



HAL
open science

Analyse des risques sur un portefeuille de dettes

Mohamed Reda Kheliouen

► **To cite this version:**

Mohamed Reda Kheliouen. Analyse des risques sur un portefeuille de dettes. Gestion et management. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSE1145 . tel-01997951

HAL Id: tel-01997951

<https://theses.hal.science/tel-01997951>

Submitted on 29 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT :

2018LYSE1145

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale N° 486
Sciences économiques et Gestion (SEG)

Spécialité de doctorat :
Discipline : Gestion-Finance

Soutenue publiquement le 12/09/2018 par :
Mohamed Réda Kheliouen

Analyse des risques sur un portefeuille de dettes

Devant le jury composé de :

Jiao Ying, prof. des universités, ISFA, Université Lyon I **Présidente**
Laurent Jean-Paul, prof. des universités, Université Paris I Panthéon Sorbonne

Rapporteur

Donze Jocelyn, prof. des universités, Université de Strasbourg **Rapporteur**

Lévy Pierre-Emmanuel, docteur analyste quantitatif, Société Générale

Examineur

Cousin Areski, prof. des universités, Université de Strasbourg **Directeur de thèse**

Rey-Fournier Béatrice, prof. des universités, Université Lumière Lyon 2 **Co-directrice de thèse**

Et des membres invités :

Topkavi Sessi, prof. des universités, Université d'Orléans **Rapporteur**

Tchapda-Djamen Idriss, chercheur-docteur, BNP Paribas **Examineur**

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, monsieur Areski Cousin, pour toute son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a été présent lors des moments charnières, sans ses coups de "boost", cette thèse n'aurait probablement pas abouti.

Je remercie également madame Béatrice Rey-Fournier, ma co-directrice de thèse, pour avoir pris le temps de m'initier à l'économie du risque. L'ouverture de cette thèse sur les problématiques d'ambiguïté est à mettre à son actif. Je la remercie également pour ses idées et sa rigueur dans le suivi de mes travaux.

J'ai une très grande gratitude envers monsieur Idriss Tchapda-Djamen, mon responsable au sein de BNP Paribas où la première partie de cette thèse a été réalisée. Idriss m'a fait confiance, il va sans dire que sans lui cette thèse n'aurait même pas existé. Il a par ailleurs inspiré le titre de cette thèse, mais son apport va bien sûr au delà. C'est en le fréquentant, en l'interrogeant et en recueillant ses précieux commentaires et analyses que j'ai réussi à avoir les idées claires sur cette thèse. Enfin, je veux remercier Idriss pour sa sympathie et sa gentillesse, c'est auprès de lui que j'ai appris le métier d'analyste quantitatif.

Je suis très honoré que messieurs Jocelyn Donze, Jean-Paul Laurent et Sessi Tokpavi aient accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour l'intérêt et le temps qu'ils ont accordé à la lecture de ce manuscrit. Leurs commentaires très pertinents m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle ; ils sont aussi une source d'humilité car ils montrent que tout travail est perfectible et qu'il faut toujours être dans une perspective d'amélioration. Pour tout cela je les remercie.

Je tiens à remercier les autres membres du jury, madame Jiao Ying pour avoir accepté d'être présidente du jury et monsieur Pierre-Emmanuel Levy pour son rôle d'examineur. J'espère que ce travail de thèse sera à la hauteur de leurs attentes.

Un grand merci à tous les membres du laboratoire SAF et de l'ISFA, du personnel administratif, aux directeurs respectivement messieurs Christian Robert et Nicolas Leboisne sans oublier les chercheurs. Je ne saurais tous les citer mais je pense à Pierre Thérond, Stéphane Loisel, Yahia Salhi, Nabil Kazi Tani, Xavier Milhaud et beaucoup d'autres. Toutes ces personnes ont toujours témoigné de l'intérêt pour mes recherches et de la sympathie à mon égard, leurs conseils et encouragements m'ont beaucoup aidé.

Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études et notamment ces années de thèse (courage Ines). Je dois beaucoup à deux d'entre elles, les deux Julien, Julien Azzaz et Julien Tomas. Je leur souhaite du succès dans tout ce qu'ils entreprendront.

Enfin, comme promis à mon ami "Ibra" je lui retourne l'international "Big-Up" qu'il avait fait pour moi dans ses remerciements de thèse, l'aventure ne fait que commencer car Ibra et moi sommes collègues maintenant !!

Mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents Ahmed et Malika pour leur soutien indéfectible, ils ont accompagné mes premiers pas dans la vie et ne cessent d'être là aujourd'hui pour moi. J'espère les rendre fiers, merci pour tout, je leur dédie cette thèse. Grâce à

ce doctorat je rejoins une seconde fois ma soeur Nabila et mon frère Mehdi, la première fois c'était au sein de la fratrie Kheliouen, cette fois c'est au sein de la confrérie des docteurs. En effet, le doctorat est une affaire de famille, merci à eux deux pour leurs conseils et encouragements.

Last but not least, je remercie mes amis et le reste de ma famille pour leur soutien, leurs questions (parfois gênées) pour connaître l'état d'avancement de ma thèse, leur patience en écoutant mes plaintes de doctorant mais toujours leurs encouragements et leur disponibilité. Merci Lynda, Sonia, Fatouma, Nordine, Mickael, Lyes, Amine, Gaëlle, Maëlle, Toufik, Mohamed, Kahina, Rahim et plein d'autres.

En plus de mes parents, je dédie cette thèse aux êtres chers que j'ai perdus, ma grand mère "Ayi", mon oncle Mourad et mon ami Younes, paix à leur âme.

Résumé

Analyse des risques sur un portefeuille de dettes

Cette thèse de doctorat part du constat qu'un portefeuille de crédit est soumis à plusieurs risques qui proviennent principalement de la qualité de crédit de l'emprunteur et de son comportement de tirage et de pré-paiement sur ses lignes de crédit. Il s'avère que les risques observés sont dynamiques et dépendent de facteurs divers, autant micro que macro-économiques. Nous avons eu la volonté de comprendre l'articulation de ces risques pour avoir une gestion efficace de ceux-ci dans le présent, mais aussi une vision prospective si les conditions économiques changent, cela pour une gestion pro-active. Pour traiter cette problématique, nous avons articulé nos recherches autour de trois axes qui ont abouti à trois chapitres sous forme d'articles.

- (i) Analyse des changements des notations de crédit en fonction des facteurs de risque. L'utilisation des modèles de migration multi-factoriels nous a permis de reproduire des faits stylisés cités dans la littérature et d'en identifier d'autres. Nous reconstituons aussi le cycle économique entre 2006 et 2014 qui réussit à capter les crises de 2008 et 2012.
- (ii) Conception d'un modèle de cash-flow qui tient compte de l'évolution des comportements des emprunteurs sous l'influence de leurs environnements micro et macro-économiques. Nous prouvons l'influence de la notation de crédit, du cycle économique, du taux de recouvrement estimé et du taux d'intérêt court terme sur les taux d'utilisation. Ce modèle permet aussi d'obtenir des mesures de risque comme le *Cash Flow-at-Risk* et le *Stressed Cash Flow-at-Risk* sur des portefeuilles de crédit grâce à des simulations de Monte Carlo.
- (iii) Réflexion sur la Disposition-à-Payer (DAP) d'un décideur neutre à l'ambiguïté pour réduire le risque en présence d'incertitude sur les probabilités. Nous montrons que la présence de plusieurs sources d'ambiguïté (possiblement corrélées) change le bien-être d'un décideur averse au risque bien que celui-ci soit neutre à l'ambiguïté.

Abstract

Risk analysis on a debt portfolio

This thesis starts from the observation that a credit portfolio is subject to several risks, mainly due to the credit quality of the borrower and his behaviour toward his credit lines (drawdown or prepayment). It turns out that the observed risks are dynamic and depend on various factors, both micro and macroeconomic. Our goal in one hand is to understand the articulation of these risks in order to efficiently manage them in the current time, in the other hand, we want to have a forward looking vision of these risks with respect to the changes in the economic conditions in order to have a pro-active management. To address our objectives, we have articulated our research on three axes that have resulted in three chapters in the form of articles.

- (i) Analysis of changes in the credit ratings with respect to risk factors. The use of factor migration models allowed us to reproduce some stylized facts mentioned in academic literature and to identify some others. We have also estimated the business cycle between 2006 and 2014, which manages to capture the crises of 2008 and 2012.
- (ii) Design of a cash-flow model that considers the changes in borrowers' behaviour under the influence of their micro and macroeconomic environments. We prove the influence of the credit ratings, business cycle, estimated recovery rates and short-term interest rates on the utilization rates of a credit line. This model also provides risk measures such as Cash Flow-at-Risk and Stressed Cash Flow-at-Risk on credit portfolio using Monte Carlo simulations.
- (iii) Discussion on the Willingness-to-Pay (WTP) of an ambiguity neutral decision maker (DM) in order to reduce the risk in presence of ambiguity over probabilities. We show that the introduction of ambiguity through several ambiguity sources modifies the welfare level of all ambiguity-neutral and risk-averse DM when ambiguity and risk interact.

Table des matières

1	Chapitre introductif	8
1.1	Étude comparative des modèles multi-factoriels de migration des notations de crédit	8
1.1.1	Définition de la défaillance (défaut)	8
1.1.2	Définition du risque de crédit	9
1.1.3	Types de risques de crédit	9
1.1.4	La notation	10
1.1.5	Modèles multi-factoriels de migration des notations	12
1.1.6	La propriété <i>Point In Time</i> des modèles de risque de crédit	16
1.1.7	Problématiques et résultats obtenus	17
1.1.8	Résultats	20
1.2	Modèle de cash-flow pour la liquidité d'un banking book	24
1.2.1	Portefeuille bancaire (banking book) et portefeuille de négociation (trading book)	24
1.2.2	Définition d'une ligne de crédit	25
1.2.3	Rappels sur les modèles économétriques	27
1.2.4	Modèles linéaires généralisés (GLM)	29
1.2.5	Modèles additifs généralisés (GAM)	30
1.2.6	Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape (GAMLSS)	31
1.2.7	Modèles d'utilisation des lignes de crédit	32
1.2.8	Problématiques et contributions de la thèse	37
1.2.9	Résultats	42
1.3	Disposition-à-payer du décideur pour réduire partiellement ou totalement le risque en présence de deux sources d'ambiguïté	44
1.3.1	Décision dans un univers risqué	44
1.3.2	Critères d'évaluation d'une loterie	45
1.3.3	Fonction d'utilité	45
1.3.4	Modèle de théorie de l'utilité espérée (modèle de Von Neumann and Morgenstern - VNM)	46
1.3.5	Équivalent certain et prime de risque	46
1.3.6	Attitude vis-à-vis du risque et fonction d'utilité	47
1.3.7	Dominance stochastique	47
1.3.8	Introduction de l'ambiguïté	49
1.3.9	Modèle d'ambiguïté lissé (KMM)	51
1.3.10	Problématique et contribution de la thèse	52

2	A comparative study on the estimation of factor migration models	56
2.1	Introduction	57
2.2	Factor migration models	58
2.2.1	Intensity models	59
2.2.2	Structural models	60
2.3	Statistical estimation of intensity models	61
2.3.1	Conditional likelihood function	62
2.3.2	Time-homogeneous intensities	63
2.3.3	Intensities depending on observable factors	64
2.3.4	Intensities depending on unobservable factors	64
2.4	Statistical estimation of structural models	66
2.4.1	Observable factors	66
2.4.2	Unobservable factors	67
2.5	Empirical study	69
2.5.1	Data description	69
2.5.2	Time-homogeneous intensity model (no covariates)	70
2.5.3	Estimation with observable factors	72
2.5.4	Estimation with unobservable latent factors	75
2.5.5	Comparison between models	79
2.6	Conclusion	85
3	A cash-flow model for the liquidity of a banking book	87
3.1	Introduction	88
3.2	Cash-flow model for funded loans	90
3.2.1	Cash-flow model assumptions	91
3.2.2	Interest calculation	92
3.3	Cash-Flow Model	94
3.4	Driver processes of the cash-flow dynamics	95
3.4.1	Bijective relation between driver processes and cash-flow components	96
3.4.2	Risk drivers of utilization rate	98
3.4.3	Modelling of the driver processes of the cash flow	98
3.5	Empirical study	102
3.5.1	Data description	103
3.5.2	Calibration of Markov chain representing the rating migrations	106
3.5.3	Calibration of Markov chain model on obligor's actions	107
3.5.4	Calibration of the <i>one-inflated beta distribution</i> on the drawdown rate	109
3.5.5	Calibration of <i>one-inflated beta distribution</i> on the prepayment rate	112
3.6	Forecasting of cash-flows distributions	114
3.6.1	Simulation scheme	115
3.6.2	Results	115
3.6.3	Cash-flow distributions	120
3.6.4	Cash-flow per rating within baseline and adverse simulations	122
4	Willingness-to-pay for reducing risk in presence of two ambiguity sources	126
4.1	Introduction	127
4.2	The benchmark model	129
4.3	Introduction of ambiguity	131
4.3.1	The smooth ambiguity model	132
4.3.2	Neo-additive preferences	132

4.3.3	Imprecision aversion	133
4.4	Interaction between risk and ambiguity	134
4.5	Risk reduction and ambiguity	137
4.5.1	Uncertainty elimination ($\alpha = 0$)	138
4.5.2	Uncertainty reduction ($0 < \alpha < 1$)	139
4.6	Conclusion	142
Appendices		155
A	Annexe du chapitre 2	155
A.1	Proof of Proposition 2.2	155
A.2	Proof of Proposition 2.5	157
A.3	Maximisation of equation (2.4.3) using gradient	158
A.4	Other empirical results	159
A.4.1	Data summary and empirical transition matrices	159
A.4.2	Estimation in the intensity model : beta of the other observable factors	160
A.5	North America scope	161
A.5.1	Intensity model with observable factors	161
A.5.2	Structural model with observable factors	162
A.6	Western Europe scope	163
A.6.1	Intensity model with observable factors	163
A.6.2	Structural model with observable factors	164
A.7	Comparison based on different transition probabilities	165
B	Annexe du chapitre 3	168
C	Annexe du chapitre 4	177
Appendices		177
C.1	Calculation of $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$	178
C.2	Calculation of $V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$	178
C.3	Linking the WTP without ambiguity $P(w; \alpha)$ and the WTP with ambiguity $P^a(w; \alpha)$	178

Introduction

Le risque de crédit est le risque de perte associée au défaut d'un emprunteur par rapport au remboursement de sa dette, il peut porter sur le nominal, les intérêts de ce nominal mais aussi sur le taux de recouvrement en cas de défaut ou de dégradation de sa qualité de crédit. La recherche en risque de crédit a connu un essor considérable durant ces vingt dernières années, en particulier, les défis posés par les crises de 2001 (éclatement de la bulle internet), 2008 (crise de la liquidité connue aussi sous le nom de crise des *subprimes*) et 2012 (crise de la *dette souveraine* en Europe) ont poussé les chercheurs à développer des modèles qui tendent à capter les différentes sources de risque pour les firmes ainsi que leur évolution à travers les cycles économiques. Les travaux académiques sur ce sujet ont été menés suivant différentes perspectives, les articles de Carty and Fons (1993), Arvanitis et al. (1999), Crouhy et al. (2000), Israel et al. (2001), Bangia et al. (2002), Lando and Skodeberg (2002), Bauwens and Hautsch (2003), Couderc and Renault (2004), Duffy et al. (2005), Albanese and Chen (2006), Feng et al. (2007), Figlewski et al. (2008), Naldi et al. (2011) constituent un aperçu des travaux les plus représentatifs sur le sujet.

Parmi ces modèles de crédit, les modèles basés sur la notation de la qualité de crédit¹ sont devenus très populaires. Gourieroux and Tiomo (2007) définissent la notation de la qualité de crédit comme *l'évaluation du risque de non-paiement en temps et en heure de la totalité du principal et des intérêts relatifs à une obligation financière. Formellement, il s'agit d'une évaluation de la probabilité de défaillance à un certain horizon*. Ces systèmes utilisent la notation d'une firme comme la variable de décision pour évaluer le risque de défaut sur une obligation ou d'une ligne de crédit².

La popularité des modèles de notation est due à la simplicité de leur mise en oeuvre car la majorité des variables qui interviennent dans la construction des systèmes de notation sont observables, ce qui n'est pas le cas des modèles qui utilisent la valeur de la firme. Les accords de Bâle II qui permettent aux banques de fonder le calcul de leurs exigences en fonds propres sur les systèmes de notation internes et externes³ ont aussi fortement aidé à populariser ces modèles. De fait, par une connaissance plus fine des différentes sources de risque, des modèles de risque de crédit de plus en plus sophistiqués ont été développés au sein des banques pour améliorer le suivi du risque de leurs portefeuilles de crédit. En particulier, une gestion proactive du risque de crédit requiert le développement de modèles dynamiques qui s'adaptent autant à l'environnement macro-économique qu'aux caractéristiques micro-économiques des firmes. La norme IFRS 9⁴ - *Instruments financiers* qui a été mise en application à partir de janvier 2018, va dans le même sens en imposant aux banques d'avoir une vision *Point In Time* (PIT) et prospective (*Forward Looking*) de leurs indicateurs de risque. La propriété PIT d'un modèle de risque se définit comme la capacité de ce modèle à produire des indicateurs de risque qui reflètent les conditions courantes d'une firme au regard du cycle économique total. La dynamique de ces indicateurs est expliquée par des facteurs macroéconomiques. Par exemple, les probabilités de *downgrade*⁵ dans une matrice de transition seront supérieures

1. Afin de fluidifier le texte, nous utiliserons le terme notation pour désigner la notation de la qualité de crédit.

2. Nous utiliserons dans ce qui suit l'expression ligne de crédit ou le terme *loan* de manière interchangeable.

3. Dans la terminologie bâloise, l'expression *rating systems* ne concerne pas seulement la notation de la qualité de crédit mais aussi les paramètres de perte en cas de défaut (*Loss Given Default*.) ainsi que les facteurs de conversion de crédit (*Credit Conversion Factors*)

4. IFRS : International Financial Reporting Standards.

5. Nous utiliserons le mot *downgrade* pour désigner la dégradation de la qualité de crédit et le mot *upgrade*

à leur moyenne long terme si on est dans un bas de cycle économique, et inversement si la période où on calcule ces probabilités est dans un haut de cycle économique, les probabilités seront inférieures à leur moyenne long terme.

Pour répondre à cette problématique, nous avons étudié dans le deuxième chapitre de cette thèse la propriété PIT des matrices de probabilités de transition de notation⁶. En risque de crédit, les matrices de transition trouvent leur intérêt entre autre dans le calcul du capital économique, dans l'évaluation des dérivés de crédit comme les *Collateralized Debt Obligations* (CDO), dans le calcul des indicateurs de risque comme la *Credit Value-at-Risk* (CVaR) ou l'*Incremental Risk Charge* (IRC) sur les portefeuilles de crédit. Par ailleurs, le caractère PIT d'un modèle de matrice de transition permet à ce même modèle d'être utilisé pour réaliser des stress tests de crédit. En effet, le même mécanisme qui permet de lier les probabilités de transition aux facteurs de risque⁷ peut servir de vecteur de propagation d'un scénario de stress test sur les indicateurs de risque.

Plusieurs méthodes existent pour construire des matrices de transition PIT, en particulier, deux familles de modèles, les modèles structurels et les modèles à intensité sont les plus répandus. Les premiers s'appuient sur une variable de score latente et le modèle Probit ordonné pour construire des probabilités de transition, les seconds utilisent un processus de Cox multi-états et des générateurs matriciels pour produire des matrices de transition. Nous présenterons ces modèles plus en détail dans la suite (voir section 1.1.5).

Selon que les facteurs de risque sont observables ou latents, dans notre deuxième chapitre, nous identifions quatre configurations de modèles multi-factoriels de migration, à savoir, le modèle à intensité avec facteurs observables, le modèle à intensité avec facteurs latents, le modèle structurel avec facteurs observables et le modèle structurel avec facteurs latents. A notre connaissance, il n'y a pas d'étude qui compare ces quatre configurations de modèles sur un même historique de données de notations. En effet la littérature sur le sujet (voir 1.1.6) ne statue pas sur la meilleure configuration à adopter pour calibrer des matrices de transition PIT sur des facteurs de risque. Doit-on prendre des facteurs observables au risque de ne pas être exhaustif ou doit-on utiliser des facteurs latents au risque de ne pas trouver d'interprétation pour les processus qui seront inférés à l'issue de l'estimation ?

Notre travail dans le deuxième chapitre a consisté à construire ces quatre modèles multi-factoriels de migration en nous inspirant de Gagliardini and Gourieroux (2005) pour les modèles structurels et de Koopman et al. (2007) pour les modèles à intensité et à les comparer pour identifier la meilleure configuration pour reproduire les probabilités de transition empiriques d'un portefeuille d'obligations notées par *Standard and Poor's* (S&P)⁸. Nous avons utilisé l'indice de mobilité⁹ SVD développé dans Jafry and Schuermann (2004) comme critère de comparaison entre les matrices issues de l'estimation de ces modèles. En conclusion, le modèle à intensité avec facteurs observables est celui qui ajuste le mieux les probabilités de transition empiriques, il reproduit aussi fidèlement l'indice de mobilité SVD empirique. Le modèle structurel à facteurs latents quant à lui permet d'obtenir un indicateur du cycle économique qui capte les deux crises de 2008 et 2012 grâce à la maximisation de la vraisemblance

pour désigner l'amélioration de la qualité de crédit.

6. Pour alléger le texte, nous dirons dorénavant matrices de transition pour nommer les matrices de probabilités de transition de notations.

7. Nous utiliserons l'expression facteurs de risque, facteurs explicatifs ou variables explicatives de manière interchangeable dans le texte.

8. L'historique des notations porte sur 2875 firmes ayant émis des obligations et il concerne la période [01/2006 – 01/2014] avec une fréquence d'observation mensuelle.

9. Un indice de mobilité est une fonction $M(\Pi)$ de $\mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ où $d \times d$ sont les dimensions de la matrice Π . Par convention $M(I) = 0$, avec I la matrice identité.

du filtre de Kalman.

Le troisième chapitre de cette thèse part du constat que les crises des *subprimes* en 2008 et de la *dette souveraine* en 2012 ont montré que le risque de crédit n'est pas seul à l'origine de la chute des acteurs financiers mais c'est la conjonction, entre autres, du risque de crédit et des risques de liquidité/financement qui peut mener une banque ou un assureur à la banqueroute (exemple de *Lehmann Brothers*). Le comité de Bâle définit la liquidité comme la capacité de la banque à fournir de nouveaux financements et à honorer ses engagements (rembourser ses dettes ou financer ses portefeuilles) sans subir de pertes excessives. Comme le note [Strahan \(1999\)](#), une ligne de crédit expose la banque à un double risque; un risque de liquidité car elle s'engage à financer l'emprunteur à tout moment (à condition que ce dernier respecte ses engagements) et un risque de crédit car l'emprunteur est susceptible de faire défaut. L'emprunteur, de par son comportement, tirage, pré-paiement¹⁰ ou remboursement anticipé peut augmenter ou diminuer le risque de liquidité de la banque.

Pour adresser correctement l'articulation de ces risques dans un portefeuille de lignes de crédit, nous avons posé les questions suivantes : quels sont les groupes d'emprunteurs les plus susceptibles de tirer davantage (ou prépayer) sur leur ligne de crédit si leurs conditions propres ou les conditions macroéconomiques changeaient ? A quel horizon de temps ? Dans quelles proportions ? Et quelles expositions aurait la banque à différents horizons de temps ?

Nous avons développé un modèle de cash-flow qui reproduit le comportement d'une ligne de crédit à remboursement in fine dite *bullet loan*¹¹ dans un portefeuille bancaire (*banking book*). Cette construction permet de tenir compte de la majorité des processus qui interviennent dans la vie d'une ligne de crédit, spécifiquement, les tirages, les pré-paiements, le paiement des intérêts, le paiement des frais d'engagement¹², la variation du montant d'autorisation ainsi que la variation de la qualité de crédit de l'emprunteur¹³. Ce modèle de cash-flow a ensuite été relié à des facteurs de risque micro et macro-économiques pour avoir la vision PIT et pouvoir projeter les cash-flows futurs à travers la simulation des processus cités précédemment en fonction des scénarii : central et stressé.

Notre modèle reproduit la majorité des faits stylisés évoqués dans la littérature sur le sujet (voir [1.2.7](#)), à savoir, l'influence de la qualité de crédit sur le taux de tirage ou de pré-paiement, la plus grande sensibilité des firmes *non-investment grade* aux facteurs macro-économiques, l'influence du taux de recouvrement estimé¹⁴ des lignes de crédit sur le taux de tirage et enfin l'existence de tirages ou de pré-paiements totaux. Les articles de [Richard and Roll \(1989\)](#), [Marker \(1997\)](#), [Cossin and Lu \(2004\)](#), [Duffy et al. \(2005\)](#), [Kim \(2005\)](#), [Agarwal et al. \(2006\)](#), [Paulsen \(2007\)](#), [Sufi \(2009\)](#), [Jiménez et al. \(2009\)](#), [Schertler et al. \(2010\)](#), [Sarin and Muenster \(2012\)](#), [Sarin and Klein \(2012\)](#) constituent un aperçu des travaux sur le sujet.

10. Une ligne de crédit dans laquelle l'emprunteur peut tirer ou prépayer à sa convenance est appelée aussi ligne de crédit revolving.

11. Dans le langage bancaire, le *bullet loan* est un loan à remboursement in fine, c'est une ligne de crédit sur laquelle la banque s'engage à financer l'emprunteur jusqu'à un montant d'autorisation et une période prédéfinis. L'emprunteur quant à lui paye le droit de tirer ou de prépayer sur sa ligne de crédit à tout moment. Il a seulement pour obligation de payer des intérêts sur le nominal emprunté et de rembourser ce dernier à l'échéance du contrat.

12. Les frais d'engagement, appelés *commitment fees* en anglais s'apparentent à la prime de liquidité que charge la banque à son client au titre de son engagement à lui fournir des liquidités sans repasser par une demande de crédit.

13. Une extension au cas où la banque voit sa propre notation évoluer et donc sa capacité de financement changer peut facilement être intégrée au modèle.

14. Le taux de recouvrement a été mesuré à l'aide de l'indicateur de *Gross Recovery Rate* (GRR) qui est égal à $1 - LGD$.

Nous montrons dans notre application que le regroupement de ces *singles loans* par classes de notation peut permettre une gestion différenciée et donc plus efficace du risque de liquidité qui leur est associé. Les simulations aboutissent aussi au calcul d'un *Cash Flow-at-Risk* (CFaR)¹⁵ sur un portefeuille de loans en scénarii central et stressé.

Le lien avec le deuxième chapitre est fait par l'intermédiaire du modèle à intensité avec facteurs observables que nous utilisons dans ce troisième chapitre pour modéliser les migrations de notation des emprunteurs en fonction des facteurs de risque mais aussi pour modéliser la chaîne de Markov à trois états que constitue le comportement des emprunteurs. En effet, si on considère les trois actes possibles d'un emprunteur : *tirage*, *pré-paiement* ou *rien*, nous pouvons construire une chaîne de Markov à trois états et relier les intensités de migration entre les actes à des facteurs de risque. Nous prouvons dans le troisième chapitre que le comportement des emprunteurs est sensible aux facteurs de risque mais cette sensibilité diffère selon leur qualité de crédit. Le comportement des emprunteurs est par ailleurs aussi sensible à des facteurs macro-économiques comme le cycle économique ou les taux d'intérêt à court terme (3 mois). Le processus des tirages a été modélisé sous forme de fraction de la part non utilisée de la ligne de crédit alors que le processus des pré-paiements a été modélisé sous forme de fraction de la part utilisée. La somme de la part non utilisée et de la part utilisée à tout moment donne le montant global d'autorisation.

De part leur nature, les processus de tirage et de pré-paiement appartiennent à l'intervalle $]0; 1]$ avec une masse de probabilité non nulle sur le point 1 pour refléter la probabilité de tirer totalement sur la ligne de crédit ou de la prépayer totalement. Nous avons utilisé une distribution *Bêta inflatée en 1* qui consiste en un mélange de distributions entre une loi *Bêta* et une distribution dégénérée en 1 pour capter la distribution des variables de tirage et de pré-paiement. L'utilisation du cadre des modèles additifs généralisés pour la position, l'échelle et la forme (GAMLSS) permet de lier les paramètres de la distribution *Bêta inflatée en 1* à des facteurs explicatifs. Une simulation de Monte Carlo qui combine tous les processus cités précédemment permet de produire des distributions de cash-flows en fonction des scénarii économiques voulus. Le modèle de cash-flow ainsi constitué pourra refléter le comportement des emprunteurs à travers le cycle économique et permettre de mieux appréhender les risques liés à la liquidité et au financement dans une démarche globale de stress test de portefeuille de crédit.

Le quatrième chapitre de cette thèse part du constat que le caractère rare des événements de défaut pour certains types de contreparties (états, banques, assurances par exemple) ainsi que la profondeur limitée des données de notation font que l'estimation des paramètres de risque souffre d'une forte instabilité. Cette instabilité se matérialise sous la forme d'un ensemble de valeurs possibles avec une vraisemblance associée non nulle. Nous parlerons alors d'incertitude ou d'ambiguïté sur les paramètres de risque, incertitude et ambiguïté étant équivalentes dans notre propos. Combien alors un décideur serait-il prêt à payer pour réduire ou éliminer son risque de perte lorsque les paramètres qu'il utilise pour évaluer ce risque sont incertains ? La réponse actuellement apportée par les régulateurs s'apparente au critère *Maxmin* de Wald de décision dans l'incertain, i.e., de considérer les pires cas possibles dans l'estimation des paramètres et de provisionner des fonds propres en conséquence. Une réponse plus "fine" est possible si l'on évalue distinctement les différents éléments que cette question soulève, à savoir l'expression du risque, l'expression de l'ambiguïté, l'attitude du décideur vis-à-vis du risque et son attitude vis-à-vis de l'ambiguïté. Le comportement d'un décideur en univers incertain

15. Le *Cash Flow-at-Risk* peut avoir différentes définitions selon le contexte, dans le cas d'une banque qui possède un portefeuille de loans, le CFaR se définit comme le montant agrégé des flux financiers sortant du portefeuille (tirage ou non remboursement) que peut subir une banque sur un horizon de temps donné et avec une probabilité donnée.

est traité abondamment dans la théorie de la décision en incertitude, nous utilisons dans le chapitre quatre les outils développés dans celle-ci pour répondre à notre problématique. L'un des principaux résultats des travaux sur l'incertitude est qu'en présence d'ambiguïté sur les probabilités, un agent¹⁶ averse à l'ambiguïté sera disposé à payer un montant strictement positif pour réduire partiellement ou totalement l'ambiguïté sur les probabilités.

L'apport de ce quatrième chapitre de thèse consiste à traiter le cas d'un décideur averse au risque et neutre à l'ambiguïté mais qui est confronté à de l'ambiguïté sur les probabilités. Nous montrons de manière contre intuitive que la présence d'ambiguïté va influencer la disposition-à-payer du décideur pour réduire ou éliminer le risque et l'ambiguïté alors même que ce dernier est neutre à l'ambiguïté. Pour ce faire nous avons réduit le portefeuille d'investissement à deux loteries binaires qu'on peut interpréter comme des prêts bancaires. Chaque loterie possède deux états, le premier est associé à la perte due au défaut de l'emprunteur donc au non remboursement de sa dette (mauvais état de la nature), le second est associé au profit réalisé si l'emprunteur ne fait pas défaut et rembourse le nominal + intérêts (bon état de la nature). L'ambiguïté est introduite sur les probabilités de réalisation du mauvais état de la nature, en effet, dans le cas d'un prêt bancaire si on observe peu de défauts, les estimations des probabilités de défaut sont peu fiables car non robustes.

Dans ce travail de thèse, nous considérons deux sources d'ambiguïté portées par deux variables aléatoires d'espérance nulle, chaque variable aléatoire s'ajoute à la probabilité de mauvais état dans une des loteries. Nous définissons ensuite la *Disposition-à-Payer* (DAP) comme le montant de sa richesse qu'un décideur est prêt à payer pour ne faire face qu'au bon état de la nature (cas de réduction totale du risque) ou réduire le risque de faire face au mauvais état de la nature (cas de réduction partielle du risque). En utilisant le modèle d'utilité espérée sous ambiguïté de [Klibanoff et al. \(2005\)](#), dit aussi *smooth ambiguity model*, qui permet de définir une loi de probabilité sur les lois de probabilités a priori possibles et une fonction d'ambiguïté destinée à prendre en compte l'attitude vis-à-vis de l'ambiguïté du décideur, nous exprimons l'utilité espérée du décideur en présence d'ambiguïté sur les probabilités.

En présence de deux sources d'ambiguïté, l'utilité espérée d'un décideur neutre à l'ambiguïté s'écrit comme son utilité espérée sans ambiguïté plus un terme d'interaction entre le risque et l'ambiguïté. Nous montrons que ce terme peut être non nul, ce qui prouve que l'ambiguïté influence le bien-être d'un décideur alors que celui-ci est neutre à l'ambiguïté. Nous comparons ensuite la DAP du décideur pour une réduction du risque en présence d'ambiguïté sur les probabilités avec celle qui a la même fonction mais en absence d'ambiguïté. Nous montrons alors que dans le cas d'une réduction totale du risque et de l'ambiguïté, la différence des DAP a le même signe que l'effet d'interaction entre le risque et l'ambiguïté. Cet effet est le produit de la covariance entre les deux sources d'ambiguïté et d'un terme qui dépend de la fonction d'utilité du décideur. Nous montrons que cet effet d'interaction peut être signé facilement si on pose la condition de *mixed risk averse* sur la fonction d'utilité. Dans le cas d'une réduction partielle du risque et de l'ambiguïté, le signe de la différence des deux DAP est plus complexe à traiter, il requiert des hypothèses supplémentaires au delà du signe de l'effet d'interaction cité dans le cas précédent.

Grâce aux résultats du quatrième chapitre, nous montrons qu'un décideur averse au risque, bien qu'il soit neutre à l'ambiguïté, si l'ambiguïté s'exerce sur les probabilités, il sera néanmoins influencé par celle-ci lors de sa gestion du risque.

Cette thèse de doctorat est composée de quatre chapitres, dans le premier, intitulé *Chapitre introductif*, nous ferons les rappels théoriques nécessaires à la compréhension des sujets, nous

16. Nous utiliserons les termes agent, décideur ou decision maker de manière équivalente dans le texte.

ferons une revue de la littérature pour chacun des sujets et enfin nous introduirons les différentes problématiques et résumerons l'apport de notre thèse pour les traiter.

Les trois autres chapitres s'intitulent respectivement : *A comparative study on the estimation of factor migration models*, *A cash-flow model for the liquidity of a banking book* et *Willingness-to-pay for reducing risk in presence of two ambiguity sources* et sont présentés sous forme d'articles.

Nous terminerons notre thèse par une section *Conclusion et perspectives*.

Chapitre 1

Chapitre introductif

1.1 Étude comparative des modèles multi-factoriels de migration des notations de crédit

Nous rappellerons dans cette partie les principaux éléments du risque de crédit, allant de la définition de la notion de défaillance (ou défaut), le risque de crédit que celle-ci engendre, en passant par la définition de la notation (ou score, ou rating) et enfin en présentant les deux grandes familles de modèles de migration de notation de la qualité de crédit. Nous terminerons cette partie par la présentation de la problématique et de l'apport de nos travaux. Il est à noter que la majorité des éléments de rappel est extraite de [Gourieroux and Tiomo \(2007\)](#) qui propose une revue des approches classiques de modélisation du risque de crédit.

1.1.1 Définition de la défaillance (défaut)

La défaillance d'une entreprise exprime un état d'insolvabilité constaté à une échéance donnée. Celui-ci engage l'entreprise dans un processus économique, juridique, voire judiciaire, impliquant un ou plusieurs prêteurs. Il existe cependant, avant la cessation des paiements et son éventuelle conséquence judiciaire le dépôt de bilan, une période de vulnérabilité durant laquelle les créanciers, les actionnaires ou les régulateurs peuvent être alertés des difficultés rencontrées par l'entreprise et mettre oeuvre des mesures de prévention (provision ou renégociation de dette, notamment).

Le Comité de Bâle définit le défaut de la façon suivante (Article 178 de la Capital Requirement Regulation (CRR), Juin 2013)

- a) l'établissement estime que, sauf recours à des mesures telles que la réalisation de la garantie, le débiteur ne pourra probablement pas s'acquitter intégralement de ses obligations de crédit envers lui, son entreprise mère ou l'une de ses filiales;
- b) l'arriéré du débiteur sur une obligation de crédit significative envers l'établissement, son entreprise mère ou l'une de ses filiales est supérieur à 90 jours. Les autorités compétentes peuvent remplacer le délai de 90 jours par 180 jours pour les expositions garanties par des biens immobiliers résidentiels ou commerciaux des Petites et Moyennes Entreprises (PME) dans la catégorie des expositions sur la clientèle de détail, ainsi que pour les expositions sur les entités du secteur public.

La définition du défaut laisse une certaine latitude au prêteur, ainsi, la première condition i) peut conduire à un défaut sans qu'il y ait de retard de paiement de la part du débiteur. En pratique, la banque pourrait considérer qu'il y a défaut si les provisions introduites pour couvrir

ce risque potentiel dépassent un certain seuil. Les agences de notation (Moody's, Standard & Poor's, et Fitch, principalement) ne peuvent évidemment utiliser une définition à la latitude partielle du prêteur. Chez Moody's par exemple, un débiteur est considéré en défaut lorsque l'un des trois événements suivants se produit :

- i) un défaut ou un retard de paiement des intérêts ou du principal (incluant les retards de paiement ayant fait l'objet d'une négociation);
- ii) une faillite du débiteur;
- iii) une modification du contrat initial où le débiteur donne au détenteur du titre de créance de nouvelles valeurs dans le but de diminuer ses obligations financières, ou bien où la modification a pour but apparent d'aider l'emprunteur à éviter le défaut de paiement.

1.1.2 Définition du risque de crédit

Le risque de crédit est le risque de perte inhérent au défaut d'un emprunteur par rapport au remboursement de ses dettes (obligations, prêts bancaires, créances commerciales...). Ce risque se décompose en risque de défaut qui intervient en cas de manquement ou retard de la part de l'emprunteur sur le paiement du principal et/ou des intérêts de sa dette, risque sur le taux de recouvrement en cas de défaut, et risque de dégradation de la qualité du portefeuille de crédit. Il s'agit de la forme la plus ancienne du risque sur les marchés des capitaux.

1.1.3 Types de risques de crédit

Divers types de risques de crédit peuvent être distingués selon les instruments financiers considérés.

- **Instruments où des mécanismes de remboursement sont prévus dans le contrat**
L'exemple le plus simple est celui des crédits classiques. Le risque se révèle en cas de non-exécution d'un paiement prévu : non-exécution d'un paiement à la date d'échéance, paiement partiel à la date d'échéance, ou report d'un paiement prévu, ou de défaut d'une contrepartie : incapacité d'une contrepartie à respecter certaines de ses obligations, nécessité pour une contrepartie de reporter certaines de ses obligations, ou encore incapacité d'une contrepartie de continuer à émettre des produits de crédit.
- **Instruments dont les dates de paiement et(ou) les montants ne sont pas connus a priori**
Le risque peut exister pour des instruments à vue, des crédits à taux variable, des instruments ne portant que sur l'intérêt, des instruments rachetables.
- **Produit dont le paiement est fonction de certaines conditions**
De tels actifs sont par exemple les options, les swaps de crédit relatifs à des entreprises, ou le crédit bail. Le risque provient du risque de défaut d'une contrepartie, et non du risque de défaut sur l'instrument lui-même.
- **Devise**
La dévaluation d'une devise peut être considérée comme une forme de risque de crédit. Lorsqu'un émetteur promet de verser à un prêteur des montants précis dans une devise déterminée à des dates futures prédéfinies, on suppose de façon implicite que la devise conservera sa valeur (ou au moins ne chutera pas en deçà d'une valeur plancher présumée raisonnable). Cependant, compte tenu de la période parfois longue d'application de produits du crédit, on peut assister à une détérioration soutenue de la valeur de devise

dans les pays les moins développés, mais aussi dans des pays industrialisés, ceci au détriment des créanciers. La dévaluation d'une devise constitue une question complexe, qui est habituellement abordée de façon distincte dans le cadre du risque de taux de change.

- **Décotes**

Les décotes, bien qu'elles ne constituent pas un défaut au plan technique, ont un effet négatif sur la valeur marchande de l'instrument en rendant le placement moins attrayant au plan commercial et en laissant supposer une probabilité accrue de défaut à une date ultérieure. Au niveau du portefeuille, une décote peut, théoriquement, être compensée par une appréciation simultanée d'un autre instrument. Cependant, il peut exister une forte contagion des décotes rendant très probable la survenance simultanée de décotes multiples (corrélation de décote). Au niveau du portefeuille, la diversification peut atténuer, mais non éliminer complètement ces risques. Sur les marchés financiers où les instruments de crédit sont cotés régulièrement, le risque de défaut est souvent évalué par les différentiels de taux (ou spreads), qui traduisent en termes monétaires la vraisemblance de non-remboursement. L'évolution incertaine de ces différentiels constitue aussi une forme de risque de crédit, qui influe sur la valeur de marché de ces titres. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire que le défaut se réalise pour que le risque de crédit affecte négativement la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs.

- **Lignes de crédit**

Enfin, le risque associé à une ligne de crédit accordée à une entreprise ou à un particulier (carte de crédit) et non encore pleinement utilisée. Dans une mauvaise situation financière, l'emprunteur peut accroître l'utilisation de sa ligne et donc l'exposition à la date de défaut. Le risque passe par l'augmentation endogène de cette exposition.

1.1.4 La notation

1.1.4.1 Définition de la notation

La notation est l'évaluation du risque de non-paiement en temps et en heure de la totalité du principal et des intérêts relatifs à une obligation financière. Formellement, il s'agit d'une évaluation de la probabilité de défaillance à un certain horizon. Il existe a priori autant de notations, que de prêts, d'emprunteurs, de termes possibles et de définitions de la défaillance (voir section 1.1.1).

On distingue généralement les notations présentées de façon quantitative ou score, de celles présentées de façon qualitative ou rating. Un exemple de score est l'estimation d'une probabilité de défaillance à un certain horizon, à valeurs entre 0 et 100 (%). Des ratings peuvent se déduire de scores sous-jacents, en constituant des classes de scores, le rating le plus élevé étant attribué si la probabilité de défaillance estimée est par exemple inférieure à 0.3 %, et ainsi de suite... Pour un rating qualitatif, l'échelle de notation comporte généralement entre 8 et 10 échelons (voir Tableau 1.1 pour les échelons des principales agences de notation.)

Fitch, S & P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C	D
Moody's	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca	C	D

TABLE 1.1 – échelles des notations

Ces échelons sont présentés par ordre de risque croissant : AAA étant la meilleure notation, D désignant la défaillance.

1.1.4.2 Utilisation des notations

Des notations du prêt ou de l'emprunteur sont souvent utilisées en interne pour décider des accords de crédit et des caractéristiques de ceux-ci : montant, taux du crédit, durée du crédit. Cependant, d'autres utilisations expliquent la nécessité de notations plus uniformisées.

- i) Toute émission d'obligation, c'est-à-dire de dette sur le marché, doit s'accompagner d'une information sur la notation de la dette par une agence de notation agréée. Le but est d'informer les investisseurs sur le niveau de risque. L'émetteur peut choisir comme il le souhaite l'une des agences agréées et en changer lors d'une émission future.
- ii) Des contraintes peuvent être imposées à certains investisseurs comme les fonds de pension pour leur éviter de prendre des risques inconsidérés. Ainsi, on distingue habituellement les catégories investissement, rating de AAA à BBB, et spéculatives de BB à D, ces dernières plus connues sous le terme grand public de *junk bonds*. Les fonds de pension n'ont par exemple pas l'autorisation d'investir en dette spéculative.
- iii) Le changement actuel de la réglementation donne un nouveau rôle aux notations, le montant des fonds propres réglementaires dépendant de la note.

1.1.4.3 Mise en place de score ou de rating

Il existe deux grandes approches pour attribuer des notations à des prêts ou des emprunteurs.

- i) Une première approche repose sur l'opinion d'experts ; on parle de score par expertise. Elle reste prépondérante pour les notations des grandes entreprises, des pays, des collectivités locales, des financements de projets. Elle s'appuie sur une analyse approfondie des bilans, des projets et sur une comparaison avec les notations des agences.
- ii) Une seconde approche s'appuie sur des analyses statistiques des défaillances observées dans le passé pour des dettes ou des emprunteurs comparables. Elle est prépondérante pour les crédits à la consommation, les prêts hypothécaires, les crédits permanents (cartes de crédit), les prêts aux petites et moyennes entreprises. Par son caractère plus automatique, elle est très adaptée à la gestion des accords de crédit en ligne. La technique la plus employée est celle des modèle logit (voir [Gourieroux and Jasiak \(2011\)](#) pour une description approfondie des diverses approches). On se fixe un horizon de prévision de défaillance, disons un an. A partir de crédits accordés dans le passé, on construit des bases de données comportant des caractéristiques de l'emprunteur et du prêt, X_i disons, et le fait qu'il y ait eu ou non défaillance durant la première année du prêt, représenté par une variable indicatrice Z_i . Ces données sont utilisées pour calibrer un modèle logit :

$$P [Z_i = 1|x_i] = \frac{1}{1 + e^{-(\beta, X_i)}} \quad (1.1.1)$$

où β désigne un vecteur de paramètres inconnus. La note est alors donnée par $s(X_i) = \left[1 + e^{-(\hat{\beta}, X_i)}\right]^{-1}$, où $\hat{\beta}$ désigne l'estimation de β . Cette note, comprise entre 0 et 1, donne une estimation de la probabilité de défaillance au cours de la première année. Elle peut s'appliquer à toute entreprise pour laquelle les valeurs des variables explicatives X_i sont disponibles, en particulier pour de nouvelles demandes de prêt. Présentée ci-dessus pour un accord de prêt, cette technique peut aussi être utilisée pour suivre le risque en cours de prêt. Les variables explicatives peuvent alors inclure d'autres informations relatives au comportement de remboursement de l'emprunteur. On parle de score de comportement.

1.1.5 Modèles multi-factoriels de migration des notations

L'utilité de capturer le caractère stochastique des matrices de transition réside dans la possibilité de faire varier les probabilités de transition en fonction des facteurs de risque. On parle alors de propriété *Point In Time* d'une matrice de transition. Celle-ci se définit comme la tendance d'un modèle à produire des indicateurs de risque qui varient selon le positionnement dans le cycle économique. Nous présentons dans cette section les deux familles de modèles multi-factoriels de migration des notations que nous avons utilisés pour capter la propriété *Point In Time* des matrices de transition. Dans la section suivante (1.1.6), nous ferons une revue des travaux qui montrent l'importance de tenir compte du caractère *Point In Time* des matrices de transition pour expliquer les dynamiques de changement des notations.

1.1.5.1 Les modèles structurels

La première famille de modèles est fondée sur une idée structurelle initialement introduite par Tobin (1958) mais popularisée par Black and Scholes (1973) et Merton (1974). Celle-ci suppose qu'il y a défaillance de l'entreprise lorsque la valeur de l'actif du bilan, A (Assets), devient inférieure à la valeur des dettes, souvent assimilée au passif du bilan diminué des fonds propres, L (Liabilities). Une variable seuil est déduite de cette définition, Gagliardini and Gourieroux (2005) la décrit comme le ratio $\frac{A}{L}$ et le franchissement d'une barrière précipite la firme en défaut. Le modèle de base a donné lieu à de nombreuses variantes qui ont étendu le cadre théorique en relaxant certaines hypothèses restrictives. Nous citerons le modèle de Black and Cox (1976) qui permet un défaut avant l'échéance, le modèle de Kim et al. (1993) qui permet un taux d'intérêt stochastique, le modèle de Longstaff and Schwartz (1995) qui considère le taux de recouvrement comme une fraction de l'obligation zéro coupon sans risque, le modèle de Briys and de Varenne (1997) qui propose la prise en compte des frais de faillite ainsi que la possibilité de faire défaut sans que la valeur de la firme ne soit inférieure à la barrière à l'échéance.

Le même raisonnement de franchissement de barrière est tenu pour modéliser le changement de notation d'une firme, dans ce cas on définit autant de barrières que de niveau de notation et la barrière du défaut devient un cas particulier. Une généralisation du modèle structurel aboutit à relaxer la contrainte sur l'interprétation économique de la variable seuil, i.e., celle-ci est définie comme une variable latente inobservable pour laquelle aucune interprétation économique (a priori) n'est nécessaire. Comme le note Albanese et al. (2003), la variable seuil dans le modèle généralisé¹ n'est qu'une abstraction mathématique qui facilite la construction d'une mesure risque-neutre qui s'ajuste au mieux aux événements de migration observés. L'intérêt d'une telle modélisation est double, (i) il n'est plus nécessaire d'utiliser la valeur de la firme comme dans le modèle structurel de Merton, sachant que cette donnée requiert l'accès au bilan détaillé de la firme, information qui n'est pas publique. (ii) La possibilité de conditionner la variable seuil à différents facteurs de risque, micro et macro économiques mais aussi à des variables inobservables qui capteraient l'information qui n'est pas captée par les variables observables.

1. Le modèle qui généralise le modèle structurel de Merton est appelé modèle à barrières dans Gourieroux and Tiomo (2007).

1.1.5.2 Modèle Probit ordonné

Formellement, nous considérons un modèle à temps discret où une firme l change de notation quand un processus latent S^l franchit une barrière prédéfinie. La notation de la firme l à une date t est donnée par la position de la variable S_t^l dans une partition de la droite réelle $-\infty = C_{d+1} < C_d < \dots < C_{i+1} < C_i < \dots < C_1 = +\infty$, où d représente le défaut et 1 la qualité de crédit la plus élevée. La notation R_t^l s'écrit,

$$R_t^l = \sum_{i=1}^d i \mathbf{1}_{\{C_{i+1} \leq S_t^l < C_i\}}. \quad (1.1.2)$$

Différentes formalisations de S^l sont proposées dans la littérature (voir en exemple [Nickell et al. \(2000\)](#), [Bangia et al. \(2002\)](#), [Albanese et al. \(2003\)](#), [Feng et al. \(2007\)](#)), la version la plus générale est présentée dans [Gourieroux and Tiomo \(2007\)](#) et [Feng et al. \(2007\)](#) où le seuil S_t^l est exprimé comme une transformation affine d'un vecteur de facteurs de risque communs X_t et d'un facteur idiosyncratique indépendant ε_t^l . Les caractéristiques de cette transformation affine dépendent de la notation de la firme en $t - 1$. La variable latente S_t^l s'écrit,

$$S_t^l = \alpha_i + \langle \beta_i, X_t \rangle + \sigma_i \varepsilon_t^l, \quad (1.1.3)$$

où

- $l = \{1, \dots, n\}$ est le nombre de firmes de la population étudiée,
- $t = \{1, \dots, T\}$ le nombre de périodes,
- ε_t^l sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes,
- X_t vecteur des facteurs de risque, de taille $[K \times 1]$, indépendants du bruit.

Ensuite trois paramètres sont introduits en lien avec la notation de départ $R_{t-1}^l = i$, $\theta = (\alpha_i, \beta_i, \sigma_i)$:

- α_i constante liée à i , représente l'effet de la notation,
- β_i représente la sensibilité de la notation i aux facteurs de risque,
- σ_i correspond à la volatilité des résidus, avec $\sigma_i \varepsilon_t^l \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, on parlera d'effet volatilité.

Dans un cadre général (i.e., sans faire d'hypothèse sur la distribution des résidus ε_t^l), le modèle est dit *polytomique ordonné*, nous trouvons aussi le nom modèle multinomial ordonné dans [Hurlin \(2003\)](#). La variante la plus répandue dans la littérature est le modèle Probit ordonné (les résidus de loi gaussienne), voir [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) ou [Feng et al. \(2007\)](#) pour plus de détail. Nous retenons l'hypothèse de loi gaussienne des résidus dans la suite du texte.

Nous définissons la probabilité de transition p_{ij} conditionnelle à X_t par (voir [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#)) :

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbb{P} \left[R_t^l = j \mid R_{t-1}^l = i, X_t \right], \\ &= \mathbb{P} \left[C_{j+1} \leq S_t^l < C_j \mid R_{t-1}^l = i, X_t \right], \\ &= \mathbb{P} \left[C_{j+1} \leq \alpha_i + \langle \beta_i, X_t \rangle + \sigma_i \varepsilon_t^l < C_j \mid R_{t-1}^l = i, X_t \right], \\ &= \mathbb{P} \left[\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \leq \varepsilon_t^l < \frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \mid X_t \right]. \end{aligned}$$

Alors, si $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une variable gaussienne standard, nous obtenons, pour tout $i = 1, \dots, d-1$,

$$p_{ij} = \Phi\left(\frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i}\right) - \Phi\left(\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i}\right), \quad j = 2, \dots, d-1, \quad (1.1.4)$$

$$p_{i1} = 1 - \Phi\left(\frac{C_2 - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i}\right), \quad (1.1.5)$$

$$p_{id} = \Phi\left(\frac{C_d - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i}\right). \quad (1.1.6)$$

1.1.5.3 Les modèles à intensité

Les modèles à intensité ont été introduits par [Jarrow and Turnbull \(1995\)](#) dans leur étude sur l'évaluation des dérivés de crédit. Cette classe de modèles repose sur l'idée que le défaut est modélisé par le premier saut d'un processus de Cox² (intensité constante dans le cas de Jarrow et Turnbull mais souvent variable dans les autres modèles). L'instant de défaut correspond à l'instant du premier saut, tandis que l'ampleur du défaut est modélisée par l'importance du saut. [Lando \(1998\)](#) propose une généralisation du modèle pour l'étendre aux événements de migrations entre les différentes notations en s'appuyant sur les travaux de Cox sur les modèles de durée³. Comme le note [Gourieroux and Tiomo \(2007\)](#) "*Cette approche est déjà la plus utilisée pour l'analyse des taux sans risque et leurs dérivés*", ces deux dernières décennies la littérature a été très abondante sur ces modèles, [Lando \(1998\)](#), [Arvanitis et al. \(1999\)](#), [Kavvathas \(2001\)](#), [Lando and Skodeberg \(2002\)](#), [Bauwens and Hautsch \(2003\)](#), [Koopman et al. \(2007\)](#), etc, ont utilisé cette approche pour évaluer les dérivés de crédit et quantifier le risque de crédit. Enfin, le modèle à intensité par opposition au modèle structurel, ne cherche pas à expliquer les raisons du défaut/migration mais se concentre sur leur prévision en utilisant les informations sur des données de marché observables.

1.1.5.4 Processus de Cox multi-états

Nous présentons dans cette section un modèle intensité multi-factoriel dans lequel l'intensité est fonction du vecteur des facteurs de risque. En considérant une filtration associée à X , notée \mathcal{G} , les processus de migration des notations $(R_t^l)_{t \geq 0}$, $l = 1, \dots, n$ sont des chaînes de Markov à temps continues conditionnellement indépendantes sachant l'historique de X , i.e., sachant \mathcal{G}_∞ . De plus, pour tout instant t nous considérons que ces processus possèdent un générateur matriciel commun $\Lambda_X(t)$, défini par,

$$\Lambda_X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1(X_t) & \lambda_{12}(X_t) & \cdot & \lambda_{1,d-1}(X_t) & \lambda_{1,d}(X_t) \\ \lambda_{21}(X_t) & -\lambda_2(X_t) & \cdot & \lambda_{2,d-1}(X_t) & \lambda_{2,d}(X_t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{d-1,1}(X_t) & \lambda_{d-1,2}(X_t) & \cdot & -\lambda_{d-1}(X_t) & \lambda_{d-1,d}(X_t) \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2. Un Processus de Cox est un processus stochastique généralisant le processus de Poisson dans lequel l'espérance n'est pas constante mais varie dans l'espace ou le temps.

3. Le hazard rate permet de lier l'évènement de migration/défaut et le temps passé au sein d'une notation.

où, pour tout $j \neq i$, λ_{ij} sont des fonctions positives et

$$\lambda_i := \sum_{j \neq i} \lambda_{ij},$$

pour $i = 1, \dots, d-1$. Pour $j \neq i$, le produit $\lambda_{ij}(X_t) \times dt$ correspond à la probabilité conditionnelle d'atteindre l'état j dans le court intervalle de temps $(t, t + dt]$ sachant \mathcal{G}_t et le fait que la notation de la firme appartient à l'état i à l'instant t . Dans ce cas, l'approximation au premier ordre suivante est correcte

$$\lambda_{ij}(X_t) dt \approx \mathbb{P}\left(R_{t+dt}^l = j \mid R_t^l = i, \mathcal{G}_t\right), \quad (1.1.7)$$

pour toutes les firmes $l = 1, \dots, n$. Il se trouve que $\lambda_i(X_t) \times dt$ est la probabilité conditionnelle de quitter l'état i dans le court intervalle de temps $(t, t + dt]$ sachant \mathcal{G}_t .

Une formulation classique de la fonction d'intensité de migration est la transformation exponentielle affine du vecteur de facteurs communs. De nombreuses références, [Naldi et al. \(2011\)](#), [Lando and Skodeberg \(2002\)](#), [Kavvathas \(2001\)](#), [Kalbfleisch and Prentice \(2002\)](#), etc, proposent cette formulation car elle donne la possibilité de conditionner λ_{ij} à différents facteurs de risque (autant positifs que négatifs) tout en respectant la condition $\lambda_{ij} > 0$. Pour tout $i \neq j$, $i < d$, nous obtenons,

$$\lambda_{ij}(X_t) = \exp(\alpha_{ij} + \langle \beta_{ij}, X_t \rangle), \quad (1.1.8)$$

qui se réécrit,

$$\lambda_{ij}(X_t) = \lambda_{ij,0} \exp(\langle \beta_{ij}, X_t \rangle), \quad (1.1.9)$$

où α_{ij} (resp. $\lambda_{ij,0}$) est un paramètre constant et β_{ij} représente le vecteur des sensibilités de l'intensité de migration λ_{ij} au vecteur des facteurs communs X . Il apparait clairement que cette formulation permet de respecter la condition sur la positivité de λ_{ij} . Le modèle obtenu est une extension à plusieurs états du modèle à risque proportionnel de Cox⁴.

Dans ce cadre, en définissant $P(t, s)$ comme la matrice des probabilités de transition conditionnelles entre les notations i ($i = 1, \dots, d-1$) et j ($j = 1, \dots, d$), entre les instants t et s , $P(t, s)$ peut être calculée en résolvant l'équation *forward* de Kolmogorov

$$\frac{\partial P(t, s)}{\partial s} = P(t, s) \Lambda_X(s), \quad P(t, t) = \text{Id}. \quad (1.1.10)$$

La matrice de transition inconditionnelle $\Pi(t, s)$ est alors donnée par

$$\Pi(t, s) = \mathbb{E}[P(t, s)], \quad (1.1.11)$$

où le terme espérance est fonction de la distribution de $(X_u)_{t < u \leq s}$. En pratique, la matrice de transition $\Pi(t, s)$ peut être approximée par une simulation de Monte Carlo basée sur des simulations indépendantes des trajectoires de X entre les instants t et s . Pour toute réalisation de $(X_u)_{t < u \leq s}$, l'équation (1.1.10) peut être résolue à l'aide d'un schéma numérique simple.

Si le processus du facteur X ne change qu'à des dates discrètes $t_1 < \dots < t_N$, entre deux dates t_k et t_{k+1} , la matrice de transition conditionnelle peut être exprimée comme l'exponentielle matricielle suivante

4. Plus connu sous son nom anglais *Cox proportional hazard model*.

$$P(t_k, t_{k+1}) = e^{\Lambda_X(t_k)(t_{k+1}-t_k)}. \quad (1.1.12)$$

Alors sous cette hypothèse, l'équation *forward* de Kolmogorov (1.1.10) possède une solution explicite. A noter que si le générateur matriciel Λ_X est non homogène, i.e., qui varie dans le temps, il n'est pas acquis qu'il suffit d'étendre (1.1.12) pour obtenir

$$P(t, s) = e^{\int_t^s \Lambda_X(u) du}. \quad (1.1.13)$$

Cependant, cette relation est vérifiée pour certaines spécifications de Λ_X pour lesquelles les matrices $\Lambda_X(u)$ et $\Lambda_X(u')$ sont commutantes pour tout u, u' dans $[t, s]$.

1.1.6 La propriété *Point In Time* des modèles de risque de crédit

Pour rappel, la propriété *Point In Time* d'un modèle de risque se définit comme la tendance de ce modèle à produire des indicateurs de risque qui varient selon le positionnement de la période de calcul dans le cycle économique. La variation de ces indicateurs est expliquée par des facteurs macroéconomiques. La propriété *Point In Time* est captée dans les modèles de migration de notation à travers le caractère non homogène des chaînes de Markov qui sous tendent le processus de migration. La totalité des études citées dans la section 1.1.5 pointent le caractère non homogène de ces chaînes de Markov, d'autres rejettent aussi le caractère Markovien⁵. En prenant les matrices de transitions à différents horizons (de 1 à 5 ans) issues des notations de la Banque de France⁶, Foulcher et al. (2004) réalisent une décomposition spectrale et comparent les valeurs et vecteurs propres des matrices pour différents horizons. En testant les deux propriétés qui caractérisent une chaîne de Markov homogène d'ordre un, i.e., (a) une relation log-linéaire proportionnelle à l'horizon h entre les valeurs propres, $\frac{\ln(\lambda_{j,h})}{\ln(\lambda_{j,1})} = h$ et (b) une colinéarité des vecteurs propres, ils rejettent le caractère markovien homogène de la dynamique des migrations.

Bangia et al. (2002), en mettant en exergue un *Rating Momentum*⁷ rejettent la propriété markovienne d'ordre un⁸, ils viennent confirmer un autre résultat de Carty and Fons (1993) qui identifient un *Downgrade Momentum* sur les firmes notées Baa, Ba et B par Moody's, i.e., une firme qui a connu des dégradations de notation durant les périodes précédentes aura plus de probabilité de subir une dégradation qu'une firme qui n'en a pas connues dans le passé. Kavvathas (2001) ainsi que Löffler and Posch (2007) montrent l'existence d'un *Aging Effect* qui reflète une tendance à court terme plus élevée de constater un évènement de migration chez les firmes qui sont sur le marché de la dette depuis longtemps (plus de trois ans) comparativement aux firmes nouvellement arrivées. Lando and Skodeberg (2002) trouvent que pour les dégradations, la probabilité de transition diminue à mesure que la durée de vie au sein de la notation se prolonge. Enfin Frydman and Schuermann (2008) en rejetant l'hypothèse d'une chaîne de Markov unique contre l'hypothèse d'un mélange de chaînes, prouvent par la même occasion le caractère non markovien de la dynamique des migrations.

5. L'hypothèse d'une chaîne de Markov à temps discret et homogène est faite dans un des articles fondateurs de l'approche à intensité Jarrow et al. (1997)

6. Base de données concernant les notations de plus de 180000 entreprises françaises durant la période 1992 à 2001

7. L'historique des changements de notation pour une firme a un pouvoir de prédiction sur le sens des changements de notation futures

8. En utilisant des données *Standard and Poor's* mondiales et multisectorielles de 1981 à 1998

Le caractère non homogène des chaînes de Markov a incité les chercheurs à proposer différentes méthodologies pour identifier les facteurs qui expliquent la variation des probabilités de transition. [Bangia et al. \(2002\)](#) s'appuient sur le NBER⁹ pour catégoriser chaque trimestre comme *expansion* ou *récession* et montrent ensuite que les probabilités de transition conditionnellement à ces deux régimes sont significativement différentes (au sens du test de Student) entre elles mais aussi par rapport aux probabilités de transition inconditionnelles. Dans un même objectif mais en utilisant les variations du PIB¹⁰, [Nickell et al. \(2000\)](#) divisent leur historique de données entre régime *haut*, *bas* et *normal* selon la position du PIB par rapport au reste de sa distribution, le tiers inférieur correspond au régime *bas*, le second tiers au régime *normal* et le tiers supérieur au régime *haut*. Les deux études arrivent à la conclusion que le cycle économique est un facteur déterminant dans la variation des probabilités de transition.

Deux types de techniques émergent pour le conditionnement des probabilités de transition par les facteurs de risques. La première s'attache à identifier des facteurs via des analyses économiques et ensuite réalise les calibrages pour calculer les sensibilités. Nous citons [Kavvathas \(2001\)](#) qui considère comme facteurs de risque, la volatilité des marchés actions, l'état du crédit¹¹, les taux d'intérêt court terme, la différence entre le taux 10 ans et le taux 1 an des bons du trésor américain. [Couderc and Renault \(2004\)](#) quant à lui divise les facteurs en trois familles, information sur les marchés financiers, cycle économique et information spécifique au marché du crédit, [Hamerle et al. \(2004\)](#) mélange entre facteurs micro économiques pour capter le risque spécifique de la firme et facteurs macro économiques pour capter le risque systématique. Le lecteur pourra trouver d'autres exemples avec [Figlewski et al. \(2008\)](#), [Löffler and Posch \(2007\)](#), [Duffie and Shaefer \(2003\)](#), [Duffie et al. \(2007\)](#) etc.

La seconde approche apparaît suite aux critiques qui sont faites à la première, comme l'indique [Gourieroux and Tiomo \(2007\)](#), le risque en sélectionnant des facteurs de risque c'est d'en exclure d'autres qui auraient été plus pertinents. Des spécifications avec des facteurs de risque latents non observables sont apparues dans des articles comme ceux de [Bauwens and Hautsch \(2003\)](#), [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#), [Feng et al. \(2007\)](#), [Koopman et al. \(2007\)](#). Ils permettent grâce à des algorithmes de filtrage comme celui de Kalman d'extraire des facteurs dont les réalisations ajustent le mieux la dynamique des migrations observées. Cette approche est moins intuitive que la première mais possède un pouvoir explicatif plus grand car les réalisations des facteurs latents comportent toute l'information disponible, observable et non observable. Le principal reproche qui lui est fait est sa faible capacité prédictive car si les facteurs sont non observables, il est difficile de faire des prévisions sur leurs valeurs futures. Pour y remédier, [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) proposent de donner un sens à ces facteurs a posteriori en les liant à des facteurs observables (par identification ou par régression). L'utilisation des prévisions sur les facteurs observables permet de déduire les prévisions sur les facteurs latents.

1.1.7 Problématiques et résultats obtenus

La revue de la littérature que nous venons d'effectuer sur la propriété *Point In Time* des modèles de risque de crédit montre la diversité des problématiques soulevées ces dernières

9. Le National Bureau of Economic Research est un organisme privé américain, à but non lucratif, politiquement indépendant, consacré aux sciences économiques et aux recherches empiriques associées particulièrement à l'économie américaine

10. Produit Intérieur Brut.

11. Indice calculé via une Analyse en Composantes Principales qui explique 2/3 de la variance des variables suivantes : la variation de la production industrielle, le log du ratio Upgrade/Downgrade, moyenne des notations des nouveaux entrants

années et la multitude des approches suivies pour les résoudre. Nous avons répertorié quatre configurations de modèles, à savoir, le modèle structurel à facteurs observables (voir [Bangia et al. \(2002\)](#), [Nickell et al. \(2000\)](#)), le modèle structurel à facteurs latents (voir [Albanese and Chen \(2006\)](#)), le modèle à intensité avec facteurs observables (voir [Kavvathas \(2001\)](#), [Naldi et al. \(2011\)](#)) et le modèle à intensité avec facteurs latents (voir [Koopman and Lucas \(2005\)](#), [Feng et al. \(2007\)](#)). A notre connaissance il n'existe pas d'étude comparative entre ces quatre configurations de modèles sur un même historique de données de notations. L'intérêt d'une telle étude est de déterminer laquelle de ces quatre approches est la meilleure lorsqu'on se donne pour objectif de reproduire les probabilités de transition empiriques. La question se pose car même si les données sont les mêmes, la performance diffère d'une configuration à l'autre, ceci provient de la différence des fonctions de vraisemblance mais aussi de l'observabilité ou pas des facteurs de risque. En effet, un problème soulevé par l'utilisation des variables observables est celui de ne pas sélectionner les plus appropriées alors que le risque en utilisant des variables latentes est celui de l'interprétabilité et de la difficulté de l'estimation.

Dans la première partie de ce travail, nous avons réalisé une étude comparative entre ces quatre configurations de modèles. Nous avons identifié la configuration (type de modèle et observabilité des facteurs de risque) la plus appropriée parmi les quatre répertoriées en se donnant comme critère de performance la capacité à reproduire les probabilités de transition empiriques ainsi que l'indice de mobilité SVD empirique¹². Notre étude a porté sur un historique de notations S&P qui couvre la période [01/2006 – 01/2014] et concerne 2875 émetteurs obligataires¹³ distribués sur différentes zones géographiques (principalement Europe de l'ouest et Amérique du nord) et secteurs d'activité.

La problématique présentée sera développée dans le Chapitre 2 de cette thèse, celui-ci est constitué de l'article [Cousin and Kheliouen \(2016\)](#) publié dans le *Bulletin Français d'Actuariat*. Dans ce chapitre nous décrivons les méthodes statistiques pour estimer les modèles multifactoriels présentés dans les sections 2.2.1 et 2.2.2, et appliquons ces méthodes à l'historique de notations S&P.

La construction du modèle structurel à facteurs observables s'appuie sur l'idée que la probabilité de transition entre deux états i et j peut s'écrire comme une fonction de paramètres indépendants du cycle économique et d'autres qui relient la probabilité au cycle économique. Cette construction revient à supposer l'existence d'une composante *Through The Cycle* et une autre *Point In Time* dans les probabilités de transition. Pour chaque notation i , le vecteur des paramètres $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$ est estimé par maximisation de la fonction de log-vraisemblance globale.

Le modèle à intensité avec facteurs observables repose sur la même idée de décomposition de l'intensité en composante *Through The Cycle* et *Point In Time*, à la différence que l'estimation des paramètres du modèle, i.e., $\theta = (\lambda_{ij,0}, \beta_{ij})_{i \neq j, i < d}$ où $\beta_{ij} = (\beta_{ij}^1, \dots, \beta_{ij}^K)$ se fait au niveau de chaque transition $i \rightarrow j$. C'est l'indépendance des vraisemblances marginales conditionnellement au vecteur des facteurs de risque X_t qui permet cette approche. En maximisant chaque log-vraisemblance individuellement, nous proposons, en appliquant le gradient, un système d'équations non linéaires pour estimer le vecteur $\hat{\beta}_{ij}$ et en déduire $\hat{\lambda}_{0,ij}$.

L'estimation des paramètres du modèle structurel à facteurs latents s'appuie sur une méthode proposée dans [Gagliardini and Gouriou \(2005\)](#). Nous définissons la probabilité $p_{i,J,t}^*$ comme la somme des probabilités de transition d'une notation i vers une notation J ou plus loin,

12. Nous renvoyons le lecteur à la section 2.5.5.2 pour une définition de l'indice de mobilité SVD.

13. Nous parlerons de firmes dans la suite du document pour désigner les émetteurs obligataires.

formellement, pour $t = t_1, \dots, t_N$,

$$p_{iJ,t_k}^* = \sum_{j=J}^d p_{ij,t_k} = \mathbb{P} [R_{t_k} \leq J | R_{t_{k-1}} = i, X_{t_k}]. \quad (1.1.14)$$

Pour tout t , la probabilité cumulée $p_{iJ,t}^*$ est ensuite transformée selon un modèle Probit ordonné pour construire un système linéaire gaussien sur lequel un filtre de Kalman peut être appliqué.

$$\begin{aligned} p_{iJ,t}^* &= \Phi \left(\frac{C_J - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \right), \\ \Rightarrow \Phi^{-1} (p_{iJ,t}^*) &= \frac{C_J - \alpha_i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i} \langle \beta_i, X_t \rangle, \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

de manière équivalente,

$$\psi_{iJ,t} = \frac{C_J - \alpha_i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i} \langle \beta_i, X_t \rangle. \quad (1.1.16)$$

Pour un nombre de firmes n suffisamment élevé, nous obtenons la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{p}_{iJ,t}^*$ et nous déduisons par la méthode Delta la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\psi}_{iJ,t}$ (sachant la relation $\psi_{iJ,t} = \Phi^{-1} (p_{iJ,t}^*)$). Nous construisons un système linéaire gaussien avec $\sqrt{n} (\hat{\psi}_{iJ,t} - \psi_{iJ,t}) \sim \mathcal{N} (0, \Xi_{iJ,t}^2)$ et l'hypothèse d'une dynamique auto-régressive du vecteur des facteurs de risque X_t . Le vecteur X_t est filtré de façon récursive et le processus filtré $\bar{X}_t := \mathbb{E}(X_t | \Psi_t)$ avec $\Psi_t = (\hat{\psi}_{t_1}, \dots, \hat{\psi}_t)$ est obtenu.

L'obtention des paramètres estimés $\hat{\theta} = (\hat{C}_{i+1}, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1, \dots, d-1}$ est faite en maximisant la log-vraisemblance du système gaussien filtré tel que présenté dans [Durbin and Koopman \(2012\)](#).

A l'issue de cette procédure, nous avons obtenu des estimations des paramètres du modèle structurel à facteurs latents mais aussi un processus filtré qui représente le cycle économique comme le montre la figure [1.1](#).

Nous avons étendu cette méthode au modèle à intensité avec facteurs latents en linéarisant l'équation qui décrit l'intensité de migration $\lambda_{ij}(X_t)$ (voir équation [1.1.9](#)), nous obtenons l'équation suivante :

$$y_{ij,t} = \alpha_{ij} + \langle \beta_{ij}, X_t \rangle, \quad t = t_1, \dots, t_N \quad (1.1.17)$$

où $y_{ij,t} = \log(\lambda_{ij,t})$ et $\alpha_{ij} = \log(\lambda_{ij,0})$. Avec la propriété de normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{y}_{ij,t}$, i.e., $\sqrt{n} (\hat{y}_{ij,t} - y_{ij,t}) \sim \mathcal{N} (0, \chi_{ij,t}^2)$ nous construisons le système linéaire gaussien qui permet d'inférer le processus filtré $\bar{X}_t := \mathbb{E}(X_t | Y_t)$, où $Y_t = (\hat{y}_{t_1}, \dots, \hat{y}_t)$. Le processus filtré grâce au modèle intensité s'apparente aussi au cycle économique comme le montre la figure [1.2](#). L'obtention des paramètres estimés $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij})_{i \neq j, i < d}$ se fait en maximisant la log-vraisemblance du système gaussien filtré.

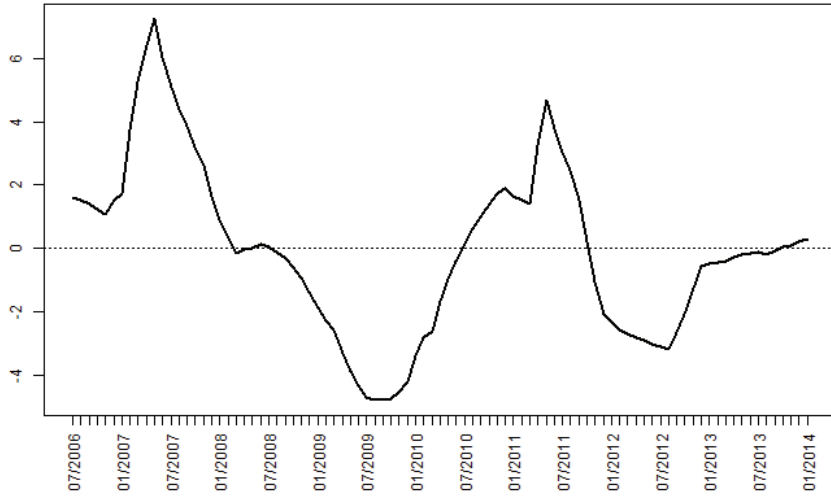


FIGURE 1.1 – Processus filtré du modèle structurel

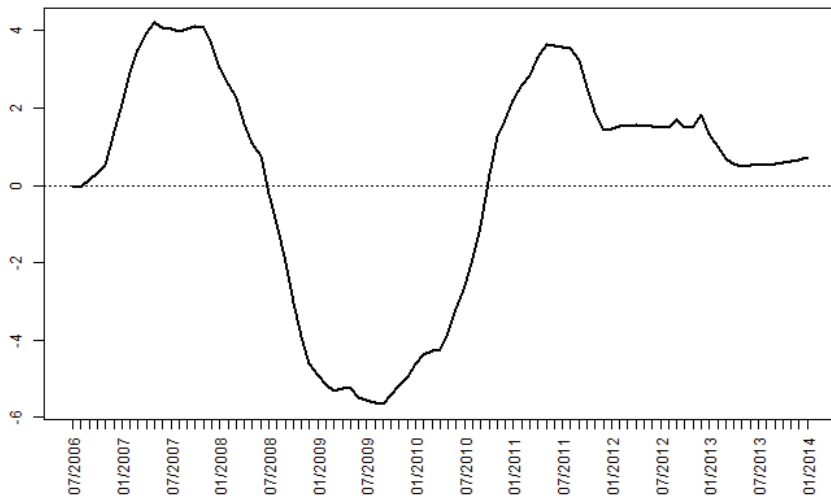


FIGURE 1.2 – Processus filtré du modèle intensité

1.1.8 Résultats

La comparaison des quatre configurations de modèle montre que le modèle à intensité avec facteurs observables est celui qui reproduit le mieux les probabilités de transition empiriques ainsi que l'indice de mobilité SVD empirique. La figure 1.3 montre respectivement les probabilités empiriques de défaut à 1 an des notations 4 et 5 observées sur l'historique des données (trait continu bleu pour la notation 5 et vert pour la notation 4) et les probabilités de défaut à 1 an reconstituées avec le modèle à intensité avec facteurs observables (trait en tiret bleu

pour la notation 5 et trait en tiret vert pour la notation 4) et le modèle structurel à facteurs observables (trait en pointillé bleu pour la notation 5 et trait en pointillé vert pour la notation 4). Il apparaît clairement que le modèle à intensité avec facteurs observables reproduit mieux les probabilités de défaut empiriques. En effet, les traits continus (probabilités empiriques) et en tiret (probabilités issues du modèle intensité) se confondent. Le même constat est fait concernant les probabilités de défaut des notations 6 et 7, voir figure 1.6. Le système des traits reste le même que pour la figure 1.3 mais les couleurs sont différentes, le noir est attribué à la notation 6 et le rouge à la notation 7.

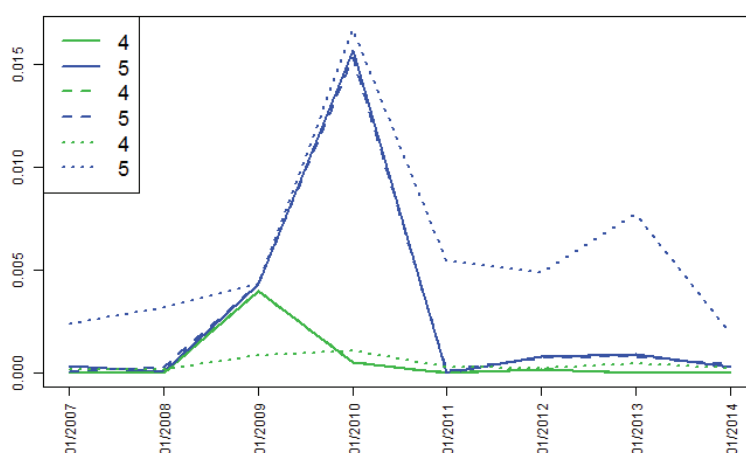


FIGURE 1.3 – Ratings 4 and 5 : probabilités de défaut à un an recalculées par les modèles. Modèles à facteurs observables. Modèle empirique en ligne continue, modèle intensité en tiret, modèle structurel en pointillé.

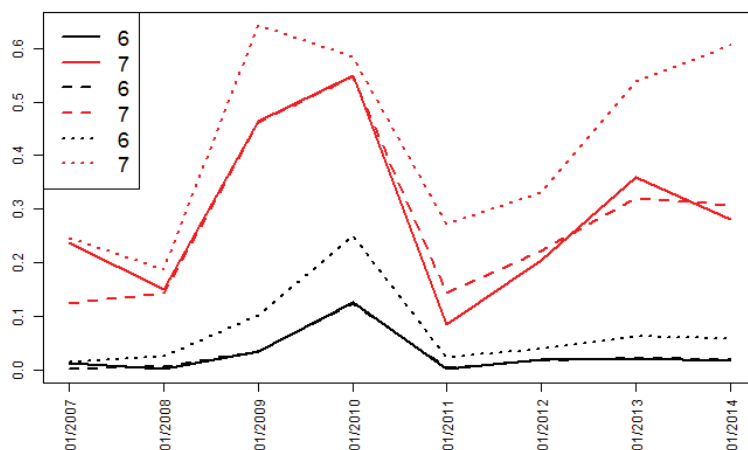


FIGURE 1.4 – Ratings 6 et 7 : probabilités de défaut à un an recalculées par les modèles. Modèles à facteurs observables. Modèle empirique en ligne continue, modèle intensité en tiret, modèle structurel en pointillé.

Concernant les modèles à facteurs latents, il apparaît selon les figures 1.5 et 1.6 qu’aucun des deux modèles ne reproduit correctement les probabilités de défaut empiriques. Les traits continus représentent les probabilités empiriques (vert pour la notation 4, bleu pour la notation 5), noir pour la notation 6 et rouge pour la notation 7).

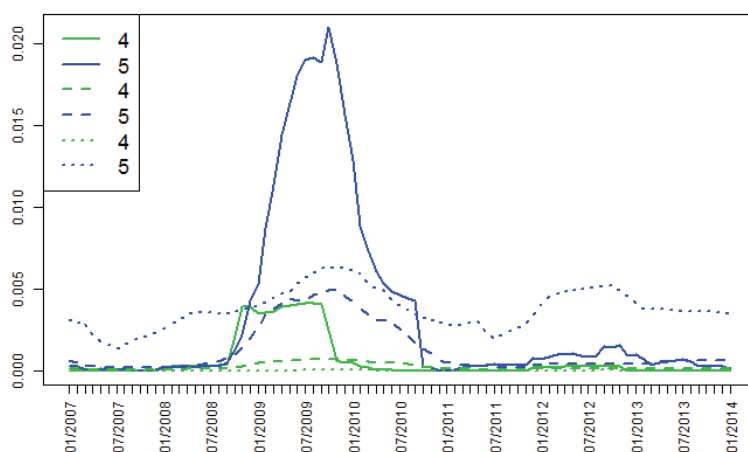


FIGURE 1.5 – Ratings 4 et 5 : probabilités de défaut à un an recalculées par les modèles. Modèles à facteurs non observables. Modèle empirique en ligne continue, modèle intensité en tiret, modèle structurel en pointillé.

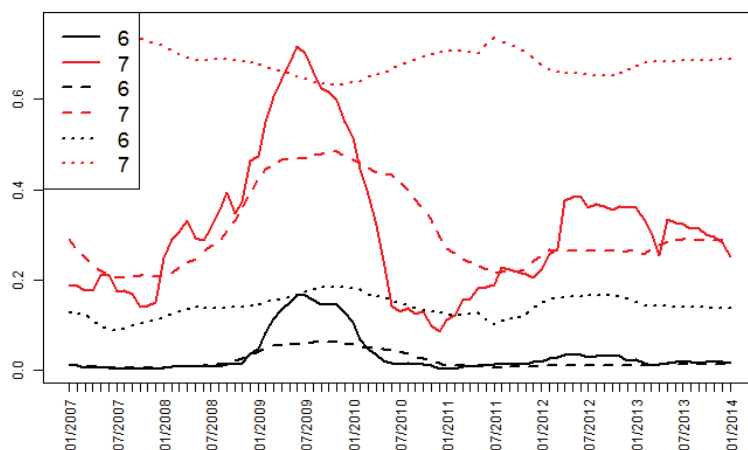


FIGURE 1.6 – Ratings 6 et 7 : probabilités de défaut à un an recalculées par les modèles. Modèles à facteurs non observables. Modèle empirique en ligne continue, modèle intensité en tiret, modèle structurel en pointillé.

L'indice de mobilité SVD qui décrit la dynamique globale d'une matrice de transition (voir section 2.5.5.2 dans le Chapitre 2 ou Jafry and Schuermann (2004) pour une présentation détaillée de cet indice) vient confirmer notre constat qui a été fait au niveau des probabilités de défaut. La figure 1.7 montre que l'indice de mobilité obtenu par le modèle à intensité avec facteurs observables (couleur rouge) réplique bien l'indice de mobilité empirique (couleur noire).

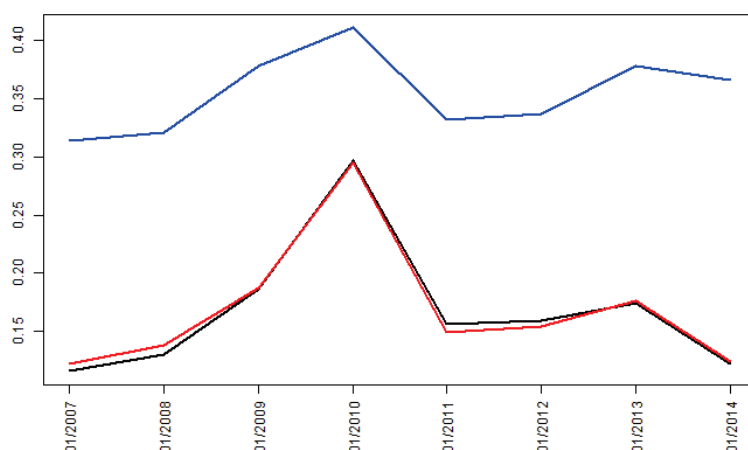


FIGURE 1.7 – Indice de mobilité SVD calculé avec les modèles à facteurs observables. Modèle empirique en noir, modèle à intensité en rouge, modèle structurel en bleu.

1.1.8.1 Conclusion de la comparaison

En conclusion de cette partie, nous expliquons la meilleure performance du modèle à intensité avec facteurs observables par les points suivants :

- pour le modèle à intensité avec facteurs observables, les paramètres $\lambda_{ij,0}$ et β_{ij} sont estimés à travers la maximisation de la fonction de log-vraisemblance marginale. Ceci signifie que parmi la liste des facteurs explicatifs, il y a plus de chance qu'il y ait au moins un des facteurs qui soit (correctement) explicatif pour la migration en question. L'estimation des paramètres du modèle structurel est faite à travers la maximisation de la fonction de log-vraisemblance globale, cette approche est moins flexible car il n'est pas possible d'expliquer les migrations au cas par cas.
- Pour le modèle à intensité avec facteurs observables, le problème de maximisation de la log-vraisemblance marginale possède une solution semi-analytique. En effet, le paramètre $\hat{\lambda}_{ij,0}$ est obtenu avec une solution analytique alors que le vecteur des $\hat{\beta}$ est obtenu via la résolution d'un système non linéaire simple.
- pour l'estimation statistique en utilisant des facteurs latents, la solution proposée par [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) pour éviter de gérer des intégrales de dimension élevées construit un système linéaire gaussien pour appliquer le filtre de Kalman. L'hypothèse d'un nombre infini de firmes, i.e., $n \rightarrow \infty$ et la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance à chaque instant t et pour chaque migration $i \rightarrow j$ n'est pas satisfaite. En effet, même avec un nombre assez élevé de firmes $n = 2875$ dans notre étude, certaines migrations ne se produisent que rarement, par exemple les migrations de 3 notations ou plus. Le modèle à intensité avec facteurs observables utilise directement les observations sans faire d'approximations basées sur des hypothèses aussi contraignantes.
- Enfin, les modèles à facteurs latents ont plus de paramètres à estimer (le processus filtré \bar{X}_t et la matrice d'auto-régression). Ces contraintes auxquelles s'ajoute la quantité limitée de données a un impact fort sur le résultat final.

1.2 Modèle de cash-flow pour la liquidité d'un banking book

Avant de faire une revue des travaux sur les modèles de cash-flows, nous présenterons les concepts nécessaires à la compréhension de notre problématique et des solutions apportées. Nous ferons d'abord la distinction entre les portefeuilles bancaires dits *banking books* et les portefeuilles de négociation dits *trading books*, nous présenterons ensuite les contrats de ligne de crédit et définirons les paramètres qui les constituent.

Nous finirons cette partie introductive en présentant les outils statistiques qui nous ont permis de traiter la problématique de ce troisième chapitre.

1.2.1 Portefeuille bancaire (banking book) et portefeuille de négociation (trading book)

Le terme *portefeuille* est un terme largement utilisé dans le secteur bancaire, un portefeuille peut être défini comme la plus petite entité dans laquelle sont regroupés des actifs financiers. Les portefeuilles sont créés sur la base de différents critères de regroupement, par types d'actifs, par type de traitement comptable, par type de modèle de risque, par entité juridique de gestion, par opérateur, etc. Tous les portefeuilles sont organisés par ordre hiérarchique.

La classification des portefeuilles bancaires *banking books* et des portefeuilles de négociation *trading books* est très importante du point de vue de la gestion des risques et de la comptabilité. Les directives du comité de Bâle sur la supervision bancaire (Basel Committee on Banking Supervision BCBS) imposent des règles de calcul de risque différentes selon que le *book* soit un *banking book* ou *trading book*.

Selon les règles du BCBS, les *trading books* doivent contenir les actifs qui sont détenus à des fins de négociation de court terme (détention et revente à court terme pour réaliser un profit grâce aux mouvements des prix sur les marchés), ou dans le but de couvrir d'autres éléments de ce même portefeuille de négociation. La gestion des positions des *trading books* est faite de manière active et leur valorisation¹⁴ est adossée au marché quotidiennement (marked-to-market daily). Les directives du BCBS imposent de calculer les besoins en fonds propres réglementaires à partir de la *Value-at-Risk (VaR)* et de la *Stressed Value-at-Risk (SVaR)* à 99% sur un horizon de 10 jours, ainsi qu'à partir de l'*Incremental-Risk-Charge (IRC)* et de la *Comprehensive Risk Measure (CRM)* à 99.9% sur un horizon de 1 an. D'un point de vue réglementaire, le *trading book* donne lieu à des exigences en fonds propres essentiellement au titre du risque de marché et de contrepartie (voir [Council of the european union \(2013\)](#)).

Les *banking books* doivent contenir tous les actifs qui ont vocation à être détenus jusqu'à la maturité, généralement les prêts bancaires constituent la majorité des positions en *banking book*. Les *banking books* à la différence des *trading books* ne sont pas valorisés quotidiennement ni en *mark-to-market*, ils sont valorisés à leur valeur historique. Les exigences en fonds propres sont calculées à partir des *Risk Weighted Assets* qui sont constitués d'un calcul de perte inattendue (*unexpected loss*) à 99.9% à un horizon de 1 an. D'un point de vue réglementaire, le *banking book* donne lieu à des exigences en fonds propres essentiellement au titre du risque de crédit (voir [Council of the european union \(2013\)](#)).

Dans cette thèse nous travaillerons sur les *bankings books* avec pour objectif d'évaluer le risque de crédit à travers les changements de notation des emprunteurs de la banque mais aussi la liquidité de ces portefeuilles à travers les mouvements de cash-flows.

Nous présenterons dans ce qui suit les catégories d'actifs financiers sensibles au risque de crédit et qui se trouvent dans le *banking book*.

1.2.2 Définition d'une ligne de crédit

Une ligne de crédit est un contrat de prêt, ce contrat lie une institution financière (banque, prêteur) à un emprunteur (firme, particulier) et engage le prêteur à fournir un montant de liquidité auquel l'emprunteur est autorisé à accéder. Le montant maximum que le client peut emprunter est appelé autorisation. L'emprunteur peut accéder à sa ligne de crédit à tout instant du moment qu'il respecte les conditions contractuelles (maintien d'une certaine qualité de crédit, paiement de frais d'engagement à la banque, paiement des intérêts, amortissement du prêt, etc).

Du point de vue des flux financiers, au début la ligne de crédit correspond (souvent) à un ou plusieurs flux négatifs pour la banque, matérialisés par les tirages de l'emprunteur, ensuite à

14. Il serait plus approprié d'utiliser le terme "évaluation" mais le terme "valorisation" par abus de langage et en traduction de l'anglais "valuation" est le plus souvent utilisé.

des flux positifs correspondant aux remboursements et paiements des intérêts par l'emprunteur. Nous trouvons différentes structures dans les lignes de crédit en *banking book*, certaines sont des prêts de gré-à-gré, c'est le cas des crédits à la consommation, des crédits *revolving* (les cartes de crédit), des crédits hypothécaires (crédits immobiliers), des crédits aux entreprises, aux états, etc. D'autres se font en passant par les marchés obligataires, c'est le cas des obligations.

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux lignes de crédit faites aux entreprises, celles-ci diffèrent par rapport aux lignes de crédit faites aux particuliers sur deux principaux points. (i) L'existence de frais d'engagement payés par l'emprunteur au titre des liquidités qu'il n'a pas encore utilisées, ces frais s'apparentent à la prime de liquidité. (ii) Les dispositions au défaut de la banque, c'est à dire arrêt du financement à l'emprunteur si une détérioration significative de la qualité de crédit de l'emprunteur est observée ou si des seuils prédéfinis de ratios financiers qui renseignent sur la santé financière de l'emprunteur sont franchis.¹⁵

Nous définissons dans ce qui suit les caractéristiques de ces lignes de crédit telles que nous les avons appréhendées dans nos travaux.

Une ligne de crédit est définie dans l'intervalle de temps $[t_0, T]$, où t_0 est la date de mise en place du prêt et T sa maturité. A tout instant t , $t \in [t_0, T]$, le cash-flow du prêt est défini par les quantités A_t , U_t et PNU_t qui sont respectivement, le montant d'autorisation alloué à l'emprunteur, la part utilisée en cumulé par l'emprunteur depuis la mise en place du loan (on appellera aussi U_t l'outstanding nominal cumulé) et la part non encore utilisée par l'emprunteur. Ces trois quantités sont liées à tout instant par la relation :

$$A_t = U_t + PNU_t \tag{1.2.1}$$

Un évènement de tirage définit tout mouvement de liquidité du bilan de la banque vers le bilan de l'emprunteur qui augmente la quantité U_t . Le montant de tirage est de nature aléatoire mais borné supérieurement par la quantité PNU_t . Les dates de tirages sont aussi aléatoires.

Un évènement de pré-paiement définit tout mouvement de liquidité du bilan de l'emprunteur vers celui de la banque qui augmente la quantité PNU_t . Le montant de pré-paiement est aussi de nature aléatoire mais borné supérieurement par la quantité U_t . Les dates de pré-paiements sont aléatoires sauf conditions contractuelles.

Un évènement d'amortissement définit tout mouvement de liquidité du bilan de l'emprunteur vers celui de la banque qui diminue la quantité A_t . Le mode d'amortissement est contractuel, il peut être linéaire, progressif, dégressif, etc. De ce fait, le montant d'amortissement est une fonction du mode d'amortissement, de U_t et du temps restant jusqu'à la maturité du loan. Les dates d'amortissement dépendent du mode d'amortissement, elles ne sont donc pas aléatoires.

Un prêt amortissable de maturité T est un loan qui permet à l'emprunteur de tirer et/ou prépayer de manière libre durant la première partie de la durée de vie du prêt, $[0, t)$ (avec $t < T$). Sur la deuxième partie de vie du prêt, i.e., $[t, T]$, l'emprunteur doit amortir l'outstanding nominal U_t tout en prépayant s'il le veut mais il ne pourra plus faire de tirage.

15. Ces dispositions sont appelées *Material Adverse Change* (MAC) dans la terminologie anglo-saxonne.

Un prêt non amortissable de maturité T , dit *bullet loan*, est un prêt qui donne droit à l'emprunteur de tirer et/ou prépayer de manière libre durant toute la durée de vie du prêt, et de ne rembourser l'outstanding nominal qu'à la maturité T .

1.2.3 Rappels sur les modèles économétriques

L'objectif de construire un modèle de cash-flow *Point In Time*¹⁶ et *forward looking* pose la question du cadre de modélisation. Nous avons fait le choix d'une modélisation économétrique pour capter l'influence des facteurs de risque auxquels les emprunteurs sont sensibles. Par ailleurs, la grande diversité des modèles économétriques nous assure de trouver le modèle adéquat pour capter les spécificités des processus de tirage et de pré-paiement.

Nous faisons un rappel des modèles linéaires et leurs extensions, les modèles linéaires généralisés, les modèles additifs ainsi que les modèles *Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape* (GAMLSS) que l'on traduit par modèles additifs généralisés pour la position, l'échelle et la forme. Nous retracerons les propriétés des trois familles de modèles ainsi que les contraintes dans les modèles linéaires et linéaires généralisés qui nous ont poussé à utiliser les modèles GAMLSS. Ces rappels s'inspirent de la documentation suivante, [Daudin \(2015\)](#), [Gourieroux and Tiomo \(2007\)](#), [Madsen and Thyregod \(2010\)](#), [Stasinopoulos et al. \(2017\)](#). En particulier, la définition 1.1 et les propriétés 1.2 sont reprises comme telle depuis [Daudin \(2015\)](#), enfin, la partie sur les modèles GAMLSS est inspirée de [Stasinopoulos et al. \(2017\)](#).

1.2.3.1 Modèles linéaires

Rappelons d'abord qu'un modèle linéaire est un modèle statistique de base que l'on utilise pour expliquer les valeurs prises par une variable dite *variable réponse* Y en fonction de facteurs quantitatifs ou qualitatifs, appelés *variables explicatives* X . Les valeurs de Y et de X sont observées sur n unités expérimentales. La relation s'écrit (voir [Daudin \(2015\)](#)) :

$$Y_i = \mu_i + \epsilon_i \tag{1.2.2}$$

où

- i est le numéro de l'unité expérimentale,
- μ_i est l'espérance de Y_i et inclut l'effet des variables explicatives,
- ϵ_i est une variable aléatoire résiduelle, appelée erreur, incluant la variabilité du matériel expérimental, celle due aux variables explicatives non incluses dans le modèle et celle due aux erreurs de mesure.

Selon la nature des facteurs explicatifs qui constituent μ_i , quantitatifs, qualitatifs ou mixtes, le modèle est dit respectivement, modèle de régression, modèle d'analyse de la variance ou modèle d'analyse de la covariance. Nous nous intéresserons au modèle de régression dans la suite de notre propos car nos variables sont quantitatives. Une présentation détaillée des autres modèles se trouvent dans [Daudin \(2015\)](#).

16. Pour rappel, la propriété *Point In Time* d'un modèle de risque se définit comme la tendance de ce modèle à produire des indicateurs de risque qui varient selon le positionnement de la période de calcul dans le cycle économique. La variation de ces indicateurs est expliquée par des facteurs macroéconomiques.

1.2.3.2 Modèles de régression

Le modèle de régression est dit simple lorsque la variable explicative est unique et est appelé multiple lorsque le nombre de variables explicatives est supérieur à 1. Le modèle de régression simple s'écrit pour $i = 1, \dots, n$,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (1.2.3)$$

où $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ est le vecteur des paramètres et σ^2 la variance(constante) des termes d'erreur ϵ_i .

Le modèle de régression multiple s'écrit pour K variables explicatives,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i^{(1)} + \beta_2 X_i^{(2)} + \dots + \beta_p X_i^{(K)} + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (1.2.4)$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{cases} Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), \\ \mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_i^{(1)} + \beta_2 X_i^{(2)} + \dots + \beta_p X_i^{(K)}. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Nous utiliserons la notation matricielle pour alléger l'écriture, pour $i = 1, \dots, n$, nous écrivons :

$$\begin{cases} Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \\ \mu = X\beta. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

où X est une matrice $n \times p$, ($p = K + 1$), qui contient les K variables explicatives plus une colonne de 1 pour les cas où une constante β_0 est nécessaire. Le vecteur β de taille $K + 1$ est constitué des paramètres à estimer et qui définissent la relation de la variable à expliquer avec les variables explicatives¹⁷.

Les formulations 1.2.5 et 1.2.6 révèlent les hypothèses qui sous tendent les modèles linéaires. En effet, pour que ces modèles décrivent correctement une relation entre une variable à expliquer et des variables explicatives, les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

1. La relation entre l'espérance de la variable à expliquer et les variables explicatives est une relation linéaire.
2. Les observations sont distribuées suivant une loi normale, cette hypothèse est essentielle pour réaliser les tests.
3. La variance des variables aléatoires représentant les observations est constante.
4. Les variables aléatoires représentant les observations sont non corrélées.

Daudin (2015) relève à partir des hypothèses énumérées ci-dessus les éléments qui rendent les modèles linéaires inadaptés à certains cas, i.e,

- du fait de la contrainte de linéarité de l'hypothèse 1, l'espérance de Y est théoriquement non bornée, ceci rend le modèle linéaire imparfait pour modéliser des variables bornées, cas des taux de tirage ou de pré-paiement par exemple ;
- pour les observations issues de distributions discrètes ou si la distribution autour de la moyenne est dissymétrique alors l'hypothèse de normalité n'est pas vérifiée et des distributions plus adaptées doivent être utilisées ;

17. Dans les articles des Chapitres 2 et 3, le vecteur β est parfois appelé vecteur des sensibilités aux facteurs de risque.

- pour les observations représentées par des processus de comptage par exemple ou des durées qui ne peuvent être que positives, la variance dépend de la moyenne. Les modèles linéaires ne sont donc pas adaptés pour modéliser ces observations ;
- l’hypothèse de non corrélation des observations dans les cas où les conditions de l’expérience amènent mécaniquement une corrélation, c’est le cas par exemple d’individus issus d’un même groupe social ou le fait de répéter une expérience sur le même sujet, celui-ci apprendra au fil des essais.

1.2.4 Modèles linéaires généralisés (GLM)

Les modèles linéaires généralisés (GLM) ont été introduits dans [Nelder and Baker \(1972\)](#) et développés dans [McCullagh and Nelder \(1989\)](#), ces modèles ont apporté trois innovations pour pallier les hypothèses (trop) restrictives des modèles linéaires. En effet, les GLM représentent une extension qui relaxe les trois premières contraintes des modèles linéaires (linéarité du lien, variance constante et normalité des observations). La première innovation introduit une fonction monotone dite fonction de lien $g(\cdot)$ entre l’espérance de Y et les variables explicatives. La seconde remplace la loi normale par la famille de lois exponentielles (voir définition [1.1](#)), notée, *ExpFamily* ci-après. La troisième utilise l’algorithme des moindres carrés repondérés itérativement (*iteratively reweighted least squares algorithm*) pour estimer les paramètres β issus du maximum de vraisemblance.

Formellement, le GLM introduit la fonction de lien g ainsi qu’il remplace la loi normale par les lois exponentielles, telle que la formulation [1.2.6](#) se transforme en,

$$\begin{cases} Y \sim \text{ExpFamily}(\mu, \phi), \\ g(\mu) = X\beta. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Cette transformation permet de lier l’espérance de Y avec les variables explicatives de manière non linéaire. En effet pour une fonction $g(\cdot)$, non linéaire et bijective entre \mathbb{R} et l’ensemble de définition de Y , des observations de natures variées peuvent être considérées, à savoir les variables de comptage, les durées de vie, les proportions, les valeurs binaires, etc.

L’écriture d’un GLM se fait en deux étapes, la première consiste à choisir une loi de probabilité pour les observations de Y . La seconde consiste à modéliser le lien entre l’espérance de Y et les variables explicatives X en choisissant une fonction g appropriée.

La fonction g est communément choisie parmi les lois exponentielles, cette famille de lois possède la particularité de s’écrire sous forme exponentielle, ce qui permet d’unifier la présentation des résultats. Les principales lois usuelles font partie des lois exponentielles, parmi elles, la loi Normale, la loi Binomiale, la loi de Poisson, la loi Bêta, la loi Gamma, etc.

Définition 1.1. Soit f_Y (resp. P_Y) la densité (resp. loi) de probabilité de la variable Y . f_Y (resp. P_Y) appartient à la famille exponentielle naturelle si elle s’écrit sous la forme

$$f_Y \text{ (resp. } P_Y(Y = y)) = \exp\left(\frac{1}{\gamma(\phi)}(y\omega - b(\omega)) + c(y, \phi)\right) \quad (1.2.8)$$

où c est une fonction dérivable, b est trois fois dérivable et sa dérivée première b' est inversible. Le paramètre ω est appelé paramètre naturel de la loi. ϕ est un paramètre appelé paramètre de nuisance ou de dispersion.

Propriété 1.2. Si la densité f_Y appartient à la famille exponentielle naturelle, alors

- $\mathbb{E}(Y) = \mu = b'(\omega)$

— $\mathbb{V}(Y) = \phi b''[\omega(\mu)] = \phi V(\mu)$.

La fonction $V(\mu)$ est appelée la fonction variance.

Le lecteur intéressé pourra retrouver la preuve dans [Daudin \(2015\)](#).

1.2.4.1 Choix de la fonction de lien

Comme décrit dans [Daudin \(2015\)](#), en choisissant comme fonction de lien une bijection entre \mathbb{R} et l'ensemble dans lequel est définie l'espérance $\mathbb{E}[Y_i] = \mu$ on donne un sens à la relation linéaire $g(\mu) = X_i\theta$. Très souvent on choisit la fonction de lien g comme étant la fonction qui transforme l'espérance μ en paramètre naturel de la loi, cela revient à choisir,

$$g(\mu) = (b')^{-1}(\mu), \quad (1.2.9)$$

où la notation f^{-1} signifie la fonction inverse de f .

Par exemple, le modèle linéaire possède naturellement la fonction identité comme fonction de lien, en effet, les variables Y_i ont comme moyenne μ_i et variance σ^2 , en appliquant l'équation [1.2.9](#), nous obtenons $g(\mu) = \mu$.

Si les observations sont des données de comptage modélisées par une loi de Poisson, alors la fonction $g(\mu) = \log(\mu)$. En effet, compte tenu de la formulation de la loi de probabilité d'une distribution de Poisson,

$$P[Y = y; \lambda] = \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda) = \frac{1}{y!} \exp(y \log(\lambda) - \lambda), \quad (1.2.10)$$

en considérant la définition [1.1](#), par identification nous obtenons $\omega = \log(\lambda)$, $b(\omega) = \lambda = \exp(\omega)$, $\gamma(\phi) = 1$. Ce qui donne : $g(\mu) = (b')^{-1}(\mu) = \log(\mu)$.

Pour des observations binaires suivant une distribution de Bernoulli, la loi de probabilité s'écrit,

$$P[Y = y; p] = p^y(1-p)^{1-y} = \exp\left(y \log \frac{p}{1-p} + \log(1-p)\right), \quad (1.2.11)$$

par identification nous obtenons, $\omega = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$, $b(\omega) = -\log(1-p) = \log(1 + e^\omega)$, $\gamma(\phi) = 1$.

La fonction g s'obtient en inversant la fonction sigmoïde $b'(\omega) = \frac{1}{1 + e^{-\omega}}$, $g(p) = \text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$.

1.2.5 Modèles additifs généralisés (GAM)

Le développement des méthodes de lissage¹⁸ dans les années 90 a grandement contribué à l'émergence des modèles additifs généralisés (*Generalized Additive Models* (GAM)). Les GAM sont des extensions des GLM par le biais de l'ajout de fonctions de lissage à la composante linéaire $X\beta$ dans la fonction de lien g . Formellement,

¹⁸. Nous rappelons que les techniques de lissage permettent d'isoler les composantes de bruits aléatoires dans les séries temporelles. Pour réaliser des prévisions, le lissage donne plus de poids aux observations récentes.

$$\begin{cases} Y \sim \text{ExpFamily}(\mu, \phi), \\ g(\mu) = X\beta + s_1(X_1) + \dots + s_J(X_J), \quad J \leq K, \end{cases} \quad (1.2.12)$$

où $s_j(\cdot), j = 1, \dots, J$ correspond à la fonction de lissage non paramétrique appliquée à la variable explicative X_j . L'idée des modèles GAM est de laisser les observations (données) décider de la relation entre la fonction de lien g et les variables explicatives, contrairement aux modèles GLM qui imposent une relation linéaire (ou polynomiale) entre la fonction g et les variables explicatives. Nous n'avons dans notre modélisation des taux de tirage et de prépaiement pas eu recours à la partie additive non paramétrique, nous laissons le soin aux lecteurs intéressés de consulter [Hastie and Tibshirani \(1990\)](#) pour plus de détails sur les modèles GAM.

1.2.6 Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape (GAMLSS)

Le développement des modèles GAMLSS est venu pallier l'incapacité des précédents modèles à intégrer des paramètres en lien avec l'asymétrie et l'aplatissement (skewness et kurtosis) de la distribution de Y . Une première étape a été franchie avec les travaux de [Nelder and Pregibon \(1987\)](#) et [Smyth \(1989\)](#) qui ont intégré la dispersion $\phi = \sigma^2$ dans les modèles GLM via une fonction de lien g_2 la reliant aux variables explicatives. [Rigby and Stasinopoulos \(1996a\)](#) ont ensuite proposé une fonction de lissage dans un modèle additif pour modéliser μ et σ sous la forme,

$$\begin{cases} Y \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma) \\ g_1(\mu) = X_1\beta_1 + s_{11}(X_{11}) + \dots + s_{1J_1}(X_{1J_1}), \\ g_2(\sigma) = X_2\beta_2 + s_{21}(X_{21}) + \dots + s_{2J_2}(X_{2J_2}) \end{cases} \quad (1.2.13)$$

où $\mathcal{D}(\mu, \sigma)$ correspond à toute distribution paramétrique à deux paramètres, $g_1(\cdot)$ et $g_2(\cdot)$ sont des fonctions monotones de lien pour les paramètres de moyenne et d'échelle, $s_{1q_1}(\cdot), q_1 = 1, \dots, J_1$ et $s_{2q_2}(\cdot), q_2 = 1, \dots, J_2$, représentent les fonctions de lissage non paramétriques pour μ et σ .

Les modèles GAMLSS, introduits dans [Rigby and Stasinopoulos \(2005\)](#) ont étendu les modèles précédents en proposant de modéliser les quatre paramètres en lien avec les quatre premiers moments d'une distribution, à savoir, la moyenne, l'échelle, l'asymétrie et l'aplatissement. Naturellement, [Rigby and Stasinopoulos \(2005\)](#) proposent d'étendre la liste des lois qui modélisent Y aux lois paramétriques à quatre paramètres et non plus seulement les lois exponentielles. Les modèles GAMLSS s'écrivent sous la forme,

$$\begin{cases} Y \sim \mathcal{D}(\mu, \sigma, \tau, \nu) \\ g_1(\mu) = X_1\beta_1 + s_{11}(X_{11}) + \dots + s_{1J_1}(X_{1J_1}) \\ g_2(\sigma) = X_2\beta_2 + s_{21}(X_{21}) + \dots + s_{2J_2}(X_{2J_2}), \\ g_3(\tau) = X_3\beta_3 + s_{31}(X_{31}) + \dots + s_{3J_3}(X_{3J_3}) \\ g_4(\nu) = X_4\beta_4 + s_{41}(X_{41}) + \dots + s_{4J_4}(X_{4J_4}) \end{cases} \quad (1.2.14)$$

où $\mathcal{D}(\mu, \sigma, \tau, \nu)$ est une distribution paramétrique à quatre paramètres avec τ et ν qui sont deux paramètres de forme associés à l'asymétrie et à l'aplatissement.

Le système en [1.2.14](#) peut se réécrire en notant θ_k les vecteurs de taille n représentant chacun un des paramètres (μ, σ, τ, ν) pour $k = 1, \dots, 4$ respectivement. [1.2.14](#) devient,

$$\begin{cases} Y \sim \mathcal{D}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), \\ g_k(\theta_k) = X_k \beta_k + \sum_{j=1}^{J_k} s_{kj}(X_{kj}), \quad k = 1, \dots, 4, \end{cases} \quad (1.2.15)$$

où β_k pour $k = 1, \dots, 4$ est un vecteur de taille $1 + J_k$ tel que $\beta_k = (1, \beta_{k1}, \dots, \beta_{kJ_k})$ ¹⁹. X_k est une matrice de dimension $[n \times (1 + J_k)]$.

Nous avons adopté la formulation sans termes additifs dans nos travaux, i.e.,

$$\begin{cases} Y \sim \mathcal{D}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), \\ g_k(\theta_k) = X_k \beta_k, \quad k = 1, \dots, 4, \end{cases} \quad (1.2.16)$$

Selon [Stasinopoulos et al. \(2017\)](#), l'obtention des paramètres β_k , $k = 1, \dots, 4$, pour le modèle [1.2.16](#) se fait par la maximisation de la fonction de log-vraisemblance,

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma, \tau, \nu) = \sum_{i=1}^n \log f(y_i | \mu_i, \sigma_i, \tau_i, \nu_i). \quad (1.2.17)$$

Deux algorithmes d'optimisation sont utilisés dans le Package-R *GAMLSS*, l'algorithme *RS* qui est une généralisation de celui utilisé dans [Rigby and Stasinopoulos \(1996a\)](#) et [Rigby and Stasinopoulos \(1996b\)](#), le second est l'algorithme *CG* qui généralise l'algorithme de [Cole and Green \(1992\)](#). Le lecteur intéressé pourra se référer à la section 3.2, sous-sections 3.2.1 et 3.2.2 de [Stasinopoulos et al. \(2017\)](#) pour avoir le détail des algorithmes.

Nous concluons cette partie en rappelant les principaux atouts des modèles GAMLSS :

- Les modèles GAMLSS présentent un cadre de modélisation générique et très flexible pour la majorité des problématiques de régressions univariées.
- Les modèles GAMLSS permettent d'utiliser n'importe quelle loi paramétrique pour la variable à expliquer Y . Les paramètres de cette loi peuvent à leur tour être exprimés en fonction des variables explicatives via des relations linéaires (polynomiales aussi) et non linéaires.
- Les modèles GAMLSS permettent l'ajout de composantes de lissage non paramétriques pour déterminer des relations non linéaires au sein des fonctions de lien $g(\cdot)$.
- La modélisation des paramètres de forme (asymétrie et aplatissement) permet de capter des effets de large dispersion ou de concentrations ponctuelles (masse de probabilité non nulle sur un point particulier d'une distribution continue).

1.2.7 Modèles d'utilisation des lignes de crédit

Nous proposons dans ce travail de thèse de construire un modèle de cash-flow d'une ligne de crédit qui soit *Point In Time* et qui puisse servir de base pour faire des prévisions en *forward looking* sur la dynamique future de la ligne de crédit. Plusieurs blocs doivent composer ce modèle, (i) l'identification des processus qui rentrent dans ce modèle, (ii) l'identification des

19. Notons qu'il serait plus juste de noter les vecteurs avec l'indice T pour indiquer la transposée mais nous omettons cet indice pour ne pas alourdir la notation.

facteurs de risque qui influencent lesdits processus et enfin (iii) trouver un cadre de modélisation qui soit adapté pour capter les particularités des processus identifiés en (i). Nous avons d'ores et déjà identifié la majorité des processus en oeuvre dans la vie d'une ligne de crédit, à savoir, les tirages, les pré-paiements, le paiement des intérêts, le paiement des frais d'engagement, la variation du montant d'autorisation ainsi que la variation de la qualité de crédit de l'emprunteur. Nous avons par ailleurs introduit un cadre de modélisation très flexible dans la section 1.2.6 à travers les modèles GAMLSS.

Les tirages sont les principales sources de risque de liquidité pour la banque, c'est sans surprise que les travaux sur les lignes de crédit se sont focalisés sur les taux d'utilisation (comme une fonction des tirages) plutôt que sur les pré-paiements. Cependant nous trouvons une littérature sur les pré-paiements mais plus particulièrement sur les prêts immobiliers aux individus. Dans la littérature des lignes de crédit, quatre problématiques sont traitées, (i) les déterminants de la création des lignes de crédit, c'est-à-dire dans quelles conditions il est préférable pour une entreprise d'utiliser une ligne de crédit plutôt que de posséder des liquidités, et du point de vue de la banque, à qui et sous quelles conditions consentir une ligne de crédit pour équilibrer entre rentabilité et risque. (ii) La structure de la ligne de crédit à travers le pricing des frais d'engagement, le pricing des options de remboursement anticipé ainsi que les taux d'intérêt du contrat. (iii) Les facteurs explicatifs de l'utilisation et/ou pré-paiement sur les lignes de crédit et enfin, (iv) les modèles de projection des futurs tirages sur les lignes de crédit.

Pour apporter une contribution à la problématique (iv), le travail de ce troisième chapitre de thèse s'appuie fortement sur les travaux menés dans le cadre de la problématique (iii) qui cherchent les facteurs explicatifs de l'utilisation/pré-paiement des lignes de crédit. Nous présentons dans cette partie les travaux qui ont été menés dans les cadres (iii) et (iv) afin de nous appuyer dessus et proposer notre propre modélisation.

Une des premières études à établir un lien entre le taux moyen d'utilisation d'une ligne de crédit et la notation de crédit de l'emprunteur a été faite dans [Marker \(1997\)](#). Cette étude a été réalisée sur des lignes de crédit revolving de la banque Citibank, bien que (seulement) descriptive, elle montre que le taux moyen d'utilisation d'une ligne de crédit est négativement corrélé à la qualité de notation de l'emprunteur. En d'autres termes, mieux l'emprunteur est noté et moins il utilisera sa ligne de crédit et inversement, les emprunteurs avec de mauvaises notations sont ceux qui utilisent en moyenne le plus leurs lignes de crédit. [Agarwal et al. \(2006\)](#), dans une analyse de l'utilisation à l'origination²⁰ des marges de crédit hypothécaire aux états-unis²¹ - 34 384 lignes de crédit, mises en place de janvier 1998 à mai 2001, avec des maturités de 5 années - montrent que les emprunteurs avec une plus grande probabilité de dégradation de leur notation dans le futur utilisent en moyenne moins leur ligne de crédit que les emprunteurs avec une probabilité de dégradation moins élevée, toute chose égale par ailleurs. Ceci indique que les emprunteurs avec des probabilités de dégradation plus élevées réservent leur accès aux lignes de crédit pour les périodes difficiles à venir. A mesure que le temps passe dans la vie de la ligne de crédit, [Agarwal et al. \(2006\)](#) montrent que le taux d'utilisation moyen chez les emprunteurs avec une mauvaise notation est plus élevé que les emprunteurs avec une bonne notation, ce qui vient confirmer le résultat de [Marker \(1997\)](#). Contrairement à [Marker \(1997\)](#), [Agarwal et al. \(2006\)](#) appuient leur étude avec un modèle de régression multiple et des coefficients significativement non nuls sont associés à la notation comme variable explicative

20. Le terme origination dans le vocabulaire bancaire signifie la mise en place d'une nouvelle ligne de crédit.

21. Une marge de crédit hypothécaire est une ligne de crédit pour laquelle la banque s'engage financer l'emprunteur dans la limite de la valeur d'une hypothèque, souvent un bien immobilier.

du taux d'utilisation de la ligne de crédit. Dans une autre étude sur des lignes de crédit allouées à des entreprises privées américaines (714 firmes), [Agarwal et al. \(2004\)](#) trouvent que les montants d'autorisations consentis par les banques sont négativement corrélés aux taux d'intérêt et aux frais d'engagement payés par les firmes. Par ailleurs, le taux d'utilisation est en moyenne plus élevé chez les firmes avec une forte croissance que chez les autres, ceci indique selon [Agarwal et al. \(2004\)](#) que les lignes de crédit sont un levier de flexibilité et de croissance pour les firmes. [Sufi \(2009\)](#) quant à lui prend le parti d'étudier les lignes de crédit du point de vue des entreprises comme un outil de gestion de la liquidité. En utilisant deux historiques de données, le premier tiré de la base de données *Compustat*²² avec des informations sur l'accès aux lignes de crédit par les firmes publiques américaines de 1996 à 2003, le second en tirant un échantillon aléatoire de 300 lignes de crédit pour lesquelles les informations sur les montants d'autorisation, les montants tirés, le respect ou pas des entreprises sur les critères de profitabilité (notation de crédit, ratios financiers) sont disponibles. [Sufi \(2009\)](#) montre que l'accès aux lignes de crédit ainsi que leur utilisation dépend de la profitabilité de la firme, de son secteur d'activité, de sa taille ainsi que de son âge²³. En particulier, l'accès aux lignes de crédit est fortement lié à la profitabilité de la firme, l'amélioration pour l'équivalent d'un écart-type de l'EBITDA²⁴ augmente le montant d'autorisation de 20 à 25%. Du point de vue de l'utilisation, [Sufi \(2009\)](#) montre que la violation des contraintes sur la profitabilité par les firmes en année n mène à une réduction du montant d'autorisation à l'année $n + 1$. Ceci signifie que les banques gèrent leur risque de liquidité en amont en utilisant les contraintes sur la profitabilité. [Jiménez et al. \(2009\)](#) sur des données Espagnoles de lignes de crédit allouées aux entreprises montrent que le produit intérieur brut Espagnol (PIB) est négativement corrélé à l'utilisation des lignes de crédit mais de manière asymétrique. En effet, une augmentation du PIB est associée à une faible baisse, mais statistiquement significative, de l'utilisation des lignes de crédit, alors qu'une décroissance du PIB est associée à une forte augmentation du taux d'utilisation des lignes de crédit. Ce résultat suggère que les lignes de crédit sont utilisées comme mécanisme d'assurance contre la baisse de la liquidité propre au ralentissement de l'économie, ce résultat confirme un des résultats de [Sufi \(2009\)](#) sur l'utilisation des lignes de crédit comme outil de gestion de la liquidité par les entreprises. [Jiménez et al. \(2009\)](#) montrent aussi l'influence du collatéral sur le taux d'utilisation, en effet, toute chose égale par ailleurs, l'utilisation moyenne des lignes de crédit collatéralisées est plus élevée que l'utilisation moyenne des lignes non collatéralisées. Ce résultat est à rapprocher de la qualité de notation de l'emprunteur, si la banque a des doutes sur la capacité future de l'emprunteur à rembourser ses emprunts, elle lui demandera de poster du collatéral tout en lui réduisant le montant d'autorisation si ce dernier a violé les contraintes sur la profitabilité, ceci aura pour effet d'augmenter le taux d'utilisation sur la ligne de crédit (l'autorisation représente le dénominateur dans le calcul du taux d'utilisation). [Sarin and Muenster \(2012\)](#) testent l'impact de la collatéralisation mais en l'associant à la qualité de crédit de l'emprunteur. Sur les données d'une banque allemande (220 000 lignes de crédit observées mensuellement entre Juin 2009 et Juin 2010), ils trouvent que pour les lignes collatéralisées, la corrélation négative entre le taux d'utilisation de la ligne et la qualité de crédit est valable quelle que soit la notation de l'emprunteur. En revanche, lorsque la ligne est non collatéralisée, cette relation est valable jusqu'à un certain niveau de notation, en l'occurrence le niveau 6²⁵, au delà du rang 6, la relation s'inverse, c'est-à-dire,

22. *Compustat* est une base de données de Standard & Poor's lancée en 1962 qui fournit des statistiques, des informations financières et de marché sur les entreprises à travers le monde, la base couvre 99% de la capitalisation boursière mondiale.

23. Le mesure d'âge utilisée est le nombre d'années depuis l'introduction en bourse de la firme.

24. Le bénéfice avant intérêts, impôts, dépréciation et amortissement.

25. Sur une échelle qui va au delà de 6 mais dont les auteurs, pour des raisons de confidentialité, ne donnent

plus la qualité de crédit se détériore, moins la ligne est utilisée.

Schertler et al. (2010) analysent des données de lignes de crédit d'une banque allemande qui ne demande pas de frais d'engagement aux emprunteurs mais se donne le droit de clôturer ces lignes dans des délais courts. Les auteurs constatent que ce risque de clôture joue un rôle important dans l'utilisation de la ligne de crédit, mais de manière non linéaire. En effet, les emprunteurs avec un faible risque de clôture de leur ligne de crédit ont des détentions de cash plus faibles et utilisent leurs lignes plus fortement par rapport aux emprunteurs avec un risque moyen de clôture. Quant aux emprunteurs avec un risque moyen de clôture, ils ont une détention de cash plus élevée et une utilisation de leur ligne de crédit moins forte que les emprunteurs avec un risque de clôture élevé. Ce résultat n'est pas intuitif car on pourrait croire que plus le risque de clôture est élevé et moins les emprunteurs vont s'appuyer sur leur ligne de crédit, lui préférant une détention de cash pour parer aux dépenses. Schertler et al. (2010) expliquent ce résultat par le fait que les emprunteurs les plus en risque de voir leur ligne de crédit clôturée ne sont pas en capacité de se protéger en détenant plus de cash, leur situation ne leur permet pas, alors ils profitent de la ligne en tirant dessus jusqu'à ce qu'elle soit clôturée.

Le pré-paiement se produit plus rarement que le tirage ce qui semble intuitif, les résultats de notre étude empirique du Chapitre 3 confirme ce constat. La littérature académique s'est intéressée au processus de pré-paiement particulièrement pour les prêts immobiliers. Les travaux comme ceux de Richard and Roll (1989), Kim (2005) ou Agarwal et al. (2006) concluent que la baisse des taux d'intérêt et l'augmentation de la qualité de crédit de l'emprunteur sont les variables qui expliquent le mieux le pré-paiement. En effet, comme les taux d'intérêts payés dans les prêts immobiliers sont la plupart du temps fixes tout au long de la durée du contrat, si les taux de marché baissent assez, beaucoup d'emprunteurs vont racheter ce qui reste de leur contrat en souscrivant un prêt avec un nouveau taux de marché plus avantageux. Concernant l'amélioration de la qualité de crédit, celle-ci s'accompagne par une augmentation des revenus et une trésorerie plus avantageuse, ce qui pousse les emprunteurs à rembourser leur prêt avant terme pour réduire le coût de la dette. Ce constat est confirmé par Cossin and Lu (2004) qui montrent que les firmes décident de pré-payer lorsque les taux d'intérêt baissent ou que leur qualité de crédit s'améliore.

Concernant la littérature sur les modèles de prévision des tirages sur les lignes de crédit, celle-ci est récente et reste peu développée. Nous avons relevé les travaux de Duffy et al. (2005), Paulsen (2007), Sarin and Klein (2012).

Duffy et al. (2005) sont les premiers à proposer un modèle de mesure du risque de liquidité sur des lignes de crédit. Leur portefeuille d'application se restreint aux positions de la banque Merrill Lynch. Le modèle de Duffy et al. (2005) combine un système expert pour prédire les actions de tirage sur les lignes de crédit avec une simulation des futures notations de crédit pour prédire les taux de tirage. Les 5 éléments suivants sont projetés dans leur modèle pour chaque emprunteur : (1) la notation de crédit mensuelle, (2) la probabilité que la compagnie commence à utiliser la ligne de crédit, (3) la probabilité que la compagnie continue à utiliser sa ligne de crédit, (4) le montant utilisé sur la ligne de crédit et (5) le renouvellement ou pas de la ligne de crédit à son expiration. Il apparaît que la qualité de crédit est le seul driver du modèle de Duffy et al. (2005) pour projeter le taux d'utilisation de la ligne de crédit. En effet, le modèle se base sur une segmentation des distributions empiriques des taux de tirage par notation de crédit. Ce qui signifie qu'à chaque notation de crédit une distribution empirique

pas le nombre total de rangs de notation, ils indiquent seulement que 11.14% de leurs effectifs ont une notation strictement supérieure à 6.

des taux de tirage est associée. Une fois la notation de crédit simulée, il suffit de tirer un nombre aléatoire d'une loi uniforme et de déduire le quantile associé depuis la distribution qui correspond à la notation simulée. Le savoir-faire du modèle se situe principalement au niveau de la simulation des notations de crédit²⁶ et du système expert qui permet de déterminer les actions entreprises par l'emprunteur et/ou la banque sur la ligne de crédit (tirage, clôture de la ligne, renouvellement, etc). Paulsen (2007) s'inspire de la même idée, c'est-à-dire conditionne les taux de tirage à la réalisation d'un facteur driver mais ne permettent que des tirages à 100% ou à 0%, ceci en fait une version dégradée du modèle de Duffy et al. (2005) sans réelle utilisation pratique. Sarin and Klein (2012) reprennent le modèle de Duffy et al. (2005) et proposent de l'améliorer en y ajoutant un deuxième facteur driver du taux de tirage, en l'occurrence la projection d'une variable d'état sur la collatéralisation de la ligne de crédit dans les périodes futures. L'idée de la collatéralisation vient du résultat de Jiménez et al. (2009) cité plus haut. Le modèle intègre aussi la corrélation entre les tirages des lignes de crédit et l'utilise pour générer des nombres aléatoires corrélés selon cette structure de corrélation. Le modèle de Sarin and Klein (2012) est résumé en 5 points, (1) simulation d'une notation de crédit avec des probabilités de transition construites selon le modèle structurel de Merton avec un facteur systémique et un facteur idiosyncratique, (2) simulation d'un état de collatéralisation grâce au même modèle qu'en (1) mais appliqué à une variable à deux états, 1 pour une ligne collatéralisée et 0 pour une ligne non collatéralisée, (3) construction des distributions empiriques des taux de tirage associées à chacune des paires (notation de crédit × collatéralisation), (4) estimation des corrélations entre les tirages historiques et utilisation de cette matrice de corrélation pour générer des nombres aléatoires corrélés et (5) déduction des taux de tirages simulés en associant le quantile de la distribution empirique associée à la paire (notation, collatéralisation) au nombre aléatoire généré en (4). Le modèle de Sarin and Klein (2012) améliore à certains égards le modèle de Duffy et al. (2005) en y ajoutant un facteur de collatéralisation pour affiner la segmentation des distributions empiriques associées aux tirages mais d'un autre côté il est moins performant du point de vue de la simulation des notations de crédit et n'utilise pas de modèle de prévision du comportement des emprunteurs (tirage, pré-paiement total, remboursement anticipé). Contrairement au modèle de Duffy et al. (2005) qui réalisent des projections à 5 années, Sarin and Klein (2012) ne réalisent de projection que sur un mois, leur modèle donne une vision *point in time* mais ne saurait constituer un outil de projection forward looking.

Les modèles de projection que nous venons de citer ne tentent pas de modéliser les taux de tirage directement, ils les déduisent à partir de distributions empiriques. Il s'avère que des distributions adaptées au caractère borné des taux de tirage existent. En effet, les taux de tirage ont un support dans $[0, 1]$, les lois *Bêta* avec les différentes formes qu'elles peuvent prendre (en J, en U, en J inversé) sur le support $]0, 1[$ sont capables de capter l'asymétrie des variables de taux de tirage. Leurs extensions en lois *Bêta inflatées* permettent de modéliser la distribution des taux de tirage sur le support fermé $[0, 1]$. Ospina and Ferrari (2012) définissent la distribution *Bêta inflatée en 0 et 1* comme un mélange d'une distribution continue *Bêta* et d'une loi de Bernoulli, alors qu'une distribution *Bêta inflatée en 0 (resp. en 1)* est un mélange d'une distribution *Bêta* et d'une distribution dégénérée en 0 (resp. en 1). L'utilisation des distributions *Bêta* dans le cadre des GLM, i.e., avec modélisation des paramètres μ et σ par des fonctions de lien, a été largement discutée dans la littérature. Les articles de Kieschnick

26. Les matrices de transition utilisées dans cet outil intègrent les effets de plusieurs facteurs de risque stochastiques, eux mêmes projetés de manière à refléter les corrélations entre les entreprises faisant partie des mêmes secteurs économiques.

and McCullough (2003), Ferrari and Cribari-Neto (2004), Smithson and Verkuilen (2006), Espinheira et al. (2008), Simas et al. (2010) constituent un aperçu des travaux qui proposent des estimateurs du maximum de vraisemblance améliorés ou des formules fermées pour la fonction de score, la matrice d'information de Fisher ainsi que son inverse. Des applications sur des phénomènes avec des observations dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$ sont proposées pour illustrer les résultats de leurs études.

Les travaux sur les distributions *Bêta inflatées* sont plus récents et plus rares, mais le développement de la librairie GAMLSS dans le logiciel en libre accès R (voir Stasinopoulos et al. (2017)) permettra une prise en main plus simple de ces modèles et une utilisation plus large. Nous citons Calabrese et al. (2012) et Ospina and Ferrari (2012) pour illustrer l'utilisation des distributions *Bêta inflatées*. En se basant sur les données de défaut d'environ 150 000 prêts, Calabrese et al. (2012) modélisent les taux de recouvrement comme un mélange de lois *Bêta* $\beta(\mu, \sigma)$ et de *Bernoulli*(p). Les paramètres de moyenne et d'échelle sont liés à des facteurs explicatifs grâce aux modèles GLM alors que pour la partie discrète un modèle logistique multi-factoriel est utilisé. Ospina and Ferrari (2012) présentent un modèle de mélange entre une distribution *Bêta* et une distribution dégénérée en 0 ou 1. L'article se propose de donner un cadre général d'estimation des paramètres de la loi ainsi que les différents outils statistiques pour mesurer la qualité de l'ajustement du modèle postulé (variables explicatives) aux observations. L'article fait référence aux modèles GAMLSS comme étant un cadre plus large et qui permet d'estimer les paramètres grâce au package R.

1.2.8 Problématiques et contributions de la thèse

La gestion du risque de liquidité d'une ligne de crédit est un enjeu majeur pour la banque, nous avons vu que ce risque naît de l'utilisation des lignes de crédit par les emprunteurs. Les travaux que nous venons d'exposer montrent l'intérêt que les milieux académiques ainsi que professionnels ont porté à la question de l'utilisation des lignes de crédit. Un consensus se dégage, l'utilisation d'une ligne de crédit est très fortement corrélée à la qualité de crédit de l'emprunteur, d'autres facteurs drivers sont identifiés, le cycle économique (approché par le PIB chez Jiménez et al. (2009)) et la collatéralisation (Sarin and Muenster (2012), Jiménez et al. (2009)). Les banques quant à elles gèrent en partie ce risque de liquidité en réduisant le montant d'autorisation si l'emprunteur ne satisfait plus certains critères de profitabilité, i.e., les MAC's (Material Adverse Changes). Les modèles de gestion du risque de liquidité à travers la projection du taux d'utilisation sont beaucoup plus rares que les modèles explicatifs. Ceci s'explique par la nouveauté de cette problématique, en effet, avant la crise des *subprimes*, le financement à court terme pour les banques ne constituait pas un problème, la prime de liquidité était très faible, si la banque empruntait des liquidités, elle pouvait se financer à des taux convenables sans risquer de grosses pertes. Depuis, 2008, le paradigme a changé et les banques ont compris que le risque de liquidité, autant que les autres risques devait être suivi et contrôlé. Les travaux de Duffy et al. (2005) se révèlent être précurseurs car ils datent d'avant la crise, mais ces travaux ont été réalisés pour le compte d'une banque. L'accès restreint aux données est un frein au développement des modèles de gestion du risque de liquidité, dans le cas de Duffy et al. (2005), les données sur les lignes de crédit de Merrill Lynch ont été mises à disposition pour la construction d'un outil interne de gestion du risque de liquidité. Ce modèle s'appuie en partie sur un système expert, ce dernier est adapté aux spécificités du portefeuille de Merrill Lynch mais ne saurait être généralisé.

Le modèle de cash-flow que nous proposons dans le troisième chapitre de cette thèse est une contribution aux modèles de gestion du risque de liquidité. Nous relevons dans les points qui

suivent la contribution de ce modèle par rapport aux travaux existants.

- (i) Dans les travaux existants, le taux d'utilisation d'une ligne de crédit est principalement modélisé à l'aide de modèles linéaires non bornés (possibilité de valeurs négatives ou de valeurs supérieures à 1). [Agarwal et al. \(2006\)](#), [Sufi \(2009\)](#), [Jiménez et al. \(2009\)](#) ou [Sarin and Muenster \(2012\)](#) utilisent des modèles linéaires pour étudier les facteurs explicatifs du taux d'utilisation (voir section 1.2.7). Dans une démarche explicative, cette forme de modélisation peut suffire mais elle ne le sera pas si l'objectif est de construire un modèle de projection en fonction des facteurs de risque. En effet un modèle linéaire est incapable de capturer les tirages et pré-paiements totaux (absence de masse de probabilité en 1), par ailleurs, des simulations par modèle linéaire peuvent aboutir à des valeurs en dehors de l'intervalle $]0; 1]$. Pour adresser cette problématique, nous avons utilisé la distribution *Bêta inflatée en 1* qui se compose d'une distribution *Bêta* à deux paramètres μ et σ , définie sur l'intervalle $]0; 1[$ et d'une distribution dégénérée en 1 avec un paramètre τ . Grâce à cette modélisation, nous combinons un modèle explicatif qui reproduit les faits stylisés observés et qui permet directement une utilisation pour des projections.

Pour une variable notée δ définie dans $(0, 1]$, la fonction de densité de la distribution *Bêta inflatée en 1*, notée **BEINF** (μ, σ, τ) , s'écrit en fonction du vecteur des paramètres $\theta = (\mu, \sigma, \tau)$ comme suit :

$$\mathbf{BEINF}(\delta|\mu, \sigma, \tau) := \begin{cases} (1 - p_1) \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \delta^{\alpha-1} (1 - \delta)^{\beta-1} & \text{si } 0 < \delta < 1, \\ p_1 & \text{si } \delta = 1, \end{cases} \quad (1.2.18)$$

où, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$, $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma²⁷.

$$\alpha = \frac{\mu(1 - \sigma^2)}{\sigma^2}, \quad \beta = \frac{(1 - \mu)(1 - \sigma^2)}{\sigma^2}, \quad p_1 = \frac{\tau}{1 + \tau}. \quad (1.2.19)$$

inversement,

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{1 + \alpha + \beta}, \quad \tau = \frac{p_1}{1 - p_1}, \quad (1.2.20)$$

Par conséquent, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < p_1 < 1$, $0 < \mu < 1$, $0 < \sigma < 1$ et $\tau > 0$.

L'espérance et la variance de la composante continue de δ , notée δ^* , i.e., $\delta^* \in (0, 1)$ sont respectivement

$$\mathbb{E}[\delta^*] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \mu$$

et

$$\mathbb{V}ar[\delta^*] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(1 + \alpha + \beta)} = \sigma^2\mu(1 - \mu)$$

En incluant l'extrémité en 1, i.e., $\delta \in (0, 1]$, l'espérance de δ et sa variance s'écrivent :

27. Pour rappel, la fonction Gamma est définie pour tout nombre complexe z , tel que $Re(z) > 0$ par : $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

$$\mathbb{E}[\delta] = p_1 + (1 - p_1)\mu$$

$$\text{Var}[\delta] = (1 - p_1)\sigma^2\mu(1 - \mu) + p_1(1 - p_1)(1 - \mu)^2$$

- (ii) Le modèle de risque de liquidité de [Duffy et al. \(2005\)](#) utilise la notation de crédit comme unique driver du taux d'utilisation, le modèle de [Sarin and Klein \(2012\)](#) utilise la notation et l'indicateur de collatéralisation comme drivers. Dans notre modèle, nous nous appuyons sur les autres études pour ajouter le cycle économique qui en étant associé aux taux d'intérêt constitue un indicateur de la liquidité des marchés. Nous utilisons par ailleurs le taux de recouvrement estimé, noté GRR ($GRR = 1 - LGD$) comme un indicateur plus fin de la collatéralisation, celui-ci est continu et peut varier dans le temps. Les résultats que nous trouvons dans notre application montrent que les facteurs que nous avons ajoutés ont un pouvoir explicatif, l'impact est cependant différent selon la notation de crédit, i.e., les emprunteurs avec des mauvaises notations de crédit (non investment grade) sont les plus sensibles aux facteurs macroéconomiques.
- (iii) [Duffy et al. \(2005\)](#) et [Sarin and Klein \(2012\)](#) ne modélisent pas directement le taux d'utilisation, ils modélisent les facteurs drivers (migration des notations de crédit et indicateur de collatéralisation). Le taux d'utilisation simulé est déduit d'une distribution empirique associée au driver. Par exemple, si le driver est la notation de crédit, [Duffy et al. \(2005\)](#) segmentent leur population en autant de notations et construisent les distributions de taux d'utilisation pour chaque segment. Il y aura donc autant de distributions que de notations de crédit. En utilisant des distributions empiriques, ils supposent que la forme de la distribution ne peut pas évoluer selon les facteurs explicatifs car ceux-ci influencent les facteurs drivers et non les distributions. Dit autrement, selon leurs modèles, un emprunteur avec une notation R_t se comportera de la même manière en période normale ou en période de stress de l'économie. Du moment que sa notation ne change pas, son taux d'utilisation ne sera pas influencé par les conditions micro ou macroéconomiques. Nous avons dans notre travail de thèse considéré que le taux d'utilisation pouvait être directement influencé par les facteurs explicatifs. En plus de segmenter les distributions *Bêta inflatées en 1* par notation de crédit, nous avons lié directement les paramètres de chacune des distributions avec les facteurs explicatifs, de cette manière les distributions des taux d'utilisation peuvent changer si les conditions changent et ainsi se refléter dans le comportement des emprunteurs. Nous obtenons dans notre application des sensibilités significativement non nulles entre les paramètres de la distribution **BEINF** (μ, σ, τ) et les facteurs explicatifs. Ceci conforte alors notre démarche.

Nous utilisons le cadre des modèles GAMLSS pour lier les paramètres de la distribution **BEINF** (μ, σ, τ) aux variables explicatives X_t . Pour, $i = 1, \dots, n$, les observations indépendantes (δ_i) ont une fonction de densité $f(\delta_i|\theta^i)$ conditionnellement à $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i, \tau_i)$ le vecteur des paramètres de la distribution. Chaque paramètre est exprimé en fonction des facteurs explicatifs à travers la fonction de lien $g(\cdot)$. Ainsi, pour $k = 1, 2, 3$, soit $g_k(\cdot)$ une fonction de lien monotone qui lie les paramètres de θ au vecteur des variables explicatives X_t . Nous écrivons,

$$\theta(X_t) = \begin{cases} \mu_t = \mu(X_t) = g_1(\beta_1 X_t) = \frac{1}{1 + e^{-X_t \beta_1}} \\ \sigma_t = \sigma(X_t) = g_2(\beta_2 X_t) = \frac{1}{1 + e^{-X_t \beta_2}} \\ \tau_t = \tau(X_t) = g_3(\beta_3 X_t) = e^{X_t \beta_3} \end{cases}, \quad (1.2.21)$$

où $g_k(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto]0, 1[$, pour $k = 1, 2$, et $g_3(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions de lien sont les fonctions naturelles des trois paramètres, voir 1.2.4.1. Nous constatons selon 1.2.21 que les paramètres de la distribution **BEINF** (μ, σ, τ) sont directement exprimés en fonction des variables explicatives X_t .

- (iv) [Duffy et al. \(2005\)](#) s'appuient sur un système expert pour prédire les actions des emprunteurs alors que [Sarin and Klein \(2012\)](#) ne tiennent pas compte de cette composante. En plus du tirage ou de l'inaction, nous avons considéré l'action de pré-payer dans notre modèle. Cette action est plus rare que les tirages comme nous l'avons évoqué mais est néanmoins non négligeable. Nous avons alors utilisé une chaîne de Markov à trois états, notée $(\eta_t)_{t \geq 0}$ pour modéliser les trois actions possibles d'un emprunteur, à savoir, ne rien faire, tirer sur la ligne de crédit ou effectuer un pré-paiement. Nous avons codé ces trois actions respectivement par les chiffres 0, 1 et 2. Nous construisons alors notre chaîne de Markov à trois états et relient le générateur matriciel Λ aux variables explicatives X_t . Nous écrivons,

$$\Lambda_X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_0(X_t) & \lambda_{01}(X_t) & \lambda_{02}(X_t) \\ \lambda_{10}(X_t) & -\lambda_1(X_t) & \lambda_{12}(X_t) \\ \lambda_{20}(X_t) & \lambda_{12}(X_t) & -\lambda_2(X_t) \end{pmatrix},$$

De la même manière que pour le processus de migration des notations de crédit, nous déduisons la matrice de transition pour le processus $(\eta_t)_{t \geq 0}$ entre deux instant t_k et t_{k+1} .

$$P_X(t_k, k_{k+1}) = \begin{pmatrix} p_{00}(X_{t_k}) & p_{01}(X_{t_k}) & p_{02}(X_{t_k}) \\ p_{10}(X_{t_k}) & p_{11}(X_{t_k}) & p_{12}(X_{t_k}) \\ p_{20}(X_{t_k}) & p_{12}(X_{t_k}) & p_{22}(X_{t_k}) \end{pmatrix},$$

- (v) En combinant les deux processus de tirage et de pré-paiement avec la chaîne de Markov qui modélise le comportement de l'emprunteur, nous avons construit un processus appelé *utilization rate*, noté $(\delta_t)_{t \geq 0}$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1; 0 \cup \{0\} \cup 0; 1]$ avec des masses de probabilité non nulles sur les points -1, 0 et 1. Les masses non nulles en -1, 0 et 1 reflètent les cas où l'emprunteur tire totalement sur sa ligne de crédit ($\delta_t = 1$), qu'il pré-paie totalement ($\delta_t = -1$) ou qu'il ne fasse rien ($\delta_t = 0$). L'utilisation rate se présente sous la forme suivante

$$\delta_t(X_t, \delta_{t-1}) = 0 \cdot \mathbf{1}_{\{\eta_t=0\}} + \delta_d(X_t, \delta_{t-1}) \cdot \mathbf{1}_{\{\eta_t=1\}} - \delta_p(X_t, \delta_{t-1}) \cdot \mathbf{1}_{\{\eta_t=2\}} \quad (1.2.22)$$

où X_t est le vecteur des facteurs de risque, $(\eta_t)_{t \geq 0}$ la chaîne de Markov qui représente le comportement de l'emprunteur à travers les trois états, *rien* ($\eta_t = 0$), *tirage* ($\eta_t = 1$),

pré-paiement ($\eta_t = 2$). Les processus $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ et $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$ représentent respectivement les processus de tirage et de pré-paiement.

- (vi) A ce processus *d'utilisation rate* seront associés les fonctions de versement des intérêts, la variation du montant d'autorisation d'une période à l'autre, le processus de perte en cas de défaut de l'emprunteur ainsi que des versements de frais d'engagement sur la partie non utilisée de la ligne de crédit. Le modèle de cash-flow ainsi constitué pourra refléter le comportement des emprunteurs à travers le cycle économique et permettra de mieux appréhender les risques de liquidité et de crédit d'un portefeuille de lignes de crédit. Nous renvoyons le lecteur à la section 3.3 du Chapitre 3 pour avoir le détail de la construction du modèle de cash-flow. Nous le résumons ci-après en donnant la signification de chaque bloc.

Nous écrivons le modèle de cash-flow pour t_k , $k = 1, \dots, N - 1$, comme suit,

$$CF_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (r(t_{k-1}, t_k) + S(t_{i-1}, T)) \cdot C_{ki} \cdot \Delta t_k + F(t_k, t_{k+1}) \cdot (A_k - U_k) \cdot \Delta t_k - \Delta U_k \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > t_k\}} - \left\{ (1 - GRR_k \cdot B(t_k, t_{RD})) \cdot U_k \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k\}} \quad (1.2.23)$$

où τ est une variable de durée qui représente l'instant de défaut de l'emprunteur.

Pour $k = 0$, le cash-flow s'écrit :

$$CF_0 = F(t_0, t_1) \cdot (A_0 - D_0) - D_0. \quad (1.2.24)$$

Nous avons considéré le cas spécifique du cash-flow en $t = 0$ pour tenir compte des cas de tirage à l'origination de la ligne de crédit (cas des prêts immobiliers).

A la maturité de la ligne de crédit, $t_N = T$, le cash-flow s'écrit :

$$CF_T = \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (r(t_{N-1}, T) + S(t_{i-1}, T)) \cdot C_{Ni} \cdot \Delta t_N + U_T \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} - \left\{ (1 - GRR_T \cdot B(T, t_{RD})) \cdot U_T \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau = T\}} \quad (1.2.25)$$

Avec la convention de notation : $S(t_{-1}, T) = S(t_0, T)$.

- Les évènements ainsi que les montants de tirage et de pré-paiement sont captés par la variable ΔU_k .
- Les versements d'intérêts sont captés par l'expression $\sum_{i=0}^{k-1} (r(t_{k-1}, t_k) + S(t_{i-1}, T)) \cdot C_{ki} \Delta t_k$, pour $k = 1, \dots, N - 1$. Où, $r(t_{k-1}, t_k)$ est le coût de financement de la banque dans l'intervalle de temps $[t_{k-1}, t_k)$ et $S(t_{i-1}, T)$ est le spread de crédit associé à la notation de l'emprunteur en t_i avec la maturité T pour $i = 1, \dots, k$, C_{ki} est le montant restant à rembourser par l'emprunteur suite à un tirage qu'il aurait effectué en t_i , pour $i = 1, \dots, k$.
- Les versements de frais d'engagement sont captés par l'expression $F(t_k, t_{k+1}) \cdot (A_k - U_k) \cdot \Delta t_k$, pour $k = 1, \dots, N - 1$, où $F(t_k, t_{k+1})$ est le taux qui sert à calculer les frais d'engagement. $(A_k - U_k)$ représente la part non utilisée ($= PNU_k$).
- La perte en cas de défaut est captée par la composante : $(1 - GRR_k \cdot B(t_k, t_{RD})) \cdot U_k$, pour $k = 1, \dots, N - 1$. où $B(t_k, t_{RD})$ est le taux d'actualisation entre l'instant d'observation du défaut t_k et l'instant de clôture du dossier de défaut t_{RD} .

1.2.9 Résultats

1.2.9.1 Estimation des paramètres du modèle de cash-flow

Nous avons implémenté notre modèle sur un historique de données d'un portefeuille d'une grande banque européenne, les données contiennent des observations de lignes de crédit en Dollars Américains (USD) à remboursement in fine sur une période de 8 années (de décembre 2006 à décembre 2014). La fréquence d'observation de ces lignes de crédit est trimestrielle. Avec une moyenne de 2000 observations par trimestre, sur 32 trimestres, cela donne 16000 années-emprunteurs d'historique. Pour chaque ligne de crédit indexée par i , $i = 1, \dots, n$, à l'instant t , nous observons les données suivantes dans cet historique : montant d'utilisation $U_{i,t}$, montant d'autorisation $A_{i,t}$, date d'origination de la ligne $t_{i,0}$, date de maturité T_i , notation de crédit de l'emprunteur $R_{i,t}$ et taux de recouvrement estimé sur la ligne de crédit $GRR_{i,t}$. Nous avons complété les données avec des variables macroéconomiques récupérées depuis le rapport annuel de stress test de la Réserve Fédérale Américaine (FED), voir [FED \(2017\)](#). Ce rapport fournit sur la période $Q1 - 2000$ jusqu'à $Q4 - 2016$ l'historique des principales variables macroéconomiques avec une fréquence trimestrielle. Les projections sur trois ans de ces variables sont fournies dans le même rapport selon les scénarii : central, stressé et très stressé. Nous avons appliqué une Analyse en Composantes Principales sur les variations des variables macroéconomiques pour construire un proxy du cycle économique²⁸ et avons utilisé le taux d'intérêt 3 mois parmi les variables explicatives des taux de tirage et de pré-paiement. Le vecteur des variables explicatives X_t est constitué des variables : cycle économique, variation taux d'intérêt 3 mois, variation du GRR, taux d'utilisation en période $t - 1$.

Nous avons estimé les paramètres associés aux quatre processus : migration des notations de crédit, comportement de l'emprunteur sur sa ligne de crédit, taux de tirage et taux de pré-paiement. Les résultats sont présentés dans les sections [3.5.2](#), [3.5.3](#), [3.5.4](#), [3.5.5](#) du Chapitre [3](#). Les résultats concernant les taux de tirage et de pré-paiement confirment les faits stylisés énumérés dans la section [1.2.7](#) à savoir l'influence de la notation de crédit sur les taux de tirage et de pré-paiement mais aussi l'influence du cycle économique et des taux d'intérêt court terme. Les résultats montrent aussi que tous les paramètres des distributions **BEINF** (μ, σ, τ) possèdent une composante *Through The Cycle* et une composante *Point In Time*, dit autrement, les distributions des taux de tirage et de pré-paiement sont sensibles au cycle économique, ce qui plaide pour l'utilisation des modèles GAMLSS lors de la simulation et non pas l'utilisation des distributions empiriques. Un autre élément apparaît aussi, c'est celui de l'influence du taux d'utilisation en $t - 1$ sur le taux de tirage (resp. pré-paiement) en t . Nous relevons aussi la forte influence du cycle économique, du taux d'intérêt court terme et du taux d'utilisation en $t - 1$ sur la probabilité de tirage total. Cette influence est moins significative sur les pré-paiements totaux.

1.2.9.2 Simulation Monte Carlo des distributions de cash-flow

En utilisant les résultats de la partie estimation des paramètres du modèle de cash-flow, nous avons projeté les cash-flows sur un horizon de deux années avec une fréquence trimestrielle. Les quatre processus cités précédemment ont été simulés en s'appuyant sur les scénarii du rapport de la FED. L'imbrication des quatre processus dans le modèle de cash-flow permet de construire des distributions dans lesquelles toutes les influences sont présentes. Ces simulations permettent de :

- Voir comment selon un scénario donné la distribution des cash-flow va se déformer avec

28. Nous avons utilisé cette méthode dans le Chapitre [2](#) aussi, voir [2.5.3](#).

l'écoulement du temps ainsi que l'évolution du *Cash Flow-at-Risk*. Un gestionnaire de portefeuille pourra adapter sa stratégie de financement en fonction de la déformation de la distribution des cash-flows futurs.

- Voir la différence de distribution des cash-flows à une date donnée sur le même portefeuille lorsque deux scénarii (central et stressé) sont supposés. Plus de tirages et de défauts seront observés dans le scénario stressé, ce qui donnera une distribution avec une plus grande asymétrie à gauche par rapport à la distribution liée au scénario central. Cela devrait se voir aussi au niveau des Cash Flows-at-Risk.
- Tester différentes stratégies de gestion du portefeuille bancaire en jouant sur les paramètres du modèle de cash-flow. En effet sans la simulation, il serait difficile de savoir si par exemple une stratégie avec une augmentation des montants d'autorisation aux emprunteurs non investment grade, qui d'un côté font subir un risque de liquidité plus élevé (plus de tirages) mais sont plus rentables (frais d'engagement plus élevés et taux d'intérêt plus élevés), serait plus intéressante qu'une stratégie moins agressive qui se concentrerait sur les emprunteurs avec une meilleure notation, donc moins rentables mais avec un risque de liquidité et de crédit moins élevé.

Pour réaliser les simulations, nous démarrons des dernières données disponibles dans notre historique, c'est à dire celles au 31/12/2014. A partir de la liste des lignes de crédit encore actives à la dernière date de notre historique, $n = 1683$ nous effectuons les opérations suivantes pour chaque ligne de crédit :

1. une notation de crédit est simulée pour chaque date t_k dans notre horizon de simulation, $k = 1, \dots, 8$;
2. pour chaque notation de crédit simulée, une action associée au comportement de l'emprunteur est simulée;
3. en utilisant la paire simulée (notation, action), un taux d'utilisation δ_k est simulé en utilisant les paramètres de la distribution **BEINF** (μ, σ, τ) associés à la paire (notation, action);
4. les montants A_k , U_k et PNU_k sont obtenus en utilisant les équations de conversion (3.4.4) (voir section 3.4.1, chapitre 3);
5. en combinant les éléments A_k , U_k et PNU_k avec les versements d'intérêt, les frais d'engagement et la perte en cas de défaut, dans une des équations (3.3.2), (3.3.1) ou (3.3.3), nous simulons une valeur de cash-flow à la date t_k ;
6. les étapes 1 à 5 sont répétées 1000 fois pour chaque ligne de crédit.

Nous renvoyons les lecteur à la section 3.6.2 pour le détail des résultats de ces simulations ainsi que l'analyse de ces derniers. Nous mettons en exemple le tableau des taux d'utilisation moyens par groupe de notation de crédit sur les 4 premières périodes de la simulation.

Statistics	Mean in %				Std.Dev in %				$\hat{q}_{99\%}$ in %			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Rat 1	11	10	8	5	3	4	3	4	18	18	18	13
Rat 2	17	14	12	6	4	5	4	4	28	25	22	17
Rat 3	24	19	14	7	4	4	4	3	32	28	23	14
Rat 4	27	20	15	7	3	3	3	2	34	27	22	14
Rat 5	26	20	15	8	2	2	2	2	32	25	20	12
Rat 6	26	20	15	8	2	2	3	2	32	26	21	12
Rat 7	26	19	15	7	3	3	3	3	33	26	22	14
Rat 8	33	22	16	8	5	5	5	4	46	35	28	19

TABLE 1.2 – Moyenne, écart-type et $\hat{q}_{99\%}$ du taux d'utilisation moyen par rating durant la simulation *point in time*

Nous pouvons constater que la moyenne des taux d'utilisation des lignes de crédit augmente à mesure que la notation de crédit se détériore, ce résultat est conforme avec la théorie. Cependant, à mesure que le temps s'écoule, l'utilisation moyenne diminue. Ceci signifie que le risque de liquidité est plus élevé à court terme qu'à long terme. Nous expliquons cela par la réserve de tirage qui est par construction plus élevée à court qu'à long terme²⁹ mais aussi par l'impossibilité de la banque de contrôler l'utilisation des lignes de crédit à court terme même si l'emprunteur viole des critères de profitabilité.

Les figures ci-dessous illustrent les différentes distributions lors de la première date de simulation. Les distributions des 4 premiers groupes de notation (1 à 4) sont dans la figure de gauche et ceux des 4 derniers (5 à 8) dans la figure de droite.

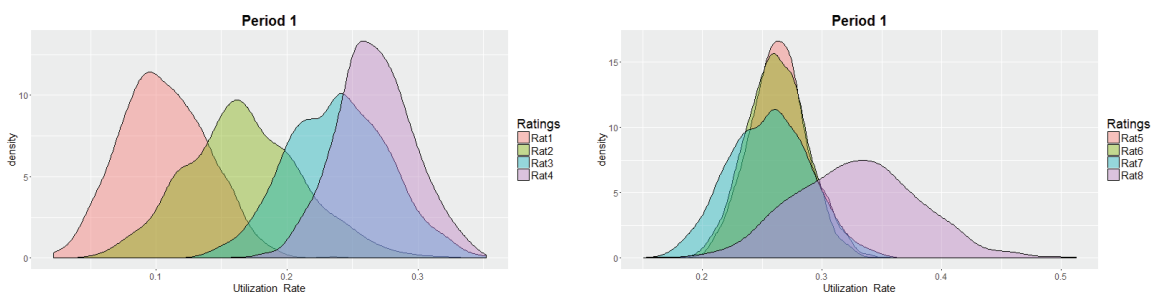


FIGURE 1.8 – Distribution des taux d'utilisation à la première période de simulation

1.3 Disposition-à-payer du décideur pour réduire partiellement ou totalement le risque en présence de deux sources d'ambiguïté

Nous suivons la même structure que dans les deux précédents chapitres pour traiter le Chapitre 4 sur la disposition-à-payer d'un décideur pour réduire partiellement ou totalement le risque en présence de deux sources d'ambiguïté. Nous allons d'abord présenter les outils théoriques nécessaires à la compréhension de la décision dans l'incertain. Le paradoxe d'Ellsberg sera un point d'entrée pour aborder le concept d'ambiguïté. Nous ferons ensuite une revue d'articles qui utilisent le modèle d'ambiguïté lisse développé par [Klibanoff et al. \(2005\)](#) (*smooth ambiguity model*) que nous utilisons nous même dans le chapitre 4. Enfin, nous présenterons notre problématique ainsi que les résultats de notre travail pour ce chapitre.

1.3.1 Décision dans un univers risqué

Nous traitons dans cette thèse le cas d'un décideur qui doit réaliser un choix dans un univers risqué³⁰. Dans un contexte incertain, une action a plusieurs conséquences, autant de

29. Sur le court terme, l'emprunteur n'a pas utilisé toute sa réserve d'autorisation alors qu'il est probable qu'avec le passage du temps il l'aura en partie utilisée.

30. A la place du terme *risqué*, nous retrouvons souvent le terme *incertitude* dans la littérature mais nous avons préféré utiliser le terme *risqué* pour bien distinguer le cadre où les probabilités associées aux loteries

conséquences que d'états de la nature. Soit S le nombre d'états de la nature. Un contexte risqué est un cas particulier d'un contexte incertain. La distinction entre risque et incertitude est introduite par Knight en 1921. Selon cet auteur, il existe deux types d'incertitude : une incertitude dite "mesurable" s'il est possible d'attribuer une probabilité d'occurrence à chaque état de la nature, et une incertitude dite "non mesurable" le cas échéant. Un contexte d'incertitude mesurable est appelé *contexte risqué*.

On note π_s la probabilité associée à l'état s ($\sum_{s=1}^S \pi_s = 1$). Dans un contexte risqué, une action est donc une variable aléatoire (v.a.) X appelée *loterie* :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_S; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_S].$$

Les conséquences sont appelées des lots : x_s est le lot contingent à l'état s . On peut aussi représenter une action risquée par une variable aléatoire continue : X à réalisation dans l'intervalle $[\underline{x}, \bar{x}]$ et de densité $f(x)$.

1.3.2 Critères d'évaluation d'une loterie

On note $V^R(X)$ l'évaluation de la loterie (i.e., la valeur de la loterie) X .

Le critère de Pascal

La valeur d'une loterie est égale à son espérance mathématique : $V^R(X) = \mathbb{E}[X]$.

Le critère "espérance/variance"

Ce critère dont le promoteur fut H. Markowitz reconnaît le rôle de l'espérance mathématique dans l'évaluation d'une loterie tout en le complétant par l'introduction de la notion de risque capturée par la variance³¹.

Soit un portefeuille X , l'espérance de X représente le rendement (espéré) du portefeuille alors que la variance de X représente le risque du portefeuille.

Toute loterie X est évaluée par : $V^R(X) = f(\mathbb{E}[X], \text{Var}[X])$, où la fonction f est une fonction à deux arguments, continue et n fois dérivable. La forme de la fonction f livre des indications sur les préférences du décideur.

1.3.3 Fonction d'utilité

Daniel Bernoulli met en avant l'idée que ce qui importe aux individus, ce n'est pas le gain en lui-même mais plutôt l'utilité qu'il procure. Soit x le gain, l'utilité (la satisfaction) retirée du gain s'écrit $u(x)$ où u est une fonction appelée "fonction d'utilité". Selon Bernoulli, u est croissante et concave : la satisfaction des individus augmente de moins en moins vite au fur et à mesure qu'ils s'enrichissent ; c'est le principe de l'utilité marginale décroissante pris en compte par la concavité de la fonction d'utilité.

Ainsi selon Bernoulli un individu rationnel évalue une loterie par l'espérance des utilités retirées des lots : $V^R(X) = \sum_{s=1}^S \pi_s u(x_s)$ avec u fonction strictement croissante et strictement concave. Chaque lot est transformé par la fonction u .

sont connues (risque) du cadre où les probabilités associées aux loteries sont inconnues (incertitude).

31. Le critère de Markowitz retient le couple (Espérance, Ecart-type).

1.3.4 Modèle de théorie de l'utilité espérée (modèle de Von Neumann and Morgenstern - VNM)

Tout individu rationnel au sens de VNM évalue une loterie en calculant l'espérance des utilités retirées des lots (conséquences).

Soit la loterie X telle que $X = [x_1, x_2, \dots, x_S; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_S]$;

L'évaluation de X par tout individu rationnel au sens de VNM s'écrit :

$$V^{VNM}(X) = \sum_{s=1}^S \pi_s u(x_s)$$

avec

- u strictement croissante, continue et n fois différentiable,
- u définie à une transformation strictement croissante affine près.

On écrit $V^{VNM}(X) = \mathbb{E}[u(X)]$.

On supposera, de manière générale, que la fonction u est continue et n fois différentiable. On notera u' , u'' , u''' et u'''' , la dérivée première, seconde, troisième et quatrième de la fonction. Au delà, nous noterons $u^{(n)}$ la dérivée d'ordre n .

On note qu'aucune hypothèse n'est faite sur le signe de la dérivée seconde de la fonction u . Le signe négatif de u'' (posé par Bernoulli) traduit un comportement particulier de l'individu face au risque parmi les types de comportements possibles : aversion vis à vis du risque, attirance pour le risque et indifférence vis-à-vis du risque.

Une loterie X_1 est strictement préférée (équivalente) à la loterie X_2 ($X_1 \succ X_2$ ($X_1 \sim X_2$)) si et seulement si $\mathbb{E}[u(w + X_1)] \geq (=)\mathbb{E}[u(w + X_2)]$ où w est la richesse initiale du décideur.

1.3.5 Équivalent certain et prime de risque

L'équivalent certain associé à la loterie X , noté EC_X , est le montant certain pour lequel l'agent est indifférent entre ce montant et la loterie elle-même. EC_X est tel que :

$$\mathbb{E}[u(X)] = u(EC_X)$$

L'équivalent certain associé à une loterie renseigne sur les préférences de l'agent quant à sa perception du risque. Plus spécifiquement, la comparaison de l'équivalent certain et de l'espérance mathématique indique le comportement de l'agent vis-à-vis du risque :

- Aversion vis-à-vis du risque (riscophobie) $\equiv EC_X < \mathbb{E}[X]$.
- Neutralité (indifférence) vis-à-vis du risque $\equiv EC_X = \mathbb{E}[X]$.
- Attirance vis-à-vis du risque (riscophilie) $\equiv EC_X > \mathbb{E}[X]$.

Pour toute fonction d'utilité v définie comme une transformation affine strictement croissante de la fonction u (i.e. $v(x) = au(x) + b \forall x$ avec $a > 0$), alors l'équivalent certain n'est pas modifié.

La *prime de risque* associée à la loterie X , notée ρ_X , correspond au montant monétaire égal à la différence entre l'espérance de gain de la loterie et son équivalent certain.

ρ_X , est telle que :

$$\rho_X = \mathbb{E}[X] - EC_X \Leftrightarrow \mathbb{E}[u(X)] = u(\mathbb{E}[X] - \rho_X)$$

Ainsi, le signe de la prime ρ_X indique le comportement de l'agent vis-à-vis du risque :

- Aversion pour le risque $\equiv \rho_X > 0 \Leftrightarrow EC_X < \mathbb{E}[X]$.
- Neutralité vis-à-vis du risque $\equiv \rho_X = 0 \Leftrightarrow EC_X = \mathbb{E}[X]$.
- Attirance vis-à-vis du risque $\equiv \rho_X < 0 \Leftrightarrow EC_X > \mathbb{E}[X]$.

1.3.6 Attitude vis-à-vis du risque et fonction d'utilité

- Rationalité du décideur : un agent rationnel préfère toujours plus à moins (\equiv Principe de Non Saturation des Préférences)
 - $\equiv x \succ x - k \quad \forall k > 0, \quad \forall x > 0,$
 - $\equiv u(x) > u(x - k) \quad , \forall x,$
 - $\equiv u(x)$ strictement croissante ($u'(x) > 0 \forall x$).
- Aversion vis-à-vis du risque : un agent averse au risque préfère avoir l'espérance de gain de la loterie plutôt que la loterie elle-même,
 - $\equiv \mathbb{E}[X] \succ X \quad , \forall X,$
 - $\equiv u(\mathbb{E}[X]) > \mathbb{E}[u(X)],$
 - $\equiv u(x)$ strictement concave ($u''(x) < 0, \forall x$).

1.3.7 Dominance stochastique

Nous utiliserons les ordres de dominance stochastique pour caractériser les propriétés de non satiété, d'aversion au risque, de prudence et de tempérance face au risque. Nous définissons les richesses aléatoires W_1 et W_2 , telles que, $W_1 = w + X_1$ et $W_2 = w + X_2$, où, X_1 et X_2 sont deux loteries.

1.3.7.1 Dominance stochastique d'ordre 1

Une définition de la dominance stochastique d'ordre 1 est donnée comme suit ³² : *la richesse W_1 domine stochastiquement la richesse W_2 à l'ordre 1 si tous les agents dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité espérée et respectent l'hypothèse de non satiété préfèrent W_1 à W_2 .* Une condition nécessaire mais non suffisante pour la dominance stochastique d'ordre 1 est que l'espérance de la richesse aléatoire W_1 soit supérieure à l'espérance de la richesse aléatoire W_2 , i.e., $\mathbb{E}[W_1] > \mathbb{E}[W_2]$. Une condition nécessaire et suffisante pour établir la dominance stochastique d'ordre 1 entre W_1 et W_2 est que la fonction de répartition $F(t)$ de W_1 soit inférieure en tout point t à la fonction de répartition $G(t)$ de W_2 . On écrit,

$$W_1 \succ_1 W_2, \text{ssi}, \forall t, F(t) \leq G(t), \quad (1.3.1)$$

où le symbole " \succ_1 " représente la dominance stochastique à l'ordre 1. L'inégalité entre $F(t)$ et $G(t)$ étant stricte pour un ensemble de valeurs t de probabilité non nulle.

1.3.7.2 Dominance stochastique d'ordre 2

Alors que la dominance stochastique d'ordre 1 établit une préférence entre deux richesses aléatoires selon le critère de non satiété de l'agent, la dominance d'ordre 2 établit une préférence entre deux richesses aléatoires selon l'attitude vis-à-vis du risque de l'agent. En considérant la

32. Cette définition est extraite de Cayatte (2009).

riscophobie, si tous les agents averses au risque préfèrent la richesse W_1 à la richesse W_2 alors W_1 domine stochastiquement W_2 à l'ordre 2, on écrit, $W_1 \succ_2 W_2$. Une condition nécessaire mais non suffisante est encore celle des espérances, $\mathbb{E}[W_1] \geq \mathbb{E}[W_2]$. Une condition nécessaire et suffisante est connue sous le nom de *condition sur les intégrales*, elle s'écrit,

$$W_1 \succ_2 W_2, \text{ ssi } , \forall s \int_{-\infty}^s F(t) dt \leq \int_{-\infty}^s G(t) dt, \quad (1.3.2)$$

avec un ensemble de valeurs de s de probabilité non nulle pour lequel l'inégalité est stricte.

La dominance stochastique d'ordre 1 induit celle d'ordre 2, en effet, si $W_1 \succ_1 W_2$ alors tous les agents qui présentent la propriété de non satiété préféreront W_1 à W_2 , y compris les riscophobes. Afin de caractériser la propriété de « plus risqué que » à travers la dominance stochastique d'ordre 2, [Rothschild and Stiglitz \(1970\)](#) développent les concepts d'ajout d'un bruit blanc et de transfert de poids des probabilités (mean-preserving spread in probability) et montrent que si W_2 s'écrit comme la somme de W_1 et d'un bruit blanc $\tilde{\varepsilon}$ ou que $G(t)$ est une transformation de $F(t)$ qui s'obtient en répartissant la probabilité associée à une réalisation sur des valeurs supérieures et inférieures (voir exemple), alors W_2 est dominée stochastiquement à l'ordre 2 par W_1 .

En considérant les deux loteries W_1 et W_2 ,

$$W_1 = [10, 50, 100 ; 0.2, 0.6, 0.2]$$

et,

$$W_2 = [10, 50 + \tilde{\varepsilon}, 100 ; 0.2, 0.6, 0.2]$$

où

$$\tilde{\varepsilon}_{|W_2=50} = [-30, +30 ; 0.5, 0.5]$$

Il apparait ici que $W_2 = W_1 + \tilde{\varepsilon}_{|W_2=50}$, qui se lit, si W_2 prend la valeur 50, un nouvel aléa, d'espérance nulle s'ajoute à cette valeur. En espérance, W_1 et W_2 sont égales, en effet, $\mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}[W_2] = 52$, l'ajout d'un bruit blanc ne change rien à l'espérance de la richesse W_1 .

Par ailleurs, W_2 peut se réécrire sous la forme :

$$W_2 = [10, 20, 80, 100 ; 0.2, 0.3, 0.3, 0.2]$$

Nous remarquons que la probabilité associée à la réalisation $w_2 = 50$ dans la loterie W_2 , notée $p_{|w_2=50}$ a été répartie sur les probabilités associées aux deux réalisations $w_2 = 20$ et $w_2 = 80$, notées respectivement $p_{|w_2=20}$ et $p_{|w_2=80}$, tel que, $p_{|w_2=50} = p_{|w_2=20} + p_{|w_2=80}$.

En calculant l'utilité espérée avec la fonction d'utilité (croissante et concave) $u(w) = \sqrt{w}$ pour les deux loteries, nous obtenons $\mathbb{E}[u(W_1)] \simeq 6,87$ et $\mathbb{E}[u(W_2)] \simeq 6,65$, ce qui confirme que l'utilité retirée par l'agent avec la richesse W_1 est supérieure à celle de W_2 .

[Rothschild and Stiglitz \(1970\)](#) énoncent la proposition où les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Tous les agents averses au risque préfèrent W_1 à W_2 : $\mathbb{E}[u(W_2)] \leq \mathbb{E}[u(W_1)]$ pour toutes les fonctions $u(\cdot)$ concaves.
- (b) W_2 s'écrit comme la somme de W_1 et un bruit blanc $\tilde{\varepsilon}$.

- (c) W_2 s'obtient à partir de W_1 et une séquence de changements de risque à moyenne constante.
- (d) $\forall s, \int_{-\infty}^s F(t) dt \leq \int_{-\infty}^s G(t) dt.$

1.3.7.3 Dominance stochastique d'ordre n

Une généralisation de la dominance stochastique à l'ordre n s'obtient grâce aux conditions suivantes sur les distributions respectives de W_1 et W_2 . En partant de la notation, $F_1 = F$ et $G_1 = G$, nous définissons de manière itérative pour tout $t \in [t_1, t_2]$

$$F_{k+1}(t) = \int_{t_1}^t F_k(z) dz \text{ et } G_{k+1}(t) = \int_{t_1}^t G_k(z) dz$$

pour $k = 1, 2, \dots, n-1$. Alors, W_1 est dominée par W_2 (ou W_1 précède W_2) via la dominance stochastique d'ordre n si $G_n(t) \leq F_n(t)$ pour tout t , et si $G_k(t_2) \leq F_k(t_2)$ pour $k = 1, 2, \dots, n-1$. Nous notons $W_1 \preceq_n W_2$.

Lorsque les $n-1$ premiers moments de W_1 et W_2 sont égaux, la dominance stochastique d'ordre n correspond à la dominance d'Ekern d'ordre n (voir Ekern (1980)), notée $W_1 \preceq_{Ekern-n} W_2$. Le concept de dominance d'Ekern est très utile en théorie du risque car il traduit pour différentes valeurs de n les attitudes d'aversion au risque, de prudence et de tempérance. En effet, pour $n = 2$, la dominance d'Ekern à l'ordre 2 traduit la notion d'aversion au risque ou de manière équivalente l'aversion au changement de risque à moyenne constante *mean-preserving spread in risk* introduite par Rothschild and Stiglitz (1970). Pour $n = 3$, la dominance d'Ekern à l'ordre 3 traduit la notion de prudence vis-à-vis du risque ou d'aversion face aux risques baissiers (*downside risk*) introduit par Menezes et al. (1980), elle correspond à une préférence pour le déplacement des risques vers les états du monde les plus favorables. Pour $n = 4$, la dominance d'Ekern à l'ordre 4 traduit la notion de tempérance vis-à-vis du risque ou de manière équivalente d'aversion vis-à-vis des risques externes (*outer risk aversion*) introduite par Menezes and Wang (2005). L'aversion aux risques externes signifie qu'un décideur tempérant préférera W_1 à W_2 sachant leurs trois premiers moments égaux, si l'aplatissement de la distribution associée à W_1 est inférieur à celui de W_2 .

1.3.7.4 Fonction d'utilité d'un décideur *Mixed Risk Averse* (MRA)

Ingersoll (1987) démontre le résultat suivant :

Lemme 1. *Pour toutes v.a. X et Y , telles que $X \preceq_n Y$, alors $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction f qui satisfait $(-1)^{k+1} f^{(k)} > 0 \forall k = 1, \dots, n$.*

Nous pouvons déduire de ce lemme l'inégalité suivante : $\mathbb{E}[u(w+Y)] \geq \mathbb{E}[u(w+X)]$ pour toute fonction d'utilité u telle que $u' > 0$, $u'' < 0$ et $(-1)^{k+1} u^{(k)} > 0$, i.e., pour toute fonction d'utilité dont les dérivées successives alternent en signe. Les dérivées impaires sont positives et les dérivées paires négatives. Un agent avec une fonction d'utilité qui alterne en signe est dit *Mixed Risk Averse* (MRA).

Ainsi un agent MRA est rationnel ($u' > 0$), averse au risque ($u'' < 0$), prudent ($u''' > 0$), tempérant ($u'''' < 0$), etc.

1.3.8 Introduction de l'ambiguïté

Depuis l'expérience fondatrice de Ellsberg (1961), l'aversion des agents (Decision Makers) à l'incertitude sur les probabilités dans leur prise de décision est un fait reconnu. En effet, en

violation de l'axiome d'indépendance de la théorie de l'utilité espérée, l'expérience d'Ellsberg montre que l'incertitude sur les probabilités amène les joueurs à préférer strictement les paris avec des probabilités connues à ceux avec des probabilités inconnues. Par exemple, les agents préfèrent la loterie qui donne un gain de 100 avec une probabilité $p = 1/2$ à une autre loterie dans laquelle la probabilité de gagner 100 est incertaine, mais avec une moyenne des probabilités égale à $1/2$ ($p = 1/2 + \tilde{\epsilon}$, où $\tilde{\epsilon}$ est une v.a. d'espérance nulle et bornée telle que $0 \leq p \leq 1$). Des études ultérieures ont confirmé ce résultat et montré qu'une grande partie de la population préfère décider lorsque les probabilités sont connues, voir [Einhorn and Hogarth \(1988\)](#), [Sarin and Weber \(1993\)](#), [Chow and Sarin \(2001\)](#), [Eliaz and Ortoleva \(2015\)](#) ou [Eichberger et al. \(2015\)](#). Les enquêtes auprès des gestionnaires d'entreprises, [Chesson and Viscusi \(2003\)](#) et [Viscusi and Chesson \(1999\)](#) montrent le même comportement. Un agent qui se comporte de la sorte est dit averse à l'ambiguïté³³. [Snow \(2011\)](#) définit l'ambiguïté comme l'incertitude sur la probabilité créée par une information insuffisante et qui pourrait être connue. À la lumière de cette définition, il est utile de distinguer entre le risque et l'ambiguïté. Un acte est lié au risque lorsqu'il y a assez d'information pour associer les conséquences de cet acte à des probabilités connues alors qu'il est lié à l'ambiguïté lorsqu'il n'y a pas assez d'information pour constituer les probabilités (stables) associées aux conséquences de cet acte. Afin d'introduire l'ambiguïté sur les probabilités, nous considérons un cas simple de loterie L à deux états, un bon état de la nature et un mauvais. Formellement, nous écrivons : $L = [X, Y; p, 1 - p]$ où X est la variable aléatoire (v.a.) associée à la réalisation du mauvais état de la nature avec une probabilité p et Y la v.a. associée à la réalisation du bon état de la nature avec une probabilité $1 - p$. Un agent averse au risque préférera le risque Y au risque X , écrit sous forme d'espérance d'utilité, cela donne $\mathbb{E}[u(w + Y)] \geq \mathbb{E}[u(w + X)]$ où w est la richesse initiale de l'agent.

L'ambiguïté sur les probabilités est introduite sous forme d'une v.a. d'espérance nulle, notée $\tilde{\epsilon}$, et de densité F , telle que $\mathbb{E}_F[\tilde{\epsilon}] = 0$. Elle s'ajoute à la probabilité du mauvais état de la nature dans la loterie L , dit autrement, elle prend la forme d'une incertitude sur les probabilités de réalisation de la loterie L . En ce sens, la présence d'ambiguïté fait que la probabilité associée aux conséquences X et Y n'est plus unique mais consiste en un ensemble de probabilités, chacune reflétant les croyances du décideur.

Les probabilités ambiguës \tilde{p} , s'écrivent $\tilde{p} = p + \tilde{\epsilon}$ avec $\mathbb{E}_F[\tilde{p}] = p$.

Comme l'indique [Berger \(2011\)](#), le concept d'ambiguïté sur les probabilités est introduit de telle manière que l'ensemble des nouvelles probabilités associées à une conséquence donnée n'est rien d'autre qu'un *mean-preserving spread* dans l'espace des distributions de probabilité du premier ordre. Il en résulte qu'un agent averse à l'ambiguïté sera prêt à payer pour réduire et / ou éliminer l'ambiguïté sur les probabilités.

L'objectif de réduction de l'ambiguïté sur les probabilités pose la question de la mesure d'un changement d'ambiguïté. A travers la littérature sur le sujet, nous identifions trois mesures de changement d'ambiguïté sur les probabilités. La première définit la diminution (resp. augmentation) du bien-être en raison d'une plus grande (resp. petite) ambiguïté sur les probabilités. La seconde provient de [Snow \(2010\)](#) et correspond au montant qu'un agent est disposé à payer (DAP) pour bénéficier d'une réduction du niveau d'ambiguïté sur les probabilités. La troisième est l'augmentation de la probabilité de perte qui rend l'individu indifférent entre la situation ambiguë et la situation non ambiguë.

Un modèle d'ambiguïté très utilisé est celui de [Klibanoff et al. \(2005\)](#), appelé modèle d'ambiguïté lissé (smooth ambiguity model). Nous présenterons ce modèle ainsi que quelques appli-

33. Dans cette thèse, nous utilisons les termes incertitude et ambiguïté de manière équivalente.

cations qui en sont faites dans l'économie de l'incertain. Deux autres modèles d'ambiguïté, à savoir, le modèle néo-additif de [Chateauneuf et al. \(2007\)](#) ainsi que le modèle de contraction pour l'aversion à l'information imprécise de [Gajdos et al. \(2007\)](#), seront examinés dans le Chapitre 4 afin de tester la robustesse de nos résultats.

1.3.9 Modèle d'ambiguïté lissé (KMM)

Le modèle d'ambiguïté lissé (smooth ambiguity model) axiomatisée par [Klibanoff et al. \(2005\)](#) (noté KMM) permet de séparer l'effet de l'aversion à l'ambiguïté de celui de l'aversion au risque mais aussi de distinguer l'ambiguïté de l'attitude du décideur vis-à-vis de l'ambiguïté. Nous ne reviendrons pas ici sur l'axiomatisation du modèle, le lecteur intéressé pourra se référer à [Klibanoff et al. \(2005\)](#) mais nous présenterons les éléments qui le constituent.

Le modèle KMM se caractérise par deux fonctions d'utilité, la fonction d'utilité standard $u(\cdot)$ qui traduit l'attitude de l'agent face au risque et la fonction d'ambiguïté $\Phi(\cdot)$ qui traduit l'attitude de l'agent face à l'ambiguïté. À côté des fonctions d'utilité, la fonction de densité des probabilités de second ordre, notée F , qui capture les croyances subjectives de l'agent à propos des probabilités de premier ordre. En reprenant l'exemple de la loterie $L = [X, Y; p, 1 - p]$ et des probabilités ambiguës, $\tilde{p} = p + \tilde{\epsilon}$, nous décrivons l'utilité espérée de l'agent soumis au risque et à l'ambiguïté comme suit :

$$V(w; p; \tilde{\epsilon}) = \Phi^{-1} \left(\mathbb{E}_F[\Phi\{\tilde{p} \mathbb{E}[u(w + X)] + (1 - \tilde{p})\mathbb{E}[u(w + Y)]\}] \right). \quad (1.3.3)$$

[Klibanoff et al. \(2005\)](#) définissent un agent averse à l'ambiguïté si, pour toute distribution de richesse $W = w + L$ non dégénérée, la valeur de l'utilité espérée de cet agent décrite par (1.3.3) diminue à mesure que la distribution $F(\tilde{p})$ change de manière à induire un mean-preserving spread dans l'utilité espérée de la richesse W , i.e, $\mathbb{E}_F[\tilde{p}]\mathbb{E}[u(w + X)] + (1 - \mathbb{E}_F[\tilde{p}])\mathbb{E}[u(w + Y)]$. Ils montrent que cela nécessite que Φ soit concave.

Lorsque l'agent est neutre à l'ambiguïté, Φ est linéaire, l'utilité espérée en (1.3.3) se réduit à l'utilité espérée subjective de Savage,

$$V(w; p; \tilde{\epsilon}) = \mathbb{E}_F[\tilde{p}]\mathbb{E}[u(w + X)] + (1 - \mathbb{E}_F[\tilde{p}])\mathbb{E}[u(w + Y)]. \quad (1.3.4)$$

Grâce à sa flexibilité, le modèle KMM est utilisé à différentes fins, [Jewitt and Mukerji \(2011\)](#) l'utilisent pour ordonner des actes selon leur degré d'ambiguïté par rapport aux préférences du décideur, en d'autres termes, ils caractérisent la notion de plus ambigu lorsque l'on compare différents actes. Ils identifient la prime d'ambiguïté d'un acte comme « le prix qu'un DM est prêt à payer pour échanger l'acte contre une loterie, de sorte que l'acte soit plus ambigu que la loterie ». Une autre utilisation est celle de la mesure de l'effet de l'ambiguïté sur le bien-être du décideur, [Berger \(2011\)](#) définit les primes d'ambiguïté et d'incertitude et les utilise pour quantifier cet effet. Sous une modélisation de l'ambiguïté à la KMM, la *prime d'ambiguïté* w satisfait l'équation $\phi^{-1} \{ \mathbb{E}_F \phi \{ \mathbb{E} u(\tilde{z}) \} \} = \mathbb{E}(\tilde{z} - w)$, alors que la *prime d'incertitude* φ satisfait $\phi^{-1} \{ \mathbb{E}_F \phi \{ \mathbb{E} u(\tilde{z}) \} \} = u(\mathbb{E}\tilde{z} - \varphi)$. Ces primes sont l'équivalent de la prime de risque traditionnelle mais en présence d'ambiguïté. [Berger \(2011\)](#) a également développé des approximations à la manière de Arrow-Pratt pour ces primes lorsque l'ambiguïté (l'incertitude) est faible. [Snow \(2010\)](#) étudie la valeur de l'information pour un décideur dans un cadre ambigu. Il montre que l'information qui réduit l'ambiguïté a une valeur positive pour le décideur averse à l'ambiguïté. Il montre aussi que la valeur de l'information qui élimine le risque et / ou l'ambiguïté augmente avec une plus grande ambiguïté et une plus grande aversion à l'ambiguïté du décideur. [Gollier \(2014\)](#) étudie l'effet de l'aversion à l'ambiguïté sur le contrat d'assurance optimal dans le cadre d'une distribution des pertes ambiguë. Il constate que sous différentes

structures d'ambiguïté, l'aversion à l'ambiguïté se traduit par différents contrats d'assurance optimaux. Par exemple, si les distributions de perte possibles peuvent être ordonnées selon l'ordre du rapport de vraisemblance monotone³⁴ le contrat optimal contient une franchise qui diminue à mesure que la perte augmente³⁵. [Osaki and Schlesinger \(2015\)](#) considèrent un portefeuille avec un actif sûr et un actif risqué (non ambigu et d'espérance positive) ainsi qu'un *background* risque ambigu, i.e., un risque non évitable et non assurable avec une incertitude sur sa distribution. En supposant que chaque background risque associé à une distribution possible peut être classé via la dominance stochastique d'ordre N par rapport aux autres background risque possibles, les auteurs montrent que l'aversion à l'ambiguïté entraîne une diminution de l'investissement dans l'actif risqué lorsque le background risque est ambigu.

1.3.10 Problématique et contribution de la thèse

Étant donné que l'aversion à l'ambiguïté renforce l'aversion au risque, la Disposition-à-Payer (DAP) pour réduire partiellement ou totalement³⁶ le risque d'un agent averse à l'ambiguïté est plus élevée en comparaison à sa DAP si les probabilités ne sont pas ambiguës. En partant de ce constat, nous posons la problématique suivante : *Qu'en est-il de la DAP d'un décideur neutre à l'ambiguïté s'il veut réduire le risque alors que les probabilités sont ambiguës ?*

L'intuition suggère que si le décideur est neutre à l'ambiguïté, dans le cas ambigu il ne paiera pas plus pour réduire le risque par rapport au cas sans ambiguïté. Nos résultats montrent que dans certains cas, la présence d'ambiguïté sur les probabilités est suffisante pour influencer la DAP afin de réduire le risque d'un décideur neutre à l'ambiguïté.

Le cas d'ambiguïté sur les probabilités trouve une application dans la gestion du risque de crédit, en particulier lorsqu'il s'agit d'un nouveau marché (nouveaux types d'emprunteurs) pour lequel il n'y a pas assez de données historiques d'événements de défaut pour permettre une estimation statistique robuste de la probabilité de défaut. Concrètement, cela peut être considéré comme un problème de qualité de données ou un problème de données manquantes dû à la censure à droite (temps d'observation limité). En effet, si l'on considère une ligne de crédit, le mauvais état de la nature est celui du défaut de paiement de l'emprunteur³⁷, associé à la probabilité de défaut (PD), $p \equiv PD$, alors que le bon état est celui du paiement normal des intérêts et du principal, associé à $1 - PD$. L'estimation de la probabilité de défaut souffre d'incertitude car le nombre d'observations de défaut est insuffisant pour construire un modèle statistique robuste.

Pour traiter cette problématique nous avons constitué un portefeuille avec deux loteries, $L_1 = [X_1, Y_1; p_1, 1 - p_1]$ et $L_2 = [X_2, Y_2; p_2, 1 - p_2]$, avec des v.a. X_i , $i = 1, 2$ associées au mauvais état de la nature et Y_i , $i = 1, 2$ associées au bon état de la nature. Posons que les v.a. X_i , Y_i , $i = 1, 2$ sont mutuellement indépendantes et que le décideur possède une fonction d'utilité u qui satisfait $(-1)^{k+1}u^{(k)} > 0 \forall k = 1, \dots, n$. Le décideur est dit *Mixed Risk Averse* (MRA) (voir [1.3.7.4](#)). Enfin, la réduction partielle ou totale du risque s'exprime à travers le passage de $p_i > 0$, $i = 1, 2$ à αp_i tel que $0 \leq \alpha < 1$.

34. L'ordre du rapport de vraisemblance monotone est défini comme suit (voir [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#)) :

Soit X et Y des variables aléatoires continues (discrètes) de densités (masses de probabilité) f et g , respectivement. Si $\frac{g(t)}{f(t)}$ est croissante en t sur l'union des supports de X et Y ou, de manière équivalente, $f(y)g(x) \leq f(x)g(y)$ pour tout $x \leq y$. Alors X est *plus petit que* Y dans l'ordre du rapport de vraisemblance.

35. Cette clause est dite *disappearing deductible* dans le texte.

36. Dans la suite, pour ne pas alourdir le texte, nous utiliserons le terme réduction indistinctement pour désigner la réduction totale ou partielle du risque

37. Du point de vue de la banque, l'emprunteur peut également être appelé contrepartie.

1.3.10.1 Interaction entre risque et ambiguïté

L'utilité espérée du décideur dans un univers sans ambiguïté s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) &:= \mathbb{E}[u(w + L_1 + L_2)] \\ &= p_1 p_2 \mathbb{E}[u(w + X_1 + X_2)] + p_1(1 - p_2) \mathbb{E}[u(w + X_1 + Y_2)] \\ &\quad + (1 - p_1)p_2 \mathbb{E}[u(w + Y_1 + X_2)] + (1 - p_1)(1 - p_2) \mathbb{E}[u(w + Y_1 + Y_2)], \end{aligned}$$

En introduisant de l'ambiguïté sur les probabilités à travers deux v.a. $\tilde{\epsilon}_i$, $i = 1, 2$ d'espérance nulle, l'utilité espérée du décideur conditionnellement à $\tilde{\epsilon}_i$, $i = 1, 2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) &:= \mathbb{E}[u(w + L_1 + L_2) \mid \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2] \\ &= \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \mathbb{E}[u(w + X_1 + X_2)] + \tilde{p}_1(1 - \tilde{p}_2) \mathbb{E}[u(w + X_1 + Y_2)] \\ &\quad + (1 - \tilde{p}_1)\tilde{p}_2 \mathbb{E}[u(w + Y_1 + X_2)] + (1 - \tilde{p}_1)(1 - \tilde{p}_2) \mathbb{E}[u(w + Y_1 + Y_2)]. \end{aligned}$$

En notant $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ l'utilité espérée (inconditionnelle) d'un décideur neutre à l'ambiguïté, nous écrivons sous le modèle d'ambiguïté lissé de KMM avec Φ linéaire³⁸.

$$\begin{aligned} V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) &= \Phi^{-1} \left(\mathbb{E}[\Phi\{\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\}] \right) \\ &= \Phi^{-1} \left(\Phi(\mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)]) \right), \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)], \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

En remarquant que $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ peut se réécrire sous la forme suivante (voir Annexe C.1 pour la démonstration),

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y).$$

Avec $\Delta U(w, X, Y) = \mathbb{E}[u(w + X_1 + X_2)] - \mathbb{E}[u(w + Y_1 + X_2)] - \mathbb{E}[u(w + X_1 + Y_2)] + \mathbb{E}[u(w + Y_1 + Y_2)]$.

Nous obtenons les deux premiers résultats de ce chapitre, présentés dans les propositions 4.1 et 4.2, à savoir qu'en présence de deux sources d'ambiguïté, l'utilité espérée d'un décideur neutre à l'ambiguïté s'écrit comme son utilité espérée sans ambiguïté plus un terme d'interaction entre l'effet du risque $\Delta U(w, X, Y)$ et l'effet de l'ambiguïté $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$. Nous appelons cet effet, *l'effet d'interaction pur*. Nous montrons dans la section 4.4 que cet effet d'interaction peut être strictement positif, strictement négatif ou nul. Les deux cas non nuls prouvent que la présence de l'ambiguïté sur les probabilités des loteries influencent le bien-être d'un décideur alors qu'il est neutre à l'ambiguïté.

1.3.10.2 Réduction du risque et ambiguïté

Nous abordons ensuite la problématique de réduction du risque en comparant les DAP associées à la réduction du risque dans les deux univers, non ambigu et ambigu. Dans l'univers sans ambiguïté, la réduction du risque consiste à passer de p_i à αp_i , $i = 1, 2$, avec $0 \leq \alpha < 1$. La réduction du risque dans l'univers ambigu consiste à passer de $p_i + \tilde{\epsilon}_i$ à

38. Pour ne pas alourdir la notation, nous notons toutes les espérances $\mathbb{E}[\cdot]$ sans distinguer entre $\mathbb{E}_F[\cdot]$ et $\mathbb{E}[\cdot]$, ceci sans introduire d'ambiguïté sur les concepts.

$\alpha(p_i + \tilde{\epsilon}_i)$, $i = 1, 2$.

Nous notons $P(w, \alpha)$ la DAP pour la réduction du risque d'une proportion α lorsque les probabilités ne sont pas ambiguës et $P^a(w, \alpha)$ la DAP pour la réduction du risque d'une proportion α lorsque les probabilités sont ambiguës. Les DAP satisfont les équations suivantes :

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) = V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}).$$

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}).$$

Dans la section 4.5, nous montrons que les deux DAP sont liées par la relation suivante :

$$\begin{aligned} V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) - V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) \\ = \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \left(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) \right). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Ce qui nous permet d'énoncer les deux autres résultats de ce chapitre :

- Lors de la réduction totale du risque, i.e., $\alpha = 0$, le $\text{Signe}[P(w; 0) - P^a(w; 0)] \equiv \text{Signe}[\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y)]$.
Nous montrons dans la section 4.5.1 que si :
 - $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) < 0$ alors $P^a(w; 0) > P(w; 0) > 0$.
 - $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) > 0$ alors $P^a(w; 0) < P(w; 0)$ mais sans possibilité de savoir si $P^a(w; 0) >$ ou < 0 .
- Lors de la réduction partielle du risque, i.e., $0 < \alpha < 1$, le $\text{Signe}[P(w; \alpha) - P^a(w; \alpha)] \equiv \text{Signe} \left[\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \left(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) \right) \right]$, que nous appelons *effet d'interaction complet*.

Cet effet est plus complexe à signer et requiert des hypothèses supplémentaires par rapport à l'effet d'interaction pur. Nous détaillons dans la section 4.5.2 l'analyse qui permet de signer l'effet d'interaction complet et donc de distinguer les cas où la DAP $P^a(w; \alpha)$ est supérieure, inférieure ou égale à la DAP $P(w; \alpha)$.

Chapitre 2

A comparative study on the estimation of factor migration models

Ce chapitre se base sur l'article [Cousin and Kheliouen \(2016\)](#), publié dans le *Bulletin Français d'Actuariat*.

Abstract

In this paper, we study the statistical estimation of some factor migration models. This class of models is based on the assumption that rating migrations are driven by a set of common factors representing the business cycle evolution.

In particular, we compare the estimation of the ordered Probit model as described for instance in [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) and of the multi-state latent factor intensity model used in [Koopman et al. \(2007\)](#). For these two approaches, we also distinguish the case where the underlying factors are observable and the case where they are assumed to be unobservable. The paper is supplied with an empirical study where the estimation is made on historical Standard & Poor's rating data on the period [01/2006 – 01/2014]. We find that the intensity model with observable factors is the one that best fits empirical transition probabilities.

In line with [Kavvathas \(2001\)](#), this study shows that short migrations of investment grade firms are significantly correlated to the business cycle whereas, because of lack of observations, it is not possible to state any relation between long migrations (more than two grades) and the business cycle. Concerning non investment grade firms, downgrade migrations are negatively related to business cycle whatever the amplitude of the migration.

Résumé

Dans cet article, nous étudions l'estimation statistique de modèles factoriels de migration de crédit. Cette classe de modèles repose sur l'hypothèse que les changements de notation sont gouvernés par un ensemble de facteurs communs représentant l'évolution du cycle économique. Nous comparons en particulier l'estimation du modèle Probit ordonné tel que décrit dans [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) avec l'estimation du modèle à intensité multifactorielle qui est présenté dans [Koopman et al. \(2007\)](#). Pour ces deux approches, nous distinguons le cas où les facteurs sous-jacents sont observables et le cas où ils sont considérés comme inobservables. La réalisation d'une étude empirique sur des données de notations Standard & Poor's sur la période [01/2006 – 01/2014] nous permet de conclure que le modèle à intensité

avec facteurs observables est celui qui ajuste le mieux les probabilités de transition empiriques. Par ailleurs, l'étude confirme des résultats obtenus dans de précédents articles comme celui de [Kavvathas \(2001\)](#), à savoir que pour les firmes qui sont bien notées, les migrations de notation de faible amplitude (un degré) sont liées au cycle économique alors qu'en raison du manque d'observations, il est impossible de lier les migrations de fortes amplitudes (plus de deux degrés) au cycle économique. Lorsque les firmes sont mal notées, les dégradations de notation sont négativement corrélées au cycle économique.

Keywords : Factor migration models, ordered Probit model, multi-state latent intensity model, mobility index, Kalman filter.

2.1 Introduction

Analyzing the effect of business cycle on rating transition probabilities has been a subject of great interest these last fifteen years, particularly due to the increasing pressure coming from regulators for stress testing.

We study the statistical estimation of some multivariate credit migration models where, for each firm, the transition matrix is driven by a set of common dynamic factors. The underlying factors aim at representing the evolution of the business cycle. They can be assumed to be either observable or unobservable. In the first approach, one selects observable factors such as macroeconomic variables and then estimates the transition probabilities' sensitivities with respect to these covariates. [Kavvathas \(2001\)](#) calibrates a multi-state extension of a Cox proportional hazard model with respect to the 3-month and 10-year interest rates, the equity return and the equity return volatility. He finds that an increase in the interest rates, a lower equity return and a higher equity return volatility are associated with higher downgrade intensities. [Nickell et al. \(2000\)](#) employ an ordered Probit model and prove the dependence of transition probabilities on the obligor industrial sector, its business country and the stage of the business cycle. [Bangia et al. \(2002\)](#) separate the economy into two regimes, expansion and contraction. They estimate an ordered Probit model and show that the loss distribution of credit portfolios can differ greatly among the two regimes, as can be the concomitant level of economic capital to be assigned.

The second approach has emerged in response to criticisms made against the first approach. As [Gourieroux and Tiomo \(2007\)](#) point out, the risk in selecting covariates lies in excluding other ones which would be more relevant. Specifications with latent covariates appear in articles such as [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) who consider an ordered Probit model with three unobservable factors and perform its estimation using a Kalman filter on ratings data of French corporates. They find that the two first factors are related to the change in French GDP (considered as a proxy of the business cycle). [Koopman et al. \(2007\)](#) proceed on a parametric intensity model by conditioning the migration intensity on both observable factors and latent dynamic factors. The estimation shows the existence of a common risk factor for all migrations. The impact of this risk factor is higher for downgrades than for upgrades; this empirical result suggests that upgrades are more subject to idiosyncratic shocks than downgrades.

The aim of this paper is to assess and compare two alternative stochastic migration models on their ability to link the transition probabilities to either observable or unobservable dynamic risk factors. In this respect, we use the same data set to compare the multi-state latent factor intensity model used in [Koopman et al. \(2007\)](#) and the ordered Probit model as described for instance in [Bangia et al. \(2002\)](#), [Albanese et al. \(2003\)](#), [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) or

Feng et al. (2007).

We use the S&P credit ratings history [01/2006 – 01/2014] of a diversified portfolio composed of 2875 obligors and distributed across several regions and industrial sectors. When the underlying factors are unobservable, we rely on a linear Gaussian representation of the two considered models. The unobservable factors are then filtered by a standard Kalman filter. This representation has been introduced by Gagliardini and Gouriou (2005) for an ordered Probit model. To compare the estimation of structural and intensity models, we extend this approach to the multi-state latent factor intensity model.

The paper is organized as follows. In Section 2, we present the class of factor migration models. Then, we introduce intensity models and structural models as particular factor migration models. Section 3 describes the estimation procedure for a multi-state factor intensity model in the two cases where the factor is assumed to be observable or unobservable. In Section 4, we present the estimation procedure associated with a structural ordered Probit model and we also carry the case of observable and unobservable factors. In Section 5, we perform the estimation procedures on S&P credit ratings historical data and provide our main results and findings.

2.2 Factor migration models

In this paper, we consider a Markovian model consisting of two multivariate processes X and R . The process X represents the evolution of factors whereas R represents the rating migration process in a pool of n obligors. More specifically, for any time $t \geq 0$, $R_t = (R_t^1, \dots, R_t^n)$ is a vector in $\{1, \dots, d\}^n$, where d corresponds to the default state and 1 corresponds to the state with the best credit quality. The l -th entry of R describes the rating migration dynamics of obligor l in the set $S = \{1, \dots, d\}$. The transition probabilities are driven by a factor process X . We consider that all sources of risk are defined with respect to the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ endowed with some reference filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_u)_{0 \leq u \leq t}$ satisfying the usual conditions.

For any $l = 1, \dots, n$, let \mathcal{H}^l be the filtration associated with the migration process R^l and let \mathcal{H} be the global filtration such that $\mathcal{H}_u^l = \mathcal{H}_u^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_u^n$, $u \geq 0$. Let \mathcal{G} be the filtration associated with the factor process X . The credit migration models we consider in this paper are in the class of factor migration models.

Définition 2.1. *A factor credit migration model is a Markov process (X, R) such that*

- *The factor X is a Markov process (in its own filtration).*
- *Given the history of X , i.e., given \mathcal{G}_∞ , the marginal rating migration processes R^1, \dots, R^n are independent (time-inhomogeneous) Markov chains with the same transition matrices.*

Contrary to the definition of stochastic migration models in Gagliardini and Gouriou (2005), here the factor process X is not necessarily identified as a common stochastic transition matrix. Note that the factor process X plays two important roles : it introduces dynamic dependence between the obligor rating migration processes and it allows for non-Markovian serial dependence in the migration dynamics : the rating migration process R is not a Markov process (alone). Note also that the conditional Markov chain (R^1, \dots, R^n) has d^n transition states. The conditional independence property allows to significantly reduce the problem dimension when dealing with numerical computation of the joint distribution of rating migration events. In that sense, conditionally to the filtration \mathcal{G} , the R_t^1, \dots, R_t^n are *iid* for every date t .

Moreover, there is no contagion mechanism in this framework. A migration event in the pool has no impact on the obligors migration probabilities since the latter are driven by a process X which is Markov in its own filtration. In [Koopman et al. \(2007\)](#), the factor process X can contain obligor-specific informations (microeconomic variables) as well as common observable factors (macroeconomic variables) or common unobserved latent factors. In this paper, we do not consider any idiosyncratic factors. Depending on the situation, the process X stands for either common observable factors or common unobservable factors.

2.2.1 Intensity models

In this section, we define multi-state factor intensity models as particular factor migration models. Given the history of X (given \mathcal{G}_∞), the rating migration processes $(R_t^l)_{t \geq 0}$, $l = 1, \dots, n$ are conditionally independent continuous-time Markov chains. Moreover, for any time t , they are assumed to have a common generator matrix $\Lambda_X(t)$ defined by

$$\Lambda_X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1(X_t) & \lambda_{12}(X_t) & \cdot & \lambda_{1,d-1}(X_t) & \lambda_{1,d}(X_t) \\ \lambda_{21}(X_t) & -\lambda_2(X_t) & \cdot & \lambda_{2,d-1}(X_t) & \lambda_{2,d}(X_t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{d-1,1}(X_t) & \lambda_{d-1,2}(X_t) & \cdot & -\lambda_{d-1}(X_t) & \lambda_{d-1,d}(X_t) \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where, for any $j \neq i$, λ_{ij} are positive functions and

$$\lambda_i := \sum_{j \neq i} \lambda_{ij},$$

for $i = 1, \dots, d-1$. For $j \neq i$, the product $\lambda_{ij}(X_t)dt$ corresponds to the conditional probability of going to rating state j in the small time interval $(t, t + dt]$, given \mathcal{G}_t and the fact that the obligor is in rating state i at time t . For small time length dt , the following first-order approximation holds

$$\lambda_{ij}(X_t) dt \approx \mathbb{P}\left(R_{t+dt}^l = j \mid R_t^l = i, \mathcal{G}_t\right), \quad (2.2.1)$$

for any obligor $l = 1, \dots, n$. It turns out that $\lambda_i(X_t)dt$ is the conditional probability to depart from state i in the small interval $(t, t + dt]$ given \mathcal{G}_t .

A classical specification of migration intensities is an exponential-affine transformation of the common factor. More specifically, for any $i \neq j$,

$$\lambda_{ij}(X_t) = \exp(\alpha_{ij} + \langle \beta_{ij}, X_t \rangle), \quad (2.2.2)$$

where α_{ij} is a constant parameter and β_{ij} accounts for the sensitivity of migration intensity λ_{ij} to the common factor X . This specification guarantees the positivity of migration intensities. This specification corresponds to a multi-state extension of the Cox proportional hazard model.

In this framework, the conditional probability transition matrix P (given \mathcal{G}_∞), can be computed by solving the forward Kolmogorov equation

$$\frac{\partial P(t, s)}{\partial s} = P(t, s)\Lambda_X(s), \quad P(t, t) = \text{Id}. \quad (2.2.3)$$

The unconditional transition matrix is then given by

$$\Pi(t, s) = \mathbb{E}[P(t, s)], \quad (2.2.4)$$

where the expectation is taken over the distribution of $(X_u)_{t < u \leq s}$. In practice, the transition matrix $\Pi(t, s)$ can be approximated by Monte Carlo simulations, based on independent simulations of the path of X between t and s . For each realization of $(X_u)_{t < u \leq s}$, a simple numerical scheme can be used to solve (2.2.3).

If the factor process X only changes at discrete times $t_1 < \dots < t_N$, the conditional transition matrix can be expressed as a product involving the following matrix exponential terms

$$P(t_k, t_{k+1}) = e^{\Lambda_X(t_k)(t_{k+1}-t_k)}. \quad (2.2.5)$$

Then, under this assumption, the forward Kolmogorov equation (2.2.3) has an explicit solution. Note that, if the generator matrix Λ_X is time-inhomogeneous, it is generally not true that one can extend (3.4.7) to get

$$P(t, s) = e^{\int_t^s \Lambda_X(u) du}. \quad (2.2.6)$$

However, this relation holds for some specification of Λ_X for which the matrices $\Lambda_X(u)$ and $\Lambda_X(u')$ commute for all u, u' in $[t, s]$.

2.2.2 Structural models

We consider a discrete-time structural models where any firm l jumps to a new rating category when a quantitative latent process S^l crosses some pre-specified levels or barriers. In the classical structural Merton model, S^l is defined as the ratio of asset value and liabilities. The rating of name l at time t is given by the position of the latent variable S_t^l inside a pre-specified partition of the real line $-\infty = C_{d+1} < C_d < \dots < C_{i+1} < C_i < \dots < C_1 = +\infty$. More formally,

$$R_t^l = \sum_{i=1}^d i \mathbf{1}_{\{C_{i+1} \leq S_t^l < C_i\}}. \quad (2.2.7)$$

Several models exist in literature for the specification of S^l (see, e.g., Nickell et al. (2000), Bangia et al. (2002), Albanese et al. (2003), Feng et al. (2007)). In this study, we choose Gagliardini and Gouriou (2005)'s approach since it is a generalization of previously cited models, it is also investigated in Gouriou and Tiomo (2007) and Feng et al. (2007). For any obligor $l = 1, \dots, n$ and any time t , the latent process S_t^l is expressed as a deterministic affine transformation of a common factor X_t and of an independent idiosyncratic factor ε_t^l . The characteristics of this affine transformation may depend on the rating state at the preceding date $t - 1$. The latent process S^l is then described by

$$S_t^l = \sum_{i=1}^d \left(\alpha_i + \langle \beta_i, X_t \rangle + \sigma_i \varepsilon_t^l \right) \mathbf{1}_{\{R_{t-1}^l = i\}}, \quad (2.2.8)$$

where α_i is the level of S^l at rating i , β_i represents the sensitivity in rating i of the latent factor S^l to the common factor X , σ_i corresponds to the volatility of residuals and ε_t^l are iid random variables independent of X . When the idiosyncratic residual processes ε^l , $l = 1, \dots, n$ are not specified, this corresponds to an ordered polytomous model. The most common version is the ordered Probit model where ε_t^l are independent standard Gaussian variables

(see [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) or [Feng et al. \(2007\)](#) for more details). In what follows, we consider the ordered Probit model and we denote by $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$ the set of unknown parameters.

In this framework, the conditional transition probabilities p_{ij} are given by¹,

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbb{P} \left[R_t^l = j \mid R_{t-1}^l = i, \mathcal{G}_\infty \right], \\ &= \mathbb{P} \left[C_{j+1} \leq S_t^l < C_j \mid R_{t-1}^l = i, \mathcal{G}_\infty \right], \\ &= \mathbb{P} \left[C_{j+1} \leq \alpha_i + \langle \beta_i, X_t \rangle + \sigma_i \varepsilon_t^l < C_j \mid R_{t-1}^l = i, X_t \right], \\ &= \mathbb{P} \left[\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \leq \varepsilon_t^l < \frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \mid X_t \right]. \end{aligned}$$

Then, if $\Phi(\cdot)$ is the cumulative distribution function of a standard Gaussian variable, we obtain, for any $i = 1, \dots, d-1$,

$$p_{ij} = \Phi \left(\frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \right) - \Phi \left(\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \right), \quad j = 2, \dots, d-1, \quad (2.2.9)$$

$$p_{i1} = 1 - \Phi \left(\frac{C_2 - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \right), \quad (2.2.10)$$

$$p_{id} = \Phi \left(\frac{C_d - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \right). \quad (2.2.11)$$

2.3 Statistical estimation of intensity models

In this section, we consider a multi-state intensity model as described in Section 2.2.1 and we explain how to estimate the parameters of the generator matrix given the sample history of the obligors rating migrations. In a general setting, we first give the expression of the conditional likelihood function. For the ease of the presentation, we distinguish the simple case where migration intensities are constant over time and the case where, as in a (multi-state) proportional hazard model, the intensities are given as exponential-affine transformation of an observable factor X . In this setting, the estimation of model parameters is made by maximizing the conditional likelihood function. When the factor X is assumed to be unobservable, the estimation requires the computation of the unconditional likelihood function. This task may be computationally intensive as explained in [Koopman et al. \(2007\)](#). In this paper, we choose to adapt the approach of [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) (estimation of an ordered Probit model with unobservable factors) to the multi-state factor intensity model.

We assume that, for any obligor $l = 1, \dots, n$, the observed number of ratings visited during the period $[0, t)$ is denoted by N_l ($N_l \geq 1$). For any $k = 1, \dots, N_l$, the time intervals $[t_{k-1}^l, t_k^l)$ correspond to the visiting of new state r_k^l where $t_0^l = 0$ and $t_{N_l}^l = t$. Then, the observed path of ratings of obligor l during the period $[0, t)$ is described by

$$r_u^l = \sum_{k=1}^{N_l} r_k^l \mathbf{1}_{\{t_{k-1}^l \leq u < t_k^l\}}. \quad (2.3.1)$$

1. See [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) for more details.

There are $N_l - 1$ migration events observed for obligor l in the time interval $[0, t)$, each of them has took place at time t_k^l for $k = 1, \dots, N_l - 1$.

2.3.1 Conditional likelihood function

Proposition 2.2. *Let θ be the set of parameters which characterizes the functional link between the generator matrix Λ_X and the factor process X . The conditional likelihood function given the observed path of rating migration histories $(r_u^l)_{0 \leq u < t}$ and the path of the risk factor $(X_u)_{0 \leq u < t}$ can be expressed as*

$$\mathcal{L}(\theta \mid \mathcal{G}_t) = \prod_{l=1}^n \prod_{k=1}^{N_l} \lambda_{r_k^l, r_{k+1}^l}(X_{t_k^l}) e^{-\int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} \lambda_{r_k^l}(X_u) du}, \quad (2.3.2)$$

with the convention $\lambda_{r_{N_l}^l, r_{N_l+1}^l} = 1$.

Démonstration. See proof in appendix A.1. □

Note that the conditional likelihood function can be expressed as a product of (conditional) marginal likelihood function, that is

$$\mathcal{L}(\theta \mid \mathcal{G}_t) = \prod_{i \neq j} \mathcal{L}_{ij}(\theta \mid \mathcal{G}_t) \quad (2.3.3)$$

where the product is taken over all transition types and $\mathcal{L}_{ij}(\theta \mid \mathcal{G}_t)$ is given in the following proposition.

Proposition 2.3. *The marginal likelihood function $\mathcal{L}_{ij}(\theta \mid \mathcal{G}_t)$ associated with migration from state i to state j ($i \neq j$) is given by,*

$$\mathcal{L}_{ij}(\theta \mid \mathcal{G}_t) = \prod_{l=1}^n \prod_{k=1}^{N_l} \exp \left(Y_{ij}^l(t_k^l) \log \lambda_{ij}(X_{t_k^l}) - S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} \lambda_{ij}(X_u) du \right) \quad (2.3.4)$$

where

$$Y_{ij}^l(t_k^l) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = r_{t_k^l}^l \text{ and } j = r_{t_{k+1}^l}^l, \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

for $k = 1, \dots, N_l - 1$, $Y_{ij}^l(t_k^l) = 0$ for $k = N_l$ and

$$S_i^l(t_k^l) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = r_{t_k^l}^l \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

for $k = 1, \dots, N_l$.

According to (2.3.1), the quantity $Y_{ij}^l(t_k^l)$ is equal to one (and zero otherwise) if the couple of indices (i, j) corresponds to the observed migration event of obligor l at time t_k^l , i.e., if $i = r_{t_k^l}^l$ and $j = r_{t_{k+1}^l}^l$. Moreover, $Y_{ij}^l(t_k^l) = 0$ for $k = N_l$ since, by construction, no migration occurs after time $t_{N_l-1}^l$. The quantity $S_i^l(t_k^l)$ is equal to one (and zero otherwise) if index i corresponds to the rating state visited by obligor l just before migration date t_k^l , i.e., if $i = r_{t_k^l}^l$.

Démonstration. Proposition (2.3) is a direct consequence of Proposition (2.2). □

If each migration intensity function λ_{ij} is described by specific parameters, the maximization of the conditional likelihood function (2.3.2) can be done by maximizing each marginal likelihood independently with respect to its own set of parameters. Numerically, it is more convenient to work with the log-likelihood function, we then transform (2.3.4) to

$$\log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t)) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l) \log(\lambda_{ij}(X_{t_k^l})) - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} \lambda_{ij}(X_u) du, \quad (2.3.7)$$

Likelihood function in the multi-state intensity model is classical from the point of view of point processes (Hougaard (2000)). We compute here the likelihood function for the conditional Markov chain assumption. The link between the two approaches is clear as soon as we recall that Markov chains are particular marked point processes. The likelihood expression (2.3.7) is the same one obtained in Koopman et al. (2007) except that in Koopman et al. (2007) the time is discrete and divided according to the observed dates of change in value of the common process X .

2.3.2 Time-homogeneous intensities

Let us assume that the transition intensity functions λ_{ij} are constant, so that, $\lambda_{ij}(X_t) = \lambda_{ij,0}$ for any time t . As explained above, the max-likelihood estimation of $\lambda_{ij,0}$, $i \neq j$ is obtained by maximizing each corresponding marginal likelihood functions.

Proposition 2.4. *The maximum likelihood estimate of the transition intensities is given by,*

$$\hat{\lambda}_{ij,0} = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l)}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) (t_k^l - t_{k-1}^l)}. \quad (2.3.8)$$

Note that the estimator $\hat{\lambda}_{ij,0}$ is expressed as the ratio of the total number of observed transitions from state i to state j over the cumulated time spent by the obligors in state i .

Démonstration. Given (2.3.7), $\hat{\lambda}_{ij,0}$ is the solution of $\frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \lambda_{ij,0}} = 0$. And, we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \lambda_{ij,0}} &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l) \frac{\partial \log(\lambda_{ij})}{\partial \lambda_{ij,0}} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \lambda_{ij,0}} (t_k^l - t_{k-1}^l) \\ &= \frac{1}{\lambda_{ij,0}} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) (t_k^l - t_{k-1}^l) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Moreover, the marginal likelihood function is concave since it is easily seen that $\frac{\partial^2 \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial^2 \lambda_{ij,0}} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} \frac{-Y_{ij}^l(t_k^l)}{(\lambda_{ij,0})^2} < 0$. \square

Under this specification, the dynamics of rating migrations does not depend on the business cycle. In the numerical part (see section 2.5), this estimation procedure will be used to construct Through The Cycle² (TTC) transition matrix.

2. Through The Cycle transition matrix corresponds to the long term time-invariant transition matrix of the homogeneous Markov chain. The transition probabilities are almost unaffected by the economical conditions.

2.3.3 Intensities depending on observable factors

We now assume that migration intensities depend on a K -dimensional observable factor $X = (X^1, \dots, X^K)$ through an exponential-affine relation :

$$\lambda_{ij}(X_t) = \lambda_{ij,0} \exp(\langle \beta_{ij}, X_t \rangle), \quad i \neq j, \quad i < d. \quad (2.3.9)$$

for all. The vector $\beta_{ij} = (\beta_{ij}^1, \dots, \beta_{ij}^K)$ contains the sensitivities of λ_{ij} with respect to each component of factor X . The term $\langle \beta_{ij}, X_t \rangle$ denotes the inner product between vectors β_{ij} and X_t . The baseline intensity $\lambda_{ij,0}$ is assumed to be constant. This specification corresponds to a multi-state version of the so-called Cox proportional hazards regression model, where here the baseline function is assumed to be constant. This setting has been investigated by among others [Kavvathas \(2001\)](#), [Lando and Skodeberg \(2002\)](#), [Koopman et al. \(2007\)](#), [Naldi et al. \(2011\)](#).

Proposition 2.5. *Under specification (2.3.9), for any transition type (i, j) , the maximum likelihood estimate $\hat{\beta}_{ij} = (\hat{\beta}_{ij}^1, \dots, \hat{\beta}_{ij}^K)$ is solution to the following non-linear system :*

$$\frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} Y_{ij}^l(t_k^l) X_{t_k^l}^s}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} Y_{ij}^l(t_k^l)} = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} X_{s,u} e^{\langle \hat{\beta}_{ij}, X_u \rangle} du}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} e^{\langle \hat{\beta}_{ij}, X_u \rangle} du}, \quad s = 1, \dots, K. \quad (2.3.10)$$

The maximum likelihood estimate $\hat{\lambda}_{ij,0}$ is given by

$$\hat{\lambda}_{ij,0} = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} Y_{ij}^l(t_k^l)}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} e^{\langle \hat{\beta}_{ij}, X_u \rangle} du}. \quad (2.3.11)$$

where $\hat{\beta}_{ij}$ is the solution of system (2.3.10).

Démonstration. See proof in appendix [A.2](#). □

We notice from (2.3.11) that, when $\hat{\beta}_{ij}$ is fixed to 0, the maximum likelihood estimate of the baseline intensity falls back to the one of the homogeneous case (see (2.3.8)).

2.3.4 Intensities depending on unobservable factors

In the previous setting, we implicitly assume that the dynamics of migration intensities are fully explained by pre-identified observable factors. However, it may be the case that the dynamics of the intensities are driven by other (unidentified) factors or even by totally unobservable factors. We consider here that the migration intensities follow specification (2.3.9) but the vector of factors X is now assumed to be unobservable. [Koopman et al. \(2007\)](#) use a similar latent factor specification. We assume that the K -dimensional dynamic factor X only changes at times t_1, \dots, t_N and that its dynamics follows an auto-regressive (AR) process

$$X_t = AX_{t-1} + \zeta_t, \quad t = t_1, \dots, t_N \quad (2.3.12)$$

where the matrix A characterizes the auto-regression coefficients and ζ_t are iid and standard Gaussian variables. The maximum likelihood estimation of $\lambda_{ij,0}$ and β_{ij} involves the computation of the unconditional likelihood function $\tilde{\mathcal{L}}(\theta)$ given by,

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \mathbb{E}[\mathcal{L}(\theta \mid \mathcal{G}_t)], \quad (2.3.13)$$

where expectation in (2.3.13) is taken over the joint distribution of $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$. Consequently, maximizing the likelihood function is computationally very intensive³ (see [Koopman et al. \(2007\)](#)) as soon as N is larger than a few units. We choose to follow another route by adapting the approach of [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) (initially proposed for a structural model) to the multi-state factor intensity model. The idea is to construct an approximation of model (2.3.9) as a linear Gaussian model which can be dealt with a Kalman filter. As usual, the estimation of model parameters is made by maximizing the likelihood of the filtered model.

Representation as a linear Gaussian model

Let us first remark that equation (2.3.9) is equivalent to the following linear relation

$$y_{ij,t} = \alpha_{ij} + \langle \beta_{ij}, X_t \rangle, \quad t = t_1, \dots, t_N \quad (2.3.14)$$

where $y_{ij,t} = \log(\lambda_{ij,t})$ and $\alpha_{ij} = \log(\lambda_{ij,0})$. Note that, even if the transition intensities $\lambda_{ij,t}$, $t = t_1, \dots, t_N$ (and then $y_{ij,t}$) are not directly observed, they can be estimated from the panel data. We assume that, for any time indices $k = 1, \dots, N$ and for any transition type (i, j) , λ_{ij,t_k} can be estimated from the migration dynamics observed in time interval (t_{k-1}, t_k) using the max-likelihood estimate (2.3.8). We then construct a time series of estimated migration intensities $\hat{\lambda}_{ij,t}$ and log-intensities $\hat{y}_{ij,t} := \log(\hat{\lambda}_{ij,t})$, $t = t_1, \dots, t_N$. The asymptotic normality of the maximum likelihood estimate (2.3.8) writes $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_{ij,t} - \lambda_{ij,t}) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_{ij,t}^2)$ as the number n of obligors goes to infinity. The asymptotic variance $\sigma_{ij,t}^2$ can be approximated easily⁴ (see [Hougaard \(2000\)](#)). Following the Delta method, we also know that $\sqrt{n}(\hat{y}_{ij,t} - y_{ij,t}) \rightarrow \mathcal{N}(0, \chi_{ij,t}^2)$ where $\chi_{ij,t}^2 = \frac{\sigma_{ij,t}^2}{(\lambda_{ij,t})^2}$. As a result, if the panel data is sufficiently large, by using (2.3.14), we obtain the following linear Gaussian system

$$\begin{cases} \hat{y}_{ij,t} \simeq \alpha_{ij} + \langle \beta_{ij}, X_t \rangle + \tilde{\chi}_{ij,t} \kappa_{ij,t}, & \forall i \neq j, t = t_1, \dots, t_N \\ X_t = AX_{t-1} + \zeta_t, \end{cases} \quad (2.3.15)$$

where for any $i \neq j$, $\tilde{\chi}_{ij,t} := \frac{\chi_{ij,t}}{\sqrt{n}}$, $\kappa_{ij,t}$ and ζ_t are independent error terms, distributed as standard Gaussian variables. For any $t = t_1, \dots, t_N$, we denote by \hat{y}_t the column vector composed of the elements $\hat{y}_{ij,t}$, $i \neq j$, $i < d$. Let p be the number of rows of \hat{y}_t and $Y_t = (\hat{y}_{t_1}, \dots, \hat{y}_t)$ be the information collected up to time t . Using the Kalman filter, the unobserved factor X can be filtered recursively given the estimated process \hat{y} . For any $t = t_1, \dots, t_N$, let us denote by $\bar{X}_t := \mathbb{E}(X_t | Y_t)$ the filtered version of the factor process and by $\bar{X}_{t|t-1} := \mathbb{E}(X_t | Y_{t-1})$ the best prediction of X_t given information up to time $t - 1$. In the Kalman filter terminology, the first equation in (2.3.15) corresponds to the measurement equation, the second to the transition equation.

Maximum likelihood of the filtered model

3. [Koopman et al. \(2007\)](#) propose to use a suitable important sampling technique to improve the efficiency of the Monte Carlo estimator.

4. Following [Hougaard \(2000\)](#), the estimate $\hat{\sigma}_{ij,t}$ of $\sigma_{ij,t}$ is given by $\hat{\sigma}_{ij,t} = \frac{N_{ij,t}}{(T_{i,t})^2}$, where $N_{ij,t}$ is the total number of transitions from i to j (numerator of (2.3.8) for $t \in [t_{k-1}, t_k]$), and $T_{i,t}$ is the total time spent in state i (denominator of (2.3.8) for $t \in [t_{k-1}, t_k]$).

Let $\theta = (\alpha_{ij}, \beta_{ij})_{i \neq j, i < d}$ be the vector of unknown model parameters. The log-likelihood function associated with the filtered Gaussian model is given by (see, e.g., [Durbin and Koopman \(2012\)](#)),

$$\log(\mathcal{L}(\theta, A)) = -\frac{Np}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (\log |F_t| + e_t^T F_t^{-1} e_t). \quad (2.3.16)$$

For any $t = t_1, \dots, t_N$, the column vector e_t is the prediction error and is equal to $e_t := \hat{y}_t - \mathbb{E}[\hat{y}_t | Y_{t-1}]$.

The matrix F_t is the conditional variance of e_t given Y_{t-1} , i.e., $F_t = \text{Var}(e_t | Y_{t-1})$, and $|F_t|$ is its determinant. Given the vector of ‘‘observations’’ Y_{t_N} , the prediction error e_t and the matrix F_t can be obtained at each time t as outputs of the Kalman routine.

The parameters $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}$ are chosen as the ones that maximize the log-likelihood function [\(2.3.16\)](#). We then define the estimated migration intensities as

$$\hat{\lambda}_{ij}(\bar{X}_t) = \exp\left(\hat{\alpha}_{ij} + \left\langle \hat{\beta}_{ij}, \bar{X}_t \right\rangle\right), \quad (2.3.17)$$

where \bar{X} the filtered factor process associated with max-likelihood parameters $\hat{\theta}, \hat{A}$. The relation [\(2.3.17\)](#) will be used in the application on S&P data (see section [2.5.4](#)).

2.4 Statistical estimation of structural models

In this section, we consider the structural model described in Section [2.2.2](#) and we explain how to estimate the parameters of the conditional transition probability p_{ij} (see [\(2.2.9-2.2.11\)](#)) given the sample history of the obligors rating migrations. As for the intensity model, we distinguish the case where the underlying factor is observable and the case where it is unobservable. When the factor X is observable, the estimation of model parameters is made by maximizing the conditional likelihood function. When the factor X is assumed to be unobservable, the estimation requires the computation of the unconditional likelihood function. This task can be computationally very intensive. As for the intensity model, we consider as an alternative route the estimation approach used in [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#).

2.4.1 Observable factors

Assuming that the conditional transition probability p_{ij} depends on a K -dimensional observable factor $X = (X^1, \dots, X^K)$ and considering $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$ as the set of parameters which characterize the functional link between p_{ij} and the factor process X . For any $k = 1, \dots, N$, the time intervals $[t_{k-1}, t_k)$ correspond to the visiting of the state r_k^l where $t_0 = 0$ and $t_N = t$. The observed path of ratings of obligor l during the period $[0, t)$ is described by

$$r_t^l = \sum_{k=0}^N r_k^l \mathbf{1}_{\{t=t_k\}}. \quad (2.4.1)$$

Proposition 2.6. *The conditional likelihood function associated with the observed path of rating migration histories (r_t^l) , $t = t_0, \dots, t_N$, $l = 1, \dots, n$ and given the initial ratings and*

the path of the risk factor (X_t) , $t = t_1, \dots, t_N$ can be expressed as,

$$\mathcal{L}(\theta \mid \mathcal{G}_{t_N} \vee \mathcal{H}_{t_0}) = \prod_{l=1}^n \prod_{k=1}^N \prod_{i \neq j} (p_{ij}(X_{t_k}))^{Y_{ij}^l(t_k)}, \quad (2.4.2)$$

where, for $k = 1, \dots, N$,

$$Y_{ij}^l(t_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = r_{t_{k-1}}^l \text{ and } j = r_{t_k}^l, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta \mid \mathcal{G}_{t_N} \vee \mathcal{H}_{t_0}) &= \prod_{l=1}^n \mathbb{P} \left(R_u^l = r_u^l, u = t_1, \dots, t_N \mid \mathcal{G}_{t_N}, R_{t_0}^l = r_{t_0}^l \right) \\ &= \prod_{l=1}^n \prod_{k=1}^N \mathbb{P} \left(R_{t_k}^l = r_{t_k}^l \mid R_{t_{k-1}}^l = r_{t_{k-1}}^l, \mathcal{G}_{t_N} \right) \end{aligned}$$

□

$p_{ij}(X_{t_k})$ is defined by (2.2.9), (2.2.10) and (2.2.11) and $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$.

We deduce that,

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{i \neq j} Y_{ij}^l(t_k) \log(p_{ij}(X_{t_k})) \right\}, \quad (2.4.3)$$

solving (2.4.3) is done numerically by considering constraints on the positivity of $\sigma_i > 0$ and the order of threshold C_i ($-\infty = C_{d+1} < C_d < \dots < C_2 < C_1 = +\infty$) (see appendix A.3 to have more details).

2.4.2 Unobservable factors

We now consider that the conditional transition probability p_{ij} depends on a K -dimensional unobservable factor $X = (X^1, \dots, X^K)$. The dynamic factor X is assumed to change at times t_1, \dots, t_N with the following auto-regressive dynamics,

$$X_t = AX_{t-1} + \eta_t, \quad (2.4.4)$$

where the matrix A characterizes the covariates dynamics and η_t are iid and standard Gaussian.

The maximum likelihood estimation of $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$ involves the computation of the unconditional likelihood function $\tilde{\mathcal{L}}(\theta)$ given by,

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \mathbb{E} \left(\prod_{l=1}^n \prod_{k=1}^N \prod_{j \neq i} (p_{ij}(X_{t_k}))^{Y_{ij}^l(t_k)} \right). \quad (2.4.5)$$

Estimating θ using (2.4.5) raises the issue of the potentially high number of integrals to compute. Indeed, the distribution must be integrated with respect to covariates values X_{t_1}, \dots, X_{t_N} , which represents $[K \times N]$ integrals. Similarly to the intensity model, we use the

method presented in [Gagliardini and Gourieroux \(2005\)](#) which consists in transforming the probability of migrating towards a rating J or below, denoted $p_{iJ,t}^*$ (see (2.4.6)), as a linear function of latent covariates (see (2.4.8) below) and thus construct a linear Gaussian model.

Representation as a linear Gaussian model

First, we formally define $p_{iJ,t}^*$ for $t = t_1, \dots, t_N$ as,

$$p_{iJ,t_k}^* = \sum_{j=J}^d p_{ij,t_k} = \mathbb{P} \left[R_{t_k}^l \leq J | R_{t_{k-1}}^l = i, X_{t_k} \right]. \quad (2.4.6)$$

Note that $p_{i1,t_k}^* = 1$ and thus the associated threshold $C_1 = +\infty$. The thresholds to be estimated are C_J for $J = 2, \dots, d$, or equivalently C_{i+1} for $i = 1, \dots, d-1$. We use the formulation C_{i+1} instead of C_J in the parameters vector $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$ for the ease of notation.

Assuming an ordered Probit model, (2.4.6) becomes,

$$\begin{aligned} p_{iJ,t}^* &= \Phi \left(\frac{C_J - \alpha_i - \langle \beta_i, X_t \rangle}{\sigma_i} \right), \\ \Rightarrow \Phi^{-1} (p_{iJ,t}^*) &= \frac{C_J - \alpha_i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i} \langle \beta_i, X_t \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

or equivalently,

$$\psi_{iJ,t} = \frac{C_J - \alpha_i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i} \langle \beta_i, X_t \rangle. \quad (2.4.8)$$

Note that $p_{iJ,t}^*$ and $\psi_{iJ,t}$, $t = t_1, \dots, t_N$ are not observed but can be estimated from the panel data. We assume that, for any time indices $k = 1, \dots, N$ and for any arrival state J , $p_{iJ,t}^*$ (and then $\psi_{iJ,t}$) can be estimated from the migration dynamics observed in time interval (t_{k-1}, t_k) using the max-likelihood estimate (2.3.8) and the exponential matrix term expressed in (3.4.7). We then construct a time series of estimated $\hat{p}_{iJ,t}^*$ and $\hat{\psi}_{iJ,t}$, $t = t_1, \dots, t_N$. The asymptotic normality of the estimator $\hat{p}_{iJ,t}^*$ writes $\sqrt{n} (\hat{p}_{iJ,t}^* - p_{iJ,t}^*) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \Omega_{iJ,t}^2)$ as the number n of obligors goes to infinity⁵. Following the Delta method, we also know that $\sqrt{n} (\hat{\psi}_{iJ,t} - \psi_{iJ,t}) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \Xi_{iJ,t}^2)$ where $\Xi_{iJ,t} = (\Phi^{-1})' (\hat{p}_{iJ,t}^*) \Omega_{iJ,t}$. As a result, if the panel data is sufficiently large, by using (2.4.8), we obtain the following linear Gaussian representation

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{iJ,t} \simeq \frac{C_J - \alpha_i}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_i} \langle \beta_i, X_t \rangle + \tilde{\Omega}_{iJ,t} v_{iJ,t} & , \forall i, J, t = t_1, \dots, t_N, \\ X_t = AX_{t-1} + \eta_t, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

where $\tilde{\Omega}_{iJ,t} := \frac{\Omega_{iJ,t}}{\sqrt{n}}$, $v_{iJ,t}$ and η_t are independent error terms, distributed as standard Gaussian variables. For any $t = t_1, \dots, t_N$, we denote by $\hat{\psi}_t$ the column vector composed of the elements $\hat{\psi}_{iJ,t}$, $i < d$. Let p be the number of rows of $\hat{\psi}_t$ and $\Psi_t = (\hat{\psi}_{t_1}, \dots, \hat{\psi}_t)$ be the information

5. $\Omega_{iJ,t}^2$ is approximated by $\hat{\Omega}_{iJ,t}^2 = \hat{p}_{iJ,t}^* (1 - \hat{p}_{iJ,t}^*)$. Indeed, if we consider the binomial variable : starting from i , either go to J or below, it is clear that the standard error for $\hat{p}_{iJ,t}^*$ can be calculated as a binomial standard error (see [Nickell et al. \(2000\)](#)).

collected up to time t . Using the Kalman filter, the unobserved factor X can be filtered recursively given the estimated process $\hat{\psi}_t$. For any $t = t_1, \dots, t_N$, let us denote $\bar{X}_t := \mathbb{E}(X_t | \Psi_t)$ the filtered version of the factor process and by $\bar{X}_{t|t-1} := \mathbb{E}(X_t | \Psi_{t-1})$ the best prediction of X_t given information up to time $t - 1$. In the Kalman filter terminology, the first equation in (2.4.9) corresponds to the measurement equation, the second to the transition equation.

Maximum likelihood of the filtered model

Let $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, d-1}$ be the vector of unknown model parameters. The log-likelihood function associated with the filtered Gaussian model is given by Durbin and Koopman (2012) as,

$$\log(\mathcal{L}(\theta, A)) = -\frac{Np}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^N (\log |F_t| + e_t^T F_t^{-1} e_t). \quad (2.4.10)$$

For any $t = t_1, \dots, t_N$, the column vector e_t is the prediction error and is equal to $e_t := \hat{\psi}_t - \mathbb{E}[\hat{\psi}_t | \Psi_{t-1}]$. The matrix F_t is the conditional variance of e_t given Ψ_{t-1} , i.e., $F_t = \text{Var}(e_t | \Psi_{t-1})$, and $|F_t|$ is its determinant. Given the vector of ‘‘observations’’ Ψ_{t_N} , the prediction error e_t and the matrix F_t can be obtained at each time t as outputs of the Kalman routine.

The parameters $\hat{\theta} = (\hat{C}_{i+1}, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1, \dots, d-1}$ are chosen as the one that maximize the log-likelihood function (2.4.10) of the filtered model. We then define the estimated probability of migrating towards a rating J or below as

$$\hat{\psi}_{i,J,t}(\bar{X}_t) = \frac{\hat{C}_J - \hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}_i} - \frac{1}{\hat{\sigma}_i} \langle \hat{\beta}_i, \bar{X}_t \rangle, \quad (2.4.11)$$

where \bar{X} the filtered factor process associated with max-likelihood parameters $\hat{\theta}, \hat{A}$. The relation (2.4.11) will be used in the application on S&P data (see section 2.5.4).

2.5 Empirical study

In this section, the estimation procedures described in sections 2.3 and 2.4 are applied on a database composed of rating histories for a worldwide portfolio of investment and non investment grade obligors⁶. We first describe the considered database and explain how to compute empirical transition and generator matrices in a time-homogenous intensity model with no covariate. We then present the estimation results of the two previously introduced factor migration models when the factors are either observable (see section 2.5.3) or unobservable (see section 2.5.4). The estimated models are then compared in terms of their ability to reproduce empirical transition probabilities and migration dynamics captured by the SVD mobility index (see section 2.5.5.2).

2.5.1 Data description

Our data stands for S&P credit ratings history, it covers the period from January 2006 to January 2014 with a monthly frequency observation on a portfolio of 2875 obligors. The

6. The robustness of the estimators has been checked by performing the estimation on two sub-portfolios, one composed only of North America firms, the other composed only of Western Europe firms. These results are reported in appendix A.5 and A.6.

database contains a total of 16168 obligor years excluding withdrawn ratings. The overall shares of the most dominant regions in the dataset, i.e., North America, Western Europe and Asia are respectively 48.4%, 24.5% and 17.2% (see Table 2.1). The split by sector is less concentrated as the top five dominant sectors are Finance, Energy, Industry, Utilities and Telecom with respectively 17.5%, 9.1%, 7%, 6% and 5.1% of the total shares (see Table 2.2). We notice also that the portfolio is dynamic, as the composition is changing through time but the overall shares per rating remain stable (see Table 2.3).

The S&P ratings contain 8 classes of risk, AAA (lowest risk), AA, A, BBB, BB, B, CCC and D which stands for Default. For convenience we replace these qualitative notations with numeric equivalent, as 1 denote the AAA, 2 the AA,... until 8 for D.

region	percentage	region	percentage
North America	48.4	Central America	2.2
Western Europe	24.5	South America	1.8
Asia	17.2	Central Europe	1.7
Australia and Pacific	2.8	Africa and Middle East	1.4

TABLE 2.1 – Portfolio split by regions

sector	percentage	sector	percentage	sector	percentage
Finance	17.5	Cable Media	3.7	Food Bev	3
Energy	9.1	Chemicals	3.6	Consumer	2.9
Industry	7.0	Auto-mobile	3.5	Health	2.9
Utilities	6.0	Building	3.4	Leisure	2.7
Telecom	5.1	Insurance	3.1	Transport	2.7
Technology	4.5	Retail	3.1	Others	16.2

TABLE 2.2 – Portfolio split by sectors

Year	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
2006	3.3	8.1	31.0	31.0	15.5	9.9	0.8	0.4	100
2007	3.5	9.2	29.0	31.6	16.6	8.8	0.9	0.4	100
2008	3.4	9.8	27.4	31.0	15.8	11.5	0.8	0.3	100
2009	3.6	8.7	28.7	31.4	14.3	11.6	1.2	0.5	100
2010	2.9	8.0	28.5	31.9	13.4	12.5	1.9	0.9	100
2011	3.4	7.5	28.2	32.5	13.8	13.3	1.0	0.3	100
2012	2.4	6.5	26.4	32.6	16.5	13.8	1.4	0.4	100
2013	2.5	6.2	25.7	34.0	15.9	14.1	1.4	0.2	100

TABLE 2.3 – Percentage of obligors per ratings and per years

2.5.2 Time-homogeneous intensity model (no covariates)

In the case of homogeneous Markov chain, the transition probabilities are time-invariant. This means that both the cohort approach (see Löffler and Posch (2007)) and the intensity approach with a constant generator matrix (see (2.3.8) in subsection 2.3.2) can be used to compute the transition matrix. We have investigated both of them. The cohort approach turns out to produce a high number of null transition probabilities, which makes the calculation of quantities like $\Phi^{-1}(\hat{p}_{ij}^*)$ impossible⁷. This is not the case of the intensity approach where

7. See (2.4.7) in 2.4.2 to get the definition of \hat{p}_{ij}^* .

almost all transition probabilities were not null⁸. For instance, using a constant generator matrix on time interval [01/2013 – 01/2014] leads to the following results on the 2013 one year transition matrix⁹, see Table 2.4.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	87.13	12.77	0.10	0	0	0	0	0
2	0	98.57	1.39	0.04	0	0	0	0
3	0	1.57	93.59	4.78	0.06	0	0	0
4	0	0.03	3.17	94.29	2.36	0.15	0	0
5	0	0	0.13	7.56	89.50	2.71	0.08	0.02
6	0	0	0.01	0.68	9.31	83.68	4.84	1.48
7	0	0	0	0.05	0.82	14.13	59.60	25.40
8	0	0	0	0	0	0	0	100

TABLE 2.4 – One year transition matrix on 2013

The transition matrix in Table 2.4 is typical of the migration dynamic behaviour. The probabilities on the diagonal are close to one which means that the ratings are quite stable during a short time period (which is the case for 1 year). The probabilities around the main diagonal (above and below) are also significant, while the other ones tend generally to zero. Indeed, during a short time period, a credit risk analyst has no incentive to downgrade (resp. upgrade) a rating for more than one grade. However, for the non investment grades, i.e., ratings 5, 6 and 7 it is common to have more heterogeneity than the investment grades. This is due in one hand to the financial situation of the firms standing at these ratings and in the other hand to the *correction effect* of agencies. When a default which has not been predicted by the rating agencies occurs, several adjustments are performed to correct for this prediction error, some downgrades are then applied to the firms which are in the same situation as the defaulted one.

If we consider a constant matrix generator on the overall study period, i.e., [01/2006 – 01/2014] we get the following transition matrix that we can consider as a Through The Cycle transition matrix(see Table 3.3).

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	92.69	6.47	0.48	0.03	0.31	0.02	0	0
2	0.64	89.93	8.96	0.46	0.01	0	0	0
3	0.02	1.47	92.37	5.91	0.20	0.03	0	0
4	0	0.08	3.12	92.13	4.16	0.41	0.06	0.04
5	0.06	0.09	0.25	6.89	83.99	8.16	0.41	0.15
6	0	0	0.13	0.52	7.96	82.77	6.10	2.52
7	0	0	0.03	0.61	1.24	22.92	43.27	31.93
8	0	0	0	0	0	0	0	100

TABLE 2.5 – One year Through The Cycle transition matrix

8. This difference is due to the fact that the cohort approach does not make full use of the available data. Specifically, the estimates of the cohort approach are not affected by the timing and sequencing of transitions within the period where the intensity approach captures within-period transitions.

9. The probabilities lower than 0.001 are reported as null in the matrix.

Comparing to the 2013 matrix, the TTC matrix is less concentrated on the diagonal and almost all the transition probabilities are not null. This is due to computation with respect to all the duration of data history, all the migrations are likely to happen during this time.

2.5.3 Estimation with observable factors

Many studies have addressed the question of selecting the appropriate covariates to explain time variation in the behaviour of ratings. This question is a large topic of investigation, one can refer to Kavvathas (2001), Bangia et al. (2002), Couderc and Renault (2004) and ? to have more details. In this study, we have followed the idea of Couderc and Renault (2004) by selecting variables according to three covariates "families", i.e., macroeconomic information, financial and commodity markets information and credit market information. As our portfolio is mainly composed of US and Euro positions we focused on US and Euro indicators. The entire list of covariates is given below¹⁰.

- **Macroeconomic variables** : US and Euro Real Gross Domestic Product, US and Euro Consumer Price Indices, US and Euro Civilian Unemployment rates, US Effective Federal Funds rate (short term interest rate), Euro short term interest rates, US 10 years treasury constant maturity rate, long-term Government bond yields 10-years, US and Euro Industrial Production Indices, US and Euro Purchasing Manager Indices, Case-Shiller Index (real estate price Index for US).
- **Financial and commodity markets variables** : Crude Oil price, Gold price, NASDAQ 100 Index, Dow Jones Index, Euro STOXX Index and Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index.
- **Credit market variables** : Bank of America Merrill Lynch US Corp BBB total return Index, Bank of America Merrill Lynch US Corp AA total return Index, Markit iBoxx AA and Markit iBoxx BBB.

The data time series go from 01/2006 to 01/2014 which encompasses our study period. Each variable consists in a year to year growth without overlapping between the sub-periods, this gives 8 sub-periods. For example, the US Real GDP growth for the date 01/2014 (last sub-period) is calculated as the relative variation during the period [31/12/2012 – 31/12/2013], which gives,

$$\begin{aligned} \text{Real GDP Growth}_{01/2014} &= \frac{\text{Real GDP}_{31/12/2013} - \text{Real GDP}_{31/12/2012}}{\text{Real GDP}_{31/12/2012}} \\ &= \frac{15916 \text{ b\$} - 15433 \text{ b\$}}{15433 \text{ b\$}} = 3.13\% \end{aligned}$$

As the number of covariates is important (25 series), we have performed a Principal Component Analysis (PCA) in order to reduce the number of explicative factors. Table 2.6 summarizes the 8 first eigenvalues with cumulated variance explained in percentage.

10. The macroeconomic indicators time series are in free access on the website of the FEDERAL RESERVE BANK OF ST. LOUIS, while the financial, commodity and credit indicators time series can be retrieved from Bloomberg.

Eigenvalues	Percentage of variance	Cumulated percentage
8.79	43.99	43.99
3.39	16.98	60.98
2.43	12.19	73.18
1.61	8.09	81.27
0.95	4.77	86.04
0.72	3.64	89.69
0.56	2.83	92.53
0.36	1.83	94.36

TABLE 2.6 – Observable factors eigenvalues

The first factor explains almost 44% of the total variance, where the rest of factors (2 until 8) explain 50% cumulated variance. As there is not a strict rule to choose the number of covariates, we have investigated the estimation procedure for different number of covariates. Above five factors the log-likelihood is no more significantly improved, we have then chosen the *five first factors* with a cumulated explained variance of 86% to realise the estimation procedure. The number of selected factors can be challenged in the light of a deeper investigation, but it is not the purpose of this paper.

2.5.3.1 Parameters estimation for the intensity model

We recall that for the intensity model, the parameters to be estimated are the baseline intensity Λ_0 (see Table 2.7) and the matrices of factor sensitivities β_s , $s = 1, \dots, 5$ (see Table 2.8 below and Tables A.4 - A.7 in appendix A.4.2). We use proposition 2.5 to estimate these parameters from the panel data composed of 8 sub-periods.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.03	0.03	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.05	0.05	0	0	0	0	0
3	0	0.01	-0.07	0.06	0	0	0	0
4	0	0	0.03	-0.06	0.03	0	0	0
5	0	0	0	0.06	-0.13	0.07	0	0
6	0	0	0	0	0.10	-0.14	0.04	0
7	0	0	0	0	0	0.45	-0.72	0.27
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 2.7 – Baseline intensity generator for observable factors intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-0.06	0	0	0	0	0	0
2	0.34	0	-0.11	1.58	0	0	0	0
3	-4.93	0.22	0	-0.03	0.28	2.77	0	0
4	0	12.38	0.02	0	-0.06	0.07	0.80	-2.47
5	-2.42	-2.42	-0.17	0.04	0	-0.04	-2.92	-0.17
6	0	0	-7.67	1.63	0.05	0	-0.04	-0.08
7	0	0	0	3.52	0	0.09	0	-0.11
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 2.8 – Beta for the first factor intensity model

In order to assess the statistical significance of the $\hat{\beta}_{ij}$ associated with the migration $i \rightarrow j$, we have implemented a likelihood ratio test¹¹ consisting in the assessment of the null hypothesis $\mathcal{H}_0 : \hat{\beta}_{ij,k} = 0, k = 1, \dots, 5$ against the hypothesis $\mathcal{H}_1 : \exists k \in \{1, \dots, 5\}, \hat{\beta}_{ij,k} \neq 0$. Table 2.9 reports the p-values associated with the likelihood ratio test.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	4×10^{-4}	1	1	1	1	1	1
2	0	-	2×10^{-10}	0	1	1	1	1
3	0.51	3×10^{-5}	-	7×10^{-3}	0	3×10^{-9}	1	1
4	1	0	0.01	-	2×10^{-4}	0.23	3×10^{-8}	9×10^{-3}
5	0.15	2×10^{-3}	0.15	0.01	-	3×10^{-10}	8×10^{-12}	4×10^{-4}
6	1	1	0.21	8×10^{-4}	4×10^{-3}	-	10^{-15}	0.05
7	1	1	1	0	1	0.01	-	4×10^{-6}
8	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLE 2.9 – p-values for the hypothesis $\hat{\beta}_{ij} = 0$

The migrations are expected to be correlated with the business cycle, negatively when the migration is a downgrade and positively when the migration is an upgrade. According the Table 2.8, where the first factor can be considered as a proxy of the business cycle, this behaviour is confirmed for the *short migrations* (i.e., one grade migration, for instance $\hat{\beta}_{12} = -0.06, \hat{\beta}_{23} = -0.11, \hat{\beta}_{32} = 0.22, \hat{\beta}_{21} = 0.34$). As can be seen on Table 2.9, the p-values associated with these sensitivities state for their statistical significance. When the migration is farther (i.e., more than two grades), due to the lack of observations, it is no more possible to state any significant relation with the business cycle (see the p-values associated to $\hat{\beta}_{31}, \hat{\beta}_{51}, \hat{\beta}_{46}, \hat{\beta}_{63}$). When we focus on the non investment grade obligors (ratings 5, 6 and 7), we can observe that, all downgrades are significantly negatively correlated to the business cycle, whatever the amplitude of the migration (see the p-value associated with $\hat{\beta}_{57}, \hat{\beta}_{58}, \hat{\beta}_{68}$, etc).

2.5.3.2 Parameters estimation for the structural model

For the structural model, the parameters are $\theta = (C_{i+1}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i)_{i=1, \dots, 7}$, these parameters were estimated using the equations (2.2.9 - 2.2.11). The results are reported in Tables 2.10 and 2.11.

\hat{C}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$
$\hat{C}_2 = 5.16$	$\hat{\alpha}_1 = 5.08$	$\hat{\sigma}_1 = 0.17$
$\hat{C}_3 = 4.35$	$\hat{\alpha}_2 = 3.83$	$\hat{\sigma}_2 = 0.38$
$\hat{C}_4 = 3.47$	$\hat{\alpha}_3 = 3.14$	$\hat{\sigma}_3 = 0.74$
$\hat{C}_5 = 2.16$	$\hat{\alpha}_4 = 2.47$	$\hat{\sigma}_4 = 1.18$
$\hat{C}_6 = 1.05$	$\hat{\alpha}_5 = 1.52$	$\hat{\sigma}_5 = 1.17$
$\hat{C}_7 = -0.19$	$\hat{\alpha}_6 = 0.63$	$\hat{\sigma}_6 = 1.17$
$\hat{C}_8 = -1.55$	$\hat{\alpha}_7 = -1.01$	$\hat{\sigma}_7 = 1.72$

TABLE 2.10 – Parameters for observable factors structural model

11. See Lando and Skodeberg (2002) for more details about the test.

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_5$
$\hat{\beta}_{11}=0.01$	$\hat{\beta}_{21}=0.03$	$\hat{\beta}_{31}=0.05$	$\hat{\beta}_{41}=-0.06$	$\hat{\beta}_{51}=0.27$
$\hat{\beta}_{12}=0.03$	$\hat{\beta}_{22}=0.02$	$\hat{\beta}_{32}=-0.02$	$\hat{\beta}_{42}=0.09$	$\hat{\beta}_{52}=-0.25$
$\hat{\beta}_{13}=0.06$	$\hat{\beta}_{23}=0.06$	$\hat{\beta}_{33}=-0.06$	$\hat{\beta}_{43}=0.08$	$\hat{\beta}_{53}=-0.17$
$\hat{\beta}_{14}=0.06$	$\hat{\beta}_{24}=0.04$	$\hat{\beta}_{34}=0.00$	$\hat{\beta}_{44}=-0.01$	$\hat{\beta}_{54}=0.00$
$\hat{\beta}_{15}=0.04$	$\hat{\beta}_{25}=0.05$	$\hat{\beta}_{35}=-0.06$	$\hat{\beta}_{45}=-0.03$	$\hat{\beta}_{55}=0.01$
$\hat{\beta}_{16}=0.07$	$\hat{\beta}_{26}=0.13$	$\hat{\beta}_{36}=0.14$	$\hat{\beta}_{46}=-0.19$	$\hat{\beta}_{56}=0.40$
$\hat{\beta}_{17}=0.14$	$\hat{\beta}_{27}=0.23$	$\hat{\beta}_{37}=0.22$	$\hat{\beta}_{47}=0.07$	$\hat{\beta}_{57}=0.38$

TABLE 2.11 – Beta for observable factors structural model

The likelihood ratio test has also been implemented for the structural model. For any $i = 1, \dots, 7$ and $k = 1, \dots, 5$, we consider the null hypothesis given by $\mathcal{H}_0 : \hat{\beta}_{ik} = 0$. The p-values of these tests are reported in Table 2.12.

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_5$
1	0.10	0.02	0.05	9×10^{-5}
10^{-5}	1	0.30	10^{-5}	1
5×10^{-8}	10^{-4}	6×10^{-4}	10^{-3}	1
2×10^{-3}	9×10^{-3}	1	0.60	1
2×10^{-3}	0.01	4×10^{-3}	0.30	0.50
10^{-4}	5×10^{-11}	4×10^{-7}	8×10^{-8}	6×10^{-10}
0.01	2×10^{-10}	0.04	0.03	5×10^{-3}

TABLE 2.12 – p-values for hypothesis $\hat{\beta}_{ik} = 0$

The results of Tables 2.10, 2.11 and 2.12 are consistent with those obtained by Gagliardini and Gourieroux (2005) as the estimated barrier levels \hat{C} increase with respect to rating quality. The same conclusion holds for the intercepts $\hat{\alpha}_i$ which confirms that the downgrade risk is higher for low quality credit. The estimated rating volatilities are consistent with the fact that the non investment grade firms are likely to move in a larger set of ratings. Indeed, $\hat{\sigma}_7 = 1.72$ and $\hat{\sigma}_6 = 1.17$, whereas $\hat{\sigma}_1 = 0.17$ and $\hat{\sigma}_2 = 0.38$. One should also notice that the $\hat{\beta}$ coefficients for the non investment grade ratings 6 and 7 are significantly higher than for the investment grade firms. As can be seen in Table 2.12, they are also statistically more significant. These results confirm that the weakest firms are more impacted by adverse changes in the economy.

2.5.4 Estimation with unobservable latent factors

The use of latent factors to explain time variation of the credit ratings requires to compute a relatively high number of empirical transition intensities $\hat{\lambda}_{ij,t}$, $i \in \{1, \dots, 7\}$, $j \in \{1, \dots, 8\}$, $i \neq j$. Indeed, $\hat{\lambda}_{ij,t}$ are used as inputs for both models, they are transformed into $\hat{\psi}_{iJ,t}$ for the structural model (see next section) and kept as such for the intensity model. In order to increase the number of observations, we have considered an overlapping year to year sub-period with one month slope. With 8 years of monthly frequency data, this allows to have 86 observations instead of 8 observations if the sub-periods were not overlapping¹². For instance, $\hat{\lambda}_{ij,t_1}$ is calculated on the sub-period [01/2006 – 01/2007], $\hat{\lambda}_{ij,t_2}$ is calculated on the sub-period [02/2006 – 02/2007], etc. We recall that $\hat{\lambda}_{ij,t}$ are computed using the proposition 2.4.

12. We need a high number of observations in order to perform the Kalman filter, we have performed the Kalman filter on 8 observations but we didn't get a satisfying result.

2.5.4.1 Determining the number of unobservable factors

Since the covariates are unobserved we proceed by using the method proposed in [Gagliardini and Gourioux \(2005\)](#) to find the number of covariates in both structural and intensity models. The idea is to build time series of $\hat{\lambda}_{ij,t}$ and $\hat{\psi}_{iJ,t}$ for $t = t_1, \dots, t_{86}$, to consider them as the realisations of random variables and then carry on a PCA to find the number of common factors.

For the intensity model, we count 49 variables $\hat{\lambda}_{12,t}, \hat{\lambda}_{13,t}, \dots, \hat{\lambda}_{78,t}$, each one going from t_1 to t_{86} which makes 49 time series. The PCA is then applied on this set to compute the common factors. Concerning the structural model, the $\hat{\lambda}_{ij,t}$ are transformed into empirical transition probabilities $\hat{p}_{ij,t}$ using (3.4.7), then the series $\hat{\psi}_{iJ,t}$ such as $\hat{\psi}_{iJ,t} = \Phi^{-1}(\hat{p}_{iJ,t}^*)$ for $t = t_1, \dots, t_{86}$ are computed (see (2.4.7) in 2.4.2 to get the definition of $\hat{p}_{iJ,t}^*$). We get also 49 times series on which we apply the PCA.

The corresponding eigenvalues are given in decreasing order in the [Table 2.13](#).

intensity eigenvalues	Cumulated percentage	structural eigenvalues	Cumulated percentage
1.83	79.50	1853.46	48.89
0.43	98.28	735.23	72.29
0.02	99.27	515.81	81.52
0.007	99.58	311.41	89.04
0.003	99.71	306.01	93.81
0.002	99.82	247.94	96.50

TABLE 2.13 – Eigenvalues

For the $\hat{\lambda}_{ij,t}$ time series, the first two factors explain 98% of the total variance. The variance of $\hat{\psi}_{iJ,t}$ time series are explained at 72% by the two first factors. In order to choose the number of processes to use in the Kalman filter we have estimated two models, the first with one common factor and the second with two common factors. We found that in both cases, the first filtered process was the same, the second filtered process of the model with two common factors was identical to the first one with respect to a scale factor. According to these elements we have chosen the model with one common factor. The filtered process obtained was considered as the business cycle. Once the number of covariates known, we have done the parameters estimation using the two steps procedure, filtering of the process \bar{X}_t and maximisation of the log-likelihood (see sections 2.3.3 and 2.4.2). We present and discuss the results for the one factor models below.

2.5.4.2 Results and discussion

We report in the [Figures 2.1](#) and [2.2](#) the filtered processes $\mathbb{E}(X_t | Y_t)$ and $\mathbb{E}(X_t | \Psi_t)$ respectively¹³, for $t = t_1, \dots, t_{86}$. Recall that $\mathbb{E}(X_t | Y_t)$ and $\mathbb{E}(X_t | \Psi_t)$ correspond to the filtered factor process associated with max-likelihood models (see (2.3.4) and (2.4.2)). The figures below clearly show periods of *peak*, *normal* times and *trough* which are properties of the business cycle. Our period of study encompasses what it is known as the *Liquidity Crisis* and *Sovereign Debt Crisis*, with some famous events like the Lehman Brothers bankruptcy

13. Note that the process $\mathbb{E}(X_t | \Psi_t)$ has been centered in the [Figure 2.2](#) in order to be easily interpreted.

on September 2008 and the falls of market indices like CAC40, DAX and FTSE100 during the summer 2011. As can be seen on Figures 2.1 and 2.2, the *Liquidity Crisis* seems to be captured by both models. Note that, during the *Sovereign Debt Crisis*, the decrease of the filtered factor process is higher in the structural model than in the intensity model.

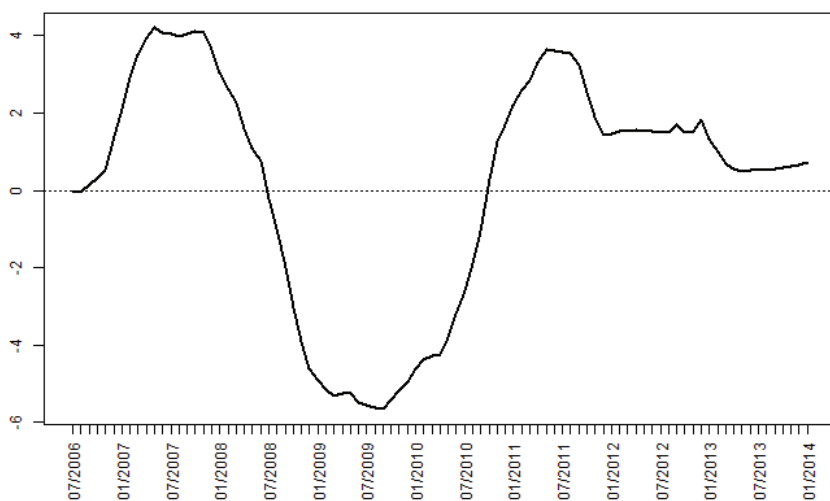


FIGURE 2.1 – Filtered common factor in the intensity model

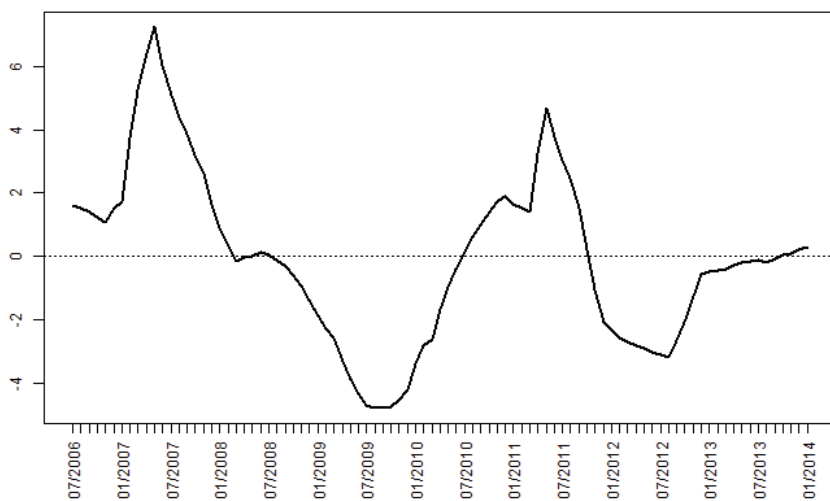


FIGURE 2.2 – Filtered common factor in the structural model

2.5.4.3 Parameters estimation for the intensity model

The estimated parameters and the p-values for the one factor intensity model are reported in Tables 2.14, 2.15 and 2.16.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.03	0.03	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.08	0.08	0	0	0	0	0
3	0	0	-0.07	0.07	0	0	0	0
4	0	0	0.03	-0.07	0.04	0	0	0
5	0	0	0	0.07	-0.17	0.1	0	0
6	0	0	0	0	0.07	-0.15	0.08	0
7	0	0	0	0	0	0.27	-0.67	0.42
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 2.14 – Baseline intensity for one factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-0.25	0	0	0	0	0	0
2	0.43	0	-0.12	0.20	0	0	0	0
3	0.02	0.19	0	-0.05	0.16	0.05	0	0
4	0	0.07	0.03	0	-0.06	0.06	0.05	-0.23
5	-0.16	-0.27	-0.23	0.03	0	-0.07	-0.46	-0.18
6	0	0	-0.25	0.12	0.12	0	-0.15	-0.28
7	0	0	0	-0.19	0	-0.03	0	-0.11
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 2.15 – Beta for one factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	3×10^{-3}	1	1	1	1	1	1
2	4×10^{-4}	-	6×10^{-9}	0.12	1	1	1	1
3	1	5×10^{-6}	-	6×10^{-3}	0.05	0.72	1	1
4	1	1	0.20	-	4×10^{-3}	0.33	0.54	0.09
5	0.87	0.21	0.14	0.10	-	2×10^{-4}	10^{-4}	0.06
6	1	1	0.22	0.27	3×10^{-3}	-	10^{-16}	10^{-3}
7	1	1	1	0.2	1	0.01	-	6×10^{-6}
8	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLE 2.16 – p-values for hypothesis $\hat{\beta}_{ij} = 0$

2.5.4.4 Parameters estimation for the structural model

The estimated parameters and the p-values for the one factor structural model are reported in Tables 2.17 and 2.18.

\hat{C}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$
$\hat{C}_2 = 6.82$	$\hat{\alpha}_1 = 5.01$	$\hat{\sigma}_1 = 1.71$	$\hat{\beta}_1 = 0.43$
$\hat{C}_3 = 4.50$	$\hat{\alpha}_2 = 3.12$	$\hat{\sigma}_2 = 0.76$	$\hat{\beta}_2 = 0.10$
$\hat{C}_4 = 3.12$	$\hat{\alpha}_3 = 2.56$	$\hat{\sigma}_3 = 0.69$	$\hat{\beta}_3 = -0.06$
$\hat{C}_5 = 1.84$	$\hat{\alpha}_4 = 1.83$	$\hat{\sigma}_4 = 0.69$	$\hat{\beta}_4 = -0.05$
$\hat{C}_6 = 0.96$	$\hat{\alpha}_5 = 1.23$	$\hat{\sigma}_5 = 0.75$	$\hat{\beta}_5 = 0.03$
$\hat{C}_7 = 0.001$	$\hat{\alpha}_6 = 0.12$	$\hat{\sigma}_6 = 0.87$	$\hat{\beta}_6 = 0.03$
$\hat{C}_8 = -0.43$	$\hat{\alpha}_7 = -0.56$	$\hat{\sigma}_7 = 1.09$	$\hat{\beta}_7 = -0.03$

TABLE 2.17 – Parameters for one factor structural model

For any $i = 1, \dots, 7$, we test the null hypothesis $H_0 : \hat{\beta}_i = 0$. The corresponding p-values are reported in Table 2.18.

$\hat{\beta}_1 = 0$	$\hat{\beta}_2 = 0$	$\hat{\beta}_3 = 0$	$\hat{\beta}_4 = 0$	$\hat{\beta}_5 = 0$	$\hat{\beta}_6 = 0$	$\hat{\beta}_7 = 0$
1	0	0	6.6×10^{-16}	1	1.1×10^{-16}	0.01

TABLE 2.18 – p-values for hypothesis $\beta_i = 0$

The parameters obtained for both models are consistent with those obtained in the case of observable factors. However, note that, for the structural model, the null hypothesis cannot be rejected for the beta's associated with the first and the fifth rating class.

2.5.5 Comparison between models

As stated previously, the aim of this paper is to assess and compare the migration models on their ability to link the transition probabilities to dynamic risk factors. In order to achieve this objective, we proceed in two steps. First, we compare the one year default probabilities implied by each model during the study period with the empirical default probabilities. We have chosen the default probability because this indicator is the most relevant from the credit risk perspective. Nevertheless, other transition probabilities have been compared and reported into appendix A.7 (see Figures A.1, A.2, A.3, A.4, A.5). These results are in the same line as the one obtained for default probabilities. Secondly, we compare transition matrices of each model with respect to a metric called SVD mobility index and introduced in Jafry and Schuermann (2004). The mobility index is a function that measures the ability of a transition matrix to generate migration events (the mobility index is detailed in subsection 2.5.5.2). The model parameters used for the computation of one-year default probabilities and mobility indices are those obtained from the estimation procedures of the two previous sections (observable and latent covariates). The comparison is made with respect to a credit migration model with no covariate – called the *empirical model* hereafter – where, on each sub-period, the transition matrix is estimated using the procedure described in proposition 2.4 (see also subsection 2.5.2). Recall that we have 8 non overlapping sub-periods for the observable factors and 86 overlapping sub-periods for the unobservable factors.

2.5.5.1 Comparison using the implied one year default probabilities

We compute the one year matrices implied on each sub-period by both intensity and structural models. We present graphically the evolution of the implied default probabilities of the ratings 4, 5, 6 and 7 (the default probabilities of the ratings 1, 2, and 3 are almost null).

Observable factors : Figures 2.3 and 2.4 represent the estimated one year default probabilities in the empirical model (solid line), in the intensity model (dashed line) and in the structural model (dotted line). One can see on the Figure 2.3 that for ratings 4 and 5 the intensity model adjusts perfectly the empirical default probabilities, the curves are almost identical. The structural model over-estimates the default probabilities for the rating 5, when the curve of the default probabilities for the rating 4 is almost flat.

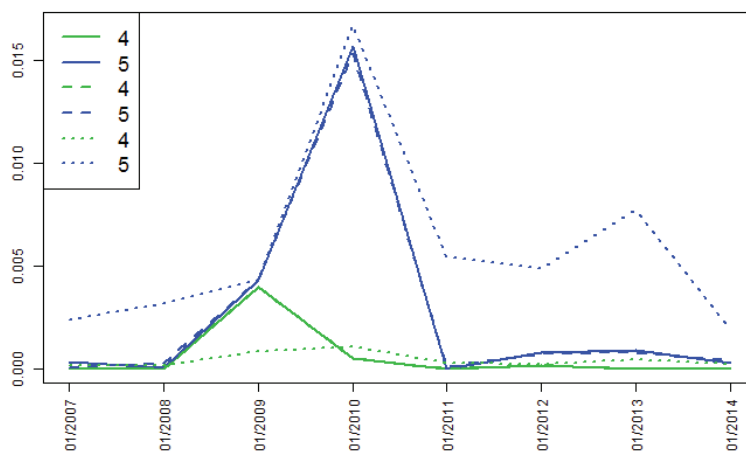


FIGURE 2.3 – Ratings 4 and 5 : implied one year default probabilities. Model estimation performed in the case of observable factors. Empirical model in solid line, intensity model in dashed line, structural model in dotted line.

On the Figure 2.4 the same observation is made with regards to ratings 6 and 7. The intensity model fits very well the empirical default probabilities when the structural model over-estimates them.

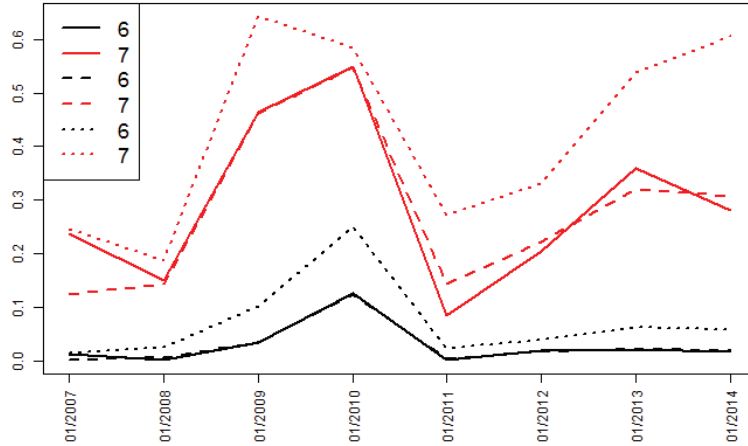


FIGURE 2.4 – Ratings 6 and 7 : implied one year default probabilities. Model estimation performed in the case of observable factors. Empirical model in solid line, intensity model in dashed line, structural model in dotted line.

Unobservable factors : Figure 2.5 shows that both models are not able to reproduce the one year empirical PD during the *trough* period, see the period [01/2009 – 07/2010]. Concerning the rest of the study period, the structural model over-estimates the PD for the rating 5 where it shows an almost flat curve for the PD rating 4. The PD curves of the intensity model (for ratings 4 and 5) are most of the time under the empirical PD.

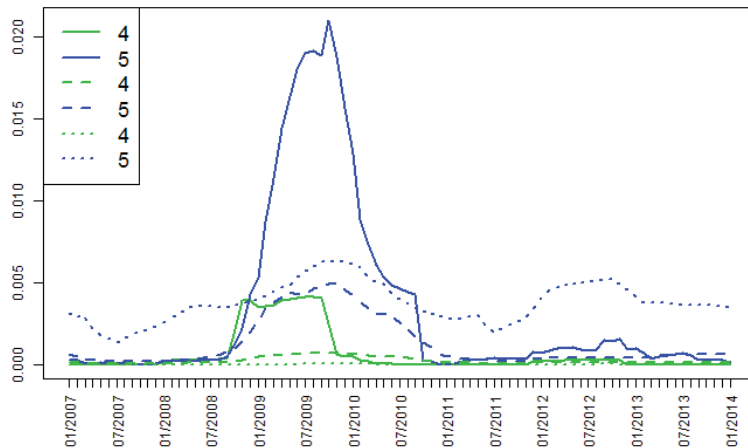


FIGURE 2.5 – Ratings 4 and 5 : implied one year default probabilities. Model estimation performed in the case of unobservable factors. Empirical model in solid line, intensity model in dashed line, structural model in dotted line.

Concerning the one year PD for the ratings 6 and 7 (see Figure 2.6), the structural model shows a quasi non sensitivity to the business cycle. Indeed, the curves are high and almost

flat comparing to the empirical one year PD. The intensity model shows a better adjustment in the sense that it is more reactive than the structural model to the business cycle but it is still unable to reproduce the empirical PD during the *trough* period.

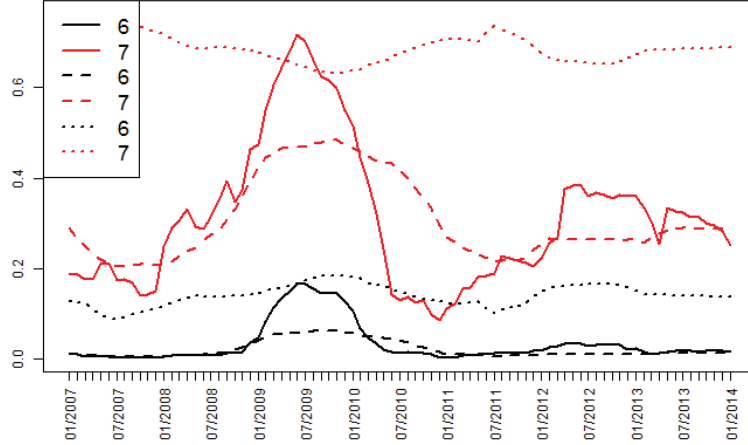


FIGURE 2.6 – Ratings 6 and 7 : implied one year default probabilities. Model estimation performed in the case of unobservable factors. Empirical model in solid line, intensity model in dashed line, structural model in dotted line.

2.5.5.2 Comparison using the SVD mobility index

In literature, comparing transition matrices is usually done using three methods, the euclidean distance (see [Israel et al. \(2001\)](#)), statistic testing, t-test or χ^2 (see [Nickell et al. \(2000\)](#), [Foulcher et al. \(2004\)](#)) or with a mobility index (see [Geweke et al. \(1986\)](#), [Jafry and Schuermann \(2004\)](#)). The mobility index was introduced to compare two transition matrices on their ability to generate migration events. It is defined as a function $M(\Pi)$ of $\mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ where by convention $M(I) = 0$, with I the identity matrix. A good mobility index must be assessed on three criteria, persistence, convergence and temporal aggregation (see the well documented papers of [Shorrocks \(1978\)](#), [Geweke et al. \(1986\)](#) and [Jafry and Schuermann \(2004\)](#) to have a complete overview of this topic). In this paper we use the mobility index instead of the euclidean distance or the statistic testing because the latter are relative measures : the comparison is then only possible between two matrices. In contrast, the mobility index is an absolute measure, all transition matrices can be compared according to it. Moreover, the mobility index has an intuitive interpretation, the higher it is, the more dynamic the transition matrix is. We present hereafter the SVD mobility index introduced in [Jafry and Schuermann \(2004\)](#). This metric will be used to compare the matrices implied by the intensity and the structural models when factors are observable and when factors are unobservable.

For a d -dimensional square matrix Π , the SVD mobility index is given by,

$$M_{SVD}(\Pi) = \frac{\sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i(\tilde{\Pi}'\tilde{\Pi})}}{d}, \quad (2.5.1)$$

where $\tilde{\Pi} = \Pi - I$ and $\tilde{\Pi}'$ is its transpose. $\lambda_i(\tilde{\Pi}'\tilde{\Pi})$ is the i^{th} eigenvalue of $\tilde{\Pi}'\tilde{\Pi}$, sorted in decreasing order, i.e., $\lambda_1(\tilde{\Pi}'\tilde{\Pi}) > \dots > \lambda_d(\tilde{\Pi}'\tilde{\Pi})$.

We have applied the SVD mobility index on each matrix calculated according to the intensity and structural models. Figures 2.7 and 2.8 show the evolution of the SVD mobility index of the empirical model (black curve), of the on intensity model (red curve) and of the structural model (blue curve). Figure 2.7 corresponds to estimations with observable factors whereas Figure 2.8 corresponds to estimations with unobservable factors. The two figures confirm the statements made previously : the intensity model with observable factors fits very well the empirical transition matrices whereas the other models, i.e., the structural with observable factors, the intensity with latent covariates and the structural with latent covariates, over-estimates, under-estimates and over-estimates respectively the empirical transition matrices.

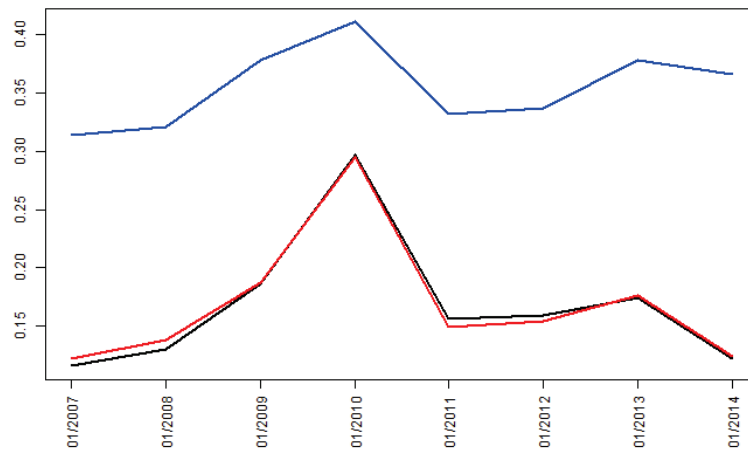


FIGURE 2.7 – Implied SVD mobility index implied when model estimation is performed in the case of observable factors. Empirical model in black, intensity model in red, structural model in blue.

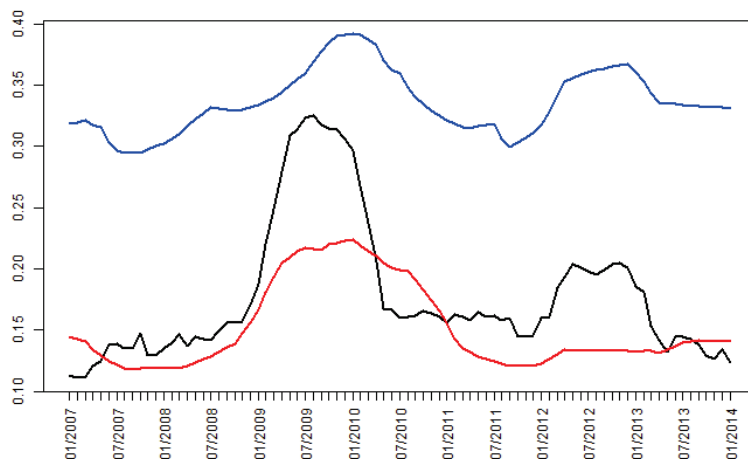


FIGURE 2.8 – Implied SVD mobility index implied when model estimation is performed in the case of unobservable factors. Empirical model in black, intensity model in red, structural model in blue.

As a conclusion for the subsection 2.5.5 we can state that the intensity model with observable factors is the one that best fits the empirical probabilities. This is mainly due to following points :

- for the intensity model with observable factors, the parameters $\lambda_{ij,0}$ and β_{ij} are estimated through the maximization of the marginal likelihood \mathcal{L}_{ij} . This means that among the set of explaining factors, it is most likely to have at least one factor that explains correctly the intensity migration λ_{ij} . The estimation of the structural model parameters is done through the maximization of the global likelihood function, this is less tractable than the intensity model in the sense that it is not possible to explain separately the transition probabilities.
- for the intensity model with observable factors, the maximum likelihood problem is solved using a semi-analytical solution which is not the case of the other models. Indeed the baseline intensity estimator $\hat{\lambda}_{ij,0}$ is given analytically when the regression coefficients $\hat{\beta}$ are obtained through the resolution of the gradient of the log-likelihood function which represents a simple non-linear equations system. The parameters of the structural model with observable factors are also estimated through the resolution of the gradient of the log-likelihood function but the non-linear equations system is far more difficult to resolve.
- for the statistical estimation using unobservable factors, the solution of [Gagliardini and Gouriou \(2005\)](#) to skip the issue of high dimension integrals requires to build a linear Gaussian model to apply the Kalman filter. The assumption of an infinite number of obligors n and the asymptotic normality of the maximum likelihood estimator at each time t and for every migration (i,j) is not satisfied. Indeed, even with a very high value of n , some migrations are unlikely to happen frequently like the long migrations (three grades or more). The intensity model with observable factors uses directly the observations without making some approximations based on very restrictive assumptions.
- the latent factors models have more parameters to estimate (the filtered process \bar{X}_t and the auto-regression matrix A). This constraint added to the limited quantity of data

plays an important role in the final results.

2.6 Conclusion

The aim of this paper is to assess and compare two alternative stochastic migration models on their ability to link the transition probabilities to either observable or unobservable dynamic risk factors. In this respect, we use the same data set (S&P credit ratings on the period [01/2006 – 01/2014]) to estimate model parameters in the multi-state latent factor intensity model and in the ordered Probit model. The estimation procedure is detailed in the two cases where the underlying dynamic factors are assumed to be either observable or unobservable. When the underlying factors are unobservable, we adapt a method given in [Gagliardini and Gouriéroux \(2005\)](#) to represent the considered factor migration model as a linear Gaussian model. In that case, we identify the business cycle as the factor process filtered by a standard Kalman filter. The estimation methods are compared on their ability to fit the one-year empirical default probabilities and their ability to reproduce the empirical SVD mobility index. We conclude that the intensity model with observable factors was the one which best fits the S&P rating history.

In line with [Kavvathas \(2001\)](#), this study shows that short migrations of investment grade firms are significantly correlated to the business cycle whereas, because of lack of observations, it is not possible to state any relation between long migrations (more than two grades) and the business cycle. Concerning non investment grade firms, downgrade migrations are negatively related to business cycle whatever the amplitude of the migration.

Chapitre 3

A cash-flow model for the liquidity of a banking book

Ce chapitre se base sur l'article [Cousin and Kheliouen \(2018\)](#), soumis pour publication.

Abstract

This paper aims at building a cash-flow model that addresses the liquidity risk of a banking book composed of bullet loans. Since the subprime crisis, also known as the liquidity crisis, the regulators expect a sound liquidity risk management from the financial institutions. The latter should anticipate crisis scenarios using stress testing in order to assess the strength of their portfolios. The cash-flow model proposed in this work provides a building block of the liquidity risk management as it allows to replicate in a realistic mode the principle behaviours associated to bullet loans. That is, the drawdowns, the prepayments, the interest payments, the commitments fees payments, the variations of the authorization and the credit worthiness change of the obligors. For the purpose of forecasting, we have used the Cox proportional hazard model to model the credit rating migrations of the obligors. The use of the same model to describe the obligor's actions (drawdown, prepayment or no action) and the *one-inflated beta distribution* with three parameters to model the utilization rate allows to address the drawbacks of the linear models that are not bounded in the interval $[0, 1]$ and are not able to produce a non negligible probability masses on the end points 0 and 1. In addition, the use of the *one-inflated beta distribution* in the *generalized additive models for location, scale and shape* (GAMLSS) framework allows to link the three parameters to risk factors that are stressed in the adverse scenarios proposed by the regulators.

The paper is supplied with an empirical study on a bullet loan portfolio which shows that all the *one-inflated beta distribution* parameters lean on a through the cycle value represented by the intercept, some of them are related to the business cycle, specially the parameters related to the non investment grade obligors. The paper is ended with a cash-flow simulation that uses the forecasts of the macro economic variables provided by the US Federal Reserve. It shows that the obligors can be grouped according to their liquidity consumption profile.

Keywords : GAMLSS, Cash-flow model, One-inflated beta model, Markov chain.

3.1 Introduction

The financial turmoil of recent years has greatly contributed to the bankers awareness in considering the liquidity as a central question for a proper functioning of their activities. The Basel committee defines liquidity as the ability of the bank to fund increases in assets and meet obligations as they come due, without incurring unacceptable losses. The regulators in turn expect a sound liquidity risk management from the financial institutions. The latter should be able to identify, measure, monitor and control the liquidity risk. As noted by [Strahan \(1999\)](#), in a banking book composed of credit lines, the bank is exposed to both liquidity risk and credit risk. Liquidity risk in this context refers to the bank's commitment to provide funds to the borrower over the life of the contract. The borrower, through its behaviour, drawdowns, pre-paiements or reimbursement could raise or reduce the liquidity risk for the bank.

In order to address the liquidity risk for a banking book, we propose a cash-flow model that reproduces the behaviour of a funded¹ bullet loan in a banking book portfolio. This framework allows to account for all the processes that are involved in the loan's lifetime, that is, drawdowns, prepayments, interest payments, commitment fees, variations of the loan amount and credit quality changes of the obligors. We combine these processes to describe the cash-flow dynamics at a single loan level. A cash-flow model that reflects the possible future transformations of the business environment through the markets liquidity², the credit worthiness of the obligors and their behaviour³ is a cornerstone for an efficient *liquidity risk management*.

The literature on loan cash-flow modelling⁴ focuses mainly on the description of drawdown process, namely, the identification of the risk factors driving the utilization rate on credit lines. [Agarwal et al. \(2006\)](#) show by using US home equity lines data set⁵ that increase in borrower credit line utilization comes in response to borrower credit quality deterioration. [Sufi \(2009\)](#) examines under which circumstances firms use credit lines or cash to manage corporate liquidity. He finds that credit line access and use was influenced by firm profitability, industry, age⁶ and size of the firm. Moreover, he finds also that maintenance of strict covenant on profitability is the principle factor for banks when extending lines of credit to firms. [Schertler et al. \(2010\)](#) analyse a data set of credit lines of small companies from a universal bank in Germany which does not ask for commitment fees but has in turn the right to recall these lines upon short notice. They find that the recall risk plays an important role in the credit line utilization as the obligors with low recall risk for their credit lines have lower cash holdings and utilize their lines more heavily compared to obligors with medium recall risk. [Jiménez et al. \(2009\)](#), on Spanish corporates credit lines find that the collateralization plays a role in credit line utilization, it is attached to slightly higher utilization levels compared to uncollateralized credit lines. [Sarin and Muenster \(2012\)](#) go further and find that the capacity utilization for single credit lines is inversely related to a obligors' credit worthiness for collateralized credit lines. However, for uncollateralized credit lines the relation only

1. *funded* means any cash movement from the bank's balance sheet to the obligor's balance sheet.

2. The markets liquidity has a direct impact on the funding cost risk of the bank but also on the obligors' behaviour.

3. By cash-flow behaviour we mean drawdowns and prepayments.

4. The terms loans and credit lines are used interchangeably.

5. The home equity lines are typical credit lines that are open for the first 5 years, during which time the borrower is only required to make interest payments on the utilized line balance. After the fifth year, the line is closed and converts to a fixed-rate term loan with a remaining term of 5 or 15 years.

6. The age of the firm is approximated by the duration since the Initial Public Offering (IPO).

applies up to a critical credit rating threshold. Beyond the critical threshold, the utilization of uncollateralized credit lines is a decreasing function of the credit worthiness.

The prepayment process has been broadly treated in the literature but mainly on the housing mortgage loans. Papers like those of [Richard and Roll \(1989\)](#), [Kim \(2005\)](#) or [Agarwal et al. \(2006\)](#) conclude that the decrease in prime rates and the increase in obligor's credit worthiness are the best explanatory variables for the prepayment. [Goodarzi et al. \(1998\)](#) show that the best lag between events such as treasury rate changes and prepayment was about four weeks. This is shorter than conventional wisdom of about eight weeks to ten weeks. A few papers focus on the corporate loans, one may cite [Cossin and Lu \(2004\)](#) that show that business borrowers make rational decisions to prepay when interest rates fall or their credit standing improves, they also prepay with internal equity to optimize capital structure and reduce debt.

Drawdowns and prepayments are the cornerstone drivers of the cash-flow dynamics and hence of the building of a portfolio liquidity but they are not sufficient. The main drawback of the existent literature is the non integration of all necessary components of the cash-flow model. Indeed, no forward looking vision of the cash-flows and hence a sound *liquidity risk management* is possible if one does not take account of the possible future rating migrations of the obligors - which may have an impact on the drawdowns or prepayments rates and interest payments - and of the evolution of the funding cost of the bank itself. We address this point in our paper by leaning on *forward looking* transition matrices developed in [Cousin and Kheliouen \(2016\)](#). Thanks to *forward looking* transition matrices, one can forecast the number of obligors in a specific credit rating conditionally to economic environment.

The second common drawback in this literature is the use of linear models to account for utilization rates (see [Sarin and Muenster \(2012\)](#), [Agarwal et al. \(2006\)](#), [Jiménez et al. \(2009\)](#)). The use of linear models to explain the risk drivers of the drawdowns and prepayments rates is disputable if the objective is to forecast the future cash-flows as function of the economic environment. Indeed, besides the fact that the linear models allow for negative values, they are theoretically unbounded, which is problematic if we consider that the utilization rate lies within the interval $[0, 1]$. The cases of total drawdown, total prepayment or no action have no negligible probability masses and hence have to be treated separately of the rest of the distribution, this is not the case in the linear models. We manage these drawbacks by combining two stochastic processes, namely, a non homogeneous Markov chain to model the actions' probabilities⁷ and a *one-inflated beta distribution* to model the drawdowns and prepayments rates. The proposed model assumes that the response variable has a mixed continuous-discrete distribution with probability mass at one. The beta distribution is used to describe the continuous component of the model, since its density has a wide range of different shapes depending on the values of the two parameters that characterize the distribution. A third parameter is considered to account for the probability mass on one⁸. This framework is perfectly suited to realise forecasts conditionally on risk drivers scenarios. Indeed, the Markov Chain simulation can rely on *forward looking* transition matrices when the *one-inflated beta distribution* can be linked via its three parameters to risk drivers and hence make forecasts conditionally on them. To the best of our knowledge, we are the first to propose a forecast cash-flows model on the banking book that combines behaviour models

7. three states are considered : drawdown, prepayment and no action.

8. The *one-inflated beta distribution* belongs to the *generalized additive models for location, scale and shape* (GAMLSS) family.

(drawdowns, prepayments), interest payments, commitment fees payments, obligor's and bank's credit quality variation and link such processes directly to economical risk drivers. Sarin and Klein (2012) are the closest to our work but there is no *forward looking* view in their work as they rely on static rating transition probabilities⁹ while it should be related to risk drivers for stress testing. They only consider drawdowns while we take account of more processes to be more realistic. Lastly, they use Normal and Gamma distributions to fit the drawdowns which is not suitable given that these distributions have support on \mathbb{R} and \mathbb{R}_+ respectively.

The paper is organized as follows. In section 3.2, we introduce the definitions and assumptions on which the model is built, then, the interest calculations are presented. Section 3.3 describes the cash-flow model of a single bullet loan. In section 3.4 the driver processes of the cash-flow are described and the *one-inflated beta* model is presented, the forecast procedure is then derived. The section 3.5 presents the calibration on real data set of the driver processes and the section 3.6 proposes a Monte Carlo simulation based on the calibration results. Through the Monte Carlo simulation, baseline and adverse (stressed) scenarios are tested and impacts on portfolio cash-flows are analysed. The paper is concluded with the main results and findings of our study.

3.2 Cash-flow model for funded loans

The cash flow model proposed below shows the cash flow of any loan product reported to the bank's balance sheet. The cash-flow refers to any liquidity movement from the bank's balance sheet to the obligor's balance sheet, or a non-contingent commitment of the bank to provide liquidity to the obligor. This model manages bullet loans, i.e., the principal has to be repaid at once at the maturity of the loan, but can be easily extended to other types of loans.

A loan is defined in the time interval $[t_0, T]$, where t_0 is the time of starting of the loan and T its maturity. At any time t , $t \in [t_0, T]$, the cash flow of the loan is determined by the quantities A_t , U_t and PNU_t , which are respectively the amount allocated to obligor authorization, the amount used in aggregate by the obligor since the beginning of the loan (U_t will also be called : the outstanding nominal) and the amount unused by the obligor, i.e., still available for drawdown. These three quantities are related at every moment by the relation :

$$A_t = U_t + PNU_t \tag{3.2.1}$$

A drawn event defines any cash movement from the bank's balance sheet to the obligor's balance sheet which increases the amount U_t . The drawn amount is a random variable but it is upper bounded by the amount PNU_t . Drawn dates are also random.

A prepayment event defines any cash movement from obligor's balance sheet to the bank's balance sheet that increases the amount PNU_t . The prepayment amount is a random variable, it is lower bounded by the amount U_t at any time t . Prepayment dates are also random.

An amortization event defines any cash movement from obligor's balance sheet to the bank's balance sheet that decreases the amount A_t . The amortization method is contractual, it may be bullet, linear, progressive, regressive, etc. Therefore, the amount of amortization is

9. They use a cohort method to build transition matrix.

a function of the amortization method, U_t and the time remaining until the maturity of the loan. Amortization dates depend on the amortization method, they are not random.

A *bullet* loan is a loan that gives the obligor the right to draw and / or prepay freely throughout the life of the loan, and will repay the outstanding nominal only at maturity T .

3.2.1 Cash-flow model assumptions

The model is built on the following assumptions :

- **Assumption 1** : Events that may occur on a *bullet* loan are :
 - partial or total drawdown, denoted D ,
 - partial or total prepayment, denoted P ,
 - payment of interest on the amounts previously drawn,
 - payment of commitment fees on the unused portion of authorization,
 - increase or decrease the amount of authorization,
 - credit quality change or default of the obligor.
- **Assumption 2** : By discretizing the time to schedule dates t_k , $k = 1, \dots, N$, with $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, the total drawdown amount on the time interval $[t_{k-1}, t_k)$ is denoted D_k and is known at t_k . The prepaid amount is denoted P_k and is also known at t_k .
The outstanding nominal increment for the period $[t_{k-1}, t_k)$ can be defined as the difference between the draw-downs and prepayments, that is $\Delta U_k := D_k - P_k$, with $U_0 = D_0$.
- **Assumption 3** : The authorization denoted A_t is supposed to be variable in time interval $[t_0, T]$. We note A_k the authorization prevailing at time t_k . The variability assumption is useful to account for the dynamics of bank / obligor relationship during the loan's lifetime. Indeed, in a relationship bank / obligor, it appears regularly authorization extensions, which means that the bank agrees to increase a obligor's borrowing capacity while keeping its commitment to deliver funding. On the other hand, we also see reductions authorization (business exit), they may be due to a obligor demand to reduce its commitment fees or as a result of breaking covenants related to the loan. As for example, the Material Adverse Change (MAC) clause allows the bank to reduce the amount of authorization when the obligor does not meet certain covenants (commitments on maintaining the credit quality, commitments on financial ratios, etc., see [Sufi \(2009\)](#)). Finally, the reduction of A_k allows to mitigate the losses in time of distress (*Mitigation Measures*). Taking this into account, our model can be used in a stress test process to assess the impact of this mitigation measure.
- **Assumption 4** : The interest are paid by the obligor at the end of period $[t_k, t_{k+1})$ on the basis of both the amounts drawn at previous periods and the interest rates prevailing at these periods. In case of prepayments, the previously borrowed amounts are updated according to a specific allocation rule *In-Out*. Thus, the calculation of interest depends on the evolution of an inventory containing the amounts still outstanding for each past date (see section 3.2.2 for more details). The interest rates used in the calculation reflect the credit quality of the obligor on the drawdown periods.
- **Assumption 5** : The commitment fees are paid at the beginning of the period $[t_k, t_{k+1})$ on the basis of the amount PNU_k known at t_k . In particular, if a drawdown has been

done at origination¹⁰, i.e., D_0 , the obligor will pay at t_0 a commitment fee calculated on PNU_0 with $PNU_0 = A_0 - D_0$.

- **Assumption 6** : Accrued interest between two periods are not included in this discrete time model. Note that in fact, a drawdown or a prepayment may occur at any time on the time interval $[t_{k-1}, t_k]$.
- **Assumption 7** : Following a prepayment event, two allocation rules are applied to the inventory of outstanding nominal U_k , namely, *LIFO (Last In First Out)* and *FIFO (First In First Out)*¹¹.
- **Assumption 8** : The recovery in case of obligor's default is not instantaneous, it operates with a recovery delay for each loan. This difference can be explained by the fact that the loan is itself related to a obligor, a currency, a business sector, a regulation in force within a geographic area and finally a seniority debt. The recovery date is denoted t_{RD} .

3.2.2 Interest calculation

At each date, interest are calculated on the remaining amounts to be reimbursed in the inventory. The latter is updated at each date t_k according to drawdowns and prepayments of the period $[t_{k-1}, t_k]$.

As seen above, the outstanding nominal increment for the period $[t_{k-1}, t_k]$ is given by :

$$\Delta U_k := D_k - P_k \quad (3.2.2)$$

We denote $\mathbf{C}_k = (C_{k0}, \dots, C_{kk})$ the $k + 1$ dimension vector representing the inventory status at date t_k . C_{ki} , $i = 0, \dots, k$, in the inventory of date t_k refers to the remaining amount to be reimbursed from a drawdown of the date t_i .

The inventory status at time t_k depends on the inventory status at date t_{k-1} , the outstanding nominal increment ΔU_k observed during the period $[t_{k-1}, t_k]$ and the update rule given by the function f_k , so that :

$$\mathbf{C}_k = f_k(\mathbf{C}_{k-1}, \Delta U_k) \quad (3.2.3)$$

Thus, given an inventory $\mathbf{C}_0 = (C_{00})$ at date t_0 , the inventory is updated as follows :

- $\mathbf{C}_1 = (C_{10}, C_{11}) = f_1(\mathbf{C}_0, \Delta U_2)$: the inventory is updated between t_0 and t_1 , with the amount ΔU_1 .
- ...
- $\mathbf{C}_k = (C_{k0}, C_{k1}, \dots, C_{kk}) = f_k(\mathbf{C}_{k-1}, \Delta U_k)$ the inventory is updated between t_{k-1} and t_k , with the amount ΔU_k .

Where,

- $C_{kk} = 0$ if $\Delta U_k < 0$, because a net prepayment can only reduce the inventory amount.
- $C_{kk} = \Delta U_k$ if $\Delta U_k \geq 0$ et $C_{k0} = C_{k-1,0}, C_{k1} = C_{k-1,1}, \dots, C_{k,k-1} = C_{k-1,k-1}$.

10. Loan origination is the process by which a borrower applies for a new loan, and a lender processes that application. Origination generally includes all the steps from taking a loan application up to disbursal of funds.

11. It is also possible to use a rule related to obligor's specific criteria, for example, reimbursement in first place of drawdowns that are the most costing in terms of interest rate. This rule will be a specific case of the first two mentioned.

With,

- $U_k = \sum_{i=0}^k C_{ki}$, the outstanding nominal at date t_k .
- if $\Delta U_k < 0$ then $|\Delta U_k| \leq U_k$, it means that the obligor can not prepay more than he has borrowed.
- if $\Delta U_k \geq 0$ then $\Delta U_k \leq PNU_k$, it means that the obligor can not drawdown more than the available liquidity.

3.2.2.1 Updating outstanding nominal with the FIFO rule

The FIFO allocation rule consists in reimbursing the amounts $C_{ki}, i = 0, \dots, k$, from the earliest to the latest. Considering the amount of prepayment ΔU_{k+1} of the period $[t_k, t_{k+1})$, if ΔU_{k+1} fully covers the amount to reimburse C_{k0} , the remaining part will be allocated the amount C_{k1} and so on up to the most recent dates with the amount C_{ki} corresponding.

Let's take the vector $C_k = (C_{k0}, C_{k1}, \dots, C_{kk})$ at date t_k . We calculate the vector $C_{k+1} = f_{k+1}(C_k, \Delta U_{k+1})$ in the case of prepayment ΔU_{k+1} .

- $C_{k+1,0} = \max(C_{k0} - |\delta_{k+1}|, 0)$,
- $C_{k+1,1} = \max(C_{k1} - |\delta_{k+1}| + (C_{k0} - C_{k+1,0}), 0)$,
- $C_{k+1,2} = \max(C_{k2} - |\delta_{k+1}| + (C_{k0} - C_{k+1,0}) + (C_{k1} - C_{k+1,1}), 0)$,
- ...
- $C_{k+1,k} = \max\left(C_{k,k} - |\Delta U_{k+1}| + \sum_{j=0}^{k-1} C_{kj} - C_{k+1,j}, 0\right)$,
- $C_{k+1,k+1} = 0$.

We get a recursive model described by :

$$\begin{cases} C_{k+1,0} = \max(C_{k0} - |\Delta U_{k+1}|, 0), \\ C_{k+1,i} = \max\left(C_{ki} - |\Delta U_{k+1}| + \sum_{j=0}^{i-1} C_{kj} - C_{k+1,j}, 0\right), i = 1, \dots, k, \\ C_{k+1,k+1} = 0, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

3.2.2.2 Updating outstanding nominal with the LIFO rule

The LIFO allocation rule is the exact opposite of the FIFO rule, it consists in reimbursing the amounts $C_{ki}, i = 0, \dots, k$, from the latest to the earliest. Taking the amount of prepayment ΔU_{k+1} of the period $[t_k, t_{k+1})$, if ΔU_{k+1} fully covers the amount to reimburse C_{kk} , the remaining part will be allocated the amount $C_{k,k-1}$ and so on up to the latest dates with the amount C_{ki} corresponding.

Considering the vector $C_k = (C_{k0}, C_{k1}, \dots, C_{kk})$ at date t_k . We calculate the vector $C_{k+1} = f_{k+1}(C_k, \Delta U_{k+1})$ in the case of prepayment ΔU_{k+1} . We inverse the reasoning that was applied to the FIFO and get :

- $C_{k+1,k+1} = 0$,
- $C_{k+1,k} = \max(C_{k,k} - |\Delta U_{k+1}|, 0)$,
- $C_{k+1,k-1} = \max(C_{k,k-1} - |\Delta U_{k+1}| + (C_{kk} - C_{k+1,k}), 0)$,
- $C_{k+1,k-2} = \max(C_{k,k-2} - |\Delta U_{k+1}| + (C_{kk} - C_{k+1,k}) + (C_{k,k-1} - C_{k+1,k-1}), 0)$,
- ...

$$- C_{k+1,0} = \max \left(C_{k0} - |\Delta U_{k+1}| + \sum_{j=1}^k C_{kj} - C_{k+1,j}, 0 \right),$$

Hence, the recursive model is given by :

$$\begin{cases} C_{k+1,k} = \max(C_{k,k} - |\Delta U_{k+1}|, 0), \\ C_{k+1,i} = \max \left(C_{ki} - |\Delta U_{k+1}| + \sum_{j=i+1}^k C_{kj} - C_{k+1,j}, 0 \right), i = 0, \dots, k-1, \\ C_{k+1,k+1} = 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

3.3 Cash-Flow Model

In this section, we present a cash-flow model that takes into account the events that might occur during the loan's lifetime, that is drawdowns, prepayments, interest payments, commitment fees payments, extensions/reductions of the authorization and obligor's default. This representation allows to reproduce the cash-flows of a bullet loan in a total realistic shape. The interest of this model is to incorporate both credit risk of the borrowers, funding risk of the bank and liquidity risk that might threaten the bank in case of widespread drawdowns. This formulation, as we will show later, allows the cash-flows to rely on micro and macro economic risk factors and hence to stand for situations of distressed markets or distressed economical conditions.

The cash-flow model is divided into two blocs, the first one reflects the liquidity movements of the obligor that has not defaulted. The second one reflects the recovered amount of liquidity that the bank performs if the obligor has defaulted.

In the first bloc, the obligor will drawdown or prepay a certain amount of liquidity during the period $[t_{k-1}, t_k]$, this is captured by the variable ΔU_k for $k = 1, \dots, N-1$, as if $\Delta U_k > 0$ this stands for a drawdown and if $\Delta U_k < 0$ this stands for a prepayment.

The obligor has to make interests payments on the outstanding nominal of the loan. In this case, the interest calculation depends both on the interest rates applied during the past drawdowns periods, on the credit rating of the obligor at each time a drawdown is performed and the outstanding nominal. These elements are described by the formulation :

$$\sum_{i=0}^{k-1} (r(t_{k-1}, t_k) + S(t_{i-1}, T)) \cdot C_{ki} \Delta t_k, \quad \text{for } k = 1, \dots, N-1,$$

where, $r(t_{k-1}, t_k)$ is the funding cost of the bank on the time interval $[t_{k-1}, t_k)$ and $S(t_{i-1}, T)$ is the credit spread applied to the obligor during the time interval $[t_{i-1}, T]$, $i = 1, \dots, k$ and C_{ki} is the remaining amount to be reimbursed from a drawdown of the date t_i .

The commitment fees rate during the period $[t_{k-1}, t_k)$ is denoted $F(t_{k-1}, t_k)$, in this case, the commitment fees payment are given by :

$$F(t_k, t_{k+1}) \cdot (A_k - U_k) \cdot \Delta t_k, \quad \text{for } k = 1, \dots, N-1,$$

where $(A_k - U_k)$ represents the unused part of the credit line.

The second bloc concerns the default of the obligor and the amount that the bank may loose on the outstanding nominal U_k . We have considered that a default generates a pending loss, this loss is unknown at time of default and will be observed at the end of the recovery

process. That is, the *Loss Given Default* (denoted LGD) equals one minus Gross Recovery Rate (denoted GRR)¹². The cash-flow related to the default is obtained by discounting the latent loss between t_k and the time of end of recovery t_{RD} . It is given by,

$$(1 - GRR_k \cdot B(t_k, t_{RD})) \cdot U_k, \quad \text{for } k = 1, \dots, N - 1,$$

where $B(t_k, t_{RD})$ is the discount factor between the time t_k and the time of end of recovery t_{RD} .

Under the assumptions developed in section 3.2.1 and the allocation rules FIFO/LIFO, the *bullet* loan cash-flow model at date t_k , $k = 1, \dots, N - 1$ can be expressed as :

$$CF_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (r(t_{k-1}, t_k) + S(t_{i-1}, T)) \cdot C_{ki} \cdot \Delta t_k + F(t_k, t_{k+1}) \cdot (A_k - U_k) \cdot \Delta t_k - \Delta U_k \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > t_k\}} - \left\{ (1 - GRR_k \cdot B(t_k, t_{RD})) \cdot U_k \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{t_{k-1} < \tau \leq t_k\}} \quad (3.3.1)$$

where τ is the duration variable representing the default time of the obligor.

For $k = 0$, the cash-flow is written as :

$$CF_0 = F(t_0, t_1) \cdot (A_0 - D_0) - D_0 \quad (3.3.2)$$

We have considered the specific case of CF_0 to account for utilization at loan's origination (mortgages for example).

At loan's maturity, $t_N = T$, the cash-flow is written :

$$CF_T = \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} (r(t_{N-1}, T) + S(t_{i-1}, T)) \cdot C_{Ni} \cdot \Delta t_N + U_T \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} - \left\{ (1 - GRR_T \cdot B(T, t_{RD})) \cdot U_T \right\} \cdot \mathbf{1}_{\{t_{N-1} < \tau \leq T\}} \quad (3.3.3)$$

With the convention : $S(t_{-1}, T) = S(t_0, T)$.

One may notice in equations (3.3.1) and (3.3.3) that the same credit spread is used for $i = 0$ and $i = 1$, this is due to the distinction between the cash-flow at t_0 , i.e., CF_0 and the cash-flow CF_1 which is considered during the period $]t_0, t_1[$.

3.4 Driver processes of the cash-flow dynamics

In order to explain the past behaviour of the cash-flows and model the relation between cash-flows and risk factors, we introduce drivers processes in this section. The drivers processes are

12. *Loss Given Default (LGD)* is defined in Altman et al. (2004) as the share of an asset that is lost when a borrower defaults. The *Gross Recovery Rate (GRR)* is defined as one minus the LGD, the share of an asset that is recovered when a borrower defaults. The LGD (GRR) is estimated under the Internal Ratings Based Approach, in this paper it is considered as a given data but one can refer to Altman et al. (2004) to have more explanation about the calculation methodology.

derived from the observable variables A_k and U_k but have the advantage of being easier to model and a better comparative basis between loan's cash-flows.

We identify three processes that drive cash-flows, namely, the relative change of the authorization, denoted $(\alpha_t)_{t \geq 0}$, $\alpha_t = \frac{\Delta A_t}{A_t}$, the drawdown and prepayment rates for the period $[t_{k-1}, t_k)$, the sum of these two processes is denoted $(\delta)_{t \geq 0}$ and named utilization rate. At each time interval $[t_{k-1}, t_k)$, it is possible to link the pair $\{\Delta A_k, \Delta U_k\}$ that defines cash-flow for a loan l to the values taken by the processes $\delta(k)$ and $\alpha(k)$.

A bijective relation can then be built between the set of cash-flow variables and the set of drivers processes. In order to build this relation, we rely on the following rules :

- The increase of U_k , i.e., $\Delta U_k > 0$ is a meaning of drawdown.
- The reduction of authorization, i.e., $\Delta A_k < 0$ is a meaning of business exit. As we consider only *bullet* loans, the business exit is the result of reduction authorization decided by either the bank or the obligor.
- A prepayment event has a positive impact on the unused amount between t_{k-1} and t_k , i.e., $\Delta PNU_k > 0$ and a negative one on the outstanding nominal increment, i.e., $\Delta U_k < 0$.
- The two relations : $A_k = U_k + PNU_k$ and $\Delta A_k = \Delta U_k + \Delta PNU_k$.

3.4.1 Bijective relation between driver processes and cash-flow components

3.4.1.1 Utilization rate as a function of cash-flow components

Starting from the rules mentioned above, we build the relation between the drivers processes $\{\delta(k), \alpha(k)\}$ and the cash-flow processes $\{A_k, U_k\}$. As the utilization rate is the sum of the drawdown rate and the prepayment rate, one may define these two variables. The drawdown rate is defined as the outstanding nominal increment ΔU_k divided by the available liquidity of the loan, that is, the unused part at the beginning of the period $[t_{k-1}, t_k)$, i.e., PNU_{k-1} , plus a supplement (resp. reduction) of authorization, ΔA_k . The drawdown rate is bounded by 0 and 1, i.e., $[0, 1]$ as the obligor can not draw more than the available liquidity. Thus, the drawdown rate, denoted δ_d is given by

$$\delta_d(k) = \frac{\Delta U_k}{PNU_{k-1} + \Delta A_k}, \quad (3.4.1)$$

The prepayment rate, noted δ_p , is computed by dividing ΔU_k on the outstanding nominal at the beginning of the period $[t_{k-1}, t_k)$, that is U_{k-1} . The prepayment rate is bounded by 0 and 1, i.e., $\delta_p \in [0, 1]$. In other words, the obligor can not prepay more than what he used. Thus, the prepayment rate is given by

$$\delta_p(k) = \frac{|\Delta U_k|}{U_{k-1}}, \quad (3.4.2)$$

Given (3.4.1) and (3.4.2), the definition of $\delta(k)$ and $\alpha(k)$ as functions of the increments ΔA_k and ΔU_k is written

$$\begin{cases} \delta(k) := \frac{\Delta U_k}{PNU_{k-1} + \Delta A_k} \cdot \mathbf{1}_{\{\Delta U_k \geq 0\}} - \frac{|\Delta U_k|}{U_{k-1}} \cdot \mathbf{1}_{\{\Delta U_k < 0\}} \\ \alpha(k) := \frac{\Delta A_k}{A_k} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Where the event $\mathbf{1}_{\{\Delta U_k \geq 0\}}$ stands for a drawdown and the event $\mathbf{1}_{\{\Delta U_k < 0\}}$ indicates a prepayment.

3.4.1.2 Cash-flow components as function of utilisation rate and change authorization rate

In the other hand, knowing the initial values of U_0 and A_0 , and the dynamics of the processes $\alpha(t)$ and $\delta(t)$ allows to build (simulate) the cash flow process on the time interval $[t_0, \dots, t_N]$. To this end, we propose the following algorithm to simulate the cash-flow components :

- drawing of a value of change authorization rate α_k by using some appropriate function $f(\cdot)$ as

$$\alpha_k := f(\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0, X_k, \dots, X_0),$$

- deduce the change in authorization amount,

$$\Delta A_k = A_{k-1} \cdot \alpha_k,$$

- drawing of a value of utilization rate by using some relevant function¹³ $g(\cdot)$ as

$$\delta(k) := g(\delta(k-1), \dots, \delta(t_0), X_k, \dots, X_0),$$

- deduce the outstanding nominal increment

$$\Delta U_k := \delta(k) \cdot (PNU_{k-1} + \Delta A_k) \cdot \mathbf{1}_{\{\delta(k) \geq 0\}} + \delta(k) \cdot U_{k-1} \cdot \mathbf{1}_{\{\delta(k) < 0\}}$$

- update of the inventory status at date t_k ,

$$f_k(C_{k-1}, \Delta U_k) = (C_{k0}, C_{k1}, \dots, C_{kk}),$$

- deduce of the unused part at date t_k ,

$$PNU_k = A_k - U_k.$$

These steps are reproduced for $k = 1, \dots, N$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k := f(\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0, X_k, \dots, X_0), \\ \Delta A_k = A_{k-1} \cdot \alpha_k, \\ \delta(k) := g(\delta(k-1), \dots, \delta(t_0), X_k, \dots, X_0), \\ \Delta U_k := \delta(k) \cdot (PNU_{k-1} + \Delta A_k) \cdot \mathbf{1}_{\{\delta(k) \geq 0\}} + \delta(k) \cdot U_{k-1} \cdot \mathbf{1}_{\{\delta(k) < 0\}} \\ f_k(C_{k-1}, \Delta U_k) = (C_{k0}, C_{k1}, \dots, C_{kk}), \\ PNU_k = A_k - U_k. \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

13. See section 3.4.3.3 for more details on the proposed function $g(\cdot)$ in this paper.

$k = 1, \dots, N$.

One should notice that the equation (3.4.3) allows to explain the past behaviour of the cash-flows and then to identify the risk factors driving it (see 3.4.2), while the equations (3.4.4) allows to look forward and simulate the cash-flows for the next dates.

3.4.2 Risk drivers of utilization rate

The topic of risk drivers of credit lines drawdown/prepayment is one of the most studied in the liquidity risk literature, one can refer to Duffy et al. (2005) that identify credit rating of the obligor as single driver of credit line utilization. Agarwal et al. (2006) by using a multivariate analysis conclude that the initial credit utilization is mainly explained by credit worthiness, interest rate prevailing at origination time and loan to value ratio of the obligor. Sufi (2009) finds that the collateralized credit lines are more prone to be used comparing to less collateralized credit lines, all other factors being equal. We summarize the driver factors found in literature in the following points :

The factors that influence a prepayment are :

- Common decreasing of prime rates and increasing liquidity in the debt markets. It becomes interesting for the obligor to prepay part of its debt to the bank with a debt obtained in markets at more advantageous conditions.
- Rating quality, if the obligor has a rating improvement (upgrade), it will be easier to access to funding at better conditions than in the past and then prepay a part of the outstanding nominal in order to reduce the debt cost.

The factors that explain a drawdown are :

- Common raise in the prime rates and decline of liquidity in the debt markets, the obligor will drawdown on its credit line at more favourable conditions than in the market.
- Worsening in rating quality. A good rating is usually associated with widespread availability of various funding sources, many of which are supposed to be cheaper than comparable financing through credit lines. These obligors can therefore tend not to draw on their credit lines available. If credit quality deteriorates, alternative financing costs rise accordingly. Funding conditions for credit lines may not respond immediately to a deterioration in the quality rating of a obligor, ultimately resulting in a growing relative attractiveness as a funding source.
- Level of collateralisation of the credit line, Jiménez et al. (2009) uses the collateralisation of the credit line as a predictor of drawdowns. As we are studying banking book positions, we replace the collateral with the level of *Gross Recovery Rate* (GRR) which plays the role of caution for the bank.
- The size of the obligor can be an advantage in access to markets.
- The borrowing currency and geographical area of the obligor. Indeed, a foreign currency is more difficult to access for a obligor than a domestic currency.

3.4.3 Modelling of the driver processes of the cash flow

This section aims at presenting the processes that drive the cash-flow model, that is, the Markov chain of the credit rating migrations, the Markov chain of the obligor's actions, the utilization rate process, the drawdowns and prepayments processes. For each process, the relation to risk factors is also described.

3.4.3.1 Modelling of the Markov chain driving the credit rating of the obligors

In this paper, we consider a Markovian model consisting of two multivariate processes X and R . The process X represents the evolution of factors whereas R represents the rating migration process in a pool of n obligors. More specifically, for any time $t \geq 0$, $R_t = (R_t^1, \dots, R_t^n)$ is a vector in $\{1, \dots, d\}^n$, where d corresponds to the default state and 1 corresponds to the state with the best credit quality. The l -th entry of R describes the rating migration dynamics of obligor l in the set $S = \{1, \dots, d\}$. The transition probabilities are driven by a factor process X . We consider that all sources of risk are defined with respect to the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ endowed with some reference filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_u)_{0 \leq u \leq t}$ satisfying the usual conditions. For any $l = 1, \dots, n$, let \mathcal{H}^l be the filtration associated with the migration process R^l and let \mathcal{H} be the global filtration such that $\mathcal{H}_u^l = \mathcal{H}_u^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_u^n$, $u \geq 0$. Let \mathcal{G} be the filtration associated with the factor process X . The credit migration models we consider in this paper are in the class of factor migration models.

In this section, we define multi-state factor intensity models as particular factor migration models. Given the history of X (given \mathcal{G}_∞), the rating migration processes $(R_t^l)_{t \geq 0}$, $l = 1, \dots, n$ are conditionally independent continuous-time Markov chains. Moreover, for any time t , they are assumed to have a common generator matrix $\Lambda_X(t)$ defined by

$$\Lambda_X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1(X_t) & \lambda_{12}(X_t) & \cdot & \lambda_{1,d-1}(X_t) & \lambda_{1,d}(X_t) \\ \lambda_{21}(X_t) & -\lambda_2(X_t) & \cdot & \lambda_{2,d-1}(X_t) & \lambda_{2,d}(X_t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{d-1,1}(X_t) & \lambda_{d-1,2}(X_t) & \cdot & -\lambda_{d-1}(X_t) & \lambda_{d-1,d}(X_t) \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where, for any $j \neq i$, λ_{ij} are positive functions and

$$\lambda_i := \sum_{j \neq i} \lambda_{ij},$$

for $i = 1, \dots, d-1$. For $j \neq i$, the product $\lambda_{ij}(X_t)dt$ corresponds to the conditional probability of going to rating state j in the small time interval $(t, t + dt]$, given \mathcal{G}_t and the fact that the obligor is in rating state i at time t . For small time length dt , the following first-order approximation holds

$$\lambda_{ij}(X_t) dt \approx \mathbb{P}\left(R_{t+dt}^l = j \mid R_t^l = i, \mathcal{G}_t\right), \quad (3.4.5)$$

for any obligor $l = 1, \dots, n$. It turns out that $\lambda_i(X_t)dt$ is the conditional probability to depart from state i in the small interval $(t, t + dt]$ given \mathcal{G}_t .

A classical specification of migration intensities is an exponential-affine transformation of the common factor. More specifically, for any $i \neq j$,

$$\lambda_{ij}(X_t) = \exp(\alpha_{ij} + \langle \beta_{ij}, X_t \rangle), \quad (3.4.6)$$

where α_{ij} is a constant parameter and β_{ij} accounts for the sensitivity of migration intensity λ_{ij} to the common factor X . This specification guarantees the positivity of migration intensities. This specification corresponds to a multi-state extension of the Cox proportional hazard model. If the factor process X only changes at discrete times $t_1 < \dots < t_N$, the conditional transition matrix can be expressed as a product involving the following matrix exponential terms

$$P(t_k, t_{k+1}) = e^{\Lambda_X(t_k)(t_{k+1} - t_k)}. \quad (3.4.7)$$

The transition matrix during the time interval $[t_k, t_{k+1}]$ is then given by :

$$P_X(t_k, t_{k+1}) = \begin{pmatrix} p_{11}(X_{t_k}) & p_{12}(X_{t_k}) & \cdot & p_{1,d-1}(X_{t_k}) & p_{1,d}(X_{t_k}) \\ p_{21}(X_{t_k}) & p_{22}(X_{t_k}) & \cdot & p_{2,d-1}(X_{t_k}) & p_{2,d}(X_{t_k}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{d-1,1}(X_{t_k}) & p_{d-1,2}(X_{t_k}) & \cdot & p_{d-1,d-1}(X_{t_k}) & p_{d-1,d}(X_{t_k}) \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3.4.3.2 Modelling of the Markov chain representing the obligor's actions *draw-down, prepayment and no action*

In this section, we derive a Markov chain process to describe the obligor's actions, considering that the obligor has the ability to drawdown on the credit line, to prepay or to do nothing. Thus, we define the three state Markov chain process denoted $(\eta_t)_{t \geq 0}$ as the process that drives the obligor's action during the time interval $[0, T]$. The three states are, *no action*, *drawdown* and *prepayment*, these states are encoded respectively with the numbers $\{0, 1, 2\}$ to make notation easier. As the Markov chain of the rating process, the Markov chain of the obligor's actions is driven by a factor process X . We consider also that all sources of risk are defined with respect to the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ endowed with some reference filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_u)_{0 \leq u \leq t}$ satisfying the usual conditions.

Unlike the rating process, the obligor's actions process has no default state and thus the Markov chain has no absorbing state. The rest of the framework is analogous to the one defined for the rating process. The three states generator of the Markov chain driving the obligor's actions is given by :

$$\Lambda_X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_0(X_t) & \lambda_{01}(X_t) & \lambda_{02}(X_t) \\ \lambda_{10}(X_t) & -\lambda_1(X_t) & \lambda_{12}(X_t) \\ \lambda_{20}(X_t) & \lambda_{21}(X_t) & -\lambda_2(X_t) \end{pmatrix},$$

In the same fashion that for the rating process, we deduce the transition probabilities matrix for the process $(\eta_t)_{t \geq 0}$.

$$P_X(t_k, t_{k+1}) = \begin{pmatrix} p_{00}(X_{t_k}) & p_{01}(X_{t_k}) & p_{02}(X_{t_k}) \\ p_{10}(X_{t_k}) & p_{11}(X_{t_k}) & p_{12}(X_{t_k}) \\ p_{20}(X_{t_k}) & p_{21}(X_{t_k}) & p_{22}(X_{t_k}) \end{pmatrix},$$

Statistical estimation of the models presented in sections 3.4.3.1 and 3.4.3.2 can be handled using the methodology dedicated to the intensity models with observable covariates developed in Cousin and Kheliouen (2016).

3.4.3.3 Modelling of the utilization rate process

The modelling of the driver process $(\delta_t)_{t \geq 0}$ is a key point of the cash-flow simulation. We have considered in our definition of $(\delta_t)_{t \geq 0}$ that this process contains both drawdowns and prepayments. That is, if $(\delta_t)_{t \geq 0} > 0$ this stands for a drawdown, if $(\delta_t)_{t \geq 0} < 0$, this stands for a prepayment, and if $(\delta_t)_{t \geq 0} = 0$, this means no action. In what follows, we consider that $(\delta_t)_{t \geq 0}$ is defined in the interval $[-1, 1]$.

We define the processes $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ and $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$ respectively as the processes representing the

drawdowns and the prepayments of the utilization rate process. These processes are defined in the interval $(0, 1]$. By considering the three states Markov chain process $(\eta_t)_{t \geq 0}$ representing the obligor's actions, we derive the utilization rate process as follows :

$$\delta_t(X_t, \delta_{t-1}) = 0 \cdot \mathbf{1}_{\{\eta_t=0\}} + \delta_d(X_t, \delta_{t-1}) \cdot \mathbf{1}_{\{\eta_t=1\}} - \delta_p(X_t, \delta_{t-1}) \cdot \mathbf{1}_{\{\eta_t=2\}} \quad (3.4.8)$$

This formulation allows to disentangle the utilization rate modelling into three parts, the null value, the drawdowns and the prepayments. The null part is handled by the probability associated to the state *no action* of the Markov chain process $(\eta_t)_{t \geq 0}$. The drawdowns and prepayments need to combine the states *drawdown* and *prepayment* of the process $(\eta_t)_{t \geq 0}$ with respectively the processes $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ and $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$. The *one-inflated beta distribution* is suited to model the processes $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ and $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$ as we will show in the next section.

3.4.3.4 Modelling of the drawdowns and prepayments rates

Three stylized facts have to be illustrated in modelling $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ (resp. $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$), namely, the sensitivities to risk drivers (see section 3.4.2), the belonging of the continuous component of $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ (resp. $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$) within the opened interval $(0, 1)$ and the non negligible probability mass on one. When the response variable is proportional and takes values in $(0, 1)$ including the endpoints of the range, Ospina and Ferrari (2012), Cook et al. (2008) and Calabrese et al. (2012) show that the *inflated beta distribution* is the most appropriate to take account for these characteristics. Indeed, the beta distribution is used to describe the continuous component of the model since its density has a wide range of different shapes depending on the values of the two parameters that index the distribution. The endpoints of the range are considered using two other parameters to account for the probability masses on these points. In this paper, as the utilization rate takes its values in $(0, 1]$, we use the *one-inflated beta distribution* with three parameters, two parameters of the beta distribution, μ and σ , representing respectively *location* and *scale* and one more parameter τ is considered to account for the probability mass on one.

The density function of the *one-inflated beta distribution* with respect to the vector parameters $\theta = (\mu, \sigma, \tau)$ is denoted **BEINF** (μ, σ, τ) and given by¹⁴ :

$$\mathbf{BEINF}(\delta|\mu, \sigma, \tau) := \begin{cases} (1-p_1) \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \delta^{\alpha-1} (1-\delta)^{\beta-1} & \text{if } 0 < \delta < 1, \\ p_1 & \text{if } \delta = 1 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

where, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function.

$$\alpha = \frac{\mu(1-\sigma^2)}{\sigma^2}, \quad \beta = \frac{(1-\mu)(1-\sigma^2)}{\sigma^2}, \quad p_1 = \frac{\tau}{1+\tau}. \quad (3.4.10)$$

Inversely,

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{1+\alpha+\beta}, \quad \tau = \frac{p_1}{1-p_1} \quad (3.4.11)$$

Hence, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < p_1 < 1$, $0 < \mu < 1$, $0 < \sigma < 1$ and $\tau > 0$.

14. In order to lightning the text, we use the notation $(\delta_t)_{t \geq 0}$ instead of $(\delta_{dt})_{t \geq 0}$ (resp. $(\delta_{pt})_{t \geq 0}$).

The mean and variance of the continuous component of δ , noted δ^* , i.e., $\delta^* \in (0, 1)$ are respectively

$$\mathbb{E}[\delta^*] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \mu$$

and

$$\mathbb{V}ar[\delta^*] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(1 + \alpha + \beta)} = \sigma^2\mu(1 - \mu)$$

Including the endpoint at one, i.e., $\delta \in (0, 1]$, the mean of δ and its variance can be written as :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta] &= p_1 + (1 - p_1)\mu \\ \mathbb{V}ar[\delta] &= (1 - p_1)\sigma^2\mu(1 - \mu) + p_1(1 - p_1)(1 - \mu)^2\end{aligned}$$

The *one-inflated beta distribution* has been incorporated in the *generalized additive models for location, scale and shape* (GAMLSS) framework (see [Rigby and Stasinopoulos \(2005\)](#) for more details on the GAMLSS). GAMLSS allows the flexible modelling of each of the three parameters that index the distribution using parametric terms involving linear or non linear predictors.

A GAMLSS model assumes that, for $i = 1, \dots, n$, independent observations (δ_i) have probability (density) function $f(\delta_i|\theta^i)$ conditional on $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i, \tau_i)$ a vector of three distribution parameters, each of which can be a function to the explanatory variables. Hence, for $k = 1, 2, 3$, let $g_k(\cdot)$ be a known monotonic link function relating the distribution parameters θ to vector of explanatory variables X_t .

$$\theta(X_t) = \begin{cases} \mu_t = \mu(X_t) = g_1(\beta_1 X_t) \\ \sigma_t = \sigma(X_t) = g_2(\beta_2 X_t) \\ \tau_t = \tau(X_t) = g_3(\beta_3 X_t) \end{cases}, \quad (3.4.12)$$

Where $g_k(\cdot)$, for $k = 1, 2$, takes values in $]0, 1[$ and $g_3(\cdot)$ takes values in \mathbb{R}_+^* .

With an appropriate formulation of the link functions $g_k(\cdot)$, $k = 1, 2, 3$, one may capture the impact of the risk drivers (explanatory variables) on the parameters μ, σ, τ and hence on the δ distribution. We show in the sections [3.5.4](#) and [3.5.5](#) that the application of the *one-inflated beta distribution* model on real drawdown and prepayment data allows to observe the stylized facts outlined in the section [3.4.2](#).

3.5 Empirical study

In this section, the driver processes described in section [3.4.3](#) are calibrated on a data set of credit lines delivered in USD currency. We first describe the considered data and explain how the risk factors are constructed using the list of macroeconomic variables provided by the US Federal Reserve. Second, the Markov chains representing the credit rating migrations and the obligor's actions are calibrated as factor migration models using the estimation procedure developed in [Cousin and Khelouen \(2016\)](#) on the intensity models with observable covariates. The estimated parameters are presented and discussed for both credit rating migrations and

obligor's actions. In the third part, the parameters of the *one-inflated beta distribution* are calibrated and the estimations discussed in the light of the stylised facts stated in 3.4.2.

3.5.1 Data description

We employ a data set of credit lines of a large Europe-based bank to test our model, the credit lines considered here are *bullet* loans, which means that the amortization is not possible and the reimbursement is done at the expiry of the loan. Moreover, the loans are only provided in USD currency.

The data set contains end of trimester data points with availability starting from December 2006 up to December 2014. Data corresponds to credit lines information for the last calendar day of each trimester, every credit line is attached to one specific loan of the bank. Credit lines come with utilization amount, authorization amount, starting date, maturity date, credit rating and estimated gross recovery rate of the obligor, that is, U_t , A_t , t_0 , T , R_t and GRR_t respectively. In addition to these quantitative information, the business sector and the business activity of the obligor are also provided.

We provide in Table 3.1 the distribution by count of the USD loans with respect to the credit ratings and observation dates. Figures 3.1 and 3.2 show respectively the cohorts per period and the mean cohorts per rating of the USD loans. Table 3.1 and both Figures 3.1 and 3.2 exhibit a sufficient number of observations in order to calibrate the model developed in 3.3 and 3.4.3.3 on them.

Ratings	1	2	3	4	5	6	7	8	9 (Default)	Total
12/2006	152	95	185	225	359	331	153	51	140	1691
03/2007	162	98	210	215	387	385	177	46	119	1799
06/2007	179	113	234	248	476	518	290	47	61	2166
09/2007	194	132	232	276	470	539	275	47	61	2226
12/2007	185	148	211	291	493	584	304	55	85	2356
03/2008	173	145	231	294	494	599	285	54	84	2359
06/2008	179	152	244	290	521	625	324	63	101	2499
09/2008	187	154	245	299	512	653	316	78	111	2555
12/2008	183	147	238	307	537	616	320	113	114	2575
03/2009	182	151	229	332	530	603	335	128	128	2618
09/2009	156	144	209	293	497	487	310	120	163	2379
12/2009	147	147	205	286	480	490	290	110	155	2310
03/2010	144	147	217	299	475	458	253	112	166	2271
06/2010	139	142	213	291	441	436	253	96	161	2172
09/2010	144	134	214	286	472	481	264	110	169	2274
12/2010	161	159	230	311	521	565	298	121	161	2527
03/2011	112	106	169	281	472	505	252	90	150	2137
06/2011	114	104	175	288	482	491	273	76	142	2145
09/2011	103	100	169	280	481	486	269	78	133	2099
12/2011	92	92	153	252	467	470	263	82	134	2005
03/2012	88	85	147	246	442	426	256	87	124	1901
06/2012	81	76	151	231	408	366	237	89	119	1758
09/2012	82	81	131	228	393	376	223	83	119	1716
12/2012	79	83	106	225	372	351	216	91	108	1631
03/2013	76	83	113	247	356	353	224	85	124	1661
06/2013	73	83	101	238	326	345	231	84	127	1608
09/2013	64	71	104	239	326	343	208	89	137	1581
12/2013	63	82	110	235	332	349	198	89	128	1586
03/2014	70	85	135	243	342	341	187	98	125	1626
06/2014	81	83	128	229	346	267	139	69	91	1433
09/2014	94	88	125	239	355	332	179	74	102	1588
12/2014	101	81	152	252	375	361	187	78	96	1683
<i>Mean</i>	126	112	179	266	436	454	250	84	123	2029

TABLE 3.1 – Cohorts by period and rating of the USD loans

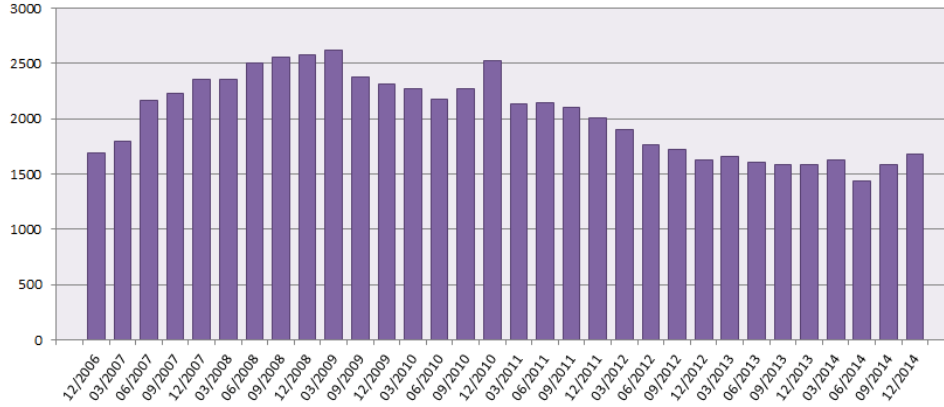


FIGURE 3.1 – Cohorts per period of the USD loans

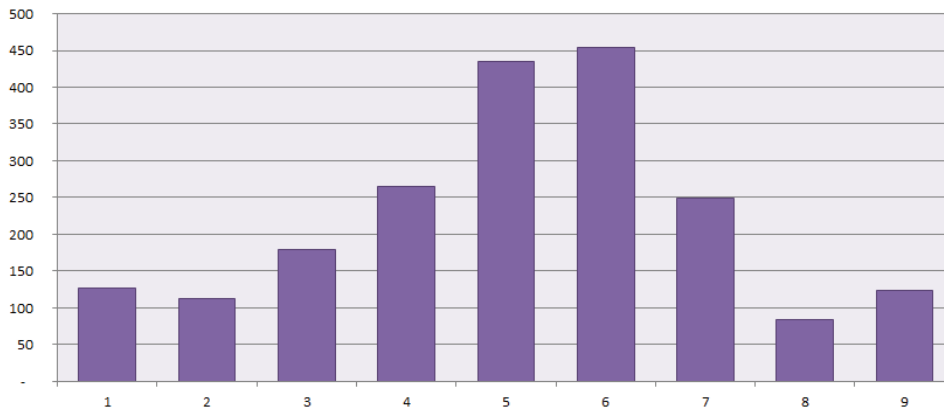


FIGURE 3.2 – Mean cohorts per rating of the USD loans

3.5.1.1 Macroeconomic variables

In order to link our data set to US macroeconomic environment, we have retrieved a list of thirteen variables published by the US Federal Reserve as a part of the supervisory scenarios for the annual stress tests. These variables represent macroeconomic information, financial markets information and credit market information, the list is as follows, Real GDP growth, Unemployment rate, CPI inflation rate, 3 month treasury rate, 5 years treasury yield, 10 years treasury yield, BBB corporate yield, Mortgage rate, prime rate, Dow Jones Total Stock Market Index, House Price Index, Commercial Real Estate Price Index, Market Volatility index. The historical values are provided within the document [FED \(2017\)](#). The US federal Reserve provides also forecasts for these variables at a three years horizon. In order to build the *business cycle* indicator from the US Federal Reserve list, we have computed the quarter-to-quarter changes with respect to each variable and then performed a principal component analysis. The first principal component as the *business cycle* indicator has been retained. The [Figure 3.3](#) represents the historical evolution of the *business cycle* indicator during the period

12/2006 - 12/2014.¹⁵

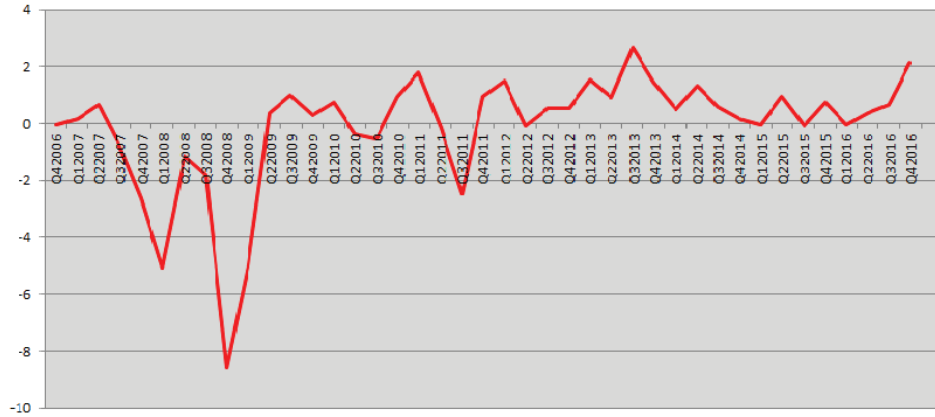


FIGURE 3.3 – *Business cycle indicator*

3.5.2 Calibration of Markov chain representing the rating migrations

We use the method presented in [Cousin and Kheliouen \(2016\)](#) to estimate the parameters entering in the intensity model. We recall that for the intensity model, the parameters to be estimated are the baseline intensity Λ_0 , which is transformed into baseline intensity generator matrix (see Table 3.2) and the matrix of factor sensitivities (see Table 3.4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.126	0.068	0.023	0.012	0.009	0.007	0.005	0.002	0
2	0.061	-0.220	0.101	0.022	0.021	0.009	0.003	0.003	0
3	0.011	0.085	-0.283	0.112	0.050	0.011	0.006	0.006	0
4	0.004	0.008	0.077	-0.261	0.121	0.029	0.012	0.008	0.003
5	0.003	0.004	0.022	0.106	-0.270	0.101	0.023	0.007	0.003
6	0.002	0.002	0.004	0.020	0.104	-0.257	0.091	0.028	0.006
7	0.003	0.002	0.002	0.013	0.032	0.130	-0.334	0.138	0.014
8	0	0	0.008	0.008	0.002	0.043	0.143	-0.395	0.192
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 3.2 – Baseline intensity generator for Markov chain of rating transitions

The one year Through the Cycle transition matrix is deduced from the baseline intensity generator, that is,

¹⁵. Values of the *business cycle* indicator are reported within the Table B.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	88.38	5.79	2.17	1.21	1.00	0.72	0.45	0.24	0.03
2	5.19	80.81	8.00	2.36	2.06	0.95	0.33	0.27	0.04
3	1.17	6.73	76.06	8.89	4.51	1.29	0.65	0.55	0.16
4	0.42	0.89	6.02	77.88	9.62	2.86	1.16	0.75	0.41
5	0.33	0.48	2.02	8.38	77.35	8.10	2.19	0.79	0.36
6	0.24	0.19	0.52	2.06	8.30	78.27	7.04	2.54	0.85
7	0.28	0.22	0.27	1.26	3.00	10.1	72.82	9.79	2.26
8	0.03	0.05	0.61	0.72	0.55	3.83	10.12	68.12	15.97
9	0	0	0	0	0	0	0	0	100

TABLE 3.3 – One year Through The Cycle transition matrix

The transition matrix in Table 3.3 is typical of the migration dynamic behaviour. The probabilities on the diagonal are close to one which means that the ratings are quite stable during a short time period (which is the case for 1 year). The probabilities around the main diagonal (above and below) are also significant, while the other ones tend generally to zero.

We report here the sensitivity matrix to *business cycle* (see Table 3.4), the rest of the sensitivities are reported in the Appendix B in Tables B.2 and B.9 .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	-0.11	0.11	0.08	-0.05	0	0	0	0
2	-0.03	0	0.01	0.12	0.16	0	0	0	0
3	-0.01	0.05	0	-0.09	0.14	0.17	0	0	0
4	0	0.06	0.06	0	-0.05	0.18	0.14	0.20	0
5	0	0.13	0.01	0.01	0	-0.03	0.14	-0.11	-0.29
6	0	0	0.15	-0.01	0.01	0	-0.29	-0.08	-0.25
7	0	0	0	0.18	0.05	0.07	0	-0.15	-0.19
8	0	0	0	0	0	0.23	0.35	0	-0.10
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 3.4 – Sensitivity of the rating migration intensity for the *business cycle* factor

The migrations are correlated with the business cycle, negatively when the migration is a downgrade and positively when the migration is an upgrade.

3.5.3 Calibration of Markov chain model on obligor's actions

The same calibration method has been used for the estimation of the Markov chain model on obligor's actions. The results are presented here after.

	0 - 0	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 1	1 - 2	2 - 10	2 - 1	2 - 2
Rat 1	-0.4	0.33	0.06	1.5	-1.78	0.38	1.3	1.03	-2.33
Rat 2	-0.59	0.53	0.05	1.34	-1.86	0.52	1.36	1.45	-2.81
Rat 3	-0.87	0.76	0.11	1.17	-1.64	0.47	1.09	1.37	-2.46
Rat 4	-1.05	0.93	0.12	1.32	-1.67	0.35	1.1	1.37	-2.49
Rat 5	-1.05	0.93	0.12	1.33	-1.70	0.37	1.1	1.46	-2.56
Rat 6	-1.02	0.89	0.12	1.25	-1.65	0.40	1.04	1.39	-2.42
Rat 7	-0.91	0.81	0.10	1.47	-1.78	0.31	1.04	1.13	-2.17
Rat 8	-1.20	1.11	0.09	1.55	-1.81	0.25	1.28	1.31	-2.59

TABLE 3.5 – Baseline intensity generator for Markov chain of obligor action for each rating

	0 - 0	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 1	1 - 2	2 - 0	2 - 1	2 - 2
Rat 1	81.64	14.70	3.66	65.73	27.77	6.50	64.08	22.25	13.67
Rat 2	73.92	21.38	4.70	59.40	32.28	8.32	59.61	28.56	11.83
Rat 3	62.61	30.16	7.23	49.53	40.12	10.35	48.82	35.41	15.77
Rat 4	59.64	33.85	6.51	50.05	41.66	8.29	48.57	37.14	14.29
Rat 5	59.55	33.76	6.68	50.13	41.42	8.45	48.39	37.60	14.01
Rat 6	59.35	33.32	7.33	48.69	41.77	9.54	46.99	37.32	15.70
Rat 7	64.59	29.41	6.00	54.94	37.17	7.89	51.09	32.32	16.59
Rat 8	58.83	36.12	5.05	52.32	41.62	6.06	50.66	37.36	11.97

TABLE 3.6 – Through the Cycle transition probabilities for Markov chain of obligor action

As expected, the probability to stay in the state *no action* is greater than the other probabilities actions, see column 0 - 0 compared to columns 1 - 1 and 2 - 2 in the Table 3.6. It is also noted that the probability p_{00} is decreasing as the credit quality is worsening. This indicates that a better credit quality is associated to a greater autonomy of the obligor which has no need to frequently borrow liquidities from the bank. The probability of returning to the state *no action* after a *drawdown* is decreasing with respect to the credit quality worsening, see columns 1 - 0, this means that the obligors with a bad credit quality are more dependent than those with a good credit quality to the liquidity provided by the bank. The probability of drawdown in the next period when no action has been done in this period, p_{12} , is increasing with respect to the credit deterioration, see column 0 - 1. The comparison between the columns 0 - 1 and 0 - 2 shows that it is more likely to drawdown after a period of *no action* than to prepay, this behavior is consistent with the fact the loan portfolio studied in this paper is a portfolio of *bullet* loans. The obligors use the credit line and reimburse at the maturity.

3.5.3.1 Parameters estimation for the intensity generator of the obligor's actions

We report the sensitivity to the business cycle in the table below, the rest of the sensitivities are reported in the Appendix B (see Tables B.3, B.4, B.5, B.6, B.7, B.8).

<i>business cycle</i>	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	-0.07	0.16	0.16	-0.08	-0.24	-0.11
Rat 2	-0.04	-1.30	0.32	0.02	0.06	-0.03
Rat 3	-0.04	2.19	0.34	0.03	0.04	-0.05
Rat 4	-0.04	-2.13	0.29	0.17	0.04	0.18
Rat 5	0.06	3.69	0.08	0.04	-0.43	-0.01
Rat 6	0.01	1.30	0.11	0.05	-0.02	0.02
Rat 7	-0.04	6.38	0.26	0.07	0.17	-0.06
Rat 8	-0.11	1.66	0.24	0.17	0.43	0.22

TABLE 3.7 – Sensitivities of obligor action to *business cycle* for each rating

<i>business cycle</i>	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	0.02	0.08	0.00	0.05	0.00	0.14
Rat 2	0.09	0.20	0.00	0.44	0.10	0.44
Rat 3	0.01	0.00	0.00	0.12	0.08	0.05
Rat 4	0.02	1.00	0.00	0.00	0.13	0.00
Rat 5	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.67
Rat 6	0.54	0.03	0.00	0.00	0.31	0.22
Rat 7	0.03	0.07	0.00	0.00	0.00	0.21
Rat 8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

TABLE 3.8 – *p-value* for sensitivities of obligor action to *business cycle* for each rating

The *business cycle* has a significant impact on the probabilities 0 - 1, 0 - 2, 1 - 0 and 1 - 2 as the *p-values* associated to these migrations are almost all lower than 0.1. The negative sign of the sensitivity of the migration 0 - 1 indicates that the *business cycle* reduces the probability of a *drawdown* when the business is in a period of positive cycle and increases this probability when it is in a period of negative cycle. In the other hand, as it can be expected, the *business cycle* has a positive impact on the *prepayment* probability which means that in case positive *business cycle*, the obligor are more prone to prepay. In both cases, the behavior of the obligor with respect to the *business cycle* is consistent with the economic rational. The probability of "comeback" from the *drawdown* to *no action* is as expected positively related to the *business cycle*, as a positive *business cycle* means a less dependence of the obligor to the credit lines.

3.5.4 Calibration of the *one-inflated beta distribution* on the drawdown rate

In this section we show the ability of the model **BEINF** (μ_t, σ_t, τ_t) to reproduce the stylized facts that have been listed in the section 3.4.2 on real data. To this end, the parameters are described as functions of four risk factors and an intercept; that is, the variation of the gross recovery rate between two periods t_{k-1}, t_k , denoted ΔGRR . The utilization rate on the previous period, namely $\delta(t_{k-1})$. The business cycle indicator on period t , denoted *Business Cycle* and the variation of the short interest rates, denoted ΔIR ¹⁶. Lastly, we take account of the credit worthiness by dividing the population with respect to the rating grades. We consider also the constraints (positivity and definition interval) on the parameters μ_t, σ_t, τ_t that have been presented in the section 3.4.3.3. The following sections present the results of the calibration of the **BEINF** (μ_t, σ_t, τ_t) model on the data described in section 3.5.1.

3.5.4.1 Calibration of location parameter

In order to take account of the constraint $0 < \mu_t < 1$, we define the function $\mu_t = g_1(X_t \beta_1)$ as the inverse logit function, that is, $\mu_t = \frac{1}{1 + e^{-X_t \beta_1}}$. Where $X_t = (1, X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, X_{4t})$ and $\beta_1 = (\beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14})$ are respectively the vectors of explanatory variables and sensitivities.

The table below presents the values of $\hat{\beta}_1$ for each credit rating.

16. The long interest rate have also been tested but they were not statistically significant.

Ratings	$\hat{\beta}_{10}$	ΔGRR	$\delta(t_{k-1})$	Business Cycle	ΔIR %
1	-0.78***	0.24	0.85***	-0.07*	-0.09
2	-0.75***	-0.49	0.55***	-0.07*	0.01
3	-0.72***	-0.56	0.65***	-0.02*	0.29**
4	-0.72***	0.62	0.71***	-0.01	0.24**
5	-0.68***	-0.50	0.47***	-0.05***	-0.07
6	-0.60***	0.51	0.53***	-4×10^{-3}	0.16**
7	-0.59***	0.72*	0.62***	-8×10^{-3}	0.01
8	-0.26***	0.24*	0.84***	-6×10^{-3}	0.22

TABLE 3.9 – Sensitivities of μ_t to risk factors for each rating

*** means that p -value is between 0 and 0.001, ** means that p -value is between 0.001 and 0.01, * means that p -value is between 0.01 and 0.1, if the p -value is greater than 0.1, we put nothing.

The sensitivities are in line with the stylized facts described in the literature, indeed, the location parameter μ_t is sensitive to the risk factors but not in the same shape for all ratings. The intercept is decreasing in absolute value which means that the through the cycle drawdowns¹⁷ are increasing with respect to the credit deterioration. That is, $\mu_1 = 0.31$, $\mu_2 = 0.32$, \dots , $\mu_7 = 0.36$, $\mu_8 = 0.44$, this means that the obligors are more prone to use their credit lines as their credit quality is getting worse, this in line with the results of [Agarwal et al. \(2006\)](#). The sensitivity to $\delta(t_{k-1})$ is positive and statistically significant for all the ratings. This is fairly intuitive as each time a drawdown is performed the mean drawdown is raised. The factor ΔGRR has no significant impact on μ_t with regard to the statistical significance (p -value > 0.1) for the investment grade obligors whereas it has a significant positive impact for the non investment grades obligors, [Sarin and Muenster \(2012\)](#) and [Jiménez et al. \(2009\)](#) arrive to similar findings concerning the impact of the collateral. The analysis of *business cycle* and the variation of the short interest rates gives an indication on the liquidity of the markets, with this respect, the mean drawdowns are negatively impacted by the liquidity. That is, with a negative sensitivity to the *business cycle* and a positive sensitivity to the short interest rates variation the mean drawdown is decreasing when the liquidity is increasing.

Generally, one may notice that the most sensitive obligors in terms of statistical significance are those belonging to the non investment grades, i.e., the weakest obligors. This is a recurrent result in the credit risk literature, the weakest obligors are the most impacted by the economic context.

3.5.4.2 Calibration of the scale parameter

The scale parameter is subject to the same constraint that the location parameter, namely, $0 < \sigma_t < 1$, we define the function $\sigma_t = g_2(X_t\beta_2)$ as the inverse logit function, that is, $\sigma_t = \frac{1}{1 + e^{-X_t\beta_2}}$. Where $X_t = (1, X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, X_{4t})$ and $\beta_2 = (\beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \beta_{24})$ are respectively the vectors of explanatory variables and sensitivities.

The table below presents the values of $\hat{\beta}_2$ for each credit rating.

17. The through the cycle drawdowns are defined as the mean value of drawdowns that depend only on the intercept, that is, $\mu = \frac{1}{1 + e^{-\hat{\beta}_{10}}}$.

Ratings	$\hat{\beta}_{20}$	ΔGRR	$\delta(t_{k-1})$	Business Cycle	$\Delta IR \%$
1	0.86***	-0.56	0.36*	-0.06*	0.27*
2	0.48***	-1.00	0.08	-0.06**	0.44***
3	0.58***	-0.92	0.57***	-0.02	0.03
4	0.74***	0.54	0.38***	0.02*	0.08
5	0.53***	-0.32	0.16**	-0.02*	0.09
6	0.46***	-0.12	0.18***	0.02***	0.14**
7	0.52***	-0.05	0.31***	0.03*	0.14*
8	0.74***	-0.13	0.04	8×10^{-3}	-7×10^{-3}

TABLE 3.10 – Sensitivities of σ_t to risk factors for each rating

*** means that p-value is between 0 and 0.001, ** means that p-value is between 0.001 and 0.01, * means that p-value is between 0.01 and 0.1, if the p-value is greater than 0.1, we put nothing.

The scale parameter is less intuitive to interpret than the location parameter μ_t . To our knowledge, very little discussion exists about σ_t in literature. However, it can be seen from Table 3.10 that in the same fashion that μ_t , the scale parameter leans on a through the cycle value represented by the intercept β_{20} and is strongly related to the utilization rate on t_{k-1} , that is, $\sigma_1 = 0.70$, $\sigma_2 = 0.61$, \dots , $\sigma_6 = 0.61$, $\sigma_7 = 0.63$ and $\sigma_8 = 0.68$. Converted to standard deviation of δ^* this gives $Sd_1(\delta^*) = 0.32$, $Sd_2(\delta^*) = 0.28$, \dots , $Sd_6(\delta^*) = 0.29$, $Sd_7(\delta^*) = 0.30$ and $Sd_8(\delta^*) = 0.35$. The through the cycle values are quite similar, this means that in the long run, the variability of the drawdowns is not significantly different across the ratings whatever the credit worthiness. The ΔGRR has in turn no significant impact on the scale parameter, this applies for all ratings. Finally, the effects of *business cycle* and ΔIR have to be analyzed simultaneously as their variations are related. When the short interest rates increase and the *business cycle* indicator decreases, this is a sign of a short liquidity which may rise the scale parameter and thus standard deviation of the drawdowns. In the other hand, a decrease in short rates and an increase in *business cycle* indicator is the sign of regular liquidity which maintains the business activity as usual and thus the standard deviation remains low.

3.5.4.3 Calibration of τ_t

Parameter τ_t is related to probability p_1 by the relation $p_1 = \frac{\tau}{1 + \tau}$, p_1 represents the probability of a total drawdown, namely $\delta_t = 1$. As the constraint on τ_t stands only on its positivity, $\tau_t > 0$, we define the function $\tau_t = g_3(X_t\beta_3)$ as the exponential function, that is, $\tau_t = e^{X_t\beta_3}$. Where $X_t = (1, X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, X_{4t})$ and $\beta_3 = (\beta_{30}, \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}, \beta_{34})$ are respectively the vectors of explanatory variables and sensitivities.

The table below presents the values of β_3 for each credit rating.

Ratings	$\hat{\beta}_{30}$	ΔGRR	$\delta(t_{k-1})$	Business Cycle	ΔIR %
1	0.08***	3.88*	1.92***	-0.22***	1.18***
2	0.29***	1.03	2.10***	-0.17***	0.96***
3	0.24***	-0.54	1.81***	-0.24***	1.12***
4	0.23***	-1.54	1.53***	-0.17***	0.91***
5	0.27***	0.57	1.53***	-0.20***	0.83***
6	0.31***	0.36	1.46***	-0.19***	0.74***
7	0.67***	0.56	1.23***	-0.18***	0.77***
8	0.57***	0.47	1.04***	-0.13***	0.81**

TABLE 3.11 – Sensitivities of τ to risk factors for each rating

*** means that p -value is between 0 and 0.001, ** means that p -value is between 0.001 and 0.01, * means that p -value is between 0.01 and 0.1, if the p -value is greater than 0.1, we put nothing.

The parameter τ_t is significantly related to the intercept, the utilization rate on t_{k-1} , the *business cycle* and the short rates. Like the previous parameters, the parameter τ_t has a long run value for each rating¹⁸, $\tau_1 = 1.08$, $\tau_2 = 1.33$, \dots , $\tau_7 = 1.95$, $\tau_8 = 1.76$ which transformed to probabilities gives¹⁹ $p_1^1 = 0.51$, $p_1^2 = 0.57$, \dots , $p_1^7 = 0.66$, $p_1^8 = 0.64$. The values of p_1^i , $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ as they are increasing, show that in the long run, the non investment grade firms are more prone to use all their credit lines then the investment grade firms. This is in line with results obtained for the previous parameters. The short interest rates have positive impact on the total drawdown for all ratings, this can be explained by the fact that a rise in the short interest rates makes the debt in the markets more difficult to access and so it increases the probability of the firms to drawdown totally on their credit lines. The *business cycle* has in turn a significant impact on the parameter τ_t , the probability of a total drawdown is negatively impacted by the *business cycle* which means that in a period of a positive business cycle and fall of the short interest rates, the firms have no need to draw totally on their credit lines, they prefer to keep them as backup for the rough days.

3.5.5 Calibration of *one-inflated beta distribution* on the prepayment rate

3.5.5.1 Calibration of the location parameter

Ratings	Intercept	ΔGRR	$\delta(t_{k-1})$	Business Cycle	ΔIR %
1	-0.76***	0.40	0.05	0.09*	-0.27
2	-0.77***	2.14	0.14	0.00	-0.29
3	-0.89***	1.14	0.06	0.02	-0.15
4	-0.85***	-0.02	0.53***	0.03*	-0.26*
5	-0.91***	0.24	0.15*	-0.01	-0.14*
6	-0.96***	0.98	0.04	0.02	0.03
7	-0.98***	-1.30	0.004	0.01	-0.0014
8	-1.27***	-2.26	0.02	0.16***	0.12

18. The long run value of τ is calculated through $\tau = e^{intercept}$.

19. We use the notation p_1^i , where i represents the rating grade, the probability is calculated using the relation $p_1 = \frac{\tau}{1 + \tau}$.

TABLE 3.12 – Sensitivities of prepayment μ to risk factors for each rating

*** means that p -value is between 0 and 0.001, ** means that p -value is between 0.001 and 0.01, * means that p -value is between 0.01 and 0.1, if the p -value is greater than 0.1, we put nothing.

The intercept is increasing in absolute value which means that the through the cycle prepayment²⁰ is decreasing with respect to the credit deterioration. That is, $\mu_1 = 0.32$, $\mu_2 = 0.31$, $\mu_3 = 0.29 \dots$, $\mu_7 = 0.27$, $\mu_8 = 0.21$, this confirms the intuition that the obligors with a better credit quality are more capable to realize benefits and thus are more prone to prepay their credit lines in the long run. The sensitivity to $\delta(t_{k-1})$ is consistently positive even if the statistical significance is hold only for the ratings 4 and 5. The variation in GRR value has no significant impact on the mean prepayment value as the p -value >0.1 for all the ratings. Concerning the *business cycle* and the variation of the short interest rates, the same analysis is done with respect to the liquidity, except that the impact of the liquidity on the prepayments is positive. That is, with a positive sensitivity to the *business cycle* and negative sensitivity to the short interest rates variation, the mean prepayment is increasing.

3.5.5.2 Calibration of the scale parameter

Ratings	Intercept	ΔGRR	$\delta(t_{k-1})$	Business Cycle	ΔIR %
1	0.67***	0.92	0.01	-0.02	0.06
2	0.64***	3.07	0.38*	-0.10*	0.005
3	0.47***	-0.29	0.32**	-0.03*	-0.03
4	0.61***	1.37*	-0.13	-0.03*	-0.18*
5	0.51***	0.55	0.06	-0.03**	-0.06
6	0.46***	0.83	0.03	-0.02*	-0.11*
7	0.54***	-0.64	0.03	-0.03*	-0.07
8	0.40***	-4.35***	0.11	-0.13***	0.07

TABLE 3.13 – Sensitivities of prepayment σ to risk factors for each rating

*** means that p -value is between 0 and 0.001, ** means that p -value is between 0.001 and 0.01, * means that p -value is between 0.01 and 0.1, if the p -value is greater than 0.1, we put nothing.

The parameters σ for the prepayment is significantly related to the *business cycle* for almost all the ratings and leans like the other parameters on a through the cycle value, that is, $\sigma_1 = 0.66$, $\sigma_2 = 0.65$, $\sigma_3 = 0.62$, \dots , $\sigma_6 = 0.61$, $\sigma_7 = 0.63$ and $\sigma_8 = 0.59$. The analysis is similar to the variability in the case of drawdowns.

20. The through the cycle prepayment is defined as the mean value of prepayment that depends only on the intercept, that is, $\mu = \frac{1}{1 + e^{-intercept}}$.

3.5.5.3 Calibration of τ_t

Ratings	Intercept	ΔGRR	$\delta(t_{k-1})$	Business Cycle	ΔIR %
1	-1.53***	1.19	2.31**	0.21*	0.71
2	-1.56***	7.84	0.73	0.24*	0.88
3	-1.96***	-0.63	0.34	0.18***	0.92
4	-2.20***	-1.93	0.31	0.22***	0.66
5	-2.17***	4.01*	0.79**	0.17***	0.47
6	-1.85***	0.34	0.76***	0.09**	0.36
7	-2.30***	-1.01	0.42*	0.18***	0.79
8	-2.06***	-6.62	2.06**	0.10	0.21

TABLE 3.14 – Sensitivities of prepayment τ to risk factors for each rating

*** means that p -value is between 0 and 0.001, ** means that p -value is between 0.001 and 0.01, * means that p -value is between 0.01 and 0.1, if the p -value is greater than 0.1, we put nothing.

In the long run, a full prepayment is less observed than a full drawdown, this can be observed through the probabilities $p_1^1 = 0.18$, $p_1^2 = 0.17$, $p_1^3 = 0.12$, $p_1^4 = 0.10$, $p_1^5 = 0.10$, $p_1^6 = 0.14$, $p_1^7 = 0.09$, $p_1^8 = 0.11$, when the probabilities of full drawdowns are all above 0.5 (see 3.5.4.3), this behavior is consistent with the fact that the loans studied in this paper are *bullet* loans. It is also well noticed that the investment grade firms are more prone to fully prepay their credit line compared to the non investment grade firms, this behavior is consistent with the economic rationale (i.e., a better credit rating is associated to a better treasury and so the capacity to prepay).

3.6 Forecasting of cash-flows distributions

Following results obtained in section 3.5, the repetition of the steps described in the section 3.6.1 will allow to simulate the distribution of the portfolio cash-flows in a forward looking mode. As outlined in the introduction, one can use this simulation to address the insolvency and the funding costs risk of the bank with respect to different scenarios of risk factors behaviour. In analogy to Sarin and Klein (2012), the presented Monte Carlo approach allows us to explicitly model a number of stochastic influences within the portfolio, including the rating migration process, the obligor's action process and the *one-inflated beta* process. These processes are forecasted conditionally to risk factors, that is,

- the *one-inflated beta* process is related to the variation of the gross recovery rate of the obligor between t_{k-1} and t_k (i.e., ΔGRR_k), the rating of the obligor on date t_k , the obligor's action on date t_{k-1} , the *business cycle* indicator on date t_k and the variation of short term interest rates between t_{k-1} and t_k (i.e., $\Delta IR\%$) and the utilization rate on date t_{k-1} (i.e., δ_{k-1}),
- the rating migration process has been forecasted with respect to *business cycle* indicator on date t_k ,
- the obligor's action process has been forecasted with respect to the rating on date t_k and the *business cycle* indicator on date t_k .

The simulation is conducted over a two years horizon at a quarterly frequency, that is, $\Delta t_k = 0.25$ year and $k = 1, \dots, 8$. Over the first simulation year, i.e., $k = 1, \dots, 4$, the transition matrices used to simulate the ratings migration process and the obligor's action process are the *point in time* matrices computed during the year preceding the simulation, that is, from 12/2013 to 12/2014. Starting from the second year, i.e., $k \geq 5$, the transition matrices are computed with respect to the predictions in a baseline and adverse, scenario of macro economic variables provided by the US Federal Reserve²¹. The rest of the simulation components have been fixed to the following values for $k = 1, \dots, 8$,²² commitment fees $F(t_{k-1}, t_k) = 0.02$, the relative change of the authorization $\alpha_k = 0$, the interest rate curve has been extracted from the EURIBOR curve on date 31/12/2014 (see Table B.10 in Appendix B). With no predictions about the gross recovery rate during the simulation horizon, the ΔGRR_k and GRR_k are fixed to the last observed values, i.e., $GRR_{(t=31/12/2014)}$ and $\Delta GRR_{(t=31/12/2014)}$. Finally, spread rates linked to credit ratings are given in the table below,

Ratings	1	2	3	4	5	6	7	8
Spread in %	1.16	1.26	1.36	1.46	1.60	1.71	1.86	1.96

TABLE 3.15 – Table of spread rates linked to credit ratings

3.6.1 Simulation scheme

For every non-defaulted obligor in the data set as of 31/12/2014 (last date in the data set), the following actions are performed²³.

1. A credit rating is simulated for every date t_k in the simulation horizon, $k = 1, \dots, 8$.
2. For every credit rating, an obligor's action event is simulated.
3. Using the simulated pair (rating, action) an utilization rate δ_k is simulated.
4. Steps in the equation 3.4.4 are performed in order to obtain A_k , U_k and PNU_k .
5. The simulated cash-flow is then built at date t_k using the equation 3.3.2, 3.3.1 and 3.3.3.
6. The steps 1 to 5 are repeated 1000 times for each obligor.

3.6.2 Results

We present the results of the Monte Carlo simulation through the simulated distributions of the utilization rate and the cash-flows. We have grouped the distributions with respect to the credit worthiness of the obligors.

3.6.2.1 Utilization rate per rating within *point in time* simulation

During the first year, $k = 1, \dots, 4$, the simulation of the credit ratings and the obligor's actions have been performed using the *point in time* matrices computed during the year preceding the simulation, that is, from 31/12/2013 to 31/12/2014. The risk factors used to compute the *one-inflated beta distribution* parameters are those gathered from the last date of the data set,

21. 2017 Supervisory Scenarios for Annual Stress Tests Required under the Dodd-Frank Act Stress Testing Rules and the Capital Plan Rule.

22. The additional components have been arbitrarily fixed for the sake of the simulation without the objective to perfectly stick to reality.

23. The following informations on date 31/12/2014 are also retrieved for every obligor in order to be used as starting points in the simulation : authorization amount $A_{(t=31/12/2014)}$, gross recovery rate $GRR_{(t=31/12/2014)}$, credit rating $R_{(t=31/12/2014)}$ and the maturity date of the loan.

i.e., 31/12/2014. In order to stick to reality, we have considered the maturity date of the loans, this means that if a loan expires during the simulation and the obligor has not defaulted at the observation date, the utilization rate is put to 0 and the outstanding nominal U_k is reimbursed to the bank plus the interests on this amount for the considered period Δt_k . In case of default between two periods, the bank has to recover the outstanding nominal, we have considered three years of recovery duration and discounted the amount $GRR_k \times U_k$ at the date t_k .

We first compare the utilization rate per rating on a specific date, to do this we have computed the mean utilization rate per credit rating grade for every simulation period. The results are reported in the Table 3.16. We first notice that the mean utilization rate is positive, this means that on average, the obligors using a *bullet* loan may less prepay and wait the loan maturity to reimburse the bank. Second, the Table 3.16 shows that the utilization rate is increasing with respect to the credit deterioration, this behaviour confirms the stylised fact pointed out by Agarwal et al. (2006). However, the variability of the utilization rate is not specifically related to the credit rating as it is shown in the table, indeed, the estimated standard deviation of the ratings 2 and 8 are slightly greater than the rest of the ratings even if they are not comparable with respect to their credit worthiness. Third, the estimated quantiles $\hat{q}_{99\%}$ show that the obligors can be grouped in four categories with respect their extreme utilization rate. Indeed, when the ratings 3 to 7 have comparable extreme utilization rates, the ratings 1, 2 and 8 experience different behaviours²⁴. The riskiest on the short term for the bank are obviously the obligors that are on the verge of default as they will on average drawdown more than 30% of their credit line and 46% in the extreme cases. The Table 3.16 and the Figure 3.4 summarize the results²⁵.

Statistics	Mean in %				Std.Dev in %				$\hat{q}_{99\%}$ in %			
	Periods	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Rat 1	11	10	8	5	3	4	3	4	18	18	18	13
Rat 2	17	14	12	6	4	5	4	4	28	25	22	17
Rat 3	24	19	14	7	4	4	4	3	32	28	23	14
Rat 4	27	20	15	7	3	3	3	2	34	27	22	14
Rat 5	26	20	15	8	2	2	2	2	32	25	20	12
Rat 6	26	20	15	8	2	2	3	2	32	26	21	12
Rat 7	26	19	15	7	3	3	3	3	33	26	22	14
Rat 8	33	22	16	8	5	5	5	4	46	35	28	19

TABLE 3.16 – Mean, standard deviation and $\hat{q}_{99\%}$ of utilization rate per rating during *point in time* simulation

The second axis of analysis is the behaviour of obligors with respect to the passage of time. The simulation shows that with the passage of time, the mean utilization rate decreases for all ratings but with an increasing magnitude as the credit rating worsens (see Table 3.16). Indeed, for $k = 1$, when the mean utilization rates for the ratings 1 and 2 are respectively 11% and 17%, they fall to respectively 5% and 6% at $k = 4$. In the same time, for the ratings 7 and 8, the mean utilization rates fall from 26% and 33% to 7% and 8% respectively. The (common) decrease effect is due to the influence of the utilization rate of the date t_{k-1} on the one of the next date t_k in the sense that an action (drawdown or prepayment) is rarely followed by another one in the next date. This behaviour is observed through the transition matrices

24. We have reported the quantiles 1%, 25%, 50% and 75% in the Tables B.11, B.13, B.15, B.17

25. We put only the figures of the first period, the rest are reported in the appendix, see Figures B.4.

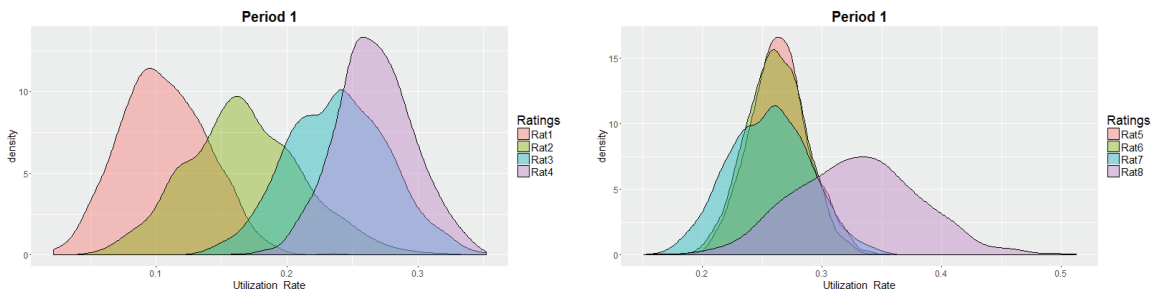


FIGURE 3.4 – Utilization rate distribution during the first period of point in time simulation

representing the obligor’s actions process as the transition probabilities 0-0, 1-0 and 2-0 are the most important, see Table 3.6. This will result in a lower average utilization rate from one period to another. Also, the passage of time comes with the expiry of loans or default of obligors which in the case of a static portfolio (no business creation on the simulation horizon) leads mechanically to a reduction of the utilization rate but also of the incomes. Concerning the difference in decreasing magnitude with respect to the ratings worsening, it is explained by the tendency of the non investment grade obligors to drawdown totally on their credit line in the short term²⁶. This behaviour limits their possibility to drawdown if they do not prepay first or obtain an extension of the authorization from the bank, the symmetric reasoning holds in the case of a total prepayment. As the change in authorization is null in our simulation, the utilization rate is reduced in both cases (drawdown or prepayment).

As a result, the bank is exposed to an insolvency risk in the short term as the obligors are more prone to use their credit lines in the short term and to reimburse mainly at the expiry of the loan. The non investment grade obligors are the main source of this insolvency risk as they totally drawdown on their credit line more frequently but in the same time are closer to the default. The insolvency risk decreases as the time goes by but the default risk of the obligors increases leading to a risk on the outstanding nominal. We illustrate our analysis with the Figures 3.5, the rest of the figures are in the appendix (see Figures B.2).

3.6.2.2 Baseline versus adverse scenario

During the second year, $k = 5, \dots, 8$, the simulation of the credit ratings and the obligor’s actions have been performed using the *forward looking* matrices computed with respect the predictions in a baseline and adverse scenario²⁷ of macro economic variables provided by the US Federal Reserve. We have performed a principal component analysis on the predicted variables and retained the first principal component as the *business cycle* indicator with the following values.

26. Agarwal et al. (2006) study the use at origination of the credit lines and show that a no negligible part is drawn at the beginning, between 35% and 55% of the authorization for the investment grade firms and between 70% and 80% of the authorization for the non investment grade firms.

27. The FED proposes adverse and severely adverse scenario, we have chosen the second one as it is the closest to the 2008-2009 crisis.

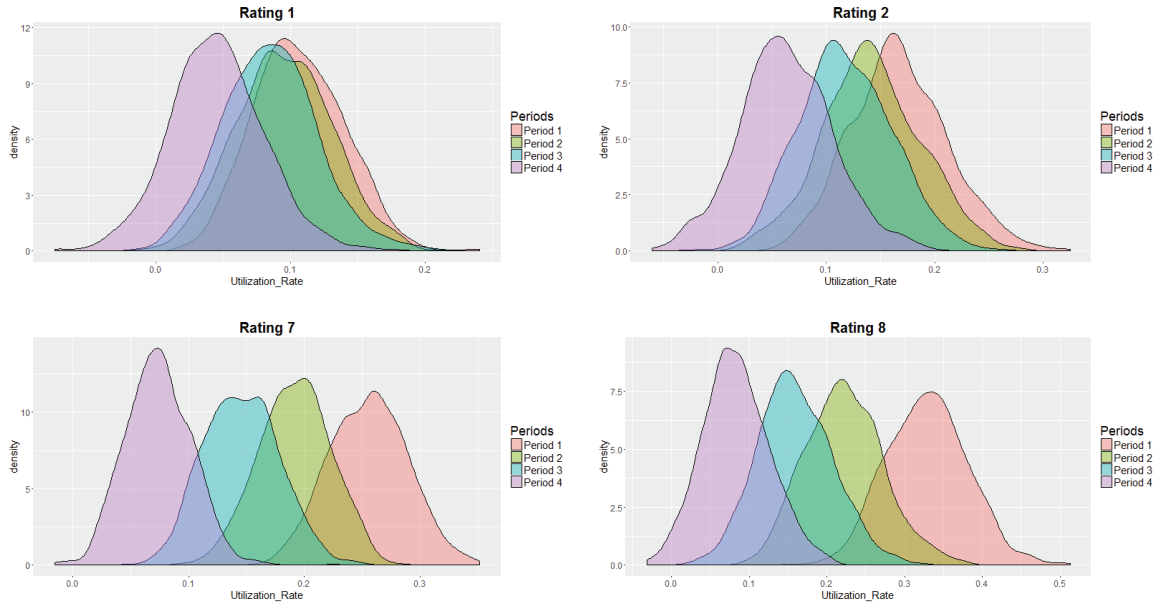


FIGURE 3.5 – Utilization rate distribution evolution during point in time simulation for ratings 1 and 8

<i>Scenarios</i>	Baseline		Adverse	
	<i>business cycle</i>	Δ IR %	<i>business cycle</i>	Δ IR %
$k = 5$	1.13	0.3	-7.26	-0.3
$k = 6$	0.89	0.2	-2.68	0
$k = 7$	1.62	0.4	-2.45	0
$k = 8$	1.00	0.3	-1.99	0

TABLE 3.17 – Baseline and adverse scenarios

At each period, $k = 5, \dots, 8$, the transition matrices and the *one-inflated beta distribution* parameters are computed with respect the values of the Table 3.17. With no predictions about the gross recovery rate on the second year we have used the same values as for *point in time* simulation. The results of the mean utilization rates and the standard deviation are reported in the Tables 3.18 and 3.19.

<i>Scenarios</i>	Baseline				Adverse			
	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
<i>Periods</i>								
Rat 1	3	3	2	3	18	11	9	7
Rat 2	4	4	4	4	19	9	8	7
Rat 3	-2	-1	0	1	22	9	8	7
Rat 4	5	5	5	5	21	9	6	5
Rat 5	-6	-1	0	2	13	7	6	5
Rat 6	4	4	4	5	16	8	7	5
Rat 7	-14	-6	-5	-3	20	9	7	5
Rat 8	4	5	5	6	20	6	3	2

TABLE 3.18 – Comparison of mean utilization rate per rating between baseline and adverse scenario

<i>Scenarios</i>	Baseline				Adverse				
	<i>Periods</i>	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1		2.3	2.4	2.2	2.2	3.4	3.3	3.2	3.1
Rat 2		3.0	3.1	3.1	3.1	4.7	4.6	4.6	4.5
Rat 3		3.0	3.1	2.9	3.0	3.3	3.3	3.2	3.2
Rat 4		2.2	2.2	2.2	2.1	2.5	2.5	2.5	2.4
Rat 5		2.3	2.1	2.2	2.1	1.9	1.8	1.8	1.7
Rat 6		1.7	1.7	1.6	1.6	1.6	1.6	1.7	1.6
Rat 7		3.1	3.0	3.1	3.0	2.6	2.7	2.5	2.5
Rat 8		4.4	4.5	4.3	4.3	4.8	4.7	4.4	4.5

TABLE 3.19 – Comparison of standard deviation of utilization rate per rating between baseline and adverse scenario

We can observe in the Table 3.18 an immediate impact of the declining in economic conditions on the mean utilization rates. The results show an increase in the mean utilization rate for all ratings while the impact on the standard deviation is not significant. Another significant impact can be shown in the estimated 99% quantile, the Table 3.20 shows that during the adverse periods, the risk of massive drawdowns (above 30%) is no more related to the bad ratings but becomes the fact of almost all ratings²⁸. However, as the time goes by (see period $k = 8$), the baseline scenario shows greater 99% quantiles than the adverse scenario for the non investment grade obligors, this is due to the maintain of activity in case of baseline scenario as the non investment obligors would default less and would not drawdown totally on their credit lines.

<i>Scenarios</i>	Baseline				Adverse				
	$\hat{q}_{99\%}$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1		12	12	11	12	31	21	20	18
Rat 2		14	13	13	13	35	23	21	20
Rat 3		7	10	10	12	34	20	17	16
Rat 4		12	12	11	11	29	15	13	11
Rat 5		2	8	8	11	19	12	10	8
Rat 6		11	11	11	13	24	15	14	12
Rat 7		2	6	8	11	30	17	15	14
Rat 8		15	17	17	20	33	16	11	11

TABLE 3.20 – Comparison of $\hat{q}_{99\%}$ quantile of utilization rate per rating between baseline and adverse scenario

The Figures 3.6 shows clearly the move of the distributions between the baseline and the adverse scenario.

28. We have reported the quantiles 1%, 25%, 50% and 75% in the Tables B.12, B.14, B.16, B.18 respectively.

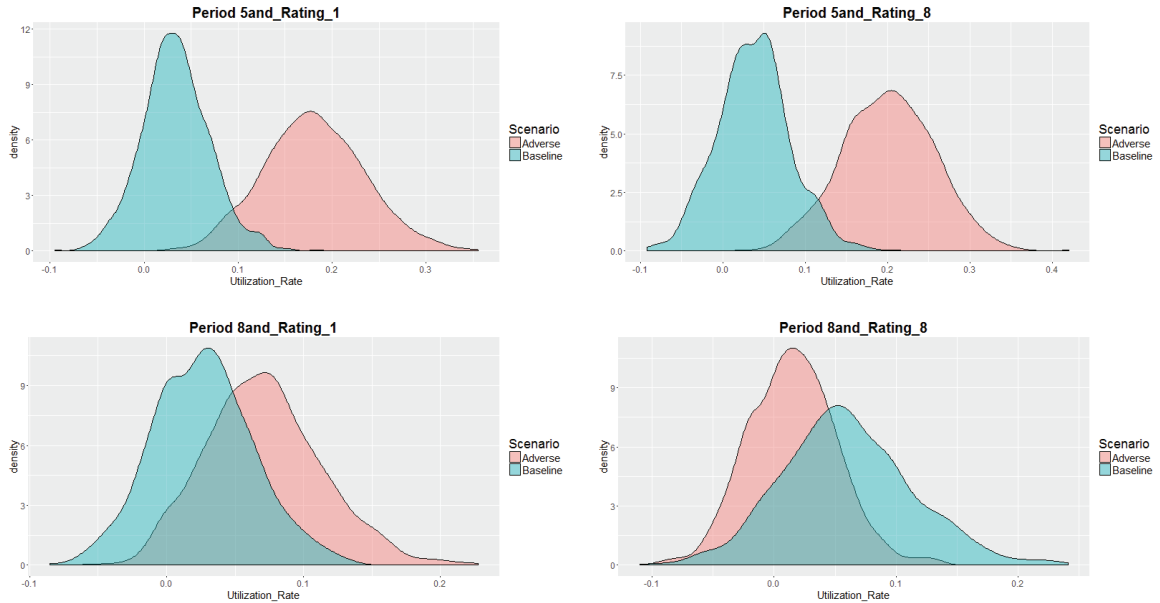


FIGURE 3.6 – Comparison between the utilization rate distributions in baseline and adverse scenarios

As a result, the two scenarios can be used by the bank as the basis of its business strategies. In the first case, if the conditions of the baseline scenario are becoming true, the bank may originate new loans with a funding strategy that takes account of the weak utilization rate, this allows to reduce the funding costs and gain incomes from the commitment fees. In the second case, the bank may use the simulation in order to put in place some mitigation procedures like financial covenants that reduce the capacity of the obligors to drawdown on the credit lines when the adverse scenario becomes true.

3.6.3 Cash-flow distributions

The study of the utilization rate is not sufficient to account for all the cash-flows involved in the loan's lifetime. Indeed, the interests payments, the commitment fees, the recovery in case of obligor's default and the reimbursement of the outstanding nominal at the expiry of the loan are not considered in the utilization rate simulation. In the cash-flow simulation, for the payment of interests on the outstanding nominal U_k , we have applied the inventory rule FIFO²⁹ to take account simultaneously of the credit rating of the obligor at the drawdown's dates³⁰, $t_i, i = 0, \dots, k - 1$ and the prepayments amounts that have followed. The obligor's default in the utilization rate process takes the form of high drawdown rates before the default and null values after the default observation. In the cash-flow process simulation, in addition to the increase of the drawdown amounts before the default, the default observation will trigger a negative cash-flow representing the part of the outstanding nominal U_k that has not been recovered through the recovery process. The recovery process has not been considered in the utilization rate simulation. The expiry of the loan will trigger the reimbursement of the outstanding nominal, this cash-flow is not considered in the utilization rate process (the

29. See section 3.2.2

30. With a differentiated spread rate per credit rating.

prepayment is not considered as a reimbursement) while it is accounted in the cash-flow process simulation. Lastly, the payment of commitment fees on the unused part PNU_k are significant source of incomes for the bank, they have been integrated in the simulation of the cash-flow process.

3.6.3.1 Cash-flow per rating within *point in time* simulation

We report in the Table 3.21 the mean, the standard deviation and the $\hat{q}_{1\%}$ quantile of the cash-flow in percent of the authorization at date t_k , $k = 1, \dots, 4$. The cash-flow in percent of the authorization is computed as follows,

$$CF_k\% = \frac{\sum_{l=1}^{L_{k,R}} CF_{k,l}}{\sum_{l=1}^{L_{k,R}} A_{k,l}}$$

for the periods $k = 1, \dots, 4$, the ratings $R \in \{1, \dots, 8\}$ and the obligors $l = 1 \dots, L$.

The sign minus in the table means that the cash-flow is an outflow for the bank.

Statistics	Mean in %				Std.Dev in %				$\hat{q}_{1\%}$			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Periods												
Rat 1	-11	-10	-9	-6	5	5	5	4	-24	-24	-22	-19
Rat 2	-18	-15	-12	-8	7	7	6	6	-35	-33	-30	-28
Rat 3	-25	-19	-14	-8	8	7	6	5	-44	-37	-31	-23
Rat 4	-27	-20	-14	-8	5	5	4	4	-39	-32	-27	-18
Rat 5	-27	-20	-14	-9	7	4	4	3	-44	-29	-25	-17
Rat 6	-27	-20	-14	-9	6	5	5	4	-41	-32	-26	-18
Rat 7	-26	-20	-14	-9	8	7	6	5	-46	-39	-31	-24
Rat 8	-33	-22	-15	-8	12	10	9	7	-60	-48	-42	-34

TABLE 3.21 – Mean, standard deviation and $\hat{q}_{1\%}$ of cash-flow in percent per rating during *point in time* simulation

As expected, the cash-flow simulation confirms the findings of the utilization rate simulation, namely, the non investment grade obligors are a greater source of liquidity outflow for the bank. The passage of time tends to limit the drawdown capacity of the obligors, specially the non investment grade ones. Furthermore, the cash-flow simulation exhibits a greater variability of the cash-flows as the interest payments and the loss given default have been integrated in the calculations. The focus on the distribution tails $\hat{q}_{1\%}$ gives an indication on the cash-flow at risk. One can notice that the risk of extreme outflows is greater in the cash-flow simulation than in the utilization rate simulation, this is because of the integration of the loss given default in the cash-flow simulation.

As a result, the portfolio manager could lean on the cash-flow simulation to build a differentiated origination strategy by grouping the obligors by liquidity consumption profiles. The consumption profile will depend on the credit worthiness and the evolution of the obligor's behaviour over the time. Those which are liquidity consumers should be more charged in commitment fees for the benefit of those which are less consuming the liquidity. The funding strategy of the portfolio manager can in turn be optimized with respect to liquidity consumption profile of the obligors and its time variation.

3.6.4 Cash-flow per rating within baseline and adverse simulations

The results of the cash-flow forecasting within the baseline and adverse simulations are reported in the Tables 3.22 and 3.23. The previous analysis on the impact of the *business cycle* is confirmed, that is, the economic environment worsening has an instantaneous impact on the cash-flow distributions. As the figures 3.7 can show, the bank will experience more outflows in case of adverse scenario than in baseline scenario. However, in the long run (period $k = 8$), the baseline scenario shows more outflows of the non investment grade obligors in comparison with the adverse scenario. This is due to the extinction of activity in case of adverse scenario as the obligors may default more and lost the possibility to drawdown as they have more used their right to a total drawdown in the previous periods.

<i>Scenarios</i>	Baseline				Adverse				
	<i>Mean in %</i>	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1		-5	-4	-4	-3	-17	-10	-8	-6
Rat 2		-5	-4	-4	-3	-19	-10	-6	-4
Rat 3		-6	-4	-3	-3	-17	-7	-4	-2
Rat 4		-5	-4	-3	-3	-16	-6	-3	-2
Rat 5		-8	-5	-4	-3	-8	-5	-3	-2
Rat 6		-6	-5	-3	-3	-11	-6	-4	-2
Rat 7		-7	-5	-3	-3	-16	-6	-3	-1
Rat 8		-5	-4	-3	-2	-15	-4	-2	0

TABLE 3.22 – Comparison of mean cash-flow in percent per rating between baseline and adverse scenario

<i>Scenarios</i>	Baseline				Adverse				
	$\hat{q}_{1\%}$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1		-17	-17	-16	-15	-35	-26	-26	-21
Rat 2		-22	-19	-16	-18	-42	-29	-22	-19
Rat 3		-22	-21	-17	-18	-36	-25	-20	-15
Rat 4		-13	-12	-11	-9	-28	-16	-11	-8
Rat 5		-17	-13	-11	-9	-18	-13	-11	-8
Rat 6		-16	-13	-10	-9	-25	-18	-13	-11
Rat 7		-20	-18	-15	-13	-32	-22	-15	-12
Rat 8		-29	-23	-22	-18	-41	-25	-17	-11

TABLE 3.23 – Comparison of $\hat{q}_{1\%}$ quantile of cash-flow in percent per rating between baseline and adverse scenario

The figures produced here after show the distributions of the cash-flows within the two scenarios.

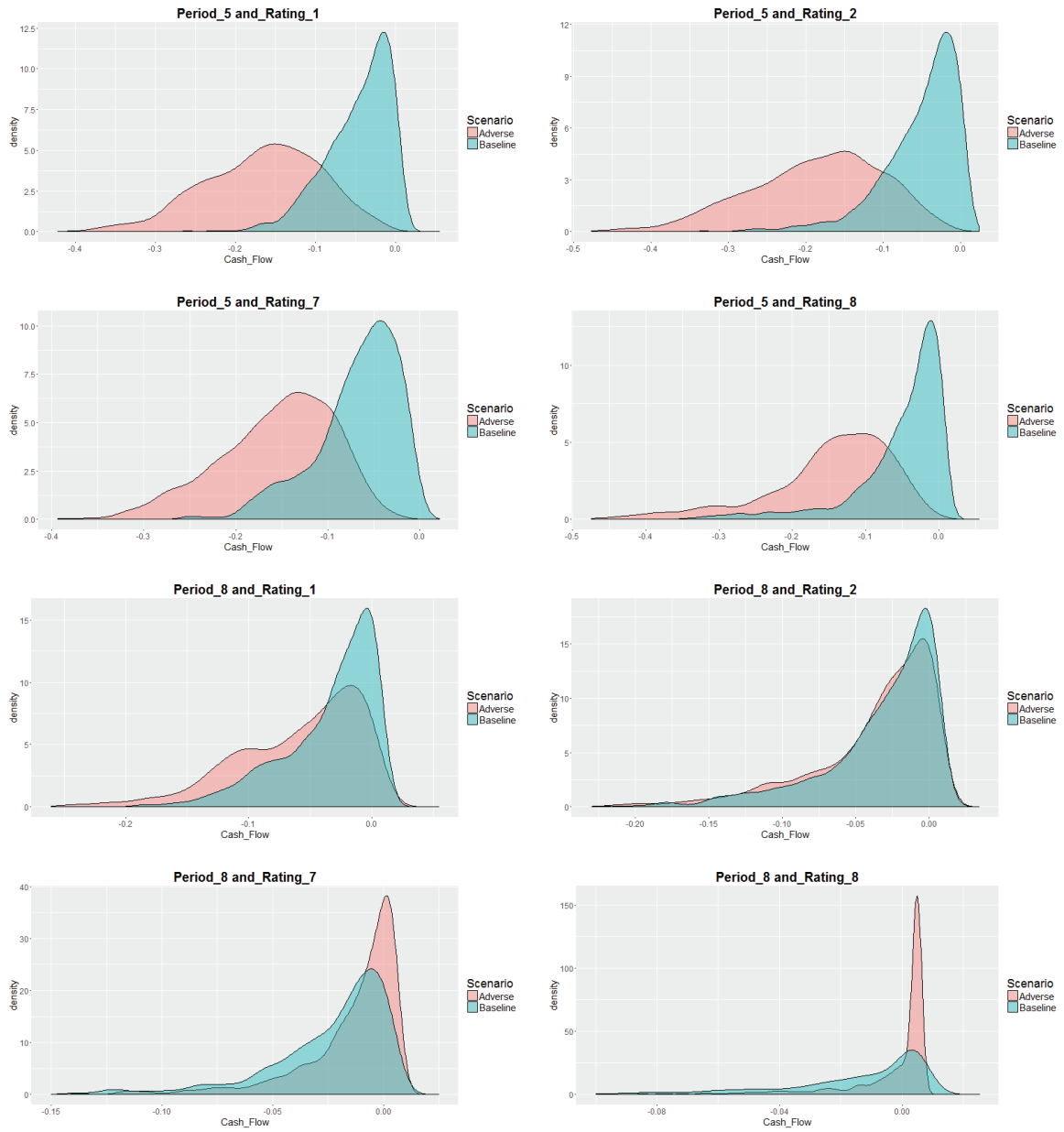


FIGURE 3.7 – Comparison between the cash-flow in percent distributions in baseline and adverse scenarios

Conclusion

This paper aims at building a cash-flow model for a bullet loans portfolio. The interest of such a model is to forecast the portfolio liquidity by linking the future cash-flows to a set of risk factors as (among others) the credit worthiness of the obligors, the business cycle and the interest rates. In order to build a realistic cash-flow model, we account in our paper for all the processes that are involved in the loan's lifetime, that is, drawdowns, prepayments, interest payments, commitment fees, variations of the authorization and credit quality deterioration (resp. improvement) of the obligors. To our knowledge, we are the first to combine these processes to build a cash-flow model. The use of non homogeneous Markov chain describing the obligor's actions and the *one-inflated beta distribution* with three parameters allows to address the drawbacks of the linear models that are not bounded between 0 and 1 and are not able to have a non negligible probability masses on the end points. In addition, the *one-inflated beta distribution* in the GAMLSS framework allows to link the three parameters to risk factors and thus to obtain a dynamic, risk factors related cash-flow distributions. Again, in our knowledge, we are the first to use this distribution to model the utilization rate of a banking book.

The calibration of the beta inflated parameters on the a data set of a real loan portfolio allowed to show that the credit worthiness of the obligors has a determinant impact on the obligor's behaviour. In addition, all the parameters lean on a through the cycle value represented by the intercept, some of them are related to the business cycle, specially the parameters related to the non investment grade obligors. The paper is ended with a cash-flow simulation that uses the forecasts of the macro economic variables provided by the US Federal Reserve. The simulation is conducted through baseline and adverse scenarios and shows that the obligors are very reactive to the changing of the economic environment by drawing more on their credit lines, specially the non investment grade obligors that use their right to drawdown totally on their credit lines. However, the impact on the portfolio decreases as the time goes by because in our simulation we have considered that the extension of authorization is null. This is not an unrealistic assumption in time of crisis as the banks could use financial covenants to stop financing the more liquidity consumers. As a result, we show with the simulation that the obligors can be grouped according to their liquidity consumption profile. The portfolio manager could lean on this segmentation to build a differentiated origination strategy by charging more commitments fees to the most liquidity consumers and rewarding those which consume the least.

Chapitre 4

Willingness-to-pay for reducing risk in presence of two ambiguity sources

Abstract

This paper considers the Willingness-to-Pay (WTP) that reduces totally or partially the risk for a risk averse Decision Maker (DM) and asks what happens to the WTP if the probabilities are ambiguous but the DM is ambiguity neutral? One might think that if the DM is ambiguity neutral he would not pay more to reduce the risk in comparison with the case without ambiguity. This paper shows that in certain cases, the presence of ambiguity over probabilities changes the WTP to reduce the risk of an ambiguity neutral DM. To do this, we consider a portfolio with two binary risks (lotteries), each one delivering two outcomes, the first associated to bad state of nature and the second associated to good state of nature. Then we consider one source of ambiguity over the probabilities for each lottery, each source of ambiguity is captured by an additive zero-mean random variable.

First we show that in presence of ambiguity over probabilities, the DM's welfare is equal to his welfare level without ambiguity plus a term called *pure interaction effect*. This effect is composed of a risk effect depending on the utility function and an ambiguity effect equal to the covariance between the ambiguity sources. As a result, the ambiguity modifies the welfare level of all ambiguity-neutral and risk-averse DM when the pure interaction effect is different from zero. Second, we compare the WTP to benefit from a total or a partial risk reduction in presence of ambiguity with the WTP in the case without ambiguity. We show that in case of a total risk reduction, the difference between the WTP's depends only on the pure interaction effect. This allows us to deduce easily when the WTP in case of ambiguity is equal, greater or lesser than the WTP in the case without ambiguity. The case of partial risk reduction is more complex to treat as the difference between the WTP's depends on what we have called a *complete interaction effect*. This effect is composed of the pure interaction effect plus a second term. In this case, more assumptions are needed to deduce the sign of the difference between the WTP's.

As a conclusion, this paper shows a counter-intuitive result, indeed, when it is expected for an ambiguity neutral DM to not be influenced by the ambiguity, this paper shows that it is the case.

Keywords : Willingness-to-Pay, KMM smooth ambiguity model, mixed-risk averse utility function, risk apportionment.

4.1 Introduction

Since the seminal experiment of [Ellsberg \(1961\)](#), the aversion of people to uncertainty over probabilities in their decision making is a well known fact. Indeed, in violation of the independence axiom of expected utility theory, the Ellsberg's experiment shows that the uncertainty on odds could lead people to strictly prefer gambling on bets with known odds rather than unknown odds. Subsequent studies have confirmed this intuition and showed that a large portion of the population prefers known odds, see [Einhorn and Hogarth \(1988\)](#), [Sarin and Weber \(1993\)](#), [Chow and Sarin \(2001\)](#), [Eliaz and Ortoleva \(2015\)](#) or [Eichberger et al. \(2015\)](#). Surveys of business owners and managers, [Chesson and Viscusi \(2003\)](#) and [Viscusi and Chesson \(1999\)](#) show the same behaviour. An agent that behaves in this way is termed *ambiguity averse*.¹ [Snow \(2011\)](#) defines ambiguity as the *uncertainty about probability created by missing information that is relevant and could be known*. In the light of this definition, an act is related to risk when it has known probabilities whereas it is related to ambiguity when it has unknown (uncertain) probabilities. In the other hand, as stated by [Berger \(2011\)](#), the concept of ambiguity over probabilities is introduced in such a way that the set of new probabilities associated with a given outcome is nothing but a mean-preserving spread in the space of first order probability distributions. This means that individuals are willing to pay to reduce and/or eliminate ambiguity over probabilities.

Changes in ambiguity over probabilities can be measured in different ways. The first one defines the loss of welfare due to facing more ambiguity over probabilities. The second one corresponds to the Willingness-to-Pay (WTP) to benefit from a reduction in the level of ambiguity over probabilities. The third one is the increase in the loss probability that makes the Decision Maker (DM) indifferent between the ambiguous situation and the non ambiguous situation. In this article, we study the effect of ambiguity on the WTP of an ambiguity neutral risk averse DM to reduce partially or totally the risk of bad state in a two lotteries portfolio. The originality of our work consists in considering two sources of ambiguity captured by additive zero-mean random variables over the lottery probabilities. Only few articles treat the case of multiple ambiguity sources, most of them concern the experimental field as they reproduce the Ellsberg's experiment with additional sources of ambiguity (see [Eliaz and Ortoleva \(2015\)](#), [Eichberger et al. \(2015\)](#)). To the best of our knowledge, our portfolio configuration (two lotteries plus two ambiguity sources over probabilities) has not been developed in the ambiguity literature.

To achieve our objective, we use the smooth ambiguity model axiomatised by [Klibanoff et al. \(2005\)](#)². This model captures the idea that mean-preserving spreads in probabilities reduce the welfare of ambiguity-averse agents. Also, it allows to separate the effect of ambiguity aversion from that of risk aversion and to distinguish between the ambiguity and the attitude towards ambiguity of the DM. The KMM model has been widely used in the ambiguity literature, when [Jewitt and Mukerji \(2011\)](#) use it to order ambiguous acts, [Berger \(2011\)](#) quantifies the effect ambiguity has on the welfare of economic agents. Application in insurance can be found in [Gollier \(2014\)](#) where the authors determine the optimal insurance contract under ambiguous distribution of losses. [Snow \(2010\)](#) in turn, uses the smooth ambiguity to study the value of information that resolves risk and/or ambiguity. The interested reader can also refer to [Osaki and Schlesinger \(2015\)](#), [Gierlinger and Gollier \(2015\)](#), [Elabed and Carter \(2015\)](#).

In order to test for robustness of our results, two other ambiguity models have been tested, i.e., the neo-additive ambiguity model developed by [Chateauneuf et al. \(2007\)](#)³ and the contraction

1. In this paper we use the terms uncertainty and ambiguity equivalently.

2. Noted here after KMM or called the smooth ambiguity.

3. Used in [Eichberger et al. \(2012\)](#), [Guo et al. \(2013\)](#), [Groneck et al. \(2016\)](#).

model for aversion to imprecise information developed by Gajdos et al. (2007)⁴. In both cases, the welfare of the ambiguity neutral DM is identical to the one of the smooth ambiguity, this leads to the same results whatever the model used.

We consider in this paper two sources of ambiguity expressed through zero-mean random variables, each one impacting the probability of bad state in some binary lotteries. Ambiguity here is taking the form of a second order prior distribution over the set of subjective first order distributions of outcomes. In that sense, the presence of ambiguity makes the probability of any outcome occurrence no longer unique, but consisting of a set of probabilities, each one being associated with a given probability reflecting the DM's prior beliefs. That is, the ambiguous probabilities are written as the sum of the deterministic (constant) probabilities plus the zero-mean random variables. The partial or total risk reduction of the risk is expressed through the passage from the entire probabilities to a portion of them using a multiplicative factor between 0 and 1.

The paper asks the following question : what happens to the WTP if the probabilities are ambiguous but the DM is ambiguity neutral?

One might think that if the DM is ambiguity neutral he would not pay more to reduce the risk in comparison with the case without ambiguity. This paper shows that in certain cases, the presence of ambiguity over probabilities changes the WTP to reduce the risk of an ambiguity neutral DM. We prove this in two steps, first we show that in presence of ambiguity over probabilities, the DM's welfare is equal to his welfare level without ambiguity plus a term called *pure interaction effect*. This effect is composed of a risk effect depending on the utility function and an ambiguity effect equal to the covariance between the ambiguity sources. As a result, the ambiguity modifies the welfare level of all ambiguity-neutral and risk-averse DM when the pure interaction effect is different from zero. Second, we compare the WTP to benefit from a total or a partial risk reduction in presence of ambiguity with the WTP in the case without ambiguity. We show that in case of a total risk reduction, the difference between the WTP's depends only on the pure interaction effect. This allows us to deduce easily when the WTP in case of ambiguity is equal, greater or lesser than the WTP in the case without ambiguity. The case of partial risk reduction is more complex to treat as the difference between the WTP's depends on what we have called a *complete interaction effect*. This effect is composed of the pure interaction effect plus a second term. In this case, more assumptions are needed to deduce the sign of the difference between the WTP's.

The case of ambiguity over probabilities can find an application in credit risk management, particularly when it comes to a new market (new types of borrowers) for which there are not enough historical statistics of default events to enable proper statistical modelling. Technically this can be considered as a data quality or missing data problem due to right censoring (limited observation time). Indeed, considering a single loan portfolio, the bad state can be associated to the payment default of the obligor⁵ where the good state can be associated to the case of normal payment of interests and principal. The default probability (PD) suffers from uncertainty as there is not sufficient default observations to build a robust statistical model. Considering now two loans with possible dependence between the borrowers (same business sector for example) brings us to the case of two lotteries and two ambiguity sources that is of interest in this paper.

This paper is organized as follows. Section 4.2 describes the benchmark model where the expected utility with a two lotteries portfolio is expressed without ambiguity, stochastic and *Ekern's* dominance are presented and the WTP to reduce risk without ambiguity is defined.

4. Used in Treich (2010).

5. From the bank's perspective, the client can also be called borrower or counterparty.

Section 4.3 introduces ambiguity over probabilities and shows that whatever the chosen ambiguity model, the ambiguity neutral DM welfare is the same. Sections 4.4 points out the interaction effect between risk and ambiguity and shows that the introduction of ambiguity modifies the welfare level of all ambiguity-neutral and risk-averse DM when ambiguity and risk interact. Section 4.5 derives conditions to rank between the WTP for risk reduction in presence of ambiguity and in absence of it. Section 4.6 concludes the paper.

4.2 The benchmark model

Consider a decision-maker (DM) with a differentiable utility function u and an initial wealth level w . We denote as u' , u'' and u''' the first derivative, the second derivative, and the third derivative of the utility function u . More generally, we write $u^{(n)}$ for the n^{th} derivative of $u \forall n \geq 1$; the notations u' , u'' , and u''' and $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, and $u^{(3)}$, respectively, will be used interchangeably. As usually the DM is assumed to be non-satiated and risk-averse, i.e., u is non-decreasing and concave (u is such that $u''(x) < 0 < u'(x) \forall x$ denoted as $u'' < 0 < u'$ in what follows).

The DM faces two independent binary risks, risk 1 and risk 2, respectively modelled by the following lotteries L_1 and L_2 :

$$L_1 = [X_1, Y_1; p_1, 1 - p_1] \text{ and } L_2 = [X_2, Y_2; p_2, 1 - p_2]$$

where X_1, Y_1, X_2, Y_2 are mutually independent random variables.

For each risk L_i ($i = 1, 2$), the DM faces with probability p_i a “bad” state of nature, modelled by the random variable X_i , and faces a better state with probability $(1 - p_i)$ modelled by the random variable Y_i . It is common to represent an uncertain economic environment into a two state problem : economic contraction versus expansion, borrower’s default versus no default, asset value decrease versus increase, etc. If we consider the lotteries L_1 and L_2 as two loan returns in a banking book, the probability p_i ($i = 1, 2$) can be seen as the default probability, commonly denoted PD_i in the financial and actuarial literature. X_i (resp Y_i) is associated with the case of borrower’s default (respectively no default). X_i and Y_i are stochastic as X_i can depend on a stochastic recovery rate and Y_i can depend on a stochastic rate (EURIBOR for example). If we consider two portfolios, each one invested on a specific industrial sector, lotteries L_1 and L_2 can be seen as investment returns coming from these portfolios. X_i (respectively Y_i) is the stochastic return in the case of contraction (expansion) that occurs with probability p_i (with probability $1 - p_i$) in the activity of the sector.

Assuming that Y_i models a better state of nature than X_i means that the DM prefers to face the risk Y_i than to face the risk X_i . Using the expected utility model, this assertion writes $\mathbb{E}[u(w + Y_i)] \geq \mathbb{E}[u(w + X_i)]$ for all w . In other words, the context X_i is riskier than the context Y_i , and then the DM prefers to be confronted to Y_i than to X_i . To model changes in risk, we use the concept of stochastic dominance as it is usually done in economic literature. Stochastic dominance establishes a partial ordering of probability distributions. Consider two random variables X and Y valued in some interval $[z_1, z_2]$ of the real line, with respective cumulative distribution functions F and G . Starting from $F_1 = F$ and $G_1 = G$, define iteratively for $z \in [z_1, z_2]$

$$F_{k+1}(z) = \int_{z_1}^z F_k(t) dt \text{ and } G_{k+1}(z) = \int_{z_1}^z G_k(t) dt$$

for $k = 1, 2, \dots$. Then, X is said to be dominated by Y via n^{th} -order stochastic dominance

$(X \preceq_n Y)$ ⁶ if $G_n(z) \leq F_n(z)$ for all z , and if $G_k(z_2) \leq F_k(z_2)$ for $k = 1, 2, \dots, n-1$. When the first $n-1$ moments of X and Y are equal, n^{th} -order stochastic dominance coincides with Ekern dominance of order n ($X \preceq_{\text{Ekern-}n} Y$). The concept of Ekern's dominance is very often used in risk theory. As an example, the notion of *mean-preserving increase in risk* introduced by Rothschild and Stiglitz (1970) corresponds to Ekern's dominance of order 2 ($X \preceq_2 Y$ with $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$). Similarly, the notion of *increase in downside risk* introduced by Menezes et al. (1980) corresponds to Ekern's dominance of order 3 ($X \preceq_3 Y$ with $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ and $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$). We refer the reader to Shaked and Shanthikumar (2007) for more details about stochastic orders.

More generally, considering two stochastic dominance orders s_1 and s_2 such that $X_1 \preceq_{s_1} Y_1$ and $X_2 \preceq_{s_2} Y_2$, following Ingersoll (1987)⁷, the inequality $\mathbb{E}[u(w + Y_i)] \geq \mathbb{E}[u(w + X_i)]$ for $i = 1, 2$ holds for any utility function u such that $u' > 0$, $u'' < 0$ and $(-1)^{k+1}u^{(k)} > 0$ for all $k = 1$ to $\max\{s_1, s_2\}$. Note that $(-1)^{k+1}u^{(k)} > 0$ for all $k = 1$ to $\max\{s_1, s_2\}$ means that all odd derivatives of u are positive and all even derivatives of u are negative, i.e., derivatives of degrees 1 to $\max\{s_1, s_2\}$ alternate in sign. Following Brockett and Golden (1987) and Caballé and Pomansky (1996), a DM with such a utility function is said to be *Mixed Risk Averse (MRA)* from 1 to $\max\{s_1, s_2\}$. Note that this property is satisfied by the utility functions most commonly used in mathematical economics including all the completely monotone utility functions such as the logarithmic, exponential and power utility functions.

As lotteries L_1 and L_2 are independent, the DM expected utility (expected utility of the aggregated risk $L_1 + L_2$), denoted by $V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\})$ ⁸, writes as

$$\begin{aligned} V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) &:= \mathbb{E}[u(w + L_1 + L_2)] \\ &= p_1 p_2 \mathbb{E}[u(w + X_1 + X_2)] + p_1(1 - p_2) \mathbb{E}[u(w + X_1 + Y_2)] \\ &\quad + (1 - p_1)p_2 \mathbb{E}[u(w + Y_1 + X_2)] + (1 - p_1)(1 - p_2) \mathbb{E}[u(w + Y_1 + Y_2)], \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

where $\mathbb{E}[\cdot]$ denotes the expectation operator over the random variables.

Our interest concerns how the DM is willing to pay to benefit from risk reduction. The objective of the paper is to show that the Willingness-to-Pay (WTP) without ambiguity can be different from the one in presence of ambiguity even if the DM is assumed to be neutral toward ambiguity. The goal of the paper is to explain in detail why we obtain this counter-intuitive result.

The use of the WTP as a measure of the value a DM attaches to risk changes is very common in economic literature (see Eeckhoudt et al. (1997), Chiu (2000), Crainich et al. (2015), among others).

We consider partial and total risk reduction. We focus on the decision-maker WTP to benefit from a reduction of risk, i.e., the willingness to pay to benefit from the passage from $p_i > 0$ to αp_i , $\forall i = 1, 2$ with α such that $0 \leq \alpha \leq 1$. Obviously if α is equal to 1, there is no change. If α is equal to 0, the probability p_i becomes 0 and we speak about total risk reduction or risk elimination. If α verifies $0 < \alpha < 1$ then the probability p_i becomes αp_i which is strictly positive and smaller than p_i . In this case we speak about partial risk reduction.

6. X is also said to be smaller than Y , or X_i precedes Y_i via n^{th} -order stochastic dominance.

7. Lemma (Ingersoll (1987)) : for all X and Y such that $X \preceq_n Y$, then $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ for any function f such that $(-1)^{k+1}f^{(k)} > 0 \forall k = 1, \dots, n$.

8. $\{0, 0\}$ in the notation $V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\})$ means that the context is without ambiguity. When we will introduce ambiguity (see section 4.3), $\{0, 0\}$ will be replaced by $\{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2\}$ where random variables $\bar{\epsilon}_1$ and $\bar{\epsilon}_2$ represent uncertainty on probabilities (ambiguity).

We adopt the following notation, $P(w; \alpha)$ is the WTP to benefit from the passage from $p_i > 0$ to αp_i for all $i = 1, 2$ with α such that $0 \leq \alpha \leq 1$ ⁹.

Using notations introduced above, $P(w; \alpha)$ is solution of the following equation :

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) = V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}). \quad (4.2.2)$$

Obviously, when $\alpha = 1$ (no change), the WTP, $P(w; \alpha)$, that writes as $P(w; 1)$ is equal to zero. When $\alpha = 0$ (risk elimination), equation (4.2.2) equivalently rewrites as

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) = V(w - P(w; 0); \{0, 0\}; \{0, 0\}). \quad (4.2.3)$$

Since p_i , $i = 1, 2$ is the probability of bad state occurrence and $\mathbb{E}[u(w + X_i)] < \mathbb{E}[u(w + Y_i)]$ for $i = 1, 2$, the following inequalities hold¹⁰ $\forall w$,

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) < V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) < V(w; \{0, 0\}; \{0, 0\}) . \quad (4.2.4)$$

We obtain thus,

$$P(w; 0) > P(w; \alpha) > P(w; 1) = 0. \quad (4.2.5)$$

The DM is always willing to pay to benefit of risk reductions.

Our objective in this paper is to analyse how WTPs are modified when the probability levels p_1 and p_2 are not known with certainty by the DM. In other words, our objective is to analyse how does the introduction of ambiguity over probabilities p_1 and p_2 impact the decisions of an ambiguity neutral DM.

4.3 Introduction of ambiguity

We assume that probabilities p_1 and p_2 are no longer objectively known, but are ambiguous. This case is usual in the credit risk management if we consider the example of lotteries L_1 and L_2 as two loan returns. Recall that the default probability is associated to the bad state of nature, $p_i \equiv PD_i$ ($i = 1, 2$). The estimation procedure of the PD_i always carries some sources of uncertainty, for example the limited portfolio size (cross section data and historical depth) which may not allow to estimate default probabilities with sufficient precision.

The DM is assumed to form a subjective set of probabilities over the prior distributions of the lotteries L_1 and L_2 . In this sense, risks 1 and 2 are assumed to be ambiguous. The probabilities of the lotteries outcomes are not precisely known. So as to express ambiguity, we consider the random variable $\tilde{\epsilon}_i$, and add it to the probability p_i so that $\tilde{p}_i = p_i + \tilde{\epsilon}_i$, $i = 1, 2$. For the sake of comparison, let's assume that the DM's (subjective) beliefs are such that $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_i] = 0$ which allows us to consider a risk L_i of the same magnitude as in the case without ambiguity ($\mathbb{E}[\tilde{p}_i] = p_i$)¹¹. We assume that realizations of the random variable $\tilde{p}_i = p_i + \tilde{\epsilon}_i$ belong to $[0, 1]$, i.e., that the support of $\tilde{\epsilon}_i$, $[\underline{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_i]$, is such that $0 \leq p_i + \epsilon_i \leq 1$ for all ϵ_i (i.e., $\underline{\epsilon}_i = -p_i$ and $\bar{\epsilon}_i = 1 - p_i$).

We moreover assume that the random variables X_i, Y_i , $i = 1, 2$ are mutually independent and also independent from $\tilde{\epsilon}_i$, $i = 1, 2$. Let us denote by $\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$ the conditional expected

9. Note that considering the change of p_1 only (with p_2 unchanged) or the change of p_2 only (with p_1 unchanged) provides similar results that is why we don't develop these cases in the paper.

10. In other words, the function $V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\})$ is decreasing with $\alpha \in [0, 1]$.

11. Snow (2010) interprets this condition as requiring that the DM ambiguous beliefs are objectively unbiased.

utility of the risky wealth given $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$, so that

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) &:= \mathbb{E}[u(w + L_1 + L_2) \mid \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2] \\ &= \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \mathbb{E}[u(w + X_1 + X_2)] + \tilde{p}_1 (1 - \tilde{p}_2) \mathbb{E}[u(w + X_1 + Y_2)] \\ &\quad + (1 - \tilde{p}_1) \tilde{p}_2 \mathbb{E}[u(w + Y_1 + X_2)] + (1 - \tilde{p}_1)(1 - \tilde{p}_2) \mathbb{E}[u(w + Y_1 + Y_2)]. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

With our notations, for a given level of risk, $\{p_1, p_2\}$, and a given level of ambiguity, $\{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}$, the DM welfare writes as $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$. It can be evaluated with different models as described below.

4.3.1 The smooth ambiguity model

According to the smooth ambiguity model of [Klibanoff et al. \(2005\)](#), the DM's welfare is defined as follows

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = \Phi^{-1}\left(\mathbb{E}[\Phi\{\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\}]\right), \tag{4.3.2}$$

where the function Φ captures the attitude towards ambiguity ($\Phi' > 0$). If Φ is everywhere concave ($\Phi'' < 0$) then the DM is (uniformly) ambiguity averse. If Φ is everywhere convex ($\Phi'' > 0$) then the DM is (uniformly) ambiguity seeking. If Φ is linear ($\Phi'' = 0$), the DM is ambiguity neutral.

In this paper, we assume that the DM is ambiguity neutral. Intuition suggests that the introduction of ambiguity would not modify the welfare for such a DM. Indeed, when the DM faces one risk and if Φ is linear, the smooth ambiguity model is equivalent to subjective expected utility. In our framework, i.e., with two risks, if only one risk p_i is ambiguous and if Φ is linear, the smooth ambiguity model is equivalent to subjective expected utility, then the DM behaves according to equation 4.2.1 with $p_i = \mathbb{E}[\tilde{p}_i]$.

The originality of this work is to assume that both risks 1 and 2 are ambiguous, contrary to what intuition suggests, the presence of ambiguity can modify the welfare of an ambiguity neutral DM. To obtain this result, we (re)write the welfare under ambiguity for an ambiguity neutral DM as follows,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\left(\mathbb{E}[\Phi\{\mathcal{U}(w, p_1, ; p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\}]\right) &= \Phi^{-1}\left(\Phi(\mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)])\right), \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)], \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

we obtain then,

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)]. \tag{4.3.4}$$

4.3.2 Neo-additive preferences

The empirical literature gives no clear answer which ambiguity model best describes people's preferences. While the results in [Cubitt et al. \(2014\)](#) are consistent with the smooth ambiguity model, [Baillon and Bleichrodt \(2015\)](#) and [Chew et al. \(2017\)](#) observe that models like Choquet expected utility ([Schmeidler \(1989\)](#)) and α -maxmin ([Ghirardato et al. \(2004\)](#)) could better explain their data. In this Section, we explore the robustness of our results under the neo-additive model of [Chateauneuf et al. \(2007\)](#). Neo-additive preferences are a special case of Choquet expected utility and they also have an interpretation in terms of α -maxmin (see for instance [Baillon and Bleichrodt \(2015\)](#) for details). Under neo-additive preferences, the DM's

evaluation writes as follows

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = (1 - a)\mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)] + \frac{a - b}{2} \max[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)] + \frac{a + b}{2} \min[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)], \quad (4.3.5)$$

such that,

$$\max[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)] = V(w; \{p_1 + \underline{\epsilon}_1, p_2 + \underline{\epsilon}_2\}; \{0, 0\})$$

and

$$\min[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)] = V(w; \{p_1 + \overline{\epsilon}_1, p_2 + \overline{\epsilon}_2\}; \{0, 0\})$$

for an ambiguity neutral DM ¹².

In equation (4.3.5), $a \in [0, 1]$ and $b \in [-a, a]$. A neo-additive DM gives weight $(1 - a)$ to the expected utility, weight $\frac{a-b}{2}$ to the maximum (expected) utility that he can obtain and weight $\frac{a+b}{2}$ to the minimum (expected) utility that he can obtain. Baillon (2017) shows that his model-free definition of ambiguity aversion, which is equivalent to $\Phi'' < 0$ under the smooth ambiguity model, is equivalent to $b > 0$ under neo-additive preferences. His definition of ambiguity prudence, which is equivalent to $\Phi''' > 0$ under the smooth ambiguity model, is equivalent to $a > 0$ under neo-additive preferences. The case $a = b = 0$ is equivalent to $\Phi'' = 0$, i.e, the ambiguity neutrality. Hence, neo-additive preferences of an ambiguity neutral DM provides

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)]. \quad (4.3.6)$$

The welfare of an ambiguity neutral DM has consequently the same expression as the one with the smooth ambiguity model.

4.3.3 Imprecision aversion

The Klibanoff et al. (2005) theory of ambiguity aversion that encompasses some existing ambiguity theories, introduces a measure of ambiguity aversion, and achieves a separation between ambiguity and ambiguity attitude. The Gajdos et al. (2007) theory of ambiguity also shares these fine properties, but is based on another axiomatics. According to this model, the DM's evaluation of $\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$ is equal to :

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = a\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \overline{\epsilon}_1, \overline{\epsilon}_2) + (1 - a)\mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)], \quad (4.3.7)$$

where $\overline{\epsilon}_i$ represents the worst realization in terms of welfare of $\tilde{\epsilon}_i \forall i = 1, 2$ (i.e., $p_i + \overline{\epsilon}_i$ is the highest probability to face the bad state of nature X_i).

The parameter a is the parameter of ambiguity aversion or *imprecision aversion*, a such that $0 < a \leq 1$ models ambiguity aversion while $a = 0$ models ambiguity neutrality. This framework, already suggested by Ellsberg ¹³, thus considers a linear combination between the expected utility and the minimum of expected utility. In this paper, as the DM is assumed ambiguity neutral, we obtain :

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)]. \quad (4.3.8)$$

12. Recall that $\tilde{\epsilon}_i \in [\underline{\epsilon}_i, \overline{\epsilon}_i]$, for $i = 1, 2$.

13. Ellsberg (1961)

To sum up, whatever the considered model, the welfare of an ambiguity neutral DM has the same expression, $\mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)]$ that can be developed and rewritten as (see Appendix C.1 for demonstration)

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \Delta U(w, X, Y). \quad (4.3.9)$$

with $\Delta U(w, X, Y) = \mathbb{E}[u(w+X_1+X_2)] - \mathbb{E}[u(w+Y_1+X_2)] - \mathbb{E}[u(w+X_1+Y_2)] + \mathbb{E}[u(w+Y_1+Y_2)]$.

This expression shows that the introduction of ambiguity can modify the DM welfare in comparison to the case without ambiguity. Ambiguity will modify the DM's welfare if the term $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \Delta U(w, X, Y)$ is different to zero.

4.4 Interaction between risk and ambiguity

Equation (4.3.9) equivalently rewrites as,

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) \quad (4.4.1)$$

since $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_i] = 0$ for $i = 1, 2$ implies $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] = \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$.

The DM's welfare is equal to his welfare level without ambiguity, $V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\})$, plus a term, $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y)$, modelling the interaction between risk and ambiguity. This term can be decomposed in two parts : a first term, $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$, capturing the *ambiguity effect* and a second term, $\Delta U(w, X, Y)$, capturing the *risk effect*.

The interaction effect, $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y)$, is equal to zero when ambiguity and risk do not interact and is different to zero otherwise. A positive interaction between risk and ambiguity ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) > 0$) increases the DM welfare comparing to the case without ambiguity while a negative interaction ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) < 0$) decreases it.

We obtain the following result.

Proposition 4.1. *The introduction of ambiguity does not modify the welfare level of all ambiguity-neutral and risk-averse DM when ambiguity and risk do not interact ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) = 0$), i.e., when one of the following conditions is true :*

- (i) $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are independent,
- (ii) $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are not independent but are such that $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) = 0$ (not correlated),
- (iii) $\Delta U(w, X, Y) = 0$.

In items (i) and (ii) ambiguity and risk do not interact because the ambiguity effect is equal to zero. In item (iii), ambiguity and risk do not interact because the risk effect is equal to zero.

The result of item (i) is intuitive. As $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are independent, $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2]$ is equal to $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1] \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_2]$ which is equal to zero as $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are zero-mean random variables. The result of item (ii) is more interesting. The ambiguity effect can be equal to zero when $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are not independent. Cases where $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) = 0$ can be illustrated by non linear dependence between $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ as shown in the examples 1 and 2.

Example 1. Let's consider $\tilde{\epsilon}_1 \in \{-0.1, 0, 0.1\}$ and $\tilde{\epsilon}_2 \in \{-0.3, 0, 0.3\}$ and the following joint distribution function $P_{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2}(x_1, x_2)$ (realizations of $\tilde{\epsilon}_1$ are written in the first column and realizations of $\tilde{\epsilon}_2$ are written in the first line)

$\tilde{\epsilon}_1/\tilde{\epsilon}_2$	-0.3	0	0.3
-0.1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
0.1	0	$\frac{1}{3}$	0

It is easy to verify that $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1] = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_2] = 0$ and $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1\tilde{\epsilon}_2] = 0$, which means that $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) = 0$. In the same time, $P_{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2}(0, 0) \neq f_{\tilde{\epsilon}_1}(0) \cdot f_{\tilde{\epsilon}_2}(0) = \frac{2}{9}$ that shows that $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are not independent.

Example 2. Let's define $\tilde{\epsilon}_1 \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ with a_1 and $b_1 \in [-0.5, 0.5]$ and such that $a_1 = b_1$. We verify that $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1] = 0$. Let's define $\tilde{\epsilon}_2$ such as $\tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_1 \cdot \tilde{\epsilon}$, with $\tilde{\epsilon}_1 \perp \tilde{\epsilon}$ and where $\tilde{\epsilon}$ is a zero-mean random variable such as $\tilde{\epsilon} = \{-1, 1\}$ with probabilities $\{1/2, 1/2\}$. By construction, $\tilde{\epsilon}_2$ is also a zero-mean random variable. Indeed, $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_2] = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1] \times \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] = 0$. By definition, $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are not independent. Nevertheless, $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) = 0$. Indeed $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1\tilde{\epsilon}_2] = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1^2 \times \tilde{\epsilon}] = \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1^2] \times \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] = 0$.

In item (iii), the interaction effect is equal to zero because the risk effect, $\Delta U(w, X, Y)$, is equal to zero, whatever the dependence level between $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$. Note that the sign of $\Delta U(w, X, Y)$ is given by the sign of the $(s_1 + s_2)^{th}$ order derivative of the utility function u . In this paper, we assumed that u is mixed risk averse from 1 to $\max\{s_1, s_2\}$, i.e., that $(-1)^{(k+1)}u^{(k)} > 0$ for all $k = 1, \dots, s_M$ with $s_M = \max\{s_1, s_2\}$. It is then possible that $(-1)^{(k+1)}u^{(k)} = 0$ for $k > s_M$, for example for $k = s_1 + s_2$. To illustrate this point, let's consider the following examples.

Example 3. Assume that X_1, Y_1 and Y_2 are degenerated variables such as $X_1 = -a, Y_1 = -b$ and $Y_2 = 0$ where a and b are positive constants such that $a > b$. Assume that X_2 is a zero-mean random variable. In this example, we have $X_1 \preceq_{Ekernel_1} Y_1$ and $X_2 \preceq_{Ekernel_2} Y_2$ and thus $s_M = 2$. Following our assumption, u is assumed to be MRA from 1 to 2, which means that $u' > 0$ and $u'' < 0$ which is verified by all risk-averse DM. In this example, the risk effect, $\Delta U(w, X, Y)$, has the following expression,

$$\Delta U(w, X, Y) = \mathbb{E}[u(w - a + X_2)] - \mathbb{E}[u(w - a)] - \mathbb{E}[u(w - b + X_2)] + u(w - b).$$

It turns that $\Delta U(w, X, Y) < 0$ if $u^{(3)} > 0$, i.e., if the DM is prudent, and $\Delta U(w, X, Y) = 0$ if $u^{(3)} = 0$. The last case occurs if the DM's utility function is a polynomial function of order 2.

Example 4. Assume now that X_1 and X_2 are zero-mean random variables and Y_1 and Y_2 are degenerated variables such as $Y_1 = Y_2 = 0$. In this case, $X_1 \preceq_{Ekernel_2} Y_1$ and $X_2 \preceq_{Ekernel_2} Y_2$ and $s_M = 2$. By assumption, u is assumed to be MRA from 1 to 2. Here, the risk effect, $\Delta U(w, X, Y)$, has the following expression :

$$\Delta U(w, X, Y) = \mathbb{E}[u(w + X_1 + X_2)] - \mathbb{E}[u(w + X_1)] - \mathbb{E}[u(w + X_2)] + u(w).$$

$\Delta U(w, X, Y)$ is negative if $u^{(4)} < 0$, i.e., if the DM is temperant, and is equal to zero if $u^{(4)} = 0$.

We observe that this last case occurs if the DM's utility function is a polynomial function of order 2 or 3. Indeed, for such functions, $u^{(4)} = 0$, this implies that $\Delta U(w, X, Y) = 0$.

Note that if all random variables X_1, X_2, Y_1 and Y_2 are degenerated random variables such that

$$Y_1 = Y_2 = 0, X_1 = -a \text{ and } X_2 = -b \text{ with } a > b > 0,$$

then, $s_1 = s_2 = 1$ and $\Delta U(w, X, Y)$ will be negative for all risk-averse DM. In this case, the risk effect will always be different from zero. We derive the following corollaries.

Corollary 1.

The risk effect is equal to zero ($\Delta U(w, X, Y) = 0$) for all ambiguity-neutral and risk-averse DM with a utility function that writes as a polynomial function of order s_M with $s_M = \max\{s_1, s_2\}$ and such that $s_M \geq 2$.

With polynomial functions, the derivative of order $(s_M + 1)$ is equal to zero that implies that all higher order derivatives are equal to zero too. The term $\Delta U(w, X, Y)$ is then nil.

Corollary 2.

The risk effect is negative ($\Delta U(w, X, Y) < 0$) for all ambiguity-neutral and risk-averse DM with a CARA (Constant Absolute Risk Aversion) or CRRA (Constant Relative Risk Aversion) utility function.

If the DM's utility function u is CARA, it writes as the exponential utility function : $u(x) = -\frac{1}{\gamma} \exp^{-\gamma x}$ with $\gamma > 0$. If u is CRRA, it writes as the power utility function : $u(x) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma}$ with $\gamma \neq 1$ and $\gamma > 0$. These utility functions are MRA without order limitation, i.e., they verify $(-1)^{(n+1)} u^{(n)} > 0$ for all $n \geq 1$. Consequently, $\Delta U(w, X, Y)$ will always be negative.

To sum up, when the risk effect is different to zero, it is negative. Consequently the sign of the interaction effect is the opposite of the one of the ambiguity effect. We obtain the following result.

Proposition 4.2. *The introduction of ambiguity modifies the welfare level of all ambiguity-neutral and risk-averse DM when ambiguity and risk interact ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) \neq 0$). It increases the welfare level if the ambiguity effect is negative ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) < 0$) and decreases it if the ambiguity effect is positive ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) > 0$).*

The intuition of the result can be explained as follows. When two random variables capturing ambiguity, $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$, are dependent, the introduction of ambiguity is equivalent to the introduction of one source of ambiguity but captured by a non-zero mean random variable. Indeed, let's consider the KMM model when the DM faces one risk defined as follows : bad state of nature (utility u^B) with probability $p + \tilde{\epsilon}$, and good state of nature (utility u^G with $u^B < u^G$) with probability $1 - (p + \tilde{\epsilon})$.

The DM's welfare writes as

$$\Phi^{-1}\left(\mathbb{E}[\Phi\{(1 - (p + \tilde{\epsilon}))u^G + (p + \tilde{\epsilon})u^B\}]\right) = (1 - p)u^G + pu^B + \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}](u^B - u^G), \quad (4.4.2)$$

since the DM is ambiguity neutral.

The introduction of ambiguity does not impact the welfare level comparing to the case without ambiguity when $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] = 0$. This can be seen as the right hand side of the equation (4.4.2) is equal to the welfare without ambiguity when $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] = 0$.

When $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] > 0$, it is a bad news for the ambiguity neutral DM since the probability associated

to the bad state of nature is bigger ($p + \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] > p$). Consequently, as suggests the intuition, the introduction of ambiguity decreases his welfare level (since $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}](u^B - u^G) < 0$).

Symmetrically, when $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] < 0$, it is a good news for the ambiguity neutral DM since the probability associated to the bad state of nature is smaller ($p + \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] < p$). Thus, as suggests the intuition, the introduction of ambiguity increases his welfare level (since $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}](u^B - u^G) > 0$).

In our case, the sign of $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$ plays the same role than the sign of $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}]$. When $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are positively dependent ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) > 0$), the interaction between the two sources of ambiguity can be interpreted as a bad news for the DM and decreases his welfare level. On contrary, when $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ are negatively dependent ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) < 0$), the interaction between $\tilde{\epsilon}_1$ and $\tilde{\epsilon}_2$ can be interpreted as a good news for the DM and increases his welfare level.

The previous analysis of the interaction effect between ambiguity and risk explains why the WTP to benefit from risk reduction can be different in presence of ambiguity. The next section presents a detailed discussion.

4.5 Risk reduction and ambiguity

The previous section shows and explains why the presence of ambiguity can increase or decrease the DM's welfare via the sign of the interaction effect between risk and ambiguity. This result will be helpful to show and explain when and how the presence of ambiguity can modify the WTP to benefit of risk reduction.

Let's denote $P^a(w; \alpha)$ the WTP to benefit from the passage from $p_i + \tilde{\epsilon}_i$ to $\alpha(p_i + \tilde{\epsilon}_i)$ for all $i = 1, 2$ with α such that $0 \leq \alpha \leq 1$. When $\alpha = 0$, the probability to face the bad state of nature initially equal to $p_i + \tilde{\epsilon}_i$ becomes 0. In other words, $P^a(w; 0)$ is the WTP to eliminate ambiguity and risk. When α is such that $0 < \alpha < 1$, $P^a(w; \alpha)$ is the WTP, i.e., the maximum amount of money the DM is willing to pay to reduce ambiguity (passage from $\tilde{\epsilon}_i$ to $\alpha\tilde{\epsilon}_i$) and to reduce risk (passage from p_i to αp_i) simultaneously. We will speak about uncertainty elimination when $\alpha = 0$ and about uncertainty reduction when $0 < \alpha < 1$.

The WTP, $P^a(w; \alpha)$, is solution of the following equation :

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}). \quad (4.5.1)$$

When $\alpha = 1$, there is no change and thus $P^a(w; 1) = 0$. When $\alpha \neq 1$, $P^a(w; \alpha)$ can be positive, negative or nil because of the interaction effect between risk and ambiguity. Its comparison to $P(w; \alpha)$ is thus not trivial. Some algebraic calculus (see Appendix C.2 for calculation details) provides the detailed expression of $V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$, which is

$$V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) + \alpha^2 \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y), \quad (4.5.2)$$

that is obviously equivalent to equation (4.3.9) when $\alpha = 1$.

Using equations (4.2.2), (4.4.1), (4.5.1) and (4.5.2), we obtain the equation linking the WTP without ambiguity, $P(w; \alpha)$, and the WTP with ambiguity, $P^a(w; \alpha)$ (see Appendix C.3 for the demonstration) :

$$\begin{aligned} & V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) - V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) \\ &= \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \left(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) \right). \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

4.5.1 Uncertainty elimination ($\alpha = 0$)

When $\alpha = 0$, equation (4.5.3) rewrites as

$$V(w - P^a(w; 0); \{0, 0\}; \{0, 0\}) - V(w - P(w; 0); \{0, 0\}; \{0, 0\}) = \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y). \quad (4.5.4)$$

The comparison between $P(w; 0)$ and $P^a(w; 0)$ is then entirely explained by the sign of the interaction effect. As the function $f(x) = V(x; \{0, 0\}; \{0, 0\})$ increases with x , we easily obtain the following proposition.

Proposition 4.3. *The ambiguity neutral and risk averse decision maker's WTP to benefit from uncertainty elimination ($\alpha = 0$),*

- (i) *is equal to the WTP to benefit from risk elimination ($P^a(w; 0) = P(w; 0)$) when risk and ambiguity do not interact ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y) = 0$),*
- (ii) *is greater than the WTP to benefit from risk elimination ($P^a(w; 0) > P(w; 0)$) when risk and ambiguity interact negatively ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y) < 0$),*
- (iii) *is smaller than the WTP to benefit from risk elimination ($P^a(w; 0) < P(w; 0)$) when risk and ambiguity interact positively ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y) > 0$).*

These results are quite intuitive. As we have shown in the previous section, for some given risk levels $\{p_1, p_2\}$, when ambiguity and risk do not interact, the DM's welfare with ambiguity is the same as the one without ambiguity.

When ambiguity and risk interact negatively, the DM's welfare with ambiguity is smaller than the DM's welfare without ambiguity. Formally $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) < V(w; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\})$ and thus the DM is willing to pay more in presence of ambiguity than in absence of it : $P^a(w; 0) > P(w; 0)$. Note that $P^a(w; 0) > 0$ since $P(w; 0) > 0$.

For a given risk level $\{p_1, p_2\}$, when ambiguity and risk interact positively, the DM's welfare with ambiguity is greater than the DM's welfare without ambiguity, i.e., $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) > V(w; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\})$.

The DM is thus willing to pay less in presence of ambiguity than in absence of it : $P^a(w; 0) < P(w; 0)$. Note that in this case $P^a(w; 0)$ can be negative, that means that the DM asks a compensation. This result can be explained as follows.

$P^a(w; 0)$ is the WTP to simultaneously replace $\{p_1, p_2\}$ by $\{0, 0\}$ and to replace $\{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_1\}$ by $\{0, 0\}$. Consider that this change is sequential. Let's note P_ϵ^a the amount of money the DM is ready to pay to replace $\{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_1\}$ by $\{0, 0\}$ given the risk level unchanged. P_ϵ^a is solution of :

$$V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P_\epsilon^a; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\}). \quad (4.5.5)$$

Let's wonder now on the amount of money the DM is ready to pay to replace $\{p_1, p_2\}$ by $\{0, 0\}$ knowing that $\{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_1\}$ have been eliminated. This amount of money, $P_{p/\epsilon}^a$ verifies the following equation :

$$V(w - P_\epsilon^a; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\}) = V(w - P_\epsilon^a - P_{p/\epsilon}^a; \{0, 0\}, \{0, 0\}). \quad (4.5.6)$$

Having in mind that $P^a(w; 0)$ verifies

$$V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P^a(w; 0); \{0, 0\}, \{0, 0\}), \quad (4.5.7)$$

and using (4.5.6) and (4.5.7), we obtain

$$P^a(w; 0) = P_\epsilon^a + P_{p/\epsilon}^a. \quad (4.5.8)$$

We know that $P_\epsilon^a < 0$ because $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) > V(w; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\})$ since we examine the case where risk and ambiguity interact positively¹⁴.

We also know that $P_{p/\epsilon}^a > 0$ because $V(w; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\}) < V(w; \{0, 0\}, \{0, 0\})$ for all w since $V(w; \{0, 0\}, \{0, 0\})$ is the welfare of the DM for facing only good states of nature. As $P_\epsilon^a < 0$ and $P_{p/\epsilon}^a > 0$, $P^a(w; 0)$ can be positive, negative or nil (if P_ϵ^a and $P_{p/\epsilon}^a$ are equal in absolute value).

4.5.2 Uncertainty reduction ($0 < \alpha < 1$)

When α is different to zero, looking at equation (4.5.3), we easily understand that the comparison between $P^a(w; \alpha)$ and $P(w; \alpha)$ is more complicated. Indeed this comparison is determined by the sign of a more *complete interaction effect* that is equal to the sum of two terms : the pure interaction effect, $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y)$, plus a second term, $-\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\alpha^2\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)$, that depends among others on the level of α and on the sign of $P^a(w; \alpha)$.

If the pure interaction effect is equal to zero then the complete interaction effect is equal to zero too and then $P^a(w; \alpha) = P(w; \alpha)$. This result is very intuitive. To sum up, whatever the reduction level, i.e., for all α such that $0 \leq \alpha < 1$, the introduction of ambiguity does not modify the WTP when risk and ambiguity do not interact.

When risk and ambiguity interact, results are less evident. Determining the sign of the expression $(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y))$ that determines the sign of the complete interaction effect is not trivial. We present the detailed analysis in two parts.

Case where $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) > 0$

Assuming a non-zero interaction between risk and ambiguity and assuming $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) > 0$ is equivalent to consider a negative pure interaction between risk and ambiguity ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y) < 0$). Recall that the DM is ready to pay to benefit from a reduction in risk for a given ambiguity level unchanged, i.e., to benefit the passage from $(\{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ to $(\{\alpha p_1, \alpha p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$. Indeed it is easy to verify that $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) < V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ since $\alpha p_i < p_i$ for $i=1,2$, and recalling that p_i is the probability of facing bad state of nature.

In the same vein, the DM is ready to pay to benefit from the reduction in ambiguity level for a given risk level unchanged, i.e., to benefit of the passage from $(\{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ to $(\{p_1, p_2\}, \{\alpha\tilde{\epsilon}_1, \alpha\tilde{\epsilon}_2\})$. Indeed it is easy to verify that $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) < V(w; \{p_1, p_2\}, \{\alpha\tilde{\epsilon}_1, \alpha\tilde{\epsilon}_2\})$ since the pure interaction effect is negative. The two effects, i.e., reduction in risk and reduction in ambiguity go in the same sense. As a consequence, the DM is ready to pay to benefit from the two reductions : $P^a(w; \alpha) > 0$.

We must now examine the sign of $(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y))$. As the pure interaction effect is different to zero, we know that the function $\Delta U(x)$ increases with x (since $(-1)^{(s_1+s_2+2)}u^{(s_1+s_2+1)} > 0$, i.e., u is MRA).

Consequently $\Delta U(w, X, Y) > \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)$. But as $\Delta U(w, X, Y) < 0$ and $\alpha < 1$,

14. Recall from equation (4.4.1) that $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y)$, as $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w, X, Y) > 0$, then $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) > V(w; \{p_1, p_2\}, \{0, 0\})$.

we obtain the following inequality: $\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) < \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) < 0$. Therefore, we cannot conclude on the comparison between $\alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)$ and $\Delta U(w, X, Y)$ without additional condition.

If α is sufficiently small, i.e., if the reduction is sufficiently high, we obtain that $Sign(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)) = Sign(\Delta U(w, X, Y))$ and then the global reduction effect is analogous as the one of the risk elimination. The threshold level of α , α^* , that provides this result verifies

$$\alpha^* = \left(\frac{\Delta U(w, X, Y)}{\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5.9)$$

Note that it depends on α and the magnitude of $P^a(w; \alpha)$.

For all reduction level α such that ¹⁵ $\alpha < \alpha^*$ that is to say for all sufficiently high reduction level (since the intensity of the reduction increases when α decreases), using the equation (4.5.3) and recalling that

$$\begin{aligned} & Sign\left(V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) - V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\})\right) \\ & = Sign\left(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)\right), \end{aligned}$$

we obtain $P^a(w; \alpha) > P(w; \alpha)$. For all reduction level α such that $\alpha \geq \alpha^*$, we obtain $P^a(w; \alpha) \leq P(w; \alpha)$.

Case where $Cov(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) < 0$

Assuming a non-zero interaction between risk and ambiguity and assuming $Cov(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) < 0$ is equivalent to consider a positive pure interaction between risk and ambiguity ($Cov(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)\Delta U(w) > 0$). As in the previous case, the DM is ready to pay to benefit from a reduction in risk given an ambiguity level unchanged, i.e., to benefit of the passage from $(\{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ to $(\{\alpha p_1, \alpha p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$. Using the notation $P_{p/\epsilon}^a(w; \alpha)$ for the WTP for risk reduction keeping ambiguity unchanged, we write $P_{p/\epsilon}^a(w; \alpha) > 0$.

Contrary to the previous case, here the DM is not ready to pay to benefit from the a reduction in ambiguity given a risk level unchanged, i.e., to benefit of the passage from $(\{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$ to $(\{p_1, p_2\}, \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$. Indeed, because of the positive pure interaction effect, we obtain $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) > V(w; \{p_1, p_2\}, \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$ ¹⁶. Using the notation $P_{\epsilon/p}^a(w; \alpha)$ for the WTP for ambiguity reduction keeping risk unchanged, we write $P_{\epsilon/p}^a(w; \alpha) < 0$.

The two effects, reduction in risk and reduction in ambiguity play in opposite sence. We recall that $P^a(w; \alpha)$ can be decomposed into $P^a(w; \alpha) = P_{\epsilon/p}^a(w; \alpha) + P_{p/\epsilon}^a(w; \alpha)$. with

15. If $\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) < 0$, by recalling that $\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) < 0$ then $\alpha < \left(\frac{\Delta U(w, X, Y)}{\Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)} \right)^{\frac{1}{2}}$.

16. Recall from appendix C.1 that $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + Cov(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w; X, Y)$, in the same vein, we show that $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \alpha^2 Cov(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w; X, Y)$, since $\alpha^2 < 1$ and a positive pure interaction effect, we conclude that $V(w; \{p_1, p_2\}, \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) > V(w; \{p_1, p_2\}, \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$.

$P_{\epsilon/p}^a(w; \alpha) < 0$ as the pure interaction effect is positive and $P_{p/\epsilon}^a(w; \alpha) > 0$.
If the effect reduction in risk dominates the effect reduction in ambiguity, i.e., $P_{p/\epsilon}^a(w; \alpha) > |P_{\epsilon/p}^a(w; \alpha)|$ then the DM is ready to pay, i.e., $P^a(w; \alpha) > 0$.
If the effect reduction in risk is dominated by the effect reduction in ambiguity, i.e., $P_{p/\epsilon}^a(w; \alpha) < |P_{\epsilon/p}^a(w; \alpha)|$ then the DM is not ready to pay, i.e., $P^a(w; \alpha) < 0$.
In the particular case where the magnitude of the two effects is identical, $P^a(w; \alpha) = 0$. In this particular case, $\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) = (1 - \alpha^2) \Delta U(w, X, Y) < 0$ and thus $P^a(w; \alpha) < P(w; \alpha)$.

When $P^a(w; \alpha) > 0$ we obtain opposite results as the ones obtained in the case where $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) > 0$.

Using equation (4.5.3) and recalling that

$$\begin{aligned} & \text{Sign}\left(V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) - V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\})\right) \\ & = -\text{Sign}\left(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y)\right), \end{aligned}$$

we deduce that for all reduction level α such that $\alpha < \alpha^*$, we obtain $P^a(w; \alpha) < P(w; \alpha)$, for all reduction level α such that $\alpha \geq \alpha^*$, we obtain $P^a(w; \alpha) \geq P(w; \alpha)$.

If $P^a(w; \alpha) < 0$ then we directly obtain $P^a(w; \alpha) < P(w; \alpha)$ since $P(w; \alpha) > 0$ ¹⁷.

We can derive the following proposition.

Proposition 4.4. *The ambiguity neutral and risk averse DM's WTP to benefit from uncertainty reduction is equal to the WTP to benefit from risk reduction ($P^a(w; \alpha) = P(w; \alpha)$) when risk and ambiguity are do not interact ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) = 0$). When risk and ambiguity interact ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) \neq 0$), $P^a(w; \alpha)$ and $P(w; \alpha)$ verify the following items,*

- (i) *if the interaction effect is negative ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) < 0$) then,*
 $P^a(w; \alpha) > (<) P(w; \alpha)$ *if α is sufficiently small (high),*
- (ii) *if the interaction effect is positive ($\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y) > 0$) then,*
 - (a) $P^a(w; \alpha) < (>) P(w; \alpha)$ *if α is sufficiently small (high) and if the reduction risk effect dominates the reduction ambiguity effect,*
 - (b) $P^a(w; \alpha) < P(w; \alpha)$ *for all α level if the reduction risk effect is dominated by the reduction ambiguity effect.*

It is worth noting that when α is sufficiently small, i.e., $\alpha \simeq 0$, the second term of the equation for risk reduction (4.5.3) can be approximated only by the pure interaction effect. Indeed, $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \left(\Delta U(w, X, Y) - \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) \right) \simeq \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y)$. In this case, it is expected that the points (i) and (ii) – (a) of the proposition 4.4 corresponding to α small enough should be consistent with some points of the proposition 4.3 that corresponds to $\alpha = 0$. Indeed, it easy to verify that the points (i) and (ii) – (a) of the proposition 4.4 are respectively consistent with the points (ii) and (iii) of the proposition 4.3.

¹⁷. We can easily verify this result as follows. If $P^a(w; \alpha) < 0$ then $\Delta U(w, X, Y) < \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) < \alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) < 0$ and thus $(\alpha^2 \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y) - \Delta U(w, X, Y)) > 0$. We obtain thus (since $\text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) < 0$) $P^a(w; \alpha) < P(w; \alpha)$.

4.6 Conclusion

Considering ambiguity over probabilities of two binary lotteries with outcomes associated to good and bad state of nature, this paper highlights the interaction effect between risk and ambiguity. In our framework, a positive interaction between risk and ambiguity increases the Decision Maker (DM) welfare comparing to the case without ambiguity while a negative interaction decreases it. Based on this result, we compare the Willingness-to-Pay (WTP) that reduces partially or totally the risk in presence of ambiguity with the WTP in absence of ambiguity. We show that the difference between these two WTP's is influenced by ambiguity via the interaction effect even if the DM is ambiguity neutral. In case of total risk reduction, the interaction effect is a *pure interaction effect* composed by the risk effect that depends on the utility function and the ambiguity effect captured by covariance between the ambiguity sources. In case of partial risk reduction, we obtain a *complete interaction effect* composed of the pure interaction effect plus a second term.

With some tractable conditions on the derivatives of the utility function it is easy to study the sign of the risk effect. In the other hand, the ambiguity effect via the covariance between the ambiguity sources presents some interesting (non intuitive) features as it is possible to have dependence between the ambiguity sources but a nil impact on the WTP, this happens for the case of non linear dependence. Thus the sign of the pure interaction effect is easy to deduce whereas the sign of the complete interaction effect is more difficult to study. Indeed, it needs more assumptions as it involves the level of risk reduction, the sign of the covariance between the ambiguity sources and assumptions on which of the effects (risk or ambiguity) dominates the other.

As a conclusion and counter-intuitively, when it is expected for an ambiguity neutral risk averse DM to be not influenced by the ambiguity, this paper shows that the WTP that reduces the risk in the ambiguous case can be different from the WTP in the non ambiguous case.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse de doctorat est partie du constat qu'un portefeuille de crédit est soumis à plusieurs risques qui proviennent principalement de la qualité de crédit de l'emprunteur et de son comportement de tirage et de pré-paiement sur ses lignes de crédit. Il s'avère que les risques observés sont dynamiques et dépendent de facteurs divers, autant micro que macro-économiques. Nous avons eu la volonté de comprendre l'articulation des risques qui sont générés par le comportement de l'emprunteur. Cette compréhension est nécessaire pour avoir une vision précise du risque et donc une gestion efficace de celui-ci dans le présent, mais aussi une vision prospective si les conditions économiques changent, cela pour une gestion pro-active du risque.

Pour traiter cette problématique, nous avons articulé nos recherches autour de trois axes :

1. Appréhender les dynamiques de la première source du risque de crédit, i.e, les changements de notation de crédit et lier celles-ci à des facteurs de risque.
2. Concevoir un modèle de cash-flow qui tient compte de l'évolution des comportements des emprunteurs sous l'influence de leurs environnements micro et macro-économiques. Mesurer ainsi l'incidence de la somme de ces comportements sur les flux futurs du portefeuille de crédit.
3. Réflexion sur la disposition-à-payer d'un décideur neutre à l'ambiguïté pour réduire le risque de défaut mais en présence d'ambiguïté sur les probabilités de défaut.

Conclusion

Dans le chapitre *A comparative study on the estimation of factor migration models*, nous avons présenté le cadre théorique des modèles structurel et intensité ainsi que les méthodes d'estimation des paramètres dans le cas où les facteurs explicatifs sont observables ou latents. Pour le cas du modèle à intensité avec facteurs observables, nous avons proposé une formule fermée pour l'estimateur de la partie *baseline* et un système d'équations non linéaires mais avec une résolution relativement simple pour obtenir les estimateurs des coefficients associés aux facteurs explicatifs. Pour l'estimation des coefficients associés aux facteurs latents, nous avons approché le modèle par un système linéaire gaussien sur lequel un filtre de Kalman est applicable. Le calibrage des paramètres se fait par la maximisation de la vraisemblance du filtre de Kalman.

Nous avons appliqué les résultats théoriques à des données de notation de crédit venant de *Standard and Poor's*. L'estimation des modèles structurel et intensité avec des facteurs de risque observables ou latents, a permis de comparer les quatre modèles sur leur capacité à ajuster les probabilités de transition empiriques et de déterminer la meilleure configuration. Le modèle à intensité avec facteurs observables montre le meilleur ajustement des probabilités de transition empiriques. Cette application a permis aussi de reproduire des faits stylisés cités

dans la littérature et d'en identifier d'autres. A savoir que pour les firmes qui sont bien notées, les migrations de notation de faible amplitude (un degré) sont liées au cycle économique alors qu'en raison du manque d'observations, il est impossible de lier les migrations de fortes amplitudes (plus de deux degrés) au cycle économique. Lorsque les firmes sont mal notées, les dégradations de notation sont négativement corrélées au cycle économique. Enfin, grâce à la maximisation de la vraisemblance du filtre de Kalman sur un système linéaire gaussien nous avons inféré le cycle économique sur la période 2006-2014.

Dans le chapitre *A cash-flow model for the liquidity of a banking book* nous avons proposé un modèle de cash-flow qui reproduit les flux de liquidité d'une ligne de crédit à remboursement in fine. Ce modèle s'appuie sur 4 processus, (i) le processus de migration des notations de crédit, (ii) une chaîne de Markov à trois états qui représente le comportement de l'emprunteur, les trois états étant : aucune action, tirage, pré-paiement, (iii) Un processus de taux de tirage et (iv) un processus de taux de pré-paiement. Nous avons ajouté à ces quatre processus des composantes qui reflètent la réalité d'une ligne de crédit à savoir, les frais d'engagement de la banque qui s'apparentent à une prime de liquidité, le versement d'intérêts variables et enfin la perte en cas de défaut de l'emprunteur. Nous avons utilisé les résultats du deuxième chapitre pour calibrer les deux premiers processus (migration de notations de crédit et comportement de l'emprunteur) alors que pour les deux autres processus nous utilisons le cadre GAMLSS (*Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape*).

Nous avons appliqué notre modèle sur un portefeuille bancaire constitué de lignes de crédit. Les résultats que nous obtenons prouvent l'influence de la notation de crédit, du cycle économique, du taux de recouvrement estimé et du taux d'intérêt court terme sur les taux d'utilisation. Une deuxième application a consisté à utiliser le modèle de cash-flow pour faire des simulations Monte Carlo sur la liquidité du portefeuille bancaire à horizon de 2 ans. Suivant les scénarii économiques donnés par la Réserve Fédérale Américaine FED (central ou stressé), nous obtenons des projections de distributions de cash-flow par ligne de crédit, par notation et par maturité. Des mesures de risque comme le *Cash Flow-at-Risk* et le *Stressed Cash Flow-at-Risk* ont été déduites de ces distributions. Enfin, ce modèle constitue un outil quantitatif pour gérer le risque de liquidité d'un portefeuille bancaire.

Dans le chapitre *Willingness-to-Pay for reducing risk in presence of two ambiguity sources*, nous avons traité la question de l'influence de l'ambiguïté sur la Disposition-à-Payer (DAP) d'un décideur averse au risque et neutre à l'ambiguïté pour réduire le risque du mauvais état de la nature. Pour se faire nous avons constitué un portefeuille de deux loteries binaires et deux sources d'ambiguïté. Nous énonçons quatre résultats qui prouvent (1) que l'ambiguïté influence le bien-être d'un agent alors que celui-ci est neutre à l'ambiguïté. En effet, en présence de deux sources d'ambiguïté, l'utilité espérée d'un décideur neutre à l'ambiguïté s'écrit comme son utilité espérée sans ambiguïté plus un terme d'interaction appelé *effet d'interaction pur* entre le risque et l'ambiguïté. (2) L'effet d'interaction pur peut être positif, négatif ou nul, il est le produit entre l'effet du risque qui dépend de la fonction d'utilité et l'effet de l'ambiguïté qui est égal à la covariance entre les sources d'ambiguïté. En d'autres termes, le bien-être du décideur peut augmenter, diminuer ou rester stable en présence d'ambiguïté sur les probabilités. (3) La DAP du décideur pour une réduction totale du risque en présence d'ambiguïté peut être supérieure, inférieure ou égale à la DAP qui a la même fonction mais en environnement non ambigu. La différence des deux peut être facilement signée car elle possède le même signe que l'effet d'interaction pur. (4) La différence des deux DAP pour une réduction partielle du risque est plus difficile à signer et requiert des hypothèses supplémentaires au delà du signe de l'effet d'interaction pur. Elle fait intervenir le niveau de réduction du risque, le signe de la covariance

entre les sources d'ambiguïté ainsi que des hypothèses sur la domination d'un des deux effets (risque ou ambiguïté) sur l'autre.

Perspectives

Les perspectives de nos travaux sont nombreuses, elles peuvent être basées sur des extensions théoriques de nos résultats ou sur des applications pratiques.

Concernant le chapitre *A comparative study on the estimation of factor migration models*, la propriété markovienne des migrations de notation peut être relaxée pour capter les effets de *rating momentum*. Par ailleurs, de futurs travaux pourraient intégrer de manière explicite les effets de contagion entre les transitions de notations. Par exemple, lorsque la notation d'une entité est fortement dégradée, on peut imaginer un effet direct sur les probabilités de dégradation des autres noms. Dans nos travaux, nous exprimons une corrélation implicite entre les transitions à travers leurs sensibilités aux facteurs communs mais nous avons conscience que dans des situations de tension sur les marchés par exemple, les corrélations augmentent et des effets de contagion apparaissent. Nos modèles n'ont pas intégré explicitement cette composante du risque. Enfin, pour les modèles avec facteurs non observables, l'approximation par un modèle gaussien linéaire n'est pas très satisfaisante (en particulier pour un nombre trop faible de données). Une amélioration consisterait à filtrer les facteurs de risque sans faire d'approximation en partant des intensités de transition directement déduites des observations de transition.

Concernant le chapitre *A cash-flow model for the liquidity of a banking book*, des produits plus complexes que des prêts à remboursement in fine peuvent être modélisés, nous pensons notamment à des prêts avec amortissement contractuel. Un modèle plus réaliste tiendrait compte de la dynamique du portefeuille avec la possibilité d'avoir de nouveaux entrants (*business creation*) mais aussi des actions de mitigation que peuvent entreprendre les gestionnaires de portefeuille pour réduire l'impact de certains risques.

Un modèle de taux de recouvrement pourrait être associé au modèle de cash-flow pour tenir compte de la possibilité de poster du collatéral comme garantie. Ceci aura un impact sur l'exposition de la banque en cas de défaut de l'emprunteur.

Au même titre que pour le chapitre précédent, intégrer une structure de dépendance entre les emprunteurs pour tenir compte des effets de contagion dans les comportements en cas de stress sur les marchés. Enfin, nous manquons de données pour *back-tester* notre modèle alors que c'est une étape importante pour juger de la qualité de celui-ci.

Concernant le chapitre *Willingness-to-Pay for reducing risk in presence of two ambiguity sources*, nos résultats peuvent être étendus au cas d'un décideur averse à l'ambiguïté ou en recherche d'ambiguïté. Le cas de loteries non indépendantes peut être étudié en considérant l'ambiguïté sur le paramètre de dépendance et voir si les résultats sont cohérents avec ceux de cette thèse. Enfin, la neutralité à l'ambiguïté telle que définie dans le modèle KMM (mais aussi dans le modèle néo-additif de [Chateauneuf et al. \(2007\)](#)) ainsi que le modèle de contraction de [Gajdos et al. \(2007\)](#)) peut être interrogée dans le cadre multidimensionnel. En effet, nous montrons que la présence de plusieurs sources d'ambiguïté peut influencer le bien-être du décideur alors même que ce dernier est neutre à l'ambiguïté. Ceci nous amène à dire que le concept de neutralité à l'ambiguïté trouve quelques limites dans le cadre multidimensionnel notamment lorsqu'on considère des incertitudes corrélées sur les risques. Une perspective

intéressante serait d'étendre la définition de la neutralité à l'ambiguïté au cadre multidimensionnel afin d'avoir des résultats en accord avec l'intuition, i.e, que la neutralité à l'ambiguïté soit associée à l'absence d'influence sur le bien-être même en cas de présence de plusieurs sources d'ambiguïté.

Bibliographie

- Agarwal, A., Ambrose, B., and Liu, C. (2006). Credit lines and credit utilization. *Journal of Money, Credit and Banking*, 38 :1–22. [3](#), [33](#), [35](#), [38](#), [88](#), [89](#), [98](#), [110](#), [116](#), [117](#)
- Agarwal, S., Chomsisengphet, S., and Driscoll, J. C. (2004). Loan commitments and private firms. [34](#)
- Albanese, C., Campolieti, G., Chen, O., and Zavidonov, A. (2003). Credit barrier models. *Risk Magazine*. [12](#), [13](#), [57](#), [60](#)
- Albanese, C. and Chen, O. (2006). Implied migration rates from credit barrier models. *Journal of Banking and Finance*. [1](#), [18](#)
- Altman, E., Resti, A., and Sironi, A. (2004). Default recovery rates in credit risk modelling : a review of the literature and empirical evidence. *Economic Notes*, 33(2) :183–208. [95](#)
- Arvanitis, G., J.Gregory, and Laurent, J. (1999). Building models for credit spreads. *Journal of Derivatives*. [1](#), [14](#)
- Baillon, A. (2017). Prudence with respect to ambiguity. *The Economic Journal*, 127(604) :1731–1755. [133](#)
- Baillon, A. and Bleichrodt, H. (2015). Testing ambiguity models through the measurement of probabilities for gains and losses. *American Economic Journal : Microeconomics*, 7(2) :77–100. [132](#)
- Bangia, A., Diebold, F., and Schuermann, T. (2002). Ratings migration and the business cycle, with application to credit portfolio stress testing. *Journal of Banking and Finance*. [1](#), [13](#), [16](#), [17](#), [18](#), [57](#), [60](#), [72](#)
- Bauwens, L. and Hautsch, N. (2003). Dynamic latent factor models for intensity processes. *Working paper CORE*. [1](#), [14](#), [17](#)
- Berger, L. (2011). Smooth Ambiguity Aversion in the Small and in the Large. *ECARES Working paper*. [50](#), [51](#), [127](#)
- Black, F. and Cox, J. (1976). Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions. *Journal of finance*. [12](#)
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The valuation of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. [12](#)
- Briys, E. and de Varenne, F. (1997). Valuing risky fixed rate debt. an extension. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22. [12](#)
- Brockett, P. L. and Golden, L. L. (1987). A class of utility functions containing all the common utility functions. *Management Science*, 33(8) :955–964. [130](#)
- Caballé, J. and Pomansky, A. (1996). Mixed risk aversion. *Journal of Economic Theory*, 71(2) :485–513. [130](#)
- Calabrese, R. et al. (2012). *Regression model for proportions with probability masses at zero and one*. Vita e pensiero. [37](#), [101](#)

- Carty, L. and Fons, J. (1993). Measuring changes in corporate credit quality. *Moody's special report, Moody's Investors Services*. **1, 16**
- Cayatte, J. (2009). *Microéconomie de l'incertitude*. LMD Économie. De Boeck Supérieur. **47**
- Chateauneuf, A., Eichberger, J., and Grant, S. (2007). Choice under uncertainty with the best and worst in mind : Neo-additive capacities. *Journal of Economic Theory*, 137(1) :538–567. **51, 127, 132, 146**
- Chesson, H. W. and Viscusi, W. K. (2003). Commonalities in time and ambiguity aversion for long-term risks. *Theory and Decision*, 54(1) :57–71. **50, 127**
- Chew, S. H., Miao, B., and Zhong, S. (2017). Partial ambiguity. *Econometrica*, 85(4) :1239–1260. **132**
- Chiu, W. H. (2000). On the propensity to self-protect. *Journal of Risk and Insurance*, pages 555–577. **130**
- Chow, C. C. and Sarin, R. K. (2001). Comparative ignorance and the ellisberg paradox. *Journal of risk and Uncertainty*, 22(2) :129–139. **50, 127**
- Cole, T. J. and Green, P. J. (1992). Smoothing reference centile curves : the lms method and penalized likelihood. *Statistics in medicine*, 11(10) :1305–1319. **32**
- Cook, D. O., Kieschnick, R., and McCullough, B. D. (2008). Regression analysis of proportions in finance with self selection. *Journal of empirical finance*, 15(5) :860–867. **101**
- Cossin, D. and Lu, H. A. (2004). Pricing prepayment option in commercial & industrial loans at origination. *Available at SSRN 655803*. **3, 35, 89**
- Couderc, F. and Renault, O. (2004). Time-to-default : Life cycle, global and industry cycle impacts. *Working paper, University of Geneva*. **1, 17, 72**
- Council of the european union (2013). Regulation (EU) No 575/2013 of 26 june 2013 on prudential requirements for credit institutions and investment firms and amending regulation (EU) No 648/2012. *Official Journal of the European Union*. **25**
- Cousin, A. and Kheliouen, M. R. (2016). A comparative study on the estimation of factor migration models. *Bulletin Français d'Actuariat*, 16(31) :41–94. **18, 56, 89, 100, 102, 106**
- Cousin, A. and Kheliouen, M. R. (2018). A cash-flow model for the liquidity of a banking book. *Working paper*. **87**
- Crainich, D., Eeckhoudt, L. R., and Hammitt, J. K. (2015). The value of risk reduction : new tools for an old problem. *Theory and Decision*, 79(3) :403–413. **130**
- Crouhy, M., Galai, D., and Mark, R. (2000). A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24. **1**
- Cubitt, R., Van De Kuilen, G., and Mukerji, S. (2014). Discriminating between models of ambiguity attitude : A qualitative test. *Economics Series working papers*, 692. **132**
- Daudin, J.-J. (2015). *Le modèle linéaire et ses extensions - Modèle linéaire général, modèle linéaire généralisé, modèle mixte, plans d'expériences (Niveau C)*. Technosup - Agronomie. Edition Ellipses. **27, 28, 30**

- Duffie, D., Saita, L., and Wang, K. (2007). Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates. *Journal of Financial Economics*. 17
- Duffie, D. and Shafer, S. (2003). *Credit Risk : Pricing, Measurement, and Management*. Princeton Series in Finance. 17
- Duffy, T., Hatzakis, M., Hsu, W., Labe, R., Liao, B., Luo, X., Oh, J., Setya, A., and Yang, L. (2005). Merrill lynch improves liquidity risk management for revolving credit lines. *Interfaces*, 35(5) :353–369. 1, 3, 35, 36, 37, 39, 40, 98
- Durbin, J. and Koopman, S. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods, Second Edition*. Oxford University Press. 19, 66, 69
- Eeckhoudt, L., Godfroid, P., and Gollier, C. (1997). Willingness to pay, the risk premium and risk aversion. *Economics Letters*, 55(3) :355–360. 130
- Eichberger, J., Grant, S., and Lefort, J.-P. (2012). Generalized neo-additive capacities and updating. *International Journal of Economic Theory*, 8(3) :237–257. 127
- Eichberger, J., Oechssler, J., and Schmedler, W. (2015). How do subjects view multiple sources of ambiguity? *Theory and Decision*, 78 :339–356. 50, 127
- Einhorn, H. J. and Hogarth, R. M. (1988). Decision making under ambiguity : A note. In *Risk, decision and rationality*, pages 327–336. Springer. 50, 127
- Ekern, S. (1980). Increasing n^{th} degree risk. *Economics Letters*, 6 :329–333. 49
- Elabed, G. and Carter, M. R. (2015). Compound-risk aversion, ambiguity and the willingness to pay for microinsurance. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 118 :150–166. 127
- Eliaz, K. and Ortoleva, P. (2015). Multidimensional ellberg. *Management Science*, 62(8) :2179–2197. 50, 127
- Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. *The quarterly journal of economics*, pages 643–669. 49, 127, 133
- Espinheira, P. L., Ferrari, S. L., and Cribari-Neto, F. (2008). Influence diagnostics in beta regression. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(9) :4417–4431. 37
- FED (2017). 2017 supervisory scenarios for annual stress tests required under the dodd-frank act stress testing rules and the capital plan rule. pages 9–15. 42, 105
- Feng, D., Gouriéroux, C., and Jasiak, J. (2007). The ordered qualitative model for credit rating transition. *Journal of Empirical Finance*. 1, 13, 17, 18, 58, 60, 61
- Ferrari, S. and Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31(7) :799–815. 37
- Figlewski, S., Frydman, H., and Liang, W. (2008). Modelling the effect of macroeconomic factors on corporate default and credit rating transitions. *Discussion Paper New York University*. 1, 17
- Foulcher, S., Gouriéroux, C., and Tiomo, A. (2004). Term structure of defaults and ratings. *Insurance and Risk Management*. 16, 82

- Frydman, H. and Schuermann, T. (2008). Credit rating dynamics and markov mixture models. *Journal of Banking and Finance*. **16**
- Gagliardini, P. and Gouriéroux, C. (2005). Stochastic migration models. *Journal of Financial Econometrics*. **2, 12, 13, 17, 18, 24, 56, 57, 58, 60, 61, 65, 66, 68, 75, 76, 84, 85**
- Gajdos, T., Hayashi, T., Tallon, J.-M., and Vergnaud, J.-C. (2007). Attitude toward imprecise information. *International Journal of Economic Theory*, 140 :23–56. **51, 128, 133, 146**
- Geweke, J., Marshall, R., and Zarkin, G. (1986). Mobility indices in continuous timemarkov chains. *Econometrica*, 54. **82**
- Ghirardato, P., Maccheroni, F., and Marinacci, M. (2004). Differentiating ambiguity and ambiguity attitude. *Journal of Economic Theory*, 118(2) :133–173. **132**
- Gierlinger, J. and Gollier, C. (2015). Saving for an ambiguous future. Technical report, Working Paper. **127**
- Gollier, C. (2014). Optimal insurance design of ambiguous risks. *Economic Theory*, 57 :555–576. **51, 127**
- Goodarzi, A., Kohavi, R., Harmon, R., and Senkut, A. (1998). Loan prepayment modeling. In *KDD Workshop on Data Mining in Finance*, edited by T. H Hann and G. Nakhaeizadeh, pages 62–69. **89**
- Gouriéroux, C. and Jasiak, J. (2011). *The econometrics of individual risk : credit, insurance, and marketing*. Princeton university press. **11**
- Gouriéroux, C. and Tiomo, A. (2007). *Risque de crédit : une approche avancée*. Economica. **1, 8, 12, 13, 14, 17, 27, 57, 60**
- Groneck, M., Ludwig, A., and Zimper, A. (2016). A life-cycle model with ambiguous survival beliefs. *Journal of Economic Theory*, 162 :137–180. **127**
- Guo, L., Huang, S., Zhuang, J., and Sadek, A. W. (2013). Modeling parking behavior under uncertainty : A static game theoretic versus a sequential neo-additive capacity modeling approach. *Networks and Spatial Economics*, 13(3) :327–350. **127**
- Hamerle, A., Liebig, T., and Scheule, H. (2004). Forecasting credit portfolio risk. *Discussion Paper Banking and Financial Supervision*. **17**
- Hastie, T. and Tibshirani, R. (1990). *Generalized Additive Models*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis. **31**
- Hougaard, P. (2000). Statistics for biology and health. **63, 65**
- Hurlin, C. (2003). *Econométrie des variables qualitatives*. Notes de cours, chapitre 2. **13**
- Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of financial decision making*, volume 3. Rowman and Littlefield. **49, 130**
- Israel, R., Rosenthal, J., and Wei, J. (2001). Finding generators for markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings. *Mathematical Finance*. **1, 82**

- Jafry, Y. and Schuermann, T. (2004). Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices. *Journal of Banking and Finance*. 2, 23, 79, 82
- Jarrow, R., Lando, D., and Turnbull, S. (1997). A markov model for the term structure of credit risk spreads. *The review of Financial Studies*. 16
- Jarrow, R. and Turnbull, S. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*. 14
- Jewitt, I. and Mukerji, S. (2011). Ordering Ambiguous Acts. *Economics Series Working papers*. 51, 127
- Jiménez, G., Lopez, J. A., and Saurina, J. (2009). Empirical analysis of corporate credit lines. *Review of Financial Studies*, 22(12) :5069–5098. 3, 34, 36, 37, 38, 88, 89, 98, 110
- Kalbfleisch, J. and Prentice, R. (2002). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. Wiley Series in Probability and Statistics. 15
- Kavvathas, D. (2001). Estimating credit rating transition probabilities for corporate bonds. *University of Chicago, Working Paper*. 14, 15, 16, 17, 18, 56, 57, 64, 72, 85
- Kieschnick, R. and McCullough, B. D. (2003). Regression analysis of variates observed on (0, 1) : percentages, proportions and fractions. *Statistical modelling*, 3(3) :193–213. 36
- Kim, C. (2005). Modeling surrender and lapse rates with economic variables. *North American Actuarial Journal*, 9(4) :56–70. 3, 35, 89
- Kim, I., Ramaswamy, K., and Sundaresan, S. (1993). Does default risk on coupon affect the valuation of corporate bonds? a contingent claims model. *Financial Management*. 12
- Klibanoff, P., Marinacci, M., and Mukerji, S. (2005). A smooth model of decision making under ambiguity. *Econometrica*, 73 :1849–1892. 5, 44, 50, 51, 127, 132, 133
- Koopman, S. and Lucas, A. (2005). Business and default cycles for credit risk. *Tinbergen Institute Discussion Paper*. 18
- Koopman, S., Lucas, A., and Monteiro, A. (2007). The multi-state latent factor intensity model for credit rating transitions. *Journal of Econometrics*. 2, 14, 17, 56, 57, 59, 61, 63, 64, 65
- Lando, D. (1998). On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*. 14
- Lando, D. and Skodeberg, T. (2002). Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking and Finance*. 1, 14, 15, 16, 64, 74
- Löffler, G. and Posch, P. (2007). *Credit Risk Modelling using VBA and Excel*. Wiley Finance. 16, 17, 70
- Longstaff, F. and Schwartz, E. (1995). A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of finance*. 12
- Madsen, H. and Thyregod, P. (2010). *Introduction to General and Generalized Linear Models*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. Taylor & Francis. 27

- Marker, J. (1997). Studies of revolver usage : Step inside citibank, na, new york, to hear the results of a study on revolving credit usage conducted by the bank's portfolio strategies group. *Journal of Lending and Credit Risk Management*, 79 :86–93. [3](#), [33](#)
- McCullagh, P. and Nelder, J. (1989). Generalized linear models, 2nd edn, chapman-hall, london. *Standard book on generalized linear models*. [29](#)
- Menezes, C., Geiss, C., and Tressler, J. (1980). Increasing downside risk. *American Economic Review*, 70 :921–931. [49](#), [130](#)
- Menezes, C. F. and Wang, X. H. (2005). Increasing outer risk. *Journal of Mathematical Economics*, 41(7) :875–886. [49](#)
- Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*. [12](#)
- Naldi, M., Owen, A., Pederson, C., Rees, S., and Tchangué, S. (2011). Quantitative credit quarterly : Transition matrix estimation. *Barclays Capital*. [1](#), [15](#), [18](#), [64](#)
- Nelder, J. A. and Baker, R. J. (1972). *Generalized linear models*. Wiley Online Library. [29](#)
- Nelder, J. A. and Pregibon, D. (1987). An extended quasi-likelihood function. *Biometrika*, 74(2) :221–232. [31](#)
- Nickell, P., Perraudin, W., and Varotto, S. (2000). Stability of rating transitions. *Journal of Banking and Finance*. [13](#), [17](#), [18](#), [57](#), [60](#), [68](#), [82](#)
- Osaki, Y. and Schlesinger, H. (2015). Portfolio Choice and Ambiguous Background Risk. *Working Paper*. [52](#), [127](#)
- Ospina, R. and Ferrari, S. L. (2012). A general class of zero-or-one inflated beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(6) :1609–1623. [36](#), [37](#), [101](#)
- Paulsen, V. (2007). Liquiditätsoptionen-bewertung und risikomanagement. mathematisches seminar, university of kiel. [3](#), [35](#), [36](#)
- Richard, S. F. and Roll, R. (1989). Prepayments on fixed-rate mortgage-backed securities. *The Journal of Portfolio Management*, 15(3) :73–82. [3](#), [35](#), [89](#)
- Rigby, R. and Stasinopoulos, D. (1996a). A semi-parametric additive model for variance heterogeneity. *Statistics and Computing*, 6(1) :57–65. [31](#), [32](#)
- Rigby, R. A. and Stasinopoulos, D. M. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 54(3) :507–554. [31](#), [102](#)
- Rigby, R. A. and Stasinopoulos, M. D. (1996b). Mean and dispersion additive models. In *Statistical theory and computational aspects of smoothing*, pages 215–230. Springer. [32](#)
- Rothschild, M. and Stiglitz, J. (1970). Increasing risk. i. a definition. *Journal of Economic Theory*, 2 :225–243. [48](#), [49](#), [130](#)
- Sarin, A. and Klein, H. (2012). A quantitative liquidity portfolio model for credit facilities. [3](#), [35](#), [36](#), [39](#), [40](#), [90](#), [114](#)

- Sarin, A. and Muenster, F. C. (2012). An analysis of liquidity risk drivers for single credit facilities. **3, 34, 37, 38, 88, 89, 110**
- Sarin, R. K. and Weber, M. (1993). Effects of ambiguity in market experiments. *Management science*, 39(5) :602–615. **50, 127**
- Schertler, A., Pfungsten, A., and Hubensack, C. (2010). Bank lines of credit in liquidity management-the impact of recall risk for german smes. **3, 35, 88**
- Schmeidler, D. (1989). Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57. **132**
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic orders*. Springer Science & Business Media. **52, 130**
- Shorrocks, A. (1978). The measurement of mobility. *Econometrica*, 46 :1013–1024. **82**
- Simas, A. B., Barreto-Souza, W., and Rocha, A. V. (2010). Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(2) :348–366. **37**
- Smithson, M. and Verkuilen, J. (2006). A better lemon squeezer ? maximum-likelihood regression with beta-distributed dependent variables. *Psychological methods*, 11(1) :54. **37**
- Smyth, G. K. (1989). Generalized linear models with varying dispersion. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 47–60. **31**
- Snow, A. (2010). Ambiguity and the value of information. *Journal of Risk and Uncertainty*, 40(2) :133–145. **50, 51, 127**
- Snow, A. (2011). Ambiguity aversion and the propensities for self-insurance and self-protection. *Journal of Risk and Uncertainty*, 42(1) :27–43. **50, 127**
- Stasinopoulos, M., Rigby, R., Heller, G., Voudouris, V., and De Bastiani, F. (2017). *Flexible Regression and Smoothing : Using GAMLSS in R*. Chapman & Hall/CRC The R Series. CRC Press. **27, 32, 37**
- Strahan, P. E. (1999). Borrower risk and the price and nonprice terms of bank loans. **3, 88**
- Sufi, A. (2009). Bank lines of credit in corporate finance : An empirical analysis. *Review of Financial Studies*, 22(3) :1057–1088. **3, 34, 38, 88, 91, 98**
- Tobin, J. (1958). Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica*. **12**
- Treich, N. (2010). The value of a statistical life under ambiguity aversion. *Journal of Environmental Economics and Management*, 59 :15–26. **128**
- Viscusi, W. K. and Chesson, H. (1999). Hopes and fears : the conflicting effects of risk ambiguity. *Theory and Decision*, 47(2) :157–184. **50, 127**

Annexe A

Annexe du chapitre 2

A.1 Proof of Proposition 2.2

We recall the model specification, for each obligor $l = 1, \dots, n$;

- we denote R_u^l the random variable representing the rating of obligor l at time u , $R_u^l \in \{1, \dots, d\}$, where d is the default state and 1 the best credit quality state;
- we fix a finite horizon date $t > 0$. The underlying probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is endowed with some reference filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_u)_{0 \leq u \leq t}$ and is sufficiently rich to support the stochastic processes $\{R_u^l, 0 \leq u < t\}$ and $\{X_u, 0 \leq u \leq t\}$;
- let $\mathcal{H}_u^l(0 \leq u < t)$ be the filtration associated to the process $\{R_u^l, 0 \leq u < t\}$ for every value of $l = 1, \dots, n$. We consider a global filtration $\mathcal{H}_u(0 \leq u < t)$ which is the union of all the filtrations \mathcal{H}_u^l , that is, $\mathcal{H}_u^l = \mathcal{H}_u^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_u^n$;
- let $\mathcal{G}_u(0 \leq u \leq t)$ be the filtration associated to the process $\{X_u, 0 \leq u \leq t\}$. We assume that conditional on \mathcal{G}_t , the processes $\{R_u^l, 0 \leq u < t\}$ are independent across obligors;
- we assume that intensities are adapted to the filtration $\mathcal{G}_u(0 \leq u \leq t)$ and independent from the filtration $\mathcal{H}_u(0 \leq u < t)$.
- we denote N_l the number of ratings visited during the period $[0, t)$ by the obligor l , with the condition $N_l \geq 1$. $[0, t)$ is thus divided into a sequence of intervals $[t_{k-1}^l, t_k^l)$, $k = 1, \dots, N_l$, where $t_0^l = 0$ and $t_{N_l}^l = t$;
- each period $[t_{k-1}^l, t_k^l)$, $k = 1, \dots, N_l$, corresponds to the visiting of the state r_k^l , we then have the visited states $r_1^l, \dots, r_{N_l}^l$. Note that each consecutive states are obligatory different, thus $r_{k-1}^l \neq r_k^l$;
- there are $N_l - 1$ migration events for each obligor, each migration event takes place at the time t_k^l for $k = 1, \dots, N_l - 1$;
- we denote $\{r_u^l, 0 \leq u < t\}$ the observed path of ratings of obligor l during the period $[0, t)$;

Démonstration. We know that,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta \mid \mathcal{G}_t) &= P\left(R_u^l = r_u^l, u \in [0, t), l = 1, \dots, n \mid \mathcal{G}_t\right) \\ &= \prod_{l=1}^n P\left(R_u^l = r_u^l, u \in [0, t) \mid \mathcal{G}_t\right) \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

by conditional independence of $(R_u^l)_{0 < u \leq t}$, $l = 1, \dots, n$ given \mathcal{G}_t .

$$P\left(R_u^l = r_u^l, u \in [0, t] | \mathcal{G}_t\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{N_l-1} \left\{ (R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l] \right\}, \right. \\ \left. \cap \left\{ R_u^l = r_{N_l}^l, u \in [t_{N_l-1}^l, t_{N_l}^l] \right\} \mid \mathcal{G}_t\right) \quad (\text{A.1.2})$$

The equation (A.1.2) describes the likelihood of the entire path of the obligor l . The obligor starts in the rating r_k^l at time t_{k-1}^l , it spends the period $[t_{k-1}^l, t_k^l]$ in this state until it jumps to the rating r_{k+1}^l at time t_k . The last period $[t_{N_l-1}^l, t_{N_l}^l]$ is particular because we only observe the rating R_u^l until time $t_{N_l}^{l-}$ (which corresponds to time t^-). We can only conclude on the stay of the obligor l in the state $r_{N_l}^l$.

$$P\left(R_u^l = r_u^l, u \in [0, t] | \mathcal{G}_t\right) \\ = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\left(\bigcap_{k=1}^{N_l-1} \{(R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\} \cap \{R_u^l = r_{N_l}^l, u \in [t_{N_l-1}^l, t_{N_l}^l]\}\right)} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\left(\bigcap_{k=1}^{N_l-1} \{(R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\} \cap \{R_u^l = r_{N_l}^l, u \in [t_{N_l-1}^l, t_{N_l}^l]\}\right)} \mid \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_{t_{N_l-1}^l}^l \right] \mid \mathcal{G}_t \right] \\ = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{N_l-1} \mathbb{1}_{\left((R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\right)} \times P\left(R_u^l = r_{N_l}^l, u \in [t_{N_l-1}^l, t_{N_l}^l] \mid \mathcal{G}_t, R_{t_{N_l-1}^l}^l = r_{N_l}^l\right) \mid \mathcal{G}_t \right] \\ = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{N_l-1} \mathbb{1}_{\left((R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\right)} \times e^{-\int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} \lambda_{r_{N_l}^l}(X_u) du} \mid \mathcal{G}_t \right].$$

The Tower Property is used with respect to $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_{t_{N_l-1}^l}^l$ in order to exhibit the probability of staying in the rating $r_{N_l}^l$ during the period $[t_{N_l-1}^l, t_{N_l}^l]$. The rest of the path is also obtained with a recursive use of the Tower Property by stepping back each time with one period on \mathcal{H}_u^l . We show the case of $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_{t_{N_l-2}^l}^l$ and deduce the rest to get (2.3.2).

$$P\left(R_u^l = r_u^l, u \in [0, t] | \mathcal{G}_t\right) \\ = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\left(\bigcap_{k=1}^{N_l-1} \{(R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\}\right)} \mid \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_{t_{N_l-2}^l}^l \right] e^{-\int_{t_{N_l-2}^l}^{t_{N_l}^l} \lambda_{r_{N_l}^l}(X_u) du} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{N_l-2} \mathbb{1}_{\left((R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\right)} \times \right. \\ \left. P\left(\left(R_u^l = r_{N_l-1}^l\right) \cap \left(R_{t_{N_l-1}^l}^l = r_{N_l}^l\right), u \in [t_{N_l-2}^l, t_{N_l-1}^l] \mid \mathcal{G}_t, R_{t_{N_l-2}^l}^l = r_{N_l-1}^l\right) e^{-\int_{t_{N_l-2}^l}^{t_{N_l}^l} \lambda_{r_{N_l}^l}(X_u) du} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{N_l-2} \mathbb{1}_{\left((R_u^l = r_k^l) \cap (R_{t_k}^l = r_{k+1}^l), u \in [t_{k-1}^l, t_k^l]\right)} \times \lambda_{r_{N_l-1}^l, r_{N_l}^l}(X_{t_{N_l-1}^l}) e^{-\int_{t_{N_l-2}^l}^{t_{N_l-1}^l} \lambda_{r_{N_l-1}^l}(X_u) du} e^{-\int_{t_{N_l-1}^l}^{t_{N_l}^l} \lambda_{r_{N_l}^l}(X_u) du} \mid \mathcal{G}_t \right]$$

Stepping back recursively on \mathcal{H}_u^l leads to get,

$$P\left(R_u^l = r_u^l, u \in [0, t] | \mathcal{G}_t\right) = \prod_{k=1}^{N_l} \lambda_{r_k^l, r_{k+1}^l}(X_{t_k^l}) e^{-\int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} \lambda_{r_k^l}(X_u) du}, \quad (\text{A.1.3})$$

with the convention $\lambda_{r_k^l, r_{k+1}^l} = 1$ for $k = N_l$. \square

A.2 Proof of Proposition 2.5

Démonstration. Contrary to the homogeneous case, the maximum likelihood estimator is not only related to $\lambda_{ij,0}$ but to $\lambda_{ij,0}$ and the vector β_{ij} , we denote our vector parameters $\theta = (\lambda_{ij,0}, \beta_{1,ij}, \beta_{2,ij}, \dots, \beta_{K,ij})$ and look to estimate θ such as,

$$\frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \lambda_{ij,0}}, \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{ij}} \right\} = 0.$$

$$\frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \lambda_{ij,0}} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l) \frac{\partial \log(\lambda_{ij}(X_{t_k^l}))}{\partial \lambda_{ij,0}} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} \frac{\partial \lambda_{ij}(X_u)}{\partial \lambda_{ij,0}} du.$$

We recall that,

$$\lambda_{ij}(X_t) = \lambda_{ij,0} e^{\langle \beta_{ij}, X_t \rangle} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \lambda_{ij}(X_t)}{\partial \lambda_{ij,0}} = e^{\langle \beta_{ij}, X_t \rangle}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \lambda_{ij,0}} &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} \frac{Y_{ij}^l(t_k^l)}{\lambda_{ij,0}} - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} e^{\langle \beta_{ij}, X_u \rangle} du \\ &= 0 \end{aligned}$$

we get,

$$\lambda_{ij,0} = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l)}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} e^{\langle \beta_{ij}, X_u \rangle} du} \quad (\text{A.2.1})$$

Getting vector $\hat{\beta}_{ij}$ goes through solving equation system $\frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{ij}} = 0$, every partial derivative will result in a relation between vector β_{ij} and past realised covariates values (i.e., $X_{s,t}$) as well as migration observations.

$$\frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{ij}} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{1,ij}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{2,ij}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{K,ij}} = 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathcal{L}_{ij}(\theta | \mathcal{G}_t))}{\partial \beta_{s,ij}} &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l) X_{s,t_k^l} - \lambda_{ij,0} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} X_{s,u} e^{\langle \beta_{ij}, X_u \rangle} du \\ &= 0 \end{aligned}$$

By replacing with $\lambda_{ij,0}$'s expression we get the equation system,

$$\frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l) X_{s,t_k^l}}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} Y_{ij}^l(t_k^l)} = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} X_{s,u} e^{\langle \beta_{ij}, X_u \rangle} du}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{N_l} S_i^l(t_k^l) \int_{t_{k-1}^l}^{t_k^l} e^{\langle \beta_{ij}, X_u \rangle} du}.$$

for $s = 1, \dots, K$

This non linear equation system has no analytical solution, it can be solved by numerical optimisation (multi-dimensional Newton-Raphson for instance). The solution provides the values of $\hat{\beta}_{ij}$. Once we have $\hat{\beta}_{ij}$ we go back to $\lambda_{ij,0}$ to get its estimator $\hat{\lambda}_{ij,0}$. \square

A.3 Maximisation of equation (2.4.3) using gradient

One can notice that the gradient of (2.4.3) with respect to α_i , β_i and σ_i can easily be derived. This means that it is possible to transform the maximization problem to a system of non-linear equations and then to resolve this system.

$$\frac{\partial \log(\mathcal{L}(\theta | \mathcal{G}_{t_N} \vee \mathcal{H}_{t_0}))}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{\partial \log(\mathcal{L}(\theta | \mathcal{G}_{t_N} \vee \mathcal{H}_{t_0}))}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial \log(\mathcal{L}(\theta | \mathcal{G}_{t_N} \vee \mathcal{H}_{t_0}))}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \log(\mathcal{L}(\theta | \mathcal{G}_{t_N} \vee \mathcal{H}_{t_0}))}{\partial \sigma_i} \right\} = 0.$$

For $i \in \{1, \dots, d-1\}$, with a fixed values of threshold C_j ($-\infty = C_{d+1} < C_d < \dots < C_2 < C_1 = +\infty$), every vector $\hat{\theta}_i = (\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i)$ is obtained through the resolution of the following non-linear equations system,

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{Y_{ij,t_k}^l}{p_{ij}(X_{t_k})} \left[\phi\left(\frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle}{\sigma_i}\right) - \phi\left(\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle}{\sigma_i}\right) \right] = 0 \\ &\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{i \neq j} \frac{Y_{ij,t_k}^l}{p_{ij}(X_{t_k})} \left[(C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle) \phi\left(\frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle}{\sigma_i}\right) - \right. \\ &\quad \left. (C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle) \phi\left(\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle}{\sigma_i}\right) \right] = 0 \\ &\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{i \neq j} \frac{Y_{ij,t_k}^l X_{t_k,s}}{p_{ij}(X_{t_k})} \left[\phi\left(\frac{C_j - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle}{\sigma_i}\right) - \phi\left(\frac{C_{j+1} - \alpha_i - \langle \beta_i, X_{t_k} \rangle}{\sigma_i}\right) \right] = 0 \\ &\text{for } s = 1, \dots, K \end{aligned} \right. \quad (\text{A.3.1})$$

Where, $\phi(\cdot)$ is the density function of the standard normal distribution. By convention, we have,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi\left(\frac{C_1 - \alpha_i - \langle\beta_i, X_{t_k}\rangle}{\sigma_i}\right) = 0 \\ \phi\left(\frac{C_{d+1} - \alpha_i - \langle\beta_i, X_{t_k}\rangle}{\sigma_i}\right) = 0 \\ (C_1 - \alpha_i - \langle\beta_i, X_{t_k}\rangle) \phi\left(\frac{C_1 - \alpha_i - \langle\beta_i, X_{t_k}\rangle}{\sigma_i}\right) = 0 \\ (C_{d+1} - \alpha_i - \langle\beta_i, X_{t_k}\rangle) \phi\left(\frac{C_{d+1} - \alpha_i - \langle\beta_i, X_{t_k}\rangle}{\sigma_i}\right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{A.3.2})$$

A.4 Other empirical results

A.4.1 Data summary and empirical transition matrices

Year	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
2006	52	128	487	486	244	155	12	6	1570
2007	58	151	474	517	272	144	15	6	1637
2008	59	168	470	531	271	198	14	6	1717
2009	58	142	468	513	234	190	20	8	1633
2010	49	136	487	545	230	213	34	16	1710
2011	59	132	494	569	241	232	18	5	1750
2012	52	140	564	697	354	296	29	8	2140
2013	53	133	548	725	338	300	30	5	2132

TABLE A.1 – Portfolio cohorts by years and ratings

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	30	0	0	0	0	0	0
2	7	0	117	3	0	0	0	0
3	1	66	0	284	3	1	0	0
4	0	2	136	0	217	11	2	2
5	1	3	1	172	0	231	4	1
6	0	0	3	4	150	0	191	16
7	0	0	0	2	0	86	0	112
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.2 – Number of observed migrations during the study

ratings	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.069	0.069	0	0	0	0	0	0
2	0.005	-0.104	0.096	0.002	0	0	0	0
3	0.0002	0.016	-0.084	0.066	0.0006	0.00025	0	0
4	0	0.0005	0.031	-0.078	0.043	0.002	0.0003	0.0003
5	0.0004	0.001	0.001	0.07	-0.181	0.100	0.001	0.0004
6	0	0	0.001	0.002	0.088	-0.200	0.099	0.008
7	0	0	0	0.009	0	0.358	-0.837	0.469
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.3 – Through The Cycle Generator

A.4.2 Estimation in the intensity model : beta of the other observable factors

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.000	-0.339	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-6.787	0.000	-0.098	-0.717	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.524	0.279	0.000	-0.072	3.437	1.409	0.000	0.000
4	0.000	10.349	0.071	0.000	-0.046	0.157	1.646	0.595
5	0.586	0.586	-2.542	0.049	0.000	-0.036	-1.002	-2.542
6	0.000	0.000	1.289	-30.021	0.128	0.000	-0.159	-0.259
7	0.000	0.000	0.000	-2.249	0.000	0.083	0.000	-0.155
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLE A.4 – Beta for the second factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.000	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.607	0.000	0.174	0.743	0.000	0.000	0.000	0.000
3	13.442	-0.137	0.000	0.022	-3.643	-2.497	0.000	0.000
4	0.000	0.775	-0.005	0.000	-0.047	0.049	-3.421	0.002
5	0.002	0.002	0.058	-0.091	0.000	-0.015	-0.952	0.058
6	0.000	0.000	-0.994	0.395	0.185	0.000	-0.263	-0.347
7	0.000	0.000	0.000	-8.445	0.000	0.296	0.000	-0.139
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLE A.5 – Beta for the third factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.000	-0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	15.156	0.000	0.162	-0.830	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-10.443	0.113	0.000	0.027	10.258	4.557	0.000	0.000
4	0.000	-10.219	0.091	0.000	0.154	0.243	3.762	-1.008
5	-0.988	-0.988	2.695	0.153	0.000	0.250	2.484	2.695
6	0.000	0.000	1.786	53.178	-0.312	0.000	0.387	0.461
7	0.000	0.000	0.000	14.605	0.000	-0.016	0.000	0.130
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLE A.6 – Beta for the forth factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.000	-0.660	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-55.417	0.000	-0.461	-13.762	0.000	0.000	0.000	0.000
3	36.762	-0.574	0.000	-0.132	-7.647	-26.454	0.000	0.000
4	0.000	8.184	-0.055	0.000	-0.161	-0.202	-24.512	3.355
5	3.289	3.289	-1.168	-0.232	0.000	-0.386	1.462	-1.168
6	0.000	0.000	49.685	-222.853	0.374	0.000	-0.848	-1.666
7	0.000	0.000	0.000	-45.191	0.000	0.811	0.000	-0.384
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLE A.7 – Beta for the fifth factor intensity model

A.5 North America scope

A.5.1 Intensity model with observable factors

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	8	0	0	0	0	0	0
2	1	0	34	1	0	0	0	0
3	0	19	0	108	3	1	0	0
4	0	1	60	0	106	5	2	1
5	0	2	1	92	0	150	4	0
6	0	0	3	3	108	0	145	9
7	0	0	0	2	0	65	0	99
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.8 – North American companies : Number of observed migrations during the study

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.075	0.075	0	0	0	0	0	0
2	0.005	-0.13	0.12	0.005	0	0	0	0
3	0	0.012	-0.088	0.074	0.002	0	0	0
4	0	0	0.02	-0.064	0.042	0.002	0	0
5	0	0.001	0	0.06	-0.165	0.101	0.003	0
6	0	0	0.002	0.002	0.074	-0.183	0.099	0.006
7	0	0	0	0.011	0	0.365	-0.932	0.556
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.9 – North America : Baseline intensity generator for observable intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-1.75	0	0	0	0	0	0
2	2.90	0	-0.04	3.14	0	0	0	0
3	0	0.07	0	-0.11	2.78	2.76	0	0
4	0	12.88	0.06	0	-0.08	-1.17	3.16	-2.41
5	0	-2.42	-2.42	-0.05	0	-0.11	-2.87	0
6	0	0	-7.78	7.40	-0.06	0	-0.15	0.03
7	0	0	0	3.53	0	-0.23	0	-0.09
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.10 – North America : Beta for the first factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	0	-	-	-	-	-	-
2	2×10^{-6}	-	10^{-3}	10^{-8}	-	-	-	-
3	-	0.23	-	4×10^{-3}	0	10^{-8}	-	-
4	-	8×10^{-12}	0.45	-	8×10^{-10}	0	9×10^{-8}	0.16
5	-	0.02	0.20	0.62	-	2.35×10^{-8}	3×10^{-3}	-
6	-	-	0.24	5×10^{-4}	4×10^{-3}	-	6×10^{-14}	0.11
7	-	-	-	0	-	3×10^{-4}	-	5×10^{-5}
8	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLE A.11 – North America : p-values for the hypothesis $\hat{\beta}_{ij} = 0$

A.5.2 Structural model with observable factors

\hat{C}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$
$\hat{C}_2 = 4.58$	$\hat{\alpha}_1 = 4.90$	$\hat{\sigma}_1 = 10^{-7}$
$\hat{C}_3 = 4.07$	$\hat{\alpha}_2 = 3.87$	$\hat{\sigma}_2 = 0.19$
$\hat{C}_4 = 3.41$	$\hat{\alpha}_3 = 3.24$	$\hat{\sigma}_3 = 0.57$
$\hat{C}_5 = 2.35$	$\hat{\alpha}_4 = 2.71$	$\hat{\sigma}_4 = 0.96$
$\hat{C}_6 = 1.33$	$\hat{\alpha}_5 = 1.75$	$\hat{\sigma}_5 = 1.03$
$\hat{C}_7 = 0.06$	$\hat{\alpha}_6 = 0.88$	$\hat{\sigma}_6 = 1.24$
$\hat{C}_8 = -1.64$	$\hat{\alpha}_7 = -1.39$	$\hat{\sigma}_7 = 2.39$

TABLE A.12 – North America : Parameters for observable factors structural model

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_5$
$\hat{\beta}_{11} = 0.13$	$\hat{\beta}_{21} = 0.324$	$\hat{\beta}_{31} = 0.050$	$\hat{\beta}_{41} = 0.432$	$\hat{\beta}_{51} = 0.631$
$\hat{\beta}_{12} = 0.009$	$\hat{\beta}_{22} = 0.041$	$\hat{\beta}_{32} = 0.006$	$\hat{\beta}_{42} = 0.042$	$\hat{\beta}_{52} = 0.158$
$\hat{\beta}_{13} = -0.013$	$\hat{\beta}_{23} = 0.008$	$\hat{\beta}_{33} = 0.047$	$\hat{\beta}_{43} = -0.102$	$\hat{\beta}_{53} = 0.235$
$\hat{\beta}_{14} = 0.042$	$\hat{\beta}_{24} = -0.058$	$\hat{\beta}_{34} = 0.032$	$\hat{\beta}_{44} = -0.259$	$\hat{\beta}_{54} = 0.007$
$\hat{\beta}_{15} = 0.029$	$\hat{\beta}_{25} = -0.036$	$\hat{\beta}_{35} = -0.071$	$\hat{\beta}_{45} = -0.165$	$\hat{\beta}_{55} = 0.075$
$\hat{\beta}_{16} = 0.060$	$\hat{\beta}_{26} = 0.045$	$\hat{\beta}_{36} = 0.130$	$\hat{\beta}_{46} = -0.359$	$\hat{\beta}_{56} = 0.426$
$\hat{\beta}_{17} = -0.058$	$\hat{\beta}_{27} = 0.343$	$\hat{\beta}_{37} = 0.595$	$\hat{\beta}_{47} = 0.0191$	$\hat{\beta}_{57} = 1.365$

TABLE A.13 – North America : Beta for observable factors structural model

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_5$
0	0	1	0	0
0.38	2×10^{-3}	0.79	0.17	6×10^{-4}
0.39	0.59	0.07	6×10^{-4}	10^{-3}
0.03	9×10^{-3}	0.38	5×10^{-10}	0.93
0.07	0.06	0.03	10^{-5}	0.32
8×10^{-3}	0.04	5×10^{-4}	0	2×10^{-6}
0.36	10^{-11}	9×10^{-8}	0.83	2×10^{-7}

TABLE A.14 – North America : p-values for hypothesis $\hat{\beta}_{ik} = 0$

A.6 Western Europe scope

A.6.1 Intensity model with observable factors

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	16	0	0	0	0	0	0
2	1	0	73	1	0	0	0	0
3	1	27	0	141	0	0	0	0
4	0	0	35	0	77	4	0	1
5	1	1	0	31	0	50	0	0
6	0	0	0	1	27	0	20	2
7	0	0	0	0	0	9	0	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.15 – Western European companies : Number of observed migrations during the study

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0.069	0.069	0	0	0	0	0	0
2	0.002	-0.160	0.156	0.002	0	0	0	0
3	0	0.019	-0.119	0.100	0	0	0	0
4	0	0	0.029	-0.097	0.065	0.003	0	0
5	0.002	0.002	0	0.075	-0.2	0.121	0	0
6	0	0	0	0.004	0.120	-0.222	0.089	0.009
7	0	0	0	0	0	0.260	-0.462	0.202
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.16 – Western Europe : Baseline intensity generator for observable intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-0.11	0	0	0	0	0	0
2	-4.80	0	-0.28	1.94	0	0	0	0
3	2.88	0.27	0	-0.09	0	0	0	0
4	0	0	0.09	0	-0.31	5.16	0	1.26
5	1.55	1.55	0	0.10	0	-0.19	0	0
6	0	0	0	3.84	0.17	0	-0.16	-1.76
7	0	0	0	0	0	9.07	0	7.62
8	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.17 – Western Europe : Beta for the first factor intensity model

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	8×10^{-3}	-	-	-	-	-	-
2	4×10^{-6}	-	10^{-6}	5×10^{-7}	-	-	-	-
3	0.53	9×10^{-4}	-	10^{-5}	-	-	-	-
4	-	-	0.03	-	4×10^{-3}	10^{-12}	-	2×10^{-6}
5	4×10^{-7}	4×10^{-7}	-	0.19	-	2×10^{-3}	-	-
6	-	-	-	0.421	0.22	-	10^{-3}	0.62
7	-	-	-	-	-	0.12	-	0.84
8	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLE A.18 – Western Europe : p-values for the hypothesis $\hat{\beta}_{ij} = 0$

A.6.2 Structural model with observable factors

\hat{C}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$
$\hat{C}_2 = 4.71$	$\hat{\alpha}_1 = 4.70$	$\hat{\sigma}_1 = 10^{-7}$
$\hat{C}_3 = 4.33$	$\hat{\alpha}_2 = 4.17$	$\hat{\sigma}_2 = 0.12$
$\hat{C}_4 = 3.88$	$\hat{\alpha}_3 = 3.64$	$\hat{\sigma}_3 = 0.48$
$\hat{C}_5 = 2.50$	$\hat{\alpha}_4 = 2.22$	$\hat{\sigma}_4 = 1.22$
$\hat{C}_6 = 0.79$	$\hat{\alpha}_5 = 1.43$	$\hat{\sigma}_5 = 1.37$
$\hat{C}_7 = -0.73$	$\hat{\alpha}_6 = 0.71$	$\hat{\sigma}_6 = 1.28$
$\hat{C}_8 = -1.65$	$\hat{\alpha}_7 = -0.59$	$\hat{\sigma}_7 = 0.99$

TABLE A.19 – Western Europe : Parameters for observable factors structural model

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_5$
$\hat{\beta}_{11} = 0.01$	$\hat{\beta}_{21} = 0.021$	$\hat{\beta}_{31} = -0.025$	$\hat{\beta}_{41} = 0.256$	$\hat{\beta}_{51} = -0.019$
$\hat{\beta}_{12} = -0.011$	$\hat{\beta}_{22} = 0.005$	$\hat{\beta}_{32} = -0.036$	$\hat{\beta}_{42} = 0.042$	$\hat{\beta}_{52} = -0.048$
$\hat{\beta}_{13} = 0.073$	$\hat{\beta}_{23} = 0.019$	$\hat{\beta}_{33} = 0.022$	$\hat{\beta}_{43} = 0.229$	$\hat{\beta}_{53} = 0.014$
$\hat{\beta}_{14} = 0.116$	$\hat{\beta}_{24} = 0.131$	$\hat{\beta}_{34} = 0.231$	$\hat{\beta}_{44} = 0.007$	$\hat{\beta}_{54} = -0.259$
$\hat{\beta}_{15} = 0.188$	$\hat{\beta}_{25} = -0.210$	$\hat{\beta}_{35} = 0.230$	$\hat{\beta}_{45} = -0.143$	$\hat{\beta}_{55} = 0.125$
$\hat{\beta}_{16} = 0.206$	$\hat{\beta}_{26} = 0.031$	$\hat{\beta}_{36} = 0.098$	$\hat{\beta}_{46} = 0.608$	$\hat{\beta}_{56} = 0.064$
$\hat{\beta}_{17} = 0.165$	$\hat{\beta}_{27} = 0.068$	$\hat{\beta}_{37} = -0.191$	$\hat{\beta}_{47} = 0.349$	$\hat{\beta}_{57} = 0.367$

TABLE A.20 – Western Europe : Beta for observable factors structural model

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_5$
10^{-11}	0	0	0	10^{-11}
0.07	0.68	2×10^{-3}	0.07	0.28
7×10^{-6}	0.45	0.49	10^{-6}	0.78
10^{-3}	0.01	7×10^{-4}	0.92	0.08
10^{-4}	4×10^{-3}	0.01	0.32	0.48
9×10^{-4}	0.69	0.39	2×10^{-4}	0.79
0.20	0.47	0.29	0.14	0.07

TABLE A.21 – Western Europe : p-values for hypothesis $\hat{\beta}_{ik} = 0$

A.7 Comparison based on different transition probabilities

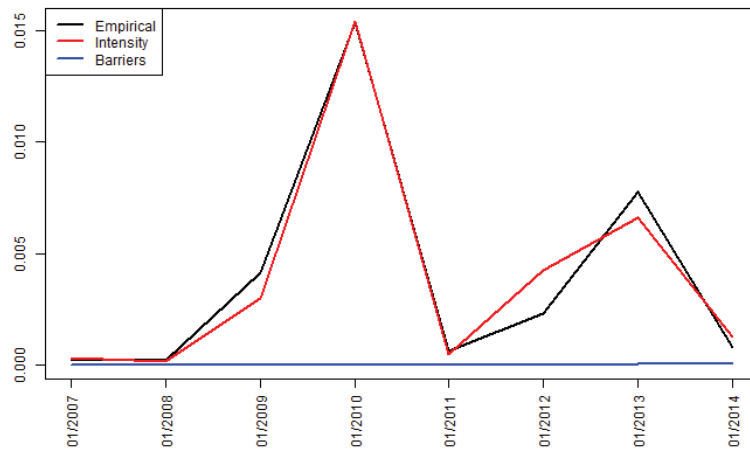


FIGURE A.1 – Migration probability from rating 1 to rating 3

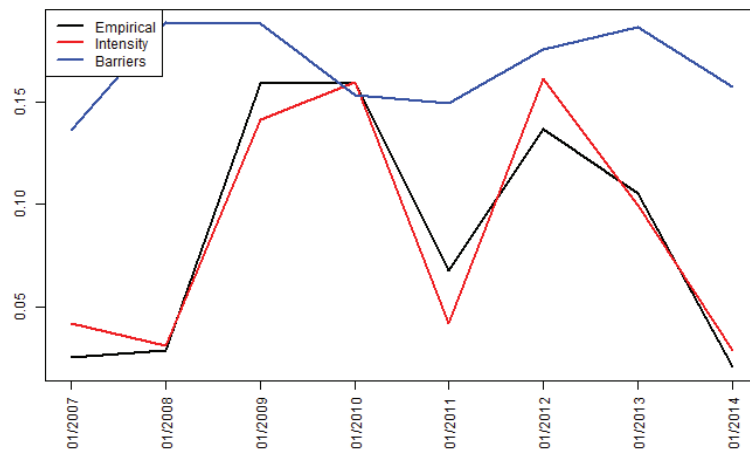


FIGURE A.2 – Migration probability from rating 2 to rating 3

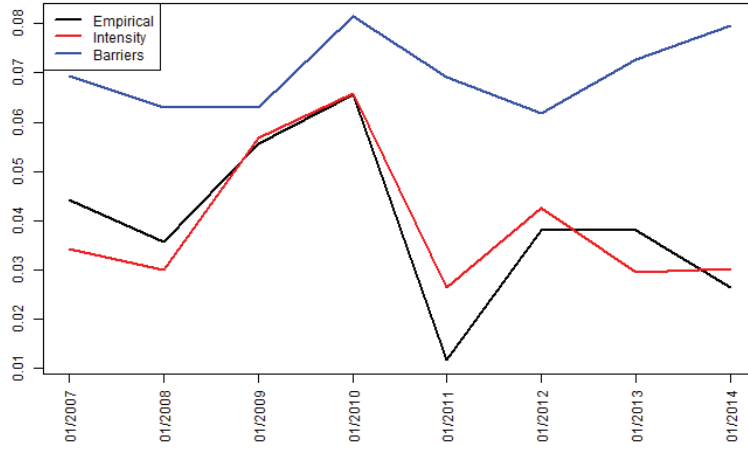


FIGURE A.3 – Migration probability from rating 4 to rating 5

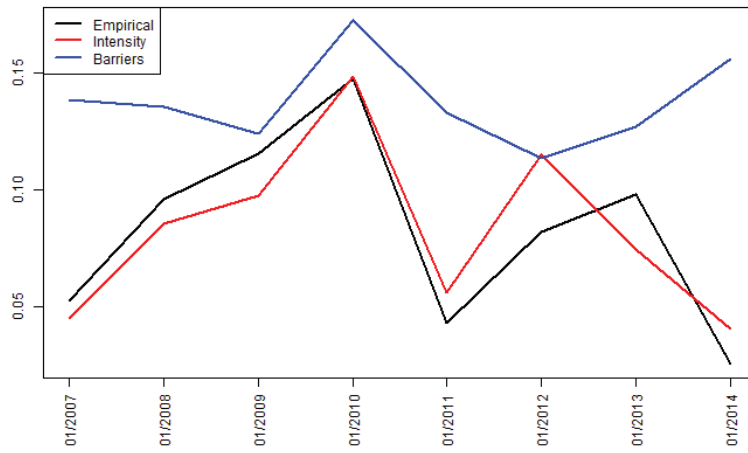


FIGURE A.4 – Migration probability from rating 5 to rating 6

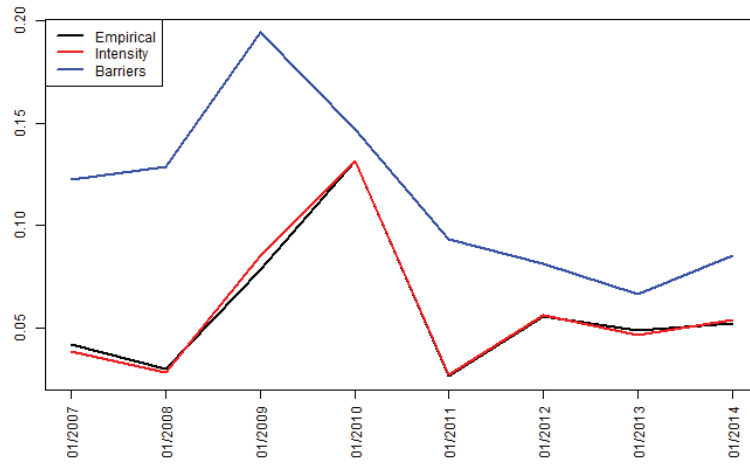


FIGURE A.5 – Migration probability from rating 6 to rating 7

Annexe B

Annexe du chapitre 3

<i>Quarter</i>	<i>Business cycle</i>	<i>Quarter</i>	<i>Business cycle</i>	<i>Quarter</i>	<i>Business cycle</i>	<i>Quarter</i>	<i>Business cycle</i>
06/2000	1.40	03/2004	0.29	12/2007	-2.98	09/2011	-2.58
09/2000	0.29	06/2004	3.24	03/2008	-5.41	12/2011	0.80
12/2000	-0.87	09/2004	1.13	06/2008	-1.19	03/2012	1.20
03/2001	-4.17	12/2004	2.01	09/2008	-1.78	06/2012	-0.21
06/2001	-1.24	03/2005	2.46	12/2008	-8.40	09/2012	0.20
09/2001	-2.74	06/2005	1.47	03/2009	-5.76	12/2012	0.39
12/2001	-3.22	09/2005	2.61	06/2009	-0.06	03/2013	1.51
03/2002	0.76	12/2005	2.81	09/2009	0.44	06/2013	0.96
06/2002	-0.20	03/2006	2.56	12/2009	-0.10	09/2013	3.03
09/2002	-2.74	06/2006	1.92	03/2010	0.60	12/2013	1.40
12/2002	-0.68	09/2006	0.43	06/2010	-0.42	03/2014	0.36
03/2003	-0.08	12/2006	-0.35	09/2010	-1.06	06/2014	1.15
06/2003	-0.33	03/2007	0.08	12/2010	0.77	09/2014	0.52
09/2003	2.73	06/2007	0.63	03/2011	1.97	12/2014	0.12
12/2003	1.47	09/2007	-0.78	06/2011	-0.48		

TABLE B.1 – *Business cycle* indicator historical data

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	-1.05	-0.59	-0.13	-0.02	-1.56	2.16	3.82	0
2	-0.14	0	-0.17	0.00	0.41	-0.03	3.01	2.58	0
3	-1.16	-0.27	0	-0.11	-0.31	-0.20	0.03	-0.52	0
4	-0.73	-0.94	-0.44	0	0.22	-0.57	0.16	0.96	0.00
5	-1.23	-0.55	0.13	0.00	0	0.39	0.24	0.82	0.68
6	-0.66	0.02	-0.42	-0.46	0.03	0	0.30	0.00	0.18
7	-1.51	0.00	-0.02	0.00	-1.01	0.04	0	0.25	1.39
8	0	0	0.02	-1.62	-2.08	-2.32	-0.29	0	0.96
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE B.2 – Sensitivity of the rating migration intensity for the $\delta(t_{k-1})$ factor

$\Delta IR \%$	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	0.03	0.02	-0.01	0.07	0.02	-0.06
Rat 2	-0.04	0.09	-0.14	-0.04	0.00	0.07
Rat 3	0.02	0.00	0.01	0.01	0.08	-0.02
Rat 4	0.15	-0.06	0.01	-0.07	-0.09	0.21
Rat 5	0.17	0.12	-0.01	-0.59	-0.12	0.01
Rat 6	0.11	-0.47	0.11	-0.13	-0.21	0.19
Rat 7	0.25	0.02	0.07	-0.07	-0.19	0.21
Rat 8	0.21	-0.13	0.08	-0.03	0.08	-0.07

TABLE B.3 – Sensitivities of obligor action to $\Delta IR \%$ for each rating

$\Delta IR \%$	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	0.58	1.00	0.66	1.00	0.68	1.00
Rat 2	0.51	1.00	1.00	0.32	0.96	0.36
Rat 3	1.00	1.00	0.89	1.00	1.00	1.00
Rat 4	0.18	0.99	0.69	0.15	0.50	0.04
Rat 5	0.00	0.87	0.39	0.00	1.00	1.00
Rat 6	0.06	1.00	0.08	0.00	0.10	0.01
Rat 7	0.01	0.95	0.71	0.10	1.00	0.10
Rat 8	0.02	1.00	0.76	0.50	0.82	1.00

TABLE B.4 – *p-value* for sensitivities of obligor action to $\Delta IR \%$ for each rating

According to the Table B.4, the variation of the short interest rates between the last period and the actual period has no significant impact on the transition probabilities between the obligor's actions.

ΔGRR	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	5.23	-8.67	1.19	-0.68	-1.66	3.57
Rat 2	2.41	-6.31	2.11	-1.78	12.79	4.65
Rat 3	3.03	-5.95	3.08	3.66	-1.76	1.99
Rat 4	-0.63	-5.74	-0.81	3.25	4.70	1.43
Rat 5	0.39	29.72	-0.62	0.29	-4.86	1.08
Rat 6	-0.10	3.02	-1.09	3.58	6.60	1.07
Rat 7	0.16	-7.12	-0.98	4.30	-4.31	4.54
Rat 8	-1.71	3.71	0.25	-4.53	3.06	-6.40

TABLE B.5 – Sensitivities of obligor action to ΔGRR for each rating

ΔGRR	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	0.03	0.06	0.79	0.61	0.64	0.13
Rat 2	0.31	1.00	0.15	0.44	0.08	0.76
Rat 3	0.00	0.32	0.01	0.00	0.27	0.54
Rat 4	0.47	0.94	0.38	0.08	0.04	1.00
Rat 5	0.60	0.06	0.66	0.56	1.00	1.00
Rat 6	0.93	0.83	0.02	0.00	0.00	0.21
Rat 7	0.71	1.00	0.12	0.01	0.05	0.00
Rat 8	0.14	0.92	0.83	0.04	0.45	0.01

TABLE B.6 – p -value for sensitivities of obligor action to ΔGRR for each rating

$\delta(t_{k-1})$	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	2.44	-3.16	0.65	-0.43	0.40	-1.32
Rat 2	1.88	1.29	1.30	-1.33	-0.27	-0.56
Rat 3	1.33	-4.99	1.22	-1.50	0.19	-1.20
Rat 4	0.88	2.19	0.92	-1.05	-0.08	-0.79
Rat 5	0.75	6.09	0.77	-0.58	11.04	-0.50
Rat 6	0.70	-4.81	0.70	-1.23	0.37	-1.02
Rat 7	1.23	5.59	1.12	-1.01	0.22	-0.52
Rat 8	0.88	2.37	0.90	-1.43	-1.12	-1.39

TABLE B.7 – Sensitivities of obligor's actions to δ_{k-1} for each rating

$\delta(t_{k-1})$	0 - 1	0 - 2	1 - 0	1 - 2	2 - 0	2 - 1
Rat 1	0.00	0.00	0.00	0.15	0.27	0.00
Rat 2	0.00	1.00	0.00	0.00	0.36	0.02
Rat 3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.53	0.00
Rat 4	0.00	1.00	0.00	0.00	0.75	0.00
Rat 5	0.00	0.28	0.00	0.00	0.00	0.00
Rat 6	0.00	0.21	0.00	0.00	0.18	0.00
Rat 7	0.00	0.16	0.00	0.00	0.46	0.01
Rat 8	0.00	0.02	0.00	0.00	0.12	0.00

TABLE B.8 – p -value for sensitivities of obligor action to δ_{k-1} for each rating

The impact of the GRR variation on the action probabilities is statistically not significant as it can be shown through the Table B.6. Some p -values are below 0.1, see for example the p -values of the ratings 1 and 3 with respect to the migration 1 - 2, or the p -values of the rating 6 with respect to the migrations 2 - 1, 2 - 3 and 3 - 1 but these cases are too rare to deduce any significant impact of the GRR variation on the obligor's behavior.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	-0.05	-0.09	-0.07	0.03	0.33	-0.01	-0.01	0
2	-0.08	0	0.02	0.00	0.13	0.00	0.42	0.11	0
3	0.00	0.02	0	0.04	3.02	0.04	0.00	0.16	0
4	0.10	0.47	-1.50	0	0.01	0.07	0.01	0.07	-0.01
5	0.10	-0.10	0.01	-2.23	0	-1.50	0.05	0.13	0.11
6	0.23	0.00	0.01	0.04	-1.93	0	0.00	0.00	-0.04
7	0.03	0.00	0.00	0.00	-0.08	-1.00	0	-2.88	-0.50
8	0	0	-0.01	-0.01	-0.15	0.02	-0.03	0	-0.52
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE B.9 – Sensitivity of the rating migration intensity for the ΔGRR factor

<i>Days</i>	<i>Rate in %</i>	<i>Discount in %</i>
4	0.08	99.99
75	0.18	99.96
95	0.17	99.95
166	0.17	99.92
167	0.17	99.92
186	0.16	99.92
257	0.16	99.89
258	0.16	99.89
278	0.16	99.88
348	0.15	99.85
370	0.15	99.85
439	0.15	99.82
461	0.15	99.81
530	0.15	99.78
531	0.15	99.78
552	0.15	99.77
622	0.16	99.73
628	0.16	99.73
644	0.16	99.72
719	0.16	99.68
738	0.17	99.67
809	0.17	99.62
901	0.18	99.55
993	0.19	99.48
1084	0.21	99.39

TABLE B.10 – EURIBOR interest rate curve

$\hat{q}_{1\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	3	4	3	0	-2	-1	-2	-2
Rat 2	7	7	7	2	0	-1	-2	-1
Rat 3	13	14	13	7	-1	0	-1	-1
Rat 4	19	19	18	11	5	5	3	4
Rat 5	19	19	18	11	2	2	1	1
Rat 6	20	19	14	9	3	2	2	2
Rat 7	17	18	14	9	-4	-4	-5	-4
Rat 8	20	20	16	9	1	1	-2	-2

TABLE B.11 – Mean 1% quantile of utilization rate per rating and simulation period during baseline scenario

$\hat{q}_{1\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	3	3	3	0	9	8	6	7
Rat 2	6	7	7	2	15	13	13	13
Rat 3	14	14	14	7	24	20	22	21
Rat 4	19	19	17	11	28	25	24	22
Rat 5	19	19	18	11	17	15	14	14
Rat 6	19	19	14	8	13	12	12	12
Rat 7	18	18	14	10	22	21	20	18
Rat 8	20	19	17	10	29	23	19	16

TABLE B.12 – Mean 1% quantile of utilization rate per rating and simulation period during adverse scenario

$\hat{q}_{25\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	7	8	7	3	2	2	2	2
Rat 2	12	14	13	7	4	4	3	4
Rat 3	19	19	19	12	4	4	3	4
Rat 4	23	23	21	15	8	8	7	7
Rat 5	22	23	21	14	5	6	5	5
Rat 6	23	23	17	11	5	5	4	5
Rat 7	21	22	18	13	1	1	1	1
Rat 8	27	28	24	16	8	7	6	5

TABLE B.13 – Mean 25% quantile of utilization rate per rating and simulation period during baseline scenario

$\hat{q}_{25\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	8	8	7	4	14	13	12	11
Rat 2	12	14	13	7	22	21	21	19
Rat 3	19	19	19	12	31	27	27	26
Rat 4	23	23	21	15	32	29	28	26
Rat 5	22	23	21	14	20	18	17	16
Rat 6	23	23	17	11	16	15	15	15
Rat 7	22	23	18	13	27	26	24	23
Rat 8	28	28	24	16	37	31	26	23

TABLE B.14 – Mean 25% quantile of utilization rate per rating and simulation period during adverse scenario

$\hat{q}_{50\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	10	10	9	5	4	4	3	3
Rat 2	15	17	16	10	6	6	6	6
Rat 3	21	21	21	14	6	6	6	6
Rat 4	25	25	23	16	10	9	9	8
Rat 5	24	24	22	15	7	7	6	6
Rat 6	25	25	19	13	6	6	5	6
Rat 7	24	25	20	15	3	3	3	3
Rat 8	31	32	28	19	11	10	9	8

TABLE B.15 – Mean 50% quantile of utilization rate per rating and simulation period during baseline scenario

$\hat{q}_{50\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	10	10	9	5	16	15	14	13
Rat 2	15	17	16	10	25	24	24	23
Rat 3	21	21	21	14	33	29	30	28
Rat 4	25	25	23	16	34	31	30	28
Rat 5	24	24	22	15	21	19	18	17
Rat 6	24	25	19	13	17	16	16	16
Rat 7	24	25	21	15	28	27	26	24
Rat 8	31	32	28	19	40	34	29	26

TABLE B.16 – Mean 50% quantile of utilization rate per rating and simulation period during adverse scenario

$\hat{q}_{75\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	12	12	12	7	5	5	5	5
Rat 2	17	20	19	12	8	8	8	8
Rat 3	23	24	23	16	8	8	7	8
Rat 4	27	27	25	18	11	11	10	10
Rat 5	25	26	24	17	8	8	8	8
Rat 6	26	26	20	14	7	7	6	7
Rat 7	26	27	22	17	5	5	5	5
Rat 8	35	35	31	23	14	14	12	11

TABLE B.17 – Mean 75% quantile of utilization rate per rating and simulation period during baseline scenario

$\hat{q}_{75\%}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
Rat 1	12	12	12	7	18	17	16	15
Rat 2	18	19	19	12	28	28	27	26
Rat 3	23	24	23	16	35	31	32	30
Rat 4	26	27	25	18	35	33	32	29
Rat 5	26	26	24	17	22	20	20	18
Rat 6	26	26	20	14	18	17	17	17
Rat 7	26	26	22	17	30	29	28	26
Rat 8	34	35	31	23	43	37	32	29

TABLE B.18 – Mean 75% quantile of utilization rate per rating and simulation period during adverse scenario

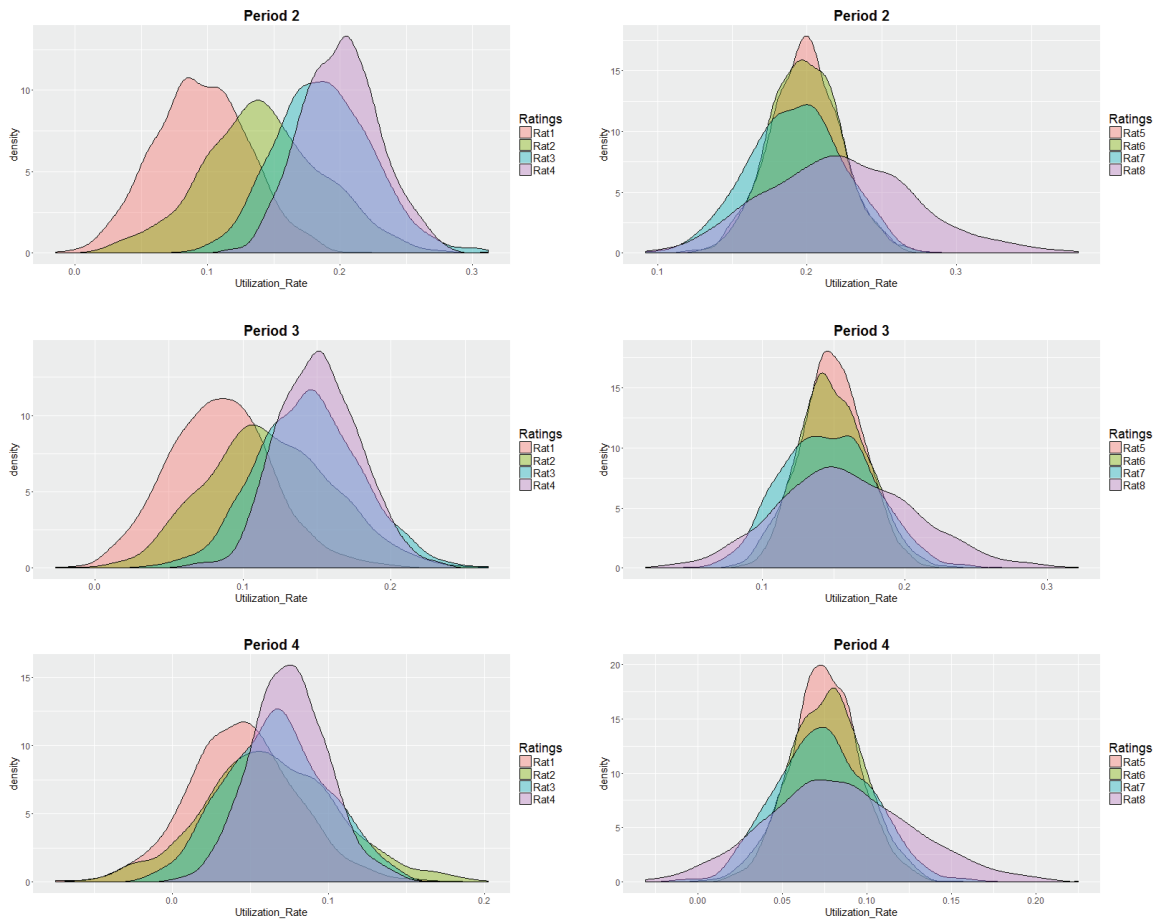


FIGURE B.1 – Utilization rate distribution during point in time simulation for periods 2, 3 and 4

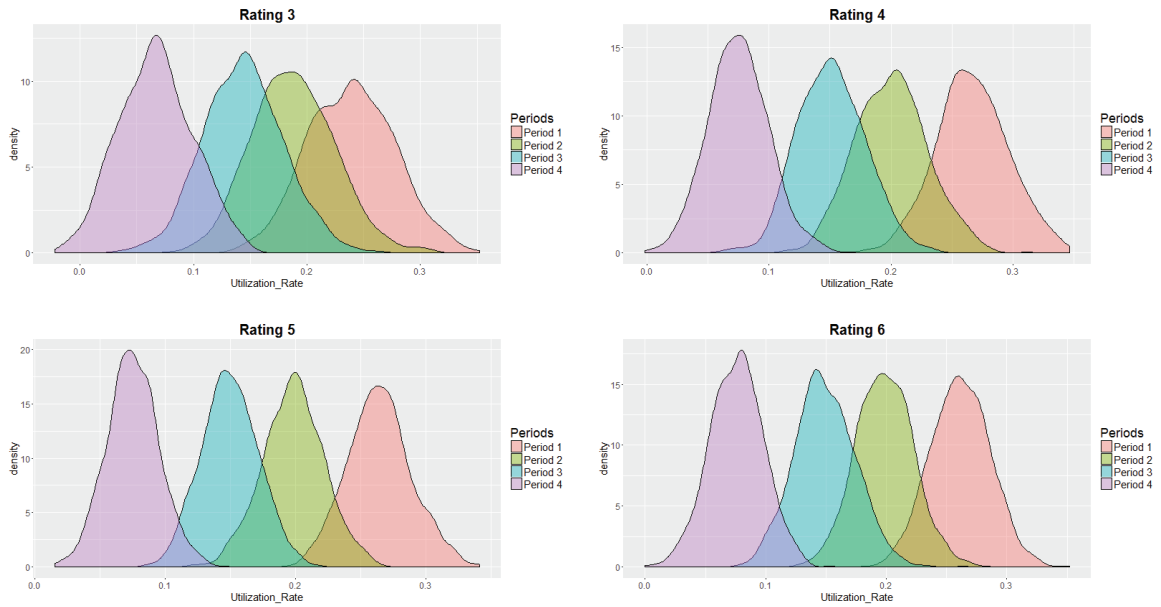


FIGURE B.2 – Utilization rate distribution evolution during point in time simulation for ratings 3, 4, 5 and 6

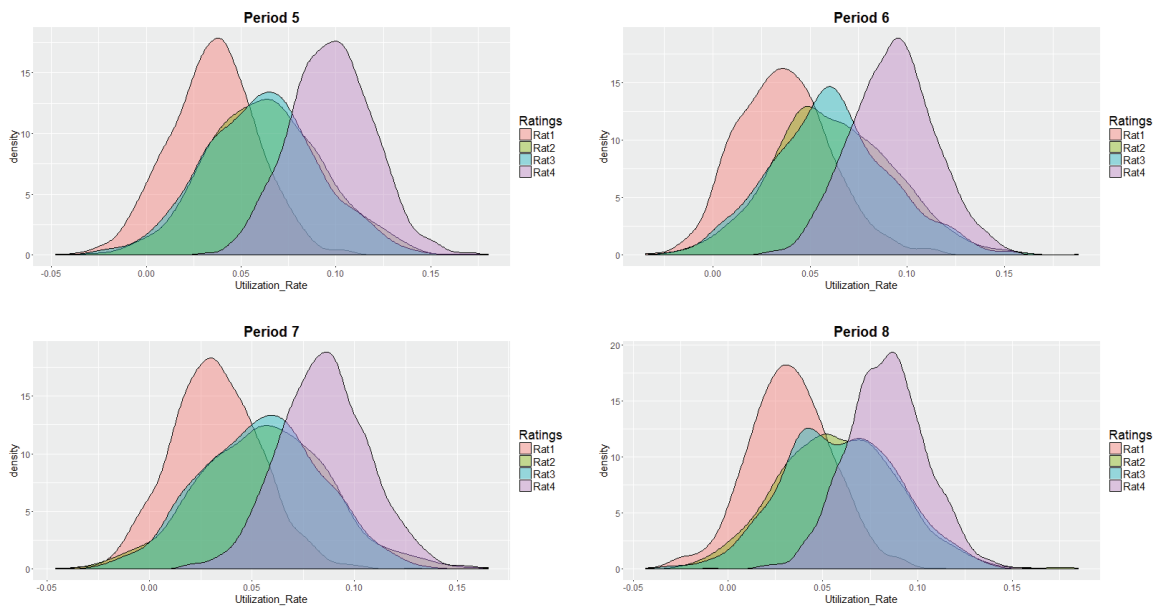


FIGURE B.3 – Utilization rate distribution for ratings 1, 2, 3, 4 during baseline simulation

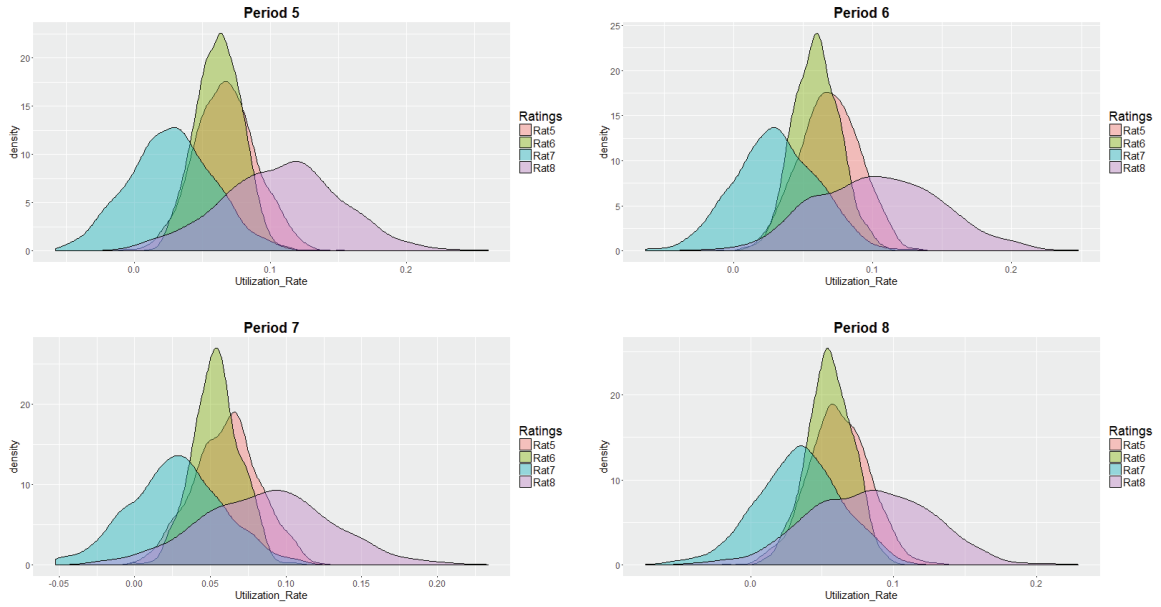


FIGURE B.4 – Utilization rate distribution for ratings 5, 6, 7, 8 during baseline simulation

Annexe C

Annexe du chapitre 4

The following results are used in the rest of the calculations :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\tilde{p}_1 \tilde{p}_2] &= \mathbb{E} [(p_1 + \tilde{\epsilon}_1) (p_2 + \tilde{\epsilon}_2)] \\ &= \mathbb{E} [p_1 p_2 + p_1 \tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_1 p_2 + \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \\ &= p_1 p_2 + \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2]\end{aligned}\tag{C.0.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\tilde{p}_1 (1 - \tilde{p}_2)] &= \mathbb{E} [\tilde{p}_1 - \tilde{p}_1 \tilde{p}_2] \\ &= \mathbb{E} [\tilde{p}_1] - \mathbb{E} [\tilde{p}_1 \tilde{p}_2] \\ &= p_1 - p_1 p_2 - \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \\ &= p_1 (1 - p_2) - \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2]\end{aligned}\tag{C.0.2}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\tilde{p}_2 (1 - \tilde{p}_1)] &= \mathbb{E} [\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1 \tilde{p}_2] \\ &= \mathbb{E} [\tilde{p}_2] - \mathbb{E} [\tilde{p}_1 \tilde{p}_2] \\ &= p_2 - p_1 p_2 - \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \\ &= p_2 (1 - p_1) - \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2]\end{aligned}\tag{C.0.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [(1 - \tilde{p}_1) (1 - \tilde{p}_2)] &= \mathbb{E} [1 - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + \tilde{p}_1 \tilde{p}_2] \\ &= 1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2 + \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \\ &= (1 - p_1) (1 - p_2) + \mathbb{E} [\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2]\end{aligned}\tag{C.0.4}$$

C.1 Calculation of $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\})$

For an ambiguity neutral DM, $V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)]$.

$$\begin{aligned}
V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) &= \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, p_1, p_2, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 E[u(w + X_1 + X_2)] + \tilde{p}_1(1 - \tilde{p}_2)E[u(w + X_1 + Y_2)] + \\
&\quad (1 - \tilde{p}_1)\tilde{p}_2 E[u(w + Y_1 + X_2)] + (1 - \tilde{p}_1)(1 - \tilde{p}_2)E[u(w + Y_1 + Y_2)]] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{p}_1 \tilde{p}_2] E[u(w + X_1 + X_2)] + \mathbb{E}[\tilde{p}_1(1 - \tilde{p}_2)] E[u(w + X_1 + Y_2)] + \\
&\quad \mathbb{E}[(1 - \tilde{p}_1)\tilde{p}_2] E[u(w + Y_1 + X_2)] + \mathbb{E}[(1 - \tilde{p}_1)(1 - \tilde{p}_2)] E[u(w + Y_1 + Y_2)] \\
&= V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \mathbb{E}[\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2] \Delta U(w; X, Y)
\end{aligned} \tag{C.1.1}$$

C.2 Calculation of $V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$

For an ambiguity neutral DM, $V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}) = \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, \alpha p_1, \alpha p_2, \alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2)]$.

$$\begin{aligned}
V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}) &= \mathbb{E}[\mathcal{U}(w, \alpha p_1, \alpha p_2, \alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2)] \\
&= \mathbb{E}[\alpha \tilde{p}_1 \alpha \tilde{p}_2 E[u(w + X_1 + X_2)] + \alpha \tilde{p}_1(1 - \alpha \tilde{p}_2)E[u(w + X_1 + Y_2)] + \\
&\quad (1 - \alpha \tilde{p}_1)\alpha \tilde{p}_2 E[u(w + Y_1 + X_2)] + (1 - \alpha \tilde{p}_1)(1 - \alpha \tilde{p}_2)E[u(w + Y_1 + Y_2)]] \\
&= \mathbb{E}[\alpha \tilde{p}_1 \alpha \tilde{p}_2] E[u(w + X_1 + X_2)] + \mathbb{E}[\alpha \tilde{p}_1(1 - \alpha \tilde{p}_2)] E[u(w + X_1 + Y_2)] + \\
&\quad \mathbb{E}[(1 - \alpha \tilde{p}_1)\alpha \tilde{p}_2] E[u(w + Y_1 + X_2)] + \mathbb{E}[(1 - \alpha \tilde{p}_1)(1 - \alpha \tilde{p}_2)] E[u(w + Y_1 + Y_2)] \\
&= V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) + \alpha^2 \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y)
\end{aligned} \tag{C.2.1}$$

C.3 Linking the WTP without ambiguity $P(w; \alpha)$ and the WTP with ambiguity $P^a(w; \alpha)$

Démonstration. Recall that equation (4.2.2) writes,

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) = V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}),$$

and the equation (4.4.1)

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{p_1, p_2\}; \{0, 0\}) + \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y).$$

Replacing the left hand side of (4.2.2) in (4.4.1) gives,

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) + \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y). \quad (\text{C.3.1})$$

In the same time, recall that the equation (4.5.1) writes

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}).$$

and the equation (4.5.2) writes,

$$V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w; \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) + \alpha^2 \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w, X, Y),$$

if the initial wealth in the equation (4.5.2) is equal to $w - P^a(w; \alpha)$, then,

$$V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) + \alpha^2 \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y),$$

replacing $V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{\alpha \tilde{\epsilon}_1, \alpha \tilde{\epsilon}_2\})$ in (4.5.1) gives,

$$V(w; \{p_1, p_2\}; \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\}) = V(w - P^a(w; \alpha); \{\alpha p_1, \alpha p_2\}; \{0, 0\}) + \alpha^2 \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) \Delta U(w - P^a(w; \alpha), X, Y). \quad (\text{C.3.2})$$

Equalizing the equations (C.3.1) and (C.3.2) gives (4.5.3).

□