



HAL
open science

Courbes et surfaces presque homogènes

Bruno Laurent

► **To cite this version:**

Bruno Laurent. Courbes et surfaces presque homogènes. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAM046 . tel-01999851

HAL Id: tel-01999851

<https://theses.hal.science/tel-01999851>

Submitted on 30 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA

COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Bruno LAURENT

Thèse dirigée par **Michel BRION**, directeur de recherche, CNRS
délégation Alpes

préparée au sein du **Laboratoire Institut Fourier**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de**
l'Information, Informatique

Courbes et surfaces presque homogènes

Thèse soutenue publiquement le **1^{er} octobre 2018**,
devant le jury composé de :

Monsieur JÉRÉMY BLANC

PROFESSEUR ASSOCIÉ, UNIVERSITÉ DE BÂLE - SUISSE, Examineur

Monsieur MICHEL BRION

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DÉLÉGATION ALPES, Directeur de thèse

Monsieur STÉPHANE DRUEL

CHARGÉ DE RECHERCHE, CNRS DÉLÉGATION ALPES, Examineur

Monsieur PHILIPPE GILLE

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DÉLÉGATION RHÔNE AUVERGNE, Président

Madame LUCY MOSER-JAUSLIN

PROFESSEURE, UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, Rapporteuse

Monsieur STEFAN SCHRÖER

PROFESSEUR, UNIVERSITÉ H. HEINE DÜSSELDORF - ALLEMAGNE, Rapporteur

Monsieur MIKHAIL ZAIDENBERG

PROFESSEUR ÉMÉRITE, UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES, Examineur



Résumé

Les variétés possédant une orbite dense sous l'opération d'un groupe sont dites presque homogènes. Il s'agit d'objets ayant une géométrie très riche, qui ont été abondamment étudiés ces 50 dernières années ; cela inclut notamment les variétés toriques. L'objectif de cette thèse est d'obtenir une classification des couples (X, G) où X est une courbe ou une surface algébrique, définie sur un corps quelconque, et G est un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans X et possédant une orbite dense. Cette classification passe par l'étude des complétions régulières équivariantes de X .

L'étude des courbes presque homogènes fait ressortir une classe particulière, celle des courbes seminormales. Nous obtenons une classification complète des couples (X, G) quand X est une courbe seminormale. Nous décrivons aussi les courbes quelconques presque homogènes (sur un corps quelconque), généralisant ainsi un résultat de Vladimir Popov. Enfin, nous déterminons les fibrés en droites linéarisés sur les courbes seminormales presque homogènes.

Le dernier chapitre traite le cas des surfaces. À nouveau, nous obtenons une classification des couples (X, G) quand X est une surface et G n'est pas affine. Quand G est affine, la surface est rationnelle. Nous décrivons alors, sur un corps algébriquement clos, les surfaces homogènes et leurs complétions régulières équivariantes relativement minimales. En caractéristique nulle, nous déterminons aussi les groupes qui opèrent. Beaucoup de phénomènes nouveaux se produisent en caractéristique positive, et certains de nos résultats sont incomplets dans ce cadre.

Mots-clés Variété algébrique, Variété presque homogène, Variété seminormale, Pincement, Fibré en droites linéarisé.

Abstract

The varieties having a dense orbit under the action of a group are said to be almost homogeneous. Those are objects with a very rich geometry and have been extensively studied for the last 50 years ; this includes toric varieties. The purpose of this thesis is to classify the pairs (X, G) where X is an algebraic curve or surface, defined over an arbitrary field, and G is a smooth connected algebraic group, acting faithfully on X with a dense orbit. The classification relies on the study of the equivariant regular completions of X .

The study of almost homogeneous curves highlights the class of seminormal curves. We get a full classification of the pairs (X, G) when X is a seminormal curve. We also describe all almost homogeneous curves (over an arbitrary field), thus generalizing a result of Vladimir Popov. Finally, we determine the linearized line bundles over seminormal almost homogeneous curves.

The last chapter deals with the case of surfaces. Again, we get a classification of the pairs (X, G) when X is a surface and G is not affine. When G is affine, the surface is rational. We then describe, over an algebraically closed field, the homogeneous surfaces and their relatively minimal equivariant regular completions. In characteristic zero, we also determine the acting groups. Many new phenomena occur in positive characteristic, and some of our results are incomplete in this setting.

Keywords Algebraic variety, Almost homogenous variety, Seminormal variety, Pinching, Linearized line bundle.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement Michel Brion, mon directeur, de m'avoir proposé un sujet de thèse aussi passionnant. Pendant trois ans, il a su me guider grâce à ses nombreux conseils et idées, et me faire profiter de ses vastes connaissances. Je suis très reconnaissant pour sa grande disponibilité et son soutien constant qui ont été très précieux, en particulier pendant les moments difficiles.

Je remercie Lucy Moser-Jauslin et Stefan Schröer d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Leur intérêt pour mes travaux est un honneur. Merci également à Jérémy Blanc, Stéphane Druel, Philippe Gille et Mikhail Zaidenberg d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je pense aussi aux chercheurs, rencontrés en conférence, en séminaire ou à l'Université d'Angers, avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger sur mes thèmes de recherche, dont Ramla Abdellatif, Michaël Bulois, Adrien Dubouloz, Laurent Evain, Jean-Philippe Furter, Michel Granger, Étienne Mann, Daniel Naie, Ronan Terpereau et Susanna Zimmermann.

J'exprime ma gratitude envers tous les membres de l'Institut Fourier, qui m'ont si bien accueilli pendant toute la durée de la thèse. Le « thé du jeudi » a été propice à de nombreuses conversations : mathématiques, enseignement, actualité, les sujets n'ont pas manqué. Je n'oublie pas les ITA, qui m'ont aidé dans toutes mes démarches administratives ou pour résoudre les problèmes d'informatique, dans la bonne humeur et avec une efficacité redoutable. Une mention spéciale aux doctorants, ATER et post-docs que j'ai côtoyés, notamment Adrien, Agnès, Alejandro, Alexandre, Amina, Antoine, Baptiste, Benjamin, Benoît, Clément, Coline, Cong Bang, David, Florent, Gwladys, Giuseppe, Grégoire, Guillaume, Jian, Julien, Louis-Clément, Luc, Marion, Maxime, Mélanie, Mickaël, Pedro, Peng, Philipp, Raphaël, Rémi, Renaud, Rodolfo, Sébastien, Seidon, Séverin et Zhizhong.

Merci enfin à mes amis Benjamin, Delphine et Mohamed, ainsi qu'à ma famille, et plus particulièrement ma mère, ma grand-mère, mes frères et mon oncle.

Table des matières

Introduction	1
1 Résultats préliminaires	11
1.1 Conventions et notations	11
1.2 Opérations schématiques	11
1.3 Formes du groupe multiplicatif et du groupe additif	17
1.4 Schémas seminormaux	21
1.5 Normalisation et pincement	24
1.6 Fibrés en droites linéarisés	30
2 Courbes presque homogènes	39
2.1 Courbes presque homogènes régulières	39
2.2 Courbes presque homogènes seminormales	42
2.3 Courbes presque homogènes arbitraires	46
2.3.1 Courbes presque homogènes sous l'opération de \mathbf{G}_a en caractéristique nulle	46
2.3.2 Courbes presque homogènes sous l'opération d'une forme de \mathbf{G}_m	49
2.4 Groupe de Picard équivariant des courbes seminormales presque homogènes	53
3 Surfaces homogènes	57
3.1 Préliminaire	57
3.2 Cas où la variété d'Albanese est une courbe elliptique	66
3.3 Cas d'une surface dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$	70
3.3.1 Cas d'un groupe semisimple	70
3.3.2 Cas d'un groupe ni semisimple ni résoluble	72
3.3.3 Cas d'un groupe résoluble	73
3.4 Cas d'une surface dans \mathbf{P}^2	75
3.4.1 Cas d'un groupe semisimple	75
3.4.2 Cas d'un groupe ni semisimple ni résoluble	78
3.4.3 Cas d'un groupe résoluble	80
3.4.4 Bilan des cas	87
3.5 Cas d'une surface dans \mathbf{F}_n	91
3.5.1 Cas d'un groupe semisimple	92
3.5.2 Cas d'un groupe ni semisimple ni résoluble	97
3.5.3 Cas d'un groupe résoluble	98
3.5.4 Bilan des cas	109
Bibliographie	113

Introduction

Contexte

Les variétés homogènes sont des objets très symétriques. Commençons par donner une motivation pour l'étude de ces objets, en des termes un peu vagues. Soit X un « objet géométrique » (par exemple une variété différentielle ou une variété algébrique). On attend d'un automorphisme qu'il « respecte la structure » de X : si un observateur se situe sur un point de X alors il perçoit son environnement d'une certaine façon, et après avoir appliqué un automorphisme l'observateur s'est déplacé mais perçoit toujours la même chose. Si pour tout couple de points de X il existe un automorphisme qui envoie le premier point sur le deuxième, alors un observateur sur X n'a aucun moyen de savoir où il se trouve, puisque où qu'il soit il voit la même chose. Dans ce sens, on peut bien dire que X est homogène. Plus généralement, si un groupe G opère dans X par automorphismes alors on peut se demander si l'opération est transitive, auquel cas on dira que X est homogène sous l'opération de G .

Toutefois les variétés homogènes forment une classe trop restrictive. On obtient une classe beaucoup plus large d'objets ayant une géométrie très riche, en autorisant les groupes à avoir non pas une seule orbite, mais une orbite dense. On parlera alors de variétés presque homogènes. C'est le cas par exemple des variétés toriques, qui sont les variétés algébriques presque homogènes sous l'opération d'un tore algébrique, et qui ont été abondamment étudiées depuis les années 1970. En outre, une variété algébrique X qui est homogène sous l'opération d'un groupe G n'est pas nécessairement complète, ou « propre » dans la terminologie moderne (de façon analogue, une variété différentielle n'est pas nécessairement compacte). Il est donc naturel de se demander si X possède une complétion équivariante \overline{X} . Par définition, il s'agit d'une variété propre munie d'une opération de G telle que X soit une orbite dense dans \overline{X} .

L'objectif de cette thèse est d'étudier les courbes et surfaces algébriques qui sont presque homogènes sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe.

En dimension 1 la situation est agréable car, sur un corps algébriquement clos, une courbe lisse possède une unique compactification lisse, et si un groupe algébrique lisse connexe opère dans la courbe alors l'opération s'étend de façon unique à la complétion. De plus le complémentaire de l'orbite dense est un ensemble fini (éventuellement vide). Vladimir Popov a ainsi classifié dans les années 90 les courbes presque homogènes définies sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique nulle (voir [Pop, ch. 7]). Celles qui sont lisses sont les courbes elliptiques, la droite projective \mathbf{P}^1 , la droite affine \mathbf{A}^1 et la droite époincée $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. Celles qui sont singulières se répartissent en quatre familles, paramétrées par des entiers ou des sous-monoïdes de \mathbf{N} . On ne dispose pour l'instant pas d'une classification complète sur un corps quelconque.

Obtenir une classification des surfaces presque homogènes, et même des surfaces homogènes, est plus compliqué. D'une part, il n'y a plus unicité d'une complétion lisse

équivariante. Par exemple, le plan affine \mathbf{A}^2 opérant dans lui-même par translations peut se plonger de façon équivariante dans \mathbf{P}^2 ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. D'autre part, il est plus difficile de contrôler le complémentaire de l'orbite dense.

Marat Gizatullin a classifié les surfaces affines lisses (définie sur un corps algébriquement clos) qui sont presque homogènes, sous l'hypothèse additionnelle que le complémentaire de l'orbite dense est un ensemble fini de points (voir [Giz2]); on dit que ces surfaces sont quasi-homogènes. Il s'est aussi intéressé à un problème proche mais un peu différent : celui des surfaces affines lisses dont le groupe (abstrait) des automorphismes opère transitivement dans le complémentaire d'un ensemble fini de points. Une classification est donnée dans l'article [Giz3]. Pour cela, Gizatullin utilise des arguments géométriques, en étudiant le complémentaire de la surface dans une complétion équivariante.

Popov obtient une classification analogue en ne supposant plus que les surfaces sont lisses, mais que le corps de base k est de caractéristique nulle (voir [Pop, ch. 7, th. 2.3]); comme pour les courbes, les surfaces affines singulières quasi-homogènes sont paramétrées par des invariants discrets, qui sont des uplets d'entiers. Popov n'utilise pas les complétions équivariantes comme le fait Gizatullin mais se fonde uniquement sur la théorie des groupes algébriques.

Friedrich Knop a classifié en 1994 les surfaces définies sur un corps quelconque qui sont homogènes sous l'opération de \mathbf{SL}_2 , en déterminant tous les sous-schémas en groupes de \mathbf{SL}_2 (voir [Knop]).

En revanche, ces classifications laissent ouverte la question de la description de toutes les complétions équivariantes et des groupes qui opèrent.

Citons aussi l'article [Pot] de Joseph Potters qui donne la liste des surfaces analytiques complexes compactes dont le groupe des biholomorphismes possède une orbite ouverte (ce groupe est un groupe de Lie complexe). On trouve notamment les surfaces abéliennes, certaines surfaces réglées au-dessus d'une courbe elliptique et les surfaces rationnelles (obtenue à partir de \mathbf{P}^2 , $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou d'une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n en éclatant un nombre fini de points). On renvoie à la section 3.5 pour des rappels sur les surfaces de Hirzebruch.

Potters trouve également des surfaces qui ne sont pas algébriques, comme les tores complexes de dimension 2 qui ne sont pas des surfaces abéliennes, et les surfaces de Hopf dont le groupe fondamental est abélien (ce sont les quotients de $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ par une opération libre d'un groupe abélien discret).

Résultats principaux

On aimerait classifier les couples (X, G) où X est une courbe ou une surface algébrique, définie sur un corps k quelconque d'exposant caractéristique p , et G est un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans X de sorte que X soit presque homogène. La stratégie adoptée dans ce manuscrit est de commencer par le cas où X est lisse (par exemple quand X est homogène). On cherche alors à « coïncider » G dans le groupe des automorphismes d'une complétion équivariante \overline{X} de X . Des arguments de théorie des groupes permettent de réduire les possibilités, jusqu'à trouver les G qui conviennent. Il reste à déterminer les courbes et surfaces X et à comparer G au normalisateur du bord $\overline{X} \setminus X$. Il s'agit donc, contrairement à Gizatullin ou Popov, d'utiliser à la fois la géométrie et la théorie des groupes.

Le cas des courbes a donné lieu à la rédaction de l'article [Lau], à paraître dans le journal *Transformation Groups*.

Sur un corps quelconque, les notions de lissité et de régularité pour une variété ne coïncident pas toujours. La régularité est une condition plus faible que la lissité, et est plus adaptée pour notre problème. Si C est une courbe régulière alors il existe une courbe régulière projective \widehat{C} et une immersion ouverte $C \rightarrow \widehat{C}$. Cette courbe vérifie une propriété universelle : pour toute courbe projective C' , tout morphisme $C \rightarrow C'$ se prolonge de façon unique en un morphisme $\widehat{C} \rightarrow C'$. En particulier \widehat{C} est unique à unique isomorphisme près. On l'appelle la complétion régulière de C . Si un groupe algébrique lisse connexe opère dans C alors l'opération s'étend de façon unique en une opération dans \widehat{C} (voir le lemme 2.1.3). On en déduit la classification des courbes régulières presque homogènes.

Si C est une courbe singulière qui est presque homogène sous l'opération de G alors on considère la normalisation $\nu : \widetilde{C} \rightarrow C$. Alors \widetilde{C} est une courbe presque homogène sous l'opération de G (voir le lemme 1.5.8), donc on connaît les couples (\widetilde{C}, G) possibles. On peut retrouver C à partir de \widetilde{C} par un procédé inverse de la normalisation, appelé le pincement, qui a été étudié de façon systématique par Daniel Ferrand et qui consiste « moralement » à recoller des points et des tangentes de \widetilde{C} (voir [Fer] ou la section 1.5). Une classe particulière de courbes se distingue, celle des courbes seminormales. Il s'agit des courbes dont les branches sont « aussi transversales que possible », et qui sont les courbes pour lesquelles le pincement s'exprime de façon simple (voir la section 1.4 pour une définition précise des variétés seminormales).

On obtient ainsi le théorème suivant, en combinant le théorème 2.1.7, le corollaire 2.1.9 et le théorème 2.2.7.

Théorème A : Soient C une courbe seminormale et G un groupe algébrique lisse connexe opérant dans C . L'opération est fidèle et C est presque homogène si et seulement si un des cas suivants a lieu :

1. (courbes homogènes)
 - (a) C est une conique projective lisse et G est le schéma en groupes des automorphismes \mathbf{Aut}_C ;
 - (b) G est une forme du groupe additif \mathbf{G}_a et C est un G -torseur ;
 - (c) G est une forme du groupe multiplicatif \mathbf{G}_m et C est un G -torseur ;
 - (d) $C \simeq \mathbf{A}^1$ et G est le groupe des transformations affines $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$;
 - (e) C est une courbe projective lisse de genre 1 et G est la composante neutre \mathbf{Aut}_C° ;
2. (courbes régulières et non homogènes)
 - (a) $C \simeq \mathbf{P}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$;
 - (b) G est une forme de \mathbf{G}_a et C est la complétion régulière d'un G -torseur ;
 - (c) $C \simeq \mathbf{A}^1$ ou \mathbf{P}^1 et $G \simeq \mathbf{G}_m$;
 - (d) C est une conique projective lisse et G est le centralisateur d'un point séparable de degré 2 ;
3. (courbes singulières, seminormales et non homogènes)
 - (a) G est une forme non triviale de \mathbf{G}_a et C est obtenue en pinçant le point à l'infini \widetilde{P} de la complétion régulière d'un G -torseur sur un point P dont le corps résiduel $\kappa(P)$ est une sous-extension stricte de $\kappa(\widetilde{P})/k$;
 - (b) C est obtenue en pinçant deux points k -rationnels de \mathbf{P}^1 sur un même point k -rationnel et $G \simeq \mathbf{G}_m$;

- (c) C est obtenue en pinçant un point \tilde{P} séparable de degré 2 d'une conique projective lisse \tilde{C} sur un point k -rationnel et G est le centralisateur de \tilde{P} dans $\mathbf{Aut}_{\tilde{C}}$.

Dans cette liste, les objets les plus nouveaux et les plus mystérieux sont les complétions régulières des toseurs sous une forme non triviale de \mathbf{G}_a , qui apparaissent dans les cas 2b et 3a. Les formes non triviales de \mathbf{G}_a ont été décrites par Peter Russell dans l'article [Rus] ; elles n'existent que sur un corps imparfait. Les complétions régulières restent mal comprises.

De même qu'il est naturel de vouloir plonger une variété dans un espace projectif, quand on a une variété munie d'une opération d'un groupe algébrique G on cherche à la plonger de façon équivariante dans le projectivisé d'un G -module de dimension finie (c'est-à-dire un espace projectif tel que l'opération de G soit linéaire). Il est important de remarquer qu'un tel plongement n'existe pas nécessairement. De plus, l'existence peut dépendre de la caractéristique : la courbe cuspidale d'équation $y^2z = x^3$ dans \mathbf{P}^2 est presque homogène sous l'opération du groupe additif \mathbf{G}_a , et elle peut se plonger de façon équivariante dans le projectivisé d'un \mathbf{G}_a -module si et seulement si le corps est de caractéristique positive. Un tel plongement est décrit à l'aide de fibrés en droites munis d'une structure supplémentaire, appelée une linéarisation. Les classes d'isomorphisme de fibrés en droites linéarisés sur un schéma X muni d'une opération de G forment un groupe $\mathrm{Pic}^G(X)$, appelé le groupe de Picard équivariant. On renvoie à la section 1.6 pour des rappels sur ce groupe. On y démontre un résultat (le corollaire 1.6.15) qui permet d'exprimer le groupe de Picard équivariant d'une variété X en fonction de celui de la normalisée \tilde{X} ,

et plus généralement à chaque fois que l'on a un diagramme de pincement

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

(voir la proposition 1.5.2 pour la définition d'un diagramme de pincement).

Proposition B : On a une suite exacte de groupes abstraits

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathcal{O}(X)^{\times G} & \rightarrow & \mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G} \times \mathcal{O}(Z)^{\times G} & \rightarrow & \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G} \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & \mathrm{Pic}^G(X) & \rightarrow & \mathrm{Pic}^G(\tilde{X}) \times \mathrm{Pic}^G(Z) & \rightarrow & \mathrm{Pic}^G(\tilde{Z}) \end{array}$$

induite par les tirés en arrière et un morphisme de connexion $\delta : \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G} \rightarrow \mathrm{Pic}^G(X)$, où $\mathcal{O}(X)^{\times G}$ est le groupe des éléments inversibles G -invariants dans l'anneau $\mathcal{O}(X)$ des sections globales du faisceau structurel \mathcal{O}_X (et de même pour \tilde{X} , Z et \tilde{Z}).

On peut également déterminer les courbes presque homogènes, définies sur un corps quelconque, qui ne sont pas seminormales. Quand le groupe qui opère est \mathbf{G}_m ou une forme de \mathbf{G}_m , ces courbes sont données dans les théorèmes 2.3.6 et 2.3.8. Quand le groupe qui opère est \mathbf{G}_a ou $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$, la description n'est explicite qu'en caractéristique nulle et est donnée dans le théorème 2.3.2 ; cette restriction est déjà présente dans le travail de Popov (qui suppose de plus que le corps est algébriquement clos). À chaque fois, les courbes sont paramétrées par des invariants discrets, à savoir des entiers ou des sous-monoïdes de \mathbf{N} . En revanche, en caractéristique positive, il existe une famille de courbes seminormales qui sont presque homogènes sous une même forme de \mathbf{G}_a et qui sont paramétrées par les éléments du corps k (voir l'exemple 2.2.9).

Le fait de se placer en caractéristique arbitraire n'est pas anodin. Non seulement on est confronté à des difficultés techniques supplémentaires (en particulier, sur un corps imparfait, il existe des variétés régulières qui ne sont pas lisses) et certains résultats « naturels » deviennent plus difficiles à démontrer, mais surtout des phénomènes nouveaux apparaissent en caractéristique positive. Pour les courbes, ces phénomènes se produisent principalement sur les corps imparfaits. Pour les surfaces, ils se produisent déjà sur un corps algébriquement clos. Par exemple, l'opération naturelle de \mathbf{SL}_2 dans le plan \mathbf{A}^2 possède deux orbites, à savoir l'origine $(0, 0)$ et son complémentaire, mais en caractéristique 2 il existe une opération telle que \mathbf{A}^2 soit homogène (plus précisément, le quotient de \mathbf{SL}_2 par le normalisateur d'un tore maximal devient isomorphe à \mathbf{A}^2). Des groupes nouveaux apparaissent également sur les corps imparfaits (voir le théorème 3.2.1).

Comme les courbes, les surfaces homogènes possèdent encore une complétion régulière équivariante, mais celle-ci n'est plus unique en général. Un énoncé général est donné dans le lemme 3.1.8. Sur un corps algébriquement clos, on peut donner un énoncé plus précis (qui découle des corollaires 3.1.11 et 3.2.3), qui est le point de départ de la classification.

Proposition : On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient G un groupe algébrique lisse connexe et X une surface qui est homogène sous une opération de G . Alors il existe une immersion ouverte équivariante $X \rightarrow \bar{X}$ où \bar{X} est l'une des surfaces projectives lisses et relativement minimales suivantes :

1. une surface abélienne ;
2. une surface réglée $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow E$ où E est une courbe elliptique et \mathcal{E} est un fibré vectoriel de rang 2 sur E donné par une extension $0 \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$, ou $\mathcal{E} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_E$ et \mathcal{L} est un fibré en droites de degré 0 sur E ;
3. \mathbf{P}^2 ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n où $n \geq 2$.

Le dernier cas correspond à celui des surfaces rationnelles.

En outre, le bord $\partial X = \bar{X} \setminus X$ se comporte assez bien.

Proposition C : On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient G un groupe algébrique lisse connexe et X une surface qui est homogène sous une opération de G . Alors la surface X possède une complétion lisse équivariante \bar{X} qui est relativement minimale ou qui est l'éclaté de \mathbf{P}^2 en un point, et telle que le bord $\partial X = \bar{X} \setminus X$ soit un diviseur à croisements normaux simples (éventuellement vide). Si de plus G est résoluble alors on peut choisir \bar{X} relativement minimale.

Une classification complète des couples (X, G) , où X est une surface qui n'est pas rationnelle (définie sur un corps quelconque) et G est un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans X de sorte que X soit homogène, est donnée dans le théorème 3.2.1.

Pour les surfaces rationnelles, on dispose des trois théorèmes suivants (qui sont donnés les propositions 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5 pour le premier, le théorème 3.4.13 pour le deuxième et le théorème 3.5.17 pour le troisième).

Théorème D : On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X un sous-schéma ouvert de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et G un sous-groupe lisse connexe de $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$. Alors X est homogène sous l'opération de G si et seulement si, à conjugaison et permutation des facteurs près, un des cas suivants a lieu :

1. $G = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ et $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$;

2. $G \simeq \mathbf{PGL}_2$ est le graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : \mathbf{PGL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ où $r \geq 0$ et X est le complémentaire dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ du graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$;
3. $G \simeq B$ est le graphe de $F^r : B \rightarrow B$ où $r \geq 0$ et B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{PGL}_2 , et X est le complémentaire dans $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ du graphe de $F^r : \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1$;
4. $G = B \times \mathbf{PGL}_2$ ou $U \times \mathbf{PGL}_2$ où $U = R_u(B) \simeq \mathbf{G}_a$, et $X = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$;
5. $G = T \times \mathbf{PGL}_2$ où $T \simeq \mathbf{G}_m$ est le tore maximal standard de \mathbf{PGL}_2 et $X = (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbf{P}^1$;
6. $G = B \times B$ ou $U \times B$ ou $U \times U$ ou $G = \left\{ \left(\begin{bmatrix} t^m & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^n & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mid (a, b) \in \mathbf{G}_a^2, t \in \mathbf{G}_m \right\}$
(où $(m, n) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^*$ et $\text{pgcd}(m, n) = 1$), et $X = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$;
7. $G = B \times T$ ou $U \times T$ ou $G = \left\{ \left(\begin{bmatrix} t^m & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ (où $(m, n) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^*$ et $\text{pgcd}(m, n) = 1$), et $X = \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$;
8. $G = T \times T$ et $X = (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$.

Théorème E : On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X un sous-schéma ouvert de \mathbf{P}^2 et $\partial X = \mathbf{P}^2 \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). La surface X est homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :

1. ∂X est vide ;
2. ∂X est un point ;
3. ∂X est une droite ;
4. ∂X est la réunion d'une droite et d'un point ;
5. ∂X est une conique lisse si $p \neq 2$, ou la réunion d'une conique lisse et du point d'intersection commun de toutes les tangentes si $p = 2$;
6. ∂X est la réunion de deux droites ;
7. ∂X est la réunion d'une conique lisse et d'une tangente ;
8. ∂X est la réunion de la courbe C d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ et de la droite D d'équation $z = 0$ où $p^r > 2$;
9. ∂X est la réunion de trois droites.

Remarque : La surface X est affine sauf quand ∂X est vide, un point, la réunion d'une droite et d'un point, ou la réunion d'une conique lisse et du point d'intersection des tangentes (pour $p = 2$). On retrouve alors les surfaces affines obtenues par Gizatullin dans l'article [Giz2] ; la description du bord peut s'extraire de la démonstration de [Giz2, lemma 4]. Les groupes qui opèrent seront donnés dans le théorème 3.4.14.

On rappelle que, pour $n \geq 2$, la surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n est munie d'un morphisme $\pi : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui en fait une surface réglée au-dessus de \mathbf{P}^1 . Ce morphisme possède une unique section s_∞ qui est d'auto-intersection strictement négative (celle-ci vaut $-n$), et il possède une section s_0 qui n'intersecte pas s_∞ . Sur \mathbf{F}_n , on dispose de coordonnées $([u : v], (x, y))$.

Théorème F : On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient $n \geq 2$, X un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n et $\partial X = \mathbf{F}_n \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé

réduit). La surface X est homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu (ces cas sont illustrés dans la figure 3.1 page 110) :

1. $\partial X = s_\infty$;
2. $\partial X = s_\infty \cup s_0$;
3. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$;
4. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$;
5. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$;
6. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$ et si $n < i < e$ alors $\binom{e}{i} = 0$ dans k ;
7. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^{r-1}}v^{p^r}$ et $p^r > 2$;
8. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$.

Remarque : À nouveau, on a une surface affine sauf quand ∂X est égal à s_∞ ou $s_\infty \cup s_0$. Le bord est partiellement décrit dans la démonstration du corollaire de [Giz2, lemma 7] (il ne l'est pas dans le cas 6). Les groupes qui opèrent seront donnés dans le théorème 3.5.18.

Remarque : Sur un corps algébriquement clos, les surfaces lisses qui sont presque homogènes sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe affine G sont les sous-schémas ouverts G -stables des surfaces obtenues à partir de \mathbf{P}^2 , $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou \mathbf{F}_n par des éclatements successifs de points fixes (voir la proposition 3.1.13).

La classification des couples (X, G) quand X est un ouvert de \mathbf{F}_n n'est pas tout à fait complète quand $p \geq 2$: le groupe G n'est pas totalement déterminé quand il est unipotent, ou quand il n'est ni réductif ni résoluble ; ce problème disparaît en caractéristique nulle. En caractéristique quelconque, on peut donc donner le résultat suivant.

Théorème G : On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient G un groupe algébrique lisse connexe, H un sous-groupe de G et $X = G/H$. On suppose que si G est affine alors il est réductif, ou résoluble non unipotent. Alors X est une surface, l'opération de G dans X est fidèle et G est minimal pour ces propriétés si et seulement si, à isomorphisme près, un des cas suivants a lieu :

1. (groupe non affine)
 - (a) G est une surface abélienne, H est trivial et $X = G$;
 - (b) $G = E \times \mathbf{PGL}_2$ où E est une courbe elliptique, $H = \{0\} \times B$ où B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{PGL}_2 et $X = E \times \mathbf{P}^1$;
 - (c) on a une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_a \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$ où E est une courbe elliptique, H est trivial et $X = G$;
 - (d) on a une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$ où E est une courbe elliptique, H est trivial et $X = G$;
2. (groupe réductif)
 - (a) $G = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$, $H = B \times B$ et $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$;

- (b) $G = \mathbf{PGL}_3$, $H = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$ et $X = \mathbf{P}^2$ (H est le groupe d'isotropie de $[0 : 0 : 1]$);
- (c) $G = \mathbf{SL}_2$, $H = U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{G}_a \right\}$ et $X = \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (H est le groupe d'isotropie de $(1, 0)$);
- (d) $G = \mathbf{PGL}_2$, $H = N_G(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_m \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbf{G}_m \right\}$, $p \neq 2$, G est vu comme un sous-groupe de \mathbf{PGL}_3 grâce au morphisme injectif $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix}$ et X est le complémentaire dans \mathbf{P}^2 de la conique lisse d'équation $xz = y^2$ (H est le groupe d'isotropie de $[0 : 1 : 0]$);
- (e) $G = \mathbf{PGL}_2$, $H = N_G(T)$, $p = 2$, G est vu comme l'image du morphisme $\mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_3$ donné par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $X \simeq \mathbf{A}^2$ est le complémentaire dans \mathbf{P}^2 de la droite d'équation $z = 0$;
- (f) $G = \mathbf{SL}_2$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a^n = 1 \right\} \simeq U \rtimes \mu_n$ où $n \geq 3$ est impair et X est le complémentaire de la section nulle dans le fibré en droites de degré n sur \mathbf{P}^1 ;
- (g) $G = \mathbf{PGL}_2$, $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a^n = 1 \right\} \simeq U \rtimes \mu_n$ où $n \geq 1$ et X est le complémentaire de la section nulle dans le fibré en droites de degré $2n$ sur \mathbf{P}^1 ;
- (h) $G = \mathbf{PGL}_2$, $p = 2$, $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid c^2 = 0, a^2 = ac + ad - bc \right\}$, G est vu comme un sous-groupe de \mathbf{PGL}_3 grâce au morphisme injectif $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a^2 & 0 & b^2 \\ ac & ad - bc & bd \\ c^2 & 0 & d^2 \end{bmatrix}$ et X est le complémentaire dans \mathbf{P}^2 de la réunion la conique lisse d'équation $xz = y^2$ et du point $[0 : 1 : 0]$ (H est le groupe d'isotropie de $[1 : 1 : 0]$);
- (i) $G = \mathbf{PGL}_2$, $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b^{p^r} = 0 \right\}$ où $r \geq 1$, et X est le complémentaire dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ du graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$;
- (j) $G = \mathbf{G}_m \times \mathbf{PGL}_2$, $H = \{1\} \times B$ et $X = (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbf{P}^1$;
3. (groupe résoluble non unipotent)
- (a) $G = \mathbf{G}_m^2$, H est trivial et $X = (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$;
- (b) $G = \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$, H est trivial et $X = \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$;
- (c) G est le produit semi-direct $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ où $d \geq 1$ et \mathbf{G}_m opère dans \mathbf{G}_a avec le poids d , $H = \left\{ (a, t) \mid \sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} = 0, t^e = 0 \right\}$ où $1 = p^{r_0} < \dots < p^{r_s}$, $c_i \in k^*$, $e \geq 1$, $\text{pgcd}(d, e) = 1$ et e divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$, et $X = \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$.

Remarque : Si on suppose de plus que la caractéristique est nulle alors on peut lever la restriction sur les groupes affines et on trouve les cas suivants :

4. $G = \mathbf{G}_a^2$, H est trivial et $X = \mathbf{A}^2$;
5. $G = \mathbf{G}_a \times \mathbf{PGL}_2$, $H = \{1\} \times B$ et $X = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$;
6. $G = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{SL}_2 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * & * \\ & 1 \end{array} \right] \leq \mathbf{PGL}_3$, $H = \left[\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & * \\ & 1 \end{array} \right]$ où B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{SL}_2 et $X = \mathbf{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$ (H est le groupe d'isotropie de $[1 : 0 : 0]$) ;
7. $G = V_n \rtimes \text{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$ où $n \geq 2$, V_n est le groupe vectoriel associé à l'espace $k[x, y]_n$ des polynômes homogènes de degré n en deux variables x et y , \mathbf{GL}_2 opère naturellement dans V_n , l'opération passe au quotient en une opération de $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ (où μ_n est vu comme un sous-groupe d'homothéties), $H = \text{Vect}(x^{n-1}y, \dots, y^n) \rtimes \text{im} \left(B \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$ et X est le fibré en droites de degré n sur \mathbf{P}^1 .

En caractéristique positive, on trouve encore les groupes \mathbf{G}_a^2 , $\mathbf{G}_a \times \mathbf{PGL}_2$ et $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{SL}_2 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * & * \\ & 1 \end{array} \right]$.

Cependant le groupe $V_n \rtimes \text{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$ n'est plus nécessairement minimal et il peut exister d'autres groupes, comme le groupe des vecteurs de Witt de longueur 2.

Perspectives

L'étude des courbes et surfaces presque homogènes n'est pas terminée. En particulier, il reste à classifier les formes des couples (X, G) où X est une surface géométriquement rationnelle lisse homogène. Si $G = \mathbf{SL}_2$ alors les possibilités sont décrites dans [Knop, th. 5.2]. Si X est une forme de \mathbf{P}^2 ou $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ alors $G = \mathbf{Aut}_X^\circ$. Si G est une forme du produit semi-direct $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ alors on a déjà $G = \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ sur le corps de base (voir le lemme 1.3.8) et, d'après [Bor, th. 15.11 p.208], X possède un point k -rationnel ; on en déduit que X est isomorphe à $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ et, si de plus k est de caractéristique nulle, alors l'opération de G dans X est donnée par $(a, t) \cdot (x, y) = (t^d x + a, t^e y)$ pour un certain $e \in \mathbf{Z}^*$. Les autres cas sont encore à explorer.

Sur un corps algébriquement clos, il reste aussi à résoudre certains problèmes en caractéristique positive. Par exemple, la structure des groupes lisses connexes de dimension 2 sur un corps imparfait n'est pas complètement comprise.

Le cas des variétés de dimension supérieure ne semble pas pouvoir être abordé en toute généralité. Toutefois, il doit être possible de traiter au moins partiellement le cas des variétés projectives rationnelles lisses de dimension 3, en utilisant la théorie de Mori. C'est cette idée qui a été exploitée par Shigeru Mukai et Hiroshi Umemura pour déterminer les sous-groupes algébriques maximaux du groupe de Cremona \mathbf{Cr}_3 sur un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle (voir par exemple [MU]).

Par ailleurs, la classification des courbes presque homogènes a mis au jour certaines questions qu'il serait intéressant de traiter. Tout d'abord, la classification reste inachevée en caractéristique positive. La raison essentielle en est que les représentations du groupe

additif \mathbf{G}_a sont mal connues dans ce cas, alors que celles-ci interviennent de façon cruciale dans la classification. On peut cependant espérer contourner la difficulté en étudiant « à la main » les représentations particulières qui interviennent vraiment.

Une autre question est celle de l'étude des automorphismes des courbes projectives non lisses. Les groupes (abstrait) d'automorphismes des courbes projectives lisses sont relativement bien connus. Si une courbe projective lisse est de genre au moins 2 (respectivement de genre 1) alors son groupe d'automorphismes (respectivement le groupe des automorphismes fixant un point fermé donné) est fini. Les courbes lisses de genre 0 ou 1 sont bien comprises, et celles de genre au moins 2 ont été abondamment étudiées ces dernières années, notamment pour trouver une borne au cardinal du groupe des automorphismes. On sait aussi que, sur un corps algébriquement clos, tout groupe fini est le groupe des automorphismes d'une courbe projective lisse (voir [MS]).

Le schéma en groupes des automorphismes d'une courbe projective lisse est lisse, donc il est déterminé par le groupe abstrait des automorphismes. Ce n'est pas nécessairement vrai pour une courbe projective régulière mais pas lisse. À notre connaissance, ce schéma en groupes n'a pas été étudié de façon systématique dans cette généralité. L'article [Ro55] de Maxwell Rosenlicht contient implicitement le fait que, pour les groupes d'automorphismes infinis, les courbes qui apparaissent sont les compactifications régulières d'une forme de \mathbf{G}_a . La compréhension de ces compactifications régulières reste très partielle. Un problème ouvert serait de déterminer complètement leur schéma en groupes des automorphismes.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 Conventions et notations

On fixe un corps de base k , d'exposant caractéristique p , et une clôture algébrique \bar{k} . On note k_s la clôture séparable de k dans \bar{k} . Pour tout k -schéma X et toute extension de corps K/k , on note $X_K = X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } K$.

Les schémas sont tous supposés être séparés et localement noethériens. Les morphismes entre k -schémas sont tous supposés être des k -morphisms. Pour tout schéma S , l'espace topologique sous-jacent est noté $|S|$.

Une variété algébrique sur k est un schéma (séparé) de type fini sur k et géométriquement intègre. Une courbe (resp. une surface) est une variété algébrique de dimension 1 (resp. 2). Un groupe algébrique sur k est un schéma en groupes qui est de type fini sur k . Un sous-groupe est un sous-schéma en groupes (fermé). On dit qu'un morphisme de groupes algébriques est injectif si son noyau schématique est trivial.

Si X et Y sont deux k -schémas (resp. deux groupes algébriques) alors on dira que Y est une forme de X s'il existe un isomorphisme de schémas (resp. de groupes algébriques) $Y_{\bar{k}} \simeq X_{\bar{k}}$.

Pour toute variété propre X , on note \mathbf{Aut}_X le schéma en groupes des automorphismes de X (voir la proposition 1.2.11).

Pour $n \geq 1$, on note \mathbf{A}^n et \mathbf{P}^n l'espace affine et l'espace projectif de dimension n ; s'il faut préciser que le corps de base est k , on écrira \mathbf{A}_k^n et \mathbf{P}_k^n . On note \mathbf{G}_a et \mathbf{G}_m (ou $\mathbf{G}_{a,k}$ et $\mathbf{G}_{m,k}$) le groupe additif et le groupe multiplicatif. Pour $d \geq 0$, on note $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ le produit semi-direct où \mathbf{G}_m opère dans \mathbf{G}_a avec le poids d . Si $d = 0$ alors il s'agit du produit direct $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$; si $d = 1$ alors on écrit plus simplement $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$.

Soit G un groupe algébrique lisse connexe. Si $p \geq 2$, on note $F : G \rightarrow G^{(p)}$ le morphisme de Frobenius relatif. Dans la plupart des cas qui nous intéressent, le groupe G est défini sur le sous-corps premier \mathbf{F}_p donc on a un isomorphisme canonique $G^{(p)} \simeq G$. Par exemple pour $G = \mathbf{GL}_2$ le morphisme est donné par $F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{pmatrix}$. Pour $r \geq 0$, on note F^r le r -ème itéré de F et $G_r = \ker(F^r)$, qui est un sous-groupe infinitésimal caractéristique.

1.2 Opérations schématiques

Dans cette section on rappelle quelques faits élémentaires sur les opérations de groupes algébriques, dans le langage des schémas. On renvoie à [DG] comme référence générale.

Pour toute opération $\alpha : G \times X \rightarrow X$ d'un k -schéma en groupes G dans un k -schéma X , on écrira de façon abusive $\alpha : \begin{cases} G \times X & \longrightarrow X \\ (g, x) & \longmapsto gx \end{cases}$.

Proposition 1.2.1 : [DG, II, §5, prop. 3.1 p.242] Soient G un groupe algébrique lisse sur k , X un schéma de type fini sur k et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération. Pour tout point k -rationnel $x \in X(k)$, le morphisme d'orbite $\alpha_x : \begin{cases} G & \longrightarrow X \\ g & \longmapsto gx \end{cases}$ se factorise en $G \rightarrow Gx \rightarrow X$, où le premier morphisme est fidèlement plat et le second morphisme est une immersion. De plus Gx est un sous-schéma (localement fermé) lisse et G -stable de X , appelé l'orbite de x .

Proposition 1.2.2 : [DG, II §1, th. 3.6 p.165] Soient G un k -schéma en groupes, X un k -schéma, Y un sous-schéma fermé de X et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération.

1. Le foncteur qui à tout k -schéma S associe l'ensemble des $g \in G(S)$ qui induisent un automorphisme de Y_S (c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G(S)$ tels que pour tout S -schéma S' , la bijection de $X(S')$ induite par g stabilise globalement $Y(S')$) est représentable par un sous-groupe fermé de G , noté $N_G(Y)$ et appelé le normalisateur de Y .

2. Le foncteur qui à tout k -schéma S associe l'ensemble des $g \in G(S)$ qui induisent l'identité sur Y_S (c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G(S)$ tels que pour tout S -schéma S' , la bijection de $X(S')$ induite par g fixe $Y(S')$ point par point) est représentable par un sous-groupe fermé de G , noté $C_G(Y)$ et appelé le centralisateur de Y .

3. Le centralisateur de X est un sous-groupe distingué, appelé le noyau de l'opération. On dit que l'opération est fidèle si ce noyau est trivial.

4. Le foncteur qui à tout k -schéma S associe l'ensemble des $x \in X(S)$ tels que le morphisme d'orbite $G_S \rightarrow X_S$ soit trivial (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in X(S)$ tels que pour tout S -schéma S' , le groupe abstrait $G(S')$ fixe x vu comme élément de $X(S')$) est représentable par un sous-schéma fermé de X , noté X^G et appelé le schéma des points fixes.

Remarque 1.2.3 :

1. Si Y est un point k -rationnel x de X alors le centralisateur est noté G_x et appelé le sous-groupe d'isotropie de x . C'est la fibre en x du morphisme d'orbite $\alpha_x : G \rightarrow X$ et si G est lisse alors α_x induit un isomorphisme $G/G_x \simeq Gx$.

2. Si G est lisse alors $X^G(\bar{k})$ est exactement l'ensemble des points fixes de l'opération du groupe abstrait $G(\bar{k})$ dans l'ensemble $X(\bar{k})$. En effet, $G(\bar{k})$ est dense dans $G_{\bar{k}}$ et, comme $G_{\bar{k}}$ est réduit, pour tout $x \in X(\bar{k})$, le morphisme d'orbite $G_{\bar{k}} \rightarrow X_{\bar{k}}$ est trivial si et seulement si l'application induite $G(\bar{k}) \rightarrow X(\bar{k})$ est constante.

On aimerait dire qu'une variété X est homogène (resp. presque homogène) s'il existe une unique orbite (resp. une orbite dense). Puisque X peut ne pas avoir de point k -rationnel, on donne la définition suivante.

Définition 1.2.4 : Soient G un groupe algébrique lisse sur k , X une variété algébrique sur k et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération. On dit que X est homogène (resp. presque homogène) si le morphisme de graphe

$$\gamma : \begin{cases} G \times X & \longrightarrow X \times X \\ (g, x) & \longmapsto (x, gx) \end{cases}$$

est surjectif (resp. dominant).

On retrouve la définition naturelle en termes d'orbite en étendant suffisamment les scalaires.

Lemme 1.2.5 : *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *La variété X est homogène sous l'opération de G .*
- ii) *Pour toute extension de corps K/k , la variété X_K est homogène sous l'opération de G_K .*
- iii) *Il existe une extension de corps K/k telle que la variété X_K soit homogène sous l'opération de G_K .*
- iv) *L'opération du groupe abstrait $G(\bar{k})$ dans l'ensemble $X(\bar{k})$ est transitive.*
- v) *S'il existe un point K -rationnel $x \in X(K)$ alors l'orbite $G_K x$ est égale à X_K .*

Démonstration. Les assertions i), ii), iii) et iv) sont équivalentes car pour toute extension de corps K/k , un morphisme $f : Y \rightarrow Y'$ entre deux schémas de type fini sur k est surjectif si et seulement si $f_K : Y_K \rightarrow Y'_K$ est surjectif, et si et seulement si l'application ensembliste $f : Y(\bar{k}) \rightarrow Y'(\bar{k})$ est surjective (voir [DG, I, §3, cor. 6.10 p.96]). Ceci vaut en particulier pour le morphisme γ . De plus, pour tout point K -rationnel $x \in X(K)$, l'égalité schématique $G_K x = X_K$ est équivalente à la surjectivité du morphisme d'orbite $G_K \rightarrow X_K$, à la surjectivité de l'application $G(\bar{k}) \rightarrow X(\bar{k})$ et à la transitivité de l'opération de $G(\bar{k})$ dans $X(\bar{k})$. \square

Lemme 1.2.6 : *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *La variété X est presque homogène sous l'opération de G .*
- ii) *Pour toute extension de corps K/k , la variété X_K est presque homogène sous l'opération de G_K .*
- iii) *Il existe une extension de corps K/k telle que la variété X_K soit presque homogène sous l'opération de G_K .*
- iv) *Il existe une extension de corps K/k et un point K -rationnel $x \in X(K)$ tels que l'orbite $G_K x$ soit un sous-schéma ouvert de X_K .*
- v) *La variété X contient un sous-schéma ouvert U qui est G -stable et homogène.*

Dans iv) l'extension K/k peut être supposée finie et séparable. De plus le sous-schéma ouvert U est unique et est appelé l'orbite ouverte.

Démonstration. Soit K/k une extension de corps. La projection $\pi : X_K \times X_K \rightarrow X \times X$ est un morphisme ouvert et l'image ensembliste de $\gamma_K : G_K \times X_K \rightarrow X_K \times X_K$ est $\pi^{-1}(\gamma(G \times X))$. Donc $\gamma_K(G_K \times X_K)$ contient un ouvert de $X_K \times X_K$ si et seulement si $\gamma(G \times X)$ contient un ouvert de $X \times X$. Donc, d'après un théorème de Chevalley, γ est dominant si et seulement si γ_K est dominant (voir [DG, I, §3, cor. 3.8 p.78]). Ainsi les assertions i), ii) et iii) sont-elles équivalentes.

Supposons que X soit presque homogène et montrons que iv) est vraie. On peut supposer que k est séparablement clos. Par platitude générique, il existe un ouvert non vide V de $G \times X$ tel que $\forall z \in V, \dim \gamma^{-1}(\gamma(z)) = \dim G \times X - \dim X \times X = \dim G - \dim X$ (voir par exemple [GW, cor. 14.116 p.471]). De plus, pour $g \in G(k)$ et $x \in X(k)$, on a $\gamma^{-1}(\gamma(g, x)) = \gamma^{-1}(x, gx) = gG_x \times \{x\} \simeq G_x$. En outre, le k -schéma de type fini $G \times X$ est géométriquement réduit donc, comme k est séparablement clos, l'ensemble $V(k)$ est

non vide. Donc pour $(g, x) \in V(k) \subseteq G(k) \times X(k)$, on a $\dim G_x = \dim G - \dim X$ donc $\dim Gx = \dim G - \dim G_x = \dim X$, donc Gx est dense.

Supposons que X soit presque homogène et montrons que $v)$ est vraie. On vient de montrer qu'il existe un point x défini sur la clôture séparable k_s de k tel que l'orbite $G_{k_s}x$ soit ouverte dans X_{k_s} . Tout élément $\sigma \in \text{Gal}(k_s/k)$ induit un automorphisme de X_{k_s} encore noté σ . Alors $\sigma(G_{k_s}x)$ est l'orbite de $\sigma(x)$. Les deux orbites $G_{k_s}x$ et $\sigma(G_{k_s}x)$ sont ouvertes donc elles s'intersectent, donc elles sont égales. En d'autres termes, $G_{k_s}x$ est un sous-schéma ouvert de X_{k_s} qui est stable sous l'opération du groupe de Galois $\text{Gal}(k_s/k)$. Il existe donc un sous-schéma ouvert U de X tel que $G_{k_s}x = U_{k_s}$. Alors U est G -stable et homogène. Si U' est un sous-schéma ouvert G -stable et homogène alors, de même, $U_{\bar{k}}$ et $U'_{\bar{k}}$ sont des orbites ouvertes donc ces sous-schémas sont égaux, donc $U = U'$.

Si $iv)$ est vraie alors l'image de γ_K contient l'ouvert $G_Kx \times G_Kx$, donc γ_K est dominant et X est presque homogène. De même, si $v)$ est vraie alors X est presque homogène. \square

On rappelle la définition des torseurs.

Définition 1.2.7 : Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre k -schémas de type fini, G un groupe algébrique et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération. On dit que f est un G -torseur si c'est un morphisme fidèlement plat, quasi-compact et G -invariant tel que le

carré
$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$
 soit cartésien. Si $Y = \text{Spec } k$ alors on dit que X est un G -torseur.

Remarque 1.2.8 : Le schéma X est un G -torseur si et seulement si le morphisme $\gamma :$

$$\begin{cases} G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ (g, x) & \longmapsto & (x, gx) \end{cases}$$
 est un isomorphisme.

On montre maintenant que l'on peut se restreindre aux opérations fidèles. On rappelle que si G est un groupe algébrique et H est un sous-groupe alors, d'après [SGA3-1, Exp. VIA, 3.2], le quotient G/H existe. C'est un schéma de type fini et on a un morphisme G -équivariant $\pi : G \rightarrow G/H$ qui est un H -torseur (pour l'opération à droite). Si G est connexe (resp. lisse) alors G/H aussi. Si H est un sous-groupe distingué alors G/H est un groupe algébrique, π est un morphisme de groupes et, pour tout k -schéma S , on a une suite exacte de groupes abstraits $1 \rightarrow H(S) \rightarrow G(S) \rightarrow (G/H)(S)$. La dernière flèche n'est pas nécessairement surjective, mais elle l'est si $S = \text{Spec } \bar{k}$. Plus généralement, pour tout k -schéma S et tout $\bar{g} \in (G/H)(S)$, il existe un morphisme $S' \rightarrow S$ fidèlement plat et de présentation finie et un élément $g \in G(S')$ tel que $\bar{g} = \pi(g)$ dans $(G/H)(S')$.

Lemme 1.2.9 : Soit H le noyau de l'opération $\alpha : G \times X \rightarrow X$. Alors il existe une unique

opération $\beta : G/H \times X \rightarrow X$ faisant commuter le diagramme
$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \pi \times \text{id}_X \downarrow & \nearrow \beta & \\ G/H \times X & & \end{array}$$
.

L'opération β est fidèle. De plus X est homogène (resp. presque homogène) sous l'opération de G si et seulement si elle l'est sous l'opération de G/H .

Démonstration. Le morphisme $\pi \times \text{id}_X : G \times X \rightarrow G/H \times X$ est un H -torseur donc

c'est un quotient catégorique. Puisque le morphisme $\alpha : G \times X \rightarrow X$ est H -invariant (où H opère à droite dans $G \times X$ par multiplication sur le facteur G), il existe un unique morphisme β faisant commuter le diagramme.

Montrons que β est une opération. Soient S un k -schéma, $x \in X(S)$ et $\bar{g}_1 \in (G/H)(S)$ et $\bar{g}_2 \in (G/H)(S)$. On a $\pi(e)x = x$. Soient $S' \rightarrow S$ un morphisme fidèlement plat, $g_1 \in G(S')$ et $g_2 \in G(S')$ tels que $\bar{g}_1 = \pi(g_1)$ et $\bar{g}_2 = \pi(g_2)$ dans $(G/H)(S')$. Dans $X(S')$, on a $\bar{g}_1(\bar{g}_2x) = g_1(g_2x) = (g_1g_2)x = (\bar{g}_1\bar{g}_2)x$. Comme l'application $X(S) \rightarrow X(S')$ est injective (car $S' \rightarrow S$ est un épimorphisme), l'égalité $\bar{g}_1(\bar{g}_2x) = (\bar{g}_1\bar{g}_2)x$ est déjà vraie dans $X(S)$. Donc β est bien une opération.

Soit N le noyau de β . Soit $\bar{g} \in N(S)$. Soient $S' \rightarrow S$ et $g \in G(S')$ comme précédemment. Pour tout morphisme $S'' \rightarrow S'$ et tout élément $x \in X(S'')$, on a $gx = \bar{g}x = x$. Donc $g \in H(S')$. Alors $\bar{g} = \pi(g) = e$ dans $(G/H)(S')$ donc $\bar{g} = e$ dans $(G/H)(S)$. Donc $N(S)$ est le groupe trivial et l'opération β est fidèle.

Enfin, comme $\pi \times \text{id}_X$ est surjectif, le morphisme $\gamma : G \times X \rightarrow X \times X$ est surjectif (resp. dominant) si et seulement si $G/H \times X \rightarrow X \times X$ l'est. \square

On peut aussi se retreindre aux opérations d'un groupe algébrique connexe.

Lemme 1.2.10 : *La variété X est homogène (resp. presque homogène) si et seulement si elle l'est sous l'opération de la composante neutre G° .*

Démonstration. Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on peut supposer que k est algébriquement clos.

On suppose d'abord que X est homogène sous l'opération de G . Le groupe algébrique G/G° est fini donc il existe g_1, \dots, g_n dans $G(k)$ tels que $G = \bigsqcup_{i=1}^n G^\circ g_i$. Soit $x \in X(k)$.

On a $X = Gx = \bigcup_{i=1}^n G^\circ g_i x$. Une G° -orbite de dimension minimale est fermée dans X (voir [DG, II, §5, prop. 3.2 p.243]). Or pour $1 \leq i \leq n$, l'automorphisme de X donné par g_i induit un isomorphisme de $G^\circ x$ sur $G^\circ g_i x$. Donc l'orbite $G^\circ g_i x$ est fermée dans X . Comme X est irréductible, on en déduit qu'il existe un i tel que $X = G^\circ g_i x$. Donc X est homogène sous l'opération de G° .

On suppose maintenant que X est presque homogène sous l'opération de G . Soit U un sous-schéma ouvert G -stable et homogène. D'après ce qui précède, U est aussi homogène sous l'opération de G° . Donc X est presque homogène sous l'opération de G° . \square

Pour les variétés propres, le groupe des automorphismes est « algébrique » au sens suivant.

Proposition 1.2.11 : [MO, th. 3.7] *Soit X un k -schéma propre. Alors le foncteur qui à tout k -schéma S associe le groupe abstrait des automorphismes de S -schéma de $X \times S$ est représentable par un schéma en groupes qui est localement de type fini, noté \mathbf{Aut}_X et appelé le schéma en groupes des automorphismes de X .*

Remarque 1.2.12 :

1. Si X est projectif alors ce résultat est plus facile à établir : le schéma en groupes \mathbf{Aut}_X se construit comme un ouvert du schéma de Hilbert de $X \times X$, en associant à chaque automorphisme son graphe (voir [Kol, ch. 1, th. 1.10 p.16]).

2. La composante neutre \mathbf{Aut}_X° est un groupe algébrique. Si X est une courbe alors \mathbf{Aut}_X est lui-même un groupe algébrique (voir [Br17, ex. 7.1.2]).

3. Se donner une opération d'un groupe algébrique G dans X revient à se donner un morphisme de schémas en groupes $G \rightarrow \mathbf{Aut}_X$.

Exemple 1.2.13 :

1. Pour $n \geq 1$, on a un isomorphisme $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^n} \simeq \mathbf{PGL}_{n+1}$.
2. On a $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1} \simeq (\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2) \rtimes \{\mathrm{id}, \sigma\}$ où σ est l'automorphisme de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ qui permute les deux facteurs.
3. Toute variété abélienne A opère dans elle-même par translation et on a un isomorphisme $\mathbf{Aut}_A \simeq A \rtimes \mathbf{Aut}_{A,0}$ où $\mathbf{Aut}_{A,0}$ est le normalisateur du neutre 0 dans \mathbf{Aut}_A , qui est un groupe étale (voir [Br17, ex. 7.1.3]).

Pour une courbe presque homogène, le complémentaire de l'orbite ouverte est un ensemble fini. On peut même être plus précis.

Lemme 1.2.14 : Soient G un groupe algébrique lisse connexe et Z un schéma de type fini sur k , réduit et de dimension nulle. Alors l'unique opération de G dans Z est l'opération triviale.

Démonstration. Comme deux morphismes sont égaux si et seulement s'ils le sont après extension des scalaires, et comme le fait d'être un schéma réduit est préservé par extensions séparables, on peut supposer que k est séparablement clos. Le schéma Z est noethérien et de dimension nulle donc il est affine et son espace topologique sous-jacent est un ensemble fini muni de la topologie discrète. Les composantes de Z sont des sous-schémas ouverts G -stables, donc on peut supposer que Z est irréductible. Il existe donc une extension finie K/k telle que $Z = \mathrm{Spec} K$. L'automorphisme de Z donné par un élément $g \in G(k)$ correspond à un k -automorphisme de K . Or par hypothèse l'extension K/k est purement inséparable, donc l'unique k -automorphisme de K est l'identité. Puisque $G(k)$ est dense dans G (car G est géométriquement réduit), l'opération est triviale. \square

Remarque 1.2.15 : Ce résultat n'est pas vrai en général si G n'est pas lisse. Par exemple, soient k un corps imparfait de caractéristique p , $a \in k$ un élément qui n'est pas une puissance p -ème et $K = k(a^{1/p}) = k[X]/(X^p - a)$. Le schéma $Z = \mathrm{Spec} K$ est de type fini sur k , réduit et de dimension nulle. De plus, on a une opération non triviale du groupe infinitésimal μ_p dans Z : pour tout k -schéma S , on a des isomorphismes naturels de groupes $\mu_p(S) \simeq \{\lambda \in \mathcal{O}(S) \mid \lambda^p = 1\}$ et $Z(S) \simeq \{s \in \mathcal{O}(S) \mid s^p = a\}$, et l'opération de $\mu_p(S)$ dans $Z(S)$ est donnée par la multiplication dans $\mathcal{O}(S)$.

Lemme 1.2.16 : Soit G un groupe algébrique lisse connexe opérant dans une courbe C . Alors C est presque homogène si et seulement si l'opération n'est pas triviale. Dans ce cas, l'orbite ouverte est le complémentaire du sous-schéma fermé $Z = C^G$ des points fixes.

Démonstration. Si C n'est pas presque homogène alors pour $x \in C(\bar{k})$, l'adhérence dans $C_{\bar{k}}$ de l'orbite $G_{\bar{k}}x$ est irréductible et ne peut pas être de dimension 1, donc l'orbite $G_{\bar{k}}x$ est triviale. Donc l'opération est triviale.

On suppose que C est presque homogène. Soit $U = C \setminus Z$. Alors $U_{\bar{k}}$ est l'orbite ouverte de $C_{\bar{k}}$. En effet, soit $x \in C_{\bar{k}}$ tel que l'orbite $G_{\bar{k}}x$ soit ouverte. Il découle du lemme 1.2.14 que le complémentaire de cette orbite est constitué des points fixes de $C(\bar{k})$, c'est-à-dire des éléments de $Z(\bar{k})$. Donc $G_{\bar{k}}x = C_{\bar{k}} \setminus Z_{\bar{k}} = U_{\bar{k}}$. \square

Une variété homogène qui possède un point k -rationnel s'écrit comme le quotient du groupe algébrique qui opère par le sous-groupe d'isotropie du point. On dispose d'un

critère pour qu'une opération dans un quotient du groupe soit fidèle, qui est bien connu pour les groupes abstraits.

Lemme 1.2.17 : *Soient G un groupe algébrique et H un sous-groupe. Alors le noyau de l'opération de G dans G/H par multiplication à gauche est le plus grand sous-groupe de H qui soit distingué dans G .*

Démonstration. Soient $\pi : G \rightarrow G/H$ le morphisme quotient et N le noyau de l'opération. Ce sous-groupe est distingué dans G . Pour tout k -schéma S , on a

$$\begin{aligned} N(S) &= \{g \in G(S) \mid \text{pour tout } S' \rightarrow S \text{ et tout } \bar{x} \in G/H(S'), \text{ on a } g\bar{x} = \bar{x}\} \\ &\subseteq \{g \in G(S) \mid g\pi(e) = \pi(e) \text{ dans } G/H(S)\} = H(S). \end{aligned}$$

Donc N est un sous-groupe de H .

Réciproquement, soit N' un sous-groupe distingué de G contenu dans H . Soient S un k -schéma et $g \in N'(S)$. Montrons que g est un élément de $N(S)$. Soient $S' \rightarrow S$ et $\bar{x} \in G/H(S')$. Soient $S'' \rightarrow S'$ fidèlement plat et $x \in G(S'')$ tel que $\bar{x} = \pi(x)$ dans $G/H(S'')$. Alors $g\bar{x} = g\pi(x) = \pi(gx) = x\pi(x^{-1}gx)$ dans $G/H(S'')$. Or $x^{-1}gx \in N'(S'') \subseteq H(S'')$, donc $g\bar{x} = x\pi(e) = \bar{x}$ dans $G/H(S'')$. Enfin, le morphisme $S'' \rightarrow S'$ est un épimorphisme donc l'application $G/H(S') \rightarrow G/H(S'')$ est injective, donc on a aussi $g\bar{x} = \bar{x}$ dans $G/H(S')$. Donc on a bien $g \in N(S)$. Donc N' est un sous-groupe du noyau N . \square

Remarque 1.2.18 : En particulier, l'opération de G dans G/H est fidèle si et seulement si H ne contient aucun sous-groupe non trivial qui soit distingué dans G .

1.3 Formes du groupe multiplicatif et du groupe additif

Toute forme de $\mathbf{G}_{m,k}$ est trivialisée par une extension séparable finie. De plus le groupe des automorphismes de \mathbf{G}_{m,k_s} est $\text{Aut}_{gp}(\mathbf{G}_{m,k_s}) = \{\text{id}, \tau\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ où τ est le morphisme $\begin{cases} \mathbf{G}_{m,k_s} & \longrightarrow \mathbf{G}_{m,k_s} \\ t & \longmapsto t^{-1} \end{cases}$. Donc les formes de $\mathbf{G}_{m,k}$ sont classifiées par l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\text{Gal}(k_s/k), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. On obtient ainsi le résultat bien connu suivant.

Lemme 1.3.1 : *Soit G une forme de $\mathbf{G}_{m,k}$. Alors il existe une unique k -algèbre quadratique étale K telle que $G \simeq R_{K/k}^1(\mathbf{G}_{m,K})$ où $R_{K/k}(\mathbf{G}_{m,K})$ est la restriction de Weil et $R_{K/k}^1(\mathbf{G}_{m,K})$ est le noyau de la norme $N_{K/k} : R_{K/k}(\mathbf{G}_{m,K}) \rightarrow \mathbf{G}_{m,k}$. La forme triviale correspond à $K = k \times k$. De plus, si G est une forme non triviale (c'est-à-dire que K/k est une extension de corps galoisienne quadratique) alors $G_K \simeq \mathbf{G}_{m,K}$.*

Exemple 1.3.2 : *Si k n'est pas de caractéristique 2 alors toute extension galoisienne quadratique est de la forme $K = k(\sqrt{d})$ où $d \in k$ n'est pas un carré. On écrit $\mathbf{G}_{m,K} = \text{Spec} \frac{K[x, y]}{(xy - 1)}$. En posant $x = v + \sqrt{d}v$ et $y = w + \sqrt{d}w$ on trouve $xy - 1 = (uw + dvt -$*

$1) + \sqrt{d}(ut + vw)$. Donc $R_{K/k}(\mathbf{G}_{m,K}) = \text{Spec} \frac{k[u, v, w, t]}{(uw + dvt - 1, ut + vw)}$. On a les identités $(u^2 - dv^2)(w^2 - dt^2) = (uw + dvt)^2 - d(ut + vw)^2$, $w = -w(u^2 - dv^2 - 1) + u(uw + dt - 1) - dv(ut + vw) + u$ et $t = -t(u^2 - dv^2 - 1) + u(ut + vw) - v(uw + dvt - 1) - v$. Donc la

norme est $N_{K/k} : \begin{cases} R_{K/k}(\mathbf{G}_{m,K}) & \longrightarrow & \mathbf{G}_{m,k} \\ (u, v, w, t) & \longmapsto & u^2 - dv^2 \end{cases}$ et $R_{K/k}^1(\mathbf{G}_{m,K}) = \text{Spec} \frac{k[u, v]}{(u^2 - dv^2 - 1)}$.

La multiplication est donnée par $(u, v) \cdot (u', v') = (uu' + dvv', uv' + u'v)$.

En particulier, $R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}^1(\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})$ est l'unique forme réelle non triviale de $\mathbf{G}_{m,\mathbf{R}}$ et on a un

$$\text{isomorphisme} \begin{cases} R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}^1(\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}}) = \text{Spec} \frac{\mathbf{R}[u, v]}{(u^2 + v^2 - 1)} & \longrightarrow & \mathbf{SO}_{2,\mathbf{R}} \\ (u, v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \end{cases}.$$

On peut donner une description géométrique des formes de \mathbf{G}_m et de leurs toseurs en termes de coniques. On a d'abord besoin d'un lemme sur les structures de groupe sur $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$.

Lemme 1.3.3 : *À choix de l'élément neutre près, l'unique structure de groupe algébrique sur $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ est \mathbf{G}_m .*

Démonstration. Soit G un groupe algébrique dont le schéma sous-jacent est $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. Quitte à translater, on peut supposer que le neutre est 1. La structure de groupe est donnée par un morphisme $G \times G \rightarrow G$. Or deux morphismes sont égaux si et seulement s'ils sont égaux après extension de corps. Donc on peut aussi supposer que k est algébriquement clos.

La multiplication à gauche par un élément $x \in G(k)$ est un automorphisme de $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ donc il correspond à un automorphisme de k -algèbre de $k[T, T^{-1}]$. Un tel automorphisme est donné par $T \mapsto aT^\varepsilon$ où $a \in k^*$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Puisque la multiplication à gauche par x envoie le neutre 1 sur x , on a $a = x$. Si $\varepsilon = -1$ alors on a des points fixes (à savoir les $y \in k$ tels que $y^2 = x$), ce qui est impossible si $x \neq 1$. Donc $\varepsilon = 1$ et la loi de G est donnée par $(x, y) \mapsto xy$. \square

Lemme 1.3.4 : *Soient G un groupe algébrique et C une courbe. Alors G est une forme de \mathbf{G}_m et C est un G -torseur si et seulement s'il existe une conique projective lisse \hat{C} , une opération fidèle de G dans \hat{C} et un sous-schéma fermé Z de \hat{C} tels que $Z = \text{Spec } K$ où K est une k -algèbre quadratique étale, $C \simeq \hat{C} \setminus Z$ et G est le centralisateur de Z dans $\mathbf{Aut}_{\hat{C}}$.*

Démonstration. Soient G une forme de \mathbf{G}_m et C un G -torseur. Soient \hat{C} la complétion régulière de C et $Z = \hat{C} \setminus C$ muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. D'après le lemme 2.1.3, l'opération de G dans C s'étend de façon unique en une opération fidèle dans \hat{C} .

On rappelle que les \mathbf{G}_m -torseurs sont classifiés par l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\text{Gal}(k_s/k), k_s^*)$ donc, d'après le théorème 90 de Hilbert, tout \mathbf{G}_m -torseur est trivial. Donc si $G = \mathbf{G}_m$ alors $C \simeq \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$, donc $\hat{C} = \mathbf{P}^1$, $Z = \{0, \infty\} = \text{Spec}(k \times k)$ et G est le centralisateur de Z dans $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1} = \mathbf{PGL}_2$.

On suppose maintenant que G n'est pas la forme triviale. Soit K/k l'unique extension galoisienne quadratique telle que $G = R_{K/k}^1(\mathbf{G}_{m,K})$. On a $G_K \simeq \mathbf{G}_{m,K}$ or C_K est un G_K -torseur donc, comme précédemment, on a $C_K \simeq \mathbf{A}_K^1 \setminus \{0\}$. Comme l'extension K/k est séparable, $(\hat{C})_K$ est la complétion régulière de C_K . Donc $(\hat{C})_K \simeq \mathbf{P}_K^1$, donc \hat{C} est une conique projective lisse (voir [Liu, ch. 7 prop. 4.1 p.285]). On a $Z_K = \{0, \infty\} = \text{Spec}(K \times K)$ donc, par descente galoisienne, on a $Z = \text{Spec}(k \times k)$ ou $\text{Spec } K$. Dans le premier cas on a $\hat{C} \simeq \mathbf{P}_k^1$ donc, comme C possède un point k -rationnel, on a $G \simeq C \simeq \mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$. Donc $G \simeq \mathbf{G}_{m,k}$, ce qui est contradictoire. Par conséquent on a $Z = \text{Spec } K$. De plus G est bien le centralisateur de Z dans $\mathbf{Aut}_{\hat{C}}$ car il l'est après extension des scalaires à K .

Réciproquement, si \tilde{C} est une conique projective lisse et Z est un sous-schéma fermé tel que $Z = \text{Spec } K$ où K/k est une extension galoisienne quadratique alors le centralisateur G de Z dans $\mathbf{Aut}_{\tilde{C}}$ opère dans le complémentaire $C = \tilde{C} \setminus Z$, on a $G_K \simeq \mathbf{G}_{m,K}$ et C est un G -torseur car c'est le cas après extension des scalaires à K . \square

Peter Russell a classifié les formes de $\mathbf{G}_{a,k}$ dans l'article [Rus] et a obtenu le résultat suivant.

Proposition 1.3.5 :

1. Si C (resp. G) est une forme de \mathbf{A}_k^1 (resp. de $\mathbf{G}_{a,k}$) alors il existe une unique extension de corps K/k qui est minimale pour l'inclusion et telle que $C_K \simeq \mathbf{A}_K^1$ (resp. $G_K \simeq \mathbf{G}_{a,K}$). Cette extension est finie et purement inséparable.

2. Si k est de caractéristique $p > 0$ alors les formes de $\mathbf{G}_{a,k}$ sont les groupes isomorphes à un sous-groupe de $\mathbf{G}_{a,k}^2$ donnée par une équation du type $y^{p^n} = x + a_1x^p + \dots + a_mx^{p^m}$ où $m \geq 0$, $n \geq 0$ et $a_i \in k$. Si G est donné par une telle équation alors l'extension minimale K/k telle que $G_K \simeq \mathbf{G}_{a,K}$ est $K = k(a_1^{p^{-n}}, \dots, a_m^{p^{-n}})$.

3. Avec les notations précédentes, les G -torseurs sont les schémas isomorphes à la courbe C dans \mathbf{A}_k^2 définie par l'équation $y^{p^n} = b + x + a_1x^p + \dots + a_mx^{p^m}$ pour un certain $b \in k$. De plus, le complémentaire de C dans sa complétion régulière \hat{C} est un point P qui n'est pas lisse et dont le corps résiduel est une sous-extension de K/k .

Remarque 1.3.6 : En particulier, si une forme de $\mathbf{G}_{a,k}$ est trivialisée par une extension séparable alors il s'agit de la forme triviale.

Exemple 1.3.7 : Si $a \in k$ n'est pas une puissance p -ème alors le sous-groupe G de $\mathbf{G}_{a,k}^2$ défini par l'équation $y^p = x + ax^p$ est une forme de $\mathbf{G}_{a,k}$, qui est trivialisée par $K = k(a^{1/p})$.

On a l'isomorphisme explicite $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{G}_{a,K} & \longrightarrow & G_K \\ t & \longmapsto & (t^p, t + a^{1/p}t^p) \end{array} \right.$. Soit \hat{C} la courbe dans \mathbf{P}^2

définie par l'équation $y^p = xz^{p-1} + ax^p$. D'après le critère jacobien, le seul point de $(\hat{C})_{\bar{k}}$ qui n'est pas lisse est $[1 : a^{1/p} : 0]$ donc le seul point de \hat{C} qui pourrait ne pas être régulier est le point P en-dessous de $[1 : a^{1/p} : 0]$. L'intersection de \hat{C} avec la carte $(x \neq 0)$ est

la courbe $\text{Spec } \frac{k[y, z]}{(y^p - z^{p-1} - a)}$ et le point P correspond à l'idéal maximal $(z, y^p - a)$ donc

le corps résiduel de P est $\frac{k[y]}{(y^p - a)} = k(a^{1/p})$. L'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{\hat{C}, P}$ est

$\mathfrak{m} = (z, y^p - a)$ donc $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est engendré comme $k(a^{1/p})$ -espace vectoriel par z et $y^p - a$. Comme ces deux éléments sont linéairement dépendants, on en déduit que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension 1. Donc le point P est régulier. Par conséquent, \hat{C} est la complétion régulière de $C = G$.

On peut aussi classier les formes du produit semi-direct $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$, où \mathbf{G}_m opère dans $\mathbf{G}_{a,k}$ avec le poids d .

Lemme 1.3.8 : Si $d \geq 1$ alors $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ n'a pas de forme non triviale.

Démonstration. Soit G une forme de $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ où $d \geq 1$. Il suffit de montrer que si cette forme est trivialisée par une extension finie séparable ou purement inséparable alors

$$G = \mathbf{G}_{a,k} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,k}.$$

Étape 1. Supposons qu'il existe une extension finie séparable K/k telle que $G_K \simeq \mathbf{G}_{a,K} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,K}$. La formation du radical unipotent de G commute aux extensions séparables (voir [CGP, prop. 1.1.9 p.8]), donc celui-ci est isomorphe à $\mathbf{G}_{a,k}$. Si T est un tore maximal de G alors T_K est un tore maximal de G_K (voir [CGP, cor. A.2.6 p.475]). Donc T est une forme de \mathbf{G}_m . Pour raison de dimension, on a $G = \mathbf{G}_{a,k} \cdot T$. De plus $(\mathbf{G}_{a,k} \cap T)_K = \mathbf{G}_{a,K} \cap T_K = \{1\}$ donc on a $G = \mathbf{G}_{a,k} \rtimes T$. L'opération de T dans $\mathbf{G}_{a,k}$ par conjugaison donne, pour toute k -algèbre A , un morphisme de groupes $T(A) \rightarrow \text{Aut}_{A\text{-gp}}(\mathbf{G}_{a,A})$ (fonctoriellement en A). Or si k est de caractéristique nulle alors $\text{End}_{A\text{-gp}} \mathbf{G}_{a,A}$ s'identifie à A où un élément $\lambda \in A$ correspond à l'homothétie de rapport λ ; si k est de caractéristique $p > 0$ alors $\text{End}_{A\text{-gp}}(\mathbf{G}_{a,A})$ s'identifie à l'anneau non commutatif $A[F]$ (pour la multiplication déterminée par $F\lambda = \lambda^p F$) où $F : \begin{cases} \mathbf{G}_{a,A} & \longrightarrow & \mathbf{G}_{a,A} \\ x & \longmapsto & x^p \end{cases}$ est l'endomorphisme de Frobenius (voir [DG, II, §3, prop. 4.4 p.196]). De plus, les éléments inversibles de $A[F]$ sont les éléments inversibles de A . Comme T opère non trivialement dans $\mathbf{G}_{a,k}$ (sinon G serait commutatif), on a donc un morphisme non trivial $T \rightarrow \mathbf{G}_{m,k}$. Donc T possède un caractère non trivial, donc $T = \mathbf{G}_{m,k}$. Le poids de l'opération de T dans $\mathbf{G}_{a,k}$ ne change pas après extension des scalaires, donc on a bien $G = \mathbf{G}_{a,k} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,k}$.

Étape 2. Supposons qu'il existe une extension finie purement inséparable K/k telle que $G_K \simeq \mathbf{G}_{a,K} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,K}$. Comme précédemment, un tore maximal T de G satisfait $T_K = \mathbf{G}_{m,K}$. Comme l'extension K/k est purement inséparable, on a donc $T = \mathbf{G}_{m,k}$. L'espace homogène G/T est une forme de \mathbf{A}_k^1 et le noyau de l'opération de G est $\mu_d \leq T$. Montrons que l'on a $G/T \simeq \mathbf{A}_k^1$. Toute forme de \mathbf{A}_k^1 trivialisée par une extension séparable est triviale, donc on peut supposer que k est séparablement clos. Si pour tout point k -rationnel x de G/T le morphisme d'orbite $T \rightarrow G/T$ était constant alors, pour $t \in T(k)$, le schéma Z des points fixes de t , qui est le sous-schéma fermé de G/T représentant le foncteur associant à tout k -schéma S l'ensemble $\{x \in G/T(S) \mid tx = x\}$, satisfierait $Z(k) = G/T(k)$. Or $G/T(k)$ est dense dans G/T et G/T est un schéma réduit, donc on aurait $Z = G/T$, ce qui contredirait le fait que T n'opère pas trivialement. Soit donc x tel que le morphisme d'orbite soit non constant. On obtient un morphisme non constant $\mathbf{P}_k^1 \rightarrow \widehat{G/T}$, où $\widehat{G/T}$ est la complétion régulière de G/T . On déduit du théorème de Lüroth que l'on a $\widehat{G/T} \simeq \mathbf{P}_k^1$. On a donc $\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\} = Tx \subsetneq G/T \subsetneq \mathbf{P}_k^1$ et ainsi $G/T = \mathbf{A}_k^1$.

D'après le lemme 2.1.3, l'opération de G dans $G/T \simeq \mathbf{A}_k^1$ donne un morphisme $G \rightarrow \mathbf{G}_{a,k} \rtimes \mathbf{G}_{m,k} = \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1, \infty}$ dont le noyau est μ_d . Après extension des scalaires à K , il s'agit du morphisme $f : \begin{cases} \mathbf{G}_{a,K} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,K} & \longrightarrow & \mathbf{G}_{a,K} \rtimes \mathbf{G}_{m,K} \\ (a, t) & \longmapsto & (a, t^d) \end{cases}$. Soit U l'image réciproque de $\mathbf{G}_{a,k}$ dans G par ce morphisme. Alors U_K est l'image réciproque de $\mathbf{G}_{a,K}$ par f donc U_K est le sous-groupe $\mathbf{G}_{a,K}$ de $\mathbf{G}_{a,K} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,K}$. Donc U est distingué dans G , le sous-groupe $U \cap T$ est trivial et $G = U \cdot T$. De plus le noyau du morphisme $U \rightarrow \mathbf{G}_{a,k}$ induit par $G \rightarrow \mathbf{G}_{a,k} \rtimes \mathbf{G}_{m,k}$ est $U \cap \mu_d$, qui est trivial. Donc $U \simeq \mathbf{G}_{a,k}$ et, comme précédemment, on a bien $G = \mathbf{G}_{a,k} \rtimes^d \mathbf{G}_{m,k}$. □

Lemme 1.3.9 : *On suppose que le corps k est parfait. Les formes de $\mathbf{G}_{a,k} \times \mathbf{G}_{m,k}$ sont les $\mathbf{G}_{a,k} \times T$ où T est une forme de $\mathbf{G}_{m,k}$.*

Démonstration. Soit G une forme de $\mathbf{G}_{a,k} \times \mathbf{G}_{m,k}$. Soit K/k une extension finie telle que $G_K \simeq \mathbf{G}_{a,K} \times \mathbf{G}_{m,K}$; cette extension est séparable. Comme dans la démonstration du

lemme 1.3.8, on a $G = \mathbf{G}_{a,k} \cdot T$ où T est un tore maximal de G . L'opération de T dans $\mathbf{G}_{a,k}$ est triviale car elle le devient après extension des scalaires. Donc $G = \mathbf{G}_{a,k} \times T$. \square

Remarque 1.3.10 : On pourrait espérer que, sur un corps quelconque, toute forme de $\mathbf{G}_{a,k} \times \mathbf{G}_{m,k}$ soit du type $U \times T$ où U est une forme de $\mathbf{G}_{a,k}$ et T est une forme de $\mathbf{G}_{m,k}$. Toutefois, cela est faux en général. Par exemple, si le corps k est imparfait et séparablement clos, et si U' est une forme non triviale de $\mathbf{G}_{a,k}$, alors il existe une extension $1 \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \rightarrow G \rightarrow U' \rightarrow 1$ qui n'est pas scindée (voir [Tot, lemma 9.4]), et G est donc une forme de $\mathbf{G}_{a,k} \times \mathbf{G}_{m,k}$ qui n'est pas du type $U \times T$.

1.4 Schémas seminormaux

Dans cette section on rappelle quelques propriétés des schémas seminormaux. On utilise l'article [Swa] de Richard Swan comme référence générale.

Définition 1.4.1 : Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme entre schémas noethériens réduits. On dit que f est sous-entier si c'est un morphisme bijectif entier tel que pour tout $y \in Y$, le morphisme $f^\# : \kappa(f(y)) \rightarrow \kappa(y)$ entre les corps résiduels soit un isomorphisme. On dit que le schéma X est seminormal si tout morphisme sous-entier $f : Y \rightarrow X$ est un isomorphisme.

Remarque 1.4.2 :

1. Le nom « sous-entier » peut paraître étrange, étant donné qu'on demande que le morphisme soit entier. Il s'agit d'une traduction du terme « subintegral » habituellement utilisé en anglais pour désigner un tel morphisme.

2. Un schéma normal est seminormal.

3. D'après [EGA, I, prop. 3.5.8 p.116] et [EGA, IV 2, prop. 2.4.5 p.20], un morphisme sous-entier est un homéomorphisme universel.

4. Le fait d'être un morphisme sous-entier est une propriété locale sur la base.

Les schémas normaux sont recouverts par des spectres d'anneaux intégralement clos. On peut espérer avoir une propriété analogue pour les schémas seminormaux.

Proposition 1.4.3 : [Swa, lemma 2.2] Soit $A \subseteq B$ une extension entière d'anneaux noethériens. On pose

$$A_B^+ = \{b \in B \mid \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \frac{b}{1} \in A_{\mathfrak{p}} + R(B_{\mathfrak{p}}) \subseteq B_{\mathfrak{p}}\}$$

où $R(B_{\mathfrak{p}})$ est le radical de Jacobson de $B_{\mathfrak{p}}$ (c'est-à-dire l'intersection des idéaux maximaux). Alors le morphisme $\text{Spec } A_B^+ \rightarrow A$ est sous-entier et A_B^+ est la plus grande sous-extension de $A \subseteq B$ ayant cette propriété. L'anneau A_B^+ est appelé la clôture seminormale de A dans B . On dit que A est seminormal dans B si $A = A_B^+$. On pose $A^+ = A_A^+$ où \bar{A} est la clôture intégrale de A dans son anneau total des fractions $Q(A)$. On dit que A est seminormal s'il est réduit et si $A = A^+$.

Remarque 1.4.4 : Si A est seminormal alors, d'après [Tra, lemma 1.3], l'idéal conducteur $\mathfrak{c} = \{a \in A \mid a\bar{A} \subseteq A\}$ est un idéal radiciel de \bar{A} . En particulier les anneaux A/\mathfrak{c} et \bar{A}/\mathfrak{c} sont réduits.

Lemme 1.4.5 : *Si A est un anneau seminormal alors le schéma $\text{Spec } A$ est seminormal.*

Démonstration. Soit $f : Y \rightarrow \text{Spec } A$ un morphisme sous-entier. C'est un morphisme affine donc on peut écrire $Y = \text{Spec } B$. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ le morphisme d'anneaux correspondant à f . Le morphisme f est surjectif et les anneaux A et B sont réduits, donc φ est injectif. Notons $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ les idéaux premiers minimaux de B . Le morphisme f est bijectif et préserve les inclusions donc les idéaux premiers minimaux de A sont $\mathfrak{p}_1 = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1), \dots, \mathfrak{p}_n = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_n)$. Dans un anneau noethérien réduit, l'ensemble des diviseurs de zéro (auquel on ajoute l'élément 0) est la réunion des idéaux premiers minimaux (voir [Bou1, ch. IV, §2, n° 5, prop. 10 p.328]). On en déduit que tout élément de A qui n'est pas un diviseur de zéro dans A n'est pas non plus un diviseur de zéro dans B . Donc φ induit un morphisme injectif $Q(A) \rightarrow Q(B)$ entre les anneaux totaux des fractions. En outre, les morphismes canoniques $A \rightarrow \prod_{i=1}^n Q(A/\mathfrak{p}_i) = \prod_{i=1}^n \kappa(\mathfrak{p}_i)$ et $B \rightarrow \prod_{i=1}^n Q(B/\mathfrak{q}_i) = \prod_{i=1}^n \kappa(\mathfrak{q}_i)$ induisent des isomorphismes $Q(A) \rightarrow \prod_{i=1}^n \kappa(\mathfrak{p}_i)$ et $Q(B) \rightarrow \prod_{i=1}^n \kappa(\mathfrak{q}_i)$ (voir [Swa, cor. 3.6]). Or f induit un isomorphisme entre les corps résiduels, donc $\varphi : Q(A) \rightarrow Q(B)$ est un isomorphisme. Enfin, par hypothèse on a $A = A^+$ donc par maximalité de A^+ (au sens de la proposition 1.4.3), $\varphi : A \rightarrow B$ est un isomorphisme. Donc f est un isomorphisme et le schéma $\text{Spec } A$ est bien seminormal. \square

On dispose d'un critère pour savoir si un anneau est seminormal dans un autre.

Proposition 1.4.6 : *[Swa, th.2.5] Soit $A \subseteq B$ une extension entière d'anneaux noethériens. Alors A est seminormal dans B si et seulement si, pour tout $b \in B$, si $b^2 \in A$ et $b^3 \in A$ alors $b \in A$.*

La formation de la clôture seminormale commute avec la localisation.

Proposition 1.4.7 : *[Swa, prop. 2.9] Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux noethériens. Pour toute partie multiplicative S de A , on a $(S^{-1}A)_{S^{-1}B}^+ = S^{-1}(A_B^+)$.*

Si A est un anneau noethérien réduit et \bar{A} est la clôture intégrale de A dans son anneau total des fractions $Q(A)$ alors, pour toute partie multiplicative S de A , l'anneau total des fractions de l'anneau $S^{-1}A$ est $S^{-1}Q(A)$ et la clôture intégrale de $S^{-1}A$ est $S^{-1}\bar{A}$. En utilisant les propositions 1.4.6 et 1.4.7, on en déduit que le fait d'être un anneau seminormal est une propriété locale au sens suivant.

Proposition 1.4.8 : *[Swa, cor. 2.10] Soit A un anneau noethérien réduit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *L'anneau A est seminormal.*
- ii) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ est seminormal.*
- iii) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \in \text{Spec } A$, le localisé $A_{\mathfrak{m}}$ est seminormal.*

Tout schéma noethérien réduit possède une seminormalisation, qui est un analogue de la normalisation. On redonne brièvement sa construction.

Proposition 1.4.9 : *Soient X un schéma noethérien réduit et $\nu : \widetilde{X} \rightarrow X$ la normalisation. Alors il existe un schéma seminormal X^+ , un morphisme sous-entier $\sigma : X^+ \rightarrow X$ et une factorisation $\widetilde{X} \rightarrow X^+ \xrightarrow{\sigma} X$ de ν satisfaisant la propriété universelle suivante :*

pour tout schéma seminormal Y et tout morphisme $f : Y \rightarrow X$, il existe une unique factorisation $Y \rightarrow X^+ \xrightarrow{\sigma} X$ de f . Le morphisme σ est appelé la seminormalisation.

Démonstration. On commence par construire X^+ et σ . Rappelons d'abord la construction de la normalisation. Soit \mathcal{K}_X le faisceau des fonctions méromorphes sur X . Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } A$ de X , $\mathcal{K}_X(U)$ est l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_X(U)$ et pour tout $x \in X$, la tige $\mathcal{K}_{X,x}$ est l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$. On rappelle que l'on a $\widetilde{X} = \text{Spec } \mathcal{A}$ où \mathcal{A} est la sous- \mathcal{O}_X -algèbre quasi-cohérente de \mathcal{K}_X définie, pour tout ouvert U , par $\mathcal{A}(U) = \{s \in \mathcal{K}_X(U) \mid \forall x \in U, s_x \in \overline{\mathcal{O}_{X,x}} \subseteq \mathcal{K}_{X,x}\}$. Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } A$ on a $\mathcal{A}(U) = \overline{A}$ et pour tout $x \in X$ on a $\mathcal{A}_x = \overline{\mathcal{O}_{X,x}}$. Alors $\widetilde{X} = \text{Spec } \mathcal{A}$. En particulier $\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{A}$ donc pour $x \in X$ on a $(\nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}})_x = \overline{\mathcal{O}_{X,x}}$.

Soit \mathcal{B} la sous- \mathcal{O}_X -algèbre de \mathcal{A} définie, pour tout ouvert U , par $\mathcal{B}(U) = \{s \in \mathcal{A}(U) \mid \forall x \in U, s_x \in \mathcal{O}_{X,x}^+\}$. Alors pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } A$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(U) &= \{s \in \mathcal{A}(U) \mid \forall x \in U, s_x \in \mathcal{O}_{X,x}^+\} = \{s \in \overline{A} \mid \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \frac{s}{1} \in (A_{\mathfrak{p}})^+ \subseteq \overline{(A_{\mathfrak{p}})}\} \\ &= \{s \in \overline{A} \mid \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \frac{s}{1} \in (A^+)_{\mathfrak{p}} \subseteq \overline{(A)_{\mathfrak{p}}}\} = A^+ = \mathcal{O}_X(U)^+ \end{aligned}$$

(la troisième égalité vient de la proposition 1.4.7) et pour tout $x \in X$ on a $\mathcal{B}_x = \mathcal{O}_{X,x}^+$. En outre, pour $f \in A \setminus \{0\}$ on a $\mathcal{B}(\text{Spec } A_f) = (A_f)^+ = (A^+)_{\mathfrak{p}}$. Donc \mathcal{B} est quasi-cohérente et on peut poser $X^+ = \text{Spec } \mathcal{B}$. Par construction, on a le morphisme sous-entier σ et la factorisation de ν .

Le fait d'être un isomorphisme est une propriété locale sur la base, donc il découle du lemme 1.4.5 que le schéma X^+ est seminormal.

Montrons que l'on a la propriété universelle annoncée. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme où Y est un schéma seminormal. La seminormalisation $Y^+ \rightarrow Y$ est un morphisme sous-entier donc, comme Y est seminormal, c'est un isomorphisme. Soient U un ouvert affine de X et V un ouvert affine de Y contenu dans $f^{-1}(U)$. Par construction de Y^+ , l'anneau $\mathcal{O}(V)$ est seminormal. Donc d'après [Swa, th. 4.1], le morphisme $f : V \rightarrow U$ se factorise de façon unique en $V \rightarrow \sigma^{-1}(U) \xrightarrow{\sigma} U$. L'existence et l'unicité de la factorisation de $f : Y \rightarrow X$ s'obtiennent par recollement. \square

Corollaire 1.4.10 : *Soit X un schéma noethérien réduit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Le schéma X est seminormal.*
- ii) *Pour tout ouvert affine U de X , l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est seminormal.*
- iii) *Pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est seminormal.*
- iv) *Tout sous-schéma ouvert de X est seminormal.*
- v) *Il existe un recouvrement ouvert de X par des schémas seminormaux.*

Swan a montré dans [Swa, th. 1] que si X est un k -schéma noethérien réduit affine alors le tiré en arrière $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X \times \mathbf{A}^1)$ (induit par la projection $\text{pr}_1 : X \times \mathbf{A}^1 \rightarrow X$) est un isomorphisme si et seulement si X est seminormal, généralisant ainsi un résultat de Carlo Traverso ([Tra, th. 3.6]). Pour les schémas qui ne sont pas affines, on a le cas particulier suivant de [Br15, lemma 3.6].

Proposition 1.4.11 : *Soit X un k -schéma seminormal. Alors le tiré en arrière $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X \times \mathbf{A}^1)$ est un isomorphisme.*

Il est bien connu que la normalisation commute aux changements de base lisses. Il en va de même pour la seminormalisation.

Lemme 1.4.12 : *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme lisse entre schémas réduits et de type fini*

$$\begin{array}{ccc} Y^+ & \longrightarrow & X^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{est cartésien.}$$

Démonstration. Le morphisme $Y^+ \rightarrow X^+$ est donné par la propriété universelle de la seminormalisation $X^+ \rightarrow X$ appliquée au morphisme $Y^+ \rightarrow Y \rightarrow X$. Pour montrer que le carré est cartésien, on peut supposer que X et Y sont affines. Le résultat est alors donné par [GT, prop. 5.1] (qui demande que les normalisations $\tilde{X} \rightarrow X$ et $\tilde{Y} \rightarrow Y$ soient des morphismes finis, ce qui explique qu'on demande que X et Y soient de type fini). \square

Corollaire 1.4.13 : [Br15, lemma 3.5] *Soient G un groupe algébrique lisse connexe, X un schéma réduit et de type fini sur k , $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération et $\sigma : X^+ \rightarrow X$ la seminormalisation. Alors il existe une unique opération $\alpha^+ : G \times X^+ \rightarrow X$ telle que le*

$$\begin{array}{ccc} G \times X^+ & \xrightarrow{\alpha^+} & X^+ \\ \text{id} \times \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array} \quad \text{est cartésien et}$$

les opérations α et α^+ ont le même noyau.

1.5 Normalisation et pincement

On veut pouvoir retrouver une variété X à partir de sa normalisée \tilde{X} . Si le corps k est algébriquement clos et le lieu singulier de X est fini, Jean-Pierre Serre a donné dans [Ser, ch. IV] une description explicite en construisant l'espace topologique sous-jacent de X et le faisceau structurel. On peut retrouver X dans un cadre beaucoup plus général, en utilisant le langage des pincements de Daniel Ferrand ([Fer]).

La normalisation $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ induit un morphisme de faisceaux injectif $\nu^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ (on dit que ν est schématiquement dominant, voir [EGA, IV 3, déf. 11.10.2 p.171]). Le conducteur \mathcal{C} est le faisceau cohérent d'idéaux qui est défini comme l'annulateur

$$\mathcal{C} = \text{Ann}_{\mathcal{O}_X} (\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} / \mathcal{O}_X).$$

Pour $x \in X$, la tige $(\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x$ est la clôture intégrale $\overline{\mathcal{O}_{X,x}}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ et on a

$$\mathcal{C}_x = \text{Ann}_{\mathcal{O}_{X,x}} ((\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x / \mathcal{O}_{X,x}) = \{a \in \mathcal{O}_{X,x} \mid a (\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Autrement dit, \mathcal{C}_x est le plus grand idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ qui soit aussi un idéal de $\overline{\mathcal{O}_{X,x}}$, c'est-à-dire l'idéal conducteur au sens classique du terme. Soient $i : Z \rightarrow X$ l'immersion fermée

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad \text{est appelé le carré du}$$

conducteur de X .

Lemme 1.5.1 :

1. L'espace sous-jacent de Z est l'ensemble des points non normaux de X .
2. Le morphisme ν induit un isomorphisme de $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Z}$ sur $X \setminus Z$.
3. Le morphisme $\lambda : \widetilde{Z} \rightarrow Z$ est fini et schématiquement dominant.
4. Le carré est cocartésien dans la catégorie des espaces localement annelés.

$$5. \text{ Pour toute extension séparable } K/k, \text{ le carré } \begin{array}{ccc} \widetilde{Z}_K & \xrightarrow{j_K} & \widetilde{X}_K \\ \lambda_K \downarrow & & \downarrow \nu_K \\ Z_K & \xrightarrow{i_K} & X_K \end{array} \text{ déduit par exten-}$$

sion des scalaires est le carré du conducteur de X_K .

Démonstration. L'espace sous-jacent de Z est $\{x \in X \mid 1 \notin \mathcal{C}_x\} = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \subsetneq \overline{\mathcal{O}}_{X,x}\}$. Donc $X \setminus Z$ est le lieu normal de X et la normalisation ν induit un isomorphisme de $\nu^{-1}(X \setminus Z) = \widetilde{X} \setminus \widetilde{Z}$ sur $X \setminus Z$.

Soit U un ouvert affine de X . On écrit $U = \text{Spec } A$ où A est une k -algèbre intègre de type fini. On a $\nu^{-1}(U) = \text{Spec } \overline{A}$ où \overline{A} est la clôture intégrale de A . Soit $\mathfrak{c} = \{a \in A \mid a\overline{A} \subseteq A\}$ l'idéal conducteur de \overline{A} dans A . Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, la clôture intégrale du localisé $A_{\mathfrak{p}}$ est le localisé $(\overline{A})_{\mathfrak{p}} \simeq \overline{A} \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ (voir [Bou2, V, §1 n° 5, cor. 1 p.19]). Puisque \overline{A} est un A -module de type fini et $A_{\mathfrak{p}}$ est plat sur A , il découle de [Bou1, I, §2 n° 11, cor. 2 p.40] que le conducteur de $(\overline{A})_{\mathfrak{p}}$ dans $A_{\mathfrak{p}}$ est $\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{c}A_{\mathfrak{p}}$. Par conséquent la restriction du faisceau conducteur \mathcal{C} à U est le faisceau cohérent d'idéaux associé à \mathfrak{c} . On a donc $Z \cap U = \text{Spec}(A/\mathfrak{c})$ et $\widetilde{Z} \cap \nu^{-1}(U) = \text{Spec}(\overline{A}/\mathfrak{c})$. Le morphisme $A/\mathfrak{c} = \mathcal{O}_Z(Z \cap U) \rightarrow \overline{A}/\mathfrak{c} = \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}(\widetilde{Z} \cap \nu^{-1}(U)) = \lambda_* \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}(Z \cap U)$ est injectif et $\overline{A}/\mathfrak{c}$ est un (A/\mathfrak{c}) -module de type fini.

Les $Z \cap U$ où U est un ouvert affine de X forment un recouvrement de Z . Donc λ est bien fini et schématiquement dominant. En outre, d'après [Fer, lemma 1.3 et th. 5.1] le

$$\text{carré } \begin{array}{ccc} \widetilde{Z} \cap \nu^{-1}(U) = \text{Spec}(\overline{A}/\mathfrak{c}) & \xrightarrow{j} & \nu^{-1}(U) = \text{Spec } \overline{A} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z \cap U = \text{Spec}(A/\mathfrak{c}) & \xrightarrow{i} & U = \text{Spec } A \end{array} \text{ est cocartésien. Donc le carré}$$

du conducteur est bien cocartésien.

L'extension K/k est séparable donc la variété \widetilde{X}_K est normale et ν_K est la normalisation. Pour montrer que le carré déduit par extension des scalaires est le carré du conducteur, on peut supposer que X est affine. Le résultat est alors à nouveau une conséquence de [Bou1, I, §2 n° 11, cor. 2 p.40]. \square

Réciproquement, Ferrand a montré que, sous des hypothèses assez faibles, la variété X est obtenue en « pinçant » \widetilde{Z} sur Z . Le résultat suivant est un cas particulier de [Fer, th. 5.4 et prop. 5.6].

Proposition 1.5.2 : Soient \widetilde{X} un k -schéma, $j : \widetilde{Z} \rightarrow \widetilde{X}$ une immersion fermée et $\lambda : \widetilde{Z} \rightarrow Z$ un morphisme fini schématiquement dominant. Si tout ensemble fini de points de \widetilde{Z} est contenu dans un ouvert affine de \widetilde{X} alors il existe un unique k -schéma X tel que

l'on ait un carré
$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$
 qui soit cocartésien dans la catégorie des espaces localement annelés. De plus ce carré est cartésien, ν est un morphisme fini schématiquement dominant, i est une immersion fermée et ν induit un isomorphisme de $\tilde{X} \setminus \tilde{Z}$ sur $X \setminus Z$. On dira qu'un tel carré est un « diagramme de pincement ».

Si \tilde{X} est de type fini sur k (resp. une variété, resp. propre) alors X aussi. Enfin, si \tilde{X} est normale alors ν est la normalisation.

Remarque 1.5.3 :

1. La dernière partie de l'énoncé est démontrée dans le mémoire de master [Howe] de Sean Howe.

2. Si la variété \tilde{X} est quasi-projective (par exemple si c'est une courbe) alors la condition que tout ensemble fini de points de \tilde{Z} soit contenu dans un ouvert affine de \tilde{X} est automatiquement satisfaite.

3. Si \tilde{X} est une courbe alors \tilde{Z} et Z sont des schémas finis et Z est déterminé par le morphisme d'algèbres injectif $\lambda^\# : \mathcal{O}(Z) \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})$. Cela correspond à l'idée intuitive : la normalisation consiste « moralement » à séparer les branches et détordre les pointes, et réciproquement on retrouve la courbe de départ en recollant des points et des tangentes.

Une opération d'un groupe lisse dans une variété peut se relever en une opération dans la normalisée.

Lemme 1.5.4 : Soient G un groupe algébrique lisse connexe, X une variété, $\alpha : G \times X \rightarrow$

X une opération et
$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$
 le carré du conducteur. Alors il existe une unique

opération $\tilde{\alpha} : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ telle que le morphisme ν soit équivariant. De plus, le carré

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{X} \\ \text{id} \times \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$
 est cartésien et les opérations α et $\tilde{\alpha}$ ont le même noyau. Enfin, les

sous-schémas fermés Z et \tilde{Z} sont G -stables.

Démonstration. L'existence et l'unicité de $\tilde{\alpha}$ sont données dans [Br17, prop. 2.5.1] et viennent de la propriété universelle de la normalisation. Le carré est cartésien car le morphisme $u : \begin{cases} G \times X & \longrightarrow & G \times X \\ (g, x) & \longmapsto & (g, gx) \end{cases}$ est un isomorphisme qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{u} & G \times X \\ & \searrow \alpha & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & X \end{array}$$
 (de même pour $\tilde{\alpha}$).

Le lieu lisse U de X ainsi que $\nu^{-1}(U)$ sont des sous-schémas ouverts schématiquement denses dans X et \widetilde{X} . Donc, d'après [EGA, IV 3, prop. 11.10.6 p.172], pour tout k -schéma S , les sous-schémas ouverts U_S et $\nu^{-1}(U)_S = (\nu \times \text{id}_S)^{-1}(U_S)$ sont schématiquement denses dans X_S et \widetilde{X}_S . Ils sont G_S -stables et $\nu \times \text{id}_S : \nu^{-1}(U)_S \rightarrow U_S$ est un isomorphisme G_S -équivariant. Donc un élément $g \in G(S)$ induit l'identité sur X_S si et seulement s'il induit l'identité sur U_S , si et seulement s'il induit l'identité sur $\nu^{-1}(U_S)$, et si et seulement s'il induit l'identité sur \widetilde{X}_S . Par conséquent α et $\tilde{\alpha}$ ont bien le même noyau.

Soit \mathcal{C} le faisceau conducteur de ν . D'après [EGA, IV 2, prop. 6.8.5 p.152], le schéma $G \times \widetilde{X}$ est normal. Alors $\text{id}_G \times \nu : G \times \widetilde{X} \rightarrow G \times X$ est la normalisation. Il découle de [Bou1, I, §2 n° 11, cor. 2 p.40] que $\alpha^*\mathcal{C}$ et $\text{pr}_2^*\mathcal{C}$ sont tous les deux égaux au faisceau conducteur de $\text{id}_G \times \nu$, donc en particulier ils sont égaux comme sous-faisceaux de $\mathcal{O}_{G \times X}$ (en utilisant les isomorphismes canoniques $\alpha^*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{G \times X} \simeq \text{pr}_2^*\mathcal{O}_X$). Ainsi $\alpha^{-1}(Z)$ et $G \times Z$ sont-ils égaux en tant que sous-schémas fermés de $G \times X$, c'est-à-dire que Z est G -stable. Alors \widetilde{Z} est également G -stable car ν est équivariant. \square

Remarque 1.5.5 : Ce résultat ne se généralise pas aux groupes qui ne sont pas lisses, comme le montre l'exemple suivant, essentiellement dû à Abraham Seidenberg (qui le formule dans l'article [Sei] en termes de dérivation sur un anneau et sa clôture intégrale).

Exemple 1.5.6 : On suppose que le corps k est de caractéristique $p > 0$. On considère le groupe infinitésimal $\alpha_p = \text{Spec} \frac{k[u]}{(u^p)}$ des racines p -èmes de zéro et la courbe C dans \mathbf{A}^2 d'équation $x^{p+1} = y^p$. On a une opération de α_p dans C donnée par $u \cdot (x, y) = (x, y + u)$. Montrons que cette opération ne se relève pas en une opération dans la normalisée de C . La normalisation est le morphisme $\nu : \begin{cases} \mathbf{A}^1 & \longrightarrow & C \\ t & \longmapsto & (t^p, t^{p+1}) \end{cases}$ car le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}(C)$ s'identifie au corps des fractions rationnelles $k(t)$ (avec $t = \frac{y}{x}$) et alors $\mathcal{O}(C)$ est le sous-anneau $k[t^p, t^{p+1}]$ et sa clôture intégrale est $k[t]$. Si l'opération de α_p dans C se relevait en une opération dans \mathbf{A}^1 alors celle-ci serait donnée par un morphisme d'algèbres $\varphi : k[t] \rightarrow \frac{k[u]}{(u^p)} \otimes_k k[t] \simeq \frac{k[t][u]}{(u^p)}$. L'équivariance de ν se traduirait par les conditions $\varphi(t^p) = t^p$ et $\varphi(t^{p+1}) = t^{p+1} + u$. Mais alors on aurait $\varphi(t)t^p = \varphi(t)\varphi(t^p) = \varphi(t^{p+1}) = t^{p+1} + u$ donc, dans $\frac{k(t)[u]}{(u^p)}$, on aurait $\varphi(t) = t + \frac{u}{t^p}$, ce qui contredirait le fait que φ est à valeurs dans $\frac{k[t][u]}{(u^p)}$.

Réciproquement, une opération descend par pincement quand on pince un sous-schéma fermé stable.

Lemme 1.5.7 : Soit $\begin{array}{ccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{j} & \widetilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$ un diagramme de pincement (voir la proposition

1.5.2). Soient G un groupe algébrique et $\tilde{\alpha} : G \times \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$ et $\beta : G \times Z \rightarrow Z$ deux opérations. Si le sous-schéma fermé \widetilde{Z} de \widetilde{X} est G -stable et si le morphisme λ est équivariant alors il existe une unique opération $\alpha : G \times X \rightarrow X$ telle que Z soit G -stable, que l'opération induite soit β , et que le morphisme ν soit équivariant.

Démonstration. Soit $\tilde{\beta} : G \times \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ l'opération induite par $\tilde{\alpha}$. D'après [Howe, th. 3.11], le

$$\text{carré } \begin{array}{ccc} G \times \tilde{Z} & \xrightarrow{\text{id} \times j} & G \times \tilde{X} \\ \text{id} \times \lambda \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \nu \\ G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times i} & G \times X \end{array} \text{ est cocartésien dans la catégorie des espaces localement}$$

annelés. Le morphisme λ est équivariant donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} G \times \tilde{Z} & \xrightarrow{\text{id} \times j} & G \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{X} \\ \text{id} \times \lambda \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \nu & & \downarrow \nu \\ G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times i} & G \times X & & \\ & \searrow \beta & & & \\ & & Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

commute. Par conséquent il existe un unique morphisme $\alpha : G \times X \rightarrow X$ qui complète ce diagramme.

$$\text{Le carré } \begin{array}{ccc} G \times G \times Z' & \longrightarrow & G \times G \times X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G \times Z & \longrightarrow & G \times G \times X \end{array} \text{ est cocartésien dans la catégorie des espaces}$$

localement annelés. De plus, en notant μ la multiplication dans G , les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} G \times G \times Z' & \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \times j} & G \times G \times X' & & & & \\ \downarrow \text{id} \times \text{id} \times \lambda & & \downarrow \text{id} \times \text{id} \times \nu & \searrow \text{id} \times \alpha' & & & \\ G \times G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \times i} & G \times G \times X & & G \times X' & & \\ & \searrow \text{id} \times \beta & \downarrow \text{id} \times \alpha & & \downarrow \text{id} \times \nu & \searrow \alpha' & \\ & & G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times i} & G \times X & & X' \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \nu \\ & & Z & \xrightarrow{i} & X & & X \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
G \times G \times Z' & \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \times j} & G \times G \times X' & & \\
\downarrow \text{id} \times \text{id} \times \lambda & & \downarrow \text{id} \times \text{id} \times \nu & \searrow \mu \times \text{id} & \\
G \times G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times \text{id} \times i} & G \times G \times X & & G \times X' \\
\downarrow \mu \times \text{id} & & \downarrow \mu \times \text{id} & & \downarrow \text{id} \times \nu \\
G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times i} & G \times X & & X' \\
\downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \nu \\
Z & \xrightarrow{i} & X & & X
\end{array}$$

commutent (car chaque diagramme élémentaire commute), et les composées $G \times G \times X' \rightarrow X$ (resp. $G \times G \times Z \rightarrow X$) des deux diagrammes coïncident. Donc par unicité, les composées $G \times G \times X \xrightarrow{\text{id} \times \alpha} G \times X \xrightarrow{\alpha} X$ et $G \times G \times X \xrightarrow{\mu \times \text{id}} G \times X \xrightarrow{\alpha} X$ coïncident.

Par un argument similaire, la composée $\text{Spec } k \times X \xrightarrow{e \times \text{id}} G \times X \xrightarrow{\alpha} X$ coïncide avec la seconde projection. Donc α est bien une opération. \square

Les variétés presque homogènes se comportent bien vis-à-vis de la normalisation.

Lemme 1.5.8 : Soient G un groupe algébrique lisse connexe, X une variété, $\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$

le carré du conducteur, $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération et $\tilde{\alpha} : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ l'opération donnée par le lemme 1.5.4. Alors la variété X est presque homogène si et seulement si \tilde{X} est presque homogène. Dans ce cas, si de plus X est une courbe alors Z et \tilde{Z} sont contenus dans les sous-schémas fermés des points fixes X^G et \tilde{X}^G .

Démonstration. Les morphismes $\gamma : G \times X \rightarrow X \times X$ et $\tilde{\gamma} : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{X}$ de la

définition 1.2.4 font commuter le diagramme $\begin{array}{ccc} G \times \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \tilde{X} \times \tilde{X} \\ \text{id} \times \nu \downarrow & & \downarrow \nu \times \nu \\ G \times X & \xrightarrow{\gamma} & X \times X \end{array}$. Le morphisme

ν est surjectif et fermé, donc $\text{id} \times \nu$ est surjectif et $\nu \times \nu$ est surjectif et fermé. Donc si $\tilde{\gamma}$ est dominant alors γ aussi.

Réciproquement, supposons que X soit homogène. Soit U l'orbite ouverte dans X , donnée par le lemme 1.2.6. Alors U est lisse donc ν induit un isomorphisme $\nu^{-1}(U) \simeq U$. Donc $\nu^{-1}(U)$ est un sous-schéma G -stable et homogène de \tilde{X} , donc \tilde{X} est presque homogène.

Supposons que X soit une courbe presque homogène. D'après le lemme 1.2.16, U et $\nu^{-1}(U)$ sont les complémentaires des sous-schémas fermés des points fixes. Comme Z est

supporté par le lieu singulier de X et comme U est lisse, Z est contenu dans $X \setminus U$. De plus $\tilde{Z} = \nu^{-1}(Z)$ est contenu dans $\tilde{X} \setminus \nu^{-1}(U)$. \square

1.6 Fibrés en droites linéarisés

Dans cette section, on commence par rappeler la définition et quelques propriétés des fibrés en droites linéarisés. On utilise [MFK, ch. 1, §3] comme référence générale. On montre ensuite comment déterminer les fibrés en droites linéarisés d'un schéma obtenu par un diagramme de pincement.

Définition 1.6.1 : Soient G un groupe algébrique lisse connexe, X un schéma de type fini sur k , $\pi : L \rightarrow X$ un fibré en droites et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération. On appelle linéarisation de L toute opération $\beta : G \times L \rightarrow L$ qui commute avec l'opération naturelle de \mathbf{G}_m dans L par multiplication dans les fibres et telle que π soit G -équivariant. On dit que L est linéarisable s'il possède une linéarisation.

Exemple 1.6.2 : Si X est une variété lisse alors l'opération naturelle de G sur les formes différentielles donne une linéarisation du fibré canonique ω_X .

$$\text{Si } \beta \text{ est une linéarisation alors le carré } \begin{array}{ccc} G \times L & \xrightarrow{\beta} & L \\ \text{id} \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array} \text{ est cartésien, c'est-à-dire}$$

dire qu'on a un isomorphisme $\Phi : \alpha^* L \rightarrow \text{pr}_2^* L$. Pour $g \in G(k)$, le morphisme $(g, \text{id}) : \begin{cases} X \rightarrow G \times X \\ x \mapsto (g, x) \end{cases}$ donne $(g, \text{id})^* \alpha^* L = g^* L$ et $(g, \text{id})^* \text{pr}_2^* L = L$ donc Φ induit un isomorphisme $\Phi_g = (g, \text{id})^* \Phi : g^* L \rightarrow L$. On a $\Phi_{gh} = \Phi_h \circ h^*(\Phi_g)$.

Lemme 1.6.3 : [MFK, p.31] La donnée d'une linéarisation est équivalente à la donnée d'un isomorphisme $\Phi : \alpha^* L \rightarrow \text{pr}_2^* L$ de fibrés au-dessus de $G \times X$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (\text{id}_G \times \alpha)^* \alpha^* L & \xrightarrow{\text{can}} & (\mu \times \text{id}_X)^* \alpha^* L & \xrightarrow{(\mu \times \text{id}_X)^* \Phi} & (\mu \times \text{id}_X)^* \text{pr}_2^* L \\ (\text{id}_G \times \alpha)^* \Phi \downarrow & & & & \downarrow \text{can} \\ (\text{id}_G \times \alpha)^* \text{pr}_2^* L & \xrightarrow{\text{can}} & \text{pr}_{23}^* \alpha^* L & \xrightarrow{\text{pr}_{23}^* \Phi} & \text{pr}_{23}^* \text{pr}_2^* L \end{array} .$$

On dit que (L, Φ) est un fibré linéarisé.

Si (L_1, Φ_1) et (L_2, Φ_2) sont des fibrés linéarisés alors $\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \alpha^*(L_1 \otimes L_2) = \alpha^* L_1 \otimes \alpha^* L_2 \rightarrow \text{pr}_2^* L_1 \otimes \text{pr}_2^* L_2 = \text{pr}_2^*(L_1 \otimes L_2)$ est une linéarisation. De même Φ_1 induit une linéarisation de L_1^{-1} .

Définition 1.6.4 : Un morphisme de fibrés linéarisés $\varphi : (L_1, \Phi_{L_1}) \rightarrow (L_2, \Phi_{L_2})$ est un

morphisme de fibrés en droites faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha^* L_1 & \xrightarrow{\Phi_{L_1}} & \text{pr}_2^* L_1 \\
 \alpha^* \varphi \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2^* \varphi \\
 \alpha^* L_2 & \xrightarrow{\Phi_{L_2}} & \text{pr}_2^* L_2
 \end{array}$$

Définition 1.6.5 : On note $\text{Pic}^G(X)$ le groupe abélien des classes d'isomorphismes de fibrés en droites linéarisés sur X . On l'appelle le groupe de Picard équivariant.

Un fibré en droites très ample sur un schéma (quasi-projectif) X permet de plonger X dans un espace projectif. Si on a une opération de G dans X , on aimerait pouvoir plonger X de façon équivariante dans le projectivisé d'un G -module. La donnée supplémentaire sur le fibré pour pouvoir le faire est une linéarisation.

Proposition 1.6.6 : [MFK, ch. 1, prop. 1.7 p.35] Soient G un groupe algébrique lisse connexe, X un schéma quasi-projectif sur k , L un fibré en droites très ample sur X et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) le fibré en droites L est linéarisable ;
- ii) il existe une opération de G dans un espace projectif \mathbf{P}^n et une immersion (localement fermée) équivariante $i : X \rightarrow \mathbf{P}^n$ telles que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ soit linéarisable et $L = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$;
- iii) il existe un G -module V de dimension finie et une immersion (localement fermée) équivariante $i : X \rightarrow \mathbf{P}(V)$ telles que $L = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(1)$.

Le résultat suivant a été démontré par Hideyasu Sumihiro ([Sum, th 1.6], voir aussi [Br15, th. 2.14]).

Proposition 1.6.7 : Soient X une variété normale et G un groupe linéaire lisse connexe opérant dans X . Il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour tout fibré en droites L sur X , le fibré $L^{\otimes n}$ soit linéarisable.

On aimerait avoir un analogue, sans hypothèse de normalité, quand G est une forme de \mathbf{G}_a en caractéristique $p > 0$. On a d'abord besoin de comprendre l'obstruction à ce qu'un fibré en droites soit linéarisable. Pour tout groupe lisse connexe G , on note \widehat{G} le foncteur des caractères qui à tout k -schéma X associe le groupe $\widehat{G}(X) = \text{Hom}_{X\text{-gp}}(G \times X, \mathbf{G}_m \times X)$. Un élément de $\widehat{G}(X)$ est donné par un morphisme $\chi : G \times X \rightarrow \mathbf{G}_m$ tel que l'on ait identiquement $\chi(gg', x) = \chi(g, x)\chi(g', x)$. Il est bien connu que si le groupe abstrait des caractères $\widehat{G}(k_s)$ est trivial et si X est géométriquement réduit alors $\widehat{G}(X)$ est trivial. Pour le vérifier, on peut supposer $k = k_s$. Pour $\chi \in \widehat{G}(X)$ et $x \in X(k)$, le morphisme $\begin{cases} G & \longrightarrow & \mathbf{G}_m \\ g & \longmapsto & \chi(g, x) \end{cases}$ est un caractère donc, par hypothèse, il est trivial. Puisque $G(k) \times X(k)$ est dense dans $G \times X$ (car ce schéma est géométriquement réduit), on en déduit que χ est le morphisme constant 1.

Proposition 1.6.8 : [Br15, prop. 2.10] Soient X un schéma réduit et de type fini sur k , et G un groupe lisse connexe opérant dans X . On a une suite exacte de groupes abstraits

$$1 \rightarrow \mathcal{O}(X)^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}(X)^{\times} \rightarrow \widehat{G}(X) \rightarrow \text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\alpha^*} \frac{\text{Pic}(G \times X)}{\text{pr}_2^* \text{Pic}(X)}$$

où $\text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ est le morphisme d'oubli qui à un fibré linéarisé (L, Φ) associe le fibré L , et $\mathcal{O}(X)^{\times G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{O}(X)^{\times}$ formé des éléments G -invariants.

En particulier, si le groupe abstrait $\widehat{G}(k_s)$ est trivial et si X est géométriquement réduit alors le morphisme $\text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ est injectif, c'est-à-dire qu'un fibré en droites possède au plus une linéarisation (à isomorphisme près).

Proposition 1.6.9 : *On suppose que le corps k est de caractéristique $p > 0$. Soient X une variété et G une forme de \mathbf{G}_a opérant dans X . Il existe un entier $r \geq 0$ tel que pour tout fibré en droites L sur X , le fibré $L^{\otimes p^r}$ soit linéarisable.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le groupe $\text{Pic}(G \times X)/\text{pr}_2^* \text{Pic}(X)$ est de p^r -torsion. Montrons d'abord qu'on peut se restreindre au cas $G = \mathbf{G}_{a,k}$. Soit K/k une extension purement inséparable telle que $G_K \simeq \mathbf{G}_{a,K}$ (voir proposition 1.3.5). Le degré d de cette extension est une puissance de p . Supposons qu'il existe un entier $s \geq 0$ tel que le groupe $\text{Pic}(G_K \times X_K)/\text{pr}_2^* \text{Pic}(X_K)$ soit de p^s -torsion. Soit L un fibré en droites sur $G \times X$. Par hypothèse, il existe un fibré en droites M sur X_K tel que $(L_K)^{\otimes p^s} \simeq \text{pr}_2^* M$. En prenant la norme, on obtient $L^{\otimes dp^s} \simeq N_{K/k}((L_K)^{\otimes p^s}) \simeq N_{K/k}(\text{pr}_2^* M) \simeq \text{pr}_2^*(N_{K/k}(M))$ et $N_{K/k}(M)$ est un fibré en droites sur X (voir [EGA, II, prop. 6.5.8 p.130]). Donc le groupe $\text{Pic}(G \times X)/\text{pr}_2^* \text{Pic}(X)$ est de dp^r -torsion.

Il reste à montrer que le résultat est vrai si $G = \mathbf{G}_{a,k}$. Soit $\sigma : X^+ \rightarrow X$ la seminormalisation. D'après le lemme 1.4.11, le tiré en arrière $\text{pr}_2^* : \text{Pic}(X^+) \rightarrow \text{Pic}(G \times X^+)$ est un isomorphisme. Donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \xrightarrow{\text{pr}_2^*} & \text{Pic}(G \times X) & \longrightarrow & \text{Pic}(G \times X)/\text{pr}_2^* \text{Pic}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \sigma^* \downarrow & & (\text{id}_G \times \sigma)^* \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Pic}(X^+) & \xrightarrow{\text{pr}_2^*} & \text{Pic}(G \times X^+) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif et exact en lignes. Le lemme du serpent donne une suite exacte

$$\ker(\text{id}_G \times \sigma)^* \rightarrow \text{Pic}(G \times X)/\text{pr}_2^* \text{Pic}(X) \rightarrow \text{coker } \sigma^*.$$

De plus le morphisme $\alpha : G \times X \rightarrow X$ est lisse (car G est lisse) donc, d'après le lemme 1.4.12, le schéma $G \times X^+$ est seminormal et $\text{id} \times \sigma : G \times X^+ \rightarrow G \times X$ est la seminormalisation. Il découle de [Br15, lemma 4.11] qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\ker(\text{id}_G \times \sigma)^*$ et $\text{coker } \sigma^*$ soient de p^n -torsion. Alors $\text{Pic}(G \times X)/\text{pr}_2^* \text{Pic}(X)$ est de p^{2n} -torsion. \square

Remarque 1.6.10 :

1. Ce résultat n'est pas vrai en caractéristique nulle. En effet, \mathbf{G}_a opère dans la courbe cuspidale C obtenue en pinçant le sous-schéma $\text{Spec} \frac{k[u]}{(u^2)}$ de \mathbf{P}^1 supporté par ∞ sur $\text{Spec } k$ (qui peut être réalisée explicitement comme la courbe dans \mathbf{P}^2 d'équation homogène $y^3 = x^2z$). D'après [Br15, ex. 2.16], un fibré en droites sur C est linéarisable si et seulement s'il est de degré 0.

2. Si G est une forme non triviale de \mathbf{G}_a alors sa complétion régulière C se plonge de façon équivariante dans le projectivisé d'un G -module, mais C n'est pas lisse. Au contraire, si k est de caractéristique nulle alors l'adhérence d'une orbite dans le projectivisé d'un \mathbf{G}_a -module est toujours lisse (voir [BF, lemma 2.4]).

Il est bien connu que les linéarisations se comportent bien quand on tire en arrière un fibré en droites par un morphisme équivariant.

Lemme 1.6.11 : Soient X et Y deux schémas de type fini sur k , G un groupe algébrique lisse connexe, $\alpha : G \times X \rightarrow X$ et $\beta : G \times Y \rightarrow Y$ deux opérations, et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme G -équivariant. Si (L, Φ_L) est un fibré en droites linéarisé sur X alors

$$\Phi_{f^*L} : \beta^* f^* L \xrightarrow{\text{can}} (\text{id}_G \times f)^* \alpha^* L \xrightarrow{(\text{id}_G \times f)^* \Phi} (\text{id}_G \times f)^* \text{pr}_2^* f^* L \xrightarrow{\text{can}} \text{pr}_2^* f^* L$$

est une linéarisation de f^*L . De plus, si $\varphi : (L_1, \Phi_{L_1}) \rightarrow (L_2, \Phi_{L_2})$ est un morphisme de fibrés linéarisés sur X alors $f^*\varphi : (f^*L_1, \Phi_{f^*L_1}) \rightarrow (f^*L_2, \Phi_{f^*L_2})$ est un morphisme de fibrés linéarisés sur Y .

Démonstration. Le diagramme de la figure 1.1 page 34 est commutatif et la composée des flèches verticales à gauche est $(\text{id} \times \beta)^* \Phi_{f^*L}$. Donc Φ_{f^*L} est bien une linéarisation de f^*L .

De plus le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \beta^* f^* L_1 & \xrightarrow{\text{can}} & (\text{id} \times f)^* \alpha^* L_1 & \xrightarrow{(\text{id}_G \times f)^* \Phi_{L_1}} & (\text{id} \times f)^* \text{pr}_2^* L_1 & \xrightarrow{\text{can}} & \text{pr}_2^* f^* L_1 \\ \beta^* f^* \varphi \downarrow & & (\text{id}_G \times f)^* \alpha^* \varphi \downarrow & & (\text{id}_G \times f)^* \text{pr}_2^* \varphi \downarrow & & \text{pr}_2^* f^* \varphi \downarrow \\ \beta^* f^* L_2 & \xrightarrow{\text{can}} & (\text{id} \times f)^* \alpha^* L_2 & \xrightarrow{(\text{id}_G \times f)^* \Phi_{L_2}} & (\text{id} \times f)^* \text{pr}_2^* L_2 & \xrightarrow{\text{can}} & \text{pr}_2^* f^* L_2 \end{array}$$

est également commutatif, donc $f^*\varphi$ est bien un morphisme de fibrés linéarisés. \square

Pour un diagramme de pincement
$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$
, Charles Weibel a décrit les fibrés

en droites sur X en termes de fibrés en droites sur \tilde{X} et sur Z .

Proposition 1.6.12 : [Web, prop. 7.8] On a une suite exacte de groupes abstraits

$$1 \rightarrow \mathcal{O}(X)^\times \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{X})^\times \times \mathcal{O}(Z)^\times \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^\times \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } \tilde{X} \times \text{Pic } Z \rightarrow \text{Pic } \tilde{Z}$$

induite par les tirés en arrière et un morphisme de connexion $\delta : \mathcal{O}(\tilde{Z})^\times \rightarrow \text{Pic } X$. Cette suite est appelée la suite Units-Pic.

Cela signifie « moralement » que, à isomorphisme près, un fibré en droites sur X est donné par un fibré en droites sur \tilde{X} muni de trivialisations le long des fibres de λ .

On peut reformuler ce résultat dans le langage des catégories. Pour tout schéma Y de type fini sur k , on note \mathcal{D}_Y la catégorie des fibrés en droites sur Y . Les foncteurs $j^* : \mathcal{D}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{Z}}$ et $\lambda^* : \mathcal{D}_Z \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{Z}}$ permettent de définir la catégorie produit fibré $\mathcal{D}_{\tilde{X}} \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}} \mathcal{D}_Z$. Ses objets sont les triplets (\tilde{L}, M, σ) où \tilde{L} et M sont des fibrés en droites sur \tilde{X} et Z , et σ est un isomorphisme $j^* \tilde{L} \simeq \lambda^* M$ de fibrés en droites sur \tilde{Z} . Un morphisme entre deux triplets $(\tilde{L}_1, M_1, \sigma_1)$ et $(\tilde{L}_2, M_2, \sigma_2)$ est donné par deux morphismes de fibrés $\tilde{\varphi} : \tilde{L}_1 \rightarrow \tilde{L}_2$ et $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ tels que $\sigma_2 \circ (j^* \tilde{\varphi}) = (\lambda^* \psi) \circ \sigma_1$.

Proposition 1.6.13 : [Howe, th. 3.13] Le foncteur

$$T : \begin{cases} \mathcal{D}_X & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\tilde{X}} \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}} \mathcal{D}_Z \\ L & \longmapsto & (\nu^* L, i^* L, \text{can}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(\text{id} \times \beta)^* \beta^* f^* L \xrightarrow{\text{can}} (\mu \times \text{id})^* \beta^* f^* L \xrightarrow{(\mu \times \text{id})^* \Phi_{f^* L}} (\mu \times \text{id})^* \text{pr}_2^* f^* L \\
\downarrow \text{can} \qquad \downarrow \text{can} \\
(\text{id} \times \beta)^* (\text{id} \times f)^* \alpha^* L \xrightarrow{(\mu \times \text{id})^* (\text{id} \times g)^* \alpha^* L} (\mu \times \text{id})^* (\text{id} \times f)^* \Phi \\
\downarrow \text{can} \qquad \downarrow \text{can} \\
(\text{id} \times \text{id} \times f)^* (\text{id} \times \alpha)^* \alpha^* L \xrightarrow{(\text{id} \times \text{id} \times f)^* (\mu \times \text{id})^* \Phi} (\text{id} \times \text{id} \times f)^* (\mu \times \text{id})^* \text{pr}_2^* L \\
\downarrow \text{can} \\
(\text{id} \times \text{id} \times f)^* (\text{id} \times \alpha)^* \Phi \xrightarrow{(\text{id} \times \text{id} \times f)^* \text{pr}_2^* L} (\text{id} \times \text{id} \times f)^* \text{pr}_2^* \alpha^* L \xrightarrow{(\text{id} \times \text{id} \times f)^* \text{pr}_{23}^* \alpha^* L} (\text{id} \times \text{id} \times f)^* \text{pr}_{23}^* \text{pr}_2^* L \\
\downarrow \text{can} \qquad \downarrow \text{can} \\
(\text{id} \times \beta)^* (\text{id} \times f)^* \text{pr}_2^* L \xrightarrow{\text{pr}_{23}^* (\text{id} \times f)^* \alpha^* L} \text{pr}_{23}^* (\text{id} \times f)^* \Phi \\
\downarrow \text{can} \qquad \downarrow \text{can} \\
(\text{id} \times \beta)^* \text{pr}_2^* f^* L \xrightarrow{\text{pr}_{23}^* \beta^* f^* L} \text{pr}_{23}^* (\text{id} \times f)^* \text{pr}_2^* f^* L \xrightarrow{\text{pr}_{23}^* \Phi_{f^* L}} \text{pr}_{23}^* \text{pr}_2^* f^* L
\end{array}
\end{array}$$

FIGURE 1.1 – Diagramme pour la démonstration du lemme 1.6.11.

(où can est l'isomorphisme canonique $j^*\nu^*L \simeq \lambda^*i^*L$) est une équivalence de catégories.

Soit S le quasi-inverse de T . Pour (\tilde{L}, M, σ) dans $\mathcal{D}_{\tilde{X}} \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}} \mathcal{D}_Z$, la classe d'isomorphisme de $L = S(\tilde{L}, M, \sigma)$ est déterminée par l'existence d'isomorphismes $\varphi_\nu : \nu^*L \rightarrow \tilde{L}$ et

$$\varphi_i : i^*L \rightarrow M \text{ faisant commuter le diagramme } \begin{array}{ccc} j^*\nu^*L & \xrightarrow{j^*\varphi_\nu} & j^*\tilde{L} \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \lambda^*i^*L & \xrightarrow{\lambda^*\varphi_i} & \lambda^*M \end{array} .$$

On peut donner une construction analogue pour les fibrés en droites linéarisés. Soit G un groupe algébrique lisse connexe. Pour tout schéma Y de type fini sur k muni d'une opération de G , on note \mathcal{D}_Y^G la catégorie des fibrés en droites linéarisés sur Y . D'après le lemme 1.6.11, si Y' est un autre tel schéma et si $f : Y' \rightarrow Y$ est un morphisme G -équivariant alors on dispose du foncteur $f^* : \mathcal{D}_{Y'}^G \rightarrow \mathcal{D}_Y^G$.

On suppose maintenant qu'on a un diagramme de pincement $\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$ où X est

de type fini sur k (donc \tilde{X} , Z et \tilde{Z} aussi). On suppose aussi que l'on a deux opérations $\alpha : G \times X \rightarrow X$ et $\tilde{\alpha} : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ telles que les sous-schémas fermés Z et \tilde{Z} soient stables et que les morphismes ν et λ soient G -équivariants (donc i et j aussi). On note $\beta : G \times Z \rightarrow Z$ et $\tilde{\beta} : G \times \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ les opérations induites. Les foncteurs $j^* : \mathcal{D}_{\tilde{X}}^G \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{Z}}^G$ et $\lambda^* : \mathcal{D}_Z^G \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{Z}}^G$ permettent de définir la catégorie produit fibré $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^G \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}^G} \mathcal{D}_Z^G$. Ses objets sont les uplets $(\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}}, M, \Phi_M, \sigma)$ où $(\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}})$ et (M, Φ_M) sont des fibrés en droites linéarisés sur \tilde{X} et Z , et σ est un isomorphisme $j^*\tilde{L} \simeq \lambda^*M$ de fibrés en droites linéarisés sur \tilde{Z} . Un morphisme entre deux uplets $(\tilde{L}_1, \Phi_{\tilde{L}_1}, M_1, \Phi_{M_1}, \sigma_1)$ et $(\tilde{L}_2, \Phi_{\tilde{L}_2}, M_2, \Phi_{M_2}, \sigma_2)$ est donné par deux morphismes de fibrés linéarisés $\tilde{\varphi} : (\tilde{L}_1, \Phi_{\tilde{L}_1}) \rightarrow (\tilde{L}_2, \Phi_{\tilde{L}_2})$ et $\psi : (M_1, \Phi_{M_1}) \rightarrow (M_2, \Phi_{M_2})$ tels que $\sigma_2 \circ (j^*\tilde{\varphi}) = (\lambda^*\psi) \circ \sigma_1$.

Théorème 1.6.14 : *Le foncteur*

$$T^G : \begin{cases} \mathcal{D}_X^G & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\tilde{X}}^G \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}^G} \mathcal{D}_Z^G \\ (L, \Phi_L) & \longmapsto & (\nu^*L, \Phi_{\nu^*L}, i^*L, \Phi_{i^*L}, \text{can}) \end{cases}$$

(où can est l'isomorphisme canonique $j^*\nu^*L \simeq \lambda^*i^*L$) est une équivalence de catégories.

Démonstration. Il est immédiat que $(\nu^*L, \Phi_{\nu^*L}, i^*L, \Phi_{i^*L}, \text{can})$ est bien un objet de la catégorie $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^G \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}^G} \mathcal{D}_Z^G$. La définition de T^G sur les morphismes est évidente. On vérifie alors facilement que T^G est un foncteur.

Étape 1. D'après la proposition 1.6.13, le foncteur T^G est fidèle. Montrons qu'il est plein. Soient (L_1, Φ_{L_1}) et (L_2, Φ_{L_2}) deux fibrés en droites linéarisés sur X . Un morphisme $T^G(L_1, \Phi_{L_1}) \rightarrow T^G(L_2, \Phi_{L_2})$ est donné par deux morphismes de fibrés linéarisés $\tilde{\varphi} : (\nu^*L_1, \Phi_{\nu^*L_1}) \rightarrow (\nu^*L_2, \Phi_{\nu^*L_2})$ et $\psi : (i^*L_1, \Phi_{i^*L_1}) \rightarrow (i^*L_2, \Phi_{i^*L_2})$ tels que $\sigma_2 \circ (j^*\tilde{\varphi}) = (\lambda^*\psi) \circ \sigma_1$, où σ_1 et σ_2 sont les isomorphismes canoniques $j^*\nu^*L_1 \simeq \lambda^*i^*L_1$ et $j^*\nu^*L_2 \simeq \lambda^*i^*L_2$. À nouveau d'après la proposition 1.6.13, il existe un morphisme de fibrés en droites $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ tel que $\tilde{\varphi} = \nu^*\varphi$ et $\psi = i^*\varphi$. Il reste à montrer que φ est un morphisme

de fibrés linéarisés. En utilisant la définition des linéarisations $\Phi_{\nu^*L_1}$ et $\Phi_{\nu^*L_2}$, l'égalité $\tilde{\varphi} = \nu^*\varphi$, le fait que $\tilde{\varphi}$ soit un morphisme de fibrés linéarisés et les différents isomorphismes canoniques, on constate que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\text{id}_G \times \nu)^* \alpha^* L_1 & \xrightarrow{(\text{id}_G \times \nu)^* \Phi_{L_1}} & (\text{id}_G \times \nu)^* \text{pr}_2^* L_1 \\ (\text{id}_G \times \nu)^* \alpha^* \varphi \downarrow & & \downarrow (\text{id}_G \times \nu)^* \text{pr}_2^* \varphi \\ (\text{id}_G \times \nu)^* \alpha^* L_2 & \xrightarrow{(\text{id}_G \times \nu)^* \Phi_{L_2}} & (\text{id}_G \times \nu)^* \text{pr}_2^* L_2 \end{array}$$

de fibrés en droites sur $G \times \tilde{X}$ commute. De même, en remplaçant $\text{id}_G \times \nu$ par $\text{id}_G \times i$, on obtient un diagramme commutatif de fibrés en droites sur Z . Or

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{Z} & \xrightarrow{\text{id} \times j} & G \times \tilde{Z} \\ \text{id} \times \lambda \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \nu \\ G \times Z & \xrightarrow{\text{id} \times i} & G \times X \end{array}$$

est encore un diagramme de pincement (voir [Howe, th. 3.11]), donc on peut lui appliquer la proposition 1.6.13. En particulier le foncteur

$$T' : \mathcal{D}_{G \times X} \rightarrow \mathcal{D}_{G \times \tilde{X}} \times_{\mathcal{D}_{G \times \tilde{Z}}} \mathcal{D}_{G \times Z}$$

est fidèle. Par conséquent, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \alpha^* L_1 & \xrightarrow{\Phi_{L_1}} & \text{pr}_2^* L_1 \\ \alpha^* \varphi \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2^* \varphi \\ \alpha^* L_2 & \xrightarrow{\Phi_{L_2}} & \text{pr}_2^* L_2 \end{array}$$

commute, c'est-à-dire

que φ est bien un morphisme de fibrés linéarisés.

Étape 2. Montrons que T^G est essentiellement surjectif. Soit $(\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}}, M, \Phi_M, \sigma)$ un objet de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^G \times_{\mathcal{D}_{\tilde{Z}}^G} \mathcal{D}_Z^G$. Toujours d'après la proposition 1.6.13, il existe un fibré en droites L sur X et des isomorphismes $\varphi_\nu : \nu^*L \rightarrow \tilde{L}$ et $\varphi_i : i^*L \rightarrow M$ faisant commuter le dia-

gramme

$$\begin{array}{ccc} j^* \nu^* L & \xrightarrow{j^* \varphi_\nu} & j^* \tilde{L} \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \lambda^* i^* L & \xrightarrow{\lambda^* \varphi_i} & \lambda^* M \end{array}$$

. On veut donc construire une linéarisation Φ_L de L et un

isomorphisme entre $T^G(L, \Phi_L)$ et $(\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}}, M, \Phi_M, \sigma)$.

Considérons les isomorphismes

$$\sigma_1 : (\text{id}_G \times j)^* \tilde{\alpha}^* \tilde{L} \xrightarrow{\text{can}} \tilde{\beta}^* j^* \tilde{L} \xrightarrow{\tilde{\beta}^* \sigma} \tilde{\beta}^* \lambda^* M \xrightarrow{\text{can}} (\text{id}_G \times \lambda)^* \beta^* M$$

$$\sigma_2 : (\text{id}_G \times j)^* \text{pr}_2^* \tilde{L} \xrightarrow{\text{can}} \text{pr}_2^* j^* \tilde{L} \xrightarrow{\text{pr}_2^* \sigma} \text{pr}_2^* \lambda^* M \xrightarrow{\text{can}} (\text{id}_G \times \lambda)^* \text{pr}_2^* M$$

de fibrés en droites sur $G \times \tilde{Z}$. Puisque $\sigma : j^* \tilde{L} \rightarrow \lambda^* M$ est un isomorphisme de fibrés linéarisés, on a $\sigma_2 \circ ((\text{id}_G \times j)^* \Phi_{\tilde{L}}) = ((\text{id}_G \times \lambda)^* \Phi_M) \circ \sigma_1$. Donc $\Phi_{\tilde{L}}$ et Φ_M induisent un isomorphisme $(\tilde{\alpha}^* \tilde{L}, \beta^* M, \sigma_1) \rightarrow (\text{pr}_2^* \tilde{L}, \text{pr}_2^* M, \sigma_2)$ dans la catégorie $\mathcal{D}_{G \times \tilde{X}} \times_{\mathcal{D}_{G \times \tilde{Z}}} \mathcal{D}_{G \times Z}$ (par définition des morphismes dans cette catégorie). Or le foncteur T' défini plus haut est pleinement fidèle, donc cet isomorphisme provient d'un isomorphisme dans la catégorie

$\mathcal{D}_{G \times X}$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme de fibrés en droites $\Phi_L : \alpha^* L \rightarrow \text{pr}_2^* L$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\text{id} \times \nu)^* \alpha^* L & \xrightarrow{\text{can}} & \tilde{\alpha}^* \nu^* L & \xrightarrow{\tilde{\alpha}^* \varphi_\nu} & \tilde{\alpha}^* \tilde{L} \\ (\text{id} \times \nu)^* \Phi_L \downarrow & & & & \downarrow \Phi_{\tilde{L}} \\ (\text{id} \times \nu)^* \text{pr}_2^* L & \xrightarrow{\text{can}} & \text{pr}_2^* \nu^* L & \xrightarrow{\text{pr}_2^* \varphi_\nu} & \text{pr}_2^* \tilde{L} \end{array}$$

ainsi que le diagramme analogue obtenu en remplaçant ν par i et \tilde{L} par M .

Il reste à montrer que Φ_L est une linéarisation, car alors par construction φ_ν et φ_i induisent un isomorphisme $T^G(L, \Phi_L) \rightarrow (\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}}, M, \Phi_M, \sigma)$. On veut donc montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\text{id}_G \times \alpha)^* \alpha^* L & \xrightarrow{\text{can}} & (\mu \times \text{id}_X)^* \alpha^* L & \xrightarrow{(\mu \times \text{id}_X)^* \Phi_L} & (\mu \times \text{id}_X)^* \text{pr}_2^* L \\ (\text{id}_G \times \alpha)^* \Phi_L \downarrow & & & & \downarrow \text{can} \\ (\text{id}_G \times \alpha)^* \text{pr}_2^* L & \xrightarrow{\text{can}} & \text{pr}_{23}^* \alpha^* L & \xrightarrow{\text{pr}_{23}^* \Phi_L} & \text{pr}_{23}^* \text{pr}_2^* L \end{array}$$

commute. On vérifie facilement que les deux diagrammes obtenus en tirant en arrière par $\text{id}_G \times \text{id}_G \times \nu$ et par $\text{id}_G \times \text{id}_G \times i$ sont commutatifs, car $\Phi_{\tilde{L}}$ et Φ_M sont des linéarisations (on peut par exemple écrire un diagramme analogue à celui de la figure 1.1 page 34). Comme précédemment, le foncteur

$$\mathcal{D}_{G \times G \times X} \rightarrow \mathcal{D}_{G \times G \times \tilde{X}} \times_{\mathcal{D}_{G \times G \times \tilde{Z}}} \mathcal{D}_{G \times G \times Z}$$

est fidèle. Donc le diagramme pour Φ_L est bien commutatif. \square

Corollaire 1.6.15 : *On a une suite exacte de groupes abstraits*

$$\begin{array}{c} 1 \rightarrow \mathcal{O}(X)^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G} \times \mathcal{O}(Z)^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G} \\ \left. \begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ \searrow \text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{X}) \times \text{Pic}^G(Z) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z}) \end{array} \right\} \end{array}$$

induite par les tirés en arrière et un morphisme de connexion $\delta : \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G} \rightarrow \text{Pic}^G(X)$. Cette suite est appelée la suite Units-Pic équivariante.

Démonstration.

Étape 1. Exactitude en $\mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$. On identifie $\mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times}$ au groupe des automorphismes du fibrés en droites trivial $\tilde{Z} \times \mathbf{A}^1$. Les automorphismes du fibré linéarisé $(\tilde{Z} \times \mathbf{A}^1, \text{triv})$ (où triv est la linéarisation triviale) correspondent aux éléments de $\mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$. Le morphisme δ envoie $\sigma \in \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$ sur la classe d'isomorphisme du fibré en droites sur X correspondant (grâce au théorème 1.6.14) à la classe d'isomorphisme de l'uplet $(\tilde{X} \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, Z \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, \sigma)$. En particulier l'image de $\delta(\sigma)$ par le morphisme $\text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{X}) \times \text{Pic}^G(Z)$ est $((\tilde{X} \times \mathbf{A}^1, \text{triv}), (Z \times \mathbf{A}^1, \text{triv}))$, c'est-à-dire que $\delta(\sigma)$ est dans le noyau du morphisme. Réciproquement, un élément (L, Φ_L) dans le noyau du morphisme correspond à un uplet $(\tilde{X} \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, Z \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, \sigma)$ et on peut voir σ comme un automorphisme de $(\tilde{Z} \times \mathbf{A}^1, \text{triv})$, donc on a $\sigma \in \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$ et $(L, \Phi_L) = \delta(\sigma)$.

Étape 2. Exactitude en $\mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$. Soit $\sigma \in \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times}$, vu comme un automorphisme de $(\tilde{Z} \times \mathbf{A}^1, \text{triv})$. Alors σ est un élément de $\ker \delta$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $(\tilde{X} \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, Z \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, \sigma) \rightarrow (\tilde{X} \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, Z \times \mathbf{A}^1, \text{triv}, \text{can})$. Un tel isomorphisme est donné par des automorphismes $\tilde{\varphi}$ de $(\tilde{X} \times \mathbf{A}^1, \text{triv})$ et ψ de $(Z \times \mathbf{A}^1, \text{triv})$ tels que $\text{can} \circ (j^* \tilde{\varphi}) = (\lambda^* \psi) \circ \sigma$. En voyant $\tilde{\varphi}$ et ψ comme des éléments de $\mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G}$ et $\mathcal{O}(Z)^{\times G}$, cette condition signifie précisément que σ est l'image de $(\tilde{\varphi}, \psi)$ par le morphisme $\mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G} \times \mathcal{O}(Z)^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$.

Étape 3. Exactitude en $\mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G} \times \mathcal{O}(Z)^{\times G}$. L'image du morphisme $\mathcal{O}(X)^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G} \times \mathcal{O}(Z)^{\times G}$ est contenue dans le noyau du morphisme $\mathcal{O}(\tilde{X})^{\times G} \times \mathcal{O}(Z)^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G}$. Réciproquement, si $(\tilde{\varphi}, \psi)$ est dans le noyau de ce morphisme alors, d'après la suite Units-Pic donnée dans la proposition 1.6.12, ce couple est l'image d'un élément $\varphi \in \mathcal{O}(X)^{\times}$. Le morphisme $\text{id}_G \times \nu : G \times \tilde{X} \rightarrow G \times X$ est schématiquement dominant donc l'application $(\text{id}_G \times \nu)^* : \mathcal{O}(G \times X)^{\times} \rightarrow \mathcal{O}(G \times \tilde{X})^{\times}$ est injective. Les images de $\alpha^*(\varphi)$ et $\text{pr}_2^*(\varphi)$ par cette application sont respectivement $\tilde{\alpha}^*(\tilde{\varphi})$ et $\text{pr}_2^*(\tilde{\varphi})$. Or $\tilde{\varphi}$ est G -invariant, donc $\tilde{\alpha}^*(\tilde{\varphi}) = \text{pr}_2^*(\tilde{\varphi})$. Par injectivité on a $\alpha^*(\varphi) = \text{pr}_2^*(\varphi)$, donc φ est un élément de $\mathcal{O}(X)^{\times G}$.

Étape 4. Exactitude en $\text{Pic}^G(\tilde{X}) \times \text{Pic}^G(Z)$. Soit $((\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}}), (M, \Phi_M)) \in \text{Pic}^G(\tilde{X}) \times \text{Pic}^G(Z)$. Son image dans $\text{Pic}^G(\tilde{Z})$ est triviale si et seulement si on a un isomorphisme de fibrés linéarisés $(j^* \tilde{L})(\lambda^* M)^{-1} \simeq \tilde{Z} \times \mathbf{A}^1$, (où $\tilde{Z} \times \mathbf{A}^1$ est muni de la linéarisation triviale), c'est-à-dire si et seulement si on a un isomorphisme de fibrés linéarisés $\sigma : j^* \tilde{L} \rightarrow \lambda^* M$. D'après le théorème 1.6.14, cela est équivalent au fait que $((\tilde{L}, \Phi_{\tilde{L}}), (M, \Phi_M))$ soit l'image d'un élément de $\text{Pic}^G(X)$. \square

Remarque 1.6.16 : Si X est une variété propre alors $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\tilde{X}) = k$ donc la suite Units-Pic équivariante se simplifie en la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^{\times G} / \mathcal{O}(Z)^{\times G} \rightarrow \text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{X}) \times \text{Pic}^G(Z) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z}).$$

Chapitre 2

Courbes presque homogènes

2.1 Courbes presque homogènes régulières

Le résultat clé pour la classification est le résultat bien connu suivant.

Proposition 2.1.1 : [Br17, ex. 7.1.2 et 7.1.3] Soit C une courbe projective lisse de genre g . Si $g > 1$ (resp. si $g = 1$) alors le groupe algébrique des automorphismes \mathbf{Aut}_C (resp. le normalisateur $\mathbf{Aut}_{C,Q}$ d'un point k -rationnel Q muni de la structure de sous-schéma fermé réduit) est un groupe fini étale.

Démonstration. L'algèbre de Lie de \mathbf{Aut}_C est $H^0(C, T_C)$ où T_C est le faisceau tangent de C . Or T_C est le dual du fibré en droites canonique ω_C donc $\deg T_C = 2 - 2g$. Donc si $g > 1$ alors $\deg T_C < 0$, donc $\dim H^0(X, T_C) = 0$. Donc \mathbf{Aut}_C est un groupe algébrique lisse de dimension 0. On suppose désormais $g = 1$. Dans la courbe $C_{\bar{k}}$ obtenue après extension des scalaires il n'y a qu'un nombre fini de points Q_1, \dots, Q_r au-dessus de Q et ce sont des points \bar{k} -rationnels. Donc $\mathbf{Aut}_{C_{\bar{k}}, Q_1}$ est d'indice fini dans $(\mathbf{Aut}_{C,Q})_{\bar{k}}$. Donc il suffit de traiter le cas où k est algébriquement clos. Alors C est une courbe elliptique et Q est un point k -rationnel. On a $\mathbf{Aut}_C = C \rtimes \mathbf{Aut}_{C,Q}$ et $\mathbf{Aut}_C^\circ = C$ donc $\mathbf{Aut}_{C,Q} \simeq \mathbf{Aut}_C / \mathbf{Aut}_C^\circ = \pi_0(\mathbf{Aut}_C)$, donc $\mathbf{Aut}_{C,Q}$ est étale et fini. \square

Remarque 2.1.2 : En particulier, si $g > 1$ (respectivement $g = 1$) alors le groupe abstrait $\mathrm{Aut}_k(C)$ (respectivement le stabilisateur de Q dans $\mathrm{Aut}_k(C)$) est fini. Maxwell Rosenlicht avait déjà démontré ce résultat en 1955 en utilisant le langage des corps de fonctions ([Ro55, th. p.4]).

Le lemme suivant est un cas particulier d'un résultat d'André Weil sur les opérations birationnelles. On en donne ici une démonstration s'appuyant sur des idées de Rosenlicht (voir [Ro56, th. 15]). Michel Demazure a donné dans [Dem, prop. 5] un énoncé similaire pour les courbes lisses.

Lemme 2.1.3 : Soient C une courbe régulière, \widehat{C} sa complétion régulière, G un groupe algébrique lisse connexe et $\alpha : G \times C \rightarrow C$ une opération. Alors α s'étend de façon unique en une opération dans \widehat{C} . De plus, le complémentaire $Z = \widehat{C} \setminus C$, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit, est stable par G (et G opère trivialement dans Z).

Démonstration. Soit $\widehat{\alpha} : G \times \widehat{C} \rightarrow \widehat{C}$ l'application rationnelle définie par α . Son domaine de définition $U \subseteq G \times \widehat{C}$ est un ouvert contenant $G \times C$. Il suffit donc de montrer que pour $g \in G(\bar{k})$ et $x \in \widehat{C}(\bar{k})$ l'élément gx est défini, c'est-à-dire $(g, x) \in U(\bar{k})$. Comme $(\widehat{C})_{k_s}$ est la complétion régulière de C_{k_s} , on peut supposer que k est séparablement clos.

Le schéma $G \times \widehat{C}$ est normal (car G est lisse et \widehat{C} est normale, voir [EGA, IV 2, prop. 6.8.5 p.152]) et le schéma d'arrivée \widehat{C} est propre donc $(G \times \widehat{C}) \setminus U$ est de codimension au moins 2 dans $G \times \widehat{C}$. De plus le sous-schéma Z de \widehat{C} est formé d'un nombre fini de points fermés P_1, \dots, P_r dont les corps résiduels sont des extensions purement inséparables de k (car k est séparablement clos). Pour $1 \leq i \leq r$, la composante irréductible $Z_i = G \times \text{Spec } \kappa(P_i)$ de $G \times Z$ est de codimension 1 dans $G \times \widehat{C}$. Donc $U \cap Z_i$ est un ouvert non vide de Z_i , sinon on aurait $Z_i \subseteq (G \times \widehat{C}) \setminus U$ et Z_i serait de codimension au moins 2. D'après [EGA, IV 2, prop. 2.4.5 p.20], la projection $\pi_i : Z_i \rightarrow G$ est un homéomorphisme. Donc $V = \bigcap_{i=1}^r \pi_i(U \cap z_i)$ est un ouvert non vide de G tel que $V \times Z \subseteq U$.

Pour $g \in V(\bar{k})$ et $x \in Z(\bar{k})$ on a $gx \in Z(\bar{k})$. En effet, si $gx \in C(\bar{k})$ alors $g^{-1}(gx)$ est défini donc $g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = x$, ce qui est impossible car $g^{-1}(gx) \in C(\bar{k})$. Puisque V est un ouvert non vide de G , on a $G(\bar{k}) = V(\bar{k})V(\bar{k})$ (voir [Bor, prop. 1.1 p.47]). Par conséquent, pour $g \in G(\bar{k})$ et $x \in Z(\bar{k})$ l'élément gx est bien défini.

Soit $N_G(Z)$ le normalisateur de Z dans G . Sa formation commute aux extensions séparables donc on peut toujours supposer que k est séparablement clos. Tout élément $g \in G(k)$ induit un automorphisme de \widehat{C} , encore noté g , tel que l'ensemble Z soit stable. Comme le sous-schéma Z est réduit, g se restreint en un automorphisme de Z . On a donc $N_G(Z)(k) = G(k)$. Or $G(k)$ est dense dans G , donc $N_G(Z) = G$, c'est-à-dire que Z est bien stable par G . D'après le lemme 1.2.14, l'opération de G dans Z est triviale. \square

Remarque 2.1.4 : En particulier, se donner une opération fidèle de G dans C revient à se donner un morphisme de groupes algébriques $G \rightarrow \mathbf{Aut}_{\widehat{C}}$ injectif tel que l'image de G soit un sous-groupe du centralisateur $\mathbf{Aut}_{\widehat{C}, Z}$ de Z .

On déduit facilement des résultats précédents une liste des courbes homogènes possibles (qu'on peut déjà trouver dans [Pop, ch. 7, prop. 1.2 p.168] quand le corps k est algébriquement clos).

Lemme 2.1.5 : *Soit C une courbe lisse. Si C est homogène sous l'action d'un groupe algébrique lisse connexe alors C est une forme de \mathbf{P}^1 , de \mathbf{A}^1 ou de $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$, ou C est une courbe projective lisse de genre 1 (éventuellement sans point k -rationnel).*

Démonstration. Soit G un groupe algébrique lisse connexe tel que C soit homogène sous une opération de G . On peut supposer que l'opération est fidèle. On peut aussi supposer que le corps k est algébriquement clos. Soit \widehat{C} la complétion régulière de C . On a un morphisme injectif $G(k) \rightarrow \text{Aut}_k(\widehat{C})$ donc le groupe $\text{Aut}_k(\widehat{C})$ est infini, donc la courbe projective lisse \widehat{C} est de genre 0 ou 1. Si elle est de genre 0 alors on a un isomorphisme $\widehat{C} \simeq \mathbf{P}^1$ et le complémentaire $Z = \widehat{C} \setminus C$ est de cardinal 0, 1 ou 2, car le seul automorphisme de \mathbf{P}^1 qui fixe au moins trois points k -rationnels est l'identité; on a respectivement $C = \mathbf{P}^1$, $C \simeq \mathbf{A}^1$ ou $C = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. Si \widehat{C} est de genre 1 alors $C = \widehat{C}$, sinon tout point $Q \in Z(k)$ est fixé par tous les éléments de $G(k)$, ce qui est impossible car $G(k)$ est infini. \square

La réciproque est fautive : il existe des formes de \mathbf{A}^1 qui ne sont pas homogènes, comme le montre le contre-exemple suivant, mentionné sans démonstration dans [Rus].

Lemme 2.1.6 : *On suppose que le corps k est imparfait. Soit P un point de \mathbf{P}^1 tel que l'extension $\kappa(P)/k$ soit purement inséparable et de degré au moins 3. Alors $C = \mathbf{P}^1 \setminus \{P\}$ est une forme de \mathbf{A}^1 et le centralisateur $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1, P}$ de P (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit de \mathbf{P}^1) est infinitésimal.*

Démonstration. L'extension $\kappa(P)/k$ est purement inséparable donc il existe un unique point P_{k_s} de $\mathbf{P}_{k_s}^1$ au-dessus de P et on a l'égalité des degrés $[\kappa(P_{k_s}) : k_s] = [\kappa(P) : k]$. Donc on peut supposer que k est séparablement clos. De même, il existe un unique point $P_{\bar{k}}$ de $\mathbf{P}_{\bar{k}}^1$ au-dessus de P et celui-ci est \bar{k} -rationnel. Donc $C_{\bar{k}} = \mathbf{P}_{\bar{k}}^1 \setminus \{P_{\bar{k}}\} \simeq \mathbf{A}_{\bar{k}}^1$ et C est une forme de \mathbf{A}^1 .

On note $[t : u]$ des coordonnées projectives sur \mathbf{P}^1 . Soit $p \geq 2$ la caractéristique de k . Il existe $a \in k$ et $m \geq 1$ tel que P ait pour équation $t^{p^m} - a = 0$. Alors $\kappa(P)/k$ est de degré p^m . Un élément de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1, P}(\bar{k})$ est une homographie qui induit l'identité sur le sous-schéma fermé $P_{\bar{k}}$ de $\mathbf{P}_{\bar{k}}^1$. Ce dernier a pour équation $(t - a^{p^{-m}})^{p^m} = 0$. On conjugue par une homographie envoyant $[a^{p^{-m}} : 1]$ sur $[0 : 1]$. Comme $p^m \geq 3$, il suffit de montrer que si une homographie $f = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ induit l'identité sur le sous-schéma d'équation $t^3 = 0$ alors $f = \text{id}$. On a $f([0 : 1]) = [0 : 1]$ donc $\beta = 0$. On peut supposer $\delta = 1$. On note encore t l'image de t dans $\frac{k[t]}{(t^3)}$. Alors $f([t : 1]) = [\alpha t : 1 + \gamma t]$ donc f opère dans $\frac{k[t]}{(t^3)}$ par $f \cdot t = \frac{\alpha t}{1 + \gamma t} = \alpha t - \alpha \gamma t^2$. Par hypothèse l'opération est triviale, donc $\alpha = 1$ et $\gamma = 0$. Donc $f = \text{id}$. \square

On peut maintenant démontrer le cas 1 du théorème A.

Théorème 2.1.7 : *Soient C une courbe et G un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans C . La courbe C est homogène sous l'opération de G si et seulement si un des cas suivants a lieu :*

- (a) C est une conique projective lisse et $G \simeq \mathbf{Aut}_C$;
- (b) $C \simeq \mathbf{A}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ (opérant par transformations affines) ;
- (c) G est une forme de \mathbf{G}_a et C est un G -torseur ;
- (d) G est une forme de \mathbf{G}_m et C est un G -torseur ;
- (e) C est une courbe projective lisse de genre 1 et $G \simeq \mathbf{Aut}_C^\circ$.

Démonstration. Supposons que C soit homogène. On commence par supposer que le corps k est algébriquement clos. Soient \widehat{C} la complétion régulière de C et $Z = \widehat{C} \setminus C$ muni de la structure de sous-schéma fermé réduit, de sorte que d'après la remarque 2.1.4 le groupe G s'identifie à un sous-groupe du centralisateur de Z dans $\mathbf{Aut}_{\widehat{C}}^\circ$. La courbe \widehat{C} est projective lisse et, d'après le lemme 2.1.5, elle est de genre 0 ou 1.

Si elle est de genre 1 alors c'est une courbe elliptique E et elle est homogène sous $\mathbf{Aut}_E^\circ \simeq E$, donc $C = E$ et $G \simeq \mathbf{Aut}_C^\circ$. On suppose désormais que \widehat{C} est de genre 0, donc $\widehat{C} \simeq \mathbf{P}^1$. Alors G est un sous-groupe de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1} \simeq \mathbf{PGL}_2$ et Z est formé de 0, 1 ou 2 points k -rationnels. Si Z est formé de 2 points alors, quitte à conjuguer G , on peut supposer que ces deux points sont 0 et ∞ ; en particulier $C = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$. Le centralisateur de $\{0, \infty\}$ est le tore maximal standard $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_m$ de \mathbf{PGL}_2 donc $G \simeq \mathbf{G}_m$. Si Z est formé d'un seul point alors on peut supposer qu'il s'agit de ∞ , donc $C = \mathbf{A}^1$. Le centralisateur de ∞ est le sous-groupe de Borel standard $B = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$. Si G est un sous-groupe strict de B alors il est de dimension 1, donc il s'agit du radical unipotent \mathbf{G}_a de B ou d'un tore de B ; ce n'est pas un tore car Z n'est pas formé de 2 points. Enfin, si G est un sous-groupe strict de \mathbf{PGL}_2 alors il est de dimension au plus 2 donc, d'après [Bor, cor. 11.6 p.149], il est résoluble. Donc, quitte à conjuguer, G est un sous-groupe de B et il fixe le point ∞ . Par conséquent, si Z est vide alors $G = \mathbf{PGL}_2$.

La classification sur un corps quelconque en découle immédiatement, sauf dans le cas $G_{\bar{k}} \simeq \mathbf{G}_{a,\bar{k}} \rtimes \mathbf{G}_{m,\bar{k}}$ et $C \simeq \mathbf{A}_{\bar{k}}^1$. D'après le lemme 1.3.8, on a déjà $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$. Soit K/k une extension séparable telle que C possède un point K -rationnel. On a alors un isomorphisme $C_K \simeq G_K/\mathbf{G}_{m,K} \simeq \mathbf{A}_K^1$. Donc d'après la proposition 1.3.5 on a $C \simeq \mathbf{A}^1$. \square

Remarque 2.1.8 : On utilise l'expression « conique projective » comme un synonyme de « courbe projective de genre arithmétique 0 ». En effet, une telle courbe C est lisse, et le fibré anticanonique $\omega_C^{\otimes -1}$ est très ample et induit une immersion fermée $C \hookrightarrow \mathbf{P}^2$ telle que C soit donnée par une équation homogène de degré 2. Soit q la forme quadratique correspondante. Alors $\mathbf{Aut}_C \simeq \mathbf{PO}_3(q)$ et c'est une forme de \mathbf{PGL}_2 .

Le cas 2 du théorème A est une conséquence directe.

Corollaire 2.1.9 : Soient C une courbe régulière et G un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans C . La courbe C est presque homogène et non homogène sous l'opération de G si et seulement si un des cas suivants a lieu :

- (a) $C \simeq \mathbf{P}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$;
- (b) G est une forme de \mathbf{G}_a et C est la complétion régulière d'un G -torseur ;
- (c) $C \simeq \mathbf{A}^1$ ou \mathbf{P}^1 et $G \simeq \mathbf{G}_m$;
- (d) C est une conique projective lisse et G est le centralisateur d'un point séparable de degré 2.

Démonstration. D'après le lemme 1.2.6, si C est presque homogène alors elle contient un sous-schéma ouvert U qui est G -stable et qui est une courbe homogène. De plus la complétion régulière de C est la complétion régulière de U . Pour le cas (d), on utilise le lemme 1.3.4. \square

2.2 Courbes presque homogènes seminormales

On a la caractérisation suivante des courbes seminormales, qui est une conséquence d'une caractérisation donnée dans [GT, cor. 2.7] des anneaux japonais seminormaux qui satisfont la condition de Serre S_2 (un anneau noethérien réduit et de dimension de Krull 1 satisfait cette propriété).

Lemme 2.2.1 : Soient C une courbe et

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{C} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & C \end{array}$$

le carré du conducteur. La courbe

C est seminormale si et seulement si \tilde{Z} est réduit. Dans ce cas, Z est également réduit.

On dispose également du résultat suivant.

Lemme 2.2.2 : Soit C une courbe obtenue par un diagramme de pincement

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{C} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & C \end{array}$$

où \tilde{C} est une courbe régulière et \tilde{Z} est un sous-schéma fini réduit. Alors C est seminormale.

Démonstration. Le morphisme ν induit un isomorphisme de $\tilde{C} \setminus \tilde{Z}$ sur $C \setminus Z$ donc il suffit de montrer que pour tout point P de Z , l'anneau local $\mathcal{O}_{C,P}$ est seminormal. Puisque λ est schématiquement dominant et \tilde{Z} est réduit, Z est un schéma fini réduit. Soit U un ouvert affine de C contenant P mais aucun autre point de Z . Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} \lambda^{-1}(\mathrm{Spec} \kappa(P)) & \xrightarrow{j} & \nu^{-1}(U) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathrm{Spec} \kappa(P) & \xrightarrow[i]{} & U \end{array} \quad \text{est un diagramme de pincement, donc on peut supposer}$$

que C est affine et que $Z = \mathrm{Spec} \kappa(P)$.

On écrit $C = \mathrm{Spec} A$ et $\tilde{C} = \mathrm{Spec} \bar{A}$ où \bar{A} est la clôture intégrale de A . Le point P correspond à un idéal maximal \mathfrak{m} de A et les points de \tilde{Z} aux idéaux $\bar{\mathfrak{m}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{m}}_r$ de \bar{A} au-dessus de \mathfrak{m} . Alors $Z = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m})$ et $\tilde{Z} = \coprod_{i=1}^r \mathrm{Spec} \bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}_i = \mathrm{Spec} \bar{A}/(\bar{\mathfrak{m}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{m}}_r)$. D'après [Fer, lemme 1.3], on a $\bar{\mathfrak{m}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{m}}_r = \bar{\mathfrak{m}}$. Autrement dit, l'idéal maximal $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ de $\mathcal{O}_{C,P} = A_{\mathfrak{m}}$ est le radical de Jacobson de la clôture intégrale $\overline{\mathcal{O}_{C,P}} = \bar{A}_{\mathfrak{m}}$. Or les seuls idéaux premiers de $\mathcal{O}_{C,P}$ sont (0) et $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ car $\mathcal{O}_{C,P}$ est un anneau local intègre de dimension de Krull 1. Donc, d'après la définition de $\mathcal{O}_{C,P}^+$, l'anneau $\mathcal{O}_{C,P}$ est bien seminormal. \square

Remarque 2.2.3 : Avec les notations du lemme 2.2.2, si G est un groupe algébrique lisse connexe qui opère dans \tilde{C} et si \tilde{Z} est G -stable alors, comme \tilde{Z} est réduit, G opère trivialement dans \tilde{Z} . Donc d'après le lemme 1.5.7, il existe une unique opération de G dans C telle que G opère trivialement dans Z et que ν soit équivariant.

Le fait d'être une courbe seminormale presque homogène est une propriété qui descend pas extensions séparables. Pour le voir, on a d'abord besoin du cas particulier suivant de [CGP, lemma C.4.1 p.649].

Lemme 2.2.4 : *Soit G un groupe algébrique. Alors G possède un plus grand sous-groupe lisse G^{sm} . De plus pour toute extension séparable K/k , on a $G^{sm}(K) = G(K)$ et $(G_K)^{sm} = (G^{sm})_K$.*

Proposition 2.2.5 : *Soient C une courbe seminormale et K/k une extension séparable. Si C_K est presque homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe alors C aussi.*

Démonstration. Soit G un groupe algébrique lisse connexe sur K tel que C_K soit presque homogène sous une opération de G . On peut supposer que cette opération est fidèle. Soient

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{C} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow[i]{} & C \end{array} \quad \text{le carré du conducteur, } \hat{C} \text{ la complétion régulière de } \tilde{C} \text{ et } Z' = (\hat{C} \setminus \tilde{C}) \sqcup \tilde{Z}$$

muni de la structure de sous-schéma fermé réduit de \hat{C} . D'après le lemme 1.5.1, le dia-

$$\text{gramme} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{Z}_K & \longrightarrow & \tilde{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_K & \longrightarrow & C_K \end{array} \quad \text{est le carré du conducteur de } C_K. \text{ De plus } \hat{C}_K \text{ est la complétion}$$

régulière de \tilde{C}_K et $Z'_K = (\hat{C}_K \setminus \tilde{C}_K) \sqcup \tilde{Z}_K$ est réduit. D'après les lemmes 2.1.3 et 1.5.4,

l'opération de G dans C_K se relève en une opération dans \widehat{C}_K telle que le sous-schéma Z'_K soit fixé. Autrement dit, G s'identifie à un sous-groupe du centralisateur $\mathbf{Aut}_{\widehat{C}_K, Z'_K}$ de Z'_K dans $\mathbf{Aut}_{\widehat{C}_K}$. Puisque G est lisse, c'est même un sous-groupe de $(\mathbf{Aut}_{\widehat{C}_K, Z'_K})^{\text{sm}}$. Par conséquent, la courbe \widetilde{C}_K est stable et presque homogène sous l'opération de $(\mathbf{Aut}_{\widehat{C}_K, Z'_K})^{\text{sm}}$. On a $(\mathbf{Aut}_{\widehat{C}_K, Z'_K})^{\text{sm}} = ((\mathbf{Aut}_{\widehat{C}, Z'})^{\text{sm}})_K$ donc \widetilde{C} est stable et presque homogène sous l'opération de $(\mathbf{Aut}_{\widehat{C}, Z'})^{\text{sm}}$. Par définition, ce groupe opère trivialement dans \widetilde{Z} . Donc, d'après le lemme 1.5.7, l'opération dans \widetilde{C} descend en une opération dans C et C est presque homogène. Enfin, d'après le lemme 1.2.10, la courbe C est presque homogène sous l'opération du groupe lisse connexe $((\mathbf{Aut}_{\widehat{C}, Z'})^{\text{sm}})^\circ$. \square

Remarque 2.2.6 :

1. Ce résultat ne s'étend pas aux extensions inséparables, même pour les courbes lisses. En effet, d'après le lemme 2.1.6, si le corps k est imparfait alors il existe une courbe C et une extension purement inséparable K/k telles que $C_K \simeq \mathbf{A}_K^1$ et que toute opération d'un groupe algébrique lisse connexe dans C soit triviale.

2. En gardant les notations de la démonstration, le plus grand groupe lisse connexe opérant fidèlement dans une courbe seminormale C est $((\mathbf{Aut}_{\widehat{C}, Z'})^{\text{sm}})^\circ$.

On en déduit la classification des courbes seminormales presque homogènes, qui est le cas 3 du théorème A.

Théorème 2.2.7 : *Soient C une courbe singulière seminormale et G un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans C . La courbe C est presque homogène sous l'opération de G si et seulement si un des cas suivants a lieu :*

- (a) G est une forme non triviale de \mathbf{G}_a et C est obtenue en pinçant le point à l'infini \widetilde{P} de la complétion régulière d'un G -torseur sur un point P dont le corps résiduel $\kappa(P)$ est une sous-extension stricte de $\kappa(\widetilde{P})/k$;
- (b) C est obtenue en pinçant deux points k -rationnels de \mathbf{P}^1 sur un même point k -rationnel et $G \simeq \mathbf{G}_m$;
- (c) C est obtenue en pinçant un point \widetilde{P} séparable de degré 2 d'une conique projective lisse \widetilde{C} sur un point k -rationnel et G est le centralisateur de \widetilde{P} dans $\mathbf{Aut}_{\widetilde{C}}$.

Démonstration. Soit $\nu : \widetilde{C} \rightarrow C$ la normalisation. D'après le lemme 1.5.8 et la remarque 2.2.3, la courbe C est presque homogène si et seulement si \widetilde{C} l'est. De plus C est obtenue en pinçant un ensemble \widetilde{Z} de points fixes de \widetilde{C} , muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. Les différents couples (\widetilde{C}, G) possibles sont donnés par le cas 2 du théorème A.

On ne peut pas avoir $\widetilde{C} \simeq \mathbf{P}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ ou \mathbf{G}_a car il faudrait pincer le point k -rationnel ∞ . On ne peut le pincer que sur $Z = \text{Spec } k$, mais alors ν serait un isomorphisme et la courbe C serait régulière. De même, on ne peut pas avoir $\widetilde{C} \simeq \mathbf{A}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_m$.

Si G est une forme non triviale de \mathbf{G}_a et \widetilde{C} est la complétion régulière d'un G -torseur U alors, d'après la proposition 1.3.5, le complémentaire de U est formé d'un unique point \widetilde{P} . Il faut donc pincer $\widetilde{Z} = \text{Spec } \kappa(\widetilde{P})$ sur $Z = \text{Spec } K$ où K est une sous-extension de $\kappa(\widetilde{P})/k$. Comme précédemment, on n'a pas $K = \kappa(\widetilde{P})$ sinon ν serait un isomorphisme.

De même, si \widetilde{C} est une conique projective lisse et G est le centralisateur d'un point séparable \widetilde{P} de degré 2 alors il faut pincer $\widetilde{Z} = \text{Spec } \kappa(\widetilde{P})$ sur $Z = \text{Spec } K$, et on a $K \neq \kappa(\widetilde{P})$ donc $K = k$.

Enfin, si $\tilde{C} \simeq \mathbf{P}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_m$ alors il faut pincer $0, \infty$ ou $\{0, \infty\} = \text{Spec } k \sqcup \text{Spec } k$. Comme précédemment, on ne peut pas ne pincer que 0 ou ∞ . Donc $\tilde{Z} = \{0, \infty\}$. Alors Z est un schéma réduit formé de 1 ou 2 points. Il ne peut pas être formé de 2 points car ceux-ci seraient k -rationnels et, encore une fois, ν serait un isomorphisme. Donc Z est formé d'un seul point, qui doit être k -rationnel. \square

Remarque 2.2.8 : Soient G une forme non triviale de \mathbf{G}_a , \tilde{C} la complétion régulière d'un G -torseur, \tilde{P} le point à l'infini, K_1 et K_2 deux sous-extensions strictes de $\kappa(\tilde{P})/k$ et

$$C_1 \text{ et } C_2 \text{ les courbes obtenues par les diagrammes de pincement}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \kappa(\tilde{P}) & \xrightarrow{j} & \tilde{C} \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \nu_1 \\ \text{Spec } K_1 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \end{array}$$

$$\text{et } \begin{array}{ccc} \text{Spec } \kappa(\tilde{P}) & \xrightarrow{j} & \tilde{C} \\ \lambda_2 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \\ \text{Spec } K_2 & \xrightarrow{i_2} & C_2 \end{array} . \text{ Ces diagrammes sont les carrés du conducteur. S'il existe un}$$

isomorphisme $\psi : C_1 \rightarrow C_2$ alors, par propriété universelle de la normalisation, celui-ci se relève en un automorphisme $\tilde{\varphi}$ de \tilde{C} . Puisque $\text{Spec } K_1$ et $\text{Spec } K_2$ sont les uniques points singuliers de C_1 et C_2 , $\tilde{\psi}$ induit un k -automorphisme de $\kappa(\tilde{P})$ envoyant K_1 sur K_2 . Or l'extension $\kappa(\tilde{P})/k$ est purement inséparable, donc l'unique k -automorphisme de $\kappa(\tilde{P})$ est l'identité. On a donc $K_1 = K_2$. Par conséquent, des sous-extensions distinctes donnent des courbes distinctes.

La famille des courbes seminormales qui sont presque homogènes sous l'opération d'une forme non triviale de \mathbf{G}_a peut être très grande, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.2.9 : On pose $p = 2$ et $k = \mathbf{F}_2(a, b)$, et on considère la forme G de \mathbf{G}_a donnée par l'équation $y^4 = x + ax^2 + b^2x^4$ (voir la proposition 1.3.5). On admet provisoirement que le corps résiduel du point à l'infini de G est $\mathbf{F}_2(a^{1/2}, b^{1/2})$. Pour $c \in k$, on dispose de la sous-extension $k(a^{1/2} + cb^{1/2})$ de $\mathbf{F}_2(a^{1/2}, b^{1/2})/k$, et différentes valeurs de c donnent des sous-extensions deux à deux distinctes. On obtient ainsi une famille paramétrée par k de courbes presque homogènes sous l'opération de G et qui ont la même normalisée.

Montrons maintenant l'affirmation sur le corps résiduel. L'adhérence schématique \overline{G} de G dans \mathbf{P}^2 est donnée par l'équation homogène $y^4 = xz^3 + ax^2z^2 + b^2x^4$ et la complétion régulière de G est la normalisation de \overline{G} . Dans la carte $(x = 1)$, l'équation devient $y^4 = z^3 + az^2 + b^2$. Posons

$$A = \frac{k[y, z]}{(y^4 - z^3 - az^2 - b^2)} \text{ et } B = \frac{k[y, w]}{(y^2 - w^3 - aw - b)}.$$

Montrons que B est la clôture intégrale de A , de sorte que dans la carte la normalisation soit donnée par le morphisme $A \rightarrow B$. Le morphisme $\varphi : k[y, z] \rightarrow B$ déterminé par $\varphi(y) = y$ et $\varphi(z) = w^2 - a$ a pour noyau $(y^4 - z^3 - az^2 - b^2)$. En effet, on a déjà $\varphi(y^4 - z^3 - az^2 - b^2) = (y^2 - w^3 - aw - b)^2 = 0$. Tout élément de $k[y, z]$ s'écrit sous la forme

$$P(y, z) = Q(y, z)(y^4 - z^3 - az^2 - b^2) + y^3P_3(z) + y^2P_2(z) + yP_1(z) + P_0(z)$$

où Q, P_3, P_2, P_1 et P_0 sont des polynômes, et alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= y^3 P_3(w^2 - a) + y^2 P_2(w^2 - a) + y P_1(w^2 - a) + P_0(w^2 - a) \\ &= y \left[(w^3 + aw + b)P_3(w^2 - a) + P_1(w^2 - a) \right] + \left[(w^3 + aw + b)P_2(w^2 - a) + P_0(w^2 - a) \right].\end{aligned}$$

Si $\varphi(P) = 0$ alors $(w^3 + aw + b)P_3(w^2 - a) + P_1(w^2 - a) = 0$ et $(w^3 + aw + b)P_2(w^2 - a) + P_0(w^2 - a) = 0$ dans $k[w]$, or $(w^3 + aw + b)P_3(w^2 - a)$ et $(w^3 + aw + b)P_2(w^2 - a)$ sont des polynômes impairs en w alors que $P_1(w^2 - a)$ et $P_0(w^2 - a)$ sont des polynômes pairs, donc tous les P_i sont nuls et P est bien dans l'idéal $(y^4 - z^3 - az^2 - b^2)$. Ainsi φ induit-il un morphisme injectif $A \rightarrow B$. Ce morphisme est fini. De plus l'anneau B est intègre et a même corps des fractions que A car dans B on a $z = w^2 - a$ et $y^2 - w^3 - aw - b = 0$ donc $w = \frac{y^2 - b}{z}$. D'après le critère jacobien, le seul point de $\text{Spec } B$ qui n'est pas lisse est donné par l'idéal $\mathfrak{m} = (w^2 - a)$ et il s'agit du point à l'infini de G ; ce point est toutefois régulier car l'idéal \mathfrak{m} est principal. Par conséquent l'anneau B est intégralement clos, donc c'est bien la clôture intégrale de A . Enfin, le corps résiduel du point à l'infini est $\frac{k[y, w]/(y^2 - w^3 - aw - b)}{(w^2 - a)} \simeq \mathbf{F}_2(a^{1/2}, b^{1/2})$.

2.3 Courbes presque homogènes arbitraires

Popov donne dans [Pop, ch. 7] une classification des courbes presque homogènes sur un corps algébriquement clos, en utilisant le langage de Serre ([Ser, ch. IV]) pour décrire une courbe à partir de sa normalisée. On étend ce résultat à un corps arbitraire (sauf pour les courbes presque homogènes sous l'opération $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ ou une forme de \mathbf{G}_a , pour lesquelles on suppose en outre que la caractéristique est nulle), en utilisant le langage des pincements.

2.3.1 Courbes presque homogènes sous l'opération de \mathbf{G}_a en caractéristique nulle

On note $[t : u]$ des coordonnées projectives sur \mathbf{P}_k^1 .

Définition 2.3.1 : Pour $n \geq 0$, on note $\mathbf{P}_{k,n}^1$ la courbe définie par le diagramme de pincement

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \frac{k[u]}{(u^{n+1})} & \xrightarrow{j} & \mathbf{P}_k^1 \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{i} & \mathbf{P}_{k,n}^1 \end{array}$$

où $\text{Spec } \frac{k[u]}{(u^{n+1})}$ est le n -ème voisinage infinitésimal du point ∞ .

En particulier on a $\mathbf{P}_{k,0}^1 = \mathbf{P}_k^1$. D'après le lemme 1.5.7, les opérations de \mathbf{G}_a et $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ dans \mathbf{P}_k^1 descendent en des opérations (fidèles) dans $\mathbf{P}_{k,n}^1$.

Théorème 2.3.2 : *On suppose que le corps k est de caractéristique nulle. Soit C une courbe. Alors \mathbf{G}_a opère fidèlement dans C (et C est presque homogène) si et seulement si $C \simeq \mathbf{A}_k^1$ ou s'il existe $n \geq 0$ tel que $C \simeq \mathbf{P}_{k,n}^1$ (pour l'opération naturelle).*

Démonstration. On adapte la démonstration de Popov de [Pop, ch. 7, th. 1.1 p.171].

On suppose que l'on a une opération fidèle de \mathbf{G}_a . Soit
$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \tilde{C} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \xrightarrow{i} & C \end{array}$$
 le carré du

conducteur. Les \mathbf{G}_a -torseurs sont classifiés par l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\text{Gal}(k_s/k), k_s)$ donc, d'après la version additive du théorème 90 de Hilbert, tout \mathbf{G}_a -torseur est trivial. Donc d'après le théorème A, on a $\tilde{C} = \mathbf{A}_k^1$ ou \mathbf{P}_k^1 . Dans le premier cas, \tilde{C} est homogène donc C aussi et $C = \mathbf{A}_k^1$. On suppose désormais $\tilde{C} = \mathbf{P}_k^1$. D'après le lemme 1.5.8, la courbe C est obtenue en pinçant un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_k^1 supporté par le point ∞ . Donc \tilde{Z} est de la forme $\text{Spec } \frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ pour un certain entier $N \geq 0$. Alors

$A = \mathcal{O}(Z)$ est une sous-algèbre de $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ qui est invariante sous l'opération de \mathbf{G}_a .

Un élément $a \in \mathbf{G}_a(k)$ opère dans \mathbf{P}_k^1 comme la matrice $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire que pour un point de coordonnées $[1 : u]$ on a $a \cdot [1 : u] = [1 + au : u] = \left[1 : \frac{u}{1 + au}\right]$. On note encore u l'image de u dans $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$. Dans $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$, l'élément $1 + au$ est inversible et on a $\frac{u}{1 + au} = u - au^2 + \dots + (-1)^{N-1} a^{N-1} u^N$. De plus, pour $1 \leq i \leq N$, on a $a \cdot u^i = (a \cdot u)^i$. Ainsi, dans la base $(1, u, \dots, u^N)$, la matrice de l'endomorphisme de $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ induit par a est-elle triangulaire et de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & -a & \ddots & & & \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & * & \dots & * & -(N-1)a & 1 \end{pmatrix}.$$

Les sous-espaces k et $V = \text{Vect}(u, \dots, u^N)$ de $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ sont \mathbf{G}_a -stables. On peut donc écrire $A = k \oplus (A \cap V)$. Remarquons que $\mathfrak{m} = A \cap V$ est l'unique idéal maximal de A , et que A est stable si et seulement si \mathfrak{m} l'est. L'image de \mathbf{G}_a dans $\mathbf{GL}(V)$ est un sous-groupe unipotent donc, d'après le théorème de Lie-Kolchin, tout sous-espace stable non trivial de V contient une droite stable (voir [DG, IV, §2, prop 2.5 p.487]). Mais, puisque k est de caractéristique nulle, on constate en regardant la matrice précédente que la seule droite stable dans V est $\text{Vect}(u^N)$ (en restreignant la matrice à V , tous les coefficients de la première sous-diagonale sont non nuls). On complète u^N en une base (e_1, \dots, e_d, u^N) de \mathfrak{m} . Quitte à échelonner, on peut supposer qu'il existe des entiers n_1, \dots, n_{d+1} et des scalaires $b_{i,j} \in k$ tels que

$$1 \leq n_1 < \dots < n_d < n_{d+1} = N$$

et que, pour $1 \leq i \leq d$, on ait

$$e_i = u^{n_i} + b_{i,n_i+1}u^{n_i+1} + \cdots + b_{i,N-1}u^{N-1} + b_{i,N}u^N.$$

Alors dans la base $(1, u, \dots, u^N)$ de $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$, les n_i premières coordonnées de $a \cdot e_i$ sont nulles, la $(n_i + 1)$ -ème coordonnée vaut 1 et la $(n_i + 2)$ -ème vaut $-n_i a + b_{i,n_i+1}$ (qui est donc différente de b_{i,n_i+1} si $a \neq 0$). Par conséquent, pour que les images des e_i soient bien dans \mathfrak{m} , il faut avoir $n_{i+1} = n_i + 1$. On a donc $\mathfrak{m} = \text{Vect}(u^{n_1}, u^{n_1+1}, \dots, u^N)$ et $A = \frac{k[u^{n_1}, u^{n_1+1}, \dots, u^N, u^{N+1}]}{(u^{N+1})}$, qui réciproquement est bien une sous-algèbre stable.

L'idéal (u^{n_1}) de $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ est aussi un idéal de $\frac{k[u^{n_1}, u^{n_1+1}, \dots, u^{N+1}]}{(u^{N+1})}$. Donc d'après [Fer, lemme 1.3] le carré d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \frac{k[u^{n_1}, u^{n_1+1}, \dots, u^{N+1}]}{(u^{N+1})} & \hookrightarrow & \frac{k[u]}{(u^{N+1})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k \simeq \frac{k[u^{n_1}, u^{n_1+1}, \dots, u^{N+1}]/(u^{N+1})}{(u^{n_1})} & \hookrightarrow & \frac{k[u]/(u^{N+1})}{(u^{n_1})} \simeq \frac{k[u]}{(u^{n_1})} \end{array}$$

est cartésien. De plus les morphismes de ce carré sont \mathbf{G}_a -équivariants. Donc le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \frac{k[u]}{(u^{n_1})} & \longrightarrow & \tilde{Z} \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \text{Spec } k & \longrightarrow & Z \end{array} \text{ est un diagramme de pincement dont les morphismes sont } \mathbf{G}_a\text{-}$$

équivariants. On obtient par concaténation un carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \frac{k[u]}{(u^{n_1})} & \xrightarrow{j'} & \mathbf{P}_k^1 \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \nu \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{i'} & C \end{array} \text{ qui un dia-}$$

gramme de pincement dont les morphismes sont \mathbf{G}_a -équivariants, donc $C \simeq \mathbf{P}_{k,n_1-1}^1$. \square

Remarque 2.3.3 :

1. Contrairement à ce qui peut se passer pour les formes non triviales de \mathbf{G}_a (voir l'exemple 2.2.9), si k est de caractéristique nulle alors les courbes qui sont presque homogènes sous une opération de \mathbf{G}_a forment une famille dénombrable.

2. La démonstration du théorème 2.3.2 utilise de façon cruciale que k est de caractéristique nulle, et elle ne semble pas pouvoir s'adapter immédiatement à la caractéristique positive car cela conduit à un problème de représentations de \mathbf{G}_a , qui sont mal comprises. De surcroît, l'exemple 2.2.9 suggère que pour les formes de \mathbf{G}_a la classification doit être beaucoup plus compliquée, même dans le cas seminormal.

Corollaire 2.3.4 : *On suppose que le corps k est de caractéristique nulle. Soit C une courbe. Alors $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$ opère fidèlement dans C (et C est presque homogène) si et seulement si $C \simeq \mathbf{A}_k^1$ ou s'il existe $n \geq 0$ tel que $C \simeq \mathbf{P}_{k,n}^1$ (pour l'opération naturelle).*

Démonstration. On garde les notations précédentes. D'après le théorème A, si on a une opération fidèle alors $\tilde{C} = \mathbf{A}_k^1$ ou \mathbf{P}_k^1 (pour l'opération naturelle). Les sous-schémas \tilde{Z} et Z sont stables sous l'opération de $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$ donc ils le sont aussi sous l'opération du sous-groupe \mathbf{G}_a . Donc C est une des courbes données par le théorème 2.3.2, qui réciproquement conviennent. \square

2.3.2 Courbes presque homogènes sous l'opération d'une forme de \mathbf{G}_m

On commence par classifier les courbes presque homogènes sous l'opération de \mathbf{G}_m . On utilise ensuite le lien entre les formes de \mathbf{G}_m et les coniques (voir le lemme 1.3.4) pour en déduire la classification des courbes presque homogènes sous l'opération d'une forme de \mathbf{G}_m .

On note encore $[t : u]$ des coordonnées projectives sur \mathbf{P}_k^1 . Si \mathfrak{z} est un sous-monoïde de $(\mathbf{N}, +)$ contenant 0 et tous les entiers à partir d'un certain rang alors il existe un unique entier $m \geq 0$ et un unique uplet $\underline{c} = (c_0, \dots, c_p)$ tels que $0 = c_0 < \dots < c_p < m$ et $\mathfrak{z} = \{c_0, \dots, c_p\} \cup \{r \in \mathbf{N} \mid r \geq m + 1\}$ (avec la convention $\underline{c} = (0)$ si $m = 0$). Le sous-monoïde \mathfrak{z} est déterminé par m et \underline{c} , et on le note $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$.

Définition 2.3.5 : *Pour tous sous-monoïdes $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ et $\mathfrak{z}_n(\underline{d})$ de $(\mathbf{N}, +)$, on note respectivement $\mathbf{A}_{k,m}^1(\underline{c})$, $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})$ et $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})'$ les courbes définies par les diagrammes de pincement*

$$\begin{array}{ccc}
 Z_m & \longrightarrow & \mathbf{A}_k^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z_m(\underline{c}) & \longrightarrow & \mathbf{A}_{k,m}^1(\underline{c}) \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{Spec } k \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{Spec } k
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Z_m \sqcup Z_n & \longrightarrow & \mathbf{P}_k^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z_m(\underline{c}) \sqcup Z_n(\underline{d}) & \longrightarrow & \mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d}) \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{Spec } k \sqcup \text{Spec } k \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{Spec } k
 \end{array}$$

où $Z_m = \text{Spec } \frac{k[t]}{(t^{m+1})}$ et $Z_n = \text{Spec } \frac{k[u]}{(u^{n+1})}$ sont les m -ème et n -ème voisinages infinitésimaux des points 0 et ∞ , $Z_m(\underline{c}) = \text{Spec } \frac{k[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}]}{(t^{m+1})}$, $Z_n(\underline{d}) = \text{Spec } \frac{k[u^{d_0}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}]}{(u^{n+1})}$, et $\text{Spec } k \sqcup \text{Spec } k$ est le sous-schéma réduit de $Z_m(\underline{c}) \sqcup Z_n(\underline{d})$.

En particulier on a $\mathbf{A}_k^1 = \mathbf{A}_{k,0}^1(0)$ et $\mathbf{P}_k^1 = \mathbf{P}_{k,0,0}^1(0,0)$. D'après le lemme 1.5.7, l'opération de \mathbf{G}_m dans \mathbf{P}_k^1 descend en une opération (fidèle) dans $\mathbf{A}_{k,m}^1(\underline{c})$ et $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})$.

Théorème 2.3.6 : *Soit C une courbe. Alors \mathbf{G}_m opère fidèlement dans C (et C est presque homogène) si et seulement si $C \simeq \mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$ ou s'il existe des sous-monoïdes $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$*

et $\mathfrak{z}_n(\underline{d})$ de $(\mathbf{N}, +)$ tels que C soit isomorphe à $\mathbf{A}_{k,m}^1(\underline{c})$, $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})$ ou $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})'$ (pour l'opération naturelle).

Démonstration. Les arguments sont essentiellement les mêmes que dans la démonstration de Popov de [Pop, ch. 7, th. 1.2 p.171] pour $\mathbf{A}_{k,m}^1(\underline{c})$ et $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})$. Pour $\mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})'$, les arguments diffèrent de ceux de [Pop, ch. 7, th. 1.3 p.175]; la classification en termes de carrés du conducteur s'obtient assez rapidement et il reste à la fin à simplifier les diagrammes, comme dans la démonstration du théorème 2.3.2.

$$\text{Soit } \begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \longrightarrow & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & C \end{array} \text{ le carré du conducteur. À nouveau, on a } \tilde{C} = \mathbf{A}_k^1 \text{ ou } \mathbf{P}_k^1.$$

Cas 1. On suppose d'abord $\tilde{C} = \mathbf{A}_k^1$. Le sous-schéma fermé \tilde{Z} de \mathbf{A}_k^1 est supporté par le point 0 donc il est de la forme $\text{Spec } \frac{k[t]}{(t^{M+1})}$ pour un certain entier $M \geq 0$. Alors $A = \mathcal{O}(Z)$

est une sous-algèbre de $\frac{k[t]}{(t^{M+1})}$ qui est invariante sous l'opération de \mathbf{G}_m . On note encore t l'image de t dans $\frac{k[t]}{(t^{M+1})}$. Pour $a \in \mathbf{G}_m(k_s)$ et $0 \leq i \leq M$, on a $a \cdot t^i = a^i t^i$ donc t^i est un

vecteur propre de poids i . Donc le k_s -espace vectoriel $\frac{k_s[t]}{(t^{M+1})}$ est somme directe de droites propres pour des poids deux à deux distincts. Par conséquent le sous-espace $A \otimes_k k_s$ de $\frac{k_s[t]}{(t^{M+1})}$ est engendré par certains t^i . Comme c'est même une sous-algèbre, s'il contient t^i et t^j alors il contient aussi t^{i+j} . Ainsi existe-t-il un sous-monoïde $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ de $(\mathbf{N}, +)$ tel que

$A \otimes_k k_s = \frac{k_s[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots]}{(t^{M+1})}$. La descente galoisienne pour les sous-espaces vectoriels donne $A = \frac{k[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots]}{(t^{M+1})}$, qui réciproquement est bien une sous-algèbre stable

de $\frac{k[t]}{(t^{M+1})}$. Enfin, comme dans la démonstration du théorème 2.3.2, on peut remplacer $\frac{k[t]}{(t^{M+1})}$ et $\frac{k[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots]}{(t^{M+1})}$ par $\frac{k[t]}{(t^{m+1})}$ et $\frac{k[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}]}{(t^{m+1})}$, donc $C \simeq \mathbf{A}_{k,m}^1(\underline{c})$.

Cas 2. On suppose maintenant $\tilde{C} = \mathbf{P}_k^1$. Le sous-schéma fermé \tilde{Z} de \mathbf{P}_k^1 est supporté par $\{0, \infty\}$ donc il est de la forme $\tilde{Z} = Z_M \sqcup Z_N$ pour certains entiers $M \geq 0$ et $N \geq 0$. De plus Z est supporté par un ou deux points k -rationnels. On commet ici un léger abus : le sous-schéma \tilde{Z} pourrait n'être supporté que par un seul point mais alors on remplace le carré du conducteur par un diagramme de pincement en ajoutant un point k -rationnel à \tilde{Z} et à Z , et en pinçant celui de \tilde{Z} sur celui de Z (ce qui ne change pas la courbe).

Si Z est supporté par deux points k -rationnels alors il existe des sous-algèbres \mathbf{G}_m -invariantes A et B de $\frac{k[t]}{(t^{M+1})}$ et $\frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ telles que $Z = \text{Spec } A \sqcup \text{Spec } B$. Les mêmes arguments que précédemment donnent un isomorphisme $C \simeq \mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d})$.

On suppose désormais que Z est supporté par un seul point. Il existe alors une sous-algèbre \mathbf{G}_m -invariante A de $\frac{k[t]}{(t^{M+1})} \times \frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ telle que $Z = \text{Spec } A$. Puisque $(t^i, 0)$ et $(0, u^j)$ sont des vecteurs propres de $\frac{k_s[t]}{(t^{M+1})} \times \frac{k_s[u]}{(u^{N+1})}$ de poids respectifs i et $-j$, le sous-

espace $A \otimes_k k_s$ de $\frac{k_s[t]}{(t^{M+1})} \times \frac{k_s[u]}{(u^{N+1})}$ est engendré par certains $(t^i, 0)$ et $(0, u^j)$ où $i \geq 1$ et $j \geq 1$ ainsi que par un sous-espace de $k_s \times k_s$ contenant $k_s \cdot (1, 1)$ (qui est donc $k_s \cdot (1, 1)$ ou $k_s \times k_s$ tout entier). À nouveau, par descente galoisienne il existe des sous-monoïdes $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ et $\mathfrak{z}_n(\underline{d})$ de $(\mathbf{N}, +)$ tels que

$$\frac{\text{Vect}(t^{c_1}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots)}{(t^{M+1})} \times \frac{\text{Vect}(u^{d_1}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}, \dots)}{(u^{N+1})} \oplus k \cdot (1, 1)$$

ou $\frac{k[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots]}{(t^{M+1})} \times \frac{k[u^{d_0}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}, \dots]}{(u^{N+1})}$.

Puisque A possède un unique idéal maximal (correspondant au point supportant Z), on a nécessairement

$$A = \frac{\text{Vect}(t^{c_1}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots)}{(t^{M+1})} \times \frac{\text{Vect}(u^{d_1}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}, \dots)}{(u^{N+1})} \oplus k \cdot (1, 1).$$

Comme précédemment, on peut remplacer $\frac{k[t]}{(t^{M+1})} \times \frac{k[u]}{(u^{N+1})}$ et A par $\frac{k[t]}{(t^{m+1})} \times \frac{k[u]}{(u^{n+1})}$ et

$$A' = \frac{\text{Vect}(t^{c_1}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots)}{(t^{m+1})} \times \frac{\text{Vect}(u^{d_1}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}, \dots)}{(u^{n+1})} \oplus k \cdot (1, 1).$$

On a alors un diagramme de pincement
$$\begin{array}{ccc} Z_m \sqcup Z_n & \longrightarrow & \mathbf{P}_k^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A' & \longrightarrow & C \end{array}$$
. Soit C' la courbe définie

par le diagramme de pincement
$$\begin{array}{ccc} Z_m(\underline{c}) \sqcup Z_n(\underline{d}) & \longrightarrow & \mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A' & \longrightarrow & C' \end{array}$$
. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z_m \sqcup Z_n & \longrightarrow & \mathbf{P}_k^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_m(\underline{c}) \sqcup Z_n(\underline{d}) & \longrightarrow & \mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A' & \longrightarrow & C' \end{array}$$
 est commutatif et les deux carrés sont cocartésiens,

donc le grand carré est cocartésien. Par unicité de la courbe obtenue par pincement, on en déduit $C \simeq C'$. Enfin, d'après [Fer, lemme 1.3], le carré d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A' & \hookrightarrow & \frac{k[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}]}{(t^{m+1})} \times \frac{k[u^{d_0}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}]}{(u^{n+1})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \hookrightarrow & k \times k \end{array}$$

est cartésien, et les morphismes de ce carré sont \mathbf{G}_m -invariants. On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k \sqcup \text{Spec } k & \longrightarrow & \mathbf{P}_{k,m,n}^1(\underline{c}, \underline{d}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k & \longrightarrow & C \end{array}$$

de pincement □

Soit G une forme non triviale de \mathbf{G}_m . Soient \tilde{C} une conique projective lisse et \tilde{P} un point séparable de degré 2 sur \tilde{C} tels que G soit le centralisateur de \tilde{P} dans $\mathbf{Aut}_{\tilde{C}}$ (voir le lemme 1.3.4). Soient $K = \kappa(\tilde{P})$ et $\Gamma = \text{Gal}(K/k) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Soit $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ un sous-monoïde de $(\mathbf{N}, +)$. Soit \tilde{Y} le m -ème voisinage infinitésimal de \tilde{P} , qui est un sous-schéma fermé G -stable de \tilde{C} . On a un isomorphisme $\tilde{C}_K \simeq \mathbf{P}_K^1$ tel que \tilde{Y}_K soit le m -ème voisinage infinitésimal de $\{0, \infty\}$, c'est-à-dire qu'avec les notations précédentes on a $\tilde{Y}_K = (Z_m)_K \sqcup (Z_m)_K$. On pose $Y' = (Z_m(\underline{c}))_K \sqcup (Z_m(\underline{c}))_K$. L'opération de Γ dans \mathbf{P}_K^1 échange les deux composantes de (\tilde{Y}_K) ainsi que les deux composantes de Y' , et le morphisme naturel $\lambda' : (\tilde{Y})_K \rightarrow Y'$ est Γ -équivariant. Par descente galoisienne, il existe une unique sous-algèbre A de $\mathcal{O}(\tilde{Y})$ telle que le schéma $Y = \text{Spec } A$ satisfasse $Y_K = Y'$ et que λ' soit le morphisme déduit du morphisme naturel $\lambda : \tilde{Y} \rightarrow Y$ par extension des scalaires à K .

Définition 2.3.7 : On note $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})$ et $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})'$ les courbes définies par les diagrammes de pincement

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & \tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k & \longrightarrow & \tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})' \end{array} .$$

Après extension des scalaires à K on a encore un diagramme de pincement, donc par unicité des courbes obtenues on a $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})_K \simeq \mathbf{P}_{K,m,m}^1(\underline{c}, \underline{c})$ et $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})'_K \simeq \mathbf{P}_{K,m,m}^1(\underline{c}, \underline{c})'$. De plus on a $G_K \simeq \mathbf{G}_{m,K}$ et l'opération de $\mathbf{G}_{m,K}$ dans Y' est Γ -équivariante, donc on a une opération de G dans Y telle que le morphisme λ soit équivariant. Encore une fois d'après le lemme 1.5.7, l'opération de G dans \tilde{C} descend en une opération (fidèle) dans $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})$ et $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})'$.

Théorème 2.3.8 : Soient G une forme non triviale de \mathbf{G}_m et C une courbe. Alors G opère fidèlement dans C (et C est presque homogène) si et seulement si, avec les notations précédentes, on a $C \simeq \tilde{C} \setminus \{\tilde{P}\}$ ou s'il existe des sous-monoïdes $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ et $\mathfrak{z}_n(\underline{d})$ de $(\mathbf{N}, +)$ tels que C soit isomorphe à $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})$ ou $\tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})'$ (pour l'opération naturelle).

Démonstration. On suppose que l'on a une opération fidèle de G et que C n'est pas homogène. La normalisée de C est une courbe projective régulière qui est presque homogène

mais pas homogène sous l'opération de G , donc cette normalisée est \tilde{C} . Soit

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \longrightarrow & \tilde{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & C \end{array}$$

le carré du conducteur. Alors \tilde{Z} est supporté par \tilde{P} et Z est supporté par un point P tel

que $\kappa(P) = k$ ou K . D'après le lemme 1.5.1, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_K & \longrightarrow & \mathbf{P}_K^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_K & \longrightarrow & C_K \end{array} \quad \text{est encore le}$$

carré du conducteur.

Cas 1. Si $\kappa(P) = K$ alors Z_K est supporté par deux points k -rationnels. Comme dans le théorème 2.3.6, il existe des entiers $M \geq 0$ et $N \geq 0$ tels que $\tilde{Z}_K = \text{Spec} \left(\frac{k[t]}{(t^{M+1})} \times \frac{k[u]}{(u^{N+1})} \right)$

et des sous-monoïdes $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ et $\mathfrak{z}_n(\underline{d})$ de $(\mathbf{N}, +)$ tels que

$$Z_K = \text{Spec} \left(\frac{K[t^{c_0}, \dots, t^{c_p}, t^{m+1}, \dots]}{(t^{M+1})} \times \frac{K[u^{d_0}, \dots, u^{d_q}, u^{n+1}, \dots]}{(u^{N+1})} \right).$$

De plus le groupe Γ échange les deux composantes de \tilde{Z}_K ainsi que celles de Z_K , donc on a $M = N$ et $\mathfrak{z}_m(\underline{c}) = \mathfrak{z}_n(\underline{d})$. Comme précédemment, les deux carrés du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Y}_K & \longrightarrow & \tilde{Z}_K & \longrightarrow & \mathbf{P}_K^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_K & \longrightarrow & Z_K & \longrightarrow & C_K \end{array}$$

sont cocartésiens donc le grand carré est un diagramme de pincement. Les morphismes sont Γ -équivariants donc, par descente galoisienne, on a $C \simeq \tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})$.

Cas 2. Si $\kappa(P) = k$ alors Z_K est supporté par un unique point K -rationnel. Par un argument similaire, il existe un sous-monoïde $\mathfrak{z}_m(\underline{c})$ de $(\mathbf{N}, +)$ tel que $C_K \simeq \mathbf{P}_{K,m,m}^1(\underline{c}, \underline{c})'$. Les morphismes dans le diagramme de pincement définissant $\mathbf{P}_{K,m,m}^1(\underline{c}, \underline{c})'$ sont Γ -équivariants, donc on a $C \simeq \tilde{C}_m(\tilde{P}, \underline{c})$. \square

2.4 Groupe de Picard équivariant des courbes seminormales presque homogènes

On peut déterminer le groupe de Picard équivariant des courbes régulières presque homogènes, notamment grâce à la proposition 1.6.8. La description des fibrés en droites linéarisés sur une courbe projective obtenue par pincement (donnée dans la remarque 1.6.16) permet d'en déduire le groupe de Picard équivariant des courbes seminormales presque homogènes.

Théorème 2.4.1 : *Soient C une courbe seminormale et G un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans C .*

1. (courbes homogènes)

- (a) Si C est une conique projective lisse et $G \simeq \mathbf{Aut}_C$ alors $\text{Pic}^G(C) = \text{Pic}(C) = \mathbf{Z} \cdot \omega_C$ où ω_C est le fibré canonique, donc $\frac{1}{2} \text{deg} : \text{Pic}^G(C) \rightarrow \mathbf{Z}$ est un isomorphisme.
- (b) Si $C \simeq \mathbf{A}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ (opérant par transformations affines) alors $\text{Pic}^G(C) \simeq \hat{G}(C) \simeq \mathbf{Z}$.
- (c) Si G est une forme de \mathbf{G}_a ou de \mathbf{G}_m et si C est un G -torseur alors $\text{Pic}^G(C)$ est trivial.
- (d) Si C est une courbe projective lisse de genre 1 et $G \simeq \mathbf{Aut}_C^\circ$ alors $\text{Pic}^G(C)$ est trivial.

2. (courbes régulières non homogènes)

- (a) Si $C \simeq \mathbf{P}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ ou $G \simeq \mathbf{G}_m$ alors on a une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow \hat{G}(C) \simeq \mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C) = \mathbf{Z} \cdot [\infty] \simeq \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

et le morphisme $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \mathbf{Z}$ s'identifie au degré, donc $\text{Pic}^G(C) \simeq \mathbf{Z}^2$.

(b) Si G est une forme de \mathbf{G}_a , C est la complétion régulière d'un G -torseur et P est le point à l'infini alors on a $\text{Pic}^G(C) = \mathbf{Z} \cdot [P] \simeq \mathbf{Z}$ et cet isomorphisme s'identifie à $\frac{1}{[\kappa(P) : k]}$ deg.

(c) Si $C \simeq \mathbf{A}^1$ et $G \simeq \mathbf{G}_m$ alors $\text{Pic}^G(C) \simeq \widehat{G}(C) \simeq \mathbf{Z}$.

(d) Si C est une conique projective lisse et G est le centralisateur d'un point P de degré 2 alors on a une suite exacte scindée $1 \rightarrow \widehat{G}(C) \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C) = \mathbf{Z} \cdot [P] \simeq \mathbf{Z} \rightarrow 0$ et le morphisme $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \mathbf{Z}$ s'identifie à $\frac{1}{2}$ deg.

3. (courbes singulières seminormales)

(a) Si G est une forme non triviale de \mathbf{G}_a et C est obtenue en pinçant le point à l'infini \tilde{P} de la complétion régulière \tilde{C} d'un G -torseur sur un point P dont le corps résiduel $\kappa(P)$ est une sous-extension stricte de $\kappa(\tilde{P})/k$ alors on a une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow \kappa(\tilde{P})^\times / \kappa(P)^\times \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \mathbf{Z} \cdot [\tilde{P}] \simeq \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

et le morphisme $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \mathbf{Z}$ s'identifie à $\frac{1}{[\kappa(\tilde{P}) : k]}$ deg.

(b) Si C est obtenue en pinçant deux points k -rationnels de \mathbf{P}^1 sur un point k -rationnel et $G \simeq \mathbf{G}_m$ alors on a une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow (k^\times \times k^\times) / k^\times \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \widehat{G}(\mathbf{P}^1) \simeq \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

(c) Si C est obtenu en pinçant un point séparable \tilde{P} de degré 2 d'une conique projective lisse \tilde{C} sur un point k -rationnel P , et G est le centralisateur de \tilde{P} dans $\mathbf{Aut}_{\tilde{C}}$ alors on a $\text{Pic}^G(C) \simeq \kappa(\tilde{P})^\times / \kappa(P)^\times$.

Démonstration. Cas 1a. D'après la proposition 1.6.8, le morphisme d'oubli $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$ est injectif. Si $C = \mathbf{P}_k^1$ et $G = \mathbf{PGL}_2$ alors le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ n'est pas linéarisable (voir [MFK, p.33]) mais le fibré canonique $\omega_{\mathbf{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2)$ l'est. Donc $\text{Pic}^G(C)$ est le sous-groupe de $\text{Pic}(C)$ engendré par la classe de $\omega_{\mathbf{P}^1}$. Plus généralement, si C est une conique projective lisse et $G = \mathbf{Aut}_C$ alors il existe une extension galoisienne K/k telle que $C_K \simeq \mathbf{P}_K^1$. Le morphisme $\text{Pic}(C) \rightarrow \text{Pic}(C_K) \simeq \mathbf{Z}$ est injectif : son noyau est l'ensemble des (K/k) -formes du fibré trivial $C_K \times \mathbf{A}_K^1$, or le groupe des automorphismes de ce fibré est $\mathcal{O}(C_K)^\times \simeq K^*$ (où l'automorphisme correspondant à un élément $f \in \mathcal{O}(C_K)^\times$ est $\begin{cases} C_K \times \mathbf{A}_K^1 & \longrightarrow & C_K \times \mathbf{A}_K^1 \\ (x, v) & \longmapsto & (x, f(x)v) \end{cases}$), donc l'ensemble des formes de ce fibré est l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\text{Gal}(K/k), K^*)$, qui est trivial d'après le théorème 90 de Hilbert. Donc ce morphisme s'identifie au degré. Si C n'est pas isomorphe à \mathbf{P}_k^1 alors il n'y a pas de fibré en droites de degré 1 (sinon C posséderait un point k -rationnel), donc $\text{Pic}(C)$ est engendré par le fibré canonique ω_C , qui est bien linéarisable.

Cas 1b. Tout fibré en droites sur $C = \mathbf{A}^1$ est trivial. D'après la proposition 1.6.8, le noyau du morphisme d'oubli $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$ est le groupe $\widehat{G}(C)$. De plus le foncteur des caractères \widehat{G} est représenté par le groupe constant \mathbf{Z} .

Cas 1c et 1d. La courbe C est un G -torseur donc, d'après [MFK, p.32], le groupe $\text{Pic}^G(C)$ est trivial.

Cas 2a. On a la suite exacte $1 \rightarrow \widehat{G}(C) \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$. Montrons que le morphisme d'oubli $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$ est surjectif. On note $\alpha : G \times C \rightarrow C$ l'opération et $D = [\infty]$ le diviseur premier correspondant au point ∞ . On a $\text{Pic}(C) = \mathbf{Z} \cdot [\infty]$. Considérons la suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-D) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$. Puisque les morphismes α et pr_2 sont plats et D est G -stable, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \alpha^* \mathcal{O}_C(-D) & \longrightarrow & \alpha^* \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \alpha^* \mathcal{O}_D \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{pr}_2^* \mathcal{O}_C(-D) & \longrightarrow & \text{pr}_2^* \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \text{pr}_2^* \mathcal{O}_D \longrightarrow 0
 \end{array}$$

est commutatif, ses lignes sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme $\alpha^* \mathcal{O}_C(-D) \simeq \text{pr}_2^* \mathcal{O}_C(-D)$. Or le schéma C est réduit, donc d'après [Br15, lemma 2.9] cela implique que le fibré en droites correspondant à $-D$ est linéarisable. Donc le morphisme d'oubli est bien surjectif.

Cas 2b. Comme précédemment, le morphisme d'oubli $\text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}(C)$ est injectif. Soit U l'orbite ouverte de C ; on a $C \setminus U = \{P\}$. Si L est un fibré en droites linéarisable sur C alors la restriction $L|_U$ est linéarisable. Or U est un G -torseur, donc $\text{Pic}^G(U)$ est trivial. Donc L correspond à un diviseur de Weil dans $\mathbf{Z} \cdot [P]$. Réciproquement, par le même argument que dans le cas 2a, le fibré en droites correspondant à $-[P]$ est linéarisable.

Cas 2c. On utilise le même argument que pour le cas 1b.

Cas 2d. Le diviseur canonique sur C est $-[P]$ donc $\text{Pic}(C) = \mathbf{Z} \cdot [P]$. À nouveau, le morphisme d'oubli est surjectif.

Cas 3a. On a le diagramme de pincement

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & \longrightarrow & \tilde{C} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z & \longrightarrow & C
 \end{array}$$

où $Z = \text{Spec}(\kappa(P))$ et $\tilde{Z} =$

$\text{Spec}(\kappa(\tilde{P}))$ donc, d'après la remarque 1.6.16, la suite Units-Pic équivariante donne

$$1 \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^\times / \mathcal{O}(Z)^\times \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{C}) \times \text{Pic}^G(Z) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z}).$$

Le groupe des caractères $\widehat{G}(k_s)$ est trivial donc, d'après la proposition 1.6.8, les groupes $\text{Pic}^G(Z)$ et $\text{Pic}^G(\tilde{Z})$ sont triviaux. De plus, d'après le cas 2b, on a $\text{Pic}^G(\tilde{C}) = \mathbf{Z} \cdot [P]$.

Cas 3b. On adapte l'argument de [Br15, ex. 2.15]. La courbe C est donnée par le

diagramme de pincement

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbf{P}^1 \\
 \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\
 Z & \xrightarrow{i} & C
 \end{array}$$

où $\tilde{Z} = \text{Spec } k \sqcup \text{Spec } k$ est le sous-schéma fermé

réduit de \mathbf{P}^1 supporté par $\{0, \infty\}$ et $Z = \text{Spec } k$. La suite Units-Pic équivariante donne

$$1 \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{Z})^\times / \mathcal{O}(Z)^\times \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}^G(\mathbf{P}^1) \times \text{Pic}^G(Z) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z}).$$

On a des isomorphismes $\text{Pic}^G(\mathbf{P}^1) \simeq \text{Pic}(\mathbf{P}^1) \times \widehat{G}(\mathbf{P}^1) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\text{Pic}^G(Z) \simeq \widehat{G}(Z) \simeq \mathbf{Z}$ et $\text{Pic}^G(\tilde{Z}) \simeq \widehat{G}(\tilde{Z}) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Puisque G opère dans les fibres au-dessus de 0 et ∞ du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)$ avec les poids respectifs n et 0, le morphisme $\text{Pic}^G(\mathbf{P}^1) \times \text{Pic}^G(Z) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z})$ correspond à

$$\left\{ \begin{array}{ccc}
 (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \\
 ((n, m), \ell) & \longmapsto & (n + m, m) - (\ell, \ell)
 \end{array} \right.$$

Son noyau est $\mathbf{Z} \cdot ((0, 1), 1) \simeq \widehat{G}(\mathbf{P}^1)$.

Cas 3c. Une fois encore, on a la suite exacte

$$1 \rightarrow \kappa(\tilde{P})^\times / \kappa(P)^\times \rightarrow \text{Pic}^G(C) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{C}) \times \text{Pic}^G(Z) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z})$$

où $Z = \text{Spec } k$ et $\tilde{Z} = \text{Spec } \kappa(\tilde{P})$. Soit $(L, \Phi_L) \in \text{Pic}^G(C)$ et montrons que son image est triviale. On a $\text{Pic}^G(Z) \simeq \widehat{G}(Z) = \text{Hom}_{k\text{-gp}}(G, \mathbf{G}_m) = \{1\}$ car G est une forme

non triviale de \mathbf{G}_m . Le fibré linéarisé $i^*(L, \Phi_L)$ est donc trivial, donc $j^*\nu^*(L, \Phi_L)$ aussi. Puisque le fibré L_K sur C_K est linéarisable, d'après le cas 3b il est de degré 0. Alors L et ν^*L sont aussi de degré 0. De plus on a $\text{Pic}(\tilde{C}) = \mathbf{Z} \cdot \omega_{\tilde{C}}$, donc le fibré ν^*L est trivial. La linéarisation Φ_{ν^*L} est donnée par un caractère $\chi \in \widehat{G}(\tilde{C})$ (et la linéarisation $\Phi_{j^*\nu^*L}$ est donnée par $j^*(\chi) \in \widehat{G}(\tilde{Z})$). D'après la proposition 1.6.8, le morphisme $\widehat{G}(\tilde{Z}) \rightarrow \text{Pic}^G(\tilde{Z})$ est injectif, donc $j^*(\chi)$ est trivial. Après extension des scalaires à $K = \kappa(\tilde{P})$, on a un caractère $\chi_K \in \widehat{G}_K(\tilde{C}_K)$ dont le tiré en arrière dans $\widehat{G}_K(\tilde{Z}_K)$ est trivial. Or $G_K \simeq \mathbf{G}_{m,K}$ donc \widehat{G}_K est représenté par le groupe constant \mathbf{Z} . Donc χ_K est trivial, et donc χ aussi. Par conséquent l'image de (L, Φ_L) dans $\text{Pic}^G(\tilde{C}) \times \text{Pic}^G(\tilde{Z})$ est bien triviale. \square

Remarque 2.4.2 : Un fibré en droites sur une courbe projective est ample si et seulement si son degré est strictement positif, donc on obtient une description des fibrés en droites linéarisés amples sur les courbes seminormales presque homogènes.

Corollaire 2.4.3 : Soient C une courbe seminormale et G un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans C . Alors il existe une immersion (localement fermée) équivariante de C dans le projectivisé d'un G -module de dimension finie, sauf dans les cas 1d, 3b et 3c du théorème 2.4.1.

Chapitre 3

Surfaces homogènes

3.1 Préliminaire

La stratégie pour déterminer les courbes homogènes était de « coincer » le groupe (devant opérer transitivement) dans les groupes d'automorphismes des complétions régulières. Pour les surfaces, il n'y a plus de complétion régulière canonique. L'objectif de cette section est d'expliquer comment pallier ce problème, pour obtenir le corollaire 3.1.11. Pour cela, on commence par quelques énoncés sur la structure des groupes algébriques et sur la variété d'Albanese d'une variété algébrique. On donne à la fin de la section quelques résultats qui seront utiles par la suite. En particulier, on détermine les surfaces qui sont homogènes sous l'opération d'un groupe linéaire résoluble qui n'est ni unipotent ni un tore, sur un corps algébriquement clos (proposition 3.1.17).

Proposition 3.1.1 : [Br17, th. 4.3.2 et 4.3.4] *Soit G un groupe algébrique lisse connexe. Alors il existe un plus petit sous-groupe distingué G_{aff} tel que G/G_{aff} soit une variété abélienne. De plus, G_{aff} est affine et connexe, et sa formation commute aux extensions algébriques séparables. Enfin, si k est parfait alors G_{aff} est lisse.*

Proposition 3.1.2 : [Br17, th. 3.2.1 et 5.1.1] *Soit G un groupe algébrique lisse connexe. Alors il existe un plus petit sous-groupe distingué G_{ant} tel que G/G_{ant} soit affine. De plus, G_{ant} est anti-affine, lisse, connexe et central, et sa formation commute aux extensions de corps. En outre, on a $G = G_{\text{ant}} \cdot G_{\text{aff}}$ et $(G_{\text{ant}})_{\text{aff}}$ est un sous-groupe de $G_{\text{ant}} \cap G_{\text{aff}}$.*

Remarque 3.1.3 : On rappelle qu'un groupe algébrique H est dit anti-affine si $\mathcal{O}_H(H) = k$. Dans ce cas H est automatiquement lisse, connexe et commutatif.

Proposition 3.1.4 : [Wit, app. A] *Soit X une variété algébrique. Alors il existe une variété abélienne Alb_X^0 , un Alb_X^0 -torseur Alb_X^1 et un morphisme $a_X : X \rightarrow \text{Alb}_X^1$ satisfaisant la propriété universelle suivante :*

pour toute variété abélienne B^0 , pour tout B^0 -torseur B^1 et tout morphisme $b : X \rightarrow B^1$, il existe un unique morphisme $b^1 : \text{Alb}_X^1 \rightarrow B^1$ tel que $b = b^1 \circ a_X$, et il existe un unique morphisme de variétés abéliennes $b^0 : \text{Alb}_X^0 \rightarrow B^0$ tel que b^1 soit équivariant.

On dit que Alb_X^0 est la variété d'Albanese de X et que a_X est le morphisme d'Albanese.

La formation de Alb_X^0 , Alb_X^1 et a_X commute aux extensions algébriques séparables, ainsi qu'aux produits finis de variétés algébriques.

Remarque 3.1.5 :

1. Si X possède un point k -rationnel x alors le point k -rationnel $a_X(x)$ de Alb_X^1 induit un isomorphisme $\text{Alb}_X^0 \rightarrow \text{Alb}_X^1$. Dans ce cas, la variété d'Albanese est notée Alb_X et la propriété universelle se reformule plus simplement de la façon suivante :

pour toute variété abélienne B et tout morphisme $b : X \rightarrow B$ tel que $b(x) = 0$, il existe un unique morphisme de groupes $\psi : \text{Alb}_X \rightarrow B$ tel que $b = \psi \circ a_X$.

2. Si G est un groupe algébrique lisse connexe alors, d'après [Br17, prop. 4.1.4], on a $\text{Alb}_G = G/G_{\text{aff}}$.

Exemple 3.1.6 : Soient G un groupe algébrique lisse connexe et X un G -torseur. Alors on a $\text{Alb}_X^0 = \text{Alb}_G^0$. En effet, il existe un unique morphisme de variétés abéliennes $\varphi : \text{Alb}_G^0 \rightarrow \text{Alb}_X^0$ tel que a_X soit $\varphi \circ a_G$ -équivariant (voir [Br17b, sect. 3.4]). Comme on a un isomorphisme de G_{k_s} -variétés $X_{k_s} \simeq G_{k_s}$ et les constructions commutent aux extensions séparables, le morphisme déduit de φ après extension des scalaires à k_s est un isomorphisme, donc φ est déjà un isomorphisme.

Proposition 3.1.7 : Soient G un groupe lisse connexe, H un sous-groupe, $X = G/H$, $\pi : G \rightarrow X$ le morphisme quotient et $x = \pi(e)$. Alors $G_{\text{aff}} \cdot H$ est distingué dans G , le groupe $G/G_{\text{aff}} \cdot H$ est une variété abélienne, le morphisme quotient $\pi' : G \rightarrow G/G_{\text{aff}} \cdot H$ se factorise en un morphisme fidèlement plat $f_X : X \rightarrow G/G_{\text{aff}} \cdot H$ et f_X est le morphisme d'Albanese de X .

Démonstration. On rappelle que $G_{\text{aff}} \cdot H$ est le sous-groupe de G qui est l'image schématique de la multiplication $m : G_{\text{aff}} \times H \rightarrow G$. On a donc une factorisation $G_{\text{aff}} \times H \xrightarrow{m'} G_{\text{aff}} \cdot H \xrightarrow{i} G$ de m où m' est un morphisme de groupes qui est fidèlement plat et i est l'inclusion.

Comme π' est G_{aff} -invariant, il existe un unique morphisme de schémas $f : G/G_{\text{aff}} \rightarrow$

$G/G_{\text{aff}} \cdot H$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & G/G_{\text{aff}} \cdot H \\ a_G \downarrow & \nearrow f & \\ G/G_{\text{aff}} & & \end{array} \quad . \text{ Comme le groupe}$$

G/G_{aff} est abélien et a_G est un morphisme de groupes, pour tout schéma S et tous $g \in G(S)$ et $h \in (G_{\text{aff}} \cdot H)(S)$ on a $\pi'(ghg^{-1}) = f \circ a_G(ghg^{-1}) = f \circ a_G(h) = \pi'(h) = \pi'(e)$ donc ghg^{-1} est un élément de $(G_{\text{aff}} \cdot H)(S)$. Donc $G_{\text{aff}} \cdot H$ est distingué dans G , et π' et f sont des morphismes de groupes. De plus, on a une suite exacte de groupes $1 \rightarrow G_{\text{aff}} \cdot H/G_{\text{aff}} \xrightarrow{j} G/G_{\text{aff}} \xrightarrow{f} G/G_{\text{aff}} \cdot H \rightarrow 1$. En particulier $G/G_{\text{aff}} \cdot H$ est une variété abélienne, comme quotient de G/G_{aff} .

Comme π' est H -invariant, il existe un unique morphisme de schémas fidèlement plat

$f_X : G/H \rightarrow G/G_{\text{aff}} \cdot H$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & G/G_{\text{aff}} \cdot H \\ \pi \downarrow & \nearrow f_X & \\ G/H & & \end{array} \quad . \text{ Soient}$$

B une variété abélienne et $b : X \rightarrow B$ un morphisme tel que $b(x) = 0$. On veut construire un morphisme de groupes $\psi : G/G_{\text{aff}} \cdot H \rightarrow B$ tel que $b = \psi \circ f_X$. Comme f_X est fidèlement plat, c'est un épimorphisme dans la catégorie des schémas, donc un tel ψ est nécessairement unique.

On a $b \circ \pi(e) = 0$ donc, par propriété universelle du morphisme d'Albanese de G , il existe un morphisme de groupes $\varphi : G/G_{\text{aff}} \rightarrow B$ tel que $\varphi \circ a_G = b \circ \pi$. On veut avoir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_{\text{aff}} \cdot H & & \\
 & & \swarrow i & & \searrow \pi \\
 & G & & & G_{\text{aff}} \cdot H/G_{\text{aff}} \\
 & \swarrow \pi & & \searrow a_G & \swarrow j \\
 X & \xrightarrow{b} & B & \xleftarrow{\varphi} & G/G_{\text{aff}} \\
 & \searrow f_X & \uparrow \psi & & \swarrow f \\
 & & G/G_{\text{aff}} \cdot H & &
 \end{array}$$

Montrons que $\varphi \circ j$ est le morphisme trivial. Pour tout k -schéma S et tout $(g, h) \in (G_{\text{aff}} \rtimes H)(S)$, on a $\varphi \circ j \circ \pi \circ m'(g, h) = \varphi \circ a_G \circ i \circ m'(g, h) = b \circ \pi \circ m(g, h) = b \circ \pi(gh) = b \circ \pi(g) = \varphi \circ a_G(g) = 0$. Donc $\varphi \circ j \circ \pi \circ m'$ est le morphisme trivial. De plus π et m' étant fidèlement plats, ce sont des épimorphismes. Donc $\varphi \circ j$ est bien le morphisme trivial. Par conséquent, il existe un morphisme de groupes $\psi : G/G_{\text{aff}} \cdot H \rightarrow B$ tel que $\psi \circ f = \varphi$.

Enfin, on a $\psi \circ f_X \circ \pi = \psi \circ \pi' = \psi \circ f \circ a_G = \varphi \circ a_G = b \circ \pi$ donc, comme π est un épimorphisme, on a bien $\psi \circ f_X = b$. \square

En caractéristique nulle, toute variété munie d'une opération d'un groupe algébrique lisse connexe possède une résolution équivariante des singularités (voir [Kol2, prop. 3.9.1 p.125 et th. 3.36 p.146]). C'est encore vrai pour les surfaces en caractéristique quelconque.

Lemme 3.1.8 : *Soient X une surface projective, G un groupe algébrique lisse connexe et $\alpha : G \times X \rightarrow X$ une opération. Alors X possède une résolution équivariante des singularités : il existe une surface projective régulière X' , une opération $\alpha' : G \times X' \rightarrow X'$ et un morphisme $X' \rightarrow X$ birationnel propre qui est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier de X et qui est G -équivariant.*

Démonstration. Ce résultat est bien connu mais, faute de référence, on en redonne ici une démonstration. Soit $\nu : Y_1 \rightarrow X$ la normalisation. Alors $\text{id} \times \nu : G \times Y_1 \rightarrow G \times X$ est la normalisation de $G \times X$ et il existe une unique opération $\beta : G \times Y_1 \rightarrow Y_1$ telle que le morphisme ν soit G -équivariant (voir [Br17, prop. 2.5.1]). De plus Y_1 est une surface projective, ν est un morphisme fini donc propre, et c'est un isomorphisme au-dessus du lieu normal de X donc *a fortiori* au-dessus du lieu régulier.

Soit Z_1 le lieu singulier de Y_1 (c'est-à-dire le complémentaire du lieu régulier), muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. Alors Z_1 est stable sous l'opération de G sur Y_1 . Soit $f : X_1 \rightarrow Y_1$ l'éclatement le long de Z_1 . L'image réciproque de Z_1 par β est $G \times Z_1$ et l'éclatement de $G \times Y_1$ le long de $G \times Z_1$ est $\text{id} \times f : G \times X_1 \rightarrow G \times Y_1$. Par propriété universelle de l'éclatement, il existe un unique morphisme $\alpha_1 : G \times X_1 \rightarrow X_1$ faisant

commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 \\ \text{id} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_1 \end{array} \quad (\text{voir [Har, ch. II, cor. 7.15 p.165]}).$$

Le morphisme f induit un isomorphisme de $X_1 \setminus f^{-1}(Z_1)$ sur $Y_1 \setminus Z_1$ donc la restriction $\alpha_1 : G \times (X_1 \setminus f^{-1}(Z_1)) \rightarrow X_1 \setminus f^{-1}(Z_1)$ est une opération. Comme $X_1 \setminus f^{-1}(Z_1)$ est un ouvert dense de X_1 , on en déduit que $\alpha_1 : G \times X_1 \rightarrow X_1$ est également une opération. De plus X_1 est une surface projective et, par construction, f est un morphisme birationnel propre qui est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier $X_1 \setminus f^{-1}(Z_1)$ et qui est G -équivariant.

Pour $i \geq 1$, on définit par récurrence $X_{i+1} \rightarrow Y_{i+1} \rightarrow X_i$ où $Y_{i+1} \rightarrow X_i$ est la normalisation et $X_{i+1} \rightarrow Y_{i+1}$ est l'éclatement le long du lieu singulier. D'après [Lip, intro. rem. B], il existe un entier $n \geq 1$ tel que la surface $X' = X_n$ soit régulière. En itérant les constructions précédentes, on obtient l'opération de G sur X' et le morphisme $X' \rightarrow X$ voulus. \square

Lemme 3.1.9 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X une surface (lisse) et G un groupe algébrique lisse connexe, muni d'une opération fidèle $\alpha : G \times X \rightarrow X$ telle que X soit homogène. Alors X possède une complétion équivariante lisse relativement minimale : il existe une surface projective lisse \overline{X} qui est relativement minimale, une opération $G \times \overline{X} \rightarrow \overline{X}$ et une immersion ouverte G -équivariante $X \hookrightarrow \overline{X}$.*

Démonstration. Comme G est lisse et X est homogène, il existe une surface projective normale X_0 , une opération $G \times X_0 \rightarrow X_0$ et une immersion ouverte G -équivariante $X \hookrightarrow X_0$ (voir [Br17, rem. 5.2.3]). Soit $f : X' \rightarrow X_0$ une résolution équivariante des singularités (voir le lemme 3.1.8). Comme f est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier de X_0 , on obtient une immersion ouverte G -équivariante $X \hookrightarrow X'$.

Soit $\pi : X' \rightarrow \overline{X}$ un morphisme birationnel, où \overline{X} est une surface projective lisse qui est relativement minimale (voir [Har, ch. V, th. 5.8 p.418]). D'après le lemme de Blanchard ([Br17, th. 7.2.1]) il existe une unique opération $G \times \overline{X} \rightarrow \overline{X}$ telle que π soit G -équivariant. Par hypothèse π induit un isomorphisme d'un ouvert U de X' sur un ouvert V de \overline{X} . Pour $g \in G(k)$, π induit un isomorphisme de gU sur gV car π est équivariant. Donc quitte à remplacer U et V par $\bigcup_{g \in G(k)} gU$ et $\bigcup_{g \in G(k)} gV$, on peut supposer que U et V sont stables par $G(k)$. Donc U et V sont stables par G . Comme X est un ouvert G -stable et homogène de X' , il est contenu dans U . Donc la restriction $\pi : X \rightarrow \overline{X}$ est une immersion ouverte G -équivariante. \square

Lemme 3.1.10 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X une surface lisse et G un groupe algébrique lisse connexe, muni d'une opération fidèle $\alpha : G \times X \rightarrow X$ telle que X soit homogène. Alors on a l'alternative suivante :*

1. G est une surface abélienne et X est un G -torseur ;
2. $G_{\text{aff}} \neq 0$ et il existe une courbe projective lisse C telle que X soit birationnelle à $\mathbf{P}^1 \times C$.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que G contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{G}_m . Montrons que X contient un ouvert \mathbf{G}_m -stable de la forme $\mathbf{G}_m \times F$ où F est une courbe lisse. La construction est bien connue et on la rappelle pour la commodité du lecteur. D'après un théorème de Hideyasu Sumihiro ([Sum, cor. 3.11]), la surface X

contient un ouvert affine \mathbf{G}_m -stable X_0 . Soit V un \mathbf{G}_m -module de dimension finie tel que l'on ait une immersion fermée \mathbf{G}_m -équivariante $X_0 \hookrightarrow V$. On a une décomposition $V = \bigoplus_{i=1}^r V_{n_i}$ où $n_i \in \mathbf{Z}$ et $V_{n_i} \neq \{0\}$ est le sous-espace de poids n_i . Quitte à remplacer V par un sous-espace, on peut supposer que pour tout i la projection de X sur V_{n_i} n'est pas réduite à $\{0\}$. Il existe donc une coordonnée t_i sur V_{n_i} telle que l'ouvert $X_0 \cap (t_i \neq 0)$ soit non vide. Quitte à remplacer X_0 par un ouvert affine \mathbf{G}_m -stable de $X_0 \cap \bigcap_{i=1}^r (t_i \neq 0)$, on peut supposer que les t_i ne s'annulent pas sur X_0 . De plus, en notant $d = \text{pgcd}(n_1, \dots, n_r)$, le sous-groupe $\{g \in \mathbf{G}_m \mid g^d = 1\}$ opère trivialement dans V . On a donc $d = 1$ et on peut écrire une relation de Bézout $a_1 n_1 + \dots + a_r n_r = 1$ où les a_i sont des éléments de \mathbf{Z} . On peut considérer le morphisme

$$f : \begin{cases} X_0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_m \\ x & \longmapsto & \prod_{i=1}^r t_i(x)^{a_i} \end{cases}$$

qui est \mathbf{G}_m -équivariant. Alors, en posant $F = f^{-1}(1)$,

$$\begin{cases} \mathbf{G}_m \times F & \longrightarrow & X_0 \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \\ (f(y), f(y)^{-1}y) & \longleftarrow & y \end{cases}$$

est un isomorphisme de k -schémas. En particulier, F est une courbe lisse (car X_0 est lisse). En notant C la complétion régulière de F , la surface X est birationnelle à $\mathbf{P}^1 \times C$.

On suppose désormais que G contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{G}_a . Soient \overline{X} une complétion G -équivariante lisse de X (voir le lemme 3.1.9) et \mathcal{L} un faisceau inversible très ample sur \overline{X} . Quitte à remplacer \mathcal{L} par une de ses puissances, on peut supposer que \mathcal{L} est \mathbf{G}_a -linéarisé (voir [Sum, th. 1.6]). Alors $H^0(\overline{X}, \mathcal{L})$ est un \mathbf{G}_a -module de dimension finie donc, d'après le théorème de Lie-Kolchin, il existe une section $s \in H^0(\overline{X}, \mathcal{L})^{\mathbf{G}_a}$ non nulle. Donc $\overline{X}_s = \{x \in \overline{X} \mid s_x \notin \mathfrak{m}_{\overline{X}, x} \mathcal{L}_x\}$ (qui s'interprète comme l'ensemble des points où s ne s'annule pas) est un ouvert non vide de \overline{X} qui est \mathbf{G}_a -stable. Comme \overline{X} est une variété projective et \mathcal{L} est très ample, il découle de [Har, ch. II, prop 7.2 et 7.3 p.151] que \overline{X}_s est affine. Alors, d'après [Spr, prop. 14.2.2 p.240], il existe une variété affine Y telle que \overline{X}_s contienne un ouvert isomorphe à $\mathbf{A}^1 \times Y$. De plus Y est irréductible et lisse car $\mathbf{A}^1 \times Y$ l'est (comme ouvert de \overline{X}_s , qui est lui-même irréductible et lisse). Donc Y est une courbe lisse et, en notant C sa complétion régulière, X est birationnelle à $\mathbf{P}^1 \times C$.

Enfin, si G ne contient aucun sous-groupe isomorphe à \mathbf{G}_m ou \mathbf{G}_a alors G_{aff} est trivial, donc G est une variété abélienne. En particulier G est commutatif donc, comme l'opération sur X est fidèle, X est un G -torseur. \square

Corollaire 3.1.11 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient G un groupe algébrique lisse connexe et X une surface qui est homogène sous une opération de G . Alors il existe une immersion ouverte équivariante $X \rightarrow \overline{X}$ où \overline{X} est une surface projective lisse relativement minimale et on a l'alternative suivante :*

1. G est une surface abélienne et X est un G -torseur ;
2. la variété d'Albanese Alb_X est une courbe elliptique et \overline{X} est une surface réglée sur Alb_X ;
3. \overline{X} est isomorphe à \mathbf{P}^2 , $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n pour $n \geq 2$.

Démonstration. On suppose $G_{\text{aff}} \neq 0$ et que \bar{X} n'est pas isomorphe à \mathbf{P}^2 . D'après le lemme 3.1.10, il existe une courbe projective lisse C telle que \bar{X} soit birationnelle à $\mathbf{P}^1 \times C$. La surface \bar{X} est relativement minimale donc elle est munie d'un morphisme $\pi : \bar{X} \rightarrow C$ qui en fait une surface réglée au-dessus de C (voir [Har, ch. V, rem. 5.8.4 p.419]). D'après le lemme de Blanchard ([Br17, th. 7.2.1]) il existe une unique opération $G \times C \rightarrow C$ telle que π soit G -équivariant. Alors $\pi(X)$ est une G -orbite dans C , et elle n'est pas triviale car X est un ouvert de \bar{X} et π n'est pas constant. Donc C est une courbe presque homogène sous l'opération de G . Donc C ne peut pas être de genre au moins 2 (sinon son groupe d'automorphismes serait fini). Si $C \simeq \mathbf{P}^1$ alors \bar{X} est une surface réglée au-dessus de \mathbf{P}^1 donc c'est une surface de Hirzebruch. Si C est une courbe elliptique alors $\text{Alb}_X = \text{Alb}_{\bar{X}} = C$. \square

Remarque 3.1.12 : Dans le cas où \bar{X} est isomorphe à \mathbf{P}^2 , $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n pour $n \geq 2$, le schéma en groupes des automorphismes $\mathbf{Aut}_{\bar{X}}$ est un groupe affine lisse (voir par exemple [Mar] pour la description de $\mathbf{Aut}_{\bar{X}}$ et plus généralement du schéma en groupes des automorphismes des surfaces réglées). En particulier, le groupe G est affine.

Proposition 3.1.13 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X une surface lisse et G un groupe algébrique lisse connexe affine opérant fidèlement dans X . Alors X est presque homogène si et seulement si elle s'obtient à partir d'une surface rationnelle relativement minimale et presque homogène sous une opération fidèle de G , par des éclatements successifs de points fixes.*

Démonstration. On suppose que X est presque homogène. On commence par raisonner comme dans le lemme 3.1.9. Le groupe G est affine donc X possède une complétion lisse équivariante X' : d'après [Sum, th. 4.13] on a une complétion normale équivariante, et on prend une résolution équivariante des singularités. Il existe une suite finie de morphismes $X = X_0 \xrightarrow{\pi_1} X_1 \xrightarrow{\pi_2} \dots \xrightarrow{\pi_n} X_n = S$ où S est une surface projective lisse relativement minimale et chaque π_i est l'éclatement d'un point k -rationnel P_i . Le lemme de Blanchard donne une unique opération de G dans X_i telle que π_i soit G -équivariant. Pour $g \in G(k)$, l'automorphisme de X_{i-1} donné par g induit un isomorphisme entre les fibres $\pi_i^{-1}(P_i) \simeq \mathbf{P}^1$ et $\pi_i^{-1}(g \cdot P_i)$. Si on avait $g \cdot P_i \neq P_i$ alors $\pi_i^{-1}(g \cdot P_i)$ serait un point. Donc $g \cdot P_i = P_i$. Comme G est lisse, on en déduit que P_i est un point fixe dans X_i . Enfin, S n'est pas une surface abélienne ou une surface réglée au-dessus d'une courbe elliptique, sinon G ne serait pas affine.

Réciproquement, supposons que l'on ait $S = \mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou \mathbf{F}_n , que G opère fidèlement dans S , que S soit presque homogène et que \tilde{X} soit une surface obtenue à partir de S par des éclatements successifs de points fixes. Il existe une unique opération de G dans \tilde{X} telle que le morphisme $\tilde{X} \rightarrow S$ soit équivariant. De plus \tilde{X} est presque homogène car ce morphisme est un isomorphisme au-dessus de l'orbite ouverte dans S . Si X est un ouvert G -stable de \tilde{X} alors l'intersection avec l'orbite ouverte est non vide, donc par stabilité X contient l'orbite ouverte. \square

Le résultat suivant est bien connu. Il peut se déduire de [Jan, part II, 9.8(1) p.130 et prop. 7.5 p.99]. On en redonne ici une démonstration directe.

Lemme 3.1.14 : *On suppose que le corps k est de caractéristique $p > 0$. Soient G un groupe algébrique affine lisse connexe et H un sous-groupe. Si pour tout $r \geq 0$, H contient le noyau G_r du morphisme de Frobenius itéré $F^r : G \rightarrow G^{(p^r)}$ alors $H = G$.*

Démonstration. On écrit $G = \text{Spec } A$, $H = \text{Spec } A/I$ et $\{1\} = \text{Spec } A/J$. En notant f_1, \dots, f_m des générateurs de l'idéal J , on a $G_r = \text{Spec } A/J_r$ où J_r est l'idéal engendré par $f_1^{p^r}, \dots, f_m^{p^r}$. En particulier J_r est contenu dans l'idéal produit J^r . Donc si H contient tous les G_r alors I est contenu dans tous les J_r . Par conséquent on a $I \subseteq \bigcap_{r \geq 0} J_r \subseteq \bigcap_{r \geq 0} J^r = (0)$,

la dernière égalité étant donnée par le théorème d'intersection de Krull pour les anneaux noethériens intègres. Ainsi $I = (0)$ et $H = G$. \square

Lemme 3.1.15 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient $G = \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$ et H un sous-groupe de G tel que G/H soit une surface projective. Alors il existe $r_1 \geq 0$ et $r_2 \geq 0$ tels que H soit conjugué à $(F^{r_1} \times F^{r_2})^{-1}(B \times B)$ où B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{SL}_2 et $F : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{SL}_2$ le morphisme de Frobenius (avec la convention $F = \text{id}$ si k est de caractéristique nulle). De façon équivalente, G/H est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ pour l'opération de G donnée par $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \xrightarrow{F^{r_1} \times F^{r_2}} \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$.*

Démonstration. Le groupe H_{red}° est un sous-groupe parabolique lisse connexe de G de codimension 2. Quitte à conjuguer H , le sous-groupe H_{red}° contient le sous-groupe de Borel $B \times B$ de G , donc $H_{\text{red}}^\circ = B \times B$. Si k est de caractéristique nulle alors tous les groupes algébriques sont lisses donc on a $H^\circ = B \times B$. De plus H° est un sous-groupe distingué de H mais les sous-groupes de Borel sont égaux à leur normalisateur, donc $H = B \times B$.

On suppose désormais que k est de caractéristique $p > 0$. Notons G' et G'' les deux facteurs directs de G . On a $|H^\circ| = |B \times B|$ donc $|\text{pr}_1(H^\circ)| = |\text{pr}_2(H^\circ)| = |B|$, donc pour raison de dimension $\text{pr}_1(H)$ et $\text{pr}_2(H)$ sont des sous-groupes stricts de G' et G'' . Si on avait $\forall r \geq 0, G'_r \times \{1\} \leq H$ alors on aurait $\forall r \geq 0, G'_r \leq \text{pr}_1(H)$ donc, d'après le lemme 3.1.14, on aurait $\text{pr}_1(H) = G'$. Soit donc $r_1 \geq 0$ maximal tel que $G'_{r_1} \times \{1\}$ soit un sous-groupe de H . De même, soit $r_2 \geq 0$ maximal tel que $\{1\} \times G''_{r_2}$ soit un sous-groupe de H . Comme $F^{r_1} \times F^{r_2}$ a pour noyau $G'_{r_1} \times G''_{r_2}$, on a $H = H \cdot (G'_{r_1} \times G''_{r_2}) = (F^{r_1} \times F^{r_2})^{-1}((F^{r_1} \times F^{r_2})(H))$. De plus $(F^{r_1} \times F^{r_2})(H)$ est un sous-groupe de codimension 2 de G contenant $(F^{r_1} \times F^{r_2})(B \times B) = B \times B$. Donc il suffit de traiter le cas $r_1 = r_2 = 0$.

Le groupe $H_1^\circ = H^\circ \cap G_1$ est un sous-groupe strict du noyau de Frobenius G_1 et il est entièrement déterminé par son algèbre de Lie \mathfrak{h} (voir [DG, II, §7, cor. 4.3 p.283]). Soit T le

tore maximal standard de \mathbf{SL}_2 donné par $\begin{cases} \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{SL}_2 \\ a & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \end{cases}$. On a la décomposition

en poids $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{t} \oplus \text{Vect}(e) \oplus \text{Vect}(f)$ (pour l'opération de T) où \mathfrak{t} est l'algèbre de Lie de T (qui est l'espace de poids 0), $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (qui donne l'espace de poids 2) et $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (qui donne l'espace de poids -2); on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \text{Vect}(e)$. L'algèbre de Lie \mathfrak{h} est stable par $T \times T$ et contient $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ donc, en considérant la décomposition en poids de \mathfrak{h} , on constate que \mathfrak{h} est une des algèbres $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$, $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \times \mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$. Les sous-groupes de G_1 correspondants sont $B_1 \times B_1$, $G'_1 \times B$, $B_1 \times G''_1$ et $G_1 \times G_1$. Comme $r_1 = r_2 = 0$, on a donc $H_1^\circ = B_1 \times B_1$.

Les noyaux de Frobenius sont des sous-groupes caractéristiques donc H_1° est un sous-groupe distingué de H . Donc H est un sous-groupe du normalisateur $N_G(B_1 \times B_1) = N_{\mathbf{SL}_2}(B_1) \times N_{\mathbf{SL}_2}(B_1)$. Or d'après [Knop, lemma 3.1], on a $N_{\mathbf{SL}_2}(B_1) = B$ si $p \neq 2$ et $N_{\mathbf{SL}_2}(B_1) = F^{-1}(B)$ si $p = 2$. Donc quel que soit p , H est un sous-groupe de $F^{-1}(B) \times F^{-1}(B)$ contenant $B \times B$. Comme $F^{-1}(B) \times F^{-1}(B) = (G'_1 \times G''_1) \cdot (B \times B)$, H est l'image par la multiplication $(G'_1 \times G''_1) \times (B \times B) \rightarrow (G'_1 \times G''_1) \cdot (B \times B)$ d'un sous-groupe contenant $(B_1 \times B_1) \times (B \times B)$. Donc H est l'image de $(H \cap G'_1 \times G''_1) \times (B \times B) = H_1 \times (B \times B) = (B_1 \times B_1) \times (B \times B)$, donc $H = B \times B$.

On considère $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ muni de l'opération de G donnée par $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \xrightarrow{F^{r_1} \times F^{r_2}} \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$. Alors $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est homogène et, en notant ∞ le point à l'infini de \mathbf{P}^1 , le groupe d'isotropie de (∞, ∞) est $(F^{r_1} \times F^{r_2})^{-1}(B \times B)$. \square

Remarque 3.1.16 : Par un raisonnement analogue, si H un sous-groupe de \mathbf{SL}_2 tel que \mathbf{SL}_2/H soit une courbe projective alors il existe $r \geq 0$ tel que H soit conjugué à $(F^r)^{-1}(B) = B \cdot (\mathbf{SL}_2)_r$.

On rappelle que, pour $d \geq 0$, on note $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ le produit semi-direct de \mathbf{G}_a par \mathbf{G}_m où \mathbf{G}_m opère dans \mathbf{G}_a avec le poids d .

Proposition 3.1.17 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soit G un groupe lisse connexe (linéaire) résoluble qui n'est ni unipotent ni un tore. Alors G opère fidèlement et transitivement dans une surface X et G est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire qu'aucun sous-groupe strict de G n'opère transitivement dans X) si et seulement s'il existe un entier $d \geq 0$ tel que $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$. Dans ce cas on a un isomorphisme abstrait $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ et le groupe d'isotropie d'un point k -rationnel de X est conjugué à un sous-groupe de la forme $H = \{(a, t) \in G \mid \sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} = 0, t^e = 1\} = (H \cap \mathbf{G}_a) \rtimes^d \mu_e$ où $1 = p^{r_0} < p^{r_1} < \dots < p^{r_s}$, $c_i \in k^*$, $\text{pgcd}(d, e) = 1$ et e divise $\text{pgcd}_i(p^{r_i} - 1)$ (donc $H = \{(0, t) \mid t \in \mu_e\}$ si $s = 0$).*

Démonstration. On suppose que G opère fidèlement et transitivement dans la surface X . On écrit $X = G/H$. Alors H ne contient aucun sous-groupe non trivial qui soit distingué dans G . On a la décomposition $G = R_u(G) \rtimes T$ où T est un tore maximal de G . On dispose du morphisme $\pi : X = G/H \rightarrow \frac{G}{R_u(G) \cdot H}$ et, en notant 1 l'image du neutre de

G dans $\frac{G}{R_u(G) \cdot H}$, on a un isomorphisme $R_u(G)$ -équivariant $\pi^{-1}(1) \simeq \frac{R_u(G)}{R_u(G) \cap H}$.

Étape 1. Montrons à cette étape que G est de la forme $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$. Montrons d'abord que T est de dimension 1. Il suffit de trouver un sous-tore T_1 de T de dimension 1 tel que $R_u(G) \rtimes T_1$ opère transitivement dans X , car par minimalité on aura $G = R_u(G) \rtimes T_1$. Pour cela, on va montrer que $\frac{G}{R_u(G) \cdot H}$ est un tore de dimension 1 qui est homogène sous l'opération de T . Si $\dim \frac{G}{R_u(G) \cdot H} = 0$ alors $G = R_u(G) \cdot H$ donc X est homogène sous l'opération de $R_u(G)$, ce qui est exclu. Si $\dim \frac{G}{R_u(G) \cdot H} = 2$ alors $\dim R_u(G) \cdot H = \dim H$ donc $\dim R_u(G) \cdot H_{\text{red}}^\circ = \dim H_{\text{red}}^\circ$, donc $R_u(G)$ est un sous-groupe de H_{red}° et de H , donc $R_u(G)$ est trivial, ce qui est exclu. Par conséquent $\dim \frac{G}{R_u(G) \cdot H} = 1$. Le sous-groupe $R_u(G) \cdot H$ est distingué dans G car $G/R_u(G)$ est commutatif. De plus on a des isomorphismes de groupes $\frac{G}{R_u(G) \cdot H} \simeq \frac{G/R_u(G)}{(R_u(G) \cdot H)/R_u(G)}$ et $G/R_u(G) \simeq T$ donc $\frac{G}{R_u(G) \cdot H} \simeq \mathbf{G}_m$. Le morphisme $T \rightarrow \mathbf{G}_m$ est surjectif donc T contient un sous-tore T_1 de dimension 1 tel que $T_1 \rightarrow \mathbf{G}_m$ soit surjectif. Soient $x_0 \in X(k) = G(k)/H(k)$ l'image du neutre de G et $x \in X(k)$. Par construction il existe $t \in T_1(k)$ tel que $\pi(x_0) = t \cdot \pi(x) = \pi(t \cdot x)$. De plus $\pi^{-1}(\pi(x_0)) = \pi^{-1}(1) \simeq \frac{R_u(G)}{R_u(G) \cap H}$ donc il existe $g \in R_u(G)(k)$ tel que $g \cdot (t \cdot x) = x_0$. Donc $R_u(G) \rtimes T_1$ opère bien transitivement dans X . En outre $\pi^{-1}(1)$ est lisse connexe (comme

quotient de $R_u(G)$, de dimension 1 (c'est une fibre de π) et homogène sous l'opération du groupe unipotent $R_u(G)$ donc on a un isomorphisme abstrait $\pi^{-1}(1) \simeq \mathbf{A}^1$.

Montrons que $R_u(G)$ est commutatif. Soit N le dernier terme non nul de la suite centrale descendante de $R_u(G)$, définie par $C^0(R_u(G)) = G$ et $C^{i+1}(R_u(G)) = [R_u(G), C^i(R_u(G))]$. Alors N est un sous-groupe lisse connexe et central de $R_u(G)$; comme il opère trivialement dans $\frac{G}{R_u(G) \cdot H}$, il stabilise la fibre $\pi^{-1}(1)$. Si N opérait trivialement dans $\pi^{-1}(1)$ alors N opérerait trivialement dans X : pour $n \in N(k)$ et $x \in X(k)$ il existe $t \in T(k)$ tel que $t \cdot x \in \pi^{-1}(1)$ et alors $n \cdot x = t^{-1} \cdot (tnt^{-1}) \cdot (t \cdot x) = t^{-1} \cdot (t \cdot x) = x$ car $tnt^{-1} \in N(k)$. Or cela est exclu puisque G opère fidèlement dans X . Comme N est lisse connexe unipotent et $\pi^{-1}(1) \simeq \mathbf{A}^1$, le groupe N opère même transitivement dans $\pi^{-1}(1)$. Donc $N \rtimes T$ opère transitivement dans X . À nouveau par minimalité, on a $G = N \rtimes T$ et $R_u(G) = N$.

Montrons que si $p > 1$ alors $R_u(G)$ est de p -torsion. Le groupe $R_u(G)$ contient un unique sous-groupe N lisse connexe de p -torsion et maximal pour ces propriétés (car le produit de deux tels sous-groupes est encore un tel sous-groupe). Ce sous-groupe N n'est pas trivial. En effet pour $m \geq 0$, le sous-groupe $p^m R_u(G)$ est lisse connexe car c'est l'image du m -ième itéré du morphisme de groupes $\begin{cases} R_u(G) & \longrightarrow & R_u(G) \\ g & \longmapsto & g^p \end{cases}$. De plus il existe $n \geq 1$ tel que $R_u(G)$ soit isomorphe à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaire supérieures unipotentes dans \mathbf{GL}_2 , donc si $p^m \geq n$ alors un calcul élémentaire donne $p^m R_u(G) = \{0\}$. Donc il existe $m \geq 0$ maximal tel que $p^m R_u(G) \neq \{0\}$; par construction, le groupe $p^m R_u(G)$ est de p -torsion. Donc N est bien non trivial. En outre, N est distingué dans G car pour $g \in G(k)$, le sous-groupe gNg^{-1} est encore un sous-groupe lisse connexe de p -torsion de $R_u(G)$. Comme précédemment, N n'opère pas trivialement dans $\pi^{-1}(1)$ donc $G = N \rtimes T$ et $R_u(G) = N$.

Puisque $R_u(G)$ est unipotent, commutatif et de p -torsion, d'après [CGP, th. B.4.3 p.577], on a un isomorphisme T -équivariant $R_u(G) = U_0 \times U'$ où $U_0 = (R_u(G))^T$ est l'espace des points fixes pour T et U' est un groupe vectoriel tel que l'opération de T dans U' soit linéaire. Si U_0 n'est pas trivial alors il est distingué dans G donc, comme précédemment, ce sous-groupe n'opère pas trivialement dans $\pi^{-1}(1)$ donc $G = U_0 \rtimes T = U_0 \times T$, donc G est commutatif, $\dim G = 2$ et $G = \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m$. On suppose désormais que U_0 est trivial. On a une décomposition en poids $U' = \prod_{i=1}^r N_i$ où $N_i \simeq \mathbf{G}_a$ est T -stable.

Alors N_i est distingué dans G donc, encore une fois, on a $G = N_i \rtimes T \simeq \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ où d est le poids de T dans N_i .

Étape 2. Déterminons le groupe d'isotropie H . On a $\dim H = 0$ donc l'image de H par $\text{pr}_2 : G \rightarrow \mathbf{G}_m$ est de la forme μ_e où $e \geq 1$. D'après [DG, IV, §2, prop. 3.5 p.494], la suite exacte $1 \rightarrow H \cap \mathbf{G}_a \rightarrow H \rightarrow \mu_e \rightarrow 1$ est scindée. Soit $\sigma : \mu_e \rightarrow \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ une section. On veut montrer que, quitte à conjuguer H , le morphisme de groupes σ est à valeurs dans \mathbf{G}_m . Si k est de caractéristique nulle alors il n'y a rien à faire car G est résoluble et $\sigma(\mu_e)(k)$ est un sous-groupe constitué d'éléments semisimples donc, d'après [Bor, th. 10.6 p.138], le sous-groupe lisse $\sigma(\mu_e)$ est contenu dans un tore maximal de G . Dans le cas général, on montre le résultat « à la main ». Soit $\alpha(t) \in k[t]/(t^e - 1)$ tel que la section σ soit donnée par $t \mapsto (\alpha(t), t)$. Alors $(\alpha(ts), ts) = (\alpha(t), t) \cdot (\alpha(s), s) = (\alpha(t) + t^d \alpha(s), ts)$ donc $\alpha(ts) = \alpha(t) + t^d \alpha(s)$ dans $k[t, s]/(t^e - 1, s^e - 1)$. Si α est constant alors $\alpha = 0$. Si α n'est pas constant alors il faut $t^d \neq 1$ et, comme dans chaque monôme de $\alpha(ts)$ les termes t et s apparaissent avec le même exposant, il existe $c \in k^*$ tel que $\alpha(t) = c(1 - t^d)$; alors $(-c, 1) \cdot (c(1 - t^d), t) \cdot (-c, 1)^{-1} = (-c + c(1 - t^d), t) \cdot (c, 1) = (0, t)$. Donc H est bien

conjugué à $(H \cap \mathbf{G}_a) \rtimes^d \mu_e$.

De plus $H \cap \mathbf{G}_a$ est un sous-groupe fini de \mathbf{G}_a donc il existe un p -polynôme de la forme $P(a) = a^{p^{r_0}} + \sum_{i=1}^s c_i a^{p^{r_i}}$ où $0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_s$ et $c_i \in k^*$, tel que $H \cap \mathbf{G}_a$ soit donné par l'équation $P(a) = 0$. Alors H contient le sous-groupe $\{(a, 1) \in G \mid a^{p^{r_0}} = 0\}$, qui est distingué dans G , donc $r_0 = 0$. En outre, H contient le sous-groupe $\{(0, t) \in G \mid t^{\text{pgcd}(d, e)} = 1\}$, qui est distingué dans G car $\text{pgcd}(d, e)$ divise d , donc $\text{pgcd}(d, e) = 1$. Enfin, $H \cap \mathbf{G}_a$ est normalisé par μ_e et $P(t^d a) = t^d \left[a + \sum_{i=1}^s c_i t^{d(p^{r_i}-1)} a^{p^{r_i}} \right]$ donc e divise $d \cdot \text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$ donc e divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$.

Étape 3. Il reste à montrer que l'on a $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$. On vérifie facilement que, en posant $n = dp^{r_s}$, on définit une opération de G dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ par $(a, t) \cdot (x, y) = (t^n x + \sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} t^{n-dp^{r_i}} y^{(n-dp^{r_i})/e}, t^e y)$ (l'entier $n - dp^{r_i} = d(p^{r_s} - p^{r_i})$ est bien divisible par e), que cette opération est transitive et que le groupe d'isotropie de $(0, 1)$ est H . \square

Remarque 3.1.18 : Notons que si $H = \mu_e$ alors l'opération s'écrit plus simplement $(a, t) \cdot (x, y) = (t^d x + a, t^e y)$.

3.2 Cas où la variété d'Albanese est une courbe elliptique

On rappelle que les variétés pseudo-abéliennes ont été introduites par Burt Totaro (voir [Tot]). Il s'agit des groupes algébriques lisses connexes ne possédant pas de sous-groupe distingué lisse connexe affine non trivial. Sur un corps parfait, ce sont exactement les variétés abéliennes ; ce n'est plus vrai sur un corps imparfait. On rappelle aussi que les variétés semi-abéliennes sont les groupes algébriques lisses connexes G obtenus par une extension $1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 1$ où T est un tore et A est une variété abélienne.

Théorème 3.2.1 : Soient X une surface lisse et G un groupe algébrique lisse connexe, muni d'une opération fidèle $\alpha : G \times X \rightarrow X$. Si $\dim \text{Alb}_{X_k} = 1$ alors X est homogène si et seulement si, à isomorphisme près, un des cas suivants a lieu :

- i) il existe une conique projective lisse C , une courbe elliptique E et un E -torseur D tels que $X = D \times C$ et $G = \mathbf{Aut}_X^\circ = E \times \mathbf{Aut}_C$;
- ii) il existe une courbe elliptique E , une forme U de \mathbf{G}_a et une suite exacte $1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$ telles que X soit un G -torseur ;
- iii) G est une variété pseudo-abélienne (ni affine ni propre) et X est un G -torseur ;
- iv) il existe une courbe elliptique E et un E -torseur D tels que $X = D \times \mathbf{A}^1$ et $G = E \times (\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m)$;
- v) G est une variété semi-abélienne (ni affine ni propre) et X est un G -torseur.

Démonstration. Les surfaces données dans l'énoncé sont bien homogènes. Réciproquement, supposons que X soit homogène.

Étape 1. On suppose dans un premier temps que k est algébriquement clos. Le groupe $H = G_{\text{aff}}$ est lisse. On pose $E = \text{Alb}_X$, qui par hypothèse est une courbe elliptique. Soit $x \in X(k)$. D'après la proposition 3.1.7, on a $E = G/H \cdot G_x$ et on dispose du morphisme

d'Albanese $a_X : X \rightarrow E$ et du morphisme quotient $\pi : G \rightarrow E$. La fibre Y de a_X en $0 = \pi(e)$ est $H \cdot G_x / G_x \simeq H/H \cap G_x$. C'est un sous-schéma fermé $H \cdot G_x$ -stable de X , qui est géométriquement intègre (car H l'est) et de dimension $\dim H \cdot G_x - \dim G_x = (\dim G - G_x) - (\dim G - \dim H \cdot G_x) = 1$. Donc Y est une courbe H -homogène. Comme on a $G = G_{\text{ant}} \cdot H$ et G_{ant} est central, tout sous-groupe de G_x qui est distingué dans $H \cdot G_x$ est aussi distingué dans G , donc $H \cdot G_x$ opère fidèlement dans Y (et *a fortiori* H aussi). De plus, d'après [Br17b, sect. 2.5], il existe un $H \cdot G_x$ -torseur $\varpi : G \times Y \rightarrow X$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_1} & G \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{a_X} & E \end{array}$$

soit cartésien, c'est-à-dire que X est G -isomorphe au fibré associé $G \overset{H \cdot G_x}{\times} Y$.

La classification des courbes homogènes montre que, à isomorphisme près, on a les possibilités suivantes :

- i) $Y = \mathbf{P}^1$ et $H = H \cdot G_x = \mathbf{PGL}_2$;
- ii) $Y = \mathbf{A}^1$ et $H = \mathbf{G}_a$;
- iii) $Y = \mathbf{A}^1$ et $H = \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$;
- iv) $Y = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ et $H = \mathbf{G}_m$.

Cas 1. Supposons d'abord que l'on ait $Y = \mathbf{P}^1$ et $H = H \cdot G_x = \mathbf{PGL}_2$. Comme G_{ant} est central dans G , $H \cap G_{\text{ant}}$ est un sous-groupe du centre schématique $Z(H) = Z(\mathbf{PGL}_2) = \{1\}$. Donc $G = G_{\text{ant}} \cdot H = G_{\text{ant}} \times H$ et $G_{\text{ant}} = E$. Donc $X = G \overset{H \cdot G_x}{\times} Y = (E \times \mathbf{PGL}_2) \overset{\mathbf{PGL}_2}{\times} \mathbf{P}^1 = E \times \mathbf{P}^1$ et $G = E \times \mathbf{PGL}_2 = \mathbf{Aut}_X^\circ$.

Cas 2. Supposons que l'on ait $Y = \mathbf{A}^1$ et $H = \mathbf{G}_a$. On a $G = G_{\text{ant}} \cdot H$ donc G est commutatif et X est un G -torseur. En particulier on a $H \cdot G_x = H$ donc on a une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_a \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$.

Cas 3. Supposons que l'on ait $Y = \mathbf{A}^1$ et $H = \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$. Comme précédemment, on a $H \cap G_{\text{ant}} \leq Z(H) = \{1\}$, donc $G = G_{\text{ant}} \times H$ et $(G_{\text{ant}})_{\text{aff}} = \{1\}$ donc G_{ant} est une variété abélienne. De plus $H \cdot G_x$ est un sous-groupe de G contenant H donc $H \cdot G_x = F \times H$ où F est l'image de $H \cdot G_x$ par $\text{pr}_1 : G = G_{\text{ant}} \times H \rightarrow G_{\text{ant}}$. Soit $p : G_{\text{ant}} \rightarrow G_{\text{ant}}/F$ le morphisme quotient. On a alors $E = \frac{G_{\text{ant}} \times H}{F \times H} = G_{\text{ant}}/F$ et le morphisme $\pi : G \rightarrow E$ est la composée $G_{\text{ant}} \times H \xrightarrow{\text{pr}_1} G_{\text{ant}} \xrightarrow{p} G_{\text{ant}}/F$. D'après [Br17b, sect. 2.5], le carré

$$\begin{array}{ccc} G_{\text{ant}} \times H \times \mathbf{A}^1 & \xrightarrow{\text{pr}_1} & G_{\text{ant}} \times H = G \\ p \times \alpha \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{G_{\text{ant}}}{F} \times \mathbf{A}^1 & \xrightarrow{\text{pr}_1} & G_{\text{ant}}/F = E \end{array}$$

est cartésien (en notant encore $\alpha : H \times \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1$ la restriction de $\alpha : G \times X \rightarrow X$) et le morphisme $p \times \alpha : G_{\text{ant}} \times H \times \mathbf{A}^1 \rightarrow \frac{G_{\text{ant}}}{F} \times \mathbf{A}^1$ est un $H \cdot G_x$ -torseur. Donc, par unicité, on a un isomorphisme de G -variétés $X \simeq \frac{G_{\text{ant}}}{F} \times \mathbf{A}^1$. Comme G opère fidèlement, on a nécessairement $F = \{1\}$. On en déduit $G = E \times (\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m)$ et $X = E \times \mathbf{A}^1$.

Cas 4. Supposons que l'on ait $Y = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ et $H = \mathbf{G}_m$. Comme précédemment, G est commutatif donc X est un G -torseur, et on a une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$.

Étape 2. On ne suppose plus que k est algébriquement clos. Examinons les quatre possibilités que l'on vient de trouver.

Cas 1. Supposons d'abord que l'on ait $X_{\bar{k}} = E_{\bar{k}} \times \mathbf{P}_{\bar{k}}^1$ et $G_{\bar{k}} = \mathbf{Aut}_{X_{\bar{k}}}^{\circ} = E_{\bar{k}} \times \mathbf{PGL}_{2,\bar{k}}$. Commençons par déterminer G . Soit N le plus grand sous-groupe distingué lisse connexe et affine de G . Le quotient $Q = G/N$ est une variété pseudo-abélienne donc on a une suite exacte $1 \rightarrow A \rightarrow Q \rightarrow U \rightarrow 1$ où A est une variété abélienne et U est un groupe unipotent commutatif (voir [Tot, th. 2.1]). Soit p la composée $G \rightarrow Q \rightarrow U$. Alors $p(E_{\bar{k}})$ est un sous-groupe lisse connexe propre du groupe affine $U_{\bar{k}}$ donc est trivial, et $p(\mathbf{PGL}_{2,\bar{k}})$ est également trivial car $\mathbf{PGL}_{2,\bar{k}}$ est réductif donc n'a pas de quotient unipotent non trivial. Donc U est trivial et $Q = A$ est une variété abélienne. Par conséquent on a la suite exacte $1 \rightarrow N_{\bar{k}} \rightarrow G_{\bar{k}} \rightarrow A_{\bar{k}} \rightarrow 1$ donc $N_{\bar{k}} = \mathbf{PGL}_{2,\bar{k}}$. Le sous-groupe $N \cap G_{\text{ant}}$ est trivial, car il l'est après extension des scalaires à \bar{k} . On en déduit $G = G_{\text{ant}} \times N = E \times N$.

Soit K/k un extension séparable telle que X possède un point K -rationnel x . Soit $G_{K,x}$ son groupe d'isotropie dans G_K . Alors $(G_{K,x})_{\bar{k}} = \{1\} \times B_{\bar{k}}$ où $B_{\bar{k}}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{PGL}_{2,\bar{k}}$. Donc $G_{K,x} = \{1\} \times \text{pr}_2(G_{K,x})$ dans $G_K = E_K \times N_K$. Alors $N_K / \text{pr}_2(G_{K,x})$ est une forme de \mathbf{P}_K^1 possédant un point K -rationnel, donc il s'agit déjà de \mathbf{P}_K^1 . Donc $G_K = E_K \times \mathbf{PGL}_{2,K}$ et $X_K = E_K \times \mathbf{P}_K^1$.

La formation du morphisme d'Albanese $a_X : X \rightarrow \text{Alb}_X^1$ commute aux extensions séparables donc, après extension des scalaires, on obtient la première projection $a_{X,K} : X_K \rightarrow E_K$; on dispose aussi de la seconde projection $\text{pr}_2 : X_K \rightarrow \mathbf{P}_K^1$. Le fibré anticanonique satisfait $\omega_{X_K}^{-1} = (a_{X,K}^* \omega_{E_K}^{-1}) \otimes (\text{pr}_2^* \omega_{\mathbf{P}_K^1}^{-1}) = \text{pr}_2^* \omega_{\mathbf{P}_K^1}^{-1}$ donc il est engendré par ses sections globales et définit un morphisme $X_K \rightarrow \mathbf{P}_K^2$, qui est la composée $X_K \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbf{P}_K^1 \xrightarrow{i_K} \mathbf{P}_K^2$ où i_K est l'immersion fermée définie par le fibré $\omega_{\mathbf{P}_K^1}^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_K^1}(2)$. Donc ω_X^{-1} est engendré par ses sections globales et définit un morphisme $X \rightarrow \mathbf{P}_k^2$. En considérant son image schématique C , ce morphisme se factorise en $X \xrightarrow{p} C \xrightarrow{i} \mathbf{P}_k^2$, et pr_2 et i_K sont les morphismes déduits de p et i par extension des scalaires. La courbe C est une forme de \mathbf{P}_k^1 , c'est-à-dire une conique projective lisse plongée dans \mathbf{P}_k^2 par ω_C^{-1} . Comme le morphisme $(a_{X,K}, \text{pr}_2) : X_K \rightarrow E_K \times \mathbf{P}_K^1$ est un isomorphisme, il en va de même pour $(a_X, p) : X \rightarrow \text{Alb}_X^1 \times C$.

Cas 2. Supposons que l'on ait une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_{a,\bar{k}} \rightarrow G_{\bar{k}} \rightarrow E_{\bar{k}} \rightarrow 1$ et que $X_{\bar{k}}$ soit un $G_{\bar{k}}$ -torseur. Alors X est un G -torseur. Soit N le plus grand sous-groupe distingué lisse connexe et affine de G . Si N est trivial alors G est une variété pseudo-abélienne. On suppose désormais que N n'est pas trivial. Alors $N_{\bar{k}}$ est un sous-groupe distingué lisse connexe et affine de $G_{\bar{k}}$ donc, pour raison de dimensions, on a $N_{\bar{k}} = \mathbf{G}_{a,\bar{k}}$. Le quotient G/N est une courbe elliptique.

Cas 3. Supposons que l'on ait $G_{\bar{k}} = E_{\bar{k}} \times (\mathbf{G}_{a,\bar{k}} \rtimes \mathbf{G}_{m,\bar{k}})$ et $X_{\bar{k}} = E_{\bar{k}} \times \mathbf{A}_{\bar{k}}^1$. Le groupe $\mathbf{G}_{a,\bar{k}} \rtimes \mathbf{G}_{m,\bar{k}}$ n'a pas de quotient unipotent non trivial donc, comme précédemment, on a $G = E \times N$ où N est une forme de $\mathbf{G}_{a,k} \rtimes \mathbf{G}_{m,k}$. D'après le lemme 1.3.8, on a $N = \mathbf{G}_{a,k} \rtimes \mathbf{G}_{m,k}$.

Soit K/k un extension séparable telle que X possède un point K -rationnel x . Comme précédemment le groupe d'isotropie de x est de la forme $\{1\} \times H$ où H est un sous-groupe de N_K . Alors $X_K = E \times (N_K/H)$ et N_K/H est une forme de \mathbf{A}_K^1 qui est un toseur sous

le sous-groupe $\mathbf{G}_{a,K}$ de N_K (car c'est le cas après extension des scalaires à \bar{k}), donc on a déjà $N_K/H = \mathbf{A}_K^1$.

Le morphisme d'Albanese $a_X : X \rightarrow \text{Alb}_X^1$ commute aux extensions séparables et le morphisme d'affinisation $p : X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}(X)$ commute aux extensions quelconques. Le morphisme déduit de p par extension des scalaires est la projection $\text{pr}_2 : X_K \rightarrow \mathbf{A}_K^1$, donc on a $\text{Spec } \mathcal{O}(X) = \mathbf{A}_k^1$. De plus $(a_{X,K}, p_K) : X_K \rightarrow E_K \times \mathbf{A}_K^1$ est un isomorphisme, donc il en va de même pour $(a_X, p) : X \rightarrow \text{Alb}_X^1 \times \mathbf{A}_k^1$.

Cas 4. Supposons enfin que l'on ait une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_{m,\bar{k}} \rightarrow G_{\bar{k}} \rightarrow E_{\bar{k}} \rightarrow 1$ et que $X_{\bar{k}}$ soit un $G_{\bar{k}}$ -torseur. Alors X est un G -torseur, et $G_{\bar{k}}$ est une variété semi-abélienne donc, d'après [Br17, lemma 5.4.3], G est déjà une variété semi-abélienne. \square

Remarque 3.2.2 :

1. Si on a une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{G}_a \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$ alors, par définition de G_{aff} (voir proposition 3.1.1), on a $G_{\text{aff}} = \mathbf{G}_a$. Comme $G = G_{\text{ant}} \cdot G_{\text{aff}}$, le groupe G est donc commutatif. De plus, on a $\text{Ext}^1(E, \mathbf{G}_a) \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E)$ (voir [Oort, ch. III, 17.6, rem.]) mais $\omega_E = \mathcal{O}_E$ donc, par dualité de Serre, $\text{Ext}^1(E, \mathbf{G}_a) \simeq k$. Donc, à isomorphisme près, il existe un unique groupe G donné par une telle suite exacte et qui ne soit pas le produit direct $E \times \mathbf{G}_a$. Ce groupe est l'extension vectorielle universelle de E .

2. Si G est une variété semi-abélienne donnée par une suite exacte $1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$ où T est une forme de \mathbf{G}_m alors, de même, le groupe G est commutatif. On pose $\Gamma = \text{Gal}(k_s/k)$ et on note $\Lambda \simeq \mathbf{Z}$ le Γ -module des caractères de T . La formule de Barsotti-Weil donne $\text{Ext}^1(E, T) = \text{Hom}_{gp}^{\Gamma}(\Lambda, E(k_s))$ (voir [Br17, prop. 5.4.10]). Si $T = \mathbf{G}_m$ alors on a $\text{Ext}^1(E, T) \simeq E(k)$. Si T est une forme non triviale de \mathbf{G}_m alors cette forme est trivialisée par une extension galoisienne K/k de degré 2. On écrit $\text{Gal}(K/k) = \{1, \sigma\}$, qui opère non trivialement dans $\Lambda \simeq \mathbf{Z}$. On a alors $\text{Ext}^1(E, T) \simeq \text{Hom}_{gp}^{\{1, \sigma\}}(\mathbf{Z}, E(K)) \simeq \{x \in E(K) \mid \sigma(x) = -x\}$.

On en déduit le corollaire suivant, qui est déjà plus ou moins connu mais qui mérite d'être explicité.

Corollaire 3.2.3 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X une surface lisse et G un groupe algébrique lisse connexe opérant fidèlement dans X . Si $\dim \text{Alb}_X = 1$ et X est presque homogène alors X possède une unique complétion lisse équivariante \bar{X} . De plus, X est presque homogène si et seulement si, à isomorphisme près, un des cas suivants a lieu :*

- i) $\bar{X} = X = E \times \mathbf{P}^1$ où E est une courbe elliptique et $G = E \times \text{PGL}_2$ ou $E \times (\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m)$ ou $E \times \mathbf{G}_a$ ou $E \times \mathbf{G}_m$;
- ii) $\bar{X} = E \times \mathbf{P}^1$, $X = E \times \mathbf{A}^1$ et $G = E \times (\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m)$ ou $E \times \mathbf{G}_a$ ou $E \times \mathbf{G}_m$;
- iii) $\bar{X} = E \times \mathbf{P}^1$, $X = E \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ et $G = E \times \mathbf{G}_m$
- iv) $\bar{X} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ où \mathcal{E} est le fibré vectoriel indécomposable de rang 2 sur E donné par une suite exacte non scindée $0 \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$ (qui est unique à isomorphisme près), G est le groupe $\mathbf{Aut}_{\bar{X}}^{\circ}$, qui est donné par une suite exacte non scindée $1 \rightarrow \mathbf{G}_a \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$, et $X = \bar{X}$ ou $\bar{X} \setminus C \simeq G$ où C est la section de $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow E$ correspondant au sous-faisceau \mathcal{O}_E de \mathcal{E} ;
- v) $\bar{X} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_E$ et \mathcal{L} est un fibré en droites non nul et de degré 0 sur E , G est le groupe $\mathbf{Aut}_{\bar{X}}^{\circ}$, qui est donné par une suite exacte non scindée $1 \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$, et $X = \bar{X}$ ou $\bar{X} \setminus C$ ou $\bar{X} \setminus C'$ ou $\bar{X} \setminus (C \cup C')$ où C et C' sont les sections de $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow E$ correspondant aux sous-faisceaux \mathcal{O}_E et \mathcal{L} de \mathcal{E} .

Démonstration. Soit U l'orbite ouverte de X . Comme X est lisse, le morphisme $\text{Alb}_U \rightarrow \text{Alb}_X$ induit par l'immersion ouverte $U \rightarrow X$ est un isomorphisme (voir [Br17, cor. 4.1.7]). On écrit $U = G/H$. D'après le théorème 3.2.1, H est un sous-groupe de G_{aff} . Le morphisme d'Albanese est $a_X : X \rightarrow G/G_{\text{aff}} \simeq E$ et il est G -équivariant car sa restriction à U l'est. Soit Y la fibre de a_X au-dessus de 0. Comme dans la démonstration précédente, on a un

$$\text{carré cartésien} \quad \begin{array}{ccc} G \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_1} & G \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{a_X} & E \end{array} . \text{ Le morphisme } \pi \text{ est lisse donc } \varpi \text{ aussi. Puisque } X$$

est lisse, on en déduit que Y aussi. La courbe Y est stable sous l'opération de G_{aff} et elle contient une orbite ouverte V pour cette opération, qui est la fibre de a_U au-dessus de 0.

Par le même raisonnement, la complétion lisse équivariante \bar{X} est bien unique car elle

$$\text{est donnée par le carré cartésien} \quad \begin{array}{ccc} G \times Z & \xrightarrow{\text{pr}_1} & G \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{X} & \xrightarrow{a_{\bar{X}}} & E \end{array} \quad \text{où } Z \text{ est la complétion régulière}$$

de la courbe V . Quand G est de la forme $E \times G_{\text{aff}}$, on a $\bar{X} = E \times \mathbf{P}^1$ et on trouve les trois premiers cas. Si la suite exacte $1 \rightarrow G_{\text{aff}} \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 1$ n'est pas scindée alors on a $G_{\text{aff}} = \mathbf{G}_a$ ou \mathbf{G}_m . Les surfaces X et \bar{X} et le groupe G sont alors donnés par la description du schéma des automorphismes des surfaces réglées sur une courbe elliptique (voir [Mar, th. 3]). \square

3.3 Cas d'une surface dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

3.3.1 Cas d'un groupe semisimple

Le résultat suivant est bien connu. On en redonne ici une démonstration, faute de référence.

Lemme 3.3.1 : *À composition par un automorphisme intérieur de \mathbf{PGL}_2 près, les isogénies $\varphi : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ sont les composées $\mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\text{can}} \mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{F^r} \mathbf{PGL}_2$ où can est le morphisme quotient de \mathbf{SL}_2 par son centre μ_2 , $r \geq 0$ et $F^r : \mathbf{PGL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ est un morphisme de Frobenius itéré.*

Démonstration. Soit \tilde{T} le tore maximal standard de \mathbf{SL}_2 . Alors $\varphi(\tilde{T})$ est un tore de dimension 1 de \mathbf{PGL}_2 donc, quitte à composer par un automorphisme intérieur de \mathbf{PGL}_2 , on peut supposer que $\varphi(\tilde{T})$ est le tore maximal standard T de \mathbf{PGL}_2 .

Rappelons quelques notations usuelles sur les données radicielles. On pose

$$\tilde{\chi} : \begin{cases} \tilde{T} & \longrightarrow \mathbf{G}_m \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} & \longmapsto a \end{cases}, \tilde{\lambda} : \begin{cases} \mathbf{G}_m & \longrightarrow \tilde{T} \\ a & \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \end{cases},$$

$\tilde{\alpha} = 2\tilde{\chi}$ et $\tilde{\alpha}^\vee = \tilde{\lambda}$. Alors les groupes des caractères et cocaractères sont $X^*(\tilde{T}) = \mathbf{Z}\tilde{\chi}$ et $X_*(\tilde{T}) = \mathbf{Z}\tilde{\lambda}$ et les ensembles de racines et coracines sont $\tilde{R} = \{\tilde{\alpha}, -\tilde{\alpha}\}$ et $\tilde{R}^\vee = \{\tilde{\alpha}^\vee, -\tilde{\alpha}^\vee\}$. De même en posant

$$\chi : \begin{cases} T & \longrightarrow \mathbf{G}_m \\ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} & \longmapsto \frac{a}{d} \end{cases},$$

$$\lambda : \begin{cases} \mathbf{G}_m & \longrightarrow & T \\ a & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}, \alpha = \chi \text{ et } \alpha^\vee = 2\lambda \text{ on a } X^*(T) = \mathbf{Z}\chi, X_*(T) = \mathbf{Z}\lambda, R = \{\alpha, -\alpha\}$$

et $R^\vee = \{\alpha^\vee, -\alpha^\vee\}$.

L'isogénie $\varphi : (\mathbf{SL}_2, \tilde{T}) \rightarrow (\mathbf{PGL}_2, T)$ induit un p -morphisme de données radicielles

$$(X^*(T), R, X_*(T), R^\vee) \rightarrow (X^*(\tilde{T}), \tilde{R}, X_*(\tilde{T}), \tilde{R}^\vee)$$

(voir [CGP, def. A.4.2 p.489]), c'est-à-dire que

$$f : \begin{cases} X^*(T) & \longrightarrow & X^*(\tilde{T}) \\ \rho & \longmapsto & \rho \circ \varphi \end{cases}$$

est un morphisme de groupes injectif à conoyau fini et qu'on a une bijection $\iota : \tilde{R} \rightarrow R$ et une application $q : \tilde{R} \rightarrow \{p^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ telles que

$$\forall \tilde{\beta} \in \tilde{R}, f(\iota(\tilde{\beta})) = q(\tilde{\beta})\tilde{\beta} \text{ et } f^\vee(\tilde{\beta}^\vee) = q(\tilde{\beta})\iota(\tilde{\beta})^\vee.$$

On a deux possibilités, à savoir $\iota(\tilde{\alpha}) = \alpha$ ou $-\alpha$.

Il existe des entiers \tilde{n} et m tels que f et f^\vee soient déterminés par $f(\chi) = \tilde{n}\tilde{\chi}$ et $f^\vee(\tilde{\lambda}) = m\lambda$. Si $\iota(\tilde{\alpha}) = \alpha$ alors on a

$$\tilde{n}\tilde{\chi} = f(\chi) = f(\alpha) = f(\iota(\tilde{\alpha})) = q(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha} = 2q(\tilde{\alpha})\tilde{\chi}$$

donc $\tilde{n} = 2q(\tilde{\alpha})$. De même on a

$$m\lambda = f^\vee(\tilde{\lambda}) = f^\vee(\tilde{\alpha}^\vee) = q(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha}^\vee = 2q(\tilde{\alpha})\lambda$$

donc $m = 2q(\tilde{\alpha})$. Un calcul similaire montre que si $\iota(\tilde{\alpha}) = -\alpha$ alors $\tilde{n} = m = -2q(\tilde{\alpha})$.

Soit $r \geq 0$ tel que $q(\tilde{\alpha}) = p^r$. Si $\iota(\tilde{\alpha}) = \alpha$ alors l'isogénie de données radicielles donnée par φ coïncide avec celle donnée par $\mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\text{can}} \mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{F^r} \mathbf{PGL}_2$ car pour $a \in \mathbf{G}_m$ on a $\chi \circ F^r \circ \text{can} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \chi \begin{bmatrix} a^{p^r} & 0 \\ 0 & a^{-p^r} \end{bmatrix} = a^{2p^r}$ et $F^r \circ \text{can} \circ \tilde{\lambda}(a) = \begin{bmatrix} a^{p^r} & 0 \\ 0 & a^{-p^r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{2p^r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. De même, si $\iota(\tilde{\alpha}) = -\alpha$ alors l'isogénie de données radicielles donnée par φ coïncide avec celle donnée par $\mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\text{can}} \mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{F^r} \mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{\sigma} \mathbf{PGL}_2$ où σ est la conjugaison par $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c'est-à-dire l'automorphisme donné par $M \mapsto {}^t M^{-1}$). Dans tous les cas, d'après le théorème des isogénies (voir [CGP, th. A.4.10 p.499]), φ et $F^r \circ \text{can}$ coïncident à un automorphisme intérieur de \mathbf{PGL}_2 près. \square

Remarque 3.3.2 : De même, à conjugaison par un automorphisme intérieur de \mathbf{SL}_2 près, les isogénies $\mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{SL}_2$ sont les morphismes de Frobenius itérés (voir [SGA3-3, exp. XXIV, 7.4.6]).

Proposition 3.3.3 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soit $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}^\circ = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ un sous-groupe lisse connexe semisimple non trivial. Alors, quitte à permuter les facteurs et à conjuguer, un des cas suivants a lieu :*

- i) $G = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$;
- ii) $G = \{1\} \times \mathbf{PGL}_2$;
- iii) *il existe $r \geq 0$ tel que G soit le graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : \mathbf{PGL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ (donc $G \simeq \mathbf{PGL}_2$) (avec la convention $F = \text{id}$ si k est de caractéristique nulle).*

De plus, le graphe du morphisme de Frobenius itéré F^r possède une orbite ouverte dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, qui est le complémentaire du graphe du morphisme de Frobenius $F^r : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Démonstration. On suppose que G est un sous-groupe strict de $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$. L'image de G par la projection $\text{pr}_1 : \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ est un sous-groupe semisimple de \mathbf{PGL}_2 donc on a $\text{pr}_1(G) = \{1\}$ ou \mathbf{PGL}_2 . Si $\text{pr}_1(G) = \{1\}$ alors G est un sous-groupe semisimple de $\{1\} \times \mathbf{PGL}_2$ donc, pour raison de dimension, on a $G = \{1\} \times \mathbf{PGL}_2$. On suppose désormais $\text{pr}_1(G) = \mathbf{PGL}_2$ et de même $\text{pr}_2(G) = \mathbf{PGL}_2$. Comme G est un sous-groupe de $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$, il est de rang au plus 2, mais pour raison de dimension il ne peut pas être de rang 2 (les dimensions des groupes semisimples de rang 2 sont 6, 8, 10 et 14). Donc G est de rang 1 et le revêtement universel s'écrit $\nu : \mathbf{SL}_2 \rightarrow G$. Alors $\text{pr}_1 \circ \nu : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ et $\text{pr}_2 \circ \nu : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ sont des isogénies. D'après le lemme 3.3.1, quitte à conjuguer G , il existe des entiers $r_1 \geq 0$ et $r_2 \geq 0$ tels que $\text{pr}_1 \circ \nu$ et $\text{pr}_2 \circ \nu$ soient les composées $\mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\text{can}} \mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{F^{r_1}} \mathbf{PGL}_2$ et $\mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\text{can}} \mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{F^{r_2}} \mathbf{PGL}_2$. Donc G est conjugué à un sous-groupe de l'image de $\mathbf{PGL}_2 \xrightarrow{(F^{r_1}, F^{r_2})} \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$. Quitte à permuter les facteurs on peut supposer $r_2 \geq r_1$ et poser $r = r_2 - r_1$. Alors, pour raison de dimension, G est conjugué au graphe de $F^r : \mathbf{PGL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$. On peut donc voir G comme le groupe \mathbf{PGL}_2 opérant dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ par $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, F^r(g) \cdot y)$. Comme $\mathbf{PGL}_2(k)$ opère 2-transitivement dans $\mathbf{P}^1(k)$, le complémentaire dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ du graphe du morphisme de Frobenius $F^r : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ est homogène sous l'opération de G . \square

3.3.2 Cas d'un groupe ni semisimple ni résoluble

Proposition 3.3.4 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soit $G \leq \text{Aut}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}^0 = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ un sous-groupe lisse connexe qui n'est ni semisimple ni résoluble. Alors G possède une orbite ouverte X dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et, à permutation des facteurs et conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

- i) $G = \mathbf{G}_m \times \mathbf{PGL}_2$ et $X = (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbf{P}^1$;
- ii) $G = B \times \mathbf{PGL}_2$ et $X = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$ où B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{PGL}_2 ;
- iii) $G = U \times \mathbf{PGL}_2$ et $X = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$ où $U = R_u(B) = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a$.

Démonstration. D'après le théorème de Borel-Tits, G est contenu dans un sous-groupe parabolique maximal donc, quitte à permuter les deux facteurs et à conjuguer, G est un sous-groupe de $B \times \mathbf{PGL}_2$. De plus si l'image de G par la projection $\text{pr}_2 : \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ était un sous-groupe strict de \mathbf{PGL}_2 alors, quitte à conjuguer, ce serait un sous-groupe de B donc on aurait $G \leq B \times B$, ce qui est impossible car G n'est pas résoluble. On a donc $\text{pr}_2(G) = \mathbf{PGL}_2$.

On suppose d'abord que G est réductif. On a $G = R(G) \cdot [G, G]$ (où $R(G)$ est le radical de G , c'est-à-dire le plus grand sous-groupe distingué lisse connexe résoluble de G) et $[G, G]$ est semisimple. Alors $\text{pr}_2([G, G])$ est un sous-groupe semisimple de \mathbf{PGL}_2 et si ce groupe était trivial alors $[G, G]$ serait un sous-groupe semisimple de $B \times \{1\}$, donc $[G, G]$ serait trivial et $G = R(G)$ serait résoluble. On a donc $\text{pr}_2([G, G]) = \mathbf{PGL}_2$. De plus $\text{pr}_1([G, G])$ est un sous-groupe semisimple de B donc est trivial. Donc $[G, G]$ est un sous-groupe de $\{1\} \times \mathbf{PGL}_2$, donc $[G, G] = \{1\} \times \mathbf{PGL}_2$. En particulier G contient $\{1\} \times \mathbf{PGL}_2$ donc $G = \text{pr}_1(G) \times \mathbf{PGL}_2$. Enfin, $\text{pr}_1(G)$ est un sous-groupe réductif de B donc, quitte à conjuguer par un élément de B , il s'agit du tore maximal standard \mathbf{G}_m .

On suppose désormais que G n'est pas réductif, c'est-à-dire que le radical unipotent $R_u(G)$ n'est pas trivial. Comme $\text{pr}_2(G) = \mathbf{PGL}_2$, on a $\text{pr}_2(R_u(G)) = R_u(\mathbf{PGL}_2) = \{1\}$

donc $R_u(G)$ est un sous-groupe de $B \times \{1\}$. Donc $R_u(G) = U \times \{1\}$. De plus $\text{pr}_2(R(G)) = R(\mathbf{PGL}_2) = \{1\}$. Donc $R(G) = U \times \{1\}$ ou $B \times \{1\}$. Si $R(G) = B \times \{1\}$ alors G est un sous-groupe de $B \times \mathbf{PGL}_2$ contenant $B \times \{1\}$ donc $G = B \times \text{pr}_2(G) = B \times \mathbf{PGL}_2$. Si $R(G) = U \times \{1\}$ alors $G/R(G)$ est un sous-groupe semisimple (non trivial) de $\mathbf{G}_m \times \mathbf{PGL}_2$ donc $G/R(G) = \{1\} \times \mathbf{PGL}_2$ et $G = U \times \mathbf{PGL}_2$. \square

3.3.3 Cas d'un groupe résoluble

Proposition 3.3.5 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soit $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}^0 = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ un sous-groupe lisse connexe résoluble non trivial. On note B le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{PGL}_2 , $U = R_u(B)$ et T le tore maximal standard de B . Pour $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$, on pose $T_{m,n} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} t^m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \in T \times T \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$. Alors, quitte à permuter les facteurs et à conjuguer, un des cas suivants a lieu :*

- i) $G = U \times U$;
- ii) $G = U \times \{1\}$;
- iii) il existe deux p -polynômes non nuls f_1 et f_2 tels que G soit l'image de $(f_1, f_2) : \mathbf{G}_a \rightarrow U \times U$ (donc $G \simeq \mathbf{G}_a$) ;
- iv) $G = T \times T$;
- v) $G = T \times \{1\}$;
- vi) il existe $m \neq 0$ et $n \neq 0$ premiers entre eux tels que $G = T_{m,n}$ (donc $G \simeq \mathbf{G}_m$) ;
- vii) $G = B \times B$;
- viii) $G = B \times U$;
- ix) il existe $m \neq 0$ et $n \neq 0$ premiers entre eux tels que G soit le sous-groupe engendré par $U \times U$ et $T_{m,n}$;
- x) $G = B \times T$;
- xi) $G = B \times \{1\}$;
- xii) $G = U \times T$;
- xiii) il existe $m \neq 0$ et $n \neq 0$ premiers entre eux tels que G soit le sous-groupe engendré par $U \times \{1\}$ et $T_{m,n}$;
- xiv) il existe $r \geq 0$ tel que G soit le graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : B \rightarrow B$ (donc $G \simeq B$).

Démonstration. Quitte à conjuguer, on peut supposer que G est un sous-groupe du sous-groupe de Borel $B \times B$ de $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$. On suppose dans un premier temps que G est unipotent, donc G est un sous-groupe de $U \times U$. Si $\dim G = 2$ alors $G = U \times U$. On suppose $\dim G = 1$, donc $G \simeq \mathbf{G}_a$. Alors les deux projections sont des endomorphismes de \mathbf{G}_a , donc elles sont données par deux p -polynômes f_1 et f_2 , et G est l'image de $(f_1, f_2) : \mathbf{G}_a \rightarrow U \times U$. Si f_1 (resp. f_2) est nul alors $G = \{1\} \times U$ (resp. $U \times \{1\}$).

On suppose maintenant que G est un tore. Quitte à conjuguer, G est contenu dans le tore maximal $T \times T$. Si $\dim G = 2$ alors $G = T \times T$. On suppose $\dim G = 1$, donc $G \simeq \mathbf{G}_m$. Alors les deux projections sont des endomorphismes de \mathbf{G}_m , donc il existe $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $(m, n) \neq (0, 0)$ et $G = T_{m,n}$. Si $m = 0$ (resp. $n = 0$) alors $G = \{1\} \times T$ (resp. $T \times \{1\}$). Si $m \neq 0$ et $n \neq 0$ alors, quitte à diviser m et n par leur pgcd, on peut supposer que ces entiers sont premiers entre eux.

On suppose enfin que G n'est ni unipotent, ni un tore. On a la décomposition $G = R_u(G) \times T_0$ où T_0 est un tore maximal de G .

Supposons $\dim R_u(G) = 2$ et $\dim T_0 = 2$. Alors $R_u(G) = U \times U$ et T_0 est un tore maximal de $B \times B$ donc $G = B \times B$.

Supposons $\dim R_u(G) = 2$ et $\dim T_0 = 1$. Alors $R_u(G) = U \times U$ et, quitte à permuter les facteurs et à conjuguer, on a $T_0 = T \times \{1\}$ ou $T_0 = T_{m,n}$ pour $m \neq 0$ et $n \neq 0$ premiers entre eux. Dans les deux cas, $U \times U$ est bien normalisé par T_0 .

Supposons $\dim R_u(G) = 1$ et $\dim T_0 = 2$. On peut supposer $T_0 = T \times T$ et on a toujours $R_u(G) \leq U \times U$. Comme $R_u(G)$ est de codimension 1 dans $U \times U$, il existe deux p -polynômes f_1 et f_2 tels que, en notant (x, y) les coordonnées dans $U \times U$, le sous-groupe $R_u(G)$ soit donné par l'équation $f_1(x) = f_2(y)$ (voir [CGP, cor. B.1.5 p.563]). Si $f_2 = 0$ alors $R_u(G) = \{0\} \times U$ dans $U \times U$, qui est bien normalisé par T_0 , et on a $G = T \times B$. On suppose désormais $f_2 \neq 0$. Si f_2 n'est pas un monôme alors il existe $y \in k^\times$ tel que $f_2(y) = 0$. Or les conjugués de $(0, y) \in R_u(G)(k)$ par les éléments de $T_0(k)$ sont les $(0, ty)$ pour $t \in k^\times$. Donc $R_u(G)(k)$ contient $\{0\} \times k$ et, pour raison de dimension, on a $R_u(G) = \{0\} \times U$ dans $U \times U$, ce qui est impossible. Par conséquent f_2 est un monôme. De même on peut supposer que f_1 est un monôme. Comme G est lisse, quitte à permuter les deux facteurs on peut supposer $f_2(y) = y$. Il existe donc $\lambda \in k^\times$ et $r \geq 0$ tel que $R_u(G)$ soit donné par l'équation $y = \lambda x^{p^r}$. Cependant, ce sous-groupe n'est pas normalisé par $T \times T$.

Supposons $\dim R_u(G) = 1$ et $\dim T_0 = 1$. On peut supposer que T_0 est contenu dans le tore maximal $T \times T$ et on a toujours $R_u(G) \leq U \times U$. Si $\text{pr}_1(R_u(G)) = \{0\}$ ou $\text{pr}_2(R_u(G)) = \{0\}$, et si $\text{pr}_1(T) = \{1\}$ ou $\text{pr}_2(T) = \{1\}$, alors quitte à permuter les facteurs, on trouve $G = B \times \{1\}$ ou $U \times T$. Si $\text{pr}_1(R_u(G)) \neq \{0\}$ et $\text{pr}_2(R_u(G)) \neq \{0\}$, et si $\text{pr}_1(T) = \{1\}$ ou $\text{pr}_2(T) = \{1\}$, alors par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent $R_u(G)$ ne peut pas être normalisé par T_0 . Si $\text{pr}_1(R_u(G)) = \{0\}$ ou $\text{pr}_2(R_u(G)) = \{0\}$, et si $\text{pr}_1(T) \neq 1\{1\}$ et $\text{pr}_2(T) \neq 1\{1\}$, alors quitte à permuter les facteurs il existe $m \neq 0$ et $n \neq 0$ premiers entre eux tels que G soit le sous-groupe engendré par $U \times \{1\}$ et $T_{m,n}$. Supposons enfin qu'aucune des projections ne soit triviale. Soient f_1 et f_2 deux p -polynômes non nuls tels que $R_u(G)$ soit donné par l'équation $f_1(x) = f_2(y)$. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ premiers entre eux tels que $T_0 = T_{m,n}$. Par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, quitte à permuter les facteurs on peut supposer qu'il existe $\lambda \in k^\times$ et $r \geq 0$ tel que $R_u(G)$ soit donné par l'équation $y = \lambda x^{p^r}$. Pour que $R_u(G)$ soit normalisé par T_0 , il faut que pour $(x, y) \in R_u(G)(k) \setminus \{(0, 0)\}$ on ait $\forall t \in k^\times, t^n y = \lambda t^{mp^r} x^{p^r}$. Il faut donc $n = mp^r$ et, comme m et n sont premiers entre eux, $m = 1$ ou -1 ; on peut supposer $m = 1$. Par conséquent $G = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a^{p^r} & \lambda b^{p^r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \in B \times B \mid \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in B \right\}$ et, quitte à conjuguer le second facteur par $\begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on peut supposer $\lambda = 1$, c'est-à-dire que G est le graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : B \rightarrow B$. \square

Corollaire 3.3.6 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soit X un sous-schéma ouvert de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Alors X est homogène sous l'opération d'un sous-groupe lisse connexe résoluble $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}^0 = \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ et G est minimal pour cette propriété si et seulement si, quitte à permuter les facteurs et à conjuguer, un des cas suivants a lieu :*

- i) $G = U \times U$ et $X = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$;
- ii) $G = T \times T$ et $X = (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$;
- iii) $G = U \times T$ et $X = \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$;

- iv) il existe $r \geq 0$ tel que G soit le graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : B \rightarrow B$ (donc $G \simeq B$) et X est le complémentaire dans $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ du graphe du morphisme de Frobenius itéré $F^r : \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1$.

Démonstration. Seul le dernier point est à vérifier. Dans ce cas X est bien homogène sous l'opération de G car $B(k)$ opère 2-transitivement dans $\mathbf{A}^1(k)$. \square

3.4 Cas d'une surface dans \mathbf{P}^2

3.4.1 Cas d'un groupe semisimple

On note $[x : y : z]$ des coordonnées projectives sur \mathbf{P}^2 .

Proposition 3.4.1 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Alors $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^2} = \mathbf{PGL}_3$ est un sous-groupe lisse connexe semisimple non trivial si et seulement si un des cas suivants a lieu :*

- i) G est le normalisateur d'une conique lisse $C \subseteq \mathbf{P}^2$ donnée par une forme quadratique non dégénérée q (donc $G \simeq \mathbf{PO}_3(q) \simeq \mathbf{PGL}_2$);
- ii) G est conjugué au sous-groupe $\begin{bmatrix} \mathbf{SL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ du normalisateur $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de la droite D d'équation $z = 0$;
- iii) $p = 2$, G est conjugué à l'image du morphisme $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PGL}_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$ (qui est isomorphe à \mathbf{PGL}_2);
- iv) $G = \mathbf{PGL}_3$.

Démonstration. Si G n'a pas d'orbite de dimension 2 alors ses orbites sont de dimension 0 ou 1. Elles ne peuvent pas toutes être de dimension 0, sinon G serait trivial. Une orbite de dimension 1 d'un groupe semisimple est isomorphe à \mathbf{P}^1 , donc c'est une orbite fermée. D'après la formule du genre, c'est une droite ou une conique. Si G possède une orbite de dimension 2 alors celle-ci est dense donc, d'après un théorème d'Andrzej Białyński-Birula ([Bia, th. 1]), G possède une orbite fermée non triviale et cette orbite est une droite, une conique ou \mathbf{P}^2 .

Supposons que la conique donnée par une forme quadratique non dégénérée q soit une orbite fermée de G . Alors G est un sous-groupe du normalisateur de C dans \mathbf{PGL}_3 , qui est $\mathbf{PO}_3(q) \simeq \mathbf{PGL}_2$. Comme G est semisimple, il s'agit du normalisateur tout entier.

Supposons que G possède une orbite fermée qui soit une droite. Cette droite est projectivement équivalente à la droite D d'équation $z = 0$ donc, quitte à conjuguer G , on peut supposer que l'orbite fermée est D et que G est un sous-groupe du normalisateur

$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de D dans \mathbf{PGL}_3 . Soit $\tilde{G} \rightarrow G$ le revêtement universel de G (voir [CGP, cor.

A.4.11 p.500]). Pour raison de dimension, on a $\tilde{G} = \mathbf{SL}_2$. Comme le groupe $\text{Pic}(\mathbf{SL}_2)$ est trivial, il découle de [Br15, th. 2.14] que tout fibré en droites sur une \mathbf{SL}_2 -variété normale est linéarisable; en particulier $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ est linéarisable. Il existe donc une opération linéaire

de \mathbf{SL}_2 dans \mathbf{A}^3 telle que le morphisme canonique $\mathbf{A}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^2$ soit équivariant. On a une représentation supportée par k^3 et, en regardant l'image réciproque de la droite D , on obtient un plan V dans k^3 qui est stable sous l'opération de \mathbf{SL}_2 . Par hypothèse \mathbf{SL}_2 opère transitivement dans la droite D , donc V est une représentation non triviale de dimension 2. Puisque \mathbf{SL}_2 n'a pas de caractère non trivial, V est une représentation simple et elle est donc donnée par une isogénie de \mathbf{SL}_2 dans lui-même. Quitte à composer par un automorphisme intérieur, une telle isogénie est un morphisme de Frobenius itéré F^r pour un certain $r \geq 0$ (voir remarque 3.3.2). De plus, k^3/V étant de dimension 1, il s'agit de la représentation triviale. Il s'agit donc de déterminer les extensions de la représentation triviale k par V .

On pose $n = p^r$. Alors V est la représentation simple de plus haut poids n . On a une opération du sous-groupe de Borel standard dans \mathbf{A}^1 donnée par le caractère $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a^n$. La représentation induite sur \mathbf{SL}_2 est l'espace $V_n = k[X, Y]_n$ des polynômes homogènes de degré n en deux variables X et Y (pour l'opération standard de \mathbf{SL}_2); remarquons que V est une sous-représentation de V_n , correspondant au plan engendré par X^n et Y^n . D'après [Jan, part II, 2.12(4) et 2.14(4) p.182], on a $\text{Ext}_{\mathbf{SL}_2}^1(k, V) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{SL}_2}(k, V_n/V)$. Les éléments de $\text{Ext}_{\mathbf{SL}_2}^1(k, V)$ correspondent donc aux polynômes $P \in V_n$ tels que pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(k)$, les polynômes P et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P$ soient égaux modulo V . On écrit $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i Y^{n-i}$. Alors pour $a \in k^\times$, on a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot P = \sum_{i=0}^n \alpha_i (a^{-1} X)^i (a Y)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \alpha_i a^{n-2i} X^i Y^{n-i}$. Donc si $i \neq 0$, $i \neq n$ et $n-2i \neq 0$ alors $\alpha_i = 0$. La seule possibilité pour avoir un polynôme qui ne soit pas dans V est d'avoir $p = 2$, $r \geq 1$ et $P = \alpha_{n/2} X^{n/2} Y^{n/2}$. Dans ce cas on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P = \alpha_{n/2} (dX - bY)^{n/2} (-cX + aY)^{n/2} = \alpha_{n/2} ((cd)^{n/2} X^n + (ad + bc) X^{n/2} Y^{n/2} + (ab)^{n/2} Y^n) \equiv P \pmod{V}$ car $ad + bc = 1$. Donc P convient bien.

Si k^3 est l'extension triviale de k par V alors le morphisme correspondant est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PGL}_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a^{p^r} & b^{p^r} & 0 \\ c^{p^r} & d^{p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

et G est le sous-groupe $\begin{bmatrix} \mathbf{SL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $p = 2$, $r \geq 1$ et k^3 est donnée par le polynôme $\lambda X^{2^{r-1}} Y^{2^{r-1}}$ alors le morphisme correspondant est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PGL}_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a^{2^r} & b^{2^r} & \lambda a^{2^{r-1}} b^{2^{r-1}} \\ c^{2^r} & d^{2^r} & \lambda c^{2^{r-1}} d^{2^{r-1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. .$$

Quitte à conjuguer par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, on peut supposer $\lambda = 1$ et alors G est l'image du

morphisme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PGL}_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. .$$

Supposons enfin que G opère transitivement dans \mathbf{P}^2 . Soit $\tilde{G} \rightarrow G$ le revêtement universel de G . Soient $x \in \mathbf{P}^2(k)$ et H son groupe d'isotropie dans \tilde{G} , de sorte que l'on ait $\tilde{G}/H \simeq \mathbf{P}^2$. Le quotient \tilde{G}/H est une variété propre donc $(H)_{\text{red}}^\circ$ est un sous-groupe parabolique (lisse connexe) de \tilde{G} de codimension 2. Le groupe \tilde{G} est semisimple simplement connexe, de rang au plus 2 (car G est un sous-groupe de \mathbf{PGL}_3), donc il est isomorphe à \mathbf{SL}_2 , $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$, \mathbf{SL}_3 , \mathbf{Sp}_4 ou \mathbf{G}_2 . Les sous-groupes paraboliques et leur dimension peuvent se lire sur le système de racines de \tilde{G} (voir par exemple [Hum, 30.1, th.]). On constate alors que \mathbf{SL}_2 , \mathbf{Sp}_4 et \mathbf{G}_2 n'ont pas de sous-groupe parabolique de codimension 2 (les sous-groupes paraboliques maximaux de \mathbf{Sp}_4 et \mathbf{G}_2 ont pour codimensions respectives 3 et 5). D'après le lemme 3.1.15 on ne peut pas avoir $\tilde{G} = \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$ (on aurait $\tilde{G}/H \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$). On en déduit $\tilde{G} = \mathbf{SL}_3$ et $G = \mathbf{PGL}_3$. \square

Remarque 3.4.2 : Sur un corps algébriquement clos, toute conique lisse dans \mathbf{P}^2 est projectivement équivalente à la conique d'équation $xz = y^2$, ce qui découle de la classification des formes quadratiques (quelle que soit la caractéristique). En caractéristique 2, on peut aussi donner un argument plus géométrique, bien connu. Soit C une conique lisse dans \mathbf{P}^2 , donnée par une équation du type $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx = 0$. On a $(d, e, f) \neq 0$, sinon l'équation serait de la forme $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0$. La matrice jacobienne de C au point $[x_0 : y_0 : z_0]$ est $(dy_0 + fz_0 \quad dx_0 + ez_0 \quad fx_0 + ey_0)$ donc la tangente en ce point a pour équation (après simplification) $(dy_0 + fz_0)x + (dx_0 + ez_0)y + (fx_0 + ey_0)z = 0$. En particulier, toutes les tangentes passent par le point $[e : f : d]$. On dit que la courbe C est étrange et que $[e : f : d]$ est un point étrange (voir [Har, ch. IV, 3, def. p.311]). Le point étrange n'est pas sur C , sinon C ne serait pas lisse en ce point. De plus, pour tout point $P \in C(k)$, la conique C et la tangente en P se coupent uniquement en P . Donc si P_1 et P_2 sont deux points de $C(k)$ distincts alors P_1 , P_2 et $[e : f : d]$ ne sont pas alignés. Quitte à appliquer un automorphisme de \mathbf{P}^2 , on peut donc supposer $P_1 = [0 : 0 : 1]$, $P_2 = [1 : 0 : 0]$ et $[e, f, d] = [0 : 1 : 0]$. En particulier C est donnée par l'équation $by^2 + xz = 0$. On a $b \neq 0$ donc, quitte à effectuer un changement de variable linéaire, on peut supposer que l'équation est $xz = y^2$.

De plus, en caractéristique 2, si C est la conique lisse dans \mathbf{P}^2 donnée par une forme quadratique non dégénérée q alors le point étrange est l'unique point fixe de $\mathbf{PO}_3(q)$ dans \mathbf{P}^2 (voir par exemple [Giz, §5]).

Corollaire 3.4.3 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Alors tout sous-groupe lisse connexe semisimple non trivial $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^2} = \mathbf{PGL}_3$ possède une orbite ouverte X dans \mathbf{P}^2 . Les possibilités sont les suivantes :*

- i) $p \neq 2$, G est le normalisateur d'une conique lisse $C \subseteq \mathbf{P}^2$ donnée par une forme quadratique non dégénérée q (donc $G \simeq \mathbf{PO}_3(q) \simeq \mathbf{PGL}_2$) et $X = \mathbf{P}^2 \setminus C$;
- ii) $p = 2$, G est le normalisateur d'une conique lisse $C \subseteq \mathbf{P}^2$ donnée par une forme quadratique non dégénérée q (donc $G \simeq \mathbf{PO}_3(q) \simeq \mathbf{PGL}_2$) et $X = \mathbf{P}^2 \setminus (C \cup \{P\})$ (où P est l'intersection des tangentes de C) ;

iii) G est conjugué au sous-groupe $\begin{bmatrix} \mathbf{SL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ du normalisateur $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de la droite D

d'équation $z = 0$ et $X = \mathbf{P}^2 \setminus (D \cup \{[0 : 0 : 1]\}) \simeq \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

$$iv) \ p = 2, \ G \text{ est conjugué à l'image du morphisme } \begin{cases} \mathbf{SL}_2 & \longrightarrow & \mathbf{PGL}_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{qui}$$

est isomorphe à \mathbf{PGL}_2) et $X = \mathbf{P}^2 \setminus D \simeq \mathbf{A}^2$;

v) $G = \mathbf{PGL}_3$ et $X = \mathbf{P}^2$.

3.4.2 Cas d'un groupe ni semisimple ni résoluble

Proposition 3.4.4 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Alors G est un sous-groupe lisse connexe de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^2} = \mathbf{PGL}_3$ qui n'est ni semisimple ni résoluble si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

i) G est le sous-groupe $\begin{bmatrix} \mathbf{GL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{GL}_2$ (qui est le normalisateur de la droite D d'équation $z = 0$);

ii) G est le sous-groupe $\mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{SL}_2$ de P ;

iii) $G = P$;

iv) G est le sous-groupe $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{G}_a^2$ de $P' = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{GL}_2 \times \mathbf{G}_a^2$;

v) $G = P'$.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que G est réductif. On a la décomposition $G = R(G) \cdot [G, G]$, le radical $R(G)$ est un tore central et le sous-groupe dérivé $[G, G]$ est semisimple; par hypothèse ces deux sous-groupes sont non triviaux. Les différentes possibilités pour $[G, G]$ sont données dans la proposition 3.4.1. On ne peut pas avoir $[G, G] = \mathbf{PGL}_3$.

Supposons que la conique lisse C donnée par une forme quadratique non dégénérée q soit une orbite de $[G, G]$, de sorte que $[G, G]$ soit le normalisateur de C dans \mathbf{PGL}_3 . Pour $t \in R(G)(k)$, $t \cdot C$ est une conique lisse et $[G, G] = t[G, G]t^{-1}$ est le normalisateur de $t \cdot C$. Alors $[G, G]$ stabilise $C \cap t \cdot C$ donc, comme $[G, G]$ opère transitivement dans C , on a $t \cdot C = C$. On en déduit que $R(G)$ stabilise C , donc $R(G)$ est un sous-groupe de $[G, G]$ et $G = [G, G]$, ce qui est exclu.

Supposons que la droite D d'équation $z = 0$ soit une orbite de $[G, G]$. Comme précédemment, $R(G)$ stabilise D donc est un sous-groupe de P . Supposons que $[G, G]$ soit le sous-groupe $\begin{bmatrix} \mathbf{SL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de P . Alors $[G, G]$ fixe le point $[0 : 0 : 1]$ donc, comme précédemment, $R(G)$ fixe également ce point. Donc $R(G)$ est un sous-groupe de $\begin{bmatrix} \mathbf{GL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

et, pour raison de dimension, on a $G = \begin{bmatrix} \mathbf{GL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Supposons désormais que l'on ait

$p = 2$ et que $[G, G]$ soit l'image du morphisme $\begin{cases} \mathbf{SL}_2 & \longrightarrow & \mathbf{PGL}_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$. Soit

$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R(G)(k) \leq P(k)$. Alors pour $a \in k^\times$, comme $R(G)$ est central dans G ,

la matrice M commute avec $N = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$MNM^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\varepsilon a - \beta\delta a^{-1}}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} & -\frac{\alpha\beta(a - a^{-1})}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} & * \\ \frac{\delta\varepsilon(a - a^{-1})}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} & \frac{\alpha\varepsilon a^{-1} - \beta\delta a}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $\beta\delta = \alpha\beta = \delta\varepsilon = 0$. Si $\delta \neq 0$ alors $\varepsilon = 0$ donc $\beta \neq 0$ (car M est inversible), ce qui contredit $\beta\delta = 0$. Donc $\delta = 0$, $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Alors $MNM^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & \gamma(1 - a) \\ 0 & a^{-1} & \eta(1 - a^{-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

donc $\gamma = \eta = 0$. De même M commute avec $N' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $MN'M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

donc $\alpha = \varepsilon$. Enfin, M commute avec $N'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $MN''M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $\varepsilon = 1$. Donc $R(G)$ est trivial, ce qui est exclu.

On suppose désormais que G n'est pas réductif. Le groupe G n'est pas semisimple donc, d'après le théorème de Borel-Tits, il est contenu dans un sous-groupe parabolique maximal de \mathbf{PGL}_3 . Donc, quitte à conjuguer, G est contenu dans P ou P' . On suppose dans un premier temps que G est contenu dans $P \simeq \mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{GL}_2$. En notant G' l'image de G par la projection $\text{pr}_2 : P \rightarrow \mathbf{GL}_2$, on a la suite exacte $1 \rightarrow G \cap \mathbf{G}_a^2 \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$. Comme G n'est pas résoluble, G' contient \mathbf{SL}_2 . En effet, on a $[G', G'] \leq [\mathbf{GL}_2, \mathbf{GL}_2] = \mathbf{SL}_2$ donc si G' ne contenait pas \mathbf{SL}_2 alors $[G', G']$ serait un sous-groupe strict de \mathbf{SL}_2 , donc il serait résoluble. Il existerait donc un entier $n \geq 1$ tel que le terme $D^n(G')$ de la suite dérivée de G' soit nulle. Comme $D^n(G') = \text{pr}_2(D^n(G))$, on aurait donc $D^n(G) \leq \ker \text{pr}_2 = G \cap \mathbf{G}_a^2$ mais $G \cap \mathbf{G}_a^2$ est commutatif donc $D^n(G)$ est trivial, ce qui est impossible car G n'est pas résoluble. Par conséquent on a $G' = \mathbf{SL}_2$ ou \mathbf{GL}_2 .

Le groupe $G \cap \mathbf{G}_a^2$ est commutatif donc l'opération par conjugaison de G dans $G \cap \mathbf{G}_a^2$ descend en une opération de G' , donc $(G \cap \mathbf{G}_a^2)(k)$ est stable sous l'opération naturelle de $\mathbf{SL}_2(k)$ dans $\mathbf{G}_a^2(k)$. Ainsi $(G \cap \mathbf{G}_a^2)(k) = \{0\}$ ou $\mathbf{G}_a^2(k)$. Or l'image du radical unipotent $R_u(G)$ dans G' est triviale, donc $R_u(G)$ est un sous-groupe de $G \cap \mathbf{G}_a^2$. Par hypothèse $R_u(G)$ n'est pas trivial et on en déduit $(G \cap \mathbf{G}_a^2)(k) = \mathbf{G}_a^2(k)$. Donc $G(k)$ contient $\mathbf{G}_a^2(k)$ et G contient \mathbf{G}_a^2 . Par conséquent $G = \mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{SL}_2$ ou $\mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{GL}_2 = P$. Si G est contenu dans P' alors, par le même argument, on a $G = \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{G}_a^2$ ou $\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{G}_a^2 = P'$. \square

Corollaire 3.4.5 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Alors tout sous-groupe lisse connexe non trivial $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{P}^2} = \mathbf{PGL}_3$ qui n'est ni semisimple ni résoluble possède une orbite ouverte X dans \mathbf{P}^2 . À conjugaison près, les possibilités sont les suivantes :*

*i) G est le sous-groupe $\begin{bmatrix} \mathbf{GL}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{GL}_2$ (qui est le normalisa-*

- teur de la droite D d'équation $z = 0$) et $X = \mathbf{P}^2 \setminus (D \cup \{[0 : 0 : 1]\}) \simeq \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- ii) G est le sous-groupe $\mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{SL}_2$ de P et $X = \mathbf{P}^2 \setminus D \simeq \mathbf{A}^2$;
- iii) $G = P$ et $X = \mathbf{P}^2 \setminus D \simeq \mathbf{A}^2$;
- iv) G est le sous-groupe $\mathbf{SL}_2 \rtimes \mathbf{G}_a^2$ de $P' = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{GL}_2 \rtimes \mathbf{G}_a^2$ et $X = \mathbf{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$;
- v) $G = P'$ et $X = \mathbf{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$.

3.4.3 Cas d'un groupe résoluble

L'objectif de cette section est de montrer que, sur un corps algébriquement clos, les surfaces dans \mathbf{P}^2 qui sont homogènes sous l'opération d'un groupe résoluble sont données par le lemme suivant. On déterminera aussi quels sont les groupes qui opèrent.

Lemme 3.4.6 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X un sous-schéma ouvert de \mathbf{P}^2 et $\partial X = \mathbf{P}^2 \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). La surface X est homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe résoluble si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

- i) ∂X est une droite ;
- ii) ∂X est la réunion de deux droites ;
- iii) ∂X est la réunion d'une conique lisse et d'une tangente ;
- iv) ∂X est la réunion de la courbe C d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ et de la droite D d'équation $z = 0$ où $p^r > 2$;
- v) ∂X est la réunion de trois droites.

Si un sous-groupe lisse connexe de \mathbf{PGL}_3 stabilise X alors il doit aussi stabiliser le bord ∂X . On commence donc par déterminer le normalisateur du bord.

Lemme 3.4.7 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient Z un sous-schéma fermé réduit de \mathbf{P}^2 et N le normalisateur de Z dans \mathbf{PGL}_3 .*

1. Si Z est la droite d'équation $z = 0$ alors $N = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Si Z est la réunion des droites d'équations $y = 0$ et $z = 0$ alors la composante neutre est $N^\circ = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. Si Z est la réunion de la conique C d'équation $xz = y^2$ et de la tangente D au point $[1 : 0 : 0]$, d'équation $z = 0$, alors $N = \left\{ \begin{bmatrix} t^2 & 2ta & a^2 \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$.
4. Si Z est la réunion de la courbe C d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ (où $p^r > 2$) et de la droite D d'équation $z = 0$, alors $N = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t^{p^r} & a^{p^r} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$.
5. Si Z est la réunion des droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ alors la composante neutre N° est le tore maximal standard T .

Démonstration. Si Z est une réunion de droites alors N° est le sous-groupe de \mathbf{PGL}_3 qui stabilise chacune des droites (et N est le produit semi-direct de N° par le groupe symétrique permutant les droites). Donc N° est l'intersection des normalisateurs de chacune des droites.

On suppose que Z est la réunion de la conique C d'équation $xz = y^2$ et de la tangente D . Pour raison de degré des courbes, N stabilise C et stabilise D . Donc N stabilise le point d'intersection $[1 : 0 : 0]$ de C et D . Puisque N stabilise la droite D et le point $[1 : 0 : 0]$,

c'est un sous-groupe de $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pour $\begin{bmatrix} b & c & d \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $x' = bx + cy + dz$, $y' = ty + az$ et

$z' = z$, on a $x'z' - y'^2 = (bx + cy + dz)z - (ty + az)^2 = bxy - t^2y^2 + (c - 2ta)yz + (d - a^2)z^2$.

Donc pour toute k -algèbre A , un élément $\begin{bmatrix} b & c & d \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{PGL}_3(A)$ est dans $N(A)$ si et

seulement si $b = t^2$, $c = 2ta$ et $d = a^2$.

On suppose que Z est la réunion de la courbe C d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ (où $p^r > 2$) et de la droite D d'équation $z = 0$. Comme précédemment, N stabilise C et stabilise D . La matrice jacobienne de C en un point $[x : y : z]$ est $(0 \quad -z^{p^r-1} \quad yz^{p^r-2})$ donc, comme $p^r > 2$, l'unique point singulier de C est $[0 : 1 : 0]$. Le groupe N doit stabiliser ce point. En outre, si $[x_0 : y_0 : z_0] \in C(k)$ est un point lisse alors $z_0 \neq 0$ et la tangente à C en ce point a pour équation $z_0y - y_0z = 0$. Donc toutes les tangentes passent par le point $[1 : 0 : 0]$ et N doit stabiliser ce point. Remarquons que D est la droite passant par $[0 : 1 : 0]$ et $[1 : 0 : 0]$.

Puisque ces deux points ont pour normalisateurs respectifs $\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$, N est

le sous-groupe de $\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ stabilisant C . Pour $\begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $x' = tx + az$, $y' = dy + fz$

et $z' = z$, on a $x'^{p^r} - y'z'^{p^r-1} = t^{p^r}x^{p^r} - eyz^{p^r-1} + (a^{p^r} - f)z^{p^r}$. Donc N est donné par $e = t^{p^r}$ et $f = a^{p^r}$. \square

Remarque 3.4.8 :

1. On rappelle que, sur un corps algébriquement clos, toute conique projective lisse est projectivement équivalente à la conique d'équation $xz = y^2$, même en caractéristique 2 (voir la remarque 3.4.2).

2. La courbe C d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ est étrange : toutes les tangentes aux points lisses passent par un même point, à savoir $[1 : 0 : 0]$. De plus, la droite D d'équation $z = 0$ passe par l'unique point singulier $[0 : 1 : 0]$ et le point étrange $[1 : 0 : 0]$, et la multiplicité d'intersection avec C au point singulier vaut $p^r = \deg C$. Cependant ces propriétés ne suffisent pas à caractériser C , car si H est un polynôme homogène de degré p^r-1 alors la courbe d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1} + H(y^p, z^p)$ vérifie aussi ces propriétés, mais en général elle n'est pas projectivement équivalente à C .

Lemme 3.4.9 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient $U = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq$*

\mathbf{PGL}_3 et G un sous-groupe lisse connexe strict de U .

1. Si G est commutatif alors c'est un sous-groupe de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou G est

conjugué par un élément de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ à un sous-groupe de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, b \in \mathbf{G}_a \right\}$.

2. Si G n'est pas commutatif alors il est de la forme $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & b \\ 0 & 1 & f_2(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, b \in \mathbf{G}_a \right\}$

où f_1 et f_2 sont deux p -polynômes non colinéaires tels que $\text{pgcd}(f_1(a), f_2(a)) = a$ dans l'anneau de polynômes $k[a]$. En particulier $p \geq 2$.

Démonstration. Les projections $\text{pr}_{1,2} : U \rightarrow \mathbf{G}_a$ et $\text{pr}_{2,3} : U \rightarrow \mathbf{G}_a$ (avec les notations évidentes) sont des morphismes de groupes algébriques. Si $\text{pr}_{1,2}(G) = \{0\}$ ou $\text{pr}_{2,3}(G) =$

$\{0\}$ alors G est un sous-groupe de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou de $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On suppose désormais que

G est commutatif et que $\text{pr}_{2,3}(G) \neq \{0\}$ et $\text{pr}_{1,2}(G) \neq \{0\}$. En particulier $\text{pr}_{1,2}(G) = \mathbf{G}_a$.

Il existe un élément de $G(k)$ de la forme $g_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_0 \\ 0 & 1 & c_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors pour $g = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in$

$G(k)$ on a $g_0g = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & b_0+b+c \\ 0 & 1 & c_0+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $gg_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & b_0+b+ac_0 \\ 0 & 1 & c_0+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $c = ac_0$.

Comme G est lisse, c'est donc un sous-groupe de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & ac_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, b \in \mathbf{G}_a \right\}$. De

plus $\text{pr}_{2,3}(G) \neq \{0\}$ donc $c_0 \neq 0$. Quitte à conjuguer G par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}$, on peut supposer $c_0 = 1$.

On suppose désormais que G n'est pas commutatif. Le groupe dérivé est lisse connexe et vérifie $[G, G] \leq [U, U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $[G, G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Soit G' l'image de

$(\text{pr}_{1,2}, \text{pr}_{2,3}) : G \rightarrow \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$. On a donc la suite exacte $1 \rightarrow [G, G] \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$.

De plus G' est un groupe lisse connexe unipotent (comme quotient de G) et n'est ni de dimension 0 (sinon G serait commutatif) ni de dimension 2 (sinon on aurait $G = U$).

Donc G' est isomorphe à \mathbf{G}_a et il existe deux p -polynômes non nuls f_1 et f_2 tels que l'inclusion $G' \simeq \mathbf{G}_a \hookrightarrow \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ soit donnée par $a \mapsto (f_1(a), f_2(a))$. Le groupe G n'est pas commutatif donc f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. En particulier on a $p \geq 2$. Enfin, comme l'inclusion ci-dessus est injective (c'est-à-dire que son noyau schématique est trivial), le groupe $\{a \in \mathbf{G}_a \mid f_1(a) = f_2(a) = 0\}$ est trivial donc $\text{pgcd}(f_1(a), f_2(a)) = a$ dans l'anneau de polynômes $k[a]$. \square

Proposition 3.4.10 : Soient $d \geq 0$ et $G = \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m$. Alors les morphismes de groupes algébriques $\iota : G \rightarrow \mathbf{PGL}_3$ injectifs sont, à composition par un automorphisme intérieur de \mathbf{PGL}_2 près, donnés par les cas suivants :

i) $\iota(a, t) = \begin{bmatrix} t^d & 0 & a \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $e \in \mathbf{Z}$ et $\text{pgcd}(d, e) = 1$ (avec la convention $\text{pgcd}(0, e) = e$) ;

$$ii) \iota(a, t) = \begin{bmatrix} t^{d+e} & t^e a & 0 \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ où } e \in \mathbf{Z} \text{ et } \text{pgcd}(d, e) = 1 \text{ (avec la convention } \text{pgcd}(0, e) = e);$$

$$iii) p \geq 2, d = 1 \text{ et } \iota(a, t) = \begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ où } r \geq 1;$$

$$iv) d = 1 \text{ et } \iota(a, t) = \begin{bmatrix} t^2 & 2ta & a^2 \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$v) p \geq 2, d = 1 \text{ et } \iota(a, t) = \begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t^{p^r} & a^{p^r} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ où } r \geq 1 \text{ (et } r > 1 \text{ si } p = 2).$$

Démonstration. On peut supposer que ι est à valeurs dans le sous-groupe de Borel standard $B = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et que $\iota(\mathbf{G}_m)$ est un sous-groupe du tore maximal standard $\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Il existe donc $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $\text{pgcd}(m, n) = 1$ et que pour tout $t \in \mathbf{G}_m$ on ait $\iota(0, t) = \begin{bmatrix} t^m & 0 & 0 \\ 0 & t^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Comme $\iota(\mathbf{G}_a)$ est un sous-groupe unipotent de B , il existe des poly-

nomes f_1, f_2 et f_3 tels que pour tout $a \in \mathbf{G}_a$ on ait $\iota(a, 1) = \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & f_2(a) \\ 0 & 1 & f_3(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Un calcul

matriciel élémentaire montre que $a \mapsto f_1(a)$ et $a \mapsto f_3(a)$ sont des endomorphismes de \mathbf{G}_a , donc f_1 et f_3 sont des p -polynômes. Dans \mathbf{PGL}_3 on a identiquement

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda\mu^{-1}a & \lambda b \\ 0 & 1 & \mu c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc en regardant l'image par ι de $(t^d a, 1) = (0, t)(a, 1)(0, t)^{-1}$ on obtient $\begin{bmatrix} 1 & f_1(t^d a) & f_2(t^d a) \\ 0 & 1 & f_3(t^d a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & t^{m-n} f_1(a) & t^m f_2(a) \\ 0 & 1 & t^n f_3(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Par conséquent les f_i sont des monômes de la forme $f_1(a) = c_1 a^{p^{r_1}}$, $f_2(a) = c_2 a^N$ et $f_3(a) = c_3 a^{p^{r_3}}$ satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} \text{si } c_1 \neq 0 \text{ alors } dp^{r_1} = m - n; \\ \text{si } c_2 \neq 0 \text{ alors } dN = m; \\ \text{si } c_3 \neq 0 \text{ alors } dp^{r_3} = n. \end{cases} \quad (*)$$

Cas 1. On suppose d'abord $c_3 = 0$. Alors $a \mapsto f_2(a)$ est aussi un endomorphisme de \mathbf{G}_a donc f_2 est un p -polynôme et N est une puissance de p .

Sous-cas 1.1. On suppose $c_1 = 0$. Alors, comme ι est injectif, on a $c_2 \neq 0$, $f_2(a) = c_2 a$ et quitte à conjuguer par $\text{diag}(1, 1, \frac{1}{c_2})$, on peut supposer $c_2 = 1$. Donc $\iota(a, t) =$

$\iota(a, 1)\iota(0, t) = \begin{bmatrix} t^m & 0 & a \\ 0 & t^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. D'après les conditions (*) on a $m = d$ (et $e = n$).

Sous-cas 1.2. On suppose $c_1 \neq 0$.

Sous-sous-cas 1.2.1. Si $c_2 = 0$ alors, comme précédemment, on a $c_1 \neq 0$, $f_1(a) = c_1 a$ et quitte à conjuguer par $\text{diag}(1, c_1, 1)$ on peut supposer $c_1 = 1$. Donc $\iota(a, t) = \begin{bmatrix} t^m & t^n a & 0 \\ 0 & t^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et d'après les conditions (*) on a $d = m - n$ (et $e = n$).

Sous-sous-cas 1.2.2. On suppose $c_2 \neq 0$. Quitte à conjuguer par $\text{diag}(1, c_1, c_2)$, on peut supposer $c_1 = c_2 = 1$. On a $d \neq 0$, sinon on aurait $m - n = m = 0$. De plus d divise $m - n$ et n donc, comme $\text{pgcd}(m, n) = 1$, on a $d = 1$. Comme ι est injectif, il existe $r \geq 0$ tel que l'on ait $\begin{cases} f_1(a) = a \\ f_2(a) = a^{p^r} \end{cases}$ ou $\begin{cases} f_1(a) = a^{p^r} \\ f_2(a) = a \end{cases}$. D'après les conditions (*) on a respectivement

$m - n = 1$ et $m = p^r$, ou $m - n = p^r$ et $m = 1$. Donc $\iota(a, t) = \begin{bmatrix} t^{p^r} & t^{p^r-1} a & a^{p^r} \\ 0 & t^{p^r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou

$\begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. En conjuguant la première matrice par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ on obtient la matrice

$\begin{bmatrix} t^{p^r} & a^{p^r} & t^{p^r-1} a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{p^r-1} \end{bmatrix}$, qui est égale dans \mathbf{PGL}_2 à $\begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $p^r = 1$ alors on obtient

la matrice $\begin{bmatrix} t & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, qui est conjuguée à $\begin{bmatrix} t & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Cas 2. On suppose désormais $c_3 \neq 0$.

Sous-cas 2.1. On suppose $c_1 \neq 0$. Si $c_2 = 0$ alors en conjuguant par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ on retrouve

le cas $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ et $c_3 = 0$. On suppose maintenant $c_2 \neq 0$. Quitte à conjuguer par $\text{diag}(\frac{1}{c_1}, 1, c_3)$, on peut supposer $c_1 = c_3 = 1$. D'après le lemme 3.4.9 on a $f_1 = f_3$, donc $p^{r_1} = p^{r_3}$. On a encore $d = 1$. Les conditions (*) donnent $N = (m - n) + n = p^{r_1} + p^{r_3}$. Comme ι est injectif, on a $p^{r_1} = p^{r_3} = 1$ et $N = 2$. La condition $\iota(a, 1)\iota(b, 1) = \iota(a + b, 1)$ donne $2c_2 = 1$. On a donc $p \neq 2$ et en conjuguant par $\text{diag}(2, 1, 1)$ on obtient la matrice $\begin{bmatrix} t^2 & 2ta & a^2 \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sous-cas 2.2. On suppose $c_1 = 0$. Si $c_2 = 0$ alors en conjuguant par $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on retrouve

le cas $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ et $c_3 = 0$. On suppose maintenant $c_2 \neq 0$. Quitte à conjuguer par $\text{diag}(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}, 1)$, on peut supposer $c_2 = c_3 = 1$. On a encore $d = 1$. À nouveau, $a \mapsto f_2(a)$ est un endomorphisme de \mathbf{G}_a donc N est une puissance de p . Comme précédemment, il existe $r \geq 0$ tel que l'on ait $\begin{cases} f_2(a) = a \\ f_3(a) = a^{p^r} \end{cases}$ ou $\begin{cases} f_2(a) = a^{p^r} \\ f_3(a) = a \end{cases}$. Donc $\iota(a, t) = \begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t^{p^r} & a^{p^r} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ou $\begin{bmatrix} t^{p^r} & 0 & a^{p^r} \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. En conjuguant la deuxième matrice par $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on trouve la première matrice. Si $p^r = 1$ alors on obtient la matrice $\begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, qui est conjuguée à $\begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $p^r = 2$ alors en conjuguant par $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on retrouve la matrice du sous-cas précédent. \square

On peut maintenant démontrer le résultat annoncé dans le lemme 3.4.6 et déterminer les groupes résolubles minimaux qui opèrent.

Corollaire 3.4.11 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X un sous-schéma ouvert de \mathbf{P}^2 et $\partial X = \mathbf{P}^2 \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). Alors X est homogène sous l'opération d'un sous-groupe lisse connexe résoluble $G \leq \mathbf{PGL}_3$ et G est minimal pour cette propriété si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu (ces cas sont résumés dans le tableau 3.1 page 88) :*

1. ∂X est la droite d'équation $z = 0$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^2$) :

$$(a) G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid * \in \mathbf{G}_a \right\} \simeq \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a;$$

$$(b) G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, b \in \mathbf{G}_a \right\};$$

(c) $p \geq 2$ et il existe deux p -polynômes f_1 et f_2 non colinéaires tels que $\text{pgcd}(f_1(a), f_2(a)) = a$ dans l'anneau de polynômes $k[a]$ et $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & b \\ 0 & 1 & f_2(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, b \in \mathbf{G}_a \right\}$, et le groupe d'isotropie de $[0 : 0 : 1] \in X(k)$ est $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid f_2(a) = 0 \right\}$;

2. ∂X est la réunion des deux droites d'équations $y = 0$ et $z = 0$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

(a) il existe $d \in \mathbf{Z}$ et $e \in \mathbf{Z}^*$ tels que $\text{pgcd}(d, e) = 1$,

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & a \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$$

et le groupe d'isotropie de $[0 : 1 : 1] \in X(k)$ est $\{(0, t) \in \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m \mid t^e = 1\} \simeq \mu_e$;

(b) il existe $d \in \mathbf{Z}$ et $e \in \mathbf{Z}^*$ tels que $\text{pgcd}(d, e) = 1$,

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} t^{d+e} & t^e a & 0 \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$$

et le groupe d'isotropie de $[0 : 1 : 1] \in X(k)$ est $\{(0, t) \in \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m \mid t^e = 1\} \simeq \mu_e$;

$$(c) \ p \geq 2 \text{ et il existe } r \geq 1 \text{ tels que } G = \left\{ \begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq$$

$\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ et le groupe d'isotropie de $[0 : 1 : 1] \in X(k)$ est $\{(a, t) \in \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_m \mid a^{p^r} + a = 0, t^{p^r-1} = 1\}$;

3. ∂X est la réunion d'une conique lisse et d'une tangente :

$G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ est le normalisateur de ∂X , quitte à conjuguer on a $X = \{[x : y : 1] \in \mathbf{P}^2 \mid x \neq y^2\}$, on a un isomorphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $[x : y : 1] \mapsto (y, x - y^2)$, l'opération de $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ est donnée par $(a, t) \cdot (u, v) = (tu + a, t^2v)$ et le groupe d'isotropie de $[0 : 1 : 1] \in X(k)$ est $\{(0, t) \in \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m \mid t^2 = 1\} \simeq \mu_2$;

4. ∂X est la réunion de la courbe d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ et de la droite d'équation $z = 0$ (où $p^r > 2$) :

$G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ est le normalisateur de ∂X , on a un isomorphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $[x : y : 1] \mapsto (x, y - x^{p^r})$, l'opération de $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ est donnée par $(a, t) \cdot (u, v) = (tu + a, t^{p^r}v)$ et le groupe d'isotropie de $[0 : 1 : 1] \in X(k)$ est $\{(0, t) \in \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m \mid t^{p^r} = 1\} \simeq \mu_{p^r}$;

5. ∂X est la réunion de trois droites (donc $X \simeq (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

G est la composante neutre du normalisateur de ∂X (donc G est un tore maximal de \mathbf{PGL}_3).

Démonstration. Si G est unipotent alors les différentes possibilités sont données par le lemme 3.4.9. On n'a pas $G = U$ car ce groupe n'est pas minimal pour l'orbite $\{[x : y :$

$1] \in \mathbf{P}^2\}$. On ne peut pas non plus avoir $G = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ car ce groupe n'a pas d'orbite de

dimension 2 dans \mathbf{P}^2 . Si G est un tore alors il est conjugué au tore maximal standard.

Si G n'est ni unipotent ni un tore alors, d'après la proposition 3.1.17, G est isomorphe à $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ pour un certain $d \geq 0$. Les différentes possibilités sont alors données par la proposition 3.4.10. On vérifie facilement qu'à chaque fois on a bien une

orbite de dimension 2, sauf dans les cas $\left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & a \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ si $e = 0$ et

$\left\{ \begin{bmatrix} t^{d+e} & t^e a & 0 \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ si $e = 0$.

Dans le cas $G = \left\{ \begin{bmatrix} t^2 & 2ta & a^2 \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$, le groupe est le normalisateur de

la réunion Z de la conique d'équation $xz = y^2$ et de la tangente au point $[1 : 0 : 0]$, qui a pour équation $z = 0$. Donc $X \subseteq \mathbf{P}^2 \setminus Z = \{[x : y : 1] \in \mathbf{P}^2 \mid x \neq y^2\}$. On a $(a, t) \cdot [1 : 0 : 1] = [t^2 + a^2 : a : 1]$ donc pour $[x : y : 1] \in \mathbf{P}^2$, la condition $(a, t) \cdot [1 : 0 : 1] = [x : y : 1]$ est équivalente à $a = y$ et $t^2 = x - y^2$. Donc $X = \mathbf{P}^2 \setminus Z$. Alors $\varphi : [x : y : 1] \mapsto (y, x - y^2)$ donne bien un isomorphisme $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$. De plus $\varphi((a, t) \cdot [x : y : 1]) = \varphi([t^2 a + 2tay + a^2 : ty + a : 1]) = (ty + a, t^2 a + 2tay + a^2 - (ty + a)^2) = (ty + a, t^2(x - y^2))$.

Dans le cas $G = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t^{p^r} & a^{p^r} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$, le groupe est le nor-

malisateur de la réunion Z de la courbe d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ et de la droite d'équation

$z = 0$. Donc $X \subseteq \mathbf{P}^2 \setminus Z = \{[x : y : 1] \in \mathbf{P}^2 \mid y \neq x^{p^r}\}$. On a $(a, t) \cdot [0 : 1 : 1] = [a : t^{p^r} + a^{p^r} : 1]$ donc pour $[x : y : 1] \in \mathbf{P}^2$, la condition $(a, t) \cdot [0 : 1 : 1] = [x : y : 1]$ est équivalente à $a = x$ et $t^{p^r} = y - x^{p^r}$. Donc $X = \mathbf{P}^2 \setminus Z$. Alors $\varphi : [x : y : 1] \mapsto (x, y - x^{p^r})$ donne bien un isomorphisme $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$. De plus $\varphi((a, t) \cdot [x : y : 1]) = \varphi([tx + a : t^{p^r}y + a^{p^r} : 1]) = (tx + a, (t^{p^r}y + a^{p^r}) - (tx + a)^{p^r}) = (tx + a, t^{p^r}(y - x^{p^r}))$.

Dans les autres cas, la surface X et le groupe d'isotropie sont évidents. \square

Remarque 3.4.12 : Soit $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, b \in \mathbf{G}_a \right\}$. Si $p \neq 2$ alors on a l'isomorphisme $\begin{cases} \mathbf{G}_a^2 & \rightarrow & G \\ (u, v) & \mapsto & \begin{bmatrix} 1 & u & v + \frac{1}{2}u^2 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$. Si $p = 2$ alors G est le groupe \mathbf{W}_2 des vecteurs de Witt de longueur 2 (voir la proposition 3.5.16).

3.4.4 Bilan des cas

En réunissant les corollaires 3.4.3, 3.4.5 et 3.4.11, on obtient la liste des surfaces homogènes dans \mathbf{P}^2 .

Théorème 3.4.13 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X un sous-schéma ouvert de \mathbf{P}^2 et $\partial X = \mathbf{P}^2 \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). La surface X est homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

1. ∂X est vide ;
2. ∂X est un point ;
3. ∂X est une droite ;
4. ∂X est la réunion d'une droite et d'un point ;
5. ∂X est une conique lisse si $p \neq 2$, ou la réunion d'une conique lisse et de son point étrange si $p = 2$;
6. ∂X est la réunion de deux droites ;
7. ∂X est la réunion d'une conique lisse et d'une tangente ;
8. ∂X est la réunion de la courbe C d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ et de la droite D d'équation $z = 0$ où $p^r > 2$;
9. ∂X est la réunion de trois droites.

De plus, on peut déterminer les groupes lisses connexes qui opèrent.

Théorème 3.4.14 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient X un sous-schéma ouvert de \mathbf{P}^2 , $\partial X = \mathbf{P}^2 \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit) et G un sous-groupe lisse connexe de \mathbf{PGL}_3 . La surface X est homogène sous l'opération de G si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

1. ∂X est vide (donc $X = \mathbf{P}^2$) : $G = \mathbf{PGL}_3$;

∂X	X	G	opération
une droite	\mathbf{A}^2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a^2$ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$	<p>opération naturelle dans \mathbf{A}^2, $X = \{[x : y : 1] \mid (x, y) \in \mathbf{A}^2\}$</p> <p>$p \neq 2$, $G \simeq \mathbf{G}_a^2$, opération naturelle dans \mathbf{A}^2, $X = \{[x + \frac{1}{2}y^2 : y : 1] \mid (x, y) \in \mathbf{A}^2\}$</p> <p>$p = 2$, $G \simeq \mathbf{W}_2$, opération naturelle de \mathbf{W}_2 dans lui-même, $X = \{[y : x : 1] \mid (x, y) \in \mathbf{W}_2 = \mathbf{A}^2\}$</p>
deux droites	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & b \\ 0 & 1 & f_2(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, p \geq 2, f_1 \text{ et } f_2$ <p>deux p-polynômes non colinéaires tels que $\text{pgcd}(f_1(a), f_2(a)) = a$</p> $\left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & a \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbf{G}_a^d \rtimes \mathbf{G}_m,$ $d \in \mathbf{Z}, e \in \mathbf{Z}^*, \text{pgcd}(d, e) = 1$ $\left\{ \begin{bmatrix} t^{d+e} & t^e a & \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbf{G}_a^d \rtimes \mathbf{G}_m,$ $d \in \mathbf{Z}, e \in \mathbf{Z}^*, \text{pgcd}(d, e) = 1$ $\left\{ \begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m,$ $p \geq 2, r \geq 1$	<p>$(a, t) \cdot (x, y) = (t^d x + a, t^e y)$, $X = \{[x : y : 1] \mid y \neq 0\}$</p> <p>$(a, t) \cdot (x, y) = (t^d x + a, t^e y)$, $X = \{[xy : y : 1] \mid y \neq 0\}$</p> <p>$(a, t) \cdot (x, y) = (tx + a + t^{1-p^r} a^{p^r} y, t^{1-p^r} y)$, $X = \{[x : y : 1] \mid y \neq 0\}$</p>
une conique lisse et une tangente	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$N(\partial X) = \left\{ \begin{bmatrix} t^2 & 2ta & a^2 \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$	<p>$(a, t) \cdot (x, y) = (tx + a, t^2 y)$, $X = \{[y + x^2 : x : 1] \mid y \neq 0\} = \{[u : v : 1] \mid u \neq v^2\}$</p>
$(x^{p^r} = yz^{p^r-1}) \cup (z = 0)$, $p^r > 2$	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$N(\partial X) = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 & a \\ 0 & t^{p^r} & a^{p^r} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$	<p>$(a, t) \cdot (x, y) = (tx + a, t^{p^r} y)$, $X = \{[x : y + x^{p^r} : 1] \mid y \neq 0\} = \{[u : v : 1] \mid v \neq u^{p^r}\}$</p>
trois droites	$\mathbf{A}_*^1 \times \mathbf{A}_*^1$	tore maximal $N(\partial X)^\circ \simeq \mathbf{G}_m^2$	opération naturelle dans $\mathbf{A}_*^1 \times \mathbf{A}_*^1$, $X = \{[x : y : 1] \mid x \neq 0, y \neq 0\}$

TABLE 3.1 – Surfaces homogènes dans \mathbf{P}^2 sous un groupe résoluble

2. ∂X est un point, par exemple $[0 : 0 : 1] : G$ est le sous-groupe parabolique $\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \simeq$

$$\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{G}_a^2 \text{ ou son sous-groupe } \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{SL}_2 & & 0 \\ & & 0 \\ * & * & 1 \end{array} \right];$$

3. ∂X est une droite, par exemple la droite d'équation $z = 0$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^2$) :

(a) $p = 2$ et $G \simeq \mathbf{PGL}_2$ est l'image du morphisme $\mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_3$ donné par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ c^2 & d^2 & cd \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

(b) G est le sous-groupe parabolique $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a^2 \rtimes \mathbf{GL}_2$ ou son sous-groupe

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{SL}_2 & & * \\ & & * \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(c) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $\left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ (où $(d, e) \in \mathbf{Z}^2$ et $\text{pgcd}(d, e) = 1$)

ou $\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(d) $G = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $\left\{ \begin{bmatrix} t^d & * & * \\ 0 & t^e & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ (où $(d, e) \in \mathbf{Z}^2$ et $\text{pgcd}(d, e) = 1$)

ou G est le sous-groupe de Borel $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(e) $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbf{A}^2 \right\}$ ou $\left\{ \begin{bmatrix} t^2 & ta & b \\ 0 & t & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbf{A}^2, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ ou

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 & t_2 a & b \\ 0 & t_2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbf{A}^2, (t_1, t_2) \in \mathbf{G}_m^2 \right\};$$

(f) $p \geq 2$ et $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & b \\ 0 & 1 & f_2(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbf{A}^2 \right\}$ où f_1 et f_2 sont deux p -

polynômes non colinéaires tels que $\text{pgcd}(f_1(a), f_2(a)) = a$ dans l'anneau de polynômes $k[a]$;

4. ∂X est la réunion d'une droite et d'un point, par exemple la droite d'équation $z = 0$

et le point $[0 : 0 : 1]$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$) : $G = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{GL}_2$ ou son

sous-groupe \mathbf{SL}_2 ;

5. ∂X est une conique lisse si $p \neq 2$, ou la réunion d'une conique lisse et de son point étrange si $p = 2$: $G \simeq \mathbf{PGL}_2$ est le normalisateur de la conique;

6. ∂X est la réunion de deux droites, par exemple les droites d'équation $z = 0$ et $y = 0$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

$$(a) G = \left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\} \text{ (où } d \in \mathbf{Z}, e \in \mathbf{Z}^* \text{ et } \text{pgcd}(d, e) = 1 \text{) ou}$$

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(b) G = \left\{ \begin{bmatrix} t^{d+e} & * & 0 \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\} \text{ (où } d \in \mathbf{Z}, e \in \mathbf{Z}^* \text{ et } \text{pgcd}(d, e) = 1 \text{) ou}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c) G = \left\{ \begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \text{ (où } p^r > 2 \text{);}$$

$$(d) G = \left\{ \begin{bmatrix} t^d & * & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\} \text{ (où } d \in \mathbf{Z}, e \in \mathbf{Z}^* \text{ et } \text{pgcd}(d, e) = 1 \text{) ou}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

7. ∂X est la réunion d'une conique lisse et d'une tangente : $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ est le normalisateur de ∂X ;

8. ∂X est la réunion de la courbe d'équation $x^{p^r} = yz^{p^r-1}$ et de la droite d'équation $z = 0$ où $p^r > 2$: $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ est le normalisateur de ∂X ;

9. ∂X est la réunion de trois droites (donc $X \simeq (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) : G est la composante neutre du normalisateur de ∂X (donc c'est un tore maximal).

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où G est résoluble (les autres cas sont déjà traités dans les corollaires 3.4.3 et 3.4.5). On a la décomposition $G = R_u(G) \rtimes T_0$ où T_0 est un tore maximal de G , que l'on peut supposer être contenu dans le tore maximal standard T de \mathbf{PGL}_3 . Alors G contient un sous-groupe lisse connexe G_0 qui opère transitivement dans X et qui est minimal pour cette propriété. Les possibilités pour G_0 sont données par le corollaire 3.4.11.

Cas 1. Supposons que ∂X soit la droite d'équation $z = 0$. Alors G_0 est unipotent, donc c'est un sous-groupe de $R_u(G)$.

On suppose d'abord $G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $R_u(G) = G_0$ alors, suivant que T_0 soit de

dimension 0, 1 ou 2, on obtient les groupes du cas 3c. Si G_0 est un sous-groupe strict de $R_u(G)$ alors $R_u(G) = R_u(B)$ donc on obtient les groupes du cas 3d.

On suppose maintenant $G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbf{A}^2 \right\}$. Si $R_u(G) = G_0$ alors, pour

montrer que l'on obtient les groupes du cas 3e, il suffit de traiter le cas où T_0 est de

dimension 1. Il est alors de la forme $T_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ où $(d, e) \in \mathbf{Z}^2$ et $\text{pgcd}(d, e) = 1$. On a

$$\begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t^{d-e}a & t^d b \\ 0 & 1 & t^e a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc, comme $R_u(G)$ est normalisé par T_0 , on a au signe près $d = 2$ et $e = 1$. Si G_0 est un sous-groupe strict de $R_u(G)$ alors $R_u(G) = R_u(B)$ donc on retrouve les groupes du cas 3d.

On suppose enfin $G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & f_1(a) & b \\ 0 & 1 & f_2(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbf{A}^2 \right\}$ où f_1 et f_2 sont deux p -

polynômes non colinéaires tels que $\text{pgcd}(f_1(a), f_2(a)) = a$ dans l'anneau de polynômes $k[a]$. Il suffit de montrer que G_0 n'est normalisé par aucun sous-tore non trivial de T . La projection $(\text{pr}_{12}, \text{pr}_{23}) : G_0 \rightarrow \mathbf{G}_a^2$ est un morphisme de groupes et son image est l'image du morphisme $\mathbf{G}_a \rightarrow \mathbf{G}_a^2$ donné par $a \mapsto (f_1(a), f_2(a))$ (par hypothèse, le noyau schématique de ce morphisme est trivial). Donc si G_0 était normalisé par le tore de dimension 1 formé

des éléments du type $\begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ alors ce tore opérerait dans \mathbf{G}_a avec un certain poids

w , de sorte que l'on aurait $t^{d-e}f_1(a) = f_1(t^w a)$ et $t^d f_1(a) = f_1(t^w a)$. Si f_2 n'est pas un monôme alors $e = w = 0$ donc $d = 0$, ce qui est impossible. Si f_2 est un monôme alors f_1 n'est pas un monôme (car f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires et leur pgcd vaut a) donc de même $d = e = 0$, ce qui est impossible.

Cas 2. Supposons que ∂X soit la réunion des droites d'équations $z = 0$ et $y = 0$. On

sait déjà que G est un sous-groupe de $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, qui est la composante neutre du nor-

malisateur de ∂X . On a $G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t^d & 0 & * \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ ou $\left\{ \begin{bmatrix} t^{d+e} & * & 0 \\ 0 & t^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ ou

$\left\{ \begin{bmatrix} t & t^{1-p^r} a^{p^r} & a \\ 0 & t^{1-p^r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$. Donc si G est un sous-groupe strict de $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et contient strictement G_0 alors $R_u(G) = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $T_0 = T$. On obtient les groupes

des cas 6a à 6d (le sous-groupe $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a^{p^r} & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{G}_a \right\}$ n'est pas normalisé par T). \square

3.5 Cas d'une surface dans \mathbf{F}_n

On commence par rappeler la structure du groupe $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ pour $n \geq 2$ (voir [Giz, §3]). La surface de Hirzebruch $\mathbf{F}_n = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$ est munie d'un morphisme $\pi : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui en fait une surface réglée. On a une opération de \mathbf{G}_m dans la variété

$S = \mathbf{P}^1 \times (\mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\})$ donnée par $\lambda \cdot ([u : v], (x, y)) = ([\lambda^n u : v], (\lambda x, \lambda y))$. On a un \mathbf{G}_m -torseur $\varphi : S \rightarrow \mathbf{F}_n$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{F}_n \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\} & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

où $p : \mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{P}^1$ est le quotient par \mathbf{G}_m . Par abus, on écrit encore les éléments de \mathbf{F}_n sous la forme $([u : v], (x, y))$ et le morphisme π est donné par $\pi([u : v], (x, y)) = [x : y]$. De plus π possède deux sections particulières $s_0 : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{F}_n$ et $s_\infty : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{F}_n$ données par $s_0([x, y]) = ([0 : 1], (x, y))$ et $s_\infty([x, y]) = ([1 : 0], (x, y))$. On note encore s_0 et s_∞ les images de ces sections, qui sont donc des courbes dans \mathbf{F}_n isomorphes à \mathbf{P}^1 . Alors s_∞ est l'unique courbe de \mathbf{F}_n d'auto-intersection strictement négative (celle-ci vaut $-n$). En outre, $L_n = \mathbf{F}_n \setminus s_\infty$ muni de $\pi : L_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ est le fibré en droites de degré n sur \mathbf{P}^1 : les éléments de L_n sont de la forme $([u : 1], (x, y))$ et si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors $([\frac{1}{y^n}u : 1], (\frac{x}{y}, 1)) = ([u : 1], (x, y)) = ([\frac{1}{x^n}u : 1], (1, \frac{y}{x}))$.

On note V_n le groupe vectoriel associé à l'espace $k[x, y]_n$ des polynômes homogènes de degré n en deux variables x et y . Le groupe \mathbf{GL}_2 opère à gauche dans V_n par $M \cdot f = f \circ M^{-1}$. Le groupe $V_n \rtimes \mathbf{GL}_2$ opère dans \mathbf{F}_n par

$$(f, M) \cdot ([u : v], (x, y)) = ([u + vf(ax + by, cx + dy) : v], (ax + by, cx + dy))$$

pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cette opération descend en une opération fidèle de $V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ où on identifie μ_n au sous-groupe d'homothéties $\{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\}$ de \mathbf{GL}_2 . On a alors

$$\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}.$$

De plus la courbe s_∞ est stable par $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$, et $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ et le sous-groupe $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ opèrent transitivement dans le complémentaire $L_n = \mathbf{F}_n \setminus s_\infty$.

Dans toute cette section, on suppose que le corps k est algébriquement clos.

3.5.1 Cas d'un groupe semisimple

Lemme 3.5.1 : Soit $\varphi : B_{\mathbf{SL}_2} \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$ un morphisme de groupes algébriques, où $B_{\mathbf{SL}_2}$ et $B_{\mathbf{PGL}_2}$ sont les sous-groupes de Borel standard de \mathbf{SL}_2 et \mathbf{PGL}_2 . Alors, à composition par un automorphisme intérieur de $B_{\mathbf{PGL}_2}$ près, on a l'alternative suivante :

i) il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que φ soit donné par $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

ii) il existe $s \geq 0$ tel que $\varphi = \text{can} \circ F^s$ où $\text{can} : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ est le morphisme quotient et F est le morphisme de Frobenius.

Démonstration. Le morphisme φ induit un morphisme de $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \mathbf{G}_a$ dans $\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbf{G}_a$ (car ce sous-groupe est le plus grand sous-groupe unipotent de $B_{\mathbf{PGL}_2}$). Il existe donc un p -polynôme f tel que l'on ait $\varphi \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ identiquement.

L'image du tore maximal standard de \mathbf{SL}_2 par φ est un tore donc, quitte à composer par un automorphisme intérieur de $B_{\mathbf{PGL}_2}$, on peut supposer que cette image est un sous-groupe du tore maximal standard de \mathbf{PGL}_2 . Donc φ induit un caractère du tore et il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ identiquement. On a alors

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a^n & a^n f(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & a^2 b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & f(a^2 b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & f(a^2 b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $f(a^2 b) = a^n f(b)$ identiquement. Si f est le polynôme nul alors on a $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si f n'est pas nul alors n est pair et f est un monôme de degré $\frac{n}{2}$. Comme f est un p -polynôme, il existe donc $\lambda \in k^*$ et $s \geq 0$ tel que $f(b) = \lambda b^{p^s}$, et alors $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a^{2p^s} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda a^{-p^s} b^{p^s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{2p^s} & \lambda a^{p^s} b^{p^s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{p^s} & \lambda b^{p^s} \\ 0 & a^{-p^s} \end{bmatrix}$. Soit $\mu \in k^*$ tel que $\mu^2 = \frac{1}{\lambda}$. Alors en composant par la conjugaison par $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}$ on obtient $\varphi = \text{can} \circ F^s$. \square

Lemme 3.5.2 : *On suppose $p \neq 2$. Soit $G = \mathbf{SL}_2$ et $B_{\mathbf{PGL}_2}$ le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{PGL}_2 . Alors pour $r \geq 0$, le seul morphisme de groupes $\varphi : G_r \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$ est le morphisme trivial, où G_r est le noyau du morphisme de Frobenius itéré F^r .*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r . Pour $r = 0$ il n'y a rien à faire car G_r est le groupe trivial. Traitons le cas $r = 1$. Le morphisme φ induit un morphisme d'algèbres de Lie $f : \text{Lie}(G_1) = \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{Lie}(B_{\mathbf{PGL}_2})$. Or $p \neq 2$ donc $[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2] = \mathfrak{sl}_2$, mais $\text{Lie}(B_{\mathbf{PGL}_2})$ est résoluble, donc f est le morphisme nul. Donc on a $\text{Lie}(\ker \varphi) = \ker f = \text{Lie}(G_1)$. Comme les groupes de hauteur au plus 1 sont déterminés par leur algèbre de Lie (voir [DG, II, §7, cor. 4.3 p.283]), on a $\ker \varphi = G_1$, donc φ est trivial.

Soit $r > 1$ tel que tout morphisme $G_{r-1} \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$ soit trivial. D'après ce qui précède, la composée $G_1 \hookrightarrow G_r \xrightarrow{\varphi} B_{\mathbf{PGL}_2}$ est triviale, donc φ se factorise en $G_r \rightarrow G_r/G_1 \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$. Or $G_r/G_1 \simeq G_{r-1}$ donc, par hypothèse de récurrence, le morphisme $G_r/G_1 \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$ est trivial et donc φ aussi. \square

Lemme 3.5.3 : *On suppose $p = 2$. Soient $G = \mathbf{SL}_2$, et $B_{\mathbf{SL}_2}$ et $B_{\mathbf{PGL}_2}$ les sous-groupes de Borel standard de \mathbf{SL}_2 et \mathbf{PGL}_2 . Alors pour $r \geq 0$ et tout morphisme de groupes surjectif $\varphi : B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$, la restriction de φ à G_r est le morphisme trivial, où G_r est le noyau du morphisme de Frobenius itéré F^r .*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r . Pour $r = 0$ il n'y a rien à faire car G_r est le groupe trivial. Traitons le cas $r = 1$. Fixons quelques notations. L'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_2 est le sous-espace de \mathfrak{gl}_2 engendré par I_2 , $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifient la relation $[E_{12}, E_{21}] = I_2$. L'algèbre de Lie \mathfrak{pgl}_2 s'identifie au quotient $\mathfrak{gl}_2 / \text{Vect}(I_2)$; l'algèbre de Lie \mathfrak{b} de $B_{\mathbf{PGL}_2}$ s'identifie au sous-espace engendré par les images de $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et E_{12} dans $\mathfrak{gl}_2/\text{Vect}(I_2)$, que l'on note encore E_{11} et E_{12} et qui vérifient la relation $[E_{11}, E_{12}] = E_{12}$ (ce qui implique en particulier que le centre de \mathfrak{b} est trivial).

Le morphisme φ induit un morphisme de p -algèbres de Lie $f : \text{Lie}(G_1) = \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{b}$. Comme $f(I_2)$ est dans le centre de \mathfrak{b} , il faut $f(I_2) = 0$. On écrit $f(E_{12}) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où α et β sont des éléments de k . Comme f est un morphisme de p -algèbres de Lie, on a $0 = f(E_{12}^p) = f(E_{12})^p = \begin{bmatrix} \alpha^p & \alpha\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc $\alpha = 0$. De même on écrit $f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où γ est un élément de k . Les morphismes entre groupes de hauteur au plus 1 sont déterminés par les morphismes induits sur les algèbres de Lie (voir [DG, II, §7, cor. 4.3 p.283]), donc la restriction de φ à G_1 est donnée par $\varphi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = I_2$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G_1$ on a $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xz & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x^2 y \\ z & xyz + x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ car $x^2 = 1$ et $xt - yz = 1$, donc

$$\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta xy + \gamma xz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme 3.5.1, quitte à composer φ par un automorphisme intérieur de $B_{\mathbf{PGL}_2}$, il existe $s \geq 0$ tel que la restriction de φ à $B_{\mathbf{SL}_2}$ soit égale à $\text{can} \circ F^s$ où $\text{can} : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ est le morphisme quotient. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B_{\mathbf{SL}_2}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in G_1$. On a $ANA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{by}{a} & -b^2 y \\ \frac{y}{a^2} & 1 - \frac{by}{a} \end{pmatrix} \in G_1$ donc

$$\varphi(ANA^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \beta b^2 y + \frac{\gamma y}{a^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

car $y(1 + \frac{by}{a}) = y$. Or

$$\varphi(A)\varphi(N)\varphi(A)^{-1} = \begin{bmatrix} a^{p^s} & b^{p^s} \\ 0 & a^{-p^s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-p^s} & -b^{p^s} \\ 0 & a^{p^s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a^{2p^s} \gamma y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc $\beta = \gamma = 0$, donc la restriction de φ à G_1 est le morphisme trivial.

Soit $r > 1$ tel que la propriété soit vraie pour tous les morphismes surjectifs $B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_{r-1} \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$. Le quotient de $B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r$ par G_1 est donné par $F : B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r \rightarrow B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_{r-1}$. Donc d'après le cas $r = 1$, le morphisme φ se factorise en $B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r \xrightarrow{F} B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_{r-1} \xrightarrow{\bar{\varphi}} B_{\mathbf{PGL}_2}$ et $\bar{\varphi}$ est surjectif. Par hypothèse de récurrence, la restriction de $\bar{\varphi}$ à G_{r-1} est le morphisme trivial. Donc la restriction de φ à G_r est le morphisme trivial. \square

Proposition 3.5.4 : Soit $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ un sous-groupe lisse connexe semi-simple. Alors G possède une orbite ouverte X dans \mathbf{F}_n si et seulement si, à conjugaison près, G est l'image de \mathbf{SL}_2 dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ et X est le complémentaire de $s_\infty \cup s_0$ dans \mathbf{F}_n (c'est-à-dire le complémentaire de la section nulle dans le fibré en droites L_n).

Démonstration. On pose $\mathcal{G} = \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$. L'image de G par $\text{pr}_2 : \mathcal{G} \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ est un groupe semisimple non trivial (sinon G serait un sous-groupe du groupe unipotent V_n), donc

ce groupe est de rang 1. De plus si T est un tore maximal de G alors son image est $\frac{T \cdot V_n}{V_n} \simeq \frac{T}{T \cap V_n} \simeq T$. Donc G est de rang 1. Soit $\mathbf{SL}_2 \rightarrow G$ le revêtement universel (voir [CGP, cor. A.4.11 p.500]). On veut montrer que l'image de $\mathbf{SL}_2 \rightarrow G \hookrightarrow \mathcal{G}$ est l'image de \mathbf{SL}_2 dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$, en analysant l'opération des groupes dans les fibres du morphisme $\pi : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$. Pour simplifier les notations, on commet l'abus d'écriture $G = \mathbf{SL}_2$.

Le groupe \mathcal{G} opère dans la base \mathbf{P}^1 de π à travers le quotient $\mathcal{G} \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ et le morphisme π est \mathcal{G} -équivariant. Alors $\pi(X)$ est une G -orbite dans \mathbf{P}^1 , et elle n'est pas triviale car X est un ouvert de \mathbf{F}_n et π n'est pas constant. Donc l'opération de G dans \mathbf{P}^1 n'est pas triviale et, comme G est semisimple, le morphisme $G \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ est surjectif et on a $\pi(X) = \mathbf{P}^1$.

Le groupe d'isotropie du point $\infty = [1 : 0] \in \mathbf{P}^1(k)$ dans \mathcal{G} est $\mathcal{H} = V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$, où B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{GL}_2 . Soit H le groupe d'isotropie de ∞ dans G , qui est l'image réciproque de \mathcal{H} par le morphisme $G \rightarrow \mathcal{G}$. On a $G/H \simeq \mathbf{P}^1$ donc, d'après la remarque 3.1.16, quitte à précomposer le morphisme $G \rightarrow \mathcal{G}$ par un automorphisme intérieur de G , il existe $r \geq 0$ tel que $H = (F^r)^{-1}(B_{\mathbf{SL}_2}) = B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r$ où $B_{\mathbf{SL}_2}$ est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{SL}_2 . De plus le morphisme π est \mathcal{G} -équivariant donc la fibre schématique Z de π au-dessus de ∞ est stable sous l'opération de \mathcal{H} (et donc de H) dans \mathbf{F}_n .

En utilisant les notations du début de la section, Z s'écrit comme l'ensemble des $([u : v], (1, 0))$ pour $[u : v] \in \mathbf{P}^1$. L'opération de \mathcal{H} dans Z est donnée par

$$(f, M) \cdot ([u : v], (1, 0)) = ([u + vf(a, 0) : v], (a, 0)) = ([\frac{1}{a^n}(u + vf(a, 0)) : v], (1, 0))$$

où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. En particulier \mathcal{H} opère trivialement dans le point $P = ([1 : 0], (1, 0))$ (qui est un point de la section s_∞ de π).

Le point k -rationnel P est fixe sous l'opération de H . Par conséquent l'opération de H dans $Z \simeq \mathbf{P}^1$ donne un morphisme $\varphi : H \rightarrow B_{\mathbf{PGL}_2}$, où $B_{\mathbf{PGL}_2}$ est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{PGL}_2 . Soit $Y = Z \cap X$, qui est la fibre de $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ au-dessus de ∞ . Comme $H(k)$ opère transitivement dans $Y(k)$, le morphisme φ n'est pas trivial.

Supposons que φ soit surjectif et montrons que cela conduit à une impossibilité. Dans ce cas H opère transitivement dans $Z \setminus \{P\} \simeq \mathbf{A}^1$ donc, comme G permute transitivement les fibres de π , on trouve que X est le complémentaire de s_∞ dans \mathbf{F}_n . D'après les lemmes 3.5.2 et 3.5.3, la restriction de φ à G_r est triviale. Donc φ se factorise en $H = B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r \xrightarrow{F^r} B_{\mathbf{SL}_2} \xrightarrow{\bar{\varphi}} B_{\mathbf{PGL}_2}$. De plus $\bar{\varphi}$ est également surjectif donc, d'après le lemme 3.5.1, quitte à composer par un automorphisme intérieur, il existe $s \geq 0$ tel que $\bar{\varphi} = \text{can} \circ F^s$ où $\text{can} : \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ est le morphisme quotient, donc $\varphi = \text{can} \circ F^{r+s}$. Donc X est isomorphe au fibré associé $G \times^H \mathbf{A}^1$, c'est-à-dire au complémentaire dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ du graphe du morphisme de Frobenius $F^s : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$, ce qui est impossible.

Donc le morphisme φ n'est pas surjectif. Montrons que la restriction de φ à G_r est triviale. Si $p \neq 2$ alors d'après le lemme 3.5.2 il n'y a rien à faire. On suppose désormais $p = 2$. D'après le lemme 3.5.1, quitte à composer par un automorphisme intérieur, $\varphi(B_{\mathbf{SL}_2})$ est un sous-groupe lisse du tore maximal standard $T_{\mathbf{PGL}_2}$. Ce sous-groupe ne peut pas être trivial sinon $\varphi(H)$ serait de dimension 0, ce qui est impossible car $H(k)$ opère transitivement dans $Y(k)$. Donc $\varphi(H)$ est un sous-groupe connexe de dimension 1 de $B_{\mathbf{PGL}_2}$ contenant $T_{\mathbf{PGL}_2}$. Il est donc de la forme $U_{p^s} \rtimes T_{\mathbf{PGL}_2}$ où $U_{p^s} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b^{p^s} = 0 \right\}$ (voir

[Knop, th. 5.1]), et le point $0 \in \mathbf{A}^1$ est stable par H . Alors l'isomorphisme $\pi : \{0\} \rightarrow \{\infty\}$ est H -invariant donc il faut $s = 0$. Pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_r$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bd^{p^r-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bcd^{p^r-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cd^{p^r-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Les images par φ des groupes unipotents $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b'^{p^r} = 0 \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & 1 \end{pmatrix} \mid c'^{p^r} = 0 \right\}$ sont des sous-groupes du tore $T_{\mathbf{PGL}_2}$ donc sont triviales. Comme dans la démonstration du lemme 3.5.3, la restriction de φ à $\left\{ \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & a'^{-1} \end{pmatrix} \mid a'^{p^r} = 1 \right\}$ est triviale. Donc la restriction de φ à G_1 est triviale. Donc φ se factorise en $H \rightarrow H/G_1 = B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_{r-1} \rightarrow T_{\mathbf{PGL}_2}$ et $\pi : Z \setminus \{P\} \rightarrow \{\infty\}$ est $(B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_{r-1})$ -invariant. Par récurrence immédiate sur r , on en déduit que la restriction de φ à G_r est triviale.

Donc φ se factorise en $H = B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r \xrightarrow{F^r} B_{\mathbf{SL}_2} \xrightarrow{\bar{\varphi}} B_{\mathbf{PGL}_2}$. D'après le lemme 3.5.1, quitte à composer par un automorphisme intérieur, il existe $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ tel que $\bar{\varphi}$ soit donné par $\bar{\varphi} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que Y est isomorphe à $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ et, quitte

à tordre toutes les opérations par F^r et par $\begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ M & \longmapsto & {}_tM^{-1} \end{cases}$, on a $m \geq 0$ et X est G -

isomorphe au fibré associé $G \overset{H}{\times} Y$ où $H = B_{\mathbf{SL}_2}$ opère dans Y à travers $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto a^m$.

Donc X est isomorphe au complémentaire de la section nulle et de la section à l'infini dans \mathbf{F}_m , donc $m = n$. \square

Corollaire 3.5.5 : *Les sous-groupes semisimples (non triviaux) de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \times \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ sont les conjugués de l'image de \mathbf{SL}_2 dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$.*

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 3.5.4, tout sous-groupe semisimple non trivial de $\mathcal{G} = \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ est l'image d'un morphisme non trivial $G = \mathbf{SL}_2 \rightarrow \mathcal{G}$. Il suffit de montrer qu'un tel sous-groupe possède une orbite ouverte. Si G opère trivialement dans la base du morphisme $\pi : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ alors la fibre $Z = \pi^{-1}(\infty) \simeq \mathbf{P}^1$ est stable par G . Le point $P_\infty = ([1 : 0], (1, 0)) \in Z(k)$ est fixe donc le morphisme $G \rightarrow \mathbf{PGL}_2$ donné par l'opération de G dans Z n'est pas surjectif. Donc ce morphisme est trivial, c'est-à-dire que G opère trivialement dans Z . Alors G opère trivialement dans \mathbf{F}_n , ce qui est absurde.

Donc G opère transitivement dans la base \mathbf{P}^1 . Soit H le groupe d'isotropie de ∞ dans G . L'opération de H dans Z donne un morphisme $\varphi : H \rightarrow \mathbf{PGL}_2$. Quitte à précomposer le morphisme $G \rightarrow \mathcal{G}$ par un automorphisme intérieur, il existe $r \geq 0$ tel que $H = (F^r)^{-1}(B_{\mathbf{SL}_2}) = B_{\mathbf{SL}_2} \cdot G_r$ où $B_{\mathbf{SL}_2}$ est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{SL}_2 . Si l'image de $B_{\mathbf{SL}_2}$ par φ n'est pas triviale alors G possède une orbite ouverte : on peut supposer que cette image contient le tore maximal standard $T_{\mathbf{PGL}_2}$ et, en notant C_0 et C_∞ les orbites des points $P_0 = ([0 : 1], (1, 0))$ et $P_\infty = ([1 : 0], (1, 0))$ de $Z(k)$ sous l'opération de G , pour tous points k -rationnels x et y de $\mathbf{F}_n \setminus (C_0 \cup C_\infty)$ il existe un élément de $G(k)$ qui envoie x sur y (il existe g et g' dans $G(k)$ tels que gx et $g'y$ soient dans $Z \setminus \{P_\infty, P_0\}$ et il existe $h \in H(k)$ qui envoie gx sur $g'y$ donc $y = (g')^{-1}hgx$). Supposons désormais que l'image soit triviale. Les sous-groupes de H contenant $B_{\mathbf{PGL}_2}$ sont les $B_{\mathbf{PGL}_2} \cdot G_s$ pour $0 \leq s \leq r$ (voir [Knop, th. 5.1]) et le seul qui soit distingué est H lui-même. En effet,

pour $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B_{\mathbf{SL}_2}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in G_r \setminus G_{r-1}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (a - a^{-1})c & a^{-1} \end{pmatrix}$$

donc pour que, pour tout a , on obtienne un élément $B_{\mathbf{PGL}_2} \cdot G_s = (F^s)^{-1}(B_{\mathbf{SL}_2})$, il faut $s = r$. Par conséquent le morphisme φ est trivial, c'est-à-dire que H opère trivialement dans Z . On en déduit que pour $x \in Z(k)$, le groupe d'isotropie de x dans G est égal à H , de sorte que l'orbite de x sous l'opération de G est une section de π . Or le seul sous-groupe de \mathcal{G} qui stabilise toutes les sections de π est le groupe trivial, ce qui est contradictoire. \square

Remarque 3.5.6 : Si k est de caractéristique nulle alors ce résultat est directement donné par un théorème de George Mostow sur l'existence et l'unicité à conjugaison près d'une décomposition de Levi (voir [Mos], ou [Hoch, ch. VIII, th. 4.3 p.117] pour un énoncé plus fort sur les sous-groupes réductifs d'un groupe affine).

3.5.2 Cas d'un groupe ni semisimple ni résoluble

Proposition 3.5.7 : Les sous-groupes réductifs connexes de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ sont les conjugués des tores de $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$, les conjugués de l'image de \mathbf{SL}_2 dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ et les conjugués de $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$.

Démonstration. Les sous-groupes donnés dans l'énoncé sont bien réductifs. Réciproquement, soit G un sous-groupe réductif connexe de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$. On a la décomposition $G = R(G) \cdot [G, G]$, le radical $R(G)$ est un tore central et le sous-groupe dérivé $[G, G]$ est semisimple. Si $[G, G]$ est trivial alors G est un tore, donc il est contenu dans un conjugué du tore maximal standard de $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ (qui est un tore maximal de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$). On suppose désormais que $[G, G]$ n'est pas trivial. Alors d'après le corollaire 3.5.5, quitte à conjuguer G , le sous-groupe $[G, G]$ est l'image de \mathbf{SL}_2 dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$. Soit $(f', M') \in R(G)(k)$. Alors pour $M \in \mathbf{SL}_2(k)$, on a $(0, M)(f', M')(0, M)^{-1} = (f' \circ M^{-1}, MM')(0, M^{-1}) = (f' \circ M^{-1}, MM'M^{-1})$. Or $R(G)$ est un sous-groupe central de G , donc $(f' \circ M^{-1}, MM'M^{-1}) = (f', M')$. On a donc $f' = 0$ et $R(G)$ est un tore de $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$. Par conséquent, pour raison de dimension, on a $G = [G, G]$ ou $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$. \square

Remarque 3.5.8 : Comme dans la remarque 3.5.6, ce résultat découle directement de [Hoch, ch. VIII, th. 4.3 p.117] si k est de caractéristique nulle.

Théorème 3.5.9 : On suppose que le corps k est de caractéristique nulle. Alors les sous-groupes lisses connexes non réductifs et non résolubles de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ sont $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ et $V_n \rtimes \text{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$.

Démonstration. Soit G un tel sous-groupe. Alors $\mathrm{pr}_2(G) = \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ ou $\mathrm{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$, sinon ce groupe serait contenu dans un sous-groupe de Borel B de $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$, donc G serait un sous-groupe de $V_n \rtimes B$ et G serait résoluble. Le groupe $G \cap V_n$ est de dimension au moins 1 car il contient $R_u(G)$. De plus $G \cap V_n$ est commutatif donc l'opération par conjugaison de G dans $G \cap V_n$ descend en une opération du quotient $\mathrm{pr}_2(G) = \frac{G}{G \cap V_n}$. Par conséquent l'algèbre de Lie de $G \cap V_n$ est une sous-algèbre de $\mathrm{Lie}(V_n)$ qui est stable sous l'opération de \mathbf{SL}_2 . Or comme k est de caractéristique nulle, la représentation $\mathrm{Lie}(V_n) = k[X, Y]_n$ est simple. On en déduit $\mathrm{Lie}(G \cap V_n) = \mathrm{Lie}(V_n)$, donc $G \cap V_n = V_n$ et $G = V_n \rtimes \mathrm{pr}_2(G)$. \square

Remarque 3.5.10 :

1. Si $p \geq 2$ alors il y a davantage de groupes. En effet, V_n contient une unique sous-représentation irréductible de \mathbf{SL}_2 , qui est le sous-groupe vectoriel L engendré par les $x^i y^{n-i}$ pour p ne divisant pas $\binom{n}{i}$ (voir [Jan, part II, 2.16(7) p.186]). Alors $L \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ et $L \rtimes \mathrm{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$ sont des sous-groupes lisses connexes non réductifs et non résolubles. Savoir si tout sous-groupe lisse connexe non réductif et non résoluble est conjugué à un groupe de cette forme reste un problème ouvert.

2. Quelle que soit la caractéristique, si G est un sous-groupe lisse connexe non réductif et non résoluble alors, à conjugaison près, G opère transitivement dans $\mathbf{F}_n \setminus s_\infty$. En effet, $\mathrm{pr}_2(G)$ contient l'image de \mathbf{SL}_2 dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ donc G opère transitivement dans la base \mathbf{P}^1 . De plus $R_u(G)$ est unipotent et distingué dans G donc, puisque $\mathrm{pr}_2(G)$ est réductif, $\mathrm{pr}_2(R_u(G))$ est trivial et $R_u(G)$ est un sous-groupe de V_n . Alors $R_u(G)$ opère transitivement dans $\pi^{-1}(0) \setminus (s_\infty \cap \pi^{-1}(0)) \simeq \mathbf{A}^1$.

3.5.3 Cas d'un groupe résoluble

Comme pour les surfaces dans \mathbf{P}^2 , l'objectif de cette section est de montrer que, sur un corps algébriquement clos, les surfaces dans \mathbf{F}_n qui sont homogènes sous l'opération d'un groupe résoluble sont données par le lemme suivant. On déterminera aussi quels sont les groupes qui opèrent.

Lemme 3.5.11 : *Soient $n \geq 2$, X un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n et $\partial X = \mathbf{F}_n \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). La surface X est homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe résoluble si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

- i) $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$;
- ii) $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$;
- iii) $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$;
- iv) $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$ et si $n < e$ alors pour $n < i < e$ on a $\binom{e}{i} = 0$ dans k ;
- v) $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^n} = xy^{np^r-1}v^{p^r}$ et $p^r > 2$;
- vi) $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$.

Toujours comme pour les surfaces dans \mathbf{P}^2 , on commence par déterminer le normalisateur du bord. On note B et T le sous-groupe de Borel et le tore maximal standard de \mathbf{GL}_2 .

Lemme 3.5.12 : *Soient Z un sous-schéma fermé réduit de \mathbf{F}_n et N le normalisateur de Z dans $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$.*

1. Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$ alors $N = V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$.
2. Si $Z = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$ alors $N = \frac{B}{\mu_n}$.
3. Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ alors la composante neutre est $N^\circ = V_n \rtimes \frac{T}{\mu_n}$.
4. Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$ et $n \geq e$ alors $N = \left\{ \left(y^{n-e} \left[x^e - \frac{1}{t_2^e} \left(\frac{t_2 x - by}{t_1} \right)^e \right], \begin{bmatrix} t_1 & b \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \right) \mid \begin{pmatrix} t_1 & b \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in B \right\}$.
5. Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$, $n < e$ et pour $n < i < e$ on a $\binom{e}{i} = 0$ dans k , alors

$$N = \left\{ \left(y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e], \begin{bmatrix} t^{1-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix} \right) \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m.$$

6. Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^r-1}v^{p^r}$ et $p^r > 2$ alors $N = \left\{ \left(ay^n, \begin{bmatrix} t^{p^r-\frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix} \right) \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$.

7. Si $Z = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ alors la composante neutre est $N^\circ = \frac{T}{\mu_n}$.

Démonstration. Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$ alors on a déjà $V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n} \leq N$. Le groupe N stabilise le point $s_\infty \cap \pi^{-1}(\infty) = ([1 : 0], (1, 0))$. En particulier N stabilise le point ∞ de la base \mathbf{P}^1 , donc N est un sous-groupe de $V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$.

Si $Z = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$ alors on a déjà $\frac{B}{\mu_n} \leq N$. Comme précédemment, N stabilise le point ∞ de la base \mathbf{P}^1 , donc N est un sous-groupe de $V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$ et N stabilise $\pi^{-1}(\infty)$. Donc N stabilise $s_0 \setminus \{([0 : 1], (1, 0))\}$. Soient A une k -algèbre et $g = (f, M) \in N(A)$. On a $(0, M^{-1}) \in \frac{B}{\mu_n}(A) \subseteq N(A)$ donc $(f, I) = (f, M) \cdot (0, M^{-1}) \in N(A)$. On a $(f, I) \cdot ([0 : 1], (x, 1)) = ([f(x, 1) : 1], (x, 1))$ donc, comme $s_0 \setminus \{([0 : 1], (1, 0))\}$ est stable, on a $f(x, 1) = 0$, donc $f = 0$. Donc $N = \frac{B}{\mu_n}$.

Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ alors on a déjà $V_n \rtimes \frac{T}{\mu_n} \leq N$. Le groupe N stabilise $\{0, \infty\}$ dans la base \mathbf{P}^1 donc $N^\circ \leq V_n \rtimes \frac{T}{\mu_n}$.

On suppose $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$ et $n \geq e$. Comme précédemment on a $N \leq V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$. La courbe C a pour équation

$u = vx^e y^{n-e}$. Le groupe N stabilise le point $\pi^{-1}(\infty) \cap C$ donc stabilise $C \setminus (\pi^{-1}(\infty) \cap C)$. Pour $M = \begin{pmatrix} t_1 & b \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ on a $(f, M) \cdot ([u : v], (x, 1)) = ([u + vf(t_1x + b, t_2) : v], (t_1x + b, t_2)) = ([u' : v'], (x', y'))$ donc $u' - v'x'^e y'^{n-e} = u + f(t_1x + b, t_2) - vt_2^{n-e}(t_1x + b)^e$. Donc les éléments de N sont caractérisés par $t_2^{n-e}(t_1x + b)^e - f(t_1x + b, t_2) = x^e$. En divisant par t_2^n on obtient $\left(\frac{t_1x + b}{t_2}\right)^e - f\left(\frac{t_1x + b}{t_2}, 1\right) = \frac{1}{t_2^n}x^e$ donc $f(x, 1) = x^e - \frac{1}{t_2^n}\left(\frac{t_1x + b}{t_2}\right)^e$.

On suppose maintenant $n < e$ et pour $n < i < e$, $\binom{e}{i} = 0$ dans k . La courbe C a pour équation $uy^{e-n} = vx^e$. Un calcul analogue au précédent donne encore $f(x, 1) = x^e - \frac{1}{t_2^n}\left(\frac{t_1x + b}{t_2}\right)^e$. De plus $f(x, 1)$ est un polynôme de degré au plus n , donc $\frac{1}{t_2^n}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^e = 1$, c'est-à-dire $t_1^e = t_2^{e-n}$ (et pour $n < i < e$ les termes en x^i sont bien nuls car $\binom{e}{i} = 0$).

Si $Z = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^r-1}v^{p^r}$ et $p^r > 2$ alors on a encore $N \leq V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$. On a $u'^{p^r} - x'y'^{np^r-1}v'^{p^r} = (u + vf(t_1x + b, t_2))^{p^r} - (t_1x + b)t_2^{np^r-1}v^{p^r}$ donc les éléments de N sont caractérisés par $(t_1x + b)t_2^{np^r-1} - f(t_1x + b, t_2)^{p^r} = x$. Pour raison de degré, $f(x, y)$ est de la forme ay^n . Alors $(t_1x + b)t_2^{np^r-1} - a^{p^r}t_2^{np^r} = x$ donc $t_1 = t_2^{1-np^r}$ et $b = a^{p^r}t_2$.

Enfin, si $Z = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ alors $\frac{T}{\mu_n} \leq N$ et $N^\circ \leq V_n \rtimes \frac{T}{\mu_n}$ donc, en raisonnant comme dans le cas $Z = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$, on trouve $N^\circ = \frac{T}{\mu_n}$. \square

Soit $T \simeq \mathbf{G}_m^2$ le tore maximal standard de \mathbf{GL}_2 . Pour $n \geq 1$, la réciproque de l'isomorphisme $\begin{cases} \frac{T}{\mu_n} & \longrightarrow & T \\ \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} t_1^n & 0 \\ 0 & t_2/t_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ est notée $\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \tau_1^{\frac{1}{n}} & 0 \\ 0 & \tau_2 \tau_1^{\frac{1}{n}} \end{bmatrix}$.

Proposition 3.5.13 : Soient $d \geq 0$ et $G = \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m$. Soit $n \geq 2$. Alors les morphismes de groupes algébriques $\iota : G \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ injectifs sont, à composition par un automorphisme intérieur de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ près, donnés par les cas suivants :

i) il existe $e \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{pgcd}(d, e) = 1$ et $\iota(a, t) = \left(0, \begin{bmatrix} t^{d-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}}a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix}\right);$

ii) $d = 1$, $p \geq 2$ et il existe $r \geq 1$ tel que $\iota(a, t) = \left(ay^n, \begin{bmatrix} t^{p^r-\frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}}a^{p^r} \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix}\right);$

iii) $d = 1$ et il existe $e \geq 1$ tel que si $n < i < e$ alors $\binom{e}{i} = 0$ dans k et $\iota(a, t) = \left(y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e], \begin{bmatrix} t^{1-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}}a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix}\right);$

iv) $d = 1$ et il existe $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\iota(a, t) = \left(ax^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{-\frac{1}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix}\right);$

v) il existe $e \in \mathbf{Z}^*$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\text{pgcd}(d, e) = 1$ et $\iota(a, t) = \left(ax^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{e-\frac{d+ei}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{d+ei}{n}} \end{bmatrix}\right);$

vi) $p \geq 2$, $d \geq 1$ et il existe des entiers $e \in \mathbf{Z}^*$, $m_0 \geq 0$, $s \geq 1$ et r_0, \dots, r_s et des coefficients $c_i \in k^*$ tels que $0 = r_0 < \dots < r_s$, $\text{pgcd}(d, e) = 1$, e divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$, $m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e} \geq 0$, $n \geq \max_i(m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e})$ et $\iota(a, t) =$

$$\left(\sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} x^{m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e}} y^{n - m_0 + d \frac{p^{r_i} - 1}{e}}, \begin{bmatrix} t^{\frac{e(n - m_0) - d}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{em_0 - d}{n}} \end{bmatrix} \right).$$

Démonstration. Le groupe G est résoluble donc on peut supposer que ι est à valeurs dans $V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$ où B est le sous-groupe de Borel standard de \mathbf{GL}_2 . On peut aussi supposer que $\iota(\mathbf{G}_m)$ est un sous-groupe de $\frac{T}{\mu_n}$. En utilisant les notations introduites précédemment, il existe des entiers $M \in \mathbf{Z}$ et $N \in \mathbf{Z}$ tels que $\text{pgcd}(M, N) = 1$ et que, pour $t \in \mathbf{G}_m$, on ait

$$\iota(0, t) = \begin{bmatrix} t^{\frac{M}{n}} & 0 \\ 0 & t^N t^{\frac{M}{n}} \end{bmatrix} \in \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}.$$

De plus $\iota(\mathbf{G}_a)$ est un sous-groupe unipotent de $V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$ donc il existe des polynômes $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ et ψ tels que pour $a \in \mathbf{G}_a$ on ait

$$\iota(a, 1) = \left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(a) x^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} 1 & \psi(a) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Pour $b \in \mathbf{G}_a$, on a $\left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(a + b) x^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} 1 & \psi(a + b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \iota(a + b, 1) = \iota(a, 1) \iota(b, 1) =$

$$\left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(a) x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^n \varphi_i(b) (x - \psi(a)y)^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} 1 & \psi(a) + \psi(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

En particulier, ψ est un p -polynôme. En outre, pour $t \in \mathbf{G}_m$ on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(t^d a) x^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} 1 & \psi(t^d a) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \iota(t^d a, 1) = \iota(0, t) \iota(a, 1) \iota(0, t)^{-1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(a) (t^{-\frac{M}{n}} x)^i (t^{-(N + \frac{M}{n})} y)^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{\frac{M}{n}} & 0 \\ 0 & t^N t^{\frac{M}{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \psi(a) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{\frac{M}{n}} & 0 \\ 0 & t^N t^{\frac{M}{n}} \end{bmatrix}^{-1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n t^{Ni - Nn - M} \varphi_i(a) x^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} 1 & t^{-N} \psi(a) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc ψ et les φ_i sont des monômes. On écrit $\psi(a) = ca^{p^r}$ et $\varphi_i(a) = c_i a^{L_i}$, et on a les conditions

$$\begin{cases} \text{si } c \neq 0 \text{ alors } dp^r = -N; \\ \text{si } c_i \neq 0 \text{ alors } dL_i = Ni - Nn - M. \end{cases} \quad (*)$$

Cas 1. On suppose d'abord $c \neq 0$. Quitte à conjuguer par $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, on peut supposer $c = 1$.

Sous-cas 1.1. Si $d = 0$ alors les conditions (*) donnent $N = 0$. Donc $M = 1$ ou -1 . De plus tous les c_i sont nuls, sinon les conditions donneraient $M = 0$. Comme ι est injectif, il faut $p^r = 1$. Donc $\iota(a, t) = \iota(a, 1) \iota(0, t) = (0, \begin{bmatrix} t^{\frac{1}{n}} & t^{\frac{1}{n}} a \\ 0 & t^{\frac{1}{n}} \end{bmatrix})$ ou $(0, \begin{bmatrix} t^{-\frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix})$.

Sous-cas 1.2. Si $d \geq 2$ alors tous les c_i sont nuls sinon, d'après les conditions (*), d diviserait N et M . À nouveau on a $p^r = 1$, donc $N = -d$, et $\iota(a, t) = (0, \begin{bmatrix} t^{\frac{M}{n}} & t^{\frac{M}{n} - d} a \\ 0 & t^{\frac{M}{n} - d} \end{bmatrix})$. On pose $e = dn - M$. Alors $\text{pgcd}(d, e)$ divise $N = -d$ et $M = dn - e$ donc $\text{pgcd}(d, e) = 1$.

Sous-cas 1.3. On suppose $d = 1$. Si tous les c_i sont nuls alors on raisonne comme précédemment. On suppose désormais les c_i non tous nuls. Si $c_i \neq 0$ alors, d'après les conditions (*), on a $N = -p^r$ et $p^r n - M = -Nn - M \geq -p^r i - Nn - M = L_i \geq 0$. De plus $\iota(a, 1) = (f_a(x, y), \begin{bmatrix} 1 & a^{p^r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$ où $f_a(x, y) = \sum_{i=0}^n c_i a^{p^r n - M - p^r i} x^i y^{n-i}$. La condition $\iota(a+b, 1) = \iota(a, 1)\iota(b, 1)$ donne $f_{a+b}(x, y) = f_a(x, y) + f_b(x - a^{p^r} y, y)$. En regardant le coefficient de y^n , on obtient $c_0(a+b)^{p^r n - M} = c_0 a^{p^r n - M} + \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i a^{p^r i} b^{p^r n - M - p^r i}$. On a $c_0 \neq 0$ sinon tous les c_i seraient nuls, et on a $p^r n - M > 0$. Si $p^r n - M = 1$ alors, quitte à conjuguer par une homothétie, on peut supposer $c_0 = 1$ et on a $\iota(a, t) = (ay^n, \begin{bmatrix} t^{p^r - \frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}} a^{p^r} \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix})$.

On suppose désormais $p^r n - M > 1$. Montrons que l'on a $p^r = 1$. Dans le membre de droite de l'égalité $c_0(a+b)^{p^r n - M} - c_0 a^{p^r n - M} = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i a^{p^r i} b^{p^r n - M - p^r i}$, tous les exposants de a sont divisibles par p^r , donc il faut que ce soit aussi le cas dans le membre de gauche. Or on a le terme $(p^r n - M)ab^{p^r n - M - 1} = -Mab^{p^r n - M - 1}$ donc si $p^r \neq 1$ alors il faut que p divise M , ce qui contredit $N = -p^r$ et le fait que M et N soient premiers entre eux. Donc on a bien $p^r = 1$. L'égalité précédente se réécrit $\sum_{i=0}^{n-M-1} \binom{n-M}{i} a^i b^{n-M-i} = (a+b)^{n-M} - a^{n-M} = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i a^i b^{n-M-i}$. Si $0 < n-M \leq n$ alors $c_i = \begin{cases} (-1)^i \binom{n-M}{i} c_0 & \text{si } 0 \leq i < n-M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$;

si $n-M > n$ alors $\begin{cases} c_i = (-1)^i \binom{n-M}{i} c_0 & \text{pour } 0 \leq i \leq n-M \\ \binom{n-M}{i} = 0 & \text{dans } k \text{ si } n < i < n-M \end{cases}$. Dans les deux cas, on a $f_a(x, y) = \sum_{i=0}^{n-M-1} (-1)^i \binom{n-M}{i} c_0 a^{n-M-i} x^i y^{n-i} = (-1)^M c_0 y^M [(x-ay)^{n-M} - x^{n-M}]$. Quitte à conjuguer par une homothétie, on peut supposer $(-1)^M c_0 = -1$. On pose $e = n - M$.

On peut autoriser $e = 1$ pour retrouver le cas $\iota(a, t) = (ay^n, \begin{bmatrix} t^{p^r - \frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}} a^{p^r} \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix})$ où $p^r = 1$. Dans le cas $\iota(a, t) = (ay^n, \begin{bmatrix} t^{p^r - \frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}} a^{p^r} \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix})$, on peut alors imposer $p^r \neq 1$.

Cas 2. On suppose désormais $c = 0$. Alors les φ_i sont des p -polynômes (non tous nuls) et on écrit $L_i = p^{r_i}$. On rappelle que d'après (*), si $c_i \neq 0$ alors $dp^{r_i} = Ni - Nn - M$.

Sous-cas 2.1. Si $d = 0$ alors il existe un unique i tel que $c_i \neq 0$ et celui-ci vérifie $Ni - Nn - M = 0$ donc $N \neq 0$, N divise M et $N = 1$ ou -1 . Quitte à conjuguer par une homothétie, on peut supposer $c_i = 1$. Comme ι est injectif, on a $\varphi_i(a) = a$. Donc $\iota(a, t) = (ax^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{\frac{i}{n}-1} & 0 \\ 0 & t^{\frac{i}{n}} \end{bmatrix})$ ou $(ax^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{1-\frac{i}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{i}{n}} \end{bmatrix})$.

Sous-cas 2.2. On suppose $d \neq 0$. Soit i_0 tel que $\min\{p^{r_i} \mid c_i \neq 0\} = p^{r_{i_0}}$. Comme précédemment, ι est injectif donc $p^{r_{i_0}} = 1$. Donc si $c_i \neq 0$ alors $d(p^{r_i} - 1) = N(i - i_0)$. Or, d'après (*), $\text{pgcd}(d, N)$ divise M et N donc $\text{pgcd}(d, N) = 1$. Si $N = 0$ alors $d = 1$, $M = -1$ et, quitte à conjuguer par une homothétie, $\iota(a, t) = (ax^{i_0} y^{n-i_0}, \begin{bmatrix} t^{-\frac{1}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix})$.

On suppose désormais $N \neq 0$. Si $p = 1$ alors il existe un unique i tel que $c_i \neq 0$ et celui-ci vérifie $d = Ni - Nn - M$. On pose $e = -N$ et alors $\text{pgcd}(d, e)$ divise N et M donc $\text{pgcd}(d, e) = 1$. On suppose désormais $p \geq 2$. Si $c_i \neq 0$ alors N divise $p^{r_i} - 1$ et $i = i_0 +$

$d \frac{p^{r_i} - 1}{N}$. On réindice pour écrire $\iota(a, t) = \left(\sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} x^{m_0 + d \frac{p^{r_i} - 1}{N}} y^{n - m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{N}}, \begin{bmatrix} t^{\frac{M}{n}} & 0 \\ 0 & t^{N + \frac{M}{n}} \end{bmatrix} \right)$

où $0 = r_0 < \dots < r_s$, $c_i \neq 0$, N divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$ et $n \geq m_0 + d \frac{p^{r_s} - 1}{N} \geq 0$. De plus on a $M = Nm_0 - Nn - d$ donc $\text{pgcd}(d, N) = \text{pgcd}(M, N) = 1$. On pose $e = -N$. Si $s = 0$ alors on trouve la même écriture que dans le cas $p = 1$. \square

Corollaire 3.5.14 : *Soient $n \geq 2$, X un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n et $\partial X = \mathbf{F}_n \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). Alors X est homogène sous l'opération d'un sous-groupe lisse connexe résoluble non unipotent $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ et G est minimal pour cette propriété si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu (ces cas sont résumés dans le tableau 3.2 page 107) :*

1. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$ (donc $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid u \neq 0\} \simeq (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbf{A}^1$) :
il existe $d \in \mathbf{N}$ et $e \in \mathbf{Z}^*$ tels que $\text{pgcd}(d, e) = 1$ et

$$G = \left\{ \left(0, \begin{bmatrix} t^{d - \frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix} \right) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m,$$

l'opération est donnée par $(a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) = ([t^e u : 1], (t^d x + a, 1))$ et le groupe d'isotropie de $([1 : 1], (0, 1))$ est $H = \{(0, t) \in \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m \mid t^e = 1\} \simeq \mu_e$;

2. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ (donc $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid x \neq 0\} \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

(a) il existe $d \in \mathbf{Z}$, $e \in \mathbf{Z}^*$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\text{pgcd}(d, e) = 1$ et

$$G = \left\{ \left(a x^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{e - \frac{d+ei}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{d+ei}{n}} \end{bmatrix} \right) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m,$$

on a un isomorphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $([u : 1], (x, 1)) \mapsto \left(\frac{u}{x^i}, x \right)$,

l'opération de $\mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ est donnée par $(a, t) \cdot (u, v) = (t^d u + a, t^e v)$ et le groupe d'isotropie de $([0 : 1], (1, 1))$ est $H = \{(0, t) \in \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m \mid t^e = 1\} \simeq \mu_e$;

(b) $p \geq 2$ et il existe des entiers $d \geq 1$, $e \in \mathbf{Z}^*$, $m_0 \geq 0$, $s \geq 1$ et r_0, \dots, r_s et des coefficients $c_i \in k^*$ tels que $0 = r_0 < \dots < r_s$, $\text{pgcd}(d, e) = 1$, e divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$,

$m_0 - d \frac{p^{r_s} - 1}{e} \geq 0$, $n \geq \max_i (m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e})$ et

$$G = \left\{ \left(\sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} x^{m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e}} y^{n - m_0 + d \frac{p^{r_i} - 1}{e}}, \begin{bmatrix} t^{\frac{e(n - m_0) - d}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{e m_0 - d}{n}} \end{bmatrix} \right) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \\ \simeq \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m,$$

on a un isomorphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $([u : 1], (x, 1)) \mapsto \left(\frac{u}{x^{m_0 - d \frac{p^{r_s} - 1}{e}}}, x \right)$,

l'opération de $\mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ est donnée par

$$(a, t) \cdot (u, v) = \left(t^{d p^{r_s}} u + \sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} t^{d(p^{r_s} - p^{r_i})} v^{d \frac{p^{r_s} - p^{r_i}}{e}}, t^e v \right)$$

et le groupe d'isotropie de $([0 : 1], (1, 1))$ est $H = \{(a, t) \in \mathbf{G}_a \overset{d}{\rtimes} \mathbf{G}_m \mid \sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} = 0, t^e = 1\}$;

3. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$ et si $n < e$ alors pour $n < i < e$ on a $\binom{e}{i} = 0$ dans k (donc $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid u \neq x^e\}$) :

$$G = \left\{ (y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e], \begin{bmatrix} t^{1-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix}) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m,$$

(qui est le normalisateur de ∂X si $n < e$), on a un isomorphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $([u : 1], (x, 1)) \mapsto (x, u - x^e)$, l'opération de $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ est donnée par $(a, t) \cdot (u, v) = (tu + a, t^e v)$ et le groupe d'isotropie de $([0 : 1], (1, 1))$ est $H = \{(0, t) \in \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m \mid t^e = 1\} \simeq \mu_e$;

4. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^n} = xy^{np^r-1}v^{p^r}$ et $p^r > 2$ (donc $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid x \neq u^{p^r}\}$) :

$G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ est le normalisateur de ∂X , on a un isomorphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $([u : 1], (x, 1)) \mapsto (u, x - u^{p^r})$, l'opération de $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ est donnée par $(a, t) \cdot (u, v) = (tu + a, t^{p^r} v)$ et le groupe d'isotropie de $([0 : 1], (1, 1))$ est $H = \{(0, t) \in \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m \mid t^{p^r} = 1\} \simeq \mu_{p^r}$;

5. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ (donc $X \simeq (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

$$G = \frac{T}{\mu_n} \simeq \mathbf{G}_m^2 \text{ est la composante neutre du normalisateur de } \partial X.$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où G n'est pas un tore. D'après la proposition 3.1.17, G est isomorphe à $\mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ pour un certain $d \geq 0$. Les différentes possibilités sont alors données par la proposition 3.5.13.

Cas 1. Si $G = \left\{ (0, \begin{bmatrix} t^{d-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix}) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ alors

$$(a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) = ([u : 1], (t^{d-\frac{e}{n}} x + t^{-\frac{e}{n}} a, t^{-\frac{e}{n}})) = ([t^e u : 1], (t^d x + a, 1)).$$

Pour avoir une orbite ouverte, il faut $e \neq 0$.

Cas 2. Si $G = \left\{ (ay^n, \begin{bmatrix} t^{p^r-\frac{1}{n}} & t^{-\frac{1}{n}} a^{p^r} \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix}) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ alors

$$\begin{aligned} (a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) &= ([u + at^{-1} : 1], (t^{p^r-\frac{1}{n}} x + t^{-\frac{1}{n}} a^{p^r}, t^{-\frac{1}{n}})) \\ &= ([tu + a : 1], (t^{p^r} x + a^{p^r}, 1)). \end{aligned}$$

Donc l'orbite de $([0 : 1], (1, 1))$ est $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid x \neq u^{p^r}\}$. On a un isomorphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $\varphi([u : 1], (x, 1)) = (u, x - u^{p^r})$. Alors

$$\varphi([tu + a : 1], (t^{p^r} x + a^{p^r}, 1)) = (tu + a, t^{p^r} x + a^{p^r} - (tu + a)^{p^r}) = (tu + a, t^{p^r} (x - u^{p^r})).$$

Le complémentaire de X dans \mathbf{F}_n est la réunion de s_∞ , de $\pi^{-1}(\infty)$ et de la courbe $C = \{([uv^{np^r} : v], (u^{p^r}, v^{p^r})) \mid (u, v) \neq (0, 0)\}$. La courbe C a pour équation $xy^{np^r-1}v^{p^r} = u^{p^r}$. Cette équation est bien invariante par le changement $(u, v, x, y) \mapsto (\lambda^n u, v, \lambda x, \lambda y)$; en particulier on peut utiliser le critère jacobien pour déterminer les points singuliers de C . La matrice jacobienne au point $([u : v], (x, y))$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & y^{np^r-1}v^{p^r} & -xy^{np^r-2}v^{p^r} \end{pmatrix}$. Donc

l'unique point singulier est $([0 : 1], (1, 0))$. De plus on a les intersections schématiques suivantes :

$$\begin{aligned} C \cap s_\infty &= \emptyset \\ C \cap s_0 &= \{([0 : 1], (x, y)) \mid xy^{np^r-1} = 0\} \\ C \cap \pi^{-1}(\infty) &= \{([u : 1], (1, 0)) \mid u^{p^r} = 0\} \\ C \cap \pi^{-1}(0) &= \{([u : 1], (0, 1)) \mid u^{p^r} = 0\} \end{aligned}$$

Cas 3. Si $G = \left\{ (y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e], \begin{bmatrix} t^{1-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}}a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix}) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ alors, en posant $f(x, y) = y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e]$, on a

$$\begin{aligned} (a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) &= ([u + f(t^{1-\frac{e}{n}}x + t^{-\frac{e}{n}}a, t^{-\frac{e}{n}}) : 1], (t^{1-\frac{e}{n}}x + t^{-\frac{e}{n}}a, t^{-\frac{e}{n}})) \\ &= ([t^e u + f(tx + a, 1) : 1], (tx + a, 1)) \\ &= ([t^e u + (tx + a)^e - t^e x^e : 1], (tx + a, 1)). \end{aligned}$$

En particulier $(a, t) \cdot ([1 : 1], (0, 1)) = ([t^e + a^e : 1], (a, 1))$ donc l'orbite de $([1 : 1], (0, 1))$ est $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid u \neq x^e\}$. On a un isomorphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $\varphi([u : 1], (x, 1)) = (x, u - x^e)$. Alors $\varphi([t^e u + (tx + a)^e - t^e x^e : 1], (tx + a, 1)) = (tx + a, t^e(u - x^e))$.

Le complémentaire de X dans \mathbf{F}_n est la réunion de s_∞ , de $\pi^{-1}(\infty)$ et de la courbe $C = \{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x, y] \in \mathbf{P}^1\}$. La courbe C est une section de π (en particulier elle est lisse). Elle a pour équation $u - vx^e y^{n-e} = 0$ si $n - e \geq 0$, et $uy^{e-n} - vx^e = 0$ si $n - e < 0$. On a les intersections schématiques suivantes :

$$\begin{aligned} C \cap s_\infty &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } n - e \geq 0 \\ \{([1 : 0], (1, y)) \mid y^{e-n} = 0\} & \text{sinon} \end{cases} \\ C \cap s_0 &= \begin{cases} \{([0 : 1], (x, y)) \mid x^e y^{n-e} = 0\} & \text{si } n - e \geq 0 \\ \{([0 : 1], (x, y)) \mid x^e = 0\} & \text{sinon} \end{cases} \\ C \cap \pi^{-1}(\infty) &= \begin{cases} ([0 : 1], (1, 0)) & \text{si } n - e > 0 \\ ([1 : 0], (1, 0)) & \text{si } n - e = 0 \\ ([1 : 1], (1, 0)) & \text{si } n - e < 0 \end{cases} \\ C \cap \pi^{-1}(0) &= ([0 : 1], (0, 1)) \end{aligned}$$

(où, quand l'intersection est réduite à un point, celui-ci est muni de la structure de sous-schéma fermé réduit).

Cas 4. Si $G = \left\{ (ax^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{-\frac{1}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix}) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ alors

$$(a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) = ([u + at^{-\frac{1}{n}}x^i : 1], (t^{-\frac{1}{n}}x, t^{-\frac{1}{n}})) = ([tu + ax^i : 1], (x, 1))$$

donc G n'a pas d'orbite ouverte.

Cas 5. Si $G = \left\{ (ax^i y^{n-i}, \begin{bmatrix} t^{e-\frac{d+ei}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{d+ei}{n}} \end{bmatrix}) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ alors

$$\begin{aligned} (a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) &= ([u + at^{i(e-\frac{d+ei}{n})+(n-i)(-\frac{d+ei}{n})}x^i : 1], (t^{e-\frac{d+ei}{n}}x, t^{-\frac{d+ei}{n}})) \\ &= ([u + at^{-d}x^i : 1], (t^{e-\frac{d+ei}{n}}x, t^{-\frac{d+ei}{n}})) \\ &= ([t^{d+ei}u + at^{ei}x^i : 1], (t^e x, 1)). \end{aligned}$$

Donc l'orbite de $([0 : 1], (1, 1))$ est $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid x \neq 0\}$. On a un isomorphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $\varphi([u : 1], (x, 1)) = (\frac{u}{x^i}, x)$. Alors

$$\varphi([t^{d+ei}u + at^{ei}x^i : 1], (t^e x, 1)) = (t^d \frac{u}{x^i} + a, t^e x).$$

$$\text{Cas 6. Si } G = \left\{ \left(\sum_{i=0}^s c_i a^{p^r i} x^{m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e}} y^{n - m_0 + d \frac{p^r i - 1}{e}}, \begin{bmatrix} t^{\frac{e(n-m_0)-d}{n}} & 0 \\ 0 & t^{\frac{-em_0-d}{n}} \end{bmatrix} \right) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$$

alors

$$\begin{aligned} & (a, t) \cdot ([u : 1], (x, 1)) \\ &= ([u + \sum_{i=0}^s c_i a^{p^r i} t^{(m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e})(\frac{e(n-m_0)-d}{n}) + (n - m_0 + d \frac{p^r i - 1}{e})(\frac{-em_0-d}{n})} x^{m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e}} : 1], (t^{\frac{e(n-m_0)-d}{n}} x, t^{\frac{-em_0-d}{n}})) \\ &= ([u : \sum_{i=0}^s c_i a^{p^r i} t^{-dp^r i} x^{m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e}} : 1], (t^{\frac{e(n-m_0)-d}{n}} x, t^{\frac{-em_0-d}{n}})) \\ &= ([t^{d+em_0} u + \sum_{i=0}^s c_i a^{p^r i} t^{e(m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e})} x^{m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e}} : 1], (t^e x, 1)). \end{aligned}$$

Donc l'orbite de $([0 : 1], (1, 1))$ est $X = \{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n \mid x \neq 0\}$. On a un isomorphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$ donné par $\varphi([u : 1], (x, 1)) = (\frac{u}{x^{m_0 - d \frac{p^r s - 1}{e}}}, x)$.

Alors

$$\begin{aligned} & \varphi([t^{d+em_0} u + \sum_{i=0}^s c_i a^{p^r i} t^{e(m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e})} x^{m_0 - d \frac{p^r i - 1}{e}} : 1], (t^e x, 1)) \\ &= \left(t^{dp^r s} \frac{u}{x^{m_0 - d \frac{p^r s - 1}{e}}} + \sum_{i=0}^s c_i a^{p^r i} t^{d(p^r s - p^r i)} x^{d \frac{p^r s - p^r i}{e}}, t^e x \right). \quad \square \end{aligned}$$

On considère le sous-groupe unipotent $G = V_n \rtimes U$ de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} \simeq V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$, où par abus on note encore U l'image du groupe $U = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \mathbf{GL}_2$ dans $\frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$. On rappelle

que, en notant $k[\varepsilon] = \frac{k[t]}{(t^2)}$ l'algèbre des nombres duaux munie du morphisme $k[\varepsilon] \rightarrow k$ d'évaluation en 0, l'algèbre de Lie de G est le noyau du morphisme de groupes abstraits $G(k[\varepsilon]) \rightarrow G(k)$. Donc en notant $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on a un isomorphisme linéaire

$$\begin{cases} \text{Vect}(x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n, M) & \longrightarrow & \text{Lie}(G) \\ \sum_{i=0}^n c_i x^i y^{n-i} + aM & \longmapsto & \left(\varepsilon \sum_{i=0}^n c_i x^i y^{n-i}, I + \varepsilon aM \right) \end{cases} .$$

Le crochet de Lie est donné par $[x^i y^{n-i}, x^j y^{n-j}] = 0$ et $[M, x^i y^{n-i}] = i x^{i-1} y^{n-i+1}$ pour $0 \leq i, j \leq n$ (on a $[M, y^n] = 0$).

Proposition 3.5.15 : *Soient $n \geq 2$ et X un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n . Alors X est homogène sous l'opération d'un sous-groupe lisse connexe unipotent $G \leq \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ si et seulement si, à conjugaison près, on a $X = \mathbf{F}_n \setminus (s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)) \simeq \mathbf{A}^2$. Si de plus le corps k est de caractéristique nulle alors G est minimal pour cette propriété si et seulement si $G \simeq \mathbf{G}_a^2$ est le sous-groupe lisse connexe de $V_n \rtimes U$ dont l'algèbre de Lie est engendrée par y^n et un élément de la forme $M + \sum_{i=1}^n c_i x^i y^{n-i}$.*

∂X	X	G	opération
$s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$\left\{ \left[\begin{array}{c} t^{\frac{d-e}{n}} \\ 0 \end{array} \right] t^{-\frac{e}{n}} a \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m,$ $d \in \mathbf{N}, e \in \mathbf{Z}^*, \text{pgcd}(d, e) = 1$	$(a, t) \cdot (x, y) = (t^d x + a, t^e y), X = \{([y : 1], (x, 1))\}$
$s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$\left\{ \left(\begin{array}{c} ax^i y^{n-i} \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{c} t^{\frac{e-d+ei}{n}} \\ 0 \end{array} \right] \right) \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m,$ $d \in \mathbf{N}, e \in \mathbf{Z}^*, \text{pgcd}(d, e) = 1, 0 \leq i \leq n$ $\left\{ \left(\sum_{i=0}^s c_i a^{p^i} x^{m_0 - d \frac{p^i - 1}{e}} y^{n - m_0 + d \frac{p^i - 1}{e}}, \left[\begin{array}{c} t^{\frac{e(n-m_0) - d}{n}} \\ 0 \end{array} \right] \right) \right\}$ $\simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m, p \geq 2, d \geq 1, e \in \mathbf{Z}^*, \text{pgcd}(d, e) = 1,$ $0 = r_0 < \dots < r_s, c_i \in k^*, e$ divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1, m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e}) \geq 0, n \geq \max(m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{e})$	$(a, t) \cdot (x, y) = (t^d x + a, t^e y), X = \{([xy^i : 1], (y, 1))\}$ $X = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c} xy^{m_0 - d \frac{p^s - 1}{e}} \\ 0 \end{array} \right] : 1 \right), (y, 1) \right\}$
$s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \{(x^e y^n : y^e), (x, y)\}$	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$\left\{ (y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e], \left[\begin{array}{c} t^{1-\frac{e}{n}} \\ 0 \end{array} \right] t^{-\frac{e}{n}} a \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m,$ $e \geq 1$ et si $n < i < e$ alors $\binom{e}{i} = 0$ dans k	$(a, t) \cdot (x, y) = (tx + a, t^e y), X = \{([x^e + y : 1], (x, 1))\}$
$s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup (uy^{p^n} = xy^{mp^r} v^{p^r})$	$\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$\left\{ \left(ay^n, \left[\begin{array}{c} t^{p^r - \frac{1}{n}} \\ 0 \end{array} \right] t^{-\frac{1}{n}} a \right) \right\} = N(\partial X) \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m, p^r > 2$	$(a, t) \cdot (x, y) = (tx + a, t^{p^r} y), X = \{([x : 1], (x^{p^r} + y, 1))\}$
$s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$	$\mathbf{A}_*^1 \times \mathbf{A}_*^1$	$G = N(\partial X)^\circ = \frac{T}{\mu_n} \simeq \mathbf{G}_m^2$	

 TABLE 3.2 – Surfaces homogènes dans \mathbf{F}_n sous un groupe résoluble non unipotent

Démonstration. Quitte à conjuguer, G est un sous-groupe de $V_n \rtimes U$. Alors X est un ouvert de $\mathbf{F}_n \setminus (s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty))$. On a $\text{pr}_2(G) = U$, sinon G opérerait trivialement dans la base \mathbf{P}^1 de π . Donc $\text{Lie}(G)$ contient un élément de la forme $u = M + \sum_{i=1}^n c_i x^i y^{n-i}$.

On a la suite exacte $1 \rightarrow G \cap V_n \rightarrow G \rightarrow U \rightarrow 1$ donc $\dim G \cap V_n \geq 1$. Donc $G \cap V_n$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathbf{G}_a . Ce sous-groupe stabilise $\pi^{-1}(0) \setminus (s_\infty \cap \pi^{-1}(0)) \simeq \mathbf{A}^1$, donc il opère transitivement dans ce sous-schéma. Donc on a bien $X = \mathbf{F}_n \setminus (s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty))$.

On suppose désormais que k est de caractéristique nulle. Montrons que G est commutatif. Supposons qu'il ne le soit pas. Soit N le dernier terme non nul de la suite centrale descendante. C'est un sous-groupe du groupe dérivé $[G, G]$ donc, comme U est commutatif, c'est un sous-groupe de V_n . Soit $(f, I) \in N(k)$. Soient $a \in k$, $M' = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U(k)$ et $f'(x, y) \in V_n(k)$ tel que $(f', M') \in G(k)$. On a $(f', M') \cdot (f, I) \cdot (f', M')^{-1} = (f(x - ay, y), I)$. Or N est un sous-groupe central de G , donc pour tout $a \in k$ on a $f(x - ay, y) = f(x, y)$. En regardant le coefficient de y^n , on en déduit $f \in \text{Vect}(y^n)$. De plus N est lisse, donc c'est le sous-groupe vectoriel de V_n engendré par y^n . Par conséquent, $\mathfrak{h} = \text{Vect}(y^n, u)$ est une sous-algèbre de Lie commutative de $\text{Lie}(G)$. Donc la fonction exponentielle $\text{Lie}(G) \rightarrow G$ induit un isomorphisme de \mathfrak{h} sur un sous-groupe lisse connexe commutatif H de G (voir [DG, IV, §2, prop. 4.1 p.497]). Par construction, H contient N et on a $\text{pr}_2(H) = U$. Mais alors H opère transitivement dans $\mathbf{F}_n \setminus (s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty))$, ce qui contredit la minimalité de G .

Donc G est commutatif. Il possède une orbite de dimension 2 donc $\dim G = 2$. Son algèbre de Lie est engendrée par u et un élément v de la forme $v = aM + \sum_{i=1}^n d_i x^i y^{n-i}$. Quitte à remplacer v par $v - au$, on peut supposer $a = 0$. De plus $\text{Lie}(G)$ est commutative donc $0 = [u, v] = \sum_{i=1}^n i d_i x^{i-1} y^{n-i+1}$, donc $v = d_0 y^n$ et on peut supposer $d_0 = 1$. \square

La proposition 3.5.15 n'est pas vraie en général si k est de caractéristique $p \geq 2$. On rappelle que le groupe \mathbf{W}_2 des vecteurs de Witt de longueur 2 est le groupe lisse connexe unipotent supporté par \mathbf{A}^2 et dont la loi est donnée par $(a, b) \cdot (a', b') = (a + a', b + b' + \Phi(a, a'))$, où $\Phi(x, y) = \frac{x^p + y^p - (x + y)^p}{p} = - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} x^i y^{p-i} \in \mathbf{Z}[x, y]$.

Proposition 3.5.16 : *Pour $n \geq p$ on a un morphisme de groupes injectif*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{W}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} = V_n \rtimes \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \\ (a, b) & \longmapsto & \left(y^{n-p} [\Phi(-x, ay) + by^p], \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{cases} .$$

De plus \mathbf{W}_2 opère transitivement dans $\mathbf{F}_n \setminus (s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty))$.

Démonstration. On a $\Phi(-x, ay) + \Phi(-(x - ay), a'y) = \Phi(-x, (a + a')y) + \Phi(a, a')y^p$ dans l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}[a, a'][x, y]$ car

$$\begin{aligned} & [(-x)^p + (ay)^p - (-x + ay)^p] + [(-x + ay)^p + (a'y)^p - (-x + (a + a')y)^p] \\ & = (-x)^p + (a^p + a'^p)y^p - (-x + (a + a')y)^p \\ & = [(-x)^p + ((a + a')y)^p - (-x + (a + a')y)^p] + [a^p + a'^p - (a + a')^p] y^p. \end{aligned}$$

Donc φ est bien un morphisme de groupes. Le noyau schématique de φ est trivial.

De plus $\varphi(a, b) \cdot ([0 : 1], (0 : 1)) = ([\Phi(-a, a) + b : 1], (a, 1)) = ([b : 1], (a, 1))$. Donc \mathbf{W}_2 opère transitivement dans $\{([u : 1], (x, 1)) \in \mathbf{F}_n\} = \mathbf{F}_n \setminus (s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty))$. \square

3.5.4 Bilan des cas

En réunissant la proposition 3.5.7, la remarque 3.5.10, le corollaire 3.5.14 et la proposition 3.5.15, on obtient la liste des surfaces homogènes dans \mathbf{F}_n .

Théorème 3.5.17 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient $n \geq 2$, X un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n et $\partial X = \mathbf{F}_n \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit). La surface X est homogène sous l'opération d'un groupe algébrique lisse connexe si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu (ces cas sont illustrés dans la figure 3.1 page 110) :*

1. $\partial X = s_\infty$;
2. $\partial X = s_\infty \cup s_0$;
3. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$;
4. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$;
5. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$;
6. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$,
 $e \geq 1$ et si $n < i < e$ alors $\binom{e}{i} = 0$ dans k ;
7. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^r-1}v^{p^r}$ et $p^r > 2$;
8. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$.

De plus, on peut déterminer les groupes lisses connexes qui opèrent (dans deux des cas, la description n'est pas complètement explicite).

Théorème 3.5.18 : *On suppose que le corps k est algébriquement clos. Soient $n \geq 2$, X un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n , $\partial X = \mathbf{F}_n \setminus X$ (muni de la structure de sous-schéma fermé réduit) et G un sous-groupe lisse connexe de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$. La surface X est homogène sous l'opération de G si et seulement si, à conjugaison près, un des cas suivants a lieu :*

1. $\partial X = s_\infty$ (donc X est le fibré en droites de degré n sur \mathbf{P}^1) : G est n'importe quel sous-groupe lisse connexe de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ tel que la suite exacte $1 \rightarrow V_n \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \rightarrow 1$ donne $1 \rightarrow G \cap V_n \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$ où $G' = \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ ou $\text{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$,
et $\dim G \cap V_n \geq 1$;
2. $\partial X = s_\infty \cup s_0$ (donc X est le complémentaire de la section nulle dans le fibré en droites de degré n sur \mathbf{P}^1) : $G = \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n}$ ou $\text{im} \left(\mathbf{SL}_2 \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \right)$;
3. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^2$) : G est n'importe quel sous-groupe lisse connexe de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ tel que la suite exacte $1 \rightarrow V_n \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n} \rightarrow \frac{\mathbf{GL}_2}{\mu_n} \rightarrow 1$ donne $1 \rightarrow G \cap V_n \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$ où $U \leq G' \leq \frac{B}{\mu_n}$ et $\dim G \cap V_n \geq 1$;
4. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty)$ (donc $X \simeq (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbf{A}^1$) : $G = \frac{B}{\mu_n}$ (qui est le normalisateur de ∂X) ou $\left\{ \begin{bmatrix} t^{d-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}}a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes^d \mathbf{G}_m$ (où $d \in \mathbf{N}$, $e \in \mathbf{Z}^*$ et $\text{pgcd}(d, e) = 1$) ;

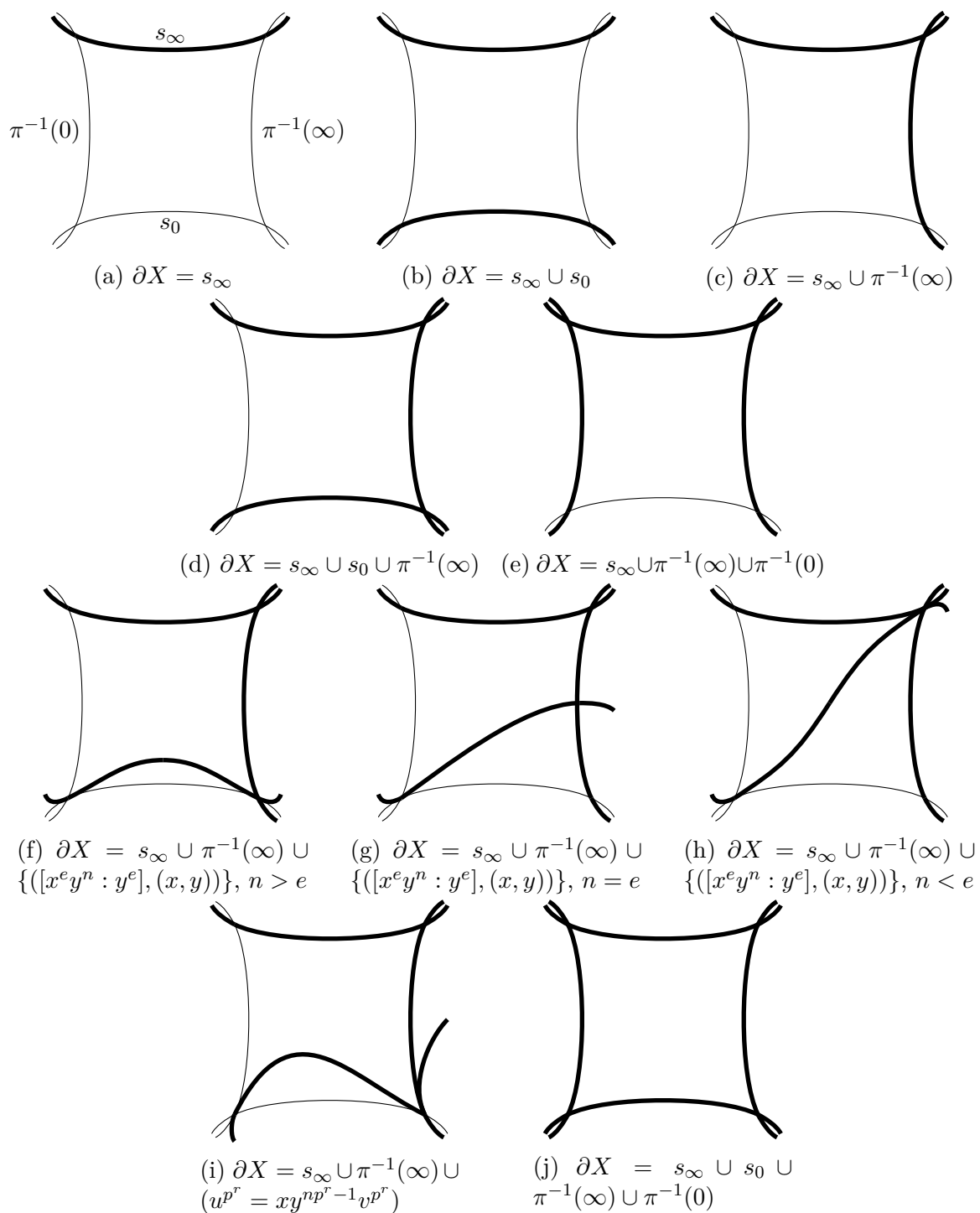


FIGURE 3.1 – Dessins du théorème 3.5.17

5. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

(a) $G = W \rtimes \frac{T}{\mu_n}$ ou $W \rtimes \left\{ \begin{bmatrix} t^{\frac{\mu}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\nu + \frac{\mu}{n}} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ où $\mu \in \mathbf{Z}$, $\nu \geq 1$, $\text{pgcd}(\mu, \nu) = 1$ et W est un sous-groupe vectoriel non nul de V_n ;

(b) $p \geq 2$, $G = W \rtimes \left\{ \begin{bmatrix} t^{\frac{\mu}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\nu + \frac{\mu}{n}} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ où $\mu \in \mathbf{Z}$, $\nu \geq 1$, $\text{pgcd}(\mu, \nu) = 1$ et W est produit direct de sous-groupes de V_n de la forme

$$\left\{ \sum_{i=0}^s c_i a^{p^{r_i}} x^{m_0 - d \frac{p^{r_i} - 1}{\nu}} y^{n - m_0 + d \frac{p^{r_i} - 1}{\nu}} \mid a \in \mathbf{G}_a \right\} \simeq \mathbf{G}_a$$

où $0 = r_0 < \dots < r_s$, $c_i \in k^*$, $0 \leq m_0 \leq n$, $d = \nu(n - m_0) - \mu$, $0 \leq m_0 - d \frac{p^{r_s} - 1}{\nu} \leq n$ et ν divise $\text{pgcd}(p^{r_i} - 1)$;

6. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$, $e \geq 1$ et si $n < i < e$ alors $\binom{e}{i} = 0$ dans k (donc $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) :

(a) $n \geq e$ et G est le normalisateur de ∂X ;

(b) $G = \left\{ \left(y^{n-e} [x^e - (x - ay)^e], \begin{bmatrix} t^{1-\frac{e}{n}} & t^{-\frac{e}{n}} a \\ 0 & t^{-\frac{e}{n}} \end{bmatrix} \right) \right\} \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ (qui est le normalisateur de ∂X si $n < e$;

7. $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^r-1}v^{p^r}$ et $p^r > 2$ (donc $X \simeq \mathbf{A}^1 \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) : $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ est le normalisateur de ∂X ;

8. $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ (donc $X \simeq (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}) \times (\mathbf{A}^1 \setminus \{0\})$) : $G = \frac{T}{\mu_n}$ est la composante neutre du normalisateur de ∂X .

Démonstration. Si G est réductif mais pas résoluble alors, d'après la proposition 3.5.7, on obtient le cas 2. Si G n'est ni réductif ni résoluble alors, d'après la remarque 3.5.10, on obtient le cas 1. On suppose désormais que G est résoluble. Alors G contient un sous-groupe lisse connexe G_0 qui opère transitivement dans X et qui est minimal pour cette propriété. Les possibilités pour G_0 sont données par le corollaire 3.5.14 quand G_0 n'est pas unipotent.

Cas 1. On suppose $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$. Alors G_0 est unipotent donc, comme dans la démonstration de la proposition 3.5.15, on a $\text{pr}_2(G_0) = U$ et $\dim G_0 \cap V_n \geq 1$. De plus le normalisateur de ∂X est $V_n \rtimes \frac{B}{\mu_n}$ donc $\text{pr}_2(G) \leq \frac{B}{\mu_n}$.

Cas 2. On suppose $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty)$. Le normalisateur $\frac{B}{\mu_n}$ de ∂X est de dimension 3 et G_0 est de dimension 2, donc $G = \frac{B}{\mu_n}$ ou G_0 .

Cas 3. On suppose $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$. On a la décomposition $G = R_u(G) \rtimes T_0$ où T_0 est un tore maximal de G , que l'on peut supposé être contenu dans $\frac{T}{\mu_n}$. Le normalisateur de ∂X est $V_n \rtimes \frac{T}{\mu_n}$ donc $R_u(G)$ est un sous-groupe de V_n .

Sous-cas 3.1. On suppose d'abord $T_0 = \frac{T}{\mu_n}$. L'opération de $T_0 \simeq \mathbf{G}_m^2$ dans V_n est donnée

par $(t_1, t_2) \cdot x^i y^{n-i} = (t_1^{-\frac{1}{n}} x)^i (t_1^{-\frac{1}{n}} t_2^{-1} y)^{n-i} = t_1^{-1} t_2^{i-n} x^i y^{n-i}$. Il n'y a pas de vecteur de poids nul dans V_n sous l'opération de T_0 donc, d'après [CGP, prop. B.4.2 p.576], $R_u(G)$ est un groupe vectoriel et il existe une opération linéaire de T_0 dans $R_u(G)$ telle que l'inclusion $R_u(G) \rightarrow V_n$ soit T_0 -équivariante. On a une décomposition de $R_u(G)$ en somme directe de droites T_0 -stables. Soient $H \simeq \mathbf{G}_a$ une telle droite et (w_1, w_2) le poids de $T_0 \simeq \mathbf{G}_m^2$ dans H .

L'inclusion $H \rightarrow V_n$ est donnée par $a \mapsto \sum_{i=0}^n f_i(a) x^i y^{n-i}$ où les f_i sont des p -polynômes.

Par hypothèse on a $\sum_{i=0}^n f_i(t_1^{w_1} t_2^{w_2} a) x^i y^{n-i} = \sum_{i=0}^n t_1^{-1} t_2^{i-n} f_i(a) x^i y^{n-i}$. Donc $w_1 = -1$ et si $f_1 \neq 0$ alors f_1 est de la forme $f_1(a) = c_1 a$ (à cause du poids de t_1) donc $w_2 = i - n$, donc il y a un seul f_i non nul. Donc l'image de H dans V_n est la droite engendrée par $x_i y^{n-i}$.

Sous-cas 3.2. On suppose maintenant que T_0 est de dimension 1. Il est donc de la forme

$\left\{ \begin{bmatrix} t^{\frac{\mu}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\nu + \frac{\mu}{n}} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{G}_m \right\}$ où $\mu \in \mathbf{Z}$, $\nu \in \mathbf{N}$ et $\text{pgcd}(\mu, \nu) = 1$. On a $\nu \neq 0$ sinon G opérerait trivialement dans la base \mathbf{P}^1 . L'opération de $T_0 \simeq \mathbf{G}_m$ dans V_n est donnée par $t \cdot x^i y^{n-i} = t^{(n-i)\nu - \mu} x^i y^{n-i}$. L'espace de poids nul est de dimension 1 si $0 \leq \mu \leq n$ (il s'agit de la droite engendrée par $x^{n-\mu} y^\mu$) et est trivial sinon. Donc d'après [CGP, prop. B.4.2 p.576], $R_u(G)$ est encore un groupe vectoriel et il existe une opération linéaire de T_0 dans $R_u(G)$ telle que l'inclusion $R_u(G) \rightarrow V_n$ soit T_0 -équivariante. Pour toute droite H de $R_u(G)$ qui est T_0 -stable, le groupe $H \rtimes T_0$ opère transitivement dans X donc les possibilités pour H sont données dans le corollaire 3.5.14.

Cas 4. On suppose $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$. Alors G_0 est de dimension 2 et le normalisateur de ∂X est de dimension 3 si $n \geq e$ et de dimension 2 si $n < e$. Donc G est égal à G_0 ou au normalisateur de ∂X .

Cas 5. Enfin, si $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^r-1} v^{p^r}$ et $p^r > 2$ ou si $\partial X = s_\infty \cup s_0 \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$ alors le normalisateur de ∂X est de dimension 2 donc $G = G_0$. \square

Remarque 3.5.19 : Si X est un sous-schéma ouvert de \mathbf{F}_n qui est homogène sous l'opération d'un sous-groupe lisse connexe G de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$ alors il existe une opération fidèle de G dans \mathbf{F}_n telle que G possède une orbite ouverte isomorphe à X , dont le bord soit un diviseur à croisements normaux simples. En effet, les seuls cas où le bord ∂X de X n'est pas un diviseur à croisements normaux simples sont $\partial X = s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup C$ où C est la section $\{([x^e y^n : y^e], (x, y)) \mid [x : y] \in \mathbf{P}^1\}$ et $e < n$ (les trois composantes s'intersectent au même point) ou bien C est la courbe d'équation $u^{p^r} = xy^{np^r-1} v^{p^r}$ avec $p^r > 2$ (les courbes C et $\pi^{-1}(\infty)$ sont tangentes). Mais alors on a $G \simeq \mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_m$ et le groupe d'isotropie est de la forme μ_e , donc on peut faire opérer G dans \mathbf{F}_n comme le sous-groupe $\left\{ \left(ay^n, \begin{bmatrix} t^{e-\frac{1}{n}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{1}{n}} \end{bmatrix} \right) \mid a \in \mathbf{G}_a, t \in \mathbf{G}_m \right\}$ de $\mathbf{Aut}_{\mathbf{F}_n}$, et X est isomorphe au complémentaire de $s_\infty \cup \pi^{-1}(\infty) \cup \pi^{-1}(0)$. De même, si X est un sous-schéma ouvert de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (resp. \mathbf{P}^2) qui est homogène sous l'opération d'un sous-groupe lisse connexe résoluble G de $\mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2$ (resp. \mathbf{PGL}_3) et si le bord ∂X n'est pas un diviseur à croisements normaux simples alors il existe une opération fidèle de G dans \mathbf{F}_n telle que G possède une orbite ouverte isomorphe à X , dont le bord soit un diviseur à croisements normaux simples.

Bibliographie

- [Bia] Andrzej Białyński-Birula, *On actions of $\mathbf{SL}(2)$ on complete algebraic varieties*, 53–58, Pacific J. Math. **86**, no.1, 1980.
- [Bor] Armand Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bou1] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 1 à 4*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Bou2] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 5 à 7*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Br15] Michel Brion, *On linearization of line bundles*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), n° 1, 113–147.
- [Br17] Michel Brion, *Some structure theorems for algebraic groups*, 53–125, Proc. Symp. Pure Math. **94**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
- [Br17b] Michel Brion, *Algebraic group actions on normal varieties*
- [BF] Michel Brion, Baohua Fu, *Minimal rational curves on wonderful group compactifications*, J. Éc. Polytech. Math. **2** (2015), 153–170.
- [CGP] Brian Conrad, Ofer Gabber, Gopal Prasad, *Pseudo-reductive groups*, New Mathematical Monographs **26**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.
- [DG] Michel Demazure, Pierre Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.
- [Dem] Michel Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sc. É.N.S. 4e série **3** (1970), n° 4, 507–588.
- [EGA] Alexander Grothendieck, Jean Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique. I Le langage des schémas*, Publ. Math. I.H.É.S. **4** (1960), 5–228; *II Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, ibid. **8** (1961), 5–222; *IV Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie*, ibid. **24** (1965), 5–231; *Quatrième partie*, ibid. **32** (1967), 5–361.
- [Fer] Daniel Ferrand, *Conducteur, descente et pincement*, Bull. Soc. Math. France **131** (2003), n° 4, 553–585.
- [Giz] Marat Kharisovitch Gizatullin, *On affine surfaces that can be completed by a nonsingular rational curve*, 787–810, Math. USSR-Izvestija **4**, no.4, 1970.
- [Giz2] Marat Kharisovitch Gizatullin, *Affine surfaces which are quasi-homogeneous with respect to an algebraic group*, 754–769, Math. USSR-Izvestija **5**, no.4, 1971.
- [Giz3] Marat Kharisovitch Gizatullin, *Quasihomogeneous affine surfaces*, 1058–1081, Math. USSR-Izvestija **5**, no.5, 1971.
- [GT] Silvio Greco, Carlo Traverso, *On seminormal schemes*, Compositio Math. **40** (1980), n° 3, 325–365.
- [GW] Ulrich Görtz, Torsten Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Vieweg + Teubner, 2010.
- [Har] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York, 1997.

- [Hoch] Gerhard Hochschild, *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras*, Graduate Texts in Mathematics **75**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [Howe] Sean Howe, *Higher genus counterexamples to relative Manin-Mumford*, Master thesis directed by Sebastiaan Edixhoven, Univ. Leiden and Univ. Paris-Sud 11, 2012.
- [Hum] James Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate texts in Mathematics **21**, Springer, New York, 1998 (corrected fifth printing).
- [Jan] Jens Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Mathematical Surveys and Monographs **107**, American Mathematical Society, 2007 (second edition).
- [Knop] Friedrich Knop, *Homogeneous varieties for semisimple groups of rank one*, 77–89, *Comp. Math.* **98**, no.1, 1995.
- [Kol] János Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Kol2] János Kollár, *Lectures on Resolution of Singularities*, Annals of Mathematical Studies **166**, Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [Lau] Bruno Laurent, *Almost homogeneous curves over an arbitrary field*, accepté pour publication dans *Transformation Groups*.
- [Lip] Joseph Lipman, *Desingularization of two-dimensional schemes*, 151–207, *Ann. Math.* **107**, 1978.
- [Liu] Qing Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [Mar] Masaki Maruyama, *On automorphism groups of ruled surfaces*, 89–112, *J. Math. Kyoto Univ.* **11**, no.1, 1971.
- [MO] Hideyuki Matsumura, Frans Oort, *Representability of group functors and automorphisms of algebraic schemes*, *Invent. Math.* **41** (1967), n° 1, 1–25.
- [MS] Manohar Madan et Michael Rosen, *The automorphism group of a function field*, 923–929, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115**, no. 4, 1992.
- [MU] Shigeru Mukai et Hiroshi Umemura, *Minimal rational threefolds*, 490–518, *Algebraic Geometry (Tokyo/Kyoto 1982)*, *Lecture Notes in Math.* **1016**, 1983.
- [Mos] George Mostow, *Fully reducible subgroups of algebraic groups*, 200–221, *Amer. J. Math.* **78**, no.1, 1956.
- [MFK] David Mumford, John Fogarty, Frances Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Oort] Frans Oort, *Commutative group schemes*, *Lecture Notes in Mathematics* **15**, Springer, Berlin, 1966.
- [Pop] Vladimir Popov, *Groups, Generators, Syzygies, and Orbits in Invariant Theory*, *Transl. Math. Monogr.* **100**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [Pot] Joseph Potters, *On Almost Homogeneous Compact Complex Analytic Surfaces*, 244–266, *Inv. Math.* **8**, 1969.
- [Ro55] Maxwell Rosenlicht, *Automorphisms of function fields*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **79** (1955), n° 1, 1–11.
- [Ro56] Maxwell Rosenlicht, *Some Basic Theorems on Algebraic Groups*, *Amer. J. Math.* **78** (1956), n° 2, 401–443.
- [Rus] Peter Russell, *Forms of the affine line and its additive group*, *Pacif. J. Math.* **32** (1970), n° 2, 527–539.

- [Sei] Abraham Seidenberg, *Derivations and integral closure*, 167–173, *Pacif. J. Math.* **16**, n° 1, 1966.
- [Ser] Jean-Pierre Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1975.
- [SGA1] Alexander Grothendieck, Michèle Raynaud, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA11306644)*, Documents Mathématiques **3**, Soc. Math. France, Paris, 2003.
- [SGA3-1] Michel Demazure, Alexander Grothendieck, *Schémas en groupes (SGA3). Tome 1 : Propriétés générales des schémas en groupes*, Documents Mathématiques **7**, Soc. Math. France, Paris, 2011.
- [SGA3-3] Michel Demazure, Alexander Grothendieck, *Schémas en groupes (SGA3). Tome 3 : Structure des schémas en groupes réductifs*, Documents Mathématiques **8**, Soc. Math. France, Paris, 2011.
- [Spr] Tonny Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [Sum] Hideyasu Sumihiro, *Equivariant completion II*, 573–605, *J. Math. Kyoto Univ.* **15**, n° 3, 1975.
- [Swa] Richard Swan, *On seminormality*, *J. Algebra* **67** (1980), n° 1, 210–229.
- [Tot] Burt Totaro, *Pseudo-abelian varieties*, 693–721, *A. Scient. Éc. Norm. Sup. 4e série* **46**, 2013.
- [Tra] Carlo Traverso, *Seminormality and Picard group*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **24** (1970), n° 4, 585–595.
- [Web] Charles Weibel, *Pic is a contracted functor*, *Invent. Math.* **103** (1991), n° 2, 351–377.
1306644)
- [Wit] Olivier Wittenberg, *On Albanese torsors and the elementary obstruction*, 805–838, *Math. Ann.* **340**, 2008.