



Rupture dynamique de membranes élastomères : étude expérimentale par mesure de champs

Thomas Corre

► To cite this version:

Thomas Corre. Rupture dynamique de membranes élastomères : étude expérimentale par mesure de champs. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2018. Français. NNT : 2018ECDN0043 . tel-01994376

HAL Id: tel-01994376

<https://theses.hal.science/tel-01994376>

Submitted on 25 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602

Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité : Mécanique des Solides, des Matériaux, des structures et des surfaces

Par

Thomas CORRE

Rupture dynamique de membranes élastomères : étude expérimentale par mesure de champs

Thèse présentée et soutenue à l'Ecole Centrale de Nantes le 03/12/2018
Unité de recherche : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Composition du Jury :

Présidente :	Julie Diani	Directrice de recherche CNRS, Ecole Polytechnique
Rapporteur :	Stéphane Roux	Directeur de recherche CNRS, ENS Paris Saclay
Rapporteur :	Rafael Estevez	Professeur des Universités, Université Grenoble Alpe
Examineur :	Anthony Gravouil	Professeur des Universités, INSA Lyon
Dir. de thèse :	Erwan Verron	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Nantes
Co-dir. de thèse :	Michel Coret	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Nantes
Invité :	Bruno Leblé	Ingénieur de recherche, Naval Group Research

Remerciements

Je remercie tout d'abord Messieurs Stéphane Roux et Rafael Estevez pour avoir rapporté avec application ce manuscrit, Monsieur Anthony Gravouil pour sa participation au jury et Madame Julie Diani pour l'avoir présidé. J'ai particulièrement apprécié les éclairages nouveaux de certains résultats apportés par les rapports et la discussion avec le jury. A n'en pas douter, cette prise de recul appréciable sera mise à profit dans les futurs développements autour de cette thématique de recherche.

Je suis également très reconnaissant envers Erwan Verron et Michel Coret, pour leur implication et leur disponibilité tout au long de cette thèse. C'est avec humour et rigueur qu'ils ont non seulement encadré mais aussi contribué à ces travaux. Je garde notamment un souvenir joyeux et passionné des réflexions physiques devant le tableau ou l'ardoise qui émaillèrent ces trois ans, tirant parfois sur la rêverie. Le faible taux d'échec des essais avec Michel témoigne aussi de l'harmonie de ce qu'il faut bien appeler une équipe, du moins de tournage. Ce que j'ai appris ici, au-delà des sciences, leur doit beaucoup. Cette équipe est bien sûr complétée par Bruno Leblé, à qui je dois par ailleurs d'en faire partie. Je le remercie chaleureusement pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées, m'assurant de sa curiosité pour toutes ces expérimentations. Du côté de Naval Group, je remercie aussi Frédérique Le Lay et Nadine Stalin pour l'aide précieuse qu'elles m'ont apportée et leur intérêt constant pour mes travaux. Je souligne également le concours technologique de Pierre Corre au montage expérimental.

La brièveté de ces trois ans, qui m'étonne encore, trouve aussi des responsables au-delà des premiers cercles de l'encadrement. Je remercie donc Romain, Pierre, Damien et Eric pour le cadre de travail chaleureux à Naval Group et en mission. Je remercie également toute l'équipe PMM du GeM pour l'ambiance au laboratoire et en-dehors. Ne pouvant citer tout le monde, je remercie tout particulièrement mes collègues et amis de l'OSDM et la Rubber Team, entités aux dénominations sibyllines mais dont les membres se reconnaîtront. Je salue enfin tous ceux qui m'ont aidé à absorber les hauts et les bas qui jalonnent toute thèse ; je pense notamment à Mathieu, Vincent et bien sûr Marion, dont la contribution patiente et attentive aux présentations et au manuscrit fut essentielle.

Pour finir, je note quelque chose qui restera certainement de cette période, qui mêle ces différents cercles et qui se résume simplement et prosaïquement : on a quand même bien rigolé !

Table des matières

I	Rupture dynamique des élastomères - Etat de l'art	9
1	Etat de l'art sur la théorie de la rupture dynamique	11
1.1	Mécanique de la Rupture Élastique Linéaire	12
1.1.1	Introduction	12
1.1.2	Hypothèse 1. Fissures simples	12
1.1.3	Hypothèse 2. Élasticité homogène linéaire et isotrope	13
1.1.4	Hypothèse 3. Processus dissipatifs localisés en pointe de fissure	14
1.1.5	Hypothèse 4. Équilibre énergétique global	16
1.2	Mécanique de la rupture dynamique	18
1.2.1	Introduction et concepts énergétiques dynamiques	18
1.2.2	Équation de propagation générale	20
1.2.3	Application : mesure de l'énergie de rupture en dynamique	20
1.2.4	Application : équation de propagation analytique	22
1.2.5	Sélection de la trajectoire	24
1.3	Limites de la LEFM	27
1.3.1	Instabilités en rupture dynamique	28
1.3.2	Non-linéarités géométrique et matériau	29
1.3.3	Propagation supersonique	32
2	Rupture des élastomères : approche expérimentale et mesure de champs	35
2.1	Comportement des élastomères	36
2.1.1	Qu'est ce qu'un élastomère ?	36
2.1.2	Grandes déformations et hyperélasticité	37
2.1.3	Propagation d'ondes dans les élastomères	41
2.2	Étude expérimentale de la rupture des élastomères	44
2.2.1	Mise en place d'une théorie de la rupture	44
2.2.2	Énergie de rupture d'un élastomère	46
2.2.3	Propagation à grande vitesse	49
2.3	Mesure de champs en pointe de fissure en mouvement	52
2.3.1	Matériaux fragiles	53
2.3.2	Élastomères	56
II	Observation de la propagation de fissures et mesures de champs	61
3	Protocole expérimental	63
3.1	Montage expérimental	64
3.1.1	Éprouvettes	64
3.1.2	Procédure	65
3.2	Mesure du champ de déplacement pendant la propagation	67
3.2.1	Corrélation d'images	67
3.2.2	Reconstruction du champ de déplacement complet	69

3.3	Calcul des champs mécaniques	70
3.3.1	Dérivation spatiale	70
3.3.2	Dérivation temporelle	71
3.3.3	Estimation des contraintes et des champs énergétiques	71
4	Propagation dans le polyuréthane	73
4.1	Modélisation du matériau	74
4.1.1	Caractérisation en grandes déformations	74
4.1.2	Rôle de la vitesse de sollicitation	76
4.1.3	Modèle hyperélastique	80
4.2	Observation de la propagation des fissures	82
4.2.1	Analyse d'un essai de propagation	82
4.2.2	Variation de la déformation initiale	84
4.3	Champs mesurés	88
4.3.1	Configurations mécaniques	89
4.3.2	Dérivées spatiales et temporelles	90
4.3.3	Précision des mesures	93
III	Analyses cinématiques et énergétiques	95
5	Analyse cinématique de la propagation	97
5.1	Vitesses d'une fissure	98
5.1.1	Éléments de cinématique	98
5.1.2	Vitesse dans la configuration de référence	99
5.1.3	Vitesse de fissure et célérité des ondes	102
5.2	Trajectoires de fissures complexes	105
5.2.1	Propagation non uniforme	106
5.2.2	Propagation non rectiligne	107
6	Analyse énergétique de la propagation	113
6.1	Bilan énergétique global	115
6.1.1	Formule analytique classique	115
6.1.2	Bilan énergétique expérimental	116
6.2	Approche intégrale en rupture dynamique	122
6.2.1	Formulation des intégrales de contour	122
6.2.2	Méthode d'évaluation expérimentale	124
6.2.3	Intégrale de flux	126
6.3	Conclusion	130
A	Observing mechanical waves during crack growth	145

Introduction générale

Les **élastomères** sont des matériaux capables de supporter de très grandes déformations élastiques avant de se rompre, ce qui en fait des matériaux de choix dans des applications couplant grandes déformations et résistance à la rupture (pneumatiques, ballons, membranes étanches...). Lorsqu'ils sont utilisés sous forme de **membranes** gonflées ou tendues, l'introduction soudaine d'une amorce de fissure peut conduire à la **rupture** catastrophique de la structure. Cette rupture se produit par la propagation à haute vitesse d'une ou plusieurs fissures. Cette propagation sera qualifiée de « **dynamique** » dans la présente étude. L'intérêt pour la rupture dynamique remonte aux années 1940, avec l'observation de la fragmentation et l'étude des vitesses limites atteignables par une fissure. En parallèle des travaux de mécaniciens, la propagation à haute vitesse de fissures suscite l'intérêt des physiciens, qui y voient un problème mêlant dynamique, instabilité et interaction entre plusieurs échelles spatiales. Du point de vue de l'ingénieur, la prédiction de la trajectoire et de la vitesse de ces fissures reste un problème en partie non-résolu. La grande majorité des études concernent les matériaux structurels usuels (donc peu déformables tels que les métaux, le verre...), mais quelques applications concerne aussi les élastomères.

Cette thèse de doctorat est réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE réunissant Naval Group et l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) de l'école Centrale de Nantes. Elle a pour objectif de caractériser la propagation dynamique d'une fissure dans une membrane en polyuréthane et d'identifier les principaux paramètres qui gouvernent sa cinématique. Le champ d'étude se limite à la phase de propagation d'une fissure existante, sans aborder les raisons de sa présence (amorçage). La rupture des élastomères a fait l'objet de nombreux développements depuis les années 1950. Les critères de propagation quasi-statique, qui précisent si une fissure existante va se propager, sont bien établis. Du fait de l'utilisation des élastomères comme systèmes amortissants, la propagation « lente » sous chargement cyclique (en fatigue) accapare une grande partie des travaux expérimentaux. A l'inverse, la propagation dynamique dans les élastomères n'a fait l'objet que de peu d'études expérimentales, malgré un regain d'intérêt depuis les années 2010 notamment pour l'étude des gels. En pratique, les critères de propagation sont issus du cas statique, ou des études dynamiques pour les matériaux fragiles. La validité de leur extension au cas dynamique en grandes déformations n'est donc pas formellement démontrée. Au-delà du manque de données expérimentales, criant pour les élastomères, la prédiction de la cinématique des fissures dynamiques ne fait pas l'objet d'un consensus général. De nombreux critères et approches différentes coexistent, et leur exploration constitue un domaine de recherche actif.

Dans ce contexte, les présents travaux visent à compléter les données disponibles sur la propagation à haute vitesse dans les élastomères, afin de pouvoir sélectionner les approches théoriques ou numériques les plus pertinentes pour ce problème. Pour cela, l'approche expérimentale envisagée couple l'utilisation d'une caméra rapide et la mesure de champs autour de la pointe de fissure. L'élastomère utilisé est un polyuréthane, mais ces travaux se placent plus généralement dans le cadre des matériaux élastiques non-linéaires

en grandes déformations.

Ce manuscrit se décompose en trois parties de deux chapitres chacune. La première partie présente le contexte scientifique de l'étude, qui regroupe des domaines souvent éloignés comme la mécanique de la rupture dynamique, le comportement des élastomères et sa modélisation. Cette partie assez large rassemble les concepts nécessaires pour appréhender les essais de propagation. Le chapitre 1 aborde le problème sous l'angle théorique : partant des hypothèses fondatrices de la mécanique de la rupture, il présente leurs extensions au cas dynamique ainsi que leurs limites à haute vitesse et en grandes déformations. Le chapitre 2 se concentre sur l'aspect expérimental du problème. Rappelant d'abord les spécificités du comportement des élastomères, il expose l'approche expérimentale classique de leur rupture et détaille en particulier les quelques expériences de rupture dynamique réalisées depuis les années 1950. Il conclut cette partie par un bref état de l'art de la mesure de champs autour de pointes de fissures dynamiques, technique au cœur de notre étude.

La deuxième partie présente l'étude expérimentale proprement dite. Le chapitre 3 décrit en détail le dispositif expérimental mis au point afin de mesurer les champs mécaniques au cours de la propagation de fissures dynamiques. Il précise en particulier la méthode permettant de retrouver la configuration de référence de l'éprouvette au cours de la propagation. L'application de ce protocole expérimental au matériau de l'étude est présentée au chapitre 4. Celui-ci retrace d'abord la mise en place du modèle de comportement, des essais de caractérisation aux hypothèses nécessaires sur sa viscoélasticité. Les résultats bruts des essais de propagation précisent la gamme de vitesses des fissures observées et les champs mécaniques qui peuvent être mesurés.

La méthode expérimentale permet de recueillir beaucoup de données : tous les champs de la mécanique pour chaque image d'une variété d'essais. La troisième partie présente une approche du traitement de ces données. Le chapitre 5 décrit la cinématique de la propagation dynamique, introduisant des techniques de mesure de vitesse de fissure dans la configuration de référence nécessaires à l'interprétation des résultats. La cinématique des fissures observées est alors comparée aux résultats de la littérature. Le chapitre 6 propose une comparaison entre deux techniques d'analyse énergétique de la rupture : un bilan d'énergie global et le calcul d'intégrales de flux d'énergie. S'appuyant sur toutes les techniques de mesures présentées au cours du mémoire, cette partie constitue ainsi une discussion générale des résultats obtenus et des capacités actuelles d'analyse de ce problème de rupture.

Première partie

Rupture dynamique des élastomères - Etat de l'art

Chapitre 1

Etat de l'art sur la théorie de la rupture dynamique

Ce chapitre bibliographique a pour objectif de présenter la façon dont sont appréhendés de façon théorique les problèmes de propagation dynamique de fissure. Les hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture linéaire élastique sont d'abord exposés dans le cas de la propagation quasi-statique, fondement historique de cette théorie. De cette base conceptuelle découlent les méthodes et les résultats de la mécanique de la rupture dynamique, toujours dans le cas linéaire élastique. Ensuite, les hypothèses de la LEFM sont relâchées une à une pour aborder la propagation de fissures dans les cas plus complexes, dont la rupture à grande vitesse des élastomères fait assurément partie.

Sommaire

1.1	Mécanique de la Rupture Élastique Linéaire	12
1.1.1	Introduction	12
1.1.2	Hypothèse 1. Fissures simples	12
1.1.3	Hypothèse 2. Élasticité homogène linéaire et isotrope	13
1.1.4	Hypothèse 3. Processus dissipatifs localisés en pointe de fissure	14
1.1.5	Hypothèse 4. Équilibre énergétique global	16
1.2	Mécanique de la rupture dynamique	18
1.2.1	Introduction et concepts énergétiques dynamiques	18
1.2.2	Équation de propagation générale	20
1.2.3	Application : mesure de l'énergie de rupture en dynamique	20
1.2.4	Application : équation de propagation analytique	22
1.2.5	Sélection de la trajectoire	24
1.3	Limites de la LEFM	27
1.3.1	Instabilités en rupture dynamique	28
1.3.2	Non-linéarités géométrique et matériau	29
1.3.3	Propagation supersonique	32

1.1 Mécanique de la Rupture Élastique Linéaire

1.1.1 Introduction

La mécanique de la rupture (*linear elastic fracture mechanics*, LEFM¹ selon le sigle anglais) forme aujourd'hui un cadre théorique bien établi et formalisé dans de nombreux ouvrages de référence (Bui, 1978; Freund, 1998; Broberg, 1999). Issue de problèmes industriels dès l'origine, la mécanique de la rupture a pour objet la description mécanique d'une structure contenant une fissure et, par extension, le comportement de celle-ci. Issue de l'étude de la résistance des structures, l'une de ses questions fondamentales porte sur l'existence d'une « force » agissant sur la fissure et qui pourrait la faire croître (Freund, 1998). Derrière cette notion se cache l'hypothèse d'une fissure pouvant être traitée comme une entité à part entière et obéissant à des lois spécifiques, à déterminer. Pour sa partie théorique, l'origine de cette discipline remonte aux travaux d'Inglis (1913) sur la concentration de contraintes au bord d'un trou elliptique dans une plaque. Jusqu'aux années 1970, la mécanique de la rupture se concentre essentiellement sur la description des conditions de croissance d'une fissure existante et, le cas échéant, la structure est considérée comme détruite (Tipper, 1962). Ce point de vue justifie naturellement les efforts portés sur l'étude de la propagation quasi-statique de fissure, éventuellement sous l'influence de chargements dynamiques. Par la suite, la propagation même des fissures devint un sujet d'étude (Freund, 1972a) sous le nom de mécanique de la rupture dynamique (*dynamic fracture*). Aujourd'hui la mécanique de la rupture ne se limite plus à l'ingénierie des structures mais elle s'étend aux échelles géologiques et atomiques, de l'étude des tremblements de terre à la description atomistique de la rupture des cristaux (Cox *et al.*, 2005).

La présente section se concentre sur l'approche statique de la rupture afin d'en exposer les concepts fondamentaux et quelques-uns des résultats principaux. La mécanique de la rupture statique (ou quasi-statique) correspond à l'analyse d'une fissure immobile dans la structure et à ses conditions de propagation sous chargement quasi-statique. Cette approche « classique » se fonde essentiellement sur quatre hypothèses (Bouchbinder *et al.*, 2010a) :

- La fissure est simple, généralement unique et sans interaction avec les bords de la structure ;
- L'élasticité linéaire est valide en dehors de la pointe de fissure, le matériau est homogène et isotrope ;
- L'endommagement est localisé en pointe de fissure (hypothèse dite de *small scale yielding*) ;
- L'énergie est dissipée en pointe de fissure et provient de l'ensemble de la structure (équilibre énergétique global).

Ces quatre hypothèses sont développées dans les quatre parties suivantes et servent de fil conducteur à la présentation générale de la LEFM.

1.1.2 Hypothèse 1. Fissures simples

Une fissure peut prendre des aspects assez différents suivant la micro-structure du matériau ou la façon dont elle s'est formée. Néanmoins, pour la modélisation du problème mécanique une simplification s'impose afin de fixer un cadre d'étude mathématique. De manière générale, la fissure est modélisée par une coupure d'épaisseur nulle dans le corps

1. Le sigle LEFM sera utilisée par la suite pour désigner la mécanique de la rupture classique, le sigle français étant très peu utilisé.

élastique (Freund, 1998). En l'absence d'efforts appliqués, les deux lèvres de la fissure occupent donc la même surface. Le processus de croissance est considéré irréversible : les deux lèvres ne peuvent pas se souder. Le front de fissure est une ligne simple et régulière dans l'espace. La plupart des problèmes de ruptures sont traités en deux dimensions car les champs mécaniques et leur gradient ne sont sensibles à la singularité de la pointe que dans les directions perpendiculaires au front. Dans ce cas, les lèvres de la fissure sont des lignes tandis que le front de fissure se réduit à un point, appelé pointe de fissure. La Figure 1.1(a) schématise ce problème 2D. Cette fissure mathématique peut être vue comme la limite d'une entaille de rayon de courbure tendant vers 0, approche qui a contribué à certains développements théoriques (Rice, 1968; Maugin, 1994).

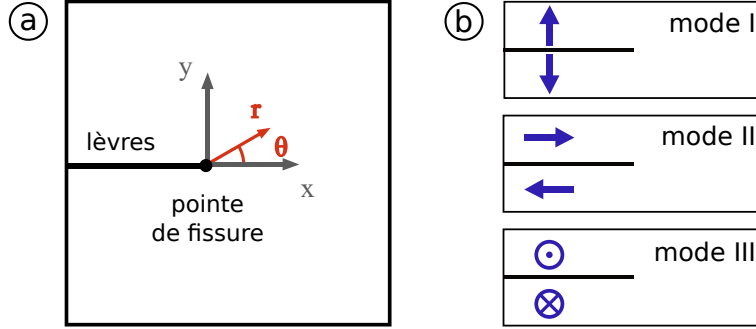


FIGURE 1.1 – (a) : Fissure en deux dimensions avec les repères cartésiens et polaires associés à la pointe de fissure. (b) : Les trois modes d'ouverture d'une fissure.

La partie de la LEFM la plus classique se concentre sur les fissures simples, c'est à dire des fissures généralement seules et non ramifiées, qui ne subissent pas d'instabilité (micro-branchement, oscillations...) et qui n'interagissent pas directement avec les bords de la structure. En quasi-statique, le cas de fissures courbes ou coudées est bien intégré à la LEFM (Gol'Dstein et Salganik, 1974; Cotterell et Rice, 1980). En dynamique, les principaux résultats sont établis pour des fissures se propageant en ligne droite (Fineberg et Bouchbinder, 2015).

L'ouverture d'une fissure peut se décomposer en trois modes simples schématisés sur la Figure 1.1(b) (Irwin, 1957). Le mode I, appelé aussi mode d'ouverture, est la séparation des lèvres dans leur plan. Le mode II est le mode de cisaillement dans le plan par glissement relatif des deux lèvres de la fissure. Le mode III est le mode de cisaillement hors-plan par glissement relatif des deux lèvres selon la direction du front de fissure. Le mode I est classiquement le mode le plus favorable à la propagation des fissures. Étant le mode privilégié dans cette étude sur le polyuréthane, il servira d'exemple pour illustrer les résultats de la LEFM.

1.1.3 Hypothèse 2. Élasticité homogène linéaire et isotrope

La LEFM se place dans le cadre des petites déformations et suppose un matériau linéaire élastique et isotrope. Dans ce cas, Irwin (1957) a montré que le champ de contraintes entourant la pointe de fissure développe une singularité en racine carrée en direction de la pointe. Plus précisément, dans un repère en coordonnées polaires centré sur la pointe de fissure et dont la direction $\theta = 0$ correspond à la direction de propagation (Fig.1.1(a)), le terme dominant du champ de contraintes σ s'écrit de façon très générale :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \Psi_{ij}(\theta). \quad (1.1)$$

K , exprimé en $\text{Pa.m}^{\frac{1}{2}}$, est appelé facteur d'intensité des contraintes pour le mode de rupture considéré et $\Psi(\theta)$ est une fonction finie sans dimension donnant la répartition angulaire de chaque composante du champ de contraintes. A titre d'exemple, pour une fissure en 2D chargée en mode I pur dans l'hypothèse des contraintes planes, le terme dominant est donné par l'équation.1.1 avec $K = K_I$ et

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{22} \\ \Psi_{12} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Le problème étant linéaire, principe de superposition s'applique. Pour un cas de chargement arbitraire, le champ de contraintes en pointe de fissure est donc une combinaison linéaire des trois modes purs :

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=I}^{III} \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{2\pi r}} \Psi_{ij}^{\alpha}(\theta). \quad (1.3)$$

Les fonction Ψ_{ij}^{α} sont universelles : elles dépendent seulement du type de chargement et pas des paramètres élastiques du matériau.

Le facteur d'intensité des contraintes est une grandeur scalaire qui contient toute l'information sur le chargement et la géométrie de la structure. La valeur de K dépend du champ élastique qui s'étend sur toute la structure, mais ce seul coefficient scalaire détermine complètement le comportement de la fissure (Fineberg et Marder, 1999). Cette idée constitue l'un des résultats fondamentaux de la mécanique de la rupture et fournit un critère de propagation. Irwin (1957) propose de comparer la valeur de K à une grandeur critique appelée ténacité du matériau (notée K_{IC} pour le mode I). La propagation de la fissure n'est possible que pour $K_I \geq K_{IC}$. Ainsi, le facteur d'intensité des contraintes caractérise de façon universelle la singularité des champs en pointe de fissure : pour un même matériau, si ce coefficient est identique dans deux problèmes différents, alors la fissure se comportera de la même manière. Calculer la valeur de K est l'un des objectifs de la résolution d'un problème particulier de mécanique de la rupture.

Sous les strictes hypothèses d'élasticité homogène, linéaire et isotrope, la mécanique de la rupture est parfois considérée comme traitant de la rupture fragile (*brittle fracture*, (Freund, 1998)). De manière macroscopique, un matériau est qualifié de fragile lorsqu'il se rompt dans son domaine élastique et en l'absence de dissipation à l'échelle de la structure, à l'image des céramiques. Par extension un matériau fragile idéal reste linéaire jusqu'en pointe de fissure, cadre de la théorie d'Irwin. Peu de matériaux peuvent néanmoins se prévaloir d'approcher ce type de comportement. La notion de matériau fragile reste définie de manière ambiguë et dépend bien souvent des propriétés étudiées (faciès de rupture, déformation à rupture, ténacité...). L'hypothèse de localisation des processus dissipatifs en pointe de fissure permet de toute façon d'étendre les résultats de la LEFM à des matériaux qui ne sont généralement pas considérés comme fragiles. Par la suite, le terme fragile désigne les matériaux respectant l'hypothèse de rupture en petites déformation, par opposition aux élastomères au sens large.

1.1.4 Hypothèse 3. Processus dissipatifs localisés en pointe de fissure

Découpage du voisinage de la pointe de fissure

La LEFM prédit un champ de contraintes singulier en pointe de fissure si le matériau reste linéaire élastique. En réalité, un matériau ne peut pas supporter une contrainte

infinie et, nécessairement, un processus dissipatif « régularise » les champs. Ces processus de dissipation sont très complexes et dépendent du matériau avec, par exemple, de la déformation plastique (déplacement de dislocations), de la cavitation, la décohésion inclusion-matrice... Le détail des processus physiques en jeu lors de la rupture sont peu connus et difficiles à modéliser. Irwin (1957) et Orowan (1954) ont proposés une façon de contourner ce problème en supposant que ces phénomènes dissipatifs ont lieu dans une zone restreinte autour de la pointe de fissure.

Le système contenant la fissure est alors séparé en trois zones distinctes (Fineberg et Marder, 1999) illustrées sur la Figure 1.2 : la zone de non-linéarité (*process zone*), la région universelle élastique (*universal elastic region*) et le reste de la structure (*outer elastic region*, décrite par l'élasticité linéaire et solution du problème mécanique). La première

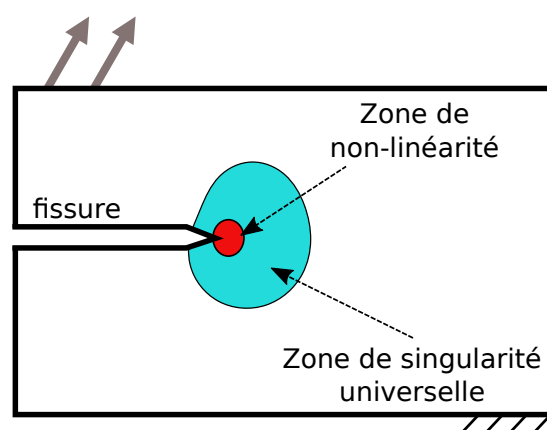


FIGURE 1.2 – Décomposition d'un problème en mécanique de la rupture. La pointe de fissure est entourée d'une région où se déroulent les phénomènes dissipatifs inconnus, source de non-linéarité. En dehors, la solution élastique universelle s'applique sur une certaine région au voisinage de la pointe.

zone entourant immédiatement la pointe de fissure contient tous les phénomènes dissipatifs intervenant lors de la rupture. En dehors de cette zone, la réponse du matériau peut être décrite par l'élasticité linéaire. Au voisinage de la pointe, mais en dehors de la zone de non-linéarité, le champ de contraintes est décrit par la forme universelle Eq.(1.1) et il est caractérisé par les facteurs d'intensité des contraintes. La zone de non-linéarité est dite autonome si les deux conditions suivantes sont respectées (Freund, 1998) : sa taille est petite devant toutes les autres dimensions caractéristiques du système et son état mécanique ne dépend pas du chargement ou de la géométrie du système. Dans ce cas, l'état mécanique en pointe de fissure reste caractérisé par le seul facteur d'intensité des contraintes. Pour les matériaux plastiques, Rice (1968) a introduit le terme de plasticité confinée (*small scale yielding*) pour cette hypothèse. En incluant d'autres sources de non-linéarités, elle est aussi appelée hypothèse d'autonomie des champs en pointe de fissure.

Énergie de rupture

La présence de phénomènes dissipatifs en pointe de fissure se traduit par une consommation d'énergie lors de sa propagation. Cette dissipation d'énergie exprimée par unité de surface créée est appelée énergie de rupture, Γ (en J.m^{-2}). Cette grandeur scalaire fait la synthèse de tous les phénomènes physiques se déroulant en pointe de fissure et que la LEFM évite de modéliser. De manière équivalente, elle est parfois vue comme la résistance

du matériau à la propagation de fissure (Freund, 1998). Cette grandeur est une caractéristique du matériau et ne peut être déterminée que par l'expérience. Pour un matériau donné, elle est supposée ne dépendre que de la vitesse de propagation. Initialement postulée par Griffith (1920) sous la forme d'une énergie de surface, Γ prend un sens plus large pour s'appliquer à différents matériaux ; dans les élastomères notamment Rivlin et Thomas (1953) la nomment « énergie de déchirement ». Dans le formalisme de la LEFM, la zone en pointe de fissure concentrant tous les phénomènes dissipatifs se réduit à un point. Ce point (cette ligne en 3D) dissipe une énergie Γ au cours de sa propagation et se comporte comme un puits d'énergie. Cette description du phénomène de rupture est complémentaire de celle présentée au paragraphe 1.1.2, doublant la singularité géométrique de la pointe de fissure d'une singularité thermodynamique.

1.1.5 Hypothèse 4. Équilibre énergétique global

Critère de Griffith

Dans un article fondateur, Griffith (1920) introduit l'approche énergétique de la mécanique de la rupture. Il envisage la propagation de fissure comme la création de nouvelles surfaces, processus qui s'accompagne de la production d'énergie de surface. Sous chargement mécanique, une structure fissurée peut donc évoluer de deux manières différentes : la structure emmagasine de l'énergie élastique sans propagation de fissure, ou elle se décharge au profit d'une augmentation de son énergie potentielle de surface (propagation). La compétition entre ces deux possibilités, couplée avec le principe de minimisation de l'énergie potentielle du système, fournit un critère de propagation d'une fissure initialement statique, appelé critère de Griffith. Pour le formuler, on définit le taux de restitution d'énergie G comme la diminution de l'énergie mécanique totale de la structure E_m lors de la propagation d'une unité de surface de fissure. Défini positivement par convention, le taux de restitution d'énergie s'écrit :

$$G = -\frac{\partial E_m}{\partial A}, \quad (1.4)$$

avec A la surface de fissure créée.

Le critère stipule que la fissure ne se propage que si c'est avantageux d'un point de vue thermodynamique, c'est-à-dire si la diminution d'énergie mécanique compense au moins l'énergie nécessaire à la création de surface. Cette dernière, pensée initialement comme énergie potentielle de surface, est complétée par tout le travail nécessaire à la formation de ces surfaces, qu'il soit proportionnel à la déformation plastique comme pour les métaux (Irwin, 1957; Orowan, 1954) ou mal défini comme dans le cas des élastomères (Rivlin et Thomas, 1953). Ce seuil énergétique correspond donc à l'énergie de rupture Γ définie au paragraphe 1.1.4 et le critère de Griffith peut s'écrire formellement :

$$\begin{aligned} G &< \Gamma, & \text{propagation impossible.} \\ G &= \Gamma, & \text{propagation possible.} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le critère de Griffith constitue une approche globale de la rupture puisque l'accent est mis sur le comportement de la structure et non sur le détail des champs en pointe de fissure. G s'exprime en J.m^{-2} ou en N.m^{-1} . Cette dernière formulation révèle l'interprétation de G comme force généralisée s'exerçant sur une unité de longueur du front de fissure. Conjugée énergétiquement à l'avancée de la fissure, G est vue comme la force pilotant la fissure (*crack driving force* (Freund, 1998)).

Équivalence des approches globales et locales

Irwin (1957) a montré que les critères de propagation fondés sur le taux de restitution d'énergie ou le facteur d'intensité des contraintes sont équivalents. En particulier, il montre dans le cas de la propagation en mode I et en contraintes planes la relation :

$$G = \frac{K_I^2}{E}, \quad (1.6)$$

avec E le module de Young du matériau. Connue sous le nom de relation d'Irwin, cette expression scelle l'équivalence entre les approches locales et globales. Les deux paramètres gouvernant la rupture, K_I et G ne peuvent pas être indépendants.

L'intégrale J introduite par Eshelby (1956), Cherepanov (1968) et Rice (1968) offre une autre manière d'appréhender le lien entre les champs lointains et proches de la fissure. Cette méthode, féconde dans et au delà de la LEFM, est brièvement évoquée ici avant d'être développée dans le Chapitre 6. On considère un contour Σ de normale extérieure $\vec{n}$ entourant la pointe de fissure d'une lèvre à l'autre dans le sens trigonométrique, comme montré sur la Figure 1.3 , et l'intégrale calculée sur ce contour :

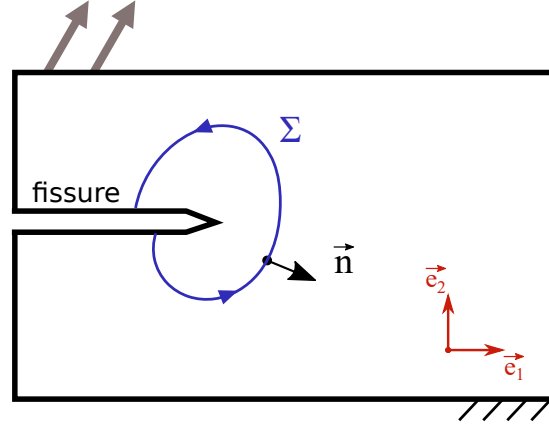


FIGURE 1.3 – Exemple de contour orienté Σ pour le calcul de l'intégrale J .

$$J = \int_{\Sigma} \left(w \vec{n} \cdot \vec{e}_1 - (\boldsymbol{\sigma} \vec{n}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \right) d\Sigma, \quad (1.7)$$

avec w la densité d'énergie élastique, $\vec{u}$ le champ de déplacement et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy. Pour un matériau élastique linéaire et une fissure statique, Rice (1968) montre que cette intégrale ne dépend pas du contour choisi pour la calculer (propriété d'indépendance globale au contour (*global path-independence*)) et que $J = G$. Connaissant le facteur d'intensité des contraintes dans un cas particulier, on peut retrouver un équivalent de la relation d'Irwin. Par exemple, l'utilisation de l'intégrale J pour le mode I pur permet de démontrer l'Eq.(1.6). Cette approche, dite intégrale, offre un puissant outil puissant pour calculer G sans avoir les champs à proximité immédiate de la pointe (cas d'une simulation numérique par exemple) et illustre le lien entre les échelles.

Cette relation étroite entre les approches globale et locale découle directement de l'hypothèse, rarement explicitée, selon laquelle l'énergie doit s'écouler de l'ensemble de la structure vers la pointe de fissure pour que celle-ci puisse se propager (Bouchbinder *et al.*, 2010a). En effet, si la pointe de fissure est le seul lieu de dissipation du système et que le problème est traité en quasi-statique, l'énergie potentielle perdue par le système, c'est-à-dire G , se retrouve immédiatement « consommée » à la pointe, ce qui influence les champs

en son voisinage c'est-à-dire K . Cette hypothèse est contenue dans l'hypothèse de propagation quasi-statique de la LEFM statique. Elle prend cependant toute son importance dans le cas de l'étude de la propagation dynamique présentée dans la section 1.2.

1.2 Mécanique de la rupture dynamique

1.2.1 Introduction et concepts énergétiques dynamiques

Objet d'étude

La mécanique de la rupture devient « dynamique » lorsque le rôle de l'inertie du matériau n'est plus négligeable dans le problème de fissuration (Freund, 1998). Ce rôle de l'inertie peut intervenir du fait du chargement (charge soudaine ou variable, interaction avec des ondes...) ou de la propagation elle-même. Cette partie bibliographique se concentre exclusivement sur ce dernier cas, en lien direct avec le problème étudié dans la thèse. La question centrale se déplace donc des conditions de croissance d'une fissure statique vers les lois régissant le mouvement de sa pointe, selon une analogie assumée avec la mécanique du point.

Les travaux pionniers dans ce domaine sont ceux de Mott (1948), proposant une équation de propagation pour une fissure dans un matériau fragile par analyse dimensionnelle. La recherche de ce type d'équation constitue depuis lors l'un des principaux angles de réflexion dans ce domaine, avec de nombreux développements à partir des années 1960 (Eshelby, 1969; Freund, 1972b; Willis, 1975). Les questions de l'évolution de la vitesse d'une fissure, de sa vitesse limite (Stroh, 1957) dans différents cas de chargement sont parmi les plus étudiées. A partir de la fin des années 1980, l'amélioration des techniques d'observation a permis de tester une grande partie des prédictions de la LEFM en dynamique rapide, en particulier dans les polymères fragiles (type polycarbonate) (Ravi-Chandar, 2004). Dans le cadre qu'elle s'est fixée, la LEFM dynamique propose alors une description qualitative et quantitative robuste des phénomènes observés (Bouchbinder *et al.*, 2010a). Ce champ d'étude connaît un regain d'intérêt depuis les années 2000 avec l'utilisation de gels fragiles permettant d'observer les effets dynamiques de la propagation de fissure à des vitesses plus faibles, donc plus facilement (Livne *et al.*, 2005). Ces nouvelles méthodes expérimentales ont permis de mettre la LEFM à l'épreuve. Issues des efforts combinés de mécaniciens (plus traditionnellement formés à la mécanique de la rupture) et de physiciens, ces nouvelles observations ont précisé les limites prédictives de la LEFM (Livne *et al.*, 2008). De nouvelles théories sont alors développées pour pallier certains de ses manquements (Bouchbinder *et al.*, 2008; Goldman Boué *et al.*, 2015). La série de revues bibliographiques consacrée à la rupture dynamique sur un laps de temps très court témoigne de la vitalité actuelle de cette problématique (Fineberg et Marder, 1999; Cox *et al.*, 2005; Bouchbinder *et al.*, 2010a, 2014; Fineberg et Bouchbinder, 2015).

Approche énergétique en dynamique

Le passage de la statique à la dynamique requiert quelques adaptations de l'hypothèse d'équilibre énergétique. En effet, il s'agit de pouvoir étudier la rupture en tant que phénomène transitoire, c'est à dire hors-équilibre statique. Ainsi, si le critère de Griffith permet de discriminer l'état thermodynamique le plus stable entre une structure chargée ou rompue, passer de l'un à l'autre exige la propagation d'une fissure. Bouchbinder *et al.*

(2010a) définissent ainsi une fissure dynamique comme une « structure dissipative hors équilibre [...] se propageant à travers un solide sous l'effet de contraintes mécaniques ».

D'un point de vue plus pratique, la définition du taux de restitution d'énergie G (Eq.(1.4)) comme variation de l'énergie mécanique totale (énergie élastique et cinétique) prend tout son sens. A titre d'exemple, la propagation d'ondes loin de la pointe peut entraîner la conversion d'énergie élastique en énergie cinétique sans rapport direct avec le phénomène de propagation. En lien avec cette définition, on retrouve l'idée que l'énergie doit avoir le temps de parvenir jusqu'à la pointe. Il en découle que la vitesse de propagation d'une fissure doit être limitée par ce qui gouverne le transport de l'énergie dans le milieu : les ondes mécaniques. Ce résultat a été postulé par Mott (1948), trouvant une fraction de la vitesse des ondes de cisaillement pour vitesse limite sur la base d'un bilan énergétique incluant l'énergie cinétique. Le raisonnement s'avère inexact, mais il illustre l'importance du bilan énergétique global dans la mécanique de la rupture dynamique. Selon la LEFM, la vitesse limite pour une fissure est en réalité la vitesse des ondes de Rayleigh, notée c_R . Ce résultats essentiel a été intuitivement proposé par Stroh (1957) en correction de celui proposé par Mott (1948), avant d'être confirmé au cours de la formalisation de la LEFM (Freund, 1998). Cette condition de vitesse de propagation inférieure à celle des ondes de Rayleigh constitue un résultat fondamentale de la LEFM dynamique. Il conditionne une grande partie de ses résultats analytiques, jusqu'à la preuve de l'unicité d'une solution au problème de rupture élasto-dynamique (Freund, 1998).

Flux d'énergie

La prise en compte de la dynamique requiert aussi de revisiter l'approche intégrale. Atkinson et Eshelby (1968) proposèrent une forme intégrale pour le flux d'énergie à travers une pointe de fissure dynamique en remarquant qu'elle respecte la forme générale de l'Eq.1.7, en remplaçant simplement la densité d'énergie élastique par la densité d'énergie mécanique, à l'image du raisonnement précédent. Une forme pour ce flux d'énergie a été établie par Freund (1972c) dans le cas élastique linéaire, puis étendu au cas des grandes déformations par Gurtin et Yatomi (1980) (moyennant une interprétation correcte des termes). Suivant Freund (1998), on définit alors le flux d'énergie à travers un contour Σ de normale $\vec{n}$ entourant la pointe (cf Fig.1.3) et se mouvant avec elle par :

$$\Phi(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left((w + k)\vec{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \vec{n} d\Sigma, \quad (1.8)$$

avec $\vec{c}$ la vitesse de propagation la fissure et du contour, k la densité volumique d'énergie cinétique et t le temps. Ce flux Φ est défini en $\text{J.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$ pour un problème plan. Cette expression n'est pas indépendante du contour dans le cas général. Le cas d'une propagation stationnaire constitue une exception et le flux d'énergie prend alors la forme :

$$\Phi(\Sigma) = c \int_{\Sigma} \left((w + k)\vec{e}_1 \cdot \vec{n} - (\boldsymbol{\sigma}\vec{n}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \right) d\Sigma, \quad (1.9)$$

avec $c = \|\vec{c}\|$. Le taux de restitution d'énergie est défini en dynamique comme le flux d'énergie dissipée à travers la pointe par unité de surface de fissure créée. On a donc (Freund, 1998) :

$$G = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi(\Sigma)}{c} \right). \quad (1.10)$$

Le passage à la limite est généralement nécessaire. On note que, prenant la formulation stationnaire (Eq.(1.9)) et dans la limite quasi-statique ($k \rightarrow 0$), on retrouve l'expression de l'intégrale J classique (Eq.(1.7)).

1.2.2 Équation de propagation générale

La mécanique de la rupture s'attaque au problème de fissuration dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Pour une propagation arbitraire de fissure, les champs mécaniques peuvent être déterminés par la résolution du problème aux limites. Cependant, la connaissance détaillée de la trajectoire d'une fissure nécessite d'ajouter un ingrédient à la mécanique des milieux continus : un critère de propagation. De manière générale, un tel critère stipule qu'une certaine quantité attachée à la fissure doit se conserver au cours de la propagation.

Dans le cas de la LEFM, le critère retenu est le critère énergétique de Griffith. Au cours de la propagation, l'énergie dissipée à la pointe de la fissure est l'énergie de rupture $\Gamma(c)$, grandeur liée au matériau et fonction de la vitesse de propagation c uniquement. L'application du critère de Griffith implique simplement que le taux de restitution d'énergie G est égal à chaque instant à cette énergie de rupture. Pour reprendre la formulation de Freund (1998), l'équation s'écrit donc en toute généralité :

$$G(l, c, t \dots) = \Gamma(c), \quad (1.11)$$

en marquant la dépendance de G à la géométrie (longueur de fissure l), au chargement, aux paramètres matériaux, etc. Cette équation est aussi appelée équation du mouvement d'une fissure par analogie avec la mécanique du point (Freund, 1998; Bouchbinder *et al.*, 2014). En effet, cette équation est à même de fournir une relation entre la vitesse de la pointe de fissure (et donc sa position) et tous les paramètres du système. La difficulté se déplace donc vers l'estimation de G pour chaque problème particulier. Cette équation est utilisée de manière différente suivant le point de vue adopté sur le problème de la rupture. D'un point de vue expérimental, l'Éq.(1.11) propose un moyen de mesurer Γ . De plus, connaissant Γ pour un matériau, une formule analytique de G procure une expression explicite de l'évolution de la pointe pour ce cas particulier. Enfin d'un point de vue numérique, l'Eq.(1.11) propose un critère à maintenir au cours d'une résolution incrémentale d'un problème de rupture. Les deux premières utilisations, au cœur de la théorie de la LEFM dynamique, sont détaillées dans les paragraphes suivants.

1.2.3 Application : mesure de l'énergie de rupture en dynamique

Si l'équation de propagation (1.11) est valide, alors une mesure du taux de restitution d'énergie pour une vitesse de fissure donnée fournit la valeur de l'énergie de rupture correspondante. C'est la méthode générale utilisée pour calculer cette grandeur liée au matériau (du moins, sans chercher à faire le lien avec les phénomènes à l'échelle moléculaire (Cox *et al.*, 2005)). Cette méthode fait le plus souvent appel à des éprouvettes particulières pour lesquelles une expression de G est connue.

Calcul de G pour l'éprouvette de cisaillement pur

Le critère de Giffith a été étendu au cas de la rupture des élastomères par Rivlin et Thomas (1953). Pour vérifier la validité du critère énergétique, les auteurs proposent plusieurs géométries d'éprouvettes facilitant le calcul du taux de restitution. La géométrie dite de cisaillement pur utilisée (*pure shear*) pour l'étude expérimentale de cette thèse en fait partie. Classique dans le domaine des élastomères (Kadir et Thomas, 1981; Lake *et al.*, 2000; Morishita *et al.*, 2016), elle est aussi utilisée pour la mesure de Γ pour les matériaux fragiles comme le verre ou le PMMA (Sharon *et al.*, 1996; Sharon et Fineberg,

1999; Goldman *et al.*, 2010) sous le nom de « bande » (*strip geometry*). L'expression de G pour cette géométrie simple s'établit de plusieurs manières, aussi bien en statique (Rice, 1968) qu'en dynamique (Freund, 1998). La présentation qui suit, se réfère directement à la démonstration historique de Rivlin et Thomas (1953) en quasi-statique, pour évoquer le domaine des élastomères et proposer un schéma proche des ruptures observées aux chapitres précédents.

On considère une éprouvette de cisaillement pur (bande dont la largeur L_0 est grande devant sa hauteur h_0 et son épaisseur e_0). Ses bords longs sont encastrés et considérés comme immobiles au cours de la propagation, comme schématisé sur Figure 1.4. Cette

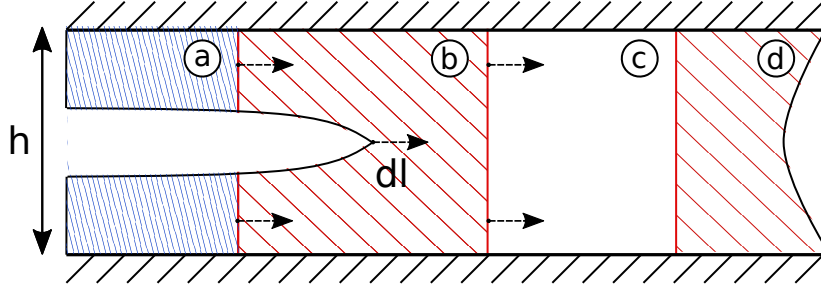


FIGURE 1.4 – Découpage de l'éprouvette de cisaillement pur en 4 zones, d'après Rivlin et Thomas (1953). a : zone déchargée. b : zone dont les champs sont inconnus se déplaçant avec la pointe. c : zone chargée uniformément en cisaillement pur. d : zone de chargement inconnu.

éprouvette présente une fissure de l'un de ses bords libres jusque dans la région centrale de l'éprouvette. Dans cette situation, on peut découper abstraitement l'éprouvette en quatre zones distinctes : une zone déchargée à cause de la fissure (Fig.1.4(a)), une zone dont les champs sont inconnus du fait de la présence de la pointe de fissure (Fig.1.4(b)), une zone chargée uniformément en cisaillement pur (Fig.1.4(c)) et la zone correspondant aux effets de bords, elle aussi de champs inconnues (Fig.1.4(d)). Dans l'hypothèse d'une avancée quasi-statique de la fissure d'une longueur dl , la zone (b) se translate aussi d'une longueur dl . Cette avancée se fait au détriment de la zone (c) et au profit de la zone (a). La densité volumique d'énergie élastique stockée dans la zone (c), notée w , est connue. Au cours de cette propagation, l'énergie mécanique E_m (ici purement élastique en quasi-statique) stockée dans la pièce a donc diminué de :

$$dE_m = -w \times h_0 \times e_0 \times dl, \quad (1.12)$$

puisque la densité d'énergie élastique est nulle dans la zone (a). A partir de l'Eq. (1.4), on obtient une expression du taux de restitution d'énergie :

$$G = -\frac{1}{e_0} \frac{dE_m}{dl} = w \times h_0, \quad (1.13)$$

soit la variation d'énergie mécanique globale par unité de surface de fissure créée.

Ce raisonnement appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, il ne présuppose pas la linéarité du comportement ni l'hypothèse de petites déformations (hypothèse 2 § 1.1.5), d'où son application aux élastomères et sa généralité au-delà de la stricte LEFM. Ensuite, la longueur de la bande n'intervient pas la démonstration se plaçant « loin des bords ». D'autres démonstrations supposent donc de manière équivalente une bande de longueur infinie. Enfin, l'hypothèse de propagation quasi-statique n'est pas nécessaire tant que deux

autres conditions sont respectées : processus dissipatifs localisés en pointe (limités à la zone (b)) et invariance par translation pour pouvoir écrire l'équation 1.12. Cette démonstration peut être étendue au cas dynamique à condition que ses effets, comme la conversion d'une partie de l'énergie élastique en énergie cinétique, restent invariants par translation. Cela suppose de remplacer l'hypothèse de croissance quasi-statique par l'hypothèse de propagation stationnaire dans la zone centrale de l'éprouvette ; les autres effets dynamiques, comme l'émission d'ondes mécaniques et leur interaction avec la pointe, doivent être négligeables. Bien que développée pour une application statique, cette géométrie d'éprouvette est très utilisée en dynamique.

Variation de Γ avec la vitesse de propagation

L'énergie de rupture est conçue au départ comme une grandeur scalaire caractéristique du matériau (Griffith, 1920; Rivlin et Thomas, 1953). Cependant, sa dépendance à la vitesse de propagation dans le cas général ne fait rapidement plus de doutes (Irwin, 1957; Bergkvist, 1974). Elle est mesurée pour la première fois sur des élastomères par Greensmith et Thomas (1955) au moyen d'éprouvettes « pantalon », autre géométrie pour laquelle une expression de G est connue (Rivlin et Thomas, 1953; Eshelby, 1975; Verron, 2007). En imposant une vitesse de propagation, ils obtiennent une relation expérimentale entre la vitesse de la fissure et l'énergie de rupture à travers l'Eq.(1.11). L'éprouvette de cisaillement pur permet d'imposer le taux de restitution d'énergie en contrôlant le chargement de l'éprouvette. La vitesse de propagation correspondante est alors mesurée au centre de l'éprouvette.

La mesure de l'évolution de G avec la vitesse de propagation a notamment servi à tester les prédictions de la LEFM sur des matériaux fragiles (Dally, 1979; Ravi-Chandar et Knauss, 1984). Lorsque ses hypothèses sont valides, la LEFM s'avère remarquablement robuste. Utilisant des éprouvettes de géométries différentes, une même relation $\Gamma(c)$ est obtenue, et ce pour des matériaux aussi différents que le PMMA et le verre (Sharon et Fineberg, 1999) (la méthode particulière pour ces résultats sera présentée § 1.2.2). L'unicité de la courbe $\Gamma(c)$ valide l'hypothèse de l'énergie de rupture comme grandeur mécanique caractéristique de la rupture, indépendamment des phénomènes physiques se déroulant à l'échelle microscopique au niveau de la pointe. Pour les matériaux fragiles, ces bons résultats ont été obtenus pour des vitesses de propagation inférieures à $0,4c_R$, en accord avec d'autres études sur des matériaux différents mais toujours fragiles (Bergkvist, 1974; Ravi-Chandar et Knauss, 1984). Au delà, d'autres phénomènes entrent en jeu. Pour les élastomères, l'étude de l'évolution de Γ avec la vitesse de propagation sera détaillée au paragraphe 2.2.2.

1.2.4 Application : équation de propagation analytique

Il est rarement possible de calculer une expression analytique de G pour un problème dynamique non stationnaire. L'équation de propagation d'une fissure (Eq.(1.11)) admet une formulation explicite principalement dans deux situations particulières (Bouchbinder *et al.*, 2014) :

- La propagation dans un milieu infini en mode I avec le chargement appliqué sur les lèvres de la fissure (ou tout problème qui peut s'y rapporter (Freund, 1998)),
- La propagation en mode I dans une bande de longueur infinie chargée en déplacement imposé (Marder, 1991).

Ces deux exemples particuliers couvrent tout de même une certaine diversité de cas pratiques, du moins pour des expériences de laboratoire. Ils constituent des résultats impor-

tants de la LEFM, comparables directement aux expérimentations. Ces deux résultats se fondent sur les quatre hypothèses précédentes et leur généralisation en dynamique. Leur présentation ici suit étroitement la revue bibliographique de (Bouchbinder *et al.*, 2014).

Cas 1 : milieu infini

Ce cas a été traité notamment par Eshelby (1969), Kostrov (1974), Willis (1975) et Freund (1998). Sans entrer dans les détails de la démonstration, la première étape consiste à étendre la relation d'Irwin (1.6) au cas dynamique :

$$G(c) = \frac{(1 - \nu^2)K_{Is}^2}{E} k_d^2(c) A(c), \quad (1.14)$$

avec $k_d(c)$ et $A(c)$ des fonctions universelles ne dépendant du matériau que par la vitesse des ondes dans le milieu. Dans cette expression, le facteur d'intensité des contraintes dynamique en mode I a été décomposé en un produit du facteur d'intensité des contraintes statique du problème équivalent ($K_{Is} = K_I(c = 0)$) par un terme dynamique ne dépendant que de la vitesse de propagation ($k_d(c)$). On rappelle qu'ici K_{Is} dépend de la longueur de la fissure. Freund (1998) a montré qu'en bonne approximation, on a :

$$k_d^2(c) A(c) \approx 1 - \frac{c}{c_R}. \quad (1.15)$$

L'équation du mouvement de la pointe (1.11) devient donc :

$$\Gamma(c) \approx \frac{(1 - \nu^2)K_{Is}^2}{E} \left(1 - \frac{c}{c_R}\right). \quad (1.16)$$

En inversant cette relation, on obtient une expression analytique approchée de la vitesse de la fissure au cours de sa propagation :

$$c \approx c_R \left(1 - \frac{\Gamma(c)E}{(1 - \nu^2)K_{Is}^2}\right). \quad (1.17)$$

Suivant cette équation, la vitesse de la fissure tend bien vers la vitesse des ondes de Rayleigh lorsque K_{Is} augmente (ici avec la longueur de la fissure). Par ailleurs, l'équation (1.17) ne fait intervenir que la position de la pointe (à travers sa longueur) et sa dérivée première, la vitesse c . Par analogie avec la mécanique du point, la fissure se comporte comme n'ayant pas d'inertie. La vitesse de la pointe évolue donc en phase avec une force thermodynamique s'appliquant sur elle. Cette prédiction a été vérifiée expérimentalement en faisant varier le facteur d'intensité des contraintes au moyen d'ultrasons au cours de la propagation (Kerckhof, 1973).

Cas 2 : bande infinie

La deuxième équation est moins connue. Proposée par Marder (1991), elle illustre l'influence des effets dynamiques dans la situation courante de la bande infinie (utilisée notamment pour mesurer $\Gamma(c)$, § 1.2.3). La bande de hauteur initiale h_0 est chargée par un déplacement constant au niveau de ses bords encastres. Se plaçant dans le cas d'une propagation non-stationnaire (contrairement au cas de la bande infinie classique) et pour une accélération de fissure $\dot{c}$ faible, Marder (1991) aboutit à une équation de propagation de la forme :

$$\Gamma(c) \approx wh_0 \left[1 - \frac{h_0 \dot{c}}{2c_d^2} \left(1 - \frac{c^2}{c_R^2}\right)^{-2}\right], \quad (1.18)$$

avec w la densité d'énergie élastique stockée en amont de la pointe et c_d la vitesse des ondes de dilatation. Cette seconde équation de propagation ne dépend plus de la longueur de la fissure, donc de sa position, mais de son accélération $\dot{c}$. Bouchbinder *et al.* (2014) précisent cet état de fait en réécrivant l'équation (1.18) sous la forme :

$$\frac{f(c)h_0}{c_d^2}\dot{c} = 1 - \frac{\Gamma(c)}{2wh_0}, \quad (1.19)$$

c'est-à-dire sous la forme d'une équation du mouvement $m(c)\dot{c} = F_c$ clairement analogue à celle d'une particule massique. Cette équation prédit toujours une vitesse limite égale à celle des ondes de Rayleigh, mais la prise en compte des limites de la structure introduit des effets d'inertie. Ces effets, qui changent qualitativement la physique de la propagation, proviennent de l'interaction de la fissure avec son histoire par l'intermédiaire des réflexions d'ondes.

Validation expérimentale

La validité de ces équations de propagation a pu être évaluée expérimentalement. La première équation décrit remarquablement bien le comportement d'une fissure, dès que toutes les hypothèses sont vérifiées (Bergkvist, 1974; Sharon et Fineberg, 1999; Kessler et Levine, 2003). En particulier, c'est en utilisant cette équation de propagation, que Sharon et Fineberg (1999) ont mesuré l'évolution de $\Gamma(c)$ en cours de propagation, jusqu'à une vitesse de $0,4c_R$. Avec la relation d'Irwin (1.6) et la valeur de G pour une bande infinie (6.1), l'équation (1.17) peut s'écrire :

$$\Gamma(c) \approx w_0h_0 \left(1 - \frac{c}{c_R}\right), \quad (1.20)$$

ce qui permet d'estimer Γ à partir de la mesure de vitesse. Leurs résultats pour le verre et le PMMA sont présentés sur la Figure 1.5. Récemment, la validité de cette équation a même été vérifiée pour des vitesses de fissure atteignant $0,96c_R$ par Goldman *et al.* (2010). En revanche, dans la même étude sur la propagation dans les gels de polyacrylamide, Goldman *et al.* (2010) ont observé le passage d'un comportement sans inertie à l'acquisition d'une inertie. La Figure 1.6 illustre ce passage d'un comportement à l'autre lorsque les ondes ont eu le temps de se réfléchir sur les bords encastres et de revenir. La première partie de la propagation, libre de toute influence de son histoire, est très bien décrite par l'Eq.(1.17), tandis que l'Eq.(1.18) prend ensuite le relais. Cette bonne concordance entre la LEFM et les différentes études expérimentales illustre la capacité prédictive de cette théorie, pour peu que ses nombreuses hypothèses soient respectées.

1.2.5 Sélection de la trajectoire

Pour sa partie classique, la LEFM est une théorie scalaire : les forces appliquées à l'échelle de la structure et les phénomènes dissipatifs en pointe de fissure ne sont liés que par des paramètres scalaires, aussi bien le transport d'énergie (G) que la concentration de contraintes (K_I). Une telle théorie ne peut donc pas rendre compte en l'état des trajectoires empruntées par la fissure. Ainsi, le critère de Griffith ne prédit pas la direction prise par la fissure en cas de propagation et les « équations du mouvement » présentées au § 1.2.2 ne sont valables que pour une propagation droite. Une première approche, analytique, consiste alors à compléter l'équation de propagation de la fissure par un critère de sélection de trajectoire. Il n'existe pas de consensus général sur ces critères et c'est un domaine d'étude actif. Les principales idées à l'origine de leurs développements sont brièvement passées en revue ci-dessous, sans rechercher l'exhaustivité.

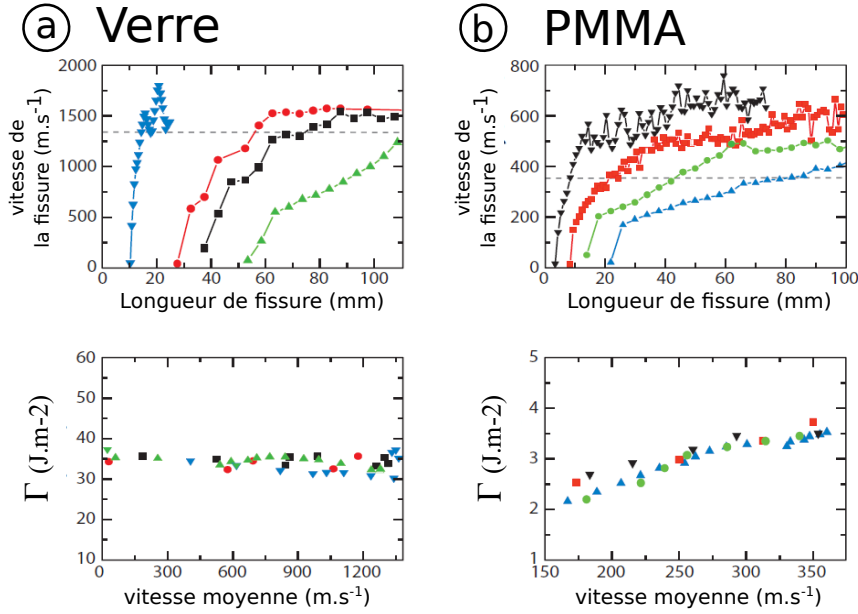


FIGURE 1.5 – Haut : vitesse de propagation d’une fissure dans une éprouvette de cisaillement pur en fonction de la longueur de la fissure, pour le verre (a) et le PMMA (b). La ligne pointillée représente la vitesse maximale pour laquelle Γ est mesurée. Bas : énergie de rupture calculée à partir de l’Eq.(1.16) en fonction de la vitesse de la fissure. Résultats de Sharon et Fineberg (1999), figure adaptée de Bouchbinder *et al.* (2010a).

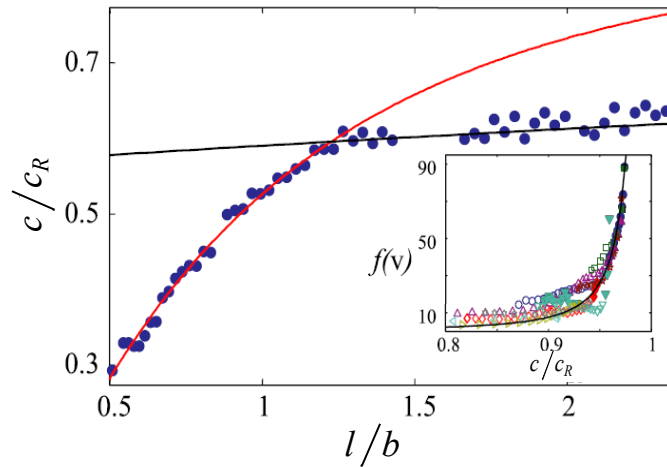


FIGURE 1.6 – Evolution de la vitesse d’une fissure (normalisée par la vitesse des ondes de Rayleigh) en fonction de sa longueur au cours d’une propagation dans une bande de hauteur $2b$. Ligne rouge : prédiction dans le cas du milieu infini (1.17). Ligne noire : prédiction dans le cas d’une bande infinie (1.18). Résultats expérimentaux de Goldman *et al.* (2010), figure adaptée de Bouchbinder *et al.* (2014).

Critères de sélection de trajectoire en quasi-statique

Les critères de sélection de trajectoire se fondent soit sur une approche en contraintes (contrainte locale, facteur d’intensité des contraintes) ou sur une approche énergétique.

Le critère de référence de la LEFM considère qu’une fissure soumise à un chargement combinant plusieurs modes d’ouverture s’oriente de façon à ce que le champ en pointe

de fissure soit en mode I. Ce critère a été proposé par Gol'Dstein et Salganik (1974). Postulant un mode d'ouverture symétrique en pointe (mode I), il est appelé critère de « symétrie locale ». De manière équivalente, ce critère stipule que la propagation se fait selon la direction qui assure $K_{II} = 0$. D'un point de vue analytique, les facteurs d'intensité des contraintes ont été dérivés pour une fissure incurvée (Cotterell et Rice, 1980; Amestoy et Leblond, 1992), et la connaissance de leur répartition angulaire permet de déterminer la future direction de propagation. Introduit pour des problèmes 2D, ce critère a été étendu au cas 3D par Hodgdon et Sethna (1993). Selon ce critère, une fissure statique soumise à un chargement avec $K_{II} \neq 0$ progresse en formant un coude (*kink*), comme illustré sur la Figure 1.7. La longueur sur laquelle la fissure se propage avant d'avoir la bonne orientation

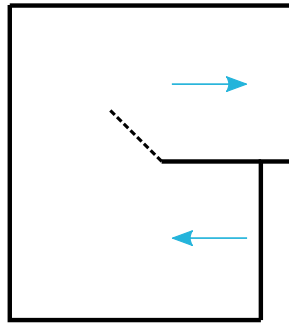


FIGURE 1.7 – Direction de propagation (pointillés) d'une fissure chargée en mode II pur dans un matériau fragile selon le critère $K_{II} = 0$. Inspiré de Hodgdon et Sethna (1993).

est de l'ordre de la taille de la zone de non-linéarité en pointe (Hodgdon et Sethna, 1993). Ce critère est aussi reconnu dans le cas de la propagation lente de fissures, maintenant alors $K_{II} = 0$ à chaque instant (Cotterell et Rice, 1980).

Ce critère est par ailleurs cohérent avec une multitude d'autres critères (Cotterell et Rice, 1980). Parmi eux on trouve notamment le critère de contrainte tangentielle maximale (Erdogan et Sih, 1963) ou celui de maximisation du taux de restitution d'énergie (Cotterell, 1965). On retrouve donc une certaine unité des résultats de ces critères autour de la propagation quasi-statique. Le critère de symétrie locale se comprend intuitivement par le choix de l'orientation qui maximise la traction en pointe, jugée plus sévère pour la rupture. Il ne repose cependant sur aucun principe fondamental, ce qui pose des problèmes pour son extension aux matériaux anisotropes par exemple (Hakim et Karma, 2009). Il reste tout de même en accord avec les essais de propagation quasi-statique réalisés sur matériau fragile (Fineberg et Marder, 1999).

Cas de la propagation dynamique

Pour la propagation dynamique en revanche, il n'y a pas de consensus sur les critères de sélection de trajectoire à adopter. De plus, les critères de symétrie locale et de maximisation du taux de restitution d'énergie ne sont pas forcément équivalents dans ce cas. La généralisation de ces critères au cas dynamique manque de soutien théorique ou expérimental (Fineberg et Marder, 1999). D'autres approches sont envisagées, notamment celle s'appuyant sur la mécanique configurationnelle (Eshelby, 1975; Gurtin et Podio-Guidugli, 1996). Cette théorie des défauts introduite par Eshelby (1951) propose un autre cadre d'étude de la propagation de fissure que la LEFM, mais dont les résultats sur les critères de propagation quasi-statique sont en accord (Gurtin, 2000). La description de cette théo-

rie dépasse le cadre de ce chapitre. Néanmoins, elle est à la source de nombreuses tentatives d'élaboration d'un critère de trajectoire en dynamique (et en grandes déformations), par exemple fondé sur la généralisation d'un critère de Griffith vectoriel (Adda-Bedia *et al.*, 1999), la maximisation de la puissance dissipée (Gurtin et Podio-Guidugli, 1998; Gurtin, 2000) ou l'identification de l'équivalent d'un couple s'exerçant sur la pointe (Eshelby, 1975; Hakim et Karma, 2009). Actuellement, aucun critère ne se distingue particulièrement. « Nous n'avons pas, pour l'instant, d'équation générale pour déterminer la trajectoire d'une fissure dynamique », résumant récemment Fineberg et Bouchbinder (2015).

Remarques sur l'aspect numérique

D'un point de vue pratique, les problèmes de prédiction de trajectoire se traitent souvent avec des méthodes numériques. Au delà de la variété des stratégies numériques adoptées, on distingue deux rapports à la sélection de trajectoires. Dans un premier cas, la fissure est étendue de manière itérative une fois la nouvelle direction estimée à l'aide d'un critère. On retrouve par exemple des méthodes numériques fondées sur les zones cohésives (Moës et Belytschko, 2002) ou la séparation de nœuds (Ozenç et Kaliske, 2014). Dans ces modèles numériques, la diversité des cas traités et l'ajout de contraintes numériques spécifiques expliquent en partie la profusion de critères employés. On retrouve donc des critères de contraintes maximales, de minimisation de la densité d'énergie élastique, de maximisation de K_I ou de minimisation de K_{II} , de maximisation de G , de maximisation du flux d'énergie, *etc* (Ferté *et al.*, 2016).

Une autre classe de modèles, comme les champs de phase (*phase field*) développés depuis le début des années 2000 (Bourdin *et al.*, 2000; Karma *et al.*, 2001; Ambati *et al.*, 2015), propose une approche phénoménologique de la rupture. La singularité de la pointe est régularisée sur une petite zone et la dissipation en son sein est régie par un jeu d'équations spécifique faisant passer graduellement un potentiel de 1 (matériau sain) à 0 (rompu). Ce type de modèle n'incorpore pas de critère de rotation de fissure, mais espère voir émerger la trajectoire naturellement (et les phénomènes d'instabilité (Henry et Levine, 2004)). Ces modèles ont récemment été étendus au cas dynamique (Borden *et al.*, 2012; Hofacker et Miehe, 2012). Avec ce type de modèle, Chen *et al.* (2017) ont pu simuler les phénomènes d'instabilités lors de la propagation de fissure à grande vitesse dans un matériau type élastomère (néo-hookéen incompressible).

1.3 Limites de la LEFM

Les paragraphes précédents ont illustré les succès de la LEFM. Cette théorie constitue le formalisme le plus abouti pour l'analyse des problèmes de rupture et reste l'approche couramment utilisée en ingénierie. Tout naturellement, l'amélioration des techniques d'observation, l'élévation des ambitions technologiques ou la simple curiosité ont poussé la LEFM dans ses retranchements. L'extension de son champ d'application repose forcément sur le dépassement total ou partiel de ses hypothèses fondamentales. Pour aller vers la rupture des élastomères en grandes déformations et à grande vitesse, on balaye ici quelques unes des conséquences de ce dépassement :

- D'abord, l'apparition d'instabilités à haute vitesse met à mal le cadre confortable des fissures simples (hypothèse 1) et explique l'échec de certaines prédictions.
- Ensuite, les travaux récents tendent à montrer que la zone de non-linéarité conserve un impact important sur le comportement de la fissure. La première déviation à étudier par rapport à la LEFM serait la prise en compte de l'élasticité non-linéaire

en pointe (hypothèse 2), puis à toutes les échelles pour les élastomères (hypothèse 3).

- Enfin, l’observation de fissures supersoniques dans les élastomères remet en question le bilan énergétique global (hypothèse 4).

Bien entendu, ce classement par hypothèse ne doit pas masquer les liens existants entre les différents phénomènes.

1.3.1 Instabilités en rupture dynamique

Les instabilités de propagation de fissures constituent un domaine d’étude proprement dit, pris en particulier par la communauté des physiciens. Deux revues bibliographiques récentes leur faisant la part belle (Fineberg et Marder, 1999; Bouchbinder *et al.*, 2014), seuls quelques résultats seront présentés ici.

Dans les matériaux fragiles (verre, PMMA...) une fissure simple semble devenir instable au delà d’une certaine vitesse critique, proche de $0,4c_R$. La fissure simple se complète alors de petites fissures secondaires transversales, décrivant l’instabilité de ramification (*micro-branching instability*). Un exemple est proposé sur la Figure 1.8(a). Observé par

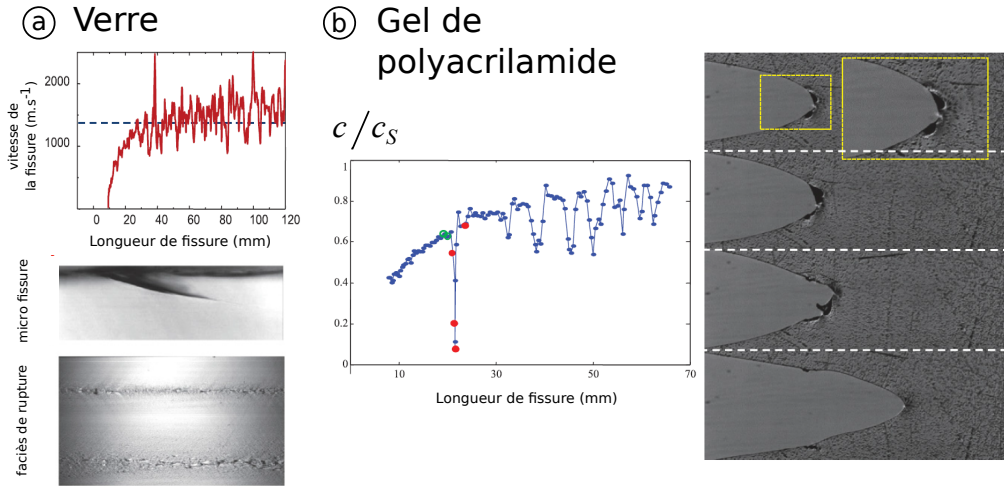


FIGURE 1.8 – (a) : Instabilité de branchement dans le verre : au-delà d’une certaine vitesse (ligne pointillée, en haut) la vitesse se met à osciller, ce qui correspond à la formation de fissures secondaires (centre), d’où le faciès de rupture accidenté (bas). (b) : Branchement dans un gel de polyacrylamide : rapport vitesse de fissure sur célérité des ondes de cisaillement (gauche) et allure de la pointe au cours du branchement (droite). Les images correspondent de haut en bas aux points rouges. Figures issues de Bouchbinder *et al.* (2014).

de nombreux auteurs (Fineberg et Marder, 1999; Ravi-Chandar et Knauss, 1984; Sharon et Fineberg, 1999), ce phénomène est une caractéristique universelle de la rupture (Livne *et al.*, 2005). Il a même été observé dans un gel de polyacrylamide par Livne *et al.* (2005), présenté comme un « élastomère fragile » par sa modélisation (néo-Hookéen incompressible). Les plus grandes déformations (5%-15%) supportées par ce matériau et la faible vitesse des ondes de cisaillement permettent d’observer en détail ce phénomène (Figure 1.8(b)).

Cette instabilité peut être supprimée en affinant les membranes utilisées, ce qui amène à constater un autre type d’instabilité à plus haute vitesse : une propagation oscillante

(Bouchbinder *et al.*, 2010a). Observée récemment dans les gels de polyacrylamide (Livne *et al.*, 2007; Goldman Boué *et al.*, 2012), une telle propagation à été rapportée dans le caoutchouc naturel par Stevenson et Thomas (1979), et Deegan *et al.* (2002) en grande déformation. Un exemple de trajectoire obtenue par Deegan *et al.* (2002) pour une membrane en traction biaxiale ($\lambda_y = 3.3$ et $\lambda_x = 2.8$) est présenté sur la Figure 1.9. L'oscillation dans

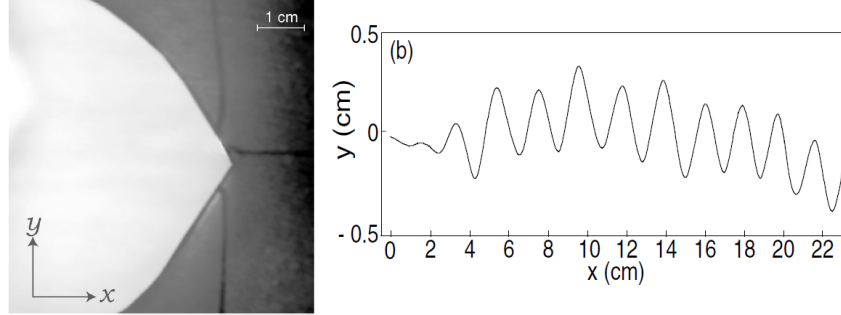


FIGURE 1.9 – Trajectoire de fissure oscillante dans le caoutchouc naturel. Allure de la pointe de fissure (gauche) et trajectoire observée (droite) dans une membrane sous chargement biaxial ($\lambda_y = 3.3$ et $\lambda_x = 2.8$). Résultats de Deegan *et al.* (2002).

les élastomères s'observe pour de hauts niveaux de déformation et un taux de biaxialité suffisant. A priori, c'est pour cette raison qu'il ne sera pas observé dans notre étude, la déformation dans le sens de propagation n'étant pas suffisante.

Étonnamment, ces phénomènes d'oscillation dans les matériaux fragiles en petites déformations et dans les élastomères ne semblent pour l'instant pas reliés car ils ne se produisent pas aux mêmes vitesses (Bouchbinder *et al.*, 2014). Ils ont tous les deux été abordés d'un point de vue numérique, le premier avec un modèle à champ de phase (Chen *et al.*, 2017), le second avec un modèle lattice (Wang et Chen, 2005).

1.3.2 Non-linéarités géométrique et matériau

Élasticité non-linéaire en pointe

Les hypothèses de la LEFM contiennent une forme de paradoxe : la solution indique que la déformation en pointe de fissure diverge, mais les configurations de référence et déformée peuvent être confondues (hypothèse des petites perturbations). Bien entendu, cette dernière perd sa validité dans une certaine région autour de la pointe, ce qui semble prendre toute son importance en dynamique (Livne *et al.*, 2008; Bouchbinder *et al.*, 2008). Traditionnellement ignorée, cette zone où l'élasticité linéaire ne suffit plus, trouve un regain d'intérêt depuis les années 2000 (Buehler *et al.*, 2003). En pointe de fissure, on suppose que l'élasticité perd sa linéarité du fait des grandes déformations avant que n'entrent en jeu les phénomènes irréversibles. Des études récentes considèrent donc le rôle de l'hyperélasticité en pointe (Buehler *et al.*, 2003; Buehler et Gao, 2006) ou optent pour le développement des équations du mouvement à l'ordre 2 par rapport au gradient du déplacement. Cette dernière approche a été formalisée sous le nom de « théorie faiblement non-linéaire de la rupture dynamique » (*weakly nonlinear theory of dynamic fracture*, WNLT) (Bouchbinder *et al.*, 2008, 2009) et testée expérimentalement sur la propagation dans les gels de polyacrylamide (Livne *et al.*, 2008; Bouchbinder *et al.*, 2010b). Dans les deux cas, l'une des principales idées est l'ajout d'une distance caractéristique à la LEFM (qui intrinsèquement

n'en contient pas). Cette distance caractéristique se définit alors comme la zone où l'élasticité non-linéaire l'emporte sur l'élasticité linéaire. Cette distance caractéristique pourrait jouer un rôle important pour certains phénomènes non-expliqués par la LEFM, comme la propagation supersonique (Buehler et Gao, 2006) ou les instabilités de propagation (Bouchbinder, 2009; Goldman Boué *et al.*, 2012).

Grandes déformations - approche locale

L'étude des fissures dans les élastomères impose plus directement de renoncer aux hypothèses d'élasticité linéaire et de petites déformations. Des élastomères « classiques » (caoutchouc naturels et synthétiques, polyuréthanes...) aux matériaux moins usuels comme les hydrogels (Baumberger *et al.*, 2006) et les tissus biologiques, ces matériaux mous (*soft*) et résilients (*tough*) ont un comportement à rupture particulier. Avant de se propager, le matériau se déforme beaucoup et les fissures présentes s'arrondissent et s'émoussent. Dans ce cas, les développements en pointe de fissure classiques (Irwin, 1957) ne sont plus valables. Un certain nombre d'études sont consacrées à l'identification des solutions asymptotiques statiques des champs en pointe de telles fissures, depuis les travaux de Wong et Shield (1969), et Knowles et Sternberg (1973). Long et Hui (2015) en proposent une revue détaillée, dont sont tirés les quelques résultats présentés ici. On se concentre sur les résultats qui diffèrent de la LEFM pour les matériaux incompressibles.

La première différence d'importance avec la LEFM est la distinction nécessaire entre les configurations de référence et déformée. La position de la pointe de fissure dans le repère global change entre ces deux configurations, comme illustré par la Figure 1.10, et les tenseurs des contraintes ne sont pas équivalents (tenseur des contraintes de Cauchy σ et de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$). Une solution asymptotique se réfère donc à un tenseur particulier

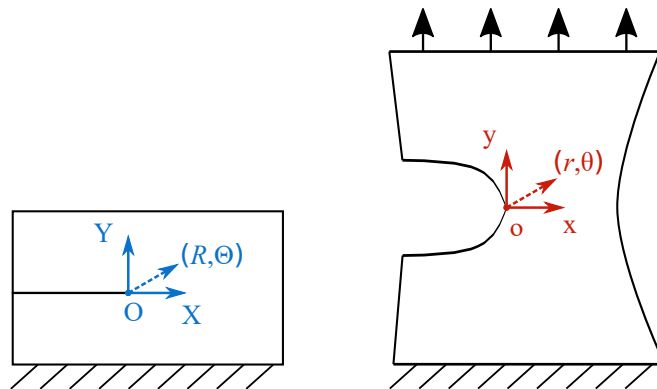


FIGURE 1.10 – Schéma d'une fissure en mode I (2D) dans un matériau type élastomère. La position de la pointe change suivant les deux axes entre les configurations de référence (gauche) et déformée (droite).

et une configuration particulière. L'étude du problème asymptotique en pointe de fissure ne peut se faire qu'avec le choix d'un modèle hyperélastique donné. Dans ce sens, les solutions pour les matériaux hyperélastiques n'ont pas la même généralité que la solution pour un matériau élastique linéaire. Le modèle néo-Hookéen incompressible est le premier étudié (Wong et Shield, 1969; Knowles et Sternberg, 1974), suivi du modèle néo-Hookéen généralisé (Geubelle et Knauss, 1994). Quelques autres modèles ont fait l'objet d'une étude, comme le modèle à raidissement exponentiel (Long *et al.*, 2011), sans toutefois couvrir l'étendue du panel de lois de comportement existant (Marckmann et Verron, 2006). Par

ailleurs, les méthodes mathématiques utilisées ne sont pas forcément applicables à tout type de modèle et, même dans les cas traités, les distributions angulaires ne sont pas toujours accessibles analytiquement (Long *et al.*, 2011).

Devant la diversité des situations possibles, on illustre quelques conclusions générales par le cas de la fissure en contraintes planes, ouverte en mode I dans un matériau néo-Hookéen incompressible. Le modèle néo-Hookéen postule une densité d'énergie élastique w de la forme :

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad (1.21)$$

avec μ le module de cisaillement et I_1 le premier invariant (la trace) du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit. Les résultats suivants sont données en fonction des coordonnées polaires, dans la configuration de référence (R, Θ) ou déformée (r, θ) (Fig.1.10).

La contrainte nominale (Piola-Kirchhoff I) a pour solution asymptotique dans la configuration de référence :

$$\begin{aligned} P_{11} &= \mu b, & P_{12} &= o(1), \\ P_{21} &= -\frac{\mu a}{2\sqrt{R}} \sin \Theta, & P_{22} &= \frac{\mu a}{2\sqrt{R}} \cos \Theta, \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec a et b deux paramètres qui dépendent du problème aux limites. On note que ces facteurs dépendent du modèle choisi, et leur forme simple ($\frac{\mu a}{2}$) tient beaucoup à la simplicité du modèle. Toujours dans cette configuration, le tenseur des contraintes de Cauchy (symétrique) s'exprime au premier ordre par :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \mu b^2, \\ \sigma_{22} &= \frac{\mu a^4}{4R}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{\mu ab}{2\sqrt{R}} \sin(\Theta/2). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Au premier ordre, σ_{11} est constant et prend donc la même valeur dans la configuration déformée. Pour la composante verticale, on a :

$$\sigma_{22} = \frac{\mu a^4 b}{4r} \left(\frac{1}{2br \sin(\theta)^2 + a^2 \cos(\theta)} \right), \quad (1.24)$$

dans la configuration déformée pour $\theta \in [0, \pi/2]$. De ces équations, on peut tirer quatre différences fondamentales avec la LEFM (parmi d'autres).

- Ces solutions asymptotiques ne font plus appel à un pré-facteur unique et caractéristique comme peut l'être le facteur d'intensité des contraintes. Le principe de superposition ne s'appliquant plus en grandes déformations, l'étude des modes mixtes se complexifie. On note aussi que le mode II pur n'existe pas en grandes déformations. Cette remarque expérimentale intuitive est depuis confirmée par les travaux de Stephenson (1982) et Harpaz et Bouchbinder (2012).
- La divergence des contraintes dépend du tenseur et de la configuration considérée. Si l'on retrouve la singularité usuelle en $R^{-1/2}$ pour les contraintes nominales, la singularité est plus sévère en contraintes de Cauchy. Cette singularité en R^{-1} est cohérente avec les résultats de la WNLTL (Bouchbinder *et al.*, 2009) et confirmée par l'expérience (Livne *et al.*, 2008).
- L'état mécanique en pointe de fissure est différent : la LEFM prédit une singularité équivalente pour P_{11} et P_{22} , tandis que P_{22} l'emporte en grandes déformations.

- La distribution des contraintes dans la configuration déformée révèle un comportement particulier, souligné par Krishnan *et al.* (2008). Dans l'état déformé, la lèvres supérieure de la fissure est décrite pour $\theta = \pi/2$. D'après l'équation 1.24 σ_{22} est alors plus singulier (r^{-2}) le long de la lèvre que directement devant la pointe ($\theta = 0$) ou la singularité est en r^{-1} .

Tous ces travaux dans le cadre non-linéaire complet ont été réalisés en quasi-statique et il n'existe pas d'étude équivalente en dynamique. En revanche, dans une étude récente, Goldman Boué *et al.* (2015) ont proposé une nouvelle approche pour traiter le cas d'une fissure dynamique se propageant dans une membrane déjà déformée, situation proche de notre étude. Cette extension de la WNLT consiste à séparer les contributions de la déformation initiale (λ) et de la fissure au champ de déplacement. La solution est alors recherchée en développant le gradient du déplacement à l'ordre 2. Cette théorie a décrit avec succès les champs en pointe de fissure dans une membrane en polyacrylamide déformée de 13% au maximum. Sa gamme de validité en déformation n'est pas identifiée avec certitude, mais ces résultats théoriques et expérimentaux révèlent tout de même que le paramètre de chargement λ « influence tous les paramètres physiques du problème [...] d'une manière non triviale » (Goldman Boué *et al.*, 2015). En particulier, le champ de déplacement en pointe de fissure en dépend, au delà du seul facteur d'intensité des contraintes.

Grandes déformations - approche énergétique

Contrairement à l'approche locale, l'approche énergétique de la rupture est peu impactée par les grandes déformations et l'élasticité non-linéaire. Rien ne change tant que les phénomènes dissipatifs restent localisés en pointe de fissure et que le bilan d'énergie global reste applicable. C'est pourquoi le calcul de G dans une éprouvette de cisaillement pur donne les mêmes résultats en grandes et petites déformations (§ 1.2.3). C'est l'approche privilégiée pour la rupture des élastomères, (Thomas, 1994). De la même manière, l'approche intégrale est valable en grandes déformations (Chang, 1972; Gurtin et Yatom, 1980), en se plaçant dans la configuration de référence et en utilisant le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff I. En revanche, les liens entre le taux de restitution d'énergie et les champs en pointe de fissure doivent être établis pour chaque loi de comportement particulière. L'intégrale J permet ce genre d'identification (Long et Hui, 2015).

1.3.3 Propagation supersonique

Selon la LEFM, la vitesse maximale de propagation d'une fissure est celle des ondes de Rayleigh dans le matériau. Cette limite est une conséquence directe de l'hypothèse selon laquelle l'énergie nécessaire à l'avancée de la fissure lui est transférée depuis l'ensemble de la structure par les champs élastiques (cf. § 1.2.1). Les expressions analytiques en mode I du flux d'énergie à travers la pointe indiquent une décroissance avec la vitesse de propagation, jusqu'à un flux nul pour $c = c_R$ (Freund, 1998). L'absence de solution pour $c > c_R$ avec un flux d'énergie positif en fait la vitesse maximale admissible physiquement. Néanmoins, la propagation de fissures à des vitesses supérieures à celles des ondes de Rayleigh et de cisaillement a été observée le long de trajectoires préférentielles (interface faible) ou sous chargement en mode II (Rosakis *et al.*, 1999; Rosakis, 2002). Ces cas particuliers, revus en détail par Rosakis (2002), ont des applications en résistance des structures (matériaux inhomogènes) et en géophysique; ils peuvent s'intégrer au formalisme de la LEFM. On précise que pour un matériau élastique linéaire, les vitesses des ondes se classent dans l'ordre $c_R < c_s < c_d$, avec c_d la célérité des ondes de dilatation (ondes longitudinales) et c_s celle des ondes de cisaillement.

La propagation de fissure en mode I à des vitesses supérieures à c_R semble contrevenir franchement à la LEFM. Elle a pourtant été observée par Buehler *et al.* (2003) en simulation de dynamique moléculaire mais aussi, plus simplement, dans les élastomères ! Utilisant des membranes gonflées, Stevenson et Thomas (1979) rapportent des vitesses de fissure qui leur semblent supérieures à celles des ondes, ce qui fut confirmé par une étude de Petersan *et al.* (2004). Ils mesurent d'abord la propagation des ondes longitudinales et de cisaillement dans une membrane en traction biaxiale. Ces valeurs n'étant pas constantes à priori (§ 2.1.3), leur dépendance à l'état de chargement de la membrane est identifiée. Pour de grandes déformations imposées, les fissures se propageant dans ces membranes s'avèrent « intersonique », c'est à dire : $c_s < c < c_d$. Ce résultat est reproduit sur la Figure 1.11. Dans une membrane fortement déformée, la vitesse des fissures pourrait même

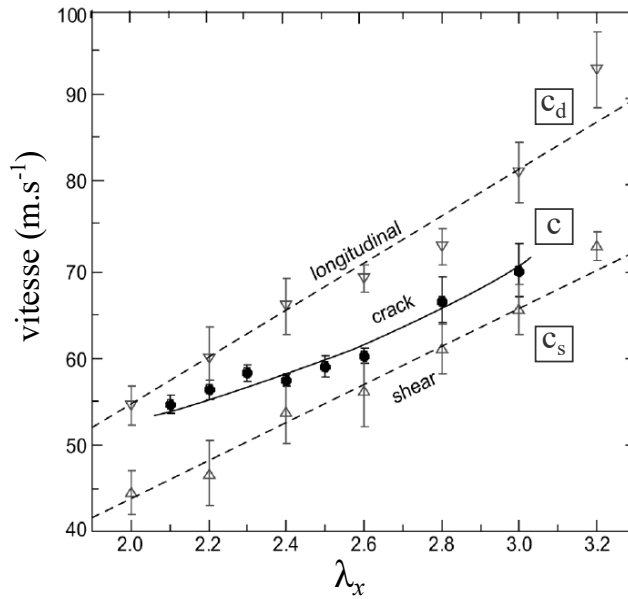


FIGURE 1.11 – Vitesse de propagation de fissures (points, « crack ») dans une membrane en caoutchouc sous chargement biaxial en fonction de la déformation imposée dans le sens de propagation λ_x . La déformation transverse est fixée à $\lambda_y = 3,2$. Cette vitesse est comparée à celles des ondes de cisaillement c_s et de dilatation c_d pour ces cas de chargement (triangles, respectivement « shear » et « longitudinal »). Résultats de Petersan *et al.* (2004).

s'approcher de c_d (Moulinet et Adda-Bedia, 2015).

Dans ce cas, la propagation supersonique sort du cadre de la LEFM car elle remet en cause l'hypothèse d'un transfert d'énergie de l'échelle de la structure à la pointe de fissure (Bouchbinder *et al.*, 2010a). Le problème change alors d'échelle comme l'ont montré Chen *et al.* (2011) à partir des travaux de Petersan *et al.* (2004). Selon la LEFM, le taux de restitution d'énergie caractérise la propagation et pilote donc sa vitesse, quelle que soit la structure considérée. Pour une membrane en traction biaxiale, G se calcule avec la même formule que l'éprouvette de cisaillement pure (une membrane en traction biaxiale avec $\lambda_x = 1$), soit $G = wh_0$ (Eq.6.1). A G constant, la vitesse de la fissure devrait être la même quelle que soit h_0 : c'est le comportement qui est observé pour des fissures progressant moins vite que les ondes de cisaillement, comme illustré Figure 1.12(a). En revanche, pour $c/c_s > 1$, la variation de hauteur de l'éprouvette retrouve une influence. Ce changement de comportement peut s'interpréter en traçant les mêmes vitesses de propagation en fonction de l'élongation imposée (voir Fig.1.12(b)), paramètre qui semble gouverner la rupture indépendamment de l'épaisseur en régime supersonique. D'un phénomène « global »

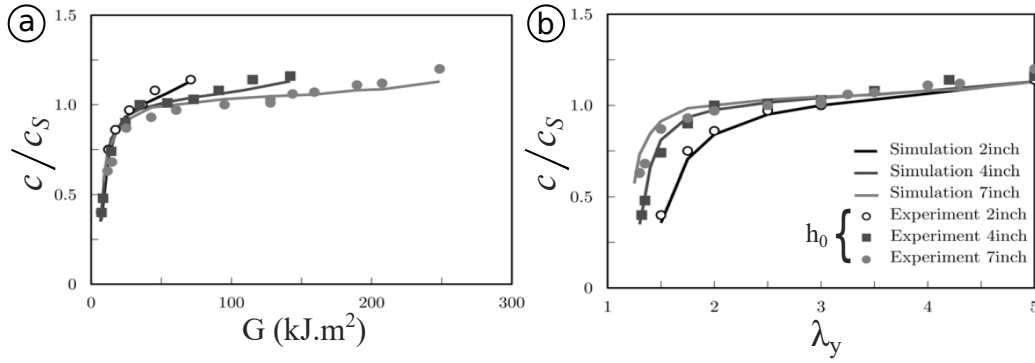


FIGURE 1.12 – Rapport c/c_s dans une membrane en caoutchouc sous chargement biaxial en fonction de (a) G et de (b) l'élongation transverse imposée. Résultats pour des membranes de trois hauteurs initiales différentes. Le domaine de vitesse sur lequel chaque paramètre unifie la vitesse de propagation traduit le changement d'échelle pour $c/c_s > 1$. Résultats de Chen *et al.* (2011).

gouverné par la diminution de l'énergie élastique de la structure, la rupture devient un phénomène local piloté par des grandeurs locales (élongation imposée ou densité d'énergie élastique de manière équivalente). L'interprétation de ce phénomène est qu'il y a suffisamment d'énergie élastique stockée à proximité de la pointe pour entretenir une propagation supersonique, sans qu'elle soit limitée par le flux d'énergie en provenance du reste de la structure (Chen *et al.* (2011)). Ces observations ont été reproduites avec succès avec des modèles lattices incorporant une version discrétisée du modèle de Mooney-Rivlin (Marder, 2006; Guozden *et al.*, 2010; Chen *et al.*, 2011). Elles confirment les résultats précurseurs de Gent et Marteny (1982a) sur le caoutchouc naturel, qui avaient montré qu'à haute vitesse « les célérités des fissures sont indépendantes de l'énergie disponible pour la rupture et ne dépendent que de l'état de déformation ».

Bilan

Ce premier chapitre a présenté la mécanique de la rupture élastique linéaire et ses hypothèses fondamentales. Constituant le cœur de la mécanique de la rupture, cette théorie est bien établie et ses capacités prédictives sont reconnues. Quelques concepts fondamentaux de cette théorie, comme le taux de restitution d'énergie et l'énergie de rupture. Ces concepts sont bien souvent nécessaires à l'interprétation d'expériences de propagation de fissure. Évidemment déduits d'observations expérimentales, ils sont aussi à l'origine du développement d'une grande partie des essais classiques de propagation de fissure, comme la membrane en traction biaxiale (ou cisaillement pur). La présentation de la LEFM a aussi permis de préciser les aspects de la rupture des élastomères qui sortent de son cadre. Les grandes déformations, la non-linéarité du matériau et la prise en compte de la dynamique limitent l'application d'une partie de ses méthodes et de ses résultats. Le chapitre suivant abordera les spécificités de la fissuration des élastomères sous un angle plus expérimental, de leur comportement à l'observation de leur rupture dynamique.

Chapitre 2

Rupture des élastomères : approche expérimentale et mesure de champs

Cela fait près de 75 ans que l'on observe, de plus en plus précisément, des fissures se propageant dans les élastomères. Ce champ d'étude expérimental assez restreint s'est poursuivi malgré tout, à la croisée des développements de la mécanique de la rupture, de la compréhension du comportement des élastomères et des progrès des techniques d'imagerie. Ce chapitre a pour objectif de présenter les approches expérimentales envisagées et leurs problématiques particulières. Pour cela, une première partie très générale rassemble les notions essentielles pour aborder la rupture des élastomères : une brève présentation de leur particularité mécanique, leur modélisation dans le cadre de l'élasticité non-linéaire et le problème spécifique, et moins connu, de la propagation d'ondes dans ces matériaux. La seconde partie se consacre aux études expérimentales sur la propagation dynamique de fissure dans les élastomères, en complément de celles évoquées au premier chapitre. Enfin, introduisant ce qui sera fait dans notre étude, la troisième partie présente les techniques de mesure de champs appliquées au cas de la propagation de fissures.

Sommaire

2.1	Comportement des élastomères	36
2.1.1	Qu'est ce qu'un élastomère ?	36
2.1.2	Grandes déformations et hyperélasticité	37
2.1.3	Propagation d'ondes dans les élastomères	41
2.2	Étude expérimentale de la rupture des élastomères	44
2.2.1	Mise en place d'une théorie de la rupture	44
2.2.2	Énergie de rupture d'un élastomère	46
2.2.3	Propagation à grande vitesse	49
2.3	Mesure de champs en pointe de fissure en mouvement	52
2.3.1	Matériaux fragiles	53
2.3.2	Élastomères	56

2.1 Comportement des élastomères

2.1.1 Qu'est ce qu'un élastomère ?

Les élastomères sont généralement des polymères faiblement réticulés. Ils sont constitués de longues chaînes de monomères, entités chimiques de base du polymère, linéaires ou ramifiées. Ces chaînes sont enchevêtrées et reliées les unes aux autres par des liaisons covalentes (points de réticulation, ramifications...) et par des liaisons de Van der Waals. C'est la mobilité des chaînes à la température d'utilisation qui rend les élastomères si déformables. Cette « élasticité caoutchoutique » constitue la principale propriété macroscopique des élastomères ainsi que le principal intérêt pratique de ces matériaux. Les élastomères sont classés en fonction des caractéristiques chimiques des monomères qui les composent. La présente étude se concentre sur le polyuréthane, qui est un copolymère associant un diisocyanate et un polyol. Ces dénominations génériques ne renvoient qu'aux fonctions chimiques présentes dans les monomères, la nature précise de ces derniers est choisie par le fabricant. Le terme « polyuréthane » recouvre donc une infinité de formulations et par conséquent une large gamme de propriétés mécaniques. Dans cette étude, la formulation chimique du polyuréthane est une donnée d'entrée et ne sera pas discutée. Au-delà de sa structure chimique particulière, un élastomère sera donc vu comme un matériau capable d'endurer de grandes déformations élastiques, éventuellement accompagnées d'une certaine viscoélasticité. Cette définition est assez large et pourrait englober des matériaux très différents. Les travaux récents sur de nouveaux matériaux très résilients et déformables, comme les hydrogels (Sun *et al.*, 2012), brouillent quelque peu les définitions issues des applications industrielles historiques des élastomères.

En lien avec la mobilité des chaînes moléculaires, les propriétés mécaniques des polymères évoluent fortement avec la température ou la vitesse de sollicitation. On distingue en particulier trois états :

- L'état vitreux, dans lequel le matériau est rigide et fragile ;
- Un état de transition : la mobilité des chaînes augmente donc la raideur du matériau diminue, le facteur de perte passe par un maximum ;
- L'état caoutchoutique, caractérisé par une grande déformabilité et un comportement visqueux.

La mesure du module de Young en petites déformations met en évidence ces trois états. L'évolution du module de Young et du facteur de perte η avec la température est schématisée sur la Figure 2.1. La température et la vitesse de déformation ont des effets similaires (et opposés) sur les propriétés mécaniques des élastomères : ce phénomène est appelé l'équivalence temps-température (Williams *et al.*, 1955). A grande vitesse de déformation, ou de manière équivalente haute fréquence de sollicitation, le module de Young E_∞ des élastomères est de l'ordre du GPa. Sur le plateau caoutchoutique, le module E_0 est plutôt de l'ordre du MPa. Contrairement aux autres polymères « structurels », les élastomères sont utilisés au-dessus de leur température de transition vitreuse (T_g , Fig 2.1), qui est généralement comprise entre -70°C et -20°C . Sur ce plateau caoutchoutique, les élastomères peuvent subir de grandes déformations, jusqu'à 1000% parfois. La Figure 2.2 présente un exemple de courbe classique de traction uniaxiale d'un élastomère, soit la contrainte nominale en fonction de l'élongation λ (le rapport longueur déformée sur longueur initiale). Cette « courbe en S » est caractéristique des élastomères et illustre leur comportement élastique non-linéaire. Ce comportement en grandes déformations fait l'objet de nombreux modèles phénoménologiques s'inscrivant dans le cadre de l'hyperélasticité (Marckmann et Verron, 2006). Dans notre étude, l'effort de modélisation se porte essentiellement sur cet aspect du comportement des élastomères. Bien entendu, un élastomère n'est jamais purement élastique, et de nombreuses particularités de comportement ont été

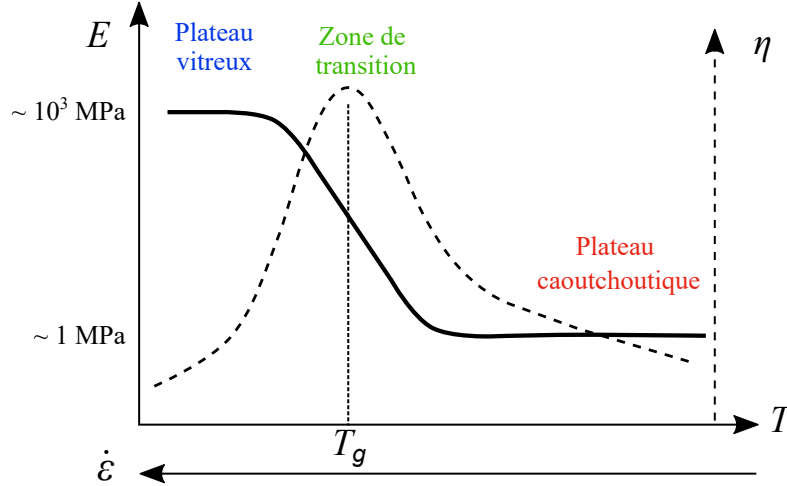


FIGURE 2.1 – Evolution schématique du module de Young E et du facteur de perte η en fonction de la température T et de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$. Le passage de l'état vitreux à l'état caoutchoutique se fait progressivement à travers une phase de transition. Le facteur de perte passe alors par un maximum à la température de transition vitreuse.

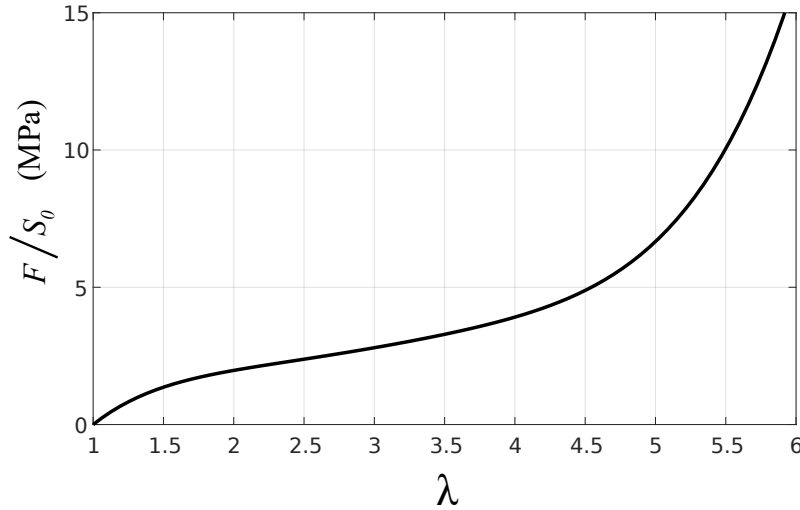


FIGURE 2.2 – Courbe de traction classique d'un élastomère, aussi appelée « courbe en S ». La raideur commence à diminuer puis se stabilise avant un fort raidissement aux grandes déformations.

étudiées, comme l'assouplissement sous contrainte, ou effet Mullins (Diani *et al.*, 2009), ou l'hystérèse de la réponse cyclique (Bergström et Boyce, 1998).

2.1.2 Grandes déformations et hyperélasticité

Le formalisme de la mécanique des milieux continus non-linéaire est bien établi (Sidoroff, 1982; Ogden, 1997; Holzapfel, 2002) et couramment utilisé en ingénierie. La modélisation des élastomères fait généralement appel à la théorie de l'hyperélasticité non-linéaire, développée depuis les années 1940 (Mooney, 1940). De nombreux modèles sont maintenant implémentés dans les codes de calcul par éléments finis. La maturité de ces modèles en

fait des outils standards de l'ingénieur (Verron, 2018). Ce paragraphe présente donc très brièvement le formalisme de la mécanique non-linéaire, surtout pour préciser les notations choisies. Ensuite, quelques modèles hyperélastiques utilisés dans cette étude sont décrits. Cette partie est volontairement succincte et s'appuie en grande partie sur la présentation proposée par Verron (2018).

Elasticité non-linéaire

Du point de vue de la mécanique des milieux continus, un solide est une distribution continue de points matériels occupant une portion de l'espace. On appelle « configuration » la position de ces points à un instant donné. On distingue en particulier la configuration de référence $\mathcal{C}_0$ définie à l'instant initial et correspondant généralement à l'absence de déformation et de contrainte, et la configuration courante $\mathcal{C}$ représentant la position de l'objet à l'instant courant t . Dans le cadre des grandes déformations, la différence entre ces deux configurations ne peut être négligée ; c'est ce qui introduit la non-linéarité géométrique.

On cherche à décrire la cinématique de l'objet au cours de ce changement de configuration. Suivant la convention habituelle, on identifie chaque point matériel avec sa position dans la configuration de référence, notée $\vec{X}$ ¹. On appelle « transformation » l'application bijective χ qui associe à chaque point matériel $\vec{X}$ sa position $\vec{x}$ dans la configuration courante. Cette application décrit chaque configuration du solide :

$$\vec{x} = \chi(\vec{X}, t). \quad (2.1)$$

Pour les théories du premier ordre, la transformation géométrique locale entre les configurations $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}$ est décrite par le gradient de la transformation $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}}. \quad (2.2)$$

$\mathbf{F}$ caractérise entièrement la déformation au point considéré. En particulier, un vecteur $d\vec{X}$, une surface orientée $dS\vec{N}$ et un volume $d\vec{V}$ de la configuration de référence se transforment en :

$$d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X}, \quad ds\vec{n} = J\mathbf{F}^{-T}dS\vec{N} \quad \text{et} \quad d\vec{v} = Jd\vec{V}, \quad (2.3)$$

avec $J = \det(\mathbf{F})$ et l'exposant $\cdot^{-T}$ désignant la transposition du tenseur inverse. Pour quantifier la déformation dans le cadre tridimensionnel, on introduit les tenseurs de dilatation de Cauchy-Green droit et gauche, respectivement notés $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$, définis par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (2.4)$$

À partir de ces deux tenseurs, on définit les tenseurs de déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ et d'Euler-Almansi $\mathbf{e}$ par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (2.5)$$

où $\mathbf{I}$ désigne le tenseur identité. Ces deux tenseurs se réduisent bien au tenseur des déformations linéarisé dans l'hypothèse des petites déformations. $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$ sont définis positifs

1. Sauf indication contraire, les lettres majuscules et minuscules dérivent des quantités, scalaires ou vectorielles, dans les configurations de référence et déformée respectivement. Les tenseurs sont indiqués en gras.

d'après leur définition (Eq.2.4). Ils sont donc diagonalisables et admettent les mêmes valeurs propres réelles positives, notées $(\lambda_i^2)_{i=1,2,3}$. Les scalaires $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ sont appelés les extensions principales. En notant $(\vec{N}_i)_{i=1,2,3}$ et $(\vec{n}_i)_{i=1,2,3}$ les directions principales correspondantes dans les configurations $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}$ respectivement, les tenseurs des dilatations s'écrivent :

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \vec{N}_i \otimes \vec{N}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i. \quad (2.6)$$

Les coefficients de ces polynômes caractéristiques de $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{B}$ sont les invariants de la déformation et, utilisant $\mathbf{C}$, sont :

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad (2.7)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right), \quad (2.8)$$

$$I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (2.9)$$

Les tenseurs des contraintes décrivent les efforts internes qui assurent la cohésion de la matière au cours de la déformation. Dans la configuration déformée $\mathcal{C}$, une surface orientée $ds\vec{n}$ en un point matériel donné et la force intérieure infinitésimale $d\vec{f}$ qui s'exerce sur elle sont liées par le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\vec{f} = \boldsymbol{\sigma} ds\vec{n}. \quad (2.10)$$

Ce tenseur relie donc les efforts internes à leur « surface d'application » dans la configuration courante, ce qui justifie son appellation de tenseur des contraintes vraies. En rapportant ces efforts internes à la surface correspondante dans la configuration de référence $dS\vec{N}$ avec l'Eq.(2.3), on définit le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$:

$$d\vec{f} = \mathbf{P} dS\vec{N}. \quad (2.11)$$

Ce tenseur est aussi appelé tenseur « des contraintes nominales » par son lien direct avec les mesures expérimentales : par exemple, un essai de traction uniaxiale fournit directement la mesure d'une composante de ce tenseur (la force mesurée divisée par la section initiale de l'éprouvette). Ces tenseurs sont liés par la relation :

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.12)$$

Si la conservation du moment cinétique assure la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$, ce n'est pas le cas pour $\mathbf{P}$. Dans le cas général, $\mathbf{F}$ n'étant pas symétrique, $\mathbf{P}$ ne l'est pas non plus. En projetant les efforts internes dans la configuration de référence, c'est-à-dire en définissant un pseudo-effort interne $d\vec{F}$, on construit le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$:

$$d\vec{F} = \mathbf{S} dS\vec{N}. \quad (2.13)$$

Les composantes de ce tenseur n'ont pas d'interprétation physique évidente. Il est néanmoins utilisé pour établir les lois de comportement hyperélastiques. Il est relié à $\mathbf{P}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ par la relation :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (2.14)$$

Hyperélasticité isotrope

La théorie de l'hyperélasticité suppose l'existence d'une densité d'énergie de déformation $W(\mathbf{F})$ dont dérivent les contraintes. Cette densité d'énergie est définie par unité de volume dans la configuration de référence, ce qui permet d'exprimer les contraintes par :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (2.15)$$

Par convention, W est positive lorsque le matériau se déforme et nulle dans la configuration de référence. De plus, l'énergie de déformation doit respecter le principe d'objectivité, c'est-à-dire l'indépendance vis-à-vis de l'observateur. Sans entrer dans les détails mathématiques, cette propriété implique que l'énergie de déformation peut s'écrire en fonction de $\mathbf{C}$ ou de $\mathbf{E}$. En conservant la même notation W pour la densité d'énergie de déformation malgré le changement d'expression explicite, une loi de comportement hyperélastique s'écrit dans le cas général :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.16)$$

Les autres tenseurs des contraintes sont calculés avec les relations (2.14) et (2.12).

Les élastomères sont généralement considérés comme des matériaux isotropes : leurs propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. D'un point de vue mathématique, cette propriété se traduit par l'indifférence de W à toute rotation de la configuration de référence. W est donc une fonction scalaire des invariant de $\mathbf{C}$: $W(I_1, I_2, I_3)$. La loi de comportement Eq.(2.16) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.17)$$

En utilisant les définitions des invariants Eq.(2.9), le fait que $\mathbf{B}$ annule son polynôme caractéristique et les relations entre les tenseurs des contraintes (2.14) et (2.12), on peut écrire la loi de comportement isotrope Eq.(2.17) sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2I_3^{-1/2} \left[\left(I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right]. \quad (2.18)$$

Les élastomères sont généralement supposés incompressibles (Le Cam, 2010) car leur module de compressibilité est supérieur de plusieurs ordres de grandeur à leur module de cisaillement. La compressibilité des élastomères n'intervient donc que dans le cas de fortes pressions hydrostatiques. Cette hypothèse de déformation isochore s'écrit :

$$J = \det \mathbf{F} = 1. \quad (2.19)$$

Cette hypothèse fixe donc $I_3 = J^2 = 1$ et W ne dépend plus que des deux premiers invariants. Elle ajoute par ailleurs une liaison interne contraignant la déformation. Il faut alors introduire un multiplicateur de Lagrange pour que le problème soit bien posé : en l'occurrence une pression hydrostatique inconnue q . Une loi de comportement hyperélastique isotrope et incompressible s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = -q\mathbf{I} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right). \quad (2.20)$$

C'est à partir d'une telle expression que sont proposés des modèles pour la fonction $W(I_1, I_2)$ dans le cadre de l'hyperélasticité incompressible.

Modèles hyperélastiques

Un modèle hyperélastique est une formulation paramétrique de la fonction $W(I_1, I_2)$. De nombreux modèles ont été proposés à partir des travaux de Mooney (1940) et ce domaine fait toujours l'objet de développements (Steinmann *et al.*, 2012). On se limite ici à deux modèles classiques : le développement polynomial de Rivlin (1948) et le modèle d'Ogden (1972).

La série de Rivlin constitue en fait une famille de modèles qui comprend par exemple le modèle néo-Hookéen (Treloar, 1943) et le modèle de Mooney-Rivlin (Mooney, 1940). La densité d'énergie élastique est approchée par un développement polynomial en invariants :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i=0, j=0}^{\infty, \infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j. \quad (2.21)$$

Les scalaires C_{ij} sont les paramètres matériels à identifier ($C_{00} = 0$) et les termes « -3 » assure la nullité de W en l'absence de déformation. La troncature à l'ordre 1 en I_1 de cette série correspond au modèle néo-Hookéen :

$$W^{NH}(I_1) = C_{10}(I_1 - 3). \quad (2.22)$$

Ce modèle à un seul paramètre est le plus simple, mais sa plage de validité en déformation est limitée ($\lambda < 1,5$). On lui préfère donc généralement le modèle de Mooney-Rivlin, soit la troncature à l'ordre 1 de l'Eq.(2.21) vis à vis des deux invariants :

$$W^{MR}(I_1) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3). \quad (2.23)$$

Ses deux paramètres permettent une bonne reproduction de la raideur initiale et de l'adoucissement qui suit (deux premières parties de la courbe en S Fig.2.2), ce qui lui assure une plus grande plage de validité que le modèle néo-Hookéen.

Le modèle d'Ogden (1972) est parmi les plus utilisés pour les très grandes déformations (lorsque le raidissement est atteint). A la différence de la série de Rivlin, l'énergie de déformation s'écrit en fonction des extensions principales sous la forme d'une série de puissance à N termes :

$$W^{Og}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3), \quad (2.24)$$

avec (μ_i, α_i) les coefficients à identifier. Le calcul du tenseur des contraintes passe donc par le calcul des contraintes principales.

2.1.3 Propagation d'ondes dans les élastomères

La vitesse des ondes mécaniques joue un rôle important dans la mécanique de la rupture dynamique, d'abord comme vitesse limite de propagation (Mott, 1948), mais aussi comme moyen d'adimensionnaliser la vitesse de propagation (Dally, 1979). En effet, le rapport entre la vitesse de propagation et la vitesse des ondes de cisaillement c/c_s permet d'unifier une grande partie des observations sur des matériaux différents (instabilités, vitesses limites... cf § 1.3) (Livne *et al.*, 2005). Or, si la vitesse d'une onde dans un matériau linéaire élastique est bien connue, la non-linéarité des élastomères complique le problème en introduisant une dépendance vis-à-vis de l'état de déformation de la matière : la célérité des ondes dépend de la valeur de la déformation et de ses directions principales. Quelques précisions sur la propagation d'ondes mécaniques dans ces matériaux sont donc nécessaires.

Généralités en élasticité linéaire

On considère ici des ondes planes, c'est-à-dire que les fronts d'onde sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation désignée par le vecteur $\vec{n}$. Dans ce cas et dans l'hypothèse des petites déformations, le champ de déplacement est donné par :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{a} f(\vec{x} \cdot \vec{n} - c_o t), \quad (2.25)$$

avec $\vec{a}$ la polarisation de l'onde, f la forme de l'onde et c_o sa vitesse. Si $\vec{a}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, l'onde est longitudinale, et si $\vec{a}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, on parle d'onde transverse (ou de cisaillement). Pour un milieu élastique linéaire isotrope, ces deux types d'ondes sont les seules ondes planes pouvant se propager. Leurs célérités respectives, notées c_d pour les ondes longitudinales et c_s pour les ondes de cisaillement, s'expriment en fonction des coefficients de Lamé (λ, μ) et de la masse volumique ρ par :

$$c_d^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.26)$$

Ces formules bien connues illustrent l'indépendance des célérité vis-à-vis de la direction de propagation.

Cas des élastomères

La propagation d'ondes dans les élastomères en grandes déformations a attiré l'attention de deux communautés aux approches distinctes : les spécialistes des élastomères, et les théoriciens de la mécanique non linéaire et de l'acoustique. Le problème peut être énoncé simplement : à quelles conditions et à quelle vitesse une onde se propage-t-elle dans un matériau pré-déformé. Cette déformation est généralement supposée statique et uniforme (Saccomandi, 2007).

La première approche repose en grande partie sur des mesures expérimentales. En particulier, la vitesse de rétractation d'une bande de caoutchouc étirée s'avère être intimement liée à la vitesse des ondes pour ce niveau de déformation initial. Mason (1963), Gent et Marteny (1982b), et Tunnicliffe *et al.* (2015) ont réalisé l'expérience décrite sur la Figure 2.3 et ont proposé des modèles 1D reliant la vitesse de l'onde de « déchargement » à l'extension du matériau. Le lien avec le module tangent au niveau de déformation considéré (le « module instantané ») est avéré, observé notamment par des mesures directes de vitesses des ondes (Gent et Marteny, 1982a). Cette vitesse de rétractation a aussi été me-

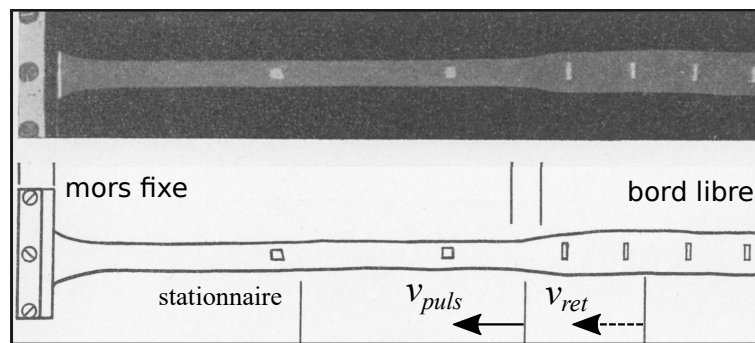


FIGURE 2.3 – Rétractation d'une bande de caoutchouc naturel encastree (à gauche) et brusquement libérée (à droite). Une onde de décharge se propage à la vitesse v_{puls} suivie par la matière déchargée à la vitesse v_{ret} . Expérience de Mason (1963).

surée avec des membranes par Stevenson et Thomas (1979). Différentes formules pour la vitesse du pulse de rétractation (Fig.2.3) ont été proposés, comme celle 1D de Tunnicliffe *et al.* (2015) :

$$v_{puls} = \left(\frac{\sigma_{11} \lambda}{\rho(\lambda - 1)} \right), \quad (2.27)$$

avec λ et σ_{11} l'élongation et la contrainte de Cauchy en traction avant la décharge respectivement. Cette formule renvoie à la vitesse d'une onde de contrainte longitudinale dans une bande dont les bords sont libres. C'est une différence importante avec une onde plane longitudinale qui, dans le cas incompressible, ne peut pas se propager (vitesse infinie). Le cas de l'onde de rétractation illustre aussi une autre conséquence de la non-linéarité du comportement des élastomères : la dispersion du pulse (son « étalement » spatial) au cours de sa propagation (Mason, 1963). La vitesse des ondes à aussi été mesurée dans des membranes en traction biaxiale par Petersan *et al.* (2004), soulignant une dépendance à la déformation transverse (voir Fig.1.11). Cette dépendance a été modélisée dans le cadre de l'élasticité non-linéaire avec un modèle de Mooney-Rivlin par Marder (2006), moyennant certaines restrictions sur l'état de déformation. Par ailleurs, Marder (2006) souligne que la vitesse des ondes dépend aussi de la configuration considérée : le rapport entre la vitesse d'une onde dans la membrane déformée et celle ramenée dans la configuration initiale est lié à l'élongation locale de la membrane. Ce point sera précisé au chapitre 4.

Illustrant le lien entre rupture et propagation d'onde dans les élastomères, une partie des travaux sur les ondes a été réalisé en parallèle d'observations de la propagation de fissure : Petersan *et al.* (2004) sur la propagation supersonique, mais aussi Stevenson et Thomas (1979) avec la rupture de ballons, et Gent et Marteny (1982b) en lien avec leurs travaux sur la fissuration dynamique (Gent et Marteny, 1982a).

Acoustique en grandes déformations

L'extension des modèles 1D au cas des membranes en traction biaxiale n'est pas évidente. Les ondes en grandes déformations ont néanmoins été abordées directement avec les approches mathématiques de l'acoustique. Beaucoup de solutions analytiques ont été proposées depuis les années 1960 (John (1966), par exemple), avec de nombreux développements au cours de années 1980-2000. Saccomandi (2007) en propose une revue bibliographique. Ces études acoustiques font appel à des modèles hyperélastiques variés, généralement assez loin de ceux utilisés en ingénierie, comme les matériaux d'Hadamard ou de Green (depuis ses travaux sur l'éther au XIX^{ème}) (Currie et Hayes, 1969). Néanmoins, les modèles Néo-Hookeen et de Mooney-Rivlin ont fait l'objet de traitements détaillés (Ogden, 1970; Boulanger et Hayes, 1992). Ces résultats ont été étendus au cas viscoélastique par Hayes et Saccomandi (2000).

L'idée générale est de superposer une onde transverse sur un champ de déformation statique et de résoudre l'équation du mouvement. L'existence de telles solutions en grandes déformations implique la vérification de conditions de propagation (propagation selon les axes principaux du champ de déformation initial, dans le cas général) (Saccomandi, 2007). On se limite ici au résultat de Boulanger et Hayes (1992) pour le modèle de Mooney-Rivlin incompressible et dans un solide soumis à une déformation homogène. Ce modèle simplifie la condition de propagation, ce qui implique que des ondes transverses peuvent se propager dans n'importe quelle direction $\vec{n}$. Le matériau étant supposé incompressible, seules les ondes transverses sont étudiées. Les auteurs établissent dans ce cas une relation entre les caractéristiques de l'onde ($\vec{n}$, $\vec{a}$), sa vitesse c_s , la déformation locale du matériau (tenseur de Cauchy-Green gauche $\mathbf{B}$) et les caractéristiques du matériau (constantes matérielles,

Eq.(2.23) :

$$\rho c_s^2 = 2C_{10}\vec{n} \cdot \mathbf{B}\vec{n} + 2C_{01}\vec{a} \cdot \mathbf{B}^{-1}\vec{a}. \quad (2.28)$$

Cette relation illustre l'anisotropie induite par la déformation du matériau : la vitesse de l'onde de cisaillement dépend de ses directions de propagation et de polarisation (par rapport aux axes principaux de la déformation), comme illustré sur la Figure 2.4.

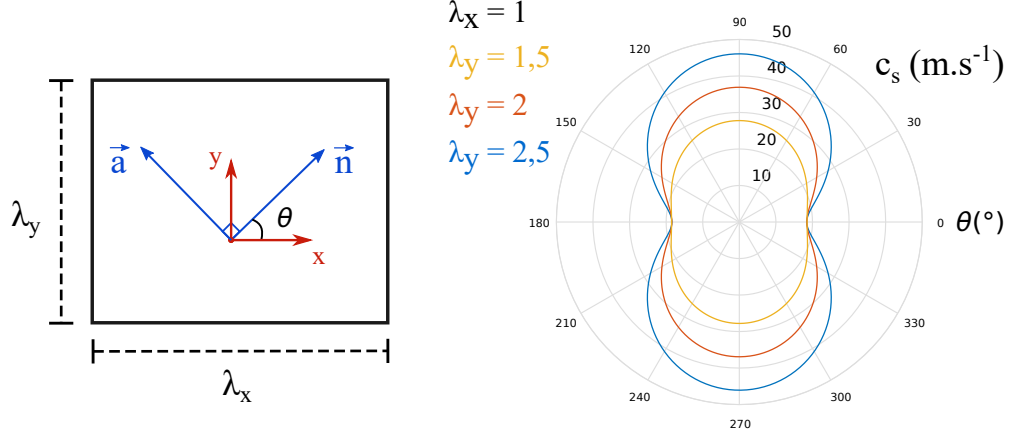


FIGURE 2.4 – Représentation polaire de la vitesse des ondes de cisaillement en fonction de la direction de propagation (angle θ entre $\vec{n}$ et l'horizontale), pour $\lambda_x = 1$ et trois elongation verticales : $\lambda_y = 1,5$, $\lambda_y = 2$ et $\lambda_y = 2,5$. Le schéma de gauche précise les axes utilisés, notamment la polarisation : $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{n}$ et appartient au plan (x,y) . Les coefficients du modèle de Mooney-Rivlin sont issus du fit des données en traction de Treloar (1943) par Marckmann et Verron (2006).

L'équation (2.28) sera utilisée dans la suite de cette étude. On précise que peu d'études récentes sur la rupture utilisent ce type de formulation pour le calcul de la vitesse des ondes, à l'exception importante des études de Petersan *et al.* (2004), et Chen *et al.* (2011). Bien souvent, la vitesse des ondes de cisaillement est estimée avec la formule en petites déformations (Eq.(2.26)).

2.2 Étude expérimentale de la rupture des élastomères

2.2.1 Mise en place d'une théorie de la rupture

L'intérêt pour la rupture des élastomères remonte à la fin des années 1930 avec le développement de l'industrie du caoutchouc naturel. Les premières études sur le comportement mécanique des élastomères comportent des remarques générales sur la rupture (elongation maximale, faciès de rupture), faisant la part belle à l'éclatement de membranes gonflées (Flint et Naunton, 1937; Treloar, 1944). C'est à partir des années 1950 qu'une étude quantitative de la propagation d'une fissure commence à se mettre en place, sous l'impulsion de la *British Rubber Producers Research Association*. L'objectif prioritaire est alors d'unifier les observations sur la rupture et de pouvoir classer la résistance à la déchirure de différents élastomères. Rivlin et Thomas (1953) proposent d'étendre l'approche énergétique de Griffith (1920) aux élastomères, approche maintenant intégrée à la LEFM (voir § 1.1.5).

Pour mesurer le taux de restitution d'énergie G , la méthode générale (et historique) consiste à mesurer l'effort à rupture d'une éprouvette contenant une fissure de taille connue.

En connaissant ainsi l'énergie « injectée » dans le système, et donc dissipée par la fissure, et en répétant l'opération pour différentes longueurs de fissure, on obtient une relation expérimentale de la diminution d'énergie élastique par unité de longueur de fissure, dont la dérivation donne G . Cette méthode fastidieuse est néanmoins grandement simplifiée par l'utilisation d'éprouvettes pour lesquelles il existe une relation analytique entre G et le chargement. Trois de ces éprouvettes proposées par Rivlin et Thomas (1953) ont connu un franc succès et jouent encore aujourd'hui un rôle majeur dans la caractérisation expérimentale du comportement à rupture : l'éprouvette de cisaillement pur (notée PS, cf. Fig 1.4), l'éprouvette de traction entaillée (*Single Edge Notch Tensile specimen*, SENT, Fig 2.5(a)) et l'éprouvette pantalon (*trousers*) schématisée sur la Figure 2.5(b).

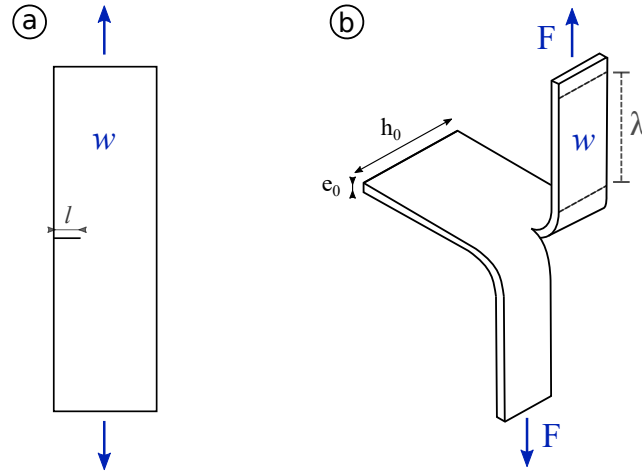


FIGURE 2.5 – (a) éprouvette de traction entaillée (SENT). (b) éprouvette pantalon : λ désigne l'élongation dans chaque « jambe » de l'éprouvette et W la densité volumique d'énergie élastique à cet endroit.

Comme démontré au paragraphe 1.2.3, La formule du taux de restitution d'énergie dans le cas de l'éprouvette PS est :

$$G = Wh_0, \quad (2.29)$$

avec W la densité d'énergie élastique et h_0 la hauteur initiale de l'éprouvette. L'éprouvette PS classique n'est pas déformée dans le sens de la propagation. Néanmoins, certains montages le permettent (Gent et Kim, 1978), ce qui correspond alors à une membrane en traction biaxiale aujourd'hui largement utilisée (Deegan *et al.*, 2002; Caimmi *et al.*, 2015b). En jouant sur la hauteur et la déformation de la membrane, on peut donc imposer G . Dans ce cas, le taux de restitution d'énergie ne dépend pas de la longueur l de la fissure, contrairement au cas de l'éprouvette SENT où l'on a (Thomas, 1994) :

$$G = 2\beta Wl, \quad (2.30)$$

avec β un coefficient dépendant de l'extension λ de l'éprouvette et pouvant être approché par $3\lambda^{-1/2}$ (Lindley, 1972). L'utilisation de l'éprouvette pantalon constitue au sens propre un essai de déchirement : la vitesse de propagation de la fissure est imposée et G est mesuré avec la formule (Rivlin et Thomas, 1953) :

$$G = Wh_0 - \frac{2}{e_0}\lambda F, \quad (2.31)$$

avec λ l'élongation des « jambes » de l'éprouvette sur lesquelles on impose la force F et e_0 l'épaisseur initiale (voir Figure 2.5(b)). Invoquant l'équilibre énergétique global, la connaissance de G permet d'en déduire l'énergie de rupture Γ (en cours de propagation, $G = \Gamma$, Eq.(1.11)). La cohérence des résultats entre les différentes éprouvettes est au cœur de la validation expérimentale de cette théorie (Thomas, 1960; Lake et Thomas, 1967; Thomas, 1994).

Cette théorie énergétique est depuis lors largement utilisée pour la rupture des élastomères. L'énergie de rupture permet de quantifier le comportement à rupture des matériaux, et donc de les classer, ce qui présente un intérêt évident en ingénierie. Avec des éprouvettes pantalon, Greensmith et Thomas (1955) mettent cependant en évidence la forte dépendance de Γ à la vitesse de propagation et à la température. Γ devient alors un objet d'étude en soi : il s'agit de comprendre ce qui l'influence pour la prédire et éventuellement la modéliser (Lake et Thomas, 1967). Ces travaux se retrouvent sous la dénomination d'étude du « comportement à la déchirure » (*tear behaviour*) (Tsunoda *et al.*, 2000) ou encore de la « résilience » des élastomères (*toughness*, Carbone et Persson (2005)).

2.2.2 Énergie de rupture d'un élastomère

L'étude de l'énergie de rupture rassemble la majeure partie des études sur la fissuration des élastomères. Elle est motivée par le besoin d'anticiper le comportement à rupture de matériaux toujours plus versatiles (composition chimique, micro-structure, charges...) dans des environnements changeants (plage de température, vitesse de sollicitation). Les éprouvettes sont pré-entaillées et la vitesse est parfois imposée (éprouvettes pantalon), ce qui incite à parler de « déchirure » des élastomères.

La mesure du taux de restitution se fait généralement pour des vitesses de propagation faibles devant la vitesse des ondes dans le milieu. La première étude de Greensmith et Thomas (1955) couvre la gamme $[10^{-6} - 1 \text{ m.s}^{-1}]$. Cette gamme a par la suite été étendue à de plus grandes vitesses de propagation (Kadir et Thomas, 1981; Tsunoda *et al.*, 2000), jusqu'à se rapprocher de l'ordre de grandeur de la vitesse des ondes (environ 30 m.s^{-1} par Lake *et al.* (2000); Morishita *et al.* (2016)). Toutefois, la méthode suivie vise à éviter les effets dynamiques (Persson *et al.*, 2005), en particulier pour pouvoir utiliser les formules démontrées en quasi-statique pour les éprouvettes particulières. La plage de validité de ces formules n'est pas connue précisément.

Dès les années 1950, les essais indiquent que les effets de la vitesse de propagation et de la température sur Γ suivent le comportement visco-élastique prédit par la relation WLF (Williams *et al.*, 1955). L'énergie de rupture augmente donc avec la vitesse de propagation et diminue avec la température. Ces effets peuvent même être comparés en utilisant les paramètres de la loi WLF identifiée pour le comportement dynamique du matériau (essais de DMA), comme l'illustrent les résultats de Tsunoda *et al.* (2000) sur un caoutchouc synthétique, reproduits sur la Figure 2.6. Ce lien entre la rupture et le comportement visco-élastique des élastomères est confirmé par de nombreuses études expérimentales (Kadir et Thomas, 1981; Gent, 1996; Busfield *et al.*, 2002; Morishita *et al.*, 2016) et a conduit à proposer une analyse théorique de la propagation de fissure dans un matériau visco-élastique (Barber *et al.*, 1989; Hui *et al.*, 2003; Persson et Brener, 2005), revue en détail par Persson *et al.* (2005). Cette extension de la LEFM, qui suppose un comportement visco-élastique linéaire en petites déformations, offre un cadre conceptuel pour la modélisation de l'influence de la vitesse et de la température sur Γ . Cette approche visco-élastique conduit à formuler une relation, à l'origine empirique, entre ces grandeurs (Gent et Schultz, 1972;

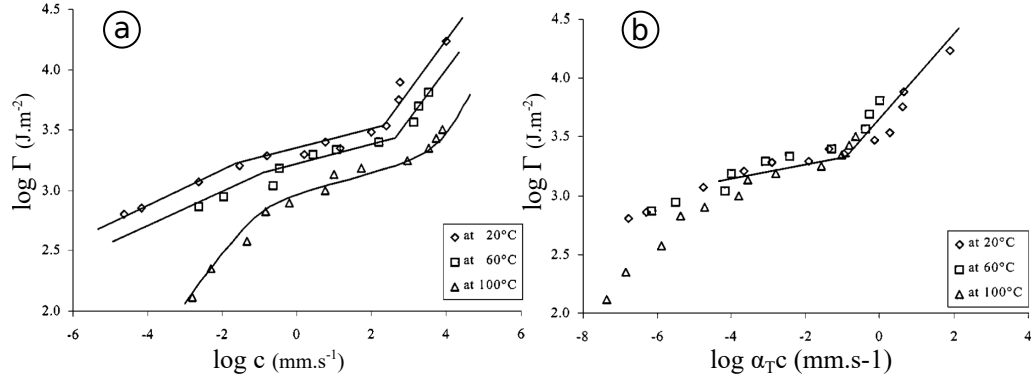


FIGURE 2.6 – Energie de rupture en fonction de la vitesse de propagation (mm.s^{-1}) pour trois températures différentes (matériau : SBR). (a) Résultats bruts. (b) Tracé modifié avec le facteur de translation (α_T) de la loi WLF. Résultats de Tsunoda *et al.* (2000).

Gent, 1996) :

$$\Gamma = \Gamma_0[1 + f(c, T)], \quad (2.32)$$

avec T la température et f une fonction tendant vers 0 avec la vitesse de propagation c . Γ_0 représente le taux de restitution d'énergie minimal pour déclencher la propagation d'une fissure statique. Le lien avec le comportement du matériau est contenu dans la fonction f , qui peut s'écrire : $f(c, T) = f(\alpha_T c)$. La relation (2.32) est largement utilisée, aussi bien pour les développements théoriques (Persson et Brener, 2005) que pour des études expérimentales (Morishita *et al.*, 2016) ou numériques (Kroon, 2011; Ozenç et Kaliske, 2014). A titre d'exemple, la Figure 2.7 présente les résultats à haute vitesse publiés par Lake *et al.* (2000) et le modèle qui en est tiré.

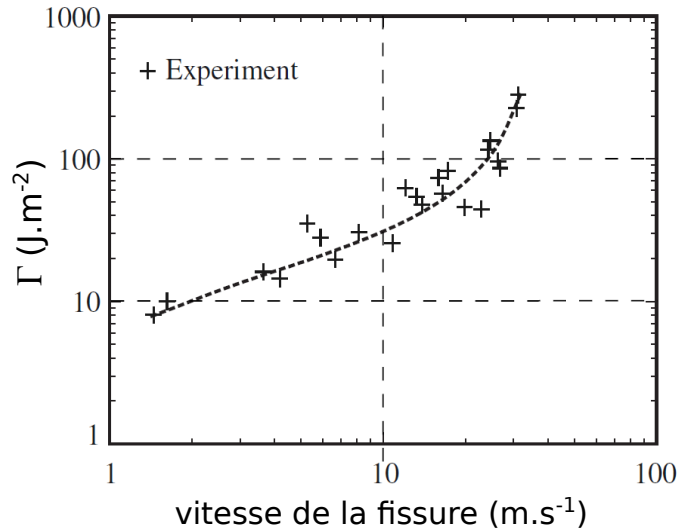


FIGURE 2.7 – Evolution du taux de restitution d'énergie au cours de la propagation dynamique dans le caoutchouc naturel (éprouvette de cisaillement pur). Figure adaptée d'Ozenç et Kaliske (2014) et résultats expérimentaux de Lake *et al.* (2000).

L'augmentation de Γ avec la vitesse de propagation est importante, entre 1 et 2

ordres de grandeur (Fig.2.6). Cette approche théorique explique cette croissance de Γ par l'augmentation de la dissipation visqueuse dans l'éprouvette. Une distinction est faite entre les phénomènes irréversibles se déroulant en pointe de fissure (cavitation, rupture de chaînes...) et la dissipation qui peut avoir lieu plus loin (Persson *et al.*, 2005). D'un point de vue qualitatif, la dissipation a lieu sur une zone entourant la pointe et schématisée sur la Figure 2.8. Cette zone de dissipation maximale fait écho à la transition vitreuse de

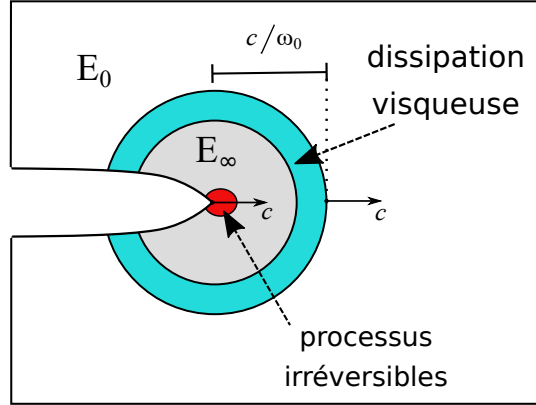


FIGURE 2.8 – Vue schématique de la zone de dissipation visqueuse au cours de la propagation d'une fissure dans un élastomère à la vitesse c . La zone de dissipation correspond à la zone de transition entre un matériau dans son état caoutchoutique (module E_0) et dans son état vitreux (module E_∞). Cette zone se situe à une distance c/ω_0 de la pointe. D'après Persson *et al.* (2005).

l'élastomère : le module de Young du matériau passe de E_0 à E_∞ (cf § 2.1.1). Au cours de la transition vitreuse, le facteur de perte présente un maximum pour une fréquence de sollicitation ω_0 . En considérant que la vitesse de déformation de la matière autour de la pointe n'est due qu'au mouvement de la pointe, ce taux de déformation à une distance r de la pointe est caractérisé par une fréquence $\omega = c/r$. Le maximum de dissipation devrait donc se trouver à une distance de la pointe de fissure de l'ordre de c/ω_0 , d'où la forme schématique de la Fig.2.8 (Persson *et al.*, 2005). Néanmoins, pour un élastomère industriel standard cette zone est très proche de la pointe. Pour un élastomère type SBR par exemple, ω_0 est de l'ordre de 10^4 s^{-1} , donc pour une fissure se propageant à 1 m.s^{-1} la zone de dissipation visqueuse ne se trouve qu'à 0.1 mm de la pointe. La distinction de cette zone a surtout une influence sur la modélisation de Γ et sur l'estimation de l'augmentation de température en pointe de fissure (Carbone et Persson, 2005; D'Amico *et al.*, 2013). Cette température en pointe (*flash temperature*) peut avoir des conséquences sur l'état du matériau dans lequel la pointe se propage. Cependant, pour des vitesses de propagation proches de celles des ondes, il semblerait que la vitesse de déformation compense cette élévation de température (la diffusion thermique n'a pas le temps de se produire), et que le matériau soit bien dans son état vitreux en pointe (Persson *et al.*, 2005).

Cette analyse théorique et expérimentale de la résilience (*toughness*) des élastomères est complétée par quelques études numériques (Kroon, 2014). Les courbes $\Gamma(c, T)$ sont parfois utilisées en tant que données d'entrée (Ozenç et Kaliske, 2014), ce qui rejoint alors le point de vue de la LEFM sur l'énergie de rupture : une grandeur intrinsèque du matériau généralement complexe à modéliser lors de la résolution d'un problème de rupture.

2.2.3 Propagation à grande vitesse

L'étude de la résilience des élastomères ne permet pas d'aborder directement le problème de la vitesse de propagation, ni de la sélection de trajectoire. Parfois menées au sein de la communauté des physiciens, une autre famille d'études expérimentales s'intéresse aux étrangetés de la propagation à grande vitesse dans les élastomères : existence d'une vitesse limite, instabilités de propagation en grande déformation... Ces travaux sont néanmoins peu nombreux. A notre connaissance, hormis une série d'études utilisant des gels de polyacrylamide sous déformations modérées ($<15\%$) (Livne *et al.*, 2005), seules une dizaine d'études expérimentales conjuguent grandes déformations ($>100\%$) et mesure de propagation à haute vitesse ($c \approx c_s$). Ce paragraphe vise donc une certaine exhaustivité et s'accorde le luxe d'une présentation chronologique des problématiques abordées. Certains résultats ont déjà été présentés au paragraphe 1.3.3, mais leurs méthodes expérimentales seront précisées ici.

Treloar (1944) analysa pour la première fois l'éclatement de membranes de caoutchouc gonflées, mais seulement sur la base des éprouvettes *post-mortem* (Figure 2.9(a)). Avec des caméras rapides, Stevenson et Thomas (1979) peuvent observer la rupture du ballon, et réaliser ainsi les premières mesures de propagation de fissure à grande vitesse dans les élastomères. Le fait de gonfler les membranes permet d'obtenir simplement de hauts niveaux de déformation biaxiale (ici jusqu'à 400%), au détriment de la perte de la planéité (Figure 2.9(b)). Cette étude pionnière aborde une grande partie des probléma-

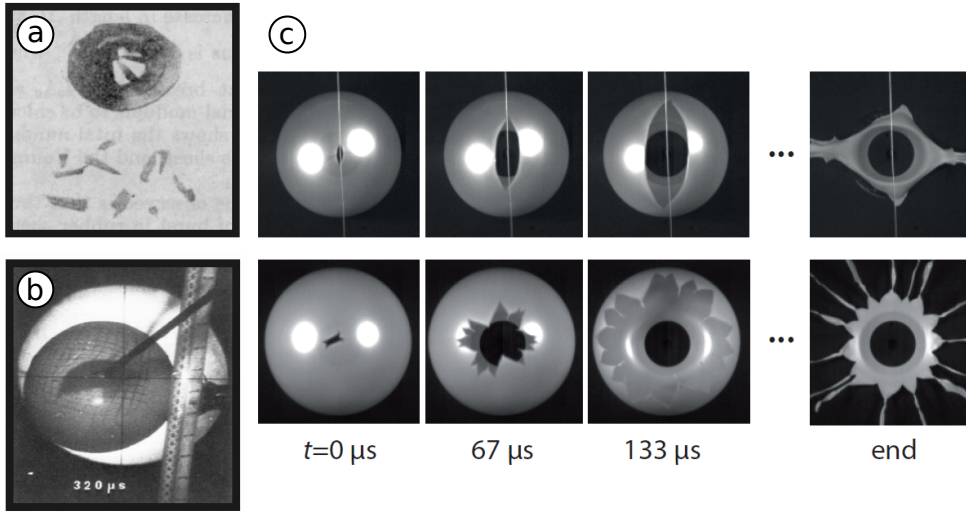


FIGURE 2.9 – Propagation de fissures dans les membranes gonflées. Etudes de (a) Treloar (1944), (b) Stevenson et Thomas (1979) et (c) Moulinet et Adda-Bedia (2015).

tiques traitées par la suite. Observant des fissures atteignant une vitesse de 285 m.s^{-1} , les auteurs envisagent la possibilité qu'elles aient atteint une vitesse limite, potentiellement supérieure à celle des ondes dans le milieu. Seul un effet en pointe de fissure, donc local, pourrait expliquer ces très hautes vitesses. Enfin, de manière plus anecdotique, ils rapportent l'observation de trajectoires de fissures ondulées. Cette étude fait appel à une caméra rapide filmant à 8 000 fps pour mesurer la vitesse des fissures.

Gent et Marteny (1982a) étudient l'influence de la déformation biaxiale, mais avec des membranes planes cette fois. Partant d'une éprouvette PS, ils proposent un montage permettant d'imposer aussi une déformation dans la direction de propagation. La rupture est initiée au centre de la membrane et la vitesse de propagation est mesurée par les multiples

expositions d'un film photographique (Figure 2.10(a)). Les fissures observées atteignent

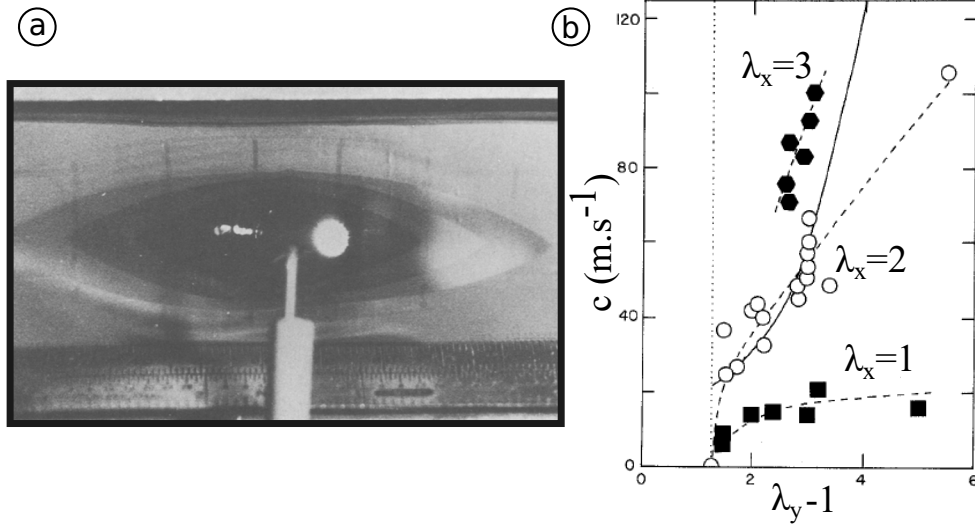


FIGURE 2.10 – (a) Propagation dans une membrane sous chargement biaxial observée par Gent et Marteny (1982a). La fissure est amorcée au centre de l'éprouvette et trois expositions successives d'une plaque photographique permettent de mesurer sa vitesse. (b) Evolution de la vitesse de propagation avec la déformation transverse de l'éprouvette ($\lambda - 1$) pour trois élongations longitudinales. Résultats de Gent et Marteny (1982a).

120 m.s⁻¹. Au-dessus d'une certaine vitesse, les auteurs constatent l'indépendance de la vitesse de propagation vis-à-vis du taux de restitution d'énergie (du moins tel que calculé avec la formule de l'éprouvette PS avec l'Eq.(2.29). Au regard de la forte influence de l'élongation longitudinale sur la rupture (Fig.2.10(b)), le comportement semble être piloté par l'état de déformation local de la membrane, en accord avec les premiers résultats de Stevenson et Thomas (1979).

Dans la lignée de l'étude de la résistance des élastomères (§ 2.2.2), Lake *et al.* (2000) analysent l'influence de paramètres physico-chimiques sur la valeur de Γ , mais pour une gamme de vitesses de fissure assez élevées : [0,1 - 30 m.s⁻¹]. Utilisant des éprouvettes PS pour les essais les plus rapides, ils constatent une forte augmentation du taux de restitution d'énergie avec la vitesse de propagation. Une vitesse limite semble aussi atteignable, qui pourrait être celle des ondes de cisaillement calculée avec la relation usuelle en l'élasticité linéaire :

$$c_s = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{-1/2}, \quad (2.33)$$

avec μ le module de cisaillement. Une telle vitesse limite est matérialisée sur la Figure 2.11(a) (la formule précisée dans l'article semble comporter une erreur et ne correspond pas à la valeur tracée sur ce graphique). Si cette valeur semble correspondre à la limite théorique de la LEFM issue des travaux de Mott (1948), l'analyse énergétique proposée ne semble pas valide (dissipation visqueuse loin de la pointe).

Ces problématiques de propagation à haute vitesse issues des travaux de mécaniciens, généralement spécialistes des élastomères, sont abordées à leur tour par la communauté des physiciens, en particulier le département de physique non-linéaire de l'Université d'Austin, au Texas. Deegan *et al.* (2002), et Petersan *et al.* (2004) mettent au point un montage expérimental permettant d'imposer de grandes déformations biaxiales à une membrane de caoutchouc naturel (latex), afin d'y observer la propagation dynamique de fissures sur

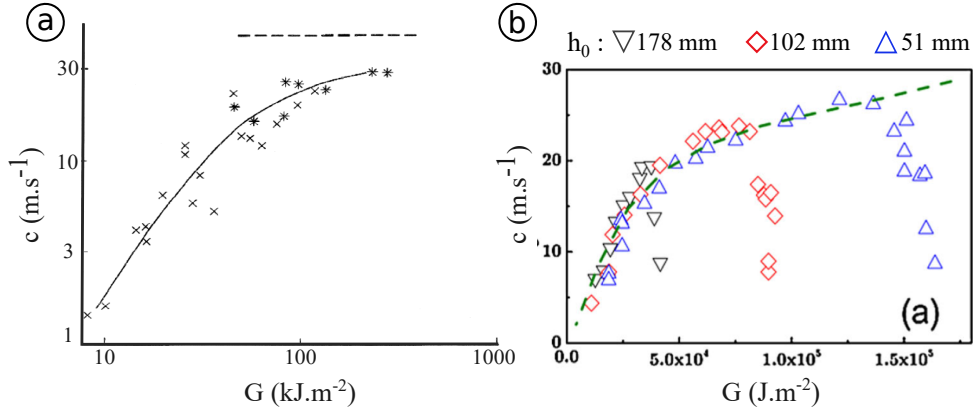


FIGURE 2.11 – (a) Relation entre la vitesse de propagation et l'énergie de rupture mesurées avec des éprouvettes SENT (×) et PS (*). Les pointillés indiquent la vitesse des ondes de cisaillement calculée avec l'Eq.(2.33). Résultats de (Lake *et al.*, 2000) pour du caoutchouc naturel.(b) Relation entre la vitesse de propagation et l'énergie de rupture mesurées avec des éprouvettes PS de trois hauteurs différentes. La chute de vitesse est due à la cristallisation du caoutchouc naturel. Les pointillés correspondent aux résultats de la simulation (Marder, 2006). Résultats de Zhang *et al.* (2009).

de grandes distances (>600 mm). Des elongations allant jusqu'à 4 sont imposées indépendamment sur les deux axes. Avec ce système, Deegan *et al.* (2002) étudient la propagation oscillante relevée par Stevenson et Thomas (1979), montrant que cette instabilité ne se produit que pour des déformations longitudinales suffisantes. Petersan *et al.* (2004) se concentrent sur la question de la propagation supersonique de fissures, et leurs résultats ont été présentés au paragraphe 1.3.3 (cf Fig. 1.11). Ils comparent les vitesses de fissures observées avec celles des ondes de cisaillement et des ondes longitudinales qu'ils ont mesurées directement sur la membrane (cf § 2.1.3). Malgré les doutes de Gent et Marteny (1982a) et Lake *et al.* (2000), les auteurs montrent qu'une propagation supersonique en mode I est bien possible (« intersonique » précisément : $c_s < c < c_d$). Utilisant le même montage, Zhang *et al.* (2009) ont vérifié l'augmentation de la ténacité du caoutchouc naturel sous l'effet de la cristallisation sous contrainte : au-delà d'une certaine déformation, les fissures ralentissent. Les mesures de vitesses sont réalisées au moyen d'une caméra rapide enregistrant à 480 000 fps (384×256 pixels). Avant le phénomène de cristallisation ($\lambda < 4$), les vitesses mesurées sur différentes éprouvettes sont bien regroupées sur une courbe $c(G)$, comme l'illustre la Figure 2.11(b). La dépendance de c au taux de restitution d'énergie suit une évolution similaire à celle rapportée par Lake *et al.* (2000) : d'abord croissance linéaire puis diminution de la pente. Reprenant les résultats précédents, Chen *et al.* (2011) distinguent deux régimes de propagation distincts : subsonique où la vitesse est régie par G , et supersonique où elle dépend de la déformation locale (voir § 1.3.3 et Fig.1.12).

Moulinet et Adda-Bedia (2015) reprennent l'étude de la rupture des ballons de caoutchouc en plusieurs pétales (fracturation), mais avec la possibilité de filmer la propagation des fissures à haute vitesse (60 000 fps). La rupture est initiée avec une aiguille et, au-dessous d'un certain seuil de déformation du ballon, une seule fissure se propage. En revanche, au-dessus de ce seuil, les fissures se dédoublent et le ballon s'ouvre en plusieurs pétales, comme l'illustre la comparaison des deux séries Fig.2.9(c). Dans ce dernier cas, les fissures se propagent à une vitesse indépendante de l'état de déformation du ballon, suggérant l'atteinte d'une vitesse limite au moment de l'instabilité de branchement. Mesurée à 570 m.s^{-1} , Moulinet et Adda-Bedia (2015) supposent qu'elle correspond à la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau. Cette vitesse constituerait alors une véritable

limite à partir de laquelle une fissure se dédouble au lieu d’accélérer.

En parallèle de ces travaux sur la propagation dynamique en grandes déformations, des expériences sur les gels de polyacrylamide ont permis de tester la LEFM en dynamique et de proposer des extensions comme la théorie faiblement non-linéaire de la rupture (WNLT, Bouchbinder *et al.* (2010b)) (voir §1.3.2). Avec ce matériau, les membranes utilisées ne sont pas déformées de plus de 13%. Une étude récente de Morishita *et al.* (2016) teste néanmoins cette théorie avec des essais de propagation dans le caoutchouc naturel plus ou moins chargé. La propagation des fissures est observée dans des éprouvettes PS sur une large gamme de vitesses ($[10^{-6} - 60 \text{ m.s}^{-1}]$). Ces mesures sont complétées par l’analyse du comportement viscoélastique du matériau et par une étude des profils d’ouverture des fissures. Quelques exemples de profils sont présentés sur la Figure 2.12. S’essayant à

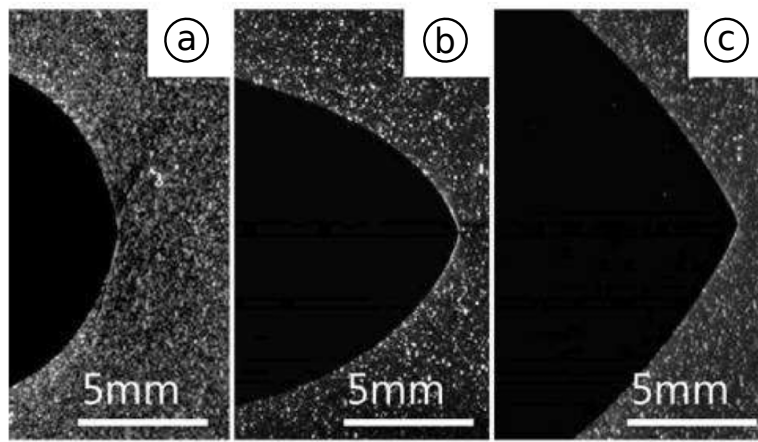


FIGURE 2.12 – Profil de fissures au cours de leur propagation dynamique dans un caoutchouc naturel chargé. Vitesses de propagation approximatives : (a) $2,7 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$, (b) $0,1 \text{ m.s}^{-1}$, (c) $2,6 \text{ m.s}^{-1}$. Résultats de Morishita *et al.* (2016).

une synthèse entre les études sur l’énergie de rupture et celles sur l’allure des pointes de fissure, Morishita *et al.* (2016) précisent le périmètre de validité des théories complétant la LEFM par la viscoélasticité (Persson *et al.* (2005), § 2.2.2) ou par la prise en compte des non-linéarités (WNLT, Bouchbinder *et al.* (2010b), § 1.3). Goldman Boué *et al.* (2015) ont proposé une version dérivée de la WNLT pour prendre en compte les déformations initiales de la membrane. Testée avec succès pour des déformations de 13%, la pertinence de cette approche perturbative doit encore être vérifiée pour les grandes déformations ($>100\%$) (Goldman Boué *et al.*, 2015).

2.3 Mesure de champs en pointe de fissure en mouvement

Dans les études présentées, chaque essai de propagation fournit généralement quelques grandeurs scalaires globales : une vitesse stabilisée, le taux de restitution d’énergie associé, l’élongation de la membrane, l’angle d’ouverture... Une mesure de champs consiste au contraire à chercher la distribution spatiale de grandeurs locales comme le déplacement ou la température. Les premières mesures de champs autour d’une pointe de fissure statique reposent sur la photoélasticimétrie (Post, 1954). Suivant le développement des techniques d’imagerie, des mesures de champs ont pu être réalisées en cours de propagation de fissure

à partir des années 1970. Reposant d'abord sur des hypothèses d'élasticité linéaire, ces techniques de mesure ont été développées pour les matériaux fragiles et restent rares sur les élastomères.

2.3.1 Matériaux fragiles

Les techniques de mesures de champs ont principalement été développées pour mesurer le facteur d'intensité des contraintes. Appliquées à la propagation dynamique, elles permettent d'estimer l'évolution de K en cas de chargement transitoire ou en cours de propagation, et ainsi de tester la LEFM dynamique. Ravi-Chandar (2004) propose une revue détaillée de ces techniques pour les matériaux fragiles. Nous présentons brièvement trois familles de techniques utilisées pour étudier la propagation à haute vitesse.

Photoélasticimétrie

La photoélasticimétrie est fondée sur la propriété de biréfringence induite de certain matériaux : l'indice de réfraction du matériau est modifié localement et de manière anisotrope par l'état de contrainte. Une onde lumineuse polarisée subira des retards de phase différents le long des directions principales du champ de contrainte. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, cette propriété peut être mise à profit pour déterminer certaines caractéristiques du champ de contrainte. En particulier, les contours de même intensité (appelées isochromatiques) correspondent aux contours de même contrainte de cisaillement dans le plan. La Figure 2.13(a) présente les franges obtenues autour d'une fissure se propageant dans un matériau fragile. L'analyse de ces franges permet de calculer K .

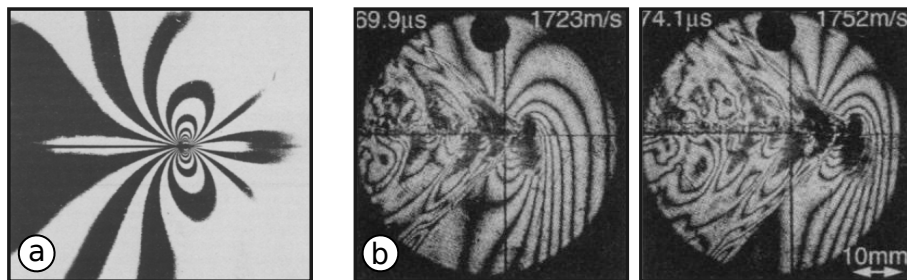


FIGURE 2.13 – Franges isochromatiques autour d'une pointe de fissure dans de l'homalite 100. (a) Propagation à 380 m.s^{-1} (Dally, 1979). (b) Propagation intersonique en mode II à 1752 m.s^{-1} (Rosakis *et al.*, 1999).

Appliquée à la fissuration dynamique pour la première fois par Bradley et Kobayashi (1970), cette technique a été beaucoup utilisée par la suite et a fait l'objet d'une revue bibliographique par Dally (1987). Elle a notamment été employée pour analyser la propagation intersonique en mode II par Rosakis *et al.* (1999) (Fig 2.13(b)). Comme toutes les méthodes optiques, cette technique présente l'avantage de ne nécessiter qu'une seule image au cours de la propagation : les franges isochromatiques contiennent toute l'information recherchée. En revanche, elle se limite aux matériaux photoélastiques, souvent des polymères. C'est ce qui explique le nombre important d'études sur les polymères fragiles comme le polycarbonate, l'homalite ou le PMMA.

Interférométrie

L'interférométrie optique constitue une autre famille de mesures de champs. Plusieurs techniques ont été utilisées en rupture dynamique, mais le principe général repose sur l'interférence entre un rayon lumineux de mesure, qui se réfléchit à la surface de l'éprouvette, et celui de référence. Très utilisée pour des mesures d'état de surface, une application directe de ce principe est la mesure du déplacement hors plan autour d'une fissure dû à l'effet Poisson. Washabaugh et Knauss (1994) ont pu observer le déplacement transverse et la propagation d'ondes au cours de la propagation d'une fissure dynamique. L'interférogramme obtenu est présenté sur la Figure 2.14(a). L'état de surface de l'éprouvette doit

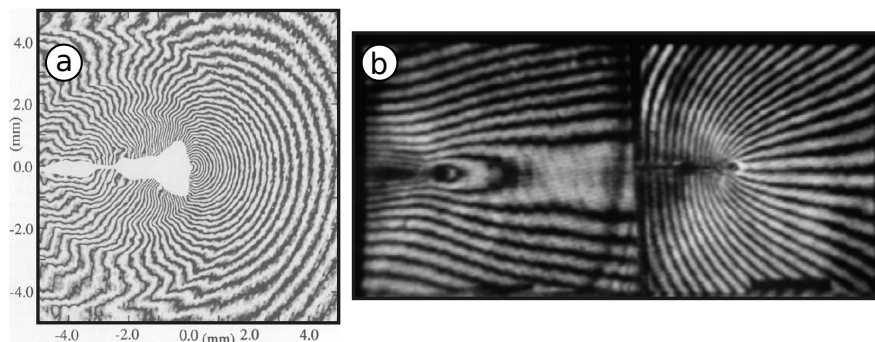


FIGURE 2.14 – (a) Interférogramme du déplacement hors plan autour d'une fissure se propageant à 520 m.s^{-1} dans du PMMA. Chaque frange correspond à une élévation de 257 nm . La zone blanche provient du post-traitement. Résultats de Washabaugh et Knauss (1994). (b) Interférogramme moiré du déplacement horizontal (gauche) et vertical (droite) au début de la propagation d'une fissure dans un alliage d'aluminium. Résultats de Kokaly *et al.* (2003).

permettre la réflexion du rayon de mesure. Pfaff *et al.* (1995) proposent une discussion de cette technique de mesure.

L'interférométrie moirée permet de mesurer le déplacement dans le plan de l'éprouvette. Une fine grille est apposée sur l'éprouvette dans la zone de mesure et l'évolution de cette grille au cours de la déformation est comparée à la grille de référence. A titre d'illustration, la Figure 2.14(b) présente les champs de déplacement autour d'une pointe de fissure dans un alliage d'aluminium (Kokaly *et al.*, 2003). Certains montages permettent aussi de mesurer le déplacement hors-plan. Cette technique nécessite un traitement de surface complexe et peu d'études ont été réalisées en rupture dynamique.

De manière générale, les mesures de déplacement obtenues par interférométrie sont très précises, mais l'interprétation des franges obtenues par l'élasticité linéaire est source d'erreurs (Ravi-Chandar, 2004).

Corrélation d'image

La corrélation d'images numériques (*digital image correlation*, DIC²) est une technique optique non interférométrique, développée à partir des années 1980. Elle est aujourd'hui bien établie (Sutton *et al.*, 2009) et fait partie des outils de mesure standards en mécanique. Notre étude fait le choix de la DIC pour mesurer les champs autour des

2. Le sigle anglais DIC sera utilisé par la suite, le sigle français n'étant pas utilisé en pratique.

fissures dans le polyuréthane. Néanmoins, cette technique est abordée du strict point de vue de l'utilisateur. Son principe n'est donc que brièvement rappelé.

Dans sa version 2D, la DIC est une mesure de champs dans le plan. A partir des images numériques d'une éprouvette avant et après déformation, la corrélation d'image consiste à retrouver le déplacement de chaque point de l'image par comparaison. En pratique, un mouchetis est déposé sur la zone utile de l'éprouvette, c'est-à-dire un motif à répartition aléatoire de niveaux de gris. Dans l'image de référence (avant déformation), la zone utile est découpée en petites images rectangulaires, les imagerie (*subset*), comme indiqué sur la Figure 2.15(a). Le motif de niveau de gris de chaque petite image est ensuite retrouvé dans

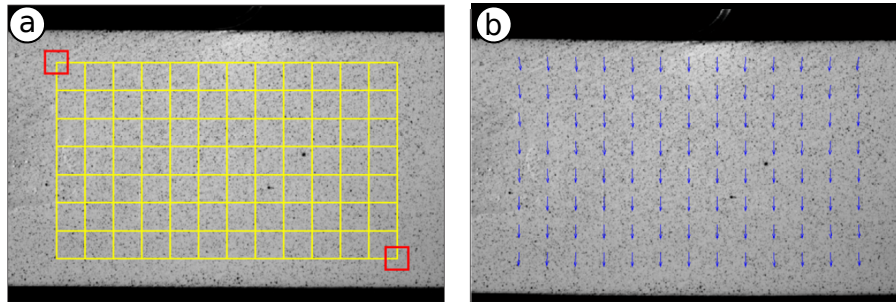


FIGURE 2.15 – (a) Zone utile de l'éprouvette où sont mesurés les déplacements (nœuds de la grille jaune) dans l'image de référence. Chaque nœud est le centre d'une imagerie (carré rouge) qui est recherchée dans l'image déformée. (a) Image déformée avec le vecteur déplacement tracé au niveau des nouvelles positions des nœuds. Images issues de Pan *et al.* (2009).

la seconde image, moyennant une certaine translation et une déformation. Cette translation de l'imagerie fournit la valeur du déplacement en un point (son centre). L'ensemble des déplacements des centres des images constitue une discrétisation du champ de déplacement de la zone utile de l'éprouvette (Fig. 2.15(b)).

Cette technique présente de nombreux avantages, comme une préparation minimale de l'éprouvette, un système d'acquisition simple et un fonctionnement adaptable à beaucoup de situations (microscopie optique ou électronique, photographie classique ou à grande vitesse...). Néanmoins, contrairement aux techniques interférométriques, la corrélation d'images numériques nécessite la comparaison des images avec l'image de référence. Obtenir l'évolution dynamique des champs demande souvent une bonne résolution temporelle pour limiter le niveau de déformation entre les images successives. Cette difficulté explique l'usage restreint de la DIC en rupture dynamique et n'a pu être dépassée qu'avec l'amélioration récente des performances des caméras. Ainsi, Kirugulige et Tippur (2009) mesurent le champ de déplacement autour d'une fissure se propageant à 270 m.s^{-1} dans une mousse syntactique d'époxy. Ils utilisent pour cela une caméra à miroir rotatif (Cordin 550) filmant à 200 000 fps. Les champs obtenus sont reproduits sur la Figure 2.16.

Champ de température

La rupture des matériaux s'accompagne d'importants échanges thermiques et potentiellement d'une forte élévation de la température en pointe de fissure, reconnue dans les polymères vitreux depuis les travaux de Fuller *et al.* (1975). Une mesure du champ de température serait donc intéressante, notamment pour valider certaines théories intégrant cette température dite « de flash » (Carbone et Persson, 2005). Contrairement au champ de déplacement, peu de techniques existent pour mesurer le champ de température. La

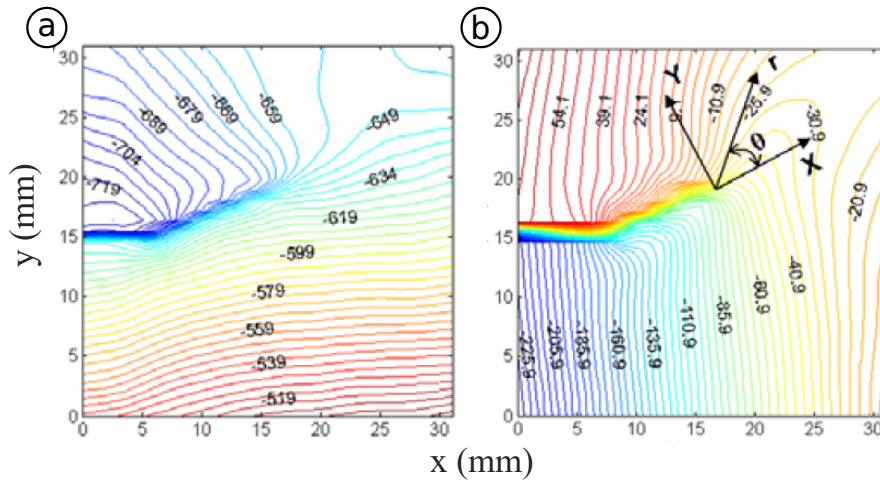


FIGURE 2.16 – Champ de déplacement (a) horizontal et (b) vertical en μm autour d’une fissure se propageant à 270 m.s^{-1} . Résultats de Kirugulige et Tippur (2009).

principale repose sur la thermographie infrarouge. La fréquence d’acquisition des caméras thermiques reste assez faible, ce qui complique leur utilisation en dynamique. En petites déformations, Guduru *et al.* (2001) ont néanmoins observé le champ de température lors d’une propagation de fissure dans l’acier. L’amélioration des caméras thermiques ces dernières années ouvre de nouvelles possibilités. Ainsi récemment, Toussaint *et al.* (2016) ont observé précisément le champ de température au cours de la déchirure d’une feuille de papier ($c = 1 \text{ mm.s}^{-1}$). Pour les élastomères, la technique est de plus en plus employée (Le Cam, 2012), mais le cas de la propagation dynamique reste rare, on peut toutefois citer l’étude récente de D’Amico *et al.* (2013).

2.3.2 Élastomères

Corrélation d’images en grandes déformations

Les techniques de mesure de champs optiques sont surtout adaptées aux matériaux transparents (éventuellement photoélastiques) ou pouvant être rendus réfléchissants. Ainsi, pour les élastomères, seul le traitement d’images numériques peut être utilisé.

La corrélation d’images est initialement utilisée pour les petites déformations. L’extension de son formalisme aux grandes déformations a commencé avec les travaux de Septanika *et al.* (1998), dans le but d’étudier le comportement du caoutchouc naturel. Laraba-Abbes *et al.* (2003) utilisent cette technique pour caractériser le comportement d’un élastomère. Considérée comme un extensomètre non-intrusif, cette technique leur permet de mesurer des champs de déformation sous chargement biaxial et de vérifier certaines hypothèses comme l’incompressibilité du caoutchouc naturel. Chevalier *et al.* (2001) appliquent la DIC au cas de grandes déformations inhomogènes. Dans la même veine, elle est utilisée pour mesurer le champ de déformation autour d’une fissure statique dans un élastomères (Mzabi *et al.*, 2011; Rublon *et al.*, 2014; Caimmi *et al.*, 2015a). Elle est aujourd’hui largement utilisée pour l’étude des élastomères, application qui fait l’objet d’une revue bibliographique de Le Cam (2012).

Mesure de champs en rupture dynamique

Parmi les études répertoriées au paragraphe 2.2.3, quelques unes font appel à des mesures de champs. Zhang *et al.* (2009) et Chen *et al.* (2011) utilisent la *particle image velocimetry*, une méthode proche de la DIC et très utilisée en mécanique des fluides, pour mesurer le champ de vitesse autour de la pointe de la fissure dans la membrane. Le champ obtenu pour deux vitesses différentes est reproduit sur la Figure 2.17. Par exemple, le

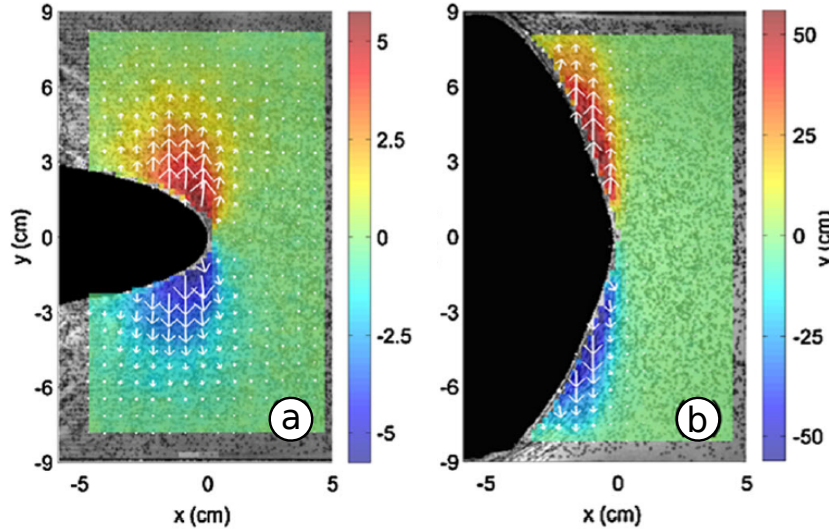


FIGURE 2.17 – Champs de vitesse verticale (m.s^{-1}) au cours de la propagation dans le caoutchouc naturel à (a) $8,3 \text{ m.s}^{-1}$ et (b) $25,6 \text{ m.s}^{-1}$. Résultats de Zhang *et al.* (2009).

champ de la Fig.2.17(b) est mesuré dans une membrane initialement déformée à 210% et une fissure se propageant jusqu'à $25,6 \text{ m.s}^{-1}$. Ces deux études sont les seules proposant une mesure de champs à cette vitesse et à ce niveau de déformation.

Par ailleurs, la série d'études sur le gel de polyacrylamide fait la part belle à la mesure de champs. Livne *et al.* (2010) utilisent un traceur imprimé sur le gel pour mesurer le champ de déformation. Cette technique s'apparente à la corrélation d'images, bien que ce terme ne soit pas utilisé explicitement. Le champ de déplacement obtenu, reproduit sur la Figure 2.18, est suffisamment résolu pour leur permettre d'estimer l'intégrale J , moyennant une loi de comportement (modèle néo-Hookéen) et l'hypothèse de propagation stationnaire. A notre connaissance, cette étude constitue la première mesure de l'intégrale J au cours d'une propagation dynamique de fissure (Fig.2.18(b)). L'intérêt d'utiliser ce type de matériau est manifeste : les fissures se propagent à des vitesses absolues faibles, entre $0,4$ et 2 m.s^{-1} , mais assez proches de la vitesse des ondes de cisaillement (de $0,2c_s$ à $0,8c_s$). Ces faibles vitesses absolues facilitent la mesure de champs proches de la pointe (Fig.2.18(a)). Dans une autre étude sur ces gels fragiles, Goldman Boué *et al.* (2015) ont mesuré les champs de déformation en suivant l'évolution d'une grille imprimée sur la membrane. La Figure 2.19 montre cette grille et le champ de déformation obtenu. L'utilisation d'une grille permet de connaître à chaque instant la configuration de référence de l'éprouvette : c'est la grille non déformée. Les auteurs peuvent alors distinguer aisément le champ de déplacement issu de la déformation initiale de la membrane et celui induit par la fissure. Cette approche permet de tester expérimentalement l'extension de la WNLIT qu'ils proposent (voir § 1.3.2). La finesse de la grille assure une bonne résolution du champ de déplacement mesuré, ce qui permet aussi aux auteurs de calculer l'intégrale J au cours de la propagation suivant la même méthode que Livne *et al.* (2010).

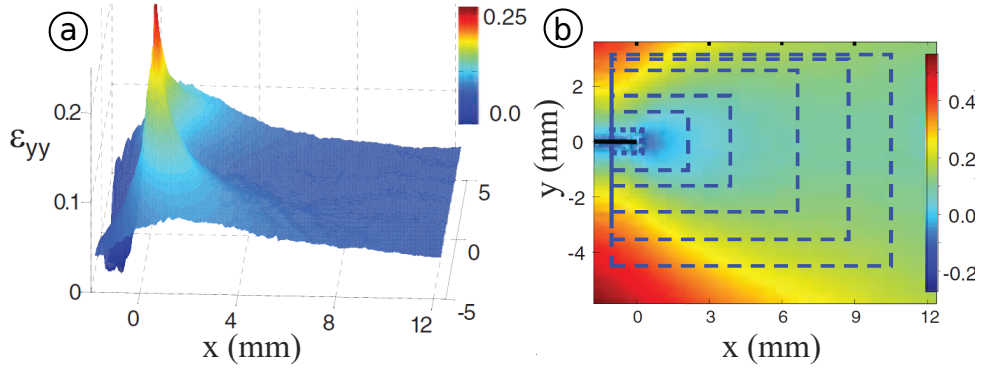


FIGURE 2.18 – (a) Champ de déformation en pointe de fissure (située à l’origine) se propageant à $0,7c_s$. (b) Déplacement horizontal en mm. Les rectangles en pointillés correspondent aux contours utilisés pour calculer l’intégrale J . Résultats de Livne *et al.* (2010).

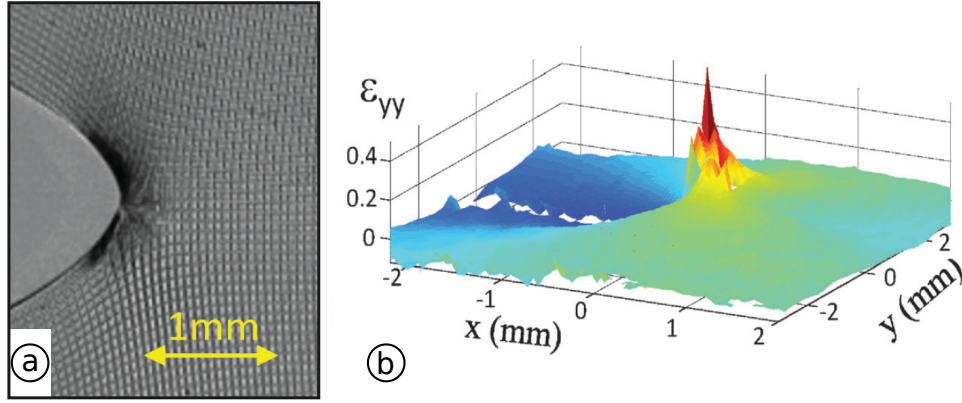


FIGURE 2.19 – a : Pointe de la fissure dans le gel et grille imprimée. b : Champ de déformation mesuré autour de la pointe. Résultats de Goldman Boué *et al.* (2015).

Ces quatre études constituent, à notre connaissance, les seules mesures de champs au cours de la propagation d’une fissure en grandes déformations et à haute vitesse.

Bilan

Ce chapitre achève la présentation du contexte scientifique de l’étude. Tout d’abord le comportement des élastomères, et la façon de le modéliser, ont été rappelés. Ce comportement impacte l’approche locale de la théorie classique de la rupture (LEFM) par l’ajout de non-linéarités matériau, des grandes déformations et de la viscoélasticité. La non-linéarité de la réponse élastique influe aussi sur la propagation des ondes mécaniques, dont la célérité est un indicateur unifiant les résultats en propagation dynamique. L’approche énergétique de la rupture pallie la méconnaissance des champs en pointe de fissure dynamique et sert de fondement à la grande majorité des études de la rupture des élastomères depuis les années 1950. Les méthodes expérimentales en dérivent, et beaucoup d’études ont alors pour but de déterminer l’énergie de rupture, se plaçant dans un cas offrant une formule analytique du taux de restitution d’énergie. Néanmoins, des études récentes réintroduisent l’approche locale en étendant la LEFM au cas non-linéaire. L’observation de la rupture dynamique repose classiquement sur l’amorçage contrôlé d’une membrane tendue en traction biaxiale au sens large (cisaillement pur, membrane gonflée

ou traction biaxiale), tradition dans laquelle s'inscrit notre étude. Ces études expérimentales de la rupture dynamique des élastomères, présentées dans cette partie, soulignent notamment que :

- L'énergie de rupture augmente avec la vitesse de propagation, impliquant éventuellement la viscosité du matériau ;
- L'élongation initiale de la membrane influence fortement les champs mécaniques autour de la pointe ;
- Les fissures peuvent se propager plus vite que les ondes de cisaillement (et moins vite que les ondes longitudinales), et dans ce cas la vitesse de propagation semble pilotée par des grandeurs locales.

Les techniques optiques utilisées depuis longtemps pour l'étude de la rupture dynamique fragile ne sont pas applicables aux élastomères. Le développement des méthodes fondées sur l'analyse d'images, dont la corrélation d'images, ouvre désormais la mesure de champs à ce type de matériau, comme le montrera la partie suivante de ce mémoire. Le regain d'intérêt récent pour une approche plus locale avec mesure de champs en rupture dynamique vient en grande partie de l'utilisation de gels comme matériau modèle, mais à déformations modérées. L'application de ces techniques en grandes déformations (proches des applications de membranes élastomères) n'en est qu'à ses débuts.

Deuxième partie

Observation de la propagation de fissures et mesures de champs

Chapitre 3

Protocole expérimental

Ce chapitre présente le protocole expérimental développé pour mesurer les champs mécaniques au cours de la propagation à haute vitesse d'une fissure dans un élastomère. La propagation a lieu après l'amorçage provoqué d'une fissure dans une membrane pré-tendue. Le suivi de l'essai fait intervenir deux caméras, dont l'une enregistre à haute fréquence pour suivre la propagation. Ce protocole se veut applicable à n'importe quel élastomère avec le moins de modifications possible, il est donc présenté sans faire référence à un matériau en particulier. Ce chapitre détaille la géométrie des éprouvettes, le montage à deux caméras, et les méthodes mises en œuvre pour la mesure et le calcul des champs, ainsi que les hypothèses qui les sous-tendent. Ces méthodes sont néanmoins illustrées de manière générique par des exemples issus de la campagne expérimentale présentée dans le Chapitre 4.

Sommaire

3.1	Montage expérimental	64
3.1.1	Éprouvettes	64
3.1.2	Procédure	65
3.2	Mesure du champ de déplacement pendant la propagation	67
3.2.1	Corrélation d'images	67
3.2.2	Reconstruction du champ de déplacement complet	69
3.3	Calcul des champs mécaniques	70
3.3.1	Dérivation spatiale	70
3.3.2	Dérivation temporelle	71
3.3.3	Estimation des contraintes et des champs énergétiques	71

3.1 Montage expérimental

3.1.1 Éprouvettes

Le montage expérimental est conçu pour observer la propagation de fissures à travers des éprouvettes de cisaillement pur, appelées éprouvettes « PS » par la suite (cf. § 1.2.3), dont le plan est fourni sur la Figure 3.1. Ces éprouvettes sont des membranes rectangulaires d'épaisseur e_0 , de largeur L_0 et de hauteur h_0 qui respectent les conditions géométriques suivantes : $L_0 \gg h_0 \gg e_0$. Elles sont étirées perpendiculairement à leur grand côté, généralement en déplacement imposé. Le ratio de forme particulier $L_0/h_0 \gg 1$ assure une déformation homogène dans une zone assez grande au centre de l'éprouvette. De plus, la faible épaisseur permet de considérer un état plan de contraintes. Tout au long de cette étude, on utilisera le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tracé sur la Fig.3.1. Les axes de ce repère correspondent aux directions principales de déformation de la membrane (au centre et le long de l'axe médian). En notant λ_y l'élongation imposée suivant $\vec{e}_y$, le gradient de la transformation au centre de l'éprouvette s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_y} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dans le cas d'un matériau incompressible. Dans le cas général, on notera λ_x , λ_y et λ_z les élongations suivant les axes de ce repère.

En pratique, l'éprouvette retenue a pour dimensions $200 \times 40 \times 3 \text{ mm}^3$ tel que le montre la Fig.3.1, ce qui correspond à un rapport $L_0/h_0 = 5$. Cette membrane rectan-

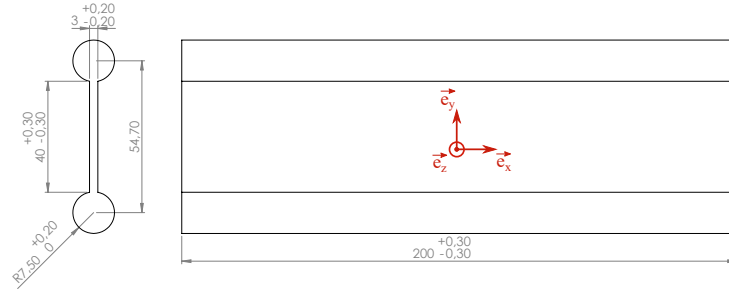


FIGURE 3.1 – Plan de l'éprouvette de cisaillement pur (cotes en mm).

gulaire correspond à la « zone utile » de l'éprouvette, zone où sont mesurés les champs. Deux bourrelets cylindriques complètent la zone utile sur les bords longs, permettant son maintien dans les mors. Les bourrelets font 15 mm de diamètre. Ce rapport 5 vis-à-vis de l'épaisseur de la membrane assure une bonne tenue jusqu'à la rupture éventuelle de l'éprouvette. Les efforts maximum enregistrés au cours des essais sont de l'ordre de quelques kN. L'épaisseur de la membrane est imposée par le procédé de moulage du polyuréthane qui ne permet pas de garantir une dimension homogène pour des épaisseurs plus faibles. Le montage accepterait cependant des membranes plus fines ; l'hypothèse de contraintes planes s'en trouvant d'autant plus justifiée.

Depuis leur étude par Rivlin et Thomas (1953), ces éprouvettes sont largement utilisées pour l'étude de la fissuration des élastomères car elles offrent une formule analytique pour le taux de restitution d'énergie (cf § 1.2.3). D'après l'étude numérique de Yeoh (2001), ce rapport L_0/h_0 de 5 est le minimum assurant l'existence d'une zone de déformation homogène au centre de l'éprouvette, et ce pour des déformations limitées (environ 100%).

La présence d'une zone chargée en cisaillement pur est nécessaire pour l'application des formules analytiques, c'est pourquoi des ratios L_0/h_0 bien supérieurs sont couramment considérés dans la bibliographie (Rublon *et al.*, 2014). Dans le cas présent, l'objectif est surtout de pouvoir filmer la propagation de la fissure avec une bonne résolution, l'utilisation de la formule passant au second plan. Cette géométrie présente en revanche quelques avantages pratiques :

- La symétrie de l'éprouvette assure une propagation rectiligne au centre de l'éprouvette ;
- La propagation peut être observée sur une grande longueur dans une zone de déformation initialement homogène ;
- Le rapport L_0/h_0 assez faible autorise une bonne résolution horizontale et verticale des images malgré un capteur CCD carré (caméra rapide) et un cadrage sur l'éprouvette complète.

Le rapport L_0/h_0 limite fortement la taille de zone pouvant être considérée en cisaillement pur, en particulier pour les fortes elongations imposées. Néanmoins, l'utilisation de la technique de corrélation d'images remplace avantageusement la connaissance théorique du champ de déformation par une mesure directe.

3.1.2 Procédure

Chaque essai a pour objectif d'observer la propagation d'une fissure à travers une éprouvette dont l'elongation longitudinale est imposée au préalable. La Figure 3.2 présente une photo (a) et un schéma (b) du montage expérimental. Les mors adaptés aux

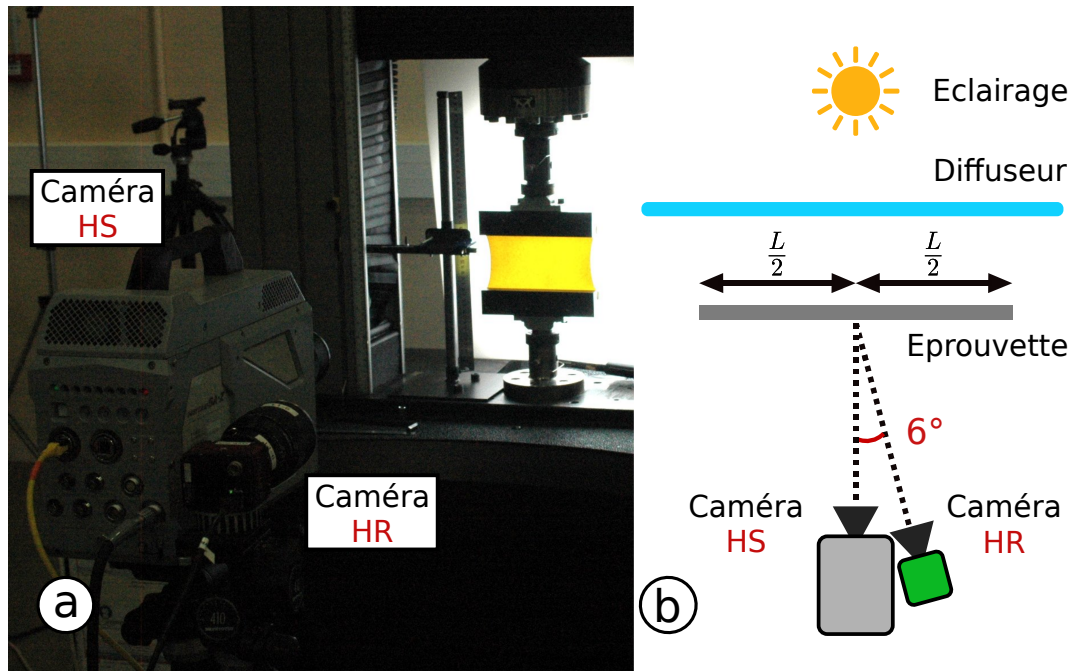


FIGURE 3.2 – (a) Montage en place. (b) Schéma du montage ; vue de dessus.

éprouvettes PS sont installés sur une machine de traction électromécanique Instron 5584. L'éprouvette, légèrement translucide, est éclairée en transparence à l'aide de deux spots et d'un diffuseur (Fig.3.2(b)). L'essai se déroule en deux étapes, la prétension de l'éprouvette puis la propagation de la fissure, chacune étant enregistrée par une caméra différente. Deux caméras sont nécessaires car ces deux étapes se déroulent sur des échelles de temps très différentes : de 30 s à 4 min pour la première et de 10 à 20 ms pour la seconde.

La Figure 3.3 montre une photo prise juste avant l’amorçage (a) et résume les étapes du processus (b).

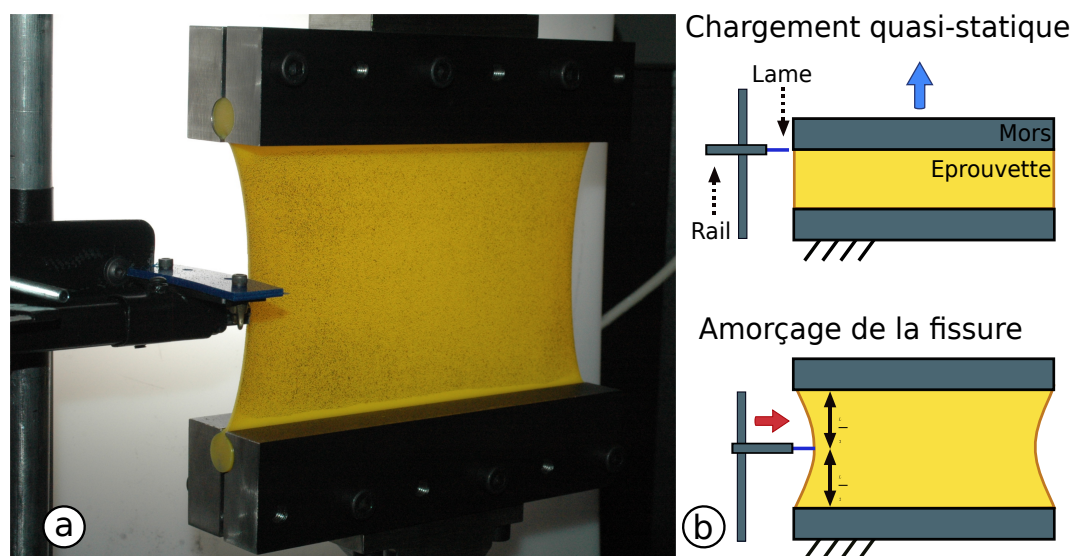


FIGURE 3.3 – (a) Éprouvette étirée juste avant l’amorçage de la fissure. (b) Schéma des étapes successives du protocole : prétension de l’éprouvette (haut) et amorçage de la propagation par incision (bas).

Prétension de l’éprouvette

Pendant cette première étape, l’éprouvette est étirée jusqu’à une élongation prédéfinie. La traverse est pilotée en déplacement à une vitesse de 20 mm/min. Cette vitesse est suffisamment faible pour assurer un chargement « quasi-statique ». Cette étape est enregistrée par une caméra à haute résolution AVT Prosilica GT 6600 (29 Mpix), appelée caméra HR par la suite. La fréquence d’acquisition est de 0,5 Hz avec une résolution spatiale d’environ 0,04 mm/pix. La fin de la charge est décrétée lorsque l’éprouvette atteint l’élongation voulue, mesurée par le déplacement de la traverse. Cette élongation voulue sert à identifier les essais et sera noté λ_{obj} par la suite. Le niveau de déformation effectivement atteint localement dans la membrane est mesuré précisément par corrélation d’images.

Propagation de la fissure

Une fois l’élongation visée atteinte, la propagation de la fissure est amorcée par une petite incision réalisée au milieu d’un bord de l’éprouvette. L’incision est faite avec une lame fixée sur un rail, lui même positionné au préalable à la bonne hauteur sur une potence. Actionnée manuellement, cette lame entaille l’éprouvette sur une longueur (non maîtrisée) comprise entre 1 et 5 mm (variable suivant les essais). Une fois la fissure amorcée, celle-ci se propage librement. On précise que l’entaille est réalisée tandis que la traverse est toujours en mouvement : au regard de la durée très faible de cette étape (entre 16 et 300 ms), la traverse pourra être considérée comme fixe tout au long de la propagation.

Au cours de cette deuxième étape, on enregistre les images avec une caméra rapide Photron SAZ, appelée caméra HS (*high speed*) par la suite. La Figure 3.4 propose un exemple de photo prise lors de la propagation. La fréquence d’acquisition de la caméra est fixée à chaque essai en fonction de la durée estimée du phénomène, mais elle est limitée

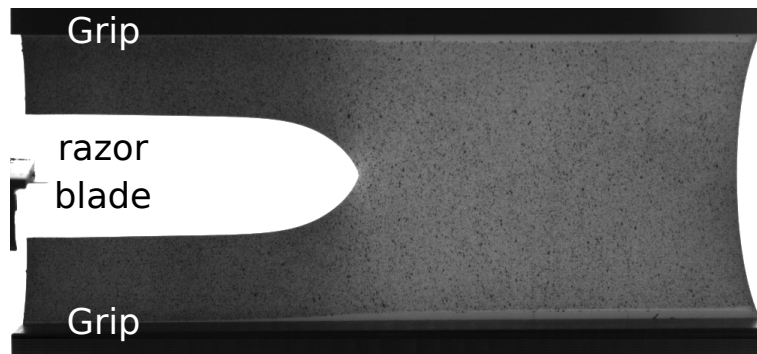


FIGURE 3.4 – Image au cours de la propagation de fissure dans une éprouvette PS. Vitesse instantanée de la fissure : 33.1 m.s^{-1} . Elongation imposée : $\lambda = 2$. Caméra HS : 20 000 Hz, vitesse d’obturation : $1/160\,000 \text{ s}$

à 40 000 Hz à pleine résolution. En pratique, les fréquences utilisées s’échelonnent entre 5 000 et 25 000 Hz. La résolution spatiale est d’environ 0.2 mm/pix . Les deux caméras sont équipées du même objectif Zeiss 2/100 ZF (L1-6).

3.2 Mesure du champ de déplacement pendant la propagation

3.2.1 Corrélation d’images

L’objectif du dispositif est de réaliser une mesure de champ de déplacement à partir des images fournies par les deux caméras. Le réglage du dispositif, éprouvettes et prises de vue, doit permettre cette analyse de l’ensemble des images malgré les différences de résolutions et de fréquences d’acquisition des caméras.

Préparation de l’éprouvette

La corrélation d’image se fonde sur l’analyse des niveaux de gris d’un motif aléatoire. Pour obtenir un tel motif, la face filmée des éprouvette est recouverte d’un mouchetis noir fait à la bombe de peinture (voir Fig.3.4). La couleur claire des éprouvettes et l’éclairage par transparence assurent naturellement un bon contraste du mouchetis, sans besoin de couches blanches. La taille des gouttes de peinture est ajustée en tenant compte de la résolution de la caméra HS, la grande résolution de la caméra HR offrant plus de latitude. Le mouchetis est réalisé juste avant chaque essai pour résister aux grandes déformations imposées lors de la charge (la peinture fraîche est moins fragile et supporte mieux les grandes déformations).

Qualité de la prise de vue

La précision et le succès de la corrélation d’images dépendent en grande partie de la qualité des photos. Il s’agit donc de maximiser la netteté et le contraste de la zone utile de l’éprouvette (membrane avec le mouchetis) pour les deux caméras.

Le réglage de la caméra HR ne pose pas de problèmes particuliers compte tenu de la lenteur des phénomènes. Le temps de pause doit néanmoins être modifié au cours de l’essai

pour tenir compte de l'amincissement de l'éprouvette et éviter la saturation du capteur (augmentation de l'intensité lumineuse traversant l'éprouvette).

Au contraire, la caméra rapide accuse un déficit de lumière. Obtenir un bon contraste du mouchetis requiert de maximiser la luminosité. En revanche, conserver une bonne netteté de l'image malgré la vitesse des phénomènes impose de fermer le diaphragme et d'augmenter la vitesse d'obturation, ce qui diminue la luminosité. En effet, les vitesses atteintes localement par la matière peuvent dépasser celle de la fissure, en particulier dans la zone de rétractation des lèvres de la fissure. Pour une fréquence d'acquisition acceptable du point de vue de la propagation, la vitesse d'obturation maximale (intervalle entre deux images) n'est alors pas suffisamment élevée pour obtenir une image nette. On augmente donc les vitesses d'obturation malgré la perte de luminosité qui en résulte, les échelonnant entre 1/100 000 et 1/200 000 s pour des fréquences d'acquisition de 5 000 à 25 000 Hz. La vitesse d'obturation est choisie comme paramètre pour le réglage de la caméra rapide à chaque essai, le diaphragme restant le plus fermé possible (5,6 le plus souvent). Lorsqu'un compromis luminosité / netteté satisfaisant n'est pas possible, l'objectif du réglage devient sur la réduction de la taille de la zone de flou autour de la pointe de fissure.

Analyse des images

Les images fournies par les deux caméras sont analysées avec le logiciel de corrélation d'images Vic-2D. Son principe repose sur le découpage de la première image du film, appelée image de référence, en petites portions rectangulaires, les « subsets » ou « imagerie ». Le logiciel retrouve ensuite leurs positions respectives dans les images suivantes à partir de leurs distributions de niveaux de gris, moyennant une certaine déformation. La taille des imagerie (en pixel) doit être ajustée pour correspondre au mouchetis : chaque imagerie doit contenir une répartition de niveaux de gris suffisamment détaillée et variée pour être identifiée sans équivoque sur les images suivantes. Dans cette étude, les imagerie retenues font environ 25 pixels de côté pour la caméra HR et 17 pixels de côté pour la caméra HS. De légères variations sont parfois nécessaires pour s'adapter au mouchetis effectivement obtenu sur l'éprouvette. Le champ de déplacement est mesuré au centre de chaque imagerie. Pour obtenir une grille dense, les imagerie se chevauchent en partie : le pas est fixé à 7 pixels pour la caméra HR et 4 pixels pour la caméra HS (soit 0,52 et 0,81 mm respectivement).

Les résultats de la corrélation d'images sont rassemblés dans des tableaux, donnant, image par image, la position de chaque point de la grille et le déplacement par rapport à l'image de référence correspondant. A ces points est donc associé un déplacement dans le plan de l'éprouvette comme l'illustre la Figure 3.5. Ces données brutes sont exportées et traitées au moyen d'une suite logicielle développée à cette fin. En revanche, on se place en utilisateur de la corrélation d'images. En conséquence, les techniques numériques mises en place pour mesurer le champ de déplacement et la précision des résultats obtenus ne seront pas discutés.

Remarque sur le positionnement des caméras

Les deux caméras de ce dispositif ne peuvent pas être placées toutes les deux en face de l'éprouvette en même temps. L'option retenue est de privilégier le positionnement de la caméra HS et de placer la caméra HR le plus près possible, mais avec un petit angle (voir la Fig.3.2). Cet angle, mesuré a posteriori sur les images, est de $6,5 \pm 0,5^\circ$. Il entraîne une erreur sur le déplacement horizontal mesuré au cours de la première étape d'environ 0,6 %

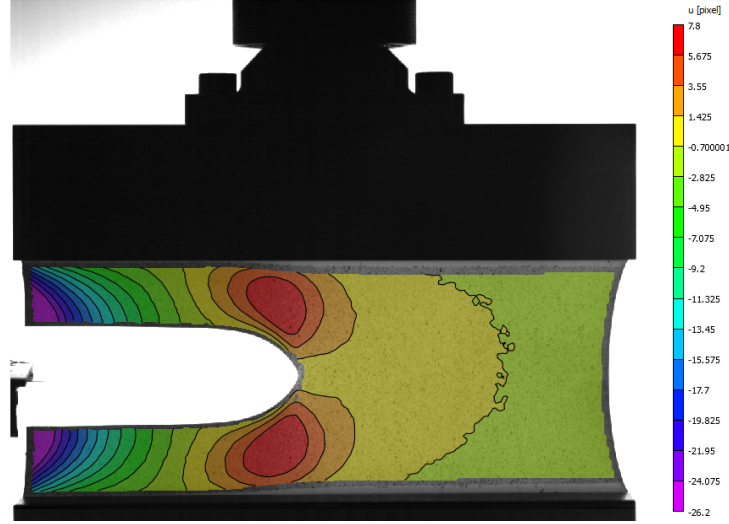


FIGURE 3.5 – Champ de déplacement mesuré par corrélation d’images au cours de la propagation. Composante horizontale en pixel, mesurée par rapport à la membrane déformée avant amorçage.

mais il n’influe pas sur la mesure du déplacement vertical. Cette erreur se répercute sur la mesure de déformation de la membrane, mais elle est jugée acceptable devant les grandes déformations induites par la fissure.

3.2.2 Reconstruction du champ de déplacement complet

Comme précisé auparavant, l’enregistrement des images au cours des deux étapes de l’essai avec deux caméras différentes fournit deux champs de déplacement 2D indépendants. Le champ de déplacement mesuré par la caméra HS pendant l’étape de propagation ne prend donc pas en compte l’étape de chargement. Pour calculer le déplacement total, les données provenant de la caméra HR sont projetées sur les images de la caméra HS. En adoptant une description cinématique continue du problème, la première image de la caméra HR correspond à la configuration de référence de l’éprouvette. La position des points matériels dans cette configuration est notée $\vec{X}$. Les deux étapes se déroulent successivement, l’instant de l’amorçage de la fissure t_0 marquant le passage de l’une à l’autre. On distingue alors la position des points matériels lors de la phase de chargement $\vec{x}_c(t, t \leq t_0)$ et celle lors de la phase de propagation de fissure $\vec{x}_p(t, t \geq t_0)$. Pour $t \leq t_0$, la caméra HR fournit le champ de déplacement :

$$\vec{u}_c = \vec{x}_c - \vec{X}. \quad (3.2)$$

Pendant la propagation ($t \geq t_0$), la caméra HS mesure le champ déplacement $\vec{u}_p$ à partir de la position des points à la fin du chargement :

$$\vec{u}_p = \vec{x}_p - \vec{x}_c, \quad (3.3)$$

ce qui permet de retrouver le champ de déplacement complet pour $t \geq t_0$:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_p(t) + \vec{u}_c(t_0). \quad (3.4)$$

En pratique, le logiciel de corrélation d’images fournit la position des points d’une grille recouvrant la zone utile de l’éprouvette. Par la suite, on notera $[\cdot]$ la projection

du champ continu sur une grille. Bien entendu, les grilles provenant des deux caméras ne coïncident pas. Cependant, la faible vitesse de déplacement de la traverse permet de considérer que la dernière image de la caméra HR et la première image de la caméra HS (juste avant l'amorçage) correspondent au même état mécanique de l'éprouvette. En effet, le léger décalage temporel entre ces deux images (inférieur à 0,5 s) n'entraîne qu'un très faible déplacement de la traverse (inférieur à 0,17 mm). Dans ce cas, le champ de déplacement $\vec{u}_c$ mesuré sur la grille de la caméra HR ($[\vec{x}_c]$) peut être projeté sur la grille de la caméra HS ($[\vec{x}_p]$). Les deux grilles sont d'abord superposées au moyen d'une homothétie suivie d'un positionnement à partir de points particuliers de l'éprouvette. Le champ de déplacement est ensuite projeté sur la grille $[\vec{x}_p]$ par interpolation linéaire depuis la grille $[\vec{x}_c]$. La grille de la caméra HR est environ 30% plus dense que la grille de la caméra HS et le champ issu du chargement est assez homogène (éprouvette PS), ce qui favorise la précision de la projection. Le champ de déplacement complet est alors calculé aux nœuds de la grille $[\vec{x}_c]$ avec l'équation (3.4). La position des points $[\vec{x}_c]$ dans la configuration de référence, notée $[\vec{X}_c]$ peut être calculée :

$$[\vec{X}_c] = [\vec{x}_c] - \vec{u}([\vec{x}_c]). \quad (3.5)$$

La grille $[\vec{X}_c]$ cartographie l'éprouvette dans la configuration matérielle. On retrouve ainsi la forme rectangulaire initiale de l'éprouvette. Cette configuration matérielle correspond à la configuration de référence avant l'existence d'une fissure. Une fois que celle-ci se propage, la configuration matérielle évolue et la fissure se dessine sous la forme d'une ligne.

3.3 Calcul des champs mécaniques

3.3.1 Dérivation spatiale

Une fois la configuration matérielle et le champ de déplacement complet retrouvés, le gradient de la transformation $\mathbf{F}$ peut être calculé pour chaque image de l'étape de propagation. $\mathbf{F}$ est défini par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}_p} + \mathbf{I}. \quad (3.6)$$

$\mathbf{F}$ est ici calculé en deux dimensions d'après les mesures de déplacement en surface. Sa valeur dans l'épaisseur est néanmoins retrouvée à partir de deux hypothèses : éprouvette en contraintes planes et incompressibilité du matériau. Les contraintes planes imposent l'absence de cisaillement dans l'épaisseur, ce qui implique pour les composantes de $\mathbf{F}$:

$$F_{13} = F_{31} = F_{23} = F_{32} = 0. \quad (3.7)$$

Les élastomères sont généralement considérés comme incompressibles, c'est-à-dire que les variations de volume au cours de la déformation sont supposées négligeables (Le Cam, 2010). Cette hypothèse de transformation isochore se traduit par :

$$\det(\mathbf{F}) = 1. \quad (3.8)$$

Ces deux hypothèses permettent de calculer la composante hors-plan du gradient de la transformation :

$$F_{33} = \det \left(\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Le gradient de la transformation est évalué en utilisant une discrétisation éléments finis. Les grilles issues de la corrélation d'image sont assimilées à un maillage triangulaire

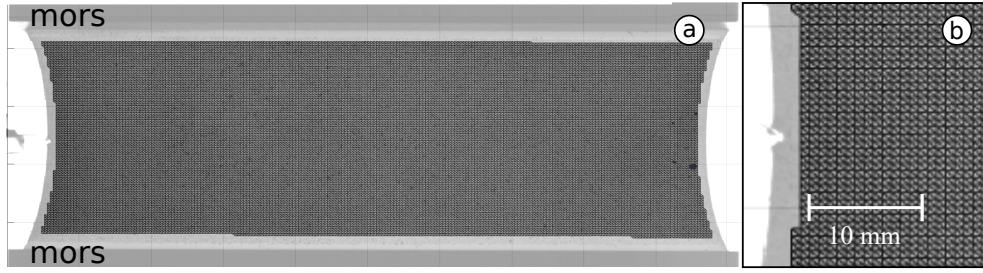


FIGURE 3.6 – Maillage issu de la grille de corrélation d’images avant la propagation (a) et zoom (b). Éléments triangulaires linéaires d’environ 0,81 mm de côté. La photo issue de la caméra HS est visible en transparence.

linéaire dont les nœuds sont les points de mesure du déplacement. La Figure 3.6 donne un exemple de maillage issu d’une grille de corrélation d’image de la caméra rapide. Une approximation plus complexe aurait pu être choisie, mais l’approximation linéaire est ici suffisante compte tenu du nombre de points et simplifie le traitement des données. Ainsi, connaissant le gradient de la transformation, tous les champs de déformation peuvent être calculés, à l’image du tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (3.10)$$

l’exposant $\cdot^T$ désignant la transposition.

3.3.2 Dérivation temporelle

La fréquence d’acquisition élevée de la caméra rapide assure un bon échantillonnage temporel de l’évolution des champs. La mesure et le calcul des grandeurs mécaniques pour chaque image de la caméra rapide permettent de calculer les dérivées temporelles des champs (première et éventuellement seconde). En particulier, la dérivée temporelle du champ de déplacement mesuré fournit directement le champ de vitesse. Ainsi, la dérivation temporelle du gradient de la transformation $\dot{\mathbf{F}}$ permet, par exemple, de calculer le tenseur des taux de déformation, défini par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T]. \quad (3.11)$$

En pratique, la dérivation nécessite le lissage de l’évolution temporelle des champs, une simple méthode des différences finies conduisant à des résultats trop bruités. On suppose donc que les champs évoluent suffisamment progressivement pour être représentés localement par un polynôme d’ordre 2. L’évolution d’une grandeur en un point donné est interpolée sur un intervalle de 5 images entourant l’instant choisi et la dérivée est calculée à partir de ce polynôme.

3.3.3 Estimation des contraintes et des champs énergétiques

La mesure de champ se limite au champ de déplacement. Les dérivées spatiale et temporelles de ces champs fournissent tous les champs cinématiques : les champs de vitesse, d’accélération, de déformation et de taux de déformation. La densité d’énergie cinétique est également directement accessible : la masse volumique du matériau est supposée constante

(hypothèse d'incompressibilité) donc la densité volumique d'énergie cinétique (en J.m^{-3}) est simplement donnée par :

$$k = \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v}, \quad (3.12)$$

avec $\vec{v}$ vitesse du point matériel considéré.

L'estimation du champ de contraintes nécessite l'utilisation d'une loi de comportement ; il ne constitue pas une mesure au sens propre. Néanmoins, supposant connue une loi de comportement de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{F}, t, \dots), \quad (3.13)$$

il est possible de tracer un champ de contraintes au cours de la propagation de la fissure. De plus, de manière générale, la densité d'énergie de déformation par unité de volume déformé (w_d) peut être estimée en tout point. Comme le matériau est incompressible, w_d est égal à la densité d'énergie de déformation par unité de volume dans la configuration de référence w_d . En utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy, on a :

$$w_d = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dt. \quad (3.14)$$

Ces relations générales doivent être adaptées au matériau étudié. Suivant les hypothèses retenues (élasticité, viscoélasticité...), ces relations permettent d'envisager une étude énergétique de la rupture. Cette présentation est générique : en pratique nous opterons pour le calcul de la densité d'énergie élastique par l'intermédiaire d'une loi de comportement hyperélastique. Ce choix spécifique à cette étude sera présenté au Chapitre 4.

Bilan

Le protocole expérimental décrit dans ce chapitre doit permettre une analyse mécanique du problème de la rupture dynamique d'un élastomère. Il s'attaque en particulier à deux difficultés que posent les deux caractéristiques de ce problème : la rapidité des phénomènes et les grandes déformations. Ce dispositif à deux caméras permet donc de suivre la propagation de fissure à grande vitesse, pour observer les effets dynamiques, tout en gardant la trace de la configuration de référence de l'éprouvette. Pour connaître cette configuration à chaque instant, la solution à deux caméras présente les avantages d'une bonne résolution spatiale en grandes déformations et d'une préparation minimale de l'éprouvette. Par ailleurs, la bonne résolution temporelle de la caméra rapide permet l'étude de propagation de fissures stationnaires. Le chapitre suivant constitue l'application de ce protocole expérimental au matériau de notre étude.

Chapitre 4

Propagation dans le polyuréthane

Ce chapitre présente l'application directe du protocole expérimental précédent à un élastomère particulier, en l'occurrence un polyuréthane. La première étape, objet de la première partie, consiste à caractériser le comportement mécanique du matériau afin d'en proposer un modèle simple. Ensuite, la deuxième partie présente les essais de propagation réalisés et les données qui peuvent en être extraites. Enfin, les champs mesurés au cours de la propagation sont brièvement présentés en troisième partie. Ce chapitre se concentre sur les données élémentaires nécessaires à l'analyse de la rupture : les données matériaux, les vitesses de fissures observables et les champs mécaniques classiques mesurés.

Sommaire

4.1	Modélisation du matériau	74
4.1.1	Caractérisation en grandes déformations	74
4.1.2	Rôle de la vitesse de sollicitation	76
4.1.3	Modèle hyperélastique	80
4.2	Observation de la propagation des fissures	82
4.2.1	Analyse d'un essai de propagation	82
4.2.2	Variation de la déformation initiale	84
4.3	Champs mesurés	88
4.3.1	Configurations mécaniques	89
4.3.2	Dérivées spatiales et temporelles	90
4.3.3	Précision des mesures	93

4.1 Modélisation du matériau

Le matériau de l'étude est un polyuréthane commercial dont les monomères sont un polyéther et le TDI (diisocyanate de toluène). Avec une dureté de 80 Shore A, il fait partie des formulations les plus raides utilisées industriellement. Sa masse volumique, mesurée par double pesée, est de 1044 kg.m^{-3} . Ces quelques grandeurs sont complétées par une caractérisation mécanique en vue de proposer un modèle.

4.1.1 Caractérisation en grandes déformations

Traction uniaxiale

L'élongation à rupture de cet élastomère est très élevée (supérieure à $\lambda = 9$). Le maintien d'une éprouvette haltère classique dans les mors est une vraie gageure. Des mors autobloquants sont indispensables pour atteindre quelques centaines de % de déformation, mais l'éprouvette finit toujours par glisser. La meilleure solution consiste à découper une éprouvette de traction (type haltère) dans l'éprouvette PS afin de profiter des bourrelets (cf Fig. 3.1). Le suivi de la déformation pose aussi des difficultés pratiques : un extensomètre à pince, même spécialement prévu pour les grandes déformations, finit par glisser. La méthode la plus fiable s'avère être le suivi optique de l'essai de traction avec une caméra. La déformation est mesurée sur chaque image par l'écartement entre des repères à la surface de l'éprouvette, visibles sur la Figure 4.1. L'essai est piloté en déplacement, à une

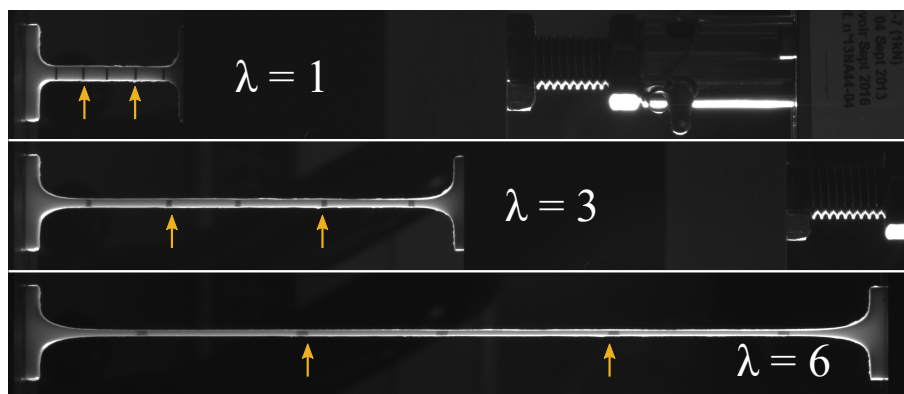


FIGURE 4.1 – Epreuve de traction dans ses mors pour trois niveaux de déformation. Les flèches indiquent la position de deux repères tracés sur la surface de l'éprouvette.

vitesse supposée suffisamment faible pour s'affranchir des effets de vitesse de chargement (20 mm/min). Le protocole retenu est le suivant :

- Découpe d'une éprouvette au jet d'eau en conservant les bourrelets et utilisation des mors correspondants ;
- Essai de traction sur une machine électromécanique Instron 5584 pilotée en déplacement à 20 mm/min ;
- Mesure de l'effort avec une cellule 1 kN ;
- Enregistrement de l'essai avec une caméra à haute résolution AVT Prosilica GT 6600 (29 Mpix), couplée avec la machine de traction pour connaître l'effort exact à chaque image ;
- Mesure de l'élongation par suivi du marquage de l'éprouvette.

La Figure 4.2 présente la courbe de traction obtenue, tracée en contrainte nominale (Piola-Kirchhoff 1). L'incertitude sur la mesure de l'élongation augmente en valeur absolue

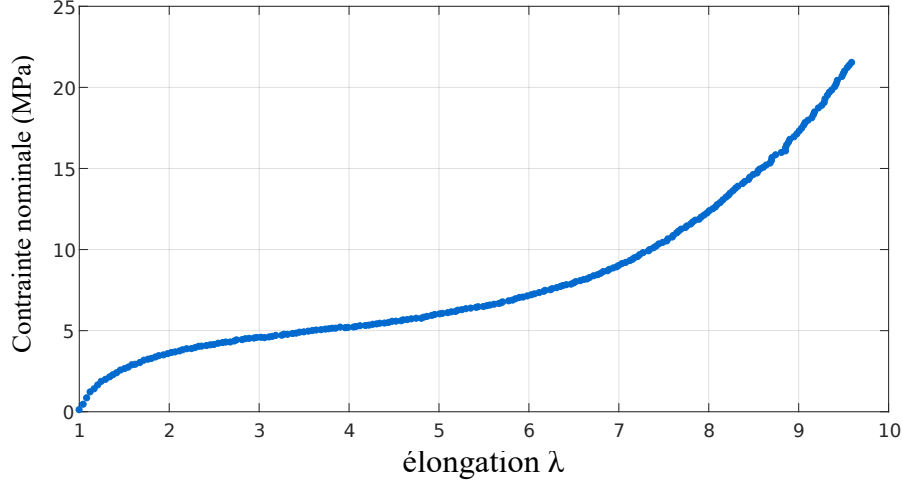


FIGURE 4.2 – Courbe de traction en contraente nominale. Pilotage en déplacement à vitesse constante (20 mm/min)

au cours de l'essai, mais reste inférieure à 0,08 en valeur absolue. L'incertitude sur la contraente provient principalement de l'incertitude sur la section de l'éprouvette et vaut environ 3%. On retrouve le comportement classique d'un élastomère tel que présenté au paragraphe 2.1.1.

Cisaillement pur

Les éprouvettes de cisaillement pur conçues pour observer la propagation peuvent aussi être utilisées pour caractériser le comportement du matériau, en plus des essais de traction. La tension des éprouvettes est suivie par corrélation d'images (cf § 3.2.1), ce qui permet de mesurer l'état de déformation de la zone utile précisément. La Figure 4.3 rassemble quelques exemples des champs de déformation mesurés. La corrélation d'images

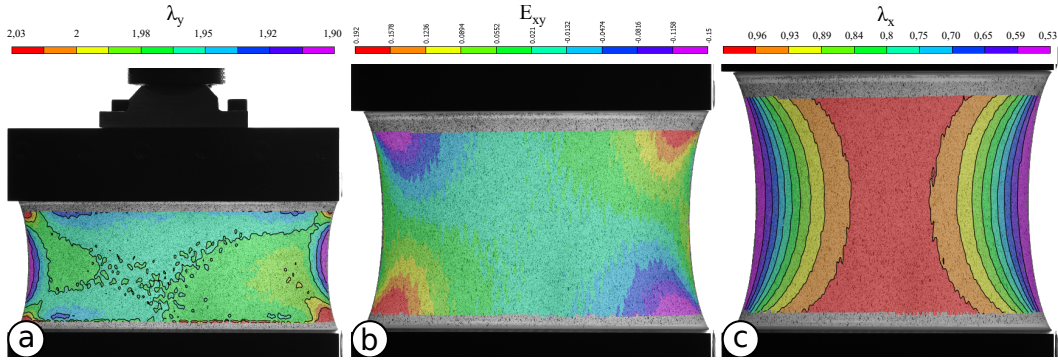


FIGURE 4.3 – Corrélation d'images au cours de la charge de l'éprouvette. (a) Élongation principale maximale (correspondant à l'élongation verticale au centre). (b) Tenseur de Green-Lagrange, composante E_{xy} (élongation $\lambda_y = 3$). (c) Élongation principale minimale, $\lambda_y = 3,82$.

permet d'abord de mesurer la déformation verticale réelle de l'éprouvette et son homogénéité. La Fig.4.3(a) donne l'élongation principale maximale (majoritairement suivant la verticale) pour une élongation globale imposée de 2. La valeur moyenne au centre est légèrement inférieure à 2 du fait de la déformation de la partie de l'éprouvette initialement

masquée par les mors (visible de part et d'autre de la zone de mesure de champs). Les effets de bords sont identifiables, à l'image du cisaillement aux coins de l'éprouvette (Fig.4.3(b)). La corrélation d'images fonctionne toujours à haut niveau de déformation, malgré la perte de quelques points de mesure. La Fig.4.3(c) correspond au plus haut niveau de chargement testé (λ imposé de 4).

La courbe obtenue pour l'essai de cisaillement pur jusqu'au plus haut niveau de déformation est présentée sur la Figure 4.4(a). Cependant, du fait des bords libres, l'éprouvette

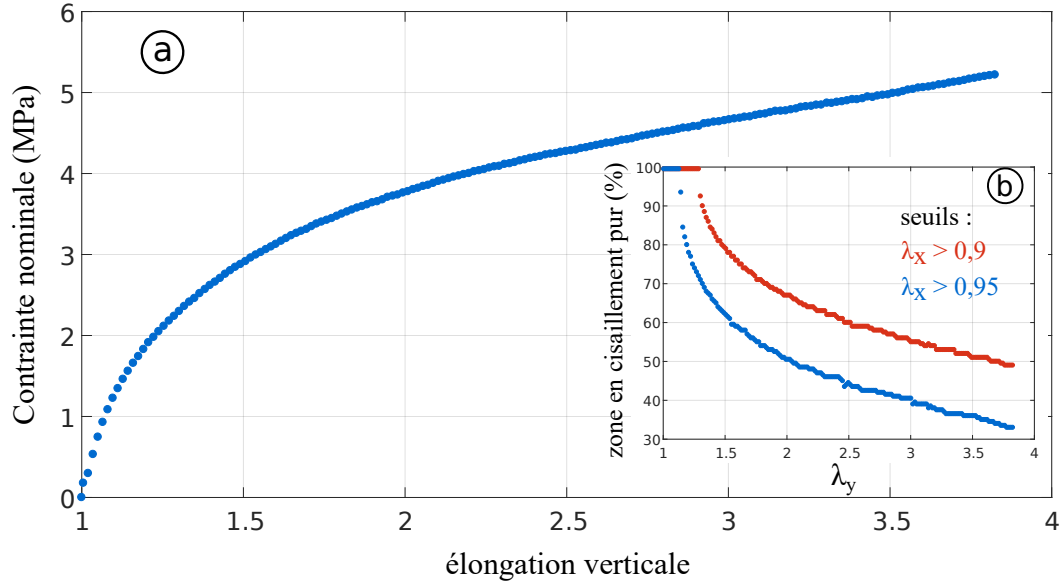


FIGURE 4.4 – (a) Courbe contrainte-élongation lors d'un essai de cisaillement pur. L'élongation est mesurée au centre de l'éprouvette. (b) Evolution de la longueur de la ligne médiane de l'éprouvette sur laquelle λ_x est supérieure à 0,95 ou 0,9. Longueur mesurée dans la configuration de référence et exprimée en pourcentage de la longueur totale de l'éprouvette.

ne peut pas être considérée en cisaillement pur sur toute sa largeur : la condition $\lambda_x = 1$ ne se retrouve qu'au centre, et cette zone diminue avec la déformation. La Fig.4.3(c) donne la seconde élongation principale dans le plan (majoritairement horizontale) pour une élongation verticale au centre $\lambda_y = 3,82$: on passe bien du cisaillement pur au centre ($\lambda_x \approx 1$) à la traction uniaxiale au bord ($\lambda_x \approx 1/\sqrt{\lambda_y} = 0,51$). L'observation de la déformation de la ligne médiane de l'éprouvette permet de quantifier cet éloignement de l'état de cisaillement pur. On assimile alors la « zone de cisaillement pur » au dépassement d'un seuil d'élongation horizontale. La Fig.4.4(b) donne l'évolution de la longueur de cette zone mesurée dans la configuration de référence, en proportion de la longueur initiale. On constate que cette zone diminue rapidement avec l'élongation verticale imposée : pour $\lambda_y = 2$, seul 50% de la longueur de l'éprouvette respecte $\lambda_x > 0,95$.

4.1.2 Rôle de la vitesse de sollicitation

Traction uniaxiale à vitesse de déformation constante

Les essais précédents sont réalisés en imposant une vitesse de traverse constante et suffisamment faible pour considérer l'essai quasi-statique. Ces essais correspondent aux conditions de charge de l'éprouvette avant rupture, mais ils ne sont pas représentatifs

des hautes vitesses de déformation atteintes localement au cours de la propagation de la fissure. Une approche consiste donc à faire des essais de traction à vitesse de déformation vraie constante (Petiteau *et al.*, 2013).

En traction, imposer une vitesse de déformation vraie constante revient à imposer la composante longitudinale du tenseur taux de déformation $\mathbf{D}$. Dans ce cas, cette composante vaut :

$$D_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}, \quad (4.1)$$

avec λ l'élongation selon la direction de chargement. Pour imposer une vitesse de déformation α , il faut donc imposer une évolution temporelle de l'élongation de la forme :

$$\lambda = e^{\alpha t}. \quad (4.2)$$

En pratique, la machine de traction utilisée est pilotée en réglant la vitesse de déplacement de la traverse en fonction de sa position. En notant l_0 la longueur initiale de l'éprouvette et u_t le déplacement de la traverse, l'essai est réalisé en imposant la relation :

$$u_t = l_0(e^{\alpha t} - 1). \quad (4.3)$$

Le logiciel de pilotage impose une approximation linéaire par morceaux de cette relation. Sur la machine électromécanique Instron 5584, la vitesse de déplacement de la traverse est limitée à 900 mm/min, ce qui limite la vitesse de déformation atteignable à un taux de déformation donné (longueur utile des éprouvettes : 30 mm). Augmenter la vitesse du déplacement de la traverse requiert un montage expérimental dédié, à l'image de celui développé par Petiteau *et al.* (2013). Trois essais sont donc réalisés, correspondant à des vitesses de déformation de $0,08 \text{ s}^{-1}$, $0,01 \text{ s}^{-1}$ et $0,001 \text{ s}^{-1}$. Ces trois essais balayent au mieux deux ordres de grandeurs de vitesse de déformation. L'évolution de l'élongation imposée au cours du temps est tracée sur la Figure 4.5(a). Les courbes de traction obtenues,

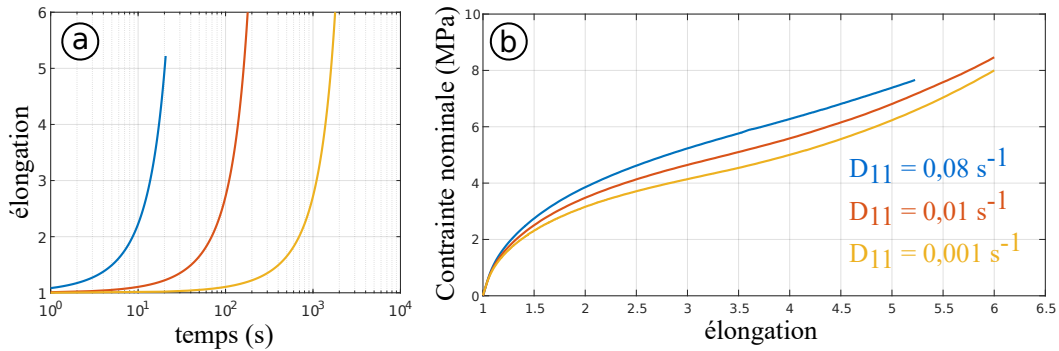


FIGURE 4.5 – (a) Evolution de l'élongation imposée au cours d'un essai de traction à vitesse de déformation constante. (b) Courbes de traction obtenues pour trois vitesses de déformation, $0,08 \text{ s}^{-1}$, $0,01 \text{ s}^{-1}$ et $0,001 \text{ s}^{-1}$.

tracées Figure 4.5(b), illustrent le raidissement du matériau avec la vitesse de déformation. Pour ces faibles vitesses de déformation, l'impact reste faible. Les vitesses de déformation observées lors de la propagation sont plus élevées de plusieurs ordres de grandeurs (jusqu'à $1\,000 \text{ s}^{-1}$). Le comportement en grandes déformations à ces vitesses ne peut pas être évalué expérimentalement dans cette étude.

L'essai à $0,001 \text{ s}^{-1}$ constitue néanmoins une bonne mesure du comportement quasi-statique du matériau. En supposant les effets viscoélastiques négligeables à cette faible vitesse, il fournit une mesure fiable de la densité d'énergie de déformation stockée de manière élastique au cours de la déformation.

Analyse mécanique dynamique

L'analyse mécanique dynamique (DMA) est couramment utilisée pour caractériser le comportement viscoélastique des élastomères. On rappelle brièvement son principe. La DMA est mise en œuvre dans le cadre des petites déformations. Un échantillon est sollicité dans une configuration particulière (ici de la traction) par un chargement sinusoïdal en déplacement de la forme :

$$d(t) = d_{\text{stat}} + d_{\text{dyn}} \sin(2\pi ft). \quad (4.4)$$

La réponse dynamique de l'échantillon est mesurée en force et modélisée par un modèle de Kelvin-Voigt sous la forme $F(t) = F_{\text{stat}} + F_{\text{dyn}} \sin(2\pi ft + \delta)$. Les oscillations sont dites forcées et entretenues. En viscoélasticité linéaire, la réponse dynamique peut être divisée en une partie réelle (dite « de conservation ») et une partie imaginaire (dite « de perte »). Le rapport de la force dynamique sur le déplacement dynamique donne la raideur dynamique $E_{\text{dyn}} = F_{\text{dyn}}/D_{\text{dyn}}$ pour une fréquence et une température données. Cette raideur est le module de la raideur complexe : $E_{\text{dyn}} = ||E' + iE''||$. La mesure de l'angle de perte δ permet d'accéder au facteur de perte $\eta = \tan \delta$, qui est représentatif de la proportion d'énergie dissipée sous forme de chaleur ($\eta = E''/E'$). Ces grandeurs mécaniques dépendent de la fréquence de sollicitation et de la température. L'équivalence temps-température (Williams *et al.*, 1955) permet d'établir une courbe maîtresse du matériau (évolution du module avec la fréquence) : le balayage d'une petite gamme de fréquences à différentes températures permet de retrouver le comportement sur une large gamme de fréquences, inaccessible en pratique.

La DMA a été mise en œuvre dans cette étude pour le tracé de la courbe maîtresse du matériau en traction. Le Tableau 4.1 regroupe les principaux paramètres de l'essai permettant la reconstitution de cette courbe à partir d'une loi WLF (Williams *et al.*, 1955). La courbe maîtresse est représentée Figure 4.6. On retrouve sur cette courbe le

Chargement	traction
Eprouvette	$25 \times 3 \times 3 \text{ mm}^3$
Déformation statique	3%
Déformation dynamique	0,1%
Balayage en température	-78 ° C à 20 ° C
Balayage en fréquence	1 Hz à 100 Hz

TABLE 4.1 – Paramètres des essais de DMA.

comportement classique d'un élastomère, avec un module d'environ 10 MPa sur le plateau caoutchoutique et tendant vers 10 GPa sur le plateau vitreux (cf § 2.1.1). Un balayage en température permet de situer la température de transition vitreuse aux alentours de -55 ° C. Le matériau est donc bien utilisé dans son domaine caoutchoutique, assez loin de sa T_g .

La Figure 4.7 montre l'évolution du facteur de perte avec la fréquence de sollicitation. Ce facteur de perte présente un maximum pour une fréquence ω_0 d'environ 10^9 Hz. Les essais de DMA sont habituellement exploités en fréquence, qui est le paramètre expérimental contrôlable. Cependant, le lien entre ce comportement « fréquentiel » et la vitesse de déformation, a fortiori en grandes déformations, n'est pas évident. Par ailleurs, le chargement sinusoïdal de l'éprouvette implique une vitesse de déformation variable. Cette fréquence caractéristique autorise cependant quelques calculs en ordre de grandeur : suivant l'analyse de la propagation de fissure dans un matériau viscoélastique (De Gennes (1996) et Persson et Brener (2005), cf. § 2.2.2), le maximum de dissipation due à la viscosité se

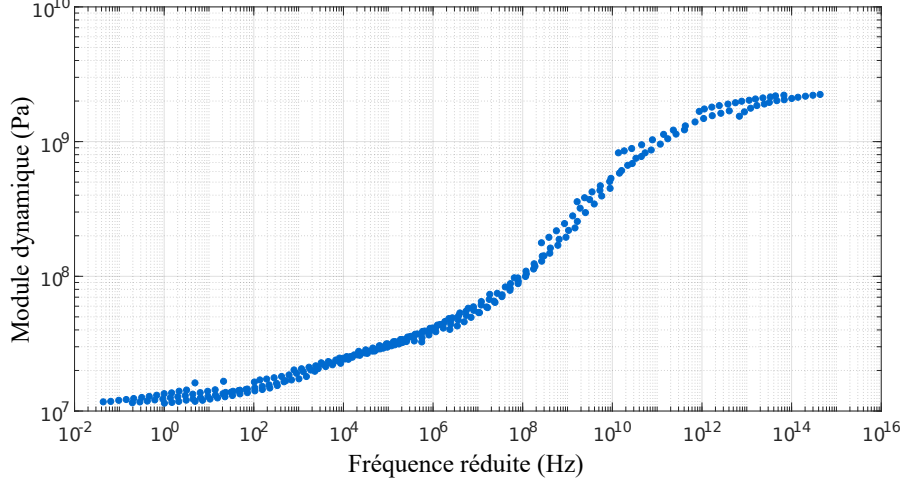


FIGURE 4.6 – Evolution du module dynamique du matériau en fonction de la fréquence. Courbe établie en traction sous 3% de déformation statique et 0,1% de déformation dynamique.

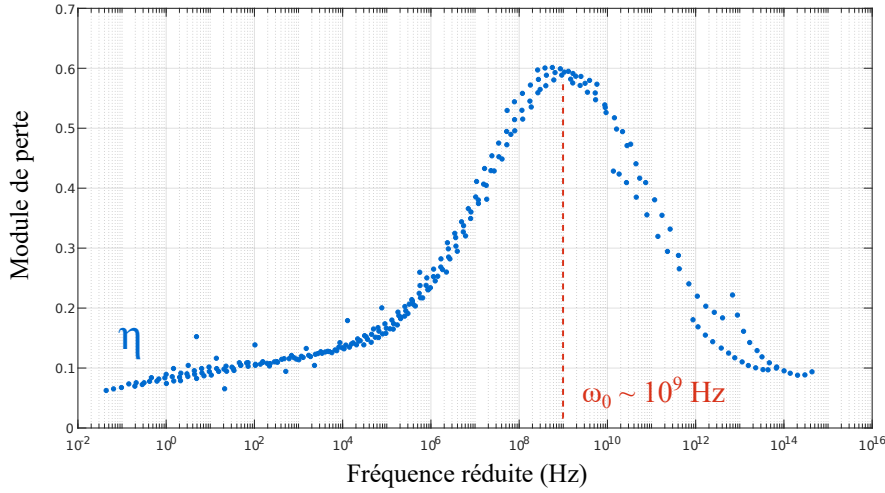


FIGURE 4.7 – Evolution du facteur de perte en fonction de la fréquence. Courbe établie en traction sous 3% de déformation statique et 0,1% de déformation dynamique.

situé à une distance $r \approx c/\omega_0$ de la pointe de fissure, avec c la vitesse de propagation. Dans notre étude, les plus hautes vitesses observées sont de l'ordre de 100 m.s^{-1} , ce qui place la zone de dissipation maximale à $r_0 \approx 10^{-7} \text{ m}$. En prenant le début de la zone de transition vitreuse, $\omega = 10^5 \text{ Hz}$ par exemple, le rayon correspondant n'est que de 1 mm, soit hors de la zone de corrélation d'images de nos essais. Cette approche en ordre de grandeur indique que la dissipation due à la viscoélasticité du matériau reste confinée au voisinage immédiat de la pointe. Cette contribution à la dissipation d'énergie peut donc être intégrée à l'énergie de rupture Γ , conservant l'hypothèse d'autonomie des champs en pointe de fissure. De plus, cette hypothèse permet d'éviter de modéliser ce comportement viscoélastique du matériau, ce qui par ailleurs serait très difficile : l'identification d'un tel modèle requiert beaucoup d'essais complexes au regard des déformations et des taux de déformation envisagés (Petiteau *et al.*, 2013). Nous faisons donc le choix d'un modèle hyperélastique qui ne prendra pas en compte cette dissipation visqueuse.

4.1.3 Modèle hyperélastique

L'identification de loi de comportement hyperélastiques se fait généralement en quasi-statique, ou à des vitesses suffisamment faibles pour limiter l'impact du taux de déformation. La prise en compte du raidissement du matériau avec le taux de déformation, autre effet macroscopique de la viscoélasticité, reste un défi expérimental, en particulier en grandes déformations. Par exemple, Niemczura et Ravi-Chandar (2011) ont identifié un modèle pour les hautes vitesses de déformation à partir de l'observation des ondes de traction générées par un impact (canon à gaz) dans une bande de caoutchouc. Ne pouvant identifier de telles lois de comportement, nous nous concentrons sur l'identification d'un modèle simple en quasi-statique. Sans raidissement, le modèle ne pourra donner qu'une valeur approchée des contraintes à haute vitesse. En revanche, la densité d'énergie de déformation identifiée en quasi-statique fournit une bonne estimation de l'énergie stockée de manière élastique (c'est à dire réversible) au cours de la déformation. Les objectifs du modèle sont donc :

- Reproduire correctement le comportement en traction en grande déformation, car c'est l'état de déformation dominant en pointe de fissure ;
- Fournir une bonne estimation des contraintes et de la répartition d'énergie élastique dans la membrane en cisaillement pur (avant rupture).

L'identification des paramètres est faite à partir de la courbe en traction la plus proche du cas quasi-statique, soit celle à vitesse de déformation imposée à $0,001 \text{ s}^{-1}$. En parallèle, les modèles sont identifiés avec les essais de cisaillement pur. Comme précisé au paragraphe 4.1.1, l'hypothèse d'état de déformation homogène correspondant à du cisaillement pur ne peut pas être maintenue tout au long de la tension des éprouvettes PS (Fig.4.4(b)). Un compromis est trouvé en identifiant les paramètres matériau sur l'essai de traction jusqu'à $\lambda = 6$ et sur l'essai de cisaillement pur jusqu'à $\lambda = 2$. On suppose le matériau incompressible. Dans ces conditions, le meilleur modèle trouvé est celui d'Ogden avec $N=2$ termes (Eq.2.24) (le modèle d'Ogden à 3 termes donne des résultats similaires, mais avec deux paramètres supplémentaires). Les résultats de l'identification sont présentés sur la Figure 4.8. Le modèle de Mooney-Rivlin (Eq.2.23) est aussi identifié, bien que

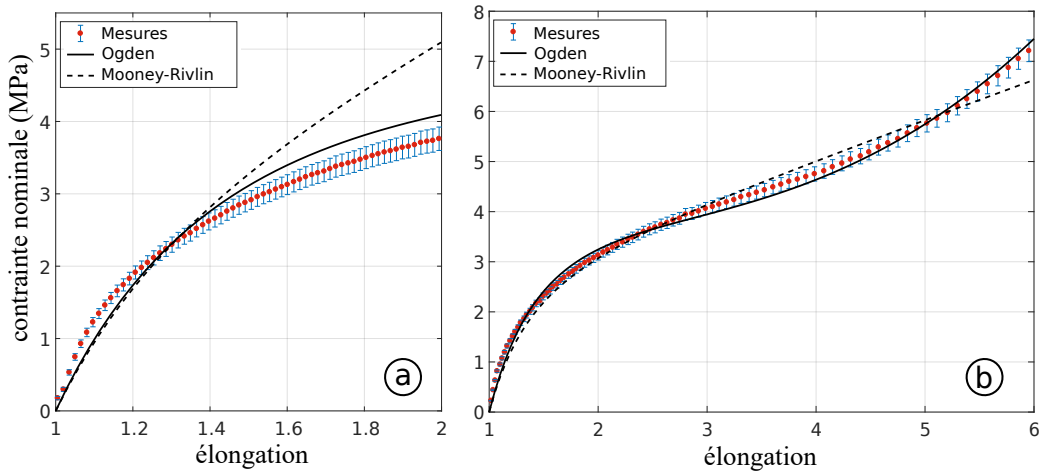


FIGURE 4.8 – Identification des lois de comportement en (a) cisaillement pur et (b) traction uniaxiale à vitesse de déformation constante ($0,001 \text{ s}^{-1}$).

moins performant, pour pouvoir utiliser la formule donnant la vitesse des ondes (Eq.(2.28)) telle qu'établie par Boulanger et Hayes (1992). Les deux modèles surestiment un peu les contraintes en cisaillement pur mais ils sont en revanche assez fidèles en traction. Le modèle de Mooney-Rivlin n'est pas assez fin pour reproduire les variations de raideur,

mais il reste prédictif pour de hauts niveaux de déformation ($\lambda \approx 5$), bien en-dehors de sa gamme d'utilisation habituelle. Le modèle d'Ogden possède plus de degrés de liberté, ce qui lui permet de reproduire le raidissement à partir de $\lambda \approx 4,5$. Les paramètres matériau identifiés sont rassemblés dans le Tableau 4.2.

Ogden	
μ_1 (MPa)	$4,82 \times 10^{-2}$
α_1	3,91
μ_2 (MPa)	2,80
α_2	0,27
Mooney-Rivlin	
C_{10} (MPa)	0,39
C_{01} (MPa)	0,97

TABLE 4.2 – Paramètres matériau des modèles hyperélastiques utilisés.

Une façon de valider les modèles choisis est d'utiliser la charge de l'éprouvette comme essai de structure : la corrélation d'images donne l'état de déformation de la membrane et la résultante des efforts est connue. On peut alors extraire l'état de déformation le long de la ligne médiane, discrétisée en 200 éléments, et la loi de comportement permet de calculer l'effort interne sur une petite surface orientée suivant la verticale :

$$d\vec{f} = \boldsymbol{\sigma} dse\vec{e}_2. \quad (4.5)$$

L'intégration de ces efforts sur toute la section de l'éprouvette correspond à la force appliquée au niveau des mors (charge quasi-statique). La Figure 4.9 présente la comparaison entre cette courbe de charge « reconstruite » et celle mesurée. Cette comparaison confirme

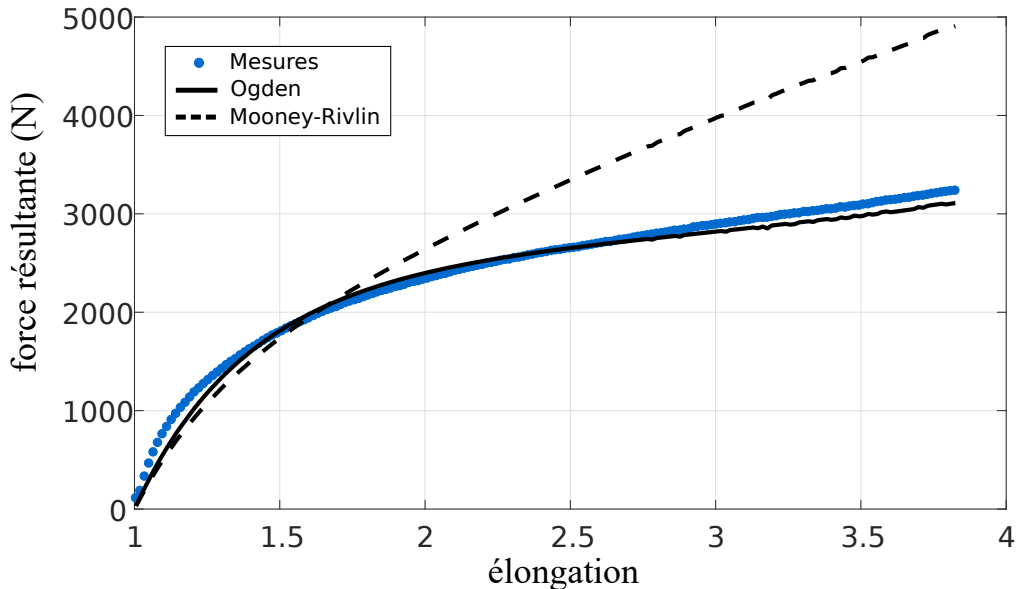


FIGURE 4.9 – Force mesurée au cours d'un essai de cisaillement pur et reconstruction de cette courbe à partir des modèles de comportement et du champ de déformation mesuré.

la capacité du modèle d'Ogden à prédire correctement le champ de contrainte pour des déformations allant de la traction uniaxiale au cisaillement pur. Ainsi, malgré une sous-estimation de la résultante pour $\lambda < 1,5$, l'effort total sur la structure est retrouvé à

50 N près. En revanche, le modèle de Mooney-Rivlin surestime fortement les contraintes en cisaillement pur.

4.2 Observation de la propagation des fissures

En-dehors de la mesure de champs, les essais de propagation réalisés selon le protocole présenté au chapitre 3 donnent déjà de nombreuses informations sur la rupture. Ces premières observations sont décrites ici, et permettent de préciser les méthodes d'analyse utilisées.

4.2.1 Analyse d'un essai de propagation

La propagation est amorcée par la découpe de l'éprouvette avec une lame. La lame est pilotée manuellement, ce qui ne permet pas de maîtriser la longueur découpée ni la vitesse d'avance (elles peuvent être mesurées a posteriori). Au bout d'une certaine longueur d'entaille, variable suivant les essais, la fissure accélère et se propage librement plus vite que la lame. Cet instant constitue le point de départ de la propagation qui nous intéresse.

Les essais sont caractérisés par l'élongation imposée à la membrane et l'essai à $\lambda = 2$ sert ici d'essai de référence pour la description qui suit. La Figure 4.10 présente quelques photos du film de cet essai. La propagation est régulière et sans à coups. Le bon contraste

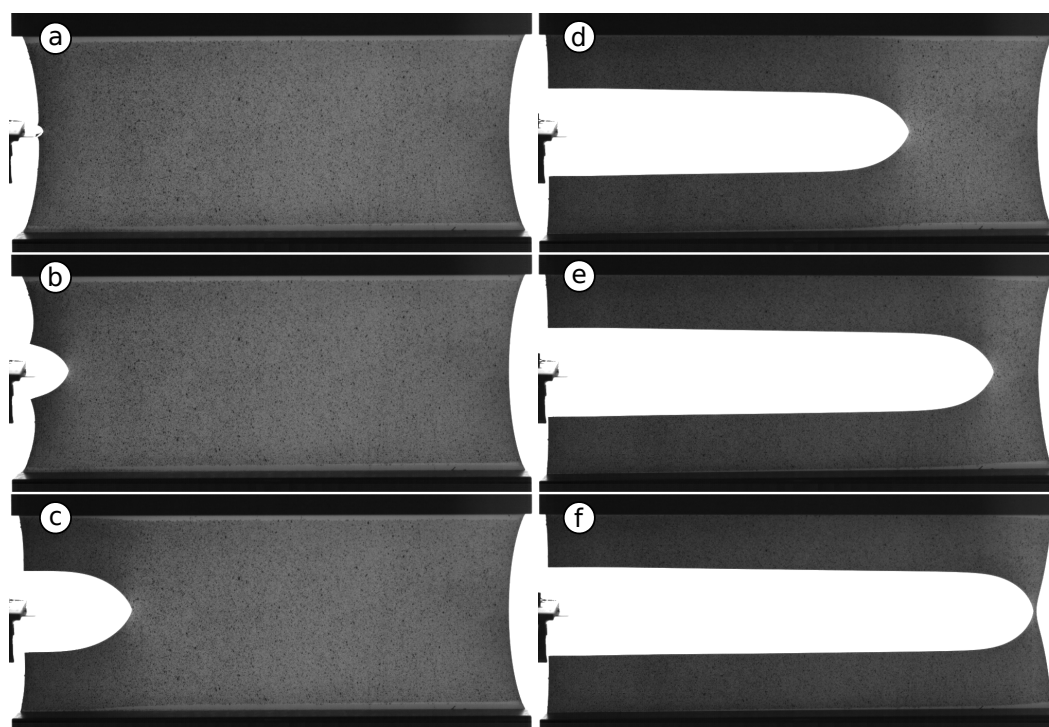


FIGURE 4.10 – Essai de propagation à $\lambda = 2$. (a) Début de la propagation libre de la fissure. (b) Phase d'accélération. (c - d) Début et fin approximatifs de la zone de propagation stationnaire. (e) Phase de décélération. (f) Dernière image exploitable.

permet de suivre la position de la pointe de la fissure par simple analyse d'images, à 1 pixel près ($\pm 0,2$ mm). La position de la pointe immédiatement visible correspond à sa position dans le référentiel du laboratoire. Pour obtenir la vitesse de la fissure par rapport à la matière, il faut s'affranchir des mouvements de la membrane (dus aux réflexions

d'onde par exemple) ou de sa déformation (en particulier proche du bord libre en fin de parcours). Une première approche consiste à mesurer l'évolution de la longueur restante de l'éprouvette : la différence avec la position d'amorçage de la propagation donne l'évolution de la distance parcourue par la fissure dans la configuration déformée de l'éprouvette. L'évolution temporelle de la distance parcourue est présentée sur la Figure 4.11(a). Cette

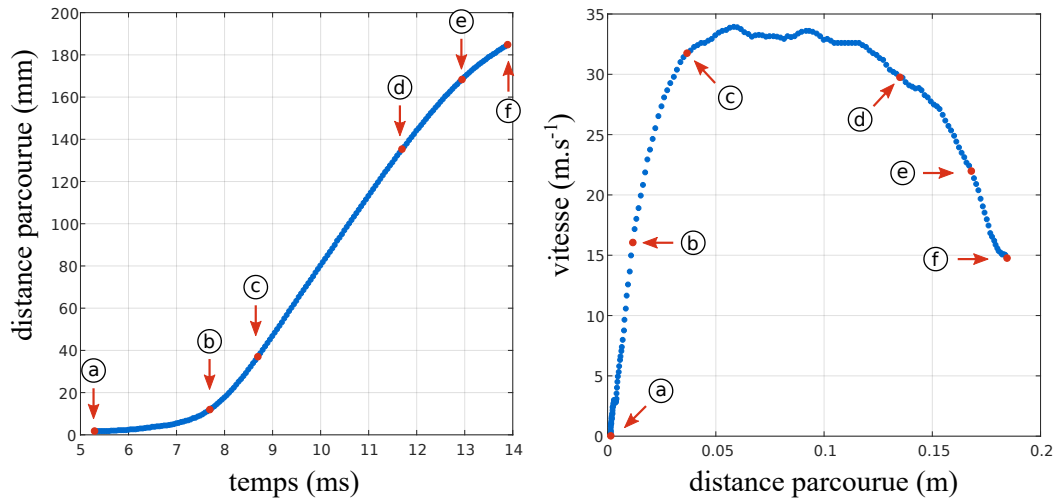


FIGURE 4.11 – Gauche : évolution de la distance parcourue par la fissure dans la configuration de référence au cours du temps. Droite : évolution de la vitesse de la fissure en fonction de la distance parcourue. Les lettres (a - f) font référence aux photos de la Figure 4.10.

longueur parcourue étant mesurée dans la configuration de référence, la fin de la propagation (éprouvette complètement rompue) intervient pour une distance inférieure à la longueur non-déformée de l'éprouvette (200 mm). On note que la distance parcourue dans la configuration déformée ne correspond pas exactement à la longueur instantanée de la fissure, paramètre qui dépend de l'état de déformation de l'éprouvette derrière la pointe et qui est difficilement mesurable. La connaissance de l'évolution temporelle de la distance parcourue permet de calculer la vitesse de propagation de la fissure par simple dérivation. L'application directe de la méthode des différences finies fournit des résultats très bruités car les positions successives de la pointe sont rapprochées (bonne résolution temporelle) et mesurées en nombre entier de pixels. La dérivation est effectuée au moyen de polynômes de degré 2 identifiés sur 7 points entourant le point d'intérêt. Cette méthode permet une mesure de la vitesse à moins de $0,4 \text{ m.s}^{-1}$ près (écart type maximal pour la prise en compte de 5 à 13 points).

Chaque propagation suit le même schéma tel que montré sur la Figure 4.11 : la fissure accélère pour atteindre une vitesse stabilisée puis ralentit sur la fin de son parcours. On retrouve donc une propagation que l'on peut qualifier de stationnaire au centre de l'éprouvette. Pour cet essai, elle correspond approximativement à la distance entre les points (c) et (d) sur la Fig. 4.11 ; un fit linéaire sur cette zone fournit une valeur de vitesse stabilisée de $32,8 \text{ m.s}^{-1}$, utile pour comparer les essais entre eux. La répétabilité des essais a été testée notamment pour une elongation imposée de 3. La Figure 4.12 donne l'évolution de la vitesse au cours de la distance parcourue pour trois essais réalisés à la suite, illustrant la fiabilité des courbes obtenues dans le cas général (une propagation atypique est évoquée au paragraphe 4.2.2). La vitesse de la lame est mesurée a posteriori sur les vidéos. Malgré le pilotage manuel, sa vitesse est comprise entre $0,3$ et $0,7 \text{ m.s}^{-1}$ et ne semble pas avoir d'influence sur la propagation libre de la fissure.

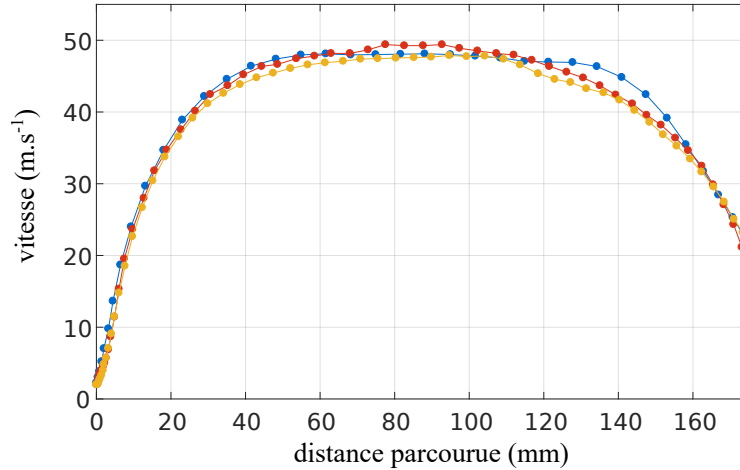


FIGURE 4.12 – Répétabilité des essais : évolution de la vitesse de propagation de la fissure pour trois essais à élongation imposée $\lambda = 3$.

4.2.2 Variation de la déformation initiale

Résultats principaux

Le paramètre de contrôle naturel des essais de propagation de fissure est l'élongation imposée. Pour une élongation de 1,25 la fissure ne se propage pas : l'éprouvette peut être entaillée sur une grande longueur, cette entaille restera inchangée. La propagation s'amorce pour une élongation imposée de 1,5 (1,46 mesuré). L'élongation minimale pour observer une propagation dynamique n'a pas pu être déterminée plus précisément que l'encadrement $[1,25 - 1,46]$.

Des essais de propagation sont réalisés en imposant des élongations de 1,5 à 4. La Figure 4.13 présente l'allure de la fissure lorsqu'elle atteint le milieu de l'éprouvette pour une série d'essais, c'est-à-dire au cours de la propagation stationnaire. Au-delà d'un certain niveau de déformation (ou d'une certaine vitesse de propagation), la membrane se comprime après le passage de la fissure, sous l'effet de sa vitesse de rétraction (Fig.4.13(c)). A plus haut niveau de déformation, cette contraction entraîne le flambement de la membrane (Fig.4.13(d-e)). La Figure 4.14 illustre ces mouvements hors-plan qui empêchent toute corrélation d'images. Dans ce cas, la mesure de champs ne peut se faire que devant la pointe de fissure. La vitesse de propagation est mesurée pour chacun de ces essais. La Figure 4.15 présente quelques courbes obtenues. Pour faciliter la comparaison, la vitesse de propagation de la fissure est tracée en fonction du ratio distance parcourue sur distance totale parcourue (ou largeur initiale de la membrane déformée). On observe à chaque fois la présence d'un plateau correspondant à une propagation stationnaire. Les trois étapes (accélération, plateau et décélération) sont bien présentes. L'essai à $\lambda = 1,5$ semble faire exception en conservant une vitesse constante jusqu'au bout : cet effet est potentiellement dû au manque de précision des mesures à l'extrémité de l'éprouvette et à la petite taille de la zone de décélération. La vitesse stationnaire augmente avec le niveau de déformation de la membrane, comme attendu au regard des travaux similaires (Gent et Marteny, 1982a; Petersan *et al.*, 2004). La longueur de parcours sur laquelle la propagation peut être considérée comme stationnaire diminue aussi avec l'élongation imposée.

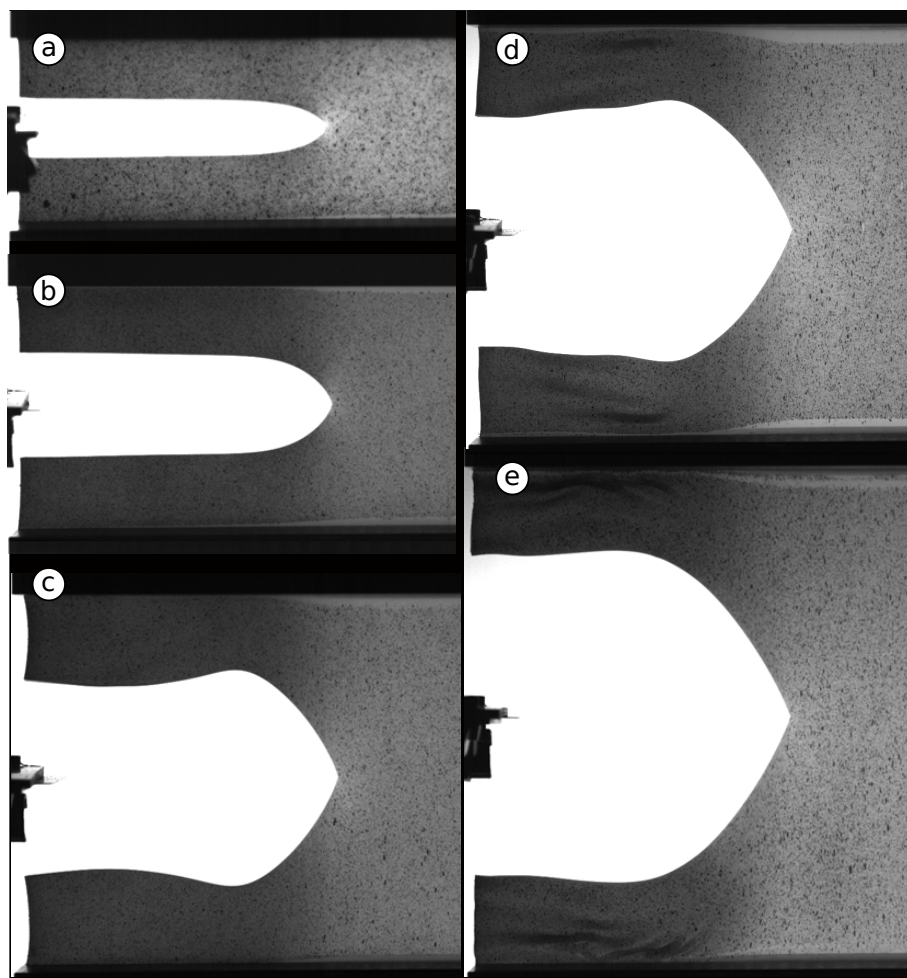


FIGURE 4.13 – Allure de la fissure au cours de la propagation stationnaire, pour des niveaux d'élongation mesurés de (a) 1,46, (b) 1,94, (c) 2,89, (d) 3,35 et (e) 3,84. Les vitesses de propagation correspondantes sont (a) 4,71, (b) 32,8, (c) 51,4, (d) 54,9 et (e) 57,3 m.s⁻¹.

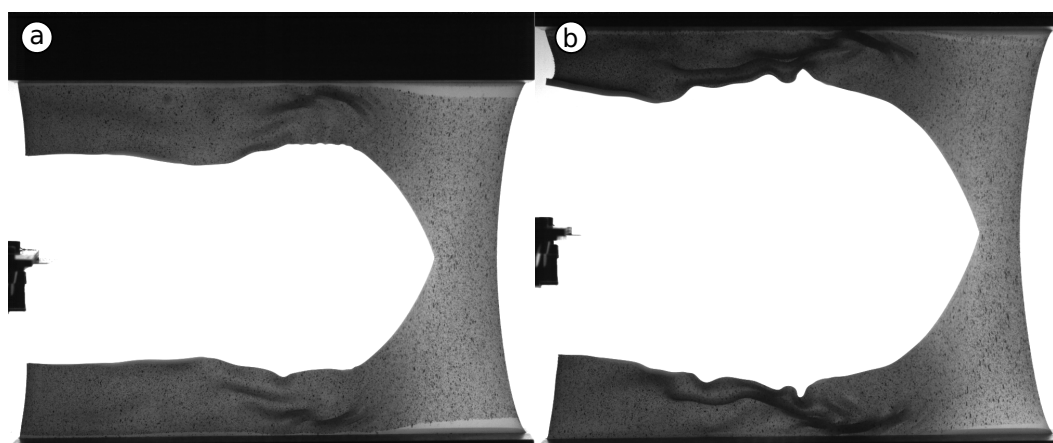


FIGURE 4.14 – Flambement de la membrane au cours des essais à (a) $\lambda = 3,35$ et (b) $\lambda = 3,84$.

Ensemble des essais réalisés

En pratique, deux campagnes d'essais sont réalisées, en dehors de la mise au point du dispositif expérimental. Un essai est identifié par son élongation imposée globalement

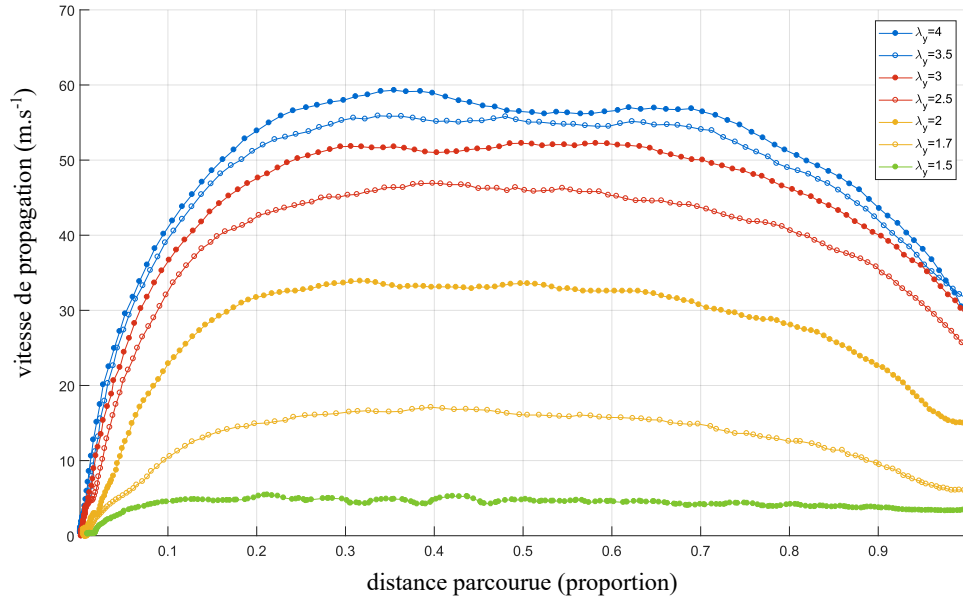


FIGURE 4.15 – Vitesse de propagation instantanée de la fissure en fonction de la distance parcourue (en proportion de la distance totale parcourue dans la configuration de référence). Les elongations précisées sont celles imposées globalement à l'éprouvette et qui servent à identifier l'essai.

(λ_{obj}). Les Tableaux 4.3 et 4.4 rassemblent l'essentiel des paramètres du dispositif (fréquence d'acquisition de la caméra rapide, vitesse d'obturation...) pour chaque essai, ainsi que deux mesures caractéristiques : l'elongation verticale (λ_y) mesurée au centre par corrélation d'images et la vitesse stabilisée (vitesse dans la zone de propagation stationnaire, notée c_{sta} par la suite). Les deux campagnes d'essais diffèrent principalement par le lot

Campagne 1			
Réception :	11/2016	Essais :	01/2017
Caméra HS :	Photron SA1.1	Caméra HR :	AVT Prosilica GT 6600
Vitesse d'obturation :	$1/f_{HS}$ (s)		
Objectifs (HS et HR) :	Zeiss 2/100 ZF (L1-6)		
Machine :	Instron 5584	Traction :	20 mm/min
λ_{obj}	f_{HS} (Hz)	λ_y	c_{sta} (m.s ⁻¹)
1,5	7500	1,46	5,1
1,75	9000	1,70	8,2
2 (a)	6000	1,83	17,4
2 (b)	12000	1,95	26,9
2,5	12500	2,34	38,3
3	10000	2,90	46,5
3,5	86400	3,38	50,7

TABLE 4.3 – Paramètres et résultats globaux de la première campagne d'essais. On note que seul 1 essai à $\lambda_{obj} = 3$ est présenté (contre 3 sur Fig.4.12) car les autres ont rencontré des problèmes d'enregistrement de l'étape de charge (donc DIC impossible). L'essai à $\lambda_{obj} = 3,5$ a été réalisé deux fois : l'un avec un fenêtrage horizontal pour mesurer la vitesse de propagation et l'autre avec un fenêtrage vertical pour mesurer la déformation. Cette ligne agrège donc ces deux mesures distinctes.

matière et le temps de stockage entre la production des éprouvettes et la réalisation des

Campagne 2				
Réception :	04/2017	Essais :	08/2017	
Caméra HS :	Photron SAZ	Caméra HR :	AVT Prosilica GT 6600	
Objectifs (HS et HR) :		Zeiss 2/100 ZF (L1-6)		
Machine :	Instron 5584	Traction :	20 mm/min	
λ_{obj}	f_{HS} (Hz)	Obturation (s)	λ_y	c_{sta} (m.s ⁻¹)
1,5	10000	1/100000	1,46	4,71
1,7	15000	1/100000	1,65	15,7
1,85	20000	1/100000	1,81	13,9
2 (a)	20000	1/133000	1,95	35,7
2 (b)	20000	1/160000	1,94	32,8
2,5 (a)	25000	1/160000	2,46	42,2
2,5 (b)	25000	1/160000	2,41	45,4
3	25000	1/200000	2,89	51,4
3,5	25000	1/200000	3,35	55,0
4	25000	1/200000	3,83	57,3

TABLE 4.4 – Paramètres et résultats globaux de la deuxième campagne d’essais. Les vitesses d’obturation ont été considérablement augmentées par rapport à la campagne 1, réduisant le flou autour de la pointe de fissure. On note que la qualité des images pour les essais 2(a) et 2,5(a) n’a pas permis de réaliser la corrélation d’images (problème d’éclairage). Certaines courbes de vitesse sont tracées sur la Fig.4.15.

essais. La deuxième campagne a bénéficié d’une caméra rapide plus performante, ce qui a permis d’augmenter la fréquence d’acquisition pour une même résolution. Les illustrations des résultats présentés jusqu’ici proviennent de la deuxième campagne (exceptée la répétition de l’essai à $\lambda = 3$, Fig.4.12).

La plupart des essais se déroulent comme présenté dans le paragraphe précédent, et comme l’illustre la série de courbes de vitesse de la campagne 1 représentées sur la Figure 4.16 ; on retrouve bien les allures observées sur la Fig.4.15 pour la campagne 2. On note toutefois une propagation un peu atypique pour l’essai 2(a) de la campagne 2 : la fissure semble décélérer en cours de propagation, comme l’illustre la Figure 4.17, la vitesse stabilisée n’est alors mesurée que sur la première partie du parcours. L’origine de ce changement de vitesse n’est pas connue (éprouvette visuellement identique, champ de déformation homogène...). En ne considérant que la vitesse stabilisée, on peut rassembler les résultats sur un seul graphique présenté sur la Figure 4.18. Ces différences semblent avoir un impact sur la rupture, à l’image du petit écart entre les deux séries. Néanmoins le comportement global est identique : la vitesse de propagation stabilisée augmente fortement avec l’élongation entre $\lambda = 1,5$ et $\lambda = 2$, puis l’augmentation se fait plus lente. Ce type d’évolution est similaire à celui observé par Gent et Marteny (1982a) sur le caoutchouc naturel (cf. Fig.2.10 pour $\lambda_x = 1$).

Les essais décrits dans cette partie sont les essais standards pour lesquels le dispositif expérimental a été développé. Quelques essais atypiques ont pu être réalisés en modifiant légèrement le protocole expérimental. Ils seront présentés au chapitre 5.

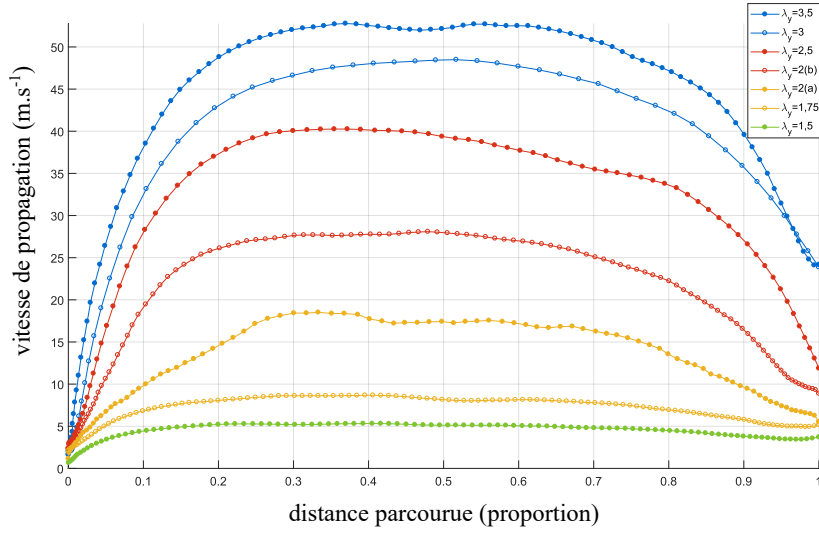


FIGURE 4.16 – Vitesse de propagation instantanée de la fissure au cours de la distance parcourue dans la configuration initiale. Ces courbes sont issues de la première campagne d’essai. (cf. Tableau 4.3)

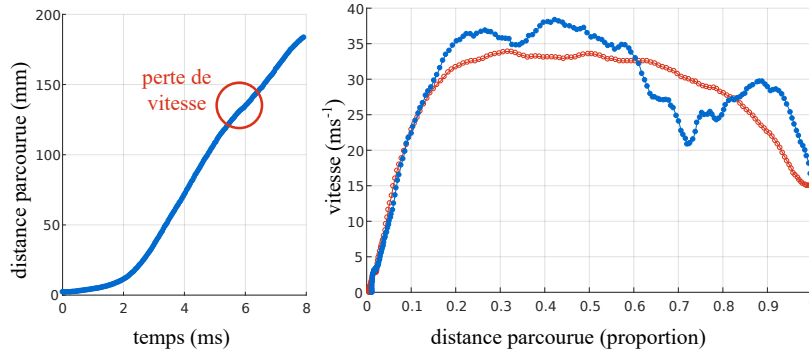


FIGURE 4.17 – Essai à $\lambda_{obj} = 2(a)$ de la campagne 2 (en bleu), comparé à droite avec l’essai à $\lambda_{obj} = 2(b)$ (en rouge). La perte de vitesse autour de 6 ms (70% de la distance parcourue) ne présente pas d’explication évidente.

4.3 Champs mesurés

Les meilleurs résultats de corrélation d’images ont été obtenue au cours de la deuxième campagne d’essai (images de meilleure qualité). On présente ici les résultats « bruts » de la corrélation d’images, c’est-à-dire les principaux champs mesurés et quelques observations sur leur obtention, les analyses détaillées de ces champs sont l’objet des chapitres 5 et 6. Ces résultats sont illustrés sur l’essai à $\lambda_{obj} = 2(b)$ de la deuxième campagne (voir 4.4). Cet essai est choisi comme essai de référence, car il présente à la fois une bonne précision des champs (zone de flou réduite, peu de perte de points de corrélation d’images...) et une vitesse de propagation de fissure suffisamment élevée pour révéler les aspects dynamiques du problème. On rappelle ici que l’élongation mesurée de cet essai est $\lambda = 1,94$ et la vitesse stationnaire de la fissure est de $32,8 \pm 0,5 \text{ m.s}^{-1}$.

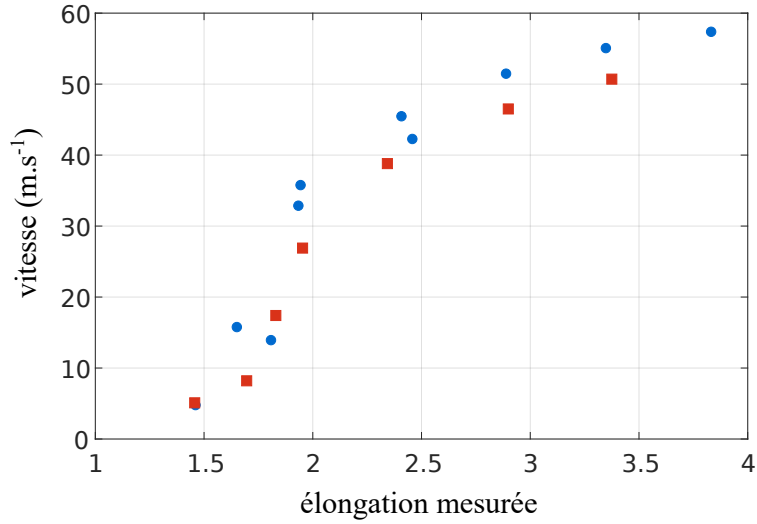


FIGURE 4.18 – Vitesse de propagation stabilisée en fonction de l'élongation verticale initiale de la membrane mesurée par corrélation d'images. Les carrés rouges correspondent à la campagne 1 et les points bleus à la campagne 2.

4.3.1 Configurations mécaniques

La méthode s'appuie en premier lieu sur la mesure du champ de déplacement. La projection des mesures de corrélation d'images présentée au chapitre 3 permet de le connaître tout au long de la propagation. La Figure 4.19(a) présente le champ de déplacement horizontal dans la configuration déformée. La connaissance du champ de déplacement

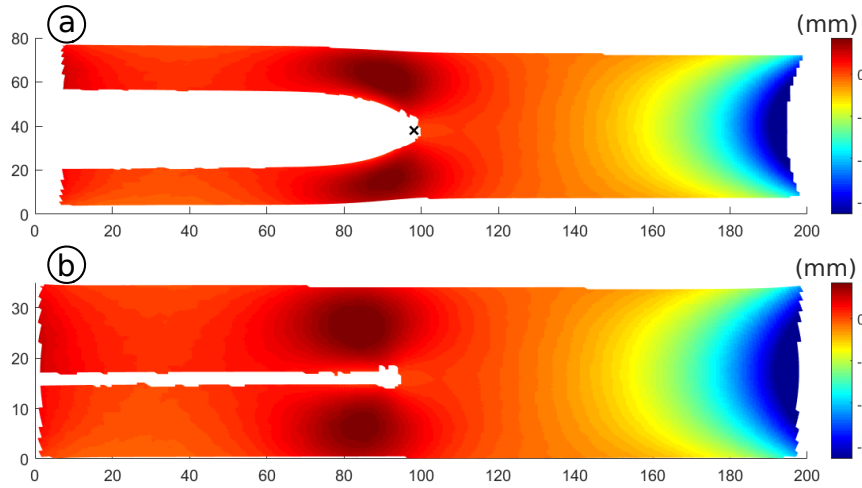


FIGURE 4.19 – (a) Champ de déplacement horizontal dans la configuration déformée. la croix noire indique la position de la pointe de fissure identifiée sur les images. (b) Champ de déplacement horizontal dans la configuration non-déformée. Les axes sont gradués en mm.

permet de calculer la position initiale (théorique) de chaque point du maillage de corrélation d'images. Les champs peuvent alors être tracés dans la configuration de référence de l'éprouvette, comme sur la Figure 4.19(b). On retrouve alors la géométrie non-déformée de l'éprouvette, c'est-à-dire ses dimensions initiales de $200 \times 40 \text{ mm}^2$. Plus exactement, on retrouve l'éprouvette dans son état non-déformé en présence d'une fissure, ce qui est une

modification de la configuration de référence. En pratique, sauf mention contraire, le terme « configuration de référence » désignera cette configuration non-déformée dans la suite de cette étude. La connaissance de cet état permet une étude du problème de rupture du point de vue lagrangien, point de vue généralement retenu en mécanique de la rupture (Freund (1998) ou Gurtin et Yatomi (1980), par exemple).

La corrélation d'images ne fonctionne pas aux abords immédiats de la pointe de fissure. Cette zone sans données change à chaque image et sa taille augmente avec la vitesse de propagation. Elle est de l'ordre de 2 mm dans le cas de l'essai de référence ($\lambda_{\text{obj}} = 2(b)$). La Figure 4.20 illustre cette perte d'information en superposant le champ de déplacement vertical à l'image de la caméra HS. Cette perte de données le long de la

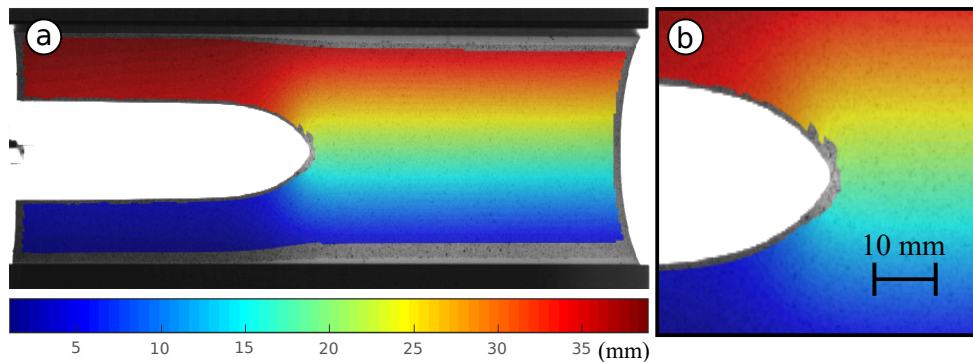


FIGURE 4.20 – (a) Champ de déplacement vertical superposé à l'image du film HS correspondante. (b) Zoom sur la zone autour de la pointe de fissure.

propagation de la fissure se matérialise par une ligne blanche épaisse dans la configuration de référence (Fig.4.19(b)). La corrélation d'images est effectuée par rapport à la première image de chaque essai, avant l'amorçage d'une fissure. Certains points perdus autour de la pointe de fissure, à cause du flou notamment, peuvent donc être retrouvés une fois la fissure passée. C'est ce qui explique la finesse relative de la ligne blanche sur la Fig.4.19(b) par rapport à la zone sans données autour de la pointe. On note que de l'information est aussi perdue sur le pourtour de l'éprouvette (Fig.4.20(a)). La prise de l'éprouvette dans les mors masque une bande de 1,75 mm de hauteur sur toute la longueur de l'éprouvette. Une fois déformée, cette bande correspond à la zone mouchetée en dehors du champ de déplacement visible sur la Fig.4.20(a) (le long des bords longs). Par ailleurs, le liseré blanc le long des mors provient de la déformation des bourrelets (non-mouchetés).

4.3.2 Dérivées spatiales et temporelles

Champ de vitesse

Les hautes fréquences d'acquisition de la caméra rapide assurent une bonne discrétisation temporelle des champs mesurés. Comme pour le calcul de la vitesse instantanée de la pointe de fissure, il est possible de suivre l'évolution temporelle du déplacement à chaque nœud du maillage. Pour calculer la dérivée, on utilise la même méthode que pour le calcul de la vitesse de la fissure : on identifie un polynôme de degré 2 sur sept positions autour de la position à l'instant considéré, et ce sur les deux axes. Les dérivées premières de ces polynômes fournissent les vitesses horizontales et verticales instantanées. La Figure 4.21 montre ces deux champs pour une fissure se propageant à $33,1 \text{ m.s}^{-1}$. Cette méthode per-

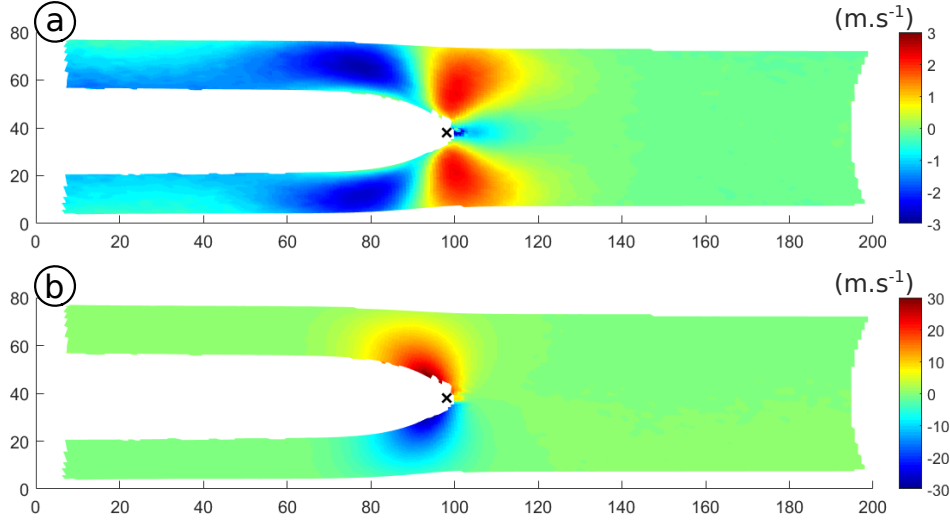


FIGURE 4.21 – Champ de vitesse (a) horizontale et (b) verticale dans la configuration déformée. Vitesse instantanée de la fissure : $33,1 \text{ m.s}^{-1}$.

met de visualiser aussi bien les grandes vitesses de rétraction de la membrane derrière la pointe (Fig.4.21(b)) que les mouvements horizontaux plus lents (Fig.4.21(a)).

Champ de déformation

Connaissant la configuration de référence, les champs de déformation peuvent être calculés par éléments finis, les nœuds du maillage correspondant aux points de corrélation d'images. A titre d'exemple, la Figure 4.22 montre les trois composantes du tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$. En associant les dérivations spatiales et temporelles,

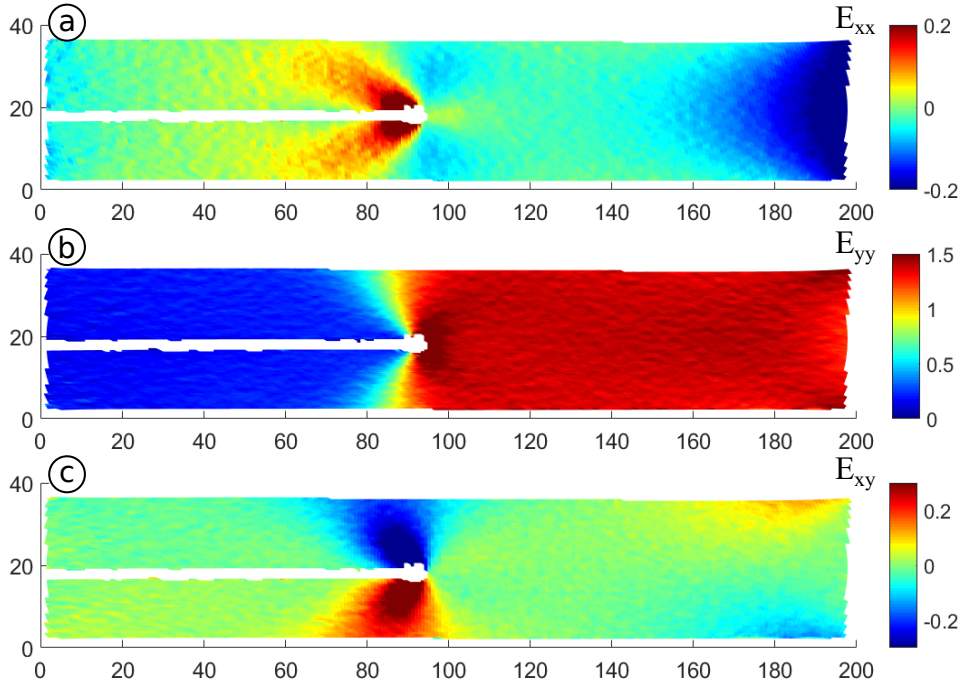


FIGURE 4.22 – Composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange dans la configuration non-déformée. Vitesse instantanée de la fissure $33,1 \text{ m.s}^{-1}$

ont peut calculer le tenseur taux de déformation qui s'exprime par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T \right). \quad (4.6)$$

En pratique, ces deux traitements successifs donnent des résultats assez bruités, comme le montre la Figure 4.23. En l'état, ils ne permettent pas de réaliser des analyses quantitatives avec une précision satisfaisante. Néanmoins, la Fig.4.23 illustre qualitativement les grandes

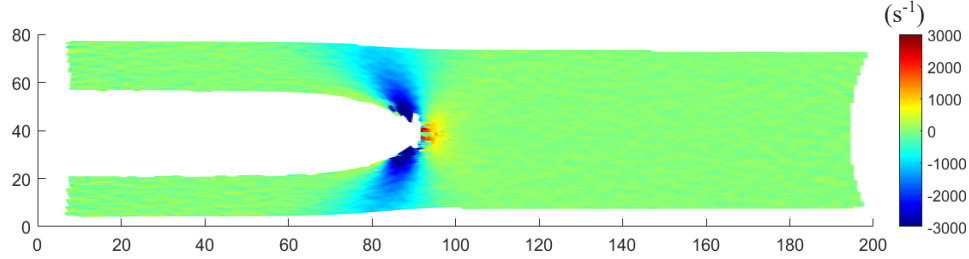


FIGURE 4.23 – Composante verticale du tenseur taux de déformation D_{yy} dans la configuration déformée.

vitesses de déformation que subit la matière, en particulier dans la zone de rétraction rapide de la membrane. Ces taux de déformation de l'ordre de 2000 s^{-1} autour de la pointe de fissure compromettent l'identification d'une loi de comportement pertinente pour la prise en compte de leur influence sur la raideur du matériau.

Champs d'énergie

Le champ de vitesse et l'incompressibilité du matériau permettent de calculer simplement la densité volumique d'énergie cinétique. Ce champ est présenté sur la Figure 4.24(a) pour la même image que le champ de vitesse (Fig.4.21). Comme attendu, l'essentiel de

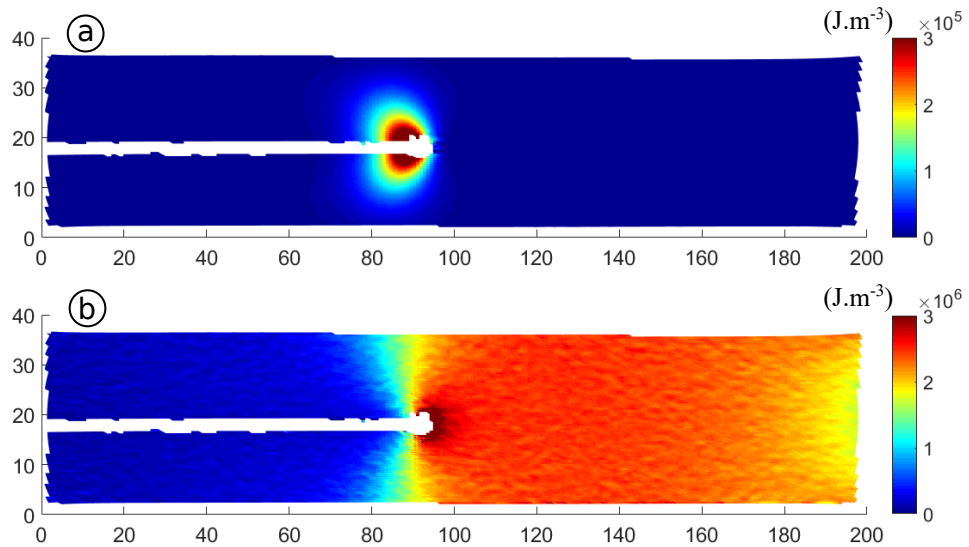


FIGURE 4.24 – Champ de (a) densité d'énergie cinétique et (b) de densité d'énergie élastique dans la configuration non-déformée. La vitesse de la fissure est de $33,1 \text{ m.s}^{-1}$.

l'énergie cinétique du système est concentrée là où se rétractent les lèvres de la fissure.

En parallèle, on peut calculer la densité d'énergie élastique stockée, grâce à loi de comportement identifiée en quasi-statique (cf. § 4.1.3). L'incompressibilité du matériau assure l'égalité entre la densité d'énergie élastique par unité de volume dans la configuration de référence W (donnée par la loi de comportement hyperélastique) et dans la configuration déformée w . La Fig.4.24(a) et (b) indique immédiatement que l'énergie cinétique ne représente qu'une faible part de l'énergie stockée localement (environ 10% autour de la pointe dans ce cas), malgré des vitesses de l'ordre de 30 m.s^{-1} . L'analyse énergétique du complète fera l'objet du chapitre 6

4.3.3 Précision des mesures

Les mesures de champ dépendent en premier lieu des déplacements calculés par le logiciel de corrélation d'images. Pour estimer la précision de ces mesures, le logiciel fournit un intervalle de confiance pour la position de chaque nœud. Pour la caméra HS, cet intervalle varie beaucoup sur une même image, de $4 \times 10^{-3} \text{ mm}$ loin de la pointe à 10^{-2} mm juste autour (pour l'essai à $\lambda_{\text{obj}} = 2$). Cependant, la connaissance de cette incertitude ne suffit pas à estimer l'incertitude finale du champ de déformation. En effet, cette incertitude « globale » dépend des incertitudes sur la position des nœuds dans la dernière image de la caméra HR, de celle des nœuds dans l'image courante et de l'erreur introduite par la projection. Il nous est donc difficile de proposer une estimation fiable de l'incertitude sur le champ de déformation. Au contraire, la précision du champ de vitesse peut être estimée, en première approximation, par le bruit observé lorsque l'éprouvette n'est pas en mouvement (avant le début de la propagation). Avec cette technique, la précision de la mesure de vitesse est de l'ordre de $0,05 \text{ m.s}^{-1}$.

En plus de la précision intrinsèque des mesures de champ, le dispositif expérimental est incapable de fournir des informations à moins de 2 mm de la pointe de fissure (Fig.4.20 par exemple). La taille de cette zone aveugle augmente avec l'élongation initiale de la membrane, et ce pour trois raisons principales. D'abord, la déformation dans le plan est très importante en pointe de fissure, ce qui affine la membrane : la quantité de lumière qui passe augmente jusqu'à éblouir la caméra. Ensuite, juste devant la pointe de fissure, les hauts niveaux de déformation (et les forts gradients) compliquent la corrélation, en particulier avec la proximité des lèvres (bords libres). Enfin, juste après la pointe, les lèvres se rétractent suffisamment vite pour flouter localement l'image et éjecter une partie du mouchetis.

Bilan

Ce chapitre clôt la seconde partie de ce mémoire, consacrée à la présentation de la méthode et des résultats expérimentaux bruts. Ce chapitre a démontré le bon fonctionnement du dispositif expérimental présenté au chapitre 3 et précise les limites. Tout d'abord, le dispositif permet l'observation de fissures se propageant sur gamme de vitesse intéressante : de 5 m.s^{-1} à plus de 50 m.s^{-1} . Le premier apport de ce dispositif est l'observation de fissures avec une bonne résolution temporelle, permettant un suivi précis de la pointe de fissure et de sa vitesse. Ces essais sont conçus pour obtenir une propagation de fissure stationnaire, afin de se placer dans les conditions usuelles d'études de rupture dynamique. Néanmoins, les parties instationnaires sont accessibles et font même parties intégrantes de l'essai. Le second apport est bien entendu la mesure de champs au cours de la propagation de la fissure. Le suivi de l'essai complet entraîne une perte de précision de la

mesure près de la pointe, par rapport à une mise au point sur une petite partie de l'éprouvette. Néanmoins, la visualisation de l'ensemble de la zone utile est ici privilégiée, afin de souligner les aspects dynamiques à cette échelle (mouvements hors plan, vitesse horizontale) et l'évolution des champs autour de la pointe dans différentes situations (accélération ou régime stationnaire). La mesure des champs cinématiques ne fait intervenir que peu d'hypothèses. En revanche, l'estimation des contraintes et de la densité d'énergie élastique nécessite une loi de comportement. Le modèle retenu assure une bonne représentation du comportement en traction uniaxiale et cisaillement pur quasi-statique. Devant les grandes vitesses de déformation présentes durant l'essai, le choix d'un modèle simple et robuste apparaît le plus raisonnable, malgré le biais introduit vis-à-vis de la dynamique des phénomènes. Ces mesures ont permis la construction d'une base de données détaillée sur ce type de propagation, se rapprochant des données habituellement obtenues en simulation numérique. La partie suivante proposera une analyse des phénomènes de rupture à partir de cette base de données. En parallèle de l'introduction de méthodes de post-traitement spécifiques, elle constituera une discussion de certains aspects du problème de rupture dynamique des élastomères, à la lumière de ces nouvelles capacités d'observation.

Troisième partie

Analyses cinématiques et énergétiques

Chapitre 5

Analyse cinématique de la propagation

Ce premier chapitre d'analyse se concentre sur la vitesse de propagation de la fissure. Il s'attache en particulier aux spécificités de la cinématique des fissures observés dans cette étude. On précise d'abord les méthodes utilisées pour la mesure de la position de la pointe et la vitesse de la fissure dans les configurations déformées et non-déformées. Ces deux vitesses sont comparées entre elles et rapportées à la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans la membrane. Ces méthodes d'analyse cinématiques sont ensuite appliquées à des essais de propagation atypiques, faisant varier la vitesse ou la direction de propagation.

Sommaire

5.1	Vitesses d'une fissure	98
5.1.1	Éléments de cinématique	98
5.1.2	Vitesse dans la configuration de référence	99
5.1.3	Vitesse de fissure et célérité des ondes	102
5.2	Trajectoires de fissures complexes	105
5.2.1	Propagation non uniforme	106
5.2.2	Propagation non rectiligne	107

5.1 Vitesses d'une fissure

La vitesse de propagation de la fissure est le paramètre clé de l'étude de la rupture dynamique. Au premier abord, l'aspect visuel de la propagation d'une fissure suppose une définition naturelle de cette vitesse de propagation. Elle n'a d'ailleurs pas été définie précisément dans cette étude, mais simplement évoquée d'un point de vue pratique au paragraphe 4.2.1. Par la localisation précise et évidente de sa pointe, la vitesse de propagation d'une fissure est naturellement assimilée à la vitesse de sa pointe dans l'espace. Cette approche est néanmoins trompeuse. En effet, la propagation d'une fissure se rapproche de celle d'une onde dans un matériau : à chaque instant, la pointe de fissure est située au niveau d'un point matériel différent. La vitesse de propagation ne sera donc pas la même si l'on considère la fissure dans la configuration déformée ou dans la configuration de référence de l'éprouvette. On précise qu'aucune de ces vitesses ne correspond exactement à l'évolution temporelle de la position de la pointe (vue comme un point singulier) dans le référentiel du laboratoire.

5.1.1 Éléments de cinématique

La description cinématique d'un problème de mécanique des milieux continus a été brièvement présenté au paragraphe 2.1.2. On rappelle que la position à l'instant t de la particule initialement en $\vec{X}$ est donnée par la transformation $\vec{\chi}$ (Eq.(2.1)) :

$$\vec{x}(t) = \vec{\chi}(\vec{X}, t).$$

La séquence temporelle des positions d'un point matériel constitue sa trajectoire. On définit alors la vitesse de ce point matériel, appelée vitesse particulaire ou lagrangienne, par :

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{X}, t)}{\partial t}. \quad (5.1)$$

On envisage désormais une série de positions dans l'espace qui ne sont pas nécessairement reliées à un point matériel donné. Ces positions se réfèrent par exemple au parcours d'un front d'onde ou de la pointe d'une fissure. A chaque instant, la position considérée $\vec{z}(t)$ correspond à celle d'un point matériel particulier $\vec{Z}(t)$ (on identifie le point matériel par sa position dans la configuration de référence). Ces deux positions, l'une dans la configuration déformée et l'autre dans la configuration de référence, sont reliées à chaque instant par la relation Eq.(2.1), soit :

$$\vec{z}(t) = \vec{\chi}(\vec{Z}(t), t). \quad (5.2)$$

La dérivation temporelle de cette expression fournit :

$$\frac{\partial \vec{z}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{Z}, t)}{\partial \vec{Z}} \frac{\partial \vec{Z}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{Z}, t)}{\partial t}, \quad (5.3)$$

soit

$$\frac{\partial \vec{z}(t)}{\partial t} = \mathbf{F}(\vec{Z}, t) \frac{\partial \vec{Z}(t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{Z}, t) \quad (5.4)$$

en utilisant la définition du gradient de la transformation (2.2) et celle de la vitesse particulaire (5.1). L'équation (5.4) relie la vitesse du parcours dans la configuration déformée à celle dans la configuration de référence, à l'état de déformation local du solide et à son mouvement. En notant ces vitesses $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}_0$ respectivement, on obtient :

$$\vec{\omega} = \mathbf{F}\vec{\omega}_0 + \vec{v}. \quad (5.5)$$

A titre d'exemple, on considère une onde se propageant à la vitesse $\vec{\omega}$ suivant la direction propre de déformation $\vec{e}_x$ d'une membrane en traction biaxiale dans sa configuration déformée. Dans le cadre d'un problème plan, le gradient de la transformation s'écrit de manière générique dans sa base propre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

D'après l'Eq.(5.5), en l'absence de mouvement de la membrane ($\vec{v} = \vec{0}$), la vitesse de cette onde dans la configuration de référence est :

$$\vec{\omega}_0 = \frac{\vec{\omega}}{\lambda_x}. \quad (5.7)$$

On note cependant que l'Eq.(5.5) n'offre pas de solution lorsque $\mathbf{F}$ est singulier, comme c'est le cas en pointe de fissure : bien que les vitesses de la pointe dans les configurations déformée et non déformée soient finies, le champ de vitesse $\vec{v}$ diverge aussi en pointe de fissure.

5.1.2 Vitesse dans la configuration de référence

Rôle du déplacement en pointe de fissure

Une autre approche du problème consiste à décomposer le champ de déplacement. À un instant donné, la pointe de fissure se trouve au niveau du point matériel $\vec{Z}(t)$ dont la position $\vec{z}(t)$ dans la configuration déformée est :

$$\vec{z}(t) = \vec{Z}(t) + \vec{u}_c(\vec{Z}(t), t_0) + \vec{u}_p(\vec{Z}(t), t), \quad (5.8)$$

avec t_0 l'instant de l'amorçage de la fissure, $\vec{u}_c$ le déplacement dû à la tension de l'éprouvette ($t \leq t_0$) et $\vec{u}_p$ le déplacement induit par l'approche de la fissure ($t > t_0$). Cette décomposition est schématisée sur la Figure 5.1. Le raisonnement qui suit n'est valable que pour un problème plan, ce qui implique notamment une épaisseur constante de la membrane. En pratique, dans notre dispositif expérimental, la mesure de la position de la pointe de fissure est décorrélée de la mesure de champs. Le pixel identifié comme étant « en pointe de fissure » ne peut pas être rattaché à une mesure de déplacement car la corrélation d'images ne fonctionne pas au voisinage de la pointe de fissure (cf § 4.3.1). Par ailleurs, aucune expression analytique n'est connue pour le déplacement de la pointe d'une fissure en grandes déformations (et en dynamique) pour un matériau non-linéaire. D'après l'expérience, le déplacement juste devant la pointe de fissure est dirigé vers la pointe, comme l'indiquent la Fig.5.1(b) et la vitesse négative observée à cet endroit (cf. Fig.4.21(a)). Ce déplacement en pointe de fissure dépend de l'élongation initiale de la membrane (Goldman Boué *et al.*, 2015). La vitesse horizontale négative en pointe de fissure est aussi discutée en Annexe A. Néanmoins, ce déplacement $\vec{u}_p$ semble faible devant les variations spatiales des champs cinématiques (déplacement et déformation) avant la propagation. On fait donc l'hypothèse que l'on peut négliger ce déplacement pour mesurer $\vec{u}_c$. Cette hypothèse permet d'associer le point matériel en pointe de fissure avec celui occupant la même position spatiale dans la configuration à $t = t_0$, ce qui peut se traduire par la relation :

$$\vec{Z}(t) \approx \vec{z}(t) - \vec{u}_c(\vec{z}(t), t_0). \quad (5.9)$$

Dans le cas général, cette hypothèse n'est pas valide en présence de mouvements importants de la membrane en avant de la pointe (mouvements hors-plan, grands déplacements d'ensemble de la structure). Dans le cas des éprouvettes PS de cette étude, cette hypothèse perd de sa validité dans deux situations particulières :

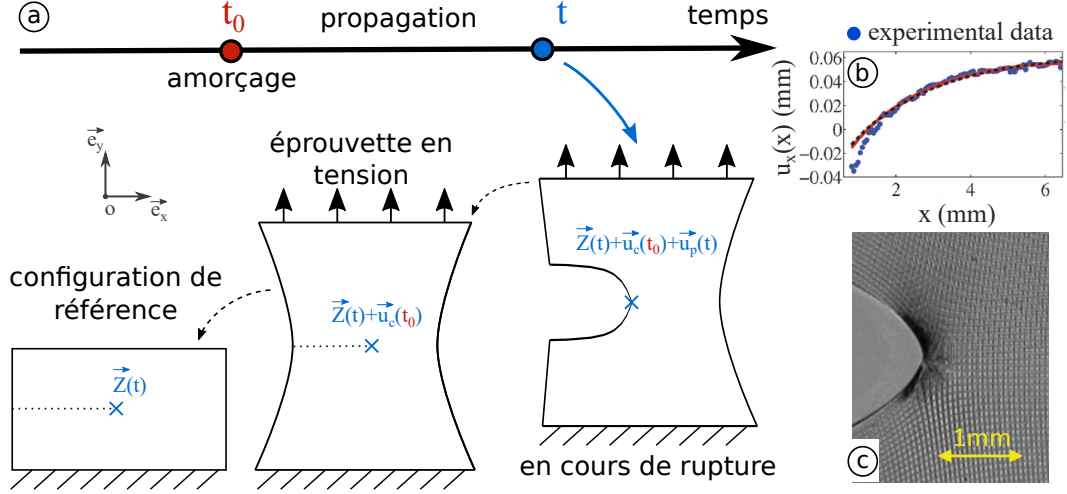


FIGURE 5.1 – (a) Déplacement de la pointe : à l’instant t la fissure se trouve au niveau du point matériel $\vec{Z}(t)$. La position de ce point dans la configuration courante correspond à sa position dans la configuration de référence plus le déplacement issu des étapes de tension de l’éprouvette ($\vec{u}_c$) et de propagation de la fissure ($\vec{u}_p$). (b-c) Mesures du déplacement en pointe d’une fissure dynamique par Goldman Boué *et al.* (2015) : (b) Déplacement $u_x(x)$ suivant x le long de la ligne horizontale en amont de la pointe de fissure (origine du graphique). Le déplacement est négatif à moins de 1 mm de la pointe. (c) Photo de la pointe de fissure et de la grille ayant permis les mesures du déplacement (b). Membrane tendue à $\lambda_y = 1,058$.

- Lorsque la propagation induit des mouvements de la membrane à cause des réflexions d’ondes (cas ne se produisant que pour les plus grandes déformations imposées) ;
- Lorsque la fissure est proche du bord libre : ce qu’il reste de l’éprouvette passe complètement en traction uniaxiale et se déforme donc beaucoup dans la direction l’horizontale (effet Poisson).

Mise en œuvre expérimentale

La mise en pratique de l’hypothèse précédente repose sur l’interpolation du champ de déplacement $\vec{u}_c$ à chacune des positions de la pointe de fissure mesurée sur les images de la propagation. La Figure 5.2(a) illustre cette méthode en superposant les positions de la pointe de fissure au champ de déplacement avant amorçage. Avec ces valeurs du déplacement, on calcule une position approchée de la pointe de fissure dans la configuration de référence, ce qui fournit l’évolution de la longueur de la fissure (soit la distance parcourue) dans la configuration de référence. Cette distance calculée à partir des déplacements est comparée à la distance parcourue dans la configuration déformée sur la Figure 5.2(b), courbes rouge et bleue respectivement. Comme attendu, on retrouve une longueur totale de fissure en fin de parcours proche de la longueur initiale de l’éprouvette (200 mm). La légère différence provient de l’absence de données de corrélation d’images aux extrémités de l’éprouvette et de l’imprécision de la méthode à proximité du second bord libre.

Ne pas prendre en compte le déplacement induit par la propagation revient à considérer la fissure comme la propagation d’une perturbation (importante) de la membrane déformée. Ce qui se déplace n’est pas seulement un point (la pointe de fissure) mais une

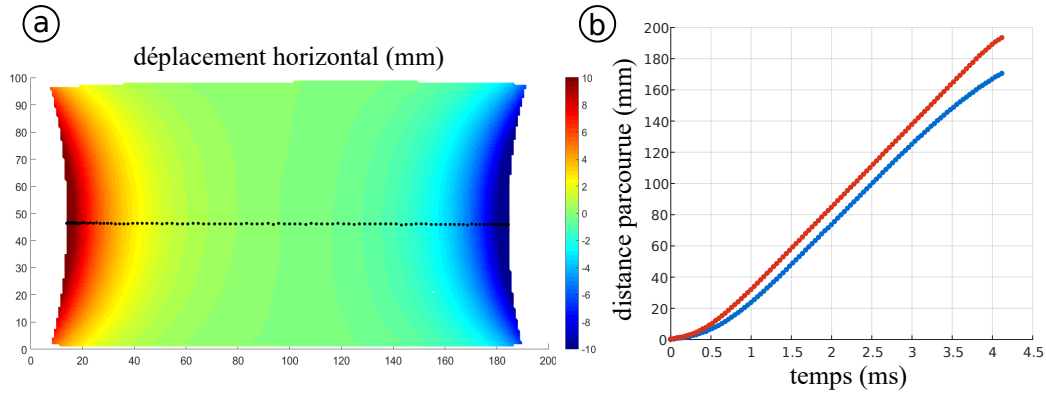


FIGURE 5.2 – (a) Champ de déplacement horizontal au moment de l’amorçage (dernière image avant apparition de l’entaille). Les points noirs correspondent aux positions successives de la pointe de fissure dans la suite de l’essai. (b) Distance parcourue dans la configuration déformée (bleu) et dans la configuration de référence (rouge). Essai $\lambda_{obj} = 3$ de la campagne 2.

modification de l’état de déformation dans la zone d’influence de la singularité : la zone dominée par un facteur d’intensité des contraintes, ce qui inclut le déplacement $\vec{u}_p$. On retrouve l’idée d’une onde se propageant dans une membrane, suggérant l’utilisation de l’Eq.(5.7) pour le calcul de la vitesse de la fissure dans la configuration de référence, notée c_0 : $c_0 = c/\lambda_x$. L’élongation horizontale issue de la tension de l’éprouvette est interpolée aux positions de la pointe de fissure, comme l’illustre la Figure 5.3. L’autre méthode

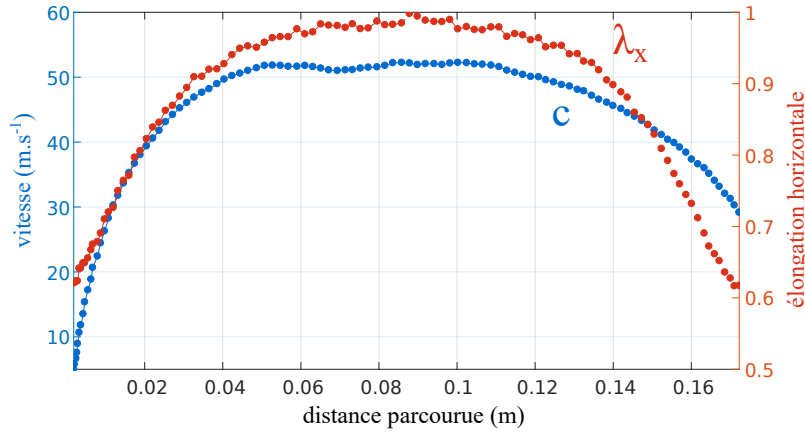


FIGURE 5.3 – Evolution de la vitesse de propagation et de l’élongation horizontale le long du parcours de la fissure dans la configuration déformée. Essai $\lambda_{obj} = 3$ de la campagne 2.

consiste à dériver la distance parcourue dans la configuration de référence. La Figure 5.4 présente l’évolution de c_0 avec la distance parcourue dans la configuration de référence. Ces deux méthodes s’avèrent équivalentes compte tenu de la précision des mesures ; on utilisera par la suite le ratio $c_0 = c/\lambda_x$. Comme indiqué plus haut, les vitesses mesurées près des bords libres sont sujettes à caution (voir la chute de vitesse en fin de parcours sur la Fig.5.4, courbes rouge et jaune). En effet, la mesure de vitesse est moins précise et la membrane s’est beaucoup déformée à cet endroit (perte de validité de l’hypothèse). La comparaison avec la vitesse de propagation dans la configuration non-déformée indique immédiatement le changement de comportement : dans la configuration de référence, la vitesse de propagation reste constante une fois le plateau atteint. La Figure 5.5 propose la

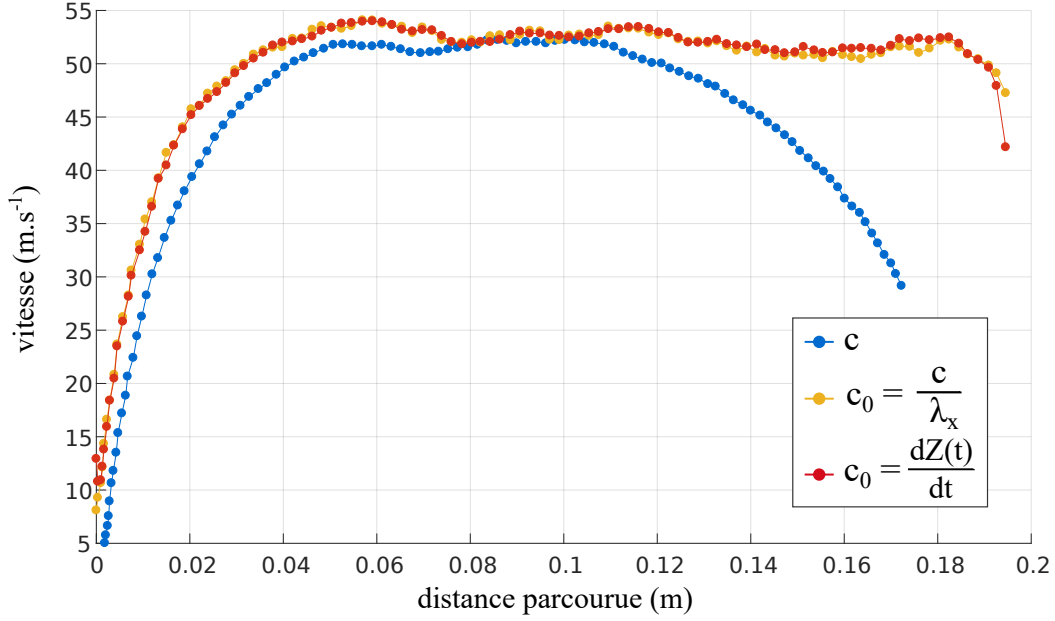


FIGURE 5.4 – Vitesse de propagation de la fissure dans la configuration déformée (bleu) et dans la configuration de référence (jaune et rouge) en fonction de la distance parcourue par la fissure dans leurs configuration respectives. Courbe jaune : $c_0 = c/\lambda_x$. Courbe rouge : dérivée temporelle de la distance parcourue dans la configuration de référence (cf. Fig.5.2). Essai : $\lambda_{obj} = 3$ de la campagne 2.

même comparaison pour une série d'essais : la conservation d'une vitesse stabilisée semble se vérifier pour les essais à grande vitesse. Pour les essais à faible λ_y , le passage dans la configuration de référence ne fait que limiter le ralentissement de la fissure. On note que la valeur de la vitesse stabilisée est similaire dans les deux configurations, car λ_x est proche de 1 au centre de l'éprouvette.

Pour compléter la discussion de ces résultats cinématiques, les vitesses des fissures peuvent être comparées aux vitesses de propagation des ondes dans le matériau.

5.1.3 Vitesse de fissure et célérité des ondes

La vitesse des ondes de cisaillement est calculée avec la relation dérivée par Boulanger et Hayes (1992) pour le modèle de Mooney-Rivlin, dont on rappelle ici l'expression (soit l'Eq.(2.28)) :

$$\rho c_s^2 = 2 \left(C_{10} \vec{n} \cdot \mathbf{B} \vec{n} + C_{01} \vec{a} \cdot \mathbf{B}^{-1} \vec{a} \right).$$

Cette expression fournit la vitesse des ondes dans la configuration déformée. L'extension de la méthode utilisée par ces auteurs au modèle d'Ogden n'est pas triviale. Pour des raisons de simplicité, on se contente de cette expression en utilisant les meilleurs paramètres (C_{10} , C_{01}) identifiés pour notre matériau (cf Tab.4.2). On considère les ondes de cisaillement se propageant dans les directions principales de déformation au centre de la membrane. On peut alors distinguer deux types d'ondes : celles se propageant suivant $\vec{e}_x$ et polarisées suivant $\vec{e}_y$, et celles se propageant suivant $\vec{e}_y$ et polarisées suivant $\vec{e}_x$. Il s'avère que leurs vitesses respectives, notées c_{xy} et c_{yx} , sont identiques dans la configuration de référence. En effet, avec le gradient de la transformation de la forme Eq.(5.6), le tenseur de Cauchy-

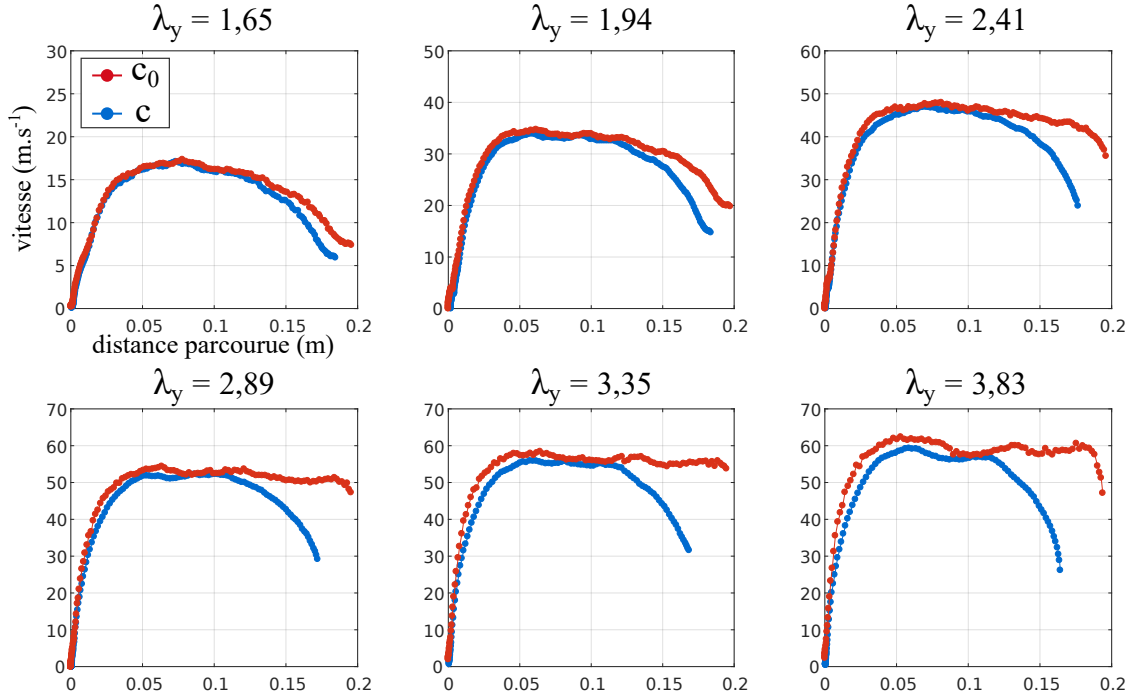


FIGURE 5.5 – Vitesse de propagation de la fissure dans la configuration déformée (bleu) et dans la configuration de référence (rouge) en fonction de la distance parcourue par la fissure dans leurs configurations respectives. Les élongations verticales indiquées sont mesurées au centre de l'éprouvette. Résultats issus de la campagne 2.

Green gauche s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & 0 \\ 0 & \lambda_y^2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Dans le cas du cisaillement pur, soit avec $\lambda_x = 1$, les célérités des ondes ont pour expression :

$$c_{xy} = \left(\frac{2}{\rho} (C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda_y^2}) \right)^{1/2} \quad (5.11)$$

et

$$c_{yx} = \left(\frac{2}{\rho} (C_{10} \lambda_y^2 + C_{01}) \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

D'après l'Eq.(5.5), ces deux expressions conduisent au même résultat dans la configuration de référence pour une membrane immobile ; on note alors c_s cette vitesse des ondes de cisaillement :

$$c_s = c_{xy} = \frac{c_{yx}}{\lambda_y} = \left(\frac{2}{\rho} (C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda_y^2}) \right)^{1/2}. \quad (5.13)$$

Petersan *et al.* (2004) et Marder (2006) ont aussi montré l'indépendance de la vitesse des ondes de cisaillement à la direction de propagation pour le modèle de Mooney-Rivlin, se fondant néanmoins sur une dérivation différente (donc une formule analytique différente). Ce résultat est par ailleurs confirmé par les mesures de vitesse de propagation des ondes de cisaillement réalisées par Petersan *et al.* (2004). On compare donc la vitesse de propagation des fissures à cette vitesse des ondes de cisaillement dans la configuration de référence c_s . On note que d'après l'Eq.(5.13), c_s diminue avec l'élongation verticale λ_y , reflétant la perte de raideur du matériau avec la déformation (pour $\lambda_y < 4$, cf Fig.4.8).

La Figure 5.6 rassemble les vitesses stabilisées (c_{sta}) de l'ensemble des essais en fonction de l'élongation verticale λ_y (cf Fig.4.18). On superpose l'évolution de la vitesse des ondes de cisaillement avec λ_y , calculée avec $\lambda_x = 1$. Le croisement des deux courbes se

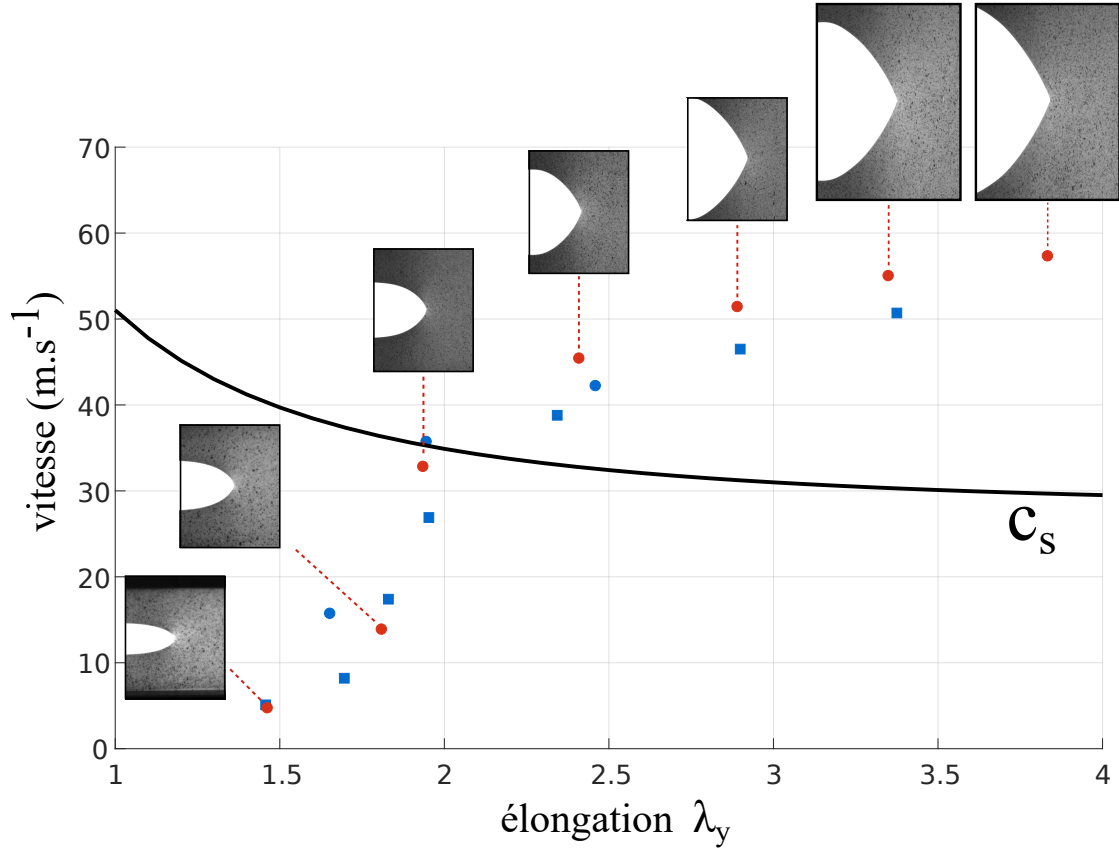


FIGURE 5.6 – Vitesses stabilisées des fissures et vitesse des ondes de cisaillement (ligne noire) en fonction de l'élongation verticale. Essais en rouge : profils des fissures au cours de la propagation stabilisée

produit pour $\lambda_y \approx 2$: au-delà, les fissures entrent dans un régime de propagation supersonique. Plus précisément, les fissures se propagent moins vite que la vitesse des ondes longitudinales (estimée ici à plus de 100 m.s^{-1} , voir Annexe A), ce régime est donc appelé « intersonique » (cf § 1.3.3). Ce changement de régime offre une explication au changement de pente de la courbe $c_{sta} = f(\lambda_y)$, entre $\lambda_y \in [1, 5 ; 2]$ et $\lambda_y > 2$. Ce type de changement de pente au passage de la vitesse des ondes est similaire à celui observé sur le caoutchouc naturel par Chen *et al.* (2011), dont les résultats sont reproduits sur la Figure 1.12. La série de photos sur la Fig.5.6 illustre le passage progressif d'un profil de fissure parabolique à un profil conique (*wedge-like opening*). Cette forme particulière du profil à haute vitesse est comparée à un cône de Mach (Petersan *et al.*, 2004) et étudiée en tant que phénomène de choc par Marder (2006). L'angle d'ouverture, paramètre important de la théorie des chocs, n'est cependant pas défini précisément en l'absence de cône évident. Observant aussi ce changement de forme, Morishita *et al.* (2016) l'analysent en quantifiant la déviation par rapport au profil parabolique prédit par la LEFM, s'inspirant de la *weakly non-linear theory of fracture* (cf § 2.2.3). Au-delà d'une certaine déviation (donc d'une certaine vitesse), ces auteurs montrent que ni la LEFM, ni la WNLTL n'explique la forme du profil de fissure : attribué aux non-linéarités ou à la dissipation d'énergie, ce résultat pourrait s'inscrire dans le cadre du changement de régime de propagation.

Dans le régime de propagation supersonique, la propagation des fissures semble être

gouvernée par des grandeurs locales, comme l'état de déformation initial de la membrane (Gent et Marteny, 1982a; Chen *et al.*, 2011) (cf § 1.3.3). Cet aspect local de la rupture pourrait expliquer le comportement des fissures dans la configuration de référence : la Fig.5.5 indique que la persistance d'un plateau de vitesse se fait plus prononcée à partir de l'essai à $\lambda_y = 2,41$, soit pour une propagation supersonique. La vitesse de propagation constante serait à mettre en relation avec l'élongation verticale locale, elle aussi uniforme le long de l'éprouvette. Par ailleurs, ce point permet de souligner un aspect important de notre essai : bien que l'éprouvette soit symétrique, la vitesse de propagation de la fissure ne l'est pas. En effet, la fissure doit d'abord accélérer jusqu'à atteindre une vitesse d'équilibre, et ce quelles que soient les grandeurs mécaniques qui pilotent son comportement. La vitesse initiale est bien nulle pour tout état mécanique de la membrane au moment de l'amorçage. La Figure 5.7 illustre cette dissymétrie en considérant λ_y comme un paramètre local dérivant de l'état de déformation initial, interpolé au niveau des positions successives de la fissure. Une approche locale, suggérée par le caractère supersonique des essais les plus rapides, pourrait mettre à profit la fin de l'essai qui voit une fissure initialement en « équilibre stationnaire » évoluer en fonction de la répartition spatiale des champs mécaniques.

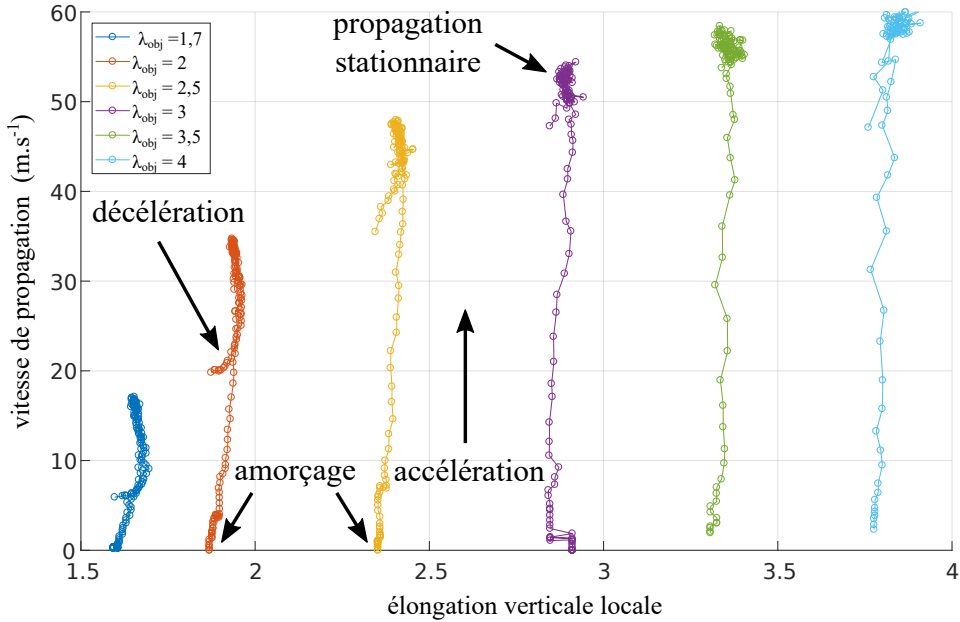


FIGURE 5.7 – Vitesse de propagation instantanée, tracée en fonction de l'élongation locale (λ_y) mesurée aux positions de la pointe de fissure dans la membrane déformée avant amorçage. Les tracés correspondent aux essais présentés sur la Fig.5.5.

5.2 Trajectoires de fissures complexes

Le dispositif expérimental et l'analyse cinématique associée ont été développés à partir de la propagation d'une fissure rectiligne et à vitesse constante sur la majeure partie de l'éprouvette. C'est en effet l'utilisation classique des éprouvettes de cisaillement pur dans le domaine de la rupture dynamique. Néanmoins, quelques modifications du protocole permettent de s'éloigner du cas simple propre au laboratoire. Deux essais sont proposés, conduisant à une propagation rectiligne non uniforme pour le premier, et non rectiligne

pour le second. Ces essais particuliers n'ont cependant pas fait l'objet d'un traitement systématique des nouveaux paramètres introduits et restent donc essentiellement qualitatifs.

5.2.1 Propagation non uniforme

L'objectif de cet essai est d'obtenir une vitesse variable, en dehors des effets de bords. L'idée est de créer artificiellement un gradient d'élongation vertical le long de l'éprouvette. On réalise donc deux entailles horizontales de 25 mm de long dans la deuxième partie de l'éprouvette afin de décharger localement la membrane. Ces entailles sont visibles dans la configuration déformée sur la Figure 5.8(a) et en train de reprendre leur forme initiale sur la Fig.5.8(d). Les extrémités des entailles sont percées à l'emporte-pièce pour éviter la propagation d'une fissure parasite. L'élongation imposée à l'éprouvette est de 2. La Fig.5.8(b-d) présente l'allure de la fissure pour trois étapes particulières de la propagation.

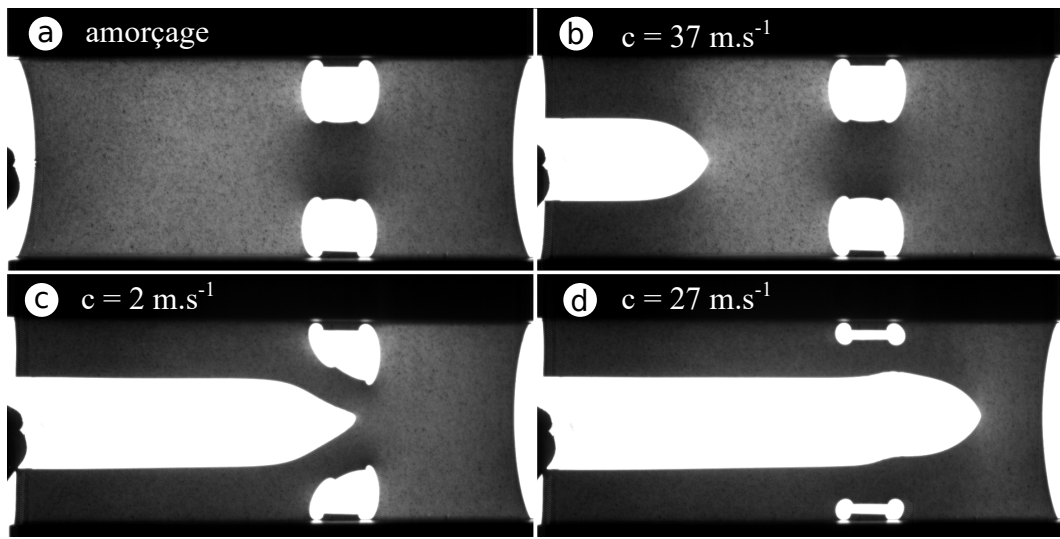


FIGURE 5.8 – Essai de propagation non-uniforme. (a) éprouvette au début de l'amorçage. (b) vitesse maximale atteinte. (c) ralentissement de la fissure et légère déviation. (d) la vitesse de la fissure passe par un autre maximum local. Les vitesses sont données dans la configuration de référence. Élongation imposée à l'éprouvette : $\lambda_{obj} = 2$.

La Figure 5.9 illustre le gradient de déformation introduit. Le long du parcours de la fissure, l'élongation verticale passe de 1,97 ($E_{yy} = 1,44$) à moins de 1,2 ($E_{yy} \approx 0,1$). Le parcours de la fissure, reproduit en noir sur la Fig.5.9, montre un écart vis-à-vis de la propagation rectiligne, dû à une perte de symétrie lors du passage de la zone déchargée. Néanmoins, la vitesse verticale induite reste très faible (inférieure à $0,33 \text{ m.s}^{-1}$) et sera négligée. Suivant la méthode d'analyse présentée précédemment, la Figure 5.10(a) compare les distances parcourues par la fissure dans les configurations déformée et non-déformée. Le long plateau correspond au passage de la zone déchargée. Si la vitesse est faible à cet endroit, elle ne descend jamais sous les 2 m.s^{-1} . Ce ralentissement de la fissure est mis en évidence sur la Fig.5.10(b) : la fissure atteint 37 m.s^{-1} dans la première partie de l'éprouvette, vitesse attendue au regard des autres essais pour ce type d'élongation (voir Fig.5.6), puis chute rapidement. Une fois la zone déchargée passée, la fissure accélère à nouveau, mais sans avoir le temps de retrouver sa vitesse stabilisée pour ce niveau d'élongation. Suivant naïvement l'idée de faire propager une fissure à travers un champ de déformation inhomogène, la Figure 5.11 présente l'évolution de la vitesse de la fissure

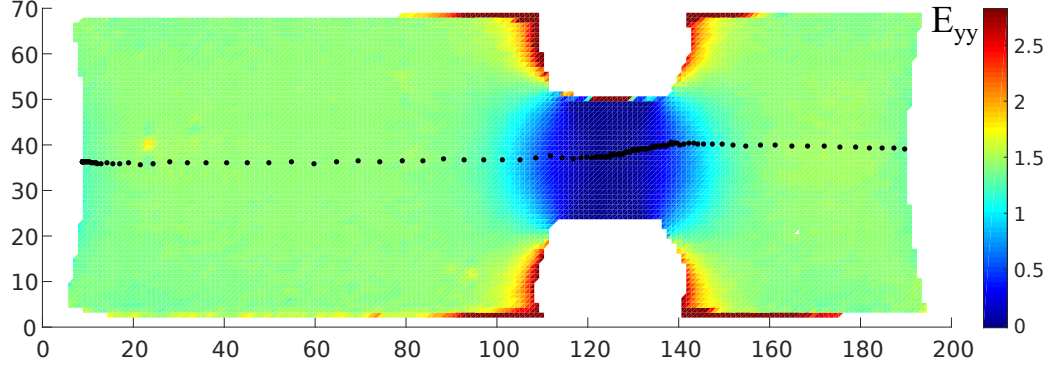


FIGURE 5.9 – Déformation de Green-Lagrange (composante verticale) avant l’amorçage de la fissure. Les points noirs sont les positions successives de la pointe de fissure.

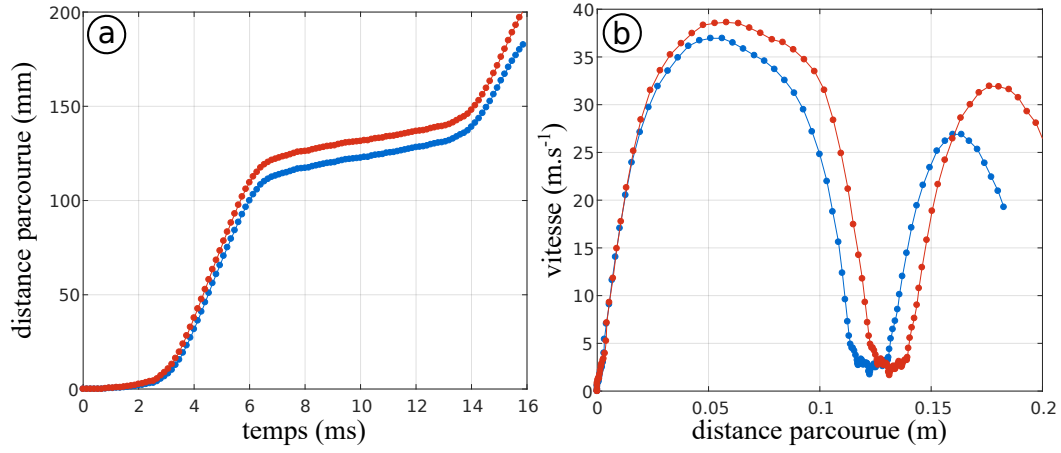


FIGURE 5.10 – (a) évolution de la distance parcourue dans la configuration de référence (rouge) et la configuration déformée (bleu) au cours du temps. (b) évolution de la vitesse de propagation de la fissure dans la configuration de référence (rouge).

en fonction de l’élongation locale avant propagation, à l’image de la Fig.5.7. Cette figure confirme, si besoin était, que cette approche locale n’est pas pertinente à faible vitesse. En effet, bien que la première phase d’accélération soit proche de celle observée pour l’essai avec $\lambda_{obj} = 2$, les changements de vitesse suivants ne sont pas corrélés à la déformation locale (retard de la décélération et vitesse maintenue constante lorsque λ_y augmente de 1,2 à 1,4). Cependant, ce type d’approche prendrait tout son sens dans un dispositif maintenant la fissure dans un régime supersonique.

5.2.2 Propagation non rectiligne

La symétrie de l’éprouvette PS impose une propagation rectiligne lorsque l’amorçage est réalisé au milieu d’un des bords libres. En effet, quelle que soit la position de la pointe et sa vitesse, la fissure est ouverte en mode I pur. Une façon de rompre cette symétrie est d’amorcer la propagation près d’un mors comme illustré sur la Figure 5.12. Pour cet essai, l’entaille est réalisée à 75% de la hauteur de l’éprouvette et l’élongation imposée initialement est de 2. La fissure commence par se propager suivant l’horizontale puis s’incurve pour rejoindre le centre de l’éprouvette. Cette propagation particulière se lit à partir des vitesses horizontales et verticales, dont l’évolution temporelle est tracée sur la

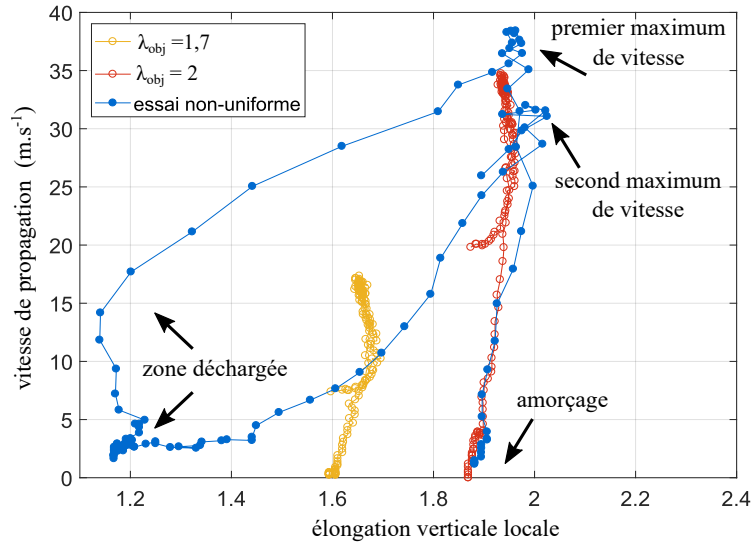


FIGURE 5.11 – Vitesse de propagation instantanée (configuration de référence), tracée en fonction de l'élongation locale (λ_y) mesurée aux positions de la pointe de fissure dans la membrane déformée avant amorçage. L'essai de propagation non-uniforme (bleu) est superposé à deux essais uniformes présentés sur la Fig.5.7.

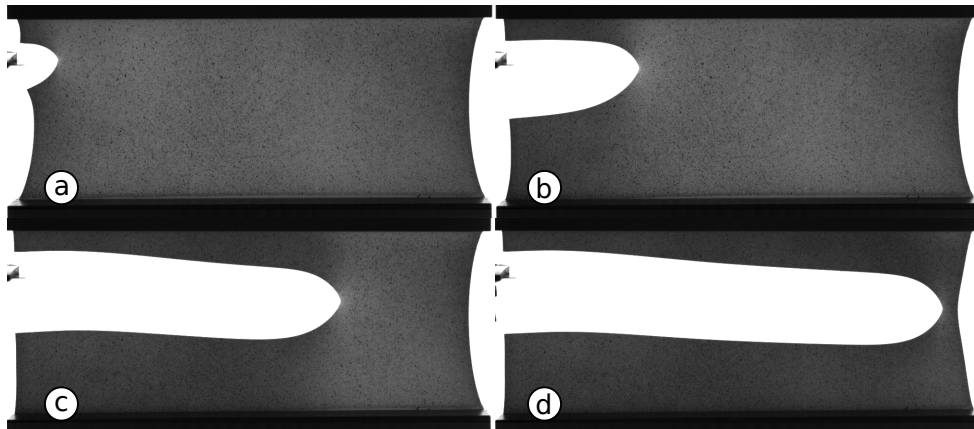


FIGURE 5.12 – Propagation courbe d'une fissure. Élongation imposée : $\lambda_{obj} = 2$. L'entaille est réalisée à 75% de la hauteur de l'éprouvette (soit 30 mm dans la configuration de référence).

Figure 5.13. Environ 2 ms après l'accélération horizontale, la fissure quitte sa trajectoire rectiligne et la vitesse verticale passe par un minimum de -5 m.s^{-1} . La fissure approchant de la ligne médiane, sa vitesse verticale tend de nouveau vers 0. Cette vitesse verticale est faible devant la vitesse horizontale, mais reste néanmoins mesurable (moins précisément à cause de l'incertitude de la mesure de la position verticale de la pointe, plus élevée que pour la position horizontale). Pour cet essai, les vitesses dans la configuration de référence sont calculées par dérivation de l'évolution temporelle des positions verticale et horizontale de la pointe dans cette configuration, elles-mêmes calculées avec l'Eq.(5.9). La courbure obtenue est assez faible, l'angle du vecteur vitesse avec l'horizontale ne dépasse pas 8° , mais permet tout de même une analyse cinématique en deux dimensions. Par ailleurs, augmenter la déformation initiale tend plutôt à réduire cette courbure.

Ce type d'essai fournit la description précise d'une cinématique 2D de fissure dynamique. La résolution temporelle de la position de la pointe permet de tracer avec une

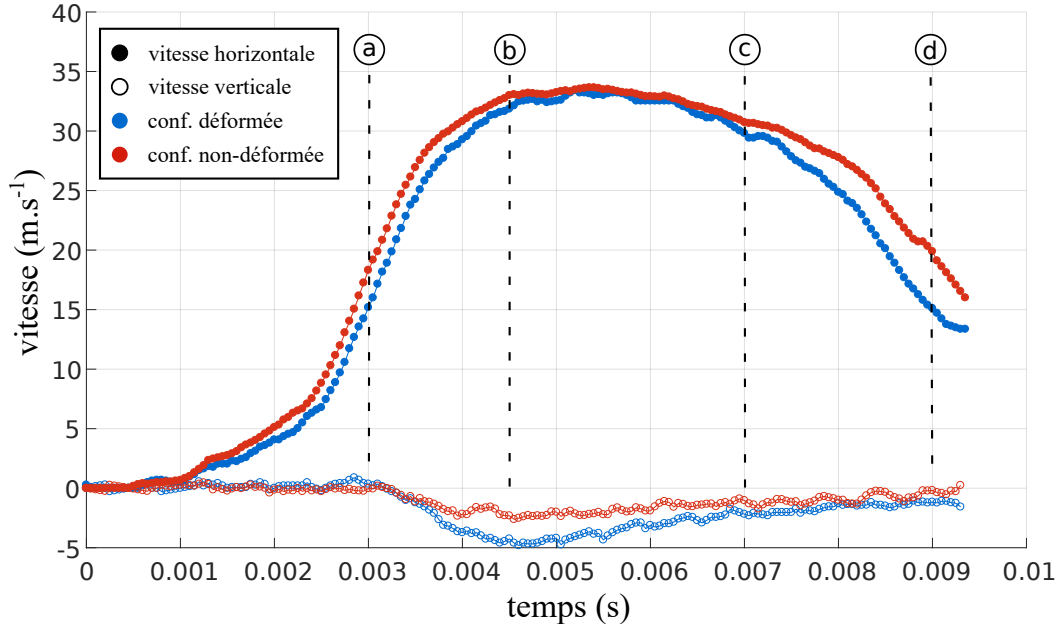


FIGURE 5.13 – Évolution temporelle des vitesses verticale et horizontale de la fissure dans l’essai courbe présenté sur la Fig.5.12. Les lettres indiquent l’instant de prise des photos de la Fig.5.12(a-d).

bonne précision le vecteur vitesse à chaque instant. La dissymétrie de l’essai est illustrée sur la Figure 5.14 par l’intermédiaire du champ de vitesse et l’ajout du vecteur vitesse de la fissure qui clarifie la cinématique instantanée de la fissure. Le vecteur accélération peut même être évalué, même si les valeurs absolues doivent être analysées avec prudence tant le bruit est important (vecteur accélération « erratique » avant lissage polynomial). L’intérêt de la méthode réside aussi dans la projection de ces données dans la configuration de référence, comme illustré sur la Figure 5.15. La dissymétrie de l’essai complique néanmoins la mesure de la position de la pointe de fissure dans la configuration de référence. La propagation de la fissure peut introduire de grands déplacements verticaux invalidant les hypothèses faites au paragraphe 5.1.2. La faible courbure de l’essai et l’absence de mouvements parasites de la membrane (mouvement hors plan, déplacements de corps rigides) permet ici de limiter cette erreur de positionnement.

Bilan

Les grandes déformations imposent de distinguer nettement les vitesses de propagation d’une fissure (ou d’une onde) dans les configurations déformée et non-déformée. La vitesse de propagation dans la configuration non-déformée est un paramètre essentiel de la mécanique de la rupture dynamique, dont les analyses théoriques adoptent systématiquement le point de vue lagrangien. La mesure expérimentale de cette vitesse nécessite des hypothèses particulières, à moins de disposer d’un marquage spécifique à la surface de l’éprouvette (Livne *et al.*, 2010). La méthode proposée dans ce chapitre permet de comparer à chaque instant ces deux vitesses. Marquant un changement de régime, les essais les plus rapides voient le plateau de vitesse stationnaire s’étendre jusqu’au bout de l’éprouvette, dans la configuration de référence. Du fait de l’incompressibilité du matériau, l’épaisseur de la membrane dans la configuration déformée n’est pas homogène (variation de λ_z). Or, la projection de la vitesse dans la configuration de référence permet de consi-

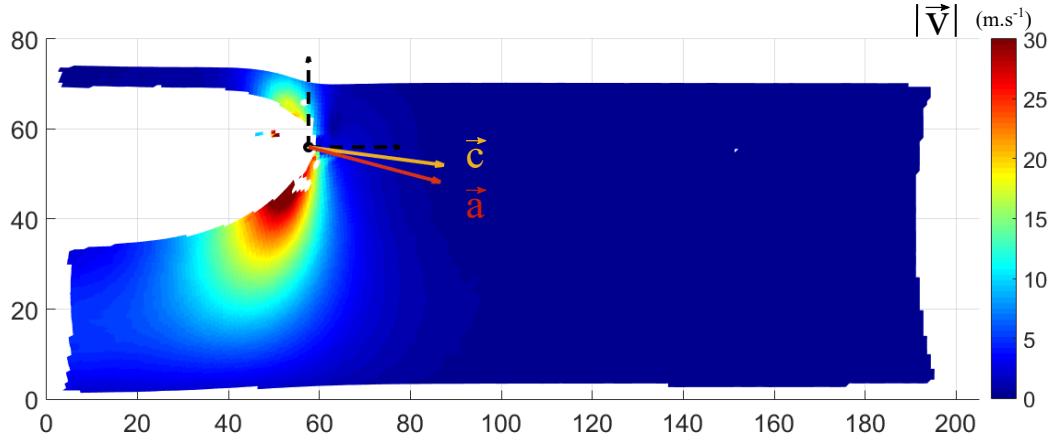


FIGURE 5.14 – Champ de vitesse (norme) dans la configuration déformée. Le repère local (tirets noirs) est centré sur la position de la pointe de fissure. Les vecteurs vitesses $\vec{c}$ et accélération $\vec{a}$ sont normalisés. Champ correspondant à la Fig.5.12(d).

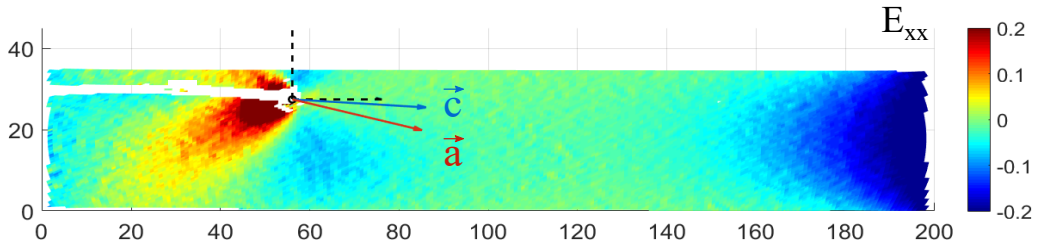


FIGURE 5.15 – Composante horizontale du tenseur de Green-Lagrange dans la configuration non-déformée. Le repère local (tirets noirs) est centré sur la position de la pointe de fissure. Les vecteurs vitesses $\vec{c}$ et accélération $\vec{a}$ sont normalisés. Champ correspondant à la Fig.5.12(b).

dérer une évolution de la fissure à épaisseur constante. Pour le problème 3D, une vitesse de fissure constante dans la configuration de référence indique que la surface balayée par le front de fissure par unité de temps est constante. Dans la configuration déformée, la perte de vitesse près du second bord libre, apparente sur les films, n'est donc que le reflet de la contraction de la membrane : la fissure se propage moins vite dans une membrane localement plus épaisse, conservant la surface balayée par le front de fissure constante.

Se concentrant sur la partie stationnaire de la propagation des fissure, nos essais ont mis en évidence un dépassement de la vitesse des ondes de cisaillement pour des déformation initiales supérieures à 100%. Ces résultats sont analogues à ceux obtenus par Petersan *et al.* (2004), et Chen *et al.* (2011) pour le caoutchouc naturel. Les observations de notre étude et les résultats similaires de la littérature semblent indiquer que le passage en régime supersonique de la fissure s'accompagne :

- d'une rupture de pente de la relation $c_{sta} = f(\lambda_y)$;
- d'un changement du profil d'ouverture de la fissure, celui-ci prenant la forme d'un « cône de Mach » ;
- de l'aspect local des quantités pilotant la fissure (Gent et Marteny (1982a) ; Chen *et al.* (2011)), expliquant peut-être le maintien d'une vitesse constante dans la configuration de référence pour les essais à élongation imposée supérieure à 2 (cf Fig.5.5).

Le suivi de la cinématique instantanée de la fissure permet de ne pas se limiter au cas sta-

tionnaire. La méthode d'analyse, mise au point sur des essais de propagation rectiligne et en grande partie uniforme, peut être appliquée à certains cas plus complexes. Peu d'études ont pu être menées, mais nous avons illustré ce principe par deux essais faisant varier la vitesse et la direction de propagation. Comme attendu au regard des développements de la mécanique de la rupture, une étude purement cinématique est insuffisante pour caractériser les phénomènes de propagation de fissure. Elle fournit néanmoins certains outils indispensable à l'analyse énergétique expérimentale de ce phénomène.

Chapitre 6

Analyse énergétique de la propagation

Ce second chapitre d'analyse considère l'utilisation des techniques expérimentales développées dans une approche énergétique de la rupture. On réalise tout d'abord un bilan énergétique à l'échelle de l'éprouvette pour différents essais ; puis ces résultats sont comparés à la solution analytique de ce bilan global pour la propagation stationnaire. On considère ensuite l'approche intégrale fondée sur l'intégrale du flux d'énergie mécanique. Les méthodes particulières mises en œuvre pour son calcul sont détaillées et appliquées sur un essai bien choisi. Les différents termes de l'intégrale sont analysés et la validité des résultats obtenus est discutée.

Sommaire

6.1	Bilan énergétique global	115
6.1.1	Formule analytique classique	115
6.1.2	Bilan énergétique expérimental	116
6.2	Approche intégrale en rupture dynamique	122
6.2.1	Formulation des intégrales de contour	122
6.2.2	Méthode d'évaluation expérimentale	124
6.2.3	Intégrale de flux	126
6.3	Conclusion	130

Une grande partie des développements théoriques concernant la rupture des élastomères se fonde sur une approche énergétique (Thomas, 1994; Persson *et al.*, 2005). Les approches énergétiques permettent en effet de pallier la méconnaissance analytique des champs en pointe de fissure en grandes déformations (*a fortiori* en dynamique non-linéaire). De plus, la plupart des résultats énergétiques de la LEFM restent valides en grandes déformations et pour des lois de comportement arbitraires (Freund, 1998), à l'image de l'intégrale- J . Ces théories sont généralement développées dans un cadre lagrangien et le chapitre 5 expose les méthodes mises en place pour mesurer les grandeurs cinématiques nécessaires à leur application, en particulier, la vitesse de la fissure dans la configuration de référence. Le chapitre précédent suggère par ailleurs une approche locale du problème pour les essais les plus rapides. Adoptant la même méthode que pour la Fig.5.7, la Figure 6.1 trace l'évolution de la vitesse de propagation en fonction de la densité d'énergie élastique locale (avant propagation). Cette approche directement issue des don-

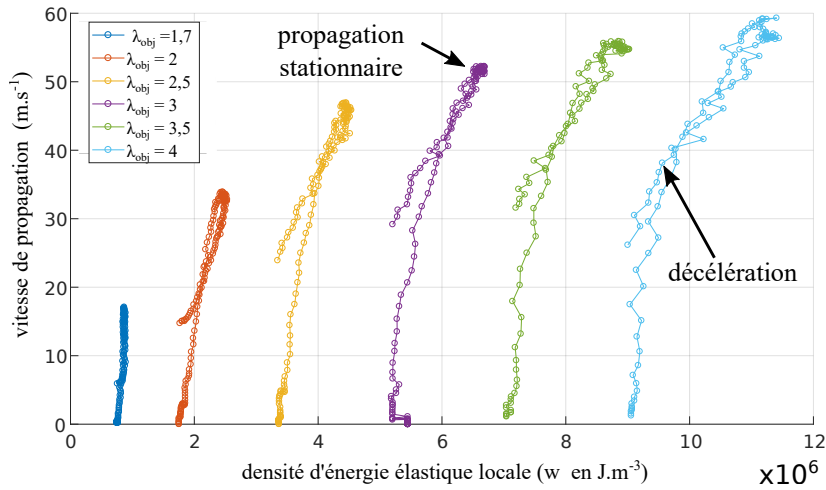


FIGURE 6.1 – Vitesse de propagation instantanée (configuration déformée), tracée en fonction de la densité d'énergie élastique locale (W) mesurée aux positions de la pointe de fissure dans la membrane déformée avant amorçage.

nées cinématiques du chapitre précédent montre ses limites, puisqu'elle ne permet pas de prédire à elle seule les vitesses observées au cours des différents essais. Ce chapitre reprend donc les méthodes d'analyses énergétiques de la rupture, en utilisant les données cinématiques du chapitre précédent. L'approche classique, qui repose sur un bilan énergétique de la propagation, est comparée au bilan d'énergie global expérimental dans la section 6.1. Ce bilan à partir des champs mesurés fournit de bons résultats, et permet même de mesurer un taux de restitution d'énergie instantanée dans la partie non-stationnaire de l'essai. Afin de s'éloigner du bilan global, sujet à caution en dynamique rapide, la section 6.2 explore la faisabilité de la mesure expérimentale du taux de restitution d'énergie dynamique par des méthodes intégrales. La précision et la validité de ces méthodes seront discutées au cours de leur présentation. On rappelle néanmoins que la loi de comportement utilisée est élastique, en particulier elle ne prend pas en compte le raidissement du matériau avec la vitesse de déformation.

6.1 Bilan énergétique global

6.1.1 Formule analytique classique

Taux de restitution d'énergie en cisaillement pur

Comme précisé au paragraphe 1.2.3, les éprouvettes de cisaillement pur sont couramment utilisées pour établir la courbe vitesse de propagation / taux de restitution d'énergie pour les élastomères. Réalisée point par point, cette courbe associe la vitesse de propagation stabilisée (c'est à dire le plateau des courbes de la Fig.5.5 par exemple) à la valeur de G calculé à partir de la formule analytique pour ce type d'éprouvette : $G = Wh_0$ (Eq.6.1), avec $h_0 = 40$ mm dans notre étude. La densité d'énergie W peut être calculée à partir de la loi de comportement, en utilisant l'élongation verticale mesurée au centre de l'éprouvette (cf Tab.4.4 et Tab.4.3) et en considérant que $\lambda_x = 1$. La prise en compte de l'élongation horizontale mesurée se heurte au choix de sa valeur (maximale ou moyenne) et n'influe que très peu sur les résultats (1% environ). On obtient alors la courbe présentée sur la Figure 6.2. Tracée avec un seul type d'éprouvette, cette courbe $c_{\text{stab}} = f(G)$ présente la même allure que la courbe $c_{\text{stab}} = f(\lambda_y)$ de la Fig.4.18, avec une rupture de pente pour G proche de 100 kJ.m^{-2} . L'allure de la courbe se rapproche de celles observées dans la

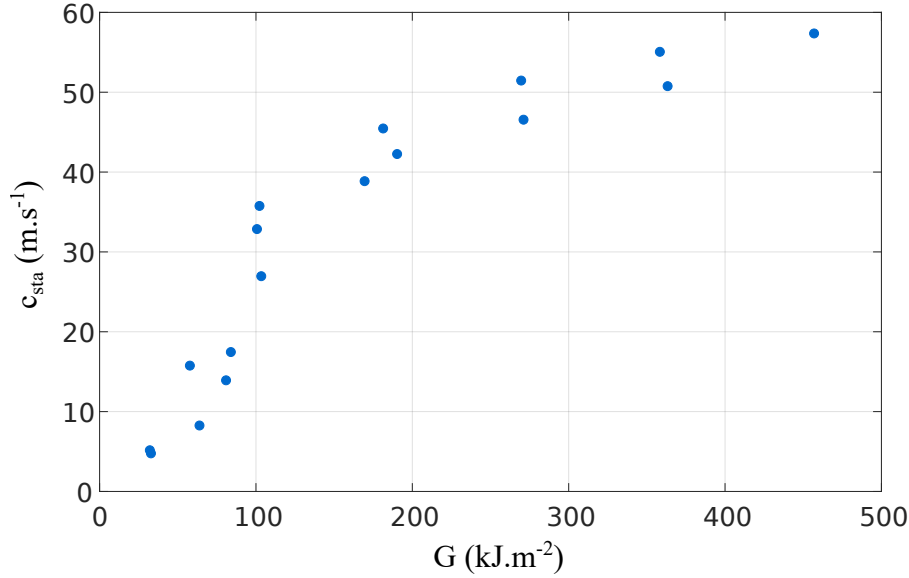


FIGURE 6.2 – Vitesse stabilisée en fonction du taux de restitution d'énergie calculé avec la relation $G = W(\lambda_x = 1, \lambda_y)h_0$

littérature, à l'image des courbes présentées sur la Fig.2.11 (Lake *et al.*, 2000; Zhang *et al.*, 2009). Selon l'approche quasi-statique (étendue au cas stationnaire), cette courbe traduit l'évolution de l'énergie de rupture en fonction de la vitesse de propagation (cf. § 2.2.2). Cependant, le taux de restitution d'énergie calculé de cette manière ne caractérise plus la rupture pour des grandes vitesses de propagation, et notamment en cas de propagation supersonique ((Gent et Marteny, 1982a; Chen *et al.*, 2011), cf. § 1.3.3). La courbe de la Fig.6.2 n'est donc pas « caractéristique du matériau » pour des valeurs de G supérieures à 100 kJ.m^{-2} environ.

Taux de restitution d'énergie critique

Le taux de restitution d'énergie critique, correspondant à l'énergie de rupture en quasi-statique Γ_0 (cf §. 2.2.2), n'a pas pu être déterminé avec précision. Avec des éprouvettes PS, l'essai consacré à sa mesure consiste à charger une éprouvette pré-entallée et à mesurer la déformation atteinte au moment de la propagation. On en déduit alors le taux de restitution d'énergie correspondant. Les essais réalisés suivant ce protocole ont montré une influence marquante de l'entaille réalisée, comme l'illustre la Figure 6.3 : la « fissure » n'étant pas naturelle (rayon de fond d'entaille correspondant à celui de la lame utilisée), sa pointe s'émousse fortement, ce qui retarde la propagation ; celle-ci débute alors pour une valeur de λ_y plus élevée que certains essais à pré-tension imposée. Néanmoins,

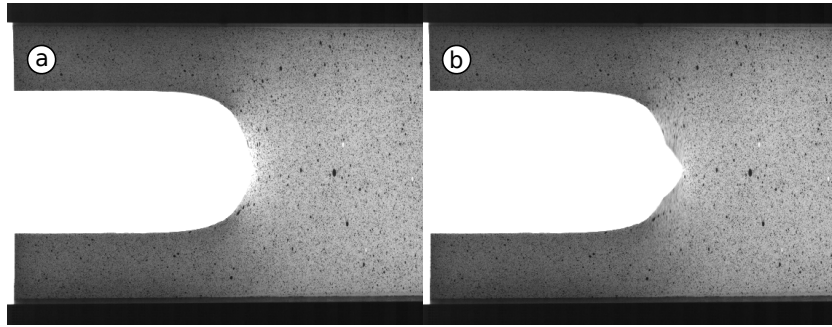


FIGURE 6.3 – Essai de propagation avec éprouvette pré-entallée. (a) Allure de l'entaille juste avant la propagation, illustrant son émoussement important. (b) Propagation de la fissure lorsque l'élongation de la membrane atteint $\lambda_y \approx 2$.

les essais à faible déformation imposée permettent d'encadrer Γ_0 : la fissure ne se propage pas pour $\lambda_y = 1,25$ et se propage pour $\lambda_y = 1,46$, ce qui place Γ_0 dans l'intervalle $[11 ; 33] \text{ kJ.m}^{-2}$. Cette valeur n'étant pas essentielle pour notre étude, les investigations n'ont pas été poursuivies ; il aurait fallu créer une fissure naturelle par chargement cyclique par exemple.

6.1.2 Bilan énergétique expérimental

Conçue à l'origine pour la propagation quasi-statique, l'approche énergétique de la rupture repose sur un bilan d'énergie à l'échelle de la structure (cf. § 1.1.5). L'extension au cas dynamique sous certaines conditions (cf. § 1.2.3) permet de définir le taux de restitution d'énergie à partir de l'énergie mécanique (Eq.(1.4)). Pour une membrane dans sa configuration de référence, l'Eq.(6.1) en précise une forme opératoire qu'on rappelle ici :

$$G = -\frac{1}{e_0} \frac{dE_m}{dl_0},$$

avec l_0 la longueur de la fissure dans la configuration de référence, e_0 l'épaisseur de la membrane. L'énergie mécanique totale E_m est la somme des quantités d'énergies élastiques et cinétiques contenues dans la structure. La mesure des champs énergétiques, la densité d'énergie élastique stockée et la densité d'énergie cinétique, autorise une application expérimentale directe de ce bilan énergétique, c'est-à-dire le suivi de l'évolution de l'énergie mécanique de l'éprouvette au cours de la propagation de fissure.

Méthode et propagation stationnaire

Le bilan énergétique est réalisé dans la configuration de référence, ce qui permet une utilisation immédiate de l'Eq.(6.1). Les vitesses et longueurs de fissure sont donc exprimées dans cette configuration. Ce bilan énergétique est présenté sur quatre essais de la campagne 2 (cf. Tab.4.4) : $\lambda_{obj} = 1,7$, $\lambda_{obj} = 2(b)$, $\lambda_{obj} = 2,5(b)$, $\lambda_{obj} = 3$ et $\lambda_{obj} = 3,5$.

Le calcul de l'énergie mécanique repose sur l'intégration des champs de densité volumique d'énergie élastique et cinétique sur l'ensemble de la zone utile (membrane plane entre les bourrelets). On rappelle que les champs énergétiques sont calculés sur un maillage éléments fini provenant de la corrélation d'image. Connaissant l'épaisseur de la membrane ($e_0 = 3,1 \pm 0,03$ mm), le volume de chaque élément peut être calculé, et donc la quantité d'énergie « qu'il contient ». La somme sur tous les éléments fournit l'énergie totale de la pièce (cinétique et élastique). En pratique, seule une partie de la zone utile est accessible à la corrélation d'images à cause des mors (cf. § 4.3.1). La Figure 6.4(a) présente la proportion du volume réel de la zone utile qui est « accessible » à la corrélation d'images. Ce

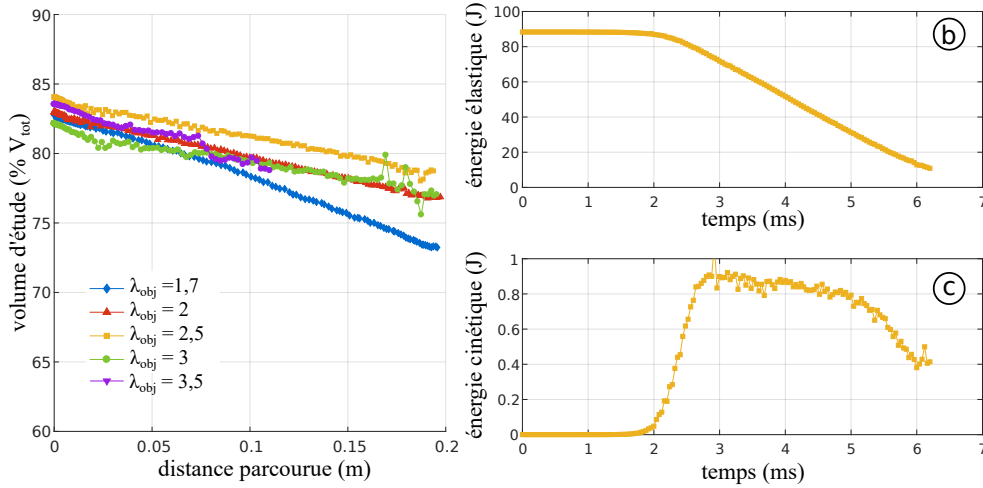


FIGURE 6.4 – (a) Évolution du volume accessible à la corrélation d'images au cours des essais (en proportion du volume total réel). Évolution temporelle de (b) la quantité d'énergie élastique totale et (c) de la quantité d'énergie cinétique totale au cours de l'essai à $\lambda_{obj} = 2,5$ ($c_{sta} = 45,4$ m.s⁻¹).

volume d'étude diminue au cours de l'essai du fait de la perte d'éléments sur le passage de la pointe de fissure. On rappelle que le volume réel de la zone utile est constant au cours de l'essai en vertu de l'incompressibilité du matériau. L'essai $\lambda_{obj} = 3,5$ présente en plus des mouvements hors-plan qui augmentent le nombre de points perdus par la corrélation d'images, en particulier sur la deuxième partie du parcours (vitesse maximale atteinte). Le bilan énergétique n'est donc pas réalisé jusqu'au bout de l'essai et la Figure 6.5 illustre cette perte d'éléments pour la dernière image prise en compte. De manière générale, les éléments perdus se trouvent majoritairement après la pointe de fissure : ils contiennent assez peu d'énergie élastique et peu d'énergie cinétique une fois loin de la pointe. La quantité d'énergie cinétique est faible devant la quantité d'énergie élastique, comme l'illustre la Fig.6.4(b-c) sur un exemple. Dans l'essai le plus rapide comme dans l'essai de la Fig.6.4(b), l'énergie cinétique représente moins de 3% de l'énergie élastique initiale (cas $\lambda_{obj} = 3,5$), et une proportion instantanée maximale de 10% en fin de parcours. L'énergie cinétique est localisée juste derrière la pointe de fissure, comme l'indique la Figure 6.6. Néanmoins, même à cet endroit, la densité d'énergie cinétique ne l'emporte sur la densité d'énergie élastique que très localement (et pour les essais les plus rapides).

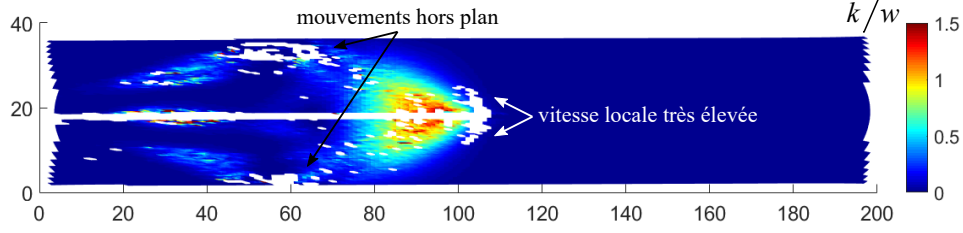


FIGURE 6.5 – Rapport de la densité d’énergie cinétique sur la densité d’énergie élastique (k/W), tracé dans la configuration de référence au cours de la propagation stationnaire pour l’essai à $\lambda_{\text{obj}} = 3,5$. Ce champ est tracé sur la dernière image prise en compte pour le bilan énergétique.

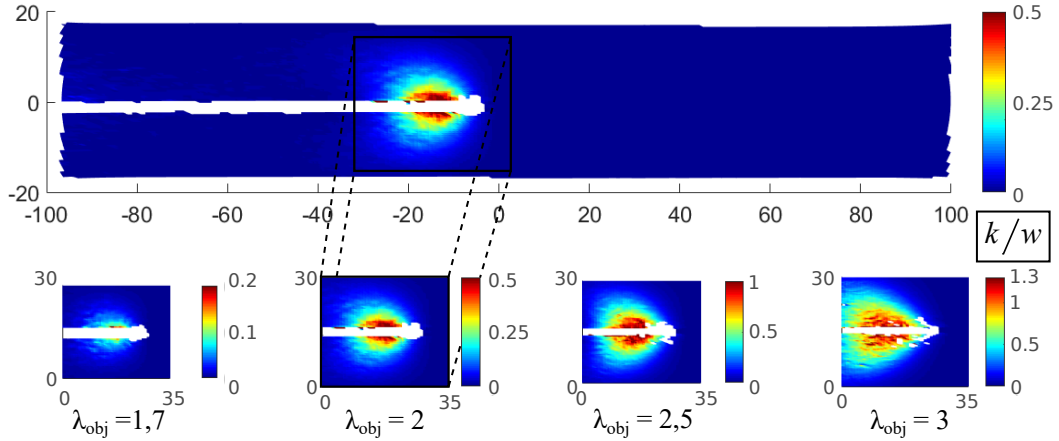


FIGURE 6.6 – Rapport de la densité d’énergie cinétique sur la densité d’énergie élastique (k/W), tracé dans la configuration de référence au cours de la propagation stationnaire. Vue d’ensemble de l’essai $\lambda_{\text{obj}} = 2$ (*haut*) et zoom sur la pointe de fissure pour les autres essais (*bas*).

La Figure 6.7 présente l’évolution de la quantité d’énergie mécanique totale de la structure en fonction de la distance parcourue par la fissure dans la configuration de référence (soit sa longueur l_0). L’énergie mécanique de chaque éprouvette décroît de manière linéaire sur ce qui correspond à la zone de propagation stationnaire, au milieu du parcours. Une régression linéaire sur cette partie de la propagation permet de calculer la variation d’énergie avec la longueur parcourue (lignes noires sur la Fig.6.7). Utilisant l’Eq.(6.1), on obtient une mesure du taux de restitution d’énergie pour la partie stationnaire. Ces valeurs sont comparées à celles issues de la formule analytique $G = Wh_0$ dans le Tableau 6.1. Cependant, l’énergie initialement mesurée ne correspond pas à la totalité de l’énergie présente dans l’éprouvette du fait du volume non pris en compte par la corrélation d’images. Une façon simple de compenser cette perte initiale est d’augmenter l’énergie mécanique mesurée au cours de l’essai proportionnellement au volume manquant ($E_m = E_{\text{mesuré}} * V_{\text{tot}}/V_{\text{mesuré}}(t = t_0)$). La Fig.6.7 montre cette énergie mécanique compensée et le Tab.6.1 souligne la diminution de l’écart avec la formule analytique : les écarts passent de [19% ; 27%] à [3% ; 11%]. On précise que le volume accessible perdu en cours d’essai n’est pas compensé car l’énergie qu’il contient n’a pas de lien avec l’énergie présente au même instant dans la structure, quand une relation de proportionnalité peut être supposée pour l’énergie perdue sur les bords (champs approximativement homogènes verticalement). On peut estimer que la précision de la mesure de l’énergie totale diminue au cours de l’essai (les dernières images sont peu fiables à cause du nombre d’éléments perdus

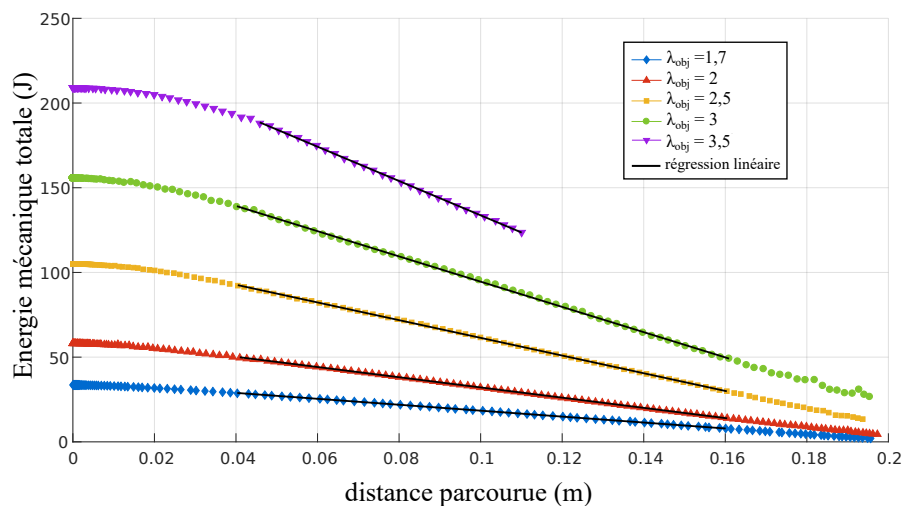


FIGURE 6.7 – Énergie mécanique totale en fonction de la distance parcourue par la fissure dans la configuration de référence. Le volume perdu initialement est compensé. Les lignes noires illustrent la régression linéaire sur le parcours $[0,04; 0,16]$ m ayant servi au calcul des taux de restitution du Tab.6.1.

	taux de restitution d'énergie (kJ.m^{-2})		
λ_{obj}	formule analytique	bilan	bilan (volume compensé)
1,7	58,1	46,7	56,5
2	101	80,7	97,2
2,5	181	142	169
3	270	198	240
3,5	359	273	326

TABLE 6.1 – Taux de restitution d'énergie pour la propagation stationnaire. Comparaison entre les valeurs calculées avec la formule analytique et celles issues du suivi de l'énergie mécanique.

et de la perte de précision de la corrélation d'images). La quantité d'énergie mécanique dans la structure n'est pas nulle en fin de propagation ; ce phénomène a deux origines principales. Premièrement, la dernière image analysée du film ne correspond pas au repos complet de l'éprouvette : il reste entre 1 et 2 mm de propagation, ce qui maintient chargée une partie de la membrane. Ensuite, le matériau ne s'est pas rétracté complètement au passage de la fissure du fait de sa légère viscosité : la durée de l'essai n'est pas suffisante pour observer le retour à l'équilibre statique complet de la membrane avec la caméra rapide. Il reste donc un peu d'énergie élastique stockée dans la membrane.

Les valeurs du taux de restitution d'énergie pour la propagation stationnaire concordent étonnamment bien avec les valeurs théoriques, compte tenu des nombreuses étapes de traitement nécessaires à la mesure de l'énergie mécanique. Ces bons résultats confirment la faisabilité du bilan énergétique expérimental. Néanmoins, la proximité des résultats expérimentaux et analytiques repose en partie sur l'existence d'hypothèses communes :

- La loi de comportement est utilisée dans les deux cas, ce qui assure la même estimation de la densité d'énergie élastique au centre de la membrane ;
- L'énergie élastique potentiellement stockée ailleurs que dans la zone utile est négligée (dans les bourrelets par exemple).

Taux de restitution d'énergie instantané

L'évolution de l'énergie mécanique au cours des essais est suffisamment régulière pour pouvoir mesurer une dérivée locale. En effet, intégrer les champs énergétiques sur un grand nombre d'éléments réduit la contribution du bruit de mesure dans les éléments très chargés et limite l'influence des éléments perdus. On utilise une méthode de dérivation similaire à celle considérée pour le calcul de la vitesse de fissure : pour chaque point, l'évolution de l'énergie mécanique est approchée par une droite sur les 7 points l'entourant ($2 \times 3 + 1$) afin d'en déduire la dérivée. La dérivation de l'évolution de l'énergie mécanique permet donc de calculer le taux de restitution d'énergie instantanée à partir de sa définition (6.1), et ce tout au long de la propagation.

A l'instar des courbes $c_{sta} = f(G)$ classiques (Fig.6.2), la Figure 6.8 montre l'évolution de la vitesse de propagation de la fissure dans la configuration de référence en fonction du taux de restitution d'énergie « instantané ». Les valeurs calculées par la formule ana-

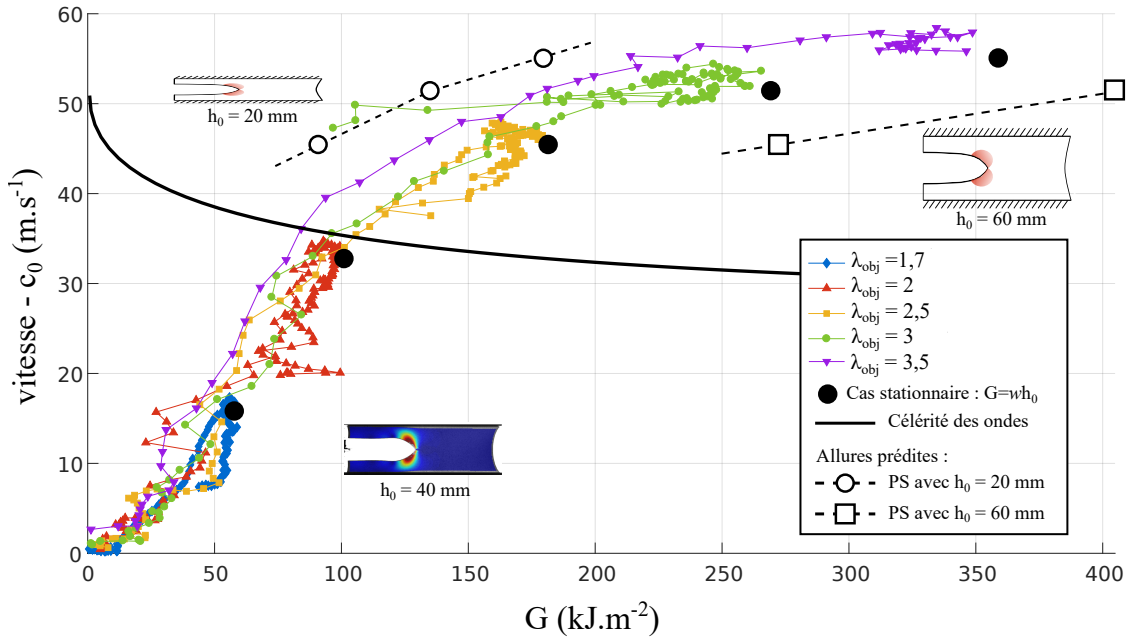


FIGURE 6.8 – Vitesse de propagation dans la configuration de référence en fonction du taux de restitution d'énergie instantané. Les points noirs correspondent aux valeurs calculées avec la formule analytique pour l'éprouvette de cisaillement pur, tels que tracés sur la Fig.6.2. La ligne noire précise la célérité des ondes de cisaillement dans la zone en cisaillement pur ($\lambda_x = 1$). Les lignes pointillées indiquent les allures **prédites** des courbes qui devraient être obtenues pour d'autres éprouvettes de cisaillement pur, de hauteurs différentes de celle utilisée pour l'étude (tailles relatives indiquées par les schémas et la photo).

lytique (propagation stationnaire) sont pointées en noir pour permettre la comparaison avec les résultats de la Fig.6.2. Comme attendu d'après l'analyse précédente de la zone stationnaire, ces points sont proches des « points de fonctionnement » stationnaires de chaque essai, repérables par la forte densité de points autour d'une même vitesse (c_{sta}). Plus étonnant cependant, tous les points correspondant aux phases d'accélération et de décélération (absente pour $\lambda_{obj} = 3, 5$) se regroupent sur une même courbe, et cette courbe coïncide avec celle formée par les couples (c_{sta}, G) en régime stationnaire. Sur la fig.6.8, on précise à titre indicatif la vitesse des ondes de cisaillement au centre d'une éprouvette ($c_s(\lambda_x = 1, \lambda_y)$ en fonction de $G = W(\lambda_x = 1, \lambda_y)h_0$). Les points rassemblés sur cette

courbe correspondent à des cinématiques de fissure radicalement différentes : des fissures stationnaires ou qui accélèrent, qui progressent « lentement » ou en régime supersonique. L'accélération instantanée des fissures observées, tracée sur la Figure 6.9, souligne cette diversité de situations : si les valeurs absolues de l'accélération manquent de précision (seconde dérivation), au moins 4 ordres de grandeur d'accélération sont concernés. De plus, la courbe c_0 en fonction de G est tracée à partir de fissures traversant une variété d'états de déformation de la membrane, allant de la traction uniaxiale près des bords au cisaillement pur au centre.

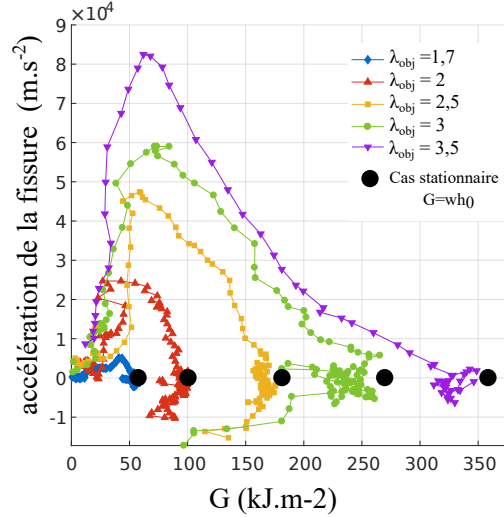


FIGURE 6.9 – Accélération instantanée de la fissure dans la configuration de référence en fonction du taux de restitution d'énergie instantané. Les points noirs correspondent aux valeurs analytiques pour une vitesse stationnaire, donc d'accélération nulle.

Ce bilan énergétique, et en particulier la courbe de la Fig.6.8, démontre le rôle primordial du taux de restitution d'énergie dans le pilotage de la propagation des fissures à haute vitesse. La courbe formée par les couples (c_{sta}, G) habituellement mesurée (par exemple par Greensmith et Thomas (1955), et Lake *et al.* (2000)) correspond aussi à la courbe suivie par une fissure instationnaire. D'après la théorie énergétique de la rupture et l'équation de propagation (1.11), la partie subsonique de la courbe constitue une mesure de l'énergie de rupture $\Gamma(c)$ (mais cette courbe seule ne permet pas de le vérifier). Dans ce cas, ce résultat justifie l'extrapolation des courbes expérimentales établies en propagation stationnaires à la propagation dynamique, en simulation numérique (par exemple par Ozenç et Kaliske (2014)). Par ailleurs, les mesures du taux de restitution d'énergie et de la vitesse de la fissure au début de la propagation ne sont pas assez précises pour identifier Γ_0 , permettant tout au plus de réduire la valeur supérieure de l'encadrement proposé au paragraphe 6.1.1.

Cette courbe c_0 en fonction de G est aussi valable en régime de propagation supersonique. En particulier, d'après l'analyse cinématique du chapitre 5, la fissure dépasse la vitesse des ondes de cisaillement au cours des essais à $\lambda_{obj} = 2, 5$, $\lambda_{obj} = 3$ et $\lambda_{obj} = 3, 5$. Dans ce cas, la vitesse de propagation est pilotée par des grandeurs locales et non par le taux de restitution d'énergie (Gent et Marteny (1982a); Chen *et al.* (2011)). Pour ces vitesses supersoniques, la courbe c_0 en fonction de G est donc liée à la structure : les points stationnaires se rassemblent bien sur une même courbe, mais qui dépend de la géométrie de l'éprouvette. On retrouve ainsi le résultat de Chen *et al.* (2011), dont les courbes c_{sta} en fonction de G pour différentes structures sont reproduites Fig.1.12(a). Nous complétons ce résultat en montrant le maintien de cette relation continue entre la vitesse de propa-

gation et le taux de restitution d'énergie au cours d'une même propagation instationnaire à travers un champ de déformation inhomogène (λ_x variable), pour une structure donnée. Dans ce cas, cette courbe ne peut pas être assimilée à la relation entre la vitesse de propagation et l'énergie de rupture Γ . L'utilisation d'éprouvettes de cisaillement pur de différentes tailles permettrait de retrouver les différentes courbes c_0 en fonction de G en régime supersonique, à l'image de la Fig.1.12(a). Ces essais n'ont pas été réalisés, mais leurs résultats pourraient être anticipés à la lumière des informations déjà obtenues. Suivant l'argumentation de Chen *et al.* (2011), l'élongation verticale λ_y peut caractériser la vitesse de propagation en régime supersonique, en tant que paramètre local (à λ_x fixé, cf. Fig.1.12(b)). Dans ce cas, si on associe à chaque vitesse stationnaire c_i une élongation particulière $\lambda_y = \lambda_i$, on peut aussi lui associer une densité d'énergie élastique $W_i(\lambda_i, \lambda_x = 1)$ à partir de la loi de comportement. En régime supersonique, une éprouvette de hauteur initiale αh_0 présentera une vitesse stationnaire c_i pour le taux de restitution :

$$G_\alpha(c_i) = \alpha h_0 \times W_i. \quad (6.1)$$

Connaissant la courbe c_0 en fonction de G pour une éprouvette donnée (de hauteur h_0) en régime supersonique, la courbe équivalente pour une éprouvette de hauteur αh_0 sera donc décalée d'un facteur α . Les allures des courbes pour $\alpha = 0,5$ et $\alpha = 1,5$ sont tracées sur la Fig.6.8 à partir des valeurs analytiques de G , pour des vitesses stationnaires supérieures à celles des ondes de cisaillement.

Pour conclure cette section, rappelons que le bilan énergétique global repose sur une conception quasi-statique de la rupture. Pour s'affranchir des effets de structure et se rapprocher du cas dynamique général, on envisage le calcul du taux de restitution d'énergie par des méthodes intégrales.

6.2 Approche intégrale en rupture dynamique

6.2.1 Formulation des intégrales de contour

L'intégrale- J (Atkinson et Eshelby, 1968; Rice, 1968) a été brièvement présentée au chapitre 1 comme moyen de calculer le taux de restitution d'énergie, en particulier dans le cas linéaire et quasi-statique sous sa forme classique (1.7). Inaugurant la méthode des intégrales de contour (*crack tip contour integrals*; revue en détail par Moran et Shih (1987a)), l'intégrale- J fit l'objet de nombreux développements théoriques élargissant son champ d'application et proposant de nombreuses variantes (Knowles et Sternberg (1972), Bui (1974), Nishioka et Atluri (1983) parmi beaucoup d'autres). En particulier, l'intégrale- J classique a été étendue aux matériaux hyperélastiques par Chang (1972) et à la propagation dynamique par Freund (1972c) et Gurtin et Yatomi (1980). Moran et Shih (1987b,a) proposent un traitement général des intégrales de contour permettant de rassembler une grande partie d'entre elles dans un cadre commun. Le lien entre ces méthodes intégrales et la mécanique configurationnelle fait aussi l'objet de revues exhaustives (Maugin (1994), Gurtin (2000)). Notre étude ne comporte pas d'apports théoriques sur les intégrales de contour et se limite au point de vue de l'utilisateur. Une revue bibliographique étendue des méthodes intégrales dépasse donc le cadre de cette thèse et n'est pas utile à notre approche expérimentale. Sans revenir sur les démonstrations, l'objectif est de préciser le domaine de validité d'une de ces formules et de clarifier le sens des termes qui la composent en vue de la discussion de nos résultats expérimentaux.

L'intégrale considérée est celle du flux d'énergie mécanique à travers la pointe de fissure, proposé par Freund (1972c) et dont la validité pour les matériaux hyperélastiques

est attestée par Gurtin et Yatomi (1980). Sa formule est donnée au chapitre 1 par l'Eq.(1.8). On la présente ici suivant l'exposé de Moran et Shih (1987b), ce qui permet de préciser le rôle de chaque terme. Valide dans le cadre thermodynamique général, l'intégrale de flux peut aussi se déduire de la conservation de l'énergie mécanique, dont la forme intégrale sur un volume arbitraire Ω peut s'écrire :

$$\int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \vec{m} \, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (W + k) \, dV, \quad (6.2)$$

avec $\vec{m}$ le vecteur normal à la surface $\partial\Omega$. Maintenant, si la surface $\partial\Omega$ se déplace avec une vitesse instantanée $\vec{c}$, la conservation de l'énergie mécanique devient (théorème de transport de Reynolds) :

$$\int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \vec{m} \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (W + k) \, dV - \int_{\partial\Omega} (W + k) \vec{c} \cdot \vec{m} \, dS. \quad (6.3)$$

On applique maintenant le résultat très général de l'Eq.(6.3) au cas de la propagation d'une fissure. Le problème est schématisé sur la Figure 6.10. Se limitant au problème plan,

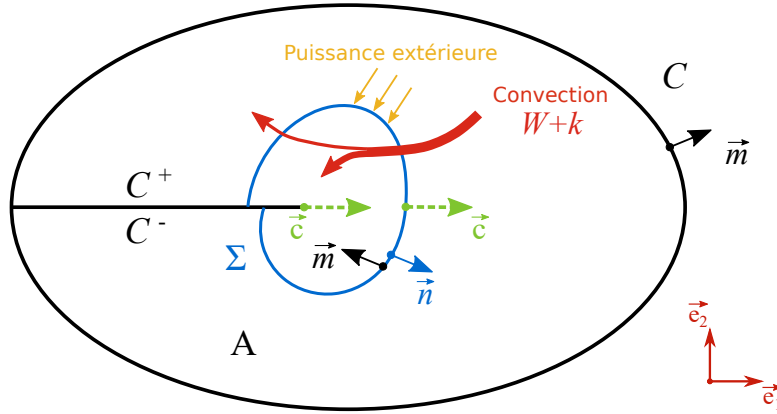


FIGURE 6.10 – Conventions de notation pour le calcul du flux d'énergie à travers le contour Σ entourant la pointe de fissure (librement inspiré de la Figure 1 de Moran et Shih (1987a)). Les lèvres de la fissure, C^+ et C^- , sont libres de traction, $\vec{m}$ est la normale extérieure à A , donc $\vec{m} = -\vec{n}$ sur Σ . Les deux termes de l'intégrale Eq.(1.10) sont représentés : puissance apportée par le travail des efforts extérieurs au contour et convection d'énergie élastique et cinétique.

on considère un corps présentant une fissure se propageant à la vitesse $\vec{c} = c\vec{e}_1$. La fissure est contenue dans une courbe matérielle fixe C (ne correspondant pas nécessairement à l'ensemble du corps). La pointe de fissure est isolée dans un contour Σ se mouvant avec elle. On note $A(t)$ l'aire contenue entre les courbes C , Σ et les deux lèvres de la fissure supposées libres de traction. La normale extérieure de ce contour (réunion des précédents) est notée $\vec{m}$. Dans ces conditions, l'expression (6.3) appliquée à $A(t)$ s'écrit :

$$\int_C \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \vec{m} \, dC = \frac{\partial}{\partial t} \int_A (W + k) \, dV - \int_{\Sigma} \left[(W + k) \vec{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \vec{m} \, d\Sigma. \quad (6.4)$$

Le premier terme de cette équation traduit l'apport d'énergie au corps A , le second la variation d'énergie mécanique à l'intérieur et le troisième correspond à l'énergie perdue par le corps à travers Σ . On retrouve donc le flux d'énergie à travers un contour entourant

la pointe d'une fissure, noté $\Phi(\Sigma)$ au chapitre 1, et exprimé Eq.(1.8) avec une normale extérieure $\vec{n}$ au contour Σ :

$$\Phi(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left[(W + k)\vec{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} d\Sigma,$$

Les termes de cette expression ont une interprétation énergétique immédiate. Le premier correspond à l'apport d'énergie mécanique de la matière traversant Σ , rappelant un terme de convection. Le second terme est l'énergie apportée par le travail exercé par la matière en-dehors de Σ sur celle à l'intérieur. Ce flux correspond bien à l'énergie entrant dans le secteur délimité par Σ , énergie qui est soit stockée, soit dissipée du fait de l'avancée de la pointe. Néanmoins, ce flux dépend du contour choisi dans le cas général : des phénomènes dynamiques, comme des fronts ou des champs transitoires, peuvent être mis en jeu ou non suivant le contour retenu. Comme évoqué au paragraphe 1.2.1, le cas stationnaire constitue une exception importante et ce flux, indépendant du contour, prend la forme donnée par l'Eq.(1.9).

Le taux de restitution d'énergie est défini en dynamique par l'Eq.(1.10) :

$$G = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi(\Sigma)}{c_0} \right).$$

Le passage à la limite permet de retrouver une caractéristique de la propagation : à la limite, toute l'énergie qui entre dans Σ est dissipée par la propagation. Une façon de s'affranchir du passage à la limite est d'ajouter un terme de surface à l'intégrale de contour (Moran et Shih, 1987b). Néanmoins, l'intégration des champs sur toute la surface délimitée par Σ nécessite de connaître précisément les champs en pointe de fissure, ce qui n'est pas forcément avantageux en pratique (en simulation numérique par exemple). Présentée dans la configuration déformée, l'intégrale de flux Eq.(1.8) est valable pour un matériau élastique non-linéaire en grandes déformations, pour peu qu'elle soit calculée dans la configuration de référence (donc avec la vitesse de propagation $\vec{c}_0$) et avec le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (transposé) (Freund, 1998) :

$$\Phi(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left[(W + k)\vec{c}_0 + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} d\Sigma, \quad (6.5)$$

La formule du flux donnée par l'Eq.(6.5) est une formule classique de mécanique de la rupture dynamique. Postulée très tôt (Atkinson et Eshelby, 1968), elle a fait l'objet de nombreux développements pour étendre son champ d'application (Willis (1975); Nakamura *et al.* (1985), parmi d'autres). D'autres formules intégrales ont été proposées pour le calcul du taux de restitution dans le cas dynamique et non-linéaire. Parmi ces formulations certaines proposent une expression pour l'intégrale- J généralisée dans le cadre de la mécanique configurationnelle ((Gurtin, 2000; Maugin, 1993)).

6.2.2 Méthode d'évaluation expérimentale

L'objectif est à présent de calculer expérimentalement ces intégrales- J dynamiques. De nombreuses étapes ont été nécessaires pour obtenir une estimation de toutes les grandeurs intervenant dans leur formulation. Le taux de restitution d'énergie, calculé pour une image donnée, concentre en un nombre toutes les hypothèses et approximations effectuées depuis la mesure du champ de déplacement avec la caméra rapide. Les valeurs obtenues doivent donc être considérées avec prudence. Pour alimenter la discussion sur ces mesures, le Tableau 6.2 rassemble les différentes grandeurs nécessaires et rappelle les hypothèses qui leur sont attachées.

	Méthode d'obtention
Propagation	
$\vec{x}_{\text{crack}}$	analyse d'image (seuillage)
$\vec{c}$	dérivation par approximation polynomiale
$\vec{c}_0$	interpolation de λ_x aux positions $\vec{x}_{\text{crack}}$
Cinématique	
$\vec{x}$	corrélation d'images
$\vec{X}$	projection des champs mesurés entre les deux caméras
$\vec{u}$	corrélation d'image et projection
$\partial\vec{u}/\partial t$	dérivation par approximation polynomiale
$\mathbf{F}$	discrétisation par éléments finis à 3 noeuds
Contraintes	
$\sigma, \mathbf{P}$	loi de comportement hyperélastique, quasi-statique
Energies	
W	loi de comportement hyperélastique, quasi-statique
k	mesure de vitesse et incompressibilité

TABLE 6.2 – Récapitulatif des grandeurs nécessaires au calcul des intégrales de contour.

Au regard des différentes hypothèses sur le calcul des grandeurs mécaniques, la méthode d'intégration n'est pas la source d'erreur prépondérante. On privilégie donc la simplicité :

- les intégrales sont évaluées sur des contours circulaires centrés sur la pointe de fissure dans la configuration de référence, comme illustré sur la Figure 6.11 ;
- le contour est discrétisé et la valeur des champs vectoriels d'intérêt est calculée à chacun de ses noeuds ; on retient la valeur sur l'élément pour les champs issus de gradients (approximation linéaire). Pour les champs nodaux (champs de vitesse et d'énergie cinétique), interpoler linéairement sur l'élément ou ne retenir que la valeur au barycentre ne donne pas de différence significative ;
- le produit scalaire avec la normale est réalisé à chaque noeud et la courbe obtenue est intégrée le long de l'abscisse curviligne du contour.

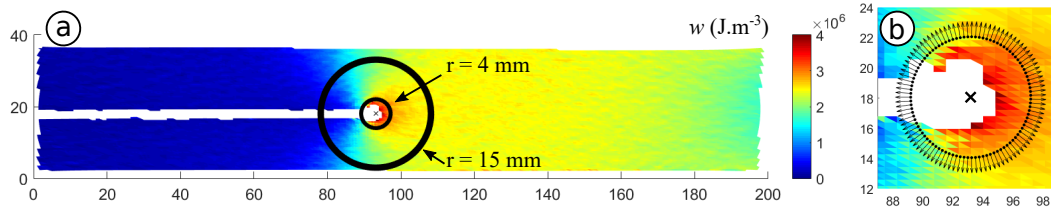


FIGURE 6.11 – (a) Allures des plus petit et plus grand contours réalisables, centrés sur la position de la pointe de fissure dans la configuration de référence ($\times$). (b) Zoom sur le contour de rayon 4 mm. Essai : $\lambda_{\text{obj}} = 2$; champ : densité d'énergie élastique ; vitesse de propagation : 33 m.s^{-1} .

La plupart des champs étant constants sur les éléments, une discrétisation du contour tous les 0,25 mm suffit. Au-delà, une certaine redondance apparaît (deux points consécutifs sur un même élément). La taille du plus petit contour utilisable dépend du nombre d'éléments perdus en pointe de fissure pour l'essai considéré. Pour les essais à $\lambda_{\text{obj}} < 2,5$, un rayon de 4 mm constitue un minimum pour avoir des contours presque complets (Fig.6.11(b)). Bien entendu, il manque des données au niveau des lèvres de la fissure car des éléments ont été perdus. Pour les contours les plus éloignés de la pointe, la contribution de cette zone est faible : les lèvres sont libres de traction et se déchargent. Cette

zone prend bien entendu de l'importance à mesure que le contour se rapproche de la pointe, ne serait-ce qu'en proportion de la longueur totale du contour. On propose deux façons de traiter ces points autour des lèvres : on leur assigne une valeur nulle ou la première valeur mesurée (prolongation constante sur cette portion du contour). L'intégrale obtenue avec une valeur nulle au niveau des lèvres sera la mesure de référence, celle obtenue avec le contour prolongé sera utilisée comme indicateur d'incertitude (barres « d'incertitude »). Les contours doivent s'éloigner de la pointe pour les essais plus rapides, la zone de flou augmentant, jusqu'à limiter l'intérêt des mesures du fait de la distance pour les essais à $\lambda_{\text{obj}} > 3,5$.

Les résultats obtenus sont présentés pour l'essai à $\lambda_{\text{obj}} = 2$, qui allie vitesse de propagation élevée et bonne précision des mesures en pointe de fissure.

6.2.3 Intégrale de flux

Flux à un instant

On considère donc l'intégrale de flux (6.5). La Figure 6.12(a) montre l'évolution du flux d'énergie en fonction du rayon du cercle servant de contour. La valeur obtenue est intégrée sur l'épaisseur de la membrane (constante dans la configuration de référence), afin d'obtenir le flux en J.s^{-1} . Cette courbe est tracée à partir de l'image présentée à la Fig.6.11, soit au milieu de la zone de propagation stationnaire (voir Fig.5.5). Or, on constate que le flux d'énergie diminue avec le rayon du contour utilisé, contrairement à ce qui est attendu en régime stationnaire.

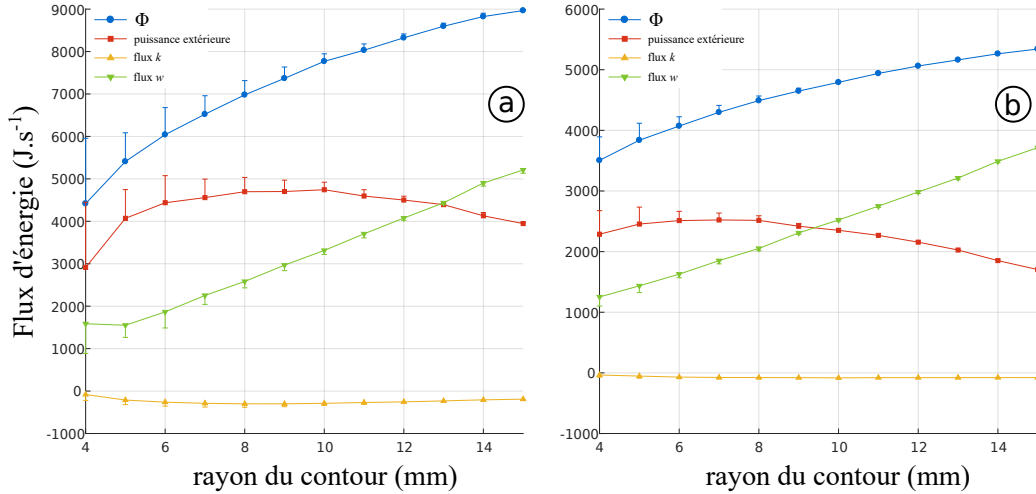


FIGURE 6.12 – Evolution, avec le rayon du contour, du flux d'énergie mesuré et des trois termes qui le composent. Barres d'erreur : valeurs obtenues en prolongeant les mesures au niveau des lèvres. (a) Propagation stationnaire, $c_0 = 33 \text{ m.s}^{-1}$. (b) Accélération de la fissure, $c_0 = 23 \text{ m.s}^{-1}$.

La contribution de la zone proche des lèvres (barres d'incertitude) augmente fortement pour les faibles rayons, mais elle ne compense que partiellement la baisse du flux. Les deux contributions majeures de l'intégrale sont le flux d'énergie élastique et la puissance des contraintes. La variation du flux total est en grande partie pilotée par la diminution de l'apport d'énergie élastique, les autres contributions conservant une valeur à peu près constante (la valeur pour le plus petit rayon est sujette à caution). La contribution de

l'énergie cinétique est négative et très faible devant les autres. Cette contribution négative quel que soit le rayon du contour implique que la prise en compte de l'énergie cinétique (différence majeure avec le cas statique, cf. § 1.2.1) diminue la quantité d'énergie disponible pour la propagation, et donc le taux de restitution d'énergie. On retrouve ainsi expérimentalement le résultat de Gurtin et Yatomi (1980), qui démontrent cette différence entre les versions statique et dynamique de l'intégrale- J .

Le comportement de l'intégrale de flux présenté sur la Fig.6.12(a) est représentatif de ce qui est observé tout au long de l'essai. A titre de comparaison, la Fig.6.12(b) présente le flux mesuré au cours de la phase d'accélération. Dans ce deuxième cas, l'hypothèse de stationnarité n'est pas valable, sans que cela ne se traduise clairement au niveau des termes de l'intégrale.

Flux à travers un contour

Pour préciser le rôle de chacun des termes du flux d'énergie au-delà de leur importance relative, on peut tracer leur répartition le long d'un contour donné. La géométrie du contour intervient fortement en raison du produit scalaire avec la normale dans l'Eq.(6.5). Aussi, l'interprétation « locale » des composantes de flux doit rester prudente. Néanmoins, l'utilisation de contours circulaires semble naturelle au regard de la symétrie du problème et de son traitement habituel en coordonnées cylindriques. L'intégration sur ces cercles offre alors une interprétation en termes de direction des différents flux : d'où provient l'énergie disponible pour la fissure et en quelle quantité ? La Figure 6.13 présente la répartition angulaire des différents termes de l'intégrale pour un contour de rayon 7 mm (cf. Fig.6.12(a)). Des courbes d'allure similaire sont obtenues pour des rayons de 5 à 15 mm tout au long de la propagation, seule l'importance relative de chacun des termes change.

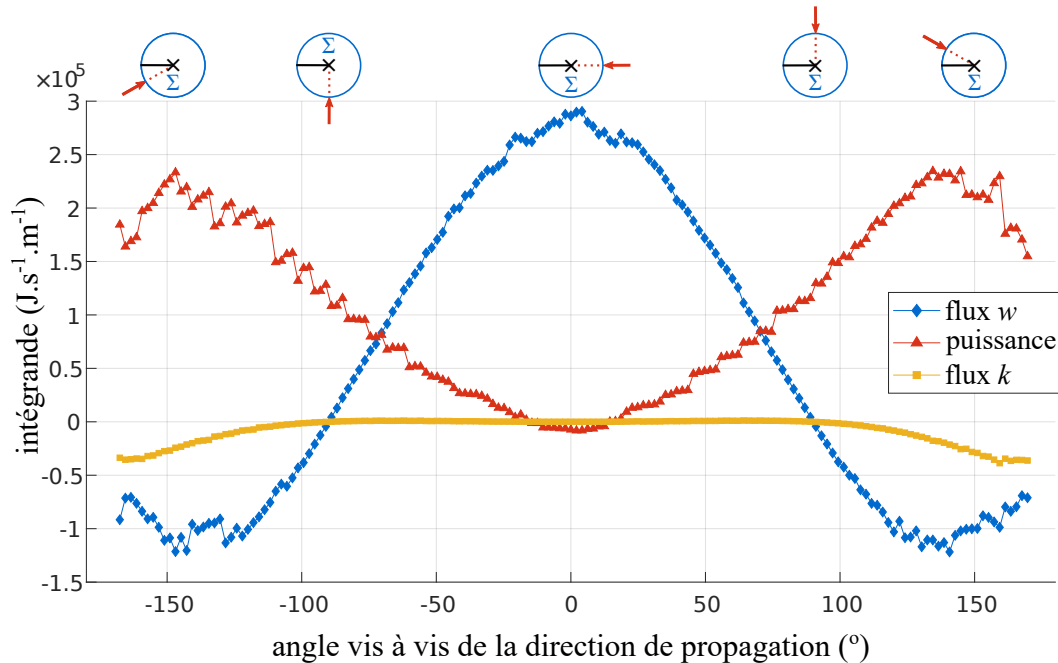


FIGURE 6.13 – Valeur des termes de l'intégrale de flux le long du contour (rayon 7 mm), en fonction de la direction angulaire. Les schémas indiquent certains points particuliers du contour.

On retrouve tout d'abord la symétrie des champs observée autour de la pointe de

fissure. Ensuite, l'interprétation de chacun des termes est assez immédiate. Le flux d'énergie élastique est positif devant la pointe et négatif derrière : de la matière chargée entre dans le contour en face de la pointe, et la matière sortante contient encore de l'énergie élastique. La contribution de l'énergie cinétique est nulle sur une grande partie du contour. Le contour perd tout de même une petite partie de son énergie sous la forme d'un flux d'énergie cinétique derrière la pointe. Le travail des contraintes intervient surtout derrière la pointe, assez proche des lèvres. C'est là que se trouvent les vitesses les plus élevées (rétractation des lèvres), ce qui contribue à maximiser la puissance reçue par le contour à cet endroit. Ce terme de puissance prend donc de l'importance à mesure que le contour se rapproche de la pointe, comme en témoigne la Fig.6.12.

On peut maintenant émettre des hypothèses sur les raisons du non-respect de l'indépendance au contour de l'Eq.(6.5) en régime stationnaire. La première consiste à vérifier que les champs mécaniques sont bien stationnaires. Au-delà de la mesure de la vitesse de la fissure, l'hypothèse de stationnarité des champs peut être vérifiée en comparant leur dérivée temporelle dans le repère en mouvement avec la pointe, nulle dans le cas stationnaire. Le calcul de cette dérivée induit beaucoup de bruit en pratique. Mais la stationnarité d'un champ f quelconque au cours d'une propagation horizontale à vitesse c_0 implique :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (6.6)$$

La Figure 6.14 illustre cette équation en prenant le champ de déplacement horizontal u_x : au centre de l'éprouvette, la similarité entre $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ (Fig.6.14(a)) et $-c_0 \frac{\partial u_x}{\partial x}$ (Fig.6.14(b)) confirme la validité de l'hypothèse de stationnarité des champs pour cette partie de la propagation (le champ de vitesse horizontale, de plus faible amplitude, est plus à même de souligner un éventuel événement dynamique). Des réflexions d'ondes sont présentes *a priori*, mais elles ne semblent pas en mesure d'influer sur la valeur du flux d'énergie.

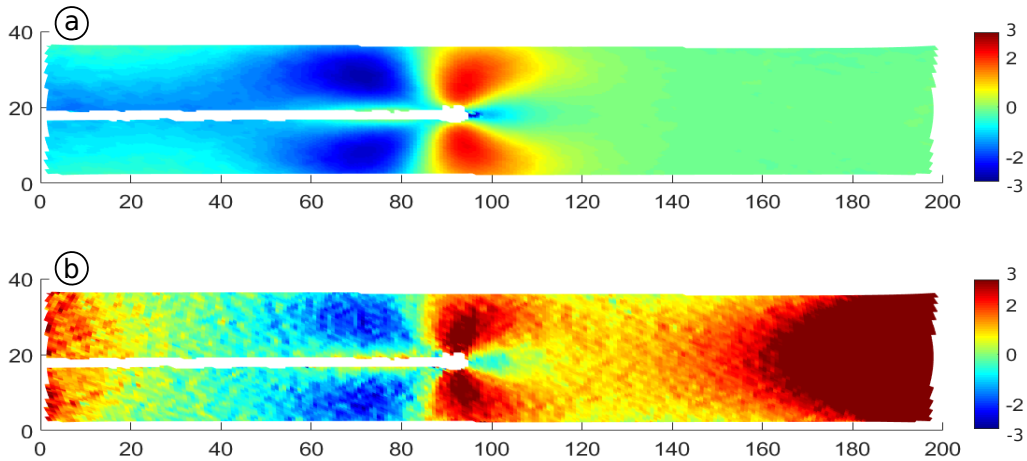


FIGURE 6.14 – Visualisation de la propagation stationnaire : au milieu de l'éprouvette, le champ de vitesse horizontale (a) est assez proche de celui calculé à partir du gradient du déplacement horizontal (b) selon l'Eq.(6.6).

La dépendance du flux au contour observée en régime stationnaire vient notamment de la diminution de l'apport d'énergie élastique, évidemment liée à la taille du cercle. Le travail des contraintes ne compense pas cette diminution avec le rayon. Les contraintes au bord des lèvres (non mesurées) sont peut-être sous-estimées. En effet, si les densités d'énergie élastique et cinétique sont faibles à cet endroit, c'est là que se concentre la puissance des efforts extérieurs (pour les plus petits rayons en particulier). De plus, on constate

que ce travail intervient dans la zone de grande vitesse de déformation et de cisaillement important, comme le montre la Figure 6.15. Au-delà de l'éventuelle imprécision de la loi

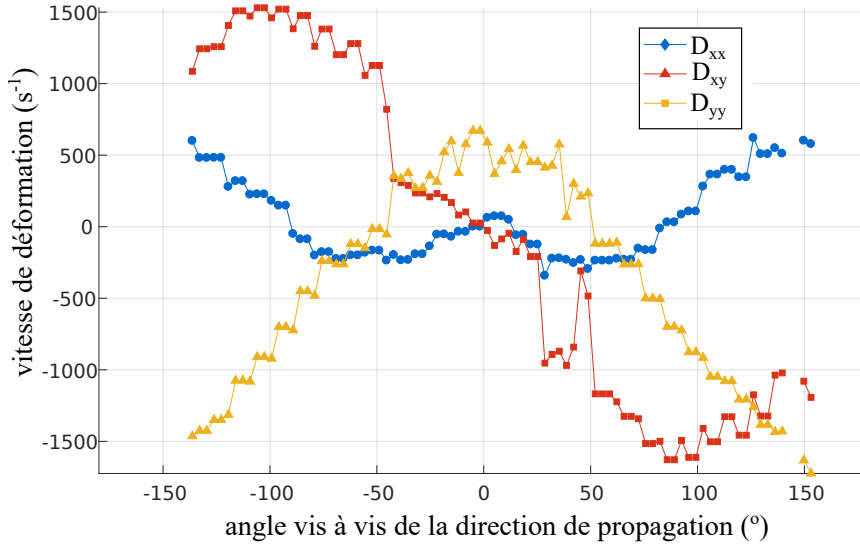


FIGURE 6.15 – Composantes du tenseur taux de déformation ($\mathbf{D}$, défini Eq.(3.11)) le long du contour de 7 mm centré sur la pointe de fissure. Ce contour correspond à celui de la Fig.6.13.

de comportement pour ce cas de chargement, il manque une contribution importante du raidissement du matériau dans cette zone. Le manque de précision de l'estimation des contraintes à haute vitesse pourrait expliquer cette dépendance au contour. Cela signifie cependant que les champs cinématiques mesurés (déformation, vitesse...) ne peuvent pas être interprétés localement par une loi quasi-statique, puisque l'indépendance au contour ne nécessite pas ce type de comportement. Autrement dit, les champs cinématiques (incluant l'allure de l'ouverture de la fissure) seraient différents avec un matériau élastique insensible à la vitesse de déformation. Enfin, la dernière hypothèse envisagée serait la présence de dissipation d'énergie dans le volume, assez loin de la pointe de fissure pour ne pas être prise en compte de la même manière dans tous les contours. Cette contribution a été écartée à priori dans le chapitre 4 au regard des essais de DMA et de calculs en ordre de grandeurs liés à la vitesse de la pointe. Néanmoins, la zone de rétractation des lèvres pourrait contrevenir à ces hypothèses par les hauts niveaux de cisaillement. De plus, la taille de la zone de fort taux de déformations dépend ici de la vitesse de rétractation et non de la vitesse de propagation de la fissure, ce qui pourrait remettre en cause l'analyse du paragraphe 4.1.2. Ces différentes hypothèses reposent donc sur deux points : le comportement du matériau et la cinématique de la matière derrière la pointe (vitesse et taux de déformation). Ces phénomènes semblent donc être plus important dans notre étude que dans celle de (Livne *et al.*, 2010) sur les gels de polyacrilamide. Les déformations modérées et la vitesse absolue faible de la fissure (2 m.s^{-1}) assurent l'indépendance au contour de l'intégrale de flux dans leur cas.

Flux le long d'un essai

L'intégrale de flux fournit toute l'énergie qui entre dans le contour à un instant donné. En régime stationnaire, c'est donc une borne supérieure du taux de restitution d'énergie : la fissure ne peut pas dissiper plus d'énergie que ce qui entre dans le contour (en régime instationnaire, il faut prendre en compte l'évolution de l'énergie contenue dans le contour).

C'est par ailleurs ce qui justifie la définition du taux de restitution d'énergie dynamique à partir de l'intégrale de flux (Eq.(1.10)). Illustrant cette borne supérieure, la Figure 6.16 trace la valeur du rapport flux d'énergie / vitesse de propagation au cours de l'essai. Au niveau de la propagation stationnaire, ce rapport est de l'ordre de 40 kJ.m², soit une valeur bien inférieure au taux de restitution d'énergie calculé par la formule analytique (101 kJ.m²). Cette valeur dépend bien entendu du contour choisi. L'utilisation d'un contour

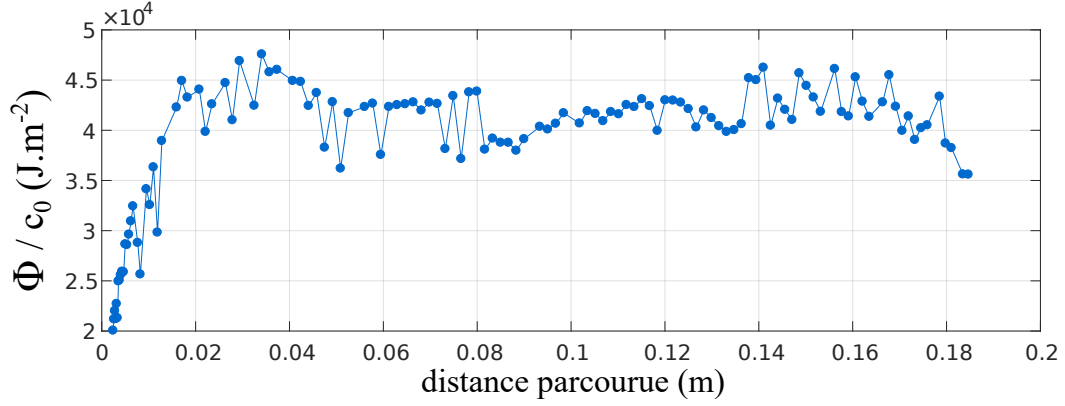


FIGURE 6.16 – Evolution du rapport flux d'énergie / vitesse de propagation (homogène au taux de restitution d'énergie) le long du parcours de la fissure. Le flux est calculé avec un contour de 6 mm de rayon.

permet de distinguer le flux d'énergie qui a potentiellement contribué à la propagation de fissure du reste de l'énergie perdue par la structure. Les limites du calcul par intégrale de contour proche de la pointe soulignées dans cette partie restreignent son utilisation pour la mesure de l'énergie de rupture à haute vitesse, c'est-à-dire la part exacte de l'énergie perdue par la structure qui est dissipée en pointe de fissure.

6.3 Conclusion

Ce chapitre clôt la dernière partie de ce mémoire en proposant une discussion de l'approche énergétique expérimentale de la rupture dynamique des élastomères. Le bilan énergétique global a été abordé. Suivant la méthode classique de Rivlin et Thomas (1953), l'objectif est de mesurer la diminution d'énergie de la structure au cours de la propagation, afin d'en déduire le taux de restitution d'énergie. Se substituant aux hypothèses simplificatrices sur l'état mécanique de la structure, la corrélation d'images autoriserait une mesure directe de cette diminution d'énergie mécanique. On montre ici que cette méthode est réalisable en propagation dynamique et avec une précision suffisante pour retrouver les valeurs théoriques dans le cas de champs homogènes (cisaillement pur en l'occurrence). La méthode proposée permet aussi, et c'est tout l'intérêt, de sortir du cas connu analytiquement pour envisager la propagation de fissure à vitesse variable dans un champ non-homogène. Le taux de restitution d'énergie global a pu être calculé tout au long de la propagation, et associé à une vitesse de propagation instantanée. Ces essais révèlent que les relations vitesse de propagation / taux de restitution d'énergie se superposent pour les différents essais (Fig.6.8). De plus, la courbe ainsi formée correspond à celle tracée à partir des essais classiques en propagation stationnaire. Ce résultat confirme donc la pertinence de l'approche consistant à mesurer les couples $(c_{stat}; G)$ et à utiliser la courbe obtenue à vitesse variable. A notre connaissance, la validité de cette méthodologie, bien qu'espérée (cf. § 2.2.2), n'a jamais été démontrée expérimentalement. Par ailleurs, sa justification théorique repose sur l'existence d'une courbe unique et caractéristique du matériau reliant

c_0 à G . Or, cette justification perd son bien-fondé en régime de propagation supersonique tandis que la courbe obtenue ici semble se prolonger dans ce cas (d’après la vitesse des ondes estimée). La courbe obtenue se compose donc de fissures aux accélérations balayant plusieurs ordres de grandeur, à partir de 0. On retrouve d’une certaine façon l’absence « d’inertie » (cf. § 1.2.4) : la relation entre la vitesse de propagation d’une fissure et la force thermodynamique qui la pilote (G) ne fait pas intervenir son accélération. Cette relation entre c_0 et G présente cependant l’inconvénient de ne pas être prédictive : connaissant ces deux paramètres à un instant donné (une photo d’un essai par exemple), elle ne donne pas de moyen de savoir si la fissure va accélérer ou non à l’instant suivant. Enfin, cette relation ne peut pas être assimilée à une donnée matériau (énergie de rupture $\Gamma(c_0)$) à haute vitesse, mais dépend de la structure.

Pour s’affranchir de ces effets de structure, l’approche intégrale propose de réaliser un bilan d’énergie au plus près de la fissure. Ainsi l’intégrale de flux permettrait de quantifier précisément l’énergie dissipée autour de la pointe, supprimant les sources de dissipation lointaines et se rapprochant donc de la mesure de Γ . Les techniques expérimentales développées dans cette étude fournissent une estimation de toutes les grandeurs nécessaires au calcul d’une telle intégrale de contour. Cependant, en vérifiant l’indépendance au contour en propagation stationnaire, nos résultats s’avèrent manquer de précision. Les causes les plus probables pour cette limitation sont le manque de données près des lèvres de la fissure (impactant à faible distance de la pointe) et la non prise en compte de l’influence de la vitesse de déformation dans le comportement du matériau (raidissement et dissipation). Contrairement au cas statique (Caimmi *et al.*, 2015a), cette méthode expérimentale ne permet donc pas de mesurer avec précision une énergie de rupture en grandes déformations qui puisse être comparée au taux de restitution d’énergie issu du bilan global. Elle a néanmoins permis de préciser certaines caractéristiques des champs autour d’une pointe de fissure dynamique, comme la contribution faible de l’énergie cinétique et l’importance de la puissance des efforts en arrière de la pointe fissure. Par ailleurs, à condition d’éviter les zones de grande vitesse de déformation, la méthode intégrale devrait permettre de donner une estimation par valeur supérieure de l’énergie dissipée au voisinage de la pointe. En effet, nous avons montré que l’intégration est réalisable, mais la taille des éprouvettes ne nous permet pas d’éviter la zone immédiatement autour de la pointe.

Conclusion générale

Ces travaux de thèse abordent, sous l'angle expérimental, la propagation de fissures à grande vitesse dans les membranes élastomères. Popularisé notamment par la démocratisation des caméras rapides, dont le film de l'éclatement d'un ballon est un classique, ce problème reste un sujet de recherche d'actualité, même si il fait l'objet de peu de publications, comparé par exemple à la fatigue de ces matériaux. En effet, sa modélisation met les modèles théoriques et numériques à l'épreuve devant la nécessité d'ajouter la dynamique et les grandes déformations au problème de rupture, d'autant plus en régime de propagation supersonique.

Historiquement, l'approche énergétique en mécanique de la rupture a été développée pour s'affranchir de la méconnaissance (aussi bien théorique qu'expérimentale) des champs en pointe de fissure. Toutefois, l'extension de cette approche aux grandes déformations dynamiques est le plus souvent limitée aux problèmes homogènes et/ou à la propagation stationnaire ; le calcul pratique du taux de restitution d'énergie dans le cas général ne fait pas consensus. Dans ce contexte, nos travaux misent sur la mesure de champs autour de la pointe de fissure pour compléter cette approche énergétique et dépasser ses limites traditionnelles. La démarche adoptée repose sur la mesure ou l'estimation de tous les champs mécaniques, afin d'analyser un essai comme le résultat d'une simulation numérique. Au-delà de l'approche énergétique globale, la mesure de champs permet aussi de faire le lien entre l'expérience et la théorie à l'échelle de la zone d'influence de la pointe de fissure. Elle offre ainsi de nouveaux points de comparaison avec la simulation numérique, ne se limitant plus aux données générales et *post-mortem* comme la trajectoire de la fissure ou l'effort à rupture. En pratique, le dispositif expérimental développé repose sur l'association de deux caméras filmant l'essai (dont une caméra à haute vitesse), la mesure de champs par corrélation d'images et le calcul des champs mécaniques par éléments finis après avoir choisi une loi de comportement.

Les contributions majeures de notre travail sont les suivantes :

- **L'observation de la propagation dynamique instationnaire de fissures jusqu'à 55 m.s^{-1} pour des niveaux de déformation de 250%.** Celle-ci souligne notamment l'importance de travailler dans la configuration de référence, même du point de vue expérimental.
- **L'application de la mesure de champs au cas de la rupture dynamique en grandes déformations pour 25000 images par seconde avec une résolution de 0,2 mm/pixel,** illustrant les possibilités actuelles mais aussi les limites (estimation des contraintes) de la technique.
- **La validation expérimentale de la relation, jusqu'à aujourd'hui postulée, entre la vitesse de propagation instationnaire et le taux de restitution d'énergie.** Le passage en régime supersonique maintient la relation, malgré l'introduction d'une dépendance à la géométrie de la structure.

Ces trois contributions reposent sur quelques méthodes spécifiques constituant à notre avis des apports secondaires de ces travaux. A ce titre, on retiendra en particulier les méthodes de calcul de la cinématique d'une fissure dans la configuration de référence et la prise en compte des non linéarité pour le calcul de la célérité des ondes. Par ailleurs, ces essais confirment qu'un régime de propagation supersonique est atteignable pour des niveaux de déformation locaux raisonnables pour un élastomère (de l'ordre de 150% pour notre matériau). Ce régime de propagation ne peut donc pas être négligé dans le cas d'applications industrielles. Même si ce résultat est conforme aux observations de quelques équipes de physiciens, il va à l'encontre de la méthode usuelle consistant à assimiler la mesure du taux de restitution d'énergie à celle de l'énergie de rupture, intrinsèque au matériau. Enfin, d'un point de vue pratique, notre base de données pourra servir au parangonnage de modèles numériques de rupture dynamique.

Bien évidemment, nos travaux sur la rupture dynamique des membranes élastomères ouvrent la voie à diverses perspectives. En premier lieu, l'utilisation directe de nos données expérimentales et de nos outils de traitement permettrait :

- D'étendre l'approche énergétique à la propagation non-rectiligne. Ainsi, les différents critères de rotation, non équivalents dans le cas général dynamique, pourraient être testés.
- D'étudier les différences au niveau des champs entre les régimes subsonique et supersonique, mais aussi la transition entre les deux. En effet, nos expériences stationnaires permettent de passer de l'un à l'autre au cours d'un même essai.
- De tester la validité des modèles actuellement développés pour la rupture des élastomères.

D'autres perspectives s'appuieraient sur des développements expérimentaux conséquents ; parmi ceux ci on peut citer : la prise en compte de la vitesse de déformation dans le comportement du matériau, ce qui reste un gageure expérimentale avec les techniques conventionnelles, et le développement d'un critère de trajectoire de fissuration qui nécessite de difficiles essais de propagation non-rectilignes.

Bibliographie

- ADDA-BEDIA, M., ARIAS, R., AMAR, M. B. et LUND, F. (1999). Generalized Griffith criterion for dynamic fracture and the stability of crack motion at high velocities. *Physical Review E*, 60(2):2366.
- AMBATI, M., GERASIMOV, T. et DE LORENZIS, L. (2015). A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 55(2): 383–405.
- AMESTOY, M. et LEBLOND, J. (1992). Crack paths in plane situations—II. detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 29(4):465–501.
- ATKINSON, C. et ESHELBY, J. (1968). The flow of energy into the tip of a moving crack. *International Journal of Fracture Mechanics*, 4(1):3–8.
- BARBER, M., DONLEY, J. et LANGER, J. (1989). Steady-state propagation of a crack in a viscoelastic strip. *Physical Review A*, 40(1):366.
- BAUMBERGER, T., CAROLI, C. et MARTINA, D. (2006). Solvent control of crack dynamics in a reversible hydrogel. *Nature materials*, 5(7):552.
- BERGKVIST, H. (1974). Some experiments on crack motion and arrest in polymethylmethacrylate. *Engineering Fracture Mechanics*, 6(4):621–622.
- BERGSTRÖM, J. et BOYCE, M. (1998). Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5):931–954.
- BORDEN, M. J., VERHOOSSEL, C. V., SCOTT, M. A., HUGHES, T. J. et LANDIS, C. M. (2012). A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217:77–95.
- BOUCHBINDER, E. (2009). Dynamic crack tip equation of motion : high-speed oscillatory instability. *Physical review letters*, 103(16):164301.
- BOUCHBINDER, E., FINEBERG, J. et MARDER, M. (2010a). Dynamics of simple cracks. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 1(1):371–395.
- BOUCHBINDER, E., GOLDMAN, T. et FINEBERG, J. (2014). The dynamics of rapid fracture : instabilities, nonlinearities and length scales. *Reports on Progress in Physics*, 77(4): 046501.
- BOUCHBINDER, E., LIVNE, A. et FINEBERG, J. (2008). Weakly nonlinear theory of dynamic fracture. *Physical Review Letters*, 101(26):264302.
- BOUCHBINDER, E., LIVNE, A. et FINEBERG, J. (2009). The $1/r$ singularity in weakly nonlinear fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(9): 1568–1577.

- BOUCHBINDER, E., LIVNE, A. et FINEBERG, J. (2010b). Weakly nonlinear fracture mechanics : experiments and theory. *International Journal of Fracture*, 162(1-2):3–20.
- BOULANGER, P. et HAYES, M. (1992). Finite-amplitude waves in deformed mooney-rivlin materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 45(4):575–593.
- BOURDIN, B., FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J. (2000). Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4):797–826.
- BRADLEY, W. et KOBAYASHI, A. (1970). An investigation of propagating cracks by dynamic photoelasticity. *Experimental Mechanics*, 10(3):106–113.
- BROBERG, K. B. (1999). *Cracks and fracture*. Elsevier.
- BUEHLER, M. J., ABRAHAM, F. F. et GAO, H. (2003). Hyperelasticity governs dynamic fracture at a critical length scale. *Nature*, 426(6963):141.
- BUEHLER, M. J. et GAO, H. (2006). Dynamical fracture instabilities due to local hyperelasticity at crack tips. *Nature*, 439(7074):307.
- BUI, H. D. (1974). Dual path independent integrals in the boundary-value problems of cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 6(2):287–296.
- BUI, H. D. (1978). *Mécanique de la rupture fragile*. Masson.
- BUSFIELD, J., TSUNODA, K., DAVIES, C. et THOMAS, A. (2002). Contributions of time dependent and cyclic crack growth to the crack growth behavior of non strain-crystallizing elastomers. *Rubber chemistry and technology*, 75(4):643–656.
- CAIMMI, F., CALABRÒ, R., BRIATICO-VANGOSA, F., MARANO, C. et RINK, M. (2015a). J-integral from full field kinematic data for natural rubber compounds. *Strain*, 51(5):343–356. STRAIN-1068.R1.
- CAIMMI, F., CALABRÒ, R., BRIATICO-VANGOSA, F., MARANO, C. et RINK, M. (2015b). Toughness of natural rubber compounds under biaxial loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 149:250–261.
- CARBONE, G. et PERSSON, B. (2005). Hot cracks in rubber : Origin of the giant toughness of rubberlike materials. *Physical review letters*, 95(11):114301.
- CHANG, S.-J. (1972). Path-independent integral for rupture of perfectly elastic materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 23(1):149–152.
- CHEN, C., ZHANG, H., NIEMCZURA, J., RAVI-CHANDAR, K. et MARDER, M. (2011). Scaling of crack propagation in rubber sheets. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(3):36009.
- CHEN, C.-H., BOUCHBINDER, E. et KARMA, A. (2017). Instability in dynamic fracture and the failure of the classical theory of cracks. *Nature Physics*, 13:1186.
- CHEREPANOV, G. (1968). Cracks in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 4(8):811 – 831.
- CHEVALIER, L., CALLOCH, S., HILD, F. et MARCO, Y. (2001). Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 20(2):169–187.
- COTTERELL, B. (1965). On brittle fracture paths. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1(2):96–103.

- COTTERELL, B. et RICE, J. R. (1980). Slightly curved or kinked cracks. *International journal of fracture*, 16(2):155–169.
- COX, B. N., GAO, H., GROSS, D. et RITTEL, D. (2005). Modern topics and challenges in dynamic fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(3):565–596.
- CURRIE, P. et HAYES, M. (1969). Longitudinal and transverse waves in finite elastic strain. hadamard and green materials. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 5(2):140–161.
- DALLY, J. W. (1979). Dynamic photoelastic studies of fracture. *Experimental Mechanics*, 19(10):349–361.
- DALLY, J. W. (1987). Dynamic photoelasticity and its application to stress wave propagation, fracture mechanics and fracture control. In *Static and Dynamic Photoelasticity and Caustics*, pages 247–406. Springer.
- D’AMICO, F., CARBONE, G., FOGLIA, M. et GALIETTI, U. (2013). Moving cracks in viscoelastic materials : Temperature and energy-release-rate measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 98:315–325.
- DE GENNES, P. (1996). Soft adhesives. *Langmuir*, 12(19):4497–4500.
- DEEGAN, R. D., PETERSAN, P. J., MARDER, M. et SWINNEY, H. L. (2002). Oscillating fracture paths in rubber. *Physical review letters*, 88(1):014304.
- DIANI, J., FAYOLLE, B. et GILORMINI, P. (2009). A review on the mullins effect. *European Polymer Journal*, 45(3):601–612.
- ERDOGAN, F. et SIH, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4):519–525.
- ESHELBY, J. (1956). The continuum theory of lattice defects. *Solid state physics*, 3:79–144.
- ESHELBY, J. (1969). The elastic field of a crack extending non-uniformly under general anti-plane loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3):177–199.
- ESHELBY, J. (1975). The elastic energy-momentum tensor. *Journal of Elasticity*, 5(3-4):321–335.
- ESHELBY, J. D. (1951). The force on an elastic singularity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 244(877):87–112.
- FERTÉ, G., MASSIN, P. et MOËS, N. (2016). 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300:347 – 374.
- FINEBERG, J. et BOUCHBINDER, E. (2015). Recent developments in dynamic fracture : some perspectives. *International Journal of Fracture*, 196(1-2):33–57.
- FINEBERG, J. et MARDER, M. (1999). Instability in dynamic fracture. *Physics Reports*, 313(1-2):1–108.
- FLINT, C. et NAUNTON, W. (1937). Physical testing of latex films. *Rubber Chemistry and Technology*, 10(3):584–614.
- FREUND, L. (1972a). Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading—i. constant rate of extension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(3):129–140.

- FREUND, L. (1972b). Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading—ii. non-uniform rate of extension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(3): 141–152.
- FREUND, L. B. (1972c). Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *Journal of Elasticity*, 2(4):341–349.
- FREUND, L. B. (1998). *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press.
- FULLER, K., FOX, P. et FIELD, J. (1975). The temperature rise at the tip of fast-moving cracks in glassy polymers. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 341, pages 537–557. The Royal Society.
- GENT, A. (1996). Adhesion and strength of viscoelastic solids. is there a relationship between adhesion and bulk properties? *Langmuir*, 12(19):4492–4496.
- GENT, A. et KIM, H. (1978). Tear strength of stretched rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 51(1):35–44.
- GENT, A. et SCHULTZ, J. (1972). Effect of wetting liquids on the strength of adhesion of viscoelastic material. *The Journal of Adhesion*, 3(4):281–294.
- GENT, A. N. et MARTENY, P. (1982a). Crack velocities in natural rubber. *Journal of Materials Science*, 17(10):2955–2960.
- GENT, A. N. et MARTENY, P. (1982b). The effect of strain upon the velocity of sound and the velocity of free retraction for natural rubber. *Journal of Applied Physics*, 53(9):6069–6075.
- GEUBELLE, P. H. et KNAUSS, W. G. (1994). Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material : I. homogeneous case. *Journal of Elasticity*, 35(1-3):61–98.
- GOLDMAN, T., LIVNE, A. et FINEBERG, J. (2010). Acquisition of inertia by a moving crack. *Physical review letters*, 104(11):114301.
- GOLDMAN BOUÉ, T. ., HARPAZ, R., FINEBERG, J. et BOUCHBINDER, E. (2015). Failing softly : a fracture theory of highly-deformable materials. *Soft Matter*, 11:3812–3821.
- GOLDMAN BOUÉ, T. G., HARPAZ, R., BOUCHBINDER, E. et FINEBERG, J. (2012). Intrinsic nonlinear scale governs oscillations in rapid fracture. *Physical review letters*, 108(10): 104303.
- GOL'DSTEIN, R. et SALGANIK, R. (1974). Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International journal of Fracture*, 10(4):507–523.
- GREENSMITH, H. W. et THOMAS, A. (1955). Rupture of rubber. iii. determination of tear properties. *Journal of Polymer Science Part A : Polymer Chemistry*, 18(88):189–200.
- GRIFFITH, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transaction of the Royal Society*, Series A, 221.
- GUDURU, P., ZEHNDER, A., ROSAKIS, A. et RAVICHANDRAN, G. (2001). Dynamic full field measurements of crack tip temperatures. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(14):1535–1556.
- GUOZDEN, T., JAGLA, E. et MARDER, M. (2010). Supersonic cracks in lattice models. *International Journal of Fracture*, 162(1-2):107–125.

- GURTIN, M. (2000). Configurational forces as basic concept of continuum physics. *Berlin, New York, Heidelberg*.
- GURTIN, M. E. et PODIO-GUIDUGLI, P. (1996). Configurational forces and the basic laws for crack propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6):905–927.
- GURTIN, M. E. et PODIO-GUIDUGLI, P. (1998). Configurational forces and a constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1343–1378.
- GURTIN, M. E. et YATOMI, C. (1980). On the energy release rate in elastodynamic crack propagation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 74(3):231–247.
- HAKIM, V. et KARMA, A. (2009). Laws of crack motion and phase-field models of fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(2):342–368.
- HARPAZ, R. et BOUCHBINDER, E. (2012). A nonlinear symmetry breaking effect in shear cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(10):1703–1709.
- HAYES, M. A. et SACCOMANDI, G. (2000). Finite amplitude transverse waves in special incompressible viscoelastic solids. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 59(1-3):213–225.
- HENRY, H. et LEVINE, H. (2004). Dynamic instabilities of fracture under biaxial strain using a phase field model. *Physical Review Letters*, 93(10):105504.
- HODGDON, J. A. et SETHNA, J. P. (1993). Derivation of a general three-dimensional crack-propagation law : A generalization of the principle of local symmetry. *Physical Review B*, 47(9):4831.
- HOFACKER, M. et MIEHE, C. (2012). Continuum phase field modeling of dynamic fracture : variational principles and staggered FE implementation. *International Journal of Fracture*, 178(1-2):113–129.
- HOLZAPFEL, G. A. (2002). Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering science. *Meccanica*, 37(4):489–490.
- HUI, C.-Y., JAGOTA, A., BENNISON, S. et LONDONO, J. (2003). Crack blunting and the strength of soft elastic solids. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 459, pages 1489–1516. The Royal Society.
- INGLIS, C. E. (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Trans Inst Naval Archit*, 55:219–241.
- IRWIN, G. R. (1957). Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361.
- JOHN, F. (1966). Plane elastic waves of finite amplitude. hadamard materials and harmonic materials. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 19(3):309–341.
- KADIR, A. et THOMAS, A. (1981). Tear behavior of rubbers over a wide range of rates. *Rubber Chemistry and Technology*, 54(1):15–23.
- KARMA, A., KESSLER, D. A. et LEVINE, H. (2001). Phase-field model of mode III dynamic fracture. *Physical Review Letters*, 87(4):045501.
- KERKHOF, F. (1973). Wave fractographic investigations of brittle fracture dynamics. *Dynamic crack propagation*, pages 29–35.

- KESSLER, D. A. et LEVINE, H. (2003). Does the continuum theory of dynamic fracture work? *Physical Review E*, 68(3):036118.
- KIRUGULIGE, M. et TIPPUR, H. (2009). Measurement of fracture parameters for a mixed-mode crack driven by stress waves using image correlation technique and high-speed digital photography. *Strain*, 45(2):108–122.
- KNOWLES, J. K. et STERNBERG, E. (1972). On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Archive for rational mechanics and analysis*, 44(3):187–211.
- KNOWLES, J. K. et STERNBERG, E. (1973). An asymptotic finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack. *Journal of Elasticity*, 3(2):67–107.
- KNOWLES, J. K. et STERNBERG, E. (1974). Finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack : Reconsideration and higher-order results. *Journal of Elasticity*, 4(3):201–233.
- KOKALY, M. T., LEE, J. et KOBAYASHI, A. S. (2003). Moire interferometry for dynamic fracture study. *Optics and Lasers in Engineering*, 40(4):231–247.
- KOSTROV, B. (1974). Crack propagation at variable velocity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 38(3):511–519.
- KRISHNAN, V. R., HUI, C. Y. et LONG, R. (2008). Finite strain crack tip fields in soft incompressible elastic solids. *Langmuir*, 24(24):14245–14253.
- KROON, M. (2011). Steady-state crack growth in rubber-like solids. *International Journal of Fracture*, 169(1):49–60.
- KROON, M. (2014). Energy release rates in rubber during dynamic crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, 51(25–26):4419 – 4426.
- LAKE, G. et THOMAS, A. (1967). The strength of highly elastic materials. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 300, pages 108–119. The Royal Society.
- LAKE, G. J., LAWRENCE, C. C. et THOMAS, A. G. (2000). High-speed fracture of elastomers : Part I. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(5):801–817.
- LARABA-ABBES, F., IENNY, P. et PIQUES, R. (2003). A new ‘tailor-made’ methodology for the mechanical behaviour analysis of rubber-like materials : Ii. application to the hyper-elastic behaviour characterization of a carbon-black filled natural rubber vulcanizate. *Polymer*, 44(3):821–840.
- LE CAM, J.-B. (2010). A review of volume changes in rubbers : the effect of stretching. *Rubber Chemistry and Technology*, 83(3):247–269.
- LE CAM, J.-B. (2012). A review of the challenges and limitations of full-field measurements applied to large heterogeneous deformations of rubbers. *Strain*, 48(2):174–188.
- LINDLEY, P. (1972). Energy for crack growth in model rubber components. *Journal of Strain Analysis*, 7(2):132–140.
- LIVNE, A., BEN-DAVID, O. et FINEBERG, J. (2007). Oscillations in rapid fracture. *Physical Review Letters*, 98(12):124301.
- LIVNE, A., BOUCHBINDER, E. et FINEBERG, J. (2008). Breakdown of linear elastic fracture mechanics near the tip of a rapid crack. *Physical Review Letters*, 101(26):264301.

- LIVNE, A., BOUCHBINDER, E., SVETLIZKY, I. et FINEBERG, J. (2010). The near-tip fields of fast cracks. *Science*, 327(5971):1359–1363.
- LIVNE, A., COHEN, G. et FINEBERG, J. (2005). Universality and hysteretic dynamics in rapid fracture. *Physical review letters*, 94(22):224301.
- LONG, R. et HUI, C.-Y. (2015). Crack tip fields in soft elastic solids subjected to large quasi-static deformation—a review. *Extreme Mechanics Letters*, 4:131–155.
- LONG, R., KRISHNAN, V. R. et HUI, C.-Y. (2011). Finite strain analysis of crack tip fields in incompressible hyperelastic solids loaded in plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(3):672–695.
- MARCKMANN, G. et VERRON, E. (2006). Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 79(5):835–858.
- MARDER, M. (1991). New dynamical equation for cracks. *Physical Review Letters*, 66(19):2484.
- MARDER, M. (2006). Supersonic rupture of rubber. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(3):491–532.
- MASON, P. (1963). Finite elastic wave propagation in rubber. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 272(1350):315–330.
- MAUGIN, G. A. (1993). *Material inhomogeneities in elasticity*, volume 3. CRC Press.
- MAUGIN, G. A. (1994). On the J-integral and energy-release rates in dynamical fracture. *Acta Mechanica*, 105(1):33–47.
- MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833.
- MOONEY, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9):582–592.
- MORAN, B. et SHIH, C. (1987a). Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(6):615 – 642.
- MORAN, B. et SHIH, C. F. (1987b). A general treatment of crack tip contour integrals. *International Journal of Fracture*, 35(4):295–310.
- MORISHITA, Y., TSUNODA, K. et URAYAMA, K. (2016). Velocity transition in the crack growth dynamics of filled elastomers : Contributions of nonlinear viscoelasticity. *Physical Review E*, 93(4):043001.
- MOTT, N. F. (1948). Brittle fracture in mild steel plates. *Engineering*, 165:16–18.
- MOULINET, S. et ADDA-BEDIA, M. (2015). Popping balloons : A case study of dynamical fragmentation. *Physical Review Letters*, 115(18):184301.
- MZABI, S., BERGHEZAN, D., ROUX, S., HILD, F. et CRETON, C. (2011). A critical local energy release rate criterion for fatigue fracture of elastomers. *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Physics*, 49(21):1518–1524.
- NAKAMURA, T., SHIH, C. F. et FREUND, L. (1985). Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture. *International Journal of Fracture*, 27(3-4):229–243.
- NIEMCZURA, J. et RAVI-CHANDAR, K. (2011). On the response of rubbers at high strain rates -I. simple waves. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2):423–441.

- NISHIOKA, T. et ATLURI, S. (1983). Path-independent integrals, energy release rates, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 18(1):1–22.
- OGDEN, R. (1970). Waves in isotropic elastic materials of hadamard, green, or harmonic type. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 18(2):149 – 163.
- OGDEN, R. W. (1972). Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. In *Proc. R. Soc. Lond. A*, volume 326, pages 565–584. The Royal Society.
- OGDEN, R. W. (1997). *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation.
- OROWAN, E. (1954). Energy criteria of fracture. Rapport technique, Massachusetts Inst of Tech Cambridge Dept of Mechanical Engineering.
- OZENÇ, K. et KALISKE, M. (2014). An implicit adaptive node-splitting algorithm to assess the failure mechanism of inelastic elastomeric continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(9):669–688.
- PAN, B., QIAN, K., XIE, H. et ASUNDI, A. (2009). Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement : a review. *Measurement science and technology*, 20(6):062001.
- PERSSON, B., ALBOHR, O., HEINRICH, G. et UEBA, H. (2005). Crack propagation in rubber-like materials. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 17(44):R1071.
- PERSSON, B. et BRENER, E. (2005). Crack propagation in viscoelastic solids. *Physical Review E*, 71(3):036123.
- PETERSAN, P. J., DEEGAN, R. D., MARDER, M. et SWINNEY, H. L. (2004). Cracks in rubber under tension exceed the shear wave speed. *Physical Review Letters*, 93(1):015504.
- PETITEAU, J.-C., OTHMAN, R., GUÉGAN, P., LE SOURNE, H. et VERRON, E. (2013). Dynamic uniaxial extension of elastomers at constant true strain rate. *Polymer Testing*, 32(2):394–401.
- PFAFF, R., WASHABAUGH, P. et KNAUSS, W. (1995). An interpretation of twyman-green interferograms from static and dynamic fracture experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 32(6-7):939–955.
- POST, D. (1954). Photoelastic stress analysis for an edge crack in a tensile field. *Proc. SESA*, 12(1):99–116.
- RAVI-CHANDAR, K. (2004). *Dynamic fracture*. Elsevier.
- RAVI-CHANDAR, K. et KNAUSS, W. (1984). An experimental investigation into dynamic fracture : III. on steady-state crack propagation and crack branching. *International Journal of fracture*, 26(2):141–154.
- RICE, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386.
- RIVLIN, R. (1948). Large elastic deformations of isotropic materials IV. further developments of the general theory. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 241(835):379–397.
- RIVLIN, R. et THOMAS, A. G. (1953). Rupture of rubber. I. characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science*, 10(10):291.

- ROSAKIS, A., SAMUDRALA, O. et COKER, D. (1999). Cracks faster than the shear wave speed. *Science*, 284(5418):1337–1340.
- ROSAKIS, A. J. (2002). Intersonic shear cracks and fault ruptures. *Advances in Physics*, 51(4):1189–1257.
- RUBLON, P., HUNEAU, B., VERRON, E., SAINTIER, N., BEURROT, S., LEYGUE, A., MOCUTA, C., THIAUDIÈRE, D. et BERGHEZAN, D. (2014). Multiaxial deformation and strain-induced crystallization around a fatigue crack in natural rubber. *Engineering Fracture Mechanics*, 123:59–69.
- SACCOMANDI, G. (2007). Finite amplitude waves in nonlinear elastodynamics and related theories : A personal overview ? In *Waves in Nonlinear Pre-Stressed Materials*, pages 129–179. Springer.
- SEPTANIKA, E.-G., ERNST, L.-J. et VAN DEN HOOFF, L.-A. (1998). An automatic and interactive large-deformation measurement system based on image processing. *Experimental Mechanics*, 38(3):181–188.
- SHARON, E. et FINEBERG, J. (1999). Confirming the continuum theory of dynamic brittle fracture for fast cracks. *Nature*, 397(6717):333.
- SHARON, E., GROSS, S. P. et FINEBERG, J. (1996). Energy dissipation in dynamic fracture. *Physical Review Letters*, 76(12):2117.
- SIDOROFF, F. (1982). Cours sur les grandes déformations. *Rapport Greco*, 51.
- STEINMANN, P., HOSSAIN, M. et POSSART, G. (2012). Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for treloar’s data. *Archive of Applied Mechanics*, 82(9):1183–1217.
- STEPHENSON, R. A. (1982). The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials. *Journal of Elasticity*, 12(1):65–99.
- STEVENSON, A. et THOMAS, A. (1979). On the bursting of a balloon. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 12(12):2101.
- STROH, A. N. (1957). A theory of the fracture of metals. *Advances in Physics*, 6(24):418–465.
- SUN, J.-Y., ZHAO, X., ILLEPERUMA, W. R. K., CHAUDHURI, O., OH, K. H., MOONEY, D. J., VLASSAK, J. J. et SUO, Z. (2012). Highly stretchable and tough hydrogels. *Nature*, 489:133.
- SUTTON, M. A., ORTEU, J. J. et SCHREIER, H. (2009). *Image correlation for shape, motion and deformation measurements : basic concepts, theory and applications*. Springer Science & Business Media.
- THOMAS, A. (1960). Rupture of rubber. VI. further experiments on the tear criterion. *Journal of Applied Polymer Science*, 3(8):168–174.
- THOMAS, A. G. (1994). The development of fracture mechanics for elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 67(3):50–67.
- TIPPER, C. F. E. (1962). *The brittle fracture story*. University Press.
- TOUSSAINT, R., LENGLINÉ, O., SANTUCCI, S., VINCENT-DOSPITAL, T., NAERT-GUILLOT, M. et MÅLØY, K. J. (2016). How cracks are hot and cool : a burning issue for paper. *Soft Matter*, 12(25):5563–5571.

- TRELOAR, L. (1943). The elasticity of a network of long-chain molecules—II. *Transactions of the Faraday Society*, 39:241–246.
- TRELOAR, L. (1944). Strains in an inflated rubber sheet, and the mechanism of bursting. *Rubber Chemistry and Technology*, 17(4):957–967.
- TSUNODA, K., BUSFIELD, J., DAVIES, C. et THOMAS, A. (2000). Effect of materials variables on the tear behaviour of a non-crystallising elastomer. *Journal of Materials Science*, 35(20):5187–5198.
- TUNNICLIFFE, L. B., THOMAS, A. G. et BUSFIELD, J. J. (2015). The free retraction of natural rubber : A momentum-based model. *Polymer Testing*, 47:36–41.
- VERRON, E. (2007). Study of the simple extension tear test sample for rubber with configurational mechanics. *International Journal of Fracture*, 147(1-4):219–225.
- VERRON, E. (2018). Modèles hyperélastiques pour le comportement mécanique des élastomères. (ref. article : am8210). Fre.
- WANG, W. et CHEN, S. (2005). Hyperelasticity, viscoelasticity, and nonlocal elasticity govern dynamic fracture in rubber. *Physical Review Letters*, 95(14):144301.
- WASHABAUGH, P. D. et KNAUSS, W. (1994). A reconciliation of dynamic crack velocity and rayleigh wave speed in isotropic brittle solids. *International Journal of Fracture*, 65(2):97–114.
- WILLIAMS, M. L., LANDEL, R. F. et FERRY, J. D. (1955). The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 77(14):3701–3707.
- WILLIS, J. (1975). Equations of motion for propagating cracks. *The Mechanics and Physics of Fracture*, pages 57–67.
- WONG, F. S. et SHIELD, R. T. (1969). Large plane deformations of thin elastic sheets of neo-hookean material. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 20(2):176–199.
- YEOH, O. (2001). Analysis of deformation and fracture of ‘pure shear’ rubber testpiece. *Plastics, Rubber and Composites*, 30(8):389–397.
- ZHANG, H., NIEMCZURA, J., DENNIS, G., RAVI-CHANDAR, K. et MARDER, M. (2009). Toughening effect of strain-induced crystallites in natural rubber. *Physical Review Letters*, 102(24):245503.

Annexe A

Observing mechanical waves during crack growth

Cette annexe rapporte une courte étude sur l'observation de la propagation d'ondes mécaniques dans l'éprouvette, immédiatement après l'amorçage et au cours de la propagation de fissures. Rédigée pour illustrer un article sur la méthode expérimentale, elle est reproduite ici en anglais.

Quite surprisingly, the good precision of the velocity field measurements offers another application to our set-up : observation of mechanical waves during crack growth. Indeed, the velocity field highlights the small displacement of the material points situated away from the crack tip, revealing the mechanical waves travelling across the sample as illustrated in Figure A.1. Top picture of Fig.A.1 presents the velocity norm in full scale, underlying the high retraction speed of the membrane right beyond the crack. This is the expected picture of the velocity in this context, with a stationary pattern in the case of a constant crack growth (Chen *et al.*, 2011). However, as the velocity field is measured with a precision of about 0.05 m.s^{-1} it is possible to reduce the scale between 0 and 1 m.s^{-1} as depicted in the bottom picture of Fig.A.1. It reveals some of the complex phenomena occurring in front of the crack tip (see supplementary videos). In a non-exhaustive manner, it exhibits :

- the influence of the material retraction ahead of the crack tip with possible wave reflection on the clamped edges (velocity larger than 1 m.s^{-1} close to the clamped edges ahead of the tip),
- the wave propagation along the horizontal axis of the specimen and reflection at the free edge (velocity up to 0.6 m.s^{-1} at the free edge),
- a point of zero velocity in front of the crack tip due to a change in the velocity sign along the horizontal axis : negative horizontal velocity close to the tip and positive far away.

The negative velocity along the direction of propagation and close to crack tip is always observed, as noticeable in Fig.4.21(a). Indeed, in front of the crack, the material is in a state of deformation close to uniaxial tension (Long *et al.*, 2011) whereas it is closer to pure shear far away. With the Poisson effect and the incompressibility of the material, the strain in the horizontal direction is large enough to induce a measurable movement of material points towards the tip, hence a measurable velocity. This effect is particularly noticeable at the beginning of the test, when the crack is initiated with a blade : the sudden appearance of the crack induces this low velocity in the initially steady membrane as shown in Figure A.2(a). The propagation of this pulse of negative velocity is observed over a few images in some tests (HS camera frequency over 20000 Hz). This

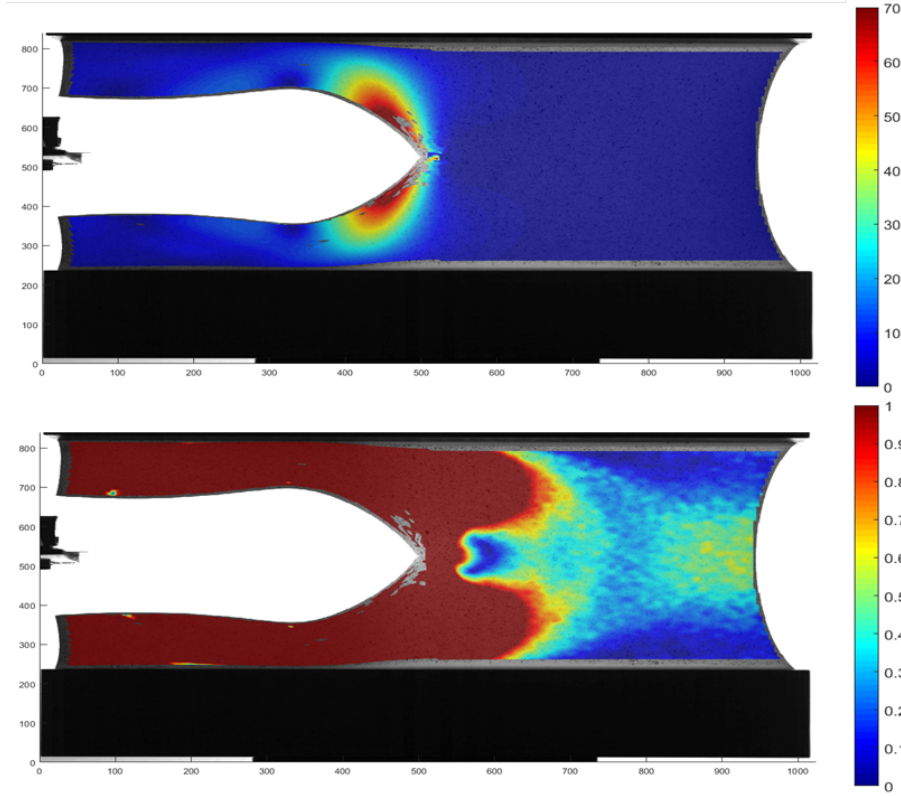


FIGURE A.1 – Norm of the velocity field (m.s^{-1}) superimposed on the picture from the HS camera. Top : full scale, 0 to 70 m.s^{-1} . Bottom : reduced scale, 0 to 1 m.s^{-1} . Prescribed stretch ratio : 3 - crack speed : 51 s^{-1} .

pulse of horizontal displacement propagating along the horizontal direction corresponds to a longitudinal wave, and its speed can be measured by following a threshold value of the velocity as plotted in Fig.A.2(b). In the case taken as example (prescribed stretch ratio of 3), the pulse propagates at about 105 m.s^{-1} (Fig.A.2(c)) for a threshold of -0.07 m.s^{-1} (the minimum speed detectable confidently given the uncertainty of $\pm 0.05 \text{ m.s}^{-1}$ on the velocity field at such low values). The velocity strongly depends on the threshold chosen, retrieving the dispersion of wave propagation in elastomers (Mason, 1963), and the value of 105 m.s^{-1} is the maximum observed for this prescribed stretch ratio. Similar results could be obtained using directly the displacement field, highlighting even more the dispersion phenomenon. However, the temporal derivative increases the sensitivity which helps the definition of a clear threshold.

Analysing the small-scale displacement and velocity fields provides useful information to understand crack motion. The importance of waves is yet recognized in the case of brittle fracture (Goldman *et al.*, 2010) and their influence on crack speed and path in the particular case of large strain could be confirmed. The longitudinal wave speed provides a reference value to characterise the crack speed. For instance, cracks in elastomer can grow faster than the shear wave speed but slower than the longitudinal wave speed : a propagation regime referred to as “inter sonic” by Petersan *et al.* (2004). This value strongly depends on the anisotropy induced by stretching the membrane made of a non-linear elastic material ; it is therefore difficult to compute it analytically. Petersan *et al.* (2004) used a specific apparatus to measure it with a time-of-flight method. Our set-up provides a direct way to measure it, with an equivalent “optical” time-of-flight method. Even without the crack growth step, a similar set-up might offer the possibility to investigate the wave

speed dependence on both direction (induced anisotropy) and amplitude.

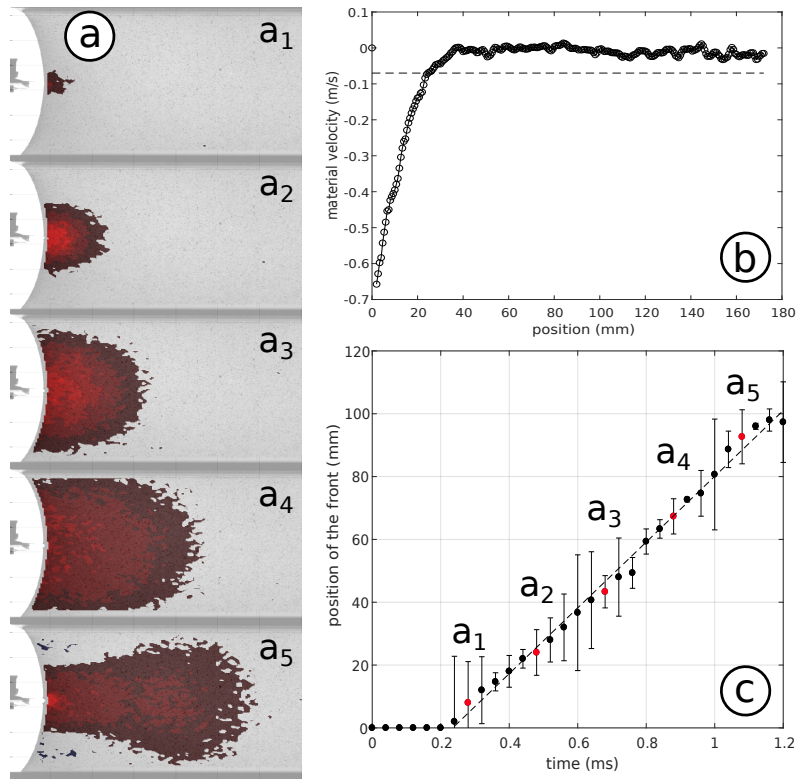


FIGURE A.2 – (a₁-a₅) Propagation of the pulse - horizontal velocity field just after the cutting (velocity less than 0.05 m.s⁻¹ in norm is blanked for clarity) . (b) Shape of the pulse - horizontal velocity along the centreline of the sample in picture a₂. Dotted line represents the threshold of -0.07 m.s⁻¹. (c) Position of the front - position on the centreline where the threshold value is reached versus time. Dotted line shows the linear fit giving a pulse speed of 105 m.s⁻¹.

Titre : Rupture dynamique de membranes élastomères : étude expérimentale par mesure de champs.

Mots clés : rupture dynamique, grandes déformations, élastomères, mesures de champs

Résumé : Cette thèse s'intéresse à la propagation dynamique de fissure dans les membranes élastomères du point de vue expérimental. Elle a pour but d'identifier les paramètres qui gouvernent la cinématique de ces fissures se propageant à grande vitesse, afin d'en prédire la trajectoire. Fondé sur l'utilisation conjointe d'une caméra à haute résolution et d'une caméra rapide, le dispositif expérimental permet de mesurer des champs à partir de la corrélation d'images au cours de la propagation de la fissure. Mis en pratique sur un polyuréthane, ce dispositif permet de retrouver la configuration de référence de l'éprouvette pendant la propagation de fissure, préalable indispensable à l'étude mécanique du problème. En plus des champs cinématiques, la densité

d'énergie élastique et les contraintes sont évaluées grâce à une loi de comportement hyperélastique. Les résultats de ces essais constituent une large base de données sur la rupture dynamique de membranes élastomères.

La méthode permet de réaliser une analyse cinématique et énergétique de la propagation stationnaire et instationnaire, toujours dans la configuration de référence. La propagation supersonique est observée pour les hauts niveaux de déformation de la membrane. Enfin, ces observations permettent une discussion sur l'utilisation de l'approche énergétique de la rupture dynamique et de la pertinence des mesures de champs actuelles pour caractériser ce type de propagation de fissure.

Title : Dynamic fracture of elastomer membranes : experimental study from full-field measurements

Keywords : dynamic fracture, finite strain, rubber material, full-field measurements

Abstract : This PhD thesis tackles the issue of dynamic fracture of elastomer membranes from an experimental point of view. It aims at providing some insight to predict the trajectories of high speed cracks under large strain. An experimental procedure involving high resolution and high speed cameras is developed in order to perform full-field measurements based on digital image correlation during crack propagation. Tested with a highly stretchable elastomer (polyurethane), this set-up permits to retrieve the material configurations of the sample all along crack growth, which is a crucial step toward a complete mechanical analysis of the problem. In addition to the kinematic fields, both strain energy density and stress fields are

estimated thanks to a hyperelastic model, which is issued from mechanical characterisation of the material. Results of these experiments provide a comprehensive database on dynamic fracture of membranes.

The method is designed to perform kinematic and energetic analyses of both steady and unsteady crack propagation in the reference configuration. Supersonic crack growth is observed for large prescribed deformation of the membranes. Finally, these observations lead to a discussion on the energetic approach in dynamic crack growth and the current applicability of full-field measurements to characterise dynamic crack growth in elastomers.