5.5	Impact des variations de la demande sur la robustesse des solutions nominales	121
4.5.6	Bilan	123
4.6	Robustesse aux aléas pour les contraintes d'anticipation maximale	124
4.6.1	Approche Γ -Robuste pour l'anticipation maximale	125
4.6.2	Filtrage des arcs en tenant compte de la probabilité de violation	127
4.6.3	Approche combinée	129
4.6.4	Simulateur	130
4.6.5	Étude de cas	131
4.6.6	Résultats numériques	135
4.6.7	Bilan	138
4.7	Robustesse aux aléas de production pour limiter la défaillance	138
4.8	Synthèse	140
5	Bilan et Perspectives	141
A	Notations	152
B	Linéarisation de la contrainte en probabilité du site à six unités	154

Remerciements

Les premières années d'une formation relèvent parfois plus de choix par élimination que par envie, ce fut mon cas en école d'ingénieur. Intéressé par un grand nombre de sujets, je ne trouvais cependant pas le domaine qui me permettrait de m'épanouir. En 2014, je découvre la recherche opérationnelle lors de mon stage de fin d'étude centralien et les pièces du puzzle se mettent enfin en place. Débute alors une ré-orientation de mon profil qui m'amène aujourd'hui à présenter mes travaux de thèses et à poursuivre l'aventure à EDF sur ce projet et bien d'autres j'espère. Je tiens ici à remercier toutes les personnes qui ont rendu cette aventure possible, les premières sont mes parents qui m'ont donnés l'impulsion initiale dont j'avais besoin lorsque j'étais dans le doute, merci à vous.

Sur le plan professionnel la première personne qui me vient à l'esprit est bien entendu mon encadrant à EDF Marc Porcheron, merci pour ton soutien et ta disponibilité tout au long de cette aventure. Tu es pour moi un modèle d'équilibre entre recherche théorique et action pratique. Merci pour tes conseils, pour avoir toujours fait en sorte de limiter la pression sur mes épaules, pour tes nombreuses explications de concepts métier, et surtout pour ton soutien et ta patience lors de la correction de mon manuscrit.

Merci à mon encadrante « officieuse » Pascale Bendotti pour avoir été le lien essentiel entre les mondes industrielle et académique, pour tes nombreuses corrections que je n'ai parfois même pas eut le temps de prendre en compte et pour toutes nos discussions parties d'un "juste une petite question".

Les suivants dans ma liste son bien évidemment mes deux encadrants académiques François Vanderbeck et Boris Detienne, j'ai énormément appris à vos cotés que ce soit sur le fonctionnement d'une équipe de recherche de haut niveau, sur la gestion d'un grand projet ou sur la manière de mêler intuitions théoriques et constructions empiriques pour élaborer modèles et formulations efficaces. Je tiens à te remercier tout particulièrement Boris pour tes nombreuses explications et réflexions qui m'ont permis d'avancer et de structurer mes idées (qui en avaient bien besoin).

J'ai eut également la chance de profiter de l'expérience de deux jeunes chercheurs formidables qui sont au fil du temps devenu des amis bien plus que des collègues et m'ont offert un soutien scientifique et moral indispensable dans les moments de doutes qui accompagnent une thèse. Un très grand merci à Halil Şen pour tes explications théoriques et pratiques ainsi que tes nombreux conseils, le plus souvent au bar. Ayse Nur Arslan, nos passions commune pour le café et le cinéma nous ont rapprochées, merci encore pour tes explications théoriques sur la robustesse et pour m'avoir fait découvrir le Sucuk (qui se prononce "soudjouk" attention).

Réaliser une thèse CIFRE implique d'appartenir simultanément à deux équipes, j'ai eut la chance d'être accueilli dans des conditions de rêve dans l'équipe RealOpt et l'équipe R36 du département Osiris de la R&D d'EDF dont je tiens à remercier tout les membres. Je remercie en particulier mes co-bureaux Quentin (transformation!!!) et Jeremy, ainsi que mon partenaire de pause à EDF Michael, merci à vous d'avoir été à l'écoute et d'avoir répondu à mes questions même quand celles-ci vous faisaient perdre du temps sur vos propre thèse (ce qui m'a d'ailleurs permit de soutenir avant vous ha ha). Je tiens également à remercier Adeline et Siaoleu pour les nombreux moments passés ensemble et votre soutien dans et en dehors du cadre professionnel.

J'ai la chance d'avoir un groupe d'amis formidable dont la présence continue lors de la fin de thèse a été un élément essentiel de ma réussite, c'est pourquoi je tiens ici à remercier solennellement l'ensemble des geais moqueurs et des vendeurs de muguet.

Parmi mes amis certains ont eut la gentillesse de relire des morceaux de ma thèse, c'est pourquoi je tiens à remercier Anaïs Gilles pour ton aide et tes corrections mais plus généralement pour ta présence dans ma vie depuis maintenant plus de 10 ans. Et bien entendu Guillaume Tochon pour tes nombreux conseils ("j'ai un petit problème en latex ..." , "Dis-moi, durant ta thèse toi comment tu ...") et les nombreux moments partagés depuis maintenant quelques années (je ne rentrerai pas dans les détails ici mais je pense que tu vois très bien de quoi je parle), un énorme merci je ne sais pas comment j'aurais fait sans toi.

Les personnes les plus importantes pour la fin donc un grand merci à l'ensemble de ma famille, votre soutien a toujours été une force et un élément essentiel de ma vie. Merci une nouvelle fois à mes parents Didier et Myriam pour leur amour et leur aide à chaque étape de ma vie, à mes deux sœurs Hélène et France et à mon frère Roland pour tout nos nouveaux moments de partage depuis que nous sommes adultes.

Et enfin merci à ma grand-mère Guillemette pour m'avoir logé sur Bordeaux durant la première partie de ma thèse, ça a été pour moi une belle partie de ma vie de pouvoir partager ce temps et se voir plus que quelque fois par ans, merci pour tout.

Rodolphe

Introduction

La résolution efficace de très grands problèmes d'optimisation combinatoire constitue un sujet de recherche majeur aussi bien sur le plan académique qu'industriel. C'est à ce domaine que sont consacrés les travaux de thèse que nous présentons ici, plus particulièrement à celui de la résolution de très grands Programmes Linéaires en Nombres Entiers (PLNE).

Dans ces travaux, nous nous sommes tout d'abord intéressés aux techniques de reformulation et de décomposition permettant de résoudre efficacement ce type de problèmes. Dans un second temps, nous avons investigué des techniques permettant de rendre ce type de problèmes robustes aux aléas, les applications réelles étant le plus souvent soumises à des incertitudes sur leurs données.

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une collaboration entre Électricité De France (EDF) et l'INRIA, et le problème de l'optimisation du placement des arrêts et des recharges des unités nucléaires du parc d'EDF en constitue l'application.

Ce problème est structurant, à la fois pour l'organisation concrète des opérations de maintenance du parc nucléaire, et pour l'ensemble de la chaîne de décisions du management d'énergie d'EDF.

L'objectif est de déterminer le planning d'arrêts et les niveaux de recharge des 58 unités nucléaires du parc Français sur un horizon de 3 à 10 ans, afin de satisfaire la demande et de minimiser les coûts totaux de production. Ces coûts comprennent le coût d'utilisation des unités non-nucléaires (non-nucléaires), le coût des échanges (achats et ventes) sur le marché *Spot* de l'électricité, et les coûts des recharges du combustible nucléaire effectuées durant les arrêts.

On peut distinguer dans ce problème deux niveaux de décisions : celles de premier niveau fixant les dates d'arrêts de chaque unité qui correspondent à des variables entières, et celles de second niveau fixant la production des unités qui correspondent à des variables continues. En pratique, une ré-optimisation du planning est réalisée chaque mois par les équipes opérationnelles d'EDF ce qui correspond à un processus de ré-optimisation multi-étapes sur un horizon glissant.

Indépendamment de ce processus, la complexité du problème résolu chaque mois provient essentiellement de deux aspects. D'une part sa taille et son caractère mixte ainsi que le grand nombre de contraintes liées au fonctionnement des unités de production, dont certaines sont non-linéaires ; d'autre part son caractère stochastique, les données relatives à la demande, aux prix et aux profondeurs des échanges sur le marché, ainsi qu'à la disponibilité des unités, n'étant pas connues avec certitude.

Pour calculer chaque mois le planning d'arrêts des unités nucléaires, les équipes opérationnelles d'EDF s'appuient sur un outil développé par le département OSIRIS d'EDF R&D. Bien que fournissant une aide précieuse à ces équipes, cet outil présente un certain nombre de limitations, aussi bien d'un point de vue métier que d'un point de vue méthodologique.

Dans le but de dépasser ces limitations, EDF a entrepris ces dernières années un ensemble de travaux de recherche prospectifs. Une variante de ce problème a tout d'abord été soumise au Challenge ROADEF 2010 ([Porcheron et al., 2010]), pour lequel des approches heuristiques, le plus souvent basées sur des techniques de recherche locale, ont obtenu les meilleurs résultats. Cependant, plusieurs approches s'appuyant sur des techniques de reformulation et de décomposition sur des modélisations par PLNE ont été également proposées dans le cadre du Challenge, ainsi que dans celui de travaux

connexes menés par EDF.

Parmi ces approches, celle proposée par l'équipe RealOpt de l'INRIA et de l'Université de Bordeaux a permis, dans un premier temps, d'obtenir des résultats prometteurs sur les instances fournies par EDF lors du Challenge ROADEF ([Joncour, 2011], [Han et al., 2014]). Par la suite, la prise en compte de certains aspects robustes concernant l'aléa sur la disponibilité des unités a été étudiée par la même équipe [Detienne, 2014]. Cette approche a servi de base aux travaux que nous présentons ici.

Les principaux résultats obtenus dans cette thèse sont les suivants :

- Analyse et implémentation de formulations efficaces obtenues par reformulations et décompositions pour la résolution du problème de placement des arrêts nucléaires d'EDF et validation de cette approche sur des instances réelles du problème.
- Extension de cette approche au cas stochastique afin de pouvoir prendre en compte un nombre significatif de scénarios d'aléas.
- Extension de l'approche pour prendre en compte des aléas affectant la disponibilité des unités nucléaires ainsi que la durée de leurs arrêts.

Le chapitre 1 présente la problématique industrielle et les enjeux pour le groupe EDF ; le chapitre 2 présente la problématique académique et propose une formulation du problème permettant l'utilisation de méthodes de décomposition efficaces ; le chapitre 3 présente les résultats obtenus sur les instances réelles du problème ; le chapitre 4 explore les moyens d'intégrer dans l'approche la stochasticité de la disponibilité des unités nucléaires ainsi que de leur durée d'arrêt ; le dernier chapitre présente une synthèse des travaux réalisés ainsi que les perspectives.

Chapitre 1

Problématique industrielle : le problème du placement des arrêts nucléaires

1.1. Enjeux pour EDF

Les problématiques de management d'énergie possèdent trois caractéristiques rendant nécessaire l'utilisation d'outils avancés d'optimisation :

- Premièrement, les nombreuses contraintes de fonctionnement des unités de production impliquent généralement qu'un effort important soit réalisé afin de formaliser le problème, une modélisation intuitive s'avérant souvent inefficace. Ce type d'applications met en général en jeu une combinaison de différents sous-problèmes qui, considérés séparément, sont déjà difficiles. L'exploitation de ces structures sous-jacentes et de leurs relations permet cependant d'obtenir des formulations efficaces sur lesquels s'applique des méthodes de décomposition.
- Deuxièmement, l'importance des coûts en jeu entraîne qu'une légère amélioration de la solution peut conduire à des gains considérables. Par exemple, le fait de reporter l'arrêt d'une unité nucléaire de quelques semaines au-delà de l'hiver, période de forte demande, peut conduire à un gain de l'ordre de plusieurs millions d'euros.
- Troisièmement, ce type de problèmes est soumis à des incertitudes, portant classiquement sur les valeurs futures de la demande à satisfaire, de la disponibilité des unités de production, des prix et des quantités échangeables sur le marché.

Le management de l'énergie est optimisé sur différents *horizons* de temps. Chaque horizon présente des simplifications permettant de ne considérer que les informations impactant son niveau de décisions propre. L'horizon *long-terme*, entre 10 et 50 ans, s'intéresse aux décisions d'investissements, telles que la construction de nouvelles unités de productions ou, plus généralement, la structure du *mix énergétique* futur. Un des enjeux principaux à cet horizon de temps est actuellement d'anticiper la pénétration des énergies renouvelables (*ENR*), et son impact sur le système de production électrique de demain ([Ding and Somani, 2010]). A l'autre extrémité du spectre, l'horizon *court-terme* consiste à optimiser le système de production sur une période allant de quelques jours à quelques heures du temps réel. Le problème classique à cet horizon est le *Unit commitment problem* (*UCP*), consistant à prendre les décisions de mise en marche/arrêt des unités, tout en modélisant extrêmement finement leurs contraintes de fonctionnement ainsi que celles du système électrique ([Ben Salem, 2011],[Tahanan et al., 2015]).

L'énergie nucléaire occupe une place prépondérante dans le parc de production français, avec 71,6% de l'énergie produite et 48.3% de la puissance installée en 2017 (RTE 2017). Si ce mode de

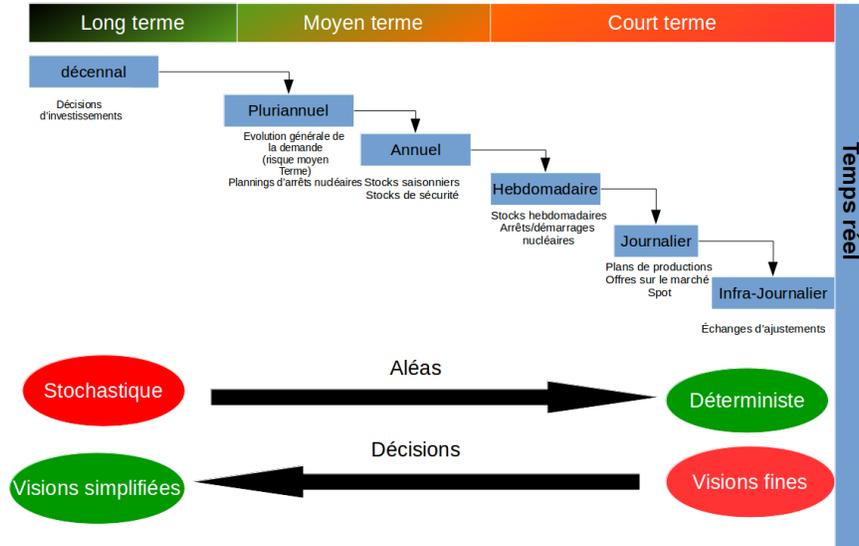


FIGURE 1.1: Organisation des horizons de temps au sein d'EDF

production fait partie des plus rentables, il présente de nombreuses contraintes de fonctionnement. En particulier, une unité nucléaire doit être arrêtée périodiquement tout les douze à dix-huit mois afin de changer le combustible usagé et d'effectuer des opérations de maintenance. L'arrêt d'une unité nucléaire est une opération industrielle complexe, devant être planifiée longtemps à l'avance et dont la durée ne peut-être qu'estimée a priori. La planification des arrêts des unités nucléaires constitue le problème principal de l'horizon moyen-terme. Celui-ci fait l'objet de cette thèse.

La figure 1.1 représente les différents horizons d'optimisation ainsi que les décisions associées à ces horizons. Un aspect important de ce découpage est représenté au bas de la figure :

- Plus l'horizon est lointain, plus l'incertitude sur les données est grande, et plus les aspects stochastiques sont importants. A l'inverse, on peut se contenter à un tel horizon d'une vision simplifiée, des contraintes pesant sur le problème.
- Au contraire, plus l'horizon est proche, moins les aspects stochastiques prennent d'importance au point de pouvoir au très court-terme considérer le problème comme déterministe ; en revanche, à ces horizons, les contraintes doivent être finement modélisées, les décisions devant être opérationnelles.
- L'optimisation à l'horizon *moyen-terme*, qui nous intéresse dans cette thèse, exige de trouver un bon équilibre entre ces deux aspects.

Le problème de placement des arrêts nucléaires est classiquement résolu à l'horizon moyen terme, et structure fortement la chaîne de décisions aux horizons suivants. Typiquement, une mauvaise décision de placement d'un arrêt entraînera jusqu'au court-terme une impossibilité de satisfaire la demande à un coût raisonnable.

Le parc nucléaire Français est organisé en 19 sites, représenté sur la figure figure 1.2 .



FIGURE 1.2: Répartition des unités nucléaires en France

1.2. Description du problème et des données

Nous présentons dans cette section les données, variables de décisions, contraintes et fonction objectif du problème, telles que fournies par EDF lors du Challenge ROADEF 2010 ([Porcheron et al., 2010]). Les notations ont été légèrement modifiées pour correspondre à celles employées dans la suite. Nous introduisons au chapitre 3 les notations complémentaires relatives aux nouveaux aspects pris en compte dans nos travaux.

Les unités de production fournissent la quantité d'électricité nécessaire pour satisfaire la demande sur un nombre de semaines W , appelé horizon. Le temps est discrétisé en pas de temps homogènes, dont le nombre est noté T . Le nombre de pas de temps par semaine, noté N , est donné par $N = T/W$.

La demande ainsi que le coût et la production maximale des unités de production non-nucléaires, sont supposés incertains et modélisés par un ensemble de scénarios. Ces scénarios sont supposés indépendants, un ensemble de décisions de production doivent être prises pour chacun d'eux.

Les unités non-nucléaires incluent :

- Les unités de production classiques (fuel, gaz, charbon) ;
- Les unités modélisant les échanges sur le marché Spot de l'électricité ;
- Un groupe dit *de défaillance*, de puissance infinie et de coût supérieur à celui de toutes les autres unités, permettant de satisfaire la demande dans tous les cas.

Enfin, certaines caractéristiques et contraintes dépendant de l'arrêt considéré, la période d'optimisation des unités nucléaires est divisée en *cycles* composés d'une *campagne de production* et d'un arrêt.

Indices : Les différentes données et contraintes du problème sont indicées de la manière suivante :

- $w \in W$: indices des semaines.
- $t \in T$: indices des pas de temps.
- $i \in I$: indices des unités de production nucléaire.
- $j \in J$: indices des unités de production non-nucléaire, y compris les unités modélisant les échanges sur le marché.
- $k \in K_i$: indices des cycles de l'unité i .
- $\omega \in \Omega$: indices des scénarios.

rappel : par convention dans ce manuscrit pour un indice a donné : $a \in A \Leftrightarrow a \in \llbracket 1, A \rrbracket$

Variables de décision Les variables de décision principales sont les dates d'arrêts des unités nucléaires ainsi que la quantité de combustible mise en cœur durant chaque arrêt, appelé *recharge* dans ce manuscrit. Celles-ci sont communes à l'ensemble des scénarios et constituent les variables de premier niveau. Pour chaque scénario, des décisions correspondant à la production de chaque unité, nucléaire ou non, doivent également être prises pour chaque pas de temps. Ces décisions constituent les variables de second niveau. La modélisation d'un certain nombre de contraintes portant sur les unités nucléaires conduit à introduire également des variables de décision modélisant leur stock. A noter que ces dernières peuvent prendre une valeur négative, ceci afin de modéliser plus simplement certaines contraintes portant sur leur stock.

Les variables de décisions sont les suivantes :

- p_{it}^ω : Production de l'unité nucléaire i durant le pas de temps t du scénario ω .
- p_{jt}^ω : Production de l'unité non-nucléaire j durant le pas de temps t du scénario ω .
- ta_{ik} : Premier pas de temps de l'arrêt du cycle k de l'unité i .
- es_{ikw} : Variable binaire égale à un si l'arrêt (i, k) débute à la semaine w .
- ec_{ik} : Ensemble des pas de temps de la campagne de production du cycle k de l'unité i
- x_{it}^ω : Stock de combustible de l'unité nucléaire i à la fin du pas de temps t du scénario ω .
- r_{ik} : Valeur de la recharge du cycle k de l'unité nucléaire i , i.e quantité de combustible ajouté dans le cœur lors de l'arrêt.

Objectif : Le problème vise à minimiser l'espérance des coûts de production sur un ensemble de scénarios de demande et de disponibilité des unités non-nucléaires.

Dans le cas général, où la recharge est une variable de décision et où le stock final des unités nucléaires est valorisé.

Nous introduisons :

- C_{jt}^ω : le coût d'utilisation en euros/MWh de l'unité non-nucléaire j durant le pas de temps t du scénario ω .
- C_{ik} : le coût de recharge en euros/MWh du cycle k de l'unité nucléaire i .

La fonction objectif du problème s'écrit :

$$\min \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{jt\omega} C_{jt}^\omega p_{jt}^\omega - \sum_i C_{iK_i} x_{iT}^\omega \right] + \sum_{ik} C_{ik} r_{ik} \quad (1.1)$$

Contrainte d'équilibre offre/demande : La demande doit être satisfaite pour chaque pas de temps. Le coût, la production minimale et la production maximale des unités non-nucléaires dépendent du scénario et varient selon le pas de temps considérée. Les unités de production nucléaires, peuvent fonctionner entre deux bornes ne dépendant que du temps.

Nous introduisons :

- D_t^ω : la demande au pas de temps t du scénario ω .
- \bar{P}_{it} (resp. \underline{P}_{it}) la production maximale (resp. minimale) de l'unité nucléaire i au pas de temps t dans l'ensemble des scénarios considérés.

- \overline{P}_{jt}^ω (resp. $\underline{P}_{jt}^\omega$) production maximale (resp. minimale) de l'unité non-nucléaire j au pas de temps t du scénario ω

Les contraintes associées aux scénarios s'écrivent :

$$\forall \omega, t \quad \sum_{it} p_{it}^\omega + \sum_{jt} p_{jt}^\omega = D_t^\omega \quad (1.2)$$

$$\forall \omega, i, t \quad \underline{P}_{it} \leq p_{it}^\omega \leq \overline{P}_{it} \quad (1.3)$$

$$\forall \omega, i, t \quad \underline{P}_{jt} \leq p_{jt}^\omega \leq \overline{P}_{jt} \quad (1.4)$$

(1.2) est la contrainte de satisfaction de la demande et (1.3)-(1.4) bornent la production des unités sur chaque pas de temps de chaque scénario.

A noter que la contrainte de demande ci-dessus est toujours réalisable, compte tenu de la présence dans les données du *groupe de défaillance* de puissance infinie.

Contraintes portant sur les stocks nucléaires. Entre deux arrêts, chaque campagne de production est divisée en deux phases : dans la première, l'unité peut produire à chaque pas de temps entre deux bornes. La quantité d'énergie économisée par rapport à l'énergie maximale qu'on pourrait produire, appelée *modulation*, est bornée pour chaque cycle. Lorsque le niveau de stock atteint un seuil donné, appelé *Bore nul (BO)*, l'unité débute la seconde phase, appelée *stretch* ou *prolongation*. Durant cette phase, l'énergie produite par l'unité doit suivre impérativement un profil décroissant non-linéaire, débutant à pleine puissance. Un arrêt peut débuter durant l'une des deux phases, cependant le niveau de combustible doit se situer entre deux bornes au moment de l'arrêt : la borne supérieure est appelée *anticipation maximale*, la borne inférieure le *stretch maximal*. La figure 1.3 représente un cycle nucléaire complet, la courbe de couleur brune correspond au niveau de production, la ligne de couleur rouge à la puissance maximale autorisée.

Nous introduisons les données suivantes pour un cycle k d'une unité nucléaire i :

- (i, k) : Arrêt associé
- $MMAX_{ik}$: Quantité maximale de modulation sur l'ensemble du cycle
- BO_{ik} : Niveau de Bore nul (BO) d'activation des contraintes de stretch
- PB_{ik} : Fonction associant à un niveau de stock en stretch, le ratio de puissance disponible
- $AMAX_{ik}$: Stock maximal au début de l'arrêt
- $DPMAX_{ik}$: Stock minimal au début de l'arrêt
- OD_{ik} : Durée prévisionnelle de l'arrêt
- SI_i : Stock initial de l'unité au début de l'horizon

Rappel des variables de décision et des données déjà définies :

- x_{it}^ω : Stock de combustible.
- p_{it}^ω : Production nucléaire.
- ta_{ik} : Premier pas de temps de l'arrêt.
- ec_{ik} : Ensemble des pas de temps de la campagne de production.
- \overline{P}_{it} : Production nucléaire maximale.

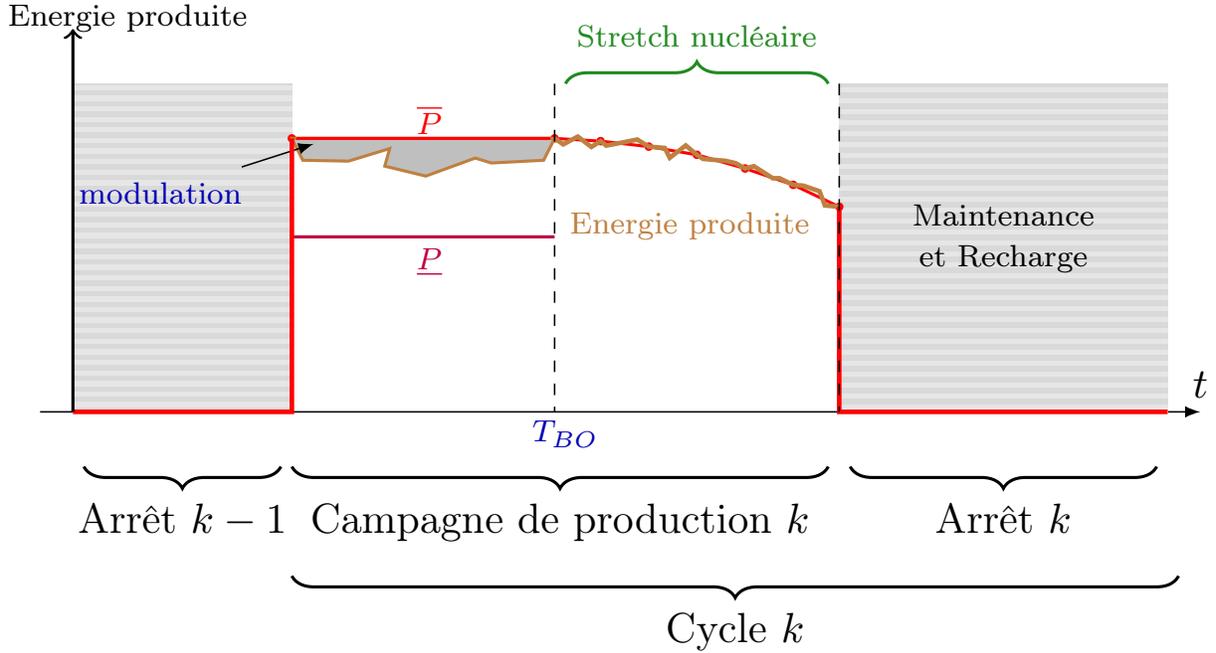


FIGURE 1.3: Cycle nucléaire

Les contraintes portant sur les stocks nucléaires s'écrivent alors :

$$\forall i, k, \omega \quad t \in [ta_{i,k}, ta_{i,k} + OD_{ik}] \Rightarrow p_{it}^{\omega} = 0 \quad (1.5)$$

$$\forall i, k, \omega, t \quad x_{it}^{\omega} \leq BO_{ik} \Rightarrow p_{it}^{\omega} = PB_{ik}(x(i, t, s))\bar{P}_{it} \quad (1.6)$$

$$\forall i, k \quad \sum_{t \in \{ec_{ik} | x_{it} \geq BO_{ik}\}} [\bar{P}_{it} - p_{it}^{\omega}] \leq MMAX_{ik} \quad (1.7)$$

$$\forall i, k, \omega \quad DPMAX_{i,k} \leq x_{i,ta_{ik}} \leq AMAX_{i,k} \quad (1.8)$$

$$\forall i, k, t \in ec(i, k), \omega \quad x_{i,t+1}^{\omega} = x_{it}^{\omega} - p_{it}^{\omega} \quad (1.9)$$

$$\forall i, \omega \quad x_{i,0}^{\omega} = SI_i \quad (1.10)$$

La contrainte (1.5) impose que la production d'une unité nucléaire soit nulle ; la contrainte (1.6) correspond au stretch ; (1.7) limite la quantité de modulation durant un cycle ; (1.8) correspond aux bornes maximale et minimale de stock au début d'un arrêt ; (1.9) fait le lien entre production et stock des unités ; enfin (1.10) initialise le stock des unités.

Remarque 1. *Les contraintes de stretch et les bornes de modulation sont des contraintes disjonctives qui rendent à elles seules le problème difficile.*

Arrêts nucléaires. Un arrêt peut débuter avant le Bore nul, l'arrêt est alors dit en *anticipation*, ou bien après, et l'arrêt est alors dit en *stretch* ou *prolongation*. Lors de l'arrêt, une partie des assemblages usagés est retirée et remplacée par des assemblages neufs. Le niveau de stock après rechargement suit une loi valorisant le fait que celui-ci ait lieu en stretch plutôt qu'en anticipation, les assemblages retirés ayant, dans ce cas, été mieux exploités depuis leur mise en exploitation. Certains arrêts doivent être réalisés durant une fenêtre de temps donnée.

Nous introduisons ici pour un cycle k et une unité i :

- Q_{ik} : Coefficient de rechargement nucléaire.
- \underline{DA}_{ik} : Date au plus tôt pour débiter l'arrêt.
- \overline{DA}_{ik} : Date au plus tard pour débiter l'arrêt.
- \overline{R}_{ik} : Valeur minimale de la recharge.
- \underline{R}_{ik} : Valeur maximale de la recharge.

Rappel des variables et données introduites précédemment et utilisées dans ces contraintes :

- ta_{ik} : Premier pas de temps de l'arrêt du cycle k de l'unité i .
- r_{ik} : Valeur de la recharge du cycle k de l'unité i .
- OD_{ik} : Durée prévisionnelle de l'arrêt (i, k) .

Les contraintes suivantes s'ajoutent au problème :

$$\forall i, k \quad \underline{DA}_{ik} \leq ta_{ik} \leq \overline{DA}_{ik} \quad (1.11)$$

$$\forall i, k \quad x_{i, ta_{i,k} + OD_{ik}}^\omega = \left(1 - \frac{1}{Q_{ik}}\right) x_{i, ta_{i,k}}^\omega + r_{ik} \quad (1.12)$$

$$\forall i, k \quad \underline{R}_{ik} \leq r_{ik} \leq \overline{R}_{ik} \quad (1.13)$$

Les contraintes (1.11) sont les fenêtres de temps des arrêts ; (1.12) correspond à la loi de rechargement des unités et (1.13) sont les bornes des variables de rechargement.

Remarque 2. *Le fait de considérer le niveau de stock x_{it} relativement au Bore nul permet de modéliser le gain (resp. la perte) de combustible lié(e) à un arrêt en stretch (resp. en prolongation) par la loi de rechargement exprimée ci-dessus.*

Contraintes de ressources entre arrêts. Des contraintes de ressources entre arrêts d'unités nucléaires d'un même site s'appliquent. Des contraintes additionnelles sur l'ensemble ou une partie du parc nucléaire peuvent également exister. La plupart de ces contraintes correspondent à des contraintes logistiques (partage de personnel ou de machines). L'ensemble de ces contraintes sont explicitées sous une forme générique, introduite par [Lusby et al., 2010], que EDF a standardisé au sein de ces outils.

Nous introduisons un ensemble de contraintes de ressources entre arrêts \mathbb{C} , chaque contrainte $c \in \mathbb{C}$ possède les caractéristiques suivantes :

- S_c : Semaine de début de la contrainte.
- E_c : Semaine de fin de la contrainte.
- O_c : Un ensemble d'arrêts (i, k) .

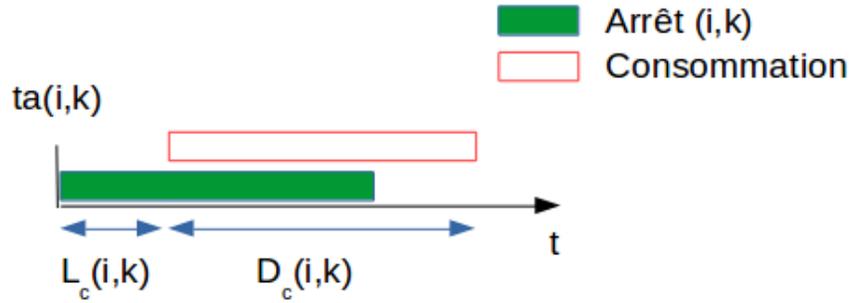


FIGURE 1.4: Consommation de ressources, l'arrêt est représenté en vert et la consommation de ressources en rouge

- $L_c(i, k)$: Le nombre de semaines après le début de l'arrêt (i, k) avant que celui-ci commence à consommer une ressource.
- $D_c(i, k)$: Une durée de consommation de la ressource par l'arrêt (i, k) .
- N_{cw} : Le nombre de ressources disponibles pour la semaine w .

La figure 1.4 illustre le lien entre le pas de temps début d'arrêt $ta(i, k)$, les valeurs de $L_c(i, k)$ et $D_c(i, k)$. A noter que la durée de consommation $D_c(i, k)$ est décomptée une fois les semaines correspondant à la latence $L_c(i, k)$ passées. Cette durée $D_c(i, k)$ n'est pas nécessairement égale à la durée de l'arrêt considéré mais peut inclure des semaines d'espacement minimales.

Rappel des variables intervenant dans la contrainte de ressources entre arrêts :

- es_{ikw} : variable binaire égale à 1 si l'arrêt (i, k) débute à la semaine w .

$$\forall i, k, c, w \in [S_c, E_c] \quad \sum_{(i,k) \in O_c} \left(\sum_{w'=w-D_c(i,k)}^{w-L_c(i,k)} es_{ikw'} \right) \leq N_{cw} \quad (1.14)$$

1.3. État de l'art à EDF

Le placement des arrêts des unités nucléaires est un problème fondamental pour EDF compte tenu de la part prépondérante de la production nucléaire dans son mix énergétique. De nombreux travaux ont été menés sur ce sujet par EDF, nous en présentons la synthèse dans les paragraphes ci-dessous.

1.3.1 Travaux antérieurs au Challenge ROADEF 2010

Des premières modélisations du problème et des premiers outils, basés sur des techniques de programmation linéaire et de programmation dynamique, ont été réalisés dans les années 80 et au début des années 90 (voir documents internes [Roussel, 1981],[Blondel and Roblin, 1994]). A partir de cette période, EDF a investigué des modélisations par PLNE. Ces travaux ont conduit à la mise en place, en 1998, de l'outil utilisé jusqu'en 2014 par les équipes opérationnelles d'EDF pour résoudre le problème chaque mois, ORION ([Fourcade et al., 1997], documents internes : [Fourcade, 1993a],[Fourcade, 1993b],[Fourcade et al., 1995],[Nguyen phong chau, 1998],[Devilleine, 2003]). L'ensemble de ces méthodes présentaient des limitations importantes :

1. **Recherche locale.** La solution est recherchée dans un espace construit itérativement, de manière heuristique, à partir de la solution du mois précédent. A chaque itération une solution améliorant le critère est recherchée dans un voisinage de la solution précédente. Cette procédure converge vers un optimum local, mais ne donne pas de garantie d’optimalité globale, des solutions meilleures que celle déterminée pouvant se trouver en dehors de cet espace.
2. **Difficulté à satisfaire l’ensemble des contraintes du problème.** Certaines contraintes étaient ignorées par ces méthodes, en particulier les contraintes couplant les arrêts d’unités appartenant à des sites différents (contraintes inter-sites), la plupart de ceux-ci reposant sur une décomposition du problème par site nucléaire.
3. **Modélisation limitée et anticipative des aspects stochastiques du problème.** Le critère économique utilisé pour réaliser l’optimisation est pré-calculé en moyenne sur un ensemble de scénarios et pour un ensemble prédéfini d’hypothèses de disponibilité nucléaire. L’impact sur la solution de la dispersion des aléas n’est pas pris en compte.
4. **Résolution du problème sur un pas de temps hebdomadaire.** Les données de demande et de disponibilité des unités de production sont agrégées, effaçant les variations infra-hebdomadaires et a fortiori infra-journalières de la demande, et interdisant ainsi la modélisation de contraintes « fines » de production.

Parallèlement, EDF a conduit de nombreux travaux prospectifs en collaboration avec des laboratoires académiques visant à dépasser ces limitations : approche polyédrique ([Bonami, 2003]), programmation par contraintes ([Khemmoudj, 2007]), programmation semi-définie positive ([Gorge, 2010])...

1.3.2 Challenge ROADEF

En 2010, afin de solliciter la communauté académique sur le sujet, EDF a proposé le problème au Challenge ROADEF ([Porcheron et al., 2010]). Le temps de calcul limité à une heure explique que les méthodes ayant obtenues les meilleurs résultats étaient, pour la plupart, basées sur des heuristiques de type recherche locale ([Dereu, 2010],[Gardi and Nouioua, 2011] , document interne [Peekstok and Kuipers, 2010]) — incluant pour certaines des techniques de programmation par contraintes ([Brandt, 2010],[Godskesen et al., 2013],[Gavranović and Buljubašić, 2013]) —, assez proches de celle utilisée par EDF dans l’outil ORION. Ces approches permettaient toutefois de dépasser certaines des limitations de cet outil, dont la relaxation des contraintes inter-sites.

Néanmoins, plusieurs équipes ont utilisé des méthodes de programmation linéaire continue (LP) ou en nombres entiers (PLNE) pour résoudre une partie spécifique du problème. Ils ont, pour cela, exploité une structure de décision à plusieurs niveaux, fixant d’abord les dates d’arrêts et les recharges, puis la production. En particulier, l’équipe ayant remporté le Challenge ([Jost and Savourey, 2013]), a utilisé une formulation en variables binaires pour trouver des plannings permettant de respecter les contraintes d’arrêts, un second niveau de recherche par dichotomie des niveaux de recharge et un troisième utilisant un algorithme de type Glouton pour placer la production.

Les résultats du Challenge ont permis aux équipes de la R&D d’EDF d’améliorer la méthodologie exploitée dans l’outil ORION, y intégrant les contraintes de ressources entre arrêts inter-sites et élargissant l’espace de recherche, pour aboutir à la mise en service d’un nouvel outil, ARTEMIS (voir document interne [Gevret, 2018]), toujours basé sur une méthode heuristique de recherche locale au voisinage du planning obtenu le mois précédent.

C’est également lors du Challenge que certaines idées proches de nos travaux ont été introduites.

[Rozenknop et al., 2013] ont utilisé une formulation étendue modélisant les contraintes locales à chaque unité nucléaire par un graphe d’état. Les niveaux de stock accessibles à la fin d’une

campagne sont discrétisés, ce qui permet de connaître la production totale pendant celle-ci et de fixer le stretch associé. La relaxation linéaire du problème est résolue par génération de colonnes, mais sans pouvoir tenir compte des contraintes de ressource entre arrêts. D’autre part, la prise en compte de la contrainte de demande dans les sous-problèmes de pricing ralentit la résolution de ces derniers, et complexifie la génération de colonnes.

[Lusby et al., 2010] ont utilisé une décomposition de Benders pour séparer les scénarios. Cependant leur approche nécessite de relâcher certaines contraintes non-linéaires afin de rester dans le cadre d’application de cette décomposition.

Comme nous le verrons au chapitre 2, les méthodes que nous avons développées s’affranchissent de ces difficultés.

1.3.3 Travaux postérieurs au Challenge ROADEF

A l’issue du Challenge, EDF a poursuivi ses recherches sur le problème en s’orientant plus particulièrement vers les méthodes « exactes » de résolution. Une collaboration avec l’équipe du LIPN Paris XIII a été engagée dans le but d’étendre les méthodes proposées par cette équipe lors du Challenge ([Rozenknop et al., 2013]) à la prise en compte d’aspects robustes liés aux aléas sur la durée des arrêts.

Une collaboration a été également initiée en 2011 avec les équipes RealOpt de l’INRIA Bordeaux et DOLPHIN de l’INRIA Lille, dans le but de poursuivre les travaux initiés par la première équipe en parallèle du Challenge ROADEF. Cette collaboration s’est achevée en 2012, l’équipe DOLPHIN poursuivant les recherches indépendamment d’EDF, en particulier sur des techniques de relaxation de contraintes et de robustesse aux aléas ([Dupin and Talbi, 2016],[Dupin, 2015])

Les aspects liés à la prise en compte de la robustesse aux aléas traités dans les travaux ci-dessus sont décrits plus précisément au Chapitre 4 consacré à cette thématique.

En 2015, EDF et l’équipe RealOpt de l’INRIA de Bordeaux ont initié les travaux de thèse que nous présentons dans ce manuscrit.

1.4. Objectifs des travaux

1. Définir une *formulation étendue* du problème permettant sa résolution « frontale » à l’optimum par un solveur de PLNE sur des instances de taille réelle et dans des temps de calcul acceptable du point de vue d’EDF. Le but ici est de dépasser la limitation imposée par les méthodes heuristiques de recherche locale utilisées dans l’outil exploité par EDF, à savoir sans de garantie d’optimalité ni de bornes.
2. Mettre au point des *méthodes de décomposition* du problème permettant de traiter des instances de plus grande taille que celles traitées par la méthode « frontale », afin d’augmenter le nombre de scénarios d’aléas pris en compte. L’idée est de mesurer l’impact sur le planning d’arrêts d’une plus grande dispersion de l’aléa de demande adressé au parc nucléaire. Ce point est particulièrement important pour EDF, dans le contexte d’une pénétration croissante des ENR, intermittentes par nature, dans le mix énergétique.
3. Développer des méthodes permettant de rendre le planning robuste aux aléas de disponibilité des unités nucléaires et de prolongation de leurs arrêts. Ces deux points sont particulièrement mal pris en compte dans les outils actuels.

4. Proposer des méthodes capables de se passer de toute solution initiale, et d'exploiter une discrétisation du temps inférieure à la semaine. Ce dernier point vise à mesurer l'impact sur le planning d'arrêts de la prise en compte de contraintes infra-hebdomadaires d'équilibre offre/demande, non modélisées dans les outils actuellement utilisés par EDF.

Chapitre 2

Modélisation et méthodes de résolution

L'application industrielle que nous traitons dans cette thèse se modélise, de manière naturelle, comme un problème stochastique de grande taille à deux niveaux : le premier niveau consiste à fixer les dates d'arrêts pour chacune des unités nucléaires tandis que le second détermine les niveaux de production de chacune des unités de production afin de satisfaire la demande à un coût minimum. Chaque unité nucléaire présente des contraintes techniques de fonctionnement liant les niveaux de stocks à la production disponible. Les dates d'arrêts doivent prendre en compte les contraintes de stocks afin d'assurer l'existence d'un plan de production réalisable entre deux arrêts. La résolution d'instances de grande taille de problème en nombres entiers repose sur des décompositions exploitant la structure de la matrice des contraintes. Dans cette thèse nous allons présenter deux types de décomposition, Dantzig-Wolfe et Benders, pour cette application. Remarquons les caractéristiques suivantes de la structure du problème :

- Les seules contraintes liant les dates d'arrêts de différentes unités entre elles sont les contraintes de ressources entre arrêts et de satisfaction de la demande, ce qui correspond à une matrice des contraintes semi-diagonale par blocs. Les contraintes de ressources entre arrêts lient les blocs correspondant aux contraintes techniques propres au fonctionnement d'une unité nucléaire.
- Le second niveau est modélisé par des scénarios, partageant des dates d'arrêts communes mais entre lesquels les contraintes de demande et de borne sur la production nucléaire sont indépendantes. La matrice des contraintes correspondante possède une structure semi-diagonale par blocs, pour laquelle les variables liantes correspondent aux contraintes imposées par les dates d'arrêts du premier niveau. Exploiter cette structure particulière sera possible si le problème de second niveau peut s'exprimer comme un problème linéaire en variables continues. La plus grande difficulté provient dans cette partie de la modélisation des contraintes imposant à l'unité le suivi d'un profil de production non-linéaire (contraintes de stretch).

L'objectif de cette thèse est d'exploiter ces structures particulières pour permettre la résolution d'instances du problème de taille industrielle par des méthodes tirées de la programmation mathématiques, par opposition aux méthodes heuristiques. Un premier pas dans cette direction a été réalisé par [Joncour, 2011] en présentant une approche en deux phases. La première phase est une formulation étendue (voir 2.1) dans laquelle, à chaque unité nucléaire est associé un graphe d'état dans lequel chaque arc correspond soit à une campagne de production soit à un arrêt. Il est alors possible d'appliquer une méthode de *génération de colonnes* dans laquelle, chaque colonne est un chemin du graphe et le *problème de pricing* un problème de plus court-chemin pouvant être résolu par un algorithme de type Dijkstra ([Dijkstra, 1959]). Dans cette formulation, les unités nucléaires sont toujours à pleine puissance tant que le niveau de stock se situe au dessus du niveau BO. La deuxième phase est un programme linéaire en nombres entiers dans lequel les dates d'arrêts sont fixées mais des variables binaires sont utilisées pour représenter les dates d'entrée en stretch.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la section 2.1 est une introduction aux méthodes classiques d’optimisation de problèmes en nombres entiers de grande taille et, en particulier, des reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders, respectivement combinées aux méthodes de génération de colonnes et de coupes. La section 2.3 présente une première version de notre formulation étendue. La section 2.3 présente les reformulations et décompositions appliquées à cette formulation. La section 2.4 présente différents choix de variables pour la formulation et l’incidence sur les performances des différents algorithmes de résolution. Nous y comparons également plusieurs méthodes d’obtention de solutions entières. Nous concluons ce chapitre par un rappel des résultats obtenus ainsi que des formulations et méthodes sélectionnées pour l’étude industrielle du chapitre 3.

2.1. État de l’art des méthodes de décomposition en PLNE

L’objectif est de minimiser une fonction linéaire des variables de décisions, celles-ci devant vérifier un ensemble de contraintes linéaires (égalités ou inégalités). Dans le cas continu, un tel problème et son dual peuvent être représentés de la manière suivante ([Bertsimas and Tsitsiklis, 1997]) :

$$\begin{array}{ll}
 \min & c^T x & \text{(P)} \\
 \text{s.t.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \max & \pi^T b & \text{(D)} \\
 \text{s.t.} & A^T \pi \leq c \\
 & \pi \in \mathbb{R}^{|m|}
 \end{array}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de dimension n , A est une matrice de dimension $n \times m$, b et c sont des vecteurs de dimension m .

La solution optimale du problème (P) se trouve sur la frontière de l’enveloppe convexe des solutions et elle peut être trouvée par la méthode du Simplexe (ré-édition [Dantzig, 2016]). Cette méthode consiste à se déplacer sur les sommets et arêtes appartenant à la frontière de l’enveloppe convexe des solutions jusqu’à obtenir la solution optimale. Bien que pouvant théoriquement mener à visiter un nombre exponentiel de sommet, cette méthode s’avère très efficace en pratique, y compris sur des problèmes de très grandes tailles (voir [Bertsimas and Tsitsiklis, 1997] pour une description détaillée).

Lorsque certaines variables sont entières, la solution optimale ne se trouve pas nécessairement sur la frontière de l’ensemble convexe des solutions de la relaxation linéaire. Le principe de résolution classique s’appuie sur un algorithme de recherche arborescent itératif, appelé Branch & Bound (voir [Lawler and Wood, 1966]), dans lequel on impose progressivement les contraintes d’intégralité, afin d’éliminer les solutions fractionnaires optimales jusqu’à obtenir une solution entière. Cet algorithme est un algorithme par séparation et évaluation. On commence par résoudre la relaxation linéaire du problème puis on *branche*, en créant deux nœuds formant une partition de l’ensemble des solutions entières. Il existe plusieurs méthodes de branchement possibles, celle de Dakin ([Dakin, 1965]) ajoute à chacun des deux nœuds une inégalité sur l’une des variables entières ayant une valeur fractionnaire dans la relaxation courante. On ajoute ensuite ces deux nœuds à l’ensemble des nœuds à évaluer et on résout à nouveau le modèle correspond à l’un des nœuds de cet ensemble. L’efficacité de l’algorithme repose sur le fait que la résolution d’un nœud donné fournit une borne inférieure sur la valeur de la solution optimale du problème (P) (appelé borne duale) ainsi que sur l’ensemble des nœuds de la même branche de l’arbre (dont les contraintes d’intégralité comprennent celles du nœud courant), il n’est alors pas nécessaire d’évaluer certains nœuds dont la borne duale est supérieure à une solution entière trouvée précédemment. Ce type d’algorithme est à la base de tous les solveurs de

PLNE comme IBM-Cplex que nous avons utilisé dans ces travaux. L'efficacité de résolution dépend de trois facteurs essentiels : la vitesse de résolution de la relaxation linéaire du problème, la qualité des bornes obtenues et la stratégie de branchement. La stratégie de branchement a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature ([Morrison et al., 2016] présentent des dernières avancées sur ce sujet). La qualité des bornes obtenues est améliorée par l'ajout de *coupes* lors de la résolution des relaxations, on parle alors d'algorithme de Branch & Cut ([Padberg and Rinaldi, 1991]).

Une manière d'améliorer la vitesse de résolution du Branch & Bound est de reformuler le problème afin de réduire la différence entre l'enveloppe convexe des solutions de sa relaxation linéaire et celle de ses solutions entières. Une formulation est dite *idéale* lorsque ces deux enveloppes sont identiques, dans ce cas la résolution de la relaxation linéaire du problème permet de résoudre le problème en nombres entiers. Plus une formulation s'approche de cette formulation idéale et plus le nombre de nœuds potentiels à visiter par un algorithme de Branch & Cut est restreint. Introduire de nouvelles variables est une manière d'obtenir une formulation de meilleure qualité, en modélisant de manière plus fine la structure du problème ([Conforti et al., 2010]). Plus précisément, comme le détaille [Vanderbeck and Wolsey, 2010], ce type d'approche permet de créer des formulations dont la structure impose des contraintes d'intégralité de manière implicite. En revanche, l'amélioration d'une formulation par cette technique induit une augmentation du nombre de contraintes et/ou de variables, dont le nombre peut devenir exponentiel. Dans la plupart des applications l'efficacité de ce type de formulation repose sur l'utilisation de méthodes de décomposition résolues par des algorithmes spécifiques, générant dynamiquement variables et contraintes ([Geoffrion, 1970]). En particulier, dans cette thèse, nous exploiterons les reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders, respectivement couplées à des algorithmes de génération de colonnes et de coupes. Lorsque chaque nœud d'un arbre de branchement est résolu par une génération combinées de colonnes et de coupes on parle d'algorithme de Branch-Price-and-Cut ([Desrosiers and Lübbecke, 2011]), ce type d'algorithme a été utilisé avec succès dans de nombreuses applications dans les domaines de la logistique ([Desaulniers et al., 2015], [Ribeiro et al., 2012]), de l'ordonnancement ([Coughlan et al., 2015]) ou de la biologie ([Catanzaro et al., 2015]).

2.1.1 Reformulation de Dantzig-Wolfe et génération de colonnes

Supposons que le problème (P) s'écrive sous la forme du problème (P') :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^T x && \text{(P')} \\
 \text{s.t.} \quad & Ox \leq b && (n \text{ contraintes}) \\
 & Fx \leq f && (m \text{ contraintes}) \\
 & x \in \mathbb{Z}^n
 \end{aligned}$$

où les contraintes $Ox \leq b$ représentent un ensemble de contraintes "difficiles" structurant l'espace des solutions entières du problème, alors qu'au contraire il existe une méthode "efficace" en pratique pour résoudre le problème $\{\min c^T x | Fx \leq f, x \in \mathbb{Z}^n\}$. Le principe de la reformulation de Dantzig-Wolfe ([Dantzig and Wolfe, 1960]) consiste à exploiter cette structure particulière en reformulant le problème (P') en fonction des points extrêmes de l'ensemble $X^f = \text{conv}\{x | Fx \leq f, x \in \mathbb{Z}^n\}$. En effet, d'après le théorème de Minkowski et Weil ([?]), lorsque le polytope X^f est borné, tout point x de celui-ci peut s'exprimer en fonction de ses points extrêmes :

$$\min \sum_{g \in G} (cx^g)\lambda_g \quad (\text{DW}) \quad (2.0)$$

$$s.t \sum_{g \in G} (Ox^g)\lambda_g \leq b \quad (\text{n contraintes}) \quad (2.1)$$

$$\sum_{g \in G} \lambda^g = 1 \quad (1 \text{ contrainte}) \quad (2.2)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^{|G|} \quad (2.3)$$

où $\{g \in G\}$ est l'ensemble des points extrêmes du polytope X^f , λ^g la variable de décision indiquant si la solution g est choisie et x^g est le vecteur décrivant la solution g .

Le problème en nombres entiers (DW) possède $m-1$ contraintes de moins que la formulation (P') mais un nombre de variables égal au nombre de points extrêmes du polytope $\{x|Fx \leq f\}$, qui est en règle générale exponentiel. En revanche, là où la relaxation continue de (P') implique la relaxation de l'ensemble des contraintes, la relaxation continue de (DW) ne relaxe que les contraintes $\{Ox \leq b\}$, ce qui peut mener à de meilleures bornes. De plus, dans un grand nombre d'applications industrielles (y compris celle qui nous intéresse), la matrice des contraintes F présente une structure diagonale par blocs et seule une partie des contraintes de la matrice O , appelées contraintes liantes ou couplantes, lie les différents blocs entre eux. Ce type d'approche permet de reformuler le problème en fonction des points extrêmes de chacun des blocs, permettant la résolution de problèmes de grande taille par la génération dynamique des points extrêmes de chaque bloc. La figure 2.1 illustre cette structure avec les contraintes O liant les différents blocs F entre eux.

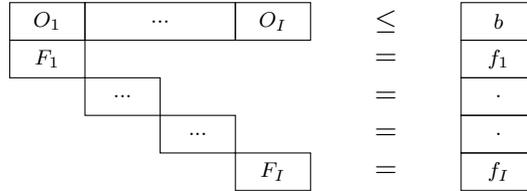


FIGURE 2.1: Structure diagonale par blocs avec contraintes couplantes

Cette méthode, appelée génération de colonnes ([Ford and Fulkerson, 1958]), est une méthode classique de l'optimisation linéaire en nombres mixtes. Nous en faisons ici une description synthétique (voir [Desaulniers et al., 2006],[Lübbecke, 2010],[Lübbecke and Desrosiers, 2005] pour plus de précisions). On cherche à résoudre la relaxation linéaire du problème (DW) dont le nombre de variables est exponentiel. On formule un problème, appelé problème maître restreint, ne comportant qu'un sous-ensemble de ces variables. On ne considère également qu'une sous-matrice O^g de la matrice O ne comportant que les colonnes correspondant au sous-ensemble de variables considéré.

$$\min \sum_{g \in G'} (cx^g) \lambda_g \quad (\text{RMP})$$

$$s.t \sum_{g \in G'} (O^g x^g) \lambda_g \leq b \quad (2.4)$$

$$\sum_{g \in G} \lambda^g = 1 \quad (2.5)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^{+|G'|} \quad (2.6)$$

où $G' \subset G$ est un sous-ensemble de points extrêmes générés jusqu'ici, pouvant être vide initialement. La matrice des contraintes de ce problème ne comporte que les colonnes appartenant à l'ensemble G' . Supposons que l'on ait résolu le problème (RMP), on obtient alors une borne primale ainsi qu'une base réalisable (mais non optimale a priori) pour (DW). Dans l'algorithme du Simplexe l'étape suivant la résolution du problème (DW) consisterait à essayer d'améliorer la valeur de la fonction objectif en cherchant une variable hors base candidate pour rentrer dans la base, c'est-à-dire la variable de plus faible coût réduit. Le problème de recherche du plus faible coût réduit \tilde{c}_j associé à la variable λ_j , s'exprime par :

$$\tilde{c}^{j*} = \min_{j \in G \setminus G'} (\tilde{c}_j) = \min_{j \in G \setminus G'} (cx^j - \pi^T O^j x^j - \pi_0) \quad (2.7)$$

où π et π_0 sont les variables duales associées aux contraintes (2.4) et (2.5) respectivement.

Si $\tilde{c}^{j*} \geq 0$, il n'existe pas de variables hors base permettant d'améliorer la fonction objectif du problème (DW) donc la solution courante de (RMP) est optimale pour (DW). Sinon, λ_{j^*} doit entrer en base, on ajoute la colonne correspondante à la matrice des contraintes du problème (RMP) la résolution itérative se poursuit sur le problème obtenu.

Classiquement on ne prend pas en compte les variables duales correspondants aux contraintes dites *de convexité* (2.5) puisqu'elles représentent un terme constant. Dans la formulation (2.7) le terme correspondant à π_0 disparaît. Ceci évite des calculs inutiles dans la mise à jour des sous-problèmes de pricing et permet d'obtenir une borne duale en utilisant directement la valeur de la fonction objectif de ceux-ci à chaque itération de génération de colonnes.

Dans le cas d'une structure diagonale par blocs, une reformulation de Dantzig-Wolfe aboutit à un problème maître et un ensemble de sous-problèmes de dimension plus faible. A chaque itération on résout l'ensemble des sous-problèmes et on ajoute au problème maître restreint les colonnes générées.

Si la méthode de génération de colonnes a été initialement introduite dans le cadre de la résolution de problèmes linéaires à variables continues, elle s'est avérée un outil extrêmement puissant dans le cadre de l'optimisation de problèmes en nombres entiers et en particulier dans le cadre de la reformulation de Dantzig-Wolfe. Ce type de reformulation permet en règle générale d'améliorer la borne fournie par la relaxation linéaire du problème. De plus, dans le cas de problèmes de grande taille pour lesquels l'exploration par de Branch & Bound s'avère trop coûteuse en temps de calcul, il est possible d'exploiter la structure du problème reformulé pour trouver des solutions de manière heuristique, comme proposé dans [Sadykov et al., 2015].

A chaque itération de l'algorithme de génération de colonnes, on obtient une borne primale pour le problème (P') ainsi que la valeur des variables duales associées à cette solution. Il est alors possible

de déduire une valeur duale pour la fonction objectif du problème linéaire initial. Soit z la valeur optimale de la dernière résolution du problème maître restreint et \tilde{c}^{j*} le vecteur des coûts réduits associés. Alors, $z - \tilde{c}^{j*}$ constitue une borne duale pour la fonction objectif du problème en nombres entiers initial. Cette borne repose sur le fait que \tilde{c}^{j*} est une borne supérieure sur l'amélioration potentielle de la fonction objectif obtenue lors des itérations suivantes ([Bertsimas and Tsitsiklis, 1997]). À noter que, $z - \tilde{c}^{j*}$ correspond également à la valeur que l'on obtiendrait par la relaxation lagrangienne des contraintes (2.1) ([Fisher, 1981]), en effet la reformulation de Dantzig-Wolfe est la formulation duale de cette relaxation lagrangienne.

Bien que le principe de génération dynamique des variables soit simple, la méthode de génération de colonnes présente de manière classique de problèmes dits de *dégénérescences primale et duale* apparaissant lors de la résolution de problèmes de grande taille, ces problèmes nécessitent une implémentation efficace, exploitant des techniques de stabilisation ([Pessoa et al., 2013], [Amor et al., 2004]), par exemple implémentées dans la librairie BaPCod de l'INRIA que nous avons utilisée dans nos travaux.

2.1.2 Reformulation de Benders et génération de coupes

Là où la reformulation de Dantzig-Wolfe exploite la distinction entre contraintes couplantes et contraintes indépendantes, la reformulation de Benders ([Benders, 1962b]) exploite le fait que certaines variables lient certaines parties du problème alors que sans ces variables couplantes chaque partie se résout simplement. C'est en particulier le cas des problèmes stochastiques à deux niveaux, dans lesquels les décisions du premier doivent être prises avant que l'incertitude ne soit levée, les décisions de second niveau doivent, quant à elles, être prises une fois l'incertitude révélée pour s'y adapter (variables *wait-and-see*). Nous présentons dans cette section une description rapide de la reformulation de Benders et de l'algorithme de génération de coupes permettant de la résoudre ([Sen, 2015] et [Vanderbeck and Wolsey, 2010] pour une description détaillée).

Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + h^T y & \text{(B)} \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & Tx + Dy = d \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \quad y \in \mathbb{R}_+^p \end{aligned}$$

où les variables entières x sont les variables de premier niveau alors que les variables continues y sont celles de second niveau. Les vecteurs c et h de dimension respective n et p correspondent aux coûts associés à ces décisions. La reformulation de Benders consiste à décomposer en un problème maître ne comportant que les variables x et un *sous-problème de séparation* paramétré par ces décisions :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + z(x) & \text{(BM)} \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z(x) = \min \quad & h^T y & \text{(BS)} \\ \text{s.t.} \quad & Dy = d - Tx \\ & y \in \mathbb{R}_+^p \end{aligned}$$

Puisque (BS) est un problème linéaire en variables continues, il est équivalent à son problème dual que nous pouvons reformuler :

$$\begin{aligned}
z(x) = \max \quad & \sigma(d - Tx) & (\text{SPD}) \\
s.t \quad & D^T \sigma \leq h \\
& \sigma \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dans le cas où le problème original (B) est borné, (BS) est réalisable et (SPD) peut être reformulé comme suit ([Lim, 2010], voir [Taşkin, 2010]) :

$$\begin{aligned}
\min \quad & q & (\text{BC}) \\
s.t \quad & \alpha^p(d - Tx) \leq q, \quad \forall \alpha^p \in \Delta^p \\
& \alpha^r(d - Tx) \leq 0, \quad \forall \alpha^r \in \Delta^r \\
& q \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

où Δ^p et Δ^r sont respectivement les ensembles des points et rayons extrêmes de l'ensemble réalisable de (BS). Dans cette formulation les premières contraintes sont communément appelées *coupes d'optimalité* et les secondes *coupes de faisabilité*.

Nous pouvons désormais écrire la reformulation de (B) en remplaçant les variables et contraintes correspondant à (BS) par les contraintes de (BC) :

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^T x + q & (\text{BR}) \\
s.t \quad & Ax = b & (2.8) \\
& \alpha^p(d - Tx) \leq q, \quad \forall \alpha^p \in \Delta^p & (2.9) \\
& \alpha^r(d - Tx) \leq 0, \quad \forall \alpha^r \in \Delta^r & (2.10) \\
& x \in \mathbb{Z}^n, \quad q \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

La formulation obtenue remplace les p variables continues y par une seule variable continue q , correspondant au coût du second niveau, mais introduit un nombre exponentiel de contraintes (2.9)-(2.10). Comme pour la reformulation de Dantzig-Wolfe, la reformulation de Benders est en règle générale résolue par une génération dynamique de ces contraintes (aussi appelée *génération de coupes*).

A noter que dans la librairie BaPCod utilisée dans ces travaux, la fonction objectif du sous-problème de séparation (BS) est ré-écrite dans le but de ne générer qu'un seul type de coupes contenant à la fois les informations relatives à l'optimalité et à la faisabilité. L'algorithme commence par résoudre une formulation de (BR) dans laquelle les contraintes (2.9)-(2.10) sont ignorées. Lorsqu'une solution de premier niveau (x, q) est obtenue on résout le problème de séparation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \eta & (\text{SEP}) \\
s.t \quad & h^T y - \eta \leq q & (2.11) \\
& Dy - d + Tx + \eta = 0 & (2.12) \\
& y \geq 0 & (2.13) \\
& \eta \in \mathbb{R} & (2.14)
\end{aligned}$$

- Si $\eta \neq 0$ dans la solution du problème de séparation, alors les variables duales associées à cette solution permettent de construire une coupe de la forme :

$$\alpha^p(d - Tx) + \alpha^r(q - h^T y) \leq 0$$

Cette coupe est violée par la solution actuelle de premier niveau et doit être ajoutée à (BR).

- Si $\eta = 0$ dans la solution du problème de séparation, alors il n'existe pas de coupes violées par la solution actuelle de premier niveau, que ce soit en terme d'optimalité ou de faisabilité, cette solution est donc optimale pour le problème original.

Ce type de reformulation est particulièrement efficace lorsque la matrice des contraintes présente une structure diagonale par blocs dans laquelle les décisions x lient plusieurs blocs indépendants de variables y . C'est classiquement le cas des applications traitant de problèmes stochastiques à deux niveaux dans lesquels les variables y représentent plusieurs scénarios futurs possibles, cette méthode est parfois appelée « L-Shaped » dans ce contexte ([Laporte and Louveaux, 1993],[Oliveira et al., 2011]). Ce type d'approche a été appliqué pour résoudre de nombreux problèmes de grandes taille ([Salmeron et al., 2009],[Contreras et al., 2011]). La figure 2.2 illustre ce type de structure :

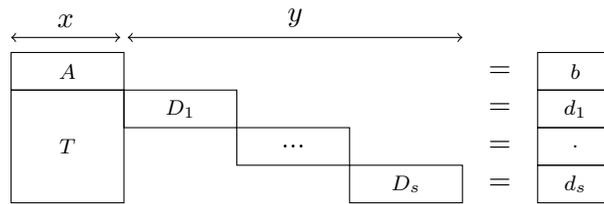


FIGURE 2.2: Structure diagonale par blocs pour un problème stochastique avec des scénarios indicés de 1 à s

2.2. Modélisation proposée

Nous détaillons, dans la suite de ce chapitre, la formulation du problème proposée. Celle-ci s'appuie sur celle issue des travaux de [Joncour, 2011] et [Han et al., 2014], que nous avons adaptée et étendue sur les points suivants :

- Prise en compte du cas où les bornes sur la recharge sont égales, et où donc celle-ci est fixée ;
- Valorisation des stocks finaux ;
- Formulation générique des contraintes de ressources entre arrêts.

Nous associons à chaque unité nucléaire un graphe d'état permettant de modéliser les plannings de production et d'arrêts réalisables ([Joncour, 2011]). Des hypothèses nous permettent de borner la production incrémentale hebdomadaire ([Han et al., 2014]), correspondant à un arc donné. Ces bornes permettent d'améliorer la méthode de génération de colonnes, en s'affranchissant du calcul exact de la production lors du pricing, et prennent en compte les contraintes difficiles que sont la modulation maximale par cycle et le stretch. L'ensemble des variables entières et contraintes difficiles du problème sont alors modélisées par un chemin dans le graphe d'état. Une fois ce chemin fixé, le problème restant est un problème de dispatching de la production pour l'ensemble des scénarios pris en compte. Les bornes sur la production incrémentale permettent l'utilisation d'une reformulation de Benders afin d'exploiter l'indépendance des scénarios de demande et de caractéristiques du parc non-nucléaire.

2.2.1 Hypothèses retenues

L'approche proposée repose sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1. Discrétisation des niveaux de stocks accessibles en fin de campagne de production.

Hypothèse 2. Les niveaux de stocks de fin de campagne de production sont des décisions de premier niveau. *Nous supposons que les niveaux de stocks atteint à la fin de chaque campagne de production, au moment des arrêts, sont des décisions here-and-now, communes à l'ensemble des scénarios de demande et de disponibilité des unités. La production sera adaptée une fois les aléas révélés afin de satisfaire au mieux la demande tout en veillant à atteindre les niveaux de stocks de fin de campagne décidés au premier niveau.*

Hypothèse 3. La campagne de production précédent un arrêt en stretch peut contenir de la modulation. *Son arrêt débutera nécessairement avec un stock inférieur ou égale au Bore nul.*

Hypothèse 4. La campagne de production précédent un arrêt en anticipation ne peut pas contenir de modulation. *Lorsque les bornes sur les recharges ne permettent pas d'atteindre les niveaux de stock discrétisés, cette hypothèse est relâchée.*

Hypothèse 5. Un arrêt débute au plus tard lorsque le stock a atteint la borne de stretch maximal.

Les hypothèses 1. et 2. sont des approximations permettant de diminuer la complexité du problème. Les hypothèses 3., 4. et 5. se justifient par des considérations opérationnelles. Les hypothèses 3. et 4. consistent à réserver la possibilité de moduler aux cycles ne risquant pas de violer la contrainte d'anticipation maximale, celle-ci étant liée à la sûreté nucléaire ; l'hypothèse 5. est une heuristique économique imposée par EDF excluant de stopper une centrale pour cause de stock épuisé avant son arrêt pour rechargement.

2.2.2 Graphe de transition

Nous associons un graphe de transition G_i à chaque unité nucléaire i . Chaque sommet est identifié par un n-tuple :

$$(k, f, a, b, w)$$

où

- k est l'indice du cycle.
- f est le statut du sommet : BEGIN pour le début d'une campagne de production, BO pour un niveau de stock correspondant au Bore nul ou END pour la fin d'une campagne de production.
- a définit le nombre de semaines du stock résiduel au moment d'un arrêt en anticipation au moment de l'arrêt.
- b définit le nombre de semaines du stock résiduel au moment d'un arrêt en stretch au moment de l'arrêt.
- w correspond à la semaine du sommet.

Nous noterons également dans la suite F_{kfabw} le niveau de stock correspondant au sommet (k, f, a, b, w) .

Les sommets du graphe peuvent être regroupés en 5 classes différentes d'états de l'unité en fonction du statut f et de l'état du stock défini par les valeurs a et b :

- $(k, \text{END}, a \geq 1, b = 0, w)$: Fin d'une campagne de production du cycle k à la semaine $w - 1$ avec un niveau de stock positif égal à $\sum_{w'=w}^{w+a-1} \bar{P}_{iw}$.
- $(k, \text{END}, a = 0, b \geq 1, w)$: Fin d'une campagne de production du cycle k en stretch à la semaine $w - 1$ du cycle k avec un stock négatif correspondant à ce qui a été consommé durant les b semaines de stretch.
- $(k, \text{BO}, a = 0, b = 0, w)$: Passage du niveau de Bore nul pour le cycle k à la fin de la semaine $w - 1$ pouvant être suivi d'un arrêt ou d'un stretch.
- $(k, \text{BEGIN}, a \geq 1, b = 0, w)$ or $(k, \text{BEGIN}, a = 0, b \geq 0, w)$: fin de l'arrêt du cycle k à la fin de la semaine $w - 1$.

Les transitions possibles entre ces sommets peuvent être regroupées en 4 catégories comme illustré figure 2.3. Nous associons à chaque catégorie une lettre et une couleur :

- Les arcs rouges, associés à la lettre x , correspondent à une production utilisant de la modulation ce qui, selon l'Hypothèse 3, induit un niveau de stock égal au BO. Ils sont caractérisés par un tuple (i, k, s, l, w_1, w_2) où i est l'indice de l'unité, k le cycle, s l'état du stock du sommet origine de l'arc, l le nombre de semaines entières de modulation, w_1 la première semaine de production et $w_2 - 1$ la dernière semaine de production.
- Les arcs bleus, associés à la lettre y , correspondent à une campagne de production avec arrêt en anticipation, ce qui compte tenu de l'Hypothèse 4 signifie que l'on produit alors à pleine puissance. Ces arcs sont caractérisés par un tuple (i, k, s, a, w_1, w_2) où i est l'indice de l'unité, k le cycle, s l'état du stock du sommet origine de l'arc, a le nombre de semaines entières de production restant en stock à la fin de la période, w_1 la première semaine de production et $w_2 - 1$ la dernière semaine de production.

- Les arcs verts, associés à la lettre z, correspondent à une campagne de production en stretch. Ces arcs sont caractérisés par un tuple (i, k, w_1, w_2) où i est l'indice de l'unité, k le cycle, w_1 la première semaine de production et $w_2 - 1$ la dernière semaine de production.
- Les arcs marrons, associés à la lettre o, correspondent à un arrêt de l'unité. Ils sont caractérisés par un tuple (i, k, s, w_1, w_2) où i est l'indice de l'unité, k le cycle, s le statut du stock du sommet source de l'arc, w_1 la première semaine de production et $w_2 - 1$ la dernière semaine de production.

Plus précisément, voici l'ensemble des transitions possibles pour chaque type de sommet :

Sommets ($f = \text{BEGIN}$, $(a \geq 1, b = 0)$ ou $(a = 0, b \geq 0)$) , on se trouve au début d'une campagne de production, on peut utiliser une partie seulement du stock et arrêter l'unité en anticipation ou utiliser l'ensemble du stock jusqu'à atteindre le niveau BO :

$$(k, \text{BEGIN}, a, b = 0, w_1) \xrightarrow{x_{i,k,\max(a-b),t,w_1,w_2}} (k, \text{BO}, a' = 0, b' = 0, w_2)$$

$$(k, \text{BEGIN}, a, b = 0, w_1) \xrightarrow{y_{i,k,\max(a,-b),a',w_1,w_2}} (k, \text{END}, a', b' = 0, w_2)$$

Sommets ($k, f = \text{BO}$, $a = 0$ et $b = 0$) le stock correspond au niveau BO du cycle k de l'unité i .

On peut alors débiter un arrêt ou bien effectuer une campagne de production en stretch :

$$(k - 1, \text{BO}, a = 0, b = 0, w_1) \xrightarrow{o_{i,k,0,w_1,w_2}} (k, \text{BEGIN}, a' = 0, b' = 0, w_2)$$

$$(k, \text{BO}, a = 0, b = 0, w_1) \xrightarrow{z_{i,k,w_1,w_2=w_1+b'}} (k, \text{END}, a' = 0, b', w_2 = w_1 + b')$$

Sommets ($k, f = \text{END}$, $(a \geq 1, b = 0)$ ou $(a = 0, b \geq 0)$) on se trouve à la fin d'une campagne de production. L'arrêt du cycle k de l'unité i doit débiter

$$(k - 1, \text{END}, a, b = 0, w_1) \xrightarrow{o_{i,k,\max(a,-b),w_1,w_2}} (k, \text{BEGIN}, a' = a, b' = 0, w_2)$$

Le graphe de transition est construit itérativement en utilisant une pile de sommets. Tant que celle-ci n'est pas vide, on prend le premier sommet de la pile, et on construit l'ensemble des transitions et des sommets réalisables en partant de celui-ci.

Afin d'initialiser la pile, on ajoute au début de l'algorithme un sommet caractérisant l'état de l'unité au début de la période. Si l'unité est en arrêt au début de la période, on initialise le graphe avec un sommet de statut END, la date au plus tôt du prochain arrêt est fixée à 0 et sa durée est fixée à la durée restante de l'arrêt en cours. Si l'unité n'est pas en arrêt et que son stock est négatif, on initialise le graphe avec un sommet de statut BO (on garde cependant la valeur négative du stock en mémoire) permettant de poursuivre le stretch en cours ou de débiter l'arrêt du cycle suivant. Enfin si la valeur du stock est strictement positive, on initialise le graphe avec un sommet de statut BEGIN dont l'état de stock correspond au nombre de semaines de production à pleine puissance du stock initial.

Un sommet dont la date dépasse l'horizon d'optimisation sera relié uniquement à un sommet fictif, nommé *puits* du graphe, en utilisant un type d'arc fictif.

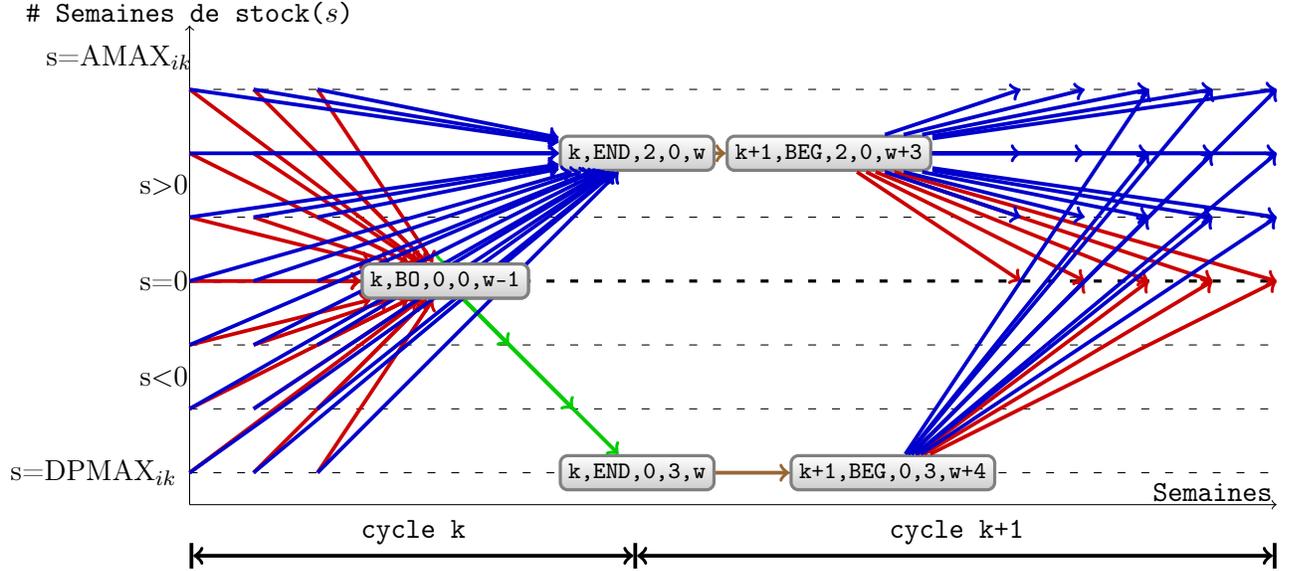


FIGURE 2.3: Transitions possibles pour le cycle k .

2.2.3 Contraintes intégrées dans le graphe de transition

Un chemin dans le graphe d'état G_i , doit correspondre à un plan de production réalisable pour l'unité i . Les dates et stocks choisis doivent vérifier l'ensemble de contraintes suivantes :

- Dates au plus tôt et dates au plus tard des arrêts.
- Stock maximal après recharge.
- Anticipation maximale.
- Modulation maximale.
- Stretch maximal.

Les paragraphes suivants décrivent les conditions de définition de chaque type d'arcs. Nous différencions le cas général pour lequel, à chaque cycle, la recharge est une variable de décision associée à l'arc représentant la campagne de production hors stretch du cas particulier pour lequel la recharge est fixée.

Les arcs représentant un arrêt de l'unité ne sont pas détaillés ici puisque les seules conditions qu'ils doivent vérifier sont les fenêtres de temps qui sont déjà prises en compte dans les autres types d'arcs. Un arc sera par la suite identifié par un couple (u, v) , où u (resp. v) est l'indice du sommet d'origine (resp. destination) de l'arc.

2.2.3.1 Conditions de définition d'un arc à pleine puissance

On peut définir un arc de transition correspondant à une campagne de production à pleine puissance débutant à la semaine $w_1(u, v)$ avec arrêt en anticipation à la semaine $w_2(u, v) - 1$ si :

- La semaine de fin $w_2(u, v)$ se trouve dans la fenêtre de temps de l'arrêt suivant :

$$\underline{DA}_{ik} \leq w_2(u, v) \leq \overline{DA}_{ik}$$

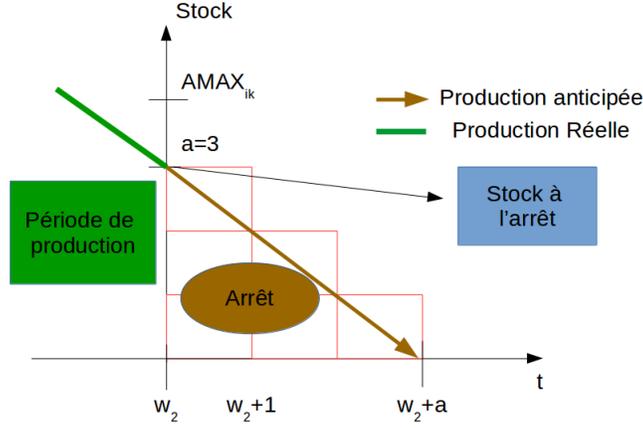


FIGURE 2.4: Niveau de stock accessibles d'un arc pleine puissance

- Le stock final se situe en dessous du niveau d'anticipation maximale et correspond à la production maximale à pleine puissance anticipée durant les a semaines suivant w_2 (figure 2.4) :

$$\sum_{w=w_2}^{w_2(u,v)+a-1} \bar{P}_{iw} \leq AMAX_{ik}$$

- Dans le cas d'une recharge fixée à une valeur R_{ik} , les valeurs de $w_1(u, v)$, $w_2(u, v)$ et a doivent permettre d'atteindre le niveau de stock cible en n'effectuant qu'une modulation « marginale » (i.e. inférieure à une semaine de production à pleine puissance) fixée à la production maximale de l'unité durant la semaine $w + a$ i.e. $\bar{P}_{i,w+a}$:

$$\bar{P}_{i,w+a} \geq \sum_{w=w_2(u,v)}^{w_2(u,v)+a-1} \bar{P}_{iw} - (F_{ikfsw_1} + R_{ik} - \sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)-1} \bar{P}_{iw}) \geq 0$$

La modulation marginale requise pour cet arc est alors :

$$m_{(u,v)} = \sum_{w=w_2(u,v)}^{w_2(u,v)+a} \bar{P}_{iw} - (F_{ikfsw_1(u,v)} + RMIN_{ik} - \sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)-1} \bar{P}_{iw})$$

- Dans le cas où la recharge est une variable de décision, recharge dite *flexible*, les valeurs de $w_1(u, v)$, $w_2(u, v)$ et a définissent celle-ci par :

$$r_{(u,v)} = \sum_{w_1(u,v)}^{w_2(u,v)+a-1} \bar{P}_{iw} - F_{ikfsw_1(u,v)}$$

Cette valeur doit vérifier les contraintes de recharge et de stock au début de la campagne de production :

$$RMIN_{ik} \leq r_{(u,v)} \leq \min(SMAX_{ik} - F_{ikfsw_1(u,v)}, RMAX_{ik})$$

La modulation de l'arc est nulle $m_{(u,v)} = 0$

2.2.3.2 Conditions de définition d'un arc de modulation

On peut définir un arc de transition correspondant à une campagne de production avec modulation débutant à la semaine $w_1(u, v)$, atteignant le BO à la fin de la semaine $w_2(u, v) - 1$ si :

- Un arc de modulation peut être suivi d'un arc de stretch. Nous pouvons calculer un majorant de la durée maximale de ce dernier, noté DS_{max} . La semaine $w_2(u, v)$ de fin de la campagne de production se trouve dans la fenêtre suivante :

$$\underline{DA}_{i,k} + DS_{max} \leq w_2(u, v) \leq \underline{DA}_{i,k}$$

- Dans le cas d'une recharge flexible la valeur de la recharge $r_{(u,v)}$ vérifie :

$$\min(\text{RMAX}_{ik}, \text{SMAX}_{ik} - F_{ikfsw_1(u,v)}) \geq r_{(u,v)} \geq \text{RMIN}_{ik}$$

- La quantité totale de modulation $m_{u,v}$ nécessaire pour atteindre le niveau BO au début de la semaine w_2 vérifie :

$$0 \leq m_{(u,v)} = \sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)-1} \bar{P}_{iw} - (F_{iksw_1(u,v)w_2(u,v)} + r_{(u,v)}) \leq \text{MMAX}_{ik}$$

2.2.3.3 Conditions de définition d'un arc de stretch

Afin de prendre en compte le stretch nous introduisons ici $DP_{ikw_1(u,v)w_2(u,v)t}$ le ratio de la production maximale \bar{P}_{it} produit par l'unité i durant le pas de temps t du cycle k sachant que l'unité a passé le niveau BO au début de la semaine w_1 . On peut alors définir un arc de transition correspondant à une campagne de production en stretch de la semaine $w_1(u, v)$ à la semaine $w_2(u, v)$ si :

- La semaine de fin $w_2(u, v)$ se trouve dans la fenêtre de temps de l'arrêt suivant :

$$\overline{DA}_{i,k} \geq w_2(u, v) \geq \underline{DA}_{i,k}$$

- Le stock en semaine $w_2(u, v)$ ne dépasse pas le stretch maximal du cycle k de l'unité i

$$\sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)} \sum_{t \in w} \bar{P}_{it} DP_{ikw_1(u,v)w_2(u,v)t} \leq \text{DPMAX}_{ik}$$

2.2.4 Contraintes d'arrêts intra-sites et inter-sites

Soit une contrainte $c \in C$ et un arc d'arrêt (u, v) du cycle k de l'unité i débutant à la semaine $w_1(u, v)$ tel que $(i, k) \in O_c$ i.e. (i, k) est l'un des arrêts consommant une ressource de la contrainte c .

Pour une semaine w donnée, l'arrêt (i, k) consommera une ressource de la contrainte c si :

- La semaine w se trouve au delà de la latence de l'arrêt : $w_1(u, v) + L_c(i, k) \leq w$
- La semaine w se trouve avant la fin de la consommation de la ressource : $w_1(u, v) + D_c(i, k) \leq w$

Nous noterons par la suite O_{cw} l'ensemble des indices des variables d'arrêts vérifiant ces conditions. Les contraintes de ressources entre arrêts s'expriment alors pour une contrainte c et une semaine w donnée tels que $S_c \leq w \leq E_c$ par :

$$\sum_{(u,v) \in O_{cw}} \delta_{(u,v)} \leq N_c$$

où $\delta_{(u,v)}$ est la variable entière associée au choix de l'arrêt associé à l'arc (u, v) .

2.2.5 Problème stochastique à deux niveaux

Soit $G_i = (E_i, V_i)$ le graphe de transition associé à l'unité i . Chaque arc sera associé à une variable de décision de premier niveau. Nous noterons Y_i l'ensemble des indices des arcs avec arrêt en anticipation, X_i l'ensemble des indices des arcs de modulation, Z_i l'ensemble des indices des arcs de stretch et O_i l'ensemble des indices des arcs d'arrêts. Dans ce modèle de flot, chaque chemin correspond à un planning de production réalisable pour l'unité i . Les variables d'arcs doivent vérifier des contraintes de conservation de flot.

Pour tout arc (u, v) nous notons :

- $w_1(u, v)$ la semaine de début de la période de production ou de l'arrêt associé à (u, v)
- $w_2(u, v)$ la semaine de fin de la période de production ou de l'arrêt associé à (u, v)

Les variables d'arcs représentent des décisions de premier niveau devant être prises avant de connaître la réalisation des aléas sur la demande et la disponibilité des unités nucléaires. Fixer ces variables de flots entraîne l'activation de bornes sur la production de chaque unité nucléaire afin d'atteindre le stock cible de l'arc choisi. Dans chaque scénario, la production de chaque unité sera contrainte par ces bornes.

2.2.5.1 Borne sur l'énergie totale produite par semaine

Soit (u, v) une variable d'arc correspondant à un arc de production avec modulation ou à pleine puissance avec arrêt en anticipation (i.e. $(u, v) \in Y_i \cup X_i$) caractérisée par :

- Une semaine de début de production $w_1(u, v)$
- Une semaine de fin de production $w_2(u, v)$
- Une quantité de modulation $m(u, v)$

Compte tenu des bornes de production définies au pas de temps infra-hebdomadaire et de l'obligation de moduler une énergie totale m entre $w_1(u, v)$ et w_2 nous pouvons calculer une borne minimale et maximale sur la production incrémentale de la semaine $w \in [w_1(u, v), w_2(u, v) - 1]$:

$\sum_{w'=w_1(u,v)}^w \bar{p}_{(u,v)}(w')$ est la borne supérieure de l'énergie cumulée produite jusqu'à la semaine w , où :

$$\bar{p}_{(u,v)}(w) = \begin{cases} \bar{P}_{iw} & \text{si } \sum_{w'=w+1}^{w_2(u,v)-1} (\bar{P}_{iw'} - \underline{P}_{iw'}) \geq m \\ \bar{P}_{iw} - m + \sum_{w'=w+1}^{w_2(u,v)-1} (\bar{P}_{iw'} - \underline{P}_{iw'}) & \text{si } 0 < m - \sum_{w'=w+1}^{w_2(u,v)-1} (\bar{P}_{iw'} - \underline{P}_{iw'}) \leq \bar{P}_{iw} - \underline{P}_{iw} \\ \underline{P}_{iw} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\sum_{w'=w_1(u,v)}^w \underline{p}_{(u,v)}(w')$ est la borne inférieure de l'énergie cumulée produite jusqu'à la semaine w , où :

$$\underline{p}_{(u,v)}(w) = \begin{cases} \underline{P}_{iw} & \text{si } m \geq \sum_{w'=w_1(u,v)}^w (\bar{P}_{iw'} - \underline{P}_{iw'}) \\ \bar{P}_{iw} - m + \sum_{w'=w_1(u,v)}^{w-1} (\bar{P}_{iw'} - \underline{P}_{iw'}) & \text{si } 0 < m - \sum_{w'=w_1(u,v)}^{w-1} (\bar{P}_{iw'} - \underline{P}_{iw'}) \leq \bar{P}_{iw} - \underline{P}_{iw} \\ \bar{P}_{iw} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas d'un arc $(u, v) \in Z_i$, la production doit suivre le profil décroissant du stretch. On a alors :

$$\bar{p}_{(u,v)}(w) = \underline{p}_{(u,v)}(w) = \sum_{t \in w} P_{it} \text{DP}_{ikw_1(u,v)w_2(u,v)t} \quad (2.15)$$

Ces bornes assurent le respect de la contrainte au pas de temps hebdomadaire mais ne peuvent garantir son respect aux pas de temps inférieurs.

Par convention, pour toute semaine w n'appartenant pas à la période définie par l'arc (u, v) les bornes de production de cet arc sont nulles, i.e. :

$$\forall i, (u, v) \in E_i, w \notin [w_1(u, v), w_2(u, v) - 1], \quad \bar{p}_{(u,v)}(w) = \underline{p}_{(u,v)}(w) = 0$$

Afin de souligner la séparation entre décisions de premier et de second niveau nous introduisons ici \bar{q}_{iw} (resp. \underline{q}_{iw}) tel que $\sum_{w' \leq w} \bar{q}_{iw'}$ représente une borne supérieure (res. inférieure) de la production d'énergie totale de l'unité i jusqu'à la semaine w compte tenu des décisions de premier niveau :

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \underline{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} = \underline{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.16)$$

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} = \bar{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.17)$$

Où $\delta_{(u,v)}$ est la variable de décision correspondant au choix de l'arc (u, v) .

Proposition 1. *La propriété suivante (représentée figure 2.5) découle de la nécessité d'atteindre le stock fixé par un arc de premier niveau (u, v) débutant en semaine $w_1(u, v)$ et se terminant en semaine $w_2(u, v) - 1$:*

$$\sum_{w=w_1}^{w_2(u,v)} p_{iw}^\omega = \sum_{w=w_1}^{w_2(u,v)} \bar{p}_{(u,v)}(w) = \sum_{w=w_1}^{w_2(u,v)} \underline{p}_{(u,v)}(w) \quad \forall \omega \quad (2.18)$$

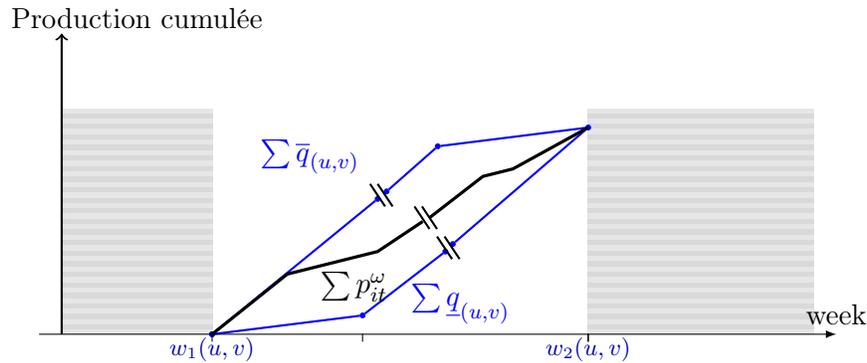


FIGURE 2.5: Borne incrémentales de productions

2.2.5.2 Valorisation des stocks finaux

La composante représentant le coût des décisions de premier niveau dans la fonction objectif correspond à la différence entre le coût de recharge des unités nucléaires et la valorisation de l'ensemble des stocks résiduels au début de la semaine dernière semaine W . Si la dernière campagne de production contient de la modulation, le choix de l'arc dans le graphe d'état ne permet pas de connaître avec précision le niveau de stock résiduel. Deux options sont alors possibles, l'une exacte,

l'autre heuristique, que nous décrivons ci-dessous.

A noter cependant que la valorisation des stocks finaux ne constitue pas un élément essentiel pour EDF car son apport sur la qualité des solutions obtenues est difficile à évaluer. C'est pourquoi nous ne les utiliserons pas dans la suite de cette thèse.

Modélisation exacte Cette modélisation consiste à ajouter une variable correspondant aux niveaux de stock résiduels de l'ensemble des unités, permettant de récupérer cette information au premier niveau.

Il est ici nécessaire d'ajouter l'indice du cycle k aux variables de capacité q afin de connaître celles appartenant au dernier cycle d'une unité donnée.

Pour chaque unité nucléaire nous évaluons le stock résiduel au début de la dernière semaine W en utilisant le stock cible de l'arc choisi et l'énergie produite durant la dernière campagne de production. Celle-ci, notée F' , est approximée en utilisant une modulation constante si la modulation de l'arc courant est non nulle :

$$F' = \sum_i \left[\sum_{(u,v) \in X_{i,K_i} \cup Y_{i,K_i}} \delta_{(u,v)} \sum_{w=w_1(u,v)}^W \frac{(\bar{P}_{iw} - m_{(u,v)})}{w_2(u,v) - w_1(u,v)} + \sum_{(u,v) \in Z_{i,K_i}} \delta_{(u,v)} \bar{p}_{(u,v)}(w) \right]$$

où X_{i,K_i} (respectivement Y_{i,K_i} , Z_{i,K_i}) désigne l'ensemble des arcs de type modulation (resp. pleine puissance, resp. stretch) dont le cycle est K_i

L'évaluation de premier niveau de l'énergie totale produite

$$F = \sum_{i,k < K-1,w} \bar{q}_{ikw} + F'$$

Cette valeur nous permet de calculer le stock final en semaine W . En effet les relations (2.16)-(2.17) assurent que le niveau de stock de l'unité i à la fin du cycle k après une production cumulée de $\sum_{iw} \bar{q}_{ikw}$ sur le cycle sera :

$$\sum_{(u,v) \in Y_{ik}} \left(\sum_{w_2(u,v)}^{w_2(u,v)+a-1} \bar{P}_{iw} \right) \delta_{(u,v)} - \sum_{(u,v) \in Z_{ik}} \left(\sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)-1} \bar{p}_{(u,v)}(w) \right) \delta_{(u,v)}$$

La quantité de combustible devant être utilisée durant la période tronquée du dernier cycle par l'ensemble des unités nucléaires est :

$$\begin{aligned} & \sum_{iw} \bar{q}_{i,K,w} - F' \\ &= \underbrace{\sum_{iw} \bar{q}_{i,K,w} + \sum_{\substack{iw \\ k < K}} \bar{q}_{ikw}}_{\sum_{iwk} \bar{q}_{ikw}} - \underbrace{\sum_{\substack{iw \\ k < K}} \bar{q}_{ikw} - F'}_{-F} \end{aligned}$$

L'évaluation par le premier niveau du stock résiduel au début de la dernière semaine W dans l'ensemble des unités nucléaires est alors :

$$\sum_{ikw} \bar{q}_{ikw} - \sum_i \left[\underbrace{\sum_{(u,v) \in Y_{iW}} \left(\sum_{w_2(u,v)}^{w_2(u,v)+a-1} \bar{P}_{iw} \right) \delta_{(u,v)} - \sum_{(u,v) \in Z_{iW}} \sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)-1} \bar{P}_{(u,v)}(w) \delta_{(u,v)}}_{\text{Stock cible du dernier arc de transition}} \right] - F$$

Au second niveau, sur chaque scénario ω la valorisation du stock résiduel nucléaires une fois les productions fixées prend la forme suivante :

$$F^\omega = \sum_i \left(C_{iK} \left(\sum_{kt} p_{ikt}^\omega - F \right) \right)$$

Modélisation heuristique Cette solution consiste à discrétiser les niveaux de stocks possibles en début de la dernière semaine W pour un arc contenant de la modulation et créer un ensemble d'arcs atteignant chacun de ces niveaux. Elle réduit l'ensemble des stocks accessible en fin de période et présente l'avantage d'être facile à introduire dans notre modèle.

Soit un arc de production (u, v) de l'unité nucléaire i dont la semaine de fin $w_2(u, v)$ se situe au delà de la dernière semaine d'optimisation W :

- Si $(u, v) \in Y_i$ le stock final de l'unité (sans tenir compte d'une éventuelle modulation marginale) est donné par :

$$F_i(u, v) = \sum_{w=W}^{w_2+1} \bar{P}_{iw}$$

- Si $(u, v) \in Z_i$ le stock final de l'unité est donné par :

$$F_i(u, v) = - \sum_{w=w_1(u,v)}^{W-1} \sum_{t \in w} \bar{P}_{it} \text{DP}_{ikw_1(u,v)w_2t}$$

- Si $(u, v) \in X_i$ alors le stock final vérifie :

$$\sum_{w=W}^{w_2(u,v)} \underline{p}_{(u,v)} \leq F_i \leq \sum_{w=W}^{w_2(u,v)} \bar{P}_{(u,v)}$$

Nous introduisons alors un paramètre λ correspondant à la granularité de discrétisation des stocks finaux et remplaçons l'arc (u, v) par un ensemble comprenant un nombre d'arcs égal à :

$$B = \frac{\sum_{w=W}^{w_2(u,v)} \left(\bar{P}_{(u,v)} - \underline{p}_{(u,v)} \right)}{\lambda \bar{P}_{it}}$$

Ces arcs sont indicés de 0 à B tels que le b^{eme} d'entre eux correspond au stock final suivant en début de semaine W :

$$F_i(u, v) = \sum_{w=W}^{w_2(u,v)} \underline{p}_{(u,v)} + \frac{b}{\lambda} \sum_{w=W}^{w_2(u,v)} \left(\bar{P}_{(u,v)} - \underline{p}_{(u,v)} \right)$$

Dans cette modélisation le stock final est une décision de premier niveau associée au choix des arcs finissant en dehors de la période d'étude. Le terme de valorisation du stock final n'apparaît pas explicitement dans la fonction objectif, mais est intégré directement dans le coût des arcs du graphe.

2.2.6 Formulation de référence

Nous décrivons ci-dessous la formulation de référence du problème, notée **(RefQ)**.

- Variables d'arcs de premier niveau :

$\delta_{(u,v)}$ est la variable d'arc correspondant à l'arc reliant les sommets u et v , cette variable peut correspondre aussi bien à un arc de modulation, de pleine puissance avec arrêt par anticipation, de stretch ou d'arrêt.

On introduit alors :

- ◇ X_i l'ensemble des indices des arcs de modulation pour l'unité i .
- ◇ Y_i l'ensemble des indices des arcs avec arrêt par anticipation pour l'unité i
- ◇ Z_i l'ensemble des indices des arcs de stretch pour l'unité i
- ◇ O_i l'ensemble des indices des arcs d'arrêt pour l'unité i

Soit alors A_i l'un des quatre ensembles précédents, on note :

- ◇ $A_i^k \in A_i$ l'ensemble des indices dont les arcs appartiennent au cycle k de l'unité i
- ◇ $A_{it} \in A_i$ l'ensemble des indices de l'unité i dont les arcs couvrent le pas de temps t

Pour simplifier la notation des contraintes (2.27)-(2.28) nous utilisons dans celles-ci l'ensemble V_i des sommets du graphe G_i , s_i sa source.

- Variables de capacité de premier niveau (voir section 2.2.5.1) :
 - ◇ \bar{q} la borne supérieure de production cumulative
 - ◇ \underline{q} la borne inférieure de production cumulative
- Variables de production de second niveau :
 - ◇ p_{it}^ω la production de l'unité nucléaire i durant la période t dans le scénario ω
 - ◇ p_{jt}^ω la production de l'unité conventionnelle j pendant le pas de temps t du scénario ω
- γ^ω : le coût du scénario ω de second niveau

Fonction objectif

$$\min \underbrace{\sum_{i,k} \sum_{(u,v) \in X_i^k \cup Y_i^k} C_{ik} r_{(u,v)} \delta_{(u,v)}}_{\text{Coût de recharge}} + \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} \text{Proba}_\omega \gamma^\omega}_{\text{Espérance de coût de second niveau}} \quad (2.19)$$

Contraintes de second niveau

- Satisfaction de la demande

$$\sum_i p_{it}^\omega + \sum_j p_{jt}^\omega = D_t^\omega \quad \forall t, \omega \quad (2.20)$$

- Coût du second niveau pour un scénario ω donné

$$\gamma^\omega \geq \sum_{jt} C_{jt}^\omega p_{jt}^\omega \quad \forall \omega \quad (2.21)$$

Lien entre décisions de premier niveau et production de second niveau

- Capacité de production minimale

$$\sum_{w' \leq w} \underline{q}_{iw'} \leq \sum_{\substack{w' \leq w \\ t \in w'}} p_{it}^\omega \quad \forall i, w, \omega \quad (2.22)$$

- Capacité de production maximale

$$\sum_{w' \leq w} \bar{q}_{iw'} \geq \sum_{\substack{w' \leq w \\ t \in w'}} p_{it}^\omega \quad \forall i, w, \omega \quad (2.23)$$

- Production incrementale minimale

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \underline{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} = \underline{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.24)$$

- Production incrémentale maximale

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} = \bar{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.25)$$

Contraintes de ressources entre arrêts

$$\sum_{(u,v) \in O_{cw}} \delta_{(u,v)} \leq N_{cw} \quad \forall c \in C, w \in [S_c, E_c] \quad (2.26)$$

Contraintes de flots

- Conservation

$$\sum_{v \in V_i} \delta_{(u,v)} - \sum_{v \in V_i} \delta_{(v,u)} = 0, \quad \forall i, u \in V_i \setminus \{s_i, t_i\} \quad (2.27)$$

- Initialisation

$$\sum_{v \in V_i} \delta_{(s_i,v)} = 1 \quad \forall i \quad (2.28)$$

- Variables de décisions binaires $\delta \in \{0, 1\}$ (2.29)

Bornes de production

- Bornes sur la production des unités nucléaires

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \underline{P}_{iw} \cdot \delta_{(u,v)} \leq p_{it}^\omega \leq \bar{P}_{it} \quad \forall i, \omega, w, t \in w \quad (2.30)$$

- Bornes sur la production des unités non-nucléaires

$$\underline{P}_{jt}^\omega \leq p_{jt}^\omega \leq \bar{P}_{jt}^\omega \quad \forall j, t, \omega \quad (2.31)$$

Pour une résolution directe de cette formulation par un solveur de PLNE, les variables q augmentent inutilement la taille du problème et peuvent être remplacées par leur expression en fonction des variable δ des contraintes (2.24)-(2.25) dans les contraintes (2.22)-(2.23). La formulation obtenue sera notée **(Ref)**. Fournir celle-ci à un solveur telle que IBM-Cplex correspond à la résolution de la formulation dite « en variables originales » ou *Arc flow*, nous appellerons **(OvfIP)** (respectivement **(OvfLP)**) cette méthode.

2.3. Reformulations et décompositions

La formulation (RefQ) décrite à la section 2.2.6 peut être écrit schématiquement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Coût}(C_1, C_2) \\ \text{s.t.} \quad & (C_1, \bar{q}, \underline{q}, \gamma) \in R_1 \\ & (C_2, \bar{q}, \underline{q}, \gamma) \in R_2 \\ & (C_1, C_2, \underline{q}, \bar{q}, \gamma) \end{aligned}$$

où :

- C_1 (respectivement C_2) sont les décisions de premier (respectivement second) niveau
- R_1 (respectivement R_2) est le polytope des contraintes de premier (respectivement second) niveau

Le polytope R_1 comprend des contraintes de ressources entre arrêts (2.26) liant les différentes unités nucléaires et des contraintes de flots (2.27)-(2.28). Les contraintes de flots présentent une propriété de totale uni-modularité, i.e. la solution de leur relaxation linéaire est entière. Cette formulation est donc meilleure en termes de bornes qu'une formulation dans laquelle les contraintes que nous avons intégrées dans le graphe de transition seraient écrites explicitement, comme c'est le cas d'une formulation « compacte » utilisant l'ensemble des variables et contraintes présentées au chapitre 1.

Les contraintes de ressources lient les différents graphes entre eux alors que les contraintes de flots sont spécifiques à chaque graphe et peuvent être résolues par un algorithme de plus court chemin. Nous pouvons donc appliquer une reformulation de Dantzig-Wolfe telle que décrite dans la section 2.1.1. Cette reformulation présente trois avantages dans un cadre général :

1. Une amélioration de la borne fournie par la relaxation linéaire du problème car les contraintes d'intégrité sont intégrées implicitement dans la définition des sous-problèmes de pricing ;
2. Une séparation des différents blocs dans le cadre d'une structure semi-diagonale par blocs avec contraintes couplantes ;
3. La diminution du nombre de contraintes en contrepartie d'un nombre de variables exponentiel, dont une partie seulement sera obtenue par génération de colonnes.

Comme noté plus haut, notre formulation étendue possède déjà l'avantage décrit au point 1. ci-dessus, et fournit la même borne que celle d'une reformulation de Dantzig-Wolfe. En revanche, une telle reformulation permettra d'obtenir un sous-problème indépendant pour chaque unité nucléaire, compte tenu de la structure semi-diagonale par blocs, et permettra de diminuer le nombre de variables entières et de contraintes de la formulation dans le cadre d'une méthode de génération de colonnes.

Le polytope R_2 comprend, quant à lui, un bloc de variables et de contraintes par scénario, couplé uniquement aux variables de premier niveau, représentées ici par les variables de capacité \bar{q} et \underline{q} .

Nous verrons dans le chapitre 3 que la taille et la complexité du problème augmente rapidement avec le nombre de scénarios rendant impossible la résolution directe (résolution OvFIP) d'une formulation de type (Arc flow) prenant en compte ces blocs de manière explicite.

Le polytope R_2 ne comportant que des variables continues, une fois les décisions de premier niveau q fixées, la reformulation de Benders permettra de remplacer ce grand nombre de variables par un nombre exponentiel de contraintes, que nous obtenons dynamiquement par un algorithme de génération de coupes.

Dans la suite de cette section nous décrivons :

- La reformulation de Dantzig-Wolfe appliquée au polytope R_1 du premier niveau ainsi que l'algorithme de génération de colonnes associé (2.3.1) ;
- La reformulation de Benders appliquée au polytope R_2 du second niveau ainsi que l'algorithme de génération de coupes associé (2.3.2) ;
- La combinaison des deux approches ci-dessus (2.3.3).

Afin de simplifier l'exposé nous considérons que le pas de temps est égal à la semaine.

2.3.1 Reformulation de Dantzig-Wolfe et génération de colonnes

Un ensemble de décisions de premier niveau réalisable pour une unité nucléaire i donnée doit constituer un chemin reliant la source et le puits du graphe d'état associé à cette unité. La reformulation de Dantzig-Wolfe de ces variables correspond à construire une formulation dans laquelle les variables de décisions sont les chemins des graphes. Le nombre de chemin est exponentielle en la taille du graphe considéré. Soit G_i l'ensemble des chemins λ_g vérifiant les contraintes de flots (2.27)-(2.29) pour une unité nucléaire i donnée. Soit λ_{ig} , la variable de décision associée au choix de la solution λ_g pour l'unité i , et A_g , l'ensemble des indices des arcs appartenant au chemin g .

Nous pouvons alors ré-écrire le polytope R_1 :

$$R_1 = \{(\delta, \bar{q}, \underline{q}, \gamma) \mid (2.24) - (2.29)\} \quad (2.32)$$

$$= \{\lambda_{ig}, \bar{q}, \underline{q}, \gamma\} \quad (2.33)$$

$$s.t \quad (2.34)$$

$$\sum_{g \in G_i} \left(\sum_{(u,v) \in A_g} \underline{p}_{(u,v)}(w) \right) \lambda_{ig} = \underline{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.35)$$

$$\sum_{g \in G_i} \left(\sum_{(u,v) \in A_g} \bar{p}_{(u,v)}(w) \right) \lambda_{ig} = \bar{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.36)$$

$$\sum_{i, g \in G_i} \sum_{(u,v) \in O_{cw} \cap A_g} \lambda_{ig} \leq N_{cw} \quad \forall c \in C, w \in [S(c), E(c)] \quad (2.37)$$

$$\sum_{g \in G_i} \lambda_{ig} = 1, \quad \forall i \quad (2.38)$$

$$\lambda_{ig} \in \{0, 1\} \quad \forall i, g \in G_i \quad (2.39)$$

La relaxation linéaire de cette reformulation de Dantzig-Wolfe peut être résolue en utilisant une méthode de génération de colonnes afin de générer dynamiquement les ensembles G_i . Soit une unité i donnée.

Le coût associé à une colonne g est égal à la somme des coûts de rechargement des arcs composant cette colonne :

$$C_g = \sum_k \sum_{(u,v) \in A_g} C_{ik} r_{(u,v)}$$

Son coût réduit est :

$$\underline{C}_g = C_g - \sum_w \underline{\theta}_{iw} \sum_{(u,v) \in A_g} \underline{p}_{(u,v),w} - \sum_w \bar{\theta}_{iw} \sum_{(u,v) \in A_g} \bar{p}_{(u,v),w} - \sum_{w \in [S(c), E(c)]} \sum_{(u,v) \in O_{cw} \cap A_g} \pi_{cw} - \sigma_i \quad (2.40)$$

où $(\underline{\theta}, \bar{\theta}, \pi, \sigma)$ sont les coûts duaux associés aux contraintes (2.35)-(2.38).

Les ensembles de colonnes G_i sont générés dynamiquement par le sous-problème de pricing suivant :

$$\begin{aligned} \min & \left[\underline{C}_g \right] \\ s.t & (2.27) - (2.29) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Résoudre (2.41) revient à résoudre un problème de plus court chemin dans un graphe acyclique (résolution dont le temps de calcul est linéaire par rapport au nombre d'arcs). Après avoir généré de nouvelles colonnes, on résout le problème maître restreint, dont les variables de chemin sont un sous-ensemble $G' \subset G$, ce qui permet de mettre à jour les coûts duaux des sous-problèmes pour l'itération de génération de colonnes suivante.

La procédure est arrêtée lorsque aucune colonne améliorante, i.e. de coût réduit négatif, n'est trouvée par l'ensemble des problèmes de pricing (2.41).

L'algorithme décrit dans ce paragraphe sera appelé **(ColGen)** dans la suite du document et la reformulation de Dantzig-Wolfe de la formulation (Ref) sera notée **(RefColGen)**.

2.3.2 Reformulation de Benders et génération de coupes

Pour un scénario ω donné, nous notons R_2^ω le sous-ensemble de R_2 correspondant au scénario ω . Afin de simplifier l'exposé, la reformulation sera présentée avec les simplifications suivantes :

- La puissance minimale des unités nucléaires est prise égale à 0, celle-ci étant nulle dans les données (cf. contraintes (2.47))
- La puissance minimale des unités non-nucléaires est prise égale à 0, celle-ci étant ramenée à 0 lors de l'étape de prétraitement décrite en section 2.4.1 (cf. contrainte 2.48).

Le sous-problème composé des contraintes (2.20)-(2.23) et des contraintes (2.30)-(2.31) peut être remplacé par un ensemble de coupes comme introduit par [Benders, 1962a]. Nous associons à ces contraintes leurs variables duales respectives $(\nu^\omega, \alpha^\omega, \underline{\beta}^\omega, \overline{\beta}^\omega, \pi^\omega, \mu^\omega)$, ainsi :

$$R_2^\omega = \min \eta \quad (2.42)$$

$$s.t \sum_{j,t} C_{jw}^\omega p_{jw}^\omega - \eta \leq \gamma^\omega \quad [\alpha^\omega] \quad (2.43)$$

$$\sum_i p_{iw}^\omega + \sum_j p_{jw}^\omega = D_w^\omega \quad \forall w \quad [\nu^\omega] \quad (2.44)$$

$$\sum_{w' \leq w} p_{iw}^\omega + \eta \geq \sum_{w' \leq w} q_{iw'} \quad \forall i, w \quad [\underline{\beta}^\omega] \quad (2.45)$$

$$\sum_{w' \leq w} p_{iw}^\omega - \eta \leq \sum_{w' \leq w} \bar{q}_{iw'} \quad \forall i, w \quad [\overline{\beta}^\omega] \quad (2.46)$$

$$0 \leq p_{iw}^\omega \leq \bar{P}_{iw} \quad \forall i, w \quad [\pi^\omega] \quad (2.47)$$

$$0 \leq p_{jw}^\omega \leq \bar{P}_{jw} \quad \forall j, w \quad [\mu^\omega] \quad (2.48)$$

$$= \max -\alpha^\omega \gamma^\omega + \sum_w \nu_w^\omega D_w^\omega + \sum_{iw} \left[\underline{\beta}_{iw}^\omega q_{iw} - \overline{\beta}_{iw}^\omega \bar{q}_{iw} - \pi_{iw}^\omega \bar{P}_{iw} \right] - \sum_{jw} \mu_{jw}^\omega \bar{P}_{jw} \quad (2.49)$$

$$s.t \alpha^\omega + \sum_{iw} \left(\underline{\beta}_{iw}^\omega - \overline{\beta}_{iw}^\omega \right) \geq 1 \quad (2.50)$$

$$-\alpha^\omega C_{j,w}^\omega + \nu_w^\omega - \mu_{j,w}^\omega \geq 0 \quad \forall j, w \quad (2.51)$$

$$\nu_w^\omega + \sum_{w' \leq w} \left(\underline{\beta}_{iw'}^\omega - \overline{\beta}_{iw'}^\omega \right) - \pi_{i,w}^\omega \geq 0 \quad \forall i, w \quad (2.52)$$

$$\alpha^\omega, \nu^\omega, \underline{\beta}^\omega, \overline{\beta}^\omega, \pi^\omega, \mu^\omega \geq 0 \quad (2.53)$$

$$= \max \eta^\omega$$

$$\eta^\omega \geq \nu_g^\omega D^\omega - \alpha_g^\omega \gamma^\omega + \underline{\beta}_g^\omega q - \overline{\beta}_g^\omega \bar{q} - \pi_g^\omega \bar{P}^\omega - \mu_g^\omega \bar{P}^\omega \quad \forall g \in G^\omega \quad (2.54)$$

où $\{(\alpha_g^\omega, \underline{\beta}_g^\omega, \overline{\beta}_g^\omega, \nu_g^\omega, \pi_g^\omega, \mu_g^\omega) | g \in G^\omega\}$ sont les points extrêmes du polytope défini par l'ensemble d'inégalités (2.50)-(2.53).

Ces coupes sont ensuite générées dynamiquement lors de la résolution. Pour une solution de premier niveau $(\underline{q}, \bar{q}, \gamma)$ vérifiant les contraintes (2.24)-(2.29) de la formulation de référence (RefQ) et les éventuelles coupes générées lors des itérations précédentes, nous résolvons le problème (2.42)-(2.48) pour chaque scénario ω .

A l'optimum de ce problème :

- Si $\eta^\omega \neq 0$, on construit une coupe de Benders à ajouter au problème de la forme :

$$-\alpha^\omega \gamma^\omega + \sum_{iw} \sum_{w' \leq w} \left(\beta_{iw'}^\omega \underline{q}_{iw'} - \bar{\beta}_{iw'}^\omega \bar{q}_{iw'} \right) \leq - \sum_w \nu_w^\omega D_w^\omega + \sum_{iw} \pi_{iw}^\omega \bar{P}_{iw}^\omega + \sum_{jw} \mu_{jw}^\omega \bar{P}_{jw}^\omega \quad (2.55)$$

- Si $\eta^\omega = 0$ quelle que soit ω , alors une solution réalisable de second niveau existe pour $(\underline{q}, \bar{q}, \gamma)$ ce qui signifie que (C_1, C_2) est une solution optimale de la relaxation linéaire du problème puisque la violation d'une coupe d'optimalité résulterait en une valeur $\eta^\omega \geq 0$ dans la contrainte (2.43).

Pour rappel (voir 2.1.2), le sous-problème de séparation est ici modifié par rapport la formulation classique, de manière à ne pas distinguer coupes d'optimalité et de faisabilité. Nous pourrions générer uniquement des coupes de réalisabilité en ne prenant pas en compte la contrainte (2.43).

2.3.3 Génération de colonnes et de coupes

Compte tenu de la taille des instances réelles (voir 2.4.1), il apparaît intéressant de combiner les techniques, décrites aux paragraphes 2.3.1 et 2.3.2 ci-dessus, afin de pouvoir gérer le nombre important de variables de flot tout en introduisant de la robustesse vis-à-vis d'un ensemble de scénarios.

A chaque itération de la génération de colonnes, on résout à l'optimum un problème maître restreint en remplaçant les contraintes (2.20)-(2.23) et les contraintes (2.30)-(2.31) par l'ensemble des coupes de Benders générées lors des itérations précédentes. L'itération de génération de colonnes se termine lorsque aucune nouvelle colonne améliorante n'est trouvée. On réalise alors une nouvelle itération de générations de coupe comme décrit au paragraphe 2.3.2. L'optimum de la relaxation linéaire du problème est atteint lorsque aucune coupe n'est générée.

L'approche combinant ces deux décompositions est présentée de manière schématique en figure 2.6. Le rectangle intitulé « Problème Maître » correspond à la résolution du problème maître restreint. Il est résolu par génération de colonnes en utilisant les I sous-problèmes de pricing (représentés par les rectangles horizontaux bleus). Une fois le problème maître restreint résolu, la solution de premier niveau $(\gamma, \underline{q}, \bar{q})$ est envoyée aux Ω problèmes de séparation de Benders (représentés par les rectangles verticaux oranges) qui renvoient alors des coupes sur ces décisions. Le processus s'arrête lorsque aucune coupe n'est violée par la solution du problème maître restreint.

Les problèmes de pricing de Dantzig-Wolfe et de séparation de Benders restent identiques à leur description des paragraphes 2.3.1 and 2.3.2. A une itération donnée, un ensemble de colonnes G'_i a été généré pour chaque unité i et un ensemble de coupes B^ω pour chaque scénario ω . Le problème maître restreint dont on résout la relaxation linéaire s'écrit alors :

- Objectif

$$\min \sum_{g \in G'_i} \lambda^g C_g + \sum_{\omega \in \Omega} Proba_\omega \gamma^\omega \quad (2.56)$$

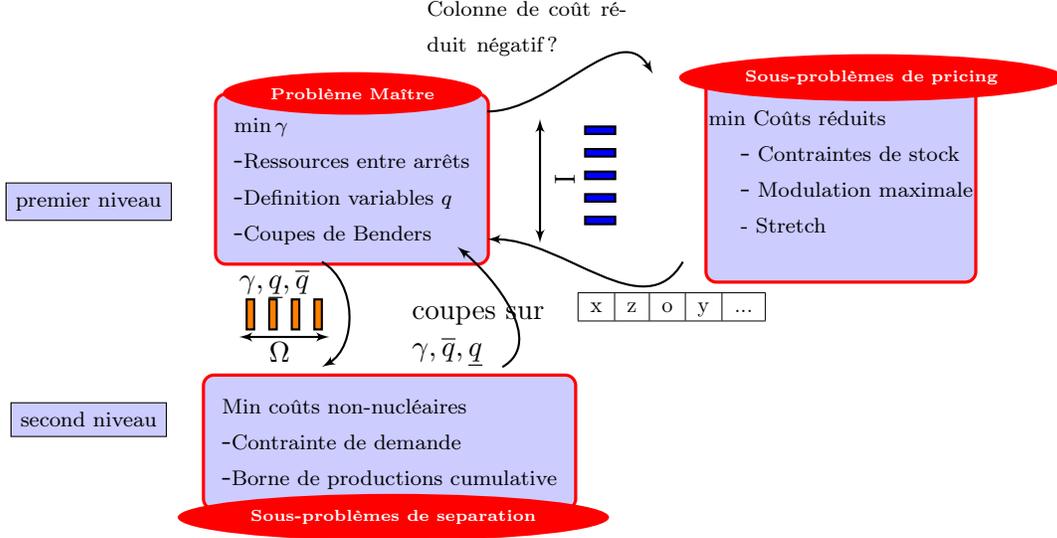


FIGURE 2.6: Approche combinant génération de coupes et de colonnes

- Production incrementale minimale

$$\sum_{g \in G'_i} \left(\sum_{(u,v) \in A_g} \underline{p}_{(u,v),w} \right) \lambda_{ig} = \underline{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.57)$$

- Production incrémentale maximale

$$\sum_{g \in G'_i} \left(\sum_{(u,v) \in A_g} \bar{p}_{(u,v),w} \right) \lambda_{ig} = \bar{q}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.58)$$

- Contraintes d'ordonnancement des arrêts

$$\sum_{g \in G'_i} \sum_{(u,v) \in O_{cw} \cap A_g} \lambda_{ig} \leq N_{cw} \quad \forall c \in C, w \in [S(c), E(c)] \quad (2.59)$$

- Contraintes de convexité

$$\sum_{g \in G'_i} \lambda_g = 1, \quad \forall i \quad (2.60)$$

- Coupes de Benders

$$- \alpha^\omega \gamma^\omega + \sum_{iw} \sum_{w' \leq w} \left(\underline{\beta}_{iw'k}^\omega q_{iw'} - \bar{\beta}_{iw'}^\omega \bar{q}_{iw'} \right) \leq - \sum_{tw} \nu_t^\omega D_t^\omega + \sum_{iw\omega} \pi_{iw}^\omega \bar{P}_{iw}^\omega + \sum_{jw\omega} \mu_{jw}^\omega \bar{P}_{jw}^\omega \quad (2.61)$$

$$\forall \omega, (\alpha^\omega, \underline{\beta}_{iw}^\omega, \bar{\beta}_{iw}^\omega, \nu_w^\omega, \pi_{jt}^\omega, \mu_{iw}^\omega) \in B^\omega$$

- Coût de second niveau positif

$$\gamma^\omega \geq 0 \quad \forall \omega \quad (2.62)$$

- Variables binaires

$$\lambda_g \in \{0, 1\} \quad \forall i, g \in G'_i \quad (2.63)$$

L'algorithme décrit dans ce paragraphe sera appelé **(CutColGen)** dans la suite du document.

2.4. Etude comparative de différentes formulations

Cette section analyse les performances de différentes formulations tirées de celles présentées aux paragraphes précédents pour la résolution de la relaxation linéaire du problème. Des heuristiques permettant d’obtenir des solutions entières sont également testées.

A noter que dans cette étude comparative, la recharge associée à chaque arrêt est constante et le pas de temps est hebdomadaire comme c’est le cas dans les outils opérationnels utilisés par EDF. Ces deux caractéristiques limitent la taille des problèmes traités dans cette section, sachant que la formulation permet de traiter les cas où la recharge est une variable de décision et où le pas est désagrégé.

La section 2.4.1 présente les instances utilisées. La section 2.4.2 présente différents changements de variables applicables à la formulation de référence (RefQ), et compare leur efficacité pour la résolution de la relaxation linéaire, d’une part avec la méthode de génération de colonnes, et d’autre part avec une résolution directe sans décomposition. La section 2.4.3 porte sur le lien entre premier et second niveau dans le cas d’une approche de résolution par génération de coupes et de colonnes. Enfin la section 2.4.4, compare différentes heuristiques utilisables pour obtenir des solutions entières, dans le cas d’une approche par génération de colonnes.

2.4.1 Description des instances utilisées

Compte tenu de la complexité du problème, des instances de taille restreinte, comportant 22 unités nucléaires et un horizon de 160 semaines, sont utilisées ici. Cinq configurations différentes du parc nucléaire sont considérées, chacune correspondant à un sous-ensemble de sites, comprenant six, quatre ou deux unités. Les sites sont complets dans une instance afin d’assurer que la structure des contraintes intra-sites de ressources entre arrêts soit maintenue, ces contraintes étant fortement structurantes.

Une configuration est identifiée par un nom de la forme « *Iits_Pbmp* » où :

- *i* est le nombre d’unités nucléaires ;
- *s* est l’index de l’instance dans la liste des configuration comprenant un nombre d’unités *i* ;
- *b, m, p* indiquent le nombre de sites comprenant respectivement six, quatre et deux unités.

Par exemple, la configuration identifiée « I22t0_P140 » comporte un site à six unités, quatre sites à quatre unités et aucun site à deux unités, pour un total de 22 unités. Pour ces configurations de taille réduite, les contraintes spécifiques aux unités non prises en compte sont ignorées, leur coût d’utilisation est nul et leurs arrêts sont fixés à ceux du planning initial présent dans les données.

Le tableau 2.1 présente le nombre de variables et de contraintes composant le polytope R_1 pour chacune de ces configurations :

- #var désigne le nombre de variables entières de premier niveau, présentes dans le graphe ;
- #ctrFlots désigne le nombre de contraintes de conservation de flots, présentes dans le graphe ;
- #ctrArrets désigne le nombre de contraintes de ressources entre arrêts.

Nous considérons également cinq instances de second niveau, correspondant au polytope R_2 , constituées d’une centaine de scénarios de demande et de disponibilité/coût des unités de production non-nucléaires.

Configurations	#var	#ctrFlots	#ctrArrets
I22t0_P140	49658	13196	1597
I22t1_P019	42553	11323	970
I22t2_P131	48603	13161	1353
I22t3_P043	44542	11673	1324
I22t4_P043	40423	11106	924

TABLE 2.1: Taille des instances relativement au premier niveau

Dans le cas déterministe, le croisement des cinq configurations de premier niveau et du scénario moyen obtenu sur chaque instance de second niveau fournit un benchmark de 25 instances déterministes.

Une instance stochastique est caractérisée par un ensemble de scénarios pris en compte, dont le nombre est c . Une première étape consiste à créer un ensemble de c scénarios à partir de chaque instance de second niveau. La méthode de construction de ces ensembles est détaillée au chapitre 3. Pour chaque ensemble de scénarios c nous obtenons ainsi 5 instances du polytope R_2 , que nous combinons avec les cinq configurations du parc nucléaire de premier niveau. Pour un nombre de scénarios c fixé, nous obtenons ainsi un benchmark de 25 instances stochastiques.

Un prétraitement en trois étapes est appliqué sur chaque scénario à chaque pas de temps :

- La somme des puissances minimales des unités non-nucléaires est soustraite de la demande, les puissances minimales correspondantes sont mises à 0 ;
- La puissance nucléaire maximale disponible est estimée, en prenant en compte les contraintes éventuelles imposant des fenêtres de temps sur les arrêts. On en déduit un ensemble de unités non-nucléaires nécessairement appelées à l'optimum, en exploitant l'ordre croissant de leur coût. Dans ce « merit order » toutes les unités seront appelées à leur puissance maximale sauf la plus chère. Compte tenu de leur coût nul, les unités nucléaires non présentes dans l'instance sont éliminées ;
- Les unités de production non-nucléaires résiduelles de même coût sont agrégées.

Après prétraitement le polytope associé à un scénario comprend, au pas de temps hebdomadaire comporte :

- 3520 variables de production nucléaire ;
- 6100 (+/- 100) variables de production non-nucléaire ;
- 7040 contraintes (2.22)-(2.23) sachant que les variables de capacité q sont remplacées par leurs expressions en fonction des variables de premier niveau δ (contraintes (2.24)-(2.25)) ;
- 160 contraintes de demande.

2.4.2 Changements de variables

Nous cherchons ici à évaluer l'efficacité des formulations et reformulations de Dantzig-Wolfe en terme de temps de résolution de la relaxation linéaire du problème dans un contexte déterministe. En effet, pour évaluer l'efficacité de la reformulation résolue par génération de coupes et de colonnes, il faut considérer un ensemble de scénarios dans un cadre stochastique, cela ne sera pas testé ici.

Une analyse des sorties fournies par l'outil BapCod permet d'identifier le point affectant les performances de (ColGen) appliquée à (RefColGen). La résolution du problème par génération de colonnes comprend trois étapes principales en terme de temps de calcul comme illustré figure 2.7 : la résolution de la relaxation linéaire du problème maître restreint, la mise à jour des coûts dans les graphes des sous-problèmes de pricing et la génération de nouvelles colonnes par un algorithme de plus court chemin.

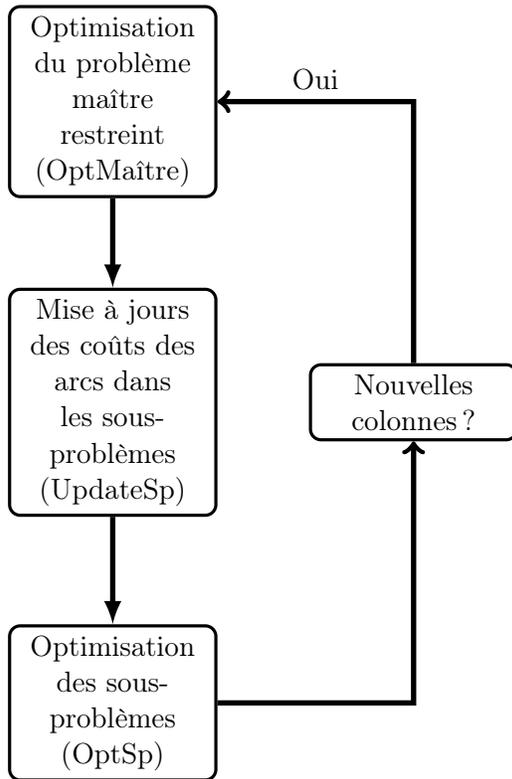


FIGURE 2.7: Principales étapes de l'algorithme de génération de colonnes

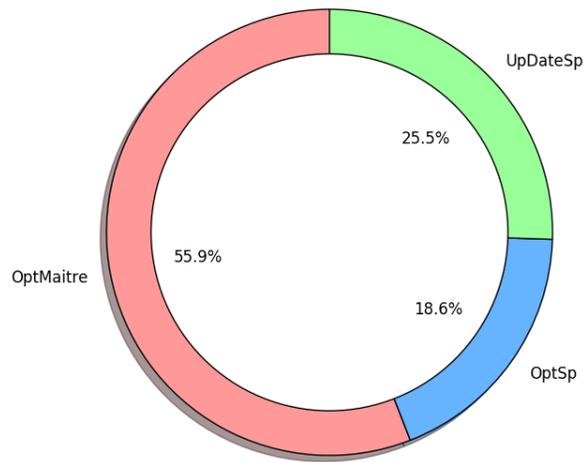


FIGURE 2.8: Répartition du temps de calcul

La figure 2.8 présente le pourcentage de temps passé dans chaque étape de l'algorithme, moyenné sur les 25 instances du benchmark. On constate que le temps de résolution de la relaxation linéaire du problème maître correspond à 55.9% du temps de calcul total. Cette étape correspond à la résolution du polytope R_2 auquel s'ajoute les contraintes de ressources des arrêts ainsi que les contraintes de convexité sur les colonnes.

La figure 2.9 présente un histogramme du temps de résolution du problème maître restreint par itération, c'est lors des premières itérations que la résolution du problème maître restreint prend le plus de temps, alors que le faible nombre de colonnes devrait au contraire permettre une résolution rapide de celui-ci.

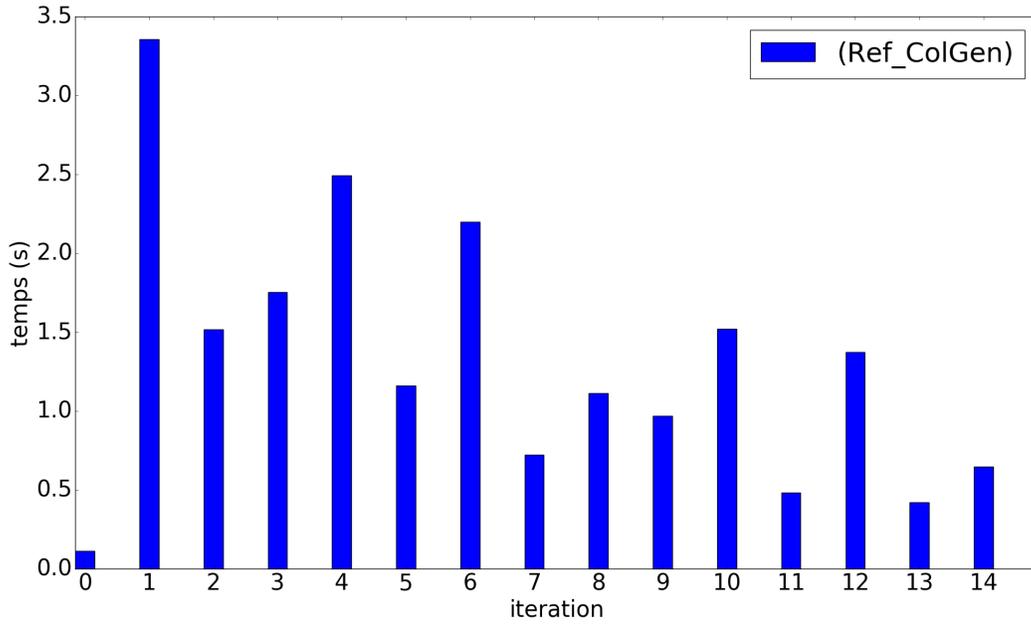


FIGURE 2.9: Temps de résolution moyen du problème maître restreint par itération sur les instances du benchmark

La figure 2.10 représente la structure de la matrice des contraintes de la formulation (RefQ). Cette matrice présente deux blocs triangulaires liant les variables de capacité q au production nucléaires p . Ces structures, très denses, rendent le problème difficile à résoudre. Dans la formulation (RefColGen), les variables de capacité sont remplacées par les colonnes générées, dont le nombre important pénalise également la résolution.

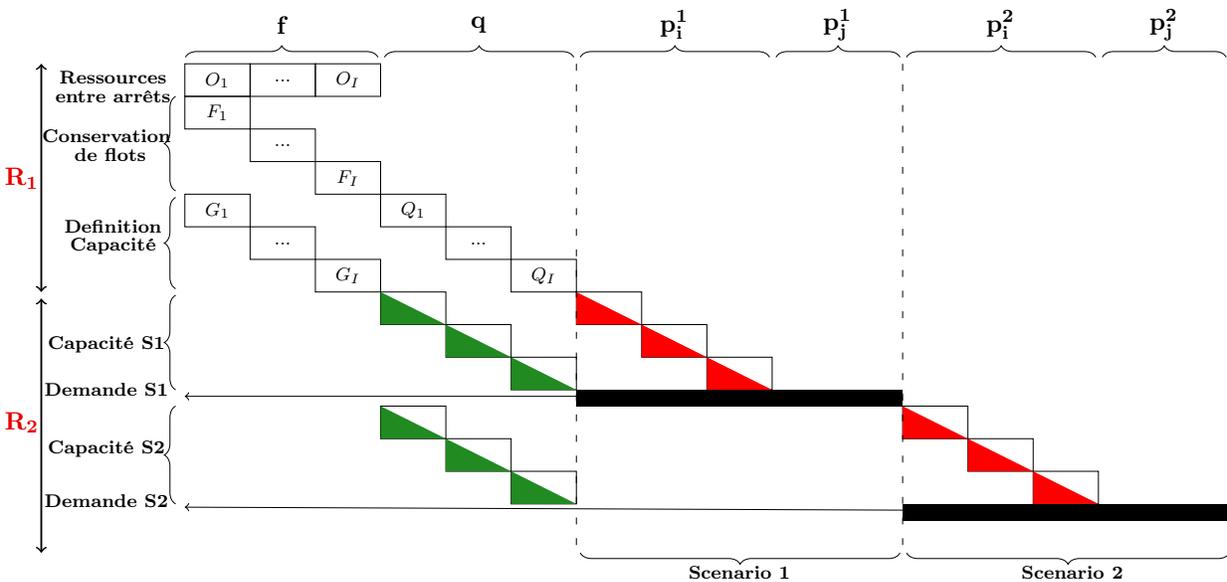


FIGURE 2.10: Structure de la matrice des contraintes

Ce constat nous a conduit à étudier des reformulations possibles du polytope R_2 . Ces reformulations correspondent à des changements de variables permettant de diminuer la densité de la matrice des contraintes —correspondant au nombre de coefficients non-nuls— dont on sait qu'elle influe fortement l'efficacité de résolution des problèmes linéaires ([Kaibel, 2011]). A noter que ces changements de variables ne modifient pas la valeur de la relaxation linéaire du problème.

2.4.2.1 Introduction de variables de production « cumulatives »

Dans la formulation de référence RefQ proposée en section 2.2.6, les contraintes (2.22)-(2.23) lient, pour une semaine donnée, la somme des variables de production des semaines précédentes, à l'ensemble des arcs de premier niveau dont les périodes de production débutent cette semaine. La matrice des contraintes correspondantes, possède deux blocs triangulaires, structure dense difficile à résoudre. Le premier bloc concerne les variables de production et de capacité, et comporte un nombre de coefficients non-nuls égal au nombre de semaines, soit 160 dans notre jeu de données ; le second concerne les variables d'arcs de premier niveau, et peut comporter de l'ordre de 2000 coefficients non-nuls dans notre jeu de données. Définir des variables représentant la production et la capacité de production cumulées depuis le début de la période d'étude à partir de la formulation (RefQ), permet de diagonaliser le premier bloc :

$$\overline{qq}_{iw} = \sum_{w' \leq w} \overline{q}_{iw'} \quad \forall i, w$$

$$\underline{qq}_{iw} = \sum_{w' \leq w} \underline{q}_{iw'} \quad \forall i, w$$

$$pp_{iw}^\omega = \sum_{w' \leq w} p_{iw'} \quad \forall i, w$$

Nous ré-écrivons alors le modèle de la section 2.2.6 au pas de temps hebdomadaire en remplaçant les variables de production et de capacité par ces variables cumulatives. Cette nouvelle formulation sera appelée **(CumQ)** :

- Satisfaction de la demande

$$\sum_i (pp_{iw+1}^\omega - pp_{iw}^\omega) + \sum_j p_{jw}^\omega = D_w^\omega \quad \forall w, \omega \quad (2.64)$$

- Capacité de production minimale

$$\underline{qq}_{iw} \leq pp_{iw}^\omega \quad \forall i, w, \omega \quad (2.65)$$

- Capacité de production maximale

$$\overline{qq}_{iw} \geq pp_{iw}^\omega \quad \forall i, w, \omega \quad (2.66)$$

- Production incrementale minimale

$$\sum_{w' \leq w} \sum_{(u,v) \in X_{iw'} \cup Y_{iw'} \cup Z_{iw'}} \underline{p}_{(u,v)}(w') \cdot \delta_{(u,v)} = \underline{qq}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.67)$$

- Production incrémentale maximale

$$\sum_{w' \leq w} \sum_{(u,v) \in X_{iw'} \cup Y_{iw'} \cup Z_{iw'}} \overline{p}_{(u,v)}(w') \cdot \delta_{(u,v)} = \overline{qq}_{iw} \quad \forall i, w \quad (2.68)$$

- Borne de production supérieure

$$pp_{iw}^\omega - pp_{iw-1}^\omega \leq \bar{P}_{iw} \quad \forall \omega, i, w \quad (2.69)$$

- Borne de production inférieure

$$pp_{iw}^\omega - pp_{iw-1}^\omega \geq 0 \quad \forall \omega, i, w \quad (2.70)$$

A noter que si cette reformulation permet de diagonaliser une partie des blocs triangulaires denses, elle introduit en revanche de nouvelles diagonales de coefficients non-nuls liées aux contraintes (2.64), (2.69) et (2.70).

Comme pour le modèle de référence (RefQ), les variables cumulative de capacité qq augmentent inutilement la taille du problème en l'absence de décomposition. On procède donc à leur remplacement par leur expression en fonction des variables d'arcs δ . La formulation résultante sera notée (**Cum**).

2.4.2.2 Introduction de variables de modulation

Dans ces deux formulations le bloc triangulaire associé aux variables de premier niveau subsiste. Cette structure résulte de l'utilisation de bornes incrémentales sur la production, sommées depuis la semaine correspondant au début de chaque arc de production (voir figure 2.5).

Afin d'améliorer la formulation (Ref), nous introduisons des variables représentant la différence entre les productions cumulatives maximales et réelles depuis le début de la période d'optimisation dans chaque scénario. Ces variables représentent la quantité de modulation utilisée durant la période de production courante. Nous les appellerons variables « de modulation » et les noterons s_{iw}^ω .

$$\begin{aligned} s_{i,w}^\omega &= \sum_{w'=0}^w \sum_{(u,v) \in X_{iw'} \cup Y_{iw'} \cup Z_{iw'}} \bar{p}_{(u,v)}(w') \cdot \delta_{(u,v)} - \sum_{w'=w_1}^w p_{iw'}^\omega \quad \forall \omega, i, w \\ \Leftrightarrow s_{i,w}^\omega - s_{i,w-1}^\omega &= \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} - p_{iw}^\omega \quad \forall \omega, i, w \\ \Leftrightarrow s_{i,w}^\omega + p_{iw}^\omega &= \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} + s_{i,w-1}^\omega \quad \forall \omega, i, w \end{aligned} \quad (2.71)$$

A noter que l'équation (2.71) exprime la conservation de la quantité de modulation consommée d'une semaine à l'autre. En effet, pour un arc (u, v) donné, tant que l'on suit la courbe de production définie par la borne supérieure de l'enveloppe ($\bar{p}(u, v)$), les variables s_{iw}^ω de modulation sont nulles, et la modulation imposée par l'enveloppe devra donc être réalisée plus tard. A la limite, suivre cette courbe sur l'ensemble de la période reviendra à placer toute la modulation imposée à la fin de celle-ci. A l'inverse, une valeur positive d'une variable s_{iw}^ω de modulation témoigne de la consommation passée d'une partie de la modulation imposée par l'enveloppe. Par définition, les variables de modulation sont nulles pour une semaine correspondant à la fin d'une période de production (figure 2.11).

En remplaçant \bar{q} et \underline{q} par leur valeur dans (2.22)-(2.23), nous obtenons les bornes suivantes pour les variables s :

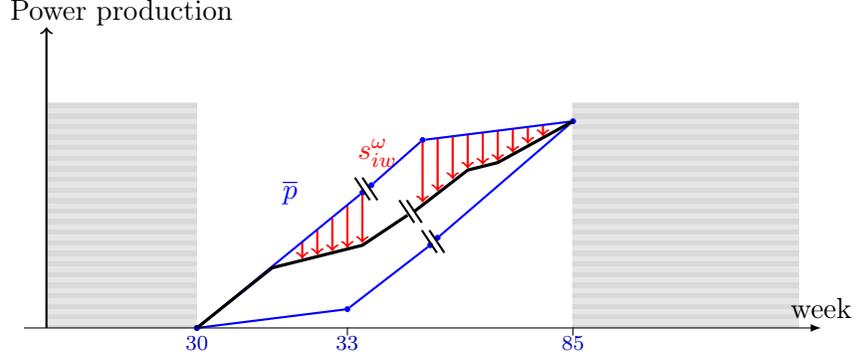


FIGURE 2.11: Illustration des variables de modulation s_{iw}^{ω}

$$s_{iw}^{\omega} \geq 0 \quad \forall \omega, i, w \quad (2.72)$$

$$s_{iw}^{\omega} \leq \sum_{w'=0}^w \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} (\bar{p}_{(u,v)}(w) - \underline{p}_{(u,v)}(w)) \cdot \delta_{(u,v)} \quad \forall \omega, i, w \quad (2.73)$$

Nous pouvons ici exploiter le fait que la production est fixée pour un arc de production en stretch (equation (2.15)) et que la production doit atteindre le stock cible fixé par un arc donné en fin de campagne de production, proposition 1. Ces deux équations nous permettent de simplifier le membre droit de l'équation ci-dessus en inversant les sommes sur les arcs et sur les semaines :

Proposition 2.

$$\sum_{w'=0}^w \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \cdot \delta_{(u,v)} = \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} \sum_{w'=w_1(u,v)}^w (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \cdot \delta_{(u,v)} \quad (2.74)$$

Démonstration. Soit une unité i et une semaine w données :

$$\begin{aligned} & \sum_{w'=0}^w \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \cdot \delta_{(u,v)} \\ &= \left[\sum_{w'=0}^w \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \underbrace{(\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)}}_{=0 \text{ (equation 2.15)}} \right] + \left[\sum_{w'=0}^w \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)} \right] \\ &= \sum_{w'=0}^w \left[\sum_{(u,v) \in (X_{iw'} \cap X_{iw}) \cup (Y_{iw'} \cap Y_{iw})} (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in (X_{iw'} \cap \bar{X}_{iw}) \cup (Y_{iw'} \cap \bar{Y}_{iw})} (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)} \right] \\ &= \underbrace{\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} \sum_{w_1((u,v))}^w (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)}}_{=0 \text{ equation 1}} + \sum_{(u,v) \in (X_{iw'} \cap \bar{X}_{iw}) \cup (Y_{iw'} \cap \bar{Y}_{iw})} \sum_{w=w_1((u,v))}^{w_2(u,v)} (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)} \\ &= \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} \sum_{w_1((u,v))}^w (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)} \end{aligned}$$

□

A noter que c'est bien l'introduction des variables s_{iw}^ω , faisant apparaître la différence entre les bornes supérieures et inférieures de capacité dans la contrainte, qui permet d'exploiter la proposition (1) pour aboutir à la simplification (2.74).

La formulation obtenue par introduction des variables de modulation est appelée (**CMod**), est donnée ci-dessous :

Par rapport aux formulations précédentes (Ref) et (Cum), (CMod) présente deux avantages important :

1. Les formulations (2.73) et (2.71) ne font plus intervenir que les variables correspondant à des arcs de production en cours pour la contrainte considérée. Le bloc triangulaire associé aux variables de premier niveau prend ici la forme d'une structure plus creuse, diagonale par blocs.
2. La contrainte (2.73) impose à 0 la variable de modulation pour les arcs de type Y (pleine puissance) et Z (Stretch), ceci grâce à la simplification (2.74). En effet pour ces arcs, sur lesquels la puissance est imposée, la différence entre les bornes de capacité est nulle. Les premières itérations de génération de colonnes comprendront alors peu de coefficients non-nuls, ce qui facilitera leur résolution.

2.4.2.3 Comparaisons

Les méthodes de résolution et les formulations comparées dans ce paragraphe sont décrites dans les tableaux ci-dessous :

Identifiant	Description
OvfLP	Résolution directe (ou frontale) par Cplex de la relaxation linéaire d'une formulation de type Arc flow
ColGen	Résolution par génération de colonnes par BaPCod de la relaxation linéaire d'une formulation de type Path flow

Identifiant	Description	Type	Méthodes de résolution
RefQ	Formulation de référence décrite au paragraphe 2.2.6.	Arc flow	-
Ref	Formulation de référence décrite au paragraphe 2.2.6 dans laquelle les variables de capacité q sont remplacées par leur expression en fonction des variables d'arcs δ .	Arc flow	OvfLP
Ref_ColGen	Reformulation de Dantzig-Wolfe de (Ref) décrite au paragraphe 2.3.1. Dans laquelle les variables de capacité q sont remplacées par leur expression en fonction des variables d'arcs δ . Le second niveau est écrit sous sa formulation déterministe équivalente dans le problème maître.	Path flow	ColGen
CumQ	Changement de variables dans (RefQ) introduisant des variables de production cumulatives de production et de capacité pour les unités nucléaires.	Arc flow	-
Cum	Remplacement dans (CumQ) des variables de capacité q par leur expression en fonction des variables d'arcs δ .	Arc flow	OvfLP
Cum_ColGen	Reformulation de Dantzig-wolfe de (Cum).	Path flow	ColGen
CMod	Changement de variables dans (Ref) introduisant les variables de « modulation » pour les unités nucléaires.	Arc flow	OvfLP
CMod_ColGen	Reformulation de Dantzig-Wolfe de (CMod).	Path flow	ColGen

Dans un premier temps, nous comparons les temps de résolution par génération de colonnes des relaxations linéaires des formulations introduites aux paragraphes précédents. Celles-ci sont respectivement notées (Ref_ColGen), (Cum_ColGen) et (CMod_ColGen).

Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux ci-dessous :

Configuration	CMod_ColGen	Cum_ColGen	Ref_ColGen
I22t0_P140	52,3	55,2	75,2
I22t1_P019	25,3	45,5	47,4
I22t2_P131	23,9	43,0	54,0
I22t3_P043	42,6	94,9	92,2
I22t4_P043	20,2	43,7	60,1

FIGURE 2.12: Temps de calcul obtenus sur la relaxation linéaire par génération de colonnes avec BaPCod (en secondes)

	Ref_ColGen	Cum_ColGen	CMod_ColGen
Itérations	42,3	50,5	55,5
Colonnes Générées	493,5	451,0	495,5

TABLE 2.4: Nombre d'itérations et nombre de colonnes générées, en moyenne sur le benchmark.

Le modèle (CMod_ColGen) permet une amélioration nette des temps de calcul qui sont divisés par un ratio compris entre 1.5 et 3. La comparaison du nombre d'itérations de génération de colonnes et du nombre de colonnes générées est donnée tableau 2.4. C'est la formulation (CMod_ColGen) qui, bien que plus efficace, requière le plus grand nombre d'itérations, ceci de manière cohérente avec son plus grand nombre de variables. En revanche, on peut noter que le modèle (Cum_ColGen) nécessite moins de colonnes pour résoudre la relaxation linéaire, les variables cumulatives permettant d'agréger l'information.

La figure 2.13 compare les temps de résolution du problème maître restreint par itération sur les 26 premières itérations, moyennés sur les instances du benchmark. Les premières itérations présentent un gain très important du modèle (CMod_ColGen), comparé aux deux autres modèles.

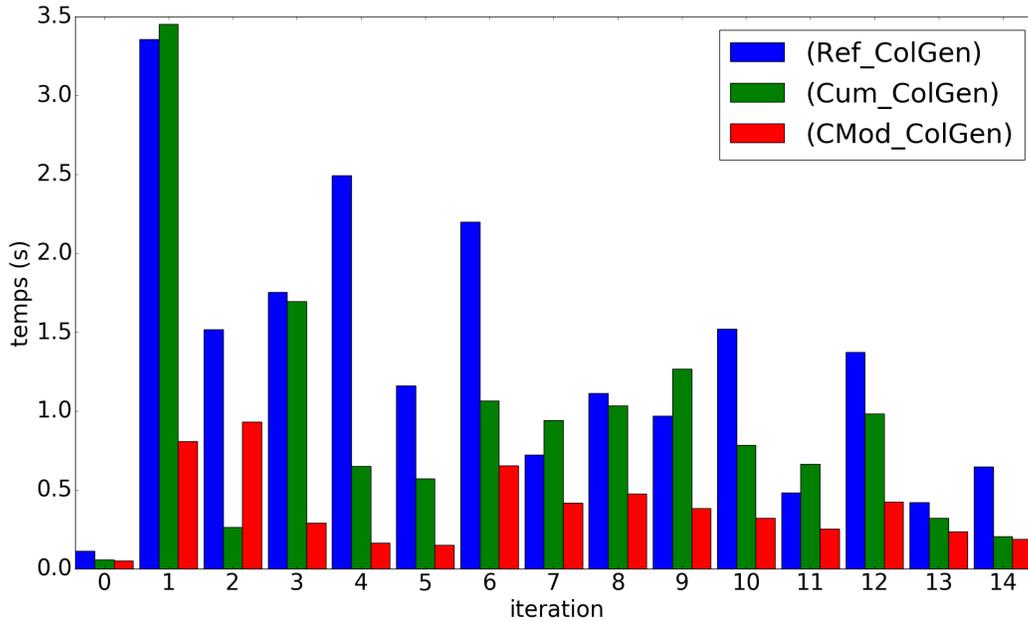


FIGURE 2.13: Temps moyen de résolution de la relaxation linéaire du maître restreint par itération

Nous comparons maintenant les temps de résolution des relaxations linéaires des formulations (Ref), (Cum) et (CMod), obtenus en fournissant celles-ci directement au solveur IBM-Cplex. Cette méthode de résolution est notée (**OvFLP**).

Configuration	CMod	Cum	Ref
I22t0_P140	51,5	55,2	45,8
I22t1_P019	21,7	27,1	41,0
I22t2_P131	44,1	51,2	96,2
I22t3_P043	30,8	52,9	66,2
I22t4_P043	23,4	41,3	35,9

FIGURE 2.14: Temps de calcul obtenus sur la relaxation linéaire par résolution directe avec IBM-Cplex (en secondes)

Mise à part pour l'instance I22t0_P140, la formulation (CMod) se révèle également plus efficace lorsqu'elle est résolue directement, sans génération de colonnes. Ceci est probablement dû à la meilleure structure matricielle de celle-ci, comme expliqué à la section 2.4.2.2.

Compte tenu de leur efficacité supérieure, les formulations utilisant les variables de modulation, (CMod) et (CMod_ColGen), seront utilisées dans toute la suite de cette thèse.

2.4.3 Génération de coupes et de colonnes

Nous cherchons ici à évaluer l'efficacité des formulations comportant des variables de modulation (i.e. (CMod) et (CMod_ColGen)) dans un cadre stochastique, celles-ci s'étant montrées les plus efficaces dans un cadre déterministe.

Le nombre de variables et de contraintes augmente très rapidement avec le nombre de scénarios. Chaque scénario supplémentaire pris en compte conduit à ajouter l'équivalent d'un polytope R_2 déterministe dans la formulation, soit de l'ordre de 13500 variables et 7000 contraintes pour les formulations qui nous intéressent ici. Ces contraintes et variables supplémentaires sont ajoutées dans le problème maître restreint pour obtenir une formulation déterministe équivalente, alors même que la résolution de celui-ci était déjà le point limitant de l'approche par génération de colonnes dans le cas déterministe.

Comme détaillé dans la section 2.3.2, il est possible d'utiliser une reformulation de Benders pour remplacer le polytope R_2 par un ensemble de contraintes, dont le nombre est, de manière générale, exponentiel. Une génération dynamique de coupes et de colonnes permet d'alléger le problème maître restreint, tout en exploitant l'indépendance des scénarios et des unités de production nucléaires.

Lors de l'utilisation d'une double reformulation, de Dantzig-Wolfe et de Benders, les colonnes de Dantzig-Wolfe interviennent dans les coupes de Benders. Une solution de premier niveau est une combinaison de colonnes représentant chacune un ensemble de variables d'arcs de la formulation *Arc flow* associée. Le fait que l'on génère dynamiquement les variables du problème implique que certaines d'entre elles, intervenant dans une coupe donnée, sont manquantes au moment de la génération de cette coupe ([Spoorendonk, 2008]). L'interaction entre les deux décompositions comporte alors plusieurs étapes à une itération donnée :

- Une solution du problème maître restreint est reformulée en termes de variables d'arcs, et transmise aux problèmes de séparation de Benders.
- Une coupe, générée en termes de variables d'arcs par un problème de séparation de Benders, est reformulée en utilisant les colonnes existantes du problème maître, avant d'y être introduite. La variable duale associée à cette nouvelle contrainte est prise en compte dans la mise à jour des sous-problèmes de pricing de Dantzig-Wolfe. L'information des coupes de Benders sur les variables d'arcs est gardée en mémoire.
- Lors de la génération d'une nouvelle colonne par un problème de pricing, les coupes de Benders comportant des variables d'arcs présentes dans la colonne sont mises à jour pour tenir compte de cette nouvelle variable.

Nous appelons « **projection** » l'ensemble de ce processus (figure 2.15). Celui-ci peut conduire à une augmentation du temps de calcul avec le nombre de scénarios.

Une manière de s'affranchir de ce problème de projection consiste à ajouter des variables représentant les bornes de production induites par les décisions de premier niveau. En effet, les coupes générées par les sous-problèmes de séparation seront alors exprimées en termes de ces variables et ne nécessiteront pas de mise à jour par la suite. De plus, seules les variables duales associées aux contraintes définissant ces nouvelles variables seront utilisées pour mettre à jour les problèmes de pricing.

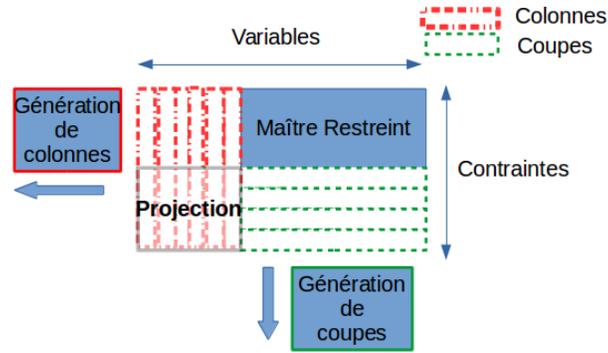


FIGURE 2.15: Illustration du problème de « projection » dans une résolution par génération de coupes et de colonnes

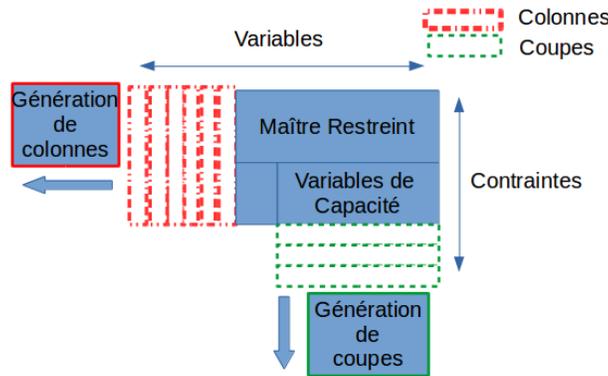


FIGURE 2.16: Suppression du problème de projection par l'introduction de variables de capacité

Cette technique revient à introduire dans la formulation (CMod_Proj) des « variables de capacité » similaires à celles présentes dans les formulations (RefQ) et (CumQ) (figure 2.16).

En introduisant directement des variables de ce type dans (CMod_ColGen), i.e. en remplaçant les termes correspondant aux décisions de premier niveau dans les contraintes 2.71 et 2.73, nous obtenons la formulation suivante dans laquelle ces variables sont notées \bar{q} et \bar{S} :

$$\min \quad (2.19) \quad (\text{CMod_Q})$$

$$s.t \quad (2.26) - (2.29)$$

$$\bar{q}_{iw} = \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} \quad \forall i, w \quad (2.75)$$

$$\bar{s}_{iw} = \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} \sum_{w'=w_1(u,v)}^w (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \cdot \delta_{(u,v)} \quad \forall i, w \quad (2.76)$$

$$s_{iw}^\omega + p_{iw}^\omega = \bar{q}_{iw} + s_{iw-1}^\omega \quad \forall \omega, i, w \quad (2.77)$$

$$s_{iw}^\omega \leq \bar{s}_{iw} \quad \forall \omega, i, w \quad (2.78)$$

Des tests préliminaires effectués sur une formulation exploitant des variables de capacité *cumulatives*, résolue par génération de coupes et de colonnes, ont montré une augmentation modérée du temps de résolution avec le nombre de scénarios. Ce constat nous a conduit à introduire des variables de ce type dans le modèle (CMod_Proj) :

$$\min \quad (2.19) \quad (\text{CMod_CumQ})$$

$$s.t \quad (2.26) - (2.29)$$

$$\bar{q}q_{iw} = \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \sum_{w'=w_1((u,v))}^w \bar{p}_{(u,v)}(w') \cdot \delta_{(u,v)} \quad \forall i, w \quad (2.79)$$

$$\underline{q}q_{iw} = \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} \sum_{w'=w_1(u,v)}^w \underline{p}_{(u,v)}(w') \cdot \delta_{(u,v)} \quad \forall i, w \quad (2.80)$$

$$s_{iw}^\omega + p_{iw}^\omega = \bar{q}q_{iw} - \bar{q}q_{iw-1} + s_{iw-1}^\omega \quad \forall \omega, i, w \quad (2.81)$$

$$s_{iw}^\omega \leq \bar{q}q_{iw} - \underline{q}q_{iw} \quad \forall \omega, i, w \quad (2.82)$$

A noter que si l'introduction de ces variables de capacité permet de s'affranchir du processus de projection, leur impact sur le temps de résolution sera sans doute difficile à quantifier, puisqu'elles introduisent à priori un plus grand nombre de colonnes et de coupes.

2.4.3.1 Résultats numériques

Nous comparons dans cette section les résultats obtenus sur les différentes méthodes de résolutions et formulations rappelées ci-dessous.

Identifiant	Description
OvfLP	Résolution directe (ou frontale) par Cplex de la relaxation linéaire d'une formulation de type Arc flow
ColGen	Résolution par génération de colonnes en utilisant BaPCod de la relaxation linéaire d'une formulation de type Path flow
CutColGen	Résolution par génération de coupes et de colonnes en utilisant BaPCod de la relaxation linéaire d'une formulation de type Path flow

Identifiant	Description	Type	Méthodes de résolution
CMod	Changement de variables dans (Ref) introduisant les variables de « modulation » pour les unités nucléaires.	Arc flow	OvfLP
CMod_ColGen	Reformulation de Dantzig-Wolfe de (CMod).	Path flow	ColGen
CModProj_CutColGen	Reformulation de Benders du second niveau dans CMod_Colgen	Path flow	CutColGen
CModQ_CutColGen	Remplacement dans (CModProj_CutColGen) des variables de premier niveau par des variables de capacité supérieur \bar{q} dans 2.71 et une borne maximale \bar{S} dans 2.73.	Path flow	CutColGen
CModCumQ_CutColGen	Remplacement dans (CModProj_CutColGen) des variables de premier niveau par des variables cumulative de capacité.	Path flow	CutColGen

Pour chaque nombre de scénarios c considéré, la figure 2.17 donne le temps de résolution obtenu en moyenne les 25 instances de c scénarios, en fonction de la formulation et de la méthode de résolution choisie.

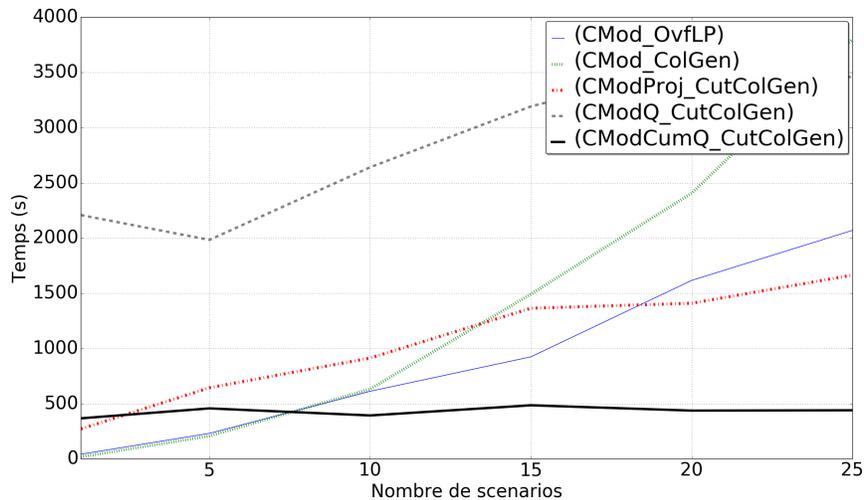


FIGURE 2.17: Temps de résolution de la relaxation linéaire

Pour un nombre de scénarios inférieur à cinq, la méthode par génération de colonnes (CMod_ColGen) est légèrement plus rapide que la résolution directe du modèle (CMod). Le temps de résolution par (CMod_ColGen) augmente très rapidement avec le nombre de scénarios, ceci du fait qu'elle exige la résolution de plusieurs maîtres restreints dont la taille augmente linéairement avec le nombre de scénarios. Le temps de résolution de (CMod) augmente également rapidement avec le nombre de scénarios, mais de manière moins marquée que (CMod_ColGen).

Les approches combinant générations de coupes et de colonnes, (CModProj_CutColGen), (CModQ_CutColGen) et (CModCumQ_CutColGen), présentent quant à elles des temps de calculs augmentant modérément avec le nombre de scénarios. Ce comportement s'explique par la parallélisation dans BaPCod de la résolution des problèmes de séparation de Benders, et par l'absence des variables de second niveau lors de la résolution des problèmes maîtres restreints.

Le modèle utilisant des variables de capacité cumulatives (CModCumQ_CutColGen) bien que moins efficace pour un faible nombre de scénarios, présente la propriété remarquable d'avoir un temps de calcul constant avec le nombre de scénarios.

L'approche (CModQ_CulColGen) avec des variables non-cumulatives présente des temps de calcul sensiblement supérieurs aux autres approches. Compte tenu de ce constat nous n'avons pas cherché à expliquer plus avant son comportement, qui semble décorrélié du nombre de scénarios.

Le tableau 2.18 permet de mieux comprendre les performances des différentes méthodes utilisant l'approche (CutColGen) pour un nombre de scénarios inférieur à 15. Il présente l'évolution, en fonction du nombre de scénarios :

- du nombre d'itérations de génération de colonnes (# ColGenIt) ;
- du nombre total de colonnes générées (# Col) ;
- du nombre d'itérations de générations de coupes (# CutGenIt) ;
- du nombre total de coupes générées (# Coupes).

Formulation	# Scenarios	# ColGenIt	# Col	# CutGenIt	# Coupes
CModProj	1	410	1590	90	89
CModProj	5	355	1539	52	245
CModProj	10	342	1545	43	405
CModProj	15	360	1671	42	590
CModCumQ	1	433	2297	89	88
CModCumQ	5	365	2228	51	240
CModCumQ	10	346	2242	44	406
CModCumQ	15	362	2283	41	576
CModQ	1	868	5010	88	87
CModQ	5	747	4613	52	242
CModQ	10	685	4391	44	405
CModQ	15	729	4453	41	579

FIGURE 2.18: Nombre d'itérations et de colonnes/coupes générées : Variantes du modèle Résa

On constate que :

- Le nombre d'itérations de génération de colonnes, ainsi que le nombre de colonnes générées, ne présente pas de corrélation évidente avec le nombre de scénarios pour l'ensemble des approches.
- Comme attendu, le nombre de colonnes générées pour les formulations utilisant des variables de capacité ((CModCumQ) et (CModQ)) est supérieur à celui de l'approche (CModProj). Le plus grand nombre de colonnes additionnelles de (CModQ) expliquent ces plus faibles performances.
- Pour un nombre de scénarios donné, le nombre total de coupes générées ne dépend pas du modèle considéré. L'introduction des variables de capacité n'a donc, à priori, pas d'effet sur la qualité des coupes générées.
- Le nombre de coupes générées augmente avec le nombre de scénarios mais le nombre d'itérations de génération de coupes diminue quant à lui. Ce résultat est logique compte tenu du fait que le ratio entre le nombre total de coupes et le nombre de scénarios diminue. En effet, le nombre de problème de séparation, et donc de coupes générées à chaque itération, est égal au nombre de scénarios. Par exemple, passer de un à cinq scénarios multiplie le nombre de coupes total générées par trois, alors que cinq coupes sont générées par itération au lieu d'une.

Les figures 2.19 et 2.20 permettent de comprendre pourquoi les variables cumulatives limitent l'augmentation du temps de calcul avec le nombre de scénarios.

Nous avons constaté expérimentalement que les pourcentages d'augmentation du temps de calcul dans les différentes étapes de l'algorithme, pour (CModProj), était quasiment constants quelle que soit l'augmentation du nombre de scénarios. La figure 2.19 présente les valeurs obtenues.

- (OptMaître) représente la résolution de la relaxation linéaire du problème maître restreint ;
- (SepOracle) correspond à la résolution des sous-problème de séparation et à la construction des coupes ;
- (UpdateSp) correspond comme dans le cas déterministe à la mise à jours des sous-problèmes de pricing ;
- (upDateSep + SpSol) regroupe la mise à jour des problèmes de séparation (consistant à fixer les valeurs de premier niveau) et la résolution des sous-problèmes de pricing.

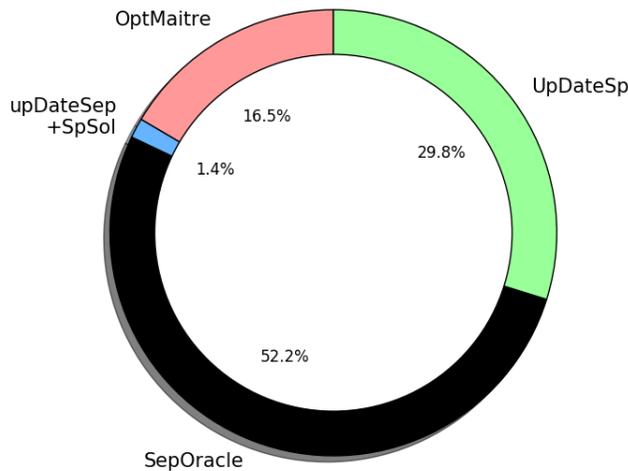


FIGURE 2.19: Analyse de l'augmentation du temps de calcul avec le nombre de scénarios dans la méthode (CModProj_CutCol)

On constate que la combinaison de (SepOracle) et (UpDateSp) qui inclut le processus de projection représente 82% de l'augmentation du temps de calcul. Les 16.5% d'augmentation de (OptMaître) s'explique pour leur part par le plus grand nombre de coupes.

La figure 2.20 compare les temps passés dans chaque étape de l'algorithme pour les modèles (CModProj_CutCol) et (CModCumQ_CutCol).

- Dans le cas déterministe (un scénario), le modèle (CModCumQ_CutCol) présente un temps de résolution passé dans (OptMaître) supérieur à celui de (CModProj_CutCol) en raison des variables additionnelles qu'il comporte. Le temps passé dans (upDateSp) est également supérieur dans (CModCumQ_CutCol). Ceci s'explique par le fait que le nombre de variables duales utilisées pour mettre à jour le pricing dans (CModCumQ_CutCol), correspondant aux contraintes définissant les variables cumulatives, est supérieur à celui associé aux coupes de Benders dans (CModProj_CutCol).

- Lorsque l'on augmente le nombre de scénarios, le temps passé dans (SepOracle) et (updateSp) devient prépondérant dans (CModProj_CutCol), ceci est cohérent avec le fait que ces deux étapes représentent 82% du temps total d'augmentation. La formulation (CModCumQ_CutCol), ne nécessitant pas de projection, présente une augmentation très limitée de ces étapes, ce qui explique le caractère quasiment constant du temps de calcul en fonction du nombre de scénarios observé pour cette méthode.

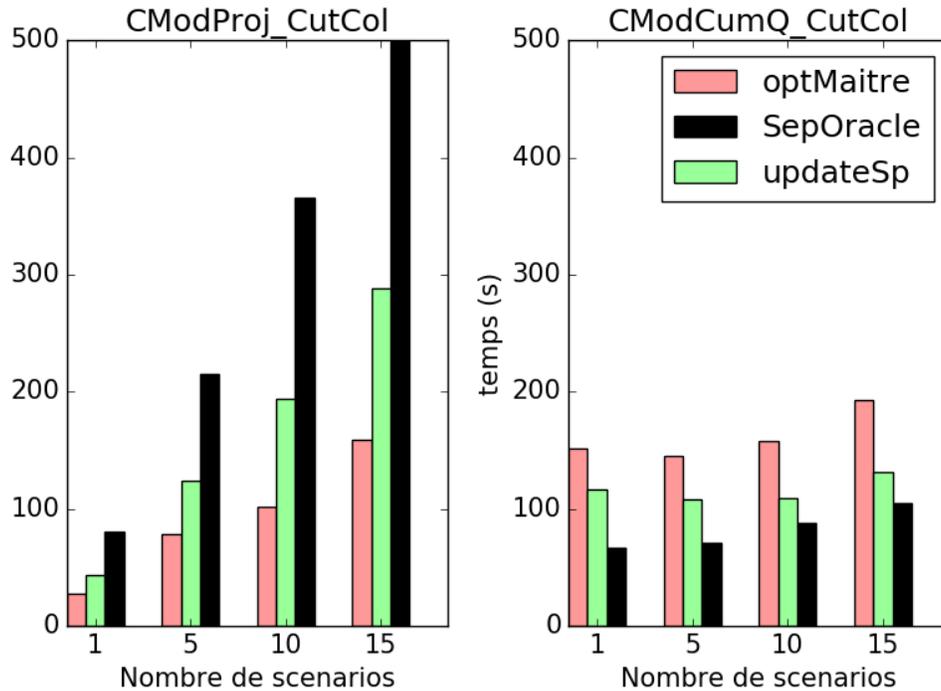


FIGURE 2.20: Analyse des approches CModProj_CutCol et CModCumQ_CutCol

2.4.3.2 Synthèse

Nous avons observé dans cette section que :

- Lorsque l'on n'utilise pas de génération de coupes, le temps de résolution de la relaxation linéaire augmente rapidement avec le nombre de scénarios.
- Une approche par génération de coupes et de colonnes présente des temps de calculs augmentant modérément avec le nombre de scénario.
- Le processus de « projection » constitue le point limitant dans un modèle ne séparant pas les colonnes de la reformulation de Dantzig-Wolfe des coupes de celle de Benders.

L'ajout de variables cumulatives séparant les deux reformulations augmente le nombre de colonnes mais permet d'éviter le processus de projection. Le modèle résultant présente des temps de résolution quasiment constant avec le nombre de scénarios.

2.4.4 Comparaison des approches de résolution du problème en nombres entiers

Les travaux présentés aux sections précédentes nous ont permis d'obtenir une formulation :

1. Efficace pour la résolution de la relaxation linéaire du problème ;
2. Qui améliore la qualité des bornes obtenues.

Nous étudions dans cette section les possibilités d'obtention de solutions entières.

2.4.4.1 Résolution directe ou « frontale » par un solveur en nombres entiers. (OvfIP)

Une première approche permettant l'obtention de solution entière consiste à résoudre la formulation obtenue par un solveur en nombres entiers utilisant un algorithme de Branch & Bound, cette méthode de résolution sera notée (OvfIP) dans la suite. Les deux propriétés citées ci-dessus devraient bénéficier à une telle approche. Par ailleurs, la structure presque diagonale des contraintes (2.71) renforce le preprocessing et le *variable fixing* réalisés par le solveur lors de sa phase heuristique initiale.

Cependant la section 2.4.3 a montré que le temps de résolution de cette approche augmente rapidement avec le nombre de scénarios, alors qu'une approche exploitant les reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders permet de maintenir un temps de résolution acceptable.

A noter que la méthode exacte permettant la résolution du problème en nombres entiers consisterait en un algorithme de Branch-Price & Cut (voir [Desrosiers and Lübbecke, 2011]) imposant graduellement les contraintes d'intégralité en branchant soit sur les variables d'arcs originales du problème, soit sur les colonnes de la reformulation de Dantzig-Wolfe. Ce type d'algorithmes converge vers la solution optimale en théorie. En pratique les dimensions du problème industriel que nous traitons en rendent l'utilisation inefficace, même dans le cas déterministe, ce que nous avons vérifié en utilisant l'implémentation de ces méthodes dans l'outil BaPCod de l'INRIA.

Ces constats nous ont conduit à investiguer les méthodes heuristiques disponibles dans l'outil BaPCod permettant d'obtenir les solutions entières du problème en tirant parti d'une approche par génération de colonnes telle que celle que nous avons développée. Nous les décrivons dans les paragraphes suivants.

2.4.4.2 Comparaison des heuristiques disponibles dans l'outil BaPCod

R.Sadykov & al. ([Sadykov et al., 2015]) ont décrit et comparé les heuristiques génériques pouvant tirer parti d'une procédure de génération de colonnes afin d'obtenir une solution entière réalisable. Nous décrivons ci-dessous trois d'entre elles. Celles-ci sont appliquées après résolution de la relaxation linéaire du problème initial en utilisant les méthodes de génération de colonnes ou de génération de colonnes et de coupes respectivement décrites aux paragraphes 2.3.1 et 2.3.3 :

- **Restricted Master IP.** Cette heuristique consiste à limiter l'ensemble des variables fournies au solveur en nombres entiers à celles correspondant à l'ensemble des colonnes du dernier problème maître restreint obtenu durant la résolution de la relaxation linéaire du problème. Cette heuristique ne garantit pas l'obtention d'une solution réalisable puisqu'il peut ne pas exister de combinaison entière de colonnes vérifiant l'ensemble des contraintes. Cependant, l'ensemble de nos tests n'a pas révélé de cas où une telle combinaison n'existait pas.

Si la relaxation linéaire du problème a été résolue par l'algorithme combinant génération de colonnes et de coupes, il peut exister des coupes qui ne sont pas violées pour le problème en variables continues mais qui le seront pour le problème en nombres entiers. Il est alors nécessaire de continuer à générer des coupes lors de la résolution du problème en nombres entiers par le solveur. Dans le cadre de travaux parallèles à ceux que nous présentons ici, également réalisés en collaboration avec EDF dans le cadre du Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation (PGMO), l'équipe RealOpt a implémenté dans l'outil BaPCod une telle génération de coupes en utilisant les Callback de Cplex ([Detienne et al., 2017]) : les problèmes de séparation, présents en mémoire, sont résolus à chaque fois qu'une solution entière candidate est trouvée afin de vérifier quelle ne viole aucune contrainte du problème original.

- **Diving with limited discrepancy search (Diving).** Introduite dans [Harvey and Ginsberg, 1995] cette heuristique consiste en un algorithme itératif fixant une colonne de la solution partielle à sa valeur entière la plus proche puis ré-optimisant le problème en générant de nouvelles colonnes et coupes si nécessaire. Puisque l'une des colonnes est fixée à chaque nouvelle itération le nombre de problèmes de pricing se réduit jusqu'à ce que la solution de la relaxation linéaire du problème soit entière ou irréalizable. Lorsqu'un de ces cas se produit on dit qu'on a réalisé « un plongeon ». Des procédures, dites de *diversification*, sont utilisées pour améliorer l'efficacité de la méthode en élargissant l'espace de recherche. La diversification comporte deux paramètres :

- ◊ Le premier, noté p , fixe le nombre de niveaux pour lesquels une *rétro-inspection* est réalisée. Un niveau correspond au nombre de colonnes fractionnaires ayant été fixées, ainsi le niveau 0 correspond à la relaxation linéaire du problème alors qu'au niveau 1 une des colonnes fractionnaires a été fixée.
- ◊ Le second, noté l , correspond à la taille limite d'une *liste tabou* limitant le nombre de plongeurs. Chaque fois qu'une rétro-inspection est réalisée elle est ajoutée à la liste tabou des nœuds de la branche créée. Une rétro-inspection n'est réalisée sur un nœud donné que si son niveau se trouve en dessous du niveau maximum p et si la taille de sa liste tabou est strictement inférieure à l .

L'heuristique est réglée par défaut à une profondeur de 3 niveaux et à une taille de liste tabou de 2 décisions, ce qui conduit à l'exploration de 10 solutions. La figure 2.21 présente ce réglage par défaut : la ligne bleu correspond au plongeon initial, les lignes rouges proviennent des premières rétro-inspections des nœuds bleus et les lignes noires correspondent aux rétro-inspections des nœuds rouges. Chaque nœud noir possède une liste tabou de deux éléments, ce qui correspond au paramètre l de l'heuristique ; il n'y a donc pas de rétro-inspection réalisée sur ces nœuds.

- **Div+subMIP.** Les deux heuristiques précédentes correspondent à deux stratégies différentes d'obtention d'une solution entière. L'heuristique Restricted Master IP peut être vue comme une méthode permettant de limiter le nombre de variables entières de la formulation. Elle donne la meilleure solution correspondant à une combinaison entière des colonnes générées durant la résolution de la relaxation linéaire et ne fournit donc pas de garantie de trouver la solution entière optimale. Certaines colonnes appartenant à une solution optimale du problème ne sont pas générées, ce qui entraîne une perte de qualité de la solution.

L'heuristique Diving explore une partie de l'arbre de branchement de la reformulation de Dantzig-Wolfe du problème en générant à chaque nœud de nouvelles colonnes. Pour un réglage des paramètres p et l à des valeurs suffisamment grandes, cette heuristique détermine donc la solution optimale du problème.

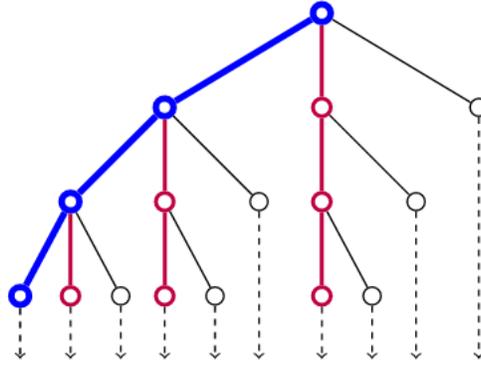


FIGURE 2.21: Plongeon effectués pour un réglage des paramètres $p = 3$ et $l = 2$.

Il est possible de combiner ces deux heuristiques en réalisant tout d'abord un Diving permettant l'obtention d'une première solution entière et la génération de nouvelles colonnes, avant d'utiliser l'heuristique Restricted Master IP sur cet ensemble élargi de colonnes. Ce type d'heuristique permet de générer un plus grand nombre de colonnes, et donc de se rapprocher de l'optimum du problème. Nous noterons par la suite $Div+subMIP_lp$ la combinaison d'une heuristique Diving paramètre par l et p avec une heuristique Restricted Master IP

Le tableau 2.22 compare Restricted Master IP à différents paramétrages p et l de $Div+subMIP_lp$ pour les instances du benchmark. La première colonne indique l'heuristique considérée, la colonne « Gap » donne le gap moyen à l'optimum de la solution trouvée, « #Col » donne le nombre de colonnes générées et « CPU (s) » la durée totale pour résoudre la relaxation linéaire et trouver la solution entière.

Heuristic	Gap	#Col	CPU (s)
RestricedMasterIP	0,221	493	35,6
Div+subMIP_00	0,057	638	63,48
Div+subMIP_12	0,042	1008	108,6
Div+subMIP_23	0,039	1555	342,52
Div+subMIP_34	0,039	2463	888,24

FIGURE 2.22: Comparaison de Restricted Master IP à différents paramétrages p et l de $Div+subMIP_lp$

L'heuristique Restricted Master IP trouve déjà de très bonnes solutions avec un gap moyen à l'optimum de 0.22%. L'amélioration fournie par un Diving sans diversification ($Div+subMIP_00$) est nette, avec une division du gap par un facteur 4; en revanche le temps de résolution est quasiment deux fois plus important. Les améliorations du gap obtenus en augmentant les paramètres de $Div+subMIP$ sont ensuite bien plus faibles tandis que le temps de résolution augmente très rapidement.

Le tableau 2.23 présente les performances en termes de gap à l'optimum et de temps de calcul pour les instances du benchmark déterministe de chacune des heuristiques, ainsi que le temps d'obtention de la solution optimale par OvfIP.

La méthode de génération de colonnes n'est pas parallélisée dans la librairie BaPCod alors que la décomposition associée à cette méthode devrait en théorie bénéficier d'une telle parallélisation. Afin de ne pas pénaliser les approches par génération de colonnes utilisant BaPCod par rapport à celles utilisant Cplex, nous avons pour cette comparaison limité le nombre de threads de Cplex à 6.

L'heuristique Diving est testée pour deux réglages, le réglage « 00 » correspondant à un plongeon sans diversification et le réglage « 23 » correspondant à l'exploration de 10 solutions. L'heuristique Div+SubMip est testée pour les mêmes réglages que Diving. Étant donné qu'un plongeon simple avant d'utiliser le solveur en nombres entiers (heuristique Div+SubMip_00) améliore beaucoup les solutions obtenues en contrepartie d'un temps de résolution qui double, nous avons également testé une solution intermédiaire entre Restricted Master IP et Div+SubMip_00 consistant à limiter le nombre d'itérations de génération de colonnes à deux après chaque branchement lors du plongeon. Cette heuristique apparaît dans la colonne « Div+SubMip_00_Reop2 ».

Méthode	CPU(s)	Gap(%)
OvfIP	60	0
Restricted IP	36	0.22
Div+SubMip_00_Reop2	49	0,19
Div+SubMip_00	63	0.06
Div00	44	0.55
Div23	390	0.45

FIGURE 2.23: Comparaison des heuristiques, moyenne sur les instances à 22 unités

Ce tableau montre que les heuristiques Diving ne sont pas efficaces pour ce problème. Ce constat a été confirmé par des tests effectués sur des instances à 40 unités pour lesquelles on observe dans certains cas des gaps de l'ordre de 10%. La limitation du nombre d'itérations de génération de colonnes dans l'heuristique Div+SubMip_00_Reop2 produit des solutions dont le gap est proche de celui de l'heuristique Restricted IP pour un temps de calcul bien supérieur.

Pour affiner ces résultats nous avons effectué des tests sur les cinq instances à 58 unités comparant Div+SubMip_00, Restricted Master IP et OvfIP. Le tableau ci-dessous présente les gaps à l'optimum moyens obtenus après 4h de calcul :

Méthode	Gap(%)
RestrictedMasterIP	0.95
Div+SubMip_00	0.40
OvfIP	0.05

En conclusion, sur la base de ces résultats nous sommes conduits à privilégier :

- (OvfIP) pour les instances dont la taille permet une résolution directe par un solveur de type IBM-Cplex dans des temps acceptables ;
- (RestrictedMasterIP) pour les instances dont la taille nécessite une décomposition. En effet :
 - ◊ bien que son gap soit moins bon que celui de Div+SubMip_00, celui-ci reste de bonne qualité (< 1%) ;
 - ◊ sur ce type d'instances, le plongeon requis par Div+SubMip_00, même sans diversification, peut augmenter fortement le temps de calcul ;

- ◇ la génération de nouvelles coupes et colonnes durant Div+SubMip_00 peut être particulièrement pénalisante, dans une situation où la résolution de la relaxation linéaire aura déjà été coûteuse.

2.5. Synthèse et sélection des méthodes utilisées dans l'étude industrielle

Dans ce chapitre nous avons présenté différentes formulations et méthodes de résolution permettant de résoudre efficacement le problème de placement des arrêts nucléaires.

Nous avons tout d'abord introduit une formulation étendue du problème, dans laquelle apparaissent deux niveaux. Le premier correspond, pour chaque unité, aux décisions d'arrêts, de recharges, et de type de campagnes de production (quantités de modulation en campagne, stretch, niveaux de stock atteints). Ces décisions sont modélisées par des chemins dans un graphe d'état dont le caractère unimodulaire permet l'obtention de bornes de bonne qualité lors de la résolution de la relaxation linéaire. Ce graphe permet de représenter les contraintes « difficiles » que constituent la modulation maximale par cycle et le profil de production imposé en stretch. Le second niveau correspond au problème de placement de la production de l'ensemble des unités sur chaque scénario, une fois les décisions de premier niveau fixées, celles-ci induisant des bornes contraignant les décisions de second niveau. Cette structure constitue la clef de notre approche qui permet une utilisation efficace d'une méthode de génération de colonnes au premier niveau et d'une méthode de génération de coupes au second.

Les tests que nous avons réalisés sur 25 instances de benchmark nous ont permis d'identifier que la résolution du problème maître restreint constituait le point limitant d'une approche par génération de colonnes appliquée à cette formulation. Ce constat nous a conduit à reformuler le lien entre premier et second niveau de la modélisation, afin d'obtenir une structure plus creuse de la matrice des contraintes. Cette reformulation repose sur l'introduction de variables supplémentaires modélisant la modulation réalisée durant une période de production.

Cette reformulation permet d'accélérer la résolution des problèmes maîtres restreints dans une approche par génération de colonnes, éventuellement associée à une génération de coupes. Elle s'est également avérée plus efficace lors d'une résolution directe par un solveur linéaire.

Dans un cadre stochastique, le temps de résolution de la relaxation linéaire augmente très rapidement avec le nombre de scénarios pris en compte. L'utilisation d'une approche combinant génération de coupes et de colonnes limite cette augmentation. Dans cette approche, nous avons identifié que le processus de *projection*, consistant à mettre à jour les coupes et les sous-problèmes de pricing, constituait l'étape la plus consommatrice de temps de calcul.

Nous avons alors introduit des variables cumulatives de capacité séparant le premier niveau du second, et permettant d'éviter la projection. **Bien que l'introduction de ces variables augmente le nombre de colonnes, le modèle obtenu présente la propriété remarquable de résoudre la relaxation linéaire en un temps quasiment constant avec le nombre de scénarios.**

L'obtention de solutions entières par différentes méthodes a été étudiée. Dans un cadre déterministe ou en se limitant à un très faible nombre de scénarios, une approche directe de résolution de la formulation étendue par un solveur de type Cplex est possible. Nous avons ensuite comparé différentes heuristiques exploitant la structure de la reformulation de Dantzig-Wolfe pour les instances dont la taille nécessite une décomposition. Cette étude nous a conduit à privilégier l'heuristique RestrictedMasterIP, consistant à déterminer la solution entière à partir des colonnes générées lors de la résolution de la relaxation linéaire.

La formulation du modèle obtenu est détaillée ci-dessous. Cette formulation et celles en découlant par décomposition de Dantzig-Wolfe et de Benders, ou par l'ajout des variables cumulatives de capacité, seront utilisées dans le Chapitre 3 où nous présentons les résultats obtenus sur des instances industrielles complètes :

$$\min \sum_{i,k} \sum_{(u,v) \in X_i^k \cup Y_i^k} C_{ik} r_{(u,v)} \delta_{(u,v)} + \sum_{\omega \in \Omega} Proba_{\omega} \gamma^{\omega} \quad (2.19)$$

$$\sum_{(u,v) \in O_{cw}} \delta_{(u,v)} \leq N_{cw} \quad \forall c \in C, w \in [S(c), E(c)] \quad (2.26)$$

$$\sum_{v \in V_i} \delta_{(u,v)} - \sum_{v \in V_i} \delta_{(v,u)} = 0 \quad \forall i, u \in V_i \setminus \{s_i, t_i\} \quad (2.27)$$

$$\sum_{v \in V_i} \delta_{(s_i,v)} = 1 \quad \forall i \quad (2.28)$$

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} + s_{iw-1}^{\omega} = s_{iw}^{\omega} + p_{iw}^{\omega} \quad \forall \omega, i, w \quad (2.71)$$

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw}} \sum_{w'=w_1(u,v)}^w (\bar{p}_{(u,v)}(w') - \underline{p}_{(u,v)}(w')) \delta_{(u,v)} \geq s_{iw}^{\omega} \quad \forall \omega, i, w \quad (2.83)$$

$$\sum_i p_{it}^{\omega} + \sum_j p_{jt}^{\omega} = D_t^{\omega} \quad \forall \omega, t \quad (2.20)$$

$$\sum_{jt} C_{jt}^{\omega} p_{jt}^{\omega} \leq \gamma^{\omega} \quad \forall \omega \quad (2.21)$$

$$\sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \underline{p}_{iw} \cdot \delta_{(u,v)} \leq \sum_k p_{it}^{\omega} \leq \bar{p}_{it} \quad \forall \omega, i, w, t \in w \quad (2.30)$$

$$0 \leq p_{jt}^{\omega} \leq \bar{p}_{jt}^{\omega} \quad \forall j, t, \omega \quad (2.31)$$

$$\delta_{(u,v)} \in \{0, 1\} \quad \forall i, (u,v) \in A_i \quad (2.29)$$

$$0 \leq s_{it}^{\omega} \quad \forall \omega, i, t \quad (2.72)$$

Chapitre 3

Validation de l'approche et résultats industriels

Les travaux présentés au Chapitre 2 nous ont permis d'obtenir une formulation (CMod) efficace pour une résolution directe du problème (OvFIP). Nous avons vu qu'il est également possible d'appliquer une reformulation de Dantzig-Wolfe (ColGen), éventuellement combinée à une décomposition de Benders (CutColGen), afin de résoudre la relaxation linéaire du problème. Une heuristique permet alors d'obtenir des solutions entières. L'étude réalisée nous a conduit à privilégier l'heuristique (RestrictedMasterIP) pour cette phase.

Ce chapitre présente les résultats obtenus sur des instances complètes d'EDF. Nous nous plaçons dans un cadre le plus proche possible du processus opérationnel actuel. Nous évaluons tout d'abord les apports de notre méthodologie sur deux points :

- **Le passage à l'échelle** sur des instances déterministes de taille réelle prenant en compte l'ensemble des contraintes de fonctionnement nucléaires ;
- **La prise en compte d'un nombre significatif de scénarios** dans l'optimisation du planning d'arrêts. On cherche à capter l'impact sur le planning d'une meilleure prise en compte des aspects stochastiques du problème ;

Dans un second temps, nous présentons des résultats complémentaires relatifs à la prise en compte d'un pas de temps inférieur à la semaine, à l'introduction d'une information stochastique sur la disponibilité des unités nucléaires dans les scénarios, ainsi que des extensions à la modélisation permettant de prendre en compte la variation de la recharge.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : la section 3.1 présente les jeux de données et les bibliothèques externes utilisées ; la section 3.2 présente les résultats obtenus sur le passage à l'échelle et la prise en compte de plusieurs scénarios ; la section 3.3 présente les résultats complémentaires et les extensions au modèle.

3.1. Cadre de l'étude

3.1.1 Hypothèses

Afin de se placer au plus près de l'outil opérationnel actuel, pour évaluer les apports possibles de certaines évolutions, nous travaillons sous les hypothèses suivantes par défaut :

- La recharge de chaque unité nucléaire est fixée pour chaque cycle ;

- La disponibilité des unités nucléaires dépend uniquement du temps, et non du scénario ;
- Le stock final des unités nucléaires n'est pas valorisé ;
- Le pas de temps est hebdomadaire.

3.1.2 Jeu de données

Structure des instances

Le jeu de données utilisé est un jeu réel d'exploitation fourni par EDF. Le parc de production est modélisé par 58 unités nucléaires réparties sur un site de six unités, huit sites de quatre unités et dix sites de deux unités, complétées par 84 unités non-nucléaires représentant les groupes de production conventionnels, les achats/ventes, sur le marché Spot ainsi qu'un groupe de « défaillance » de coût très élevé et dont la puissance permet de satisfaire la demande dans tous les cas.

Données déterministe sur le parc nucléaire.

Les contraintes spécifiques aux unités nucléaires (puissance maximale, stock initiaux, valeurs de $AMAX$, $DPMAX$, $MMAX$, fenêtres de temps pour les arrêts et stretch) ainsi que les contraintes de ressource entre arrêts proviennent des données de l'outil **Artémis** actuellement utilisé par EDF pour placer les arrêts.

Données stochastiques.

Les données stochastiques consistent en 484 scénarios de demande, prix et profondeur de marché, disponibilité des unités non-nucléaires, fournis par l'outil **Soprano** utilisé par EDF pour gérer le parc nucléaire une fois les arrêts fixés.

Il est évidemment impossible de résoudre le problème sur l'ensemble des 484 scénarios originaux. L'outil Soprano permet d'obtenir un ensemble plus réduit de scénarios agrégés. Cet outil classe les scénarios selon un critère heuristique basé sur une estimation du coût de satisfaction de la demande. Des clusters de scénarios sont ensuite constitués selon ce critère, et un scénario moyen est calculé pour chacun d'entre eux. Dans cette section nous résolvons le problème sur le sous-ensemble de scénario correspondant à la moyenne des « clusters » ainsi constitué. **Chacun de ces scénarios moyens correspond à un scénario indicé ω dans les formulations des chapitres précédents. Alors que les scénarios des données EDF seront appelés « scénarios originaux »**

3.1.3 Outils et bibliothèques utilisés

Notre implémentation s'appuie sur plusieurs bibliothèques :

- La bibliothèque *BaPCod* de l'INRIA (<https://wiki.bordeaux.inria.fr/realopt/pmwiki.php/Project/BaPCod>) implémentant les algorithmes de Branch & Price et Branch-Cut-and-Price.
- Le module thread *Boost_1_56_0* (<https://theboostcpplibraries.com>) qui permet la résolution parallèle des sous-problèmes de Benders.
- La bibliothèque *lemon-1.3.1* (<https://lemon.cs.elte.hu/trac/lemon>) que nous utilisons pour la construction des graphes de premier niveau ainsi que pour la résolution des problèmes de pricing par un algorithme de Dijkstra.
- La bibliothèque *Cplex 12.71* (<https://www.ibm.com/>) que nous utilisons pour la résolution des problèmes maîtres restreints, des sous-problèmes de séparation de Benders et du problème en nombres entiers final avec les heuristiques RestrictedMasterIP ou Div+subMIP.

- Les outils EDF *Soprano* et *Artemis* pour la lecture des jeux de données et *Checker* pour l'évaluation des plannings obtenus.

Les calculs ont été réalisés sur la plateforme INRIA *PlaFRIM* (<https://www.plafrim.fr>, 2 processeurs Intel Xeon 12 cœurs avec 128 Go de RAM).

La méthode de génération de colonnes n'est pas parallélisée dans la librairie BaPCod alors que la décomposition associée à cette méthode devrait en théorie bénéficier d'une telle parallélisation. Afin de ne pas pénaliser les approches par génération de colonnes utilisant BaPCod par rapport à celles utilisant Cplex, nous avons au Chapitre 2 limité le nombre de threads de Cplex à 6. Dans ce chapitre notre objectif est d'obtenir les meilleurs résultats possibles compte tenu des méthodes utilisées, le nombre de threads de Cplex ne sera donc pas limité.

3.1.4 Évaluation des solutions

Du point de vue d'EDF la qualité d'un planning d'arrêts doit être évaluée sur un ensemble de scénarios originaux représentant les futurs possibles de l'équilibre dans le système électrique français. EDF utilise des outils de type « simulateur » pour faire cette évaluation. EDF nous a fourni un tel outil, appelé **Checker**, que nous avons utilisé comme « juge de paix » pour comparer les plannings déterminés par nos approches dans les différentes configurations testées ici. Sur un scénario original donné et le planning d'arrêt nucléaire étant fixé, le Checker optimise le placement de l'ensemble des moyens de production. Cet outil peut ainsi être vu comme un évaluateur de plannings nucléaires, fournissant une borne minimale sur leur coût.

Nous désignons dans la suite par **Snowcap** l'outil que nous avons développé pour tester nos approches.

Le processus d'évaluation d'un planning est le suivant :

1. On commence par résoudre le problème considéré par Snowcap ;
2. On transmet ensuite le planning obtenu au Checker qui l'évalue sur 484 scénarios ;
3. Le coût moyen est enfin calculé et constitue le critère de qualité de la solution.

Ce processus est représenté figure 3.1.

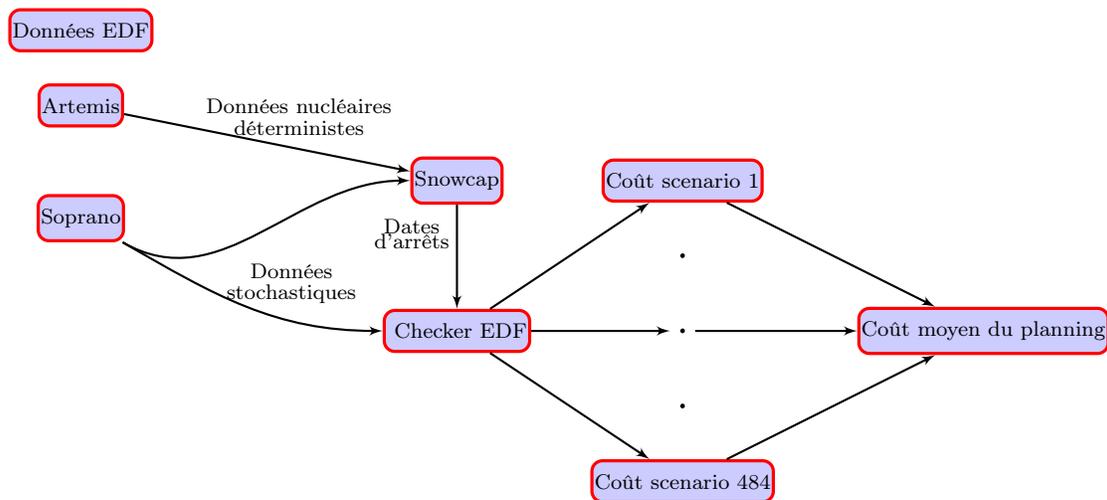


FIGURE 3.1: Processus d'évaluation d'une solution fournie par Snowcap

Bien que nous ayons rapproché autant que possible notre modélisation de celle du Checker, il subsiste néanmoins des différences liées aux hypothèses simplificatrices présentées au paragraphe 2.2.1 du Chapitre 2.

Le tableau ci-dessous résume ces différences :

Snowcap	Checker
Disponibilité nucléaire indépendante du scénario considéré (données Artemis)	Disponibilité nucléaire dépendant du scénario original considéré (données Soprano)
Discrétisation des niveaux de stock accessibles à la fin d'une campagne de production	Niveaux de stock accessibles en fin de campagne de production continus
Optimisation réalisée au pas de temps hebdomadaire	Optimisation au pas de temps infra-journalier
Modélisation exacte du stretch	Approximation linéaire du stretch

3.2. Passage à l'échelle sur les instances complètes

3.2.1 Résultats

Nous étudions les performances de nos différentes méthodes en fonction de l'augmentation du nombre de scénarios considérés. Les tests ont été réalisés sur cinq instances stochastiques de 96 scénarios originaux construites comme au Chapitre 2 mais comportant cette fois les 58 unités nucléaires. Le temps de calcul a été limité à 8h. Le tableau 3.1 présente la moyenne du gap entre la valeur de la solution entière obtenue et celle de la relaxation linéaire, cette dernière étant identique quelle que soit la méthode de résolution. Pour rappel, les méthodes ont toutes été appliquées aux variantes de la formulation (CMod), la variante utilisée est précisée dans les parenthèses.

Lorsque une méthode n'a pas obtenue de solution entière dans le temps imparti pour au moins l'une des cinq instances, l'indicateur « NoSol » apparaît dans la case correspondante. Pour chaque nombre de scénario considéré, le gap de la meilleure méthode est noté en gras.

A noter que dans le cas déterministe (un seul scénario) la méthode (OvfIP) trouve la solution entière optimale.

# Scénarios	OvfIP(CMod)	ColGen(CMod)	CutColGen(CModProj)	CutColGen(CModCumQ)
1	0,49 (solution optimale)	0,57	0,57	0,66
5	0,71	0,87	1,04	0,94
10	0,89	NoSol	1,37	1,61
15	NoSol	NoSol	1,74	2,45
20	NoSol	NoSol	2,25	2,57
24	NoSol	NoSol	1,96	2,62
32	NoSol	NoSol	2,22	2,76
48	NoSol	NoSol	NoSol	4.48

TABLE 3.1: Comparaison des gaps à la relaxation linéaire pour les différentes méthodes (temps limité à 8h)

L'approche de résolution sans décomposition (OvfIP) fournit de très bonnes solutions jusqu'à 10 scénarios. Mais comme nous l'avons vu au Chapitre 2, le temps de résolution direct de la relaxation linéaire augmente fortement avec le nombre de scénarios. A partir de 15 scénarios une telle approche ne permet plus de trouver de solutions entières réalisables dans les 8h imparties. Il en est de même pour la méthode (ColGen) dès 10 scénarios.

En revanche, les deux approches combinant générations de coupes et de colonnes permettent d'obtenir des solutions de bonne qualité jusqu'à 32 scénarios. Sur 48 scénarios, l'approche (CutColGen) sur (CModProj) ne permet plus de trouver de solutions entières. En effet, comme nous l'avons

vu au Chapitre 2 cette approche, utilisant la projection, souffre d'un overhead lié à la construction des coupes et à la mise à jour des sous-problèmes de pricing, comparée à l'approche utilisant des variables cumulatives Q. Le tableau ci-dessous présente le temps de résolution de la relaxation linéaire par ces deux approches sur 1 et 32 scénarios :

# scénarios	CutColGen(CModProj)	CutColGen(CModCumQ)
1	1h47min	2h42min
32	6h56min	3h07min

TABLE 3.2: Temps de résolution de la relaxation linéaire pour les approches de génération de coupes et de colonnes.

L'approche de résolution combinant génération de coupes et de colonnes suivie de l'heuristique (RestrictedMasterIP) permet de trouver des solutions ayant un gap à l'optimum inférieur à 5% pour les instances complètes d'EDF comprenant jusqu'à 48 scénarios.

Bien que le modèle (CModProj) fournisse les meilleurs résultats en général, celui-ci est très dépendant de la structure des instances et en particulier du nombre de coupes nécessaires en raison de la projection, ce qui entraîne une instabilité des temps de calcul. Ce constat nous a conduit à utiliser le modèle (CModCumQ) par défaut dans un cadre stochastique au-delà de 10 scénarios.

Analyse par le Checker EDF.

On utilise ici les 484 scénarios originaux d'entrée pour construire chaque instance stochastique correspondant au nombre de scénarios pris en compte. Le temps de calcul pour obtenir les plannings est toujours limité à 8h. Le tableau 3.3 présente le pourcentage de gain obtenu en moyenne sur les 484 scénarios originaux simulés par le Checker, par rapport au coût du planning obtenu en résolvant le problème déterministe à 1 scénario.

# Cluster	Méthode de résolution	Coût (%)
1	OvfIP	0,00
5	OvfIP	1,32
10	OvfIP	2,25
15	CutColGen(CModCumQ)	2,00
25	CutColGen(CModCumQ)	2,79
32	CutColGen(CModCumQ)	2,84
48	CutColGen(CModCumQ)	1,93

TABLE 3.3: Analyse par le Checker nucléaire des plannings obtenus

On constate que :

- La prise en compte de cinq clusters conduit déjà à un gain de 1.32% (soit de l'ordre de 50 millions d'euros) ;
- Le gain augmente avec le nombre de clusters pris en compte, pour s'approcher de 3% pour 32 clusters ;
- Le passage de la méthode directe (OvfIP) à la méthode heuristique de 10 à 15 clusters entraîne une diminution du gain, en cohérence avec les résultats présentés au tableau 3.1 ;

- Pour 48 clusters le gain diminue, ce qui s'explique par le gap plus important de la solution trouvée, là aussi en cohérence avec les résultats présentés au tableau 3.1.

Ces résultats démontrent l'intérêt d'une meilleure prise en compte des aspects stochastiques du problème, ce qui constituait l'un des objectifs principaux de nos travaux.

3.2.2 Étude de cas

La résolution à l'optimum des instances pour un et trois scénarios nous permet de comprendre l'apport de l'information stochastique. La figure 3.2 représente les deux plannings correspondants. L'abscisse donne la semaine considérée et l'ordonnée le nombre d'arrêts en cours pendant cette semaine. Il y a naturellement un plus grand nombre d'arrêts en cours sur les périodes d'été et que sur celles d'hiver, la demande sur ces dernières étant beaucoup plus forte. Les deux plannings présentent très peu de différences avant la semaine 80 mais diffèrent sur les automnes et hivers suivants.

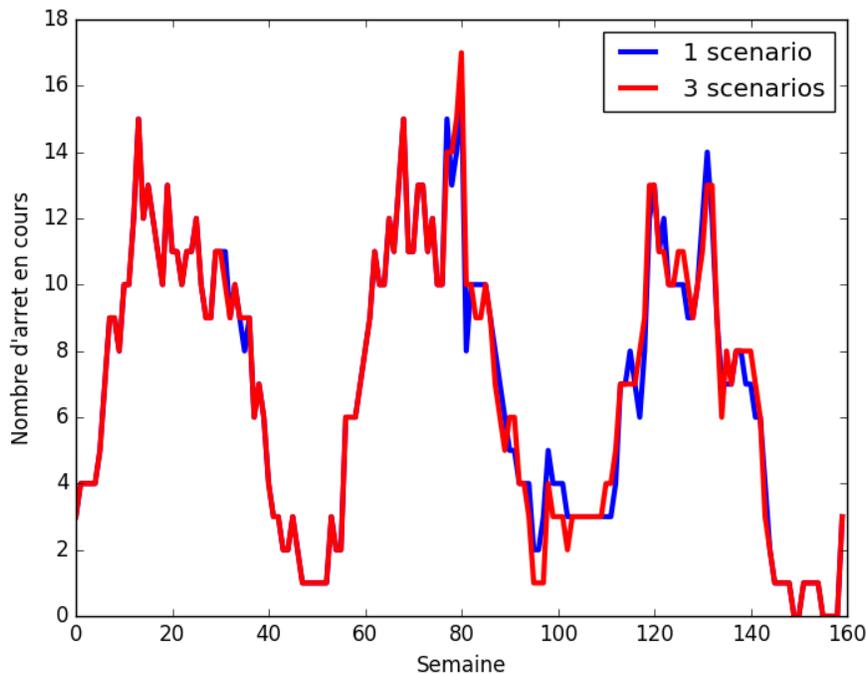


FIGURE 3.2: Comparaison des plannings obtenus en déterministe et sur 3 scénarios

Le gain mis en évidence par le Checker avec le planning déterminé sur trois scénarios est obtenu en partie (40%) en réduisant l'appel au groupe modélisant « la défaillance » i.e. les situations dans lesquelles le parc d'EDF et l'appel au marché Spot ne permettent pas satisfaire la demande.

Pour le planning déterministe, une défaillance se produit sur 101 des scénarios simulés, contre seulement 94 pour le planning trois scénarios. En calculant la moyenne de la défaillance hebdomadaire pour chaque planning (figure 3.3) on constate que le gain provient principalement du second hiver. En zoomant sur cette période et en mettant ce résultat en regard du nombre d'arrêts par semaine (figures 3.4 et 3.5), on constate que le planning obtenu avec trois scénarios permet de disposer d'une unité nucléaire supplémentaire en fonctionnement, ce qui explique le gain.

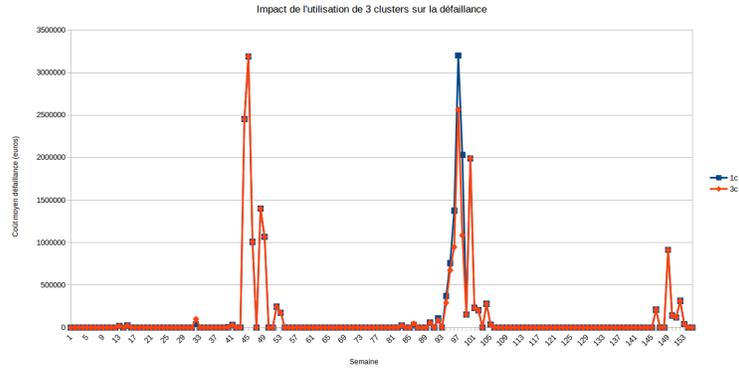


FIGURE 3.3: Défaillance moyenne hebdomadaire calculé par le Checker EDF respectivement sur le planning déterministe et le planning 3 scénarios

De façon générale, nous avons constaté que la part du gain associée à la réduction de la défaillance obtenue en augmentant le nombre de scénarios, se stabilise à une valeur de l'ordre de 1%, ceci dès 10 scénarios. Ce résultat montre que la meilleure prise en compte des aspects stochastiques améliore la qualité du planning indépendamment de ces situations exceptionnelles.

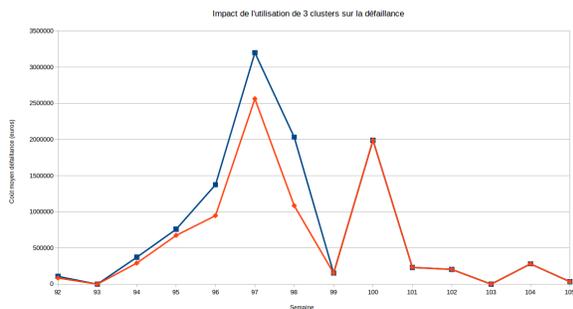


FIGURE 3.4: Défaillance moyenne semaine 96-98

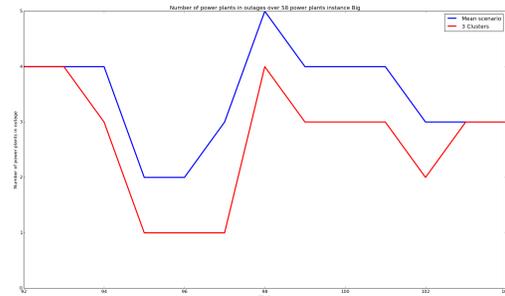


FIGURE 3.5: Nombre d'arrêts semaine 96-98

3.3. Résultats complémentaires et extensions

Dans cette section, nous nous intéressons aux trois points suivants :

- **La désagrégation du pas de temps à un niveau infra-hebdomadaire.** Cette désagrégation rend le problème extrêmement difficile à résoudre. Nous évaluons le gain potentiel qu'elle fournit et donnons des pistes pour améliorer la résolution dans ce cadre.
- **La prise en compte de l'aléa de disponibilité nucléaire** dont l'étude sera approfondie au Chapitre 4.
- **La prise en compte d'une recharge variable.** Nous étudions une évolution actuellement envisagée par EDF consistant à autoriser au premier niveau une variation discrète autour de la recharge de référence décidée ainsi qu'une variation «à la marge» décidée au second niveau et dépendant du scénario.

Nous ne présentons pas de résultats numériques sur les deux derniers points, qui constituent des pistes d'extension à la méthodologie.

3.3.1 Désagrégation du pas de temps

L’outil Artémis actuellement par EDF pour optimiser le planning utilise des données agrégées à la semaine. Or, la manœuvrabilité des unités nucléaires permet de tirer parti des variations infra-hebdomadaires de demande. Cette manœuvrabilité est d’autant plus importante dans l’hypothèse d’une forte pénétration des Énergies Renouvelables (ENR) —ce qui est le cas aujourd’hui— celle-ci conduisant à la multiplication des situations dans lesquelles la puissance disponible du parc nucléaire est supérieure à la demande résiduelle aux ENR, ce qui oblige certaines unités à moduler. Ces raisons nous ont conduit à tester les possibilités de résolution du problème, en désagrégeant plus ou moins le pas de temps hebdomadaire.

Afin de tenir compte des caractéristiques des différentes périodes de temps (jour/nuit, semaine/week-end, heures creuses/pleines) nous avons choisi d’appliquer une méthode d’agrégation à une dimension en utilisant la demande comme critère. Nous présentons ici une analyse des résultats obtenus sur les instances déterministes à 22 unités, réalisée en utilisant un algorithme de type Kmeans développé par [Wang and Song, 2011] pour désagréger le pas de temps hebdomadaire.

Le tableau 3.4 présente la durée de résolution de la relaxation linéaire en fonction du nombre de pas de temps par semaine.

Pas de temps / semaine	OvfLP	Colgen	CutColGen(CModProj)	CutColGen(CModCumQ)
1	56	26,28	175,28	278,04
7	82,76	99,44	1209,68	2569,32
14	79,72	242,56	2083,72	4019,28
21	99,12	588,6	2716,44	5820,2

TABLE 3.4: Durée de résolution de la relaxation linéaire en fonction du nombre de pas de temps par semaine

On constate que le temps de résolution par l’approche directe (OvfLP) augmente peu avec la désagrégation du pas de temps. Ces performances sont dues au preprocessing efficace de Cplex, éliminant 95% des contraintes du problème.

Par contre le temps de résolution par des méthodes utilisant un algorithme de décomposition augmente de manière très rapide.

Pour l’approche (ColGen), cette situation s’explique par le grand nombre de variables additionnelles présentes dans le problème maître restreint, point limitant de l’algorithme comme nous l’avons vu au Chapitre 2.

Pour les deux approches par génération de coupes et de colonnes, le tableau 3.5 montre une augmentation importante du nombre de colonnes et de coupes. Cette désagrégation pénalise donc l'ensemble des étapes de l'algorithme, nous conduisant à conclure qu'il n'est pas souhaitable d'utiliser de telles approches dans ce contexte.

Pas de temps / semaines	# ColGenIt	# Col	# CutGenIt	# Coupes
1	90	402	1557	91
7	566	879	2558	567
14	785	914	2550	786
21	882	941	2577	883

TABLE 3.5: Impact de la désagrégation sur (CutColGenProj)

La figure 3.6 montre l'impact de la désagrégation sur le temps de résolution du problème en nombres entiers (OvfIP).

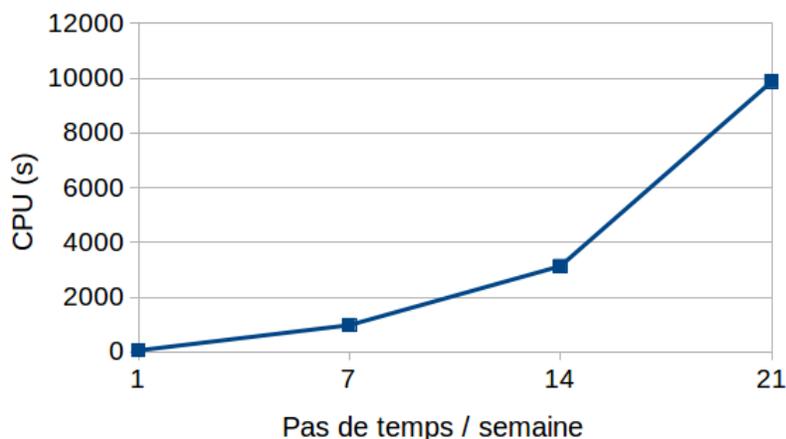


FIGURE 3.6: Impact de la désagrégation du pas de temps sur la résolution directe du problème en nombres entiers

Nous observons une augmentation rapide. Ceci est relativement surprenant puisque le temps de résolution de la relaxation linéaire, quant à lui, n'augmente que modérément. En analysant les logs du solveur on constate que c'est le temps d'obtention des premières solutions heuristiques et le nombre de nœuds évalués par l'algorithme de Branch & Bounds qui explique cette augmentation. Nous n'avons pas réalisé d'étude plus approfondie sur les performances de la désagrégation. Ce sujet pourra faire l'objet de travaux futurs.

Nous avons cependant obtenu des plannings avec une désagrégation à sept pas de temps par semaine sur l'instance complète, pour un temps de calcul limité à 24 heures. Nous avons approfondi l'analyse en développant une méthode de désagrégation simple, complémentaire à celle basée sur l'algorithme de Kmeans, consistant à regrouper des pas de temps consécutifs à la journée, . Le tableau 3.6 présente le gap fourni pas Cplex pour la solution entière obtenue, et le gain en pourcentage évalué par le Checker comparé au planning obtenu par la résolution de problème au pas de temps hebdomadaire. Les deux méthodes de désagrégation sont respectivement notées (Kmeans) et (Basic).

Méthode	Gap(%)	Gain Checker(%)
(Basic)	1.56	1.62
(Kmeans)	1.79	3.26

TABLE 3.6: Evaluation des plannings obtenus après désagrégation à sept pas de temps par semaine selon deux méthodes. Gains obtenus par rapport au planning calculé au pas de temps hebdomadaire.

Les solutions obtenues présentent un gap encore relativement élevé après une journée de calcul. La phase heuristique de Cplex prend environs dix heures dans chacun des cas et fournit une solution dont le gap est compris entre 2 et 3%.

En dépit de ces difficultés algorithmiques, on constate que la désagrégation du pas de temps à un niveau infra-hebdomadaire semble procurer un gain très significatif.

3.3.2 Prise en compte de l'aléa de disponibilité nucléaire dans les scénarios

Jusqu'ici, nous avons considéré la disponibilité des unités nucléaires comme une donnée déterministe. En réalité la disponibilité des unités nucléaires est soumise à un grand nombre d'incertitudes. La première manière de prendre en compte ces incertitudes est de faire dépendre la puissance maximale des unités nucléaires non seulement du pas de temps mais aussi du scénario considéré. Ce qui correspond intuitivement à imposer des bornes production maximale pour chaque pas de temps au second niveau :

$$p_{it}^{\omega} \leq \bar{P}_{it}^{\omega}$$

Cependant l'ajout de ces bornes dans le modèle que nous avons décrit au chapitre 2 n'est pas trivial. En effet dans celui-ci chaque arc de premier niveau impose des bornes sur la production incrémentale de chaque semaine pour chaque scénario de second niveau, afin d'atteindre le stock cible en fin de campagne de production. En particulier, pour les arcs représentant une campagne de production à pleine puissance ou de stretch, la production est fixée dès le premier niveau. Des valeurs de puissances maximales différentes entre le premier et le second niveau entraînent alors une infaisabilité du modèle. Deux pistes d'intégration de ces informations sont proposées.

Bornes relaxées au second niveau. La première consiste à calculer l'espérance de la disponibilité maximale de chaque unité nucléaire et à utiliser celle-ci pour construire le graphe et l'enveloppe de premier niveau. Au second niveau la borne imposée pour chaque semaine est le maximum entre l'espérance utilisée au premier niveau et la borne spécifique au scénario considéré.

On calcule pour chaque unité i et chaque pas de temps t la valeur :

$$\bar{P}_{it} = \frac{1}{\omega} \sum_{\omega \in \Omega} \bar{P}_{it}^{\omega}$$

que l'on utilise pour construire les graphes de premier niveau, puis on impose au second niveau la contrainte :

$$p_{it}^{\omega} \leq \max(\bar{P}_{it}, \bar{P}_{it}^{\omega})$$

Cette modélisation présente le défaut de ne pas prendre en compte les valeurs de production maximales inférieures à la moyenne. De plus, rien ne garantit que les bornes imposées au second niveau permettront de trouver une production respectant les enveloppes imposées par le premier niveau.

Bornes de production incrémentales par scénario. La seconde consiste à imposer uniquement la production des périodes en stretch au premier niveau et à calculer des bornes incrémentales de production dépendant du scénario pour les autres périodes. On construit le graphe de premier niveau en utilisant la disponibilité moyenne de chaque unité et en ne gardant que les arcs permettant de construire une enveloppe spécifique à chaque scénario.

Soit un arc de production (u, v) , hors stretch, correspondant au cycle k de l'unité i . Cet arc est défini par les valeurs de son stock initial, $F(u)$, et final $F(v)$. La quantité de modulation à effectuer durant la campagne de production associée à cet arc dépend ici du scénario considéré. Pour chaque scénario ω on calcul la différence entre la production maximale durant la période dans le scénario considéré et la quantité d'énergie à produire décidée par le premier niveau :

$$m^\omega(u, v) = F(v) - F(u) - \sum_{w=w_1(u,v)}^{w_2(u,v)} \bar{P}_{iw}^\omega$$

Si $MMA_{ik} \geq m^\omega(u, v) \geq 0$ pour tout scénario ω alors la campagne de production associée est réalisable et on construit une enveloppe de production pour chaque scénario de la même manière que dans la section 2.2.5.1 en utilisant dans chaque scénario la quantité de modulation $m^\omega(u, v)$. Une borne de production maximale dépendant du scénario peut alors être imposée au second niveau pour les arcs de production, celle-ci étant relâchée pour les arcs de stretch, soit :

$$p_{it}^\omega \leq \bar{P}_{it}^\omega (1 + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \delta_{(u,v)}) \quad \forall \omega, i, w, t \in w$$

A noter ici qu'un arc de production à pleine puissance avec arrêt en anticipation peut, pour certains scénarios, comporter une quantité de modulation non-marginale.

3.3.3 Recharge variable

Dans les résultats présentés jusqu'ici, la recharge a été considérée comme une donnée. Dans cette section nous nous intéressons à l'intégration dans notre méthodologie de la recharge comme variable de décision selon deux modalités, d'une part comme variable de décision robuste de premier niveau, et d'autre part comme décision de recours de second niveau.

Variation de la recharge robuste de premier niveau.

Dans notre modélisation, la valeur de la recharge est prise en compte au moment de la création des transitions du graphe d'état de premier niveau. Nous pouvons étendre ce graphe pour prendre en compte les différentes valeurs de recharge autorisées, à savoir plus ou moins 15% autour de la recharge nominale.

Par ailleurs, la mise en œuvre de cette fonctionnalité sur le parc d'EDF nécessite la prise en compte de contraintes interdisant la modification de la recharge nominale sur deux cycles consécutifs. Ces contraintes peuvent également être prises en compte dans le graphe d'état en interdisant la construction d'arcs faisant varier la valeur de la recharge lorsque l'arc utilisé pour débiter le dernier cycle le faisait déjà.

Enfin, l'introduction de la recharge variable oblige également à valoriser le stock final de chaque unité pour limiter les effets de bord en fin de période. En effet sans cette valorisation le modèle aura

tendance à diminuer les valeurs des dernières recharges pour économiser le coût correspondant. Les méthodes de valorisation du stock final présentées à la section 2.2.5.2 répondent à ce besoin. On peut remarquer que la méthode dite « heuristique » permet d'intégrer cette valorisation sans complexifier le modèle.

Recours sur la recharge au second niveau.

Dans notre modélisation la quantité d'énergie produite sur chaque campagne par une unité nucléaire est imposée par le premier niveau à la même valeur sur l'ensemble des scénarios traités. Dans cette section nous présentons une approche permettant d'introduire un recours sur la recharge au second niveau, afin de permettre d'adapter cette quantité d'énergie en fonction du scénario considéré, sans remettre en cause les décisions de premier niveau.

Soit f_{ik}^ω le recours sur la recharge au second niveau pour l'arrêt du cycle k de l'unité i . Nous supposons que la valeur absolue de celui-ci est bornée par une valeur r_{ik} donnée. En pratique, la mise en œuvre opérationnelle de cette fonction par EDF ne sera possible que si une variation de la recharge de premier niveau a déjà été décidé pour le cycle considéré.

Soit R_{iw} l'ensemble des variables de productions de l'unité i couvrant la semaine w et correspondant à une variation de la recharge décidée au premier niveau. Nous posons :

$$-\bar{r}_{ik} \sum_{(u,v) \in R_{iw}} \delta_{(u,v)} \leq f_{ikw}^\omega \leq \bar{r}_{ik} \sum_{(u,v) \in R_{iw}} \delta_{(u,v)} \quad (3.1)$$

Ces nouvelles variables dépendant du cycle k considéré, il faudrait indiquer les variables de modulation s_{iw}^ω et de production nucléaire p_{iw}^ω par le cycle k considéré et écrire un ensemble de contraintes (2.71) par cycle possible k .

Nous pouvons, sous ces hypothèses, ré-écrire la contrainte (2.71) en incluant cette nouvelle variable de décision :

$$s_{ikw}^\omega + p_{ikw}^\omega + f_{ikw}^\omega = \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cup Y_{iw} \cup Z_{iw}} \bar{p}_{(u,v)}(w) \cdot \delta_{(u,v)} + s_{ikw-1}^\omega \quad \forall i, k, w, \omega \quad (3.2)$$

Enfin nous bornons la variable f_{ikw}^ω afin d'assurer que la différence de production respectera la modulation maximale autorisée sur le cycle.

$$f_{ikw}^\omega + \sum_{(u,v) \in X_{iw} \cap Y_{iw}} m_{(u,v)} \delta_{(u,v)} \leq MMAX_{ik} \quad \forall \omega, i, k, w \quad (3.3)$$

3.4. Conclusion

L'objectif principal de cette thèse du point de vue industriel était de proposer une modélisation et une méthode de résolution du problème de placement des arrêts nucléaires efficaces sur des instances réelles.

Nous avons atteint cet objectif.

La méthodologie proposée permet d'obtenir la solution optimale des instances déterministe complètes en des temps de calcul compatibles avec les processus opérationnels d'EDF.

Elle permet de plus d'obtenir des solutions de très bonne qualité en prenant en compte jusqu'à 48 scénarios, ceci en combinant génération de coupes et de colonnes et en utilisant une heuristique.

La qualité de ces solutions a été évaluée par les outils industriels d'EDF, ceci mettant en évidence des gains potentiels très significatifs.

Nous avons également proposé un certain nombre d'extensions améliorant la modélisation et pouvant faire l'objet de travaux futurs : désagrégation du pas de temps, prise en compte de l'aléa de disponibilité nucléaire dans les scénarios, et variation de la recharge.

Chapitre 4

Approches robustes pour la gestion des aléas nucléaires

Dans les deux chapitres précédents nous avons proposé une modélisation du problème et testé une méthodologie permettant de le résoudre de manière efficace et pour un nombre significatif de scénarios de demande, de disponibilité des unités non-nucléaires et de prix/volumes d'échange sur le marché.

Cette approche permet de s'affranchir de certains points limitant l'outil actuellement utilisé par EDF :

- absence de garantie fournie sur la qualité de la solution ;
- obtention d'un minimum local ;
- impossibilité de s'affranchir d'un planning initial, ce qui rend difficile la réalisation d'études prospectives portant sur un parc différent du parc actuel.

Cette approche permet également, comme nous l'avons vu au chapitre 3, d'étudier l'impact sur le planning :

- de la distribution des aléas de demande, de prix et de profondeur de marché ;
- de la désagrégation du pas de temps à un niveau infra-hebdomadaire ;
- de la variation des recharges nominales ;
- des aléas affectant à la baisse et de manière limitée la puissance des unités nucléaires en campagne.

Cependant, elle ne prend pas en compte les aléas de *prolongation d'arrêts* et de *pannes brutales* durant les campagnes de production. Ces aléas peuvent fortement impacter le planning prévisionnel et conduire à modifier celui-ci pour des raisons logistiques, de réalisabilité, de coût, ou de sécurité. Face à cette problématique, on souhaiterait *stabiliser le planning* de façon à limiter les besoins de ré-optimisations futures des dates d'arrêts, et, idéalement, prendre en compte le levier que constitue ces ré-optimisations dans le calcul réalisé chaque mois.

Ce type de problèmes correspond au domaine de l'optimisation stochastique multi-étapes. Un ensemble de décisions de *premier niveau* doit être déterminé « dès maintenant » (*here-and-now*), alors que certains paramètres du modèle sont incertains et ne seront révélés que par la suite. Dans notre cas, ces décisions correspondent aux plannings d'arrêts des unités nucléaires et aux recharges effectuées durant ces arrêts, celles-ci devant être fixées alors que la demande, les coûts des unités non-nucléaires et la disponibilité de l'ensemble des unités de production ne sont pas connus.

Ces décisions robustes impactent ensuite les niveaux suivants, qui correspondent dans notre cas aux décisions de production (et des variations de recharge éventuelles) et aux ré-optimisations mensuelles du planning permettant la modification des dates d'arrêts planifiées pour faire face aux aléas subis.

Les décisions prises après que les aléas aient été révélés et pour s'y adapter sont appelées *décisions de recours*. Dans notre problème on peut distinguer deux types de tels décisions. D'une part, celles apparaissant dans la modélisation du problème résolu chaque mois, à savoir les productions et les variations éventuelles de recharge, et, d'autre part, celles exercées au fil des ré-optimisation futures, sur les variables de premier niveau elles-mêmes, à savoir les dates d'arrêts et les recharges, s'il s'avère que ces dernières ne sont plus optimales compte tenu de l'aléa révélé.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différentes approches permettant de rendre plus robuste le planning aux aléas de prolongation d'arrêts et de panne en campagne des unités nucléaire sans prendre en compte le processus de ré-optimisation, c'est-à-dire le recours sur les dates d'arrêts et les recharges elles-mêmes. Bien qu'idéalement on s'intéresse à la robustesse du planning face à l'ensemble des aléas, nous nous limitons dans ce chapitre à l'étude de la robustesse vis-à-vis de la disponibilité des unités nucléaires dans un cadre où la demande, la disponibilité des unités non-nucléaires et les prix/volumes d'échange sur le marché sont déterministes. Dans la suite de ce chapitre le problème ne prenant pas en compte d'incertitude sera appelé «problème nominal».

Le paragraphe 4.1 précise la problématique métier. Le paragraphe 4.2 présente un état de l'art sur l'optimisation robuste et les contraintes en probabilité, ainsi que les travaux antérieurs mené sur ce thème à EDF. Le paragraphe 4.3 introduit les méthodes et modèles présentés dans la suite du chapitre. Le paragraphe 4.4 rappelle le modèle sur lequel nous travaillons, et présente la méthode de génération des instances stochastiques que nous avons mise au point et utilisée pour tester les différentes approches que nous proposons. Le paragraphe 4.5 étudie la robustesse du planning face à l'aléa de prolongation d'arrêts, en cherchant le meilleur compromis entre satisfaction des contraintes de ressources entre arrêts et coût de cette robustesse. On s'appuie ici sur la possibilité de relâcher ce type de contraintes, cette relaxation étant en pratique exercée par les équipes opérationnelles d'EDF pour faire face aux aléas. Dans cette partie, nous proposons une modélisation basée sur des contraintes en probabilité que nous comparons à des approches se ramenant à la résolution d'un problème « bi-objectif ». Le paragraphe 4.6 s'intéresse à la robustesse du planning face aux aléas de prolongation d'arrêts et de panne en campagne, du point de vue de la contrainte d'anticipation maximale. Celle-ci ne pouvant être relâchée pour des raisons de sûreté, cette forme de robustesse s'apparente à une stabilisation du planning, limitant les déplacements d'arrêts futurs qui seraient nécessaires pour garantir cette contrainte. Le paragraphe 4.7 présente un premier travail théorique sur la modélisation d'une forme de robustesse permettant de se protéger des scénarios extrêmes en terme de coût de satisfaction de la demande. Enfin le paragraphe 4.8 présente nos conclusions et perspectives sur cette thématique de la robustesse.

4.1. Problématique métier

Nous cherchons dans cette partie à rendre le planning robuste aux aléas sur la disponibilité des unités nucléaires. Une indisponibilité peut provenir soit de la prolongation d'un arrêt d'une unité au delà de sa durée prévisionnelle, soit d'une baisse de puissance fortuite durant une campagne de production. Dans les deux cas, l'unité affectée ne peut produire pendant une période de temps donnée, conduisant à substituer sa production par une autre unité, en règle générale, plus

coûteuse. Cette perte de production entraîne également une quantité additionnelle de stock que nous appellerons « surplus ». Ce surplus de stock peut entraîner la violation de la contrainte d'anticipation maximale (bornant le niveau de combustible maximal autorisé au début d'un arrêt d'une unité). Enfin, la prolongation d'un arrêt mobilisera des ressources sur une période de temps supérieure à celle correspondant à l'arrêt prévisionnel, ce qui se traduira par une possible violation des contraintes de ressources entre arrêts.

Contrairement à l'incertitude prise en compte dans les chapitres précédents, les décisions de production ne constituent pas un recours permettant d'assurer la satisfaction de l'ensemble des contraintes de notre problème. Le recours utilisé en pratique par les équipes opérationnelles consiste à réorganiser le planning, ce qui présente un coût logistique et économique correspondant au calcul d'un nouveau planning, à la ré-affectation de ressources et à la re-négociation éventuelle de contrats avec les intervenants. Ce recours coûteux doit être évité autant que possible.

4.2. État de l'art

Dans la plupart des problèmes industriels certains paramètres sont incertains. Ces problèmes font intervenir un *ensemble d'incertitude* sur des données d'entrée. Cet ensemble d'incertitude représente des données qui ne sont révélées qu'une fois une partie ou l'ensemble des décisions prises. Il pourra être connu au travers d'une loi de probabilité et/ou posséder des caractéristiques structurales particulières (ensemble borné, convexe, ...). Lorsque l'on cherche à minimiser le coût moyen des solutions sur l'ensemble d'incertitude on parle d'*optimisation stochastique*. C'est par exemple ainsi que nous avons traité l'incertitude sur la demande dans le problème qui nous intéresse ici. En revanche, certains aléas peuvent avoir des conséquences si importantes qu'on ne cherchera pas à optimiser l'espérance du résultat, mais plutôt à se protéger de leur « pire » réalisation possible, ou encore à minimiser la probabilité de violation d'une contrainte. Les approches dominantes pour résoudre ce type de problèmes divergent par la manière de traiter cette incertitude et les décisions pouvant être prises une fois celle-ci révélée. Ces approches peuvent être classées en trois grandes catégories :

- L'optimisation *robuste statique* ou *sans recours* ne prend pas en compte la possibilité de modifier dans le future les décisions, et cherche à assurer que la solution reste réalisable pour un ensemble de réalisations possibles de l'aléa. Un état de l'art de ces approches est présenté section 4.2.2
- L'optimisation *robuste avec recours* prend en compte des décisions pouvant être exercées ou modifiées une fois l'incertitude révélée. Un état de l'art est proposé en section 4.2.3
- L'optimisation sous contraintes en probabilité repose sur l'idée que certaines réalisations extrêmes des aléas peuvent dégrader fortement la qualité de la solution ou bien conduire à l'absence de solution réalisable. On cherchera alors à déterminer des solutions satisfaisant les contraintes avec une probabilité suffisante, mais pas nécessairement dans tous les cas. Un état de l'art est réalisé en section 4.2.4

Nous commençons par un bref état de l'art sur l'*optimisation bi-objectifs*, dont nous utiliserons les principes dans nos travaux.

4.2.1 Éléments d'optimisation bi-objectifs

Il est important de noter que l'objectif des approches prenant en compte l'incertitude est de prendre « la meilleure décision » vis-à-vis de l'incertitude. En l'absence d'incertitude on cherchera

uniquement à minimiser la fonction objectif du problème qui, en règle générale (et en particulier dans notre cas), représente un objectif d'optimisation économique sous contraintes techniques. Une solution « robuste » cherchera également à minimiser les surcoûts et les éventuelles modifications ultérieures du planning provoquées par l'incertitude. Nous avons alors, dans ce type de problème, deux objectifs antagonistes : plus on cherchera à assurer la robustesse de notre solution et plus on risquera de dégrader la valeur économique de la solution trouvée.

La qualité d'une solution est alors subjective en fonction de la propension de l'utilisateur à accepter le risque. L'évaluation des solutions présentée dans cette partie sera réalisée par rapport aux deux critères d'efficacité économique et de robustesse aux aléas. L'objectif sera de trouver des solutions « intermédiaires » entre la solution ne prenant pas en compte l'incertitude qui aura toutes les chances de se trouver perturbée dans le futur et la solution la plus conservatrice, dont la valeur économique peut se trouver fortement dégradée. Nous aboutissons de manière naturelle à la notion de front de Pareto : une solution est dite Pareto-optimale s'il n'existe pas de solution améliorant strictement l'un des critères sans dégrader l'autre. L'enveloppe convexe de l'ensemble des solutions de Pareto projetée sur l'espace des coûts sera appelé *front de Pareto*.

Les méthodes les plus classiques pour traiter les problèmes bi-objectif consistent à se ramener à un problème mono-objectif :

- L'approche *somme pondérée* (weighted-sum) définit une nouvelle fonction objectif comme combinaison convexe des deux objectifs initiaux. Ce type d'approche a été étudié en détail dans la littérature après que [Zadeh, 1963] l'ait introduit en montrant qu'elle permettait d'obtenir des solutions Pareto-optimales. Ces approches présentent l'avantage de faire apparaître de manière directe l'équilibre entre les objectifs économique et robuste. Les poids sont, de plus, facilement interprétables dans un cadre opérationnel. Cependant, cette méthode souffre de plusieurs désavantages ([Das and Dennis, 1997]), à savoir l'impossibilité d'obtenir les solutions de Pareto se trouvant sur une partie non-convexe du front de Pareto et la distribution non-uniforme des solutions produites par une variation uniforme des poids de chaque objectif. Plus récemment, [Marler and Arora, 2010] ont étudié en détail l'interprétation des poids ainsi que la manière de coordonner les différents objectifs.
- A l'inverse, les approches du type ϵ -*contraintes*, introduites par [Haimes, 1971] n'optimisent que l'objectif « le plus important » alors que l'objectif secondaire est borné dans des contraintes additionnelles. On pourra alors prioriser l'aspect économique, en ajoutant simplement un critère de robustesse, ou bien à l'inverse, maximiser la robustesse en bornant la perte économique correspondante. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir accéder à l'ensemble des solutions Pareto-optimales en effectuant une variation systématique du paramètre ϵ . Cependant un mauvais réglage du paramètre ϵ pourra mener à un problème irréalisable.

4.2.2 Approches robustes sans recours

Les approches robustes sans recours considèrent que l'ensemble des décisions doivent être prises here-and-now, c'est-à-dire avant que l'incertitude ne soit révélée, et ne seront plus reconsidérées par la suite. On s'intéresse ici au problème linéaire suivant :

$$\min_x \max_{\xi} \sum_{j \in N} c_j x_j \quad (4.1)$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij}(\xi) x_j \leq b_i \quad i \in M \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad j \in N \quad (4.3)$$

où les coefficients $a_{ij}(\xi)$ appartiennent à un ensemble d'incertitude donné. Les incertitudes impactant les coefficients b et c ne sont pas prises en compte explicitement mais pourraient l'être en ajoutant des variables ou contraintes artificielles au modèle. Le modèle 4.1 sera appelé *la contrepartie robuste* du problème ne prenant pas en compte l'incertitude.

Une première approche pour résoudre ce type de problème a été introduite en 1973 par Soysters ([Soyster, 1973]) dans le cas où l'on suppose l'incertitude indépendante pour chaque contrainte. Cette approche propose de construire une solution qui reste réalisable pour toutes valeurs de données appartenant à un ensemble convexe, en résolvant le problème :

$$\min_{x_j \geq 0} \left\{ \sum_{j \in N} c_j x_j \mid \sum_i a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i, a_{ij} \in \kappa_{ij} = [\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}] \right\} \quad (4.4)$$

où \bar{a}_{ij} la valeur centrale de la variable a_{ij} et \hat{a}_{ij} la demi-amplitude de déviation maximale. Soyster a montré qu'en l'absence de recours le problème 4.4 est équivalent à celui pour lequel on considère la « pire » réalisation des coefficients ligne par ligne, plus précisément on se ramène au problème :

$$\min_{x_j \geq 0} \left\{ \sum_{j \in N} c_j x_j \mid \sum_j \max_{a_{ij} \in \kappa_{ij}} (a_{ij} x_j) \leq b_i, \quad x_j \geq 0, \forall i \right\} \quad (4.5)$$

Cette approche fournit des solutions garantissant une robustesse maximale mais dont le coût s'avère, en règle générale, bien plus élevé que celui du problème nominal. Les travaux ultérieurs ont cherché à obtenir un meilleur équilibre entre robustesse et qualité des solutions obtenues.

Ben Tal et Nemirovski ont proposé de restreindre l'ensemble d'incertitude au cas particulier d'une ensemble d'ellipsoïde ([Ben-Tal and Nemirovski, 1998]) pour traiter le cas d'une incertitude impactant plusieurs lignes de la matrice des contraintes et ont montré que dans le cas d'un problème linéaire, la contrepartie robuste est équivalente à un problème quadratique dont la taille est polynomiale par rapport aux données d'entrées, si c'est le cas pour le problème non-robuste.

En 2004, Bertsimas & Sim [Bertsimas and Sim, 2004] ont introduit un modèle moins conservatif pour le cas où l'incertitude est indépendante pour chaque contrainte en observant que, dans les cas réels, on ne cherche pas à se protéger contre le cas où tous les coefficients prendraient leur « pire » valeur, puisque ce cas est en règle générale très improbable. On introduit alors un *budget d'incertitude* Γ_i pour la contrainte i et on cherche une solution qui reste réalisable lorsqu'au plus Γ_i coefficients varient dans la contrainte i . La contrepartie robuste du programme en nombres entiers (4.18) est obtenue en remplaçant chaque contrainte par :

$$\sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j + \beta(x, \Gamma_i) \leq b_i$$

où $\beta(x, \Gamma_i)$ est appelé la *fonction de protection* associée à l'incertitude impactant les coefficients de la ligne i , dépendant du budget d'incertitude Γ_i , et est définie comme :

$$\beta(x^*, \Gamma_i) = \max_{|S| \subseteq N | S| \leq \Gamma_i} \bar{a}_{ij} x_j^* = \min_z \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j^* z_j \quad (4.6)$$

$$s.t. \sum_{j \in N} z_{ij} \leq \Gamma_i \quad \forall i \in M \quad (4.7)$$

$$1 \geq z_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in N \quad (4.8)$$

$\beta(x^*, \Gamma_i)$ représente la plus forte augmentation du membre gauche de la contrainte i lorsque la décision x^* est choisie et que au plus Γ_i coefficients dans la contrainte prennent leur plus forte valeur. Les paramètres Γ_i permettent de contrôler la robustesse de la solution : $\{\Gamma_i = 0 | \forall i\}$ signifie que l'on ne prend pas en compte l'incertitude et que l'on considère la contrainte nominale du problème, alors que une valeur $\{\Gamma_i = N | \forall i\}$ correspond en revanche à considérer le pire cas pour chaque coefficient de chaque contrainte ce qui revient à considérer la méthode de Soyster présentée précédemment.

Par dualisation de la fonction de protection, la contrepartie robuste du modèle utilisant le budget d'incertitude de Bertsimas & Sim est donnée par :

$$\begin{aligned} \min \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \Gamma_i \nu_i + \sum_{j \in N} \mu_{ij} &\leq b_i, \quad i \in M \\ -\hat{a}_{ij} x_j + \nu_i + \mu_{ij} &\geq 0, \quad i \in M, j \in N \\ \nu_i &\geq 0 \quad i \in M \\ \mu_{ij} &\geq 0 \quad i \in M, j \in N, \\ x_j &\geq 0 \quad j \in N \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cette contrepartie robuste comprend un nombre de variables et de contraintes qui est polynomial par rapport à la taille du modèle nominal. Il faut seulement pour cela que $\beta(x, \Gamma_i)$ soit exprimé comme un programme linéaire dont la taille est polynomiale par rapport au problème nominal. Cette méthode permet de trouver des solutions qui restent réalisables lorsque le nombre de coefficients qui changent est inférieur à Γ_i et donne également une probabilité de faisabilité lorsque cette condition n'est pas vérifiée.

Plus récemment, Matteo Fischetti et Michele Monaci ont remarqué que l'approche utilisant un budget d'incertitude ne permettait pas de contrôler le compromis entre optimalité et faisabilité. En particulier, même une protection contre un petit nombre de coefficients peut mener à une dégradation significative de la solution en comparaison de la solution du problème nominal alors même que dans la réalité certains recours auraient permis de gérer ces aléas. Leur approche, appelée *Light Robustness* ([Fischetti and Monaci, 2009]), cherche la solution « la plus robuste possible » parmi celles dont la dégradation de la fonction objectif par rapport au modèle nominal reste en dessous d'une valeur donnée. Plus précisément en partant de la contrepartie robuste du modèle avec budget d'incertitude, la contrepartie light robuste est donnée par :

$$\min \sum_{i \in M} \omega_i \gamma_i \quad (4.10)$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + \beta(x, \Gamma_i) - \gamma_i \leq b_i \quad \forall i \in M \quad (4.11)$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in M \quad (4.12)$$

$$\sum_{j \in N} c_j x_j \leq (1 + \Delta) z^* \quad (4.13)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \quad (4.14)$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad \forall i \quad (4.15)$$

Ici, les variables γ_i jouent le rôle d'éventuels recours possibles (par exemple dans notre problème : déplacements d'arrêts, recours éventuels sur la recharge au fil des ré-optimisations, relaxation des contraintes d'arrêts ...) permettant de gérer une infaisabilité provoquée par la contraintes robustes (4.11), on cherche alors dans la fonction objectif (4.10) à minimiser l'utilisation de ces variables artificielles. La présence des contraintes du problème nominal (4.12) assure que les variables artificielles ne sont utilisées que pour relâcher l'une des contraintes robustes et que la solution obtenue restera réalisable. La contrainte (4.13) limite la qualité de la solution «sacrifiée »à la robustesse par rapport à z^* qui est la valeur de la solution « optimale » du problème nominal. Le rôle du paramètre Δ est d'arbitrer entre qualité de la solution et robustesse aux aléas pris en compte.

L'un des aspects essentiels dans l'utilisation de ces approches est le paramétrage de Γ et de Δ . Dans leur article, Matteo Fischetti et Michele Monaci ont dans un premier temps paramétré le budget d'incertitude pour trouver le degré de robustesse permettant d'éviter toute infaisabilité avant de tester plusieurs valeurs de Δ possibles. De plus, il est nécessaire de connaître la valeur de l'optimum du problème nominal dans la contrainte (4.13). Compte tenu de la taille de notre problème, il ne sera pas possible dans les cas pratiques d'effectuer plusieurs calculs, mais une connaissance « métier » des coûts et violations attendus ainsi que la solution obtenue lors des optimisations réalisées aux mois précédents pourront fournir des valeurs approchées pour ces paramètres.

Si Fischetti et Monaci ont présenté la *light robustness* dans le cadre de l'extension d'une approche avec budget d'incertitude, l'ajout de contraintes robustes relâchées par des variables d'écart afin de contrôler le degré de robustesse est une méthode pouvant être exploitée dans un cadre plus large, et en particulier lorsqu'une même incertitude impacte plusieurs lignes de la matrice de contraintes (incertitude dite *column-wise*). On remplace cette fois-ci les contraintes incertaines par une contrainte ne prenant pas en compte l'incertitude (contrainte du problème nominal) et une contrainte "pire cas" relâchée prenant en compte la pire réalisation de l'ensemble d'incertitude pour la contrainte considérée :

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \quad (4.16)$$

$$\sum_{j \in N} \max_{a_{ij} \in \tilde{A}} (\tilde{a}_{ij} x_j) - \gamma_i \leq b_i \quad \forall i \in M \quad (4.17)$$

On peut voir ce problème comme un problème bi-objectifs (voir section 4.2.1) où le premier objectif

reste la fonction objectif initiale que l'on cherche à minimiser, à laquelle s'ajoute le critère de robustesse représenté par les variables d'écart γ .

4.2.3 Approches robustes avec recours

Contrairement aux approches sans recours vues dans la section précédente, les approches robustes avec recours ne supposent pas que l'ensemble des variables de décisions doivent être prises dès maintenant mais prennent en compte le fait que certaines d'entre elles ne seront prises qu'une fois l'incertitude révélée et que même celles qui sont prises dès maintenant pourront, dans la pratique, être modifiées pour faire face aux aléas rencontrés. D'un point de vue mathématique ces décisions seront modélisées par deux variables, une variable de décision de premier niveau et une autre d'ajustement au second niveau. Sans perte de généralité il est possible de supposer que l'incertitude n'impacte pas la fonction objectif et n'est présente que dans les contraintes (il suffit pour cela de définir une variable représentant la fonction objectif et de créer une contrainte bornant cette variable par la fonction objectif initiale).

On peut écrire le problème robuste avec recours sous la forme générique suivante :

$$\min_{x \in X} \sup_{\xi \in \Xi} \left(\min_{y(\xi) \in Y(x, \xi)} cx + dy(\xi) \right) \quad (4.18)$$

Où :

- x est l'ensemble des variables de décision devant être prises avant que l'incertitude ne soit révélée. Dans le cadre de la programmation linéaire en nombres entiers l'ensemble X s'écrit $X = \{x | Ax \leq b, x \in \mathbb{N}\}$
- Ξ est l'ensemble d'incertitude pris en compte
- $y(\xi)$ sont les décisions de recours prises une fois qu'une partie de l'incertitude ξ a été révélée. Dans le cadre de la programmation linéaire l'ensemble Y s'écrit : $Y(x, \xi) = \{y | T(\xi)x + W(\xi)y \leq h(\xi)\}$

Dans ce type de modèles, on prend en compte le fait qu'on pourra s'adapter à l'aléa subi par une décision corrective future. La résolution permet dès lors d'obtenir des solutions bien moins conservatrices que les approches sans-recours de la section 4.2.2. Cependant, les recours en nombres entiers rendent les problèmes de ce type extrêmement complexes à résoudre.

Dans le cas linéaires, [Ben-Tal and Nemirovski, 1999] ont introduit la notion de *Affine Adjustable Robust counterpart* ou *AARC*, pour laquelle on se limite à un recours continu ayant une dépendance affine avec l'incertitude, et démontré son efficacité pour des ensembles d'incertitude précis. La contrepartie AARC du problème 4.18 s'écrit :

$$\min_{x \in X} \sup_{\xi \in \Xi} \quad cx + d \left[y^0 + \sum_l \xi_l y^l \right] \quad (4.19)$$

$$s.t \quad Ax \leq B \quad (4.20)$$

$$T(\xi)x + W(\xi) \left[y^0 + \sum_l \xi_l y^l \right] \leq h(\xi) \quad (4.21)$$

où (y^l) sont des vecteurs représentant des *fonctions ou politiques de recours*. Le problème est alors ramené au cas statique puisque on détermine avant révélation de l'incertitude l'ensemble des variables x et des politiques de recours (y_l) . Ces politiques de recours permettent d'obtenir des solutions moins conservatives que dans le cas statique.

Pour les cas des recours discrets, les méthodes proposées réduisent a priori l'ensemble des décisions entières de recours disponibles. L'idée d'utiliser un ensemble de fonctions affines par morceaux au second niveau a été introduite par [Bertsimas and Caramanis, 2010]. Le problème prenant en compte le recours n'est alors pas plus difficile que le problème statique mais la difficulté provient du choix de représentation de la fonction de recours considérée.

Cette idée a alors été approfondie sous le nom de *k-adaptability* par [Hanasusanto et al., 2015] et [Subramanyam et al., 2017] en étudiant l'efficacité de l'approximation et en proposant des méthodes de reformulations et de partitions de l'ensemble d'incertitude.

Le problème se ré-écrit alors :

$$\min_{x \in X} \sup_{\xi \in \Xi} \min_{k \in \kappa} Cx \quad (4.22)$$

$$s.t \quad Ax \leq B \quad (4.23)$$

$$T(\xi)x + W(\xi)y^k \leq h(\xi) \quad (4.24)$$

Ici, la sélection des recours se fait au premier niveau en fonction des incertitudes prises en compte. L'ensemble d'incertitude Ξ peut éventuellement être généré dynamiquement en utilisant un algorithme de Branch & Bound où chaque branchement correspond à la prise en compte d'une incertitude supplémentaire. Ces nouvelles approches, prometteuses, sont résolues par des algorithmes de partitionnement de l'ensemble d'incertitude pour lesquels on génère à chaque itération la réalisation la plus coûteuses compte tenu des décisions de recours disponibles.

Les approches décrites dans cette section présentent un potentiel intéressant pour la prise en compte des recours sur les dates d'arrêts dans le problème traité dans cette thèse. Par exemple, la décision de recours en cas de violation d'une contrainte d'anticipation maximale est connue et consiste à repousser l'arrêt ; elle pourrait être modélisée dans ce cadre par une fonction fournissant le nombre de semaines de recul en fonction de l'aléa subi. Ces décisions de recours étant entières il faudrait étudier la manière de partitionner l'ensemble d'incertitude pris en compte.

4.2.4 Approche probabiliste

Introduites pour la première fois en 1958 par Charnes et Cooper [Charnes et al., 1958], les approches probabilistes cherchent à exploiter la connaissance de la loi de l'incertitude afin de fournir des solutions assurant le respect des contraintes avec une probabilité supérieure à une valeur $1 - \alpha$, où α est un paramètre d'entrée de la méthode. Ces approches ont fait l'objet d'un grand nombre d'études dans la littérature ([Prékopa, 2003]). Ces approches sont utilisées dans l'industrie, par exemple pour des problèmes de chaînes logistiques [Lejeune and Ruszczyński, 2007], de planning de production [Li and Li, 2015], de dimensionnement de réseaux [Bienstock et al., 2014].

Le modèle de base s'écrit classiquement :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j \in N} c_j x_j \\
& \mathbb{P} \left(\sum_{j \in N} a_{ij}(\xi) x_j \leq b_i(\xi) \quad \forall i \in M \right) \geq 1 - \alpha \\
& x_j \geq 0 \quad j \in N
\end{aligned} \tag{4.25}$$

On tolère dans cette approche la non-satisfaction des contraintes pour certaines valeurs de l'incertitude ξ correspondant à des cas extrêmes. On distingue bien le membre de droite de la contrainte initiale, $b_i(\xi)$, correspondant à la valeur que l'on cherche à atteindre (par exemple une demande ou un niveau de stock), du paramètre α permettant de ne pas prendre en compte les réalisations les plus extrêmes pouvant mener à un résultat trop conservatif. Cette approche prend tout son intérêt lorsqu'il est possible de linéariser la contrainte (4.25). Or dans celle-ci la probabilité porte a priori sur l'ensemble de la matrice des contraintes et on parle de *probabilité jointe*. Un cas plus simple se rencontre lorsqu'il est possible de montrer l'indépendance des différentes contraintes vis-à-vis de l'incertitude ξ , les contraintes probabilistes du modèle prennent alors la forme :

$$\mathbb{P} \left(\sum_{j \in N} a_{ij}(\xi) x_j \leq b_i(\xi) \right) \geq 1 - \alpha \quad \forall i \in M \tag{4.26}$$

Dans le cas où seul le second membre est incertain et la fonction de répartition $F_{b_i(\xi)}$ de $b_i(\xi)$ est connue, on peut linéariser cette contrainte de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i(\xi) \right) \geq 1 - \alpha \\
& \Leftrightarrow F_{b_i(\xi)} \left(\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \right) \geq 1 - \alpha \\
& \Leftrightarrow \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq F_{b_i(\xi)}^{-1}(1 - \alpha)
\end{aligned}$$

Dans notre application, cette technique sera utilisée pour linéariser un modèle de contraintes probabilistes pour les contraintes de ressources entre arrêts dans la section 4.5.3.

4.2.5 Travaux antérieurs

D'un point de vue théorique, les dates d'arrêts étant modélisées par des variables entières la prise en compte de recours est un problème très difficile comme nous l'avons vu dans les sections précédentes de cet état de l'art. Nous présentons ici les deux travaux antérieurs à celui de cette thèse ayant abordé cette problématique.

C. Pira ([Pira, 2015]) a poursuivi les travaux initiés par l'équipe du LIPN Paris XIII lors du Challenge ROADEF 2010 ([Rozenknop et al., 2013], [Wolfer-Calvo, 2018]). L'objectif de ces travaux est de prendre en compte le recours possible sur les dates d'arrêts, pour faire face à l'aléa sur leur durée impactant les contraintes de ressources entre arrêts. Leur méthode consiste à modéliser les

prolongations d'arrêts par un ensemble de scénarios, ajouter des variables de recours entières sur les dates d'arrêts dans chacun de ces scénarios, et pénaliser les écarts entre les dates d'arrêts de premier niveau et les décisions de recours sur ces dates. L'équipe du LIPN contourne la difficulté liée aux variables de recours entières en relaxant les contraintes d'intégralité de ces décisions, permettant d'appliquer une reformulation de Benders (voir 2.1.2). Cette reformulation peut ensuite être résolue par génération de coupes. Il est cependant difficile de modéliser l'information sur les prolongations d'arrêts par un ensemble suffisamment restreint de scénarios et de contrôler le prix de cette robustesse. Conscient de ces limitations, C. Pira propose alors l'utilisation de méthodes d'optimisation sans recours par budget d'incertitude. A notre connaissance, aucun résultat numérique de ces travaux n'a été rendu public, à ce jour.

N. Dupin ([Dupin, 2015]) a abordé plusieurs thèmes de recherche liés à la problématique de robustesse pour cette application. Comme l'équipe du LIPN, il s'intéresse dans un premier temps à la robustesse des contraintes de ressources entre arrêts face à l'aléa sur leur durée. L'étude débute par une modélisation robuste identique à celle du LIPN proposant d'utiliser un algorithme de génération de coupes sur des scénarios de prolongations d'arrêts. Des tests numériques ont été réalisés sur les instances fournies lors du Challenge. Face à des résultats peu probants, N. Dupin s'oriente sur des méthodes de robustesse sans recours. Il se concentre sur les contraintes intra-sites de ressources entre arrêts, prioritaires d'un point de vue opérationnel. L'approche proposée introduit des contraintes prenant en compte une prolongation forfaitaire des durées d'arrêts, et des variables supplémentaires permettant de relâcher ces contraintes. Le problème est ensuite résolu à l'aide d'une approche de type somme-pondérée (voir 4.2.1). Des résultats numériques ainsi qu'une analyse des fronts de Pareto obtenus, sur les instances du Challenge ROADEF sont présentés. L'auteur remarque que sur ces instances il existe des solutions dont le coût est « proche » de celui de la solution nominale et permettant de diminuer de manière significative le nombre de violations. Dans un second temps, N. Dupin s'intéresse à l'impact des prolongations d'arrêts sur la contrainte d'anticipation maximale. Il propose de générer des coupes à partir d'un ensemble de scénarios de prolongations d'arrêts. L'auteur ne présente pas de résultats numériques concernant ces derniers travaux. La prise en compte de la stabilité du planning au fil des ré-optimisations, par l'ajout d'un terme pénalisant les écarts à un planning initial donné, est également étudiée.

4.3. Présentation des méthodes investiguées

L'objectif de ce chapitre est d'investiguer des méthodes permettant de prendre en compte les aléas de prolongations d'arrêts et de pannes fortuites en campagne de production. Ces aléas peuvent impacter les contraintes de ressources entre arrêts, d'anticipation maximale et de satisfaction de la demande. Les méthodes développées doivent, de plus, pouvoir s'intégrer dans la méthodologie nous ayant permis d'obtenir les résultats du Chapitre 3. Compte tenu de la difficulté du problème et de l'état de l'art présenté ci-dessus, nous avons choisi d'investiguer en priorité les approches *robustes sans recours* et utilisant des *contraintes en probabilité*.

Une première étape, consistant en un travail de réflexion sur la problématique avec les équipes de la R&D d'EDF, a permis de formaliser de manière simplifiée les contraintes de ressources entre arrêts structurantes, et de développer un générateur d'instances « réalistes » de taille paramétrable. Un rappel du modèle élaboré lors du Chapitre 2 et les résultats de cette première étape sont présentés section 4.4.

Dans la section 4.5, nous nous intéressons à la robustesse vis-à-vis des *contraintes de ressources entre arrêts*.

Nous commençons par présenter une approche ajoutant des contraintes d'arrêts prenant en compte une prolongation forfaitaire de leur durée, avant de les relâcher par l'ajout de variables artificielles. Nous obtenons alors un problème bi-objectif dans lequel les variables artificielles ne peuvent être utilisées pour violer une des contraintes nominales du problème. Le contrôle du prix de la robustesse grâce aux méthodes de l'optimisation bi-objectif est formalisé.

Dans un second temps, nous proposons une approche utilisant des contraintes en probabilité. La structure particulière des contraintes entre les arrêts des sites à deux et quatre unités nous permet de linéariser la probabilité de violation d'une de ces contraintes grâce à l'introduction de variables additionnelles représentant le risque qu'un placement d'arrêt viole une contrainte. Nous proposons également une extension de cette approche aux contraintes de ressources entre arrêts du site à six unités comme une première étape de généralisation aux contraintes inter-sites (Annexe B).

Nous comparons nos différents modèles robustes pour l'obtention de solutions intermédiaires entre la solution nominale et la solution dite « pire cas », pour laquelle l'ensemble des arrêts subissent une prolongation forfaitaire. La dernière partie de la section 4.5 s'intéresse à l'impact de la variation de la demande sur la robustesse du planning.

La section 4.6 est consacrée à l'étude de la robustesse sur la *contrainte d'anticipation maximale* face aux aléas. Une approche par budget d'incertitude est proposée en considérant le surplus de stock du cycle courant ou des cycles précédents comme des coefficients incertains de la contrainte d'anticipation maximale. Le budget correspond alors au nombre de cycles consécutifs pris en compte. Nous combinons ensuite cette approche ce budget d'incertitude et une information probabiliste sur l'aléa. L'analyse des plannings obtenus montre que cette approche permet de contrôler efficacement le risque de ré-optimisation du planning.

Enfin la section 4.7 présente une approche par budget d'incertitude permettant de limiter le risque d'appel à des unités de production particulièrement coûteuses en cas d'indisponibilité fortuite d'une unité nucléaire. Nous ne présentons pas de résultats numériques sur cette approche.

4.4. Modèle, données et aléas

Cette section rappelle le modèle utilisé, présente notre générateur d'instances en comparant les caractéristiques des instances générées à une instance réelle d'EDF. Nous présentons ensuite la modélisation des aléas pris en compte.

4.4.1 Modèle utilisé

Nous travaillons dans cette partie sur des instances générées aléatoirement, tout en veillant à garder des instances présentant la même structure que les données industrielles. Ces instances générées nous permettent de nous affranchir à la fois de la complexité de gestion des données réelles mais également du biais lié au fait que nous ne disposons que d'un seul jeu de données réelles. Cela nous permettra également d'étudier dans quelle mesure certains aspects du problème (structure du parc nucléaire, hivers plus ou moins rigoureux) influent sur la qualité des solutions obtenues.

Nous considérerons le programme linéaire en nombres entiers correspondant au modèle utilisant les contraintes de conservation de modulation (modèle CMod) pour lier les décisions de premier niveau et la production de second niveau. La résolution sera effectuée par la méthode directe (OvFIP).

Nous rappelons ci-dessous les données et la formulation à laquelle nous avons abouti suite à l'étude effectuée dans le Chapitre 2 de cette thèse :

- Indices :
 - ◇ $w \in W$ semaines
 - ◇ $i \in I$ unités nucléaires
 - ◇ $k \in K$ cycles nucléaires
 - ◇ $j \in J$ unités non-nucléaires
 - ◇ $\omega \in \Omega$ scénarios
 - ◇ $(u, v) \in A_{ik}$ arcs correspondants à une campagne de production du cycle k de l'unité i
 - ◇ $c \in C$ contraintes de ressources entre arrêts
- Données d'entrées ou calculées :
 - ◇ D_w^ω demande totale pour la semaine w du scénario ω
 - ◇ C_{jw}^ω coût de production de l'unité non-nucléaire j pour la semaine w du scénario ω
 - ◇ U_{iw} production maximale de l'unité nucléaire i durant la semaine w dans l'ensemble des scénarios considérés
 - ◇ U_{jw}^ω production maximale de l'unité non-nucléaire j durant la semaine w pour le scénario ω
- Données des graphes de premier niveau
 - ◇ V_i (resp. E_i) ensemble des nœuds (resp. arcs) du graphe associé à l'unité nucléaire i
 - ◇ s_i (resp. t_i) source (resp. puits) du graphe correspondant à l'unité nucléaire i
 - ◇ A_{iw} ensemble des indices des arcs correspondant à une campagne de production de l'unité i , en cours durant la semaine w i.e. $\{(u, v) \in X_i \cup Y_i \cup Z_i \mid w_1(u, v) \leq w < w_2(u, v)\}$
 - ◇ O_{ik} ensemble des indices des arcs correspondant à un arrêt du cycle k de l'unité i
 - ◇ O_{iw} ensemble des arrêts de l'unité i en cours durant la semaine w
 - ◇ $\overline{P}_{(u,v),w}$ (resp. $\underline{P}_{(u,v),w}$) production incrémentale maximale (resp. minimale) durant la semaine w correspondant à l'arc de production (u, v) .
- Contraintes de ressources entre arrêts pour une contrainte c donnée
 - ◇ N_{cw} capacité de la contrainte
 - ◇ O_{cw} ensemble des indices des arrêts consommant une ressource de la contrainte c durant la semaine w
 - ◇ $S(c)$ (resp. $E(c)$) semaine d'activation (resp. désactivation) de la contrainte c
- Variables de décision
 - ◇ $\delta_{(u,v)}$ (binaire) décision au choix de l'arc (u, v)
 - ◇ $w_1((u, v))$ est la semaine de début de la période associée à (u, v) .
 - ◇ p_{iw}^ω (resp. p_{jw}^ω) production de l'unité nucléaire i (resp. non-nucléaire j) pour la semaine w du scénario ω .
 - ◇ s_{iw}^ω variables de consommation de modulation de l'unité nucléaire i à la semaine w et au scénario ω .

$$\min \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega, j, w} C_{jw}^{\omega} p_{jw}^{\omega} \quad (4.27)$$

$$\sum_i p_{iw}^{\omega} + p_w^{\omega} = D_w^{\omega} \quad \forall \omega, w \quad (4.28)$$

$$\sum_{(u,v) \in A_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w} \delta_{(u,v)} + s_{i,w-1}^{\omega} = p_{iw}^{\omega} + s_{iw}^{\omega} \quad \forall \omega, i, w \quad (4.29)$$

$$s_{iw}^{\omega} \leq \sum_{(u,v) \in A_{iw}} \sum_{w_1((u,v)) \leq w' \leq w} (\bar{P}_{(u,v),w'} - \underline{P}_{(u,v),w'}) \cdot \delta_{(u,v),w'} \quad \forall \omega, i, w \quad (4.30)$$

$$\sum_{(u,v) \in O_{cw}} \delta_{(u,v)} \leq N_{cw} \quad \forall c \in \mathcal{C}, w \in [S(c), E(c)] \quad (4.31)$$

$$\sum_{v \in V_i} \delta_{(u,v)} - \sum_{v \in V_i} \delta_{(v,u)} = 0 \quad \forall i, u \in V_i \setminus \{s_i, t_i\} \quad (4.32)$$

$$\sum_{v \in V_i} \delta_{(s_i,v)} = 1 \quad \forall i \quad (4.33)$$

$$\delta_{(u,v)} \in \{0, 1\} \quad \forall (u, v), i \quad (4.34)$$

$$0 \leq p_{iw}^{\omega} \leq U_{iw} \quad \forall \omega, i, w \quad (4.35)$$

$$0 \leq s_{iw}^{\omega} \quad \forall \omega, i, w \quad (4.36)$$

$$0 \leq p_{jw}^{\omega} \leq U_{jw}^{\omega} \quad \forall \omega, j, w \quad (4.37)$$

La contrainte (4.28) assure la satisfaction de la demande pour chaque semaine et chaque scénario. La contrainte (4.29) est une contrainte conservation de modulation. L'équation (4.30) borne la quantité de modulation comparée à la production maximale cumulée, elle est égale à zero à la fin de chaque campagne de production afin d'atteindre le niveau de stock ciblé. Les contraintes (4.31) sont des contraintes de ressources entre arrêts des différentes unités nucléaires. Enfin les contraintes (4.32) - (4.33) sont des contraintes de flots permettant d'assurer qu'un planning réalisable soit sélectionné pour chaque unité nucléaire.

4.4.2 Génération des données

Par soucis de simplicité, les instances générées sont déterministes au sens de la demande (un seul scénario), au pas de temps hebdomadaire, et à recharges fixées. Le problème réel étant très contraint et dépendant de nombreux paramètres notre objectif est dans un premier temps d'obtenir des instances réalisables dont les caractéristiques sont très proches des instances réelles.

4.4.2.1 Structure du Parc nucléaire :

- Le parc nucléaire est composé de sites de deux, quatre et six unités nucléaires. Chaque type de site possédant des contraintes spécifiques de ressources entre arrêts.
- Toutes les unités d'un même site nucléaire ont une puissance maximale identique. La valeur de cette puissance est déterminée par un tirage dont la probabilité correspond à la structure du parc actuel :
 - ◊ Sites à 2 unités
 - 1600 MW avec une probabilité de 25% et 1000 MW avec une probabilité de 75%

- ◇ Sites à 4 unités
1400 MW avec une probabilité de 25% et 1000 MW avec une probabilité de 75%
 - ◇ Sites à 6 unités
1400 MW avec une probabilité de 100%
- Les caractéristiques des unités liées au stock de combustible (AMAX, DPAM, MMAX, SMAX, R) ne dépendent pas du cycle. Les valeur de DPAM et MMAX sont constantes alors que celles de l'AMAX, SMAX et R sont obtenues par un tirage entre deux bornes correspondant aux valeurs maximale et minimale du parc actuel.
- Nous distinguons trois types d'arrêts : les arrêts pour simple rechargement (ASR) ayant une durée (hors possible prolongation) de cinq semaines, les visites périodiques (VP) de dix semaines et les visites décennales (VD) de vingt semaines. Il y a alternance des ASR et des VP pour une unité donnée et une VD remplace l'une des visites périodiques tout les sept cycles (ce qui correspond à environ 10 ans). De plus les unités d'un même site ont leurs visites périodiques planifiés pour le même cycle. En théorie les arrêts décennaux devraient être planifiés sur le même cycle pour l'ensemble des unités appartenant au même site, cependant il s'avère extrêmement difficile de générer des instances réalisables en respectant à la fois ce critère et les contraintes intra-site pour les sites comprenant quatre et six unités nucléaires. Pour ce type de site, nous déterminons l'index du cycle où la VD devrait se trouver mais planifions celui-ci sur le cycle précédent ou suivant avec une probabilité de un sixième pour augmenter la probabilité que l'instance soit réalisable.
- Le parc actuel comporte un site de six unités nucléaires, huit sites de quatre unités nucléaires et 10 sites de deux unités nucléaires. La structure du parc, définissant la structure des contraintes intra-sites est un aspect essentiel du problème. Lorsque l'on cherchera à évaluer l'impact d'autres facteurs, tels que la part du nucléaire dans le mix ou la structure de la demande, la structure sans site six unités et avec un nombre égale de sites à quatre et deux unités sera choisie par défaut.
- Les contraintes d'arrêts considérées seront :
 - ◇ **Contraintes intra-site couplantes** : les unités sont dites *couplées* deux à deux. Deux unités couplées partagent la même salle de contrôle ce qui induit une contrainte entre les arrêts de ces deux unités. On doit avoir un espacement minimal de deux semaines entre la fin de l'arrêt d'une unité et le début de l'arrêt de l'unité couplée avec celle-ci. A noter que cette contrainte d'unités couplée concerne l'ensemble des unités du parc, ainsi un site à deux unités n'aura que cette contrainte entre ces deux unités, les sites à quatre unités (respectivement six unités) comportes deux (resp. trois) couples d'unités comportant chacun cette contrainte en plus de contraintes spécifiques. La figure 4.1 représente cette contrainte, chaque ligne représente le planning d'une unité nucléaire, les zones vertes et marrons correspondent respectivement à des périodes de production et à des arrêts. La zone hachurée en marron représente les deux semaines nécessaires entre la fin de l'arrêt de la deuxième unité et le début de l'arrêt suivant de la première.
 - ◇ **Contraintes intra-sites pour les sites à 4 unités** : Un site quatre unités comporte deux couples de deux unités soumises à la contrainte couplante. L'ensemble des unités partagent également le matériel et le personnel du site. Il doit y avoir un espacement minimal de une semaine entre la fin d'un arrêt d'une unité et le début de l'arrêt d'une unité appartenant au même site mais n'étant pas couplée avec cette unité. La figure 4.2 représente un site quatre unités pour lequel les unités couplées sont numérotées 1-2 et 3-4. La contrainte intra-site est représentée par une zone hachurée en bleu à la fin de l'arrêt de l'unité 3.

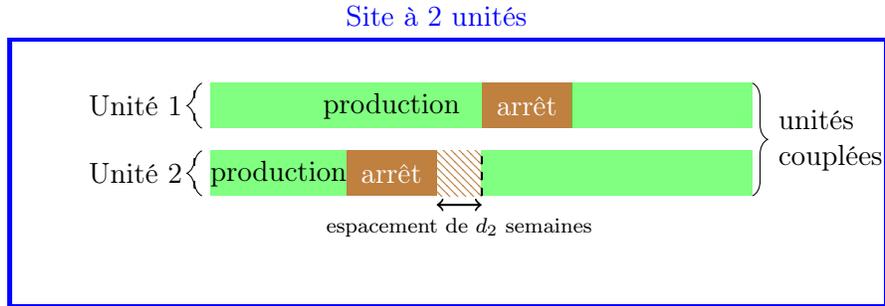


FIGURE 4.1: Contrainte couplante

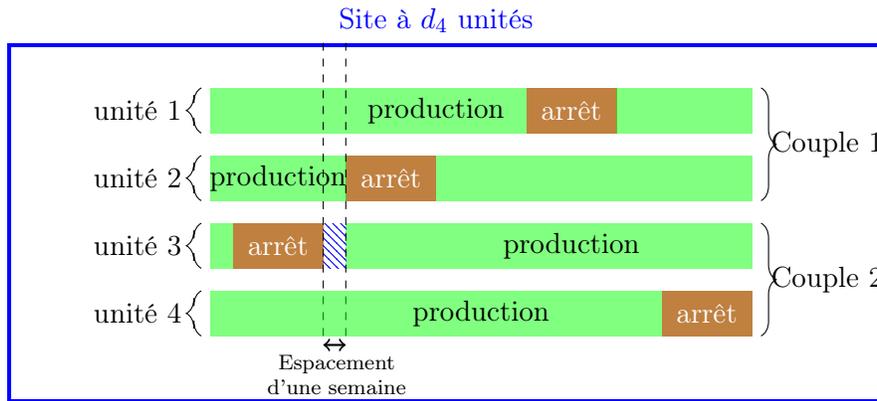


FIGURE 4.2: Contraintes intra-site quatre unités

- ◇ **Contraintes intra-sites pour les sites à 6 unités nucléaires** : Le site de six de unités nucléaires contient trois couples d'unités. De la même manière que précédemment, des contraintes logistiques imposent que au plus deux arrêts d'unités peuvent être simultanément en cours durant une semaine donnée. La figure 4.3 présente une illustration de cette contrainte.
- ◇ **Contrainte inter-sites** : On ne prendra en compte que la contrainte limitant le nombre total d'arrêts pour visite périodique en cours durant une semaine donnée. Au plus $[0.13I]$ unités nucléaires peuvent être en visite périodique ou visite décennale (arrêts d'une durée supérieure à 4 semaines) à chaque instant.

4.4.2.2 Demande

Pour les tests numériques l'objectif est d'obtenir des instances de petite taille afin de pouvoir tester plusieurs approches robustes. La demande présente une amplitude proportionnelle à la puissance totale maximale du parc nucléaire, notée PTN , une composante périodique modélisée par un cosinus et une part fixe. Elle est défini par la formule suivante :

$$D(w) = \left[\frac{\cos(2\pi \frac{w+5}{52} + \phi)}{5} + 0.95 + \text{offset}(w) \right] PTN * Cd$$

où :

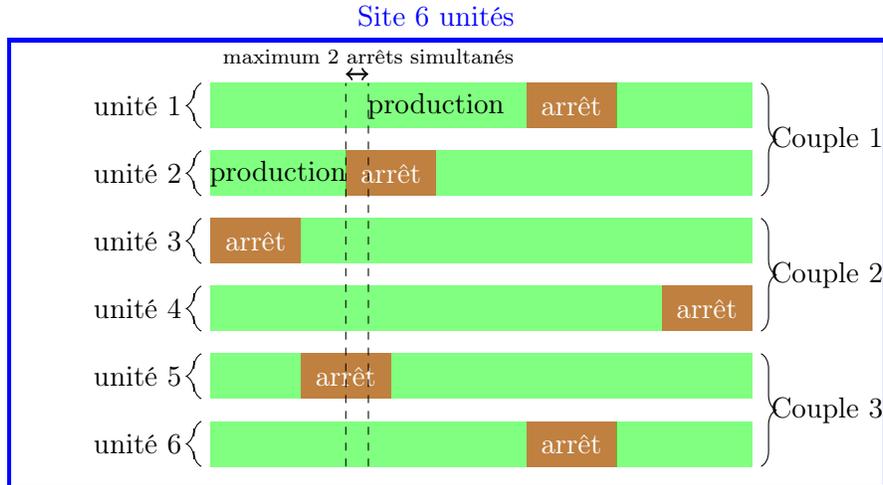


FIGURE 4.3: Contrainte intra-site six unités

- $\phi \in [0, 2\pi]$ est la phase initiale de l'instance considérée, la semaine correspondante est alors donnée par $w_i = 52 \frac{\phi}{2\pi}$
- $\text{offset}(w) \in [0, 0.1]$ correspond à la partie aléatoire de la demande pour la semaine w .
- Cd est un coefficient multiplicateur dont la valeur est fixée en l'initialisant à 1 puis en l'augmentant de 0.1 jusqu'à ce que l'instance soit réalisable.

La figure 4.4 présente une comparaison du ratio entre la demande et la puissance totale du parc nucléaire pour l'instance réelle de 58 unités nucléaires et pour une instance générée de 12 unités nucléaires.

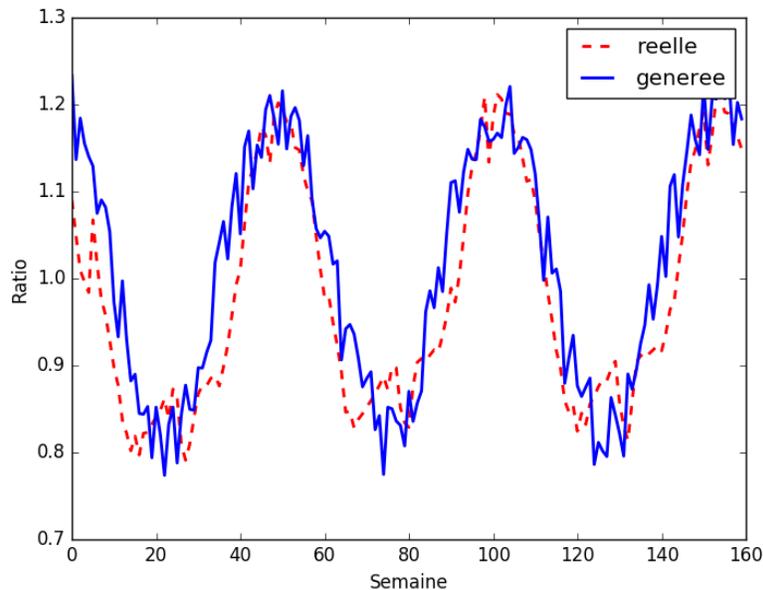


FIGURE 4.4: Comparaison entre demande réelle et générée

4.4.2.2.1 Unités non-nucléaires Les unités non-nucléaires correspondent à la fois aux unités physiques (hydraulique, fuel, charbon, centrales à cycles combinés, éoliennes, centrales photovoltaïques) et à la possibilité d’acheter/vendre sur le marché spot de l’électricité. Elles sont modélisées dans le jeu de données réelles d’EDF par 84 unités de production différentes. Il est possible de regrouper les unités correspondantes à des coûts du même ordre de grandeur. Nous avons choisi quatre groupes représentés chacun par une unité dans les instances générées :

- Les unités du premier groupe ont un coût moyen qui se situe en dessous de 20 euros/MWh. Elles représentent 13 des 82 unités, leur production maximale cumulée équivaut à 0.0816PTN. Elles sont caractérisées par une production plus faible durant la période allant de mars à octobre. Compte tenu de leur faible puissance, ces unités sont modélisées par une unité de coût constant égale à 2.5 euros/MWh et par une fonction de production maximale en créneaux de valeur 0.07PTN pour les semaines allant du début du mois de mars à la fin du mois d’octobre et de 0.09PTN sinon. La figure 4.5 compare la moyenne de la production maximale (figure de gauche) et du coût (figure de droite) de l’ensemble des unités considérées sur les 484 scénarios du jeu de données et dans une des instances générées.

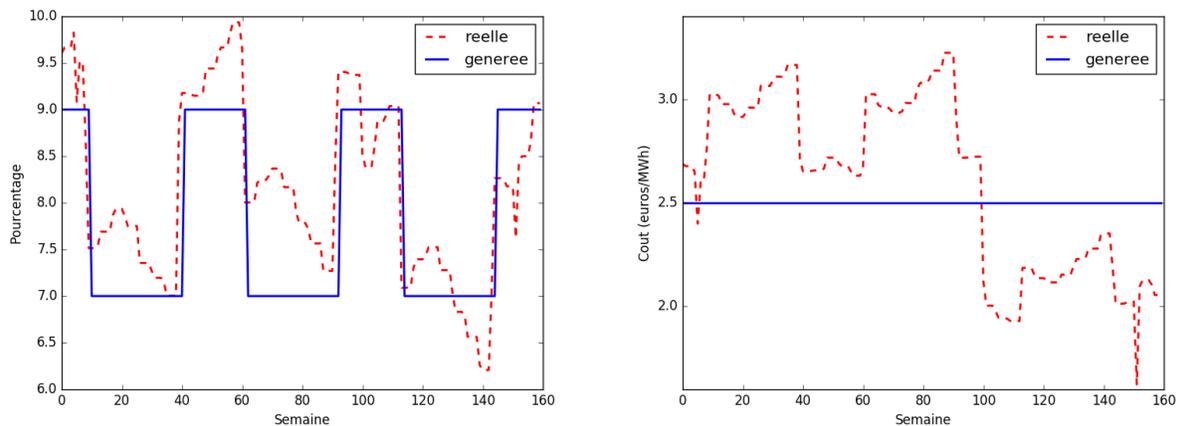


FIGURE 4.5: Groupe 1 comparaison de la production maximale et du coût.

- Les unités du second groupe ont un coût moyen qui se situe entre 20 et 100 euros/MWh. Elles représentent 38 des 82 unités, leur production maximale cumulée est proche de 0.4PTN, elles correspondent à certaines unités de production physique mais également à la possibilité d’acheter/vendre sur le marché spot de l’énergie. Ce marché a un coût saisonnalisé : le coût est plus grand en hiver du fait d’une demande plus forte alors qu’il est plus faible en été. Leur production n’est pas saisonnalisée mais est soumise à des variations brutales provenant de la disponibilité des unités de production sur le marché. La figure 4.6 présente une comparaison entre la production maximale (figure de gauche) et le coût moyen (figure de droite) des unités de ce groupe dans l’instance réelle et dans une de nos instances générées.

Remarque 3. *Les données réelles présentent une puissance maximale inférieure à la normale pour ce type d’unité pour la première année (visible pour les 40 premières semaines de la figure de gauche de la figure 4.6), ceci correspond au dispositif d’Accès Régulé à l’Électricité Nucléaire Historique (ARENH) que nous ne prenons pas en compte dans les instances générées*

- Les unités du troisième groupe ont un coût moyen de production qui se situe entre 100 et 240 euros/MWh. Ces unités présentent une production maximale en créneaux : 0.085PTN

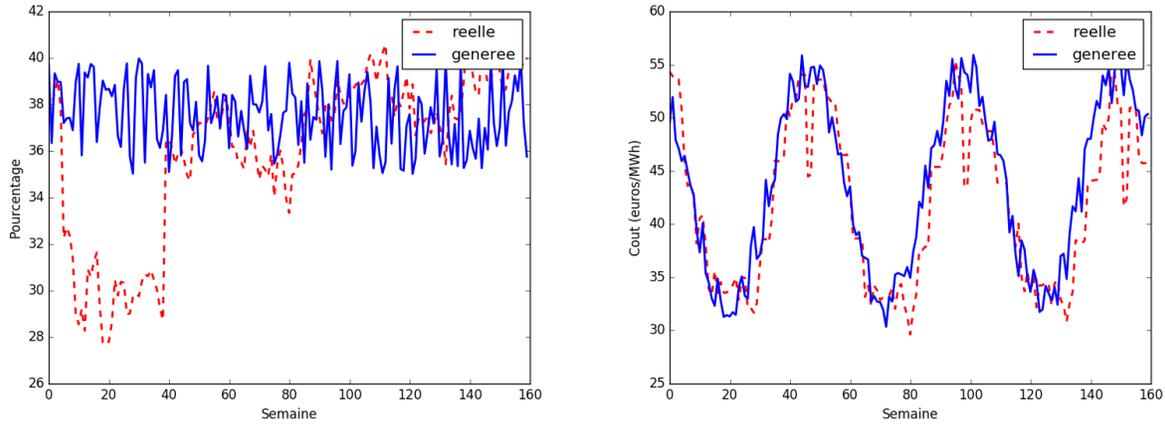


FIGURE 4.6: Groupe 2 comparaison production maximale et coût

d'Octobre à Février et 0.015PTN le reste du temps. Le coût de ces unités est non-périodique et peut subir de fortes variations ponctuelles que nous ne prendrons pas en compte, le coût sera fixé à 120 euros/MWh.

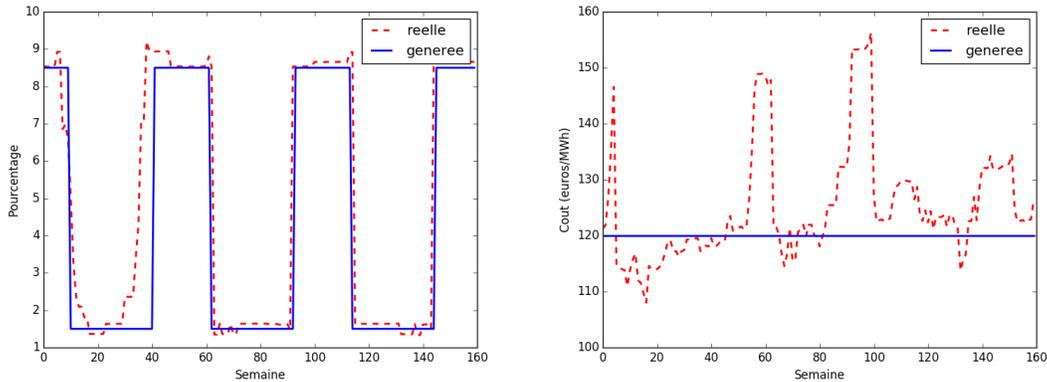


FIGURE 4.7: Groupe 3 comparaison production maximale et coût.

- Enfin les unités ayant un coût moyen supérieur à 240 euros/MWh seront uniquement modélisées par le groupe de défaillance. Il possède une puissance infinie et un coût de 3000 euros/MWh.

4.4.3 Modélisation des aléas

L'arrêt d'une unité nucléaire est une opération industrielle complexe qui représente un problème d'optimisation en lui-même, la valeur exacte de la durée d'un arrêt n'est donc pas connue précisément et peut être soumise à des aléas. Chaque arrêt possède une durée nominale, déterminée par la durée prévisionnelle des opérations prévues pendant celui-ci. Une fois l'arrêt commencé, des aléas peuvent survenir, pendant la réalisation effective de ces opérations, entraînant une prolongation de sa durée prévisionnelle. Cette prolongation peut directement entraîner la violation des contraintes de ressources entre arrêts (voir section 2.2.4). Cet aléa est modélisé à EDF par une loi exponentielle tronquée afin d'éliminer les valeurs aberrantes (voir ci-dessous pour une description détaillée).

La disponibilité en campagne des unités nucléaires peut quant à elle être affectée par des «arrêts fortuits» qui se matérialisent par des variations brutales à la baisse de leur puissance maximale disponible. Cet aléa est modélisé à EDF par un processus de Markov au pas de temps horaire (voir ci-dessous pour une description détaillée). La robustesse face à ces aléas des contraintes de stocks nucléaires est très importante, à la fois pour des raisons économiques (atteindre le stretch maximal avant l'arrêt est toujours coûteux, l'unité ne pouvant plus produire jusqu'à l'arrêt) et pour des raisons de sûreté (les contraintes d'anticipation maximale à l'arrêt sont considérées comme «non-négociables» auprès des Autorités de Sûreté). Voici l'ensemble des contraintes du modèle pouvant être impactées par ces aléas :

- Les contraintes d'ordonnancement intra et inter sites modélisées par les contraintes 4.31. Les approches robustes pour cette contrainte seront développées dans la section 4.5.
- La contrainte d'anticipation maximale prise en compte au travers des graphes d'états. La prolongation d'un arrêt a pour conséquence locale sur une unité une augmentation de son stock, appelé «surplus» dans la suite. Ce surplus peut alors se répercuter sur les cycles suivantes et entraîner la violation d'une contrainte d'anticipation maximale. Les approches pour rendre cette contrainte robuste seront présentées dans la section 4.6.
- En ce qui concerne la contrainte de satisfaction de l'équilibre offre/demande globale c'est le volume total d'énergie nucléaire rendu indisponible pour cause de prolongations d'arrêts ou de pannes fortuites en campagne qui importe, et non que ce soit une unité particulière qui soit en prolongation d'arrêt ou en panne à un instant donné. Une approche pour robustifier cette contrainte sera présentée dans la section 4.7.

A noter que la robustesse aux aléas vis-à-vis des contraintes concernant le stock prime en général sur la robustesse vis-à-vis des contraintes de dates et de ressources sur les arrêts qui peuvent être plus facilement relâchées. Les aléas considérés sont les prolongations d'arrêts et les arrêts fortuits durant la campagne de production :

- Chaque arrêt pourra subir une prolongation de sa durée avec une probabilité $p(e)$ fixée. Nous supposons les prolongations d'arrêts indépendantes que ce soit entre différents cycles de la même unité nucléaire ou entre différentes unités nucléaires. Si une prolongation de l'arrêt se produit, elle est modélisée par une loi exponentielle d'espérance σ tronquée à cette valeur, la valeur de σ est une donnée de l'instance considérée. Cette troncature se justifie par le fait que dans la réalité, plus la prolongation d'un arrêt durera et plus on allouera de ressources pour la terminer. La fonction de densité de la distribution associée est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 0 & \text{si } t \leq 0 \\
 f(t) &= \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{t}{\sigma}} & \text{si } 0 < t < \sigma \\
 f(\sigma) &= e^{-1} \\
 f(t) &= 0 & \text{si } t > \sigma
 \end{aligned}$$

- Les arrêts fortuits en campagne de production sont modélisés par une chaîne de Markov comportant trois états : en marche, arrêt court et arrêt long. Au début de chaque campagne de production (et une fois la prolongation éventuelle de l'arrêt précédent prise en compte) la chaîne débute dans l'état «en marche». Une transition a lieu au pas de temps horaire avec une probabilité d'entrée en arrêt court « p_c », d'entrée en arrêt long « p_l » et de rester en marche « s_r ». En arrêt court, la probabilité de revenir en marche sera de « r_c » et celle de rester en arrêt court sera de « s_c ». En arrêt long, la probabilité de sortie sera deux fois inférieure. Une illustration graphique de la chaîne de Markov est présentée en figure 4.8.

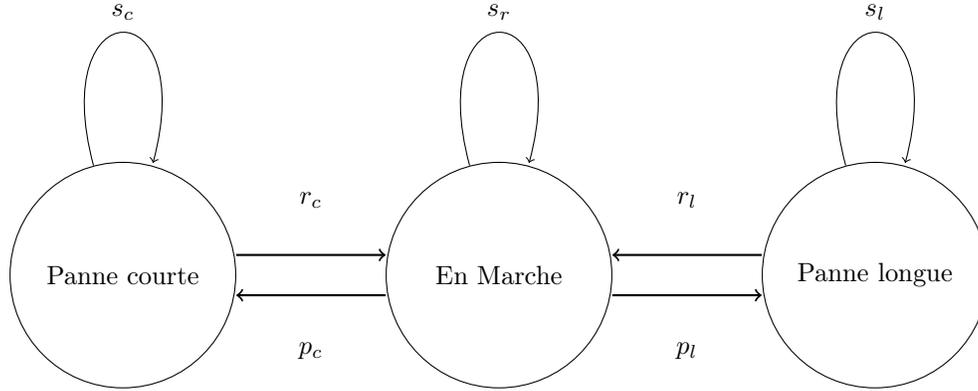


FIGURE 4.8: Chaîne de Markov pour les arrêts fortuits en campagne

4.5. Robustesse aux prolongations d'arrêt pour les contraintes d'arrêts

Il est important de noter que les productions ne constituent pas des recours exploitables, pour satisfaire les contraintes d'ordonnancement et de ressources pesant sur les arrêts, face à l'aléa subi sur leur durée. Dans le processus opérationnel actuel, ([Gevret, 2018]) la robustesse sur ces contraintes est obtenue en sur-évaluant la durée réelle des arrêts, ceci correspond à une approche sans recours « pire cas » de type [Soyster, 1973] connue pour être trop conservatrice. Un recours possible est de déplacer les arrêts. Cependant introduire ce type de recours, exercé dans la pratique au fil des ré-optimisations mensuelles du planning, est très difficile dans un problème de grande taille tel que celui-ci. En revanche puisque ces contraintes sont d'ordres logistique et économique, elles peuvent être relâchées dans la pratique moyennant un surcoût.

L'outil actuel utilisé par EDF relâche d'ailleurs certaines de ces contraintes au besoin. Il est alors naturel de chercher des solutions intermédiaires entre la solution du problème ne prenant pas en compte les prolongation, que nous appellerons solution nominale, et la solution la plus conservatrice correspondant à la résolution du problème dans lequel l'ensemble des arrêts d'une unité sont prolongés de la durée maximale de prolongation σ . Nous n'avons pas de garantie que ce second problème soit réalisable, cependant il est possible d'obtenir la solution réalisable la plus conservatrice en résolvant le problème pour lequel la durée de chaque arrêt est étendue de la durée maximale σ , mais pour lequel il est possible de relâcher une contrainte d'arrêt à un coût extrêmement élevé. La solution de ce problème sera appelée « solution pire cas ».

La recherche d'une solution ne prenant pas en compte la pire réalisation de l'ensemble d'incertitude mais seulement une partie de celui-ci fait écho aux approches utilisant un budget d'incertitude. Malheureusement, dans le cas d'une incertitude impactant plusieurs lignes de la matrice des contraintes et en l'absence de recours, ce problème revient à considérer la pire réalisation de chaque coefficient d'une ligne donnée ([Soyster, 1973]). En revanche, il est toujours possible d'utiliser la distribution supposée des prolongations d'arrêts pour développer une approche utilisant des contraintes en probabilités, ce que nous ferons dans la section 4.5.3, ou d'utiliser une approche basée sur la light robustness introduite par [Fischetti and Monaci, 2009] en dupliquant les contraintes de ressources nominales avant de les relâcher par des variables artificielles représentant les éventuels recours dis-

ponibles, à savoir ici la relaxation de la contrainte considérée. La section 4.5.2 introduira ce type d'approches et développera les possibilités de contrôle du prix de la robustesse tel qu'il a été introduit dans [Bertsimas and Sim, 2004]. Nous débutons cette section par une étude de cas afin de comprendre la structure du problème robuste considéré.

4.5.1 Étude de cas : site quatre unités

Nous présentons dans cette section une étude de cas réalisée sur une instance générée à un site nucléaire de quatre unités. La figure 4.9 (a) représente le planning nominal (sans prise en compte de la robustesse) obtenu pour ce site. Chaque ligne correspond au planning d'une unité donnée, les parties vertes correspondent aux périodes de production et les parties noires aux arrêts auxquels on a ajouté les durées d_2 et d_4 de distance entre arrêts nécessaires pour satisfaire les contraintes intra-site couplantes et intra-sites. Ce planning est réalisable pour le problème nominal puisque aucun chevauchement de bandes noires ne se produit. Ici puisque l'on considère des prolongations d'arrêts et non leur déplacement le pire cas possible est facilement identifiable et correspond à la prolongation de l'ensemble des arrêts de la valeur σ (figure 4.9 (b)). Ces prolongations entraîneraient dans ce cas précis la violation de quatre contraintes intra-sites couplantes et intra-site (représentée par des lignes verticales rouges sur la figure (figure 4.9 (c)) pouvant entraîner un sur-coût important ou nécessiter de modifier le planning.

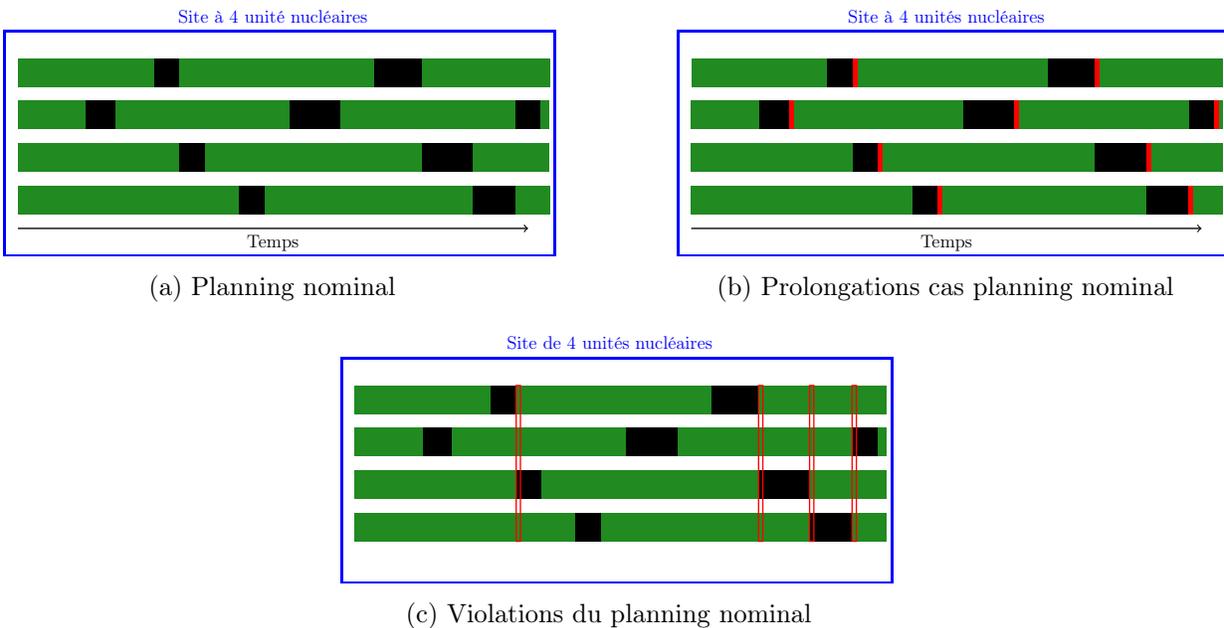
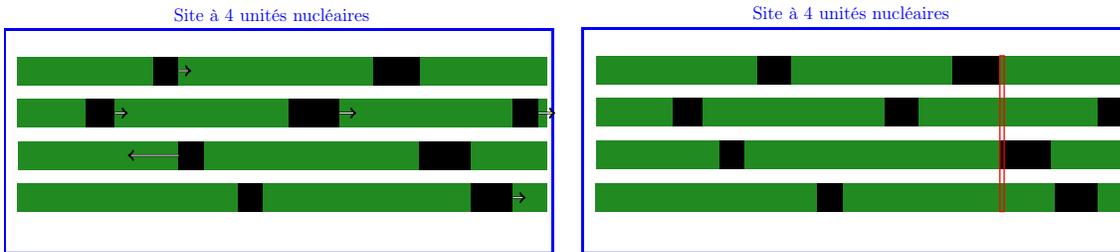


FIGURE 4.9: Étude de cas 4 unités planning nominal

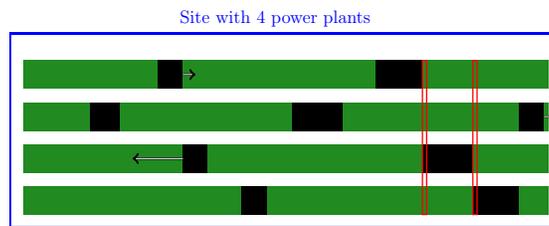
La méthode opérationnelle actuelle consiste à ajouter la durée de prolongation maximale σ à la durée de chaque arrêt. Or dans ce cas précis, le problème possédant des durées étendues n'est pas réalisable. Le mieux que l'on puisse faire est de réaliser les mouvements représentés 4.10 (a), ce qui mène au planning représenté figure 4.10 (b) possédant toujours une violation. Dans la pratique l'outil opérationnel commencera par identifier cette contrainte et par demander à l'utilisateur de la relâcher. Le problème est que cette solution est très conservatrice. En effet la figure 4.10 (c) présente une solution intermédiaire obtenue par l'une des méthodes présentées dans la suite de cette section

et dont le "prix payé pour la robustesse", c'est à dire l'augmentation de coût du planning comparé à la solution nominale, est d'à peine un tiers de celle de la solution la plus conservative alors qu'elle permet déjà de supprimer deux possibles violations.



(a) Modification du planning par la méthode opérationnelle

(b) Violations planning opérationnel



(c) Solution intermédiaire

FIGURE 4.10: Solution intermédiaire

4.5.2 Approches basées sur l'utilisation de variables artificielles

L'absence de recours rend trop conservatrice l'utilisation d'un budget d'incertitude ici. En effet, l'incertitude représentée par une prolongation d'un arrêt peut impacter plusieurs lignes de la matrice des contraintes. En l'absence de recours, une approche par budget d'incertitudes revient à considérer le pire cas pour chacune des contraintes ([Soyster, 1973]).

Nous avons expérimenté une approche basée sur le principe de *light robustness* en dupliquant les contraintes d'arrêts, ajoutant les variables correspondant à la prolongation forfaitaire des arrêts dans ces nouvelles contraintes puis en relaxant ces contraintes par des variables artificielles. On obtient un problème bi-objectif combinant l'objectif économique représenté par la fonction objectif initiale et l'objectif robuste représenté par les variables artificielles. Dupliquer les contraintes permet d'assurer que les variables artificielles ne sont pas utilisées pour violer une des contraintes du problème nominal mais bien pour représenter une possible violation d'une de celles-ci.

Nous expérimentons ici les deux types d'approches décrites dans la section 4.2.1, celle de type sommes pondérée en pénalisant l'utilisation des variables artificielles et celle du type ϵ -contrainte en choisissant l'objectif économique ou robuste comme objectif principal :

- Somme pondérée (Pen) : pénalisation de l'utilisation des variables artificielles dans la fonction objectif avec un coût RP en euros pour la violation d'une contrainte :

$$\min \sum_{jw} C_{jw}^{\omega} p_w^{\omega} + RP \sum_{c \in \mathcal{C}} \gamma_c \quad (4.38)$$

$$s.t \quad (4.28) - (4.37)$$

$$\sum_{(u,v) \in c \cap O_{i,w-2}} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in c \cap O_{i,w} \setminus O_{i,w-2}} \delta_{(u,v)} - \gamma_c \leq N_c \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad (4.39)$$

- ϵ -contrainte privilégiant l'aspect économique (*eps*) : le paramètre du modèle est le nombre de violations autorisé, cette approche peut-être vue comme une approche simplifiée de l'approche probabiliste présentée dans la section suivante car elle ne permet pas de prendre en compte plusieurs valeurs de prolongations simultanément :

$$\min \sum_w C_w^{\omega} p_w^{\omega} \quad (4.40)$$

$$s.t \quad (4.28) - (4.37)$$

$$\sum_{(u,v) \in c \cap O_{i,w-2}} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in c \cap O_{i,w} \setminus O_{i,w-2}} \delta_{(u,v)} - \gamma_c \leq N_c \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad (4.41)$$

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \gamma_c \leq \epsilon \quad (4.42)$$

- ϵ -contrainte privilégiant la robustesse (*light*) qui correspond également à l'approche de *light robustness* introduite par Fischetti et Monaci pour laquelle l'ensemble d'incertitude est un ensemble convexe tel qu'il a été considéré par Soyster, le paramètre Δ est un taux de surcoût autorisé par rapport à la valeur de la solution nominale et z^* est une évaluation de cette

valeur :

$$\min \sum_{c \in \mathcal{C}} \gamma_c \quad (4.43)$$

$$s.t \quad (4.28) - (4.37)$$

$$\sum_{(u,v) \in c \cap O_{i_{w-2}}} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in c \cap O_{i_w} \setminus O_{i,w-2}} \delta_{(u,v)} - \gamma_c \leq N_c \quad \forall c \in \mathcal{C} \quad (4.44)$$

$$\sum_w C_w^\omega p_w^\omega \leq (1 + \Delta) z^* \quad (4.45)$$

4.5.3 Approche basée sur la probabilité de prolongation

On exploitera ici la structure particulière des contraintes d'arrêts intra-sites et entre unités couplées, que nous appellerons *contraintes intra-sites couplantes*. Les contraintes intra-sites couplantes et intra-sites des sites quatre unités sont des contraintes de cliques (i.e. leur capacité est limitée à un pour toute semaine w) permettant de définir des variables égales à 1 lorsque deux arrêts sont placés de telle sorte que la prolongation de l'un d'eux de σ semaines (σ étant un paramètre de l'instance) entraîne la violation d'une contrainte. L'utilisation de ces variables nous permet de linéariser les contraintes probabilistes associées à la probabilité de violation de l'une des contraintes du planning. Des résultats numériques sur ce type d'approche seront présentés dans la section 4.5.4. Les contraintes des sites six unités et, par extension, des contraintes inter-sites, s'avèrent bien plus complexes car celles-ci ne sont pas des contraintes de clique et leur probabilité de violation comprend un terme correspondant à des événements aléatoire joints. Nous présentons néanmoins en fin de section une méthode permettant de linéariser la probabilité de non-violation de ces contraintes en définissant des classes de variables correspondant à la combinaison de prolongation d'arrêts nécessaire pour entraîner une violation. Compte tenu de la complexité de cette méthode nous ne présentons pas dans cette thèse de résultats numériques pour le site comportant six unités nucléaires.

Cas des sites à deux unités Nous introduisons, pour la clarté de l'exposé la fonction I_2 , qui à une unité i associe son unité couplée $I_2(i)$. Soit alors un planning réalisable pour un site comportant deux unités nucléaires i et $I_2(i)$. Soit l'arrêt k' de l'unité $I_2(i)$ (noté $(I_2(i), k')$) le premier arrêt débutant après l'arrêt (i, k) . Nous rappelons qu'à tout arrêt (i, k) est associé $w_1(i, k)$ sa date de début et $OD_{(i,k)}$ sa durée planifiée (en l'absence de prolongation). d_2 désignera le nombre minimal de semaines entre deux arrêts imposé par les contraintes intra-sites couplantes. Le planning étant réalisable nous avons la relation suivante :

$$w_1(I_2(i), k') \geq w_1(i, k) + OD_{(i,k)} + d_2$$

Puisque les prolongations d'arrêts suivent une loi exponentielle tronquée nous pouvons en déduire pour un nombre de semaines donné σ la probabilité $\mathbb{P}(\sigma)$ que l'arrêt (i, k) soit prolongé de σ semaines. Cette prolongation entraînera une violation de la contrainte intra-site couplante si et seulement si :

$$w_1(i', k') \leq w_1(i, k) + OD_{ik} + d_2 + \sigma$$

Définition 1 (Fonctions wr). *Nous introduisons ici afin de simplifier les notations les fonctions wr_{ik} , tels que : $wr_{ik}(w, d) = w + OD_{ik} + d + \sigma$*

La figure 4.11 illustre la situation correspondant à la définition de $wr(i, k, d, \sigma)$ précédente.

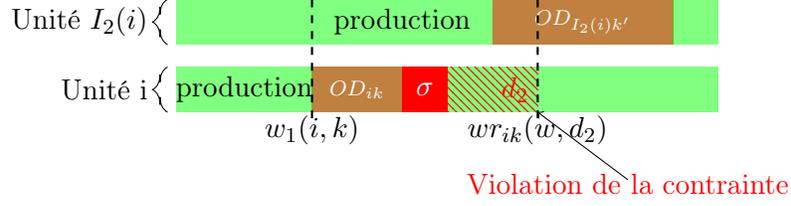


FIGURE 4.11: Contrainte intra-site couplante

Définition 2 (Variables r_{ik}). Nous introduisons pour chaque unité i et cycle k une variable $r_{i,k}$ telles que $r_{i,k} \geq 1$ si les décisions d'arrêts actuelles entraînent une violation de la contrainte couplante intra-site en cas d'une prolongation on de σ semaines de l'arrêt k de l'unité i

Définition 3 (Ensemble d'indices S_{ikw}). Afin de simplifier les notations nous introduisons également un nouvel ensemble d'indices d'arcs que nous utiliserons dans la suite de cette section : soit S_{ikw} l'ensemble des indices des arcs d'arrêts correspondant à la décision de débuter l'arrêt du cycle k de l'unité i au début de la semaine w i.e. $S_{ikw} = \{(u, v) \in O_{ik} | w_1((u, v)) = w\}$.

La propriété suivante découle de la définition et sera utilisée par la suite :

Proposition 3.

$$\sum_{(u,v) \in S_{ikw}} \delta_{(u,v)} \leq 1 \quad \forall i, k, w$$

Démonstration. Elle correspond simplement au fait qu'un arrêt ne peut être planifié qu'une fois. \square

Proposition 4. La variable $r_{i,k}$ être définie par l'égalité suivante :

$$r_{ik} = \max_w \left\{ \sum_{(u,v) \in S_{ikw}} \delta_{(u,v)} - 1 + \sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), wr_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} \right\} \quad \forall i, k$$

Démonstration. La contrainte intra-site couplante impose qu'il n'y ait pas plus d'un arrêt en cours à chaque semaine d'où :

$$\sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), wr_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} \leq 1 \quad \forall i, k, \sigma$$

Alors :

- $\forall w, \quad w \neq w_1(i, k), \Rightarrow \sum_{(u,v) \in S_{ikw}} \delta_{(u,v)} = 0 \Rightarrow \sum_{(u,v) \in S_{ikw}} \delta_{(u,v)} - 1 + \sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), wr_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} \leq 0$
- Pour $w = w_1(i, k)$, il y a risque de violation lorsqu'un arrêt $(I_2(i), k')$ débute dans la zone de prolongation possible de l'arrêt (i, k) i.e. $w_1(I_2(i), k') \leq wr_{ik}(w, d_2)$, or :
 $w_1(I_2(i), k') \leq wr_{ik}(w, d_2) \Leftrightarrow \sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), wr_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} = 1 \Leftrightarrow r_{ik} = 1$

\square

Soit C_i^k la variable aléatoire égale à 1 si l'arrêt k de l'unité i est prolongé d'au moins σ semaines et égale à 0 sinon. Puisque nous avons supposé la prolongation des arrêts indépendants les C_i^k sont indépendants. Soit B_i^k la variable aléatoire égale à 1 si la prolongation de l'arrêt k de l'unité i a

entraîné une violation de la contrainte couplante du cycle.

Par définition : $C_i^k = \begin{cases} 1 & \text{avec une probabilité de } p \\ 0 & \text{avec une probabilité de } 1 - p \end{cases}$

Et par définition de r_{ik} : $B_i^k = \begin{cases} C_i^k & \text{si } r_{ik} = 1 \\ 0 & \text{si } r_{ik} = 0 \end{cases}$

Proposition 5 (Probabilité qu'aucune contrainte intra-site couplante ne soit violée). *La probabilité qu'aucune contrainte intra-site couplante ne soit violée est donnée par :*

$$\mathbb{P}(B_i^k = 0 \quad \forall i, k) = (1 - p)^{\sum_{ik} r_{ik}}$$

Démonstration. Soit (i, k) un arrêt donné et (I_2, k') un arrêt de l'unité couplée à i :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{B}_i^k \cap \overline{B}_{I_2(i)}^{k'}) &= \begin{cases} \mathbb{P}(\overline{C}_i^k \cap \overline{C}_{I_2(i)}^{k'}) & \text{si } r_{ik} = r_{I_2(i)k'} = 1 \\ 0 & \text{si } r_{ik} = 0 \text{ ou } r_{I_2(i)k'} = 0 \end{cases} \\ &= \mathbb{P}(B_{ik})\mathbb{P}(B_{i'k'}) \end{aligned}$$

Donc B_{ik} et $B_{i'k'}$ sont indépendants.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_i^k = 0 \quad \forall i, k) &= \prod_{ik} \mathbb{P}(\overline{B}_i^k = 0) \\ &= \left(\prod_{ik|r_{ik}=0} 1 \right) \left(\prod_{ik|r_{ik}=1} \mathbb{P}(\overline{C}_{ik}) \right) \\ &= (1 - p)^{\sum_{ik} r_{ik}} \end{aligned}$$

□

Proposition 6 (Contrainte assurant une probabilité maximale de violation). *On peut alors borner par une valeur P_{min} la probabilité qu'une contrainte intra-site couplante soit violée, en ajoutant la contrainte suivante à notre modèle :*

$$\sum_{ik} r_{ik} \leq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1 - p)} \quad (4.46)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists(i, k) | B_i^k = 1) \leq P_{min} &\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(B_i^k = 0 \quad \forall i, k) \leq P_{min} \\ &\Leftrightarrow (1 - p)^{\sum_{ik} r_{ik}} \geq 1 - P_{min} \\ &\Leftrightarrow e^{\sum_{ik} r_{ik} \ln(1-p)} \geq 1 - P_{min} \\ &\Leftrightarrow \sum_{ik} r_{ik} \leq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1 - p)} \end{aligned}$$

□

Contraintes intra-sites additionnelles pour les sites à quatre unités Pour un site comprenant quatre unités nucléaires, une contrainte additionnelle s'ajoute aux contraintes intra-sites couplantes, imposées à chaque couple d'unités. Cette contrainte impose un espacement minimum de d_4 semaines entre la fin de l'arrêt d'une unité nucléaire et le début de l'arrêt d'une des deux unités du site n'étant pas couplées à celle-ci. Il est possible d'appliquer la même méthodologie que pour les sites à deux unités sous la condition :

Hypothèse 6. $0 \leq d_2 - d_4 \leq \sigma + d_2 - d_4 \leq \min_{ik}(OD_{ik})$

Cette hypothèse est cohérente avec les données actuelles du parc nucléaire pour une prolongation σ de une semaine que nous considérerons dans nos tests numériques. Nous introduisons l'ensemble $I_4(i)$ des indices des unités appartenant au même site que l'unité i , mais non couplées à i i.e. $I_2(i) \notin I_4(i)$.

Proposition 7. *Soit un arrêt (i, k) du cycle k de l'unité nucléaire i , au plus un arrêt d'une des unités de $I_4(i) \cup I_2(i)$ est en cours entre la semaine $w_1(i, k) + OD_{ik}$ et la semaine $w_{ik}(w, d_2)$*

Démonstration. Le planning étant réalisable les contraintes intra-sites et intra-sites couplantes doivent être vérifiées donc il n'y a pas d'arrêt de $I_4(i)$ en cours entre $w_1(i, k)$ et $w_{ik}(w, d_4)$. Si un arrêt de $I_4(i)$ démarre entre $w_{ik}(w, d_4)$ et $w_{ik}(w, d_2, \sigma)$ alors il est toujours en cours durant la semaine $w_{ik}(w, d_2)$ donc aucun arrêt de $I_2(i)$ ne peut démarrer durant cette période. \square

Corollaire 1. *La prolongation d'un arrêt de σ semaines ne peut entraîner la violation simultanée d'une contrainte intra-site couplante et intra-site.*

Le corollaire précédent nous permet d'appliquer la même méthodologie que pour les sites ne comprenant que deux unités nucléaires en ajoutant un terme à la définition des variables r_{ik} correspondant à la violation de la contrainte intra-site d'une unité :

$$r_{ik} = \max_w \left(\sum_{(u,v) \in S_{ikw}} \delta_{(u,v)} - 1 + \sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), w_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in O_{I_4(i), w_{ik}(w, d_4)}} \delta_{(u,v)} \right)$$

Ici aussi le premier terme n'est égale à 1 que pour la semaine correspondant au début de l'arrêt (i, k) et les deux autres termes ne sont égaux à 1 que si un arrêt se trouve planifié à une date entraînant la violation d'une contrainte en cas de prolongation de l'arrêt (i, k) de σ semaines. Le corollaire précédent assure que les deux derniers termes ne peuvent être égaux à 1 simultanément.

De nouveau, la probabilité qu'aucune violation ne produise pour le site est donnée par :

$$\mathbb{P}(B_{ik} = 0 \quad \forall i, k) = (1 - p)^{\sum_{ik} r_{ik}}$$

et nous pouvons définir le même type de contraintes (4.46) bornant le nombre de r_{ik} non nulles en fonction du pourcentage de violation maximal autorisé.

Nous pouvons écrire le modèle probabiliste ne comprenant que des sites à 2 ou 4 unités nucléaires. Introduisons S_2 (resp. S_4) l'ensemble des indices des unités appartenant à un site comprenant deux (resp. quatre) unités nucléaires. De manière classique nous remplaçons les maxima dans la définition

des r_{ik} par un ensemble d'inégalités :

$$\min \sum_w C_w^\omega p_w^\omega \quad (4.47)$$

s.t (4.28) – (4.37)

$$r_{ik} \geq \sum_{(u,v) \in O_{ikw_1}} \delta_{(u,v)} - 1 + \sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), wr_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} \quad \forall i \in S_2, w_1 \quad (4.48)$$

$$r_{ik} \geq \sum_{(u,v) \in O_{ikw_1}} \delta_{(u,v)} - 1 + \sum_{(u,v) \in O_{I_2(i), wr_{ik}(w, d_2)}} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in O_{I_4(i), wr_{ik}(w, d_4)}} \delta_{(u,v)} \quad \forall i \in S_4, w_1 \quad (4.49)$$

$$\sum_{ik} r_{ik} \leq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1 - p)} \quad (4.50)$$

Cas du site à six unités Les contraintes de ce site ont un nombre de ressources égal à deux, ce qui complique fortement la linéarisation des contraintes probabilistes correspondantes. Cependant, ces contraintes représentent une version simplifiée des contraintes inter-sites dont la capacité est supérieure à deux en règle générale. Nous ne présentons pas de résultats numériques pour ce site. Toutefois, une preuve de la linéarisation des contraintes probabilistes associées est présentée en Annexe B. Celle-ci fait intervenir deux types de variables r_{ik} afin de tenir compte des probabilités de prolongation liées.

4.5.4 Résultats numériques des approches robustes

La robustesse des solutions a été évaluée en prolongeant chaque arrêt d'un planning donné de la valeur de σ et en dénombrant les contraintes violées. Les prolongations d'arrêts étant supposées indépendantes, il y a un lien direct entre ce nombre de contraintes, que nous noterons V , et la probabilité de violation du planning. Nos tests numériques sont présentés pour une valeur de σ égale à 1.

La structure des contraintes intra-sites est dépendante du type de site considéré. Comme nous l'avons vu les sites à deux unités sont moins contraints que ceux à quatre unités, ce qui entraîne un nombre de violations plus faible. C'est pourquoi nous testons ici les approches proposées sur des classes d'instances correspondant à différentes configurations du parc nucléaire. Chaque instance comportera douze unités nucléaires.

La structure du parc nucléaire sera représentée par trois chiffres représentant le nombre de sites à six, quatre et deux unités. Par exemple la structure comportant deux sites à deux et quatre unités sera notée « 022 ». Nous considérerons ici les structure 022, 030 et 006.

.

4.5.4.1 Réglage des approches robustes

Les approches robustes développées dans les sections 4.5.2 et 4.5.3 visent à obtenir des solutions intermédiaires entre les solutions nominale et pire cas. Une telle solution existe pour 6 des 20 instances à deux unités nucléaires et 19 des 20 instances à 4 unités nucléaires. Puisque le nombre de violations ainsi que les possibilités d'améliorations dépendent de la taille des sites considérés,

des résultats numériques sont présentés concernant les possibles variations de la structure du parc.

Chacune des approches nécessite de l'information qui n'est connue qu'une fois les problèmes nominal et pire cas résolus : différence du nombre de violations, différence de coût ou nombre de violations. Dans un cadre opérationnel, cette information pourra provenir des optimisations précédentes ou d'une connaissance « métier » des utilisateurs. Nous supposons connue ici l'information nécessaire. Nous résolvons donc tout d'abord le problème nominal et le problème pire cas pour régler les paramètres de nos approches robustes. De ces deux résolutions, nous obtenons les informations suivantes :

- Le coût du planning nominal (resp. pire cas) C_n (resp. C_r)
- Le nombre de contrainte à relâcher face à une prolongation pire cas pour le planning nominal (resp. planning pire cas) V_n (resp. V_c)

Nous utilisons ces valeurs pour paramétrer nos tests de la manière suivante :

- Pour les approches probabilistes (décrite en section 4.46) et « epsilon contrainte économique » nous faisons décroître le nombre de violations autorisées, correspondant respectivement aux membres droits des équations 4.50 et 4.42, en partant de $V_n - 1$ jusqu'à obtenir la solution "pire cas".
- Il est plus difficile de trouver un réglage efficace de l'approche par pénalisation. Nous calculons dans un premier temps la différence du nombre de violations entre le planning nominal et pire cas ainsi que leur différence de coût. On fixe alors le paramètre de pénalisation de RP dans 4.38 à une fraction du ratio entre la différence du nombre de variables artificielles et la différence de coût :

$$RP = \frac{(C_n - C_r)}{a}$$

avec $a \in [V_r + 1, V_n - 1]$

- Pour l'approche "*light robustness*" le paramètre Δ est augmenté progressivement pour autoriser des fractions de la différence entre la valeur de la fonction objectif nominale et celle de la fonction objectif pire cas dans 4.45 :

$$z^* = C_n, \quad \Delta = \frac{a C_r - C_n}{5 C_n}$$

avec $a \in [1, 4]$

Diagramme « à moustache ». Nous utilisons des diagrammes à « moustache », pour représenter les résultats obtenus (voir figure ci-contre). Ces diagrammes permettent de représenter de manière condensée la dispersion d’une série statistique. La ligne rouge est la médiane des données, la boîte bleue comprend les valeurs se trouvant entre le 25^{ième} et 75^{ième} percentile (ce qui dans notre cas représente les valeurs allant de 5 à 15 une fois nos instances classées par nombre de violations), la distance entre la fin de la boîte et la fin de la moustache correspond à 1.5 fois la taille de la boîte, les valeurs ne se trouvant ni dans la boîte ni dans les moustaches sont des valeurs aberrantes, représentées pas des points isolés.



FIGURE 4.12: Diagramme « à moustache »

4.5.4.2 Résultats préliminaires instances à deux et quatre unités nucléaires

Les contraintes intra-sites dépendant de la taille du site considéré, nous avons dans un premier temps cherché à analyser des instances ne comprenant qu’un seul site de deux ou quatre unités afin de comprendre en quoi la composition du parc pouvait influencer sur nos résultats. Notre benchmark est composé de 20 instances ne comportant qu’un site deux unités et 20 instances ne comportant qu’un site quatre unités. Nous résolvons le modèles nominal et le modèle « pire cas » pour lequel l’ensemble des arrêts sont étendus de la valeur σ afin de connaître le nombre de violations moyen par type de site et s’il est possible d’obtenir des solutions intermédiaires. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1.

- La colonne « instances avec violation » présente le pourcentage d’instances pour lesquelles au moins une violation se produit en cas de prolongation d’une valeur σ de l’ensemble des arrêts ;
- La colonne violation nominale présente le « nombre de violations » moyen du planning sans prise en compte des prolongations possibles ;
- La colonne « pire cas » présente le nombre de violations du planning le plus conservatif ;
- La colonne « solution sans violation » contient le pourcentage d’instances pour lesquelles la solution pire cas ne présente pas de violation.

# Unités	instances avec violation(%)	violation nominale	violation pire cas	solution sans violation (%)
2	67%	1.0	0	100%
4	100 %	5.3	1	65%

TABLE 4.1: Structure nominale et pire cas des sites à 2 et 4 unités

Les plannings des sites à deux unités ne présentent de violation dans le cas nominal que dans 67% des cas, et une seule violation se produit. Les plannings des sites à quatre unités devant vérifier les contraintes intra-sites couplantes et les contraintes intra-sites sont bien plus contraints, avec des violations dans l’ensemble des instances nominales et un nombre de violations élevé avec 5.3 violations en moyenne.

Pour les sites à deux unités il existe toujours une solution évitant l'ensemble des violations. Ce n'est le cas que dans 65% des instances pour les plannings des sites à quatre unités. En revanche, le nombre maximum de violations résiduelles est égal à un pour ces sites.

Nous cherchons à évaluer l'efficacité en termes de temps de calcul des approches robustes sur ces instances. La figure 4.13 présente le pourcentage moyen d'augmentation, sur les différents réglages des approches robustes, du temps de calcul comparé à la résolution du problème nominal.

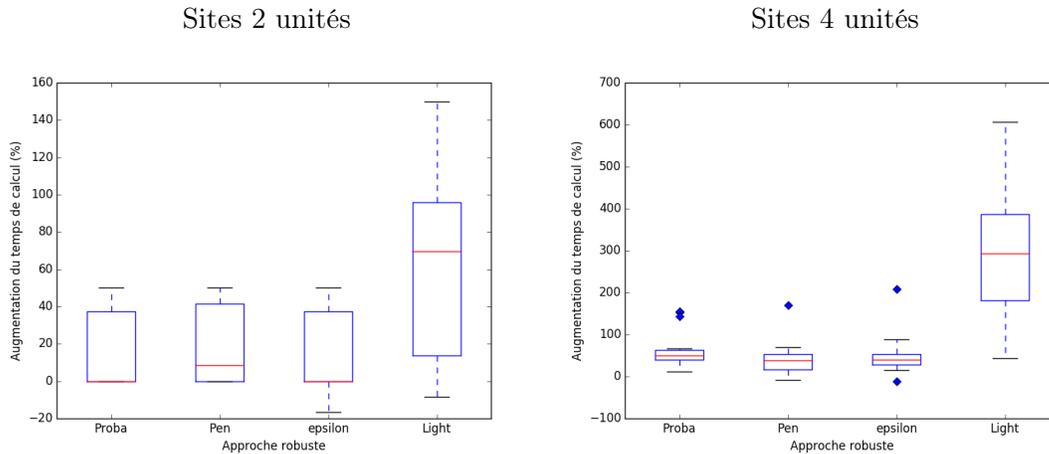


FIGURE 4.13: Comparaison des approches robustes sur les instances à un seul site

Ce diagramme montre, tout d'abord, que les approches du type "*light robustness*" ne sont pas efficaces pour ce problème avec une valeur médiane bien supérieure aux autres approches et une dispersion très importante des temps de calcul, allant même jusqu'à une multiplication par 6 du temps de calculs pour certaines instances à quatre unités. Ce comportement est dû au fait que cette méthode fait passer la fonction économique dans une contrainte, il est alors difficile pour le solveur en PLNE d'obtenir des bornes permettant pas un parcours efficace de l'arbre de branchement. Ce type d'approche ne semble pas applicable sur des instances de tailles industrielles.

Les trois autres approches ont des comportements relativement similaires. L'approche pénalisation semble légèrement moins efficace pour les instances deux unités, avec une valeur médiane proche des 10%, alors que les autres approches ont une valeur médiane proche de 0. L'approche probabiliste semble rencontrer plus de difficultés pour les instances quatre unités ce qui s'explique par la définition plus complexe des variables r_{ik} dans ce cas. En revanche les trois approches présentent des valeurs aberrantes pour certaines instances quatre unités avec un temps de résolution pouvant être multiplié par 2 ou 3.

4.5.4.3 Résultats en fonction de la structure du parc considérée

Compte tenu des résultats préliminaires les approches « probabiliste » (proba), « somme pondérée » (pen) et « epsilon contraintes économique » (eps) ont été testées sur des instances comprenant 12 unités nucléaires. Ces instances prennent en compte les contraintes inter-sites en plus des contraintes intra-sites. Le graphique 4.14 présente un diagramme à moustache pour chaque structure de parc nucléaire disponible. Les résultats sont cohérents avec les instances à deux et quatre unités nucléaires

avec un nombre de violations des plannings nominaux augmentant proportionnellement au nombre de sites à quatre unités. Il est intéressant de noter que lorsque seul des sites deux unités sont considérés, il existe dans la grande majorité des instances (17/20) une solution réalisable évitant toute violation. Il existe une telle solution environ une fois sur deux pour les instances 022 et 030 (leur valeur médiane étant nulle).

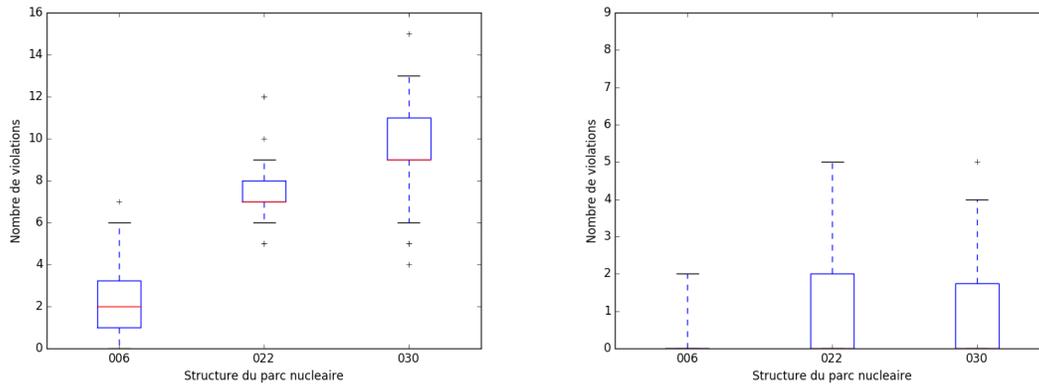


FIGURE 4.14: Nombre violation planning nominal (gauche) et pire cas (droite)

Nombre de solutions trouvées : Il est connu que les approches de types "Somme pondérées" ne permettent pas d'obtenir un grand nombre de solutions intermédiaires par une variation monotone de la pénalisation [Das and Dennis, 1997]. Cette propriété se vérifie dans notre application. Le tableau 4.15 présente des résultats concernant le nombre de solutions intermédiaires obtenues par les approches robustes.

- % NoSol donne le pourcentage d'instance pour lesquelles aucune solution intermédiaire n'a été trouvée ;
- # solutions donne le nombre moyen de solutions intermédiaires trouvées par chaque approche lorsqu'il en existe.

A noter que les approches « probabilité » et « epsilon contraintes économique » peuvent obtenir les mêmes solutions. En effet, pour toute valeur ϵ de l'approche ϵ contrainte, il existe un réglage du pourcentage de protection P_{min} de l'approche probabilité tel que :

$$\frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1 - p)} = \epsilon$$

Les variables d'écart et les r_{ik} ont des rôles identiques dans chacune des approches, elles sont égales à un lorsque le placement d'un arrêt entraîne un risque de violation en cas de prolongation. Compte tenu de cette similarité, nous avons regroupé les deux approches dans le tableau ci-dessous.

Structure des solutions intermédiaires : Il existe dans la plupart des cas des solutions intermédiaires présentant un surcoût relativement faible, comparé au coût de la solution nominale, pour un gain en robustesse important. Nous avons choisi de représenter ces solutions intermédiaire par des graphiques où l'abscisse représente le pourcentage de surcoût de la solution obtenue, comparé au surcoût de la solution pire cas. Ainsi la solution nominale se trouve à l'abscisse 0 et la solution pire cas à l'abscisse 100. L'ordonnée correspond au nombre de violations de la solution, ainsi la

Structure	Approche	% NoSol	# solutions
006	Epsilon & Proba	60	2.81
006	Pen	55	1.11
022	Epsilon & Proba	20	4.56
022	Pen	30	1.46
030	Epsilon & Proba	25	4.44
030	Pen	30	2.44

FIGURE 4.15: Solutions intermédiaires

solution nominale se trouve en haut à gauche et la solution pire cas en bas à droite.

Les tests révèlent des catégories d’instances que nous présentons ci-dessous :

- Les instances ne présentant pas de solutions intermédiaires entre la solution nominale et la solution pire cas. C’est le cas de 40% des instances 006 et environs 10% des instances 022 et 030.

- Les instances possédant une solution intermédiaire trouvée par l’ensemble des méthodes robustes. Cette catégorie représentent 25% instances 006 mais n’est pas apparue pour les instances comprenant des sites à quatre unités. En règle générale, cette solution se trouve en dessous du segment reliant la solution nominale à la solution pire cas, et réduit donc le nombre de violations pour un coût modéré. En effet, ces solutions correspondent la plupart du temps à des modifications faibles du planning nominal. La figure 4.16 présente l’une de ces instances, ainsi que le temps mis par chaque approche robuste pour trouver la solution intermédiaire.

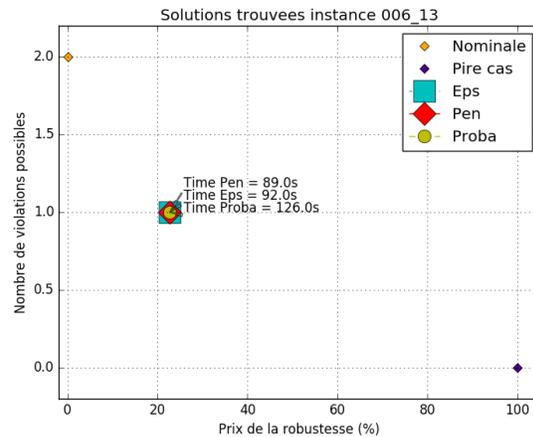


FIGURE 4.16: Exemple d’instance pour laquelle une seule solution intermédiaire a été trouvée par l’ensemble des approches robustes

- Pour la plupart des instances, les approches robustes trouvent plusieurs solutions intermédiaires. Il existe très souvent (50% des instances 022 et 65% des instances 003) des solutions présentant un surcoût faible par rapport à la solution nominale (inférieur à 20%), mais supprimant un nombre significatif de violations (plus de 30% de celles-ci). Ces solutions sont particulièrement intéressantes. La figure 4.17 présente un exemple d’une telle instance. La solution nominale possède six violations alors que la solution pire cas aucune, une solution intermédiaire divisant le nombre de violation par deux pour un surcoût de l’ordre de 15% du surcoût « pire cas » est trouvée par les approches *epsilon*-contrainte et probabilité. L’approche utilisant la pénalisation ne permet pas, en règle générale, de trouver ces premières solutions, c’est le cas dans cet exemple. De plus, le défaut classique de l’approche par pénalisation, de ne pouvoir accéder aux solutions non supportées par le front de Pareto, apparaît dans la plupart des cas (exemple figure 4.18).

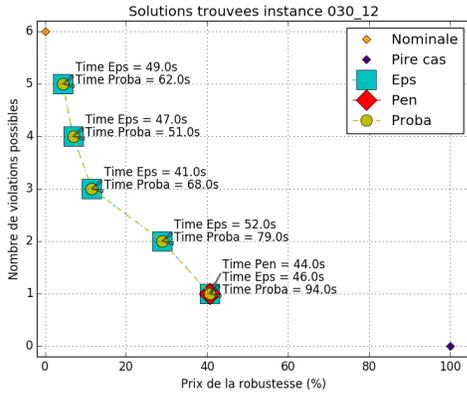


FIGURE 4.17: Exemple d’instance avec des solutions intermédiaires améliorant significativement la robustesse pour un surcoût faible

- Les instances 022 et 030 restantes présentent soit un ensemble de solutions situées sur le segment reliant la solution nominale à celle pire cas, soit un grand nombre de solutions, sans tendance de répartition nette. Les approches « probabilistes » et « ϵ -contrainte » sont équivalentes et trouvent les mêmes solutions, mais l’approche pénalité trouve des solutions différentes en règle générale. Ce type d’instance nécessiterait une étude plus approfondie pour vérifier qu’il serait possible d’obtenir les solutions trouvées par pénalité avec les autres approches. Un exemple de ce type de solution est présenté ci-contre.

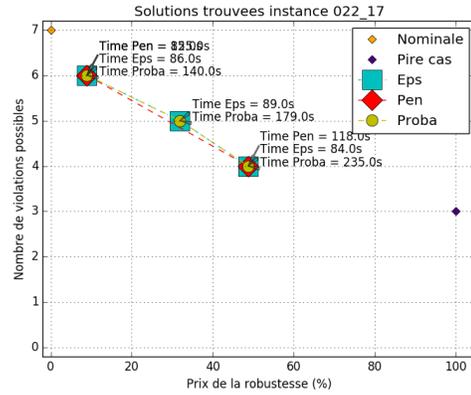


FIGURE 4.18: Exemple de solutions non-supportées par le front de Pareto ne pouvant être trouvées par une approche par pénalisation

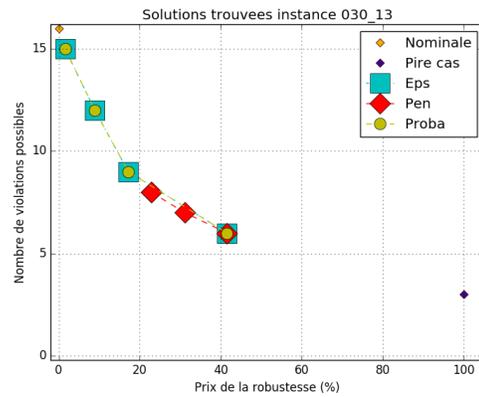


FIGURE 4.19: Exemple de solutions différentes trouvées par l’approche pénalité

Temps de calcul : La figure 4.20 compare le temps mis par les trois approches robustes pour trouver une solution donnée, lorsque celle-ci est obtenue par l’ensemble des approches. Ce temps est donné en pourcentage d’augmentation du temps de résolution comparé au temps de résolution du problème nominal. Ces résultats montrent une augmentation du surcoût en temps de calcul liée à la robustesse avec le nombre de sites à quatre unités, ce qui est cohérent avec la plus grande complexité des contraintes liées à ces sites. L’approche probabiliste donne des résultats comparables aux deux autres approches pour les instances ne comprenant que des sites à deux unités mais présente une augmentation du temps de calcul plus important pour les sites à quatre unités. L’approche epsilon contrainte semble donner les meilleurs résultats, tant en termes de valeurs médianes que de répartition des augmentations de la durée de résolution.

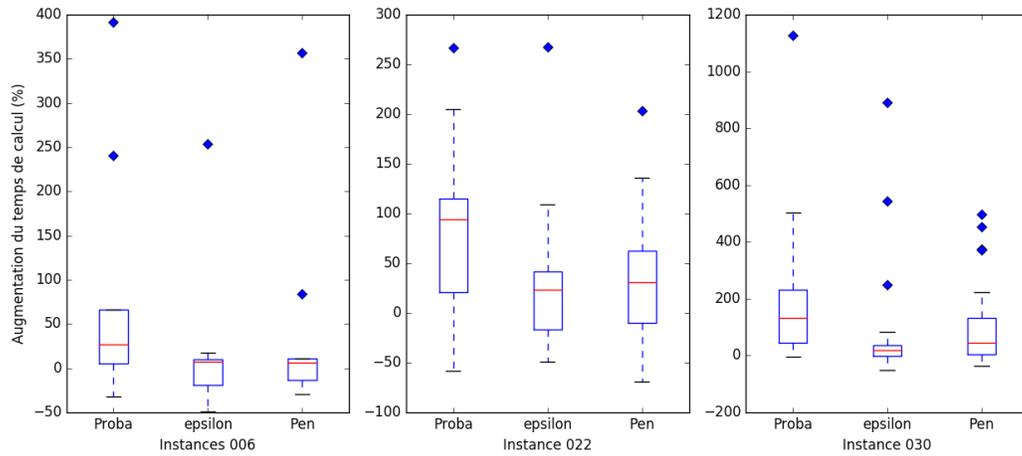


FIGURE 4.20: Pourcentage d'augmentation du temps de calcul des approches robustes par rapport à la résolution du problème nominal

4.5.5 Impact des variations de la demande sur la robustesse des solutions nominales

Nous présentons ici des résultats préliminaires à une étude évaluant l'impact de la stochasticité de la demande sur la robustesse des plannings nominaux. Nous avons utilisé pour ces tests 20 instances de la configuration 022 du parc nucléaire. Nous faisons dans la suite de cette section varier la structure de la demande pour analyser son impact sur les plannings obtenus. Pour un scénario de demande donné, nous calculons le planning obtenu, puis l'évaluons en dénombrant le nombre de contraintes violées par la prolongation de l'ensemble des arrêts, comme cela était fait en section 4.5.4.

Augmentation du ratio entre la demande et la puissance des unités installées. Nous cherchons tout d'abord à comprendre l'impact du ratio entre la demande et la puissance installée sur les plannings nominaux obtenus. Pour cela nous générons des instances dans lesquelles la demande a été multipliée par un facteur que nous noterons D . Un facteur $D < 1$ entraîne que certaines des instances deviennent irréalisables en raison de la contrainte de modulation maximale du parc nucléaire. Nous présentons donc uniquement des résultats pour des valeurs de $D \geq 1$. La figure 4.21 présente le nombre de violations des plannings obtenus en fonction du coefficient D , $D = 1$ correspond à l'instance de référence.

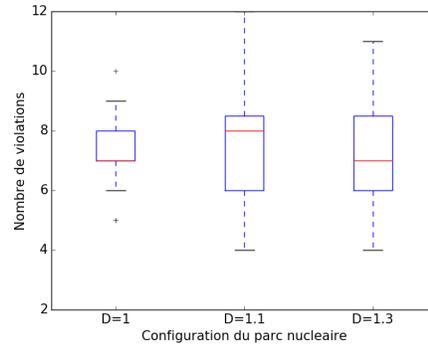


FIGURE 4.21: Impact du ratio entre la demande et la puissance des unités installées, configuration 022.

Nous observons une augmentation de la dispersion, sur les 20 instances considérées, du nombre de violations avec le paramètre D . Il est assez intéressant de noter que la valeur médiane augmente lorsque D passe de 1 à 1.1 puis diminue lorsque D passe à 1.3.

Saisonnalité de la demande. La demande étant fortement corrélée aux températures, elle présente une périodicité été/hiver. Plus la demande est forte en hiver et plus des arrêts placés pendant cette période auront un coût important, puisque les unités appelées en substitution seront chers. De manière symétrique plus la demande en été sera faible et plus il sera logique de placer des arrêts pendant cette période sans pénaliser la fonction objectif. Afin de prendre en compte la possibilité d'avoir des saisons plus ou moins difficiles nous créerons des instances pour lesquels un facteur multiplicatif, noté H (resp. E), sera appliqué entre les semaines 1 à 16 et 40 à 52 (resp. 16 à 40) de chaque année correspondant aux valeurs positives (resp. négatives) du cosinus de référence.

- $H > 1$ correspondra à des hivers particulièrement rigoureux pour lesquelles la demande est forte, à l'inverse $H < 0.5$ correspondra à une demande « relativement » faible" durant l'hiver (cf figure 4.22 gauche)
- $E > 1$ correspondra à des périodes d'été pour lesquelles la demande est particulièrement faible (été tempéré), à l'inverse une valeur $E < 0.5$ correspondra à des étés particulièrement chauds pour lesquelles la consommation augmente à cause de l'utilisation de la climatisation. (voir figure 4.22 droite)

Les résultats obtenus sont présentés figure 4.2 et 4.3 pour des valeurs des coefficients E et H comprises entre 0.7 et 1.3. La valeur 1 correspond dans chaque figure à l'instance de référence.

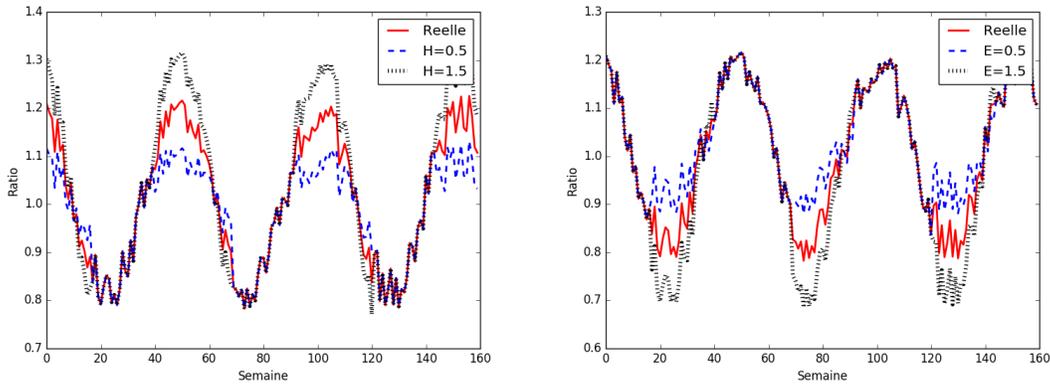


FIGURE 4.22: Impact des paramètre H et E sur la demande générée

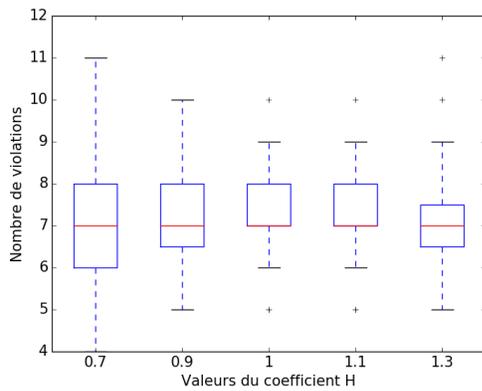


TABLE 4.2: Impact des périodes d’hivers sur la robustesse de la solution nominale

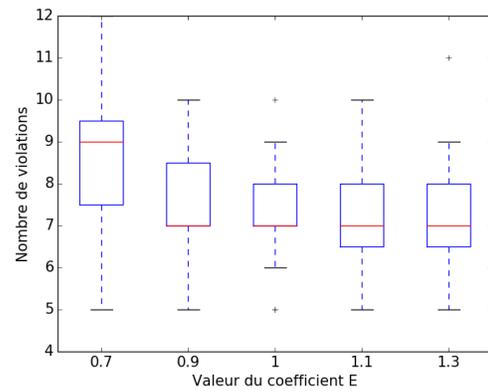


TABLE 4.3: Impact des périodes d’étés sur la robustesse de la solution nominale

Les hivers plus « rigoureux » ($H > 1$) ne semblent pas augmenter le nombre de violations. Cependant ceci est cohérent avec le nombre important de violations des plannings de référence, les arrêts y étant probablement déjà très proches les uns des autres. En revanche les hivers « tempérés » diminuent bien le nombre de violations pour la plupart des instances (extension de la boîte vers le bas) bien qu’ils puissent augmenter ce nombre pour certaines d’entre elles (extension de la « moustache » vers le haut). De la même manière se sont les instances pour lesquelles la demande est forte en été ($E < 1$) qui présentent une augmentation de leur nombre de violations. Il semblerait que ce soit le rapprochement des valeurs de demande d’été et d’hiver qui entraîne une augmentation du nombre de violations. Ce résultat devrait être vérifié par une étude plus approfondie des plannings obtenus.

4.5.6 Bilan

Nous avons dans cette section proposé plusieurs approches permettant de rendre le planning robuste aux prolongations d’arrêts impactant les contraintes de ressources entre arrêts intra-sites.

Nous avons présenté des approches dupliquant les contraintes concernées avant d’ajouter les variables correspondant à une prolongation forfaitaire de la durée des arrêts, puis d’autoriser la

violation de ces contraintes par l'ajout de variables artificielles. Nous nous ramenons alors à un problème bi-objectif dans lequel à l'objectif économique initial s'ajoute l'objectif robuste représenté par l'utilisation des variables artificielles. Les méthodes classiques d'optimisation bi-objectif, que nous avons présentées dans la section 4.2.1, peuvent alors être utilisées pour contrôler le prix de la robustesse.

La formalisation des contraintes intra-sites réalisée avec l'équipe de la R&D d'EDF nous a également permis de proposer une approche permettant de linéariser des contraintes en probabilité en contrepartie de l'ajout de nouvelles variables de décisions r_{ik} . Le fait d'utiliser la probabilité de violation comme paramètre de cette méthode est particulièrement intéressant pour un outil opérationnel. Bien que légèrement plus lente actuellement qu'une méthode ϵ -contrainte, cette formulation pourrait probablement être améliorée par une définition plus fine des variables r_{ik} . Cette méthode peut également être étendue pour prendre en compte simultanément plusieurs valeurs de prolongation forfaitaire σ , ceci en définissant des variables r_{ik}^σ dépendant de la valeur de σ considérée. Cette possibilité n'a pas été testée ici. Une linéarisation des contraintes intra-sites du site à six unités a été proposée piste d'extension de la méthodologie aux contraintes inter-sites. Pour toutes ces raisons cette approche présente un potentiel important pour de futures études.

Nos résultats montrent une plus grande efficacité de l'approche *epsilon*-contrainte bornant le nombre de variables artificielles utilisées pour relâcher les contraintes robustes « pire cas ». En effet, elle permet de trouver les mêmes solutions intermédiaires que l'approche probabiliste mais se montre plus rapide.

Un réglage alternatif à celui réalisé ici consisterait à limiter le nombre de variables artificielles par site, et non pour l'ensemble du parc. Ce réglage permettrait de répartir le risque entre différents sites. Reste le défaut de ce type d'approche de ne pas assurer qu'une solution réalisable existe pour le problème robuste. Ce problème peut être résolu par l'ajout d'une variable d'écart relâchant la contrainte bornant le nombre de violations autorisées et la pénalisation de cette variable d'écart à un coût très important dans la fonction objectif.

L'étude préliminaire portant sur l'impact de la stochasticité de la demande, présentée en section 4.5.5, montre que ce sont les années où la différence entre les demandes d'été et d'hiver sont les moins marquées (années chaude en liaison avec la climatisation) pour lesquelles le nombre de violations est le plus important.

4.6. Robustesse aux aléas pour les contraintes d'anticipation maximale

La contrainte d'anticipation maximale borne le niveau de combustible maximum autorisé au début d'un arrêt d'une unité. Il s'agit d'une contrainte de sécurité imposée par l'autorité de sûreté nucléaire (ASN). Elle ne doit jamais être violée. Dans la pratique, une possible violation de cette contrainte sera évitée par un report de l'arrêt suivant, ce qui peut entraîner la violation de contraintes d'arrêts ou se répercuter sur l'ensemble des périodes de production suivantes, avec un impact conséquent en terme de coût sur le planning. D'un point de vue industriel, la robustesse à cette contrainte prime sur celles des contraintes de ressources entre arrêts compte tenu de l'impact plus important du recours utilisé en pratique.

Un cas classique violation de cette contrainte se présente lorsque l'on planifie deux cycles consécutifs avec arrêt en anticipation. Un aléa subi sur le premier cycle peut entraîner la violation de la contrainte d'anticipation maximale du second. En effet, l'absence de modulation planifiée sur les cycles avec arrêt en anticipation ne permet pas d'absorber un surplus de stock éventuel.

Les contraintes d'anticipation maximale étant locales à chaque unité, cette étude se borne aux instances ne comprenant qu'un site nucléaire.

4.6.1 Approche Γ -Robuste pour l'anticipation maximale

En l'absence d'aléa, cette contrainte est assurée par la définition des arcs d'anticipation de notre graphe d'état au premier niveau et ne figure pas explicitement dans notre modèle. Afin d'appliquer le paradigme de Γ -robustesse il nous faut alors ajouter cette contrainte au premier niveau dans notre modèle.

Nous introduisons dans cette section :

- $\bar{P}_i = \max_w U_{iw}$ l'énergie maximale produite par l'unité i durant une semaine.
- $fs(u, v) \in \{\alpha \bar{P}_i \mid \alpha \bar{P}_i \leq Amax_{ik}, \alpha \in \mathbb{N}\}$: le stock final cible de l'arc (u, v) .
- \hat{f}_s : le surplus de stock maximum pris en compte, cette valeur étant un paramètre de la méthode.

La contrainte nominale de satisfaction de l'anticipation maximale pour l'unité i et le cycle k s'écrit :

$$\sum_{(u,v) \in Y_{ik}} fs(u, v) \cdot \delta_{(u,v)} \leq Amax_{ik} \quad (4.51)$$

En cas de prolongation d'arrêt ou de panne en campagne lors d'un cycle k' précédent le cycle k entraînant un surplus de stock de \hat{f}_s le surplus de stock en fin de cycle k en l'absence de recours sera :

$$Q^{k-k'} \hat{f}_s$$

On peut écrire la contrepartie robuste de la contrainte (4.51) comme ci-dessous :

$$\beta_{i,k,k'}(\delta^*, \Gamma_{i,k,k'}) + \sum_{(u,v) \in Y_{ik}} fs(u, v) \cdot \delta_{(u,v)} \leq Amax_{ik} \quad \forall i, k, k' \leq k$$

où $\beta_{i,k,k'}(\delta^*, \Gamma_{i,k,k'})$, est la fonction de protection de la contrainte définie par :

$$\beta_{i,k,k'}(\delta^*, \Gamma_{i,k,k'}) = \max_z \sum_{k''=k'}^k \sum_{(u,v) \in Y_{ik''}} Q_i^{k''-k} \hat{f}s \delta_{(u,v)}^* z_{k''} \quad (4.52)$$

$$\sum_{k''=k'}^k z_{k''} \leq \Gamma_{i,k,k'} \quad (4.53)$$

$$0 \leq z_k \leq 1 \quad \forall k \quad (4.54)$$

$$= \min_{\nu, \mu} \Gamma_{i,k,k'} \nu_{i,k,k'} + \sum_{k''=k'}^k \mu_{i,k,k',k''} \quad (4.55)$$

$$\nu_{i,k,k'} + \mu_{i,k,k',k''} \geq \sum_{(u,v) \in Y_{ik''}} Q_i^{k''-k} \hat{f}s \delta_{(u,v)}^* \quad \forall k'' \in [k', k] \quad (4.56)$$

$$\nu_{i,k,k'} \geq 0, \mu_{i,k,k',k''} \geq 0 \quad \forall k'' \in [k', k] \quad (4.57)$$

$\Gamma_{i,k,k'}$ est le budget d'incertitudes paramétrant la méthode et correspond au nombre de cycles subissant un surplus de stock $\hat{f}s$ avant la le début de l'arrêt du (i,k).

En cas de campagne avec modulation éventuellement suivie d'un stretch entre le cycle k' et le cycle k , on dispose de décisions de recours consistant à ne pas réaliser la modulation $m(u,v)$ d'un arc (u,v) donné pour produire et ainsi absorber le surplus de stock. On ajoute un terme représentant ce type de recours possible dans la contrainte robuste afin d'éviter d'être trop conservatif :

$$\beta_{i,k,k'}(\delta^*, \Gamma_{i,k,k'}) - \sum_{k''=k'}^k \left[Q_i^{k''-k} \sum_{(u,v) \in X_{ik''}} m(u,v) \delta_{(u,v)} \right] + \sum_{(u,v) \in Y_{ik}} f s(u,v) \cdot \delta_{(u,v)} \leq Amax_{ik} \quad \forall i, k, k' \leq k$$

Remarque 4. Ici on crée une contrainte robuste pour tout couple de cycles $k, k' \leq k$. Cela permet de tenir compte du fait que les arcs de modulation réduisent le surplus lié aux cycles les ayant précédés.

Selon la valeur de Γ , il n'est pas possible d'assurer l'existence d'un planning respectant les contraintes robustes que nous avons définies. Nous allons relaxer ces contraintes, au besoin, par des variables d'écart. Cependant, comme les résultats numériques de la section 4.5.4 l'ont montré, minimiser l'objectif robuste et borner l'objectif économique n'est pas efficace du point de vue du temps de résolution. De plus il n'est pas possible de connaître le nombre de variables d'écart permettant d'assurer la réalisabilité d'une instance donnée. C'est pourquoi nous pénalisons l'utilisation de variables d'écart relaxant une des contraintes robustes avec un coût C_γ suffisamment élevé pour que les solution pour laquelle la somme des variables d'écart est la plus faible soit privilégiée. Le modèle

que l'on cherche à résoudre est le suivant :

$$\min \sum_{jw} C_{jw}^{\omega} p_{jw}^{\omega} + C_{\gamma} \sum_{ik, k' \leq k} \gamma_{ikk'} \quad (4.58)$$

$$s.t \quad (4.28) - (4.37)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,k,k'} \nu_{i,k,k'} + \sum_{k''=k'}^k \mu_{i,k,k',k''} + \sum_{(u,v) \in Y_{ik}} fs(u,v) \cdot \delta_{(u,v)} \\ - \sum_{k''=k'}^k Q_i^{k''-k} \sum_{(u,v) \in X_{ik''}} m(u,v) \delta_{(u,v)} - \gamma_{ikk'} \leq Amax_{ik} \quad \forall i, k, k' \leq k \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\nu_{i,k,k'} + \mu_{i,k,k',k''} \geq \sum_{(u,v) \in Y_{ik''}} Q_i^{k''-k} \hat{f}s \delta_{(u,v)} \quad \forall k, k' \leq k, k'' \in [k', k] \quad (4.60)$$

$$\nu_{i,k,k'} \geq 0, \mu_{i,k,k',k''} \geq 0 \quad \forall k, k' \leq k, k'' \in [k', k] \quad (4.61)$$

Ici, le coefficient représentant le surplus de stock est identique quel que soit l'arc considéré. Compte tenu du fait que le surplus diminue au cours d'un arrêt à cause du ratio de rechargement, la valeur de Γ correspond en réalité au nombre de cycles pris en compte dans le surplus. Lorsque Γ est égale à 0 on ne prend pas en compte la robustesse.

4.6.2 Filtrage des arcs en tenant compte de la probabilité de violation

Cette section s'attache au calcul direct de la probabilité de violation d'un arc donné, afin de pouvoir filtrer cet arc en prétraitement ou ajouter des contraintes de cliques bannissant un enchaînement d'arc donné. Les probabilités calculées peuvent ensuite être intégrées à une approche robuste telle que celle présentée à la section précédente afin de différencier les périodes présentant la plus grande probabilité de violation, cette intégration sera décrite en section 4.6.3.

Soit une campagne de production sans modulation définie par l'arc correspondant (u, v) et possédant les caractéristiques suivantes :

- Début de la campagne de production à l'heure $h_1(u, v)$
- Fin de la campagne de production à l'heure $h_2(u, v)$
- Stock cible $fs(u, v)$

Soit $S(u, v)$ la variable aléatoire représentant le surplus de stock en fin de campagne de production (u, v) . Cette variable est la somme de la variable aléatoire E représentant le surplus de stock lié à la prolongation éventuelle de l'arrêt précédent et suivant une loi exponentielle, et du surplus A lié aux arrêts forcés en campagne de production suivant une loi de Markov (ces deux aléas ont été détaillés en section 4.4.3). La loi du surplus provenant des arrêts en campagne de production est paramétrée par la durée effective de la campagne de production, i.e. la campagne de production planifiée amputée de la prolongation d'arrêt subie.

La loi de la variable A peut-être calculée en utilisant une formule de récurrence à trois termes, chaque terme correspond à l'état actuel de l'unité et au nombre d'heures d'arrêts forcés subis depuis le début de la campagne de production. Soient :

- $C_{h,p}$ la probabilité que l'unité soit en panne à l'heure h et ait subi p heures d'arrêts forcés.
- $R_{h,p}$ la probabilité que l'unité soit en marche à l'heure h et ait subi p heures d'arrêts forcés.
- $L_{h,p}$ la probabilité que l'unité soit en panne à l'heure h et ait subi p heures d'arrêts forcés.

On peut calculer ces probabilités en utilisant les formules de récurrences suivantes pour tout $h \geq 0$ et $0 \leq p \leq h$ (le temps passé en panne ne peut excéder le temps écoulé depuis le début de la campagne de production) :

$$\begin{aligned} R_{h+1,p} &= s_r R_{h,p} + r_c C_{h,p} + r_l L_{h,p} \\ C_{h+1,p} &= p_c R_{h,p-1} + s_c C_{h,p-1} \\ L_{h+1,p} &= p_l R_{h,p-1} + s_l L_{h,p-1} \end{aligned}$$

Sachant que l'état initial du système est tel que :

$$R_{0,0} = 1, \quad C_{0,0} = L_{0,0} = 0$$

La probabilité $\mathbb{A}(p, h)$ que l'unité subisse p heures d'arrêts forcés sur h heures de production est donnée par :

$$\mathbb{A}(p, h) = R_{h,p} + C_{h,p} + L_{h,p}$$

Nous notons alors $A_{(u,v)}(E)$ la variable aléatoire correspondant a la quantité de fortuit en campagne correspondant à la période de l'arc (u, v) amputé de la prolongation d'arrêt correspondant à la variable aléatoire E .

En notant : $D_s = \text{Am}ax_{ik} - fs(u, v)$, la probabilité de violation de la contrainte d'anticipation maximale correspondant au choix de la campagne de production correspondant à l'arc (u, v) est donnée par :

- Si $D_s \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^v(u, v) &= 1 - \mathbb{P}(E + A_{(u,v)}(E) \leq D_s) \\ &= 1 - p(e) \left[\int_0^1 \exp^{-x} \sum_{p \leq 168 * \frac{D_s - x}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 1 - x) * 168) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{+\infty} \exp^{-x} dx \left(\sum_{p \leq 168 * \frac{D_s - 1}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 2) * 168) \right) \right] \\ &\quad - (1 - p(e)) \sum_{p \leq 168 * \frac{D_s}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 1) * 168) \end{aligned}$$

- Sinon :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^v(u, v) &= 1 - p(e) \left[\int_0^{D_s} \exp^{-x} \sum_{p \leq 168 * \frac{D_s - x}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 1 - x) * 168) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{D_s}^{+\infty} \exp^{-x} dx \right] \\ &\quad - (1 - p(e)) \sum_{p \leq 168 * \frac{D_s}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 1) * 168) \end{aligned}$$

A noter que le nombre 168 correspond au passage des semaines en heures pour la chaîne de Markov.

L'intégrale du premier terme est approximé par sa somme de Riemann avec un pas de discrétisation correspondant au pas horaire, pour le cas $D_s \geq 1$ nous obtenons :

$$\mathbb{P}^v(u, v) = 1 - p(e) \left[\frac{1}{168} \sum_{n=0}^{168} \exp \frac{-n}{168} \left(\sum_{p \leq 168 * \frac{Amax_{ik} - fs(u,v) - \frac{n}{168}}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 1 - \frac{n}{168}) * 168) \right) \right. \\ \left. + \exp(-1) \left(\sum_{p \leq 168 * \frac{Amax_{ik} - fs(u,v) - 1}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 2) * 168) \right) \right] \\ - (1 - p(e)) \sum_{p \leq 168 * \frac{Amax_{ik} - fs(u,v)}{P_i}} \mathbb{A}(p, (w_2(u, v) - w_1(u, v) - 1) * 168)$$

Soit α le pourcentage de violation de la contrainte d'anticipation maximale du cycle k de l'unité i autorisé dans le planning. Pour assurer ce pourcentage de violation on filtrera les arcs du graphe en retirant de celui-ci tout les arcs dont la probabilité de violation est supérieure à α .

La probabilité de violation pourra également être calculée dans le cas de deux arcs sans modulation (et non suivis d'une période de stretch) consécutifs. Soient deux arcs e et e' de ce type correspondant respectivement aux cycles k et k' tels que $k = k' + 1$. Pour rappel le combustible résiduel du cycle k' subit un taux de perte de $Q_{i,k}$ durant l'arrêt (i, k') . Soient E, E' les surplus de stocks liés aux éventuelles prolongations respectives des arrêts (i, k) et (i, k') ; $A(E)$ et $A(E')$ les surplus de stocks dus aux arrêts forcés en campagne sur les périodes correspondant respectivement aux arcs e et e' compte tenu des prolongations d'arrêts subies E et E' . Afin d'éviter un planning comportant des enchaînements de périodes de production ayant une probabilité de violation trop importante on calcule la probabilité de violation liée à cet enchaînement $\mathbb{P}^v(e, e')$.

Si cette probabilité est une nouvelle fois supérieure à une certaine valeur donnée α , on ajoute au modèle la contrainte de clique suivante pour les arcs considérés :

$$\delta_e + \delta_{e'} \leq 1 \quad (4.62)$$

4.6.3 Approche combinée

Les approches développées dans les sections 4.6.1 et 4.6.2 présentent chacune un désavantage majeur :

- L'approche Γ -robuste protège contre un surplus de stock ne dépendant pas de la longueur de la campagne considérée alors que les arrêts fortuits en campagne dépendent de cette durée. C'est particulièrement problématique pour les arcs correspondant au début de la campagne qui peuvent avoir une durée très faible. Certains de ces arcs peuvent être interdits par l'approche, ce qui pourra mener à obtenir une solution trop conservatrice.
- L'approche par filtrage peut mener à un problème irréalisable si un des arcs filtrés doit obligatoirement se trouver dans la solution. Or, le filtrage étant réalisé au moment de la création des graphes de premier niveau, il n'est pas possible d'identifier ces arcs a priori.

Cette section développe une approche combinant les deux approches précédentes afin d'éliminer ces deux problèmes. Dans l'approche combinée obtenue, le surplus de stock pris en compte par le modèle Γ -robuste dépend de l'arc (u, v) considéré et sera noté $\hat{f}s(u, v)$.

Soit un arc de production (u, v) , il est possible sur le même principe que dans la section 4.6.2 de calculer le surplus de stock maximum de cet arc correspondant à une probabilité p donnée, nous noterons cette valeur $S((u, v), p)$. Il suffit alors d'appliquer la même méthode que la méthode Γ -robuste en remplaçant $\hat{f}s((u, v))$ par $S((u, v), p)$. Le surplus de stock associé à chaque arc dans la solution robuste dépend alors de la durée de la campagne de production associée.

Soit p une probabilité de protection et (u, v) un arc de production débutant au début de la semaine $w_1(u, v)$ et se terminant en fin de semaine $w_2(u, v) - 1$ le surplus de stock maximal, $S((u, v), p)$ pouvant intervenir avec une probabilité p est donné par la résolution de l'équation :

$$\mathbb{P}(E + A(u, v) < S((u, v), p)) = p$$

Jusqu'ici nous n'avons pas tenu compte du fait que l'on cherche en priorité à éviter une forte probabilité de violation en début de période, alors qu'une probabilité de violation importante se trouvant loin dans l'horizon (typiquement au-delà de deux ans) sera plus facilement acceptable compte tenu des nombreuses ré-optimisations et recours que subira le planning avant cette date. Pour prendre en compte le fait de ne pas chercher à être trop conservatif pour les périodes lointaines on pourra faire décroître la valeur de p avec l'index du cycle, ainsi plus on avancera dans le temps et moins le surplus de stock pris en compte sera important.

4.6.4 Simulateur

La qualité d'une solution est évaluée par un simulateur fournissant la probabilité qu'une « violation » se produise avant un cycle donné pour chacune des unités de l'instance. Dans la réalité, une violation entraînera dans le pire des cas un report de l'arrêt considéré. C'est donc plutôt la stabilité du planning qui est évaluée ici et nous emploierons les termes pourcentages de « violations » ou de « ré-optimisations » indifféremment pour désigner ce risque.

Chaque planning est évalué en simulant 10 000 scénarios de prolongations d'arrêts et de pannes fortuites en campagne. Chacun de ces scénarios comporte un processus de Markov au pas de temps horaire pour l'ensemble de l'horizon, les résultats sont ensuite agrégés pour fournir un surplus de stock par semaine. Un tirage suivant une loi exponentielle est effectué, avec une probabilité fixée, pour chaque arrêt de chaque scénario afin de déterminer une possible prolongation de celui-ci.

Pour un planning donné, le simulateur effectue un suivi du surplus du stock, correspondant aux aléas subis semaine après semaine, pour chacun des scénarios. Afin de prendre en compte le recours sur la production possible durant les campagnes de production, le simulateur applique les règles suivantes :

- Au début d'un arrêt, on compare la somme du niveau de stock planifié et du surplus de stock à la borne d'anticipation maximale. Si il y a violation, alors le simulateur incrémente le compteur de violation de l'ensemble des cycles à partir du cycle courant et passe au scénario suivant. Sinon le surplus de stock correspondant à la prolongation de l'arrêt, si il y en a un, est ajouté au surplus de l'unité et le simulateur se place sur le pas de temps correspondant au redémarrage.
- Durant les périodes de production hors stretch, le surplus de stock correspondant au scénario est ajouté à chaque pas de temps.
- Lorsqu'une campagne de production contient de la modulation, le surplus est diminué d'autant afin de représenter la possibilité de ne pas effectuer cette modulation pour absorber les aléas subis précédemment.

- Nous ne prenons pas en compte le surplus dans le cas d'une campagne avec stretch.

En sortie du simulateur, nous obtenons pour chaque unité et chaque cycle, le pourcentage de scénarios dans lesquels une violation se produirait avant la fin de ce cycle en l'absence de ré-optimisation. Un pourcentage de violation faible correspond alors un planning stable car ayant moins de risque de nécessiter une modification des dates d'arrêts lors des ré-optimisations futures.

4.6.5 Étude de cas

Nous présentons ici une étude de cas réalisée sur un site à 4 unités. Notre objectif est de montrer comment les différentes méthodes proposées permettent un contrôle fin entre d'une part le coût du planning et d'autre part le risque de devoir ré-organiser celui-ci suite au report d'un arrêt.

La figure 4.23 représente le planning nominal obtenu pour l'une des instances comportant un unique site de quatre unités nucléaires ainsi que son évaluation par le simulateur. Chaque ligne correspond au planning d'une des unités du site ; les arrêts sont représentés par une zone grisée. Les zones situées entre les arrêts correspondent aux campagnes de production et contiennent plusieurs informations :

- La première ligne contient deux chiffres. Celui de gauche correspond au stock cible du planning en nombre de semaines de production à pleine puissance et celui de droite à la valeur de l'anticipation maximale. Ainsi la case rouge de la première ligne correspond à un arc de production à pleine puissance avec un arrêt en anticipation avec un stock de trois semaines de production alors que la borne d'anticipation maximale de l'unité correspond à 3.93 semaines de productions. Les périodes de production avec modulation, éventuellement suivit d'un stretch, correspondent au stock cible ayant une valeur nulle.
- Le pourcentage affiché correspond au pourcentage de violations du cycle évalué par le simulateur. Nous avons associé un code couleur à ces pourcentages de violations :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{violation}) \leq 25\% &\Rightarrow \text{vert} \\ 25\% \leq \mathbb{P}(\text{violation}) \leq 50\% &\Rightarrow \text{orange} \\ 50\% \leq \mathbb{P}(\text{violation}) \leq 75\% &\Rightarrow \text{rouge} \\ 75\% \leq \mathbb{P}(\text{violation}) &\Rightarrow \text{noir} \end{aligned}$$

Les unités 1,2 et 4 présentent ici des probabilités de violation acceptables. Elle est nulle pour le premier cycle des unités 2 et 4, faible pour le premier cycle de l'unité 1 (18%) car son arrêt est proche. En revanche, le stock cible du prochain arrêt de l'unité 3 est proche du niveau maximum d'anticipation (4 sur 4.4). De plus cet arrêt est lointain ce qui augmente l'incertitude concernant le niveau de stock réel au début de celui-ci. Le simulateur évalue la probabilité de devoir repousser cet arrêt à plus de 60%. De plus, celui-ci est suivi d'un deuxième cycle un arrêt en anticipation. La probabilité de devoir modifier la date de ce deuxième arrêt augmente alors à près de 90%.

C'est principalement la première période de production de l'unité 3 qui pose problème ici. On peut tenter d'appliquer une méthode de filtrage, utilisant les probabilités de violation décrites en section 4.6.2, afin d'interdire cette première période de production. Celle-ci ayant une probabilité de violation 60.2%, un filtrage des arcs ayant une probabilité de violation supérieure à 60% devrait l'éliminer. Cette méthode obtient le planning de la figure 4.24 :

Ce graphique est similaire à celui du planning nominal mais contient deux informations supplémentaires :

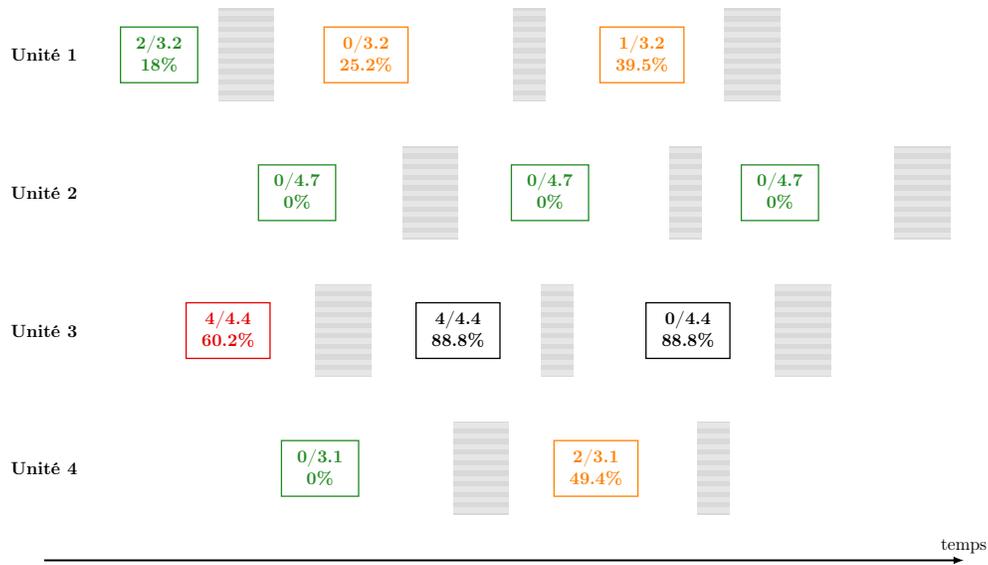


FIGURE 4.23: Évaluation du planning nominal par le simulateur

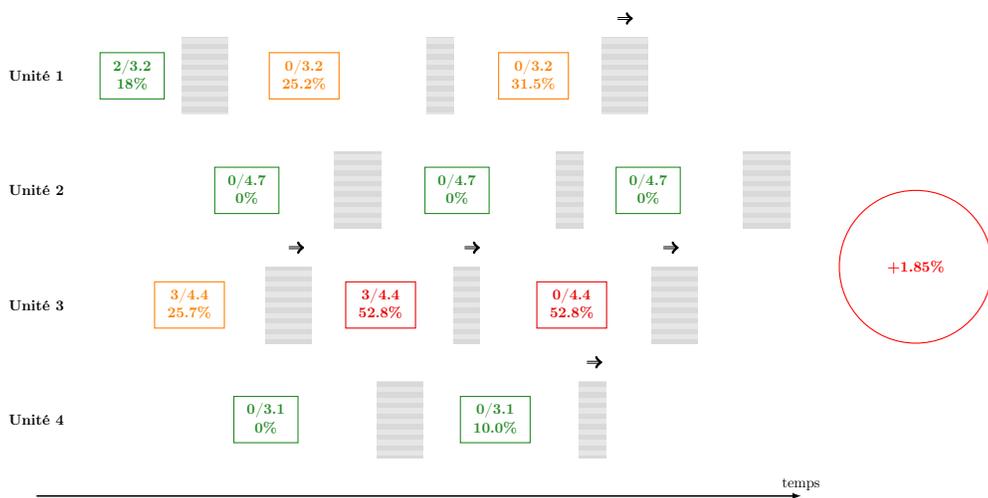


FIGURE 4.24: Planning filtrage 60% : Site 4 Unités

- Dans le cercle rouge à droite se trouve le pourcentage de surcoût de ce planning par rapport au planning nominal, ici 1.85% ;
- Les flèches noires au-dessus des arrêts indiquent les mouvements effectués par rapport au planning nominal.

Ici, le filtrage a eu l'effet escompté, la première période de production de l'unité numéro 3 a été allongée d'une semaine permettant de diminuer de 25% la probabilité de violation de cette contrainte d'anticipation maximale, qui s'établit désormais à 25.7%. Les arrêts suivants de l'unité 3 ont également été repoussés et leur probabilité de violation a diminué du même ordre de grandeur que celle du premier cycle. Des effets sont observés sur les planning des autres unités du site faisant ici, par chance, diminuer leur probabilité de violation. Une approche par filtrage ne prend cependant pas en compte un enchaînement d'aléas pouvant se produire sur

plusieurs cycles consécutifs comme c'est toujours le cas pour l'enchaînement des deux cycles en anticipations de l'unité 3. Cet enchaînement conduit à une probabilité de violation de l'anticipation maximale lors du second arrêt de l'unité 3 de 52.8%. De plus, une valeur de filtrage trop basse peut rendre l'instance irréalisable comme le montreront nos tests numériques de la prochaine section.

L'approche par budget d'incertitude présentée en section 4.23 prend en compte un surplus fixe $\hat{f}s$ de stock par campagne de production. Le surplus est diminué lors de l'arrêt, en raison du coefficient de rechargement appliqué au stock. C'est pourquoi le plus grand coefficient d'une contrainte d'anticipation maximale robuste sera toujours celui de la période de production courante. Le réglage du coefficient Γ à 2 entraîne la prise en compte d'un surplus éventuel d'une semaine de stock pour l'arc courant et d'un surplus $Q \approx 0.75$ pour le cycle précédent.

Le modèle considère pour le second cycle de l'unité 3 un surplus de stock possible composé de :

- 1 semaine de stock pour le cycle 2
- 0.75 semaine de stock pour le 1er cycle

Le stock cible du second cycle de l'unité 3 dans le planning obtenu par filtrage est de 3 semaines de stock pour une anticipation maximale de 4.4 semaines de stock. Pour cet arc la contrainte robuste est violée puisque le stock cible de 3 semaines auquel s'ajoute les 1.75 semaines de surplus pris en compte dépasse la valeur de l'anticipation maximale. Cet arc ne sera donc choisi que si nécessaire. La figure 4.25 représente le planning obtenu et la flèche noire la modification effectuée par rapport au planning ayant été obtenu par le filtrage à 60%. Cependant aucun filtrage n'a été effectué ici, seules les contraintes robustes limitent le choix de certains arcs quand c'est possible. Le problème est toujours réalisable.

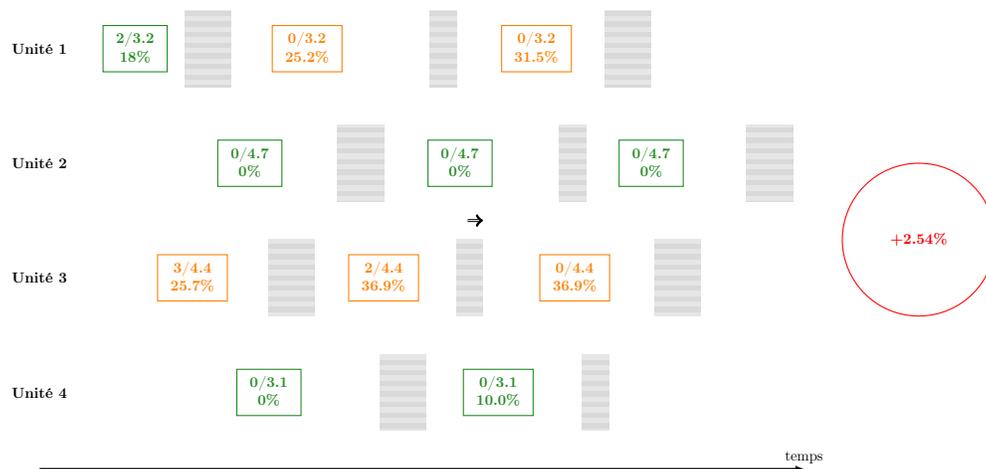


FIGURE 4.25: Planning $\Gamma = 2$: Site 4 Unités

Le second arrêt de l'unité 3 est ici repoussé d'une semaine pour vérifier la contrainte robuste. La probabilité de devoir ré-optimiser le planning pour éviter la violation de l'anticipation maximale pour le second cycle de l'unité 3 est descendu à 36.9%. Pour aller encore plus loin, on aimerait pouvoir diminuer le pourcentage de violation lors du premier arrêt de l'unité 3 qui reste relativement important à 25.7%. Cependant, nous avons atteint ici les limites de la méthode par budget d'incertitude avec un surplus $\hat{f}s$ fixe, augmenter cette valeur pourrait mener à des solutions trop conservatives. La figure 4.26 représente les modifications du planning obtenu en faisant passer le paramètre $\hat{f}s$ à 2.

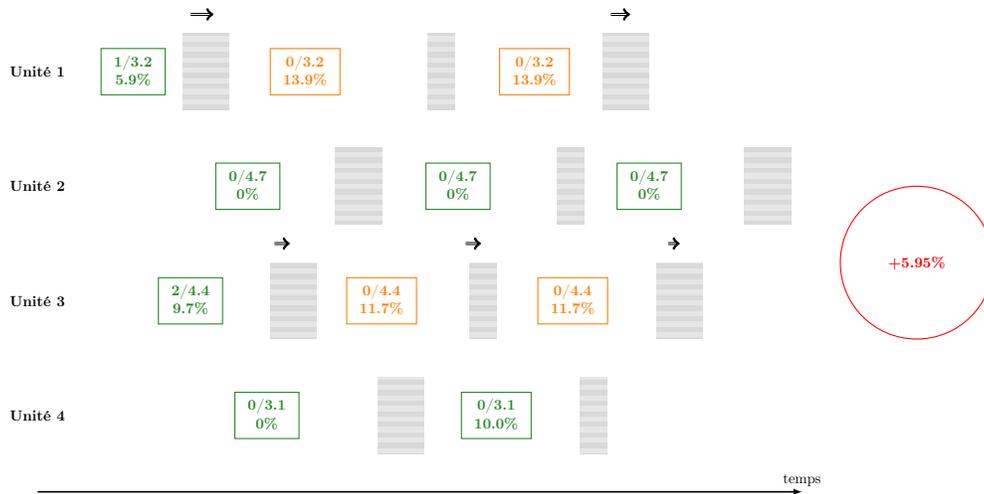


FIGURE 4.26: Planning $\hat{f}s(e) = 2, \Gamma = 2$: Site 4 Unités

Les planning des unités 1 et 3 ont été modifiés. Le premier arrêt de l'unité 1 ne présentait que 18% de probabilité de violation mais a été repoussé par l'algorithme car la marge de 2 semaines de surplus par rapport à l'anticipation maximale n'était pas respectée. Le risque de ré-organisation est ici très faible 10% maximum au 1er cycle, 40% au second. Cependant, le surcoût de ce planning par rapport au planning nominal est deux fois plus important que le surcoût du planning précédent (correspondant à $\hat{f}s = 1$). Il est difficile ici de contrôler le prix de la robustesse. L'approche que nous avons appelée « approche combinée » considère un surplus de stock dépendant de l'arc considéré, ce surplus correspondant à la probabilité de protection fournit en paramètre à la méthode. Pour une protection de 75% et $\Gamma = 2$ nous obtenons le planning de la figure 4.27.

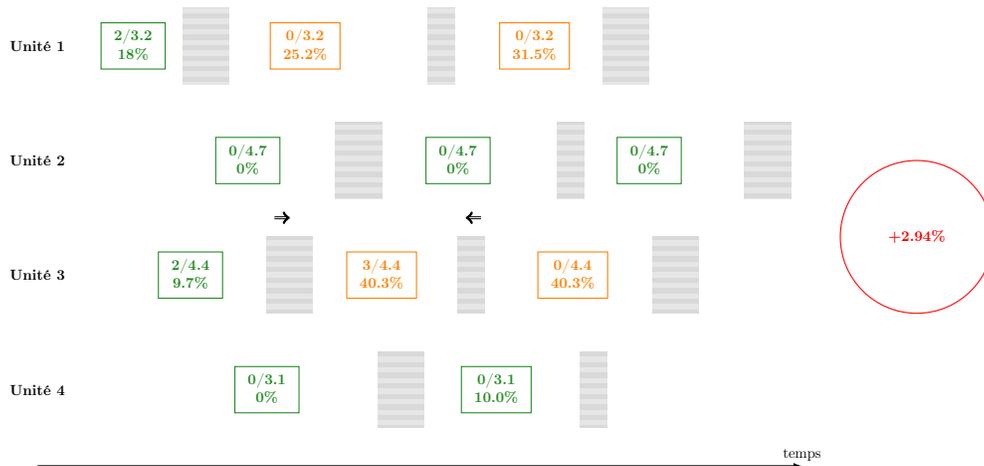


FIGURE 4.27: Planning Mixte : Site 4 Unités

Ici, le premier arrêt de l'unité 3 a bien été repoussé car sa probabilité de violation était de 25.2% alors qu'une protection de 75% revient à considérer un surplus de stock pour cet arc dans la contrainte robuste correspondant au maximum des 25% pires réalisations. On obtient alors une faible probabilité de violation pour le 1er cycle de l'unité 3 mais un surcoût du planning restant modéré à 2.94%.

Cette méthode permet donc un meilleur contrôle du prix de la robustesse associé au gain en stabilité du planning obtenu.

4.6.6 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section la moyenne des résultats obtenus par les différentes approches sur des instances ne comprenant qu'un site nucléaire. Les résultats représentent la moyenne de 40 instances générées pour chaque site de taille donné.

Les résultats du problème nominal sont présentés dans le tableau 4.4 :

- La colonne Site présente la taille de sites considérée en nombre d'unités ;
- La colonne CPU(s) présente le temps de résolution ;
- La colonne Cycle x, présente le pourcentage de scénarios pour lesquels une violation se produit à la fin du cycle x pour l'une des unités du site. A noter que la colonne «cycle 2 » correspond également au pourcentage total d'instances présentant une violation, le nombre maximal de cycles étant de 2 dans nos instances.

Site	CPU(s)	% Cycle 0	% Cycle 1	% Cycle 2 / total
2	2.54	12.76	29.72	38.50
4	8.85	39.86	67.12	78.51
6	12.80	49.23	78.77	84.41

TABLE 4.4: Pourcentage de violation de l'anticipation maximale, dans les plannings nominaux

Les sites à deux unités, bien moins contraints par leur unique contrainte intra-sites, présentent un taux de violation relativement faible avec moins d'une instance sur deux présentant une violation. Les sites à quatre unités, fortement contraints par les contraintes de ressources entre arrêts, présentent un taux de violation important dès le premier cycle (39.86%) et une moyenne proche des 80% de violation sur l'ensemble de l'horizon. Les résultats obtenus pour le site à six unités sont proches de ceux du site quatre unités, avec un taux de violation proche des 50% dès le premier cycle et environ 85% des instances présentant une violation.

Nous présentons dans un premier temps les résultats de l'approche par filtrage des arcs. Les propriétés d'une unité en termes de contrainte de production et de stocks ne dépendent pas de la taille du site considéré. Le tableau présente le pourcentage d'arcs de production à pleine puissance filtrés en fonction de la valeur du filtrage. Celui-ci est proche des 50% pour une valeur de filtrage de 40%, augmentant le risque d'obtenir une instance non-réalisable ou de dégrader la valeur de la fonction objectif.

Valeur filtrage (%)	80	60	40
Arcs filtrés (%)	20	33	48

FIGURE 4.28: Pourcentage d'arc de pleine puissance filtrés

Les résultats de l'approche par filtrage sont présentés dans le tableau 4.5, par rapport au tableau des résultats du problème nominal les nouvelles colonnes sont :

- « filtrage » : la probabilité de violation au dessus de laquelle un arc est filtré lors de la création du graphe ;

- « % infaisables » : pourcentage d’instances rendues irréalisables par le filtrage ;
- « Prix » : surcoût du planning obtenu par rapport au coût du planning nominal.

L’approche est relativement efficace pour les sites à deux unités avec un nombre de violations divisé par deux à chaque cycle pour un filtrage des arcs avec une probabilité de violation supérieure à 40%, l’ensemble des instances restant réalisables. En revanche, pour les sites à quatre ou six unités des instances deviennent infaisables à partir d’un filtrage des arcs à plus de 60% de probabilité violations. Ce problème risque de s’intensifier sur les instances de taille plus importante, non seulement à cause de l’augmentation du nombre d’unités mais aussi à cause des contraintes de ressources entre arrêts inter-sites contraignant les plannings.

Site	filtrage	Temps	% infaisables	% Cycle 0	% Cycle 1	% Cycle 2	Prix
2	80	2.41	0	13.03	22.73	30.85	2.32
	60	1.80	0	9.59	16.68	22.30	4.61
	40	1.61	0	6.70	11.70	15.25	6.76
4	80	8.85,	0	38.31	54.56	64.43	0.96
	60	8.83	2.4	29.49	42.62	50.68	2.09
	40	5.83	12.1	17.20	24.99	32.25	2.51
6	80	11.63	0	47.39	68.74	74.43	0.64
	60	11.24	7.5	31.56	47.67	53.88	1.25
	40	9.71	22.5	14.15	23.61	28.75	2.01

TABLE 4.5: Résultats de l’approche par filtrage

L’approche par budget d’incertitude avec des coefficient $\hat{f}s$ fixés à 1 pour l’ensemble des arcs a été testée sur les 40 instances de chaque type de site pour des valeurs du paramètre Γ allant de 1 à 3. Le tableau 4.6 présente les résultats obtenus par cette approche :

- La colonne Γ contient le réglage de l’approche. $\Gamma = 1$ correspond à prendre une semaine de surplus pour chaque campagne de production avec arrêt en anticipation, alors que $\Gamma = 3$ correspond à prendre en compte un enchaînement d’aléas sur trois cycles consécutifs.
- La colonne « % Variables d’écart » contient le pourcentage d’instance nécessitant une variable d’écart pour rester réalisable.

Site	Γ	CPU(s)	% Variables d’écart	% Cycle 0	% Cycle 1	% Cycle 2	Prix
2	1	3.17	0.00	5.89	15.76	23.58	2.70
	2	4.05	0.00	5.92	11.49	15.23	4.82
	3	4.24	2.00	5.92	11.68	13.81	5.59
4	1	11.20	9.00	19.69	39.69	51.29	1.87
	2	20.46	9.00	19.06	32.99	41.61	2.58
	3	19.93	9.00	19.14	33.02	38.05	3.04
6	1	15.38	17.00	30.16	55.30	62.74	1.24
	2	24.05	17.00	29.22	46.41	53.21	1.66
	3	30.12	20.00	28.64	46.38	50.66	1.75

TABLE 4.6: Résultats obtenus par l’approche par budget d’incertitude avec surplus fixé à 1

Les temps de résolution restent proches de ceux du problème nominal pour $\Gamma = 1$, le pourcentage de violation est divisé par un facteur proche de deux pour le premier cycle et est réduit de 7 à 10% pour les deux cycles suivants. Pour $\Gamma = 2$, la probabilité de violation du premier cycle n'est pas modifiée. En revanche une diminution de 5 à 10% de violation est observée sur le second et le troisième cycle. Le temps de résolution est en revanche multiplié par deux. Le prix de cette robustesse reste modéré (inférieur à 5%). L'augmentation de la valeur du surplus $\hat{f}s$ pour l'ensemble des arcs mènent à des solutions trop conservatives comme le montre le tableau 4.7. Le coût de la robustesse est ici multiplié par un facteur compris entre 3 et 4 et le nombre d'instances utilisant des variables d'écart augmente fortement.

Sites	CPU(s)	Variables d'écart (%)	% Cycle 0	% Cycle 1	% Cycle 2	Prix
2	3.44	12.00	2.70	4.73	6.41	16.88
4	14.22	26.00	13.37	18.70	21.07	8.50
6	48.78	60.00	19.60	31.22	33.68	4.28

TABLE 4.7: Résultats obtenus par l'approche par budget d'incertitude avec surplus fixé à 2

L'approche mixte permet de considérer une valeur spécifique de surplus pour chaque arc. Les arcs du premier cycle n'ont un surplus qui ne prend pas en compte une éventuelle prolongation d'arrêt puisque leur cycle de production est en cours. Les arcs des cycles suivants ont un surplus qui prend en compte à la fois les prolongations d'arrêts et les pannes fortuites en campagne. Cette approche prend comme entrée une valeur de Γ , ici fixée à deux, et un pourcentage de protection p . Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8.

Sites	p	CPU(s)	Variables d'écart (%)	% Cycle 0	% Cycle 1	% Cycle 2	Prix
2	75	4.87	0	4.40	13.69	23.83	5.46
	85	4.78	3	2.15	7.93	16.46	8.86
	95	4.33	45	1.75	4.46	8.99	17.38
4	75	18.38	12	17.08	35.98	51.56	2.17
	85	16.88	25	12.06	27.48	40.93	3.63
	95	14.85	73	10.48	19.54	28.89	7.11
6	75	26.05	23	22.11	50.22	59.32	1.44
	85	25.88	30	17.37	42.51	49.90	1.83
	95	27.85	73	14.84	36.09	43.89	3.83

TABLE 4.8: Résultats obtenus par l'approche combinée

Les temps de résolution de cette méthode sont proche de ceux de l'approche utilisant un surplus $\hat{f}s$ fixé. Les réglages de la protection p à 75% et 85% améliorent la qualité des solutions en contrepartie d'un prix modéré de cette robustesse. Cette approche permet donc un contrôle plus important de cet équilibre. Enfin, il est possible de réduire le prix de la robustesse en contrepartie d'une probabilité de violation accrue sur les cycles 1 et 2 en faisant baisser la probabilité de protection au fil des cycles. Le tableau 4.9 présente les résultats obtenus lorsqu'on considère une protection initiale de 95% et une baisse de cette protection de 25% par cycle. Ainsi le modèle considérera un surplus de stock possible correspondant aux 5% « pire cas » pour le premier cycle, aux 30% pour le second et au 55% pour le troisième.

Sites	CPU(s)	Variables d'écarts (%)	% Cycle 0	% Cycle 1	% Cycle 2	Prix
2	4.67	21.00	1.22	8.67	15.81	12.16
4	16.51	48.00	9.78	34.83	47.63	3.73
6	23.24	41.00	14.74	47.42	60.18	1.74

TABLE 4.9: Résultats obtenus par l'approche combinée

Si on compare les résultats obtenus aux lignes correspondantes au réglage identique sans baisse de la protection du tableau 4.8 on observe une diminution du prix de la robustesse en contrepartie d'une augmentation de la probabilité de violation des cycles 1 et 2. Le réglage de ce paramètre de baisse de protection conduit donc à un meilleur contrôle par l'utilisateur de la protection désirée sur chaque cycle.

4.6.7 Bilan

Nous avons proposé ici une approche exploitant une méthode par budget d'incertitude pour la robustesse des contraintes d'anticipation maximale. L'idée de cette approche est de considérer le surplus de stock, pouvant provenir du cycle courant ou des cycles précédents, comme des coefficients incertains de la matrice des contraintes dont la valeur nominale est nulle. Cette méthode permet de prendre en compte la décision de recours consistant à ne pas utiliser la modulation planifiée, recours qui sera utilisé en priorité dans la pratique. Nous avons ensuite amélioré notre approche en liant les coefficients incertains aux lois de probabilité des aléas considérés. Ceci permet une amélioration du contrôle des plannings obtenus en forçant le modèle à éviter un arc donné par un réglage adapté des paramètres de protection et de baisse celle-ci.

L'étude de cas réalisé et nos résultats numériques ont montré comment cette méthodologie permet un contrôle fin par l'utilisateur de l'équilibre entre ré-organisation et coût du planning.

4.7. Robustesse aux aléas de production pour limiter la défaillance

Au Chapitre 3 nous avons vu comment l'utilisation de plusieurs scénarios de demande et de disponibilité des unités permettait une amélioration significative du planning et un gain conséquent en terme de coût. Ce gain était en parti obtenu grâce à la réduction des appels au « groupe de défaillance », représentant les cas où la capacité de production totale du parc et du marché spot ne suffit pas à satisfaire la demande (cf. 3.2.2).

Nous avons traité dans les sections précédentes deux conséquences des prolongations d'arrêts et pannes en campagnes : la violation possible des contraintes de ressources entre arrêts et le risque de devoir repousser un arrêt pour éviter la violation de la contrainte d'anticipation maximale. Un troisième aspect concerne la perte de production de l'unité impactée par l'aléa, obligeant EDF à faire appel à un groupe de substitution, le groupe de défaillance dans le pire des cas. L'idée de cette section est d'exploiter le fait que dans les cas où le coût de substitution est très important on peut simplifier la contrainte de satisfaction de la demande en exploitant le fait que toute les unités nucléaires produiront alors à pleine puissance.

Le groupe de défaillance est ici dissocié des autres unités de production non-nucléaires et noté *DEFFA*. Sa puissance est infinie et son coût est de 3000 Euros/MWh.

Supposons que l'on se trouve à une semaine pour laquelle une défaillance se produit. La contrainte de satisfaction de l'équilibre offre/demande peut alors se ré-écrire :

$$\sum_i \left(\sum_{(u,v) \in X_{iw} + Y_{iw}} \bar{P}_{iw} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w}^\omega \delta_{(u,v)} \right) + U_w^\omega + DEFFFA_w \geq D_w^\omega \quad \forall \omega, w$$

Or, les pannes en campagne et les prolongations d'arrêt peuvent ici être modélisées comme un coefficient aléatoire venant annuler la production d'une unité donnée. En appliquant le paradigme de Γ -robustesse on obtient la contre-partie robuste suivante :

$$\sum_i \left(\sum_{(u,v) \in X_{iw} + Y_{iw}} \bar{P}_{iw} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w}^\omega \delta_{(u,v)} \right) + DEFFFA_w - \beta_{w,\omega}(\delta, \Gamma) \geq D_w^\omega - U_w^\omega \quad \forall \omega, w$$

Avec :

$$\beta_{w,\omega}(\delta^*, \Gamma_{w,\omega}) = \max \sum_i \left(\sum_{(u,v) \in X_{iw} + Y_{iw}} \bar{P}_{iw} \delta_{(u,v)}^* + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w}^\omega \delta_{(u,v)}^* \right) z_i \quad (4.63)$$

$$\sum_i z_i \leq \Gamma_{w,\omega} \quad (4.64)$$

$$0 \leq z_i \leq 1, \quad \forall i \quad (4.65)$$

$$= \min \Gamma_{w,\omega} \nu_{w,\omega} + \sum_i \mu_{w,\omega,i} \quad (4.66)$$

$$\nu_{w,\omega} + \mu_{w,\omega,i} \geq \sum_{(u,v) \in X_{iw} + Y_{iw}} \bar{P}_{iw} \delta_{(u,v)}^* + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w}^\omega \delta_{(u,v)}^* \quad (4.67)$$

$$\nu_{w,\omega} \geq 0, \quad \mu_{w,\omega,i} \geq 0 \quad (4.68)$$

Le modèle que l'on cherchera à résoudre sera alors :

$$\min \sum_{jw} C_{jw} P_{jw}^\omega + 3000 DEFFFA_w + C_\gamma \sum_{w \in \mathcal{C}} \gamma_{\omega,w} \quad (4.69)$$

$$(4.28) - (4.37) \quad (4.70)$$

$$\sum_i \left(\sum_{(u,v) \in X_{iw} + Y_{iw}} \bar{P}_{iw} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w}^\omega \delta_{(u,v)} \right) + \gamma_{\omega,w} - \Gamma_{w,\omega} \nu_{w,\omega} - \sum_i \mu_{w,\omega,i} \geq D_w^\omega - U_w^\omega \quad \forall \omega, w \quad (4.71)$$

$$\nu_{w,\omega} + \mu_{w,\omega,i} \geq \sum_{(u,v) \in X_{iw} + Y_{iw}} \bar{P}_{iw} \delta_{(u,v)} + \sum_{(u,v) \in Z_{iw}} \bar{P}_{(u,v),w}^\omega \delta_{(u,v)} \quad (4.72)$$

$$\nu_{w,\omega} \geq 0, \quad \mu_{w,\omega,i} \geq 0 \quad (4.73)$$

Nous ne présentons pas de résultats numériques pour cette approche. En effet les instances générées pour analyser l'impact des approches robustes précédentes sont déterministes et ne permettent pas, en l'état, de tester celle-ci.

Ces contraintes impliquent l'ensemble des variables entières de premier niveau correspondant à des campagnes en cours durant la semaine w . Cette méthode pourrait être utilisée en complément de celle présentée aux Chapitres 2 et 3.

4.8. Synthèse

Notre objectif dans ce chapitre était de prendre en compte l'aléa de disponibilité des unités nucléaires relativement à la robustesse du planning aux prolongations d'arrêts et aux pannes fortuites en campagne. Nous avons axé ce travail prospectif sur les approches *robustes sans recours* et avec *contraintes en probabilité*, par opposition aux approches *robustes avec recours*, les premières étant susceptibles de s'intégrer plus facilement à court-terme dans le cadre proposé dans les premières parties de cette thèse.

Compte tenu de la complexité de gestion des données réelles et afin de nous s'assurer que les résultats ne souffraient pas d'un biais lié à l'utilisation de la seule instance industrielle dont nous disposions, nous avons donc développé un générateur d'instances adaptées à notre étude.

La structure particulière des contraintes d'arrêts intra-sites nous a permis de modéliser la robustesse à ces contraintes comme un problème bi-objectif, en supposant la durée de prolongation de chaque arrêt indépendante et bornée. Nous avons alors appliqué les méthodes classiques de « somme pondéré » et « ϵ -contrainte » afin de contrôler l'équilibre entre qualité de la solution et robustesse de celle-ci.

Sous ces conditions, nous avons également pu formuler et linéariser des contraintes probabilistes pour les sites de deux et quatre unités. Une proposition d'extension de cette approche pour le site comportant six unités a été formulée. Elle pourrait s'appliquer au traitement de la robustesse aux contraintes inter-sites.

L'hypothèse de prolongations bornées nous a permis de calculer la solution réalisable la plus conservative et de situer des solutions intermédiaires en termes de diminution du nombre de violations et de pourcentage de surcoût comparé à la solution pire cas. Une comparaison des différentes approches a montré la plus grande efficacité d'une approche de type ϵ -contrainte permettant de borner le nombre de violations. L'impact de la variation de la structure de la demande sur la robustesse des plannings a également abordée.

La robustesse par rapport à la contrainte d'anticipation maximale est essentielle puisque c'est une contrainte portant sur la sûreté. Nous avons tout d'abord ré-introduit explicitement une contrainte de ce type, celle-ci étant prise en compte implicitement dans notre modélisation. Ceci nous a permis d'appliquer avec succès une méthode à base de budget d'incertitude pour contrôler la possibilité de violation de cette contrainte face à un surplus de stock induit par l'aléa. Le calcul direct des probabilités de violation de chaque arc permet également, soit de réaliser un filtrage des arcs au moment de la création du graphe, soit d'adapter la méthode à base de budget d'incertitude en prenant en compte la distribution des aléas.

Ces travaux sur la robustesse, bien que plus prospectifs que ceux présentés aux chapitres précédents, répondent à un besoin industriel très important. Ils ouvrent des perspectives intéressantes pour intégrer cette dimension du problème dans les modélisations présentées aux Chapitres 2 et 3.

Chapitre 5

Bilan et Perspectives

Rappel des objectifs

Ces travaux de thèse portent sur la résolution de très grands problèmes linéaires stochastiques en nombres entiers. Nous les avons appliqués au problème du placement des arrêts des unités nucléaires, qui structure l'ensemble de la chaîne de décision du management d'énergie d'EDF.

Les deux objectifs principaux étaient les suivants :

1. Réaliser un passage à l'échelle d'une méthodologie exploitant des méthodes de reformulation et de décomposition afin de résoudre des instances industrielles comportant un nombre significatif de scénarios ;
2. Explorer les méthodologies permettant de prendre en compte la stochasticité de la disponibilité des unités nucléaires et la robustesse des solutions face à cet aléa.

Nous avons atteint ces deux objectifs. D'un point de vue industriel, le premier constitue pour EDF une avancée importante, compte tenu du fait que les outils actuellement utilisés pour résoudre ce problème sont basés sur des méthodes de recherche locale ne fournissant pas de solutions exactes ni de bornes à l'optimum.

Résumé des contributions

Les apports de cette thèse en lien avec le premier objectif sont rappelés ci-dessous :

Définition d'une formulation étendue efficace. En nous appuyant sur des travaux antérieurs menés par l'équipe RealOpt de l'INRIA, nous avons proposé une formulation bi-niveau séparant les décisions structurant le planning de celles dépendant des scénarios. Les décisions de premier niveau apparaissent comme les solutions de problèmes de plus court chemin dans un graphe d'états, tandis que celles de second niveau apparaissent comme solutions de problèmes linéaires, une fois celles de premier niveau fixées. Une partie essentielle de nos travaux a ensuite porté sur l'étude de reformulations permettant de diminuer la densité de la matrice des contraintes, pré-requis nécessaire à la résolution d'instances de taille réelle. La formulation retenue utilise des variables représentant, pour chaque pas de temps, la différence entre la production cumulative réelle de second niveau et la borne de production cumulative maximale correspondant aux décisions de premier niveau. Ces variables permettent de remplacer les parties triangulaires de la matrice des contraintes par des structures diagonales, plus creuses, améliorant la vitesse de résolution.

Résolution exacte des instances industrielles d'EDF. Une étape importante a été franchie d'un point de vue industriel. Le premier point ci-dessus nous permet d'obtenir la solution exacte des problèmes déterministes de taille réelle en moins de 8h sans nécessiter de planning initial, dans la pratique une solution ayant un gap à l'optimum inférieur à 1% est obtenue en moins de 30 minutes. Ce résultat semblait pourtant inaccessible en début de thèse. Il ouvre la voie à la réalisation d'un outil d'étude permettant d'évaluer à la fois l'efficacité de l'outil actuel mais aussi l'impact de différents facteurs sur la qualité des plannings obtenus (nombre de scénarios traités, précision du pas de temps utilisé ...).

Désagrégation du pas de temps à des niveaux infra-hebdomadaires. L'impact sur les solutions obtenues de la désagrégation du pas de temps à des niveaux infra-hebdomadaires a été étudié. La formulation mise au point permet d'obtenir en 24h par une résolution directe une solution de bonne qualité pour une désagrégation à sept pas de temps par semaine d'une instance industrielle déterministe.

Combinaison des reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders. Pour un nombre significatif de scénarios, la résolution directe de cette formulation n'est plus possible. La combinaison de reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders, permettant l'utilisation de méthodes de génération de coupes et de colonnes, s'avère nécessaire pour résoudre la relaxation linéaire du problème. Cette étape est suivie d'une phase heuristique permettant d'obtenir des solutions entières de bonne qualité. La combinaison des reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders présente des difficultés de mise en œuvre que nous avons surmontées en introduisant des variables cumulatives de capacité séparant le premier et le second niveau. De manière remarquable, la méthode obtenue résout la relaxation linéaire du problème en un temps demeurant quasiment constant avec le nombre de scénarios. En revanche, les variables additionnelles du problème ralentissent la phase d'obtention d'une solution entière.

Prise en compte d'un nombre significatif de scénarios dans les instances industrielles. Le point ci-dessus permet l'obtention de solutions de bonne qualité jusqu'à 48 scénarios de demande et de disponibilité des unités non-nucléaires dans un délai de 8h.

A noter que tous les apports théoriques des méthodes que nous avons développées dans cette partie ont été confirmés par les outils industriels d'EDF évaluant les plannings sur un grand nombre de scénarios représentant les équilibres offre/demande futurs dans le système électrique français.

Les apports sont les suivants concernant le second objectif, correspondant à l'aspect plus prospectif de la disponibilité des unités nucléaires :

Robustesse des solutions pour les contraintes de ressources entre arrêts. Nous avons montré qu'il était possible de linéariser une formulation probabiliste des contraintes intra-sites de ressources entre arrêts, pour les sites comprenant deux et quatre unités. Une extension de cette approche pour le site à six unités a été proposée. Elle constitue une première étape de généralisation de cette méthodologie à l'ensemble des contraintes de ressources entre arrêts. Cette méthode a été comparée à celles se ramenant à un problème bi-objectif par l'ajout de contraintes robustes et de variables artificielles. L'analyse des résultats montre qu'en utilisant ces méthodes, on obtient dans

la plupart des cas des solutions présentant un risque de violation bien plus faible que celui des solutions obtenues sans prise en compte de l'incertitude, ceci pour un prix modéré de la robustesse. L'approche par ϵ -contrainte s'est montrée la plus efficace, tandis que celle basée sur les contraintes en probabilité présente un potentiel intéressant pour de futurs travaux.

Stabilisation des solutions pour les contraintes d'anticipation maximale. Le respect des contraintes limitant le stock nucléaire résiduel au moment de l'arrêt, imposé par l'Autorité de Sûreté Nucléaire, est essentiel pour EDF. Plus que la robustesse du planning, c'est ici la stabilité de celui-ci dans le processus opérationnel de ré-optimisation mensuel qui est en jeu. Une méthode de robustesse statique par budget d'incertitude permet d'éliminer les enchaînements de périodes de production présentant un risque trop élevé de devoir repousser l'un des arrêts en raison de cette contrainte. Nous avons montré que ce type d'approche peut être utilisée pour obtenir un contrôle fin de l'équilibre entre risque de ré-organisation et prix de la robustesse.

A noter que les apports de ces approches relatives à la robustesse ont été évalués sur des données représentatives des instances réelles, générées par des outils développés dans le cadre de ces travaux.

Discussions et perspectives

Perspectives industrielles.

Le passage à l'échelle de la méthodologie, réalisé durant cette thèse, ouvre la voie à une industrialisation de celle-ci. Au-delà d'une étude paramétrique visant à optimiser l'usage des différentes librairies utilisées (IBM-Cplex, BaPCod, Librairies EDF ...), certaines pistes d'améliorations restent ouvertes :

- **Retrait des variables cumulatives de capacité de production pour la seconde phase de l'approche.** Nous avons vu que la phase de « projection », lors de la résolution de la relaxation linéaire par génération de coupes et de colonnes, constitue le point limitant lorsque l'on augmente le nombre de scénarios. L'ajout de variables cumulatives de capacité, séparant premier et second niveau, évite d'avoir à utiliser cette projection mais ralentit le solveur en PLNE lors de la deuxième phase qui permet d'obtenir des solutions entières. Une amélioration possible consisterait à utiliser ces variables dans la première phase de résolution de la relaxation linéaire puis à les remplacer par leur expression en fonction des variables de premier niveau dans la phase de recherche des solutions entières.
- **Prise en compte de l'aléa de disponibilité des unités nucléaires dans les scénarios.** L'aspect stochastique de la disponibilité des unités nucléaires n'a été que partiellement pris en compte ici. La méthodologie proposée s'adapte difficilement à des bornes de production nucléaire dépendant du scénario, puisque les décisions de production totale d'énergie sur une période sont des décisions de premier niveau. Il est envisageable de rendre ces bornes spécifiques à chaque scénario tout en incluant l'aléa sur la disponibilité nucléaire, en limitant les décisions de premier niveau aux dates d'arrêts et aux dates d'entrée en stretch.
- **« Démarrage à chaud » de l'algorithme de Benders.** Le coût de satisfaction de la demande est une fonction linéaire par morceaux croissante, correspondant à l'appel successif d'unités de plus en plus chères pour un pas de temps donné. En exploitant cette information, il serait possible de définir un ensemble initial de coupes de Benders éliminant des colonnes correspondant à des décisions de premier niveau de coût prohibitif, typiquement associées à une mauvaise disponibilité nucléaire pendant les périodes de forte demande.

- **Désagrégation du pas de temps :** La méthodologie proposée dans cette thèse permet la prise en compte d'un pas de temps infra-hebdomadaire et en a confirmé l'intérêt. Les tests effectués ont révélé une augmentation limitée du temps de résolution directe de la relaxation linéaire, mais une augmentation importante du temps d'obtention de la solution entière. Une étude paramétrique du solveur utilisé permettrait de comprendre l'origine de ce comportement. Au-delà, définir des capacités de production incrémentale au pas de temps considéré, et non à la semaine comme c'est le cas actuellement, permettrait de diminuer la densité des contraintes liant décisions de premier et second niveau, et donc, probablement, d'améliorer les temps de calcul.
- **Contraintes en probabilité pour la robustesse :** Nous avons montré qu'une approche basée sur des contraintes en probabilité est envisageable pour traiter l'aléa impactant les contraintes de ressources entre arrêts. Il serait intéressant d'approfondir cette approche et de la généraliser.
- **Approches combinant optimisation stochastique et robuste pour les aléas impactant le coût de satisfaction de la demande.** Nous avons mis au point d'une part une méthode efficace de résolution du problème formulé comme un problème stochastique (Chapitres 2 et 3) , et d'autre part une méthode permettant de se protéger des surcoûts, en particulier engendrés par l'aléa sur la disponibilité nucléaire (prolongations d'arrêt et pannes fortuites (4.7)). Une combinaison de ces deux approches serait intéressante d'un point de vue industriel. A noter que la combinaison des approches stochastiques et robustes est un thème de recherche actif dans la communauté académique ([Zhao and Guan, 2013],[Wiesemann et al., 2014]).

Perspectives académiques.

Sur le plan académique, plusieurs axes de recherche pourraient faire l'objet de futurs travaux :

- **Rôle des variables « cumulatives » dans les méthodes de décomposition pour les problèmes bi-niveau.** Nous avons constaté dans nos travaux le rôle important joué par l'introduction de variables dites « cumulatives » dans la mise en œuvre d'une décomposition combinant des reformulations de Dantzig-Wolfe et de Benders, pour le problème bi-niveau que nous avons à résoudre. En effet, ces variables permettent de limiter le nombre de colonnes additionnelles, tout en évitant le processus coûteux de projection rendu nécessaire par la combinaison des deux décompositions. Approfondir l'analyse théorique du rôle joué par ces variables dans ce type d'approche afin d'améliorer les formulations constitue à notre avis un sujet de recherche prometteur.
- **Heuristiques primales pour l'obtention de solutions entières après génération de colonnes.** Les méthodes que nous avons proposées permettent de résoudre efficacement la relaxation linéaire du problème. Comme nous l'avons vu section 2.4.4, il est ensuite nécessaire d'appliquer des heuristiques afin d'obtenir des solutions entières. Nous avons constaté que l'heuristique Restricted IP permettait d'obtenir des solutions de bonne qualité pour toutes les instances du problème testées, alors qu'il n'existe pas de garantie théorique que ce soit le cas. Il serait intéressant d'approfondir cette question, et en particulier d'étudier les conditions d'existence de solutions entières dans ce cadre.
- **Stabilisation des décisions dans un processus de ré-optimisation dynamique sur un horizon glissant.** Ce sujet, qui correspond dans notre problème à la prise en compte des recours sur les dates d'arrêts au fil des ré-optimisations mensuelles du planning, n'a pas été traité dans cette thèse. Il constitue une difficulté théorique importante puisqu'il se modélise par un problème avec recours entiers multi-étapes, les dates d'arrêts finalement exercées résultant de celles recalculées au cours des différentes ré-optimisations.

Une piste pour attaquer ce problème consisterait à ne modéliser que les recours sur les dates d'arrêts associés aux ré-organisations futures du planning, sans prendre en compte le recours sur la production des unités. Dans ce cadre, des fonctions de recours consistant à repousser les arrêts pourraient être associées aux aléas impactant la contrainte d'anticipation maximale. Des approches de type « k-adaptability » limitant le nombre de recours à un ensemble choisi au premier niveau et effectuant une partition de l'ensemble d'incertitude pourraient alors être investiguées.

Bibliographie

- H. B. Amor, J. Desrosiers, and A. Frangioni. *Stabilization in column generation*. Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions, 2004.
- S. Ben Salem. *Gestion robuste de la production électrique à horizon court terme*. PhD thesis, Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris, 2011.
- A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Mathematics of operations research*, 23(4) :769–805, 1998.
- A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations research letters*, 25(1) :1–13, 1999.
- J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, 4(1) :238–252, 1962a.
- J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, 4(1) :238–252, 1962b.
- D. Bertsimas and C. Caramanis. Finite adaptability in multistage linear optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(12) :2751–2766, 2010.
- D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. *Operations research*, 52(1) :35–53, 2004.
- D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*, volume 6. Athena Scientific Belmont, MA, 1997.
- D. Bienstock, M. Chertkov, and S. Harnett. Chance-constrained optimal power flow : Risk-aware network control under uncertainty. *Siam Review*, 56(3) :461–495, 2014.
- H. Blondel and C. Roblin. Le modele datarrep de placement des arrêts pour rechargement des tranches nucleaires rep : Note de principe. HR-35/94/027, 1994.
- P. Bonami. *Étude et mise en œuvre d'approches polyédriques pour la résolution de programmes en nombres entiers ou mixtes généraux*. PhD thesis, Université Paris 6, 2003.
- F. Brandt. Solving a large-scale energy management problem with varied constraints, 2010.
- D. Catanzaro, R. Aringhieri, M. Di Summa, and R. Pesenti. A branch-price-and-cut algorithm for the minimum evolution problem. *European Journal of Operational Research*, 244(3) :753–765, 2015.
- A. Charnes, W. W. Cooper, and G. H. Symonds. Cost horizons and certainty equivalents : an approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science*, 4(3) :235–263, 1958.

- M. Conforti, G. Cornuéjols, and G. Zambelli. Extended formulations in combinatorial optimization. *4OR*, 8(1) :1–48, 2010.
- I. Contreras, J. F. Cordeau, and G. Laporte. Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location. *Operations research*, 59(6) :1477–1490, 2011.
- E. T. Coughlan, M. E. Lübbecke, and J. Schulz. A branch-price-and-cut algorithm for multi-mode resource leveling. *European Journal of Operational Research*, 245(1) :70–80, 2015.
- R. J. Dakin. A tree-search algorithm for mixed integer programming problems. *The computer journal*, 8(3) :250–255, 1965.
- G. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 2016.
- G. B. Dantzig and P. Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operations research*, 8(1) :101–111, 1960.
- I. Das and J. E. Dennis. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. *Structural optimization*, 14(1) :63–69, 1997.
- G. Dereu. Roadef/euro challenge : Final results. <http://www.roadef.org/challenge/2010/files/talks/finalResultsEDF.pdf>, 2010.
- G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M. M. Solomon. *Column generation*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2006.
- G. Desaulniers, J. G. Rakke, and L. C. Coelho. A branch-price-and-cut algorithm for the inventory-routing problem. *Transportation Science*, 50(3) :1060–1076, 2015.
- J. Desrosiers and M. E. Lübbecke. Branch-price-and-cut algorithms. *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. John Wiley & Sons, Chichester, pages 109–131, 2011.
- B. Detienne. Extended formulations for robust maintenance planning at power plants. In *Gaspard Monge Program for Optimization : Conference on Optimization and Practices in Industry PGMOCOP14*, Saclay, France, Oct. 2014. URL <https://hal.inria.fr/hal-01104728>.
- B. Detienne, R. Sadykov, H. Şen, and F. Vanderbeck. Revisiting Benders Decomposition. In *Symposium Combinatorial Optimization and Applications*, Edinburgh, United Kingdom, Feb. 2017. URL <https://hal.inria.fr/hal-01467283>.
- D. Devillaine. Note de principe de la fonction gloabal pi du logiciel orion. HR-35/03/012/A, 2003.
- E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, 1(1) :269–271, 1959.
- J. Ding and A. Somani. A long-term investment planning model for mixed energy infrastructure integrated with renewable energy. In *Green Technologies Conference, 2010 IEEE*, pages 1–10. IEEE, 2010.
- N. Dupin. *Modélisation et résolution de grands problèmes stochastiques combinatoires : application à la gestion de production d’électricité*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Lille 1, 2015.

- N. Dupin and E.-G. Talbi. Dual heuristics and new lower bounds for the challenge euro/roaDEF 2010. *Matheuristics 2016*, page 60, 2016.
- M. Fischetti and M. Monaci. Light robustness. In *Robust and online large-scale optimization*, pages 61–84. Springer, 2009.
- M. L. Fisher. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management science*, 27(1) :1–18, 1981.
- L. R. Ford and D. R. Fulkerson. A suggested computation for maximal multi-commodity network flows. *Management Science*, 5(1) :97–101, 1958.
- F. Fourcade. Formulation lineaire du placement des arrêts du nucleaire. HR-35/93/002, 1993a.
- F. Fourcade. Placement des arrêts du nucleaire : Resolution par programmation lineaire en nombres entiers. HR-35/93/023, 1993b.
- F. Fourcade, T. Eve, and T. Socroun. Optimiser les rechargements des reacteurs nucleaires franÇais. HR31/95/010.1995, 1995.
- F. Fourcade, E. Johnson, M. Bara, and P. Cortey-Dumont. Optimizing nuclear power plant refueling with mixed-integer programming. *European journal of operational research*, 97(2) :269–280, 1997.
- F. Gardi and K. Nouioua. Local search for mixed-integer nonlinear optimization : a methodology and an application. *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*, pages 167–178, 2011.
- H. Gavranović and M. Buljubašić. A hybrid approach combining local search and constraint programming for a large scale energy management problem. *RAIRO-Operations Research*, 47(4) : 481–500, 2013.
- A. M. Geoffrion. Elements of large-scale mathematical programming part i : Concepts. *Management Science*, 16(11) :652–675, 1970.
- H. Gevret. Documentation artémis. 6125-1910-2018-02745-FR, 6125-1910-2018-02746-FR, 2018.
- S. Godskesen, T. S. Jensen, N. Kjeldsen, and R. Larsen. Solving a real-life, large-scale energy management problem. *Journal of Scheduling*, 16(6) :567–583, 2013.
- A. Gorge. *Programmation semi définie positive : méthodes et algorithmes pour le management d'énergie" Doctorat en mathématiques appliquées*. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, 2010.
- Y. Haimes. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1(3) :296–297, 1971.
- J. Han, P. Bendotti, B. Detienne, G. Petrou, M. Porcheron, R. Sadykov, and F. Vanderbeck. Extended Formulation for Maintenance Planning at Power Plants. In *ROADEF - 15ème congrès annuel de la Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision*, Bordeaux, France, Feb. 2014. Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00946294>.
- G. A. Hanasusanto, D. Kuhn, and W. Wiesemann. K-adaptability in two-stage robust binary programming. *Operations Research*, 63(4) :877–891, 2015.

- W. D. Harvey and M. L. Ginsberg. Limited discrepancy search. In *IJCAI (1)*, pages 607–615, 1995.
- C. Joncour. *Problèmes de placement 2D et application à l'ordonnancement : modélisation par la théorie des graphes et approches de programmation mathématique*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2011.
- V. Jost and D. Savourey. A 0–1 integer linear programming approach to schedule outages of nuclear power plants. *Journal of Scheduling*, 16(6) :551–566, 2013.
- V. Kaibel. Extended formulations in combinatorial optimization. *arXiv preprint arXiv :1104.1023*, 2011.
- M. Khemmoudj. *Modélisation et résolution de systèmes de contraintes : application au problème de placement des arrêts et de la production des réacteurs nucléaires d'EDF*. PhD thesis, Université Paris Nord, 2007.
- G. Laporte and F. V. Louveaux. The integer l-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse. *Operations research letters*, 13(3) :133–142, 1993.
- E. L. Lawler and D. E. Wood. Branch-and-bound methods : A survey. *Operations research*, 14(4) : 699–719, 1966.
- M. A. Lejeune and A. Ruszczyński. An efficient trajectory method for probabilistic production-inventory-distribution problems. *Operations Research*, 55(2) :378–394, 2007.
- Z. Li and Z. Li. Chance constrained planning and scheduling under uncertainty using robust optimization approximation. *IFAC-PapersOnLine*, 48(8) :1156–1161, 2015.
- C. Lim. Relationship among benders, dantzig–wolfe, and lagrangian optimization. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, 2010.
- M. E. Lübbecke. Column generation. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2010.
- M. E. Lübbecke and J. Desrosiers. Selected topics in column generation. *Operations research*, 53(6) :1007–1023, 2005.
- R. Lusby, L. F. Muller, and B. Petersen. A solution approach to the roadef/euro 2010 challenge based on benders decomposition. *Shortest Paths and Vehicle Routing*, page 201, 2010.
- R. T. Marler and J. S. Arora. The weighted sum method for multi-objective optimization : new insights. *Structural and multidisciplinary optimization*, 41(6) :853–862, 2010.
- D. R. Morrison, S. H. Jacobson, J. J. Sauppe, and E. C. Sewell. Branch-and-bound algorithms : A survey of recent advances in searching, branching, and pruning. *Discrete Optimization*, 19 : 79–102, 2016.
- H. Nguyen phong chau. Pprd orion note de principe sur l'algorithme du modèle global avec planning initial. HR31/98/007, 1998.
- W. Oliveira, C. Sagastizábal, and S. Scheimberg. Inexact bundle methods for two-stage stochastic programming. *SIAM Journal on Optimization*, 21(2) :517–544, 2011.

- M. Padberg and G. Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM review*, 33(1) :60–100, 1991.
- J. Peekstok and E. Kuipers. Roadef/euro 2010 challenge. 2010.
- A. Pessoa, R. Sadykov, E. Uchoa, and F. Vanderbeck. In-out separation and column generation stabilization by dual price smoothing. In *International Symposium on Experimental Algorithms*, pages 354–365. Springer, 2013.
- R. Pira, Clement et Wolfer-Calvo. Column and row generation for stochastic optimization, 2015.
- M. Porcheron, A. Gorge, O. Juan, T. Simovic, and G. Dereu. Challenge roadef/euro 2010 : A large-scale energy management problem with varied constraints, 2010. URL <http://challenge.roadef.org/2010/files/sujetEDFv22.pdf>.
- A. Prékopa. Probabilistic programming. *Handbooks in operations research and management science*, 10 :267–351, 2003.
- G. M. Ribeiro, G. Desaulniers, and J. Desrosiers. A branch-price-and-cut algorithm for the workover rig routing problem. *Computers & Operations Research*, 39(12) :3305–3315, 2012.
- P. Roussel. Optimisation du planning de rechargement d’un parc de réacteurs p.w.r. le modèle planum. HR-31-0536, 1981.
- A. Rozenknop, R. Wolfer-Calvo, L. Alfandari, D. Chemla, and L. Létocart. Solving the electricity production planning problem by a column generation based heuristic. *Journal of Scheduling*, 16(6) :585–604, 2013.
- R. Sadykov, F. Vanderbeck, A. Pessoa, I. Tahiri, and E. Uchoa. Primal heuristics for branch-and-price. 2015.
- J. Salmeron, K. Wood, and R. Baldick. Worst-case interdiction analysis of large-scale electric power grids. *IEEE Transactions on power systems*, 24(1) :96–104, 2009.
- H. Şen. *Cut generation based algorithms for unrelated parallel machine scheduling problems*. PhD thesis, 2015.
- A. L. Soyster. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, 21(5) :1154–1157, 1973.
- S. Spoorendonk. *Cut and column generation*. PhD thesis, PhD thesis, Technical University of Denmark, 2008.
- A. Subramanyam, C. E. Gounaris, and W. Wiesemann. K-adaptability in two-stage mixed-integer robust optimization. *arXiv preprint arXiv :1706.07097*, 2017.
- M. Tahanan, W. Van Ackooij, A. Frangioni, and F. Lacalandra. Large-scale unit commitment under uncertainty. *4OR*, 13(2) :115–171, 2015.
- Z. C. Taşkin. Benders decomposition. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, 2010.
- F. Vanderbeck and L. A. Wolsey. Reformulation and decomposition of integer programs. In *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, pages 431–502. Springer, 2010.

- H. Wang and M. Song. Ckmeans. 1d. dp : optimal k-means clustering in one dimension by dynamic programming. *The R journal*, 3(2) :29, 2011.
- W. Wiesemann, D. Kuhn, and M. Sim. Distributionally robust convex optimization. *Operations Research*, 62(6) :1358–1376, 2014.
- R. Wolfer-Calvo. Optimizing the electricity production planning with stochastic outage durations. 2018.
- L. Zadeh. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE transactions on Automatic Control*, 8(1) :59–60, 1963.
- C. Zhao and Y. Guan. Unified stochastic and robust unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(3) :3353–3361, 2013.

Annexe A

Notations

Remarque 5. *Notations génériques dans ce rapport :*

- La valeur maximale (respectivement minimale) d'une donnée A sera noté \bar{A} (resp. \underline{A}).
- Le seul exposant sera l'indice du scénario ω .
- Les données seront en lettres capitales et les variables en minuscules.
- Pour un indice a donné $a \in A$ sera utilisé pour $a \in [1, A]$
- Lors de l'introduction d'une nouvelle formulation ou méthode de résolution, le nom de celle-ci sera noté en gras.

Indices

- $w \in W$: indices de la semaine.
- $t \in T$: indices du pas de temps.
- $j \in J$: indices des unités non-nucléaires.
- $i \in I$: indices des unités nucléaires.
- $k \in K$: indices des cycles.
- $\omega \in \Omega$: indices des scénarios.
- $c \in \mathbb{C}$: indices des contraintes de ressources entre arrêts.
- (i, k) : arrêt k de l'unité nucléaire i .

Données provenant des bases de données EDF

Données ne dépendants pas du scénario

- $N = T/W$: Nombre de pas de temps par semaine
- $C_{i,K}$: Valorisation du stock final (euros/MWh)
- Chaque unité nucléaire i possède les attributs suivants :
 - ◇ SI : Stock de combustible de l'unité i au début de la période (MWh).
 - ◇ K : nombre d'arrêts à planifier pour cette unité sur l'horizon d'étude W .
 - ◇ $\bar{P}_i = \max_w \bar{P}_{iw}$: Énergie Maximale produite par l'unité i sur une semaine.
 - ◇ \bar{P}_{it} : Puissance maximale disponible au pas de temps t de l'unité i .
 - ◇ \underline{P}_{it} : Puissance minimale disponible au pas de temps t de l'unité i .
 - ◇ Information pour chaque unité i et chaque cycle k :
 - ★ RMAX_{ik} : Recharge maximale pendant l'arrêt.

- ★ $RMIN_{ik}$: Recharge minimale pendant l'arrêt.
 - ★ Q_{ik} : Coefficient de rechargement lors de l'arrêt.
 - ★ $AMAX_{ik}$: Stock maximal au début de l'arrêt (anticipation maximale).
 - ★ $MMAX_{ik}$: Quantité maximale de modulation.
 - ★ $DMAX_{ik}$: Stock minimal au début de l'arrêt (stretch maximal).
 - ★ $SMAX_{ik}$: Niveau de stock maximal après la recharge.
 - ★ C_{ik} : Coût de recharge (en euros/MWh).
 - ★ OD_{ik} : Durée prévisionnelle de l'arrêt.
 - ★ \underline{DA}_{ik} : Date au plus tôt de l'arrêt.
 - ★ \overline{DA}_{ik} : Date au plus tard de l'arrêt.
 - ★ DP_{ik} : Profil de baisse en stretch de l'unité.
- Chaque contrainte de ressources entre arrêts c possède les attributs suivants :
 - ◇ S_c : Semaine de début.
 - ◇ E_c : Semaine de fin.
 - ◇ O_c : Vecteur d'arrêt.
 - ◇ $D_c(i, k)$: Durée de consommation de la ressource par l'arrêt (i, k) .
 - ◇ $L_c(i, k)$: Durée après le début de l'arrêt (i, k) après laquelle celui-ci commence à utiliser une ressource.
 - ◇ N_{cw} : Nombre de ressources de la contrainte pour la semaine w .

Données dépendant du scénario

- D_t^ω : Demande totale à satisfaire durant le pas de temps t du scénario ω .
- Attributs des unités non-nucléaires j pour chaque pas de temps t et chaque scénario ω :
 - ◇ $\underline{P}_{j,t}^\omega$: Production minimale.
 - ◇ $\overline{P}_{j,t}^\omega$: Production maximale.
 - ◇ C_{jt}^ω : Coût d'utilisation (euros/Mwh).
- Bornes sur la production des unités nucléaires :
 - ◇ $\underline{P}_{i,t}$: Production minimum de l'unité nucléaire i durant le pas de temps t .
 - ◇ $\overline{P}_{i,t}$: Production maximale de l'unité nucléaire i durant le pas de temps t .

Données calculées introduites

- DS_{max} : Durée maximale d'une période de production en stretch nucléaire.
- $\overline{p}_{(u,v)}(w)$: Valeur de la production incrémentale supérieure de l'arc (u, v) durant la semaine w .
- $\underline{p}_{(u,v)}(w)$: Valeur de la production incrémentale inférieure de l'arc (u, v) durant la semaine w .

Annexe B

Linéarisation de la contrainte en probabilité du site à six unités

Le site comprenant six unités nucléaires possède des contraintes intra-sites dont la structure est différente de celle des sites quatre et deux unités car celles-ci ne sont pas des contraintes de cliques : pour chaque semaine le nombre d'arrêts maximum en parallèle est limité à deux. L'adaptation de la méthode précédente pour ce site demande un effort important car le fait que la capacité passe à deux ne permet plus d'utiliser uniquement des variables correspondant à la violation d'une contrainte en cas de prolongation d'un seul arrêt, il faut pouvoir considérer une combinaison de prolongation simultanées. Toutefois, cet effort est justifié car les contraintes intra-site de ce site représente un cas particulier des contraintes inter-sites, plus génériques car ayant une capacité supérieure à deux. Nous présentons ici une tentative d'extension de l'approche au site six unités au niveau théorique. Celle-ci ne sera pas considérée dans les résultats numériques.

La proposition 7 n'est plus valable dans ce cas. Il est possible que l'extension d'un arrêt d'une unité viole à la fois la contrainte intra-site couplante de cette unité et la contrainte intra-site du site. C'est pourquoi l'extension de la méthode proposée ne prendra pas en compte les contraintes intra-sites couplantes. Cependant, il est possible d'imposer une contrainte probabiliste spécifique sur ces contraintes en utilisant la méthode présentée dans les paragraphes précédents.

Pour satisfaire la contrainte intra-site en l'absence de prolongation au plus un arrêt d'une autre unité du site nucléaire doit être en cours lorsqu'un arrêt d'une unité du site commence. Si il y a effectivement un arrêt en cours lorsque débute l'arrêt d'une autre unité, alors la prolongation de l'arrêt d'une troisième jusqu'à cette semaine provoquera une violation. Il est possible que deux unités différentes aient un arrêt dont la prolongation entraîne la violation de la même contrainte dans ce cas. En revanche si aucun autre arrêt n'est en cours, il faudra la prolongation de deux autres arrêts pour entraîner la violation de la contrainte intra-site.

Les trois cas pouvant entraîner une violation (hors violation de la contrainte intra-site couplante) sont représentés sur la figure B.1, les parties brunes représentent les arrêts planifiés et les parties rouges les prolongation d'arrêts.

Notre objectif est d'introduire des variables permettant de déterminer dans quels cas on se trouve afin de linéariser la probabilité de non-violation comme pour les sites à deux et quatre unités. Soient deux arrêts du site à six unités (i, k) et (i', k') tels que $i \neq i'$, nous introduisons :

$$\bullet r_{ik}^{(0)} \begin{cases} = 1 & \text{si la prolongation de l'arrêt } (i,k) \text{ de } \sigma \text{ semaines ne peut pas entraîner une violation} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

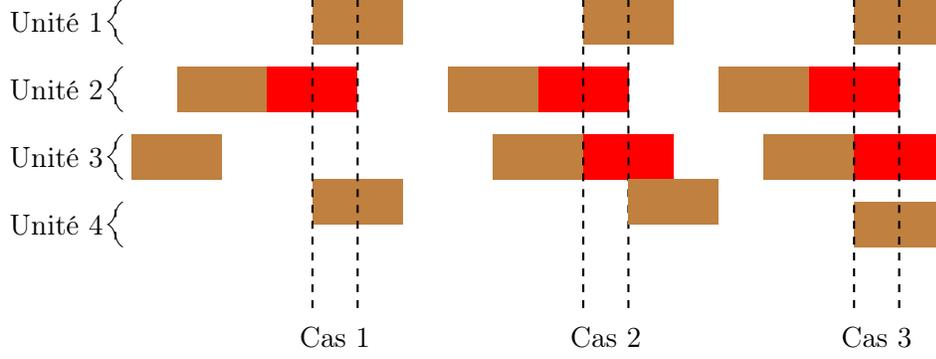


FIGURE B.1: Cas possibles de violation de la contrainte intra-site, pour le site à six unités nucléaires

- $r_{ik}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{si la prolongation de l'arrêt } (i,k) \text{ de } \sigma \text{ semaines entraîne une violation} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $r_{(ik),(i'k')}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{si les prolongations combinées des arrêts } (i,k) \text{ et } (i',k') \text{ de } \sigma \text{ semaines entraînent une violation} \\ & \text{alors que la prolongation de l'un des arrêts seul n'en entraîne pas} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition 8. $\forall i, k \quad \sum_{(i',k') \neq (i,k)} r_{(i,k),(i',k')}^{(2)} \leq 1$

Démonstration. Soit un arrêt (i, k) , nous effectuons un raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe (i', k') et (i'', k'') tels que l'extension d'un de ces arrêts de σ semaines combinée à celle de (i, k) de σ semaines entraîne la violation de la contrainte intra-site i.e $r_{(i,k),(i',k')}^{(2)} = r_{(i,k),(i'',k'')}^{(2)} = 1$, alors :

- Par définition de $r_{(i,k),(i',k')}^{(2)}$, la prolongation de la durée de l'arrêt (i, k) seule n'entraîne pas de violation de la contrainte donc il y a au plus un arrêt en cours entre les semaines $w_1(i, k) + OD_{ik}$ et $w_1(i, k) + OD_{ik} + \sigma$.
- Comme il y a violation impliquant (i, k) et (i'', k'') , la semaine de fin planifiée de l'arrêt (i'', k'') doit être au plus tard en semaine $w_1(i, k) + OD_{ik} - \sigma$.
- Puisqu'une prolongation de l'arrêt (i', k') combinée avec celle de l'arrêt (i, k) entraînerait une violation, l'arrêt (i', k') doit se terminer au plus tard en semaine $w_1(i, k) + OD_{ik} - \sigma$

Sachant que la durée nominale d'un arrêt est supérieure à son prolongation maximale σ durant la semaine $w_1(i, k) + OD_{ik} - \sigma$ les arrêts $(i, k), (i', k')$ et (i'', k'') sont en cours en l'absence de prolongation, ce qui est impossible car le planning ne serait pas réalisable. La figure B.2 illustre le raisonnement, le premier arrêt est l'arrêt débutant à la semaine $wr_{ik}(w_1(i, k), 0)$, la zone hachurée en noir dans l'arrêt de l'unité (i, k) indique la zone dans laquelle un arrêt doit se terminer pour entraîner la violation de la contrainte en cas de prolongation, la première semaine de cette zone est la semaine $w_1(i, k) + OD_{ik} - \sigma$ pendant laquelle trois arrêts sont en cours, ce qui est impossible pour un planning réalisable. □

Proposition 9. Soit B_{ik} l'événement «l'extension de l'arrêt k de l'unité i entraîne la violation d'une contrainte intra-site», alors nous pouvons écrire la valeur de B_{ik} en fonction des variables introduites précédemment :

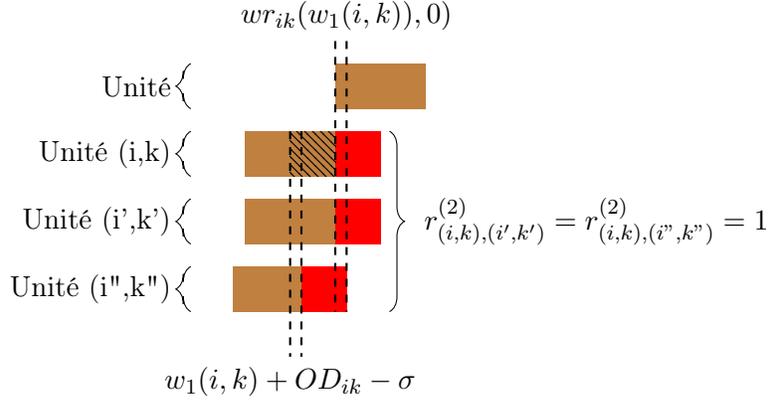


FIGURE B.2: Illustration raisonnement par l'absurde

$$B_{ik} = \begin{cases} 0 & si & r_{ik}^{(0)} = 1 \\ C_{ik} & si & r_{ik}^{(1)} = 1 \\ C_{ik}C_{i'k'} & si \exists (i', k') \neq (i, k) | r_{(ik)(i'k')}^{(2)} = 1 \end{cases}$$

Remarque : Le troisième cas, s'il existe, est unique (cf. prop 8).

Démonstration. Les deux premiers cas sont triviaux, nous démontrons ici le troisième. Nous supposons que $r_{(ik),(i',k')}^{(2)} = 1$ pour un planning réalisable du site six unités :

- Si $C_{ik} = 1$ et $C_{i'k'} = 1$, les arrêts (i,k) et (i',k') sont prolongés de σ semaines et, par définition de $r_{(ik),(i',k')}^{(2)}$, cela entraîne la violation de la contrainte intra-site d'où $B_{ik} = 1 = C_{ik}C_{i'k'}$
- Si $C_{i'k'} = 0$ ou $C_{ik} = 0$, l'un des arrêts n'est pas prolongé donc il n'y a pas violation venant de ces deux arrêts par définition de $r_{(ik)(i'k')}^{(2)}$. La propriété 8 assure qu'il n'existe pas d'autres arrêts dont la prolongation combinée avec (i, k) entraînerait une violation, donc (i, k) n'est pas impliqué dans la violation de la contrainte intra-site d'où $B_{ik} = 0 = C_{ik}C_{i'k'}$.

□

Proposition 10. Soit un planning réalisable pour le problème nominal et un arrêt (i, k) , $r_{ik}^{(1)}$ peut s'exprimer par l'égalité suivante :

$$r_{ik}^{(1)} = \max_{w_1, \sigma' \leq \sigma} \left[\sum_{(u,v) \in S_{ik, w_1}} \delta_{(u,v)} - 2 + \sum_{i \in I_6(i) \setminus i} \left(\sum_{(u,v) \in O_{i', wr(i,k,0,\sigma')}} \delta_{(u,v)} \right) \right]$$

Où

- $I_6(i)$ est l'ensemble des indices des unités nucléaires appartenant au même site que l'unité i .

Démonstration. Le planning étant réalisable pour le problème nominal, il ne peut y avoir plus de deux unités en arrêt en l'absence de prolongation pour une semaine donnée ce qui se traduit par :

$$|O_{i,w}| \leq 2 \quad \forall i, w$$

Nous en déduisons que :

$$\sum_{(u,v) \in S_{ikw_1}} \delta_{(u,v)} - 2 + \sum_{i' \in I_6(i) \setminus i} \left(\sum_{(u,v) \in O_{i', wr(i,k,0,\sigma')}} \delta_{(u,v)} \right) \leq 1 \quad \forall i, k, w_1, \sigma'$$

Alors :

$$r_{ik} = 1 \Leftrightarrow \exists w_1 | (S_{ikw_1} = 1) \quad \& \quad (\exists \sigma' \leq \sigma | |O_{i',wr(0,\sigma')}| = 2)$$

La première condition signifie que l'arrêt (i, k) débute en semaine w_1 et la seconde signifie qu'il existe une valeur de prolongation σ' telle que l'extension de l'arrêt (i, k) de σ' semaines entraîne la violation de la contrainte. \square

La variable $r_{(i,k),(i',k')}^{(2)}$ doit être égale à 1 uniquement lorsque la prolongation combinée des arrêts (i, k) et (i', k') provoque la violation de la contrainte intra-site. Les extensions des arrêts (i, k) et (i', k') de σ semaines doivent donc se chevaucher. La semaine w fait partie de la période de possible extension de l'arrêt (i, k) si :

$$w - OD_{ik} - \sigma \leq w_1(i, k) \leq w - OD_{ik}$$

Soit $S_{ikw\sigma}$ l'ensemble des indices des arcs vérifiant cette relation. Nous introduisons ici une variable intermédiaire $s_{(i,k),(i',k')}$ par la contrainte suivante :

$$s_{(i,k),(i',k')} = \max_w \sum_{(u,v) \in S_{ikw\sigma} \cup S_{i'k'w\sigma}} \delta_{(u,v)} - 2 + \sum_{k,i'' \in I_6(i) \setminus \{i,i'\}} \sum_{(u,v) \in O_{i'',w}} \delta_{(u,v)} \quad \forall i, i' \in I_6(i)$$

Le premier terme de la somme correspond aux extensions des arrêts (i, k) et (i', k') , il est égal à deux si la semaine w est recouverte par l'extension des arrêts (i, k) et (i', k') d'une valeur maximale de σ semaines. Le dernier terme, quant à lui, est égale au nombre d'arrêts en cours durant la semaine w en l'absence de prolongation.

Proposition 11. *Nous pouvons définir $r_{ik}^{(2)}$ comme suit :*

$$r_{(i,k),(i',k')}^{(2)} = \max(s_{(i,k),(i',k')} - r_{ik}^1 - r_{i'k'}^1, 0)$$

Démonstration. Par disjonction de cas sur les cas présentés en figure B.1 :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } r^1 &= 1 + 2 - 2 = 1 \\ r_{i'k'}^1 &\geq 0 \\ s_{(i,k),(i',k')} &= 1 - 2 + 2 = 1 \\ s_{(i,k),(i',k')} - r_{ik}^1 - r_{i'k'}^1 &\leq 0 \\ r_{(i,k),(i',k')}^2 &= 0 \\ \text{Cas 2 : } r_{ik}^1 = r_{i'k'}^1 &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ s_{(i,k),(i',k')} &= 2 - 2 + 1 = 1 \\ r_{(i,k),(i',k')}^2 &= 1 - 0 - 0 = 1 \\ \text{Cas 3 : } r_{ik}^1 = r_{i'k'}^1 &= 1 + 2 - 2 = 1 \\ s_{(i,k),(i',k')} &= 2 - 2 + 2 = 2 \\ r_{(i,k),(i',k')}^2 &= 2 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

\square

Linéarisation de la contrainte intra-site à six unités : Les propositions 12 à 15 ci-dessous sont des définitions et propositions intermédiaires nous permettant de démontrer la propriété ???. Cette propriété est le résultat permettant de linéariser la contrainte probabiliste associée aux contraintes intra-sites six unités.

Définition 4. Nous introduisons ici des notations et ensembles permettant de simplifier les preuves suivantes, soit :

$$\begin{aligned} O_0 &= \left\{ (i, k) \mid r_{ik}^{(0)} = 1 \right\} \\ O_1 &= \left\{ (i, k) \mid r_{ik}^{(1)} = 1 \right\} \\ O_2 &= \left\{ (i, k) \mid \exists (i', k') \quad r_{(i,k),(i',k')}^{(2)} = 1 \right\} \end{aligned}$$

Par définition de r^0 , r^1 et r^2 , $\{O_0, O_1, O_2\}$ définit une partition de $\{(i, k)\}$

Soit (i, k) tel que $\exists (i', k') \mid r_{(i,k),(i',k')}^2 = 1$ i.e. $(i, k) \in O_2$ nous notons :

$$J_2(i, k) = i'$$

$$K_2(i, k) = k'$$

Proposition 12. Soit $(i, k) \in O_0$, $(i', k') \in O_1$ et $(i'', k'') \in O_2$, alors les événements suivants sont indépendants :

- $B_{ik} = 0$ et $B_{i'k'} = 0$
- $B_{ik} = 0$ et $B_{i'',k''} = 0$

Démonstration. $B_{ik} = 0$ est un événement certain par définition de r_{ik}^0 , d'où :

$$\mathbb{P}(B_{ik} = 0 \cap B_{i'k'} = 0) = \mathbb{P}(B_{i'k'} = 0) = \mathbb{P}(B_{ik} = 0)\mathbb{P}(B_{i'k'} = 0)$$

Le raisonnement est identique pour $B_{ik} = 0$ et $B_{i'',k''} = 0$. □

Proposition 13. Soit $(i, k) \in O_1$, $(i', k') \in O_2$, $B_{ik} = 0$ et $B_{i'k'} = 0$ sont indépendants.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{ik} = 0 \cap B_{i'k'} = 0) &= \mathbb{P}(C_{ik} = 0 \cap C_{i'k'} C_{J_2(i',k')K_2(i',k')} = 0) \\ &= \mathbb{P}(C_{ik} = 0) \cdot \mathbb{P}(C_{i'k'} C_{J_2(i',k')K_2(i',k')} = 0) \quad \text{par indépendance des } (C_{ik})_{i,k} \\ &= \mathbb{P}(B_{ik} = 0) \cdot \mathbb{P}(B_{i'k'} = 0) \end{aligned}$$

□

Proposition 14. De la définition des B_{ik} (9) et de l'indépendance des C_{ik} nous déduisons les propriétés suivantes pour deux arrêts (i, k) et (i', k') donnés :

- $\mathbb{P}(\overline{B}_{ik} \mid r_{ik}^0 = 1) = 1$
- $\mathbb{P}(\overline{B}_{ik} \mid r_{ik}^1 = 1) = \mathbb{P}(\overline{C_{ik}}) = 1 - \mathbb{P}(C_{ik}) = 1 - p$
- $\mathbb{P}(\overline{B}_{ik} \cap \overline{B}_{i'k'} \mid r_{(i,k),(i',k')}^2 = 1) = \mathbb{P}(\overline{C_{ik} \cap C_{i'k'}}) = 1 - \mathbb{P}(C_{ik} \cap C_{i'k'}) = 1 - \mathbb{P}(C_{ik})\mathbb{P}(C_{i'k'}) = 1 - p^2$

Proposition 15.

$$\mathbb{P}(B_{ik} = 0 \quad \forall i, k \in O_2) = (1 - p^2)^{\sum_{i,i' \geq i, k, k'} r_{(i,k),(i',k')}^2}$$

Démonstration. Soit

$$(i, k) \in O_2, (i', k') \in O_2 \text{ tels que } (i', k') \neq (J_2(i, k), K_2(i, k))$$

Alors puisque $r_{(i,k),(J_2(i,k),K_2(i,k))}^2 = 1$ la proposition 8 implique que $r_{(i,k),(i',k')}^2 = 0$ et par définition de O_2 : $r_{ik}^1 = r_{ik}^0 = 0$ Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left((B_{ik} \cap B_{J_2(i,k)K_2(i,k)} = 0) \cap (B_{i'k'} = 0 \cap B_{J_2(i',k')K_2(i',k')}) \right) \\ &= \mathbb{P} \left((C_{ik}C_{J_2(i,k)K_2(i,k)} = 0) \cap (C_{i'k'}C_{J_2(i',k')K_2(i',k')} = 0) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(C_{ik}C_{J_2(i,k)K_2(i,k)} = 0 \right) \mathbb{P} \left(C_{i'k'}C_{J_2(i',k')K_2(i',k')} = 0 \right) \\ &= \mathbb{P}(B_{ik} = 0) \mathbb{P}(B_{i'k'} = 0) \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(B_{ik} = 0 \quad \forall i, k \quad | \quad \exists i', k', r_{(i,k),(i',k')}^2 = 1) = \prod_{\substack{(i,k) \in O_2 \\ I_2(i) \geq i}} \mathbb{P}(B_{ik} = 0) = (1 - p^2)^{\sum_{i',k' \geq i,k,k'} r_{(i,k),(i',k')}^2}$$

□

Proposition 16. Probabilité de violation

En utilisant les propriétés précédentes nous pouvons exprimer la probabilité qu'aucune violation ne se produise :

$$\mathbb{P}(B_{ik} = 0, \quad \forall i, k) = (1 - p)^{\sum_{ik} r_{ik}^1} \cdot (1 - p^2)^{\sum_{i',k,k'} r_{(i,k),(i',k')}^2}$$

Démonstration. Comme $\{O_0, O_1, O_2\}$ définissent une partition de $\{(i, k)\}$, les propositions (12) et (13) permettent d'écrire :

$$\mathbb{P}(B_{ik} = 0 \quad \forall (i, k)) = \prod_{p=0}^2 \mathbb{P}(B_{ik} = 0 \quad \forall (i, k) \in O_p)$$

Les propositions 14 et 15 nous donnent alors le résultat.

□