

# Factorisation des régions cubiques et application à la concurrence

Nicolas Ninin

#### ► To cite this version:

Nicolas Ninin. Factorisation des régions cubiques et application à la concurrence. Théorie et langage formel [cs.FL]. Université Paris-Saclay, 2017. Français. NNT: 2017SACLS542. tel-01998279

### HAL Id: tel-01998279 https://theses.hal.science/tel-01998279

Submitted on 29 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



NNT : 2017SACLS542



## Factorisation des régions cubiques et application à la concurrence

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay préparée à l'Université Paris-Sud

École doctorale n°580 : sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC) Spécialité de doctorat: Informatique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau le 11/12/2017 par

### **Nicolas Ninin**

Composition du Jury :

Martin Raussen, Professeur, Université d'Aalborg	Président
Philippe Malbos Maître de conférence, Université Claude Bernard (Lyon 1)	Rapporteur
Tom Hirschowitz Chargé de recherche, Université de Savoie	Rapporteur
Claudia Faggian Chargé de recherche, Université Paris-Diderot (Paris 7)	Examinatrice
Steve Oudot Professeur associé, INRIA	Examinateur
Emmanuel Haucourt Professeur chargé de cours, Ecole Polytechnique	Examinateur
Pierre-Louis Curien Directeur de recherche, Université Paris-Diderot (Paris 7)	Directeur de thèse



Titre : Factorisation des régions cubiques et application à la concurrence

Mots clés : cube, programmation parallèle , factorisation, catégories

**Résumé :** Cette thèse se propose d'étudier des problèmes de factorisations des régions cubiques.

Dans le cadre de l'analyse de programme concurrent via des méthodes issues de la topologie algébrique, les régions cubiques sont un modèle géométrique simple mais

expressif de la concurrence. Tout programme concurrent (sans boucle ni branchement) est ainsi représenté comme sous partie de R^n auquel on enlève des cubes interdits

représentant les états du programme interdit par les contraintes de la concurrence (mutex par exemple) où n est le nombre de processus.

La première partie de cette thèse s'intéresse à la question d'indépendance des processus. Cette question est cruciale dans l'analyse de programme non concurrent car

elle permet de simplifier l'analyse en séparant le programme en groupe de processus indépendants. Dans le modèle géométrique d'un programme, l'indépendance se traduit

comme une factorisation modulo permutation des processus. Ainsi le but de cette section est de donner un algorithme effectif

de factorisation des régions cubiques et de le démontrer.

L'algorithme donné est relativement simple et généralise l'algorithme très intuitif suivant (dit algorithme syntaxique).

A partir du programme, on met dans un même groupe les processus qui partagent une ressource, puis l'on prend la clôture transitive de cette relation.

Le nouvel algorithme s'effectue de la même manière, cependant il supprime certaines de ces relations. En effet par des jeux d'inclusion entre cubes interdits, il est possible

d'avoir deux processus qui partagent une ressource mais qui sont toutefois indépendant. Ainsi la nouvelle relation est obtenue en regardant l'ensemble des cubes maximaux

de la région interdite. Lorsque deux coordonnées sont différentes de R dans un cube **Université Paris-Saclay** 

maximal on dira qu'elles sont reliées. Il suffit alors de faire la clôture transitive de cette relation pour obtenir la factorisation optimale.

La seconde partie de ce manuscrit s'intéresse à un invariant catégorique que l'on peut définir sur une région cubique. Celui-ci découpe la région cubique en cubes appelés "dés" auxquels on associe une catégorie appelée catégorie émincée de la région cubique. On peut voir cette catégorie comme un intermédiaire fini entre la catégorie des composantes et la catégorie fondamentale.

On peut ainsi montrer que lorsque la région cubique factorise alors la catégorie émincée associée va elle même se factoriser. Cependant la réciproque est plus compliquée et de nombreux contre exemple

empêche une réciproque totale.

La troisième et dernière partie de cette thèse s'intéresse à la structure de produit tensoriel que l'on peut mettre sur les régions cubiques. En remarquant comment les opérations booléennes sur une région cubique peuvent être obtenues à partir des opérations sur les régions cubiques de dimension inférieure on tente de voir ces régions cubiques comme un produit tensoriel des régions de dimension inférieures. La structure de produit tensoriel est hautement dépendante de la catégorie dans laquelle on la considère. Dans ce cas, si l'on considère le produit dans les algèbres de Boole le résultat n'est pas celui souhaité. Au final il se trouve que le produit tensoriel dans la catégorie des demitreillis avec zéro donne le résultat voulu.

Espace Technologique / Immeuble Discovery Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France Title : Factorization of cubicals areas and application to concurrency

**Keywords :** cube, parallel programmation, factorization, categories

#### Abstract :

This thesis studies some problems of the factorization of cubical areas.

In the setting of analysis of programs through methods coming from algebraic topology, cubical areas are geometric models used to understand concurrency.

Any concurrent programs (without loops nor branchings) can be seen as a subset of  $R^n$  where we remove some cubes which contains the states forbiden by the concurrency

(think of a mutex ) and where n is the number of process in the program.

The first parth of this thesis is interested in the question the independence of process. This question is particularly important to analyse a program, indeed being able to separate groups of process into independant part will greatly reduce the complexity of the analysis. In the geometric model, the independancy is seen as a factorization up to permutation of processus. Hence the goal

is to give a new effectiv algorithm which factorize cubical areas, and proves that it does.

The given algorithm is quite straightforward and is a generalization of the following algorithm (that we called syntactic algorithm). From the written program, groups together process that shares

a ressource, then take the transitiv closure of this relation. This algorithm is not always optimal in that it can groups together process that actually could be separated. Thus we create a new (more relax) relationship between process. From the maximal cubes of the forbiden area of the program, if two coordinate are not equal to R, then groups them together. We can then take the transitiv closure of this and get the optimal factorization .

The second part of this thesis looks at some categorical invariant that we define over cubicals areas. This categories (called the minced categorie) slice the space into cubes.

Each cubes is an object of the category and between two adjacent cubes is an arrow. We can see that this categorie is inbetween the fundamental categorie and the components categorie of the cubical area. We can then show that if the cubical area factorize then so does the minced categorie. The reciprocal is harder to get. Indeed there's a few counter example on which we cant go back.

The third and last part of this thesis is interested in seing cubical areas as some kind of product over lower dimension cubical areas. By looking at how the booleans operations of a cubical areas arise

from the same operation on lower dimensional cubical areas we understand that it can be expressed as a tensor product. A tensor product is highly dependant on the categorie on which it is build upon.

We show that to take the categorie of boolean algebra is too restrictive and gives trivial result, while the category of semi-lattice with zeros works well.

## Table des matières

1	Intr	Introduction					
	1.1	Conte	xte	5			
		1.1.1	Le dîner des philosophes	5			
		1.1.2	Vérification et analyse statique de programmes	6			
		1.1.3	Modèles classiques de la concurrence	7			
		1.1.4	Le langage $PV$	7			
		1.1.5	Modèle géométrique d'un programme PV	8			
	1.2	Contr	ibution	10			
		1.2.1	Factorisation des régions cubiques				
			et parallélisation de programmes <i>PV</i>	10			
		1.2.2	Un invariant des régions cubiques				
			qui préserve leurs factorisations	12			
		1.2.3	Structure booléenne des sous-régions cubiques d'un pro-				
			duit de région cubiques	15			
	1.3	Notat	ions	17			
<b>2</b>	Fac	torisat	ion efficace des régions cubiques	19			
<b>2</b>	<b>Fac</b> 2.1	<b>torisat</b> Motiv	ion efficace des régions cubiques ation et démarche	<b>19</b> 19			
2	<b>Fac</b> 2.1	<b>torisat</b> Motiv 2.1.1	ion efficace des régions cubiques ation et démarche	<b>19</b> 19 20			
2	<b>Fac</b> 2.1	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2	ion efficace des régions cubiques ation et démarche	<b>19</b> 19 20 23			
2	<b>Fac</b> 2.1	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche          L'importance de la sémantique géométrique          État de l'art          Démarche du chapitre	<b>19</b> 19 20 23 23			
2	Fac 2.1 2.2	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Régio	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         ns cubiques	<b>19</b> 19 20 23 23 24			
2	<b>Fac</b> 2.1 2.2	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux	<b>19</b> 19 20 23 23 24 24			
2	<b>Fac</b> 2.1 2.2	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1 2.2.2	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques	<b>19</b> 19 20 23 23 24 24 24 26			
2	<b>Fac</b> 2.1 2.2 2.3	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Régio 2.2.1 2.2.2 Mono	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques	<ol> <li>19</li> <li>20</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>24</li> <li>26</li> <li>27</li> </ol>			
2	<ul> <li>Fac 2.1</li> <li>2.2</li> <li>2.3</li> </ul>	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1 2.2.2 Monoi 2.3.1	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         Démarche du chapitre         Soubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques         Monoïde commutatif libre	<ol> <li>19</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>24</li> <li>26</li> <li>27</li> <li>27</li> </ol>			
2	<ul> <li>Fac 2.1</li> <li>2.2</li> <li>2.3</li> </ul>	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1 2.2.2 Monoi 2.3.1 2.3.2	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques         Monoïde commutatif libre         Monoïde homogène sur un alphabet	<ol> <li>19</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>24</li> <li>26</li> <li>27</li> <li>27</li> <li>28</li> </ol>			
2	<ul><li>Fac 2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li></ul>	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1 2.2.2 Monoi 2.3.1 2.3.2 2.3.3	tion efficace des régions cubiques         ation et démarche         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques         Monoïde commutatif libre         Monoïde homogène sur un alphabet         Régions cubiques et monoïdes homogènes	<ol> <li>19</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>24</li> <li>26</li> <li>27</li> <li>27</li> <li>28</li> <li>29</li> </ol>			
2	<ul><li>Fac 2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li></ul>	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1 2.2.2 Monoi 2.3.1 2.3.2 2.3.3 2.3.4	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques         ide des régions cubiques         Monoïde commutatif libre         Monoïde homogène sur un alphabet         Factorisation effective des éléments finis	<ol> <li>19</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>24</li> <li>26</li> <li>27</li> <li>27</li> <li>28</li> <li>29</li> </ol>			
2	<ul><li>Fac 2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li></ul>	torisat Motiv 2.1.1 2.1.2 2.1.3 Région 2.2.1 2.2.2 Monoi 2.3.1 2.3.2 2.3.3 2.3.4	ion efficace des régions cubiques         ation et démarche         L'importance de la sémantique géométrique         État de l'art         Démarche du chapitre         Démarche du chapitre         ns cubiques         Forme normale et cubes maximaux         Algèbre de Boole des régions cubiques         ide des régions cubiques         Monoïde commutatif libre         Monoïde homogène sur un alphabet         Factorisation effective des éléments finis         d'un monoïde homogène	<ol> <li>19</li> <li>19</li> <li>20</li> <li>23</li> <li>23</li> <li>24</li> <li>24</li> <li>26</li> <li>27</li> <li>27</li> <li>28</li> <li>29</li> <li>30</li> </ol>			

		2.4.1	Factorisation dans un monoïde homogène et			
			partition de l'ensemble des coordonnées	L		
		2.4.2	Algorithme efficace	ł		
		2.4.3	Conclusion et perspectives	;		
3	Cat	égorie	émincée d'une région cubique 49	)		
	3.1	Introd	$\operatorname{luction}$	)		
	3.2	La cat	égorie émincée	)		
		3.2.1	Une définition de la catégorie	3		
		3.2.2	La partition émincée	ł		
		3.2.3	Projection sur une grille	7		
		3.2.4	Limites de l'expressivité des grilles	)		
		3.2.5	Catégorie d'une grille et catégorie émincée	)		
	3.3	Produ	it de catégories	3		
		3.3.1	Définition et exemples	3		
		3.3.2	Propriétés des morphismes	ł		
		3.3.3	Algorithme de factorisation	j		
	3.4	Le ser	us direct	3		
	3.5	3.5 De la catégorie vers l'espace				
		3.5.1	Quelques obstructions	)		
		3.5.2	Facteurs de $Em(X)$ et partition des coordonnées 74	ł		
		3.5.3	La partition $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(X)$ induit une factorisation 78	3		
4	Pro	duit to	ensoriel de régions cubiques 85	5		
	4.1	Introd	$\mathbb{I}$	j		
	4.2	Produ	it tensoriel de modèles d'une théorie algébrique 86	;		
		4.2.1	Le cas des algèbres de Boole	7		
		4.2.2	Extensions de la théorie des demi-treillis	3		
	4.3	Produ	it tensoriel d'algèbres de Boole dans différentes exten-			
		sions of	de la catégorie des algèbres de Boole	)		
		4.3.1	Dans la catégorie des demi-treillis	L		
		4.3.2	Dans la catégorie des demi-treillis avec zéro	2		
	4.4	Applie	cation aux régions cubiques	;		
	4.5	Concl	usion générale $\ldots$	3		

## Chapitre 1

## Introduction

#### 1.1 Contexte

#### 1.1.1 Le dîner des philosophes

Le dîner de philosophes est un problème classique en théorie de la concurrence, il a été introduit par E. W. Dijkstra [19]. Trois philosophes, Platon, Descartes et Kierkegaard, sont attablés en cercle. Entre deux voisins de table se trouve *une seule* fourchette, or il est nécessaire d'en avoir deux pour commencer son plat. Pour chaque philosophe le repas se déroule selon la séquence suivante :

- 1. Prendre la fourchette de droite si elle est disponible
- 2. Prendre la fourchette de gauche si elle est disponible,
- 3. Manger son plat s'il dispose de deux fourchettes,
- 4. Reposer les deux fourchettes une fois le plat terminé.

On vérifie facilement que si l'un des philosophes parvient à prendre deux fourchettes, alors chacun des autres philosophes aura l'occasion de manger son plat. En revanche, si chacun des philosophes parvient à prendre une fourchette, alors aucun d'eux ne peut commencer son plat puisqu'il est contraint d'attendre que son voisin (de gauche) ait reposé sa fourchette. Un tel état est appelé *interblocage* (ou *deadlock*).

Dans le contexte de la norme POSIX, chaque philosophe représente un processus capable de prendre une ressource disponible et de la remettre à disposition des autres processus. Chaque fourchette est un *verrou* (aussi appelé *exclusion mutuelle* ou *mutex*), c'est-à-dire une ressource qui ne peut pas être simultanément utilisée par deux processus.



FIGURE 1.1 – Diner des cinq philosophes, toujours aussi peu de fourchettes (Image Wikimedia).

#### 1.1.2 Vérification et analyse statique de programmes

L'analyse statique regroupe toutes les techniques permettant de garantir, au moment de la compilation, qu'un programme donné vérifie certaines propriétés. Un programme dont certaines exécutions s'achèvent dans un état d'interblocage étant considéré comme défaillant, on souhaite mettre au point des techniques d'analyse permettant de garantir l'absence d'interblocage. Il est cependant très difficile d'analyser un programme concurrent, principalement à cause du non-déterminisme des exécutions. En effet, ces dernières dépendent en grande partie de l'ordonnanceur de tâches (*scheduler*) sur lequel le programmeur n'a pas (ou peu) de contrôle. L'approche consistant à étudier séparément tous les ordonnancements possibles se heurte à l'importance du nombre de cas à traiter. Afin de surmonter cette difficulté, on cherche à regrouper les ordonnancements selon des critère pertinents au regard de propriétés que l'on souhaite vérifier. Dans l'exemple des trois philosophes, l'état d'interblocage est atteint selon les différents ordonnancements suivants :

- 1. au même moment, chacun des trois philosophes prend une fourchette,
- 2. au même moment, deux des trois philosophes prennent une fourchette, le troisième prend la dernière mais avant ou après les deux autres,
- 3. à tour de rôle, chacun des trois philosophes prend une fourchette.

Les treize ordonnancements décrits ci-dessus mènent au même état et peuvent raisonnablement être qualifiés d'équivalents. Les modèles géométriques de la concurrence permettent de formaliser ce constat. Au second chapitre, nous verrons comment exploiter le modèle géométrique d'un programme pour le paralléliser, c'est-à-dire regrouper ses processus de façon à obtenir des programmes qui puissent être exécutés indépendamment les uns des autres.

#### 1.1.3 Modèles classiques de la concurrence

Les modèles historiques de la concurrence sont basés sur les entrelacements, c'est-à-dire les exécutions à chaque instant desquelles l'un des processus exécute une instruction tandis que tous les autres sont en attente. Deux exécutions sont déclarées équivalentes lorsque localement, l'ordre dans lequel deux instructions exécutées par deux processus différents peut être interverti sans que les effets qu'elles produisent diffèrent [1]. Supposons que deux processus tentent respectivement d'exécuter les actions A et B, et notons A|B la composition parallèle de ces deux processus. Le modèle par entrelacements du programme A|B est le carré suivant :

$$B \bigwedge_{A}^{A} \bigwedge_{B}^{A} B$$

On a deux chemins de x à z respectivement notés A.B et B.A. Ce sont les entrelacements possibles des actions A et B. Dans le cas où, par exemple, les actions A et B sont les affectations x := 1 et y := 2 (x et y étant deux variables distinctes) l'expressivité de notre modèle doit permettre d'indiquer que les actions A et B sont *indépendantes*, au sens où l'ordre dans lequel elles sont exécutées n'a pas d'incidence sur le contenu final des variables x et y. La relation d'équivalence entre exécutions est alors déduite de la notion d'actions indépendantes. En particulier, les exécutions A.B et B.A sont équivalentes. Inversement, si les actions A et B sont les affectations x := 1 et x := 2, l'ordre dans lequel elles sont exécutées à clairement une influence sur le contenu final de la variable x.

#### 1.1.4 Le langage PV

La norme POSIX offre divers mécanismes permettant au programmeur d'interdire localement l'exécution simultanée de deux instructions, notamment le verrou/mutex que nous avons évoqué à l'occasion de l'exemple du dîner de philosophes. Il a été introduit par E.W. Dijkstra [18] en même temps que le langage PV dont nous ferons usage pour écrire nos exemples de programmes. Un mutex a s'accompagne des deux instructions ci-dessous :

— l'instruction Pa permet à un processus de verrouiller a s'il ne l'est pas déjà, mais interrompt son exécution dans le cas contraire. Le processus attend alors que le mutex a soit déverrouillé. — l'instruction Va permet à un processus  $\pi$  de déverrouiller a dans le cas où a avait été verrouillé par  $\pi$ . Sinon l'instruction est *ignorée*.

Le dîner de trois philosophes se traduit alors par le programme ci-dessous :

$$P_1 = Pa.Pb.Va.Vb$$
$$P_2 = Pb.Pc.Vb.Vc$$
$$P_3 = Pc.Pa.Vc.Va$$

où a, b, et c sont trois verrous. Plus généralement, nous écrirons aussi des programmes utilisant des sémaphores d'arité  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire des ressources qui peuvent être utilisées simultanément par n processus (mais pas n + 1). Avec cette convention, un mutex est un sémaphore d'arité 1.

#### 1.1.5 Modèle géométrique d'un programme PV

L'utilisation d'objets géométriques pour représenter la concurrence apparaît, au moins de façon informelle, dès le début des années 70 dans les travaux de Coffman et al. [15]. Cette approche est formalisée par Carson et Reynolds [12] pour un fragment du langage PV. Dans les deux cas, les modèles obtenus sont essentiellement des sous-parties de  $\mathbb{R}^n$ , plus précisément des réunions finies de produits d'intervalles. De telles sous-parties sont appelées régions cubiques. Au début des années 90, Pratt [47] et van Glabbeek [51] introduisent les automates de dimension supérieure pour représenter les programmes parallèles. Ils étendent ainsi la relation classique entre programmes séquentiels et automates. Dans ce formalisme, un ensemble de nactions indépendantes est représenté par un «cube» de dimension n dont les arêtes parallèles sont étiquetées par l'une des actions de l'ensemble. En particulier, la «surface» d'un cube de dimension 3 est obtenue à partir de 3 actions dont deux peuvent toujours être exécutées en parallèle, alors que toutes les trois ne peuvent pas être exécutées simultanément. On peut comparer ces trois actions à trois vecteurs qui engendrent un sous-espace de dimension 2. L'idée d'appliquer des méthodes issues de la topologie algébrique à l'étude de la concurrence émerge à la fin des années 90 [21, 30] notamment en associant un espace topologique «dirigé» à chaque automate de dimension supérieure.

Dans la suite du manuscrit, les seuls processus que nous rencontrerons sont des suites d'instructions P et V (e.g. Pa.Va|Pa.Va). On impose cette restriction afin de se focaliser sur les problèmes liés à la concurrence. À titre d'exemple, le modèle du programme Pa.Va|Pa.Va (où a est un mutex) est la sous-partie de  $\mathbb{R}^2$  représentée à gauche sur la figure 1.2 tandis que le modèle du programme Pa.Va|Pa.Va (où a est un sémaphore d'arité 2) est la sous-partie de  $\mathbb{R}^3$  représentée sur la figure 1.3. À chaque processus est associé un axe le long duquel on «épingle» les instructions du processus. Les points de l'espace  $\mathbb{R}^2$  correspondent alors aux différents états du programme, ou plus précisément aux positions du pointeur d'instructions. On remarque qu'un point dans la zone grisée (que l'on notera  $F_a$ ) correspond à un état où les deux processus ont verrouillé a, ce qui est interdit par la sémantique des verrous. L'ensemble  $F_a$  est par définition la région interdite engendrée par atandis que le modèle du programme est  $\mathbb{R}^2 \setminus F_a$ . Plus généralement, chaque mutex engendre une région interdite. La région interdite F d'un programme est donc la réunion des régions interdites engendrées par les verrous qui apparaissent dans ce programme. Son modèle géométrique est défini comme la région cubique  $\mathbb{R}^n \setminus F$ , où n est le nombre de processus du programme. L'exemple de cette construction appliquée au programme

#### Pa.Pb.Vb.Va|Pb.Pa.Va.Vb

est détaillé sur la figure 1.5. En raison de la forme de son modèle, ce programme est appelé *la croix Suisse*, mais il s'apparente également au dîner de deux philosophes. À titre de comparaison, le modèle du dîner de trois philosophes est représenté à droite sur la figure 1.2.



FIGURE 1.2 – Modèles géométriques

Les programmes PV que nous considérons ne possèdent ni boucles ni branchements. Néanmoins, au prix de quelques contraintes sur les programmes que l'on prend en compte, la construction décrite précédemment peut être étendue de manière à s'affranchir de cette limitation.



FIGURE 1.3 – Le cube flottant

#### 1.2 Contribution

#### 1.2.1 Factorisation des régions cubiques et parallélisation de programmes *PV*

Reprenons l'exemple du dîner de philosophes en supposant cette fois que chaque convive dispose de deux fourchettes. Autrement dit on s'intéresse au programme PV suivant où a, b, c, d, e, et f sont des verrous.

$$P_1 = Pa.Pb.Va.Vb$$
$$P_2 = Pc.Pd.Vc.Vd$$
$$P_3 = Pe.Pf.Ve.Vf$$

Les processus sont deux à deux *indépendants* au sens où deux d'entre eux ne partagent aucune ressource. Tous les ordonnancements sont équivalents et l'analyse du programme se réduit à l'analyse de chacun des processus indépendamment des autres. Plus généralement, une notion d'indépendance entre groupes de processus est pertinente lorsqu'elle permet de réduire l'analyse d'un programme aux analyses des groupes de processus dont il est constitué, séparément les unes des autres.

Selon le point de vue adopté, on obtient diverses notions d'indépendance entre programmes PV. Dans le contexte de ce manuscrit, la plus naturelle consiste à déclarer une famille de programmes  $P_1, \ldots, P_N$  globalement indépendante lorsque le modèle géométrique de la composition parallèle de ces programmes est le produit cartésien de leurs modèles géométriques :

$$[P_1|\cdots|P_N] = [P_1]\times\cdots\times[P_N].$$



FIGURE 1.4 – Le complémentaire d'un «pilier» est une région cubique factorisable

Par exemple, le programme ci-dessous

$$P_1 = Pa.Va$$
$$P_2 = Pa.Va$$
$$P_3 = Pb.Vb$$

peut s'écrire comme la composition parallèle des groupes de processus  $\{P_1, P_2\}$  et  $\{P_3\}$ . Son modèle géométrique  $\mathbb{R}^3 \setminus ([1, 2]^2 \times \mathbb{R})$  est représenté sur la figure 1.4, on remarque alors que sa factorisation

$$\mathbb{R}^3 \setminus ([1,2]^2 \times \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2 \setminus [1,2]^2) \times \mathbb{R}$$

correspond à la parallélisation du programme

$$[P] = [P_1|P_2] \times [P_3] .$$

Le précédent exemple illustre la relation étroite qui existe entre la parallélisation d'un programme PV et la factorisation de son modèle géométrique [39], ce qui motive l'intérêt que l'on porte au calcul effectif de cette dernière. De plus, la collection des régions cubiques munie du produit cartésien forme, à permutation des coordonnées près, un monoïde commutatif libre [4]. On peut reformuler ce résultat en écrivant que la collection des factorisations d'une région cubique de dimension n forme un sous-treillis du treillis des partitions de l'ensemble  $\{1, \ldots, n\}$ . Pour cette raison, on identifie les factorisations des régions cubiques de dimension n (resp. les parallélisations des programmes à n processus) à des partitions de l'ensemble  $\{1, \ldots, n\}$ . Le résultat de décomposition unique des régions cubiques s'accompagne d'un algorithme dont la complexité est *exponentielle* en le nombre de cubes maximaux de la région à factoriser [4]. La principale contribution du second chapitre de cette thèse est un algorithme dont la complexité est *linéaire* en le nombre de cubes maximaux du *complémentaire* de la région à factoriser. Cet algorithme est en outre très simple à décrire. Un cube d'une région cubique X est un produit d'intervalles inclus dans cette région. Il est maximal dans X s'il n'est inclus dans aucun autre cube de X. À chaque cube maximal

$$I_1 \times \cdots \times I_n$$

du complémentaire de X, on associe son *support*, c'est-à-dire l'ensemble

$$\left\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid I_i \neq \mathbb{R}\right\} \,.$$

La décomposition en facteurs irréductibles de la région X correspond à la plus fine des partitions  $\mathcal{P}$  de l'ensemble  $\{1, \ldots, n\}$  telles que tout élément de  $\mathcal{P}$  soit une union de support de cubes maximaux du complémentaire de X. Concrètement, on associe à chaque support S d'un cube maximal du complémentaire de X la partition

$$\{S\} \quad \cup \quad \{\{i\} \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus S\}$$

et on calcule la borne supérieure de toutes ces partitions.

#### 1.2.2 Un invariant des régions cubiques qui préserve leurs factorisations

Chaque région cubique est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  typique des objets étudiés en topologie algébrique. Dans cette optique, on voudrait que les chemins sur le modèle d'un programme soient liés à ses exécutions. Néanmoins, le sens de lecture d'un tel programme impose un ordre sur ses états, autrement dit sur les points de son modèle. Dans le cas des automates (de dimension supérieure), cet ordre est reflété par le sens des flèches d'un graphe. Afin que les modèles géométriques satisfassent une propriété similaire, on équipe chacun d'eux d'une relation d'ordre compatible avec sa topologie sous-jacente. Dans le cas des régions cubiques, cet ordre est hérité de l'ordre produit sur l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

En conséquence, on ne s'intéresse qu'aux chemins dirigés d'un modèle géométrique X, c'est-à-dire aux applications continues et croissantes de [0, 1]dans X. Plus généralement, si X et Y sont deux modèles géométriques on se restreint aux applications continues et croissantes de X vers Y. Dans cet esprit, on définit une homotopie dirigée comme une application dirigée dont



FIGURE 1.5 – La croix Suisse

l'application continue sous-jacente est une homotopie de chemins [21, 33]. On reprend alors la construction du groupoïde fondamental [10] d'un espace topologique en considérant la clôture transitive de la relation qui identifie deux chemins dirigés lorsqu'il existe une homotopie dirigée de l'un vers l'autre. On définit ainsi la catégorie fondamentale  $\pi_1(X)$  d'une région cubique X. Dans le modèle de la croix Suisse (voir figure 1.5), il y a exactement deux classes de dihomotopie allant du point inférieur gauche au point supérieur droit. À l'instar du groupoïde fondamental d'un espace topologique, la catégorie fondamentale d'un modèle géométrique possède une infinité continue de points. Mais alors que le premier est équivalent au groupe fondamental de l'espace, il n'a y pas de construction naturelle permettant de «réduire» la seconde. La catégorie des composantes  $\overline{\pi_0}(X)$  d'une région cubique X a été introduite dans ce but [23]. Dans sa version la plus abstraite, cette construction s'applique à n'importe quelle catégorie sans boucle [32, 38], donc en particulier à  $\overrightarrow{\pi_1}(X)$  puisque la catégorie fondamentale d'une région cubique est de cette nature. Ainsi pour toute région cubique X, on a par définition

$$\overrightarrow{\pi_0}(X) = \overrightarrow{\pi_0}(\overrightarrow{\pi_1}(X))$$
.

Malheureusement, bien que la construction de la catégorie des composantes d'une région cubique soit effective, la masse de calculs qu'elle nécessite lui ôte une partie de son intérêt pratique. En revanche, l'application  $\overrightarrow{\pi_0}$  qui à chaque région cubique associe sa catégorie des composantes préserve le produit cartésien [37] et son image est contenue dans la classe des catégories finies sans boucle [38]. Or d'après [3] la collection des (classes d'isomorphismes des) catégories finies sans boucle connexes munie du produit cartésien est un monoïde commutatif libre (et dénombrable). Dès lors, il est naturel de se demander si cette application préserve les éléments irréductibles. Or on vérifie facilement que  $\mathbb{R}$  est une région cubique irréductible dont la catégorie des composantes ne l'est pas, cette dernière étant isomorphe à l'élément neutre du monoïde des catégories, c'est-à-dire la catégorie réduite à un objet et son



FIGURE 1.6 – Catégorie des composantes vs catégorie émincée de la croix Suisse

identité. On aimerait donc caractériser les régions cubiques dont la catégorie des composantes est irréductible, mais l'ampleur les difficultés techniques liées à ce problème nous ont dissuadé de l'attaquer de front. À défaut, dans le troisième chapitre, nous associons à chaque région cubique X sa catégorie émincée Em(X) (cf définition 3.2.18). On remarque pour cela que l'on peut définir pour chaque  $k \in \{1, \ldots, n\}$  une partition  $\mathcal{P}_k$  de  $\mathbb{R}$  de sorte que chaque cube maximal de X puisse s'écrire comme la réunion des cubes de la forme

 $I_1 \times \cdots \times I_n$ 

qui sont inclus dans X et tels que pour tout  $k \in \{1, \ldots, n\}$  l'intervalle  $I_k$ soit un élément de  $\mathcal{P}_k$ . On obtient en particulier une partition de X. La plus grossière des partitions de cette forme est par définition l'ensemble des objets de la catégorie Em(X). On dit alors qu'un cube  $J_1 \times \cdots \times J_n$  de cette partition est dans le futur immédiat d'un autre cube  $I_1 \times \cdots \times I_n$  de cette même partition lorsque qu'il existe un chemin dirigé du second vers le premier et que pour chaque  $k \in \{1, \ldots, n\}$  on a

$$I_k = J_k$$
 ou  $\sup(I_k) = \inf(J_k)$ .

Les morphismes de Em(X) sont les suites finies  $C_0, \ldots, C_N$  de cubes de cette partition telles que pour tout  $i \in \{1, \ldots, N\}$ , le cube  $C_i$  est dans le futur immédiat du cube  $C_{i-1}$ , modulo la plus petite congruence qui supprime les répétitions et identifie les morphismes  $C_0, C_1, C_2$  et  $C_0, C_2$  dès que  $C_2$  est dans le futur immédiat de  $C_0$ . Cette catégorie étant sans boucle, on peut en considérer la catégorie des composantes en espérant qu'elle s'approche de la catégorie des composantes de X au sens où

$$\overrightarrow{\pi_0}(Em(X)) = \overrightarrow{\pi_0}(\overrightarrow{\pi_1}(X)) .$$

Bien que nous n'ayons pas prouvé cette dernière égalité, nous avons établi que l'application  $X \mapsto Em(X)$  qui à chaque région cubique associe sa catégorie

émincée préserve le produit cartésien, et donc induit un morphisme de monoïde (cf proposition 3.4.1). Nous avons également exhibé une classe de régions cubiques irréductibles (cf définition 3.5.16) dont les catégories des composantes le sont aussi (cf théorème 3.5.29). Les éléments de cette classe sont caractérisés par la conjugaison des trois propriétés suivantes :

— la catégorie Em(X) est connexe,

— pour tout  $i \in \{1, \ldots, n\}$  il existe un morphisme  $C_0, C_1$  tel que

$$\operatorname{proj}_i(C_0) \neq \operatorname{proj}_i(C_1)$$

— les traces de deux morphismes de base co-initiaux (ou cofinaux) distincts sont disjointes, où la trace d'un morphisme  $C_0, \ldots, C_N$  est l'ensemble

$$\left\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid \operatorname{proj}_i(C_0) \neq \operatorname{proj}_i(C_N)\right\}$$

et où les morphismes de bases sont ceux de la forme  $C_0, C_1$  tels que si  $C_0, C, C_1$  est encore un morphisme, alors  $C = C_0$  ou  $C = C_1$ .

Idéalement, il faudrait vérifier que les facteurs irréductibles des modèles des programmes PV appartiennent tous à cette classe.

#### 1.2.3 Structure booléenne des sous-régions cubiques d'un produit de région cubiques

Pour toute région cubique X de dimension n, on note  $\mathcal{B}_X$  la collection des région cubique de dimension n incluse dans X. Compte tenu de l'importance sémantique du produit cartésien de régions cubiques, on souhaite décrire  $\mathcal{B}_{X\times Y}$  en fonction de  $\mathcal{B}_X$  et de  $\mathcal{B}_Y$ . Pour se convaincre que l'algèbre de Boole  $\mathcal{B}_{X\times Y}$  diffère du produit cartésien  $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$  il suffit de considérer le cas où X et Y sont des points, la première algèbre possède alors 2 éléments tandis que la seconde en contient 4. Cependant les relations ensemblistes standards

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B)$$
$$A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$$
$$\emptyset \times B = \emptyset = A \times \emptyset$$
$$(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$$

suggèrent que les éléments de  $\mathcal{B}_{X\times Y}$  de la forme  $A \times B$  pour  $A \in \mathcal{B}_X$  et  $B \in \mathcal{B}_Y$  sont les «tenseurs purs» en rapport avec un certain produit tensoriel. En effet, par analogie avec le produit tensoriel ordinaire d'algèbre commutative (cf [42] pages 629-630), on est tenté d'interpréter l'intersection comme le produit d'une algèbre commutative et la réunion comme sa somme. On formalise cette analogie via la relation entre algèbres de Boole et anneaux de Boole, ces derniers étant des exemples particulier d'algèbres (commutatives) idempotentes sur le corps fini  $\mathbb{F}_2$  [29, pp.1–20]. Puis on définit le produit tensoriel de deux algèbres de Boole comme l'algèbre de Boole qui correspond au produit tensoriel ordinaire de leurs anneaux de Boole associés. Puisque le produit tensoriel ordinaire de deux algèbres commutatives est leur coproduit [42, p.630], le produit tensoriel de deux algèbres de Boole est l'image, via la dualité de Stone, du produit cartésien de leurs espaces de Stone associés [46, p.840-841].

Dans le quatrième chapitre, nous abordons une troisième approche via l'algèbre universelle, qui offre un mécanisme systématique pour définir le produit tensoriel de deux modèles d'une théorie algébrique donnée (cf section 4.2). Dans cette optique, on constate que le produit tensoriel universel de deux algèbres de Boole dans la catégorie des algèbres de Boole est dégénéré à cause de la relation suivante (cf section 4.2.1)

$$0 = 0 \otimes 1 = 1$$

Le problème est alors de trouver une théorie algébrique plus faible que celle des algèbres de Boole et telle que le produit tensoriel universel de deux algèbres de Boole dans la catégorie des modèles de cette théorie soit une algèbre de Boole. On montre alors que la théorie des semi-treillis avec zéro convient (cf théorème 4.3.3) mais pas celle des semi-treillis (cf section 4.3.1). Notre approche s'appuie également sur un corpus d'articles [25, 26, 27, 35, 36] dont l'objet d'études est le produit tensoriel de semi-treillis avec ou sans zéro. On exploite enfin cette approche pour montrer que (cf théorème 4.4.1)

$$\mathcal{B}_{X imes Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$$
.

#### **1.3** Notations

En règle générale, nous notons X une région cubique de dimension n. Un cube est noté C (D ou E) et un intervalles I (ou J). Un programme sera noté P. Nous utilisons également P pour les partitions. Une famille de cubes sera noté  $\mathcal{M}$  ou F.

- X une région cubique,  $X^c$  son complémentaire dans  $\mathbb{R}^n$
- n la dimension de l'espace dont la région cubique X est une souspartie, le nombre de processus du programme dont X est le modèle.
- [P] modèle géométrique du programme P
- MC(X) ensemble des cubes maximaux de X
- $-\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  algèbre de Boole des régions cubiques de  $\mathbb{R}^n$
- $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique à n élément
- [1:n], ensemble des entiers de 1 à n
- $\mathcal{P}_h(A)$  monoïde des langages homogènes sur A
- $\mathcal{H}(A^*)$  monoïde *commutatif* des langages homogènes sur A, union des quotients de  $\mathcal{P}_n(A)$  sous l'action du groupe  $\mathfrak{S}_n$
- I ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$
- $\mathcal{H}_{max}$  sous-monoïde de  $\mathcal{H}(I^*)$  des cubes maximaux des régions cubiques
- $-S \circ A$  projection sur les coordonnées  $A \subset [1:n]$
- $\Psi(w_1, A, S)$  fibre de S au dessus de  $w_1$  dans les monoïdes.
- $\{[1:n\}$  partition triviale de [1:n]
- {{1}, ..., {n}} partition en singletons de [1 : n]
- $P_{X_1,\ldots,X_k}$  partition associée à la factorisation  $X = X_1 \times \ldots \times X_k$
- $P_{\sigma,X_1,\ldots,X_k}$  la partition  $P_{X_1,\ldots,X_k}$  où l'on applique la permutation  $\sigma$
- $P_{irred}(X)$  partition-factorisation de X en irréductibles
- $P_{syntaxique}$  partition obtenue en appliquant l'algorithme syntaxique
- Trace<sub>P</sub>(C) trace d'un cube par rapport à une partition P
- $\Pi_i$  projection sur i,  $\Pi_{P_i}$  projection sur les coordonnées  $P_i$  (équivalent à  $\circ P_i$ )
- $-\mathcal{M}$  ensemble fini de cubes recouvrant X
- $P_{\mathcal{M}}$  ensemble des partitions admissibles pour  $\mathcal{M}$
- $P_{finest,\mathcal{M}}$  partition la plus fine admissible pour un ensemble de cubes  $\mathcal{M}$
- supp(C) coordonnées finie de C
- $P(\operatorname{supp}(C))$  partition formée des singletons et d'un bloc égal à  $\operatorname{supp}(C)$
- $P_{finest,\mathcal{M}}$  plus fine partition de  $P_{\mathcal{M}}$ , égale à  $P_{irred}$  si  $\mathcal{M} = MC(X)$
- MFC(X) ensemble des cubes interdits maximaux de X, égal à  $MC(X^c)$
- $-\mathcal{B}(F)$  algèbre de Boole engendrée par la famille d'intervalles F
- $Atom(\mathcal{B}(F))$  atomes de  $\mathcal{B}(F)$ ,  $AtomConnex(\mathcal{B}(F))$  composantes connexes

des atomes de  $\mathcal{B}(F)$ 

- $\mathcal{P}_i$  partition de  $\mathbb{R}$
- grille<sub> $\mathcal{P}$ </sub>( $I_i$ ) position de  $I_i$  dans  $\mathcal{P}$
- $-grille_{\mathcal{P}}(C)$  vecteur (de  $\mathbb{Z}^n$ ) représentant la position de C dans la partition  $\mathcal{P}$
- Cat(Z) catégorie de la grille Z
- $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  base de la catégorie  $\mathcal{C}$
- -Trace(x, y) trace entre deux points d'une grille, Trace(m) trace d'un morphisme
- $Factor_{\mathcal{C},...,\mathcal{C}_k}(f)$  facteurs du morphisme f par rapport à la décomposition  $C = C_1 \times \dots \times C_k$  - C ensemble des morphismes de base de la catégorie émincée issus de
- C

## Chapitre 2

# Factorisation efficace des régions cubiques

#### 2.1 Motivation et démarche

A la section 1.2.1 nous avons donné un exemple qui suggère une relation entre la factorisation d'un programme et celle de son modèle géométrique. Dans ce chapitre, nous formaliserons la seconde notion puis nous rappellerons que le modèle géométrique de tout programme PV, et plus généralement toute région cubique, admet une factorisation unique. À cette occasion, nous décrirons et prouverons un algorithme qui effectue cette décomposition. En termes d'efficacité, notre algorithme surclasse l'algorithme combinatoire introduit par Balabonski et Haucourt [4]. Reprenons l'exemple d'un programme PV dont la parallélisation est immédiate.

Exemple 2.1.1.

$$P := \pi_1 = Pa.Va$$

$$\parallel \pi_2 = Pb.Vb$$

$$\parallel \pi_3 = Pb.Vb$$

$$\parallel \pi_4 = Pa.Va$$

On suppose ici que a et b sont des mutex. Les groupes de processus  $\{\pi_1, \pi_4\}$  et  $\{\pi_2, \pi_3\}$  sont clairement indépendants en un sens similaire à celui de la section 1.2.1. Dans la suite on écrira  $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$  plutôt que  $\{\{\pi_1, \pi_4\}, \{\pi_2, \pi_3\}\}$  en se référant aux positions auxquelles les processus apparaissent dans le code source du programme. Nous serons ainsi amenés à manipuler des partitions de l'ensemble [1 : 4] dont les éléments seront vus comme les identificateurs des processus du programme.

**Problème de l'ordre** En dépit du fait que les groupes de processus  $\{\pi_1, \pi_4\}$  et  $\{\pi_2, \pi_3\}$  sont indépendants, il serait faux d'écrire que le modèle géométrique du programme P est *strictement* égal au produit Cartésien  $[\pi_1|\pi_4] \times [\pi_2|\pi_3]$  bien que les deux soient *isomorphes* à permutation des coordonnées près. De même, bien que les programmes

$$Pa.Va|Pa.Va|Pb.Vb|Pb.Vb$$
 et  $Pa.Va|Pb.Vb|Pb.Vb|Pa.Va|Pb.Vb|Pb.Vb|Pa.Va|Pb.Vb|Pa.Va|Pb.Vb|Pa.Va|Pb.Vb|Pa.Va|Pb.Vb|Pb.Vb|Pa.Va|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb.Vb|Pb$ 

ne soient pas *strictement égaux*, ils le sont au changement près de l'ordre dans lequel sont décrits les processus. La factorisation des régions cubiques doit donc se faire à permutation des coordonnées près.

#### 2.1.1 L'importance de la sémantique géométrique

Dans tous les programmes que nous avons abordés jusqu'à présent, la parallélisation découle de l'absence de ressource commune. Nous allons maintenant traiter des cas plus subtils.

#### Factorisation syntaxique

Nous dirons que deux processus sont syntaxiquement liés lorsqu'il partagent une ressource. Étant donné un programme P, on note  $\sim_P$  la plus petite relation d'équivalence sur l'ensemble des (identificateurs des) processus de P telle que  $i \sim_P j$  quand les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  processus sont syntaxiquement liés. Les classes d'équivalence de cette relation induisent une parallélisation du programme P. On retrouve en particulier la factorisation du programme de l'exemple 2.1.1. L'exemple du dîner de n-philosophes est plus instructif.

Exemple 2.1.2 (Le dîner de n-philosophes).

$$\Sigma := \pi_1 = Pa_1.Pa_2.Va_1.Va_2$$
$$\parallel \pi_2 = Pa_2.Pa_3.Va_2.Va_3$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\mid \pi_n = Pa_n.Pa_1.Va_n.Va_1$$

Chaque processus  $\pi_i$ , pour  $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ , partage le mutex  $a_{i+1}$  avec le processus  $\pi_{i+1}$  tandis que les processus  $\pi_n$  et  $\pi_1$  partagent la ressource  $a_1$ . Il n'y a donc qu'une seule classe d'équivalence. Cet exemple révèle que deux processus (e.g.  $\pi_i$  et  $\pi_{i+2}$ ) peuvent ne partager aucune ressource et être néanmoins liés dans le contexte du programme dont ils font partie.

**Cubes interdits et liens syntaxiques** Chaque ressource *a* apparaissant dans un programme engendre une région interdite  $F_a$  qui peut s'écrire comme une réunion de cubes deux à deux déconnectés. On peut même vérifier que la région cubique  $F_a$  est un produit cartésien dont chaque composante est une réunion finie d'intervalles de  $\mathbb{R}$ . On constate en particulier que si la  $i^{\text{ème}}$ projection de  $F_a$  (qui est une sous-partie de  $\mathbb{R}^n$ ) n'est pas vide et diffère de  $\mathbb{R}$ , alors le  $i^{\rm ème}$  processus du programme P utilise la ressource a. On en déduit que si la  $j^{\text{ème}}$  projection de  $F_a$  n'est pas vide et diffère également de  $\mathbb{R}$ , alors les  $i^{\rm ème}$  et  $j^{\rm ème}$  processus sont syntaxiquement liés par la ressource a. L'exemple qui suit montre que la réciproque n'est pas vraie. Si l'arité du sémaphore a est supérieure ou égale à 2, alors la région interdite du programme Pa.Va|Pa.Va|est vide bien que les deux processus soient syntaxiquement liés. Néanmoins, il semble naturel de considérer que les deux processus de ce programme sont indépendants puisqu'ils n'entrent pas en compétition pour la ressource a, cette dernière étant suffisamment abondante pour pallier simultanément leurs besoins respectifs. Ce n'est plus le cas si, toujours avec un sémaphore a d'arité 2, on considère le programme Pa.Va|Pa.Va|Pa.Va.

**Exemple 2.1.3** (En dimension 3). La région interdite du dîner de trois philosophes (cf section 1.1.4) est la réunion de trois piliers, à savoir  $F_a = [1,3] \times \mathbb{R} \times [2,4]$ ,  $F_b = [2,4] \times [1,3] \times \mathbb{R}$ , et  $F_c = \mathbb{R} \times [2,4] \times [1,3]$ . On retrouve ainsi les liens syntaxiques entre les processus de ce programme. La région interdite engendrée par le sémaphore d'arité 2 dans le programme Pa.Va|Pa.Va|Pa.Va est le cube  $[1,2]^3$  (cf figure 1.3). Là encore on retrouve le lien syntaxique entre les processus du programme.

Nous avons déjà signalé un lien entre la parallélisation d'un programme PV et la factorisation de son modèle géométrique. Nous avons également établi, dans cette section, un lien entre les projections des régions interdites engendrées par les ressource d'un programme d'une part, et la parallélisation de ce programme d'autre part. Il est donc naturel d'imaginer que, d'une manière plus générale, il puisse exister un lien entre la factorisation d'une région cubique X et les projections des éléments d'une certaine famille de cubes qui recouvre le complémentaire de X dans  $\mathbb{R}^n$ . En effet, si l'on suppose que X se factorise en  $X_1 \times X_2$  alors le complémentaire de X est égal à

$$X_1^c \times \mathbb{R}^{d_2} \cup \mathbb{R}^{d_1} \times X_2^c$$

où  $d_i$  est la dimension de  $X_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

**Définition 2.1.4.** Un cube de dimension n est le produit cartésien de n intervalles non vides (et possiblement différents les uns des autres). On dit

qu'un cube inclus dans une sous-partie de  $\mathbb{R}^n$  est un cube de cette sous-partie. Dès lors, un cube maximal d'une sous-partie de  $\mathbb{R}^n$  est un cube de cette sous-partie qui n'est strictement inclus dans aucun autre cube de cette même sous-partie. Une famille finie de cubes est appelée recouvrement cubique de la réunion X de ses éléments. Si ce recouvrement contient exactement tous les cubes maximaux de X, on dit qu'il est maximal et on le note MC(X).

Les cubes maximaux du complémentaire de X sont donc de la forme  $C_1 \times \mathbb{R}^{d_2}$  ou  $\mathbb{R}^{d_1} \times C_2$  où  $C_i$  est un cube maximal de  $X_i^c$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ . Par contraposée, si l'un des cubes maximaux du complémentaire de X n'est pas de cette forme, alors on ne peut pas factoriser sous la forme  $X_1 \times X_2$  où  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) est la projection de X sur les  $d_1$  premières (resp.  $d_2$  dernières) composantes. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous nous intéressons au recouvrement maximal de toute région cubique.

#### Le problème du recouvrement

 $F_c =$ 

La factorisation syntaxique n'est pas optimale parce qu'elle prend en compte des ressources a dont la région interdite associée  $F_a$  ne contient aucun cube maximal de la région interdite F du programme. L'exemple qui suit illustre ce phénomène.

**Exemple 2.1.5.** On considère le programme suivant, où a et b sont des mutex et c est un sémaphore d'arité trois.

$$P := \pi_1 = Pa.Pc.Vc.Va$$
$$\parallel \pi_2 = Pa.Pc.Vc.Va$$
$$\parallel \pi_3 = Pb.Pc.Vc.Vb$$
$$\parallel \pi_4 = Pb.Pc.Vc.Vb$$

L'analyse syntaxique indique que tous les processus sont liés. Les régions interdites engendrées par les ressources a, b et c sont respectivement

$$F_{a} = [1,4]^{2} \times \mathbb{R}^{2},$$

$$F_{b} = \mathbb{R}^{2} \times [1,4]^{2},$$

$$[2,3] \times [2,3] \times \mathbb{R} \times [2,3] \times \mathbb{R} \cup$$

$$[2,3] \times [2,3] \times \mathbb{R} \times [2,3] \cup$$

$$[2,3] \times \mathbb{R} \times [2,3] \times [2,3] \cup$$

$$\mathbb{R} \times [2,3] \times [2,3] \times [2,3] .$$

On constate que  $F_c$  est inclus dans la réunion  $F_a \cup F_b$  et donc que  $F_c$  ne contribue pas à la région interdite du programme. On parvient à la même

 $\operatorname{et}$ 

conclusion en remarquant qu'à cause du mutex a (resp. b), les processus  $\pi_1$  et  $\pi_2$  (respectivement  $\pi_3$  et  $\pi_4$ ) ne peuvent pas détenir plus d'une occurrence de la ressource c. Ainsi le programme P n'a jamais besoin de plus de deux occurrences de la ressource c. On peut donc paralléliser le programme P en regroupant les deux premiers processus d'une part, et les deux derniers d'autre part.

Idée de l'algorithme On suppose que  $\mathcal{M}$  est un recouvrement cubique du complémentaire d'une région cubique X de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\sim_X$  la plus petite relation d'équivalence sur l'ensemble  $\{1, \ldots, n\}$  telle que  $i \sim_X j$  dès qu'il existe un élément de  $\mathcal{M}$  dont les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  projections diffèrent de  $\mathbb{R}$ . À permutation des coordonnées près, on peut écrire X comme le produit cartésien des régions cubiques  $X_{\kappa}$  où pour chaque  $\sim_X$ -classe d'équivalence  $\kappa = \{i_1 < \cdots < i_{\text{card}(\kappa)}\}, X_{\kappa}$  est l'image de X par la projection :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{\operatorname{card}(\kappa)} \\
(x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_{i_1}, \dots, x_{i_{\operatorname{card}(\kappa)}})
\end{array}$$

On montrera (c'est le résultat principal de ce chapitre) que si  $\mathcal{M}$  est le recouvrement maximal du complémentaire de X, alors la factorisation de Xest optimale. À ce propos, on précise que l'algorithme de calcul du recouvrement maximal d'une région cubique à partir d'un recouvrement quelconque est extrêmement coûteux par rapport à celui que nous venons de décrire.

#### 2.1.2 État de l'art

Le problème de la décomposition unique dans les algèbres de processus a été abordé pour la première fois par R. Milner et F. Moller [45]. Plusieurs extensions ont été étudiées [13, 14, 34]. Le lien entre les décompositions uniques dans les monoïdes commutatifs et dans les algèbres de processus a également été étudié par B. Luttik dans [43, 44], dans lesquels il obtient notamment un résultat de décomposition unique sur une classe particulière d'algèbre de processus. L'étude de la décomposition unique de régions cubiques a été obtenue par E. Haucourt et T. Balabonski [4] mais l'algorithme qu'ils proposent prend en entrée le recouvrement cubique maximal de la région X plutôt que celui de son complémentaire. Son cadre d'application est plus large mais il est aussi extrêmement moins efficace.

#### 2.1.3 Démarche du chapitre

Il nous faut à présent rentrer dans les détails techniques, afin de démontrer la correction de l'algorithme.

#### **Régions cubiques**

Nous donnons quelques propriétés des régions cubiques. Notamment, la forme normale associée aux cubes maximaux. La méthode du double complémentaire qui permet de calculer ces cubes maximaux est présentée. On évoque également la structure d'algèbre de Boole de l'ensemble des régions cubiques. Cette dernière sera le point central du dernier chapitre.

#### Monoïde et factorisation

Nous donnons une caractérisation des monoïdes commutatifs libres adaptés aux besoins de la preuve de la correction de l'algorithme. En effet, un monoïde commutatif est dit libre quand chacun de ses éléments s'écrit de manière unique en éléments irréductibles.

#### Partitions et factorisation

Les partitions de l'ensemble [1:n] qui correspondent à des factorisations de X forment un sous-treillis du treillis usuel des partitions de l'ensemble [1:n].

#### Cubes maximaux et partition en irréductibles

On donne la preuve du résultat principal de ce chapitre.

#### 2.2 Régions cubiques

**Exemples de régions cubiques** L'ensemble vide,  $\mathbb{R}^n$ , tout singleton contenant un point de  $\mathbb{R}^n$ , de même que les modèles géométriques des programmes PV sont des régions cubiques (cf. figure 2.1 et la proposition 2.2.8). Un disque de rayon non nul n'est pas une région cubique.

#### 2.2.1 Forme normale et cubes maximaux

Une région cubique X possède, en général, une infinité de recouvrements cubiques, nous prendrons son recouvrement cubique maximal MC(X) comme forme normale. Dans l'exemple de la figure 2.1, MC(X) est composé des quatre cubes autour du carré grisé. On constate qu'un point de X peut appartenir à plusieurs cubes maximaux.

**Lemme 2.2.1.** Soit C un cube de  $\mathbb{R}^n$  alors, le complémentaire de C possède au plus 2n cubes maximaux.



FIGURE 2.1 – Modèle géométrique du programme (PaVa)|(PaVa). À droite sont représenté les quatre cubes qui recouvrent le complémentaire du cube (deux rouges, et deux en ligne)

*Démonstration.* Soit le cube  $I_1 \times \cdots \times I_n$ , alors tout sous-cube maximal de son complément peut s'écrire

$$\mathbb{R} \times \cdots \times \underbrace{J_k}_{k \text{th position}} \times \mathbb{R}$$

avec  $J_k$  un sous-intervalle maximal du complément de  $I_k$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 2.2.2.** En dimension deux, on a bien les quatre cubes maximaux qui entourent un carré, celui du dessous, de bas, du dessus et de gauche.

**Proposition 2.2.3.** Un ensemble  $X \subset \mathbb{R}^n$  est une région cubique si et seulement si son recouvrement cubique maximal MC(X) est fini.

La méthode du double complémentaire qui suit va nous permettre de démontrer le sens difficile de cette proposition. Cette dernière nous sert à calculer les cubes maximaux d'une région cubique à partir de n'importe lequel de ses recouvrements cubiques.

#### Méthode du double complémentaire

Les cubes maximaux du complémentaire d'un cube nous sont donnés par le lemme 2.2.1, nous allons exploiter ce résultat.

**Lemme 2.2.4.** Soient C et C' des recouvrements cubiques finis de X et X' tels que  $MC(X) \subset C$  et  $MC(X') \subset C'$ . Alors la famille de n-cubes

$$\{C \cap C' \mid C \in \mathcal{C} \ et \ C' \in \mathcal{C}'\}$$

contient tous les cubes maximaux de  $X \cap X'$ .

Démonstration. Soit C'' un cube de  $X \cap X'$  et C et C' deux sous-cubes de X et X' tel que  $C'' \subseteq C$  et  $C'' \subseteq C'$ . Alors  $C \cap C'$  est un sous-cube de  $X \cap X'$  contenant C''. Tout cube de  $X \cap X'$  est donc contenu dans un cube de  $C'' \subseteq C'$ , c'est en particulier vrai pour les cubes maximaux.

**Proposition 2.2.5.** Soit  $C = \{C_1, ..., C_k\}$  un ensemble fini de cubes et X leur réunion. Alors le complémentaire  $X^c$  de X possède un nombre fini de cubes maximaux.

*Démonstration.* Puisque  $X = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ , par les lois de De Morgan on a l'égalité

$$X^c \quad = \quad \bigcap_{i=1}^k C_i^c$$

La finitude du recouvrement cubique maximal de  $C_i^c$  est donnée par le lemme 2.2.1. Pour chaque  $C_i$ , la famille  $MC(C_i^c)$  est le recouvrement cubique maximal de  $C_i^c$ . D'après le lemme 2.2.4 on sait que la famille finie

$$\{D_1 \cap \dots \cap D_k \mid D_i \in \mathrm{MC}(C_i^c)\}$$

contient tous les cubes maximaux de  $X^c$ .

Nous pouvons dès lors démontrer la proposition 2.2.3

Démonstration. Si MC(X) est fini alors X est une région cubique, car les cubes maximaux recouvrent X. Réciproquement, si X est une région cubique, alors il existe un recouvrement cubique fini  $\{C_1, ..., C_k\}$  de X tel que :

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$$

Puisque  $X = (X^c)^c$ , on applique la proposition 2.2.5 à  $X^c$ .

#### 2.2.2 Algèbre de Boole des régions cubiques

**Définition 2.2.6.** On notera  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  la famille des régions cubiques de dimension n.

Nous venons de montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.2.7.** La collection  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  est une sous-algèbre de Boole de la collection des sous-parties de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.2.8.** Le modèle géométrique d'un programme PV est une région cubique.

Démonstration. Soit P un programme PV avec n processus. Son modèle géométrique X est défini comme la sous-partie de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle on a retiré un nombre fini de cubes issus des contraintes liées aux ressources. Soit  $\{C_1, ..., C_k\}$  l'ensemble de ces cubes, alors on a

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)^c$$

Ainsi X est le complémentaire d'une région cubique (i.e  $X^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ), donc  $X = (X^c)^c$  est aussi une région cubique.

#### 2.3 Monoïde des régions cubiques

Cette section reprend essentiellement les résultats de [4] dont on aura besoin pour la suite.

#### 2.3.1 Monoïde commutatif libre

La factorisation unique en éléments irréductibles est la propriété caractéristique des monoïdes commutatifs libres [41].

**Définition 2.3.1.** Un monoïde est un ensemble E muni d'une loi de composition interne  $*: E \to E$  associative et d'un élément neutre  $\epsilon$ . Il est dit commutatif si \* est commutative.

**Définition 2.3.2.** Un élément m d'un monoïde commutatif M est dit inversible s'il existe un élément m' tel que  $m' * m = \epsilon$ , où  $\epsilon$  est l'élément neutre. Un tel élément m' est unique, c'est par définition l'inverse de m.

**Définition 2.3.3.** Un élément non-inversible m d'un monoïde commutatif M est dit irréductible si pour tous éléments  $x, y \in M$ , m = x \* y implique que l'un des éléments x et y est inversible.

**Définition 2.3.4.** Un monoïde commutatif est dit libre si chacun de ses éléments peut s'écrire de façon unique comme un produit d'éléments irréductibles à une permutation des facteurs près. C'est la propriété de décomposition unique. **Exemple 2.3.5.** Le monoïde commutatif  $(\mathbb{N}, +, 0)$ . Son seul élément irréductible est 1.

**Exemple 2.3.6.** Le monoïde commutatif  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, *, 1)$  est libre, ses éléments irréductibles sont les nombres premiers au sens usuel du terme.

Nous allons maintenant définir un monoïde commutatif libre basé sur des ensembles de mots dont tous les éléments sont de même longueur. Puis on spécifiera la construction au cas où l'alphabet est l'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$ . De fait un mot sur cet alphabet correspond à un cube.

#### 2.3.2 Monoïde homogène sur un alphabet

**Définition 2.3.7.** Soit  $\mathbb{A}$  un ensemble appelé alphabet. Le monoïde non commutatif des mots sur  $\mathbb{A}$  a pour éléments les suites finies d'éléments de  $\mathbb{A}$  muni de la concaténation : étant donnés deux mots w et w' de longueurs n et n', la concaténation w \* w' est un mot de longueur n + n' défini par

$$(w * w')_k = \begin{cases} w_k & si & 1 \leq k \leq n \\ w'_{k-n} & si & n+1 \leq k \leq n+n' \end{cases}$$

**Définition 2.3.8.** On étend la concaténation des mots à la collection  $\mathcal{P}(\mathbb{A}^*)$  des ensembles de mots sur  $\mathbb{A}$  en posant

$$S * S' := \{ w * w' \mid w \in S; w' \in S' \}$$

pour tous  $S, S' \in \mathcal{P}(\mathbb{A}^*)$ .

**Définition 2.3.9.** Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe des permutations de l'ensemble [1:n].

Le groupe  $\mathfrak{S}_n$  agit naturellement sur les mots de longueur n : pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et w un mot de longueur n on a

$$\sigma \cdot w := w \circ \sigma^{-1} = (w_{\sigma^{-1}(1)} \cdots w_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Cette action s'étend tout aussi naturellement aux ensembles de mots dont tous les éléments sont de longueur n. Un sous-ensemble H de  $\mathbb{A}^*$  est dit homogène si tous les mots qu'il contient sont de même longueur  $n \in \mathbb{N}$ . L'entier n est par définition la longueur de H que l'on note  $\ell(H)$ . Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit donc sur les ensembles homogènes de longueur n en appliquant la même permutation à tous les mots.

$$\sigma \cdot H := \{ \sigma \cdot w \mid w \in H \}$$

La collection  $\mathcal{P}_h(\mathbb{A}^*)$  des sous-ensembles homogènes de  $\mathbb{A}^*$  forme un sousmonoïde de  $\mathcal{P}(\mathbb{A}^*)$  que l'on munit de la relation d'équivalence ~ qui relie H et H' lorsque  $\ell(H) = \ell(H') = n$  et qu'il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $H' = \sigma \cdot H$ . On définit la juxtaposition  $\sigma \otimes \sigma' \in \mathfrak{S}_{n+n'}$  de deux permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n'}$  de la manière suivante :

$$\sigma \otimes \sigma'(k) := \begin{cases} \sigma(k) & \text{if } 1 \leq k \leq n \\ (\sigma'(k-n)) + n & \text{if } n+1 \leq k \leq n+n' \end{cases}$$

La juxtaposition satisfait la loi d'échange

$$(\sigma \cdot H) \ast (\sigma' \cdot H') = (\sigma \otimes \sigma') \cdot (H \ast H')$$

dont on déduit que la relation ~ est une congruence sur le monoïde  $\mathcal{P}_h(\mathbb{A}^*)$ .

**Définition 2.3.10.** Le monoïde homogène  $\mathcal{H}(\mathbb{A}^*)$  sur un ensemble  $\mathbb{A}$  est le monoïde quotient  $\mathcal{P}_h(\mathbb{A}^*)/\sim$  duquel on enlève l'ensemble vide. Son seul élément inversible est le singleton  $\{\epsilon\}$  où  $\epsilon$  est le mot vide.

La proposition qui suit est prouvée dans [4].

**Proposition 2.3.11.** Le monoïde homogène sur  $\mathbb{A}$  est libre.

#### 2.3.3Régions cubiques et monoïdes homogènes

Un point de  $\mathbb{R}^n$  peut être vu comme un mot de longueur *n* sur l'alphabet  $\mathbb{R}$ . Par extension, toute sous-partie de  $\mathbb{R}^n$  (donc en particulier toute région cubique de dimension n), peut être vue comme un élément de  $\mathcal{P}_h(\mathbb{R}^*)$ .

**Exemple 2.3.12.** Considérons la région cubique  $X = \mathbb{R}^2 \setminus [1, 2] \times [0, 4]$ . L'action de la transposition (1, 2) a pour effet d'échanger les coordonnées du plan. On peut visualiser X et  $(1,2) \cdot X$  sur la figure ci-dessous.



La région X

La région (1, 2).X

La classe d'équivalence de X contient donc deux éléments.

Dans cette optique, factoriser une région cubique X à permutation des coordonnées près signifie exactement factoriser la classe de X, notée  $\overline{X}$ , dans  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^*)$ . En outre, un cube de dimension n peut être vu comme un mot de longueur n sur l'ensemble  $\mathcal{I}$  des intervalles non vides de  $\mathbb{R}$ . Par extension, un recouvrement cubique est vu comme un élément de  $\mathcal{P}_h(\mathcal{I}^*)$ . On peut alors démontrer que décomposer  $\overline{X}$  en facteur premiers dans  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^*)$  revient à décomposer la classe de  $\mathrm{MC}(X)$ , notée  $\overline{\mathrm{MC}(X)}$ , en facteurs premiers dans  $\mathcal{H}(*)I$  [4]. L'intérêt de ce transfert est la finitude de  $\mathrm{MC}(X)$  (cf. proposition 2.2.3) qui rend la factorisation des régions cubiques effective. Avant de clore cette section, nous donnons un exemple qui met en exergue l'importance de l'hypothèse de maximalité dans la corrélation entre la factorisation d'une région cubique et celle de son recouvrement cubique maximal.

**Exemple 2.3.13.** Le carré  $[0,2]^2$  est par définition une région cubique factorisable. L'ensemble  $\{[0,1]^2, [0,2]^2\}$  en est un recouvrement cubique qui induit un élément irréductible de  $\mathcal{H}(I^*)$ . L'ensemble  $\{[0,2] \times [0,1], [0,1] \times [1,2], [1,2] \times [1,2]\}$  est au autre tel recouvrement.

La partie suivante présente l'algorithme de factorisation des monoïdes commutatifs homogènes donné dans [4].

# 2.3.4 Factorisation effective des éléments finis d'un monoïde homogène

#### Un exemple

On considère l'ensemble de mots S sur l'alphabet  $\{R, I_1, I_2\}$  suivant (le R en gras est la pour insister sur l'élément en commun).

$$S = \{I_1 \mathbf{R} R, I_2 \mathbf{R} R, R \mathbf{R} I_1, R \mathbf{R} I_2\}$$

On peut factoriser  $\overline{S}$  en remarquant que tous les mots de S ont leur seconde lettre en commun. Ainsi on a

$$\overline{S} = \overline{\{R\}} * \overline{\{I_1R, I_2R, RI_1, RI_2\}}.$$

On peut en outre vérifier que

$$\{R\} * \{I_1R, I_2R, RI_1, RI_2\} = \{RI_1R, RI_2R, RRI_1, RRI_2\}$$
  
= (1, 2).  $\{I_1RR, I_2RR, RRI_1, RRI_2\}$   
= (1.2). S

ce qui montre bien que l'ordre n'importe pas. L'ensemble  $S_1 = \{I_1R, I_2R, RI_1, RI_2\}$ est irréductible. Dans le cas contraire, on devrait pouvoir l'écrire comme le produit de deux ensembles de mots de longueur 1. Puisque les lettres  $I_1$ ,  $I_2$ , et R apparaissent toutes en tête d'au moins un mot de  $S_1$ , l'un des facteurs doit contenir (et donc être égal) à  $\{I_1, I_2, R\}$ . La même observation s'applique à la seconde lettre des mots de  $S_1$ . Mais dans ce cas l'ensemble  $S_1$  contiendrait par exemple le mot RR, ce qui n'est pas le cas. En posant  $R = \mathbb{R}, I_1 = [-\infty, 1]$  et  $I_2 = [2, \infty]$  on comprend que l'exemple ci-dessus est inspiré du complémentaire d'un pilier (voir la figure 2.2).



FIGURE 2.2 – Les mots de S sont les cubes maximaux du complémentaire du pilier

#### 2.4 Factorisation et partition

# 2.4.1 Factorisation dans un monoïde homogène et partition de l'ensemble des coordonnées

Une sous-partie de [1:n] est appelée intervalle lorsqu'elle contient x dès qu'elle contient t, t' tels que  $t \leq x \leq t'$ . Si I et J sont des intervalles disjoints de [1:n] on écrit I < J pour indiquer que tout élément de I est strictement inférieur à tout élément de J. Étant donnée une partition  $(P_1, \ldots, P_k)$  de [1:n], il existe une *unique* permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que :

- 1. pour tout  $t \in [1:k]$ ,  $\sigma(P_t)$  est un intervalle de [1:n],
- 2. pour tout  $t \in [1:k]$ , les restrictions de l'application  $\sigma$  aux ensembles  $P_t$  sont croissantes,
- 3. pour tous  $t, t' \in [1:k]$  tels que t < t', on a  $\sigma(P_t) < \sigma(P_{t'})$ .

Si X est un élément de  $\mathcal{P}_h(\mathbb{A}^*)$  de longueur *n*, alors la partition  $(P_1, \ldots, P_k)$ induit une factorisation de  $\overline{X}$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{A}^*)$  lorsque l'on peut écrire  $\sigma \cdot X$  comme le produit  $X_1 * \cdots * X_k$  dans  $\mathcal{P}_h(\mathbb{A}^*)$ , où pour tout  $t \in [1:k], X_t$ est l'ensemble des mots obtenus en ne gardant de chaque mot de X que les lettres se trouvant aux indices appartenant à  $\sigma(P_t)$ . Dans le cas où X est *fini* on peut décider algorithmiquement si cette égalité est satisfaite. Inversement, si l'on a une factorisation de  $\overline{X}$ , alors par définition on a une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\sigma \cdot X = X_1 * \cdots * X_k$  à laquelle est associée la partition  $(P_1, \ldots, P_k)$  où pour tout  $t \in [1:k]$ , on a

$$P_t = \sigma^{-1}([d_{t-1} + 1 : d_t])$$

où  $d_0 = 0$  et pour tout  $t \in [1:k]$  on pose

$$d_t = \sum_{i=1}^t \dim X_i \; .$$

**Proposition 2.4.1.** Si  $S_1 \cdots S_k$  est la décomposition en facteurs irréductibles de  $\overline{X}$ , alors la partition  $P_1, \ldots, P_k$  est unique à l'ordre des termes près.

*Démonstration.* Par définition du monoïde  $\mathcal{H}(\mathbb{A}^*)$  on a une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que

$$\sigma \cdot X = X_1 * \dots * X_k$$

où pour chaque  $t \in [1:k]$  on a  $\overline{X}_t = S_t$  et dont  $P_1, \ldots, P_k$  est la partition associée. Si  $P'_1, \ldots, P'_{k'}$  est une partition qui induit la décomposition en facteurs irréductibles  $S_1 \cdots S_k$ , alors on a k = k' et en notant  $\sigma'$  sa permutation associée on a

$$\sigma' \cdot X = X_1' * \dots * X_k'$$

avec  $\overline{X}'_t = S_t$  pour tout  $t \in [1 : k]$ . En passant au monoïde homogène, on obtient en effet une égalité entre produit de facteurs irréductibles :

$$\overline{X}_1 * \cdots * \overline{X}_k \quad = \quad \overline{X}'_1 * \cdots * \overline{X}'_k \; .$$

On a donc en particulier

$$(\sigma \circ \sigma'^{-1}) \cdot (X'_1 * \cdots * X'_k) = (\sigma \circ \sigma'^{-1}) \cdot (\sigma' \cdot X) = \sigma \cdot X = X_1 * \cdots * X_k$$

dont on déduit que la partition  $(P'_1, \ldots, P'_k)$  est la partition  $(P_1, \ldots, P_k)$  à une permutation des termes près.

Il existe une relation directe entre les factorisations d'un élément de longueur n de  $\mathcal{H}(\mathbb{A}^*)$  et certaines partitions de [1:n]. En effet, les factorisations d'un élément d'un monoïde commutatif libre forment un treillis isomorphe à celui des partitions du multi-ensemble des facteurs premiers de cet élément comptés avec leur multiplicité. Un élément  $X \in \mathcal{P}_h(\mathbb{A}^*)$  de longueur n étant fixé, à tout facteur irréductible S de  $\overline{X}$  on associe un ensemble  $P_1, \ldots, P_m$  de sous-parties de [1:n] tel que pour tout  $i \in [1:m]$ , on a  $\overline{X|_{P_i}} = S$  où  $X|_{P_i}$ est l'ensemble des mots extraits de ceux de X en ne gardant que les lettres se trouvant aux indices appartenant à  $P_i$ . Donc le treillis de partitions de  $\overline{X}$ est isomorphe au treillis des partitions de [1:n] qui sont plus grossières que la partition décrite dans la proposition 2.4.1 (voir la figure 2.3).

**Définition 2.4.2.** On note  $P_{irred}(X)$  la plus fine partition qui correspondent à une factorisation.

Pour trouver une factorisation de  $\overline{X}$ , il suffit donc de passer au crible toutes les sous-parties non vides de  $\{1, \ldots, n\}$  de cardinal au plus égal à n/2 + 1 (la division étant prise dans  $\mathbb{N}$ ).

**Exemple 2.4.3.** Soit  $X = \{aebf, agbh, cedf, cgdh\}$ , la permutation associée à la sous-partie  $\{1, 3\}$  est la transposition (2, 3). On a alors

 $(2,3) \cdot X = \{abef, abgh, cdef, cdgh\} = \{ab, cd\} * \{ef, gh\}.$ 

Cet algorithme est décrit dans [4], sa complexité est exponentielle mais il est applicable quel que soit l'alphabet  $\mathbb{A}$ . Or les résultats de la section 2.2.2 suggèrent que l'algèbre de Boole des unions finies d'intervalles de  $\mathbb{R}$  s'étend à toutes les régions cubiques (ce que nous formaliserons au quatrième chapitre). Dans la section suivante, nous exploiterons cette extension pour proposer un algorithme de factorisation des régions cubiques beaucoup plus efficace.

Dans le cas où la région cubique considérée est le modèle géométrique d'un programme PV, on compare la factorisation syntaxique du programme (cf 2.1.1) à la factorisation de son modèle géométrique.

**Proposition 2.4.4.** La partition  $P_{syntaxique}$  de [1 : n] induite par la factorisation syntaxique d'un programme PV est plus grossière que celle induite par la factorisation de son modèle géométrique.

Démonstration. Supposons que le programme P s'écrit comme la composée parallèle  $P_1|P_2$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont syntaxiquement indépendants. Pour chaque ressource a apparaissant dans le programme P, si a apparaît dans  $P_1$  alors il n'apparaît pas dans  $P_2$  de sorte que la région interdite du programme Pengendrée par a est incluse dans

$$[P_1]^c \times \mathbb{R}^{d_2}$$

où  $[P_1]$  est le modèle géométrique de  $P_1$  (considéré indépendamment de  $P_2$ ) et  $d_2$  le nombre de processus de  $P_2$ .


FIGURE 2.3 – Treillis des partitions et sous-treillis des factorisations

# 2.4.2 Algorithme efficace

Nous démontrons dans cette section la correction de l'algorithme décrit à la fin de la section 2.1.1.

**Définition 2.4.5.** Soit  $C = I_1 \times ... \times I_n$  un cube de  $\mathbb{R}^n$  et une sous-partie  $P = \{p_1 < \cdots < p_m\}$  de [1:n], on appelle projection de C sur P le produit cartésien

$$proj_P(C) = I_{p_1} \times \cdots \times I_{p_r}$$

Par cohérence avec les notations précédentes, on écrira également

$$C \circ P = proj_P(C)$$

**Définition 2.4.6** (Support d'un cube). Le support d'un cube  $C = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$  est l'ensemble

$$supp(C) = \{i \in [1:n] \mid I_i \neq \mathbb{R}\}$$

**Exemple 2.4.7.** supp $(\mathbb{R}^n) = \emptyset$  et supp $(\mathbb{R} \times [0,1] \times \mathbb{R} \times [0,1]) = \{2,4\}$ .

**Définition 2.4.8** (Trace d'un cube). Soit  $P = \{P_1, ..., P_l\}$  une partition de [1:n] avec pour chaque  $i \in [1:l]$ ,  $d_i$  le cardinal de  $P_i$ . On définit la trace d'un cube  $C = I_1 \times ... \times I_n$  sur une partition P comme le sous-ensemble des éléments i de [1:l] tels que le support de C rencontre  $P_i$ , autrement dit

$$Trace_P(C) = \{i \in [1:l] \mid proj_{P_i}(C) \neq \mathbb{R}^{d_i}\}.$$

Si la partition est triviale (i.e.  $\{[1:n]\}\)$  alors la trace d'un cube est soit réduite au singleton  $\{1\}$ , et le cube est différent de  $\mathbb{R}^n$ , soit vide auquel cas le cube est égal à  $\mathbb{R}^n$ . À l'inverse, si l'on regarde la trace d'un cube sur la partition discrète  $\{\{1\}, ..., \{n\}\}$ , alors sa trace est l'ensemble des indices i tels que la projection du cube sur la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée diffère de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.4.9** (partition admissible d'un cube). On dit qu'une partition  $P \ de \ [1:n] \ est$  admissible pour un cube  $C \ de \ dimension \ n \ lorsque \ sa \ trace$ sur P est un singleton. Plus généralement, on dit que la partition P est admissible pour un ensemble de cubes lorsqu'elle l'est pour chacun de ses éléments.

**Proposition 2.4.10** (critère de factorisation). Soit X une région cubique. Toute partition admissible pour un recouvrement cubique du complémentaire de X induit une factorisation de  $\overline{X}$ .

Démonstration. À permutation près on peut supposer que chaque élément de P est un intervalle. On veut dès lors montrer que X se factorise comme

$$X = X_1 * \cdots * X_l$$

où pour chaque  $i \in [1 : l]$  on a  $X_i = X|_{P_i}$  et  $dim(X_i) = d_i$ . Soit  $\mathcal{M}$  un recouvrement cubique de  $X^c$  pour laquelle P est admissible. Définissons  $A_i$ comme l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}$  dont la trace sur la partition P est i. Puis on définit

$$X_i = \mathbb{R}^{d_i} \setminus \bigcup_{C \in A_i} C|_{P_i}$$

Montrons alors que les complémentaires de X et de  $X_1 \times ... \times X_l$  sont égaux. Un élément  $x \in X^c$  appartient à un cube  $C \in \mathcal{M}$ . Supposons que  $Trace_P(C) = \{i\}$ , alors la projection  $x|_{P_i}$  de x sur  $P_i$  n'appartient pas à  $X_i$ (par construction de ce dernier). Donc  $x \notin X_1 \times \cdots \times X_l$ .

Inversement, si x appartient à la région cubique  $(X_1 \times \cdots \times X_l)^c$  alors il existe au moins un indice  $i \in [1 : l]$  tel que la projection de x sur  $P_i$ n'appartient pas à  $X_i$ . Par définition de  $X_i$ , cela implique qu'il existe un cube  $C \in \mathcal{M}$  dont la projection sur  $P_i$  contient la projection de x sur  $P_i$  (i.e.  $x|_{P_i} \in C|_{P_i}$ ). Puisque la partition est admissible pour  $\mathcal{M}$  on a

$$C = \mathbb{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times \operatorname{proj}_{P_i}(C) \times \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_l}$$
$$x \in C \subset X^c.$$

et donc

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons évoqué les raisons qui nous poussent à regarder les coordonnées finies des cubes de la région interdite. C'est ce que nous allons faire maintenant. Ceci nous permettra d'obtenir un critère de factorisation d'une région cubique étant donné un ensemble de cubes  $\mathcal{M}$  recouvrant la région interdite  $X^c$ .

#### Treillis des partitions admissibles

Nous vérifions que l'ensemble des partitions admissibles pour un ensemble de cubes  $\mathcal{M}$  est un treillis fini, puis nous calculons son plus petit élément.

**Lemme 2.4.11.** Étant donné un cube C, les éléments de la plus fine des partitions admissibles pour le recouvrement cubique  $\{C\}$  sont les singletons  $\{i\}$  pour chaque i tel que  $I_i = \mathbb{R}$  et le support de C (dans le cas où ce dernier n'est pas vide).

*Démonstration.* Une partition admissible pour le cube C est une partition dont l'un des éléments contient le support de C.

**Lemme 2.4.12.** Si P est une partition admissible pour une famille de cubes  $\mathcal{M}$ , alors toute partition plus grossière que P est encore admissible pour  $\mathcal{M}$ .

*Démonstration.* Soit Q une partition plus grossière que P. Pour chaque élément  $Q_i$  de Q, notons  $A_i$  l'ensemble des indices des éléments de P dont la réunion est  $Q_i$  i.e.

$$Q_i = \bigcup_{j \in A_i} P_j$$

Pour tout cube C tel que  $Trace_P(C) = \{j\}$  avec  $j \in A_i$ , on a  $Trace_Q(C) = \{i\}$ .

**Corollaire 2.4.13.** Soit  $\mathcal{M}$  une famille de cubes, et P, Q deux partitions admissibles pour  $\mathcal{M}$ , alors  $P \lor Q$  est admissible.

Démonstration. Cf lemme 2.4.12.

**Lemme 2.4.14.** Soit  $\mathcal{M}$  une famille de cubes, et P, Q deux partitions admissibles pour  $\mathcal{M}$ , alors  $P \wedge Q$  est admissible.

Démonstration. Il suffit de le montrer pour un cube  $C = I_1 \times ... \times I_n$ donné. Supposons, sans perte de généralité, que  $Trace_P(C) = \{1\}$  et que  $Trace_Q(C) = \{1\}$ . Un bloc de  $P \wedge Q$  est de la forme  $P_i \cap Q_j$  avec  $P_i \in P, Q_j \in Q$ , quand l'intersection est non vide. Soit  $i \in [1:n]$  une coordonnée, alors la projection  $\Pi_i(C) = I_i$  du cube est soit égale à  $\mathbb{R}$  soit différente. Si elle est différente de  $\mathbb{R}$  alors  $i \in P_1$ , car on a supposé  $Trace_P(C) = \{1\}$ . De même, on aura  $i \in Q_1$  et donc  $i \in P_1 \cap Q_1$ . Ainsi seul le bloc  $P_1 \cap Q_1$  de  $P \wedge Q$  aura des projections finies et la trace de C sur  $P \wedge Q$  sera donc un singleton représentant ce bloc.  $\Box$ 

En vertu du lemme 2.4.14 et du corollaire 2.4.13, la définition ci-dessous a un sens.

**Définition 2.4.15.** L'ensemble  $Admis(\mathcal{M})$  des partitions admissibles pour la collection de cubes  $\mathcal{M}$  est un sous-treillis du treillis des partitions de l'ensemble [1:n]. En particulier il possède un plus petit élément que l'on note  $P_{\text{finest},\mathcal{M}}$ .



FIGURE 2.4 – Treillis des partitions, sous-treillis des partitions qui induisent une factorisation de X, et sous-treillis des partitions admissibles pour  $\mathcal{M}$ .

Dans le cas où la famille de cubes  $\mathcal{M}$  recouvre le complémentaire d'une région cubique X, on a la chaîne de plongements de treillis décrite dans la figure 2.4. Il nous reste à :

- déterminer  $P_{finest,\mathcal{M}}$  à partir de  $\mathcal{M}$ , et
- montrer que  $P_{finest,\mathcal{M}} = P_{irred}$  dans le cas où  $\mathcal{M}$  est le recouvrement cubique maximal du complémentaire de X.

## Détermination de $P_{finest,\mathcal{M}}$

Dans le cas où un recouvrement cubique ne contient qu'un unique cube C, sa plus petite partition admissible, c'est-à-dire  $P_{finest,\{C\}}$  en suivant la notation de la définition 2.4.15, est donnée par le lemme 2.4.11.

**Proposition 2.4.16.** Si  $\mathcal{M}$  est un recouvrement cubique, alors la plus fine des partitions admissibles pour  $\mathcal{M}$  est la borne supérieure (dans le treillis des

partitions de l'ensemble [1:n]) des partitions  $P_{\text{finest},\{C\}}$  pour  $C \in \mathcal{M}$ :

$$P_{\text{finest},\mathcal{M}} = \bigvee_{C \in \mathcal{M}} P_{\text{finest},\{C\}}$$
.

Démonstration. Notons Q la borne supérieure, dans le treillis des partitions de l'ensemble [1:n], des partitions  $P_{finest,\{C\}}$  pour  $C \in \mathcal{M}$ 

$$Q = \bigvee_{C \in \mathcal{M}} P_{finest, \{C\}}$$
.

En particulier, pour chaque  $C \in \mathcal{M}$ , la partition Q est plus grossière que la partition  $P_{finest,\{C\}}$ , donc elle est admissible pour le cube C d'après le lemme 2.4.12, et donc pour le recouvrement cubique  $\mathcal{M}$  d'après la définition 2.4.9. La partition Q est donc plus grossière que la partition  $P_{finest,\mathcal{M}}$ .

Inversement, on sait que  $P_{finest,\mathcal{M}}$  est admissible pour  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire admissible pour tous les cubes C de  $\mathcal{M}$ . Or la plus fine partition admissible pour un cube C est par définition  $P_{finest,\{C\}}$ . La partition Q étant définie comme une borne supérieure, la partition  $P_{finest,\mathcal{M}}$  est plus grossière que la partition Q.

Remarquons que les partitions  $P_{finest,\{C\}}$  pour  $C \in \mathcal{M}$  n'induisent en général pas une factorisation du complémentaire de la réunion des éléments de  $\mathcal{M}$  (voir la figure 2.5). Donnons quelques exemples d'applications.

**Exemple 2.4.17** (Avec un seul cube). Supposons que  $\mathcal{M} = \{[0, 1]^3\}$  c'està-dire que  $X = \mathbb{R}^3 \setminus [0, 1]^3$ . Le support de  $[0, 1]^3$  est l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  ce dont on déduit que la partition  $P_{finest,\mathcal{M}}$  est triviale. On peut vérifier que  $P_{finest,\mathcal{M}} = P_{irred}$ . En règle générale si la collection  $\mathcal{M}$  ne contient qu'un seul cube, alors on a  $P_{finest,\mathcal{M}} = P_{irred}$ .

Considérons une situation plus délicate.

**Exemple 2.4.18.** Soit  $\mathcal{M} = \{C_1 = [0,3] \times \mathbb{R}, C_2 = [1,2] \times [1,2]\}$  (figure 2.6). Donc le cube  $C_2$  est inclus dans le cube  $C_1$  et on a

$$P_{finest,\{C_1\}} = \{\{1\},\{2\}\}$$
 et  $P_{finest,\{C_2\}} = \{\{1,2\}\}$ 

On en déduit que

$$P_{\text{finest},\mathcal{M}} = \{\{1,2\}\}$$

Or le complémentaire de la région cubique  $[0,3] \times \mathbb{R}$  est manifestement factorisable en  $(\mathbb{R} \setminus [0,3]) \times \mathbb{R}$ . Le cube  $C_2$  provoque le regroupement de facteurs irréductibles.



 $\{\{1\},\{2\},...,\{n\}\}$ 

FIGURE 2.5 – L'union des partitions  $P(\operatorname{supp}(C_i))$  est égale à  $P_{\operatorname{finest},\mathcal{M}}$ ,

On peut facilement détecter l'inclusion d'un cube dans un autre, mais il est beaucoup plus difficile de déterminer lorsqu'un cube est inclus dans la réunion d'une famille de cubes. Supposons maintenant que

$$\mathcal{M} = \{] - \infty, 1] \times [1, 2], ]1, \infty[\times[1, 2]\}$$

On a alors

$$P_{finest, \{C_1\}} = P_{finest, \{C_2\}} = \{\{1, 2\}\}$$

On en déduit que

 $P_{\text{finest},\mathcal{M}} = \{\{1,2\}\} .$ 

Encore une fois, le complémentaire de la région cubique  $\mathbb{R} \times [1, 2]$  est manifestement factorisable en  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus [1, 2])$ .

## Validité de l'algorithme syntaxique

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la validité de l'algorithme syntaxique (cf proposition 2.4.4).

**Proposition 2.4.19.** La partition P<sub>syntaxique</sub> induit une factorisation.



FIGURE 2.6 – À gauche le cube  $C_1$  est inclus dans le cube  $C_2$ , à droite la réunion des cubes  $C_1$  et  $C_2$  est un cube qui les contient strictement.

Démonstration. Soit R l'ensemble des ressources d'un programme PV. Chaque ressource  $r \in R$  engendre une région cubique recouverte par l'ensemble de cubes  $\mathcal{M}_r$ . La région interdite du programme est donc recouverte par l'ensemble de cubes

$$\mathcal{M} = \bigcup_{r \in R} \mathcal{M}_r \; .$$

Soit  $A_r \subseteq [1 : n]$  l'ensemble des processus dans lesquels la ressource s apparaît. Notons  $P(A_r)$  la plus fine des partitions dont l'un des éléments est  $A_r$ , autrement dit

$$P(A_r) = \{A_r\} \cup \{\{i\} \mid i \notin A_r\}$$

Par définition, la partition  $P_{\text{syntaxique}}$  est la borne supérieure des partitions  $P(A_r)$  pour  $r \in R$ , c'est-à-dire

$$P_{syntaxique} = \bigvee_{r \in R} P(A_r) .$$

Puis pour chaque cube C de  $\mathcal{M}_r$ , rappelons que  $P_{finest,\{C\}}$  est la plus petite partition dont l'un des éléments est le support de C, autrement dit

$$P_{\text{finest},\{C\}} = \{\operatorname{supp}(C)\} \cup \{\{i\} \mid i \notin \operatorname{supp}(C)\}$$

En particulier, si le cardinal de l'ensemble  $A_r$  est strictement supérieur à l'arité  $\alpha(r)$  de la ressource r (qui par convention est le nombre d'occurrences disponibles de la ressource r en début d'exécution) alors  $\mathcal{M}_r$  n'est pas vide. Par construction de la région interdite, chaque cube de  $\mathcal{M}_r$  peut-être obtenu en choississant  $m \ge \alpha(r) + 1$  processus parmi  $A_r$ , puis pour chacun de ces processus un intervalle Pr...Vr où r est vérouillé. Le support de chacun de ces cubes est exactement les m processus choisis. En choississant  $m = A_r$  on obtient au moins un cube dont le support est  $A_r$ . Dans ce cas la partition  $P(A_r)$  est la borne supérieure des partitions  $P_{finest,\{C\}}$  pour  $C \in \mathcal{M}_r$ .

Si au contraire, le cardinal de l'ensemble  $A_r$  est inférieur ou égal à l'arité  $\alpha(r)$ , alors  $\mathcal{M}_r$  est vide et la borne supérieure précédente la plus fine des partitions de [1:n], c'est-à-dire

$$\{\{i\} \mid i \in [1:n]\}$$
.

La partition  $P(A_r)$  est donc en général plus grossière que la borne supérieure

$$\bigvee_{C \in \mathcal{M}_r} P_{\text{finest}, \{C\}}$$

ce dont on déduit que

$$P_{\text{syntaxique}} = \bigvee_{r \in R} P(A_r) \leq \bigvee_{r \in R} \bigvee_{C \in \mathcal{M}_r} P_{\text{finest}, \{C\}} = P_{\text{finest}, \mathcal{M}}.$$

Or on sait que la partition  $P_{finest,\mathcal{M}}$  induit une factorisation (cf proposition 2.4.10) de même que toute partition plus grossière (cf lemme 2.4.12).

## Caractérisation de Pirred

Pour un recouvrement cubique quelconque  $\mathcal{M}$  du complémentaire d'une région cubique X, l'exemple 2.4.18 montre que la partition  $P_{finest,\mathcal{M}}$  n'est pas nécessairement la partition  $P_{irred}$ , c'est-à-dire celle qui induit la décomposition en facteurs irréductibles de  $\overline{X}$ . L'objectif de cette section est de montrer que c'est le cas dès que  $\mathcal{M}$  est le recouvrement cubique maximal du complémentaire de X.

**Définition 2.4.20.** On note MFC(X) le recouvrement cubique maximal du complémentaire de la région cubique X, autrement dit

$$MFC(X) = MC(X^c)$$
.

La notation MFC dérive de la terminologie anglaise *Maximal Forbidden Cubes*.

**Lemme 2.4.21** (Cubes interdits maximaux d'un produit). Soit  $X = X_1 \times X_2$ une région cubique de  $\mathbb{R}^n$ , notons  $d_i$  la dimension de  $X_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Les cubes maximaux du complémentaire de X sont de l'une des deux formes suivantes :  $-C_1 \times \mathbb{R}^{d_2}$  avec  $C_1$  cube maximal du complémentaire de  $X_1$ , ou  $-\mathbb{R}^{d_1} \times C_2$  avec  $C_2$  cube maximal du complémentaire de  $X_2$ . Autrement dit on a :

$$MFC(X) = \{C_1 \times \mathbb{R}^{d_2}, \ \mathbb{R}^{d_1} \times C_2 \mid C_1 \in MFC(X_1); C_2 \in MFC(X_2)\}.$$

Démonstration. Soit C un cube maximal de  $X^c$  que l'on peut donc écrire  $C = C_1 \times C_2$  avec  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) la projection de C sur les  $d_1$  premières (resp.  $d_2$  dernières) coordonnées de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $C_1 \cap X_1 = \emptyset$ , alors  $C_1 \subseteq X_1^c$ . Dans ce cas, on a  $C_1 \in MFC(X_1)$ , sinon il existe un cube  $C'_1 \in MFC(X_1)$ tel que  $C_1 \subseteq C'_1$  de sorte que le cube C est strictement inclus dans le cube  $C'_1 \times C_2 \subseteq X^c$ .

Si  $C_1 \in MFC(X_1)$ , alors le cube  $C = C_1 \times \mathbb{R}^{d_2}$  est inclus dans  $X^c$ . Soit  $C' = C'_1 \times C'_2$  un cube de  $X^c$  tel que  $C \subseteq C'$ , avec  $C'_1$  (resp.  $C'_2$ ) la projection de C' sur les  $d_1$  premières (resp.  $d_2$  dernières) coordonnées de  $\mathbb{R}^n$ . On a  $C'_2 = \mathbb{R}^{d_2}$  et  $C_1 \subseteq C'_1$ , donc  $C_1 = C'_1$  par maximalité et donc C = C'.

On en déduit le résultat suivant par induction.

**Corollaire 2.4.22** (produit quelconque). Soit  $X = X_1 \times ... \times X_l$  une région cubique de  $\mathbb{R}^n$ , et  $d_i$  les dimensions de  $X_i$  alors :

$$MFC(X) = \bigcup_{i=1}^{l} \left\{ \mathbb{R}^{d_1 + \dots + d_{i-1}} \times C_i \times \mathbb{R}^{d_{i+1} + \dots + d_l} \mid C_i \in MFC(X_i) \right\}$$

**Remarque 2.4.23.** La présence d'un cube non maximal dans un recouvrement ne rend pas forcément l'algorithme non correct. Ainsi il est possible d'obtenir d'autres recouvrements de X autre que MFC(X) sur lequel l'algorithme soit optimal.

**Théorème 2.4.24.** Le treillis des partitions de l'ensemble [1:n] admissibles pour le recouvrement cubique MFC(X) est celui des partitions qui induisent une factorisation de  $\overline{X}$ . Son plus petit élément est donc la partition  $P_{irred}(X)$ .

Démonstration. D'après le lemme 2.4.12 il suffit de montrer que

$$P_{finest, MFC(X)} = P_{irred}$$
.

A une permutation des éléments de l'ensemble [1:n] près, on peut supposer que la factorisation en irréductibles de X est donnée par

$$X = X_1 \times \cdots \times X_k$$

À cette factorisation correspond la partition ordonnée  $P_{\text{irred}} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ , avec pour chaque  $i \in \{1, \ldots, k\}$ ,  $P_i \subseteq [1:n]$  tel que  $\text{proj}_{P_i}(X) = X_i$ . D'après le corollaire 2.4.22 la partition  $P_{\text{irred}}$  est admissible pour chaque cube de MFC(X), donc en posant

$$\operatorname{MFC}(X)_i = \{C \in \operatorname{MFC}(X) \mid \operatorname{supp}(C) \subseteq P_i\}$$

pour chaque  $i \in \{1, ..., k\}$  on obtient une partition de MFC(X). Chaque région cubique  $X_i$  étant irréductible, la proposition 2.4.10 implique l'égalité suivante :

$$\bigvee_{C \in MFC(X)_i} \operatorname{proj}_{P_i}(P_{\text{finest}, \{ \operatorname{supp}(C) \}}) = \operatorname{proj}_{P_i}(P_{\text{finest}, \{ P_i \}}) = \{ P_i \} .$$

Dans la mesure où pour chaque  $j \in [1 : n] \setminus P_i$ , les blocs des partitions  $P_{\text{finest},\{P_i\}}$  et  $P_{\text{finest},\{\text{supp}(C)\}}$  (pour  $C \in \text{MFC}(X)_i$ ) qui contiennent j sont réduits au singleton  $\{j\}$ , on déduit de l'égalité précédente que

$$\bigvee_{C \in MFC(X)_i} P_{\text{finest}, \{\text{supp}(C)\}} = P_{\text{finest}, \{P_i\}}.$$

Ainsi on a

$$\bigvee_{C \in \mathrm{MFC}(X)} P_{\mathrm{finest}, \{\mathrm{supp}(C)\}} = \bigvee_{i=1}^{k} \bigvee_{C \in \mathrm{MFC}_{i}(X)} P_{\mathrm{finest}, \{\mathrm{supp}(C)\}}$$
$$= \bigvee_{i=1}^{k} P_{\mathrm{finest}, \{P_{i}\}}$$
$$= P_{irred} .$$

Ce qui permet de conclure que  $P_{finest,MFC(X)} = P_{irred}$ .

#### Algorithme

Le modèle géométrique d'un programme PV est naturellement donné sous la forme d'un recouvrement cubique de sa région interdite. Pour factoriser une région cubique dont le complémentaire est recouvert par la famille finie de cubes  $\mathcal{M}$ , on procède en trois étapes :

- 1. on calcule le recouvrement cubique maximal du complémentaire de X, i.e. MFC(X), par la méthode du double complémentaire,
- 2. pour chaque cube  $C \in MFC(X)$ , on calcule le support de C, et donc la partition  $P_{\text{finest},\{\text{supp}(C)\}}$ ,

3. on détermine la borne supérieure des partitions  $P_{\text{finest},\{\text{supp}(C)\}}$ .

La première étape est de loin la plus coûteuse. La seconde est clairement linéaire en le cardinal de l'ensemble MFC(X), la troisième consiste à appliquer un algorithme *union-find* standard sur une famille des sous-ensembles de [1:n] où en pratique, l'entier n n'excède pas quelques centaines.

**Exemple 2.4.25.** Revenons au dîner de n philosophes, dont les n cubes interdits maximaux sont

$$C_i = \mathbb{R}^{i-1} \times [1,3] \times [2,4] \times \mathbb{R}^{n-i-1}$$

pour  $i \in \{1, ..., n-1\}$  et  $C_n = [2, 4] \times \mathbb{R}^{n-2} \times [1, 3]$ . Pour  $i \in \{1, ..., n-1\}$  on a donc

$$P_{\text{finest},\{C_i\}} = \{\{1\}, \dots, \{i-1\}, \{i, i+1\}, \{i+2\}, \dots, \{n\}\}$$

et  $P_{\text{finest},\{C_n\}} = \{\{1,n\},\{2\},\ldots,\{n-1\}\}\}$ . La borne supérieure de ces partitions est la partition grossière  $\{[1:n]\}$ , ce qui équivaut à l'irréductibilité du modèle géométrique de ce programme, qui ne peut donc pas être factorisé.

L'une des spécificités de cet algorithme est sa capacité à détecter rapidement les éléments irréductibles, par exemple si le support de l'un des cubes maximaux est [1 : n]. Nous allons maintenant en évaluer la complexité et donner les résultats des tests de performances qui ont été effectués.

**Proposition 2.4.26.** Soit  $\mathcal{M}$  un recouvrement cubique du complémentaire d'une région cubique X, le calcul de la plus fine des partitions admissibles pour  $\mathcal{M}$  nécessite  $O(\dim X \cdot |\mathcal{M}| \cdot \log |\mathcal{M}|)$  opérations élémentaires sur les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Démonstration. L'algorithme union-find sur k éléments peut se faire en O(k\*log(k)) opérations [16]. Dans le cas présent, les éléments sont des cubes de dimension n sur lesquels chaque opération nécessite n opérations sur les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

L'obtention de la décomposition en facteurs irréductibles d'une région cubique est conditionnée par celle du recouvrement cubique maximal de son complémentaire. En pratique, on dispose d'un algorithme qui à partir d'un recouvrement cubique quelconque  $\mathcal{M}$  de X détermine le recouvrement cubique maximal du complémentaire de X. Essentiellement, cet algorithme calcule les intersections des éléments de toutes les sous-familles de  $\mathcal{M}$  de cardinal la dimension de X.

#### Benchmarks

Nous avons passé différents algorithmes au banc d'essai. Le résultats sont rassemblés dans les deux tableaux des figures 2.7 et 2.8. Nous séparons les différentes étapes du calcul afin de bien discerner les étapes gourmandes (ie calcul du complémentaire) de celles qui le sont moins. Dans tous les cas, la première étape consiste à déterminer un recouvrement cubique  $\mathcal{M}$  de la région interdite du programme considéré.

Syntax :

1. Détermination de  $P_{finest,\mathcal{M}}$ 

Syntax II:

- 1. Suppression des cubes de  $\mathcal{M}$  inclus dans un cube strictement plus grand
- 2. Détermination de  $P_{finest,\mathcal{M}}$

 $\underline{X}$  :

1. recouvrement cubique maximal de X

 $\underline{\text{monoïde}}$  :

- 1. recouvrement cubique maximal de X
- 2. algorithme de factorisation combinatoire [4] à partir du recouvrement cubique maximal de X

 $\underline{X^c}$ :

- 1. recouvrement cubique maximal de X
- 2. recouvrement cu<br/>bique maximal de  $X^c$  à partir du recouvrement cubique maximal de<br/> X

 $\underline{MaxCubes}$  :

- 1. recouvrement cubique maximal de X
- 2. recouvrement cubique maximal de  $X^c$  à partir du recouvrement cubique maximal de X, i.e. MFC(X)
- 3. algorithme de factorisation de la section 2.1.1, i.e. détermination de  $P_{\text{finest},\text{MFC}(X)}$

Décrivons les programmes PV sur lesquels les différents algorithmes ont été testés. Le programme  $\sum_{n_1,\ldots,n_k}$  est constitué de k groupes de processus. Pour tout  $i \in \{1,\ldots,k\}$ , le  $i^{\text{ème}}$  groupe de ce programme contient  $n_i$  copies du processus

 $P(a_i).P(b).V(b).V(a_i)$ 

où  $a_i$  est un mutex et b est un sémaphore d'arité k. Tous les processus partagent donc la ressource b, mais chaque groupe détient au plus une occurrence

Exemple	Syntax	Syntax II	X	monoïde	$X^c$	MaxCubes
6 Philosophes	0.003	0.003	0.024	0.032	201	201
7 Philosophes	0.004	0.004	0.1	0.1	>3600	>3600
8 Philosophes	0.005	0.005	0.5	0.5	>3600	>3600
9 Philosophes	0.005	0.005	1.8	1.8	>3600	>3600
10 Philosophes	0.005	0.005	10.3	10.4	>3600	>3600

FIGURE 2.7 – Benchmarks des philosophes, aucune décomposition possible, les temps sont en secondes

Example	Syntax	Syntax II	X	monoïde	$X^{c}$	MaxCubes
$\Sigma_{2,2}$	0.002 (*)	0.002	0.003	0.003	0.004	0.004
$\Sigma_{3,3,3}$	0.006	0.019	3.77	3.92	15m10	15m11
$\Sigma_{4,4}$	0.002	0.003	0.040	0.054	1.07	1.07
$\Sigma_{5,5}$	0.004	0.005	0.27	0.38	14.96	14.96

FIGURE 2.8 – Benchmarks des programmes  $\Sigma$ , (\*) signifie que l'algorithme renvoie un résultat non correct

du sémaphore b, de sorte que le programme  $\sum_{n_1,\ldots,n_k}$  n'a jamais besoin de plus de k occurrences du sémaphore b. Les résultats affichés dans les tableaux des figures 2.7 et 2.8 ont été obtenus avec la commande Unix **time** qui n'est pas très précise.

L'algorithme combinatoire [4] est efficace lorsque le modèle géométrique du programme est un produit de facteurs de petite dimension. On observe le même phénomène avec des entiers en facteurs premiers.

A l'inverse l'algorithme sur les cubes interdits est plus efficace lorsque la décomposition n'a que peu de facteurs. Le cas optimal étant celui où le cardinal du support de l'un des cubes interdits est égal à la dimension du modèle géométrique.

# 2.4.3 Conclusion et perspectives

Bien que l'algorithme présenté ici soit théoriquement plus efficace que celui de [4], tous deux dépendent, pour obtenir la décomposition en facteurs irréductibles, d'une étape de normalisation extrêmement coûteuse. On espère cependant trouver des heuristiques permettant d'obtenir des décompositions intermédiaires non triviales. L'algorithme syntaxique naturel donne un résultat optimal dans de nombreux cas, qui sont ainsi traités simplement.

D'un point de vue plus théorique, il serait intéressant de comparer le parallélisations de programmes obtenues via la factorisation des régions cubiques et celles obtenues dans les algèbres de processus [45, 34].

Toute la théorie présentée dans ce chapitre reste valable si l'on remplace  $\mathbb{R}$  par la réalisation géométrique d'un graphe fini, de sorte qu'elle s'applique encore aux modèles géométriques de programmes ayant des branchements et des boucles. Cette extension fait l'objet d'un article en cours de rédaction.

Enfin, le calcul exhaustif des cubes maximaux du complémentaire de la région X à factoriser n'est sans doute pas nécessaire. Par exemple, dans le cas où X est irréductible, on peut imaginer qu'une petite sous-famille du recouvrement cubique maximal suffit à conclure.

#### La suite

Dans le chapitre suivant, nous étudions les relations entre la factorisation des régions cubiques et la factorisation d'un invariant que nous définirons.

# Chapitre 3

# Catégorie émincée d'une région cubique

# 3.1 Introduction

# Problématique

Dans ce chapitre nous associons à chaque région cubique X une catégorie notée Em(X) qui appartient à une classe de catégories pour laquelle on a une propriété de décomposition unique similaire à celle introduite dans le second chapitre. Nous verrons qu'une décomposition de X induit une décomposition de l'invariant Em(X) et que l'on a une réciproque sous réserve que X satisfasse quelques conditions. La catégorie Em(X) est décrite à partir d'une partition cubique de X de sorte que les objets de Em(X) sont les éléments de la partition tandis que les morphismes sont engendrés par les contacts entre les cubes (figure 3.1) et que les relations sont déduites des cubes maximaux de X.



FIGURE 3.1 – Une région cubique X et sa catégorie Em(X) associée

Le but de ce chapitre est donc de montrer que :

- 1. Si  $X = X_1 \times \cdots \times X_k$  alors  $Em(X) = Em(X_1) \times \cdots \times Em(X_k)$
- 2. Sous certaines conditions, si  $Em(X) = C_1 \times \cdots \times C_k$  alors on a des régions cubiques  $X_i$  telles que  $X = X_1 \times \cdots \times X_k$  et  $Em(X_i) = C_i$ pour tout  $i \in [1:k]$

La catégorie Em(X) est intermédiaire entre la catégorie fondamentale de X [21, 22] et sa catégorie des composantes [23]. La première est facile à décrire mais possède une infinité indénombrable d'objets tandis que la seconde est finie mais très difficile à calculer. La catégorie Em(X) offre un compromis raisonnable entre les deux.

#### Plan du chapitre

Après avoir construit la catégorie Em(X) associée à une région cubique X, on reprend les travaux de T. Balabonski [3] dont nous aurons besoin pour établir la relation entre la factorisation de X et celle de Em(X). Nous détaillons en particulier l'algorithme de factorisation des catégories finies sans boucle en remarquant sa très grande similitude avec l'algorithme de décomposition des régions cubiques basé sur les recouvrements cubiques du complémentaire (cf chapitre 2). Nous décrivons alors un isomorphisme canonique entre  $Em(X_1 \times X_2)$  et  $Em(X_1) \times Em(X_2)$ . Nous terminons en montrant une réciproque partielle.

## État de l'art

Les invariant algébriques connus en topologie algébrique dirigée sont pour la plupart des petites catégories. La première d'entre elle, appelée catégorie fondamentale [31] est définie de manière analogue au groupoïde fondamental d'un espace topologique [11]. La catégorie des composantes a été introduite en guise de substitut fini à la catégorie fondamentale [23, 32]. Malgré son intérêt théorique [?], la masse de calculs nécessaire à sa détermination lui fait perdre une partie de son intérêt pratique. Le problème de la factorisation des petites catégories dépasse la cadre des présents travaux, le cas des catégories finies sans boucle connexes ayant été traités par T. Balabonski [3]. Les travaux menés dans ce chapitre s'inscrivent dans la continuité de ceux évoqués cidessus.

#### Quelques exemples

Sans donner de définition formelle, nous comparons la catégorie Em(X)d'une région cubique X avec sa catégorie fondamentale et sa catégorie des



FIGURE 3.2 – La région cubique est formée d'un unique cube interdit. À gauche quelques flèches de la catégorie fondamentale, au milieu la catégorie Em(X), à droite la catégorie des composantes

composantes. Les morphismes de la catégorie fondamentale de X sont les classes de dihomotopie des chemins dirigés sur X. Deux tels chemins étant déclarés dihomotopes lorsque l'on peut déformer continûment l'un pour obtenir l'autre.

**Exemple 3.1.1** (Le carré interdit). Considérons la région cubique  $X = \mathbb{R}^2 \setminus [1, 2]^2$ . La figure 3.2 nous montre une partition de l'espace en huit zones à partir de laquelle nous décrivons les morphismes de la catégorie fondamentale, c'est-à-dire les classes de dihomotopie.

Il existe au plus une classe de dihomotopie entre deux points d'une même zone. Plus généralement, entre deux points pris dans deux zones distinctes de la partition, il y a au plus une classe de dihomotopie, sauf dans le cas où le point de départ est pris dans la zone 1 et celui d'arrivée dans la zone 8. Dans ce cas, il y a exactement 2 classes de dihomotopie.

Les éléments de la partition précédente constituent les objets de la catégorie Em(X), ses morphismes sont engendrés par les flèches représentées sur la figure; on note que ces flèches génératrices correspondent aux faces partagées par les zones de la partition.

La description de la catégorie des composantes de X est similaire, mais elle ne contient que quatre objets, et ces derniers ne sont pas nécessairement des carrés.

**Exemple 3.1.2** (La Croix Suisse). Considérons la région cubique  $X = \mathbb{R}^2 \setminus ([1,4] \times [2,3] \cup [2,3] \times [1,4])$ . Comme précédemment il y a au plus une classe de dihomotopie entre deux points d'une même zone, de même qu'entre deux points de deux zones distinctes, sauf si le point de départ est pris dans la zone inférieure gauche et le point d'arrivé dans la zone supérieure droite. Dans ce cas, il y a exactement deux classes de dihomotopie.

La région cubique X est partitionnée en une vingtaine de zones (figure 3.3) qui sont les objets de la catégorie Em(X), les morphismes sont engendrés par les flèches qui correspondent aux face partagées par deux zones. Néanmoins, la catégorie obtenue n'est pas libre de part la présence de deux carrés commutatifs (bas gauche et haut droite). La catégorie des composantes de X est également représentée sur la figure 3.3.



FIGURE 3.3 – La Croix Suisse et sa catégorie des composantes

**Exemple 3.1.3** (Le cube interdit, ou cube flottant). Considérons  $\mathbb{R}^3 \setminus [1, 2]^3$ . Comme précédemment, la catégorie Em(X) est obtenu à partir d'une partition cubique de X. Cette dernière est ici obtenue en découpant l'espace selon les hyperplans portant les faces du cube interdit. On obtient ainsi vingt-six cubes (27 - 1), les morphismes étant engendrés par les faces communes de deux zones, que l'on peut se représenté comme une flèche perpendiculaire à la face passant en son centre (voir aussi la partie droite de la figure 3.4). En outre chaque carré est commutatif.

Dans le cas présent la catégorie des composantes est égale à la catégorie Em(X). Ce résultat n'est pas triviale et justifie l'intérêt que l'on peut porter à l'étude de la catégorie Em(X).

# 3.2 La catégorie émincée

Nous allons définir la catégorie Em qui est l'objet principal de ce chapitre et donner un résultat de factorisation unique, dans le cadre des catégories connexes finies sans boucles que nous appliquerons aux catégories Em.

**Définition 3.2.1.** Soit C une catégorie, un zigzag entre deux points x et y est une suite de flèches  $f_1, ..., f_k$  tel qu'on ait le diagramme suivant :

 $x_1 \stackrel{f_1}{\longleftrightarrow} x_2 \stackrel{f_2}{\longleftrightarrow} \dots \dots \dots \xrightarrow{f_k} x_{k+1}$ 

où la flèche bidirectionnelle désigne une flèche qui peut aller vers la droite ou vers la gauche. Une catégorie est dite connexe lorsque deux de ses objets sont toujours liés par un zigzag.

**Définition 3.2.2.** Une catégorie C est dite sans boucle lorsque pour tous objets x et y, s'il existe un morphisme de x vers y et un morphisme de y vers x, alors x = y et ces deux morphismes sont des identités.



FIGURE 3.4 – Dans cet exemple, la catégorie émincée est la même que la catégorie des composantes

# 3.2.1 Une définition de la catégorie

Nous allons définir une partition de chaque région cubique dont nous déduirons une catégorie associée. En particulier, nous utilisons un encodage intermédiaire, sous la forme d'une sous partie de  $\mathbb{Z}^n$  qui facilite la construction bien qu'il ne soit pas indispensable. Nous décrivons un exemple dont la simplicité devrait donner l'intuition sur laquelle se base la construction.



FIGURE 3.5 – Région cubique à gauche avec deux cubes interdits, à droite la partition émincée

**Exemple 3.2.3** (Démarche de la définition). La figure 3.5 représente la région cubique dont on veut définir la catégorie émincée. La première étape consiste à définir la partition émincée à partir des projections des cubes sur chaque dimension. Seuls les cubes inclus dans la région nous intéressent (figure 3.5).

À partir de ces cubes, on pourrait définir la catégorie émincée comme sur la figure 3.6 Cependant, nous allons plutôt passer par un intermédiaire qui



FIGURE 3.6 – La catégorie émincée, à droite les commutations sont ajoutées

encode les éléments de cette partition par ceux d'une grille, c'est-à-dire un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^n$ . On définit alors la catégorie à partir de cette grille. Ce procédé à pour objectif de simplifier certaines définitions, on pourrait cependant s'en passer. La figure 3.7 illustre la construction. On retrouve bien la même catégorie que précédemment, mais depuis la grille.



FIGURE 3.7 – Une région cubique et sa catégorie émincée

# 3.2.2 La partition émincée

## Définition

Soit F un recouvrement cubique de la région cubique X de dimension n, par exemple F = MC(X). On veut subdiviser chaque cube de F selon

les hyperplans qui portent les faces des cubes de F (voir la figure 3.5 en dimension 2). On se heurte à la subtilité suivante : lorsqu'un hypercube Cest traversé par un hyperplan H, la tranche  $C \cap H$  doit-elle être prise comme un des éléments de la partition recherchée ou bien doit-elle être collée à l'une des deux "moitiés" de  $C \setminus H$ ? Pour cette raison, on ne peut pas se contenter de considérer, pour chaque  $i \in [1:n]$ , l'ensemble des valeurs  $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ telles que chaque hyperplan  $\{x_i = t_i\}$  porte une face de l'un des cubes de F. La région cubique représentée sur la figure 3.8 fournit un exemple pour lequel l'une des zones de la partition recherchée est réduite à un point. Dans le paragraphe qui suit nous introduisons les outils nécessaires à la prise en compte de cette subtilité.



FIGURE 3.8 – Exemple de base où les morphismes non-unitaires sont nécessaires, le point central dans l'espace est son propre cube.

Algèbre de Boole atomique Une algèbre de Boole  $\mathcal{B}$  est dite atomique s'il elle possède une sous-partie  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  dont chaque élément n'a d'autre minorant strict que 0, et que tout élément de  $\mathcal{B}$  s'écrit comme l'union  $\vee$  d'une sous-famille finie de  $\mathbb{A}$ . À toute famille d'intervalles  $\mathcal{F}$ , on associe  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  la plus petite sous-algèbre de Boole de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  contenant la famille F.

**Remarque 3.2.4.** L'algèbre de Boole  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  d'une famille finie  $\mathcal{F}$  d'intervalles est atomique.

**Exemple 3.2.5.** Si  $\mathcal{F}$  est réduit au singleton  $\{[0,1[\} \text{ alors les atomes de } \mathcal{B}(\mathcal{F}) \text{ sont l'intervalle } [0,1[ et son complémentaire ] <math>-\infty, 0[ \cup [1,+\infty[.$ 

Si  $\mathcal{F} = \{[0,2], [1,3]\}$  alors les atomes de  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  sont [0,1[, [1,2], ]2,3] et  $] - \infty, 0[ \cup ]3, +\infty[.$ 



FIGURE 3.9 – Partition émincée on coupe tous les cubes selon leurs bords, cela donne une partition des deux axes ( $\mathbb{R}$ ) en intervalles

Les atomes de  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  ne sont donc pas nécessairement connexes, nous allons y remédier.

**Définition 3.2.6.** On note  $\operatorname{Atom}(\mathcal{F})$  l'ensemble des atomes de  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  et  $\operatorname{AtomConn}(\mathcal{F})$  les composantes connexes des éléments de  $\operatorname{Atom}(\mathcal{F})$ .

**Proposition 3.2.7.** Soit F une famille finie d'intervalles alors la collection  $\operatorname{AtomConn}(\mathcal{F})$  est une partition finie de  $\mathbb{R}$ .

Démonstration. Puisque  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  celle-ci contient nécessairement  $\mathbb{R}$ . Or les atomes sont générateurs donc leur union est égale à  $\mathbb{R}$ , ce qui reste vrai si l'on considère les composantes connexes des atomes. De plus deux atomes  $a, b \in \operatorname{Atom}(\mathcal{F})$  sont égaux ou disjoints, sans quoi leur intersection montrerait que l'un des deux n'est pas un atome. Puis chaque atome est la réunion disjointe de ses composantes connexes.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de cubes de dimension n. Pour chaque coordonnée  $i \in [1:n]$  on note  $\mathcal{P}_i(\mathcal{F})$  la partition AtomConn $(\mathcal{F}_i)$  où  $\mathcal{F}_i$  est la famille des  $i^{\text{ème}}$  projections des cubes appartenant à  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}_i = \{ \operatorname{proj}_i(C) \mid C \in \mathcal{F} \} .$$

Le produit de ces partitions de  $\mathbb{R}$  nous fournit alors une partition de  $\mathbb{R}^n$ 

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{F}) \times \cdots \times \mathcal{P}_n(\mathcal{F}) = \{ I_1 \times \cdots \times I_n \mid I_i \in \mathcal{P}_i(\mathcal{F}) \}$$

**Définition 3.2.8.** La partition émincée associée à un recouvrement cubique  $\mathcal{F}$  d'une région cubique X est la collection

$$Em(\mathcal{F}) = \{ I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq X \mid I_i \in \mathcal{P}_i(\mathcal{F}) \}.$$



FIGURE 3.10 – Partition  $\mathcal{P}_1$  est déduite de la projection de deux cubes



FIGURE 3.11 – Une partition émincée et la catégorie qu'elle engendre

**Exemple 3.2.9.** Reprenons l'exemple de la figure 3.9. On y trouve deux cubes qui se superposent et dont les projections nous donnent deux intervalles pour chaque axe. Notons  $K_1$  et  $K_2$  les projections des deux cubes sur l'axe horizontal. Ce dernier est partitionné en cinq intervalles disjoints correspondant aux différentes façons de d'écrire des expressions booléennes avec  $K_1$  et  $K_2$  (voir la figure 3.10).

**Définition 3.2.10.** La partition émincée de la région cubique X est la partition émincée associée à son recouvrement cubique maximal :

$$Em(X) = Em(MC(X))$$

Les éléments de Em(X) sont appelés les dés de X.

## 3.2.3 Projection sur une grille

Nous allons associer à une région cubique X une catégorie construite à partir de la partition émincée de X comme le suggère la figure 3.11. En



FIGURE 3.12 – À gauche la partition émincée obtenue comme produit des partitions  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  de  $\mathbb{R}$ 

préambule de cette construction, nous allons projeter les dés sur un sousensemble de  $\mathbb{Z}^n$  de manière à simplifier certaines définitions, en mettant en évidence une présentation simple de la catégorie que l'on souhaite définir. Puisque toute partition finie de  $\mathbb{R}$  en intervalles admet un ordre total naturel, l'idée est d'associer à chaque déC un n-uplet dont le  $i^{\text{ème}}$  terme est la position de l'intervalle proj<sub>i</sub>(C) dans la partition  $\mathcal{P}_i$ .

**Définition 3.2.11.** Soient  $\mathcal{P}_i = \{I_{i,1} < \cdots < I_{i,m_i}\}$  avec  $i \in [1 : n]$  des partitions de  $\mathbb{R}$  en intervalles. À chaque  $J \in \mathcal{P}_i$  on associe sa position, c'està-dire l'unique  $j \in \{1, \ldots, m_i\}$  tel que

$$J = I_{i,j}$$

À chaque cube C de la partition de  $\mathbb{R}^n$ 

$$\{I_1 \times \cdots \times I_n \mid I_i \in \mathcal{P}_i\}$$

on associe le n-uplet dont le  $i^{ime}$  terme est la position de l'intervalle  $proj_i(C)$ dans la partition  $\mathcal{P}_i$ .

**Définition 3.2.12.** Une grille de dimension n est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^n$ . La grille d'une région cubique X, notée GridG(X), est l'ensemble des nuplets de  $\mathbb{Z}^n$  associés aux dés X (cf définition 3.2.10).

**Exemple 3.2.13.** Reprenons l'exemple décrit en figure 3.12. La grille GridG(X) est l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^2$  qui numérotent les dés inclus dans X.

# 3.2.4 Limites de l'expressivité des grilles

Idéalement, on voudrait qu'un chemin dirigé sur une région cubique Xinduise un morphisme sur la catégorie associée à X à partir de la suite (finie) des dés visités par ce chemin. En règle générale, la notion de grille n'est pas assez expressive pour décrire cette catégorie puisque, par exemple, le modèle géométrique d'une barrière de synchronisation (voir figure 3.8) nécessite de prendre en considération des contacts entre *n*-cubes de dimension strictement inférieure à n - 1. Plus précisément, le point qui se situe à l'intersection des deux droites en rouge est un dé. Afin d'obtenir cette propriété, nous définirons les morphismes générateurs comme les couples (A, B) des dés tels qu'il existe un chemin dirigé qui part d'un point de A et arrive à un point de B et dont l'image est contenue dans  $A \cup B$ .

**Exemple 3.2.14** (Barrière de synchronisation). Sur le modèle géométrique d'une barrière de synchronisation, on a exactement deux morphismes générateurs, l'un joignant le carré inférieur gauche au déréduit à un point, et le second joignant le déréduit à un point au carré supérieur droit.

# 3.2.5 Catégorie d'une grille et catégorie émincée

Nous allons associer une catégorie à chaque grille et une autre catégorie plus précise dans le cas où cette grille est induite par une partition émincée.

#### Catégorie d'une grille

**Définition 3.2.15.** Deux points  $x = (x_1, ..., x_n)$  et  $y = (y_1, ..., y_n)$  de  $\mathbb{Z}^n$  sont dits adjacents s'il existe un vecteur  $\epsilon \in \{0, 1\}^n$  tel que

 $x + \epsilon = y$  .

Lorsqu'un tel vecteur  $\epsilon$  existe, il est unique. Le vecteur  $\epsilon$  peut n'avoir qu'une seule composante égale à 1 et toutes les autres égales à 0. Dans ce cas le vecteur  $\epsilon$  est dit unitaire et x et y sont «côte à côte» au sens où ils partagent une face de dimension n-1. En effet une image à avoir en tête est de voir les coordonnées de  $\mathbb{Z}^n$  comme des cubes d'une grille. En particulier, la norme euclidienne d'un vecteur unitaire est égale à 1.

**Définition 3.2.16.** Soit Z une grille, soit  $x_1, x_2, ..., x_l$  et  $y_1, ..., y_k$  deux suites croissantes de Z, telles que  $x_1 = y_1$ ,  $x_l = y_k$ . On dit que ces deux suites sont adjacentes lorsque  $x_1$  et  $x_l$  le sont.

**Exemple 3.2.17.** Supposents  $x_1 = y_1 = (0, 0, 0, 0)$  avec la suite  $x_i$  de taille 5 et la suite y de taille 3, tels que  $x_4 = y_3 = (1, 1, 1, 1)$ . On a le diagramme commutatif suivant



Les flèches en pointillés montrent les diverses décompositions en triangle que l'on peut effectuer.

#### Catégorie émincée

**Définition 3.2.18.** Soit X une région cubique. Le graphe  $\Gamma_X$  a pour sommets les dés de X et pour flèches les couples  $(x, \epsilon)$  tels que  $\epsilon \in \{0, 1\}^n$  et il existe un chemin dirigé sur X allant de x à  $x + \epsilon$ . On note  $F(\Gamma_X)$  la catégorie librement engendrée par le graphe  $\Gamma_X$ . On considère alors la congruence ~ sur la catégorie  $F(\Gamma_X)$  qui relie le chemin de longueur 2 et le chemin de longueur 1 ci-dessous

$$((x,\epsilon_1),(x+\epsilon_1,\epsilon_2)) \sim ((x,\epsilon_1+\epsilon_2))$$

dès que  $\epsilon_1 + \epsilon_2 \in \{0,1\}^n$ . La catégorie émincée Em(X) associée à X est le quotient

 $F(\Gamma_X)/\sim$ .

Un morphisme adjacent de Em(X) est un morphisme dont la source et le but sont adjacents. On note Adj(X) l'ensemble des morphismes adjacents de Em(X).

**Remarque 3.2.19.** Si la composée de deux morphismes f et g est un morphisme adjacent alors les morphismes f et g le sont aussi.

**Remarque 3.2.20.** Il y a au plus un morphisme entre deux cubes adjacents. Ce morphisme est en outre adjacent (c'est essentiellement une conséquence de l'associativité de l'addition dans  $\{0, 1\}^n$ ).

L'exemple ci-dessous montre que la restriction qui impose l'existence d'un chemin sur X joignant la source et le but d'une flèche ne peut pas être omise. **Exemple 3.2.21.** Considérons une région cubique X proche du modèle géométrique d'une barrière de synchronisation, à savoir le complémentaire de

$$]1, 2[\times]0, 1[\cup [0, 1] \times [1, 2]]$$

Alors le point (1, 1) est interdit et la partition émincée associée est composée de quatre cubes. La catégorie naive qui relie les cubes adjacents par un moprhisme aurait pour seul morphisme non trivial le morphisme non-unitaire joignant le carré inférieur gauche au carré supérieur droit. Or tout chemin joignant ces mêmes carrés rencontre nécessairement le complémentaire de X(en rouge sur la figure 3.13).



FIGURE 3.13 – Ici le point central est interdit, il n'y a donc pas de flèche diagonale

#### Base de la catégorie Em(X)

Les catégories finies sans boucle ont un plus petit ensemble générateur. Dans cette section, nous détaillons cette propriété. Pour commencer on étend la notion d'irréductibilité introduite dans le cadre des monoïdes commutatifs.

**Définition 3.2.22.** Un morphisme d'une catégorie est dit irréductible lorsqu'il n'est pas possible de l'écrire comme la composé de deux morphismes sans que l'un d'eux soit un isomorphisme.

**Définition 3.2.23.** Une famille de morphismes G est dite génératrice lorsque tout morphisme de la catégorie qui n'est pas une identité peut s'écrire comme une composée de morphismes appartenant à G. La base d'une catégorie, lorsqu'elle existe, est la plus petite famille génératrice de cette catégorie.

**Proposition 3.2.24** (Balabonski). Une catégorie finie sans boucles C admet une base que l'on note  $\mathcal{B}(C)$ .

Cette propriété est fausse pour une catégorie quelconque comme le montre par exemple l'ordre total  $(\mathbb{R}, \leq)$ .

#### **Proposition 3.2.25.** La catégorie Em(X) est finie sans boucles.

*Démonstration*. Par construction la catégorie Em(X) est engendrée par les morphismes adjacents qui sont en nombre fini. Elle est sans boucle car la source d'un morphisme est inférieure, pour l'ordre produit sur une grille, à sa cible.

Nous allons préciser quels sont les morphismes de la base de Em(X). En préambule, nous rappelons que d'après la définition 3.2.18, tout morphisme adjacent de Em(X) est une paire  $(x, \epsilon)$  avec  $\epsilon \in \{0, 1\}^n$ . Par construction de la catégorie Em(X), tous les morphismes de la base sont adjacents, on a une réciproque partielle.

**Définition 3.2.26.** Un morphisme adjacent de Em(X) est dit unitaire lorsque  $\epsilon$  est unitaire.

**Lemme 3.2.27.** Tout morphisme unitaire appartient à la base de Em(X).

Démonstration. Soit  $\alpha = \beta \circ \gamma$  un morphisme unitaire avec  $\gamma : x \to z$  et  $\beta : z \to y$ . En tant que point de  $\mathbb{Z}^n$ , la distance euclidienne entre x et y est 1. Cela implique que ||x - z|| = 0 ou ||y - z|| = 0, et donc que x = z ou y = z. La catégorie Em(X) étant sans boucle, l'un des morphismes  $\beta$  et  $\gamma$  est une identité.

L'exemple 3.8 de la barrière de synchronisation nous confirme que certains morphismes de la base de Em(X) sont diagonaux.

#### Trace d'un morphisme

Par construction, la source x et le but y d'un morphisme de la catégorie Em(X) associée à une région cubique X sont des points de  $\mathbb{Z}^n$  tels que  $y = x + \epsilon$  avec  $\epsilon \in \mathbb{N}^n$ , ce qui nous conduit à la définition suivante :

**Définition 3.2.28.** Soit Z une grille de dimension n et x, y deux points de Z tels que  $x \leq y$  (pour l'ordre produit). La trace de (x, y) est par définition

$$\Gamma race(x, y) = \{i \in [1:n] \mid proj_i(y-x) > 0\}.$$

**Exemple 3.2.29.** Soit x = (1, 0, 2) et y = (2, 0, 3), alors  $x \le y$  et y - x = (1, 0, 1), on a donc  $Trace(x, y) = \{1, 3\}$ 

Lorsque X est le modèle géométrique d'un programme PV, on peut interpréter les éléments de [1:n] comme les identificateurs des processus du programme. De ce point de vue, on peut considérer qu'un morphisme de la catégorie Em(X) est un fragment d'exécution du programme et que sa trace est l'ensemble des processus qui ont été activés au cours de l'exécution de ce fragment. **Proposition 3.2.30.** La trace induit un foncteur de la catégorie Em(X)vers le monoïde des sous-parties de [1 : n] dont l'opération binaire est la réunion ensembliste. Autrement dit

 $Trace(\alpha \circ \beta) = Trace(\alpha) \cup Trace(\beta)$ .

Démonstration. Si  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont deux éléments de  $\mathbb{N}^n$ , alors pour tout  $i \in [1:n]$ , on a  $\operatorname{proj}_i(\epsilon + \epsilon') > 0$  si et seulement si  $\operatorname{proj}_i(\epsilon) > 0$  ou  $\operatorname{proj}_i(\epsilon') > 0$ .  $\Box$ 

# 3.3 Produit de catégories

## 3.3.1 Définition et exemples

Le produit cartésien de catégories est une construction standard. En particulier, on construit naturellement une présentation du produit à partir de présentations des termes de ce produit. Nous allons voir que toute catégorie finie, connexe, et sans boucle, admet une présentation à partir de laquelle on déduit des propriétés intrinsèques de cette catégorie.

**Définition 3.3.1** (Produit cartésien de catégories). Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux catégories, le produit  $C_1 \times C_2$  est donné par :

- Les objets sont les couples  $(c_1, c_2)$  pour  $c_1 \in \mathcal{C}_1$  et  $c_2 \in \mathcal{C}_2$
- Les morphismes de  $(c_1, c_2)$  vers  $(d_1, d_2)$  sont les couples (f, g) avec  $f: c_1 \rightarrow d_1$  et  $g: c_2 \rightarrow d_2$

La composée  $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2)$  est définie si et seulement si les composées  $g_1 \circ f_1$  et  $g_2 \circ f_2$  le sont, auquel cas on a

$$(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) = (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2).$$

Les relations satisfaites par les catégories  $C_1$  et  $C_2$  sont conservées pour chaque «tranche» du produit, c'est-à-dire les sous-catégories  $\{id_{x_1}\} \times C_2$  et  $C_1 \times \{id_{x_2}\}$  de  $C_1 \times C_2$ . En outre, pour tout morphisme  $f_1 : x_1 \to y_1$  de  $C_1$ et tout morphisme  $f_2 : x_2 \to y_2$  de  $C_2$ , on a le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{c} (x_1, x_2) \xrightarrow{(f_1, id_{x_2})} (y_1, x_2) \\ (id_{x_1}, f_2) \downarrow \qquad \qquad \downarrow (id_{y_1}, f_2) \\ (x_1, y_2)_{(\overline{f_1, id_{y_2}})} (y_1, y_2) \end{array}$$

On note  $\pi_i$  la projection sur la i<sup>ème</sup> composante.

**Exemple 3.3.2.** Dans le terme de droite du diagramme ci-dessous, les trois carrés commutent. La commutativité des triangles dépend de la commutativité du triangle de gauche.



L'exemple 3.3.2 suggère que la catégorie représentée à droite admet une unique décomposition en produit cartésien de catégories irréductibles. C'est effectivement un cas particulier du résultat prouvé par T. Balabonski dans [3]. Le résultat s'accompagne d'une méthode de décomposition effective basée sur une présentation particulière des catégories finies sans boucles que nous allons maintenant détailler.

# 3.3.2 Propriétés des morphismes

Dans la suite, la catégorie C est finie sans boucle et munie d'une factorisation  $C = C_1 \times \cdots \times C_k$ . Un morphisme f de C est donc un k-uplet  $(f_1, \ldots, f_k)$ de morphismes tel que  $f_i$  appartient à  $C_i$  pour  $i \in [1:k]$ . On s'intéresse aux coordonnées i telles que le morphisme  $f_i$  n'est pas une identité.

**Définition 3.3.3.** On définit le facteur de f par rapport à la factorisation  $C = C_1 \times \cdots \times C_k$  comme l'ensemble

$$Factor_{\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k}(f) = \{i \in [1:k] \mid f_i \neq id_{x_i}\}.$$

On dit que le morphisme g est un translaté de f lorsque f et g ont le même facteur et que pour tout i appartenant ce facteur, on a  $f_i = g_i$ .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la factorisation considérée, on omettra les indices  $C_i$  pour n'écrire que Factor(f). On dira qu'un morphisme fprovient de  $C_i$  lorsque son facteur est réduit au singleton  $\{i\}$ . Les concepts de trace et de facteur sont similaires si ce n'est que la premier n'a de sens que dans le cas d'une catégorie de la forme Em(X) associée à une région cubique X. **Proposition 3.3.4.** Pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble [1:k] et tout morphisme f de C il existe une unique décomposition

$$f = \tilde{f}_k \circ \cdots \circ \tilde{f}_1$$

telle que pour tout  $i \in Factor_{\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k}(f)$  le facteur de  $\tilde{f}_i$  est le singleton  $\{\sigma(i)\}$ et  $\tilde{f}_i$  est une identité pour  $i \notin Factor_{\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k}(f)$ .

Démonstration. En désignant la source et le but de chaque morphisme  $f_i$  par  $x_i$  et  $y_i$ , on a alors  $\operatorname{proj}_{\sigma(i)}(\tilde{f}_i) = f_{\sigma(i)}$  et pour  $j \neq \sigma(i)$  on a  $\operatorname{proj}_j(\tilde{f}_i) = \operatorname{id}_{y_i}$  s'il existe i' < i tel que  $\sigma(i') = j$ , et  $\operatorname{proj}_j(\tilde{f}_i) = \operatorname{id}_{x_i}$  dans tous les autres cas. En particulier on a

$$\tilde{f}_i = (id_{x_1}, \dots, id_{x_{i-1}}, f_i, id_{y_{i+1}}, \dots, id_{y_k})$$

lorsque la permutation  $\sigma$  est l'identité.

# Base d'un produit

On détermine facilement la base d'un produit en fonction des bases de chacun de ses facteurs.

**Proposition 3.3.5.** Les morphismes de base du produit  $C_1 \times \cdots \times C_k$  sont les morphismes f dont le facteur est un singleton  $\{i\}$  et dont la projection correspondante  $f_i$  est un morphisme de base de la catégorie  $C_i$ .

Démonstration. Le facteur d'un morphisme de base est un singleton  $\{i\}$  d'après la proposition 3.3.4 et le facteur  $f_i$  est nécessairement un morphisme de base de  $C_i$ . La réciproque est due au fait que dans une catégorie sans boucle, si la composée de deux morphismes est une identité, alors ces deux morphismes sont aussi des identités.

# 3.3.3 Algorithme de factorisation

Nous allons présenter les idées de l'algorithme de factorisation décrit dans [3]. Cet algorithme se base sur le théorème de factorisation unique des catégories finies sans boucle connexes. Une catégorie C est dite *irréductible* lorsqu'une et une seule des catégories  $C_1$  et  $C_2$  est la catégorie terminale dès que  $C = C_1 \times C_2$ .

**Théorème 3.3.6** (Balabonski). Toute catégorie finie sans boucles connexe possède une unique factorisation en éléments irréductibles à une permutation des facteurs près.

De la base d'une catégorie on déduit naturellement un graphe. La première étape du procédé de factorisation d'une catégorie finie sans boucle consiste à «factoriser» le graphe induit par sa base. D'après la proposition 3.3.5, on a une bijection entre  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  et l'union disjointe des bases des catégories  $\mathcal{C}_i$ , factoriser un graphe revient donc à en colorier chaque flèche en fonction du facteur auquel elle appartient.

#### Un critère de séparation et un critère de regroupement

On donne un critère suffisant pour que deux flèches soient de la même couleur. Il est basé sur le recensement des carrés commutatifs induits par le produit cartésien de catégories. En effet, supposons que x soit un objet de la catégorie C et que les morphismes  $f : x \to y$  et  $g : x \to z$  appartiennent à la base de C. Supposons en outre que f et g appartiennent à des facteurs différents, disons i et j, alors il existe deux morphismes f' et g' appartenant à la base de C et tels que le carré suivant commute.



En supposant que i < j la composée commune est de la forme

 $(\ldots, f_i, \ldots, g_j, \ldots)$ 

où  $f_i$  et  $g_j$  sont respectivement les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  composantes de f et g (vus comme des k-uplets), et où les point de suspensions sont mis pour des identités. Il s'ensuit que les facteurs des morphismes f' et g' sont respectivement  $\{i\}$  et  $\{j\}$ .

**Critère 3.3.7.** Soient  $f: x \to y, g: x \to z$  deux morphismes de la base de C ayant la même source. S'il n'est pas possible de trouver deux morphismes de bases f' et g' tels que  $f \circ g' = g \circ f'$ , alors f et g sont dans le même facteur.

**Critère 3.3.8.** S'il existe deux morphismes de bases f', g' tels que  $f \circ g' = g \circ f'$ , alors on a Factor(f) = Factor(f') et Factor(g) = Factor(g') mais on ne peut pas décider si les deux morphismes f et g sont dans le même facteur puisque la carré commutatif peut être contenu dans une même tranche du produit.

On a bien sûr deux critères similaires dans le cas où les morphismes de base f et g ont le même but.



FIGURE 3.14 – Propagation des couleurs sur un graphe

#### L'algorithme

Ces critères nous donnent l'algorithme de factorisation décrit dans [3] :

- 1. on colorie l'ensemble des flèches en propageant les contraintes imposées par les critères 3.3.7 et 3.3.8, puis
- 2. on vérifie *a posteriori* que la coloration correspond à une factorisation. Au besoin on regroupe des termes en identifiant des couleurs.

La première étape est essentiellement un parcours de graphes dont l'exhaustivité est garantie par l'hypothèse de connexité de la catégorie C. En terme de complexité, la seconde étape est la plus coûteuse.

**Exemple 3.3.9.** Appliquons cet algorithme au produit d'un triangle et d'une flèche (voir la figure 3.14). On commence sur un point particulier qui possède trois flèches adjacentes auxquelles on attribue trois couleurs différentes. Le diagramme constitué de la flèche bleue et de la verte ne peut pas être complété en un carré commutatif, on identifie donc la couleur verte et la couleur bleu. On propage ensuite les couleurs rouge et bleu le long des carrés commutatifs.

On fait de même entre la flèche initiale bleue et la rouge. Ici cela se complète en un carré, on colorie alors en bleu et rouge les flèches parallèles dans le triangle du bas. On continue ce processus. Au final on trouve que chaque composante connexe rouge est égale, ainsi que les bleus. On vérifie qu'on a bien un produit entre le triangle et la flèche.

Tout comme l'algorithme de factorisation du chapitre précédent, l'algorithme que nous venons de présenter consiste à propager des contraintes locales à la totalité d'une structure pour décomposer cette dernière.

# 3.4 Le sens direct

Nous allons montrer que l'application qui associe à chaque région cubique X la catégorie Em(X) est un morphisme de monoïdes. Rappelons que factoriser X revient à trouver une permutation  $\sigma$  de [1:n], où n est la dimension de X, telle que  $\sigma X = X_1 \times X_2$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $\sigma = id$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas besoin de réordonner les coordonnées.

**Proposition 3.4.1.** Si une région cubique X se factorise (à permutation des facteurs près) en  $X = X_1 \times X_2$ , alors la catégorie Em(X) se factorise en

$$Em(X_1 \times X_2) \cong Em(X_1) \times Em(X_2)$$

Démonstration. Nous traitons d'abord la partie objet de l'isomorphisme recherché. L'application F qui associe à chaque dé C le couple de cubes (proj<sub>X1</sub>C, proj<sub>X2</sub>C) est une bijection de l'ensemble des objets de la catégorie  $Em(X_1 \times X_2)$  vers ceux de  $Em(X_1) \times Em(X_2)$ . En effet, par définition, pour toute région cubique X, les objets de la catégorie Em(X) sont les dés de X. Il suffit alors de revenir à la définition de la partition émincée d'une région cubique (cf section 3.2.2) et d'appliquer le lemme 2.4.21.

On veut maintenant étendre la définition de F aux morphismes de la catégorie  $Em(X_1 \times X_2)$  qui rappelons-le peuvent tous être écrits comme une composée de morphismes adjacents.

Une flèche du graphe  $\Gamma_X$  (cf définition 3.2.18) est une paire de dés adjacents (A, B) tel qu'il existe un chemin dirigé de A vers B dans X. En particulier, on a l'alternative suivante : soit  $\operatorname{proj}_{X_1}(A) = \operatorname{proj}_{X_1}(B)$ , soit le couple  $(\operatorname{proj}_{X_1}(A), \operatorname{proj}_{X_1}(B))$  est une flèche de  $\Gamma_{X_1}$ . Or on sait qu'il existe au plus un morphisme entre deux cubes adjacents (cf remarque 3.2.20). On peut donc identifier un morphisme adjacent a de Em(X) avec un tel couple (A, B) et définir sans ambiguïté

$$F(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2) = ((A_1, B_1), (A_2, B_2))$$

où pour  $i \in \{1, 2\}$ , les cubes  $A_i$  et  $B_i$  sont les projections de A et B sur  $X_i$ . Étant donné que les morphismes adjacents engendrent Em(X) il reste à montrer que <u>si</u> A, B, et C sont des dés tels que (A, B) et (B, C) sont des flèches de  $\Gamma_X$  et que

$$\left\{i \in [1:n] \mid \operatorname{proj}_i(A) \neq \operatorname{proj}_i(B)\right\} \cap \left\{i \in [1:n] \mid \operatorname{proj}_i(B) \neq \operatorname{proj}_i(C)\right\} = \emptyset$$

<u>alors</u>

$$F(A,C) = F(B,C) \circ F(A,B) . \tag{\dagger}$$

L'implication précédente est en effet une traduction en termes de dés de la relation génératrice

$$((x,\epsilon_1),(x+\epsilon_1,\epsilon_2)) \sim ((x,\epsilon_1+\epsilon_2))$$

donnée dans la définition 3.2.18. Il suffit alors de remarquer que l'égalité (†) est immédiate puisqu'en projetant sur  $X_1$  (resp. sur  $X_2$ ) on obtient soit des identités soit des morphismes adjacents de  $Em(X_1)$  (resp.  $Em(X_2)$ ).

Les morphismes de  $Em(X_1) \times Em(X_2)$  sont engendrés par les morphismes ayant de l'une des formes

$$(A_1, (A_2, B_2))$$
 ou  $((A_1, B_1), B_2)$ 

où pour  $i \in \{1, 2\}$ , le couple  $(A_i, B_i)$  est une flèche du graphe  $\Gamma_{X_i}$  (cf définition 3.2.18). Selon le cas, une telle flèche est l'image par F de l'un des couples

$$(A_1 \times A_2, A_1 \times B_2)$$
 ou  $(A_1 \times B_2, B_1 \times B_2)$ 

qui sont tous deux des flèches de  $\Gamma_X$ , d'où la surjectivité de F. De plus les relations

$$(A_1, (A_2, B_2)), (A_1, (B_2, C_2)) \sim (A_1, (A_2, C_2)))$$

sur  $Em(X_1) \times Em(X_2)$  issue de la relation

$$((A_2, B_2), (B_2, C_2)) \sim ((A_2, C_2)))$$

sur  $Em(X_2)$  se relèvent en des relations

$$((A_1 \times A_2, A_1 \times B_2), (A_1 \times B_2, A_1 \times C_2)) \sim (A_1 \times A_2, A_1 \times C_2)))$$

sur Em(X). De même toute relation de  $Em(X_1) \times Em(X_2)$  issue d'une relation de  $Em(X_1)$  se relève en une relation de Em(X). Enfin une relation dans  $Em(X_1) \times Em(X_2)$  due au produit cartésien est de la forme

$$\begin{array}{c|c} (A_1, A_2) & \xrightarrow{(A_1, (A_2, B_2))} & (A_1, B_2) \\ \hline \\ ((A_1, B_1), A_2) & & = & \downarrow \\ ((A_1, B_1), A_2) & \xrightarrow{(B_1, (A_2, B_2))} & (B_1, B_2) \end{array}$$
et se relève donc en deux relations de Em(X) données ci-dessous :

$$((A_1 \times A_2, A_1 \times B_2), (A_1 \times B_2, B_1 \times B_2)) \sim ((A_1 \times A_2, B_1 \times B_2))$$

$$((A_1 \times A_2, B_1 \times A_2), (B_1 \times A_2, B_1 \times B_2)) \sim ((A_1 \times A_2, B_1 \times B_2)).$$

Le foncteur F est donc bijectif sur les morphismes et les objets, c'est donc un isomorphisme.

La catégorie  $Em(\mathbb{R})$  est réduite à un point, ce qui montre que l'application  $X \mapsto Em(X)$  ne préserve pas les éléments irréductibles. Néanmoins, en se basant sur une analogie entre l'algorithme de décomposition des régions cubiques via leur cubes maximaux interdits (cf chapitre 2), et l'algorithme de factorisation des catégories finies sans boucles [3], nous allons montrer que la proposition 3.4.1 admet une réciproque partielle.

### 3.5 De la catégorie vers l'espace

Pour clore ce chapitre, nous allons montrer que pour toute région cubique X de dimension n satisfaisant certaines propriétés, si

$$Em(X) \cong Em(X_1) \times Em(X_2)$$

alors on a une partition de [1:n] qui correspond à une factorisation de X.

#### 3.5.1 Quelques obstructions

Nous donnons une liste d'exemples illustrant les situations pathologiques dans les quelles une factorisation de Em(X) ne peut pas être relevée en une factorisation de X.

#### Connexité

L'algorithme de décomposition des catégories sans boucle finies ne s'applique qu'aux catégories connexes, on supposera donc toujours que les régions cubiques X auxquelles on s'intéresse sont telles que Em(X) est connexe au sens de la définition 3.2.1. L'exemple qui suit montre qu'il ne suffit pas d'avoir la connexité de X (en tant qu'espace topologique non-dirigé) pour avoir celle de Em(X).

**Exemple 3.5.1.** On considère le carré  $[0, 2]^2$  dont on prélève le carré inférieur gauche  $[0, 1] \times [0, 1]$  et le carré supérieur droit  $[1, 2] \times [1, 2]$ . Le milieu (1, 1) n'a donc pas été supprimé et la sous-partie X de  $[0, 2]^2$  que l'on obtient est

connexe. En revanche sa partition émincée est composée de deux cubes qui correspondent aux points (0,1) et (1,0) de la grille associée. L'espace X est donc connexe mais pas la catégorie Em(X).

#### Les facteurs de dimension 1

La catégorie émincée d'un intervalle est l'élément neutre du produit cartésien de catégories, c'est-à-dire une catégorie réduite à un objet et un morphisme. Donc le morphisme de monoïdes qui envoie une région cubique sur sa catégorie émincée ne préserve pas les éléments irréductibles.

**Définition 3.5.2.** On dit qu'une région cubique connexe X est un cylindre si elle possède un facteur irréductible de dimension 1, ce qui équivaut à ce qu'elle admette pour facteur un intervalle.

**Exemple 3.5.3.** La région cubique  $X = [0, 1] \times X_2$  est un cylindre.

**Définition 3.5.4.** Soit X une région cubique, on note  $\tilde{X}$  le plus grand facteur de X sans facteur de dimension 1.

**Proposition 3.5.5.** Toute région cubique connexe X peut se décomposer en

$$X = X \times (I_1 \times \dots \times I_k)$$

où  $\tilde{X}$  n'est pas un cylindre et où les facteurs  $I_i$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Démonstration. Il suffit de considérer la décomposition de X en facteurs irréductibles.  $\hfill \Box$ 

**Proposition 3.5.6.** Soit une région cubique X telle que Em(X) est connexe, alors

$$Em(X) \cong Em(X)$$

 $D\acute{e}monstration$ . L'application qui associe à chaque région cubique sa catégorie émincée est un morphisme de monoïdes qui envoie un intervalle sur l'élément neutre du produit cartésien de catégories.

Cette proposition justifie le fait de ne considérer que les régions cubiques sans facteurs de dimension 1.

**Remarque 3.5.7.** Ceci nous indique également que les régions cubiques de dimension 2 ne sont pas intéressantes en termes de factorisation, car si elles se factorisent, les deux facteurs sont de dimension 1. La dimension 3 n'est pas beaucoup mieux non plus, car au mieux on a un facteur de dimension 2 et un facteur de dimension 1. La factorisation devient donc intéressante à partir de la dimension 4; qu'il est malheureusement plus difficile de représenter graphiquement.

#### Problème de l'existence des morphismes unitaires

Les régions cubiques qui ne sont pas des cylindres vérifient la propriété suivante :

**Proposition 3.5.8.** Soit X sans facteur de dimension 1 avec Em(X) connexe, alors pour toute coordonnée  $i \in [1 : n]$  il existe une flèche  $f \in Em(X)$  telle que  $i \in Trace(f)$ .

Démonstration. Soit i une coordonnée, alors la partition  $\mathcal{P}_i$  donnant la partition émincée contient au moins deux intervalles, sinon il y aurait un facteur de dimension 1. Notons  $\mathcal{P}_i = \{I_1, ..., I_l\}$  cette partition. Il existe alors deux dés  $C, D \subset X$  dont les *i*-ème projection diffèrent. En effet dans le cas contraire il y a au plus un intervalle  $I_j$  tel que  $\Pi_i(C) = I_j$  avec  $C \subset X$  un dé, et alors  $I_j$  sera facteur de X de dimension 1.

Soit  $x = \mathcal{G}(C)$  et  $y = \mathcal{G}(D)$  les objets de Em(X) correspondants. La catégorie Em(X) est connexe. Il existe donc un chemin (zigzag) entre x et y. Si toutes les flèches  $f_j$  du zigzag sont telles que  $i \notin Trace(f_j)$ , alors le zigzag serait constant sur la coordonnée i, ce qui n'est pas possible, car il relie deux cubes qui évoluent sur i. Ainsi il existe au moins une flèche  $f_j$  telle que  $i \in Trace(f_j)$ .

Malheureusement, la propriété donnée par la proposition 3.5.8 ne suffit pas à exclure toutes les pathologies. Voici un contre-exemple symptomatique des subtilités liées aux morphismes diagonaux.

**Exemple 3.5.9** (Contre-exemple au cas général). Considérons la région cubique X de dimension 3, que l'on décrit par ses dés (voir figure 3.15). Elle est incluse dans une grille  $2 \times 2 \times 2$ . Le premier cube, qui correspond au point (0, 0, 0) de la grille, est

$$C_1 = [0,1]^3$$

À cet «étage» (i.e. 3ème coordonné à 0), il y a également le cube

$$C_2 = [1, 2] \times [1, 2] \times [0, 1]$$

qui correspond au point (1,1,0) de la grille. De même à «l'étage du dessus» on a deux cubes  $C_3$  et  $C_4$  qui correspondent respectivement aux points (1,0,1) et (1,1,1) de la grille. Ainsi il existe dans cette région deux morphismes unitaires

$$(1,0,1) \to (1,1,1)$$
 et  $(1,1,0) \to (1,1,1)$ 



(a) La flèche diagonale entre le (b) Vu de derrière, on distingue cube (0,0,0) et (1,0,1) est en de (0,0,0) a (1,1,0), on voit rouge. Elle passe sur l'arête entre également les deux morphismes les deux cubes blancs. unitaires

FIGURE 3.15 – Deux angles de vue différents. En blanc les cubes interdits. Les flèches sont représentées par les lignes.

dont les traces respectives sont  $\{2\}$  et  $\{3\}$ . De plus on a les morphismes non-unitaires de même source

$$(0,0,0) \to (1,0,1)$$
 et  $(0,0,0) \to (1,1,0)$ 

dont les traces respectives sont  $\{1,3\}$  et  $\{1,2\}$ . La catégorie émincée est engendrée par ces quatre flèches. Ces dernières forment en particulier un carré commutatif et donc la catégorie émincée se factorise. Ce problème vient de la présence de morphisme de base co-initial dont les traces ne sont pas disjointes. En termes d'exécution de programmes cela signifie que le processus associé à la coordonnée 1 ne peut exécuter une instruction que simultanément avec une instruction de l'un des deux autres processus.

#### Plan pour la suite

Ces contres-exemples nous montrent que le relèvement d'une factorisation de Em(X) en une factorisation de X n'est pas trivial. Nous allons néanmoins montrer que si Em(X) est connexe et telle que deux morphismes de base co-initiaux ou co-finaux ont des traces disjointes, alors toute factorisation de Em(X) se relève en une factorisation de X. Nous procéderons en deux étapes :

- 1. montrer que la factorisation de Em(X) induit une partition de l'ensemble des coordonnées [1:n]
- 2. montrer que cette partition induit une factorisation de X.

La première étape est mise en défaut lorsque des traces de morphismes de base co-initiaux ou co-finaux ne sont pas disjointes. La seconde reprend les idées du chapitre 2, notamment celles qui relient la factorisation de X et les cubes maximaux de son complémentaire.

#### **3.5.2** Facteurs de Em(X) et partition des coordonnées

#### Lien entre trace et facteur

Soit  $X = X_1 \times \cdots \times X_k$  une région cubique de dimension n sans facteurs de dimension 1. Nous avons deux notions semblables sur les morphismes f de Em(X):

- l'ensemble  $Trace(f) \subseteq [1:n]$  des coordonnées de  $\mathbb{R}^n$  qui évoluent sous l'action du morphisme f (définition 3.2.28)
- l'ensemble  $Factor_{\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k}(f) \subseteq [1:k]$  des facteurs de la décomposition de Em(X) sur lesquelles la projection de f n'est pas une identité.

On veut montrer que la factorisation de Em(X) correspond à une partition de [1:n]. Pour cela on veut associer à chaque facteur de Em(X) un ensemble de coordonnées qui correspond aux traces des flèches provenant de ce facteur. Il faut alors montrer que deux facteurs distincts ont leurs ensembles de coordonnées associés disjoints. Soit  $\phi$  un isomorphisme de catégories de Em(X)sur  $C_1 \times \cdots \times C_k$ , un tel isomorphisme est par définition une factorisation de Em(X).

**Définition 3.5.10.** On dit qu'un morphisme  $f \in Em(X)$  provient de  $C_j$  si

$$Factor(\phi(f)) = \{j\},\$$

ce que l'on notera aussi  $f \in \Pi^{-1}(\mathcal{C}_j)$ .

**Définition 3.5.11.** On définit la trace d'un facteur  $C_i$  comme la réunion des traces des morphismes qui proviennent de ce facteur :

$$Trace(\mathcal{C}_i) = \bigcup_{f \in \Pi^{-1}(\mathcal{C}_i)} Trace(f)$$

**Lemme 3.5.12.** Supposens que f provient du facteur  $C_i$ . Soit  $j \in Trace(f)$  alors il existe un morphisme de base g qui provient de  $C_i$  tel que  $j \in Trace(g)$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer une décomposition de f dans la base de Em(X). Tous les éléments de cette décomposition proviennent de  $C_i$  et d'après la proposition 3.2.30 la trace de l'un d'eux (au moins) contient j.  $\Box$ 

**Définition 3.5.13.** Pour tout dé C de X, on note

$$\overrightarrow{C} = \{f \in \mathcal{B}(Em(X)) | src(f) = C\}$$

l'ensemble des flèches de base de Em(X) dont la source est C.

En rapport avec la définition 3.2.18 la remarque qui suit caractérise le contact entre deux cubes adjacents.

**Remarque 3.5.14.** Étant donnés deux cubes adjacents C et D avec  $C \leq D$ , on a un chemin dirigé sur X allant de C vers D dont l'image est incluse dans  $C \cup D$  si et seulement si

pour tout  $i \in Trace(C \to D)$  on a

$$\sup(\operatorname{proj}_i(C)) \in \operatorname{proj}_i(C)$$

ou

pour tout  $i \in Trace(C \to D)$  on a

$$\inf(\operatorname{proj}_i(D)) \in \operatorname{proj}_i(D)$$

**Lemme 3.5.15.** Soit C un dé de X et  $i \in [1 : n]$  tel que le cube D qui succède à C dans la direction i sur la grille est encore un dé de X. Alors la flèche  $f : C \to D$  est l'unique flèche de  $\overrightarrow{C}$  telle que  $i \in Trace(f)$ .

Démonstration. Soit  $g: C \to E \in \overrightarrow{C}$  une flèche adjacente telle que Trace(g) contient *i* et au moins un autre élément *j*. Pour montrer que ce n'est pas un morphisme de base, il suffit de montrer qu'il existe un chemin dirigé sur X allant de D à E (dans ce cas on aura un triangle dont tous les cotés sont adjacents, il sera donc commutatif). On sait qu'il existe un chemin dirigé  $\gamma$  sur X allant de C vers E.

Si l'image de  $\gamma$  n'est pas incluse dans  $C \cup E$  alors le chemin  $\gamma$  visite nécessairement un cube intermédiaire entre C et E en conséquence de quoi g n'est pas irréductible.

Sinon l'image de ce chemin est incluse dans  $C \cup E$ . On veut montrer l'existence d'un morphisme  $h: D \to E$ . La réciproque de la remarque 3.5.14 nous affirme l'existence d'un chemin entre D et E (et donc d'une telle flèche h) si pour tout  $i \in Trace(D \to E)$  on a soit  $sup(\operatorname{proj}_i(C)) = \operatorname{proj}_i(C)$  soit  $inf(\operatorname{proj}_i(E)) = \operatorname{proj}_i(E)$ . De plus l'application de la même remarque à g nous dit que pour tout  $i \in Trace(g)$  on a soit  $sup(\operatorname{proj}_i(C)) = \operatorname{proj}_i(C)$  soit  $inf(\operatorname{proj}_i(E)) = \operatorname{proj}_i(E)$ . L'égalité  $Trace(D \to E) = Trace(g) \setminus i$  permet de conclure dans le cas  $inf(\operatorname{proj}_i(E)) = \operatorname{proj}_i(E)$ . Dans l'autre cas il suffit de remarquer que pour  $j \neq i$   $\operatorname{proj}_i(C) = \operatorname{proj}_i(D)$ .

Le lemme 3.5.15 suggère de se restreindre aux régions cubiques X ayant la propriété suivante :

**Définition 3.5.16.** On dit que la base d'une région cubique est séparée lorsque deux morphismes de base de la catégorie Em(X) qui sont co-initiaux ou co-finaux ont leurs traces disjointes.

Cette propriété n'est en particulier pas satisfaite par la région cubique de l'exemple 3.5.9. On va également supposer que la décomposition de X n'admet pas de facteurs de dimension 1. Dans le reste de ce chapitre, on suppose que la base de la région cubique X est séparée et que X n'a pas de facteurs de dimension 1.

**Définition 3.5.17.** Soit f un morphisme de C, on dit que g est un translaté de f si pour tout  $i \in Factor_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(f)$  on a  $proj_i(f) = proj_i(g)$ 

En particulier, un morphisme de base provient d'un unique facteur i et peut alors se décomposer comme  $(id_{x_1}, ..., id_{x_{i-1}}, \operatorname{proj}_i(f), id_{x_{i+1}}, ..., id_{x_k})$ . Ses translatés sont tous les morphismes (également de base) de la même forme avec les identités qui peuvent changer.

**Proposition 3.5.18.** Un morphisme de base de la catégorie Em(X) a la même trace que n'importe lequel des ses translatés.

Démonstration. Puisque la catégorie Em(X) est connexe, on a un zigzag de morphismes de base du produit

$$\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$$

joignant la source de  $\phi(h_i)$  à celle de  $\tau$ , et dont les facteurs des éléments sont disjoints du facteur de  $\phi(h_i)$ . On résume ceci par le diagramme ci-dessous



que l'on complète pour obtenir le diagramme suivant



où pour chaque carré on a :

- les flèches horizontales (resp. verticales) ont le même facteur,
- les projections de flèches horizontales (resp. vericales) sur leur facteurs sont égales,
- les projections de flèches horizontales (resp. vericales) sur le complémentaire de leurs facteurs sont des identités.

L'isomorphisme  $\phi$  induit une bijection entre la base de la catégorie Em(X)et celle du produit  $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$ . Donc le précédent diagramme est envoyé par  $\phi^{-1}$  sur le diagramme ci-dessous



dont chaque flèche est un morphisme de base de Em(X). Considérons l'un des carrés du diagramme précédent.



D'après la restriction sur les régions cubiques considérées, les traces des morphismes h et f de ce carré, de même que celle de h' et f', sont disjointes. D'après le lemme 3.2.30 et l'égalité  $f' \circ h = h' \circ f$  on a

$$Trace(h') \cup Trace(f) = Trace(f') \cup Trace(h)$$

de sorte que si les traces de h et de f' n'étaient pas disjointes, alors en notant C et D la source et le but de f', et  $\epsilon$  l'unique élément de  $\{0,1\}^n$  tel que  $C + \epsilon = D$ , on aurait une cordonnée j pour laquelle  $\operatorname{proj}_j(\epsilon) = 2$ . Mais dans ce cas f' ne serait pas un morphisme de base. De la même manière on montre que les traces des morphismes f et h' sont disjointes. Il en résulte que h et h' ont la même trace.  $\Box$ 

**Proposition 3.5.19.** Soit f un morphisme de Em(X) provenant du facteur  $C_j$  et dont la trace contient i. Si  $h_i$  est un morphisme de base dont la trace contient i, alors  $h_i$  provient aussi du facteur  $C_j$ .

Démonstration. Le morphisme  $h_i$  étant un morphisme de base, il provient d'un certain facteur. D'après le lemme 3.5.12 on peut supposer que f est un morphisme de base. Supposons que les facteurs dont proviennent respectivement  $h_i$  et f sont différents. On peut donc translater  $h_i$  et f de manière à ce qu'ils aient la même source. D'après la proposition 3.5.18, les morphismes translatés ont la même trace que les originaux et ce sont également des morphismes de base. En appliquant à nouveau la restriction imposée aux régions cubiques considérées, les traces de ces deux morphismes sont disjointes.  $\Box$ 

En écrivant que deux sont flèches parallèles lorsque leur traces sont identiques, la proposition 3.5.19 affirme que deux flèches parallèles dans Em(X)sont dans le même facteur.

**Corollaire 3.5.20.** Toute factorisation  $Em(X) = C_1 \times \cdots \times C_k$  induit une partition des coordonnées [1 : n] dont les éléments sont les traces des facteurs :

$$\mathcal{P} = \{Trace(\mathcal{C}_j) \mid j \in [1:k]\}.$$

Démonstration. Comme X n'a pas de facteur de dimension 1, pour chaque  $i \in [1:n]$  il existe un morphisme de base dont la trace contient i. Si deux éléments de ce recouvrement partagent un élément i, alors d'après la proposition 3.5.19, les facteurs correspondants sont égaux, donc leurs traces aussi.

**Définition 3.5.21.** On note  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(X)$  la partition de [1:n] correspondante aux traces des facteurs Em(X).

L'hypothèse de connexité sur Em(X) sera utilisée dans la section suivante.

### **3.5.3** La partition $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(X)$ induit une factorisation

Nous allons montrer que la partition  $P_{irred}(X)$  est plus fine que la partition  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(X)$  de la définition 3.5.21. Essentiellement, il s'agit de montrer que pour toute région cubique irréductible de dimension au moins égale à 2 dont la base est séparée, si la catégorie Em(X) est connexe alors elle est irréductible.

#### Un cas d'école

Considérons une région cubique de dimension deux  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  et un cube maximal C du complémentaire de X dont le support est  $\{1, 2\}$ . Nous avons vu au chapitre précédent que les coordonnées 1 et 2 sont alors liées par le cube C. En particulier la région cubique X est irréductible. Cette situation est décrite par la figure 3.16 dans le cas où le complémentaire de X est réduit à C. On note alors que les deux flèches  $A \to B$  et  $A \to D$  forment un diagramme qu'il est impossible de prolonger en un carré commutatif de la catégorie Em(X). D'après le critère de séparation 3.3.7 ces deux flèches proviennent du même facteur de la catégorie Em(X) qui est donc aussi irréductible.

Plus généralement, on pourrait penser qu'il suffit, pour chaque cube maximal C du complémentaire de X, de trouver deux flèches au voisinage de Cpour lesquelles on peut appliquer le critère 3.3.7. L'exemple 3.5.22 montre que ce n'est pas le cas.



FIGURE 3.16 – Région X, autour du trou les flèches de la catégorie émincée ne peuvent pas former un carré commutatif

**Exemple 3.5.22** (Contre-exemple en dimension trois). Considérons  $X = \mathbb{R}^3 \setminus (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$  avec

$$C_{1} = [1, 2]^{2} \times [-1, 1]$$
  

$$C_{2} = \mathbb{R} \times \{1\} \times [-1, 1]$$
  

$$C_{3} = \mathbb{R} \times \{2\} \times [-1, 1]$$

Il n'existe pas de paire de flèches de base co-initiales (ou co-finales), dont les traces sont  $\{1\}$  et  $\{2\}$ , que l'on ne puisse pas refermer en un carré commutatif par des flèches de base. Nous allons passer outre cette difficulté.



FIGURE 3.17 – Tranche selon l'hyperplan  $\{z=0\}$  de l'exemple 3.5.22



FIGURE 3.18 – En blanc les deux dés D et E, en noir un cube interdit maximal, avec les témoins  $F_{\mathcal{P}}$  et  $F_{\mathcal{P}'}$ .

#### Configuration interdites des dés d'un régions cubiques

**Définition 3.5.23.** Soient deux dés  $D, E \subset X$  et  $i, j \in [1:n]$  tels que pour toute partition  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$  de [1:n] avec  $i \in P_1$  et  $j \in P_2$  il existe un cube  $F_{\mathcal{P}} \subset X^c$  qui vérifie  $\prod_{P_1}(F_{\mathcal{P}}) = \prod_{P_1}(D)$  et  $\prod_{P_2}(F_{\mathcal{P}}) = \prod_{P_2}(E)$ , on dira alors que les cubes D et E sont en configuration interdite pour les coordonnées i et j.

**Exemple 3.5.24.** En dimension 3, supposons que  $D = I_1 \times I_2 \times I_3$  et  $E = J_1 \times J_2 \times J_3$  sont des dés de X. Les partitions

$$\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \text{ et } \mathcal{P}' = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$$

de l'ensemble [1:3] sont les seules qui séparent 1 et 2. Posons  $F_{\mathcal{P}} = J_1 \times I_2 \times I_3$ et  $F_{\mathcal{P}'} = J_1 \times I_2 \times J_3$ . Si  $F_{\mathcal{P}}$  et  $F_{\mathcal{P}'}$  sont inclus dans le complémentaire de X (voir la figure 3.18) alors D et E sont en configuration interdite pour 1 et 2 puisque

$$\Pi_1(F_{\mathcal{P}}) = \Pi_1(E)$$
 et  $\Pi_{2,3}(F_{\mathcal{P}}) = \Pi_{2,3}(D)$ ,

 $\operatorname{et}$ 

$$\Pi_{1,3}(F_{\mathcal{P}'}) = \Pi_{2,3}(E)$$
 et  $\Pi_2(F_{\mathcal{P}'}) = \Pi_1(D)$ .

Les cubes maximaux induisent des configurations interdites.

**Proposition 3.5.25.** Soit C un cube maximal de  $X^c$  et  $i, j \in supp(C)$  deux coordonnées, alors il existe des dés de X dans une configuration interdite pour i et j.

Démonstration. Soit  $C_{max} = K_1 \times ... \times K_n$  un cube interdit maximal tel que  $K_i \neq \mathbb{R}$  et  $K_j \neq \mathbb{R}$ . Alors il existe deux cubes  $D, E \subset X$  avec  $D = I_1 \times \ldots \times I_n$ et  $E = J_1 \times ... \times J_n$ , tel que  $I_a \subseteq K_a$  pour  $a \neq i$  et  $I_i \subseteq K_i^c$ , de même pour E on a  $J_a \subseteq K_a$  pour  $a \neq j$  et  $J_j \subseteq K_i^c$ . En d'autres termes on peut translater les cubes D, E dans les directions i et j respectivement de telle sorte que le translaté soit dans le cube interdit, comme dans la figure 3.18. L'existence de ces deux cubes résulte de la maximalité du cube  $C_{max}$ . Soit alors une partition  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$  telle que  $i \in P_1$  et  $j \in P_2$ , et  $F_{\mathcal{P}}$  tel que  $\Pi_{P_1}(F_{\mathcal{P}}) = \Pi_{P_1}(E)$  et  $\Pi_{P_2}(F_{\mathcal{P}}) = \Pi_{P_2}(D)$ . Alors  $F_{\mathcal{P}} \subseteq C_{max}$ . Il suffit de regarder chaque coordonnée du cube. Soit  $l \in [1 : n]$ , si  $l \in P_1$  alors la projection  $\Pi_l(F_{\mathcal{P}}) = \Pi_l(E) = J_l \subseteq K_l$ , car  $j \notin P_1$  de même si  $l \in P_2$  alors  $\Pi_l(F_{\mathcal{P}}) = \Pi_l(D) = I_l \subseteq K_l$ , car  $i \notin P_2$ . Donc quelle que soit la partition  $\mathcal{P}$ choisie on peut trouver un cube  $F_{\mathcal{P}}$  interdit dont la projection sur  $P_1$  est égale à la projection de E sur  $P_1$ , et la projection sur  $P_2$  est égale à la projection de F sur  $P_2$ . 

Nous allons montrer que chaque configuration interdite est une obstruction à la factorisation de la catégorie Em(X). Autrement dit les morphismes de Em(X) dont la trace contient *i* sont dans le même facteur que ceux dont la trace contient *j*.

#### Dernière étape

L'idée sous-jacente est assez simple. Supposons  $Em(X) = C_1 \times C_2$ . Soit alors deux objets  $x, y \in Em(X)$ , on peut les décomposer sur les facteurs en  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$ . On peut alors considérer les points  $z = (x_1, y_2)$ ou encore  $w = (y_1, x_2)$ . Ces quatre points existent dans la catégorie, car on a supposé qu'il y avait factorisation. Aux points x, y correspondent un déautorisé par la bijection entre les dés et les objets de la catégorie. Soit  $C_x = \mathcal{G}^{-1}(x)$  et  $C_y = \mathcal{G}^{-1}(y)$  alors on peut décomposer ces cubes selon les coordonnées de  $\mathcal{C}_1$  (ie  $Trace(\mathcal{C}_1)$ ) et celles de  $\mathcal{C}_2$ . Pour simplifier on suppose qu'à permutation près les coordonnées sont séparées et on peut alors écrire  $C_x = (C_{x,1}, C_{x,2})$  de même avec  $C_y = (C_{y,1}, C_{y,2})$ . Si on considère maintenant w avec  $C_w = \mathcal{G}^{-1}(w) = (C_{w,1}, C_{w,2})$  alors on peut montrer que  $C_{w,1} = C_{y,1}$  et  $C_{w,2} = C_{x,2}$ . De fait si l'on considère trois cubes en configuration interdite, alors si la catégorie se factorise cela impliquerait que les trois cubes sont des objets donc des cubes autorisés d'où la contradiction.

Cet argument en dimension deux est essentiellement le même en dimension

*n*. En effet, on démontre par l'absurde que si la catégorie factorise avec  $P_1, P_2$  les coordonnées des deux facteurs, alors on utilise cette partition et le cube interdit correspondant donné par la configuration interdite.

La première chose que nous allons montrer est que deux objets de la catégorie qui ont une projection identique se relèvent en deux cubes qui ont une projection identique et réciproquement.

**Lemme 3.5.26.** Soient  $\phi : Em(X) \to C_1 \times C_2$  un isomorphisme et  $x, y \in C_1 \times C_2$  avec  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  et soit  $P_i = Trace(C_i) \subset [1 : n]$  les coordonnées de chacun des facteurs. Notons  $C_x = \phi^{-1}(x)$  et  $C_y = \phi^{-1}(y)$  les dés correspondant à x et y, alors pour  $i \in \{1, 2\}$  on a

$$(x_i = y_i) \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{P_i}(C_x) = \prod_{P_i}(C_y) \;.$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer (à permutation près) que  $P_1 = \{1, ..., l\}$  et  $P_2 = \{l + 1, ..., n\}$ . Nous pouvons alors écrire  $C_x = (C_{x,1}, C_{x,2})$  et  $C_y = (C_{y,1}, C_{y,2})$ . Nous voulons alors montrer que  $x_2 = y_2$  implique  $C_{x,2} = C_{y,2}$  et réciproquement.

Puisque la catégorie est connexe, alors  $C_1$  et  $C_2$  aussi. Ainsi il existe un zigzag (definition 3.2.1) entre deux points quelconques de  $C_1$  de même qu'entre deux points quelconques de  $C_2$ . Soit  $f_i$  un zigzag de  $C_1$  entre  $x_1$  et  $y_1$  comme ci-dessous :

$$x_1 = z_1 \stackrel{f_1}{\longleftrightarrow} z_2 \stackrel{f_2}{\longleftrightarrow} \dots \dots \stackrel{f_{n-1}}{\longleftrightarrow} z_n = y_1$$

D'après la proposition 3.5.19 on peut le relever en un zigzag de Em(X) de la forme dont les traces des flèches sont contenues dans  $P_1$ .

Ainsi, sur le diagramme précédent, les projections sur  $P_2$  des cubes  $C_i$  sont égales, autrement dit  $\prod_{P_2}(C_x) = \prod_{P_2}(C_y)$ .

Réciproquement, supposons  $\Pi_{P_2}(C_x) = \Pi_{P_2}(C_y)$ . Par un raisonnement analogue on obtient un zigzag dans  $\mathcal{C}_2$  entre  $(y_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$ .

Pour passer de x à  $(y_1, x_2)$  les flèches sont de la forme  $(f_i, id)$  et donc les projections sur  $P_2$  des extrémités des morphismes  $\phi^{-1}(f, id)$  sont toutes égales. La même remarque s'applique lorsque l'on considère un zigzag entre y et  $(y_1, x_2)$ . Ainsi on a  $C_{x,2} = C_{n,2}$  et  $C_y$  et  $C_n$ . Donc  $C_n = (C_{y,1}, C_{x,2}) = C_y$  car par hypothèse on a  $\prod_{P_2}(C_x) = \prod_{P_2}(C_y)$ . Puis  $\phi(C_n) = (y_1, x_2) = \phi(C_y) =$  $(y_1, y_2)$  et donc  $x_2 = y_2$ .

**Proposition 3.5.27.** Soit  $Em(X) = C_1 \times \cdots \times C_k$  et soient deux dés D, Een configuration interdite pour i et j, alors i et j sont dans le même bloc de la partition  $\mathcal{P}_{C_1,\ldots,C_k}(X)$ .

Démonstration. Soient  $Em(X) = C_1 \times C_2$ , et  $P_i = Trace(C_i)$  les coordonnées des facteurs (cf corollaire 3.5.20). Soit deux dés D, E en configuration interdite pour i et j (cf définition 3.5.23). On suppose que  $i \in P_1$  et  $j \in P_2$ . La configuration interdite nous donne alors un cube interdit F (pour  $P_1$ ,  $P_2$ ) vérifiant  $\prod_{P_1}(F) = \prod_{P_1}(E)$  et  $\prod_{P_2}(F) = \prod_{P_2}(D)$ . On peut appliquer le lemme 3.5.26 aux couples D, F et E, F. On note  $\phi(D) = x = (x_1, x_2)$  et  $\phi(E) = y = (y_1, y_2)$ . En particulier on peut former l'objet  $z = (y_1, x_2)$  du produit  $C_1 \times C_2$  et poser  $Z = \phi^{-1}(z)$ . D'après le lemme 3.5.26 on a alors  $\prod_{P_1}(Z) = \prod_{P_1}(E)$  et  $\prod_{P_2}(Z) = \prod_{P_2}(D)$  car  $z = (y_1, x_2)$ . Ainsi Z = F et donc Z est un cube interdit d'où une contradiction.  $\Box$ 

On en déduit le résultat attendu :

**Corollaire 3.5.28.** La partition  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(X)$  induit une factorisation de la région cubique X.

Démonstration. Si i et j sont dans le support d'un même cube interdit maximal, alors d'après la proposition 3.5.25 on a une configuration interdite pour i et j. D'après la proposition 3.5.27 i et j sont dans le même bloc de la partition  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_k}(X)$ , qui par construction de la partition  $\mathcal{P}_{irred}$ , est plus grossière que cette dernière.

Nous venons ainsi de montrer que sous certaines hypothèses, l'irréductibilité de la région cubique X implique celle de la catégorie Em(X) (corollaire 3.5.28) et nous savions déjà (cf proposition 3.4.1) que la construction  $X \mapsto Em(X)$  est un morphisme de monoïdes.

**Théorème 3.5.29** (Equivalence de factorisation). Si X est une région cubique sans facteur de dimension 1 et telle que la catégorie Em(X) est connexe et dont la base est séparée (cf. définition 3.5.16), alors la décomposition en facteurs irréductibles de la catégorie Em(X) est donnée par

$$Em(X_1) \times \cdots \times Em(X_k)$$

où  $X_1, \ldots, X_k$  sont les facteurs de la décomposition en éléments irréductibles de la région cubique X.

#### Conclusion et perspectives

Il a été démontré [37] que la catégorie des composantes d'un produit de région cubique est le produit des catégories des composantes des facteurs. Le problème à l'origine de ce chapitre est de définir des classes de régions cubiques pour lesquelles la décomposition de la catégorie des composantes est déduite de celle de la région cubique. Les difficultés techniques liées à cette question ont conduit à introduire la catégorie Em((X)) comme une approximation intermédiaire qui bénéficie d'une présentation facile à appréhender. Ce faisant, nous avons trouvé un critère (cf définition 3.5.16) sous lequel la décomposition en facteurs irréductibles de Em(X) est issue de celle de X. Néanmoins ce critère n'est pas optimal. Il est par exemple facile de modifier la région cubique de la figure 3.15, en ajoutant un cube flottant interdit qui empecherait la factorisation de la catégorie.

En outre, nous n'avons pas fait le lien entre la catégorie fondamentale d'une région cubique X et la catégorie Em(X) bien que la dernière ait été inspirée de la première.

Les arguments utilisé ici ne sont pas immédiatement généralisables à la catégorie des composantes, notamment car les composantes ne sont pas nécéssairement des cubes.

# Chapitre 4

# Produit tensoriel de régions cubiques

## 4.1 Introduction

#### Quelques motivations pratiques

Les modèles géométriques des programmes PV sont des régions cubiques. À partir de ces modèles on est capable, par exemple, de déterminer les traces maximales d'un programme PV [20] ou les bassins d'attraction d'un interblocage (voir la zone rougie sur la figure 1.2). On cherche donc des algorithmes permettant d'effectuer efficacement toutes les opérations élémentaires sur les régions cubiques. Dans ce chapitre nous allons nous focaliser sur les opérations booléennes, c'est-à-dire sur *la réunion* et sur le *complémentaire* de régions cubiques. Concrètement, après avoir précisé la notion de *produit tensoriel d'algèbres de Boole*, nous démontrerons que celle des régions cubiques de dimension  $n \ge 2$  est le *produit tensoriel* de n copies de l'algèbre de Boole des régions cubiques de dimension 1, autrement dit celle des unions finies d'intervalles de  $\mathbb{R}$ .

#### Plan du chapitre

Dans la première partie de ce chapitre, nous discutons informellement de ce que devrait être une «bonne» notion de produit tensoriel d'algèbres de Boole. Les deux sections suivantes définissent et étudient le produit tensoriel dans des catégories liées à diverses *théories algébriques* parmi lesquelles on trouve la théorie des algèbres de Boole. Le premier résultat important est la proposition 4.3.3 qui établit que le produit tensoriel de deux algèbres de Boole dans la catégorie des demi-treillis avec zéro (**SLat**<sub>0</sub>) est encore une algèbre

de Boole. Dès lors, on écrira «produit tensoriel d'algèbres de Boole» sans préciser dans quelle catégorie. Dans la dernière section, nous revenons aux régions cubiques et nous montrons qu'un produit tensoriel d'algèbres de Boole de région cubiques est encore une telle algèbre de Boole. On utilise pour cela la partition émincée d'un recouvrement cubique que l'on a définie au chapitre précédent.

#### Travaux antérieurs

Les produits tensoriels de demi-treillis et de treillis distributifs ont fait l'objet de nombreux articles dans les années soixante-dix [2, 25, 26, 27, 35, 49]. Il semble que la principale motivation de ces divers travaux ait été le produit tensoriel de treillis de congruences et qu'en raison de cela, l'extension aux algèbres de Boole n'ait pas été étudiée. Ainsi, la proposition 4.3.3 peutêtre vue comme le prolongement de l'étude du produit tensoriel de treillis distributifs menée par Fraser [25] dont le principal résultat (ici théorème 4.3.2) constitue la pierre angulaire de la démonstration. L'application de ce résultat aux régions cubiques est nouvelle, mais elle n'est pas sans rappeler le produit de tribus (ou  $\sigma$ -algèbres). On a ainsi une analogie entre la sousalgèbre de Boole engendrée par les pavés de  $\mathbb{R}^n$  et sa tribu borélienne.

# 4.2 Produit tensoriel de modèles d'une théorie algébrique

Le produit tensoriel d'espaces vectoriels est le cas particulier d'une construction qui s'applique à n'importe quelle classe de modèles d'une théorie algébrique.

On empreinte ici la terminologie utilisée dans le troisième chapitre de [8]. Une signature est une application  $\alpha$  d'un ensemble  $\Omega$  vers  $\mathbb{N}$ . Chaque élément  $\omega \in \Omega$  peut-être considéré comme un opérateur et  $\alpha(\omega)$  comme son arité, c'est-à-dire le nombre d'arguments de  $\omega$ . Une interprétation d'une signature est un ensemble X accompagné d'une application  $\omega_X : X^{\alpha(\omega)} \to X$  pour chaque  $\omega \in \Omega$ . Étant données deux interprétations X et Y d'une même signature, un morphisme d'interprétations de X vers Y est une application  $f : X \to Y$  telle que pour tout opérateur  $\omega \in \Omega$  et pour tous  $(x_1, \ldots, x_{\alpha(\omega)}) \in X^{\alpha(\omega)}$  on a l'égalité ci-dessous :

$$f(\omega_X(x_1,\ldots,x_{\alpha(\omega)})) = \omega_Y(f(x_1),\ldots,f(x_{\alpha(\omega)})).$$

Une théorie algébrique  $\mathbb T$  est une signature avec une collection d'axiomes de la forme suivante

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \qquad \Phi(x_1, \dots, x_n) = \Psi(x_1, \dots, x_n)$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des termes construits sur les opérateurs de  $\Omega$  et dont les variables libres sont prises dans l'ensemble  $\{x_1, \ldots, x_n\}$ . Un *modèle* d'une théorie est une interprétation de sa signature qui satisfait tous ses axiomes. Un *morphisme de modèles* n'est qu'un morphisme d'interprétations entre modèles de la théorie. Les modèles d'une théorie algébrique  $\mathbb{T}$  et leurs morphismes forment une catégorie complète et cocomplète, qui s'accompagne naturellement d'un foncteur d'oubli vers **Set** (voir [8, Theorem 3.4.5, p.138]).

La notion générale correspondant aux applications bilinéaires est celle de bimorphisme. La plupart des objets mathématiques étudiés en algèbre e.g. semigroupes, monoïdes, groupes, anneaux, modules, algèbres, et toutes leurs variantes commutatives et/ou unitaires sont les modèles de quelque théorie algébrique. Nous allons noter  $\mathbf{C}$  la catégorie des modèles d'une théorie algébrique fixée. Dans la suite, nous ne considérerons que des catégories de cette nature.

**Définition 4.2.1** (bimorphismes). Soient A, B, et X trois objets de C. Un bimorphisme f est une application de  $A \times B$  dans X telle que pour tout  $a \in A$  et pour tout  $b \in B$  les applications  $f(a, \_) : B \to X$  et  $f(\_, b) \to X$  sont des morphismes.

**Définition 4.2.2** (produit tensoriel). Un bimorphisme  $i : A \times B \to X$  est un produit tensoriel de A et B si pour tout objet  $Z \in \mathbb{C}$  et tout bimorphisme  $f : A \times B \to Z$  il existe un unique morphisme  $h : X \to Z$  tel que  $f = h \circ i$ .

$$A \times B \xrightarrow{i} X$$

$$f \xrightarrow{\downarrow} f$$

$$Z$$

Le produit tensoriel est unique à isomorphisme près, on le note  $A \otimes_{\mathbf{C}} B$  ou plus tacitement  $A \otimes B$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible. L'application i n'est en général pas surjective, mais son image génère  $A \otimes B$ . Les éléments de l'image de l'application i, que l'on note  $i(a,b) = a \otimes b$ , sont généralement appelés tenseurs purs.

**Proposition 4.2.3** ([8]). Le produit tensoriel de deux modèles d'une même théorie algébrique est bien défini.

#### 4.2.1 Le cas des algèbres de Boole

La théorie des algèbres de Boole est algébrique comme le montre la définition 4.2.4. La catégorie des modèles de cette théorie, autrement dit la catégorie des algèbres de Boole, est notée **Bool**.

**Définition 4.2.4.** Une algèbre de Boole est un ensemble A muni de deux opérations binaires  $\lor$  (appelé "join") et  $\land$  (appelé "meet"), d'un opérateur unaire (.)<sup>c</sup> appelé complémentaire et de deux éléments 0 et 1 (appelé "bottom" et "top" ou encore plus petit et plus grand éléments) tel que pour tout  $a, b, c \in$ A les axiomes suivants sont satisfaits :

- Associativité :  $a \lor (b \lor c) = (a \lor b) \lor c$ , de même avec  $\land$
- Commutativité :  $a \lor b = b \lor a$ , de même avec  $\land$
- $a \lor (a \land b) = a \ et \ a \land (a \lor b) = a$
- $\ a \lor 0 = a \ et \ a \land 1 = a$
- Distributivité :  $a \lor (b \land c) = (a \lor b) \land (a \lor c)$  et inversement
- $a \lor a^c = 1 \ et \ a \land a^c = 0 \ .$

On parlera d'algèbre de Boole triviale ou dégénérée quand 0 = 1. Un morphisme de la catégorie des algèbres de Boole est une application  $f : A \to B$ où A et B sont deux algèbres de Boole telle que :

$$- f(a \lor_A b) = f(a) \lor_B f(b) - f(a \land_A b) = f(a) \land_B f(b) - f(1_A) = 1_B - f(0_A) = 0_B .$$

Dans la définition 4.2.4 on ne spécifie pas qu'un morphisme d'algèbre de Boole préserve le complémentaire, c'est en fait une conséquence des quatre axiomes imposés. En d'autres termes, la catégorie des algèbres de Boole est une sous-catégorie pleine de celle des treillis distributifs bornés.

Par définition, calculer le produit tensoriel des algèbres de Boole A et Bimplique de déterminer quels sont les bimorphismes f définis sur  $A \times B$ . En notant C le codomaine d'un tel f on a :

$$f(0_A, b) = 0_C$$
  

$$f(1_A, b) = 1_C$$
  

$$f(a, 0_B) = 0_C$$
  

$$f(a, 1_B) = 1_C$$

pour tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$ . On en déduit, en posant  $a = 0_A$  et  $b = 1_B$ , que  $0_C = f(0_A, 1_B) = 1_C$ . Ainsi, le produit tensoriel de deux algèbres de Boole dans la catégorie des algèbres de Boole est dégénéré.

#### 4.2.2 Extensions de la théorie des demi-treillis

La section 4.2.1 montre que la construction décrite dans la définition 4.2.2 appliquée directement aux algèbres de Boole est sans intérêt. On peut cependant remarquer que les égalités suivantes

$$(a_1 \cup a_2) \times b_1 = (a_1 \times b_1) \cup (a_2 \times b_1)$$

$$(a_1 \cap a_2) \times b_1 = (a_1 \times b_1) \cap (a_2 \times b_1)$$
  
 $\emptyset \times b = \emptyset$ 

sont satisfaites pour tous  $a_i \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $b_i \subseteq \mathbb{R}^m$  où  $i \in \{1, 2\}$ . En notant Pow $(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des sous-parties de  $\mathbb{R}^n$ , ces égalités suggèrent que les produits  $a \times b$  pour  $a \in \text{Pow}(\mathbb{R}^n)$  et  $b \in \text{Pow}(\mathbb{R}^m)$  sont les tenseurs purs d'un produit tensoriel de treillis distributifs avec zéro. La définition de (demi)treillis sur laquelle nous nous appuyons correspond à celle donnée dans la plupart des références sur le sujet [5, 6, 7, 9, 17, 28, 48] mais pas toutes [40, 50].

Un semi-groupe est un ensemble X muni d'une loi associative  $\vee$ . Un élément  $\varepsilon \in X$  est dit neutre ou zéro quand les applications  $\varepsilon \vee_{-}$  et  $_{-} \vee \varepsilon$ sont des identités. Il existe au plus un tel élément dans un semi-groupe. Un monoïde est un semi-groupe avec un élément neutre. Un semi-groupe/monoïde est dit idempotent si  $x \vee x = x$  pour tout  $x \in X$ . Un demi-treillis est un semigroupe commutatif idempotent, et un demi-treillis avec zéro est un monoïde commutatif idempotent. Tout demi-treillis induit un ordre partiel sur X en écrivant  $x \sqsubseteq_{\vee} y$  quand  $x \vee y = y$ . Réciproquement, un ordre partiel sur X dont les paires possèdent une borne supérieure induit un demi-treillis. Un treillis est un couple  $\vee, \wedge$  de demi-treillis tels que  $\sqsubseteq_{\wedge}=\sqsubseteq_{\vee}^{op}$ , ce qui est le cas si et seulement si les lois d'absorptions

$$x \lor (x \land y) = x = x \lor (x \land y)$$

sont vérifiées pour tout  $x, y \in X$ . Un treillis avec deux constantes 0 et 1 telles que

$$0 \lor x = x = x \land 1$$

pour tout  $x \in X$  est dit *borné*, il est dit *dégénéré* quand 0 = 1. Un treillis est dit *distributif* lorsque l'égalité

$$x \land (y \lor z) = (x \land y) \lor (x \land z)$$

est satisfaite pour tous x, y, z. Dans ce cas on a également [5]

$$x \lor (y \land z) = (x \lor y) \land (x \lor z) .$$

Dès lors, on peut définir une algèbre de Boole comme un treillis distributif borné avec un complément, c'est-à-dire une involution  $x \in X \mapsto x^c \in X$  telle que  $x \vee x^c = 0$  and  $x \wedge x^c = 1$  pour tout  $x \in X$ , où 0 et 1 sont les éléments neutres de  $\vee$  et  $\wedge$ . Les célèbres lois de De Morgan

$$(a \lor b)^c = a^c \land b^c$$
$$(a \land b)^c = a^c \lor b^c$$

Structure	Signature	Axiomes	Catégorie
demi-treillis	$\vee$	semi-groupe commutatif idempotent	SLat
demi-treillis avec zéro	$\lor, 0$	monoïde commutatif idempotent	$SLat_0$
treillis	$\lor, \land$	deux demi-treillis avec $\sqsubseteq_{\wedge} = \sqsubseteq_{\vee}^{op}$	Lat
treillis distributif	$\lor, \land$	treillis t.q. $\wedge$ distributif sur $\vee$	DLat
treillis borné	$\lor, \land, 0, 1$	treillis avec minimum et maximum	BLat
algèbre de Boole	$\lor, 0, \land, 1, \_^c$	treillis distributif avec complément	Boole

FIGURE 4.1 – Divers affaiblissements de la théorie des algèbres de Boole



FIGURE 4.2 – Les diagrammes de Hasse de  $B_1$  et  $B_2$ 

affirment donc que cette involution est un isomorphisme de monoïdes commutatifs entre  $(M, \lor, 0)$  et  $(M, \land, 1)$ . Toutes les structures précédemment évoquées sont clairement des modèles de théories algébriques que l'on récapitule dans le tableau ci-dessous.

# 4.3 Produit tensoriel d'algèbres de Boole dans différentes extensions de la catégorie des algèbres de Boole

Remarquons que lorsque l'on affaiblit les axiomes d'une théorie algébrique, on étend la catégorie de ses modèles. De ce point du vue, les théories algébriques décrites dans la section précédente sont des affaiblissements de la théorie des algèbres de Boole, et donc des extensions de la catégorie **Boole**. Étant données deux algèbres de Boole A et B, on peut dès lors s'intéresser aux produits tensoriels  $i(A) \otimes i(B)$  où i est le foncteur d'inclusion de la catégorie **Boole** dans l'une de ses extensions. Dans la suite, on notera  $B_1$  et  $B_2$  les algèbres de Boole des sous-parties du singleton  $\{0\}$  et de la paire  $\{0,1\}$  dont les diagrammes de Hasse correspondants sont représentés sur la figure 4.2.

$\vee$	$0 = 0 \otimes 0$	$a = 1 \otimes 0$	$b = 0 \otimes 1$	$1 = 1 \otimes 1$	$a \lor b$
0	0	a	b	1	$a \lor b$
a	a	a	$a \lor b$	1	$a \lor b$
b	b	$a \lor b$	b	1	$a \lor b$
1	1	1	1	1	1
$a \lor b$	$a \lor b$	$a \lor b$	$a \lor b$	1	$a \lor b$

FIGURE 4.3 – Table de l'opérateur  $\vee$  du demi-treillis  $B_1 \otimes_{\mathbf{SLat}} B_1$ 

#### 4.3.1 Dans la catégorie des demi-treillis

En spécialisant la définition 4.2.2 à la catégorie des demi-treillis, on vérifie assez facilement que le produit tensoriel de deux demi-treillis A et B est le quotient du demi-treillis des sous-parties non vides de l'ensemble  $A \times B$  munie de la réunion binaire, par la congruence ~ engendrée par les relations

$$\{(a \lor b, c)\} \sim \{(a, c), (b, c)\}$$
  
$$\{(a, c \lor d)\} \sim \{(a, c), (a, d)\}$$

où  $a, b \in A$  et  $c, d \in B$ . Nous allons maintenant calculer le produit tensoriel  $B_1 \otimes B_1$  dans la catégorie **SLat**. Il y a quatre tenseurs purs que l'on notera 0, a, b et 1 :

$$0 = 0 \otimes 0$$
$$a = 1 \otimes 0$$
$$b = 0 \otimes 1$$
$$1 = 1 \otimes 1$$

En vertu de la description du produit tensoriel dans **SLat** que nous avons donnée au début de cette section, on peut dresser la table de l'opérateur  $\lor$  du demi-treillis  $B_1 \otimes B_1$  (voir la figure 4.3). Détaillons le calcul de  $1 \lor 0$ :

$$1 \lor 0 = 1 \otimes 1 \lor 0 \otimes 0$$
  
=  $(1 \otimes 1 \lor 0 \otimes 1) \lor 0 \otimes 0$   
=  $1 \otimes 1 \lor (0 \otimes 1 \lor 0 \otimes 0)$   
=  $1 \otimes 1 \lor 0 \otimes 1$   
=  $1 \otimes 1$ 

Notons S le demi-treillis dont le diagramme de Hasse est représenté à gauche sur figure 4.4. Nous voulons montrer que ce demi-treillis est le produit ten-



FIGURE 4.4 – Les demi-treillis  $B_1 \otimes_{\mathbf{SLat}} B_1$  et  $B_2$ 

soriel de deux copies de  $B_1$  dans **SLat**, c'est-à-dire que S vérifie la propriété universelle qui caractérise le produit tensoriel. Remarquons déjà que les seuls tenseurs purs incomparables de  $B_1 \otimes B_1$  sont a et b. Nous sommes donc face à l'alternative suivante : soit  $a \vee b = 1$  auquel cas le produit tensoriel  $B_1 \otimes B_1$ est  $B_2$ , soit  $a \vee b \neq 1$  et dans ce cas il est isomorphe à S. Or l'attribution des étiquettes aux éléments de S et à ceux de  $B_2$  sur la figure 4.4 définit deux bimorphismes  $f : B_1 \times B_1 \to B_2$  et  $g : B_1 \times B_1 \to S$ . Cependant, la seule application  $h : B_2 \to S$  telle que  $g = h \circ f$  n'est pas un morphisme de demi-treillis puisque  $h(a \vee b) = 1$ . Le produit tensoriel  $B_1 \otimes B_1$  est donc isomorphe au demi-treillis S et ce n'est pas une algèbre de Boole pour des raisons de cardinalité (les algèbres de Boole finie ayant pour cardinal une puissance de deux).

#### 4.3.2 Dans la catégorie des demi-treillis avec zéro

Notons  $\mathcal{B}_n$  l'algèbre de Boole des régions cubiques de dimension n. Pour que  $\mathcal{B}_2$  soit le produit tensoriel de deux copies de  $\mathcal{B}_1$ , il faut que le tenseur pur  $a \otimes b$  corresponde au rectangle  $a \times b$  pour tous intervalles a et b de  $\mathbb{R}$ , . En particulier, si l'un des intervalles a ou b est vide, le rectangle  $a \times b$  devrait l'être aussi, autrement dit le tenseur pur  $a \otimes b$  devrait être nul. Or ce n'est pas le cas lorsque l'on considère le produit tensoriel dans la catégorie **SLat**. Il est donc naturel de s'intéresser au produit tensoriel dans la catégorie des demi-treillis avec zéro, notée **SLat**<sub>0</sub>, puisque l'on a alors par définition

$$a\otimes 0 = 0 = 0\otimes b$$
.

L'algèbre de Boole  $B_1$  est l'élément neutre pour le produit tensoriel  $\otimes_{\mathbf{SLat}_0}$ .

**Proposition 4.3.1.** Pour toute algèbre de Boole A, on a  $A \otimes B_1 = A$ .

*Démonstration.* En effet, tout tenseur pur de  $A \otimes B_1$  est soit de la forme  $a \otimes 1$ , soit de la forme  $a \otimes 0$ . Or on a  $a \otimes 0 = 0 = 0 \otimes a$  pour tout  $a \in A$ .

On remarque alors que les tenseurs purs  $a \otimes 1$  forment une algèbre de Boole isomorphe à A car  $a_1 \otimes 1 \lor a_2 \otimes 1 = (a_1 \lor a_2) \otimes 1$ .

Le résultat qui suit est la clé du reste de ce chapitre.

**Théorème 4.3.2** (Fraser [25, 26]). Le produit tensoriel de deux treillis distributifs (**DLat**) dans  $SLat_0$  est encore un treillis distributif. Et on a

$$\bigvee_{i} (a_i \otimes b_i) \land \bigvee_{j} (c_i \otimes d_j) = \bigvee_{i,j} (a_i \land c_j) \otimes (b_i \land d_j)$$

**Théorème 4.3.3.** Le produit tensoriel de deux algèbres de Boole dans  $SLat_0$  est encore une algèbre de Boole. De plus, deux représentants de ce produit tensoriel sont isomorphes en tant qu'algèbres de Boole.

*Démonstration.* Notons C le produit tensoriel dans **SLat**<sub>0</sub> de deux algèbres de Boole A et B. Nous allons montrer que C est une algèbre de Boole. D'après le théorème 4.3.2 nous savons déjà que C est un treillis distributif avec zéro et que l'on a la loi d'échange

$$(a_1 \otimes b_1) \wedge (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \wedge a_2) \otimes (b_1 \wedge b_2)$$

$$(4.1)$$

où  $a_1, a_2 \in A$  et  $b_1, b_2 \in B$ .

Unité et zéro. Notons  $1_A$  et  $1_B$  les unités des algèbres de Boole A et B. Nous allons vérifier que  $1_A \otimes 1_B$  est l'unité de  $A \otimes B$ . Il faut montrer que pour tout  $x \in A \otimes B$  on a  $1_A \otimes 1_B \lor x = 1_A \otimes 1_B$  et  $1_A \otimes 1_B \land x = x$ . Dans un premier temps, nous prouvons cette propriété pour les tenseurs purs.

$$(1_A \otimes 1_B) \wedge (a \otimes b) = (1_A \otimes 1_B) \wedge ((1_A \wedge a) \otimes b)$$
  
=  $(1_A \otimes 1_B) \wedge (1_A \otimes b) \wedge (a \otimes b)$   
=  $(1_A \otimes (1_B \wedge b)) \wedge (a \otimes b)$   
=  $1_A \otimes b \wedge a \otimes b$   
=  $(1_A \wedge a) \otimes b$   
=  $a \otimes b$ 

$$1_A \otimes 1_B \lor a \otimes b = (1_A \lor a) \otimes 1_B \lor a \otimes b$$
  
=  $1_A \otimes 1_B \lor a \otimes 1_B \lor a \otimes b$   
=  $1_A \otimes 1_B \lor a \otimes (1_B \lor b)$   
=  $1_A \otimes 1_B \lor a \otimes 1_B$   
=  $(1_A \lor a) \otimes 1_B$   
=  $1_A \otimes 1_B$ 

Des calculs similaires montrent les égalité suivantes :

$$0_A \otimes 0_B \lor a \otimes b = a \otimes b$$
$$0_A \otimes 0_B \land a \otimes b = 0_A \otimes 0_B .$$

Tout élément de C peut s'écrire  $t_1 \vee \cdots \vee t_n$  pour une famille finie de tenseurs purs  $t_1, \ldots, t_n$ . L'opérateur  $\vee$  étant associatif, nous en déduisons que les deux égalités ci-dessous sont vérifiées pour tout élément x de C.

$$1_A \otimes 1_B \lor x = 1_A \otimes 1_B$$
$$0_A \otimes 0_B \lor x = x$$

D'après l'égalité 4.1 et la distributivité de l'opérateur  $\wedge$  sur l'opérateur  $\vee$ , les égalités ci-dessous sont également valables pour tout élément x de C.

$$1_A \otimes 1_B \wedge x = x$$
$$0_A \otimes 0_B \wedge x = 0_A \otimes 0_B$$

Le treillis distributif C admet donc un zéro  $0_{A\otimes B}$  et une unité  $1_{A\otimes B}$  respectivement donnés par les tenseurs purs  $0_A \otimes 0_B$  et  $1_A \otimes 1_B$ .

Complémentaire d'un tenseur pur. Comme précédemment on écrit 1 et 0 au lieu de  $1_A \otimes 1_B$  et  $0_A \otimes 0_B$ . On propose l'écriture suivante comme complémentaire :

$$(a \otimes b)^c = (1_A \otimes b^c) \lor (a^c \otimes 1_B).$$

Vérifions en premier lieu que la formule donnée pour les tenseurs élémentaires vérifie bien les deux égalités du complémentaire. On introduit la notation

$$\gamma = (1_A \otimes b^c) \vee (a^c \otimes 1_B) = \underbrace{(a \vee a^c)}_{1_A} \otimes b^c \vee a^c \otimes \underbrace{(b \vee b^c)}_{1_B}$$

On développe le terme de droite pour obtenir l'égalité

$$\gamma = a \otimes b^c \vee \underbrace{a^c \otimes b^c \vee a^c \otimes b}_{a^c \otimes 1_B} \vee a^c \otimes b^c .$$

On vérifie que  $a \otimes b \lor \gamma = 1$  :

$$\begin{aligned} a \otimes b \vee \gamma &= (a \otimes b \vee a \otimes b^c) \vee a^c \otimes 1_B \vee a^c \otimes b^c \\ &= (a \otimes 1_B \vee a^c \otimes 1_B) \vee a^c \otimes b^c \\ &\geq (a \vee a^c) \otimes 1_B \\ &= 1_A \otimes 1_B . \end{aligned}$$

On vérifie que  $a\otimes b\wedge\gamma=0$  : de la distributivité de l'opérateur  $\wedge$  sur l'opérateur  $\vee$  on déduit l'égalité ci-dessous

$$a \otimes b \wedge \gamma = (a \otimes b \wedge a \otimes b^c) \vee (a \otimes b \wedge a^c \otimes 1_B) \vee (a \otimes b \wedge a^c \otimes b^c)$$

En appliquant la loi d'échange (égalité 4.1) on regroupe alors les tenseurs purs pour conclure :

$$\begin{aligned} a \otimes b \wedge \gamma &= (a \wedge a \otimes b \wedge b^c) \quad \lor \quad (a \wedge a^c \otimes b \wedge 1_B) \quad \lor \quad (a \wedge a^c \otimes b \wedge b^c) \\ &= a \otimes 0 \quad \lor \quad 0 \otimes b \quad \lor \quad 0 \otimes 0 \\ &= 0 \; . \end{aligned}$$

C'est le seul passage de la preuve qui nécessite la relation  $a \otimes 0_B = 0 = 0_A \otimes b$ . Par définition on a donc  $(a \otimes b)^c = \gamma$ .

Complémentaire. On développe l'expression

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{n} (a_j^c \otimes 1_B \vee 1_A \otimes b_j^c)\right)$$
(4.2)

pour obtenir l'expression

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \left( \underbrace{a_{j}^{c} \otimes 1_{B} \vee 1_{A} \otimes b_{j}^{c} \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_{i} \otimes b_{i}\right)}_{\geq a_{j}^{c} \otimes 1_{B} \vee 1_{A} \otimes b_{j}^{c} \vee a_{j} \otimes b_{j}} \right) .$$

Or  $a_j^c \otimes 1_B \vee 1_A \otimes b_j^c$  est le complémentaire du tenseur pur  $a_j \otimes b_j$  et donc

 $a_j^c \otimes 1_B \lor 1_A \otimes b_j^c \lor a_j \otimes b_j = 1_A \otimes 1_B$ .

Donc l'expression 4.2 se réduit à  $1_A \otimes 1_B$ . De même on développe l'expression

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{n} (a_j^c \otimes 1_B \vee 1_A \otimes b_j^c)\right)$$
(4.3)

pour obtenir l'expression

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left( \underbrace{a_i \otimes b_i \wedge \left( \bigwedge_{j=1}^{n} a_j^c \otimes 1_B \vee 1_A \otimes b_j^c \right)}_{\leq a_i \otimes b_i \vee a_i^c \otimes 1_B \vee 1_A \otimes b_i^c} \right) .$$

Or on a vu que

$$a_i \otimes b_i \wedge (a_i^c \otimes 1_B \vee 1_A \otimes b_i^c) = 0$$

Donc l'expression 4.3 se réduit à 0 et on a prouvé la première partie du théorème. Supposons que  $C_1$  et  $C_2$  soient deux représentants du produit tensoriel des algèbres de Boole A et B dans **SLat**<sub>0</sub>. D'après la propriété universelle qui caractérise le produit tensoriel, on a un unique isomorphisme  $m: C_1 \to C_2$  tel que pour tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$  on a  $m(a \otimes_1 b) = a \otimes_2 b$  où  $a \otimes_i b$  désigne un tenseur pur dans  $C_i$ . Nous savons donc déjà que m envoie le zéro et l'unité de  $C_1$  sur le zéro et l'unité de  $C_2$ . En vertu de la loi d'échange (égalité 4.1) et d'après la définition du morphisme m nous avons

$$m(a \otimes_1 b \wedge a' \otimes_1 b') = m(a \wedge a' \otimes_1 b \wedge b')$$
  
=  $a \wedge a' \otimes_2 b \wedge b'$   
=  $a \otimes_2 b \wedge a' \otimes_2 b'$ .

Nous venons de montrer que si t et t' sont deux tenseurs purs de  $C_1$  alors on a l'égalité  $m(t \wedge t') = t \wedge t'$ . On l'étend à tous les éléments de  $C_1$  par distributivité de l'opérateur  $\wedge$  sur l'opérateur  $\vee$ . L'application m est donc un morphisme d'algèbres de Boole.

## 4.4 Application aux régions cubiques

On rappelle que pour  $n \in \mathbb{N}$  l'algèbre de Boole des région cubiques de dimension n est désignée par  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ . Nous sommes désormais en mesure d'exprimer l'algèbre de Boole  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  en fonction de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , et ainsi d'aboutir à l'objectif que nous nous étions fixé au début de ce chapitre.

**Théorème 4.4.1.** L'algèbre de Boole  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbf{SLat}_0} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  est isomorphe à  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ .

Démonstration. Soit  $i : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$  l'application qui a un couple (a, b)où a et b sont des réunions finies d'intervalles associe le produit cartésien  $a \times b$ . Nous allons montrer que celle ci satisfait la propriété universelle qui caractérise le produit tensoriel. Soit  $X \in \mathbf{SLat}_0$  et  $f : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to X$  un bimorphisme de  $\mathbf{SLat}_0$ . On souhaite trouver un morphisme de demi-treillis  $h : \mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \to X$  tel que le diagramme commute :



Un tel produit est une région cubique de dimension 2 puisqu'il admet un nombre fini de composantes connexes et que toutes sont des rectangles. Si un tel h existe, il doit en particulier satisfaire l'égalité  $h(a \times b) = f(a, b)$  pour chaque rectangle  $a \times b$ . Puisque chaque élément  $X \in \mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$  admet recouvrement cubique fini  $\mathcal{F}$ , on voudrait poser

$$h(X) = \bigvee_{(a \times b) \in \mathcal{F}} f(a, b) .$$

Encore faut-il montrer que la valeur du terme de droite ne dépend pas du choix du recouvrement de X. Admettons provisoirement que ce soit le cas. Par définition  $h(\emptyset)$  est la borne supérieure de la famille vide, donc le plus petit élément de X. Par construction h est un morphisme car l'union de deux recouvrement donne un recouvrement de l'union.

#### L'application h est bien définie

On détaille ici un exemple qui illustre la construction qui va nous permettre de montrer que h est bien définie. Sur la figure 4.5, on représente une région cubique X (en haut) ainsi que deux de ses recouvrements cubiques (à gauche et à droite) respectivement notés  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Le premier est le recouvrement cubique maximal de X, il comprend trois rectangles (deux sont hachurés, le troisième colorié en bleu) et un carré blanc. Le second est quelconque, il est composé de deux rectangles blancs et de cinq carrés distingués par la couleur (rouge) et les motifs (hachures, points, étoiles) utilisés pour les remplir.

**Définition 4.4.2.** Étant donnés deux recouvrements cubiques finis  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}$ d'une région cubique X, on dit que  $\mathcal{F}'$  est un raffinement de  $\mathcal{F}$  lorsque tout élément de  $\mathcal{F}'$  est inclus dans un élément de  $\mathcal{F}$ . Le raffinement  $\mathcal{F}'$  est dit cartésien lorsque pour tout élément  $C \in \mathcal{F}$ , il existe deux familles finies d'intervalles  $\{I_1, \ldots, I_N\}$  et  $\{J_1, \ldots, J_M\}$  telles que

$$C = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M} I_i \times J_j$$

et  $I_i \times I_j \in \mathcal{F}'$  pour tout  $i \in \{1, \ldots, N\}$  et  $j \in \{1, \ldots, M\}$ .

En bas de la figure 4.5 on trouve une partition  $\mathcal{F}_3$  de X qui de surcroît est un raffinement cartésien commun à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Le résultat qui suit a motivé la définition 4.4.2.



FIGURE 4.5 – Deux recouvrements d'une même région cubique et une «bonne» partition commune.

**Lemme 4.4.3.** Si le recouvrement cubique  $\mathcal{F}'$  est un raffinement du recouvrement cubique  $\mathcal{F}$  d'une même région cubique X, alors

$$\bigvee_{C \in \mathcal{F}} f(C) \leq \bigvee_{C \in \mathcal{F}'} f(C) \; .$$

Si de plus c'est un raffinement cartésien, alors on a égalité.

Démonstration. Si le rectangle C' est inclus dans le rectangle C alors on a  $f(C') \sqsubseteq f(C)$  car f est un bimorphisme. On en déduit que

$$\bigvee_{C' \in \mathcal{F}'} f(C') \quad \sqsubseteq \quad \bigvee_{C \in \mathcal{F}} f(C) \; .$$

De plus, pour un élément C et deux familles d'intervalles comme dans la définition 4.4.2 on a

$$f(C) = f\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i, \bigcup_{j=1}^{M} J_j\right)$$
$$= \bigvee_{i=1}^{N} f\left(I_i, \bigcup_{j=1}^{M} J_j\right)$$
$$= \bigvee_{i=1}^{N} \bigvee_{j=1}^{M} f\left(I_i, J_j\right) ,$$

d'où l'égalité attendue.

#### Fin de la preuve du théorème 4.4.1

Pour conclure, il suffit donc de montrer que deux recouvrements cubiques

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1, \dots, A_N\}$$
 and  $\mathcal{F}_2 = \{B_1, \dots, B_M\}$ 

d'une région cubique donnée X ont un raffinement cartésien commun. Pour chacune des coordonnées  $d \in \{1,2\}$  on définit sur  $\mathbb{R}$  une application  $\phi_d$ à valeur dans  $\{0,1\}^{N+M}$  qui indique si le réel t appartient à la projection proj<sub>d</sub>( $A_k$ ) (resp. proj<sub>d</sub>( $B_k$ )) pour chacun des indices  $k \in \{1, \ldots, N\}$  (resp.  $k \in$  $\{1, \ldots, M\}$ ). Autrement dit pour tout  $k \in \{1, \ldots, N\}$ , on a proj<sub>k</sub>( $\phi_d(t)$ ) = 1 si et seulement si  $t \in \operatorname{proj}_d(A_k)$ ; et pour tout  $k \in \{N+1, \ldots, N+M\}$ , on a proj<sub>k</sub>( $\phi_d(t)$ ) = 1 si et seulement si  $t \in \operatorname{proj}_d(B_{k-N})$ .

Étant donné  $\omega$  un mot de longueur N + M sur  $\{0, 1\}$ , l'ensemble  $\phi_d^{-1}(\{\omega\})$  est donc l'intersection de N + M sous-parties de  $\mathbb{R}$  dont chacune est la réunion



FIGURE 4.6 – Découpage horizontal

d'au plus deux intervalles. Cet ensemble admet donc un nombre fini de composantes connexes.

On définit alors  $\mathcal{P}_d$  comme la collection des composantes connexes des sous-parties de  $\mathbb{R}$  de la forme  $\phi_d^{-1}(\{\omega\})$  pour  $\omega$  parcourant l'ensemble des mots de longueur N + M sur  $\{0, 1\}$ . Pour  $k \in \{1, \ldots, N\}$  et  $d \in \{1, 2\}$ , en notant

$$\mathcal{P}^{(k)} = \{ I \times J \mid I \in \mathcal{P}_1, \ J \in \mathcal{P}_2, \ \text{et } \operatorname{proj}_k(\phi_1(I)) = \operatorname{proj}_k(\phi_2(J)) = 1 \}$$

on a l'égalité suivante pour tout  $A_k \in \mathcal{F}_1$ :

$$A_k \quad = \quad \bigcup_{C \in \mathcal{P}^{(k)}} C \; .$$

De même pour  $k \in \{1, \ldots, M\}$  et  $B_k \in \mathcal{F}_2$  en posant pour  $d \in \{1, 2\}$ :  $\mathcal{P}^{(k+N)} = \{I \times J \mid I \in \mathcal{P}_1, J \in \mathcal{P}_2, \text{ et } \operatorname{proj}_{k+N}(\phi_1(I)) = \operatorname{proj}_{k+N}(\phi_2(J)) = 1\}.$ On a

On a

$$B_k = \bigcup_{C \in \mathcal{P}^{(k+N)}} C \; .$$

La collection

$$\mathcal{F}_3 \quad = \quad \left\{ I \times J \mid I \in \mathcal{P}_1, \ J \in \mathcal{P}_2, \ \text{et} \ I \times J \subseteq X \right\}$$

est donc un raffinement cartésien commun à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  ce qui achève la démonstration. Les figures 4.6 et 4.7 illustrent la construction des collections d'intervalles  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

#### Conclusion et perspectives

En définissant  $\mathcal{B}_X$  comme l'algèbre de Boole des régions cubiques contenues dans une région cubique X, on montre que pour toutes régions cubiques  $X_1$  et  $X_2$ , on a

$$\mathcal{B}_{X_1 imes X_2} \quad \cong \quad \mathcal{B}_{X_1}\otimes \mathcal{B}_{X_2} \; .$$



FIGURE 4.7 – Découpage vertical

Il suffit pour cela de recopier la preuve du théorème 4.4.1. À quelques adaptations anecdotiques près, on peut encore généraliser ces résultats en remplaçant la droite réelle  $\mathbb{R}$  par la réalisation géométrique |G| d'un graphe fini G. Plus précisément, lorsque le graphe G est fini, la collection des unions finies de produits cartésiens de sous-partie connexes de |G| est encore une algèbre de Boole, or c'est sur cette dernière propriété que repose l'essentiel de la preuve du théorème 4.4.1. L'intérêt de cette généralisation apparaît lorsque l'on prend pour graphe G la réunion disjointe des graphes de flot de contrôle des processus d'un programme parallèle. Supposons que X soit le modèle géométrique d'un programme  $P = P_1 | \cdots | P_k | Q_1 | \cdots | Q_l$  tel que le sous-programme constitué des processus  $P_i$  soit indépendant de celui formé par les processus  $Q_i$ . Alors on a

$$X = [P] = [P_1|\cdots|P_k] \times [Q_1|\cdots|Q_l] = X_1 \times X_2$$

et donc

$$\mathcal{B}_{[P]} \hspace{0.1 in}\cong \hspace{0.1 in} \mathcal{B}_{[P_{1}|\cdots|P_{k}]} \otimes \mathcal{B}_{[Q_{1}|\cdots|Q_{l}]}$$

Réciproquement, on peut se demander si la factorisation de  $\mathcal{B}_X$  en deux composantes  $\mathcal{B}_{X_1} \otimes \mathcal{B}_{X_2}$  induit une factorisation de X en  $X_1 \times X_2$  et donc l'indépendance de certains groupes de processus dans le cas où X est le modèle géométrique d'un programme PV.

## 4.5 Conclusion générale

L'intérêt que l'on porte à la décomposition des régions cubiques est dû à leur lien étroit avec la parallélisation des programmes dont elles sont les modèles.

L'étude que nous avons menée est restreinte aux régions cubiques, cependant, dans une très large mesure (chapitres 2 et 4) elle peut-être étendue à des d'objets mathématiques qui permettent de modéliser des programmes comportant des boucles et des branchements.

Le thème central de ce manuscrit est la corrélation entre la décomposition des régions cubiques X et celles de leurs invariants Em(X). C'est une question classique. En particulier, toute région cubique hérite d'une structure métrique naturelle pour laquelle on aimerait avoir un résultat de décomposition unique afin de le comparer, une fois de plus, à celui des régions cubiques. L'article de Lytchak et al [24] fournit un résultat très proche.

Enfin, on pourrait envisager de définir une notion de proximité entre programmes à partir de celle de leurs modèles géométriques. En acceptant par exemple de modifier la sémantique d'un programme lorsque cela n'a pour effet que de supprimer certaines traces d'exécutions indésirables ou redondantes, on pourrait essayer de se «rapprocher» d'un programme parallélisable.

# Bibliographie

- S. Abramsky, Dov M. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors. Handbook of Logic in Computer Science (Vol. 4) : Semantic Modelling. Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.
- [2] James A. Anderson and Naoki Kimura. The tensor product of semilattices. Semigroup Forum, 16:83–88, 1978.
- [3] Thibaut Balabonski. Rapport de stage de master. Master's thesis, 2007.
- [4] Thibaut Balabonski and Emmanuel Haucourt. A Geometric Approach to the problem of Unique Decomposition of Processes. In Concurrency Theory 21th International Conference, volume 6269 of Lecture Notes in Computer Science, pages 132–146. Springer, 2010.
- [5] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*, volume 25 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 3rd edition, 1967.
- [6] Garrett Birkhoff and Saunders Mac Lane. Algebra. AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society, 3 sub edition edition, February 1999.
- [7] Thomas Scott Blyth. Lattices and Ordered Algebraic Structures. Universitext. Springer, 2005.
- [8] Francis Borceux. Handbook of Categorical Algebra 2 : Categories and Structures (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications). Cambridge University Press, 1994.
- [9] Francis Borceux. Handbook of Categorical Algebra, II. Categories and Structures, volume 51 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1994.
- [10] Ronald Brown. Elements of modern topology. 1968.
- [11] Ronald Brown. Topology and Groupoids. BookSurge Publishing, feb 2006.
- [12] Scott D. Carson and Paul F. Reynolds Jr. The geometry of semaphore programs. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS), 9(1) :25–53, 1987.
- [13] Moller Christensen, Hirshfeld. Decomposability, decidability and axiomatisability for bisimulation equivalence on basic parallel processes. *Proc. LICS*'93, 1993.
- [14] Søren Christensen. Decidability and decomposition in process algebras. 1993.
- [15] Edward G. Coffman, Melanie Elphick, and Arie Shoshani. System deadlocks. ACM Computing Surveys (CSUR), 3(2) :67–78, 1971.
- [16] Thomas H. Cormen. Introduction to algorithms. MIT press, 2009.
- [17] B. A. Davey and H. A. Priestley. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, April 2002.
- [18] Edsger W. Dijkstra. Cooperating sequential processes. In F. Genuys, editor, *Programming Languages : NATO Advanced Study Institute*, pages 43–112. Academic Press, 1968.
- [19] Edsger W. Dijkstra. Hierarchical ordering of sequential processes. Acta informatica, 1(2) :115–138, 1971.
- [20] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, Emmanuel Haucourt, Samuel Mimram, and Martin Raussen. Trace spaces : An efficient new technique for state-space reduction. In *European Symposium on Programming*, pages 274–294. Springer, 2012.
- [21] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, and Martin Raussen. Algebraic topology and concurrency. Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, 1999.
- [22] Lisbeth Fajstrup, Martin Raußen, and Eric Goubault. Algebraic topology and concurrency. *Theoretical Computer Science*, 357(1):241–278, 2006.
- [23] Lisbeth Fajstrup, Martin Raußen, Eric Goubault, and Emmanuel Haucourt. Components of the fundamental category. Applied Categorical Structures, 12(1):81–108, 2004.
- [24] Thomas Foertsch and Alexander Lytchak. The De Rham Decomposition Theorem for Metric Spaces. *Geometric and Functional Analysis*, 18:120–143, April 2008.
- [25] Grant A. Fraser. The semilattice tensor product of distributive lattices. Transactions of the American Mathematical Society, 217, 1976.
- [26] Grant A. Fraser. The tensor product of distributive lattices. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 20, 1976.
- [27] Grant A. Fraser. The tensor product of semilattices. Algebra Universalis, 8 :1–3, 1978.

- [28] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, and D. S. Scott. *Continuous Lattices and Domains*, volume 93 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [29] Steven Givant and Paul Halmos. Introduction to Boolean Algebras. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2009.
- [30] Eric Goubault. Geometry and concurrency : a user's guide. *Mathematical* structures in computer science, 10(04) :411–425, 2000.
- [31] Eric Goubault et al. Some geometric perspectives in concurrency theory. Homology, Homotopy and Applications, 5(2) :95–136, 2003.
- [32] Eric Goubault and Emmanuel Haucourt. Components of the fundamental category ii. Applied Categorical Structures, 15(4):387–414, 2007.
- [33] Eric Goubault and Martin Raussen. Dihomotopy as a tool in state space analysis tutorial. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 16–37. Springer, 2002.
- [34] Jan Friso Groote and Faron Moller. Verification of parallel systems via decomposition. In *International Conference on Concurrency Theory*, pages 62–76. Springer, 1992.
- [35] George Grätzer, H. Lakser, and R. Quackenbush. The structure of tensor products of semilattices with zero. *Transactions of the American Mathematical Society*, 267(2):503–515, 1981.
- [36] George Grätzer and Friedrich Wehrung. Tensor products of semilattices with zero, revisited. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 147:273–301, 2000.
- [37] Emmanuel Haucourt. Functoriality of the category of components construction. *Communication personnelle*.
- [38] Emmanuel Haucourt. Categories of Components and Loop-free Categories. Theory and Applications of Categories, 16(27):736–770, 2006.
- [39] Emmanuel Haucourt. The geometry of conservative programs. *Mathe*matical Structures in Computer Science, ?(?), ? 2017.
- [40] Peter T. Johnstone. Stone Spaces, volume 3 of Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1982.
- [41] S. Lang. Algebra. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.
- [42] Serge Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 3rd edition, 2002.

- [43] Bas Luttik. A unique decomposition theorem for ordered monoids with applications in process theory. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 562–571. Springer, 2003.
- [44] Bas Luttik and Vincent Van Oostrom. Decomposition orders—another generalisation of the fundamental theorem of arithmetic. *Theoretical Computer Science*, 335(2) :147–186, 2005.
- [45] Robin Milner and Faron Moller. Unique decomposition of processes. Theoretical Computer Science, 107 :357–363, 1993.
- [46] Richard S Pierce. Countable Boolean algebras. In Handbook of Boolean Algebras vol.3, page 775–876. 1989.
- [47] Vaughn Pratt. Modeling concurrency with geometry. In Proceedings of the 18th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, pages 311–322. ACM, 1991.
- [48] Bernd S. W. Schröder. Ordered Sets, An Introduction. Birkhauser, 2002.
- [49] Zahava Shmuely. The tensor product of distributive lattices. Algebra Universalis, 9 :281–296, 1979.
- [50] Walter Tholen, Maria Cristina Pedicchio, et al. Categorical Foundations : Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, November 2003.
- [51] Robert van Glabbeek. Bisimulations for higher dimensional automata. E-mail communication available from http://theory. stanford. edu/~ rvg/hda, Stanford, 1991.