



# Métamatériaux performants dans la gamme des fréquences audibles : simulations et validations expérimentales

Clément Lagarrigue

## ► To cite this version:

Clément Lagarrigue. Métamatériaux performants dans la gamme des fréquences audibles : simulations et validations expérimentales. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2013. Français. NNT : 2013LEMA1037 . tel-02003586

**HAL Id: tel-02003586**

**<https://theses.hal.science/tel-02003586>**

Submitted on 1 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

**Clément LAGARRIGUE**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
**grade de Docteur de l'Université du Maine**  
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans

École doctorale : SPIGA

Discipline : 60

Spécialité : Acoustique

Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine — UMR CNRS 6613

Soutenue le 27 septembre 2013

Thèse N° :

## MÉTAMATÉRIAUX PERFORMANTS DANS LA GAMME DES FRÉQUENCES AUDIBLES

**Simulations et validations expérimentales**

### JURY

|                         |                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rapporteurs :           | <b>Anne-Christine HLADKY</b> , Directeur de Recherche CNRS, IEMN<br><b>Philippe LECLAIRE</b> , Professeur, ISAT                                                                                                                        |
| Examineurs :            | <b>Yves AUREGAN</b> , Directeur de recherche CNRS, LAUM<br><b>Claude BOUTIN</b> , Ingénieur en chef des travaux publics, ENTPE<br><b>Claude DEPOLIER</b> , Professeur émérite, LAUM<br><b>Olga UMNova</b> , Reader, Salford University |
| Invité(s) :             | <b>Benoit NENNIG</b> , Maître de conférence, LISMM                                                                                                                                                                                     |
| Directeur de thèse :    | <b>Vincent TOURNAT</b> , Chargé de recherche CNRS HDR, LAUM                                                                                                                                                                            |
| Co-directeur de Thèse : | <b>Jean-Philippe GROBY</b> , Chargé de recherche CNRS, LAUM                                                                                                                                                                            |



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Anne-Christine Hladky et Philippe Leclaire pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. Je tiens également à remercier Claude Boutin, Claude Depollier, Yves Auregan et Benoit Nennig pour avoir accepté de l'examiner. Je n'oublie pas Olga Umnova, également examinatrice de ce travail, avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer durant cette thèse et que je remercie tout particulièrement pour son implication, sa patience et sa gentillesse.

J'aimerais remercier mes directeurs de thèse, Jean-Philippe Groby et Vincent Tournat pour le soutien sans faille, le professionnalisme et l'amitié qu'ils m'ont témoignés durant ces trois ans de thèse. Je voudrais également remercier tous les collègues du LAUM et en particulier Olivier Dazel et Bruno Brouard, avec qui j'ai eu la chance de travailler et qui m'ont beaucoup apporté aussi bien sur le plan théorique qu'expérimental. Les techniciens et assistants ingénieurs Hervé Mézière, Eric Egon, Stéphane Lebon, James Blondeau et Emmanuel Brasseur, qui se sont rendus disponibles, à l'écoute de toutes mes demandes et sans qui je n'aurais pas pu réaliser autant d'expériences. Enfin, je remercie tous les doctorants du LAUM et en particulier mes camarades de toujours, Damien Lecoq, Jeremy Cabaret et Baptiste Bergeot qui m'ont permis de vivre ces trois ans dans la sérénité et la bonne humeur.

*À mon grand père,*

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Abstract</b>                                                                       | <b>ii</b>  |
| <b>Remerciements</b>                                                                  | <b>iii</b> |
| <b>Liste des symboles</b>                                                             | <b>vii</b> |
| <b>Introduction</b>                                                                   | <b>1</b>   |
| <b>I Cristal sonique résonant naturel</b>                                             | <b>5</b>   |
| <b>1 Cristaux Soniques</b>                                                            | <b>7</b>   |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                            | 7          |
| 1.2 Méthodes de résolution de la propagation acoustique dans les milieux périodiques  | 8          |
| 1.2.1 Méthode de décomposition en ondes planes . . . . .                              | 10         |
| 1.2.2 Conception du SC . . . . .                                                      | 14         |
| 1.2.3 Détermination des pertes en transmission à l'aide de la MST . . . . .           | 16         |
| 1.2.4 Résultats expérimentaux . . . . .                                               | 19         |
| 1.3 SC composé de résonateurs . . . . .                                               | 24         |
| 1.3.1 Influence du résonateur de Helmholtz . . . . .                                  | 24         |
| 1.3.2 Influence de la position des résonateurs de Helmholtz . . . . .                 | 25         |
| 1.3.3 Implémentation du comportement des HR dans la MST . . . . .                     | 27         |
| 1.3.4 Influence de la taille du cristal . . . . .                                     | 28         |
| 1.4 SC à gradient de propriété : gradient de résonance . . . . .                      | 29         |
| 1.4.1 Étude préliminaire : Réseau 1D et gradient de résonance . . . . .               | 30         |
| 1.4.2 Influence du type variation de résonance . . . . .                              | 31         |
| 1.5 Conclusion et discussion . . . . .                                                | 36         |
| <b>II Metaporeux acoustique</b>                                                       | <b>39</b>  |
| <b>2 Metaporeux</b>                                                                   | <b>41</b>  |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                            | 41         |
| 2.2 Formulation du problème . . . . .                                                 | 43         |
| 2.3 Fréquence de résonance d'un résonateur splitring et modèle de diffusion . . . . . | 45         |

|            |                                                                               |            |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.1      | Fréquence de résonance d'un splitring dans l'air . . . . .                    | 45         |
| 2.3.2      | Fréquence de résonance d'un splitring en présence de mur rigide . . . . .     | 48         |
| 2.3.3      | Fréquence de résonance d'un splitring dans un matériau poreux . . . . .       | 51         |
| 2.3.4      | Diffraction par un splitring à basse fréquence . . . . .                      | 52         |
| 2.4        | Étude paramétrique . . . . .                                                  | 52         |
| 2.4.1      | Influence de l'orientation du col . . . . .                                   | 52         |
| 2.4.2      | Création d'une "supercellule" en faisant varier la position de la fente . . . | 55         |
| 2.4.3      | Influence de la géométrie des inclusions résonantes . . . . .                 | 57         |
| 2.5        | Validation expérimentale . . . . .                                            | 58         |
| <b>III</b> | <b>Optimisation par algorithme génétique</b>                                  | <b>65</b>  |
| <b>3</b>   | <b>Metaporeux</b>                                                             | <b>67</b>  |
| 3.1        | Optimisation par algorithme génétique . . . . .                               | 67         |
| 3.1.1      | Description détaillée des opérations de base . . . . .                        | 69         |
| 3.1.2      | Mécanismes de convergence rapide . . . . .                                    | 71         |
| 3.1.3      | GA appliqué à l'absorption acoustique . . . . .                               | 73         |
| 3.1.4      | Résultats d'optimisation . . . . .                                            | 76         |
| 3.1.5      | Optimisation par angle d'incidence . . . . .                                  | 79         |
| 3.2        | Conclusion . . . . .                                                          | 82         |
|            | <b>Annexes</b>                                                                | <b>87</b>  |
|            | <b>References</b>                                                             | <b>131</b> |

# LISTE DES SYMBOLES

La liste suivante résume les principaux symboles mathématiques utilisés dans ce document, avec leurs unités respectives et une courte description. Lorsqu'aucune unité n'est donnée, le symbole est soit adimensionné soit correspond à une matrice dont les colonnes ou les lignes ont des unités différentes.

## Symboles généraux et acronymes

|          |                     |                                                                  |
|----------|---------------------|------------------------------------------------------------------|
| SC       |                     | Cristal sonique (Sonic Crystal).                                 |
| PWE      |                     | Méthode de décomposition en ondes planes (Plane Wave Expansion). |
| MST      |                     | Méthode de diffusion multiple (Multiple Scattering Theory).      |
| HR       |                     | Résonateur de Helmholtz (Helmholtz Resonator).                   |
| SR       |                     | cylindre fendu (Split Ring).                                     |
| HP       |                     | Haut-parleur.                                                    |
| HRSC     |                     | Cristal sonique à résonateurs de Helmholtz.                      |
| RMST     |                     | MST tenant compte de la résonance des inclusions.                |
| $t$      | s                   | Temps.                                                           |
| $f$      | Hz                  | Fréquence.                                                       |
| $\omega$ | $\text{rad.s}^{-1}$ | Pulsation fréquentielle.                                         |
| $c$      | $\text{m.s}^{-1}$   | Vitesse du son dans l'air.                                       |
| $\rho$   | $\text{kg.m}^3$     | Masse volumique.                                                 |
| $k$      | $\text{rad.m}^{-1}$ | Nombre d'onde.                                                   |
| $\Pi$    |                     | Fonction de Heavyside.                                           |

## Chapitre 1

|                  |                 |                                                                            |
|------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $R$              | cm              | Rayon d'une inclusion.                                                     |
| $d$              | cm              | Diamètre d'une inclusion.                                                  |
| $a$              | cm              | Période spatiale.                                                          |
| $Fr$             |                 | Filling fraction.                                                          |
| $\vec{a}_i$      |                 | vecteur du réseau direct.                                                  |
| $\vec{b}_i$      |                 | vecteur du réseau réciproque.                                              |
| $\vec{x}$        | m               | Coordonnées spatiales dans le système de coordonnées cartésien global.     |
| $\vec{r}$        | m               | Coordonnées spatiales dans le système de coordonnées cylindrique global.   |
| $\vec{u}$        | m               | Déplacement.                                                               |
| $A$              | m <sup>2</sup>  | Aire de la cellule unitaire.                                               |
| $\Gamma \ X \ M$ | m <sup>-1</sup> | Frontières de la zone irréductible de Brillouin dans le réseau réciproque. |
| $P$              | Pa              | Pression.                                                                  |
| $k_B$            |                 | Nombre de Bloch.                                                           |
| $D_n^{(j)}$      |                 | Coefficient de diffusion du j-ème cylindre.                                |
| $\beta_n^{(j)}$  |                 | Admittance de surface caractéristique.                                     |
| $\alpha$         | Degré           | Angle de l'onde incidente.                                                 |
| $f_H^{(j)}$      | Hz              | Fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz du bambou j.             |

## Chapitre 2

|                       |                                  |                                                              |
|-----------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\rho_1$              | $\text{kg.m}^3$                  | Masse volumique du fluide équivalent.                        |
| $\chi_1$              | $\text{Pa}^{-1}$                 | Module de compressibilité du fluide équivalent.              |
| $\nu$                 | $\text{Pa.s}$                    | Viscosité dynamique de l'air.                                |
| $Pr$                  |                                  | Le nombre de Prandtl.                                        |
| $C_p$                 | $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ | Chaleur massique à pression constante.                       |
| $\kappa$              | $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  | Conduction thermique de l'air.                               |
| $\gamma$              |                                  | Constante adiabatique.                                       |
| $P_0$                 | $\text{Pa}$                      | Pression statique.                                           |
| $\tau$                | $\text{Pa.s.m}^{-1}$             | Résistance au passage de l'air.                              |
| $\alpha_{\text{inf}}$ |                                  | Tortuosité.                                                  |
| $\phi$                |                                  | Porosité.                                                    |
| $\Lambda$             | $\text{m}$                       | Longueur caractéristique visqueuse.                          |
| $\Lambda'$            | $\text{m}$                       | Longueur caractéristique thermique.                          |
| $r_i$                 | $\text{cm}$                      | Rayon intérieur d'une inclusion.                             |
| $r_e$                 | $\text{cm}$                      | Rayon extérieur d'une inclusion.                             |
| $d$                   | $\text{cm}$                      | Largeur de la cellule unitaire.                              |
| $e$                   | $\text{cm}$                      | Ouverture du col.                                            |
| $h$                   | $\text{cm}$                      | Hauteur de la cellule unitaire.                              |
| $L$                   | $\text{cm}$                      | Distance entre le centre d'une inclusion et la paroi rigide. |
| $H$                   | $\text{cm}$                      | Epaisseur de la paroi d'une inclusion.                       |
| $\alpha^{\{n\}}$      | Degré                            | Orientation de l'inclusion n.                                |
| $\delta$              | $\text{m}$                       | Correction de longueur de la fente de l'inclusion.           |
| $\bar{Z}$             | $\text{Pa.s.m}^{-1}$             | Impédance de rayonnement.                                    |
| $f_r$                 | $\text{Hz}$                      | Fréquence de résonance du résonateur.                        |

## Chapitre 3

|          |    |                                                              |
|----------|----|--------------------------------------------------------------|
| $f_i$    |    | Fitness.                                                     |
| $\alpha$ |    | Coefficient d'absorption moyen.                              |
| $A(j)$   |    | Coefficient d'absorption à la fréquence $j$ .                |
| $p$      |    | Coefficient de pondération en fréquence.                     |
| $r_i$    | cm | Rayon intérieur d'une inclusion.                             |
| $r_e$    | cm | Rayon extérieur d'une inclusion.                             |
| $d$      | cm | Largeur de la cellule unitaire.                              |
| $e$      | cm | Ouverture du col.                                            |
| $h$      | cm | Hauteur de la cellule unitaire.                              |
| $L$      | cm | Distance entre le centre d'une inclusion et la paroi rigide. |
| $H$      | cm | Épaisseur de la paroi d'une inclusion.                       |
| $x_i$    | cm | Coordonnée horizontale d'une inclusion $i$ .                 |
| $y_i$    | cm | Coordonnée verticale d'une inclusion $i$ .                   |
| $\phi_i$ | cm | Orientation angulaire d'une inclusion $i$ .                  |
| $r_i$    | cm | Rayon externe d'une inclusion $i$ .                          |
| $e_i$    | cm | Épaisseur d'une inclusion $i$ .                              |
| $x_c$    | cm | Coordonnée horizontale d'une cavité $c$ .                    |
| $h_c$    | cm | Hauteur d'une cavité $c$ .                                   |
| $l_c$    | cm | Largeur d'une cavité $c$ .                                   |

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Aujourd'hui considérée comme une nuisance majeure, la pollution sonore touche les lieux de travail, les espaces de loisirs, les transports et, bien sûr, le bâtiment. Le bruit est une nuisance qu'il faut maîtriser et réduire, au même titre que la sécurité ou la pollution de l'air et de l'eau. À ce titre, il fait partie intégrante du développement durable (soutenable).

La réduction du bruit est maintenant un enjeu majeur pour les industriels de la construction et des transports. Plusieurs raisons à cela : nous passons 90% de notre temps dans des environnements clos dans lesquels nous sommes en proie au bruit intérieur comme extérieur. Les particuliers et les professionnels sont de plus en plus exigeants vis-à-vis de leur confort acoustique et de leur santé. Ils exigent des produits acoustiques innovants et plus performants : revêtements de sol, planchers, fenêtres et vitrages, parois, toitures, systèmes actifs, barrières antibruit routier, équipements divers ; autant de produits qui sont désormais l'objet de recherches amont et aval sur le plan acoustique.

Le traitement de l'acoustique urbaine et de l'acoustique du bâtiment sont devenus des obligations depuis la Directive européenne sur le bruit<sup>1</sup>. Depuis 2007, les grandes agglomérations européennes doivent produire des cartes de bruit, indiquant le niveau d'exposition au bruit, des habitants et des personnes vivant aux abords des grands axes de transport terrestre et grands aéroports. Les autorités compétentes peuvent alors mettre en place un plan d'action pour traiter efficacement les problèmes liés au bruit.

Dans les domaines artistiques et technologiques, l'enjeu acoustique est également de taille : les salles de spectacle recevant opéras ou concerts doivent procurer au public une acoustique confortable. De leur côté, les constructeurs (automobiles, trains, hélicoptères, avions...) optimisent sans cesse le confort acoustique des habitacles de leurs véhicules.

La plupart des solutions mises en place aujourd'hui reposent sur deux techniques antagonistes, l'isolation et l'absorption. L'isolation acoustique a pour but d'empêcher la propagation sonore dans un milieu en plaçant sur le trajet de l'onde sonore un matériau assez dense pour pouvoir la stopper. Sachant que le matériau doit avoir une épaisseur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du son considéré, il est difficile de stopper les basses fréquences dont les longueurs d'onde sont de plusieurs mètres. Lorsque le matériau stoppe efficacement la progression du son, l'onde est totalement réfléchi et repart dans le sens inverse. Une pièce dont les murs sont composés uniquement de ces matériaux sera isolée des bruits extérieurs mais aura une acoustique extrêmement réverbérante.

L'absorption acoustique, quant à elle, est obtenue en plaçant sur le trajet de l'onde sonore un matériau dissipatif. Il s'agit souvent de matériaux poreux, peu denses, composés d'un squelette

---

1. [http://www.developpement-durable.gouv.fr/IMG/spipwwwmedad/pdf/bruit\\_ambient\\_cle0ff58a-1.pdf](http://www.developpement-durable.gouv.fr/IMG/spipwwwmedad/pdf/bruit_ambient_cle0ff58a-1.pdf)

solide saturé d'air. L'onde sonore, en pénétrant dans les pores, peut être dissipée par frottements visqueux et échanges thermiques pour une certaine gamme de fréquence dépendante des dimensions du matériau. Seule une partie de l'énergie sonore est réfléchi et transmise, le reste étant dissipé dans le matériau. Une pièce dont les murs sont uniquement composés de matériaux isolants a une acoustique interne très peu réverbérante mais n'est pas isolée des bruits extérieurs.

La solution communément adoptée pour obtenir une acoustique confortable est alors de combiner les deux matériaux, permettant ainsi de traiter autant l'acoustique interne que l'acoustique externe, mais impliquant une augmentation importante de l'épaisseur des parois considérées.

En parallèle, de nouveaux types de matériaux appelés Métamatériaux ont reçu un intérêt grandissant de la part de la communauté scientifique, en particulier en acoustique où de nombreux travaux sur des métamatériaux acoustiques ont vu le jour. Il s'agit de matériaux créés par l'homme ayant des propriétés physiques impossibles à obtenir avec des matériaux normaux. Il est notamment possible d'aboutir à une isolation phonique avec un matériau peu dense, ce qui est contraire aux principes énoncés précédemment (par exemple à l'aide d'un système composé de membranes et de masses [1]).

Ce travail de thèse a pour objectif la modélisation, l'étude et la conception de deux dispositifs expérimentaux utilisant des métamatériaux. Chacun de ces dispositifs a une application différente. Le premier a pour but l'isolation acoustique à l'aide d'un cristal sonique, le second a pour but l'augmentation de l'absorption acoustique d'un matériau poreux à l'aide d'un réseau périodique d'inclusions résonantes.

Le premier chapitre est consacré à la conception et l'étude d'un cristal sonique naturel localement résonant, créé spécialement pour une isolation acoustique dans la gamme des fréquences audibles et particulièrement à très basse fréquences. Comme mentionné précédemment, la maîtrise du bruit fait partie intégrante du développement durable (soutenable) et, à ce titre, l'utilisation de matériaux naturels permet d'inscrire l'étude dans une démarche éco-responsable cohérente. C'est pourquoi, dans ce chapitre, le coefficient de transmission d'un cristal sonique constitué de diffuseurs en bambou est étudié de façon expérimentale et théorique. La décomposition en onde plane (Plane Wave Expansion, PWE) et la théorie de diffusion multiple (Multiple Scattering Theory, MST) sont utilisées pour prédire les bandes interdites et le coefficient de transmission, dans un premier temps, en l'absence de résonateurs. Le coefficient de transmission simulé par MST ainsi que la position des bandes interdites sont ensuite validés à l'aide de résultats expérimentaux. Les diffuseurs étant constitués de matériaux naturels "bruts", leurs rayons peuvent varier de plusieurs millimètres dans le cristal et leur surface est rugueuse, ce qui induit du désordre. Par la suite, les bambous sont percés entre chaque noeuds pour créer un empilement de résonateurs. Ces résonateurs de Helmholtz induisent une bande interdite additionnelle dans la gamme très basse fréquence du coefficient de transmission mesuré (environ 330 Hz). Notre programme MST est alors modifié pour prendre en compte les effets de résonances des bambous. Cette théorie de diffusion multiple avec résonateur (appelée Resonant Multiple Scattering Theory, RMST) est validée expérimentalement et utilisée pour concevoir un cristal sonique comportant un gradient de résonances.

Le but du second chapitre est de concevoir une lame de matériau poreux ayant un très haut coefficient d'absorption sur une large bande de fréquence. Dans un premier temps, la fréquence de résonance, calculée théoriquement et par simulation éléments finis, est déterminée pour une série infinie d'inclusions de type "splitring" (cylindres fendus) arrangées périodiquement dans un matériau poreux collé contre une paroi rigide. Les simulations éléments finis permettent de mettre en évidence une amélioration significative des performances d'un matériau poreux par l'introduction d'inclusions résonantes. La dissipation de l'énergie acoustique dans les pores du

matériau poreux est améliorée par les résonances basses fréquences des inclusions et le piégeage de l'énergie entre les inclusions et le fond rigide. Une étude paramétrique est alors menée pour déterminer l'influence de la géométrie et de l'arrangement des inclusions sur le coefficient d'absorption.

Le dernier chapitre est dans la continuité du précédent et traite de l'optimisation de l'arrangement des inclusions insérées dans une lame de poreux. Un algorithme d'optimisation génétique est utilisé pour déterminer la géométrie maximisant le coefficient d'absorption sur une large bande de fréquence pour un nombre d'inclusions et pour une épaisseur de lame fixés. L'influence de l'ajout de contraintes supplémentaires sur le coefficient d'absorption moyen telles que l'optimisation en incidence rasante ou la pénalisation des hautes fréquences, permet de prouver la robustesse de la géométrie optimisée.

Enfin, les annexes 1 à 3 regroupent trois articles sur des sujets connexes à ceux exposés dans ce document et étudiés durant cette thèse. L'annexe 1 rapporte le comportement d'un cristal sonique composé d'inclusions cylindriques carrées. Un tel cristal produit des bandes interdites dont les fréquences peuvent varier en fonction de l'orientation des inclusions. Il présente alors des propriétés d'accordabilité qui lui permettent de créer des guides d'ondes complexes. L'annexe 2 reprend le principe exposé dans le second chapitre de cette thèse, en étudiant le coefficient d'absorption d'inclusions dans une lame de poreux. Pour cette étude les inclusions sont rigides et de formes géométriques 3D simples. Pour obtenir le coefficient d'absorption d'un tel dispositif, un code élément finis est créé, permettant de prendre en compte la nature 3D des inclusions. Enfin la dernière annexe propose de remplacer les inclusions splitrings par des résonateurs de Helmholtz, composés d'un cylindre percé d'un trou et d'un col additionnel. Ce type de résonateur permet d'ajouter un pic d'absorption à une fréquence encore plus basse qu'avec un splitring. De par la nature 3D de ces inclusions, les résultats sont obtenus par l'utilisation du code élément finis 3D présenté dans l'annexe 2.



## **Première partie**

# CRISTAL SONIQUE RÉSONANT NATUREL



# Chapitre 1

---

## METAMATÉRIAUX ACOUSTIQUES : CRISTAUX SONIQUES RÉSONANTS

---

### 1.1 Introduction

Avec l'intérêt grandissant pour le développement durable (soutenable), de nouveaux matériaux, plus respectueux de l'environnement commencent à voir le jour [2]. En acoustique du bâtiment par exemple, les matériaux usuels pour l'absorption et l'isolation acoustique, viennent de l'industrie pétrochimique et certains sont classés, à l'instar de l'amiante, comme dangereux pour la santé. Des solutions plus écologiques et respectueuses de l'environnement existent tout de même, mettant en jeu des matériaux poreux naturels ou des cristaux soniques en matière recyclée [3] mais elles restent pour l'instant marginales, honéreuses et souvent moins efficaces que les matériaux usuels.

Parallèlement, les cristaux phononiques ont reçu un intérêt grandissant de la part de la communauté acousticienne lors des dernières décennies à cause de leurs propriétés acoustiques originales et en particulier de l'existence de bandes interdites [4]. De nombreuses études ont été conduites dans le domaine des ultrasons pour des cylindres d'acier plongés dans l'eau [5], de l'époxy [6] ou bien encore de l'air [7]. Ces bandes interdites traduisent le fait que les ondes acoustiques ne peuvent se propager à travers un tel arrangement périodique, sur une certaine bande de fréquence dépendante des caractéristiques de la cellule unitaire [8]. Les bandes interdites sont dues aux diffusions multiples sur les cylindres conduisant à des interférences destructives, dépendantes du rayon des diffuseurs (dans le cas d'un réseau de tiges cylindriques) et de la période spatiale du cristal.

Pour des applications d'isolation acoustique basse fréquence une large bande interdite centrée sur une fréquence assez basse doit être obtenue. Les caractéristiques géométriques de la structures doivent être adaptées. Les pertes en transmission en rapport avec la période peuvent être combinées à des effets additionnels de résonance basse fréquence, améliorant ainsi les propriétés de la structure [9]. Jusqu'à maintenant les structures de ce type étaient en grande partie composées de résonateurs de type *splitrings* [10, 11], résonateurs composés de cylindres fendus sur toute la longueur. Ce type de résonateur est facile à construire et peut résonner pour des fréquences en dessous de la première bande interdite liée à la période du cristal. De telles structures résonantes peuvent être utiles pour l'isolation acoustique car les pertes en transmission

sont augmentées grâce à ces résonances basses fréquences. Mais une résonance basse fréquence implique des dimensions de diffuseurs assez importantes.

La bande interdite peut alors être agrandie, en accordant les résonateurs pour des applications distinctes telles que des lentilles acoustiques ou des guides d'ondes complexes.

Dans ce chapitre, seuls des diffuseurs cylindriques sont considérés. Le cristal sonique est réalisé à partir de canne bambou. En perçant un trou entre chaque noeud de celles-ci, il est possible de les transformer en un empilement de résonateurs de Helmholtz (HR). Les dimensions des bambous disponibles dans le commerce permettent d'obtenir des résonances très basse fréquence (quelques centaines de Hz). L'utilisation de matériaux naturels induit une dispersion sur les dimensions des bambous, et donc sur leur fréquence de résonance. Cette dispersion peut être utile dans notre cas, car elle permet de créer un isolant acoustique plus large bande. Cette structure possède un coefficient de transmission faible à des fréquences autour de 300 Hz. Cette bande de fréquence n'avait jamais été atteinte avec des cristaux soniques naturels à ce jour.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la détermination des dimensions les plus appropriées pour un cristal sonique en bambou, ayant une bande interdite absolue la plus basse fréquence possible, en utilisant la méthode de décomposition en ondes planes. La seconde partie de ce chapitre est dédiée à la détermination du coefficient de transmission en fonction de la fréquence d'un tel cristal, numériquement et expérimentalement. De précédentes études ont été menées sur des cristaux soniques résonants en utilisant des méthodes semi-analytiques [12, 13]. Ici, les résultats expérimentaux sont comparés à des simulations réalisées avec la méthode de diffusion multiple (MST) [14]. Les pertes en transmission associées aux résonateurs de Helmholtz dans le cristal sont étudiées suivant plusieurs paramètres (orientation du col, effet du nombre de lignes...). Les résultats expérimentaux permettent de prendre en compte ces résonances de façon simple dans les simulations obtenues par MST et permettent de prédire correctement le comportement acoustique d'un tel système. Dans la dernière partie une tentative de cristal sonique résonant à gradient de propriété est exposée. Dans un premier temps, un cristal sonique 1D à gradient de résonance est étudié expérimentalement puis les résultats sont transposés à un cristal sonique 2D qui est étudié expérimentalement et numériquement.

## 1.2 Méthodes de résolution de la propagation acoustique dans les milieux périodiques

Lorsqu'une onde acoustique est incidente sur le cristal, elle est partiellement diffusée dans toutes les directions par les cylindres. Il existe alors une gamme de fréquence, dépendante de la période et du rayon des cylindres, pour laquelle aucune onde acoustique ne peut se propager. Cette gamme de fréquence est appelée "bande interdite" et peut exister quel que soit l'angle de l'onde incidente. Elle est alors désignée comme "absolue". À contrario, certaines existent seulement pour un ou plusieurs angles d'incidence et sont alors désignées comme "pseudo-bandes interdites".

Dans ce document, les cristaux phononiques sont composés d'un arrangement périodique de cylindres rigides infinis dans un fluide. Lorsque le fluide considéré est de l'air et qu'ils sont utilisés pour la gamme des fréquences audibles, ils sont appelés "cristaux soniques" (sonic crystal, SC). Typiquement dans ce type de système, les cylindres sont arrangés périodiquement suivant une maille carrée, triangulaire [15] ou hexagonale. La différence notable entre ces géométries réside essentiellement sur les valeurs des fréquences pour lesquelles une bande interdite absolue existe. Ces fréquences peuvent être plus ou moins élevées pour une même période suivant les

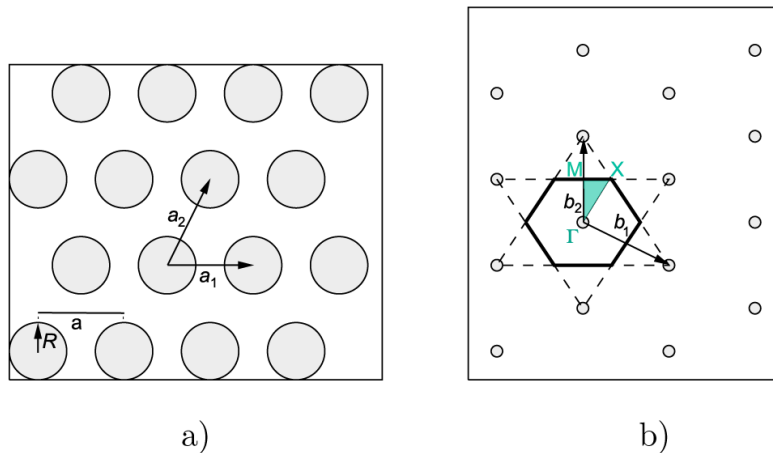


FIGURE 1.1 – Schéma d'un SC à maille triangulaire. a) Le réseau direct, où les cylindres ont un rayon  $R$  et une période  $a$ . b) Le réseau Réciproque avec la zone irréductible de Brillouin.

géométries de la cellule unitaire. Pour déterminer si une bande interdite existe ou non, avant de tracer complètement les diagrammes de bandes, le "taux de remplissage" (Filling fraction,  $Fr$ ) peut être utilisé en première approximation. Il s'agit du rapport entre la zone comportant un diffuseur et la dimension de la cellule unitaire, donnée par :

$$Fr = \frac{\pi R^2}{a^2}, \quad (1.1)$$

pour une maille carrée de période  $a$ , c'est-à-dire, la distance entre deux cylindres adjacents et de rayon  $R$ . Cette formule devient :

$$Fr = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}a^2}, \quad (1.2)$$

pour une maille triangulaire, dont la cellule unitaire est un hexagone régulier autour d'un diffuseur (voir Fig. 1.1b)) où  $d = 2R$  est le diamètre des diffuseurs.

Il est souvent admis que  $Fr$  doit se trouver entre 0.4 et 0.6 pour observer des interférences destructives suffisamment fortes pour créer une bande interdite dans le cas d'une maille carré [16]. Dans cet intervalle, les interférences destructives permettent d'obtenir une bande interdite absolue.

Quand  $Fr$  est en dehors de cet intervalle, seules des pseudo bandes interdites peuvent être observées. À contrario, une des caractéristiques spécifiques des cristaux en maille triangulaire est leur capacité à supporter des bandes interdites absolues pour une valeur de  $Fr$  inférieure à 0.4 (jusqu'à 0.15). La période peut donc être augmentée et permet d'obtenir une bande interdite dans une gamme de fréquence plus basse [17]. Cette bande interdite apparaît lorsque la période du réseau est de l'ordre du quart de longueur d'onde de l'onde incidente. L'ordre de grandeur de la fréquence centrale de la première bande interdite peut être alors rapidement estimée par  $f = \frac{c}{2a}$  pour une maille carré et  $f = \frac{c}{\sqrt{3}a}$  pour une maille triangulaire (où  $c$  est la vitesse du son dans le milieu ambiant).

Les bandes interdites peuvent être déterminées de façon précise en traçant le diagramme de bande, obtenu par méthode de décomposition en ondes planes (Plane Wave Expansion (PWE)).

### 1.2.1 Méthode de décomposition en ondes planes

Cette méthode est utilisée pour déterminer les modes de propagation acoustique dans des cristaux phononiques infinis (ici à deux dimensions). Les diffuseurs sont des cylindres rigides de dimensions identiques, de hauteur infinie, disposés suivant un réseau périodique de maille carrée, triangulaire ou hexagonale et entouré d'un fluide parfait (ici de l'air). Les effets visco-thermiques ne sont pas pris en compte.

Le principe est de résoudre les équations de l'acoustique dans l'espace réciproque en réalisant une transformée de Fourier spatiale 2D sur la géométrie du problème. Le problème se réduit alors à un problème aux valeurs propres qu'il est possible de résoudre en restreignant la zone de recherche à une zone élémentaire appelée "première zone de Brillouin".

Dans la suite de ce chapitre, une maille triangulaire est choisie pour sa capacité à supporter des bandes interdites absolues plus basses fréquences qu'une maille carrée. La méthode de décomposition en ondes planes est donc exposée dans le cas d'un SC à maille triangulaire.

#### 1.2.1.1 Réseau réciproque pour un cristal à maille triangulaire

Chaque élément de la géométrie du cristal peut être représenté par deux vecteurs de base  $\vec{a}_1$   $\vec{a}_2$  non-colinéaires. Ces deux vecteurs forment un réseau de Bravais 2D tels que :

$$\vec{D}_{l_1 l_2} = l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2, \quad (1.3)$$

avec  $l_1$  et  $l_2$  des entiers relatifs,  $\vec{a}_1 = a(1, 0)$  et  $\vec{a}_2 = a(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (voir figure 1.1). Pour décrire la géométrie d'une maille élémentaire du réseau direct il suffit de connaître le rayon des cylindres et la période. Le réseau complet peut alors être décrit à l'aide de ces données et de la relation (1.3). L'aire de la première zone de Brillouin pour un réseau triangulaire est une maille de Wigner-Seitz et est donnée par :

$$A = |\vec{a}_1 \vec{a}_2|, \quad (1.4)$$

sachant que les normes des vecteurs  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  sont toutes deux égales à la périodicité du milieu  $a$ . On peut alors définir des vecteurs du réseau réciproque associés au réseau direct précédent tel que :

$$\vec{G}_{h_1 h_2} = h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2, \quad (1.5)$$

avec  $h_1$  et  $h_2$  deux entiers et  $\vec{b}_1 = (\frac{2\pi}{a})(1, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$  et  $\vec{b}_2 = (\frac{2\pi}{a})(0, \frac{2}{3}\sqrt{3})$  (voir figure 1.1). Les grandeurs utilisées dans ce réseau réciproque sont homogènes à des nombres d'onde.

#### 1.2.1.2 Position du problème

Le cristal phononique étudié ici est un système inhomogène dont les caractéristiques géométriques sont le rayon  $R$  des cylindres et la période  $a$ . Le comportement acoustique de ce SC dépend de ces grandeurs géométriques, de la nature des diffuseurs et du fluide composant le milieu ambiant.

Dans les calculs qui suivent, les cylindres sont supposés infiniment rigides et le fluide est supposé parfait (c'est-à-dire que l'onde acoustique se propage uniquement dans le fluide sans dissipation visco-thermique). Ce cristal peut être considéré comme un milieu inhomogène dont

## 1.2 Méthodes de résolution de la propagation acoustique dans les milieux périodiques 11

les masses volumiques  $\rho(\vec{x})$ , célérités  $c(\vec{x})$  et module d'élasticité  $\chi(\vec{x})$  prennent des valeurs différentes suivant que le vecteur  $\vec{x}$  pointe un cylindre ou une région du fluide. Dans le fluide, ils prennent les valeurs  $\rho_0, c_0, \chi_0$  (la célérité est définie par la relation  $c_0^2 = \frac{\rho_0}{\chi_0}$ ).

Les cylindres étant supposés rigides, aucune onde ne s'y propage, les masses volumiques et célérités sont infinies et le module d'élasticité nul. Dans le cadre de l'acoustique linéaire, le champ de déplacement  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , associé à la propagation d'une onde de pression acoustique dans le fluide parfait entourant les cylindres, est solution de l'équation du mouvement suivante :

$$\rho(\vec{x}) \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}} [\rho(\vec{x}) c^2(\vec{x}) \text{div } \vec{u}(\vec{x}, t)], \quad (1.6)$$

où seul  $\vec{u}$  dépend du temps. Les opérateurs gradient et divergence s'appliquent aux grandeurs dépendantes de l'espace. Le champ de pression acoustique dans l'air, étant à rotationnel nul, dérive d'un potentiel scalaire  $\phi(\vec{x}, t)$  suivant la forme,

$$\rho(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{x}, t). \quad (1.7)$$

L'équation (1.6) peut alors se réécrire en fonction de ce potentiel :

$$\frac{1}{\rho(\vec{x}) c^2(\vec{x})} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \text{div} \left( \frac{1}{\rho(\vec{x})} \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{x}, t) \right). \quad (1.8)$$

Les solutions  $\phi(\vec{x}, t)$  de cette équation sont reliées au champ de déplacement  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  par l'intermédiaire de la relation (1.7). Leur détermination conduit à celle des champs acoustiques pouvant se propager ou non dans le cristal. L'objet du paragraphe suivant est de résoudre cette équation en utilisant la méthode de décomposition en ondes planes.

### 1.2.1.3 Résolution du problème par méthode de décomposition en ondes planes

Le problème est considéré comme étant harmonique. La convention temporelle  $e^{-i\omega t}$  est utilisée. Les solutions  $\phi(\vec{x}, t)$  peuvent être séparées en considérant une partie temporelle, portée par  $e^{-i\omega t}$  et une partie spatiale telle que :

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad (1.9)$$

Après transformée de Fourier, l'équation du mouvement s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{-\omega^2}{\rho(\vec{x}) c^2(\vec{x})} \phi(\vec{x}) = \text{div} \left( \frac{1}{\rho(\vec{x})} \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\vec{x}) \right). \quad (1.10)$$

Le théorème de Floquet-Bloch peut être utilisé en imposant que les solutions  $\phi(\vec{r})$  sont réécrites comme des fonctions de Bloch, périodiques de période  $a$  telles que :

$$\phi(\vec{x}) = \phi_{\vec{k}_B}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}_B \vec{x}}, \quad (1.11)$$

où  $\vec{k}_B$  sont les nombres d'onde de Bloch à déterminer et correspondant aux constantes de propagation. Ce théorème permet donc de décrire le passage d'une cellule unitaire à l'autre comme étant une translation dont l'amplitude est modulée par l'exponentielle décroissante. De plus les fonctions  $\rho(\vec{x})$ ,  $\phi(\vec{x})$  et  $\chi(\vec{x})$  ont la même périodicité, ce qui permet de décomposer toute ces fonctions en séries de Fourier spatiales.

### 1.2.1.4 Décomposition en série de Fourier spatiale

La décomposition en série de Fourier spatiale de l'équation du mouvement se fait sur la base formée par les vecteurs  $\vec{G}$  du réseau réciproque définis par la relation (1.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\vec{k}_B}(\vec{x}) = \sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i\vec{G}\vec{x}}, \\ \frac{1}{\phi(\vec{x})} = \sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) e^{i\vec{G}\vec{x}}, \\ \frac{1}{\phi(\vec{x})c^2(\vec{x})} = \sum_{\vec{G}} C(\vec{G}) e^{i\vec{G}\vec{x}}, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où les coefficients  $P(\vec{G})$  et  $C(\vec{G})$  sont connus et s'écrivent tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{G}) = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{\rho(\vec{x})} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x}, \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{A} \iint_A \frac{1}{\rho(\vec{x})c^2(\vec{x})} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x}, \end{array} \right. \quad (1.13)$$

avec  $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$  l'aire de la cellule unitaire et  $\vec{G}$  le vecteur du réseau réciproque. Une cellule étant composée d'un cylindre et d'air, il est possible de la séparer en deux parties, l'aire du cylindre  $A_c = \pi r^2$  et l'aire du fluide  $A_f = A - A_c$ .

L'équation précédente est réécrite en séparant l'intégrale sur ces deux domaines :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{G}) = \frac{1}{A} \frac{1}{\rho_c} \iint_{A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x} + \frac{1}{A} \frac{1}{\rho_0} \iint_{A_f} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x}, \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{A} \frac{1}{\rho_c c_c^2} \iint_{A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x} + \frac{1}{A} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \iint_{A_f} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x}. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Lorsque  $\vec{G} = \vec{0}$  alors P et C deviennent,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{0}) = \frac{A_c}{A} \frac{1}{\rho_c} + \frac{A - A_c}{A} \frac{1}{\rho_0}, \\ C(\vec{0}) = \frac{A_c}{A} \frac{1}{\rho_c c_c^2} + \frac{A - A_c}{A} \frac{1}{\rho_0 c_0^2}, \end{array} \right. \quad (1.15)$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_c} Fr + \frac{1}{\rho_0} (1 - Fr), \\ C(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_c c_c^2} Fr + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (1 - Fr), \end{array} \right. \quad (1.16)$$

où  $Fr = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}a^2}$  est le Filling fraction de la cellule unitaire.

En faisant apparaître la somme des deux domaines  $A_f$  et  $A_c$  dans le premier membre de l'équation (1.14) lorsque  $\vec{G} \neq 0$  nous obtenons :

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_0} \right) \iint_{A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x} + \frac{1}{A} \frac{1}{\rho_0} \iint_{A_f+A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x}, \\ C(\vec{G}) = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\rho_c c_c^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right) \iint_{A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x} + \frac{1}{A} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \iint_{A_f+A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x}, \end{cases} \quad (1.17)$$

où la première intégrale de chacune des deux fonctions portant sur le domaine  $A_c + A_f$  est nulle. Les deux termes restants font apparaître la même intégrale notée  $F(\vec{G})$ ,

$$F(\vec{G}) = \frac{1}{A} \int \int_{A_c} e^{-i\vec{G}\vec{x}} d^2\vec{x} = 2Fr \frac{J_1(GR)}{GR}. \quad (1.18)$$

Finalement, pour  $\vec{G} \neq 0$  nous avons,

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = \left( \frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_0} \right) F(\vec{G}), \\ C(\vec{G}) = \left( \frac{1}{\rho_c c_c^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right) F(\vec{G}). \end{cases} \quad (1.19)$$

Pour des cylindres parfaitement rigides, les constantes  $\frac{1}{\rho_c}$  et  $\frac{1}{\rho_c c_c^2}$  sont nulles. Dans ce cas, les fonctions P et C deviennent :

$$\begin{cases} P(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0} (1 - Fr), \\ C(\vec{0}) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (1 - Fr), \end{cases} \quad (1.20)$$

et lorsque  $\vec{G} \neq 0$  :

$$\begin{cases} P(\vec{G}) = -\frac{1}{\rho_0} F(\vec{G}), \\ C(\vec{G}) = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} F(\vec{G}). \end{cases} \quad (1.21)$$

L'utilisation conjointe du théorème de Bloch et de la décomposition en ondes planes permet de décomposer les solutions de l'équation sous forme d'une série d'ondes planes,

$$\phi_{\vec{k}_B}(\vec{x}) = \sum_{\vec{G}} \Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}_B + \vec{G})\vec{x}}. \quad (1.22)$$

Après application des opérateurs divergence, gradient et de la substitution de  $\phi(\vec{x})$  par les relations (1.12), l'équation (1.10) devient :

$$P(\vec{G}' - \vec{G})(\vec{k}_B + \vec{G}').(\vec{k}_B + \vec{G})\Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}) = \omega^2(\vec{G}' - \vec{G})\Phi_{\vec{k}_B}(\vec{G}), \quad (1.23)$$

où  $\vec{G}$  et  $\vec{G}'$  sont des vecteurs du réseau réciproque.

La PWE permet alors de tracer les diagrammes de bandes permettant de déterminer les gammes de fréquences pour lesquelles il existe des bandes passantes et interdites. Pour ce faire, les solutions de l'équation (1.23) sont obtenues en fixant un nombre d'onde  $k_b$  et en recherchant les différentes pulsations  $\omega$  solutions de l'équation. Les bandes interdites sont obtenues pour les pulsations pour lesquelles il n'existe pas de nombre d'onde de Bloch  $k_B$  purement réel.

## 1.2.2 Conception du SC

### 1.2.2.1 Détermination de la période

Le but est de créer un SC naturel efficace pour la gamme des fréquences audibles. Grâce à leurs formes cylindriques caractéristiques, des cannes de bambou sont choisies comme diffuseurs. Elles sont constituées de bois assez dur pour être considérées comme des diffuseurs infiniment rigides. Les cannes de bambous disponibles sur le marché mesurent 2.60 m de haut, avec un diamètre externe variant entre 3.7 et 4.3 cm. Cette dispersion est inhérente à l'utilisation de matériaux naturels et doit être prise en compte pour des résultats précis. Cependant en première approximation, les simulations par PWE sont réalisées en renseignant un diamètre moyen pour chacun des cylindres. Ce diamètre est de  $d = 2R = 4$  cm, avec  $R$  le rayon moyen. La PWE est utilisée pour déterminer la bande interdite la plus appropriée pour une application basse fréquence (l'objectif est d'obtenir une bande interdite absolue ayant la fréquence centrale la plus basse possible, en fonction des rayons des bambous à disposition) et donc la périodicité de réseau la plus appropriée. Pour assurer une bonne convergence des résultats, tout en gardant un temps de calcul acceptable, la PWE est calculée en tronquant les séries faisant intervenir les vecteurs  $\vec{G}$  et  $\vec{G}'$  à 169 ondes planes. Le temps de calcul pour une telle troncature est d'environ 30 s.

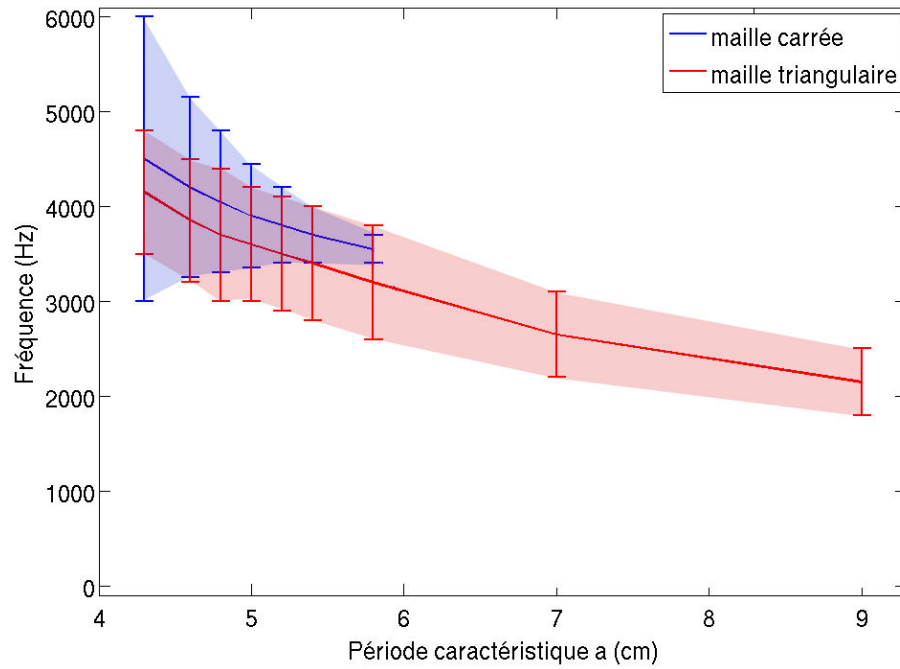


FIGURE 1.2 – Comparaison des largeurs fréquentielles des bandes interdites absolues en fonction de la période de réseau  $a$ . Chaque barre correspond à la largeur fréquentielle de la bande interdite absolue pour une période de réseau  $a$  donnée

Le diamètre des cylindres étant fixé à 4 cm, le seul paramètre restant à définir est la période. Pour cela, plusieurs simulations ont été réalisées en faisant varier la période de réseau  $a$  de

4 cm à 10 cm et en relevant les bornes fréquentielles de la première bande interdite absolue. Cette étude a été réalisée pour une maille carrée et triangulaire. D'après la figure 1.2 lorsque la période de réseau augmente, la fréquence centrale de la bande interdite diminue, mais sa largeur fréquentielle diminue jusqu'à se transformer en pseudo bande interdite. La différence entre les cristaux à maille triangulaire et carrée est clairement visible, en particulier par la possibilité d'avoir une bande interdite très large (3000 Hz) pour une maille carrée et une période de réseau de 4.1cm. La contrepartie étant une décroissance très rapide de la largeur de la bande avec l'augmentation de la période de réseau jusqu'à obtenir une pseudo bande interdite après 6 cm. En revanche, avec la maille triangulaire, des bandes interdites absolues sont obtenues pour une période bien plus grande. En choisissant celle-ci à 9 cm, le taux de remplissage correspondant est  $Fr = 0.18$ . Cette valeur semble être l'une des plus faibles qu'il soit possible d'atteindre tout en gardant une largeur de bande interdite correcte (700 Hz) et pour une fréquence centrale "très" basse pour ces dimensions. Avec ces paramètres, la première bande interdite absolue se trouve entre 1800 Hz et 2550 Hz, et en particulier, entre 1600 Hz et 2550 Hz pour la direction  $\Gamma X$  (voir Fig 1.3), c'est-à-dire en incidence normale. Cette configuration sera utilisée par la suite.

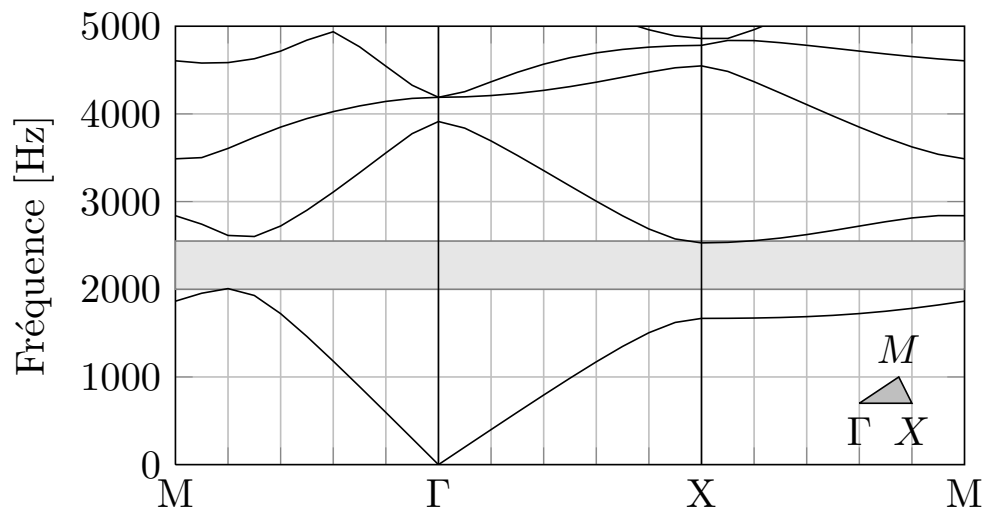


FIGURE 1.3 – Diagramme de bande du SC à maille triangulaire, pour un rayon moyen de 2 cm et une période de réseau de 9 cm. Les courbes de dispersion sont tracées le long des contours de la zone irréductible de Brillouin  $\Gamma XM$  ou  $\Gamma X$  est l'incidence normale. Le zone grisée représente la bande interdite absolue.

La PWE permet de déterminer les bandes interdites et passantes d'un SC constitué de diffuseurs parfaitement rigides mais est limitée à l'étude de structures infinies. Elle ne peut pas prendre en compte les effets de diffractions sur les bords d'un SC de dimensions finies. Pour des mesures dans l'air et dans la gamme de fréquence audible la réponse du cristal obtenue y est assez sensible, il faut donc pouvoir les prendre en compte dans les simulations.

La solution est d'utiliser une autre méthode, permettant de simuler la diffraction sur les bords du cristal et de prendre en compte la position de la source ou du microphone. Des méthodes telles que les Différences Finies (FDTD) ou la Théorie de Diffusion Multiple (MST) sont de bons candidats. La MST est choisie ici pour calculer le champ acoustique transmis à travers le SC,

qui sera alors comparé à des résultats expérimentaux. La MST permet également de prendre en compte la dispersion sur les diamètres des bambous et sera modifiée pour prendre en compte les effets de résonances possibles des diffuseurs.

### 1.2.3 Détermination des pertes en transmission à l'aide de la MST

La MST, aussi appelée approche KKR (Korringa, Kohn, and Rostoker) a été en grande partie développée pour le calcul de structure de bande en électronique. Cette méthode a été également largement utilisée en élasticité et en électromagnétisme [18]. L'idée principale est de séparer l'espace 2D en régions qui ne se recouvrent pas, l'une d'entre elles contenant un cylindre et de calculer le champ de pression acoustique comme la somme d'un champ incident et d'un champ diffracté par le cylindre. Le champ total est obtenu en résolvant ce problème pour chacun des cylindres.

#### 1.2.3.1 Cas du réseau fini de $J$ cylindres

Le champ de pression acoustique  $P(\vec{r}, \omega)$  dans le cristal obéit à l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques :

$$(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2)P(\vec{r}, \omega) = 0. \quad (1.24)$$

Le champ de pression acoustique total est calculé pour chacune de ces régions comme la somme du champ diffracté par le cylindre et un champ incident  $\underbrace{P_{diff}(\vec{r}, \omega)}_{i=j}$ , composé du champ diffracté des autres diffuseurs  $\underbrace{P_{diff}(\vec{r}, \omega)}_{i \neq j}$  (théorème d'addition de Graf) et du champ direct de l'onde incidente  $P_{inc}(\vec{r}, \omega)$ .

$$P^{(j)}(\vec{r}, \omega) = P_{inc}(\vec{r}, \omega) + \underbrace{P_{diff}(\vec{r}, \omega)}_{i \neq j} + \underbrace{P_{diff}(\vec{r}, \omega)}_{i=j}. \quad (1.25)$$

Considérons une onde plane incidente, développée sur la base des fonctions de Bessel telle que :

$$P_{inc}(\vec{r}, \omega) = \sum_n (-i)^n B_n J_n(k_0 r) e^{i(\theta - \theta^0)}, \quad (1.26)$$

en coordonnées cylindriques, où les  $B_n$  sont les coefficients de pondérations associés aux champs incidents,  $J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  et  $k_0$  le nombre d'onde dans le milieu incident. Pour ce qui est du champ de pression diffracté par les cylindres, il s'écrit sous la forme :

$$P_{diff}(\vec{r}_j, \omega) = \sum_n A_n^{(j)} H_n^{(1)}(k_0 r^{(j)}) e^{in\theta^j}, \quad (1.27)$$

où les  $A_n^{(j)}$  sont les coefficients de pondérations associés à la diffusion du  $j$ -ème cylindre,  $H_n^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$ . Le but est de trouver la valeur des coefficients  $A_n$  et  $B_n$ .

## 1.2 Méthodes de résolution de la propagation acoustique dans les milieux périodiques 17

On considère une structure composée de  $J$  cylindres circulaires mis en parallèle, identifiés par l'exposant  $j \in J$ , de rayon  $R^{(j)}$ , de coordonnées  $\vec{r}_j = (r^{(j)}, \theta^j)$  dans le système de coordonnées polaires globales du plan transverse. Comme indiqué ci-dessus, la clé de la théorie de diffusion multiple est de considérer des diffusions locales du champ de pression ou des diffusions multiples aux abords de chaque cylindre dans les coordonnées polaires liées à ce cylindre.

La pression incidente aux abords du  $j$ -ème cylindre peut être écrite dans le repère du cylindre comme :

$$P_{inc}(\vec{r}_j, \omega) = e^{(ik_0 r_j \cos(\theta^j - \theta^0))} \sum_n (-i)^n B_n J_n(k_0 r_j) e^{in(\theta^j - \theta^0)}. \quad (1.28)$$

En utilisant le théorème d'addition de Graf, le champ diffracté par le cylindre  $k \neq j$  peut s'écrire dans la base du cylindre  $j$  telle que :

$$H_n^{(1)}(k_0 r_k) e^{in\theta^k} = \sum_q e^{i(n-q)\theta_j^k} H_{(n-q)}^{(1)}(k r_j^k) J_q(k_0 r_j) e^{iq\theta^j}, \quad (1.29)$$

avec  $r_j^k$  la distance reliant les centres des cylindres  $k$  et  $j$ ,  $(r_k^{(j)}, \theta_k^{(j)})$  sont les coordonnées du  $k$ -ème cylindre dans le système de coordonnées polaires associées au  $j$ -ème cylindre. Ceci permet de réécrire le champ de pression total aux abords du cylindre  $j$  tel que :

$$P(\vec{r}_j, \omega) = e^{(ik_0 r_j \cos(\theta^j - \theta^0))} \sum_n (-i)^n B_n J_n(k_0 r^{(j)}) e^{in(\theta^j - \theta^0)} + \sum_n A_n^{(j)} H_n^{(1)}(k r^{(j)}) e^{in\theta^j} \\ + \sum_j \sum_n \sum_q A_q^{(j)} e^{i(n-q)\theta_j^k} H_{(n-q)}^{(1)}(k r_j^k) J_q(k_0 r^{(j)}) e^{in\theta^j}, \quad (1.30)$$

qui peut alors se réécrire :

$$p(\vec{r}_j, \omega) = \sum_n \left( A_n^{(j)} H_n^{(1)}(k r^{(j)}) + B_n^{(j)} J_n(k r^{(j)}) \right) e^{in\theta_n}. \quad (1.31)$$

Le champ incident local sur le  $j$ -ème cylindre est généré par l'actuel champ incident  $p_{inc}$  ainsi que par ceux diffractés par les autres cylindres  $k$ ,  $k \neq j$ . Ces coefficients prennent alors la forme :

$$B_n^{(k)} = K_n^{(k)} + \sum_{l \neq j} \sum_q S_{nq}^{kl} B_q^{(l)}, \quad (1.32)$$

où  $K_n^{(k)}$  sont les coefficients de champ incident actuel, c'est-à-dire une onde plane incidente dans le plan transverse,  $K_n^{(j)} = (-i)^n \exp\left(ik r_n^{(j)} \cos(\theta^i - \theta^n) - im\theta^i\right)$  et  $S_{nq}^{kl} = H_{n-q}^{(1)}\left(k r_n^{(j)}\right) e^{i(q-n)\theta_n^j}$  sont les termes de translations. Les coefficients  $A_n^{(j)}$  et  $B_n^{(j)}$  sont reliés via les conditions aux limites du  $j$ -ème cylindre, c'est-à-dire  $A_n^{(j)} = D_n^{(j)} B_n^{(j)}$ , avec  $D_n^{(j)}$  le coefficient de diffraction. Ceci conduit au système linéaire final qui peut être écrit en forme matricielle où  $\mathbf{B}$  dénote de la colonne de composante  $B_n^{(j)}$ .

$$(\mathbf{I} - \mathbf{DS}) \mathbf{B} = \mathbf{K}, \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité,  $\mathbf{S}$  est la matrice de composante  $S_{nq}^{kl}$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag} D_n^{(j)}$  et  $\mathbf{K}$  est la matrice de colonne infinie de composante  $K_n^{(j)}$ .

Lorsque Eq.(1.33) est résolue pour  $B_n^{(j)}$ , le champ peut être calculé dans la totalité de l'espace [19]. La somme infinie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$  sur les indices de la représentation modale du champ diffracté par un cylindre est tronquée [20] comme la somme  $\sum_{n=-N}^N$  où  $N = \text{int} \left( \text{Re} \left( 4.05 \times \left( kr_n^{(j)} \right)^{\frac{1}{3}} + kr_n^{(j)} \right) \right) + 10$ . Dans cette équation,  $\text{int}(a)$  représente la partie entière de  $a$  et 10 est un facteur de sécurité.

Contrairement à la PWE, la MST peut tenir compte des propriétés (rayons, positions, et nature des inclusions) de chacun des diffuseurs [21], de la dissipation visco-thermique et permet de calculer le champ acoustique à n'importe quel endroit du système. Cependant seulement un seul angle pour l'onde incidente peut être considéré à chaque calcul. Chaque rayon de cylindre est mesuré et utilisé dans le modèle pour que la simulation se rapproche le plus possible du SC expérimental. Le champ acoustique derrière le SC est moyenné le long de la direction latérale, sur 17 points [22]. L'air entourant les inclusions peut être considéré comme un fluide parfait (sans dissipation) et une condition aux limites de type Neumann est utilisée pour l'interface bambou-air. Le coefficient de diffraction  $D_n^{(j)}$  du  $j$ -ème bambou considéré pour le calcul suivant  $A_n^{(j)} = D_n^{(j)} B_n^{(j)}$  prend la forme (dans la convention temporelle  $e^{-i\omega t}$ )

$$D_n^{(j)} = -\frac{J'_n(kR^{(j)})}{H'_n^{(1)}(kR^{(j)})}, \quad (1.34)$$

où  $J'_n$  and  $H_n^{(1)}$  sont respectivement les dérivées des fonctions de Bessel et Hankel de première espèce suivant les coordonnées radiales et  $R^{(j)}$  le rayon du  $j$ -ème cylindre.

Pour valider l'hypothèse de fluide parfait et de condition aux limites de type Neumann, les résultats sont comparés sous cette hypothèse avec une condition de type impédance [23, 24] figure 1.4. Dans ce dernier cas, le coefficient de diffusion  $D_n^{(j)}$  prend la forme

$$D_n^{(j)} = -\frac{J'_n(kR^{(j)}) + i\beta_n J_n(kR^{(j)})}{H_n^{(1)}(kR^{(j)}) + i\beta_n H_n^{(1)}(kR^{(j)})}, \quad (1.35)$$

où l'admittance de surface caractéristique  $\beta_n^{(j)}$  exprime les effets visco-thermiques dans les couches limites. L'expression de l'admittance de surface caractéristique dans ce cas est :

$$\beta_n^{(j)} = \frac{1-i}{2} k \left[ \frac{n^2}{k^2 (R^{(j)})^2} \delta_v + (\gamma - 1) \delta_h \right], \quad (1.36)$$

où  $\delta_v = \sqrt{2\nu_v/\omega}$  est l'épaisseur de la couche limite visqueuse (la viscosité cinématique de l'air est  $\nu_v = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $\delta_h = \sqrt{2\nu_h/\omega}$  est l'épaisseur de la couche limite thermique (la diffusivité thermique de l'air est  $\nu_h = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) et  $\gamma = 1.4$  est le rapport des capacités. Dans la gamme de fréquence d'intérêt, les dimensions des couches limites sont négligeables en comparaison des dimensions du cristal et des cylindres. Les effets visco-thermiques ont une très faible influence sur le champ acoustique en dessous de 6 kHz, pour notre SC (voir Fig 1.4). Le fluide peut donc être considéré comme parfait et la condition de Neumann sera utilisée pour la suite des simulations.

Les résultats montrent une bande interdite dans le coefficient de transmission entre 1600 Hz et 2550 Hz dans la direction  $\Gamma X$  ce qui confirme les résultats obtenus avec la PWE (voir Fig. 1.3).

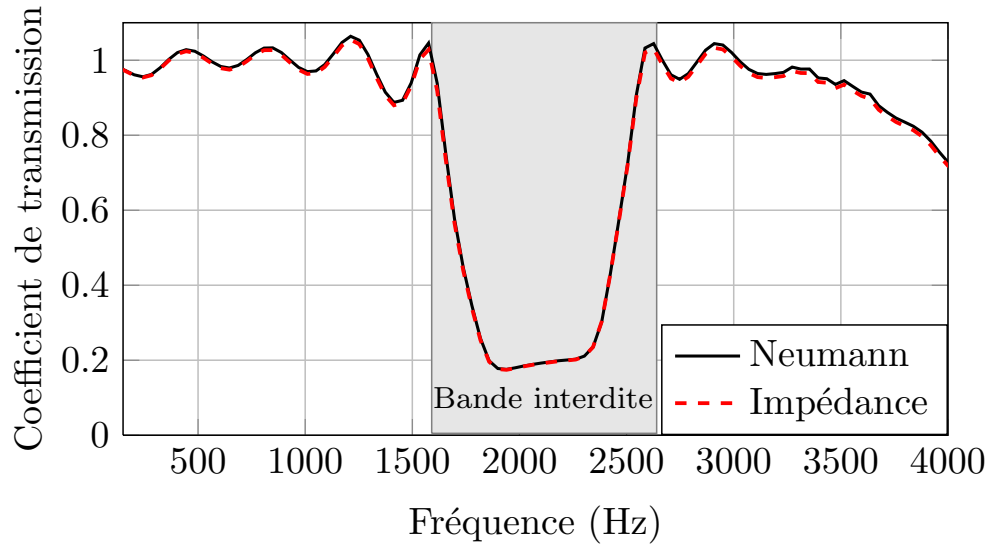


FIGURE 1.4 – Coefficient de transmission (en amplitude) du SC calculé par MST pour une période spatiale  $a$  de 9 cm en incidence normale ( $\Gamma X$ ). La condition de Neumann (—) et la condition d'impédance (---) sont utilisées à l'interface air-cylindre. Le rectangle gris décrit la bande interdite calculée par PWE.

#### 1.2.4 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental est un SC composé de  $J = 45$  bambous de rayon compris entre 3.7 et 4.3 cm et de 2.6 m de haut. Le cristal consiste en un arrangement de 9 colonnes et 5 lignes (voir Fig. 2.9).

Ce SC peut être considéré comme un SC 2D car sa hauteur est très supérieure aux autres dimensions. Toutes les expériences sont réalisées dans une chambre anéchoïque. La figure 1.7 représente le schéma expérimental. Un haut-parleur est connecté à la sortie générateur basse fréquence d'un analyseur de spectre (Stanford Research SR785) et produit un sinus glissant entre 100 Hz et 4000 Hz. Le HP est placé suffisamment loin (2.8m) du cristal pour que l'onde incidente soit considérée comme plane lorsqu'elle heurte le cristal. Un microphone B&k 1/4 de pouce mesure le champ transmis à 9 cm derrière le cristal (c'est-à-dire à distance d'une période) pour minimiser les effets de diffraction dus à la nature finie du cristal.

Le signal transmis est mesuré sur 17 points le long de l'axe  $x_2$ , c'est-à-dire sur une distance couvrant 2 périodes autour du cylindre central du cristal (une période de chaque côté) et est envoyé à l'analyseur. Deux mesures sont effectuées : une avec et une sans le cristal. En faisant le rapport des deux spectres (avec et sans le cristal) moyennés sur les 17 points, une valeur appelée par la suite coefficient de transmission moyen en amplitude est obtenue. Ce coefficient est différent du coefficient de transmission en énergie et diffère en première approximation par un carré.

Les bambous disponibles n'ayant pas les mêmes diamètres, ils sont répartis par taille croissante ; les plus petits diamètres se trouvent sur la première ligne. La figure 1.6 décrit la répartition spatiale des bambous dans le cristal suivant un plan horizontal. L'onde incidente arrive par le haut et la pression est mesurée de l'autre côté. L'intérêt d'une telle répartition pourrait être de



FIGURE 1.5 – Photographie du cristal testé, composé de 5 lignes de 9 bambous.

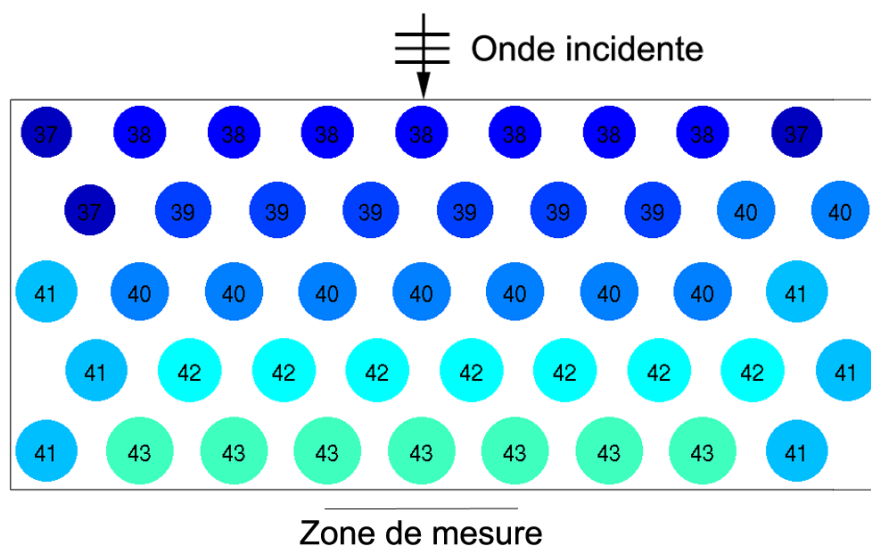


FIGURE 1.6 – Carte de répartition des bambous par ordre de taille pour un cristal de 9x5 bambous. Les chiffres à l'intérieur de chaque diffuseur représentent les diamètres extérieurs mesurés (en mm).

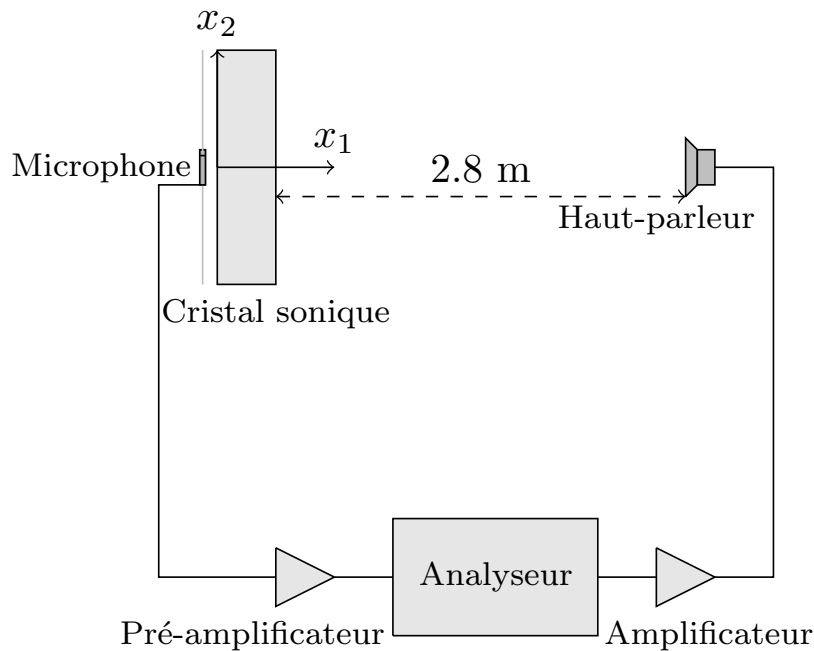


FIGURE 1.7 – Schéma du dispositif expérimental

créer une légère adaptation d'impédance permettant de minimiser la réflexion sur la surface du cristal.

Les résultats expérimentaux sont alors comparés aux simulations par MST sur les figures 1.8 et 1.9. Sur ces courbes il est possible d'observer le coefficient de transmission de chacun des 17 points de mesures sur la partie gauche de la figure et la moyenne sur la partie droite. Toutes ces mesures sont réalisées en incidence normale. La figure 1.8a) montre les résultats obtenus par MST sur les 17 points de mesures et la figure 1.9a) les 17 points expérimentaux. L'échelle des couleurs représente les amplitudes relatives des coefficients de transmission, allant de la couleur rouge pour un coefficient de transmission le plus élevé à la couleur bleu pour le coefficient le plus bas. Les échelles de couleurs ne sont pas normalisées et ne correspondent pas exactement d'une figure à l'autre, le but ici étant de localiser fréquemment la bande interdite. Cette dernière est clairement visible sur les figures 1.8b) et 1.9b) entre 1600 Hz et 2550 Hz avec un coefficient de transmission en amplitude en dessous de 0.2. Au vu des coefficients de transmission moyens, les résultats par MST sont en accord avec les résultats expérimentaux. La MST retranscrit donc bien la nature spécifique des interactions des ondes dans le cristal : la diffraction due à la taille finie du cristal et la dispersion des rayons des cylindres.

La comparaison lorsque les simulations par MST prennent en compte la dispersion des rayons, ou non, montre une très grande similitude dans les coefficients de transmission moyens (figure 1.8b), courbes MST et Rayon moyen). Cela signifie que la variation des rayons est suffisamment faible pour avoir peu d'effet basse fréquence et en particulier sur la première bande interdite. Des différences entre les résultats expérimentaux et simulés par MST apparaissent tout de même pour des fréquences au dessus de 4000 Hz. Elles peuvent être attribuées aux irrégularités de surfaces et à la dispersion des positions des bambous, introduisant du désordre qui n'est pas pris

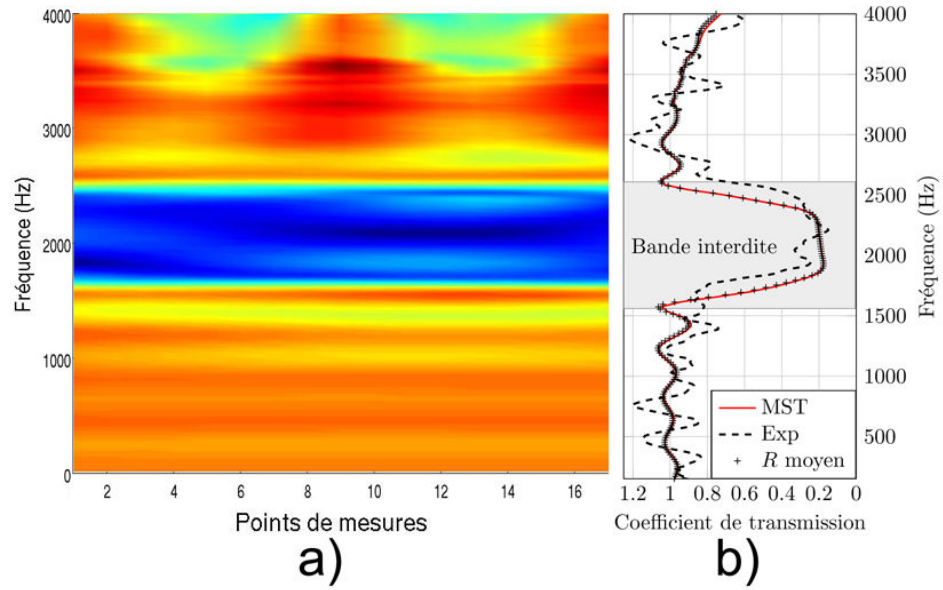


FIGURE 1.8 – Coefficient de transmission du SC à maille triangulaire de 9x5. a) Coefficient de transmission obtenus sur les 17 points de mesures avec la MST. b) Comparaison entre les moyennes des coefficients de transmission calculés par MST en prenant en compte les variations de rayons (—), par MST avec un rayon moyen (···) et mesurés expérimentalement (---).

en compte dans la MST.

Sur les figures 1.8b) et 1.9b), les coefficients de transmission moyens calculés et expérimentaux sont parfois supérieurs à 1. Or, les structures passives ne peuvent pas créer d'énergie et le coefficient de transmission ne doit pas être supérieur à 1. Dans notre cas, le microphone est assez près de la structure pour enregistrer des interférences constructives créées par la diffusion multiple à l'intérieur du cristal. Ces interférences constructives peuvent être enregistrées en champ proche. Cet effet disparaît lorsque le microphone est éloigné du cristal mais alors les effets de diffraction liés à sa taille finie apparaissent, dégradant les résultats expérimentaux et numériques. Le microphone est donc positionné proche du cristal. Une autre possibilité pour palier ce problème serait d'utiliser une sonde intensimétrique pour enregistrer le flux d'énergie et donc ne plus utiliser les coefficients de transmission en amplitude.

Les résultats ont également été vérifiés en incidence oblique en positionnant la source à un angle de  $45^\circ$  avec la normale et pour une distance de 2.80 m. La pression est toujours enregistrée suivant les deux mêmes périodes au centre du cristal et sur 17 points. Les résultats sont exposés figure 1.10 où le coefficient de transmission moyen expérimental est comparé aux résultats par MST. À l'instar des résultats en incidence normale, les coefficients de transmission expérimentaux et numériques montrent un bon accord.

En conclusion de cette partie, les résultats numériques obtenus avec les méthodes PWE et MST sont validés grâce aux résultats expérimentaux obtenus à l'aide d'un SC naturel dans la gamme des fréquences audibles. Ces méthodes numériques permettent de prédire de façon précise le comportement d'un SC de dimension finie composé de cylindres rigides pouvant avoir des rayons différents. De plus, il a été montré que le désordre inhérent à l'emploi de matériaux natu-

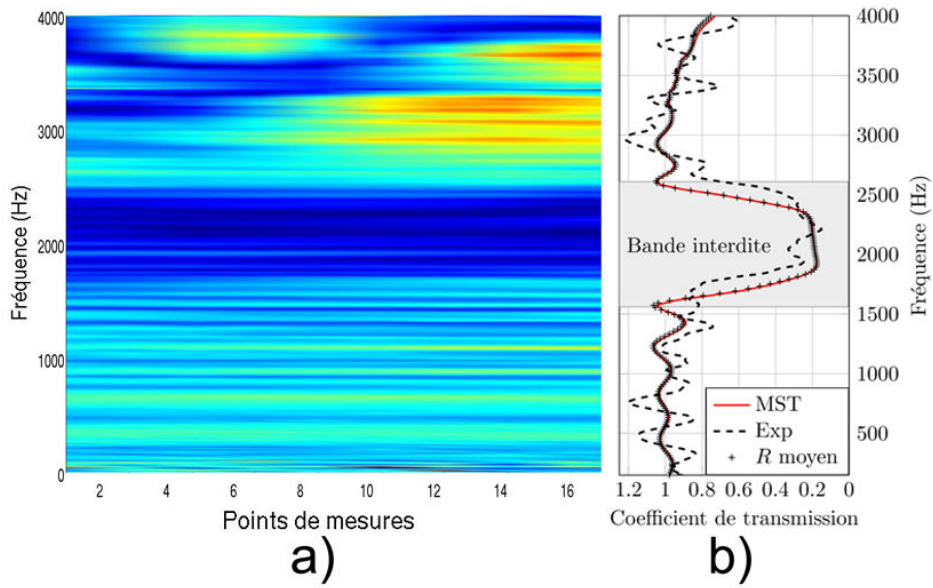


FIGURE 1.9 – Coefficient de transmission du SC à maille triangulaire de 9x5. a) Coefficient de transmission obtenus sur les 17 points de mesures expérimentaux. b) Comparaison entre les moyennes des coefficients de transmission calculés par MST en prenant en compte les variations de rayons (—), par MST avec un rayon moyen (···) et mesurés expérimentalement (---).

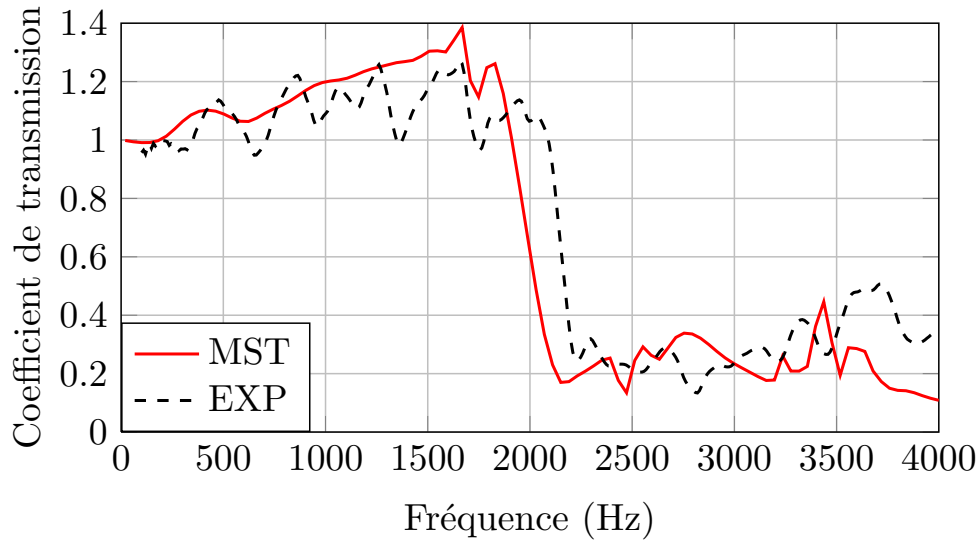


FIGURE 1.10 – Comparaison entre le coefficient de transmission calculé par MST en prenant en compte les variations de rayons (—), par MST avec un rayon moyen (···) et mesuré expérimentalement (---) pour un SC à maille triangulaire de 9x5 bambous de 4cm de diamètre.

rels "bruts", n'influence pas l'efficacité de la diffraction dans la gamme de fréquence considérée. Le bambou pourrait donc être un "bon candidat" pour la confection de barrières anti-bruit. La taille de la bande de fréquence ayant une forte perte en transmission reste tout de même assez étroite aux vues de la gamme des fréquences audibles. En supposant que les fréquences les plus nuisibles et difficiles à stopper sont les fréquences en dessous de 1000 Hz, le but de la suite de ce chapitre est d'augmenter les pertes en transmission du cristal à très basses fréquences en mettant en jeu d'autres phénomènes que la diffusion multiple, tel que des résonances qui viendront s'ajouter aux pertes en transmission actuelles.

### 1.3 SC composé de résonateurs

L'idée est d'augmenter les pertes par transmission de notre SC en combinant la bande interdite avec des phénomènes de résonances [25]. Les recherches actuelles utilisent des diffuseurs résonants comme les résonateurs splitrings [26, 27] ou les résonateurs de Helmholtz [28]. Ce type de diffuseur peut résonner pour des fréquences en dessous de la première bande interdite, où la longueur d'onde correspondante est largement supérieure au rayon des cylindres ou de la période du réseau. Les résonateurs de Helmholtz (HR) sont déjà utilisés en architecture acoustique pour réduire les basses fréquences indésirables grâce à des plaques perforées [29], par exemple.

Dans les cannes de bambou, la région internodale est creuse et chaque cavité est bien "étanche" par rapport aux autres. En perçant un trou dans chacune de ces cavités les cannes de bambou deviennent un empilement de résonateurs de Helmholtz. Les trous sont percés à approximativement un tiers de la longueur de la cavité. Ceci a été déterminé empiriquement pour exciter principalement la fréquence fondamentale du HR. Pour chaque cylindre, les trous sont percés de manière à ce qu'ils soient tous alignés suivant l'axe du cylindre et soient orientés face à l'onde incidente. La distance internodale de chaque HR est considérée identique. Sous l'approximation de grande longueur d'onde, c'est-à-dire l'approximation basse fréquence, le comportement de chaque cylindre constitué d'un empilement de HR peut être considéré comme un unique HR. La fréquence fondamentale du HR du  $j$ -ème cylindre peut être estimée sous l'approximation basse fréquence comme :

$$f_H^{(j)} = \frac{c}{2\pi} \frac{R_h}{R_i^{(j)} \sqrt{L\delta l}}, \quad (1.37)$$

avec  $R_h$  le rayon du trou,  $R_i^{(j)}$  le rayon interne de la  $j$ -ème cavité,  $L$  la longueur internodale, qui est une valeur moyenne des longueurs internodales mesurées sur chacun des bambous,  $\delta l = l + 0.48\sqrt{\pi R_h^2}$  la correction de longueur [30], c'est-à-dire la longueur du col corrigée décrivant un volume de fluide additionnel contraint d'osciller entre l'intérieur du col et l'extérieur, avec  $l$  la longueur effective du col et  $c$  la vitesse du son dans le fluide (ici  $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ ).

#### 1.3.1 Influence du résonateur de Helmholtz

La distance entre deux noeuds d'une même canne varie de 20 à 28 cm. Pour  $R_h = 0.45 \text{ cm}$ ,  $R_i^{(j)}$  de 1.55 cm à 1.85 cm, et  $l = 0.3 \text{ cm}$ , la fréquence de résonance est estimée entre 230 et 380 Hz par l'équation (1.37). L'épaisseur des parois de chaque cavité, qui correspond à la longueur du col, est considérée constante. La variation du rayon interne est donc prise en compte telle que  $R_i^{(j)} = R^{(j)} - l$ . Plusieurs expériences sont réalisées pour déterminer l'influence

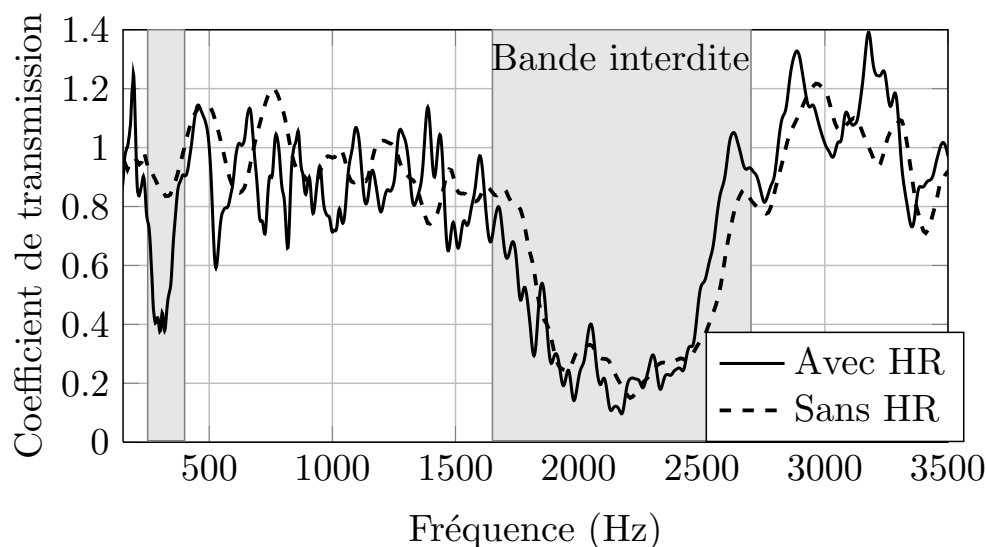


FIGURE 1.11 – Coefficient de transmission expérimental d'un SC à maille triangulaire de 45 bambous avec (—) et sans(---) résonateurs de Helmholtz.

des HR sur les propriétés acoustiques de la structure. Une comparaison entre le coefficient de transmission du SC avec et sans résonance est détaillée figure 1.11. Dans un premier temps, le col de chaque cylindre est orienté selon le même axe c'est-à-dire  $\alpha^j = \alpha, \forall j \in [0, 45]$ , en face de l'onde incidente, i.e.,  $\alpha = 0^\circ$ .  $\alpha^j$  est l'angle que forme l'onde incidente avec la normale au trou du  $j$ -ème résonateur, lorsque le trou est en face de l'onde incidente,  $\alpha = 0^\circ$ . Un schéma est visible sur la figure 1.12.

L'influence de la résonance du résonateur est clairement visible dans le coefficient de transmission autour de 300 Hz, valeur qui correspond bien à la fréquence fondamentale estimée plus tôt. Des résonances d'ordre supérieur sont également visibles et augmentent les pertes en transmission autour de 550 Hz et 800 Hz. La bande interdite entre 1600 Hz et 2550 Hz liée à la structure périodique du cristal n'est pas modifiée. Remplacer des inclusions rigides par des résonateurs n'influence donc pas la bande interdite associée à la périodicité lorsque les dimensions sont identiques et lorsque  $f_H^j$  est dans une région fréquentielle assez éloignée de la bande interdite. La largeur de la bande interdite liée aux résonateurs est d'environ 150 Hz, ce qui est plus large que celle obtenue théoriquement pour la résonance d'un seul résonateur. Ceci est dû principalement à la dispersion sur les rayons et les longueurs de cavités dans le SC à résonateur de Helmholtz (maintenant appelée HRSC) et a un effet couplage entre résonateurs maintenant la perte en transmission basse sur toute la gamme de fréquence de résonance.

### 1.3.2 Influence de la position des résonateurs de Helmholtz

Dans le but d'analyser et de modéliser l'influence de l'orientation du col des résonateurs sur le comportement global de la structure, le même type d'expérience est répété avec  $\alpha = 45^\circ$  and  $\alpha = 90^\circ$ . Les coefficients de transmission expérimentaux pour  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  et  $\alpha = 90^\circ$  sont comparés dans la Fig. 1.12.

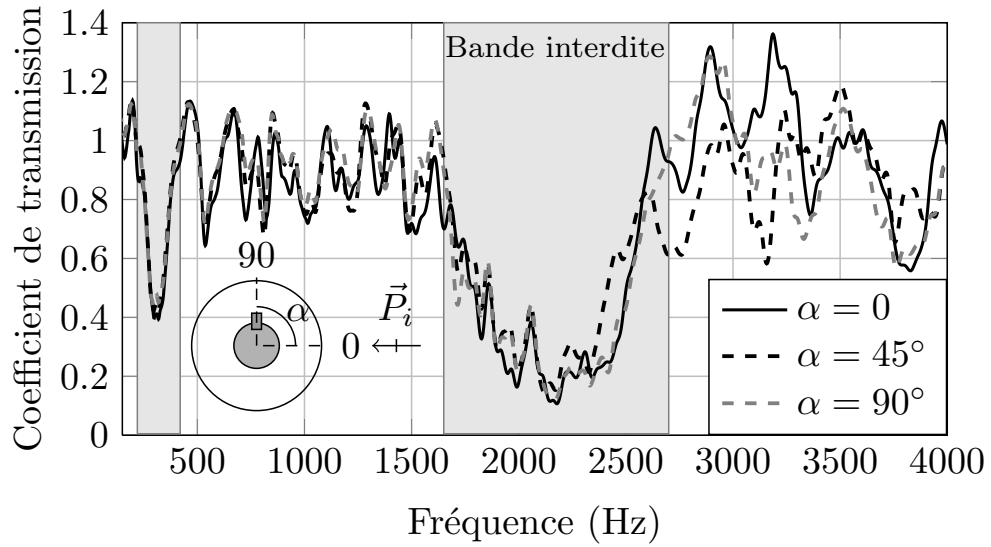


FIGURE 1.12 – Coefficient de transmission expérimental montrant l'influence de l'orientation des HR pour un SC à maille triangulaire de 9 cm et 9x5 bambous.  $\vec{P}_i$  correspond à la direction de propagation de l'onde incidente.

L'orientation des cols des HR ne semble pas influencer le coefficient de transmission. Une autre mesure, qui n'est pas montrée ici, a été réalisée en choisissant des angles  $\alpha^n$  aléatoirement pour chacun des cylindres. Aucune influence n'a encore été observée. Les petites différences visibles pour des fréquences au dessus de 2600 Hz sont dues aux irrégularités de surface et au fait que les bambous ne sont pas forcément bien droits. En effet, en les tournant autour de leurs axes, la distance entre plusieurs d'entre eux peut changer de quelques millimètres ce qui peut modifier les interactions des ondes diffractées à l'intérieur du cristal. Dans la gamme de fréquence des HR (entre 230 et 380 Hz), la longueur d'onde est très largement supérieure en comparaison aux rayons externes des cylindres, c'est-à-dire  $kR^j \ll 1, \forall j \in [1, 45]$ . L'approximation basse fréquence sur la diffraction par des cylindres est donc valide. Par conséquent, la résonance par un cylindre résonant peut être considérée comme venant d'un diffuseur linéique (de rayon négligeable) et est donc indépendante de l'orientation du diffuseur.

Ces expériences confirment que créer un SC avec ce type de résonateur permet d'améliorer l'isolation acoustique en ajoutant des pertes en transmission en basse fréquence. Les HR absorbent le son à leurs fréquences de résonances, indépendamment de la position de leur col. L'effet attendu des résonances de Helmholtz sur la structure de bande obtenue avec un cristal composé de cylindres rigides est la création d'une bande interdite hybride autour de la fréquence de résonance naturelle du résonateur, couvrant la totalité de la zone de Brillouin, c'est-à-dire indépendamment du vecteur d'onde. Une simulation par PWE prenant en compte les effets de résonance de Helmholtz est en principe faisable, mais ne prendrait en compte ni le caractère 3D du problème, ni de la distribution des résonances en fonction de la taille des cylindres.

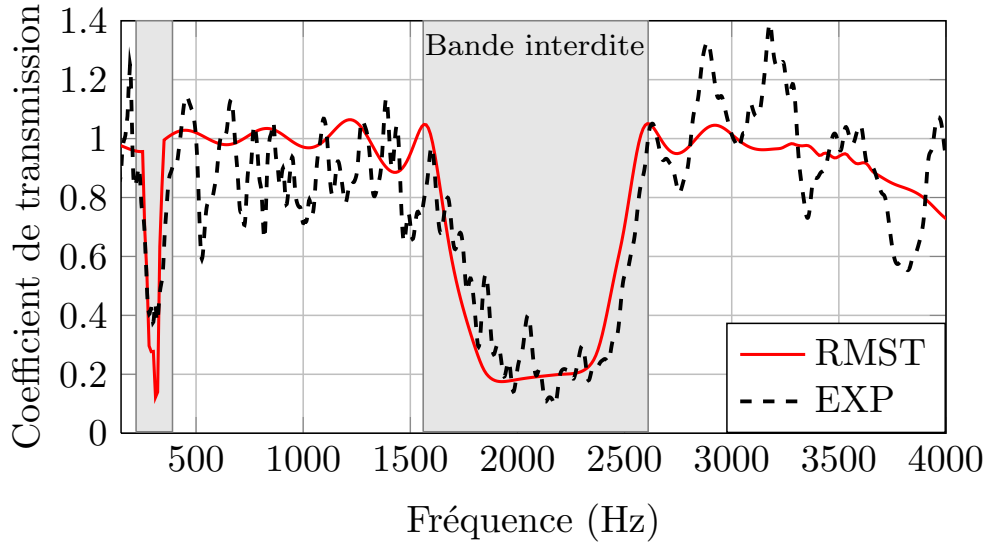


FIGURE 1.13 – Comparaion entre la RMST et les résultats expérimentaux obtenus pour un cristal triangulaire de 45 bambous résonants et pour une période spatiale de 9cm.

### 1.3.3 Implémentation du comportement des HR dans la MST

La résonance des HR peut être implémentée de façon assez simple dans la MST car le champ diffracté est indépendant de l'angle  $\alpha^n$ . Le coefficient de diffraction Eq.(1.34) est multiplié par un filtre coupe bande utilisant une fonction de Lorentz dans le but de prendre en compte l'effet de la résonance. La fréquence centrale de cette fonction est égale à la fréquence de résonance des résonateurs. Le coefficient de diffraction  $D_m^n$  devient :

$$\tilde{D}_n^{(j)} = D_n^{(j)} Rb^{(j)}, \quad (1.38)$$

$$\text{avec } Rb^{(j)} = 1 - \Pi^{(j)} \left( \frac{Q}{1 - iQ \left( \frac{\omega}{\omega_H^{(j)}} - \frac{\omega_H^{(j)}}{\omega} \right)} \right), \quad (1.39)$$

où  $\Pi^{(j)}$  est la fenêtre rectangle centrée sur  $\omega_H^{(j)}$  et de largeur 40 Hz,  $\omega_H^{(j)} = 2\pi f_H^{(j)}$  est la fréquence de résonance du  $j$ -ème bambou estimée en considérant une longueur internodale constante de  $L = 24$  cm et  $Q$  le facteur de qualité. La fréquence de résonance  $f_H^{(j)}$  dépend du rayon interne, Eq.(1.37), et est donc aussi dépendante de la canne de bambou considérée. Le facteur de qualité  $Q$  est supposé indépendant de la canne de bambou considérée. Il est déterminé en ajustant, dans la MST (maintenant appelé RMST), la largeur fréquentielle de la bande interdite due aux résonateurs ainsi que l'amplitude autour de  $\omega_H^{(j)}$  avec les résultats expérimentaux mesurés pour une configuration de cristal ne comportant qu'une seule ligne. La valeur ainsi déterminée est  $Q = 20$ . Les résultats expérimentaux et simulés pour la configuration complète, c'est-à-dire 5 lignes, sont présentés Fig. 1.13 et montrent un bon accord. Ceci valide l'implémentation de la résonance du résonateur de Helmholtz dans la RMST.

Pour la bande interdite associée à la résonance des HR, le coefficient de transmission expérimental atteint 0.4 alors que la simulation atteint 0.1. Le coefficient de transmission expérimental

est plus large et avec une amplitude plus haute que celui prédit par la MST. Cette petite différence est due à la dispersion dans les dimensions des rayons internes et de distance internodale. Même si la variation des rayons internes est prise en compte, la distance internodale est fixée à 24 cm. Il est rappelé que dans la pratique,  $L$  varie entre 20 et 28 cm. Cette variation peut modifier radicalement la fréquence de résonance et élargir la bande interdite du HR. Cet élargissement traduit le fait que la quantité d'énergie piégée est plus petite, expliquant les différences dans la bande interdite liée au HR. Pour améliorer les performances du HRSC, la bande interdite liée au HR peut être creusée et élargie par l'ajout de résonateur, c'est-à-dire l'ajout de bambous. Le nombre de bambous est augmenté de  $N = 45$  à  $N = 84$  de façon à créer un cristal comportant 7 lignes et 12 bambous par ligne (figure 1.14).

### 1.3.4 Influence de la taille du cristal

Des mesures sont réalisées avec un cristal de 12 bambous par lignes et en augmentant le nombre de lignes de 1 à 7. La bande interdite liée à la périodicité restant pratiquement inchangée bien que plus creusée, une attention toute particulière est portée au comportement de la bande interdite liée aux résonateurs.

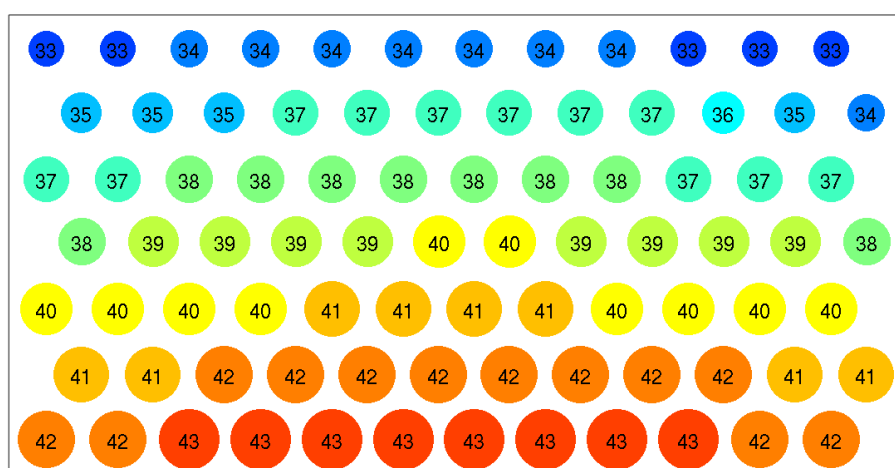


FIGURE 1.14 – Carte de répartition des bambous par ordre de taille pour un cristal de 12x7 bambous. Les chiffres à l'intérieur de chaque diffuseur représentent les diamètres extérieurs mesurés (en mm).

La figure 1.15 montre le coefficient de transmission pour des fréquences autour des fréquences des résonateurs. Le cristal de 7 lignes présente un coefficient de transmission de 0.2. La bande interdite liée au HR est plus profonde qu'avec les 45 bambous. Deux minimums centrés respectivement à 290 Hz et à 340 Hz sont visibles. Ils sont dus au fait que les nouveaux bambous sont plus petits, avec des rayons variant de 3.3 cm à 3.8 cm. La contribution de cette nouvelle structure est donc assez différente de la précédente. Cette différence induit deux résonances distinctes ce qui conduit à l'apparition de deux pics. Si ces deux résonances étaient plus proches, un mode plus couplé aurait été excité conduisant à un unique pic, plus fin mais d'amplitude encore

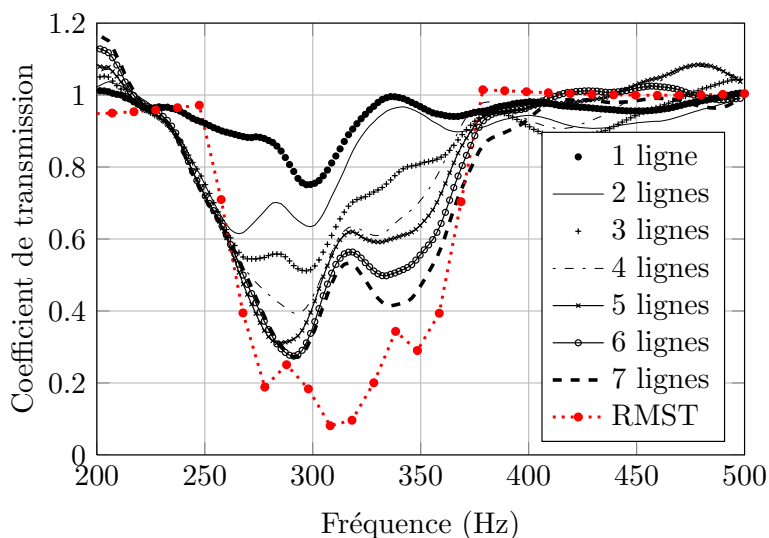


FIGURE 1.15 – Zoom sur la bande de résonance des HR dans le coefficient de transmission montrant l'influence du nombre de lignes sur un cristal triangulaire de 84 bambous et pour une période spatiale de 9cm.

plus basse. Néanmoins, l'avantage de notre dispositif est un élargissement de la bande interdite liée aux HR. La figure montre que la différence entre les fréquences de résonances de deux lignes consécutives doit être de moins de 20 Hz pour pouvoir les coupler.

La RMST est en bon accord avec les résultats expérimentaux Fig. 1.15 et montre qu'avec une distribution de fréquences de résonances s'étendant sur quelques dizaines, voire centaines de Hertz, il est possible d'obtenir une bande interdite de résonance, assez large et profonde. Pour accentuer encore ce phénomène, il est possible de créer un gradient de résonance dans le cristal en accordant chaque ligne de résonateurs suivant une fréquence différente. En choisissant la variation de résonance la plus adaptée il est alors possible d'obtenir une bande interdite encore plus large.

## 1.4 SC à gradient de propriété : gradient de résonance

Il existe déjà des cristaux soniques à gradient de propriété, notamment dans [31] dans lequel un gradient de *filling fraction* permet de créer une adaptation d'impédance graduelle. Grâce à cette impédance l'onde incidence n'est que très peu réfléchi par les premières lignes du cristal et se retrouve piégée à l'intérieur. En formant un anneau avec ce type de cristal, il est alors possible de créer un cristal omnidirectionnel, piégeant les ondes acoustiques dans n'importe quelle direction. La limite d'un tel cristal est la bande de fréquence d'application qui reste encore trop restreinte.

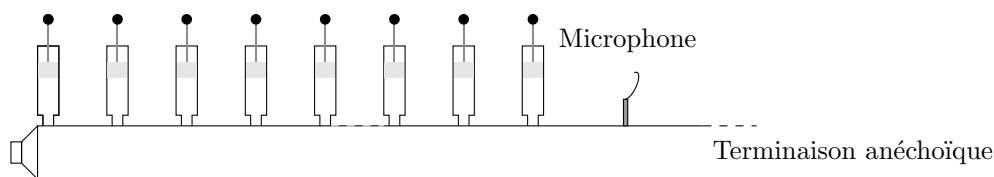


FIGURE 1.16 – Schéma du SC 1D utilisé, comportant une série de résonateurs de Helmholtz accordables.

### 1.4.1 Étude préliminaire : Réseau 1D et gradient de résonance

Avant de créer un SC à gradient de résonance à l'aide du cristal en bambou, une étude préliminaire est réalisée sur un réseau 1D de façon à comprendre comment combiner des résonateurs dont les fréquences fondamentales sont très proches pour influencer le coefficient de transmission du cristal. Cette étude permettra également de déterminer le meilleur profil de variation de résonance à appliquer pour avoir une large bande interdite de résonance.

Le dispositif expérimental utilisé dans cette étude a été mis au point durant la thèse d'O. Richoux au LAUM [32] et est décrit dans [33]. Il s'agit d'un guide d'onde cylindrique couplé à une terminaison anéchoïque permettant de le considérer comme un guide d'onde infini. Sur ce guide d'onde 40 résonateurs de Helmholtz, dont la fréquence de résonance est accordable, sont connectés en série. Chaque résonateur est composé d'une cavité dont le volume est réglable via un piston. Ces résonateurs sont raccordés au guide d'onde avec une périodicité de 10 centimètres sur le haut du guide (FIG. 1.16). À chaque embouchure, des ondes transmises et réfléchies sont créées menant à une bande interdite dépendante de la période spatiale. Le comportement de ce dispositif est considéré proche de celui d'une colonne du cristal en bambou. Les phénomènes observés peuvent donc être transposables à un cristal 2D.

Les mesures sont réalisées suivant un protocole expérimental assez proche de celui suivi pour le cristal 2D en bambou. Une réponse de référence est réalisée en réglant tous les résonateurs en position fermée et en mesurant le champ acoustique via un microphone. Le coefficient de transmission en amplitude est alors obtenu en faisant le rapport d'une mesure sur cette référence.

Dans un premier temps, seuls trois résonateurs sont utilisés ; les 37 autres sont fermés et ne résonnent pas dans la bande de fréquence étudiée. Le but est d'observer l'évolution du coefficient de transmission lorsque deux résonateurs sont couplés.

Une première mesure est réalisée avec la configuration 1 (voir figure 1.17(a)) où chacun des 3 résonateurs comporte un volume différent, le piston du premier est tiré au maximum (volume le plus large possible, donnant la fréquence la plus basse possible), le piston du second résonateur est rentré de moitié et le troisième est quasiment totalement enfoncé (il reste 1cm de hauteur de cavité) (voir figure 1.17(a)). Trois pics à des fréquences distinctes sont observées. Pour les mesures suivantes, les pistons 2 et 3 sont sortis progressivement jusqu'à atteindre le même volume que le résonateur 1 pour la mesure 6.

Théoriquement l'addition de deux résonateurs de Helmholtz ayant la même fréquence de résonance augmente les pertes en transmission à cette fréquence. Il apparaît que de l'addition des deux premiers résonateurs résulte en une plus grande perte en transmission que pour un résonateur, dont la fréquence centrale est décalée légèrement vers les hautes fréquences et le tout sur une bande plus large. Ce phénomène a déjà été mis en évidence dans [34] où la fréquence de résonance des deux résonateurs de Helmholtz identiques couplés en série dans un guide d'onde est décalé vers les hautes fréquences. Si ces résonateurs sont mis en parallèle, la fréquence de

résonance est conservée et les pertes en transmission sont augmentées.

Ce décalage en fréquence est expliquée par une modification des dimensions apparentes des résonateurs décalant la fréquence de résonance vers les hautes fréquences.

Lorsque la fréquence du troisième résonateur est identique aux deux autres, la fréquence de résonance du système se décale encore légèrement vers les hautes fréquences et permet d'accroître encore les pertes en transmission de 10%.

La largeur de la perte en transmission n'est alors plus symétrique (phénomènes visibles sur les figures 1.17(c) et 1.17(f)), où après avoir chuté sur une bande de fréquence de 100 Hz et atteint la fréquence de résonance à 330 Hz, le résonateur continue à piéger une partie de l'énergie sonore sur une bande de près de 200 Hz.

Ce phénomène est très intéressant dans l'optique d'obtenir la bande interdite la plus large possible et sera visible dans l'expérience suivante. Cette expérience vise à déterminer la variation de fréquence de résonance optimale permettant d'obtenir une large perte en transmission. Cette variation sera alors appliqué au cas du SC 2D.

### 1.4.2 Influence du type variation de résonance

Pour rester proche des dimensions du SC 2D, 10 résonateurs sont appliqués dans cette étude. Les fréquences de résonance des résonateurs 1 et 10 sont fixées à 300 Hz et 700 Hz. Les fréquences de résonance des résonateurs intermédiaires varient entre ces deux valeurs avec un profil de variation déterminé. Plusieurs profils de variation de résonance ont été testés : linéaire, parabolique et logarithmique (FIG.1.18).

En réalisant un gradient de résonance, les pertes en transmission sont moins importantes qu'en accordant tous les résonateurs à la même fréquence mais la largeur de la bande de fréquence augmente. Sur les 3 profils testés, le profil linéaire et le profil logarithmique semblent être les plus intéressants :

- Le profil linéaire permet d'obtenir la bande la plus large mais avec une efficacité moindre.
- Le profil logarithmique permet d'obtenir une perte en transmission très importante mais sur une bande de fréquence moins large.

Finalement, le profil linéaire sera sélectionné pour ses pertes en transmission sur une large bande de fréquence. Il est également possible de constater une dégradation du coefficient de transmission entre 700 et 900 Hz, qui peut être attribuée à l'excitation d'harmoniques supérieurs des résonateurs de Helmholtz. Cette hypothèse sera étudiée à la fin de ce chapitre expérimentalement et numériquement.

#### 1.4.2.1 SC 2D en bambou avec gradient de résonance

Pour réaliser le SC 2D avec un gradient de résonance, la fréquence de résonance de chaque ligne du cristal doit être accordée. Pour cela, plusieurs solutions sont possibles : faire varier la longueur ou le diamètre du col de résonateur ou le volume de la cavité résonante. Cette dernière option a été choisie car elle est plus simple à mettre en oeuvre : pour changer le volume interne de la cavité il suffit de la remplir avec un matériau.

Le cristal de 12x7 bambous est utilisé à nouveau en gardant exactement les mêmes emplacements pour chaque résonateur. Les cavités sont remplies avec une quantité plus ou moins importante de sable, dépendante de la ligne. Pour obtenir des effets aux fréquences les plus basses possibles, les bambous avec les diamètres les plus importants sont laissés vides (donc la dernière ligne) et les résonateurs de chaque ligne suivante sont remplis de plus en plus. La quantité de

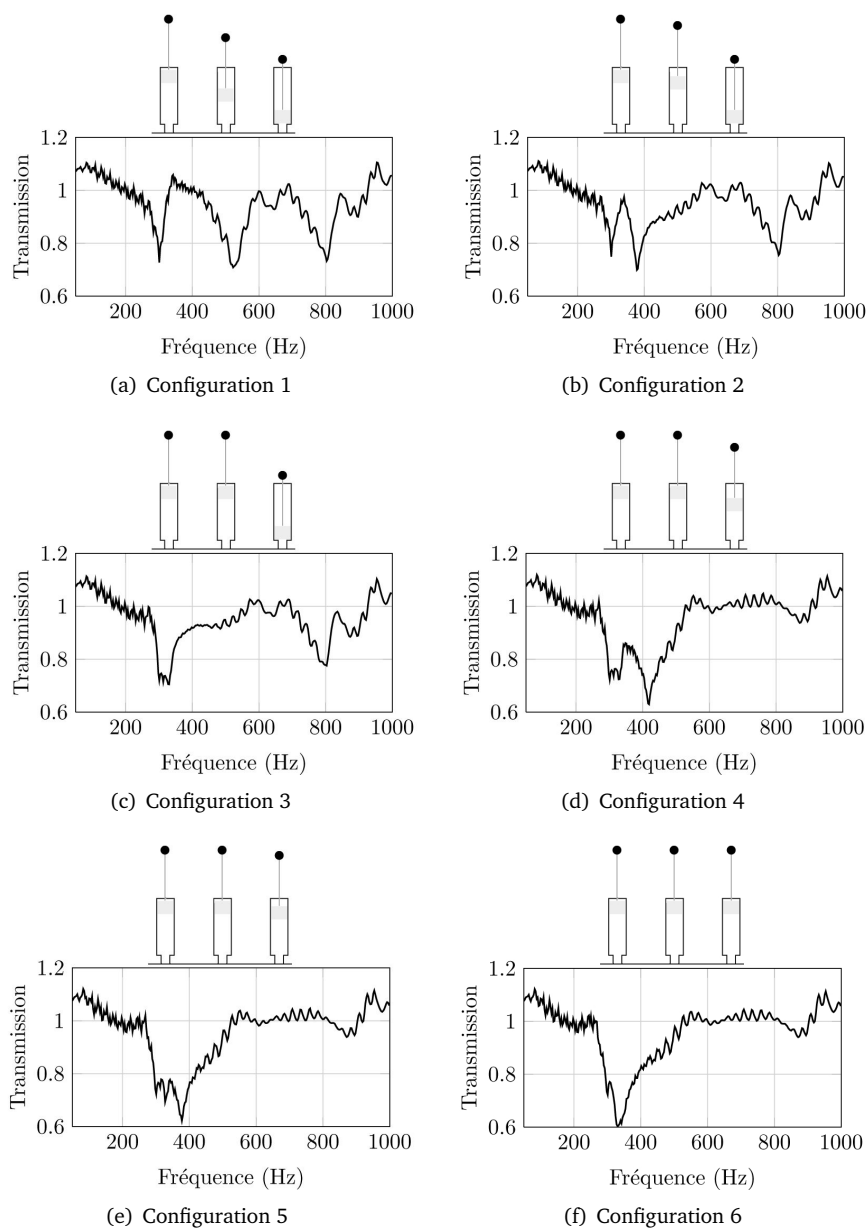


FIGURE 1.17 – Influence de fréquences de résonances proches sur le coefficient de transmission

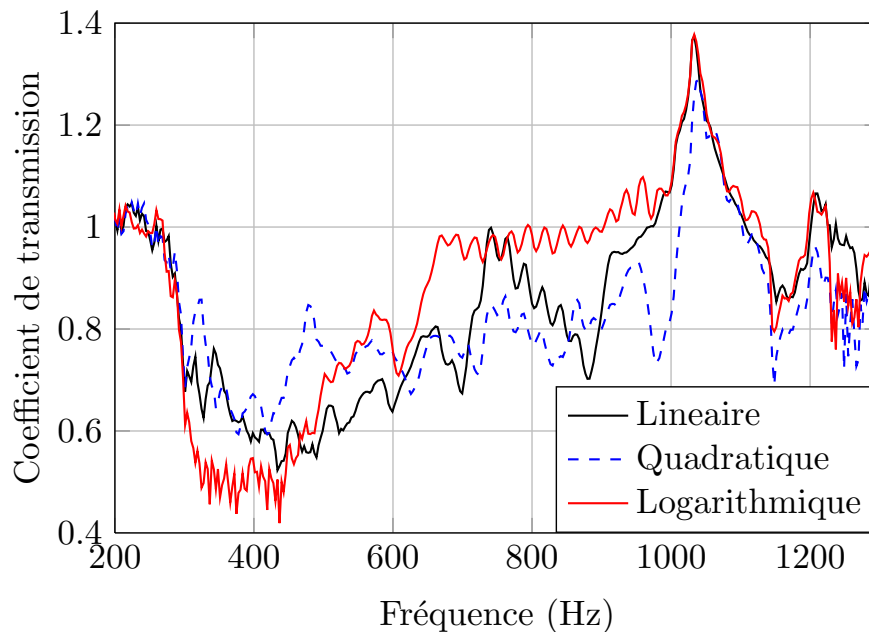


FIGURE 1.18 – Comparaison du coefficient de transmission d'un réseau périodique 1D à gradient de résonance. Les variations de résonance sont obtenues pour 10 résonateurs. Trois profils sont testés, une variation linéaire, parabolique et logarithmique

sable introduite dans chaque cavité est comptée en "dose" correspondant à un volume élémentaire de  $20 \text{ cm}^3$ . Avec 6 doses, une cavité de taille moyenne est comblée pratiquement aux  $2/3$  (juste en dessous du trou du résonateur). À la ligne 6 une dose est introduite par résonateur, puis deux doses sont introduites à la ligne 5 et ainsi de suite pour arriver à 6 doses à la première ligne.

Les résultats expérimentaux seront comparés aux résultats simulés par RMST dans laquelle la variation du volume interne des cavités est prise en compte. Pour cela une hauteur moyenne est utilisée pour chaque ligne allant de 21 cm (pour la ligne 7) à 6 cm (pour la ligne 1). Ces valeurs correspondent aux hauteurs moyennes mesurées sur le cristal expérimental et recalées pour coïncider avec les résultats expérimentaux (variation de plus ou moins 1 cm sur chaque ligne) .

Les coefficients de transmission sont tracés sur la figure 1.19 où les largeurs de bandes interdites liées aux résonateurs semblent bien correspondre expérimentalement et numériquement. La perte en transmission liée aux résonateurs, n'est pas aussi marquée que précédemment avec un cristal sans gradient, avec un maximum de perte de 0.42% à 300 Hz. Il est tout de même possible de voir l'élargissement de la bande interdite, passant de environ 200 Hz pour le cristal sans gradient à 500 Hz pour le cristal avec gradient. Le phénomène le plus intéressant semble être l'élargissement de la bande interdite due à la périodicité entre 2400 HZ et 2700 Hz. Cet élargissement pourrait être attribué aux harmoniques supérieures des résonateurs, comme dans l'expérience précédente. Afin de prouver cette hypothèse, une mesure des résonances à l'intérieur d'un résonateur est effectuée.

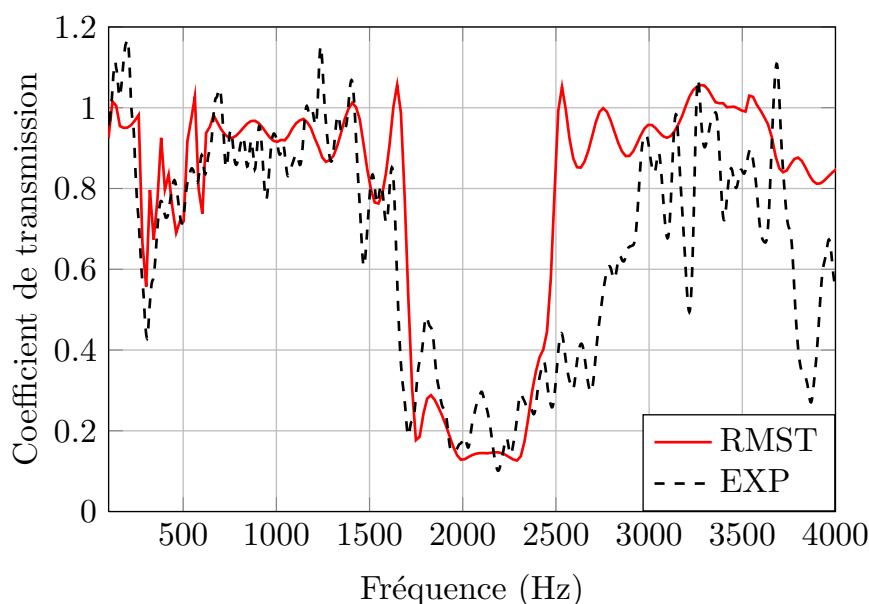


FIGURE 1.19 – Comparaison des coefficients de transmission obtenus expérimentalement et par RMST pour un SC de 12x7 bambous avec un gradient de résonance.

#### 1.4.2.2 Mesure interne de la résonance des HR

Une mesure fréquentielle entre l'onde incidente et le champ acoustique à l'intérieur du résonateur est réalisée. Les champs de pression sont mesurés par deux microphones : le microphone de référence placé à l'extérieur du résonateur, proche du col et le deuxième est introduit dans le résonateur par un second trou en face du col. Des mesures successives ont été réalisées en remplissant le résonateur de sable de façon à mettre en évidence l'évolution des fréquences de résonance.

Les résultats de la figure 1.20 montrent les fréquences de résonance des résonateurs ainsi que leurs harmoniques. Le HR pouvant être considéré comme un guide d'onde ouvert-fermé, seules les harmoniques impaires sont excitées. L'harmonique 5 est cependant totalement absente de la réponse en fréquence, le col du résonateur se trouvant exactement sur un noeud de pression pour cette harmonique. En superposant les réponses du résonateur à différents taux de remplissage de la cavité, nous constatons une bande de fréquence entre 1700 Hz et 3300 Hz dans laquelle une forte concentration d'harmonique existe. Cette bande de fréquence correspond également à la bande interdite liée à la périodicité, ce qui pourrait expliquer le fait que les harmoniques supérieures influencent la bande interdite et augmentent sa taille.

Dès que du sable est introduit dans la cavité, l'amplitude du pic et son facteur de qualité diminuent, élargissant le pic. Ce comportement n'est pas en accord avec l'hypothèse d'une réduction du volume à l'aide d'un matériau parfaitement rigide [35] mais se rapproche d'un comportement observable lorsqu'un matériau poreux tapisse les parois internes du résonateur [36]. Le sable introduit dans les bambous peut donc être considéré comme un matériau poreux aux fréquences de résonance.

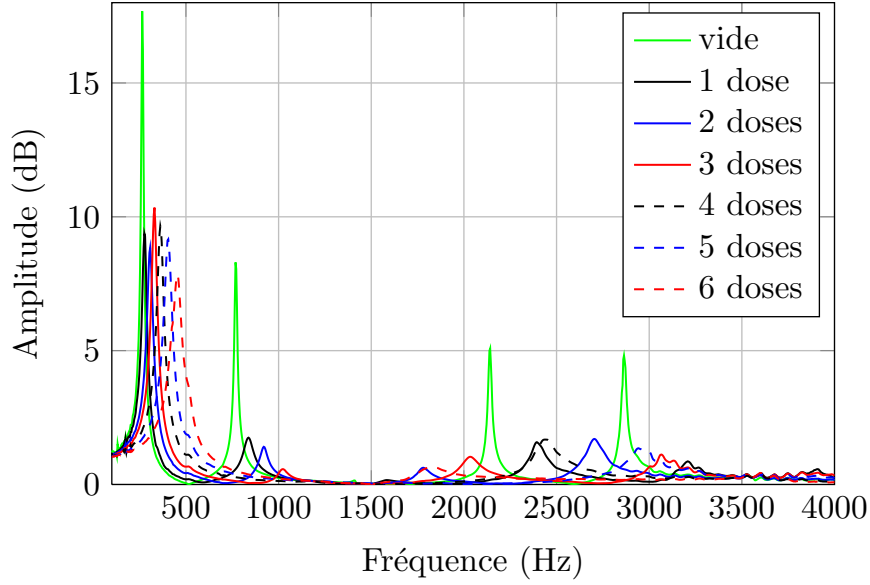


FIGURE 1.20 – Réponse en fréquence d'un résonateur de Helmholtz en fonction du volume de sa cavité.

### 1.4.2.3 Modélisation de la résonance avec harmoniques supérieures

Pour améliorer la fidélité des simulations, les harmoniques impaires sont maintenant implémentées dans la RMST. Seules les harmoniques impaires 3, 7, et 9 sont prises en compte pour garder la simulation la plus fidèle possible.

Pour cela le coefficient de diffraction est modifié pour tenir compte des harmoniques de la manière suivante :

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^{(j)} = D_n^{(j)} Rb^{(j)}, \quad (1.40)$$

$$\text{with } Rb^{(j)} = 1 - \sum_h \Pi^{(j)} \left( \frac{Q}{h \left( 1 - iQ \left( \frac{\omega}{h\omega_H^{(j)}} - \frac{h\omega_H^{(j)}}{\omega} \right) \right)} \right), \quad (1.41)$$

avec  $h = 1, 3, 7$  ou  $9$ . Les résultats (figure 1.21) montrent un très bon accord pour la bande interdite liée aux résonances et pour la zone 1400 et 1700 Hz pour laquelle il y a une légère chute du coefficient de transmission. La contribution des harmoniques sur la partie entre 2400 et 2700 Hz est visible mais l'amplitude n'est cependant pas bien retranscrite.

Les harmoniques sont modélisées de façon simpliste, comme ayant le même facteur de qualité et une amplitude décroissante en  $1/h$  par rapport à la fréquence fondamentale. En adaptant ces facteurs en fonction des résultats expérimentaux, les modélisations par RMST pourraient être plus en accord avec la partie haute fréquence du coefficient de transmission. L'influence des harmoniques supérieures est donc bien vérifiée numériquement et expérimentalement. Une modélisation fidèle de leur comportement en fonction de la géométrie du résonateur et des éventuels matériaux poreux internes pourrait alors faire partie de perspectives futures.

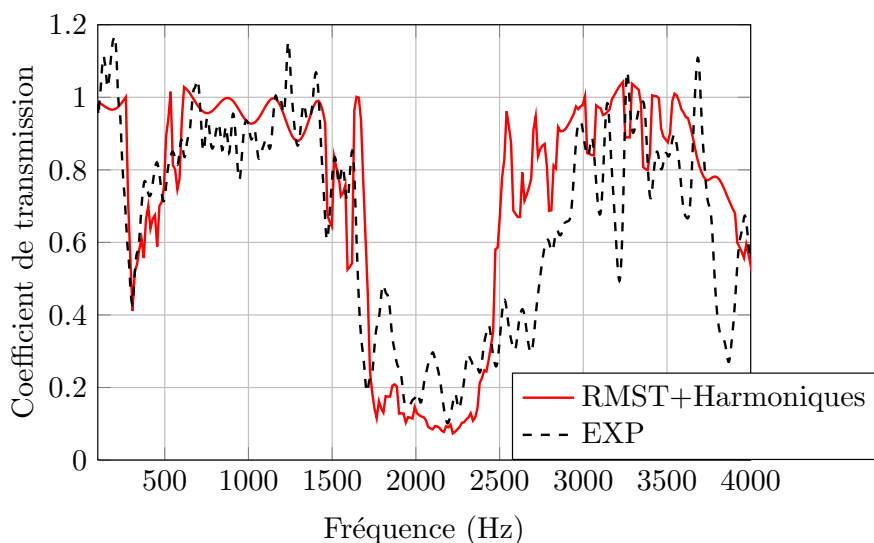


FIGURE 1.21 – Comparaison des coefficients de transmission obtenus expérimentalement et par RMST pour un SC de 12x7 bambous avec un gradient de résonance. Les harmoniques supérieurs 1, 3, 7 et 9 sont prises en compte dans la simulation numérique

## 1.5 Conclusion et discussion

Le comportement d'un SC à maille triangulaire, prédit à l'aide de la PWE et réalisé à partir de diffuseurs en matériaux naturels a été étudié dans la gamme des fréquences audibles. Les diffuseurs sont des cannes de bambou arrangées périodiquement avec une période de réseau de 9 cm. La diffusion multiple par un SC induit une bande interdite entre 1600 Hz et 2550 Hz en incidence normale. Au regard des fréquences considérées, le désordre et les irrégularités de surface inhérents à l'utilisation de matériaux naturels, ainsi que les effets visco-thermiques n'influencent pas les résultats et une bande interdite assez large et basse fréquence peut être obtenue avec un cristal relativement petit (45 bambous répartis sur 5 lignes, 9 bambous par lignes). Toutes les expériences ont été validées par comparaison avec les résultats MST. Pour améliorer les propriétés du cristal, les bambous sont percés pour les transformer en un empilement de résonateurs de Helmholtz et créer un SC à résonance locale. Ces résonances ajoutent des pertes en transmission à très basse fréquence (300 Hz) et n'affectent pas la bande interdite liée à la périodicité. Une étude du comportement de ces résonateurs a permis de modifier la MST pour prendre en compte leurs résonances ainsi que leurs harmoniques. La perte en transmission liée aux résonateurs est de l'ordre de 60% pour 45 bambous et de 80%, pour 84 bambous.

La bande de perte en transmission due aux résonateurs semble pouvoir être élargie par un choix précis des résonances des diffuseurs. Un SC à gradient de résonance a permis de constater expérimentalement cette hypothèse et de mettre en évidence l'influence des harmoniques sur les pertes en transmissions. Lorsque les bandes de perte en transmission liées à la résonance et à la multidiffusion se retrouvent dans la même gamme de fréquence, les deux phénomènes s'ajoutent et permettent d'obtenir une bande encore plus large.

L'intérêt de pouvoir accorder les résonateurs en modifiant seulement leur volume interne permet une utilisation du cristal dans une large gamme de fréquence et dans diverses applications.

Un tel dispositif pourrait être un "bon candidat" pour des applications de type barrière acoustique pour bruit routier permettant de stopper les composantes très basses fréquences souvent considérées comme très nuisibles.

Une autre application pour ce type de cristal sonore accordable est illustré dans l'annexe 1. Il s'agit d'un article écrit en collaboration avec V. Romero-García, C. Lagarrigue, J.-P. Groby, O. Richoux et V. Tournat pour la création de guides d'ondes complexes à l'aide d'un cristal sonore 2D composé d'inclusions cylindriques carrées de 5 cm de côté. La rotation locale des inclusions modifie la gamme de fréquence des bandes interdites. En modifiant l'orientation d'une ou plusieurs lignes d'inclusion, il est alors possible de propager une onde acoustique de façon très localisée.

La prochaine étape pour ces types de cristaux sonores pourrait être d'étudier l'influence de la géométrie des inclusions sur la gamme de fréquence des bandes interdites. Il pourrait également être intéressant de remplacer les fluides environnant et internes aux résonateurs, par un matériau plus dissipatif afin d'augmenter les pertes en transmission de l'ensemble.



## **Deuxième partie**

### **METAPOREUX ACOUSTIQUE**



## Chapitre 2

---

# ÉTUDE D'UN MÉTAMATÉRIAU COMBINANT INCLUSIONS RIGIDES RÉSONANTES ET MATRICE POREUSE

---

### 2.1 Introduction

L'idée de ce chapitre est de réutiliser les phénomènes de multidiffusion liés aux réseaux périodiques, en substituant le milieu ambiant (précédemment, l'air), par un matériau beaucoup plus dissipatif. En se plaçant du point de vue de l'absorption acoustique, l'intérêt d'un tel dispositif est alors de bénéficier simultanément des effets d'atténuation du matériau, des effets de diffusion et des effets de résonance des inclusions menant à des matériaux à très hautes performances. Le milieu ambiant est ici remplacé par un matériau poreux acoustique. Les matériaux poreux acoustiques sont des matériaux biphasiques composés d'un squelette solide dont les pores sont saturés par de l'air. Les ondes acoustiques peuvent pénétrer dans le matériau et les dimensions caractéristiques des pores sont telles qu'ils dissipent l'énergie vibro-acoustique par effets visco-thermiques.

Cependant, les matériaux poreux souffrent de mauvaises propriétés d'absorption à basses fréquences, inhérentes à leurs mécanismes d'absorption. Effectivement, ces mécanismes ne sont reliés qu'aux pertes visqueuses et thermiques. Dans les régimes inertiels et adiabatiques, lorsque les fréquences sont plus grandes que la fréquence de Biot  $f_\nu$ , des plaques de poreux relativement fines forment d'excellents outils pour l'absorption du son, mais sont inefficaces dans les régimes visqueux et isothermes, i.e. pour des fréquences inférieures à  $f_\nu$ . Dans les régimes inertiels et adiabatiques, la pression satisfait l'équation de Helmholtz, avec pertes, alors qu'en régime visqueux et isotherme, elle satisfait une équation de diffusion.

Lors de ces dernières décennies, un certain nombre de solutions ont été proposées pour palier ce problème. Elles consistent en général en un couplage des pertes visqueuses et thermiques des matériaux poreux à des mécanismes d'absorption additionnels, principalement associés à des phénomènes de résonances découlant de l'insertion d'hétérogénéités. L'amélioration de l'absorption des matériaux à double porosité [37, 38], vient de la résonance de la structure microporeuse excitée par les macropores. Ces macropores sont des hétérogénéités obtenues en forant des trous dans l'épaisseur de la lame de matériau poreux. Pour un matériau infini à double porosité, lors-

qu'il existe un fort contraste de résistance au passage de l'air entre les matériaux micro et macro poreux, l'amélioration de l'absorption est obtenue à la fréquence de diffusion  $f_d$ , qui dépend exclusivement de la géométrie et de l'organisation des trous. À cette fréquence, le matériau microporeux est dans le régime visqueux et le matériau macroporeux est dans le régime inertiel. En pratique,  $f_d$  est autour de la fréquence de résonance quart d'onde d'une plaque homogène microporeuse pour une absorption optimale.

Une autre possibilité consiste à connecter des pores non-débouchants, i.e. des résonateurs quart-d'onde, aux pores débouchants pour créer des matériaux à porosité cul-de-sac [39]. Ceci conduit à des anomalies dans le coefficient d'absorption lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des dimensions des pores cul-de-sac. Néanmoins, l'amélioration de l'absorption n'est toujours pas complètement comprise et sujette au régime inertiel.

Les métaporeux consistent à exciter des modes piégeant l'énergie entre un arrangement périodique d'inclusions rigides plongées dans une lame de matériaux poreux et un fond rigide, ou dans les inclusions elles-mêmes (résonateurs). Les propriétés d'absorption sont alors améliorées à plus basses fréquences que la résonance quart d'onde [40, 41].

Récemment, des métamatériaux de type membrane montrant une réflexion quasi totale [42] ou une absorption quasi totale due au mouvement de battement de masselottes couplées aux membranes [43] ont été étudiés et montrent de très bons résultats malgré une bande de fréquences utile limitée.

Les métamatériaux ont introduit un renouveau d'intérêt pour les résonateurs de Helmholtz (HRs) pour créer artificiellement des matériaux à module de compressibilité et densité de masse négatifs [44, 45]. Dans [44], des sphères creuses fendues sont plongées dans une matrice éponge. Ce matériau manifeste un module de compressibilité négatif à la résonance du HR, mais les propriétés d'absorption de la structure ne sont pas analysées. Utiliser un résonateur de Helmholtz comme absorbeur n'est pas nouveau [46, 47, 48], mais n'a pas encore été couplé à une matrice poreuse.

Le but de ce chapitre est d'étudier une solution alternative, en insérant dans une couche de matériau poreux relativement fine, un réseau périodique d'inclusions résonantes (de type splitting), considérées comme petites devant la longueur d'onde. Cette étude a été faite en collaboration avec O. Umnova, *reader* à l'université de Salford, Manchester, dans le cadre d'un projet régional Pays de la Loire.

Les inclusions et le squelette sont considérés rigides. Ce dispositif peut être alors assimilé à un réseau de diffraction périodique induit par les inclusions [49]. L'influence des hétérogénéités de volume sur les coefficients d'absorption et de transmission acoustique d'une lame de matériau poreux a été étudiée précédemment en utilisant la MST. Un réseau périodique d'inclusions plongé dans un matériau poreux a été considéré [50]. Dans ce cas, la taille des inclusions étaient comparables à la longueur d'onde dans le poreux.

La présence d'inclusions conduit à une augmentation du coefficient d'absorption, voire un pic d'absorption totale, dans le cas d'un réseau périodique d'inclusions, tel qu'il est montré dans [49]. Les modifications du coefficient d'absorption ont été expliquées par l'excitation de modes propagatifs à l'intérieur du matériau poreux, dues à la présence des inclusions, permettant de piéger l'énergie. De plus, lorsque la structure périodique est placée contre un mur rigide [49] un "mode piégé" est excité, augmentant le coefficient d'absorption à des fréquences en dessous de la résonance quart d'onde de la couche de poreux. Les modes piégés ont été précédemment étudiés dans les guides d'ondes [51] où dans les structures périodiques [52]. Ici, la modification du coefficient d'absorption liée à l'arrangement périodique d'inclusions résonantes plongées à l'intérieur d'une couche de matériau poreux collée contre un mur rigide (voir Fig. 2.1) est étudiée

théoriquement, numériquement et expérimentalement.

Le caractère périodique du milieu permet de piéger l'énergie en dessous de la résonance quart d'onde de la couche poreuse. Les interférences de Bragg apparaissent à plus hautes fréquences et conduisant à une diminution du coefficient d'absorption lorsque la longueur d'onde à l'intérieur de la couche poreuse est comparable à quatre fois la distance entre le centre d'une inclusion et le mur rigide. Les inclusions considérées sont des résonateurs de type *splitring* (SR), c'est-à-dire des cylindres creux fendus sur toute la longueur. La résonance de ces inclusions peut augmenter le coefficient d'absorption à très basses fréquences. Ce chapitre se concentre sur les deux phénomènes basses fréquences, que sont les résonances des inclusions et les modes piégés.

## 2.2 Formulation du problème

La géométrie du problème 2D considéré dans ce chapitre est montrée figure 2.1. Le matériau poreux est supposé avoir un squelette rigide et par conséquent peut être décrit comme un fluide homogène possédant une densité équivalente  $\rho_1$  et un module de compressibilité équivalent  $\chi_1$  définis comme (la convention temporelle  $e^{-i\omega t}$  est choisie) :

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\phi} \left( 1 + \frac{2\pi\nu_b}{-i\omega} \sqrt{1 + \frac{-i\omega}{2\pi\nu_c}} \right), \quad (2.1)$$

avec

$$2\pi\nu_b = \frac{\sigma\phi}{\rho_0\alpha_\infty}; \quad 2\pi\nu_c = \frac{\sigma^2\phi^2\Lambda^2}{4\alpha_\infty^2\rho_0\eta}, \quad (2.2)$$

et

$$\chi_1 = \frac{\gamma P_0 / \phi}{\gamma - (\gamma - 1) \left( 1 + \frac{2\pi\nu_b'}{-i\omega} \sqrt{1 + \frac{-i\omega}{2\pi\nu_c'}} \right)^{-1}}, \quad (2.3)$$

avec

$$2\pi\nu_b' = \frac{\eta\phi}{\rho_0 k_0' \alpha_\infty Pr}; \quad 2\pi\nu_c' = \frac{\eta\Lambda'^2\phi^2}{4\rho_0 k_0'^2 \alpha_\infty^2 Pr}, \quad (2.4)$$

où le modèle de Johnson *et al* [53] est utilisé pour la densité équivalente  $\rho_1$  et le modèle de Champoux-Allard [54] pour le module de compressibilité équivalent  $\chi_1$ .

Ici,  $\eta$  est la viscosité dynamique de l'air,  $\rho_0$  est la densité de l'air,  $Pr = \eta c_p / \kappa$  est le nombre de Prandtl,  $c_p$ , la chaleur massique à pression constante,  $\kappa$  la conduction thermique de l'air,  $\gamma$  est la constante adiabatique,  $P_0$  est la pression statique,  $\sigma$  est la résistance au passage de l'air,  $\alpha_\infty$  est la tortuosité,  $\phi$  est la porosité,  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques. La valeur  $k_0' = \phi\Lambda'^2/8$  a été utilisée pour la perméabilité thermique [54].

Le milieu  $M^{[0]}$  est de l'air. Le déplacement normal et la pression sont continus à l'interface entre le poreux et l'air. La pression et la variation de déplacement dans un matériau poreux à squelette rigide avec une propagation en onde plane est décrite par les équations suivantes :

$$-p = \chi_1 \nabla \cdot u_{eq}, \quad -\omega^2 \rho_1 u_{eq} = -\nabla p, \quad (2.5)$$

avec  $u_{eq} = \phi u_f$  et  $u_f$  le déplacement du fluide dans les pores.

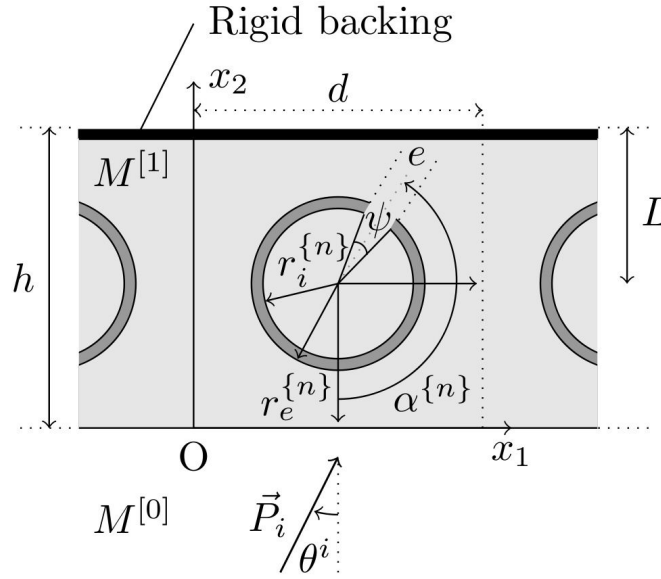


FIGURE 2.1 – Géométrie du problème.

| C1 | $r_i$ (cm) | $r_e$ (cm) | $d$ (cm) | $e$ (cm) | $h$ (cm) | $L$ (cm) |
|----|------------|------------|----------|----------|----------|----------|
|    | 0.7        | 0.744      | 2        | 0.14     | 2        | 1        |

TABLE 2.1 – Dimensions utilisées pour la configuration C1. Ces valeurs géométriques sont définies sur la figure 2.1.

Les parois des inclusions sont considérées rigides (type Neumann à l'interface poreux/inclusion) et le matériau à l'intérieur des inclusions est le même que celui situé à l'extérieur. La position de la fente des inclusions est définie par l'angle  $\alpha^{\{n\}}$ . Une inclusion est caractérisée par son rayon externe  $r_e$ , la largeur de l'ouverture  $e$ , son épaisseur  $H = r_e^{\{n\}} - r_i^{\{n\}}$  et  $\psi$  l'angle d'ouverture. La couche de poreux est supposée macroscopiquement inhomogène et les hétérogénéités sont considérées périodiques dans la direction  $x_1$  et de période  $d$ . Dans toutes les simulations, le mur rigide (condition limite de type Neumann) est placé au-dessus de la cellule, à  $x_2 = h$  (figure 2.1).

Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant une méthode éléments finis (FEM) développée et validée dans [55] ainsi que dans [49]. Le maillage est créé à partir du mailleur FreeFem++ et le problème est résolu en implémentant un modèle de Johnson-Champoux-Allard dans un programme conçu par nos soins, spécialement écrit pour calculer la réponse acoustique de milieux périodiques 2D. Des éléments linéaires sont utilisés pour approcher la pression à l'intérieur d'une cellule unitaire transformant alors le problème en un problème discret composé de 1128 éléments et 714 noeuds. La condition limite périodique (condition de Floquet-Bloch) est appliquée sur chaque côté du domaine discrétisé. Pour que le problème soit correctement implémenté, il faut s'assurer qu'il y ait exactement le même nombre de noeuds de part et d'autre de la cellule, c'est-à-dire les mêmes coordonnées sur l'axe  $x_2$ .

La cellule unitaire initiale est un carré de 2 cm de côté. Le matériau poreux collé contre une paroi rigide, a les caractéristiques du Fireflex (Recticel, Belgique). Le Fireflex est une mousse polyester commercialisée pour ses bonnes propriétés de résistances au feu et ses performances acoustiques. Les paramètres utilisés pour cette couche de poreux ont été déterminés par des méthodes classiques de caractérisations de matériaux à ATF, KULeuven, Belgique (Tab. 2.2). Les calculs sont réalisés en considérant une onde plane incidente qui se propage du bas de la cellule le long de l'axe  $x_2$ .

| $\phi$ | $\alpha_\infty$ | $\Lambda(\mu\text{m})$ | $\Lambda'(\mu\text{m})$ | $\sigma(\text{N s m}^{-4})$ |
|--------|-----------------|------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 0.95   | 1.42            | 180                    | 360                     | 8900                        |

TABLE 2.2 – Paramètres du matériau poreux (Fireflex) utilisé dans la FEM et dans les calculs semi-analytiques

## 2.3 Fréquence de résonance d'un résonateur splitring et modèle de diffusion

Dans cette section, la fréquence de résonance d'un seul splitring est calculée lorsqu'il est dans l'air et lorsqu'il est dans un matériau poreux. Ensuite le cas d'un SR placé près d'une paroi rigide sera considéré et la dépendance de la fréquence de résonance sera étudiée en fonction de sa distance par rapport à la paroi rigide et l'orientation de la fente. La modélisation de la diffraction du son par des SR arrangés périodiquement est décrite à la fin de cette section.

### 2.3.1 Fréquence de résonance d'un splitring dans l'air

Les SR sont des cylindres creux fendus sur toute la longueur. De par leur invariance de géométrie en fonction de la hauteur (axe  $x_3$ ), ils peuvent être considérés comme des résonateurs de Helmholtz 2D. La fréquence de résonance de cette structure a été calculée analytiquement dans [56] ou dans [57]. Ici le calcul est rappelé succinctement pour se concentrer sur l'influence de la modification de l'impédance de radiation de l'ouverture lorsque le SR est couplé à une paroi rigide. L'impédance de radiation est définie comme étant le rapport de la moyenne de la pression sonore sur la vitesse particulière au niveau de la surface externe de l'ouverture. Cette influence est importante lorsque la fréquence de résonance d'un SR placé près d'un mur rigide est calculée. La pression  $p$  dans l'air satisfait l'équation de Helmholtz, qui en coordonnées cylindriques  $r$  et  $\theta$  est :

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) p + k^2 p = 0, \quad (2.6)$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde dans l'air. La pression  $p_i$  et la vitesse particulière  $v_i$  à l'intérieur de la cavité sont :

$$p_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(kr) e^{in\theta}, \quad (2.7)$$

$$v_i = \frac{k}{i\omega\rho_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J'_n(kr) e^{in\theta}. \quad (2.8)$$

L'approche suivante est décrite dans Krynkina *et al*[57], le mouvement à l'intérieur de la fente  $r_i \leq r \leq r_i + H$ ,  $-\psi/2 \leq \theta \leq \psi/2$  est supposé être un mouvement de type piston plan.

$$p_h = Ce^{ikr} + Be^{-ikr}, \quad (2.9)$$

$$v_h = \frac{1}{\rho_0 c} (Ce^{ikr} - Be^{-ikr}), \quad (2.10)$$

Cette approximation est valide si l'épaisseur  $H$  des parois des résonateurs et la taille des fentes  $e = \psi r_i$  sont petites en comparaison de la longueur d'onde ( $ke \ll 1$ ,  $kH \ll 1$ ) et du rayon  $r_i$  ( $e/r_i \ll 1$ ,  $H/r_i \ll 1$ ). Les coefficients  $A_n$ ,  $B$  et  $C$  sont calculés à partir des conditions aux limites suivantes. Dans un premier temps, les conditions aux limites pour la vitesse particulaire sur la surface interne du résonateur est :

$$v_i(r = r_i, \theta) = v_h(r = r_i)(\mathbf{H}(\theta + \psi/2) - \mathbf{H}(\theta - \psi/2)), \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{H}$  est la fonction de Heavyside. Combinée avec les conditions d'orthogonalité cette expression conduit à l'expression suivante pour le coefficient  $A_n$  :

$$A_0 = \frac{i\psi}{2\pi J'_0(kr_i)} (Ce^{ikr_i} - Be^{-ikr_i}), \quad (2.12)$$

$$A_n = \frac{i}{\pi J'_n(kr_i)} (Ce^{ikr_i} - Be^{-ikr_i}) \frac{\sin\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{n}, \quad (2.13)$$

où  $n \geq 1$  et  $A_{-n} = A_n$ . Dans un second temps, la pression  $p_i$  moyennée sur l'ouverture, c'est-à-dire  $\bar{p}_i = \frac{1}{\psi} \int_{-\psi/2}^{\psi/2} p_i(r = r_i, \theta) d\theta$  doit être égale à la pression moyennée sur la surface interne de la fente. La pression  $\bar{p}_i$  est réécrite en fonction des Eqs. (2.7), (2.12) et (2.13) sous la forme

$$\bar{p}_i = (Ce^{ikr_i} - Be^{-ikr_i}) \times \left( \frac{i\psi}{2\pi} \frac{J_0(kr_i)}{J'_0(kr_i)} + \frac{4i}{\pi\psi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr_i)}{J'_n(kr_i)} \frac{\sin^2\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{n^2} \right). \quad (2.14)$$

Cette pression doit satisfaire la condition suivante :

$$\bar{p}_i = Ce^{ikr_i} + Be^{-ikr_i}. \quad (2.15)$$

Finalement, sur la surface externe de l'ouverture pour  $r = r_e = r_i + H$ , le rapport de  $p_h$  et  $v_h$  est égal à l'impédance de radiation de la fente  $\bar{z}$

$$\rho_0 c \frac{Ce^{ikr_e} + Be^{-ikr_e}}{Ce^{ikr_e} - Be^{-ikr_e}} = \bar{z}. \quad (2.16)$$

En combinant (2.16) avec (2.14) et (2.15) et ne gardant que les termes principaux dans le développement de  $\tan(kH)$ , l'équation caractéristique suivante est obtenue :

$$\frac{\bar{z}}{\rho_0 c} = \frac{Q + i(kH)}{iQ(kH) + 1}, \quad (2.17)$$

où

$$Q = \frac{i\psi}{2\pi} \frac{J_0(kr_i)}{J'_0(kr_i)} + \frac{4i}{\pi\psi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr_i)}{J'_n(kr_i)} \frac{\sin^2\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{n^2}. \quad (2.18)$$

Les fréquences de résonance des SRs sont solutions de l'équation caractéristique (2.17) et donc dépendent de l'impédance de radiation de l'ouverture. Maintenant, en considérant que  $kr_i = O(\beta)$ ,  $kH = O(\beta^2)$ ,  $\delta/H = O(1)$  (la correction de longueur  $\delta$  est définie ci dessous) où  $\beta$  est un petit paramètre et en ne gardant que les termes principaux dans le développement de (2.17) et (2.18) tel que :

$$\frac{J_0(kr_i)}{J'_0(kr_i)} = -\frac{2}{kr_i} + O(\beta), \quad \frac{J_n(kr_i)}{J'_n(kr_i)} = \frac{kr_i}{n} + O(\beta^3), \quad (2.19)$$

l'équation est obtenue pour la fréquence de résonance  $f_r$  du résonateur SR.

$$\bar{Z} = -\frac{-ie}{\pi k_r r_i^2} + ik_r(H + \delta), \quad (2.20)$$

où  $k_r = 2\pi f_r/c$ ,  $\bar{Z} = \bar{z}/\rho_0 c$  est l'impédance de rayonnement normalisée de la fente et la correction de longueur interne  $\delta$  est

$$\delta = e \frac{4}{\pi\psi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{n^3}. \quad (2.21)$$

L'impédance de radiation de la fente  $\bar{Z}$  dépend des résonateurs voisins. Dans le cas le plus simple, lorsque le résonateur est placé dans un milieu infini et homogène (champ libre), elle peut être calculée de la façon suivante : Le déplacement dans la fente est considéré comme étant un déplacement de piston plan (2.9), (2.10), ainsi, la vitesse particulière sur la surface externe de la fente est indépendante de l'angle et est égale à  $v_0 = v_h(r = r_e)$ . D'après Shenderov [58], la pression au point de coordonnées  $(r, \theta)$  (système de coordonnées centrées sur le cylindre) générée par une distribution de vitesse arbitraire  $v(\theta)$  sur la surface du cylindre de rayon  $r_e$  peut être calculée comme

$$p(r, \theta) = -\frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta_0) G(r, r_e, \theta, \theta_0) d\theta_0, \quad (2.22)$$

où

$$G(r, r_e, \theta, \theta_0) = -\frac{2}{kr_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(kr_e)} e^{in(\theta - \theta_0)}, \quad (2.23)$$

est la fonction de Green d'un cylindre en champ libre choisie pour que  $\partial G/\partial r = 0$  sur la surface du cylindre.  $H_n^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce. Comme la vitesse est distribuée uniformément le long de la fente et nulle partout ailleurs sur la surface du SR, le rapport entre la pression (2.22) moyennée sur toute la fente et la vitesse  $v_0$  donnent l'expression suivante pour l'impédance de rayonnement  $\bar{Z} = \left( \int_{-\psi/2}^{\psi/2} p(r_e, \theta) d\theta \right) / \psi v_0 \rho_0 c$  :

$$\bar{Z} = \frac{2i}{\pi\psi} \left( \frac{\psi^2}{4} \frac{H_0^{(1)}(kr_e)}{H_0^{(1)'}(kr_e)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(kr_e)}{H_n^{(1)'}(kr_e)} \frac{\sin^2\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{n^2} \right). \quad (2.24)$$

Comme précédemment, de petits résonateurs sont considérés avec  $kr_e = O(\beta)$ ,  $\psi/2\pi = O(\beta^2)$ . En ne gardant que les termes principaux dans les expressions suivantes :

$$\frac{H_0^{(1)}(kr_e)}{H_0^{(1)'}(kr_e)} = O(\beta \log(\beta)), \quad \frac{H_n^{(1)}(kr_e)}{H_n^{(1)'}(kr_e)} = -\frac{kr_e}{n} + O(\beta^3), \quad (2.25)$$

l'équation (2.24) se réduit à

$$\bar{Z} = -ik\delta, \quad (2.26)$$

où  $\delta$  est défini par (2.21). L'épaisseur de la paroi d'un résonateur, petit devant la longueur d'onde, en champ libre, peut être considérée négligeable, ce qui signifie que la correction de longueur externe est égale à celle à l'intérieur du résonateur. En substituant (2.26) dans l'équation caractéristique (2.20), l'expression de la fréquence de résonance du résonateur dans l'air est obtenue.

$$f_r = \frac{k_r c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi r_i^2 (H + 2\delta)}}. \quad (2.27)$$

### 2.3.2 Fréquence de résonance d'un splitring en présence de mur rigide

La présence de mur rigide proche du SR change l'impédance de rayonnement  $\bar{Z}$  de la fente et donc affecte la fréquence de résonance. Pour trouver l'impédance de rayonnement, un splitring placé à une distance  $L$  de la paroi rigide est considéré. L'orientation de la fente relative à cette paroi est décrite par l'angle  $\phi = \pi - \alpha^{\{n\}}$ , ou l'angle  $\alpha^{\{n\}}$  est décrit sur la figure 1. La position du SR et de son image, relativement à la paroi rigide est montré figure 2.2.

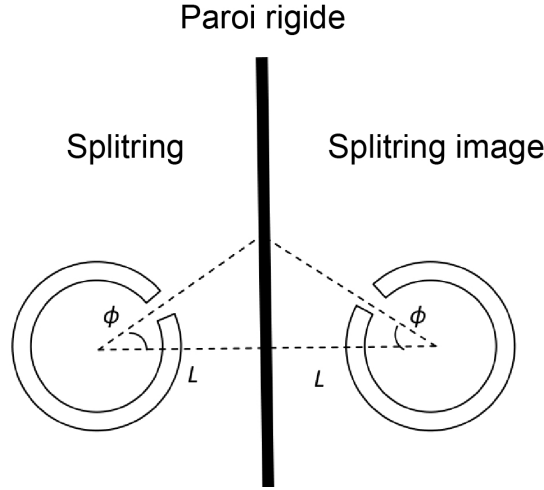


FIGURE 2.2 – SR placé proche de la paroi rigide et son image

Le champ de pression en dehors du SR et de son image est

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr') e^{in\theta'}, \quad (2.28)$$

où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires du point d'observation dans les coordonnées du système centré sur le SR, tandis que  $(r', \theta')$  sont les coordonnées dans le système centré sur son image. Il est facile de montrer que la dérivée normale de  $p$ , définie par (2.28) est nulle au niveau de la paroi. En appliquant le théorème d'addition de Graf[59], l'équation (2.28) est transformée en

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n H_n^{(1)}(kr) + J_n(kr) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_{m+n}^{(1)}(2kL) \right] e^{in\theta}. \quad (2.29)$$

La composante radiale de la vitesse particulaire est :

$$v_r = \frac{1}{i\rho_0 c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n H_n^{(1)'}(kr) + J_n'(kr) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_{m+n}^{(1)}(2kL) \right] e^{in\theta}. \quad (2.30)$$

La pression moyennée sur l'ouverture  $r = r_e$ ,  $\phi + \psi/2 \leq \theta \leq \phi - \psi/2$  est

$$\bar{p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ a_n H_n^{(1)}(kr) + J_n(kr) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_{m+n}^{(1)}(2kL) \right] q(n), \quad (2.31)$$

où

$$q(n) = \frac{\sin\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{\frac{n\psi}{2}}, n \neq 0, \quad (2.32)$$

et

$$q(0) = 1. \quad (2.33)$$

Une vitesse uniforme  $v_0$  à la surface de la fente est supposée être égale à celle trouvée précédemment et les conditions aux limites suivantes pour  $v_r$  sont appliquées à la surface du SR

$$v_r(r = r_e, \theta) = v_0(\mathbf{H}(\theta - \phi + \psi/2) - \mathbf{H}(\theta - \phi - \psi/2)), \quad (2.34)$$

ce qui est similaire à (2.11). En utilisant les conditions d'orthogonalité, le système infini d'équations pour les coefficients  $b_n = e^{in\phi} a_n H_n^{(1)'}(kr_e)/(i\rho_0 c v_0)$  est dérivé

$$b_n + J_n'(kr_e) \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{i(n-m)\phi} \frac{H_{m+n}^{(1)}(2kL)}{H_m^{(1)'}(kr_e)} = \frac{\psi q(n)}{2\pi}. \quad (2.35)$$

En terme de coefficients  $b_n$ , l'impédance de rayonnement normalisée de la fente en présence d'un mur  $\bar{Z}_w$  est exprimée comme

$$\bar{Z}_w = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ b_n \frac{H_n^{(1)}(kr_e)}{H_n^{(1)'}(kr_e)} + J_n(kr_e) \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{i(n-m)\phi} \frac{H_{m+n}^{(1)}(2kL)}{H_m^{(1)'}(kr_e)} \right] q(n). \quad (2.36)$$

L'étape suivante est d'utiliser les développements des fonctions de Bessel et Hankel dans les 2 équations précédentes en supposant  $kr_e = O(\beta)$  and  $2kL = O(\beta)$  et en ne gardant que les termes principaux. En plus de l'équation (2.25), les développements suivants ont été utilisés ( $m, n \neq 0$ ) :

$$J_0(kr_e) = 1 + O(\beta^2), \quad (2.37)$$

$$J_0'(kr_e) = -\frac{kr_e}{2} + O(\beta^3), \quad (2.38)$$

$$J_n(kr_e) = \frac{(kr_e)^n}{2^n n!} + O(\beta^{n+2}), \quad (2.39)$$

$$J'_n(kr_e) = \frac{(kr_e)^{n-1}}{2^n (n-1)!} + O(\beta^{n+1}), \quad (2.40)$$

$$\frac{H_n^{(1)}(2kL)}{H_m^{(1)'}(kr_e)} = -2^{n-m} \frac{(n-1)!}{m!} \frac{(kr_e)^{m+1}}{(2kL)^n} + O(\beta^{m-n+3}), \quad (2.41)$$

$$\frac{H_n^{(1)}(2kL)}{H_0^{(1)'}(kr_e)} = -2^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2kL)^n} kr_e + O(\beta^{3-n} \log(\beta)), \quad (2.42)$$

$$\frac{H_0^{(1)}(2kL)}{H_n^{(1)'}(kr_e)} = O(\beta^{n+1} \log(\beta)). \quad (2.43)$$

Après reformulation des équations, l'impédance de rayonnement  $\bar{Z}_w$  prend la forme suivante

$$\bar{Z}_w = -ik\delta_w, \quad (2.44)$$

où la correction de longueur extérieure en présence de la paroi  $\delta_w$  est

$$\delta_w = \frac{e}{\psi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\psi q(n) y^n \cos(n\phi)}{4n} + b_n \frac{2e^{-in\phi} y^n + q(n)}{2n} + S_{mn} \frac{q(n)}{n} \right] + c.c. \quad (2.45)$$

avec

$$S_{mn} = \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} b_m \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} y^{m+n} e^{i(n-m)\phi}. \quad (2.46)$$

Ici,  $y = r_e/2L$ . Les équations pour les coefficients  $b_n$ , où  $n \geq 1$  sont

$$b_n \left( 1 - y^{2n} \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \right) - S_{nn} = \frac{\psi (2q(n) + y^n e^{in\phi})}{4\pi}. \quad (2.47)$$

Pour calculer numériquement l'expression de  $\delta_w$ , les équations (2.45)-(2.47) doivent être tronquées. En substituant l'impédance de rayonnement définie par l'équation (2.44) dans l'équation caractéristique (2.20) l'expression de la fréquence de résonance d'un SR dans l'air en présence d'une paroi rigide est obtenue :

$$f_w = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi r_i^2 (H + \delta + \delta_w)}}. \quad (2.48)$$

La correction de longueur définie par (2.45) est plus longue que la valeur obtenue en champ libre  $\delta$  si la fente est en face de la paroi. Ce qui signifie que la fréquence de résonance pour un SR est plus basse dans ce cas, en comparaison avec le SR en champ libre.

Pour le moment, la fréquence de résonance pour une configuration C1 (tableau 2.1) en champ libre prédit par (2.27) est de 2913 Hz (le calcul par éléments finis donne 2970 Hz). Lorsque le résonateur est placé à  $L = 0.01$  m de la paroi avec l'ouverture en face de celle-ci ( $\phi = 0$ ), en utilisant l'équation (2.48) la fréquence de résonance est calculée à 2475 Hz (les résultats FEM donnent 2650 Hz). Lorsque le résonateur subit une rotation, la fréquence de résonance augmente à mesure que la fente s'éloigne de la paroi, pour  $\phi = \pi/2$ ,  $f_w = 2917$  Hz (résultat par FEM de 2921 Hz) et pour  $\phi = \pi$ ,  $f_w = 3136$  Hz (résultat par FEM de 3050 Hz). Il faut noter que dans ce cas, à 3050 Hz,  $kr_e \approx 0.41$ , alors que  $2Lk \approx 1.1$ , donc l'hypothèse de valeurs beaucoup plus petites que l'unité utilisée dans les dérivées, n'est plus strictement valide. Cependant, la tendance prédite par le modèle est correcte et les fréquences de résonances diffèrent de moins de 10% de celles calculées numériquement.

### 2.3.3 Fréquence de résonance d'un splitring dans un matériau poreux

Lorsqu'un SR est immergé dans un matériau poreux, la fréquence de résonance devient dépendante des propriétés du matériau. L'impédance de rayonnement de la fente est représentée par  $\bar{Z} = -ik_r\delta'$ , où  $\delta' = \delta$  ou  $\delta' = \delta_w$  dépendent de la présence, ou non, de la paroi rigide. Les équations caractéristiques (2.20) sont réécrites comme :

$$k_r^2 = \omega \frac{e}{\pi r_i^2 (H + \delta + \delta')}. \quad (2.49)$$

Cependant, dans le matériau poreux,  $k_r$  est exprimé comme étant :

$$k_r = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\chi_1}}, \quad (2.50)$$

où la masse volumique effective et le module de compression sont définis par les équations (2.1) et (2.3). Dans le Fireflex, les fréquences caractéristiques impliquées dans cette équation prennent les valeurs suivantes :  $\nu_b = 781$  Hz,  $\nu_c = 2049$  Hz,  $\nu_b' = 298$  Hz,  $\nu_c' = 846$  Hz. La fréquence de résonance du SR est supposée très supérieure à  $\nu_c'$ . Dans le cas où le module de compression est proche de sa valeur adiabatique,  $k_r$  devient :

$$k_r^2 \approx \alpha_\infty \frac{\omega_r^2}{c^2} \left( 1 + \frac{2\pi\nu_b}{-i\omega_r} \sqrt{1 + \frac{-i\omega_r}{2\pi\nu_c}} \right), \quad (2.51)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans l'air,  $\omega_r = 2\pi f_r$  et  $f_r$  est la fréquence de résonance. En combinant ceci avec (2.49), l'équation suivante est obtenue pour  $W = \omega_r/(2\pi\nu_c)$  :

$$W^2 + i \frac{\nu_b}{\nu_c} W \sqrt{1 - W} = \left( \frac{\bar{K}}{2\pi\nu_c} \right)^2, \quad (2.52)$$

où

$$\bar{K} = \frac{c}{\sqrt{\alpha_\infty}} \sqrt{\frac{e}{\pi r_i^2 (H + \delta + \delta')}}. \quad (2.53)$$

Pour le Fireflex  $\nu_b/\nu_c \ll 1$ , donc l'équation (2.52) peut être résolue en première approximation en utilisant la méthode des petites perturbations. Après une simple transformation, ceci nous donne l'expression suivante pour la fréquence de résonance  $f_r$

$$f_r \approx \frac{1}{2\pi} \left( \bar{K} - i2\pi\nu_b \sqrt{1 - i \frac{\bar{K}}{2\pi\nu_c}} \right). \quad (2.54)$$

La fréquence de résonance est complexe à cause de la présence de pertes visqueuses dans le matériau poreux. Sa partie réelle est

$$\text{Re}(f_r) \approx \frac{1}{2\pi} \left( \bar{K} - 2\pi\nu_b \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left( \frac{\bar{K}}{2\pi\nu_c} \right)^2} - 1}{2}} \right). \quad (2.55)$$

Pour un résonateur immergé dans du Fireflex infini  $\text{Re}(f_r) \approx 1721$  Hz, ce qui est beaucoup plus bas que la résonance dans l'air.

### 2.3.4 Diffraction par un splitring à basse fréquence

Pour calculer le coefficient de diffraction du SR, le modèle basse fréquence, développé par Krynkin *et al*[57] est utilisé. Il implique que les SR soient remplacés par des cylindres élastiques, remplis d'un matériau poreux et entourés par une couche (d'épaisseur  $H$ ) de fluide équivalent. Ce dernier dispose des caractéristiques d'impédance et de nombre d'onde suivant (normalisé par l'impédance caractéristique  $z = \sqrt{\rho_1 \chi_1}$  et le nombre d'onde du matériau poreux (2.50)) :

$$Z_l = \frac{2\pi r_i}{e}, k_l = 1 + \frac{\delta + \delta_w}{H}. \quad (2.56)$$

Le rayon externe du cylindre reste le même que celui du SR. Dans les calculs, les SR sont placés proches de la paroi rigide, pour cette raison, la correction de longueur  $\delta_w$  apparait dans l'équation de  $k_l$ . Les coefficients de diffraction d'un cylindre multicouches sont alors utilisés dans le modèle de diffraction développé par Groby *et al* [49].

## 2.4 Étude paramétrique

Le but de cette section est d'étudier l'influence de la géométrie de diffuseurs plongés dans une matrice poreuse sur le coefficient d'absorption calculé numériquement et de comparer ces résultats au modèle de diffusion décrit dans la section précédente. L'accent est mis sur deux types particuliers d'inclusions, les cylindres rigides (non résonants) et les SR[9, 60, 27]. Avec les SR plongés dans une matrice poreuse, trois types de phénomènes peuvent être observés. Les deux premiers sont similaires à ceux observés sur les inclusions rigides : l'énergie acoustique est toujours piégée entre l'inclusion et la paroi rigide. Les interférences de Bragg sont également observables à plus hautes fréquences. Le dernier phénomène est la résonance du SR, qui augmente le coefficient d'absorption en piégeant l'énergie sonore à l'intérieur du diffuseur.

### 2.4.1 Influence de l'orientation du col

Comme montré dans la section 2.3.2 l'angle d'orientation du col  $\alpha^{\{n\}}$  influence la fréquence de résonance du SR. Ceci sera confirmé numériquement et son influence sur la fréquence du mode piégé sera étudiée. Les simulations sont réalisées en modifiant l'orientation de la fente par rapport à la paroi  $\alpha^{\{n\}} = [0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi]$  et en cherchant les fréquences pour lesquelles la résonance du SR et le mode piégé apparaissent.

Ces fréquences sont déterminées par la structure du champ acoustique calculée par FEM : la résonance du SR correspond à un maximum du champ de pression localisé à l'intérieur du résonateur, alors qu'à la fréquence du mode piégé le maximum de pression est localisé entre l'inclusion et la paroi rigide. Pour ces deux fréquences, une augmentation du coefficient d'absorption est notable (Fig. 2.4 b). Les résultats pour le SR sont montrés sur la figure 2.3, où les fréquences de résonance des inclusions (lignes continues avec des étoiles pour la FEM et avec des points pour les résultats semi analytiques) et la résonance de la couche (lignes en pointillés pour l'inclusion rigide et continue pour l'inclusion résonante) sont repérés en fonction de  $\alpha^{\{n\}}$ .

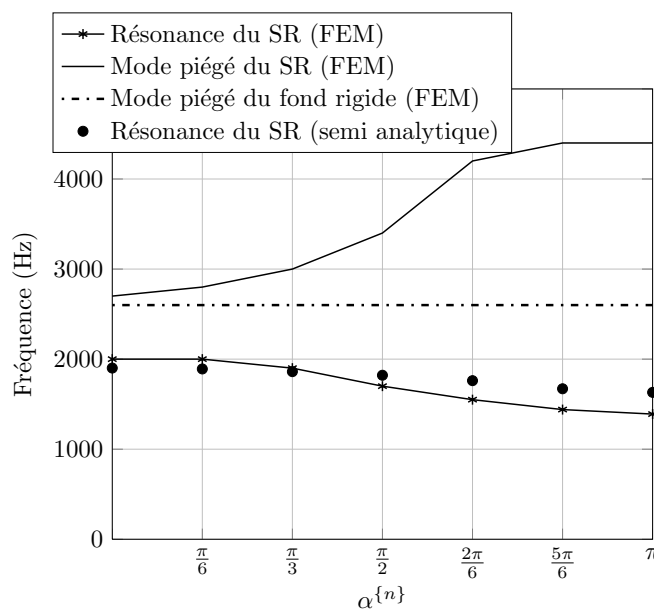


FIGURE 2.3 – Influence de l'orientation de la fente du SR par rapport au fond rigide sur sa fréquence de résonance. Les simulations numériques sont réalisées pour  $\theta^i = 0$ . Les dimensions de la configuration C1 ont été utilisées (voir Tab.2.1).

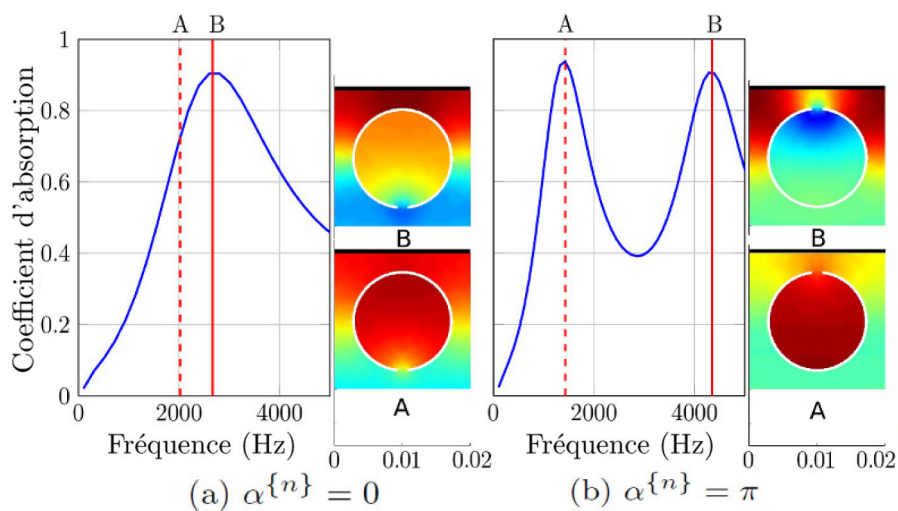


FIGURE 2.4 – Dépendance fréquentielle du coefficient d'absorption pour deux différentes orientations de la fente du SR. Les encarts représentent la distribution de pression proche des fréquences de résonance des SR (A) et du mode piégé (B). Les dimensions de la configuration C1 ont été utilisées (voir Tab.2.1).

La position du pic dans le coefficient d'absorption liée à la résonance du SR est fortement dépendante de l'angle lorsque  $\alpha^{\{n\}}$  dépasse  $\pi/2$ . La fréquence de résonance du SR décroît et

la fréquence minimum est atteinte pour  $\alpha^{\{n\}} = \pi$  comme prévu par la théorie section 2.3. La fréquence du mode piégé (qui correspond au pic plus haut en fréquence dans le coefficient d'absorption) augmente avec  $\alpha^{\{n\}}$ . Lorsque  $\alpha^{\{n\}}$  est en dessous de  $\pi/2$ , le champ acoustique piégé entre la paroi rigide et l'inclusion est réparti uniformément le long de l'axe  $x_1$  (voir Fig. 2.4 a). Lorsque  $\alpha^{\{n\}}$  dépasse  $\pi/2$  le résonateur introduit une anomalie périodique dans le champ de pression (voir Fig. 2.4 b). Avec  $\alpha^{\{n\}} = \pi$ , l'effet de cette anomalie est maximum. Le champ acoustique est toujours piégé entre la paroi et les inclusions mais la répartition spatiale du champ de pression change. En d'autres termes, lorsque  $\alpha^{\{n\}} \sim 0$ , le mode piégé et la résonance du SR sont couplés pour former un unique pic d'absorption puis sont découplés lorsque  $\alpha^{\{n\}}$  augmente, le tout pouvant mener à l'apparition de deux pics d'absorption.

La prédiction par le modèle semi-analytique pour la fréquence du pic de résonance dépendant de l'orientation de la fente est en accord avec les résultats numériques (Fig. 2.5). Cependant, à cause de la nature basse fréquence du modèle analytique, il n'est pas possible de prédire correctement le comportement du coefficient d'absorption à plus hautes fréquences.

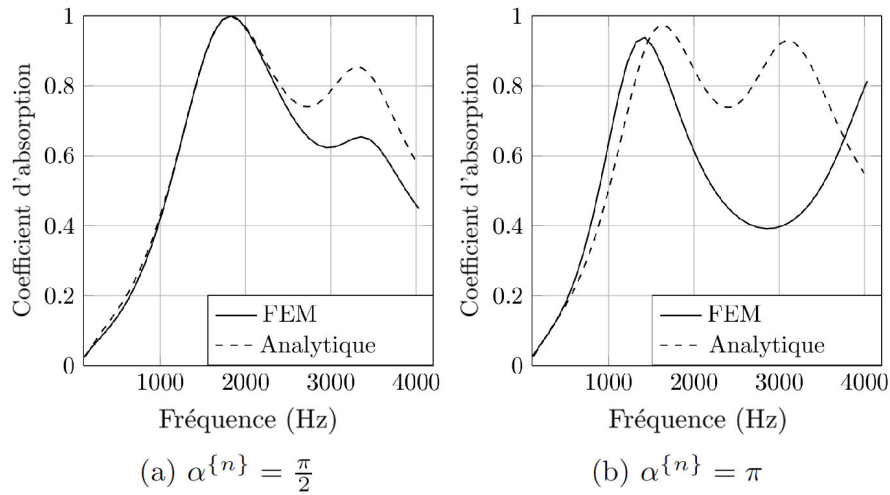


FIGURE 2.5 – Comparaison entre les résultats par FEM et semi-analytiques pour le coefficient d'absorption d'une lame de Fireflex avec des SR dont les fentes sont positionnées à différents angles  $\alpha^{\{n\}}$ . Les dimensions de la configuration C1 ont été utilisées (voir Tab.2.1).

Les résultats de simulation montrent que les propriétés d'une telle couche de matériau poreux contenant des SR peuvent être accordées en changeant simplement l'orientation des fentes par rapport à la paroi rigide. Cette structure est donc potentiellement efficace pour le traitement de bruit ayant une bande fréquentielle plus ou moins étroite. Tous les résultats présentés ici ont été obtenus pour une onde plane en incidence normale par rapport à la surface de la lame, c'est-à-dire  $\theta^i = 0$ . Il est connu que pour un cristal sonore 2D, le coefficient de réflexion dépend de l'angle d'incidence car les ondes ne rencontrent pas la même répartition périodique et donc ne sont pas diffractées de la même façon [8]. Un comportement similaire peut être attendu pour notre structure contenant les SR. Les résultats de simulations (voir Fig. 2.6) montrent que l'absorption liée à la résonance du SR n'est pas influencée par l'angle d'incidence, car la fréquence de résonance est indépendante de la façon dont le résonateur est excité. D'un autre côté, la fréquence du mode piégé et le pic d'absorption lié à ce mode augmentent faiblement lorsque  $\theta^i$

augmente. Ce phénomène a déjà été observé pour d'autres type de diffuseurs, en particulier pour des inclusions rigides carrées et cylindriques [41]. Le mode piégé est dépendant de la distance  $L$  entre l'inclusion et la paroi rigide [49]. La fréquence de ce mode augmente lorsque  $L$  diminue. Lorsque l'onde incidente heurte le matériau avec un angle  $\theta^i$ , la projection de la distance  $L$  sur la direction du vecteur d'onde est  $L_{\theta^i} = L \cos \theta^i$ . Lorsque  $\theta^i > 0$ , la distance  $L_{\theta^i}$  est plus petite que  $L$  ce qui mène à l'augmentation de la fréquence.

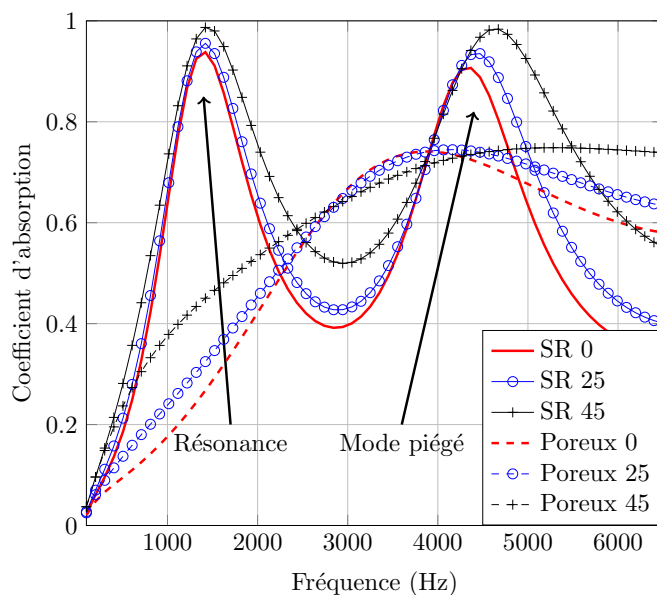


FIGURE 2.6 – Dépendance du coefficient d'absorption d'une lame de Fireflex et d'inclusions SR en fonction de l'angle d'incidence,  $\alpha^{\{n\}} = \pi$ . Les dimensions de la configuration C1 sont utilisées (voir Tab.2.1).

### 2.4.2 Création d'une "supercellule" en faisant varier la position de la fente

L'orientation de l'inclusion offre donc des possibilités d'accordabilité. Ceci mène à la conception de "supercell" ou supercellules composées de plusieurs inclusions orientées de façon à avoir des angles  $\alpha^{\{n\}}$  différents. La bande de fréquence dans laquelle un fort coefficient d'absorption est atteint peut donc être élargie. Différentes configurations sont possibles mais ici, l'étude se focalisera sur une supercellule réalisée à partir de deux et quatre SRs (configurations n°2 et n°3 de la figure 2.7).

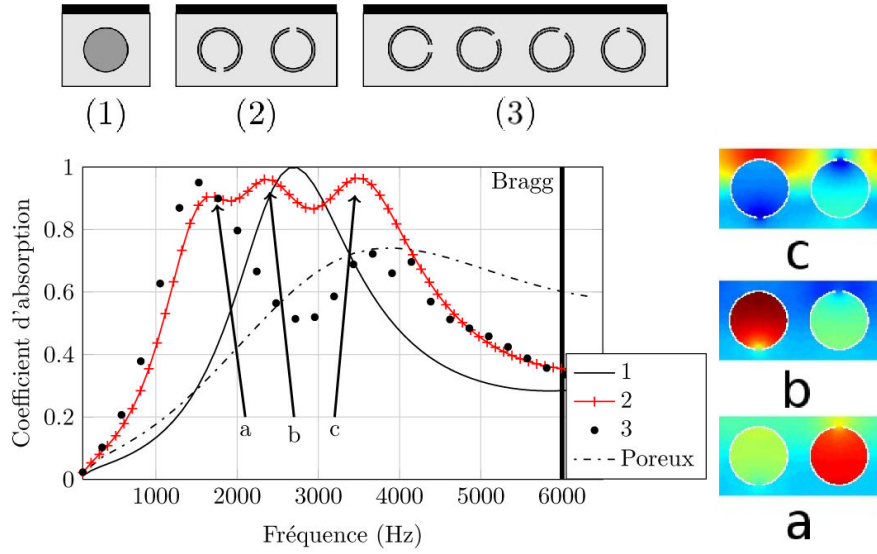


FIGURE 2.7 – Comparaison entre les coefficients d'absorption de deux lames de Fireflex avec des inclusions SR arrangés en "supercellules" (configurations n°2 et n°3), une lame de Fireflex avec des inclusions rigides (configuration n°1) et une lame de Fireflex seule (Poreux). L'encart de droite représente le champ de pression pour la configuration n°2 à 3 fréquences différentes. L'onde acoustique est en incidence normale. Les dimensions utilisées sont résumées dans le tableau C1 (voir Tab.2.1).

La distance entre deux inclusions est gardée égale à 2 cm mais la période de la structure est maintenant de  $d = 4$  cm pour la configuration n°2 et  $d = 8$  cm pour la configuration n°3. Le rayon externe est de  $r_e = 0.74$  cm. Même si la position des SR reste la même ( $x_1 = [1, 3]$  cm pour la configuration n°2 et  $x_1 = [1, 3, 5, 7]$  cm pour la configuration n°3.  $x_2 = 1$  cm pour toutes les inclusions), ils ne sont pas orientés de la même façon par rapport à la paroi rigide. Dans un premier temps, l'étude se focalise sur la configuration n°2. Le fait d'alterner un résonateur dont l'ouverture est en face de l'onde incidente et un résonateur dont l'ouverture est en face de la paroi rigide, modifie la répartition du champ de pression à l'arrière de la cellule excitant un mode piégé dont la fréquence est plus basse que lorsque tous les résonateurs sont face à la paroi arrière (section 2.4.1). La configuration de la cellule n°1 contient une seule inclusion rigide. Pour cette configuration, seul le mode piégé et les interférences de Bragg sont visibles dans la gamme de fréquence considérée. La comparaison du coefficient d'absorption pour cette configuration et celle de la supercellule n°2 montre bien l'avantage des inclusions résonantes. Les simulations ont également été réalisées pour la supercellule n°3 composée de 4 inclusions orientées pour  $\alpha^{\{n\}} = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi]$  (configuration n°3, figure 2.7). Cependant, dans ce cas les fréquences de résonance sont trop proches les unes des autres, ce qui crée un seul pic d'absorption assez étroit à 1500 Hz et un autre maximum d'absorption à 4000 Hz lié au mode piégé. La configuration n°2 (figure 2.7) est très efficace pour l'absorption du son dans une gamme de fréquence entre 1500 Hz et 3500 Hz où le coefficient d'absorption atteint 0.9. Les résonances de chaque inclusion et du mode piégé sont assez proches pour exciter un mode couplé et garder un fort coefficient d'absorption sur une large bande de fréquence. Il est donc possible de garder un coefficient

d'absorption de 0.9 pour des longueurs d'ondes 10 fois supérieures à l'épaisseur de la structure, conférant à cette structure le statut de métaporeux. Par la suite lorsqu'il est fait mention de "la supercellule", il s'agit de la configuration n°2 qui est utilisée comme géométrie de référence.

### 2.4.3 Influence de la géométrie des inclusions résonantes

La géométrie des inclusions peut avoir une influence sur la répartition des ondes diffractées et donc sur le mode piégé qui en découle. Plusieurs formes d'inclusions résonantes sont simulées pour mettre en évidence la possibilité d'exciter le mode piégé et de garder des pertes en transmissions liées à la résonance. Quatre géométries sont testées (voir Fig. 2.8), plusieurs orientations sont simulées mais seuls les résultats pour  $\alpha^{\{n\}} = \pi$  sont présentés ici car toutes les géométries simulées montrent exactement le même comportement que le SR (possibilité d'accord en fonction de l'orientation). Les inclusions sont dimensionnées pour avoir exactement le même *Filling fraction* (voir section 1.2), la même épaisseur et le même  $e$ , donc des fréquences de résonance du même ordre de grandeur. Les coefficients d'absorption de ces nouvelles géométries sont comparés à celui du SR. Le rayon du SR utilisé dans cette étude est légèrement plus petit que précédemment et toutes les dimensions utilisées pour ces inclusions sont résumées dans le tableau 2.3.

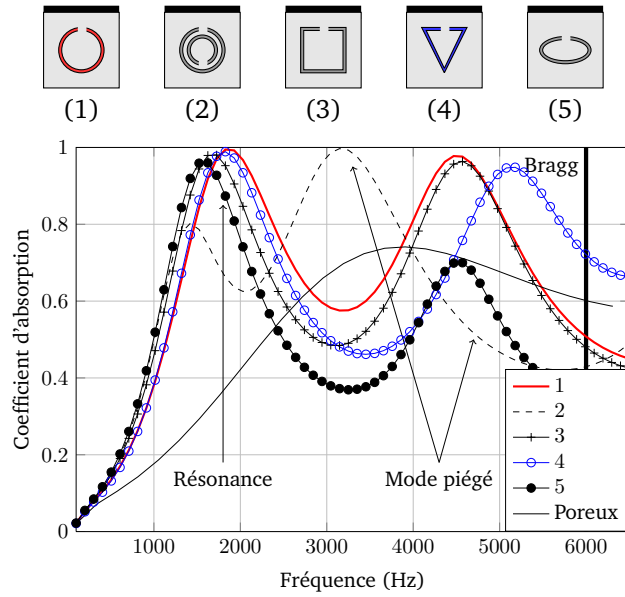


FIGURE 2.8 – Comparaison de différents types de géométries d'inclusions pour  $\alpha^{\{n\}} = \pi$  et en incidence normale, avec pour dimensions d'inclusions les configurations C2 à C6, résumées dans le tableau 2.3

Exactement comme dans le cas des SRs, toutes les géométries présentent le même type de comportement, une résonance à environ 1600 Hz et un mode piégé dont la fréquence peut varier entre 3200 Hz et 5200 Hz en fonction de la géométrie. La figure 2.8 montre le coefficient d'absorption pour toutes les géométries simulées et pour un angle d'incidence de  $\alpha^{\{n\}} = \pi$ . Bien que le comportement global reste similaire, des différences sont notables au niveau du

mode piégé, qui est toujours visible mais plus ou moins marqué en fonction de la géométrie. Ceci confirme bien l'hypothèse que la présence d'un mode piégé est dépendant uniquement de la périodicité et que son efficacité est dépendante de la géométrie des inclusions. Par exemple le mode piégé de l'ellipse ne permet pas d'atteindre une valeur proche de l'unité alors que le carré ou le triangle gardent une efficacité proche de celle du SR. De plus le mode de Bragg est également influencé par la géométrie et peut être minimisé en choisissant la bonne géométrie, par exemple le triangle, qui semble être l'inclusion la plus intéressante avec le SR. Par la suite, toutes les validations expérimentales et autres simulations seront réalisées avec le SR, qui reste la géométrie la plus simple à utiliser expérimentalement mais les résultats sont applicables à toutes les autres.

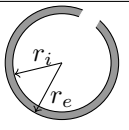
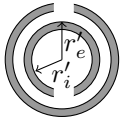
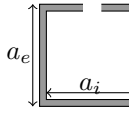
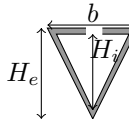
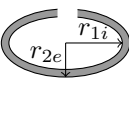
| Unités |                                                                                     | cm       | cm       | cm       | cm       | cm  |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|-----|
| C2     |    | $r_i$    | $r_e$    | $e$      |          |     |
|        |                                                                                     | 0.57     | 0.61     | 0.1      |          |     |
| C3     |    | $r_i$    | $r_e$    | $r'_i$   | $r'_e$   | $e$ |
|        |                                                                                     | 0.57     | 0.61     | 0.43     | 0.47     | 0.1 |
| C4     |   | $a_i$    | $a_e$    | $e$      |          |     |
|        |                                                                                     | 1.01     | 1.1      | 0.15     |          |     |
| C5     |  | $b$      | $H_i$    | $H_e$    | $e$      |     |
|        |                                                                                     | 1.65     | 1.32     | 1.43     | 0.15     |     |
| C6     |  | $r_{1i}$ | $r_{1e}$ | $r_{2i}$ | $r_{2e}$ | $e$ |
|        |                                                                                     | 0.74     | 0.82     | 0.44     | 0.49     | 0.1 |

TABLE 2.3 – Dimensions pour les différentes configurations utilisées dans cette section. Toutes les valeurs sont en centimètres (cm).

## 2.5 Validation expérimentale

Les mesures ont été réalisées pour valider les modèles numériques et semi-analytiques. Les échantillons testés sont composés de Mélamine et de tube creux d'aluminium avec et sans fente pour les inclusions rigides (Fig.2.9). Les paramètres des inclusions utilisées dans les mesures sont résumés dans le tableau 2.4. Les coefficients d'absorption des échantillons sont mesurés dans un tube à impédance de section carrée de 4.2 cm de côté. La fréquence de coupure du tube est de 4200 Hz. En supposant que seules des ondes planes se propagent en dessous de la

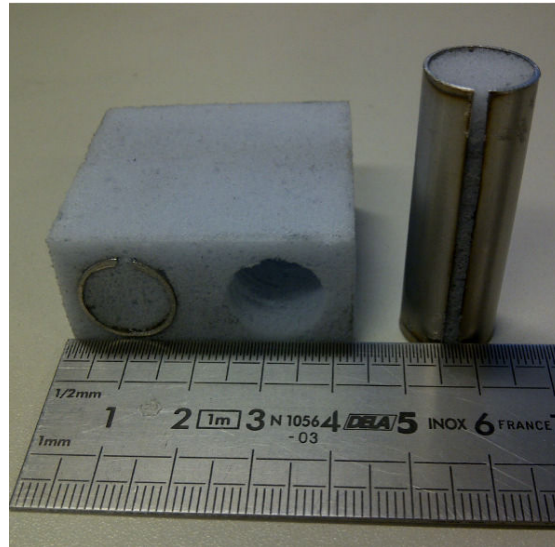


FIGURE 2.9 – Photographie d'un des échantillons caractérisé : la supercellule composée de deux SR, dont l'un d'eux a été retiré du poreux.

fréquence de coupure, les conditions de parois parfaitement rigides agissent comme des miroirs parfaits et créent une périodicité dans les directions  $x_1$  et  $x_3$  avec une période de 4.2 cm. La technique a été précédemment utilisée dans un article de Groby *et al*[61] et permet de déterminer expérimentalement le coefficient d'absorption d'une structure 2D quasi-infinie avec seulement une cellule unitaire. Deux cylindres d'aluminium sont alors insérés dans le matériau poreux pour avoir deux cellules unitaires de 2.1 cm de longueur dans un échantillon. Les paramètres de la mélanine sont légèrement différents de ceux du Fireflex et sont résumés dans le tableau 2.5. L'échantillon est placé à la fin du tube contre un bouchon en cuivre qui ferme le tube et agit comme une paroi rigide.

Premièrement, les résultats par FEM sont validés par comparaison avec les résultats expérimentaux et les résultats du modèle analytique [49] pour un échantillon de poreux et des inclusions rigides (voir Fig. 2.10). Ce modèle analytique est basé sur l'utilisation de la méthode des multipoles. Les résultats par FEM sont clairement en accord avec les résultats analytiques et expérimentaux, montrant un maximum d'absorption parfaitement bien défini dans chaque cas. Les valeurs dans la partie basse fréquence du coefficient d'absorption donné par FEM ne rejoignent pas exactement les valeurs expérimentales. Ceci est dû en grande partie aux défauts de l'échantillon expérimental et de son positionnement dans le tube (alignement difficile des inclusions dans l'échantillon, incertitudes sur les paramètres du poreux, incertitudes sur le placement de l'échantillon dans le tube, des conditions aux limites entre le matériau poreux et le tube...). Les inclusions sont des tubes d'aluminium creux. Une première mesure a été conduite (les résultats ne sont pas présentés ici) avec des inclusions vides où le coefficient d'absorption était encore plus haut dans la gamme basse fréquence. Des fuites en haut et en bas de chaque cylindre laissent passer l'onde acoustique dans le cylindre et permettent une interaction entre l'onde incidente et l'intérieur de chaque inclusion, ce qui augmente le coefficient d'absorption. Une mesure est également réalisée en utilisant des inclusions remplies de pâte à modeler. Le coefficient d'absorption expérimental est alors beaucoup plus proche des résultats numériques mais reste toujours rela-

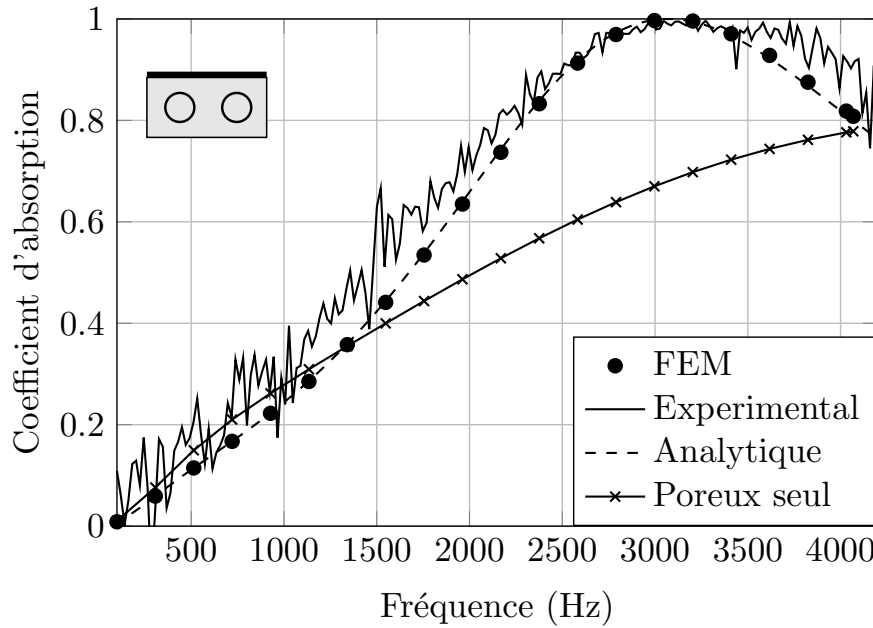


FIGURE 2.10 – Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux sur le coefficient d'absorption d'un échantillon composé d'inclusions rigides et d'une plaque de Mélamine avec  $\alpha^{\{n\}} = 0$ . Les dimensions de la configuration C2 ont été utilisées (voir Tab.2.4).

tivement plus grand que le résultat FEM dans la partie basse fréquence. Ceci est dû à la pâte à modeler qui ne peut pas vraiment être considérée comme parfaitement rigide. Une mesure avec une couche de poreux seule de 2.1cm a également été réalisée et montre un accord parfait avec les résultats FEM. Ces mesures ne sont pas montrées ici par un souci de clarté du manuscrit.

Ce problème de surestimation du coefficient d'absorption à basse fréquence disparaît dans les expériences suivantes, où les inclusions rigides sont remplacées par des SR (voir figure 2.11 et 2.12). Dans chaque expérience, la même matrice poreuse est utilisée. Le matériau à l'intérieur des SRs est de la mousse de Mélamine, extraite lorsque les inclusions ont été introduites dans le poreux. Lorsque  $\alpha^{\{n\}} = 0$  (figure 2.11), la FEM suit parfaitement les résultats expérimentaux alors que les calculs semi-analytiques montrent bien la bonne tendance mais avec une surestimation de la courbe entre 1300 Hz et 3000 Hz. Lorsque  $\alpha^{\{n\}} = \pi$  (figure 2.12), pour les deux simulations, numérique et semi-analytique, le comportement dans la partie basse fréquence du coefficient est en accord avec les expériences alors que la partie haute fréquence est moins bien capturée. Ceci peut être dû à un défaut de placement de l'échantillon dans le tube à impédance qui peut changer la périodicité spatiale et donc changer la fréquence et l'efficacité du mode piégé expérimental.

Par comparaison avec la figure 2.10, l'augmentation du coefficient d'absorption liée aux SR est clairement visible avec un de ces maxima apparaissant à  $f \sim 3000$  Hz pour les inclusions rigides et à  $f \sim 2500$  Hz pour les SR avec  $\alpha^{\{n\}} = 0$  et  $f \sim 2000$  Hz pour les SR avec  $\alpha^{\{n\}} = \pi$ .

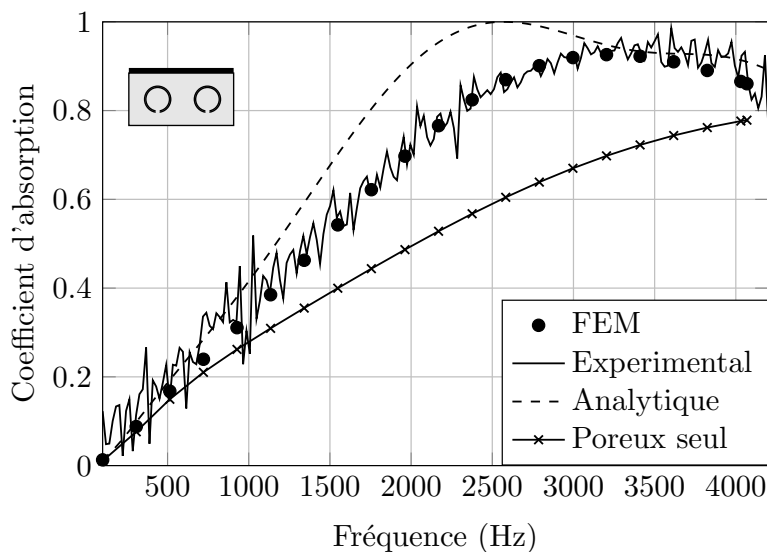


FIGURE 2.11 – Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux sur le coefficient d'absorption d'un échantillon composé de SR et d'une plaque de Mélamine avec  $\alpha^{\{n\}} = 0$ . Les dimensions de la configuration C2 ont été utilisées (voir Tab.2.4).

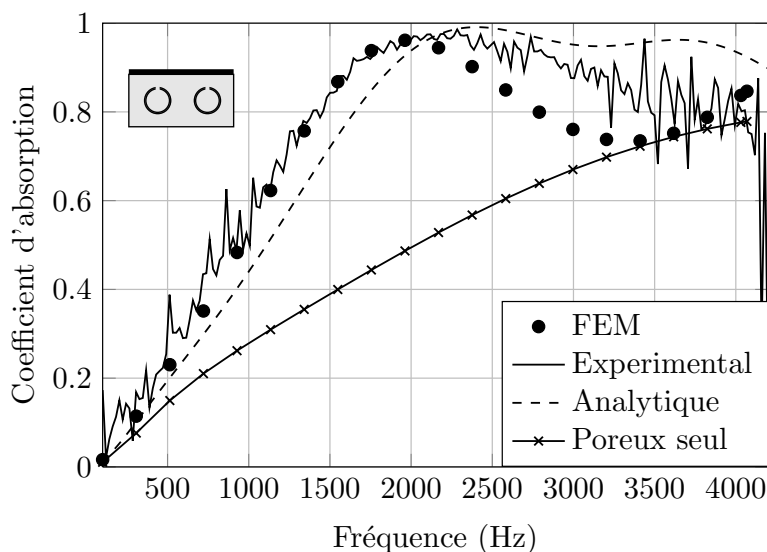


FIGURE 2.12 – Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux sur le coefficient d'absorption d'un échantillon composé de SR et d'une plaque de Mélamine avec  $\alpha^{\{n\}} = \pi$ . Les dimensions de la configuration C2 ont été utilisées (voir Tab.2.4).

Une dernière expérience confirme l'efficacité de la supercellule 2 de la section 2.4.2 (voir Fig. 2.13 où une des inclusions est orientée avec  $\alpha^{\{n\}} = 0$  et l'autre avec  $\alpha^{\{n\}} = \pi$ ). Les expériences et les simulations sont en très bon accord. Ceci prouve la possibilité d'une absorption efficace

| C2 | $r_i$ (cm) | $r_e$ (cm) | $d$ (cm) | $e$ (cm) | $h$ (cm) | $l$ (cm) |
|----|------------|------------|----------|----------|----------|----------|
|    | 0.65       | 0.7        | 4.2      | 0.15     | 2.1      | 1.15     |

TABLE 2.4 – Dimensions caractéristiques de l'échantillon utilisé dans les expériences. La correspondance géométrique de ces valeurs sont résumé sur la figure 2.1

pour des fréquences dans l'air environ 10 fois plus grandes que l'épaisseur de la structure. La comparaison avec le coefficient d'absorption de la mousse seule (ligne continue avec croix) démontre que même pour des fréquences autour de 500 Hz, le coefficient d'absorption a augmenté de 0.15 à 0.2, ce qui représente une amélioration de 30 % et pour 2000 Hz l'amélioration est maximale avec la valeur du coefficient d'absorption augmentant de 0.5 à 0.9.

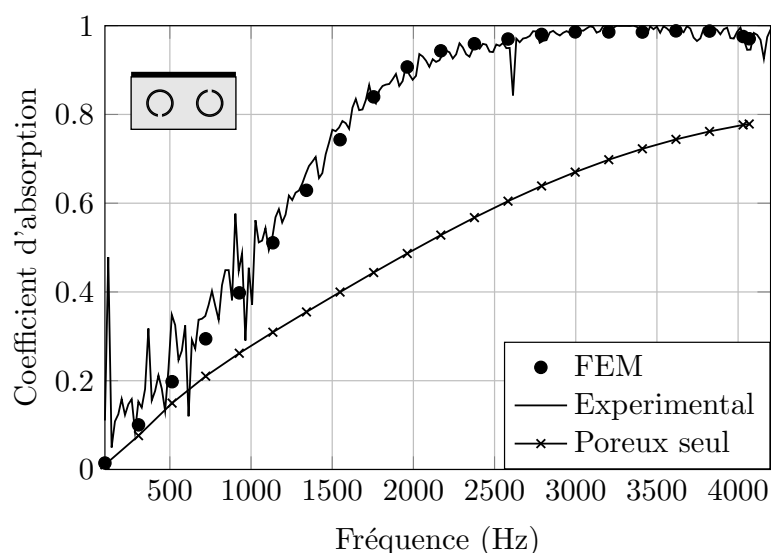


FIGURE 2.13 – Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux sur le coefficient d'absorption d'un échantillon composé de deux SR et d'une plaque de Mélamine avec  $\alpha^{\{n\}} = 0$  pour la première inclusion et  $\alpha^{\{n\}} = \pi$  pour la seconde. Les dimensions de la configuration C2 ont été utilisées (voir Tab.2.4).

| $\phi$ | $\alpha_\infty$ | $\Lambda(\mu\text{m})$ | $\Lambda'(\mu\text{m})$ | $\sigma(\text{N s m}^{-4})$ |
|--------|-----------------|------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 0.99   | 1.02            | 160                    | 220                     | 11000                       |

TABLE 2.5 – Paramètres du matériau poreux utilisé dans les expériences (Mélamine) avec  $\phi$  la porosité,  $\alpha_\infty$  la tortuosité,  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques et  $\sigma$  la résistance au passage de l'air.

## Conclusion

L'influence d'inclusions arrangées périodiquement sur le coefficient d'absorption d'une couche de matériau poreux collée contre une paroi rigide a été étudiée théoriquement, numériquement et expérimentalement. En ajout aux propriétés d'absorption liées à l'excitation de modes de plaques modifiés et d'interférences de Bragg, la structure possède une absorption quasi-totale (proche de l'unité) en dessous de la résonance quart d'onde du matériau. Ceci arrive lorsqu'une ligne d'inclusions rigides cylindriques est insérée dans le poreux, pour lequel l'épaisseur et les propriétés du matériau sont correctement choisies. Cette propriété particulière permet la conception d'un absorbeur sonore compact et est expliquée par l'excitation d'un mode piégé complexe qui mène à l'augmentation du gradient de pression à l'intérieur du matériau. Lorsque des inclusions résonantes sont insérées dans un matériau poreux, le comportement basse fréquence du coefficient d'absorption est modifié significativement. Proche de la fréquence de résonance de l'inclusion, un pic d'absorption quasi-totale, apparaît. Pour une inclusion SR dans du Fireflex, la fréquence de ce pic correspond à une longueur d'onde quasiment dix fois supérieure à l'épaisseur du matériau. Ceci suggère que la structure peut être considérée comme un métamatériau acoustique, appelé métaporeux.

La fréquence de résonance des inclusions dépend de l'orientation de la fente, relativement à la paroi rigide (décrite par l'angle  $\alpha^{\{n\}}$ ). La proximité de la paroi rigide et de la fente mène à une augmentation de la correction de longueur (augmentation du col du résonateur). Ce phénomène offre la possibilité d'accordabilité de l'absorbeur, pouvant ainsi être efficace pour une grande gamme de fréquences.

Dans le cas où plus d'une inclusion sont présentes par période spatiale, un pic d'absorption quasi-total peut être atteint avec une large bande fréquentielle, lorsque les fentes d'inclusions voisines ont différentes orientations. Cependant les dimensions caractéristiques des inclusions et de la couche de poreux doivent être accordées pour réussir à exciter des modes couplés afin d'obtenir une valeur de coefficient d'absorption élevée. Les prédictions du modèle de diffraction semi-analytique décrit dans ce chapitre ont un bon accord avec les résultats numériques dans la gamme basse fréquence (en dessous et proche de la résonance quart d'onde). Cependant, le modèle a besoin d'être étendu pour avoir des résultats précis pour des fréquences plus hautes. En conclusion, introduire des inclusions résonantes dans une couche de matériau poreux offre une alternative aux matériaux multicouches et à double porosité pour la conception de matériaux acoustiques absorbants pour des applications basses fréquences.

Cette étude s'est concentrée sur l'utilisation d'inclusions circulaires mais il est totalement envisageable d'utiliser d'autres formes, telles que des carrés, triangles ou encore ellipses. De plus, seules des inclusions 2D ont été considérées mais il est également envisageable de considérer des géométries 3D, tel qu'il est présenté dans l'annexe 2, étudiant l'influence de formes 3D simples sur le coefficient d'absorption d'une lame de poreux.



## **Troisième partie**

# OPTIMISATION PAR ALGORITHME GÉNÉTIQUE



# Chapitre 3

---

## OPTIMISATION PAR ALGORITHME GÉNÉTIQUE

---

### 3.1 Optimisation par algorithme génétique

Il a été vu à travers les précédents chapitres que l'un des paramètres les plus importants pour les cristaux soniques et les métamatériaux est la géométrie de la cellule unitaire et en particulier la périodicité. Il a été vu également qu'il est possible d'optimiser cette géométrie pour aboutir à de hautes performances en terme d'absorption.

Le comportement de métamatériaux dont la cellule unitaire est composée d'un diffuseur de forme simple est assez facilement prédictible : toutes les possibilités liées à une variation de la géométrie de l'inclusion forment un espace de solution de taille modeste pouvant être parcouru à l'aide de méthodes déterministes. Lorsque les propriétés acoustiques d'une cellule unitaire de géométrie plus complexe sont étudiées (par exemple : plus d'un diffuseur dans la cellule unitaire ou une répartition géométrique particulière), l'espace des solutions devient alors trop grand pour être exploré entièrement. Il est difficile de connaître l'influence de tous les paramètres et de trouver la configuration optimale. Il est cependant possible de trouver une configuration avec laquelle le coefficient d'absorption reste très haut sur une large bande de fréquence, comme le montre [62]. Dans cet article, une plaque de poreux collée contre une paroi rigide est considérée. Cette plaque comporte deux lignes d'inclusions rigides ayant des rayons différents sur chaque ligne ainsi que des cavités arrières. Il s'agit de cavités creusées dans la paroi rigide faisant office de résonateurs quart d'onde. Ce chapitre s'inspire de cet article et le métamatériau considéré sera constitué de deux lignes d'inclusions résonantes et de cavités arrières. Le but est de trouver la configuration optimale pour laquelle toutes les résonances et le mode piégé s'accordent pour former le plus haut et large coefficient d'absorption possible.

Pour aider dans cette recherche, des méthodes de recherche de solution optimale dites "stochastiques" peuvent être utilisées, telles que le recuit simulé [63] ou les algorithmes d'optimisation génétique [64]. Bien que ces deux méthodes montrent toutes deux d'excellentes performances, l'algorithme génétique est choisi car il présente des mécaniques très intuitives. Le code de calcul élément fini utilisé dans le chapitre précédent est maintenant combiné à un algorithme d'optimisation génétique (Genetic Algorithm (GA)).

Les algorithmes d'optimisation génétique sont dérivés de la génétique et de la sélection naturelle décrite par Charles Darwin. Cette théorie met en oeuvre le principe qu'une population donnée va évoluer à travers les générations pour s'adapter à un environnement hostile. Pour

cela, il y a une grande probabilité que seuls les individus les plus adaptés à la situation survivent et engendrent à leur tour une génération d'individus encore plus adaptés. Les premiers travaux sur les algorithmes génétiques ont été réalisés par J. Holland [65] et D. Goldberg [64]. Ils ont posé les bases et rendu l'utilisation de ces algorithmes accessibles pour un grand nombre de problématiques.

Ce type d'algorithme peut être utilisé dans le cas présent, pour déterminer la géométrie optimale d'une cellule unitaire afin d'atteindre l'absorption acoustique la plus importante possible. Ici la population est constituée de différents types de géométries pour la cellule unitaire. L'environnement auquel il faut s'adapter, nommé fonction *objectif*, est matérialisé par un coefficient d'absorption idéal de 1 sur une gamme de fréquence définie. La fonction *objectif* est comparée à une fonction liée à chaque individu (ici le coefficient d'absorption). Cette fonction est appelée fonction *fitness* ou fonction d'évaluation. Le but est donc de minimiser le plus possible l'écart entre la fonction *fitness* et la fonction *objectif*.

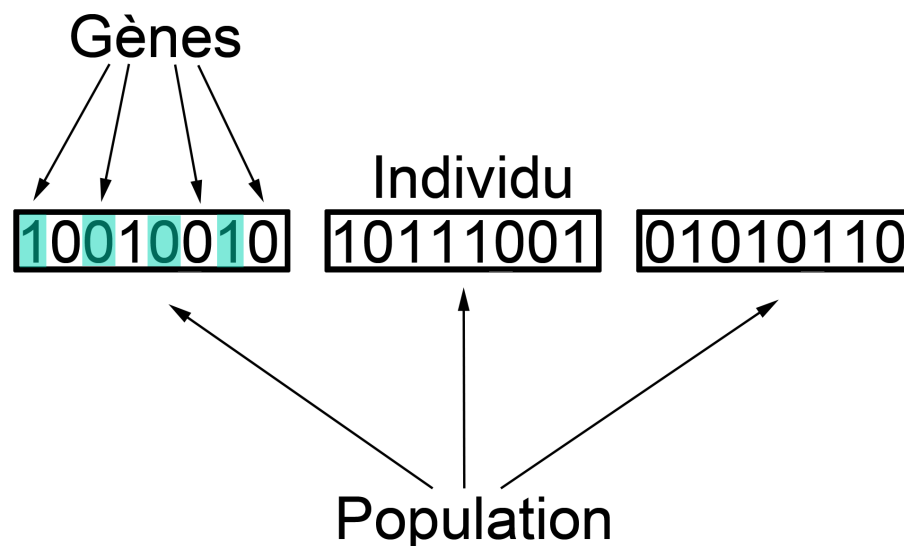


FIGURE 3.1 – Exemple d'une population de nombres codés en binaire

En pratique, le GA crée aléatoirement une population de départ, composée de plusieurs individus, chacun ayant des gènes particuliers (voir figure 3.1 pour laquelle l'exemple d'une population de nombres binaires est prise, un individu étant symbolisé par un nombre binaire et ses gènes étant les chiffres qui le composent). Les générations suivantes sont alors créées grâce à trois mécanismes de base qui sont la sélection, le croisement et la mutation, expliqués dans le détail sur le schéma 3.2.

Pour une génération  $k$  le GA compare la fonction *fitness* de chaque individu avec la fonction *objectif* afin de déterminer les meilleurs de leur génération c'est-à-dire ceux pour qui l'écart entre les fonctions *fitness* et *objectif* est minimum. Le GA va choisir des couples de parents, sélectionnés en fonction de leurs adaptations. Ensuite, chacun de ces couples va engendrer, par croisement

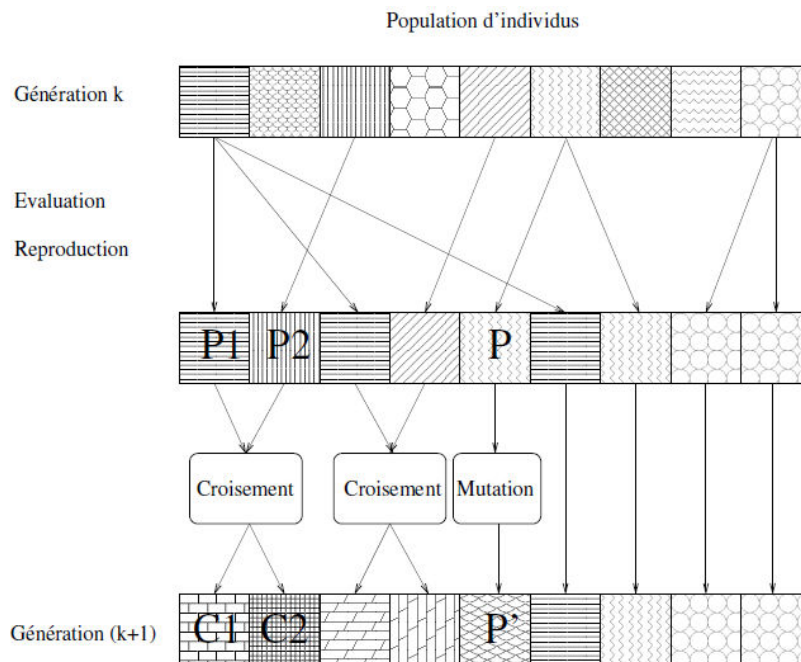


FIGURE 3.2 – Principe général des algorithmes génétiques (image tirée de [66])

deux nouveaux individus, comportant la totalité ou une partie des gènes de leurs parents et constituant ainsi la génération  $k + 1$ . Enfin, les individus qui ne sont pas choisis pour constituer des couples de parents sont reproduits tels quels dans la génération  $k + 1$ . Il existe cependant une probabilité que ces individus subissent une mutation en passant à la génération suivante et ainsi se voient attribuer de nouveaux gènes. Ceci permet d'explorer un champ de possibilités beaucoup plus vaste qu'en se restreignant seulement aux gènes présents dans la population de départ (Fig. 3.2).

### 3.1.1 Description détaillée des opérations de base

À l'inverse d'autres techniques d'optimisation, les algorithmes génétiques ne requièrent pas d'hypothèse particulière sur la régularité de la fonction *objectif*. L'algorithme génétique n'utilise notamment pas ses dérivées successives, ce qui rend très vaste son domaine d'application. Aucune hypothèse sur la continuité de la fonction à optimiser n'est non plus requise. Néanmoins, dans la pratique, la convergence des algorithmes génétiques est assez sensible à la régularité des fonctions qu'ils optimisent et peut demander un nombre très important d'itérations avant d'aboutir à une solution satisfaisante. Le peu d'hypothèses nécessaires permet cependant de traiter des problèmes très complexes. La fonction à optimiser peut ainsi être le résultat d'une simulation.

#### 3.1.1.1 La sélection

La sélection permet d'identifier statistiquement les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais. Après avoir évalué chaque individu en comparant leurs fonctions *objectif*

| Individu    | 1     | 2        | 3       |
|-------------|-------|----------|---------|
| Adaptation  | Bonne | Mauvaise | Moyenne |
| Pondération | 60    | 10       | 30      |

TABLE 3.1 – Exemple d'évaluation de trois individus



FIGURE 3.3 – Schéma du segment représentant chaque individu pondérés par leurs fonctions objectifs concaténés sur un axe normalisé

au *fitness*, le mécanisme de sélection va choisir les individus reproducteurs. Il existe dans la littérature un nombre important de principes de sélection plus ou moins adaptés aux problèmes qu'ils traitent. Le plus couramment utilisé et le plus simple, est le principe de la *Roulette Wheel selection* [64], efficace pour une population assez grande.

Le principe de *Roulette Wheel selection* consiste à associer à chaque individu un segment dont la longueur est proportionnelle à sa fonction *objectif*. Ces segments sont ensuite concaténés sur un axe normalisé entre 0 et 1. Le principe de tirage aléatoire utilisé dans les roulettes de casinos est ici reproduit avec une structure linéaire.

La figure 3.3 représente un exemple de segment en considérant trois individus dont le résultat de l'évaluation est résumé dans le tableau 3.1.

Le GA tire alors un nombre aléatoire de distribution uniforme entre 0 et 1 désignant une zone de l'axe, et enregistre le segment sélectionné. Avec ce système, les grands segments, c'est-à-dire les bons individus, seront plus souvent choisis que les petits.

Lorsque la dimension de la population est réduite, il est difficile d'obtenir en pratique l'espérance mathématique de sélection nécessaire en raison du peu de tirages effectués. Les bons individus sont trop souvent sélectionnés, faisant converger prématurément la solution vers un minimum local, souvent moins bon. Un biais de sélection plus ou moins fort survient donc suivant la dimension de la population étudiée.

### 3.1.1.2 Le Croisement

Le croisement a pour but d'enrichir la diversité de la population en manipulant la structure des gènes. Les croisements sont utilisés avec deux parents et génèrent deux enfants. Il existe plusieurs types de croisement comme le *sliding crossover* et le croisement barycentrique, utile pour les problèmes continus. Pour l'application à l'optimisation de la géométrie du métaporeux, le type de croisement le plus simple est utilisé : le croisement à découpage de chromosomes (*sliding crossover*). Pour effectuer ce type de croisement sur des chromosomes constitués de  $M$  gènes, une position est tirée aléatoirement dans chacun des parents. Les deux sous-chaînes terminales de chacun des deux chromosomes sont alors échangées, ce qui produit deux enfants C1 et C2. Ce principe peut être étendu en découpant le chromosome non pas en 2 sous chaînes, mais en 3 voire 4 [67] (voir figure 3.4 pour un croisement à 3 points). En effet, plus le nombre de points de croisements sera grand, plus il y aura d'échange de paramètres, d'information et donc plus l'espace des solutions sera parcouru dans sa totalité. Plus le nombre de points de croisements

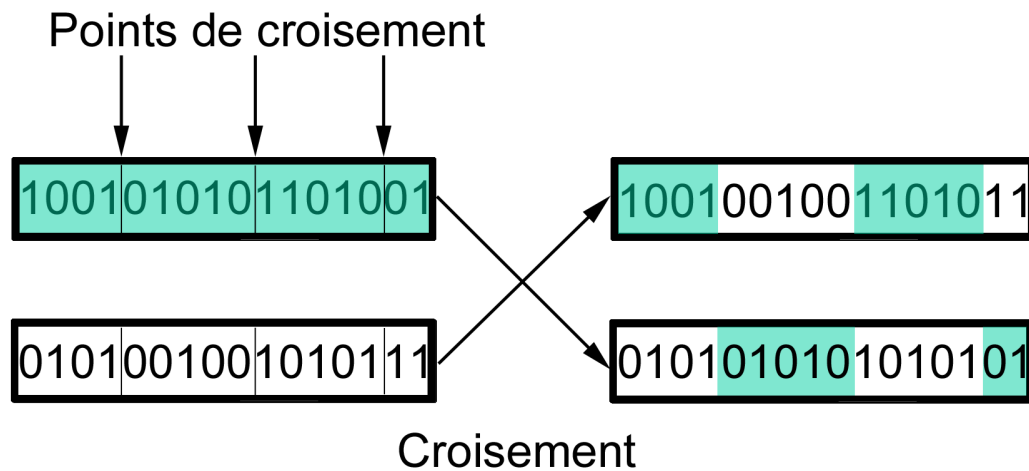


FIGURE 3.4 – Principe général du croisement multipoint

sera petit et plus la probabilité de croisement sera faible et moins le croisement apportera de diversité.

### 3.1.1.3 La mutation

L'opérateur de mutation apporte aux algorithmes génétiques la propriété d'ergodicité de parcours d'espace. Cette propriété indique que l'algorithme génétique sera susceptible d'atteindre tous les points de l'espace d'état, sans pour autant les parcourir tous dans le processus de résolution. Ainsi en toute rigueur, l'algorithme génétique peut converger sans croisement. Pour les problèmes discrets, l'opérateur de mutation consiste généralement à tirer aléatoirement un gène dans le chromosome et à le remplacer par une valeur aléatoire (figure 3.5).

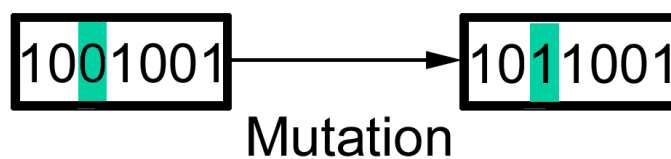


FIGURE 3.5 – Principe de la mutation

### 3.1.2 Mécanismes de convergence rapide

Trois mécanismes additionnels ont été utilisés pour assurer une convergence plus rapide vers la meilleure solution. Il s'agit des conditions d'élitisme, de sharing et de nichage. Ces trois mécanismes consistent à "forcer" les résultats donnés par les trois précédentes opérations afin de favoriser un certain type d'individu.

### 3.1.2.1 L'élitisme

L'élitisme consiste à assurer la décroissance vers le meilleur individu de chaque génération. En pratique, si à une génération  $k$  donnée aucune solution n'est meilleure que la solution de la génération  $k - 1$ , celle-ci est transférée vers la génération  $k$ .

### 3.1.2.2 Le nichage

Cette technique appelée également *sharing* permet de favoriser l'exploration spatiale des solutions en pénalisant celles qui se trouvent proches les unes des autres. Cette fonction permet d'éviter de converger vers un minimum local au détriment de la solution globale bien meilleure (figure 3.6).

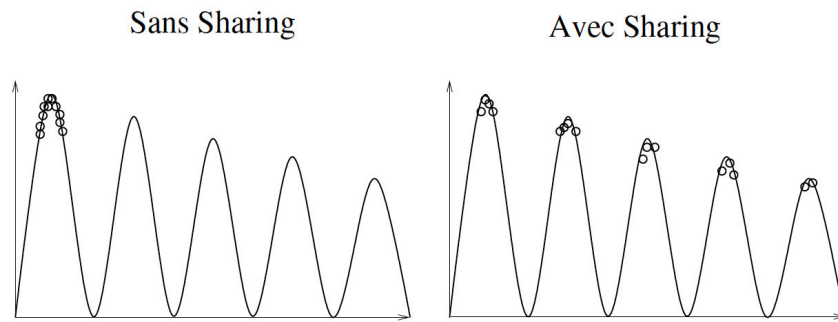


FIGURE 3.6 – Comparaison des solutions obtenues par un algorithme génétique avec et sans sharing (image tirée de [66])

Le sharing va alors modifier le *fitness* de chaque individu en fonction de sa position dans l'espace des solutions en pénalisant ceux qui se trouvent dans la même région. Dans la pratique, il faut définir une distance indiquant la différence entre deux individus. Cette distance est alors utilisée pour calculer le nouveau fitness  $f'_i$  qui remplace  $f_i$  de la façon suivante :

$$f'_i = \frac{f_i}{m'_i} ; m'_i = \sum_{j=0}^N S(d(x_i, x_j)), \quad (3.1)$$

avec

$$S(d) = 1 - \left(\frac{d}{\sigma_{share}}\right)^\alpha \text{ si } d < \sigma_{share}, \quad (3.2)$$

$$S(d) = 0 \text{ si } d > \sigma_{share}, \quad (3.3)$$

avec  $N$  le nombre total d'individus présents dans une génération,  $f_i$  le *fitness* brut d'un individu,  $d(x_i, x_j)$  la distance entre deux mêmes gènes de deux individus différents. Le paramètre  $\sigma_{share}$  permet de régler la sensibilité et  $\alpha$  permet de modifier la force de sharing. Avec  $\alpha < 1$ , les groupes très agglomérés sont fortement pénalisés.

### 3.1.2.3 Le Scaling

Le *scaling* permet de réduire ou d'amplifier artificiellement les différences entre les individus en mettant à l'échelle le *fitness*. La sélection ne se fait plus sur la fonction de départ mais sur

l'image du *fitness* mise à l'échelle après *scaling*. Ici, un *scaling* de type exponentiel est utilisé[68] permettant d'amplifier les écarts de *fitness* en fin de convergence, favorisant le minimum global et masquant les minima locaux. Le *fitness*  $f_i$  est maintenant remplacé par  $f_i''$  tel que :

$$f_i'' = (f_i)^{\beta(k)}, \quad (3.4)$$

avec  $k$  la génération courante.  $\beta$  permet d'amplifier les écarts de *fitness* en fin d'optimisation et est défini par la fonction suivante :

$$\beta(n) = \left( \tan \left[ \left( \frac{k}{K+1} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right)^q, \quad (3.5)$$

avec  $K$  le nombre total de générations et  $q$  un paramètre à choisir permettant de régler la force d'amplification.

### 3.1.3 GA appliqué à l'absorption acoustique

Le GA est utilisé pour maximiser l'absorption acoustique d'une cellule unitaire d'un métaporeux. Pour cela la fonction *fitness* d'un individu  $i$  est définie comme étant  $f_i = 1 - \alpha_i$  telle que :

$$\alpha_i = \frac{1}{n_{freq}} \sum_{j=1}^{n_{freq}} A(j)p, \quad (3.6)$$

avec  $n_{freq}$  le nombre de points en fréquence du coefficient d'absorption donné par le code éléments finis,  $A(j)$  la valeur du coefficient d'absorption à la fréquence  $j$  et  $p$  une pondération permettant de privilégier une gamme de fréquence particulière. Dans un premier temps  $p$  est constant et égal à 1.

Ici, un individu correspond à une géométrie de cellule unitaire particulière et les gènes correspondent aux paramètres géométriques des éléments qui la composent. Pour plus de simplicité, la taille de la cellule unitaire est fixée, les gènes sont donc liés exclusivement aux inclusions et aux cavités arrières. La liste des paramètres variables est donc :

- Position des inclusions
- Orientation des inclusions
- Rayon des inclusions
- Épaisseur des inclusions
- Position des cavités arrières
- Largeur des cavités arrières
- Longueur des cavités arrières.

L'épaisseur du matériau est fixée à 4 cm afin de pouvoir tester des configurations d'inclusions réparties sur deux lignes. Les résultats obtenus par le GA seront comparés avec le coefficient d'absorption du matériau seul d'épaisseur 4 cm et avec la géométrie de la supercellule étudiée section 2.4.2 dont toutes les dimensions ont été multipliées par deux pour obtenir également une épaisseur de matériau de 4 cm (tableau 3.2). Le nombre d'inclusions est fixé à 4 ou 6 et le nombre de cavités arrières fixé à 2.

Les bornes de chaque variable sont résumées dans le tableau 3.3.

| CGA | $r_i$ (cm) | $r_e$ (cm) | $d$ (cm) | $e$ (cm) | $h$ (cm) | $L$ (cm) |
|-----|------------|------------|----------|----------|----------|----------|
|     | 1.4        | 1.5        | 4        | 0.3      | 4        | 2        |

TABLE 3.2 – Dimensions de la configuration C1. Ces variables géométriques sont définies Fig. 2.1

| Bornes | $x_i$ (mm) | $y_i$ (mm) | $\phi_i$ (rad) | $r_i$ (mm) | $e_i$ (%) | $x_c$ (mm) | $h_c$ (mm) | $l_c$ (mm) |
|--------|------------|------------|----------------|------------|-----------|------------|------------|------------|
|        | [4; 16]    | [4; 16]    | [0; $2\pi$ ]   | [2; 10]    | [10; 90]  | [0; 30]    | [4; 20]    | [4; 20]    |

TABLE 3.3 – Valeurs limites des variables géométriques

### 3.1.3.1 Contraintes

Il est nécessaire d'appliquer un certain nombre de contraintes sur le GA pour s'affranchir des solutions non-physiques (interpénétration d'inclusions, sortie de la matrice poreuse...) et aboutir à la meilleure solution admissible. Pour cela la méthode adoptée ici est de pénaliser fortement le *fitness* des solutions non-physiques en listant chaque cas et en ajoutant des conditions lors de l'évaluation de chaque individu.

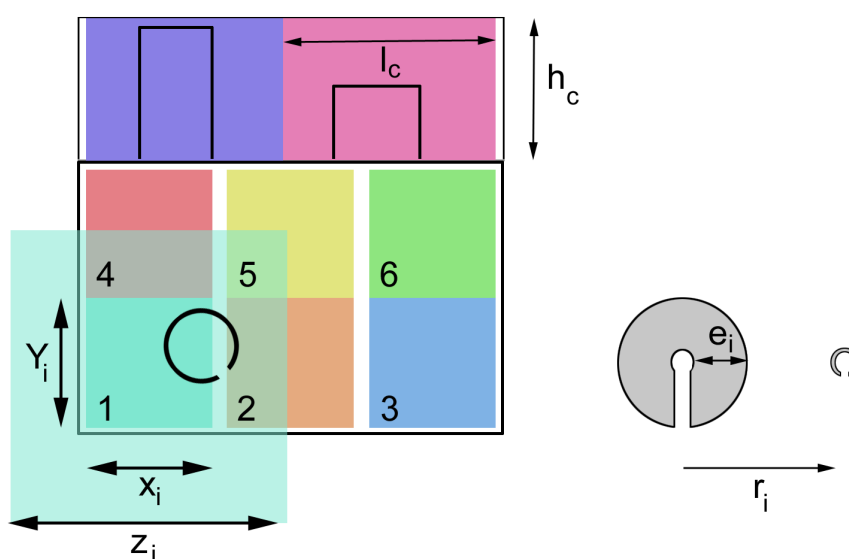


FIGURE 3.7 – Bornes des valeurs géométriques

La figure 3.7 indique la zone de variation de chacun des paramètres ;  $x_i$  et  $y_i$  délimitent la zone dans laquelle le centre d'une inclusion peut se déplacer,  $z_i$  la zone jusqu'où le rayon externe d'une inclusion peut aller, (seule la zone  $z_1$  est représentée sur la figure, mais toutes les autres inclusions disposent de la même liberté de mouvement) et  $l_i$  et  $h_i$  montrent les déplacements possibles des cavités arrières.  $e_i$  représente l'épaisseur et  $r_i$  le rayon des inclusions, les inclusions

| Coefficients | $\sigma_{share}$ | $\alpha$ | $q$ | $p$ |
|--------------|------------------|----------|-----|-----|
| Valeurs      | 0.95             | 0.9      | 0.5 | 1   |

TABLE 3.4 – Coefficients des mécanismes de convergence rapide utilisés pour les simulations

dessinées à droite de la figure montrant les deux cas extrêmes, la plus grande épaisseur avec le rayon le plus large, ou la plus petite épaisseur avec le rayon le plus petit possible. Comme le montre la figure 3.7, chaque inclusion dispose d'une zone commune aux trois inclusions voisines, il existe donc une probabilité qu'une inclusion rencontre une de ces trois voisines ou qu'elle sorte du matériau poreux. Pour chaque inclusion, trois conditions de non-pénétration sont ajoutées et une ou deux conditions de non-sortie suivant les cas.

Soit  $O_i$  le centre de l'inclusion  $i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$  dans le repère global dont l'origine se trouve dans le coin inférieur gauche de la cellule unitaire et  $re_i$  son rayon extérieur. Les conditions de non-pénétration sont :

si  $\|O_i \vec{O}_j\| - (re_i - re_j) < 0$  alors,  $f_i = 1$ , sinon  $f_i = 1 - \alpha_i$ .

et les conditions de non sortie sont :

si  $x_i - r_i < 0$  où si  $y_i - r_i < 0$  alors,  $f_i = 1$ , sinon  $f_i = 1 - \alpha_i$ .

### 3.1.3.2 Convergence

Pour s'assurer que le GA converge bien vers la meilleure solution possible, il est nécessaire de faire évoluer la population sur un large nombre de générations. Le nombre de générations et le nombre d'individus par génération vont alors influencer directement le temps de calcul nécessaire à l'achèvement de l'optimisation. Il faut alors trouver le meilleur compromis permettant d'obtenir une solution satisfaisante en un temps le plus court possible. Les valeurs des coefficients utilisés pour le *scaling* et le nichage sont résumées dans le tableau 3.4.

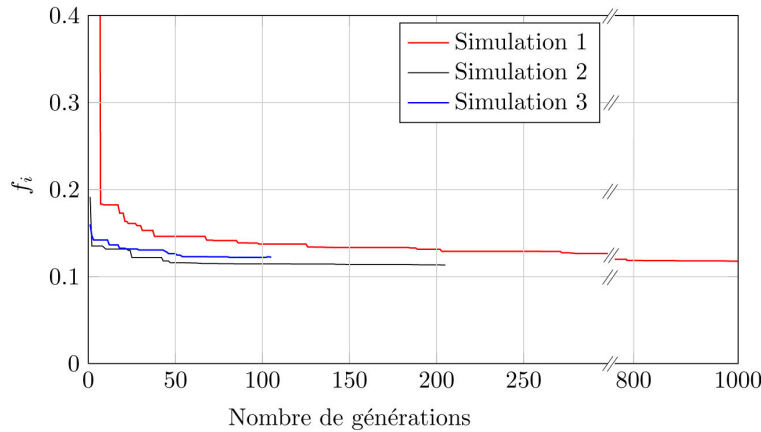


FIGURE 3.8 – Comparaison des convergences

Trois simulations sont réalisées avec la supercellule à 4 inclusions, faisant varier le nombre de générations et le nombre d'individus par génération (tableau 3.5). Le nombre d'individus total reste cependant le même (10000).

| Simulation       | 1    | 2   | 3   |
|------------------|------|-----|-----|
| Population init. | 10   | 50  | 100 |
| Nb. Générations  | 1000 | 200 | 100 |

TABLE 3.5 – Conditions de départ

| Simulation          | 1     | 2     | 3     |
|---------------------|-------|-------|-------|
| Temps de calcul (h) | 13,5  | 20    | 26    |
| $f_i$ (%)           | 11,77 | 11,32 | 12,22 |

TABLE 3.6 – Résultats obtenus à l'achèvement du processus d'optimisation

Les résultats (tableau 3.6) montrent que pour un même nombre d'individus, il existe une très grande différence de temps de calcul (environ 13 h entre les simulations 1 et 3). Il est également possible de voir sur la figure 3.8 que le point d'inflexion marquant le début d'une variation lente est atteint assez rapidement (moins de 50 générations dans chacune des simulations). Pour optimiser le temps de calcul, il peut être judicieux de s'arrêter après ce point, ceci permet alors d'obtenir un très bon compromis entre le temps de calcul et un résultat optimisé correct, mais dans le cas présent, nous cherchons à obtenir un raffinement plus important. Il est alors nécessaire de continuer l'optimisation sur un nombre plus important de générations.

D'après le tableau 3.6, les simulations menant aux meilleurs résultats sont les simulations 1 et 2, c'est-à-dire celles ayant le plus grand nombre de générations et étant les plus rapides.

La simulation 3 permet d'avoir une population initiale parcourant une large zone de solutions ; ce qui permet d'initier le processus avec un *fitness* assez bas (0.15), mais il n'est alors pas possible d'aboutir à la meilleure solution en seulement 100 générations. Cette configuration est donc inadéquate.

Malgré un bon résultat et le temps de simulation le plus court (13h30), la solution 1 est susceptible de présenter un biais important en ce qui concerne l'espérance mathématique nécessaire au bon fonctionnement du mécanisme de sélection au vu du trop petit nombre d'individus qui la compose (voir section 3.1.1.1).

### 3.1.4 Résultats d'optimisation

Deux tailles de cellules ont été testées, une cellule de 6x4 cm contenant 6 inclusions et une cellule de 4x4 cm contenant 4 inclusions. Chaque configuration comporte 2 cavités arrières. L'utilisation de ces deux tailles a pour but de mettre en évidence d'éventuels effets dus à une périodicité de 4 cm ou de 6 cm. Le nombre de variables discrètes étant important (26 pour 4 inclusions, 36 pour 6), la population initiale est fixée à 50 individus, évoluant sur 400 générations. La gamme de fréquence considérée est [100 – 6100] Hz échantillonnée sur 30 fréquences, ce qui représente un temps de calcul de plus de 48h.

La figure 3.9 montre la comparaison du coefficient d'absorption pour les deux configurations optimisées en comparaison à la mousse seule (Poreux seul) mais également à la première version de la supercellule (Supercellule 1) ramenée à une épaisseur de 4 cm. La multiplication des dimensions pour cette supercellule ne permet d'ailleurs pas de retrouver l'allure de la courbe obtenue pour une épaisseur de 2 cm et dégrade clairement le coefficient d'absorption par rapport à la mousse seule.

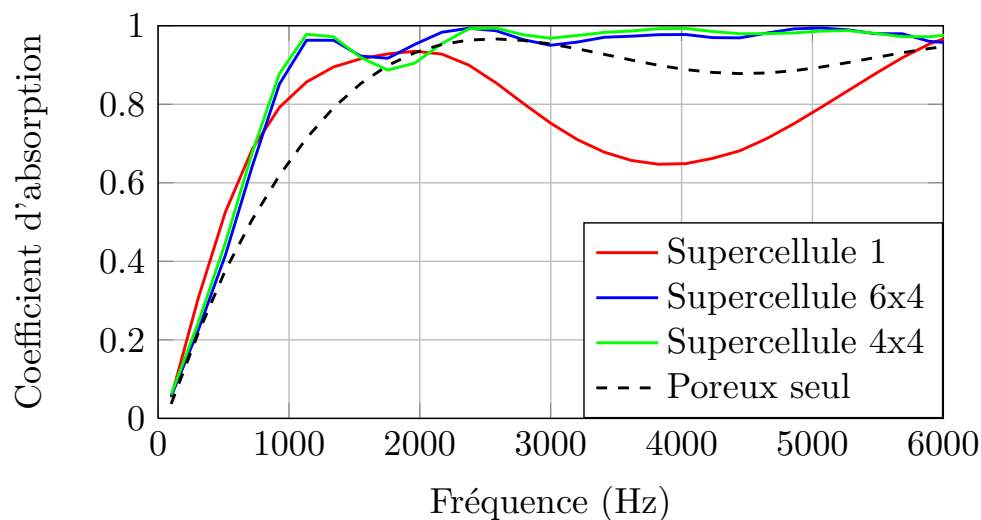


FIGURE 3.9 – Résultats d'optimisation de l'absorption acoustique pour une cellule de 4x4 et deux cavités arrières en incidence normale.

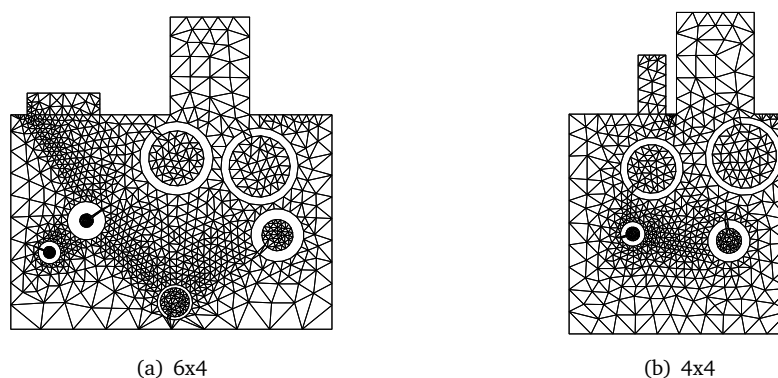


FIGURE 3.10 – Schéma de cellule unitaire obtenu par optimisation génétique pour une cellule de 4x4 et deux cavités arrières en incidence normale.

Les cellules optimisées absorbent plus de 89% du signal (81% pour la mousse seule et 75% pour la supercellule 1), en particulier autour de 1100 Hz (les géométries précédentes ne sont efficaces qu'autour de 2000 Hz) et repoussent les effets de Bragg à des fréquences proches de 10 kHz (voir figure 3.11).

Deux importantes remarques sont à faire en ce qui concerne les géométries obtenues (figure 3.10). Premièrement, pour les deux résultats, la majeure partie des inclusions se trouve concentrée près de la paroi rigide. Il existe alors une zone sans (ou avec peu) inclusion dans le premier tiers de la cellule. Ceci permet d'avoir une zone d'atténuation acoustique assez importante avant de faire intervenir les phénomènes de diffraction sur les inclusions. Les ondes diffractées susceptibles de ressortir du matériau sont donc beaucoup plus atténuées ce qui va diminuer les effets

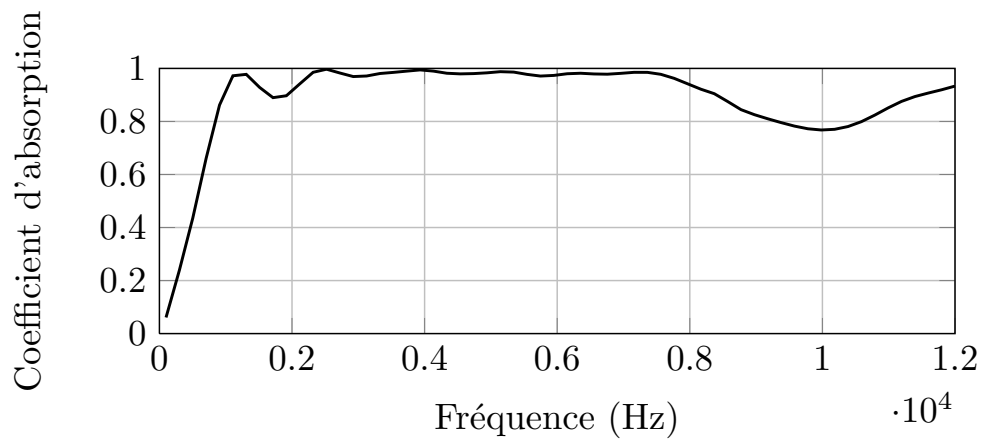


FIGURE 3.11 – Coefficient d'absorption tracé de 100 à 10 kHz de la supercellule optimisée 4x4, en incidence normale.

de Bragg.

Deuxièmement, la cavité arrière la plus grande est toujours partiellement obstruée par une ou plusieurs inclusions, avec au moins une fente débouchant dans la cavité. En obstruant l'ouverture des cavités, ces inclusions créent une sorte de résonateur dont le volume est égal à l'addition des volumes de la cavité arrière et de l'inclusion (voir figure 3.12), abaissant ainsi la fréquence de résonance de l'ensemble.

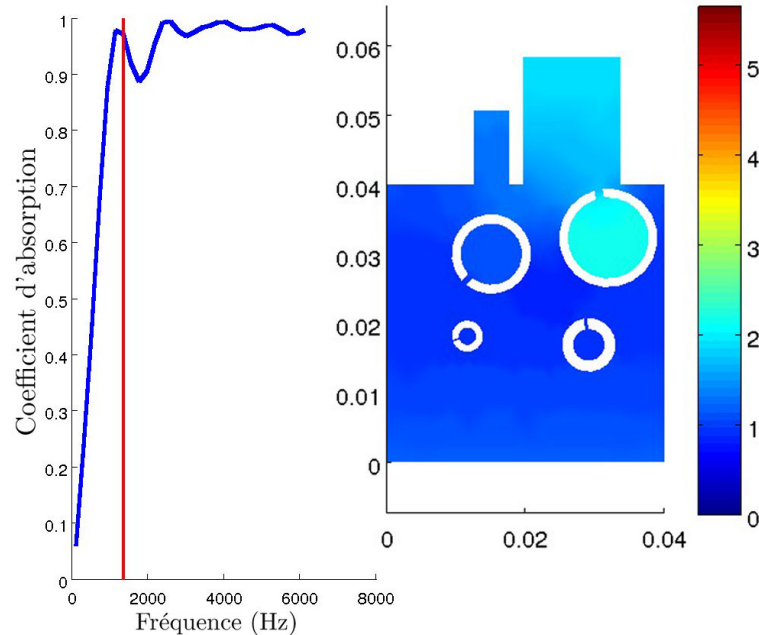


FIGURE 3.12 – Champ de pression tracé pour la fréquence 1650 Hz, fréquence de résonance de l'ensemble cavité arrière/splitring.

L'algorithme tente donc par lui même de créer des résonateurs ayant les fréquences les plus basses possibles. Pour améliorer encore davantage les performances du métaporeux, il peut être envisagé de remplacer les splitrings par d'autres géométries, telles que des résonateurs de Helmholtz. L'annexe 3 présente un article, soumis dans Appl. Phys. Lett. en juillet 2013 étudiant la réponse d'un métaporeux utilisant des résonateurs de Helmholtz 3D. Ces inclusions sont constituées d'une cavité cylindrique percée d'un trou et présentent l'avantage d'avoir une fréquence de résonance beaucoup plus basse fréquence que les résonateurs SR. Il est possible d'atteindre des fréquences de résonance de 500 Hz avec une inclusion de 1.6 cm de diamètre.

En règle générale, l'algorithme génétique joue sur la fréquence d'accord de chaque phénomène en les accordant à des fréquences assez proches les unes des autres pour exciter des modes couplés et garder le coefficient d'absorption très haut. Les phénomènes de mode piégé sont toujours visibles et leurs fréquences sont peu dépendantes de la géométrie de la cellule mais plutôt déterminées par la période (6 cm ou 4 cm). L'algorithme accorde alors les résonateurs et les cavités en fonction de la fréquence du mode piégé. L'aspect périodique rentre donc toujours en jeu mais de façon moins flagrante, il existe d'ailleurs très peu de différences entre les coefficients d'absorption des supercellules 6x4 cm et 4x4 cm malgré des géométries totalement différentes. Par la suite, seuls les résultats de simulations pour la cellule 4x4 cm seront utilisés mais le comportement reste exactement le même pour la cellule 6x4 cm.

### 3.1.5 Optimisation par angle d'incidence

Les phénomènes de résonance et de mode piégé sont assez peu dépendants de l'angle d'incidence ce qui fait de ces métamatériaux de très bon candidats pour des applications en champ diffus. La figure 3.13 montre l'évolution du coefficient d'absorption de la supercellule 4x4 cm en fonction de l'angle d'incidence (de  $\theta_i = 0^\circ$  pour l'incidence normale à  $\theta_i = 90^\circ$  pour l'incidence rasante). Après  $\theta = 70^\circ$ , le coefficient d'absorption chute de façon importante (moyenne de 0.2 pour le coefficient d'absorption en incidence rasante) mais auparavant, il est relativement constant et égal à 1.

Pour tenter d'améliorer les performances pour tous les angles, une nouvelle contrainte est ajoutée pour la fonction d'évaluation. Le coefficient d'absorption est alors calculé pour 3 angles d'incidence et la fonction d'évaluation devient :

$$\alpha'_i = \frac{1}{n_{freq}n_{angle}} \sum_{j=1}^{n_{angle}} \sum_{i=1}^{n_{freq}} A_i p_i, \quad (3.7)$$

avec  $p_i = 1$  et  $n_{angle} = [0, 85]$  les angles auxquels sont évalués les coefficients d'absorption. Ces angles sont choisis d'après la figure 3.14(b) montrant l'évolution de la moyenne du coefficient d'absorption en fonction de l'angle d'incidence. Deux angles sont choisis et seulement le dernier comporte un  $\alpha'_i$  faible permettant de prendre en compte la chute du coefficient d'absorption en incidence quasi-rasante, mais en évitant à cette contrainte d'influencer trop radicalement les performances aux autres angles.

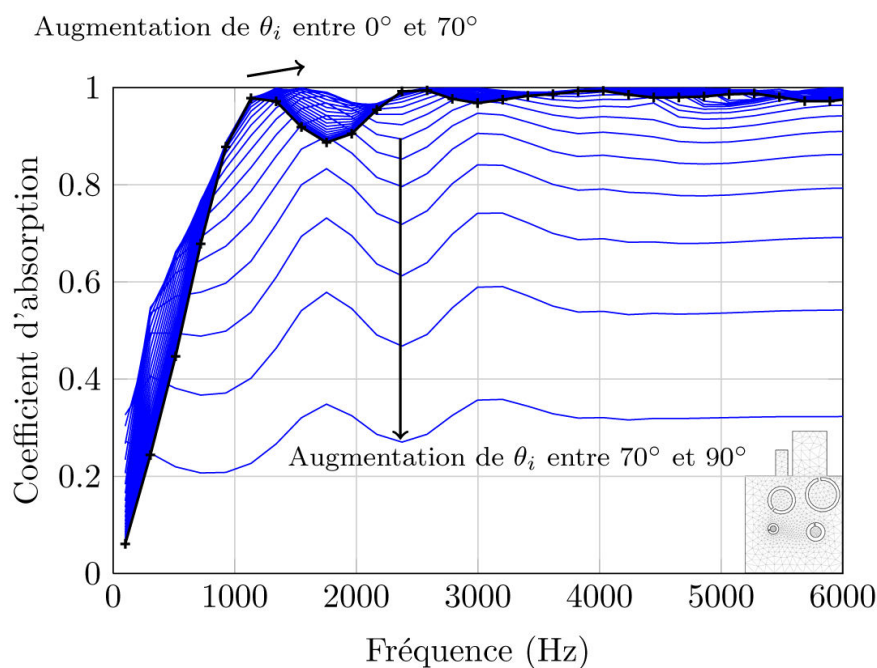


FIGURE 3.13 – Evolution du coefficient d'absorption en fonction de l'angle d'incidence

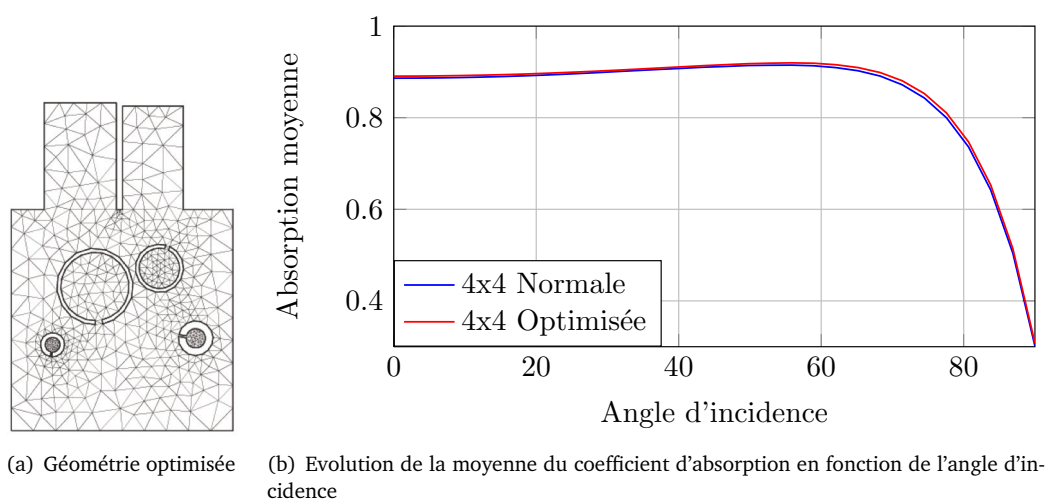


FIGURE 3.14 – Optimisation obtenue par la prise en compte de la variation du coefficient d'absorption en fonction de l'angle d'incidence.

D'après la figure 3.14(b) l'optimisation sur plusieurs angles améliore légèrement les résultats sur la moyenne du coefficient d'absorption. Les performances de la cellule 4x4 cm étant déjà très bonnes, il s'avère que le gain obtenu en ajoutant des contraintes reste très faible.

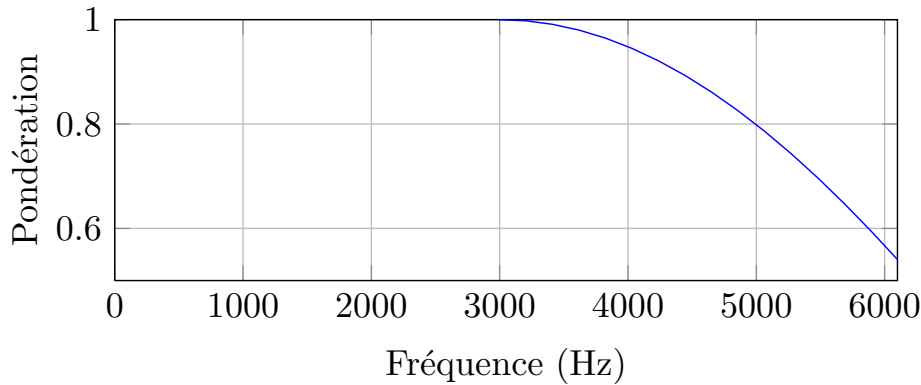


FIGURE 3.15 – Evolution de la fonction de pondération en fonction de la fréquence

### 3.1.5.1 Pondération basse fréquence

L'une des problématiques récurrente en ce qui concerne les matériaux poreux est de réussir à améliorer les performances acoustiques à basses fréquences et en particulier en dessous de la fréquence de Biot, c'est-à-dire dans le régime visqueux. Pour l'instant l'algorithme essaie d'obtenir le meilleur *fitness* sur la gamme [100,6100] Hz. Deux solutions permettent de privilégier le régime basse fréquence ; réduire la gamme de fréquence étudiée ou pénaliser la partie haute fréquence du coefficient d'absorption en ajoutant une pondération.

En réduisant la gamme de fréquence d'étude, le coefficient d'absorption basse fréquence peut être amélioré mais les performances à plus hautes fréquences sont totalement dégradées, comme le montre la figure 3.16 décrivant une optimisation réalisée pour une gamme de fréquence de [100,1000] Hz. Le meilleur compromis pour privilégier la partie basse fréquence du coefficient d'absorption pourrait alors être d'ajouter une pénalisation fréquentielle. Une fonction de pondération  $p$  est donc créée telle que (voir figure 3.15) :

Si  $F(n) < 3000\text{Hz}$  alors  $p = 1$ ,  
 si  $F(n) > 3000\text{Hz}$  alors  $p = \sin\left(\frac{p_i}{2} + \frac{n}{0.5n_{freq}}\right)$ .

Cette fonction de pondération permet de privilégier les fréquences en dessous de 3000 Hz, mais n'annule pas complètement l'importance du coefficient d'absorption entre 3000 et 6000 Hz.

La cellule obtenue par pondération est nettement moins performante que la cellule initiale (une moyenne d'absorption de 82%). Le coefficient d'absorption au dessus de 3000 Hz est dégradé et descend en dessous de 0.7 après 3000 Hz. La zone fréquentielle entre 1400 Hz et 2400 Hz est quant à elle, améliorée par rapport à la cellule initiale. Il est très difficile d'augmenter le coefficient d'absorption en dessous de 1000 Hz pour une plaque de métaporeux de 4 cm et les répercussions à plus hautes fréquences sont trop importantes pour être rentables.

Cette limite est liée aux fréquences de résonances des inclusions, en utilisant des inclusions pouvant résonner à des fréquences plus basses il est théoriquement possible de passer cette limite.

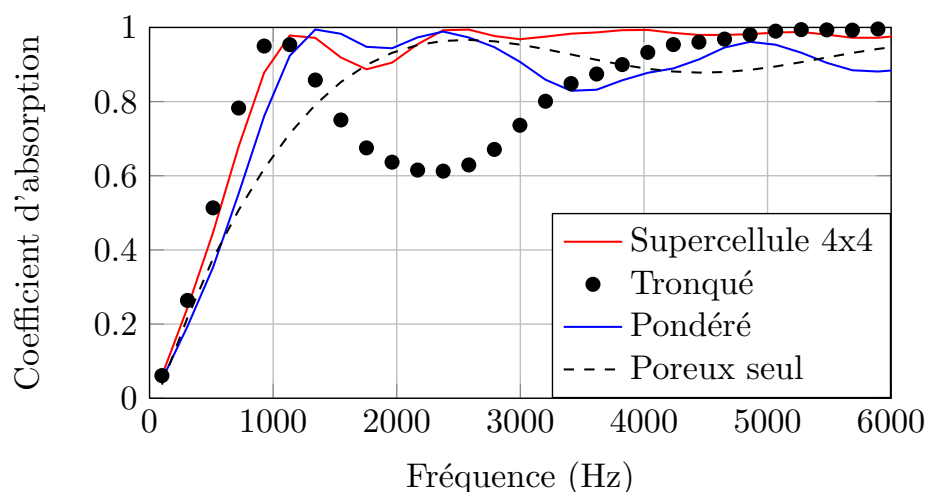


FIGURE 3.16 – Coefficient d’absorption de la cellule optimisée avec la fonction de pondération

### 3.2 Conclusion

Un algorithme d’optimisation génétique a été couplé au code éléments finis utilisé dans le chapitre précédent pour déterminer la géométrie donnant le meilleur coefficient d’absorption possible. Le paramétrage précis de l’algorithme a permis d’aboutir à des solutions absorbant près de 90% de l’énergie acoustique sur une gamme de fréquence allant de 100 Hz à 6000 Hz pour une cellule unitaire comportant 4 inclusions résonantes et 2 cavités arrières. L’épaisseur du matériau ainsi optimisé reste mince et ne fait que 4 cm. Les effets de Bragg sont quant à eux repoussés en dehors de la zone de fréquence étudiée et surviennent aux alentours de 10 kHz. La première phase de l’optimisation est menée en ne considérant qu’une onde plane en incidence normale. Malgré l’ajout de contraintes prenant en compte les coefficients d’absorption pour différents angles d’incidences, il n’est pas possible de trouver une géométrie ayant une efficacité indépendante de l’angle d’incidence. Malgré tout, la géométrie est telle que le coefficient d’absorption ne chute que lorsque l’onde est en incidence quasi-rasante.

Il existe également une limite basse fréquence pour la bande d’absorption totale qu’il n’est pas possible d’abaisser avec la géométrie actuelle sans dégrader les performances à plus haute fréquence. Une solution pour palier ce problème serait d’utiliser d’autres types d’inclusions telles que des cylindres carrés, triangulaires, ou encore des résonateurs de Helmholtz. Mais de par la nature 3D de ces derniers, le code de calcul éléments finis doit être réadapté pour tenir compte de la variation suivant l’axe  $x_3$ .

## CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce travail de thèse était d'étudier la façon dont les métamatériaux et en particulier des réseaux périodiques de diffuseurs résonants pouvaient être utilisés dans diverses applications acoustiques. Ce type de métamatériaux combine des effets de multidiffusions à des résonances basses fréquences augmentant significativement, les pertes en transmission ou le coefficient d'absorption.

Ainsi dans le premier chapitre, le coefficient de transmission d'un cristal sonore résonant en bambou est modélisé par simulation numérique, en utilisant deux méthodes différentes, la décomposition en onde plane et la méthode de diffusion multiple. L'utilisation combinée de ces deux méthodes permet de concevoir un cristal sonore expérimental à maille triangulaire, ayant une bande interdite pour des fréquences autour de 2000 Hz, avec une période de réseau de 9 cm et un rayon de diffuseur d'environ 2 cm. L'utilisation de diffuseurs naturels implique du désordre sur les rayons de chaque bambou inhérent aux matériaux naturels "bruts" mais n'influence que très peu la première bande interdite. Les différences sont visibles à plus haute fréquence, dans une zone hors de la bande fréquentielle étudiée. Le dispositif expérimental est alors transformé en cristal sonore localement résonant en perçant d'un trou chacune des cavités composant les cannes de bambous, les transformant en un empilement de résonateurs de Helmholtz. Un tel dispositif permet d'ajouter des pertes en transmission sur une bande d'environ 100 Hz, pour une fréquence centrale de l'ordre de 300 Hz, fréquence qui est rarement atteinte pour des cristaux sonores en matériaux naturels de cette dimension. La méthode de diffusion multiple a alors été modifiée pour tenir compte de ces résonances et s'avère donner des résultats en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Le cristal sonore en bambou permet donc d'avoir des pertes en transmission de l'ordre de 60% pour ce qui est des résonances et de 80% pour la bande interdite liée à la diffusion multiple.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'élaboration d'un cristal sonore à gradient de résonance, le but étant d'élargir la bande de perte en transmission liée aux résonances de façon importante. Le volume de chaque résonateur est modifié en insérant une quantité de sable déterminée en fonction de la ligne. Une bande liée à la résonance est toujours visible dans le coefficient d'absorption, atténuant l'onde incidente sur plus de 300 Hz. Cependant, malgré un pic atténuant près de 60% de l'onde incidente sur un intervalle de fréquence de 100 Hz, le reste de la bande n'en atténue que 20% en moyenne. Ce phénomène pouvant être expliqué par des résonateurs dont les fréquences ne sont plus assez proches pour exciter un mode couplé gardant la perte en transmission importante, mais également par le fait qu'aux fréquences de résonances considérées, le sable agit comme un matériau poreux, diminuant le facteur de qualité du résonateur. Enfin, les résonances d'ordre supérieur contribuent à augmenter encore les pertes

en transmission, notamment lorsqu'elles se trouvent dans la gamme de fréquence de la bande interdite, augmentant sa taille de façon conséquente. La modélisation des résonances supérieures dans la méthode de multidiffusion a permis de constater un bon accord au niveau des largeurs fréquentielles des bandes de pertes en transmission avec les résultats expérimentaux mais la modélisation de leur amplitude nécessiterait de prendre en compte la géométrie des résonateurs de façon plus fine.

Avec cette possibilité d'accorder les résonateurs en changeant leur volume interne, ce cristal sonore peut être un bon candidat pour des applications de type barrières antibruit routier, pouvant traiter des bruits à bande fréquentielle étroite. Pour des bruits plus large bande, le gradient de résonance pourrait être élargi jusqu'à atteindre la bande interdite et créer une très large bande couplée. D'autres types de gradient pourraient également être testés, comme une variation de la période spatiale ou la variation du rayon des diffuseurs et pourrait faire l'objet de futures études.

Le second chapitre traite de l'augmentation du coefficient d'absorption, d'une lame mince de poreux collée contre une paroi rigide, à l'aide d'un réseau périodique d'inclusions résonantes. Les inclusions étudiées sont des résonateurs splitrings ayant des fréquences de résonances en dessous de la résonance quart d'onde de la lame de poreux. À ces résonances s'ajoute l'effet du réseau périodique piégeant une partie de l'énergie sonore entre les inclusions et la paroi rigide, dans une zone basse fréquence. L'addition de tous ces phénomènes permet alors d'obtenir un pic d'absorption total à des fréquences inatteignables pour un matériau poreux seul même si son épaisseur est 10 fois supérieure à celle de cette lame de "métaporeux". À plus hautes fréquences ( $> 6$  kHz), des effets de Bragg sont également visibles, réfléchissant une grande partie de l'énergie sonore et diminuant le coefficient d'absorption en réflexion. Le comportement d'un tel dispositif a été déterminé théoriquement, numériquement, à l'aide d'un code éléments finis et validé expérimentalement. Il apparaît que le modèle théorique employé fait l'hypothèse de grandes longueurs d'ondes devant les dimensions de la lame poreuse et de ce fait, manque de précision après 2000 Hz, i.e. lorsque cette hypothèse n'est plus valable. Il ne permet donc pas de capturer les effets associés au mode piégé entre les inclusions résonantes et la paroi rigide mais permet néanmoins de déterminer la fréquence de résonance des inclusions. L'étude de l'influence de la géométrie de la cellule unitaire sur le coefficient d'absorption a mis en évidence la possibilité d'accorder la fréquence des résonateurs en fonction de leur orientation et a abouti à la conception d'une supercellule. En effet, l'impédance de rayonnement des résonateurs est liée à la présence ou non de la paroi rigide aux abords de la fente. Lorsque la paroi est proche de la fente, la fréquence de résonance baisse, ajoutant une correction de longueur au col du résonateur. En modifiant l'orientation de plusieurs inclusions dans une cellule unitaire, il est possible d'obtenir un coefficient d'absorption quasi total sur une bande de fréquence deux fois plus large qu'avec un réseau périodique résonant classique. Ce matériau peut donc être considéré comme un métamatériau poreux, dont les effets sont visibles en dessous de la fréquence de Biot, c'est-à-dire dans le régime visqueux. Ce genre de métaporeux permet donc d'obtenir une excellente absorption acoustique pour une épaisseur de matériaux beaucoup plus faible qu'avec des matériaux classiques et répond efficacement à l'un des problèmes majeurs rencontré dans l'industrie automobile et dans le bâtiment, à savoir l'encombrement.

L'idée de pouvoir optimiser la géométrie de la cellule unitaire pour obtenir une très large bande d'absorption totale est développée dans le troisième chapitre à l'aide d'un algorithme d'optimisation génétique. Cet algorithme est paramétré de façon à obtenir la meilleure solution pour un temps de calcul relativement court. Plusieurs fonctions de convergence rapide, telles que le nichage et le scaling permettent alors d'améliorer l'efficacité de la recherche des solutions.

Une géométrie de cellule unitaire, de 4 cm d'épaisseur, composée de deux lignes d'inclusions et de deux cavités arrières, permet maintenant d'absorber près de 90% de l'énergie acoustique d'un signal sur une bande de fréquence de 6 kHz avec un coefficient d'absorption total dès 1000 Hz. Les effets de Bragg sont également repoussés à plus hautes fréquences, puisqu'ils sont visibles aux alentours de 10 kHz mais ne dégradent pas le coefficient d'absorption de façon importante (le coefficient d'absorption est de 0.8 à la fréquence de Bragg). Ce coefficient d'absorption reste invariant pour un très grand nombre d'angle d'incidence mais se dégrade fortement lorsque l'onde est en incidence rasante. L'ajout de contraintes liées à l'angle d'incidence dans l'algorithme a montré qu'il n'était pas possible d'améliorer de façon significative le coefficient d'absorption en incidence rasante. Il n'est également pas possible de descendre la limite basse fréquence de la bande d'absorption totale car elle est liée aux fréquences de résonances des résonateurs. Les prochaines étapes pourraient être de remplacer les splitrings par d'autres types de géométries, telles que des cylindres carrés, triangulaires, des doubles splitrings ou des résonateurs de Helmholtz pour repousser encore les limites de l'absorption à très basse fréquence, pour des épaisseurs de matériaux extrêmement minces. Comme pour le chapitre 1, la volonté de créer des matériaux éco-responsables pourrait pousser les études futures à substituer les matériaux communément utilisés ici par des matériaux naturels. La laine de bois comme matrice poreuse et le bambou comme diffuseur résonant pourraient faire d'excellents candidats.

Ces travaux de thèse seront valorisés par la création d'une entreprise commercialisant des métaporeux acoustiques absorbants comportant des inclusions résonantes. Ce projet est porté par Emergence, l'incubateur du Maine et de la Sarthe. Dans ce cadre, diverses actions ont été menées durant l'année 2013, visant à poser les bases de la future société. Une enveloppe Soleau (n° 469554280113) et une déclaration d'invention ont été déposées durant le premier trimestre 2013. Un brevet est en cours de rédaction et sera déposé durant le troisième trimestre 2013. Un dossier pour le concours "création d'entreprise en émergence" organisé par l'OSEO et le ministère de la recherche a été déposé, malheureusement le projet n'a pas été retenu pour cette année. Il sera représenté, avec un complément technique en 2014.



## ANNEXES



# ANNEXE 1

Cette annexe traite de la propagation acoustique dans un cristal sonique 2D composé d'inclusions cylindriques carrées et en particulier des possibilités d'accordabilité d'un tel dispositif. En effet, de part leur forme carrée, la propagation acoustique à l'intérieur du cristal peut être modifiée en fonction de l'orientation des diffuseurs par rapport à la direction de l'onde incidente. La méthode de décomposition en ondes planes sera utilisée pour obtenir la structure de bande d'un tel système périodique en utilisant une approximation de supercellule. Le modèle de diffusion théorique d'un réseau périodique infini similaire est ensuite comparé et validé à l'aide d'un code éléments finis. L'utilisation de ce cristal comme de filtre fréquentiel spatial ou guides d'ondes est ensuite discuté et montre un bon accord entre les résultats expérimentaux et théoriques.

## **Tunable acoustic waveguides in periodic arrays made of rigid square-rod scatterers : Theory and experimental realization**

Authors : V. Romero-García , C. Lagarrigue, J.-P. Groby, O. Richoux, V. Tournat  
Published : Journal of Physics D : Applied Physics

### **Introduction**

Wave propagation through periodic structures is a subject of interest for several branches of science and technology such as water waves [12], seismology [69], acoustics [70, 71, 72] or electromagnetism [73, 74]. The most important property of such systems is perhaps the presence of band gaps, ranges of frequencies in which wave propagation is forbidden [75, 76, 8, 77]. Many interesting physical phenomena arise from this property such as wave localization [78, 79], excitation of evanescent waves [80, 81], as well as relevant applications concerning filtering [82] and wave guiding [83]. Therefore the control of the properties of the band gaps, specially the creation of large full band gaps, has been deeply analyzed [84] during the last years.

Band gaps in periodic structures appear at high symmetry points in the Brillouin zone due to the presence of a degeneracy of the band structure [8]. The most severe limit to increase the width of the band gap comes precisely from this degeneracy and, as a consequence, many approaches have been proposed to lift the band degeneracy and thus enlarge the band gaps [85, 86, 87]. In this sense, one possibility consists of reducing the total symmetry of the crystal in order to remove some band degeneracy, allowing the appearance of complete gaps [75]. An other possibility to enlarge band gaps comes from changing the shape of the scatterers. In this

way, some theoretical works have shown that for a given lattice symmetry, the width of the gap is the largest when the geometric symmetry of each scatterer is the same as that of the lattice which, incidentally, has the same symmetry as the first Brillouin zone [88]. For example, square-rod scatterers arranged following a 2D square unit cell have theoretically exhibited a progressive widening of the gap by increasing the rotation angle of these rods with respect to the lattice orientation [89]. Other theoretical works have used optimization techniques to improve the band structure by changing the shape of the scatterers, using for example fractal patterns [90]. Very recently, Bilal and Hussein [91] have reported several optimized unit-cell designs exhibiting record values of normalized band gap size for combined in-plane and out-of-plane elastic waves. Specially, they report a design with a normalized band gap width exceeding 60% for the case of combined polarizations. Finally, band gaps can be also tuned by anisotropic scatterers in an isotropic host medium [92].

Most of the previous works discussed above are purely theoretical but, recent works have shown the relevance in several branches of physics of the experimental validation of the properties of analogous systems [93]. In this work using acoustic waves we show accurate experimental proofs of the properties of the periodic arrays made of rigid square-rod scatterers and propose applications for guiding and spatial filtering of acoustic waves. Specifically, we experimentally and theoretically analyze and make use of the tunability of the band gap in such a periodic structures made of rigid square-rod scatterers embedded in air. Due to the enlargement of the band gap for determined angles of rotation of the scatterers we can design tunable waveguides for frequencies within the band gap by changing the rotation angles of the scatterers in determined paths inside the array. The dispersion relations, i.e., the band structure of the periodic medium [72, 8], have been obtained using the plane wave expansion (PWE) [94], whereas the scattering of waves in the finite periodic structures is analysed using finite element method (FEM) [95]. The approximation of supercell in the plane wave expansion is explicitly derived here for the case of square-rod scatterers and applied to analyze the case of waveguides. From the experimental point of view, a prototype made of 14 rows of 7 rigid square-rod scatterers is used to validate the theoretical predictions. Some applications in waveguiding as well as a spatial frequency filter based on the design of several waveguides with different guided frequencies are theoretically discussed in this work showing good agreement between experiments and proving the tunability of the system. In particular, the system could be used to improve the acoustic quality of music halls, and as a perspective as a superlens for audible sound.

The work is organized as follows. In Section 3.2 we present the theoretical tools used in this work, i.e., PWE with supercell approximation and the FEM. The experimental setup is presented in Section 3.2 and the motivating results are shown in Section 3.2. Section 3.2 shows both the theoretical and the experimental results of the spatial-frequency filters and waveguides analyzed in this work. Finally, the conclusions are presented in Section 3.2.

## Theoretical tools

In this Section we present the theoretical methods used to analyze a system composed of a 2D periodic arrangement of square-rod scatterers rotated by an angle  $\theta$  as shown in Fig. 17a. The scatterers are made of an isotropic solid  $A$ , embedded in an acoustic isotropic background  $B$ . The ratio between the area of the scatterer and the area of the unit cell is called filling fraction,  $f$ . For the case analyzed in this work, the lattice is made of rigid square-rod scatterers with side length  $l$ , embedded in a square periodicity with lattice constant  $a$ ; so the filling fraction is  $f = l^2/a^2$ .

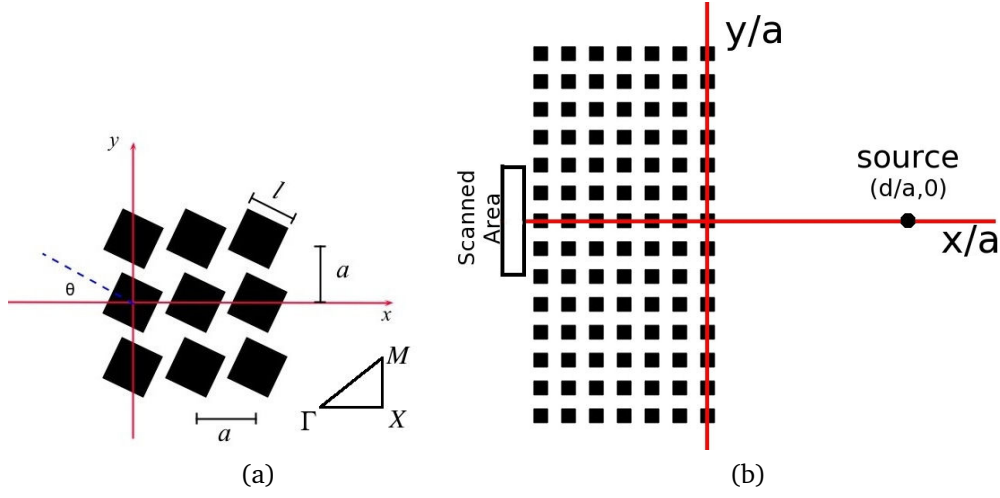


FIGURE 17 – (Color online) (a) Scheme of the system. The inset shows the first irreducible Brillouin zone of the 2D square periodicity. (b) Schematic view of the experimental set up. The scanned area depends on the experiment we analyze (see text for details).

### Plane wave expansion : Band structure

The medium considered in this work is invariant by translation in direction  $z$ , parallel to the symmetry axis of the scatterers, and exhibits a 2D periodicity in the transverse plane. By using this periodicity, it is possible to expand the physical properties of the medium in Fourier series and to use the Floquet-Bloch theorem to obtain the solution of the acoustic wave equation. Then, if these expansions in plane waves are substituted in the wave equation, one can obtain the following eigenvalue problem [94]

$$\sum_{\vec{G}'} ((\vec{k} + \vec{G}) \sigma_{\vec{k}}(\vec{G} - \vec{G}') - (\vec{k} + \vec{G}') p_{\vec{k}}(\vec{G}')) - \omega^2 \eta_{\vec{k}}(\vec{G} - \vec{G}') p_{\vec{k}}(\vec{G}') = 0, \quad (8)$$

where  $\vec{k}$  is the wave vector,  $\vec{G}$  is the 2D reciprocal-lattice vector,  $\omega$  the angular frequency and  $\sigma_{\vec{k}}(\eta_{\vec{k}})$  are the amplitudes of the Fourier component  $\vec{k}$  of  $\sigma = \frac{1}{\rho} = \sum_{\vec{G}} \sigma_{\vec{k}}(\vec{G}) e^{i\vec{G}\vec{r}}$  ( $\eta = \frac{1}{\rho c^2} = \sum_{\vec{G}} \eta_{\vec{k}}(\vec{G}) e^{i\vec{G}\vec{r}}$ ). It is usual to write that [94]

$$\beta_{\vec{k}}(\vec{G}) = \begin{cases} \beta^A f + \beta^B (1 - f) & \text{if } \vec{G} = \vec{0} \\ (\beta^A - \beta^B) F(\vec{G}, \theta) & \text{if } \vec{G} \neq \vec{0} \end{cases} \quad (9)$$

where  $\beta = (\sigma, \eta)$ , and  $F(\vec{G}, \theta)$  is the structure factor. For the case of square-rod scatterers of side  $l$  and angle of rotation  $\theta$  embedded in a square unit cell, the structure factor is

$$\begin{aligned}
F(\vec{G}, \theta) &= \frac{1}{A_{uc}} \int_{A_A} e^{-i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \\
&= f \operatorname{sinc}\left(\frac{\mathcal{G}_x l}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\mathcal{G}_y l}{2}\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

where,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}_x \\ \mathcal{G}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix}, \tag{11}$$

and,  $A_{uc}$  is the area of the unit cell,  $A_A$  is the area of the considered scatterer and  $i = \sqrt{-1}$ . For  $\vec{G}$  taking all the possible values, Eq. (8) constitutes a set of linear, homogeneous equations for the eigenvectors  $p_{\vec{k}(\vec{G})}$  and the eigenfrequencies  $\omega(\vec{k})$ .

Equation (8) can be expressed by the following matrix formulation

$$\sum_{i=1}^3 \Gamma_i \Sigma \Gamma_i P = \omega^2 \Omega P, \tag{12}$$

where  $i=1,2,3$ . The matrices  $\Gamma_i$ ,  $\Sigma$  and  $\Omega$  are defined as

$$(\Gamma_i)_{mn} = \delta_{mn}(k_i + G_i^m), \tag{13}$$

or in the developed form,

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} k_i + G_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_i + G_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & k_i + G_i \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma(\vec{G}_1 - \vec{G}_1) & \dots & \sigma(\vec{G}_1 - \vec{G}_{N \times N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(\vec{G}_{N \times N} - \vec{G}_1) & \dots & \sigma(\vec{G}_{N \times N} - \vec{G}_{N \times N}) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \eta(\vec{G}_1 - \vec{G}_1) & \dots & \eta(\vec{G}_1 - \vec{G}_{N \times N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(\vec{G}_{N \times N} - \vec{G}_1) & \dots & \eta(\vec{G}_{N \times N} - \vec{G}_{N \times N}) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$P = \begin{pmatrix} P(\vec{G}_1) \\ \vdots \\ P(\vec{G}_{N \times N}) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

where  $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3) = (2\pi m/a, 2\pi n/a, 0)$ . If  $m = n = (-M, \dots, M)$ , the size of the previous matrices is  $N \times N = (2M + 1) \times (2M + 1)$ .

By solving the system given in Eq. (12) for each Bloch vector in the irreducible area of the first Brillouin zone,  $N \times N$  eigenvalues  $\omega^2$ , are obtained and they can be used to represent the band structure  $\omega(\vec{k})$ .

### Supercell approximation.

In this approximation one considers an arrangement with primitive lattice vectors  $\vec{a}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Generally the supercell consists of a cluster of  $n_1 \times n_2 \times n_3$  scatterers periodically placed in space. If we treat the supercell as the unit cell of the system, the primitive lattice vectors in the supercell approximation can be defined as  $\vec{a}'_i = n_i \vec{a}_i$ , and the complete set of lattices in the supercell approximation is  $\{R' | R' = m_i \vec{a}'_i\}$ , where  $n_i$  and  $m_i$  are integers. The primitive reciprocal vectors are then

$$\vec{b}'_i = 2\pi \frac{\varepsilon_{ijk} \vec{a}'_j \times \vec{a}'_k}{\vec{a}'_1 \cdot (\vec{a}'_2 \times \vec{a}'_3)}, \quad (18)$$

where  $\varepsilon_{ijk}$  is the three-dimensional Levi-Civita completely anti-symmetric symbol. The complete set of reciprocal lattice vectors in the supercell is  $\{\vec{G} | \vec{G}_i = N_i \vec{b}'_i\}$  where  $N_i$  are integers. The reciprocal vectors represent the periodicity of the array in the reciprocal space. So, they depend on the periodicity of the unit cell, then for the case of the supercell one should define them taking into account all the scatterers in the supercell. Without loss of generality, the following formulation is constrained to 2D systems.

With the previous definition of the supercell, the equivalent expression to Eq. (9) for the case of the supercell approximation is shown here. The filling fraction of a square-rod scatterer in a supercell is  $f^S = l^2/A$ , where  $A$  is the area occupied by the supercell. If we consider a supercell with  $N$  square-rod scatterers organized in an array of size  $n_1 \times n_2$  then

$$\beta_{\vec{k}}(\vec{G}) = \begin{cases} \beta^A N f^S + \beta^B (1 - N f^S) & \text{if } \vec{G} = \vec{0}, \\ (\beta^A - \beta^B) F^S(\vec{G}) & \text{if } \vec{G} \neq \vec{0}, \end{cases} \quad (19)$$

where  $F^S(\vec{G})$  is the structure factor of the supercell. It is worth noting that in Eq. (19) one takes into account the total number of scatterers in the supercell,  $N$ , in such a way that for  $N = 1$ , Eq. (19) reproduces Eq. (9).

In this approximation, the structure factor of the supercell has to be computed accounting for its size. If we consider a 2D array of scatterers with a supercell  $n_1 \times n_2$ ,  $n_i$  being an odd number, the structure factor is expressed by

$$F^S(\vec{G}, \theta) = \sum_{i=-\frac{(n_1-1)}{2}}^{\frac{(n_1-1)}{2}} \sum_{j=-\frac{(n_2-1)}{2}}^{\frac{(n_2-1)}{2}} e^{i(a|\vec{G}_1| + ja|\vec{G}_2|)} F(\vec{G}, \theta), \quad (20)$$

where  $F(\vec{G})$  is given by Eq. (10) substituting  $f$  by  $f^S$ .

The interest of the supercell approximation in the plane wave expansion is the possibility to analyze point defects or waveguides in the structure [96, 97]. We consider now the case in which several point defects are created in periodic structures. Point defect can be understood as vacancies or square-rod scatterers with different side length,  $l$ , or with different rotating angle  $\theta$ . Then, if the supercell presents  $N_p$  defects at the sites labelled by  $(n_s, m_s)$  in the periodic system, with  $s = 1, \dots, N_p$ , each one having a side length  $l_s$ , and a rotating angle  $\theta_s$ , then the Fourier coefficients of the expansion of the physical parameters involved in the problem satisfy

the following equation

$$\beta_{\vec{k}}(\vec{G}) = \begin{cases} \beta_{\vec{k}}^A((N - N_p)f^S + f_{defect}) + \\ + \beta_{\vec{k}}^B(1 - ((N - N_p)f^S + f_{defect})) & \text{if } \vec{G} = \vec{0}, \\ (\beta_{\vec{k}}^A - \beta_{\vec{k}}^B) F^S(\vec{G}, \theta, \theta_s) & \text{if } \vec{G} \neq \vec{0}, \end{cases} \quad (21)$$

where,  $f_{defect} = \sum_{s=1}^{N_p} l_s^2/A$ . Notice that if we consider  $l_s = 0 \forall s$ , Eq. (21) becomes the case in which the defects are vacancies. The structure factor of such a supercell with  $N_p$  point defects is

$$\begin{aligned} F^S(\vec{G}, \theta, \theta_s) &= \left( \sum_{i=-\frac{(n_1-1)}{2}}^{\frac{(n_1-1)}{2}} \sum_{j=-\frac{(n_2-1)}{2}}^{\frac{(n_2-1)}{2}} e^{i(a|\vec{G}_1| + j a |\vec{G}_2|)} \right) F(\vec{G}, \theta) \\ &- \left( \sum_{s=1}^{N_p} e^{i(n_s a |\vec{G}_1| + m_s a |\vec{G}_2|)} \right) F(\vec{G}, \theta) \\ &+ \sum_{s=1}^{N_p} \left( e^{i(n_s a |\vec{G}_1| + m_s a |\vec{G}_2|)} \right) F(\vec{G}, \theta_s). \end{aligned} \quad (22)$$

Notice that the last term of Eq. (22) takes into account the presence of the defect, thus the structure factor [Eq. (10)] should be calculated using  $f_{defect}$ .

By introducing the previous expressions in the matrix formulation of the PWE, Eq. (12), the band structure of a periodic structure with and without defects using the supercell approximation can be calculated. The condition to apply the supercell approximation is that the defect interactions must be negligible between the neighbouring supercells. As a consequence, the size of the supercell should be large enough to place the defects sufficiently separated over consecutive supercells.

### Finite elements method

The scattering of waves in finite structures in an unbounded domain is solved in this work using FEM. In this kind of problems the Sommerfeld condition is analytically accomplished by the solutions of the problems. This basically assumes that no wave is reflected from infinity, and the solutions of these problems are called radiating solutions. Using FEM it is only possible to obtain some approximation of the radiating solutions in unbounded domains by applying some artificial boundaries in the numerical domain. Several techniques can be used for this purpose [95]. Among them the one of the perfectly matched layers (PML) [98] has been used here. PML have been applied to different cases based on the scalar Helmholtz equation [99], acoustics [100], elasticity [101], poroelastic media [102], water waves [103], and other hyperbolic problems [104], etc. Here, the interest is focused on the wave propagation in time-harmonic scattering problems for linear acoustics, i.e., on the scalar Helmholtz equation. It is worth noting here that the scatterers are considered rigid, so hard-wall (Neumann) boundary conditions have been assumed in the surfaces of the scatterers.

### Experimental setup

The experimental results have been obtained in the anechoic chamber of LAUM (Laboratory of Acoustics at University of Maine). The experimental prototype consists of a  $14 \times 7$  array of

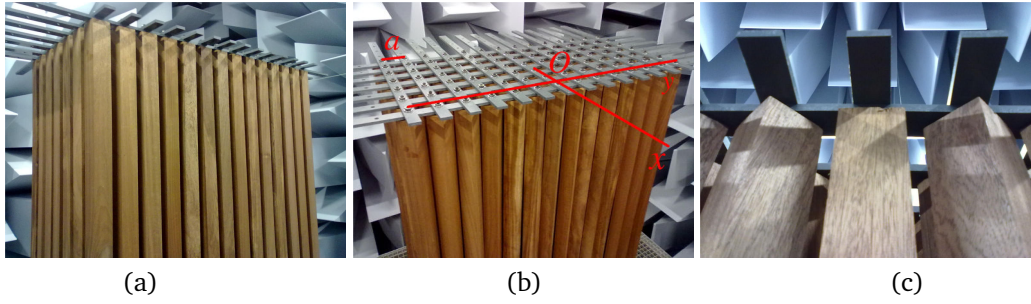


FIGURE 18 – (Color online) Experimental setup. Array made of rigid square-rod scatterers rotated by  $0^\circ$  (a) and  $45^\circ$  (b). Scatterers are 2 m long with a side length  $l = 5$  cm. One can also see the details of the fastening system of the array. (c) Waveguide in the array made of square-rod scatterers rotated by  $45^\circ$ . The waveguide is generated by rotating one of the rows to  $0^\circ$ . The array has a square periodicity  $a = 7.5$  cm, and its size is  $14 \times 7$  scatterers. The source is placed 1.5 m away from the array.

acoustically rigid square-rod scatterers made of wood, located on a square lattice with constant  $a = 7.5$  cm (see Fig. 18b). The scatterers have a side length  $l = 5$  cm ( $l/a = 0.67$ ), therefore the filling fraction of the system is  $f = l^2/a^2 = 0.44$ . The scatterers are 2 m long, which is much bigger than the lattice constant and than the wavelength of the interest of this work, so the system can be fulfilled considered as 2D. The source has been placed at a distance  $d = 1.5$  m ( $d/a = 20$ ) away from the array in order to send a plane wave to the periodic array.

Figure 17b shows the schematic view of the experimental setup and Fig. 18 shows the pictures of three systems experimentally analyzed in this work. Figures 18a and 18b correspond to the cases of complete periodic structures with the square-rod scatterers rotated by  $\theta = 0^\circ$  and  $\theta = 45^\circ$  respectively. Figure 18b shows the details of the fastening system of the array as well as the system of coordinates considered in this work. The picture of the array used to analyze the case of the waveguide can be observed in Fig. 18c, in which one row of the array is rotated to  $0^\circ$  while the rest of the scatterers in the array are rotated to  $45^\circ$ .

All the acoustic measurements are performed using a microphone B&K 1/4" type 4135. The movement of the microphone in the anechoic chamber is controlled by a 1D robotized arm (Zaber LSQ) designed to move the microphone over a 1D trajectory in steps of 1 cm. The acquisition of the acoustic signal and the movement of the robotized arm are controlled by an Stanford SR 785 and Octave. Once the robotized system is turned off, the acoustic source generates a swept sine signal and the microphone detects it. The analyzer provides the FFT information (module and phase for each frequency).

## Motivating results : Complete structures

In this Section, we theoretically and experimentally analyze the dispersion relation, specially the band gaps, of a square array of rigid square-rod scatterers embedded in air ( $\rho_{air} = 1.29$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_{air} = 340$  m/s) depending on the angle of rotation of the scatterers. To avoid the overlapping between neighbour scatterers once they are rotated, the maximum length of the side of the square cross section should be  $l = a/\sqrt{2}$ . The filling fraction of the structure theoretically analyzed in this Section coincides with that of the prototype, i.e.,  $f = l^2/a^2 = 0.44$ . We

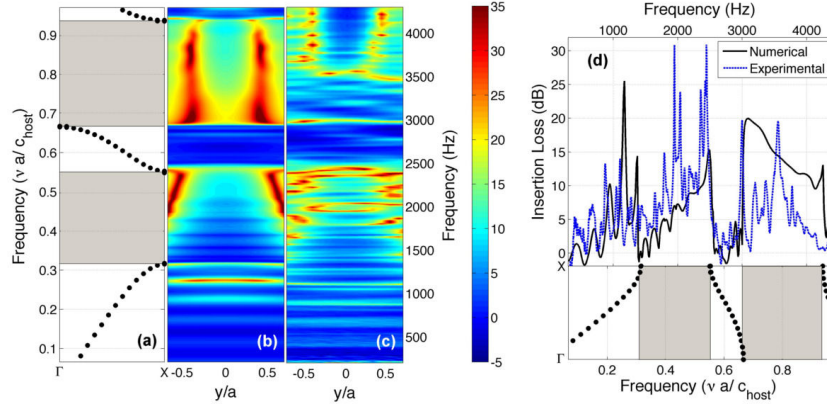


FIGURE 19 – (Color online) Numerical and experimental analysis of the propagation through an array made of square-rod scatterers rotated  $0^\circ$  along the  $\Gamma X$  direction. (a) Band structure calculated using PWE. (b) Numerical and (c) experimental frequency- $y$  map, evaluated at point  $x/a = -8.67$  from the array. (d) Comparison of the spectra evaluated at  $(x/a, y/a) = (-8.67, 0)$ . Black continuous (Blue dashed) line represents the numerical (experimental) Insertion Loss spectrum. The lower panel shows the band structure for an easy comparison.

present the results using normalized units, i.e., normalized distances,  $(x/a, y/a)$ , and normalized frequencies,  $\nu a / c_{\text{host}}$ . Notice that the experimental results shown in this Section constitute an accurate experimental study of the properties of 2D arrays made of square-rod scatterers due to the fact that the working frequencies of this work are less than a 10% of the length of the scatterers, therefore the 2D approximation should be well fulfilled with a better accuracy than in previous works [105].

As it has been theoretically shown in previous works [89], the band structure of square-rod scatterers is extremely depending on the angle of rotation of the scatterers. One can go from the situation without full band gap to the case with large full band gap just by rotating the scatterers of the array. These peculiar band structure have been used in both photonics and acoustics in order to substantially improve the band gaps in two-dimensional (2D) lattices. It has been shown that for square lattices, the largest absolute band gap using square-rod scatterers is wider than for the case of circular-rods [88]. Then, by means of simply rotating the square-rods, the scattering sections change and one can also manipulate the refraction properties of the system. Feng et al. [106] observed that one can change from positive to negative refraction in these systems and thus produce a tunable acoustic superlens by rotating the scatterers [105]. These results show an effective method to control wave propagation in not only sonic crystals, but also other periodic structures, such as light in photonic crystals or water waves propagating through periodic rods.

At this stage we would like to show the accurate experimental validation of the tunability of the band gaps of this system. We analyze how the properties of the array can be drastically changed by rotating the square-rod scatterers and therefore without changing the lattice constant or the filling fraction. We study the particular cases of  $\theta=0^\circ$  and  $\theta = 45^\circ$ . We then compare the band structure calculated using the PWE method with the numerical and experimental attenuation spectra of the finite structure. The attenuation spectrum is characterized in this work by

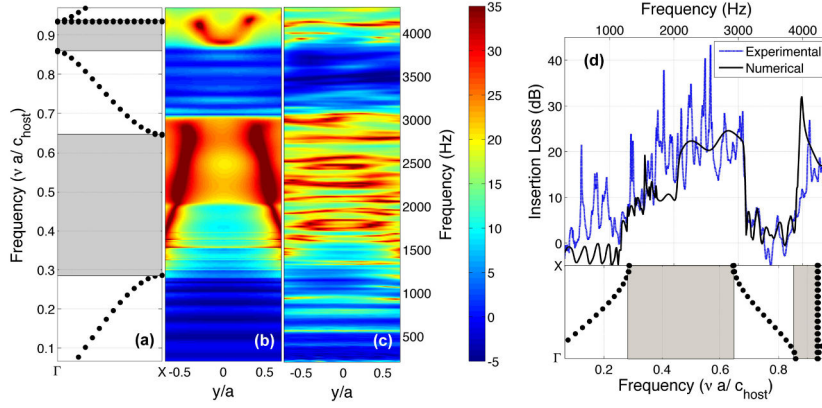


FIGURE 20 – (Color online) Numerical and experimental analysis of the propagation through a SC made of square-rod rotated  $45^\circ$  along the  $\Gamma X$  direction. (a) Band structure calculated using PWE. (b) Numerical and (c) experimental frequency-y map, evaluated at point  $x/a = -8.67$  from the crystal. (d) Comparison of the spectra evaluated at  $(x/a, y/a) = (-8.67, 0)$ . Black continuous (Blue dashed) line represents the numerical (experimental) Insertion Loss spectrum. The lower panel shows the band structure for an easy comparison.

means of the Insertion Loss ( $IL$ ) defined as

$$IL = 20 \log_{10} \left( \frac{|p_{incident}|}{|p_{incident} + p_{scattered}|} \right), \quad (23)$$

where  $p_{incident}$  is the direct wave from the source and  $p_{scattered}$  is the scattered field by the array of square-rod scatterers, both fields evaluated in the same point. From the experimental point of view, we consider  $|p_{incident}|$  as the amplitude of the wave measured without the array and  $|p_{incident} + p_{scattered}|$  the amplitude measured with the inserted array of square-rod scatterers.

Figures 19 and 20 show the comparison between the theoretical and experimental results for the cases of complete structures which scatterers are rotated  $0^\circ$  and  $45^\circ$  respectively. The band structures along the  $\Gamma X$  direction are shown in the (a) panels of Figs. 19 and 20. The scattering problem has been analyzed in several points behind the structure. The IL spectrum has been calculated in the transversal sites  $y/a = [-0.8, 0.8]$  at  $x/a = -8.67$  (see Fig. 18b to see the coordinate system). The (b) panels of Figs. 19 and 20 show the IL frequency- $y/a$  map obtained using FEM. In this map, each vertical line represents the IL spectrum for a given position  $(x/a, y/a)$ . Panels (c) of Figs. 19 and 20 show these experimental results. In the (c) panels the vertical axis shows the frequencies in Hz taking into account the lattice constant of the prototype and the sound velocity in the host (air). Then, one can compare normalized and real values in the same plot. Finally, panels (d) of Figs. 19 and 20 show the IL spectrum for the central point  $(x/a, y/a) = (-8.67, 0)$ . Black continuous line represents the numerical predictions and blue dashed line represents the experimental results in the anechoic chamber. To have a clear comparison, we have also added the band structure in the bottom of the panels (d) of Figs. 19 and 20.

The case of  $\theta = 0^\circ$  does not present a full band gap (see Refs. [88, 89, 105]), however the band structure (see Fig. 19a) reveals two band gaps at  $\Gamma X$  direction between normalized fre-

quencies 0.3157 (1431 Hz, experimentally) and 0.5529 (2506 Hz), and between 0.6653 (3016 Hz) and 0.9375 (4250 Hz). Between these two band gaps, a propagating band can be observed. The comparison between the band structure, Fig. 19a, and the numerical frequency- $y/a$  IL map, Fig. 19b, shows agreement in the sense that in the range of frequencies where a band gap is predicted by the band structure, a range of attenuated frequencies appears in the case of the finite structure. It is worth noting that the attenuation is a function of the measurement point, but in average the band gaps appear in the range of frequencies predicted by the band structure. The propagating band is also well reproduced by the finite structure in agreement with the PWE predictions.

In Fig. 19c one can observe the frequency- $y/a$  IL map measured in the anechoic chamber. Similar behaviour of the attenuation in the experimental results can be seen by comparing with the numerical predictions in Fig. 19b. Due to the finite size of the structure one can also observe the presence of the well-known Fabry-Pérot resonances [107, 8], which are the effect of the multiple reflections inside the finite size crystal between the two interfaces. Figure 19d shows both the theoretical and experimental IL spectrum at central point  $(x/a, y/a) = (-8.67, 0)$ . Two band gaps and the transmission band are observed. Moreover one can notice the presence of attenuated frequencies in the first propagating band. This is due to the refractive behaviour of the device at these ranges of frequencies, producing attenuation at the measurement point, but without presence of a bandgap.

For the case of  $\theta = 45^\circ$ , Fig. 20, different properties than in the case of  $\theta = 0^\circ$  are predicted by the band structure (see Refs. [88, 89, 105]). For this structure a complete band gap is observed in the  $\Gamma X$  direction between frequencies 0.286 (1295 Hz) and 0.6463 (2930 Hz), and a second band gap at higher frequencies between 0.8575 (3887 Hz) and 0.936 (4243 Hz) is predicted. Notice that for this case the band gap at  $\Gamma X$  direction is wider than in the case of  $\theta = 0^\circ$ . Between them propagating band wider than in the case of the  $\theta = 0^\circ$  is observed. Figure 20b shows the frequency- $y/a$  IL map for the case of  $\theta = 45^\circ$  while Figure 20c shows the measurements of the IL map in the anechoic chamber. Figure 20d shows both the theoretical and experimental IL spectrum for the central point  $(x/a, y/a) = (-8.67, 0)$  in the case of  $\theta = 45^\circ$ . The black line represents the numerical predictions and the blue dashed line shows the experimental results in very good agreement.

A good agreement between the properties theoretically predicted by the band structure and the attenuation properties numerically obtained using the finite structure is observed for the cases of  $\theta = 0^\circ$  and  $\theta = 45^\circ$  (Figs. 19 and 20 respectively). The differences between the numerical predictions and the experimental results could be the result of the errors in the positioning system, of the small curvature of the square-rod scatterers used in the prototype which are not perfectly straight (a relative error in the worst cases up to 12% at  $0^\circ$  and up to 70% at  $45^\circ$ ) and also due to the fact that in the experimental situation a non perfectly plane wave impinges the crystal.

## Results : Waveguides

### Simple waveguides

In this Section the case of a waveguide in the 2D lattice of square rod scatterers rotated by  $45^\circ$  is considered. The linear defect is generated by rotating the scatterers of a row with  $\theta \neq 45^\circ$  creating consequently a linear defect. Figure 21(a) shows a general scheme of the waveguide considered in this Section. Figure 18c shows the experimental setup for the case in which the

angle of the linear defect is  $\theta_{defect} = 0^\circ$ .

Using the PWE with the supercell approximation, explicitly shown in Section 3.2, the propagation properties of a 2D array made up of square-rod scatterers with a linear defect is analyzed in this Section. The supercell has a size of  $1 \times 5$  scatterers with the linear defect in the middle. Figure 21a shows the supercell considered for the calculations. This supercell is long enough to avoid the interaction between the localized modes in neighbors linear defects. The complete structure is made of square-rod scatterers with  $l = 0.67a$  and rotated  $\theta = 45^\circ$  in order to have a complete band gap. Therefore, conditions to enable guidance in linear defects at frequencies within the band gap are fulfilled.

From a general point of view, the linear defect could be created by introducing a row of square-rod scatterer with a different side length,  $l_{defect}$ , and a different angle of rotation,  $\theta_{defect}$ . Figure 21b shows the general theoretical analysis of the dependence of the guided frequency on both the side length  $l_{defect}/a$  and the angle of rotation of the linear defect,  $\theta_{defect}$ . We particularize here for the case in which the side length of the scatterers of the linear defect is  $l_{defect}/a = l/a$ , i.e. the same ratio as the square-rod scatterers of the complete structure. Then, only by rotating the row that constitutes the linear defect, the guided frequency propagating through the waveguide can be tuned. Figure 21c shows the dependence of the guided frequency for this case on the angle of rotation of the square-rod scatterer. Notice that all the frequencies represented in the Fig. 21c belongs to the band gap at each angle of rotation.

Figure 21d shows the Sound Pressure Level (SPL) map for the cases where the scatterers of the linear defect are rotated  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  and  $40^\circ$  (from the up to the bottom of the panel respectively). The guided frequencies correspond to the frequencies obtained by PWE with supercell approximation in Fig. 21c. Between  $0^\circ$  and  $30^\circ$  there is propagation because the guided band is isolated inside the band gap. However, for larger angles, the propagating band is at the same frequency as the band gap edge, and the corresponding Bloch mode is excited inside the structure.

Figures 21e and 21f show the cuts along the  $x$  and  $y$  axis for each rotating angle of Fig. 21d. Colored lines represent the SPL profile in each direction. In Fig. 21f one can see a maximum value of SPL at point  $y/a = 0$  for the waveguides which angles are between  $0^\circ$  and  $30^\circ$ . At these angles the guided mode is confined in the waveguide. However, at  $40^\circ$  although the SPL is higher, it is not confined at the waveguide because the mode is very close to the propagating mode in the second band.

For the comparison between theoretical predictions and experimental results we particularize for the case where the scatterers in the linear defect are rotated  $0^\circ$ . If we consider that the linear defect is generated along the  $x$  axis and the origin of coordinates is as shown in Fig. 18b, then we have measured and simulated the SPL spectrum at point located in  $x/a = -8$  and along the trajectory  $y/a = [-2, 2]$ .

Figure 22a shows the band structure for this particular case with the red dots showing the guided mode inside the bandgap at normalized frequency 0.627 (2841 Hz). In order to clearly see the wave guidance along this linear defect, we plot in Figs. 22b and 22c the experimental and numerical SPL maps respectively. Each vertical line shows the SPL spectrum for a given  $y/a$  point. The maximum value of SPL at the frequency of guidance is observed at the point  $y/a = 0$ . The color scale shows the SPL. It is worth nothing that in the experimental map the values of frequency are not normalized, therefore one can compare the real case with the theoretically predicted. Figure 22d shows both the experimental and numerical SPL profiles along the measured points in the  $y/a$  axis at the guidance frequency. The blue continuous line represents the numerical predictions whereas the red dashed line shows the experimental values. Good agreement

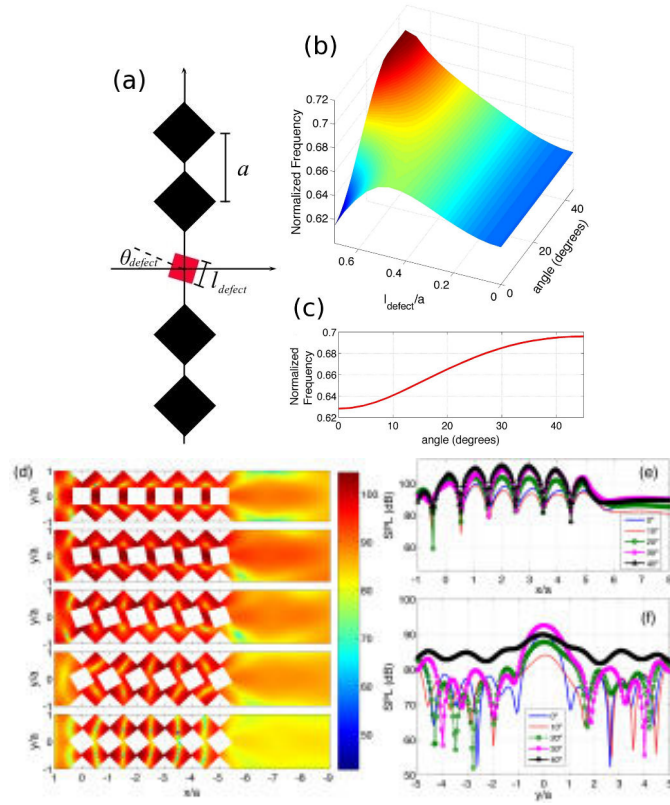


FIGURE 21 – (Color online) (a) Scheme of the supercell considered for the analysis of the waveguides. (b) General analysis of the frequency dependence of the guided mode on both the ratio  $l_{\text{defect}}/a$  and the rotating angle  $\theta$ . (c) Dependence of the frequency of the guided mode for the case analyzed in this work,  $l_{\text{defect}}/a = l/a = \sqrt{f}$ . (d-f) FEM simulation of the scattering problem by a finite structure made of  $14 \times 7$  square-rod scatterers, in which the central row of cylinders has been rotated. (d) Sound Pressure Level (SPL) maps for several rotating angles of the central row. ( $0^\circ$  (upper panel),  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$  (lower panel)). (e) Longitudinal cut along the line  $x/a$  at  $y/a = 0.5$ , between the central row and the next one. (f) Transversal cut behind the crystal at  $x/a = -8$  along the line  $y/a$ . Each colored line represents the SPL for a determined rotating angle of the linear defect.

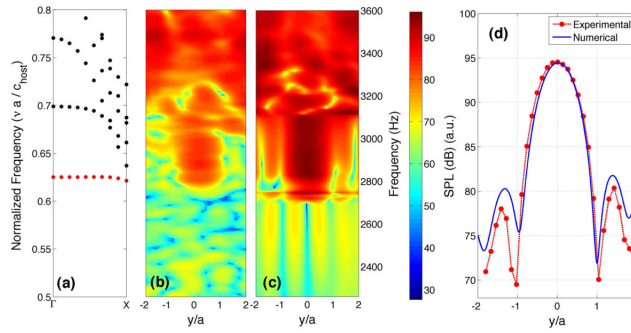


FIGURE 22 – (Color online) Numerical and experimental results of the waveguide made by rotating the scatterers of a row at  $0^\circ$ . (a) Band structure. Red dots represent the guided mode inside the band gap. (b) and (c) show the SPL measured and numerically simulated spectra for the several points along the  $y$  axis ( $y/a = [-2, 2]$ ) at  $x/a = -8$ . (d) SPL Profile at  $x/a = -8$  at the guided frequency, 2841 Hz. Blue continuous line represents the numerical predictions and dashed red line shows the experimental results.

between the theoretical predictions and the experimental results is achieved.

### Spatial frequency acoustic filter

In the previous Section we have shown the particular case of the linear defect with  $\theta_{defect} = 0^\circ$ . It is worth noting that the analysis shown in Fig. 21c represents a powerful design tool, in such a way that one can design waveguides for a determined frequency just rotating the specific angle given by this design line. In this Section we show an example of the tunability of such a system. In a square array made of square-rod scatterers with  $\theta = 45^\circ$ , we generate three different waveguides by rotating three rows, each one with different angle of rotation. We choose, for example, the angles  $\theta_{defect}^1 = 0^\circ$ ,  $\theta_{defect}^2 = 18^\circ$ ,  $\theta_{defect}^3 = 28^\circ$  as shown in Fig. 23a. Due to the fact that each angle is associated to different guided frequencies (see Fig. 21c), we expect different acoustic patterns behind the structure depending on the frequency.

Figure 23b shows the  $y/a$ -frequency SPL map. Each vertical line represents the field measured at  $x/a = -8$  all along the points  $y/a = [-7, 7]$  for a given frequency marked at the horizontal axis. The correspondence between the position of the waveguide and the position of SPL maximum values is striking. One can also see how the guided mode appears at this determined positions depending on the frequency. Figure 23c shows the experimental  $y/a$ -frequency SPL map. For a clear comparison between numerical and experimental results, we have plotted in Figs. 23d-23f the vertical cuts of this  $y/a$ -frequency SPL map at the normalized frequencies 0.623, 0.648 and 0.675 respectively (marked also in Figs. 23b and 23c with dashed white lines). Continuous lines represent the numerical SPL and dashed lines represents the experimental results. One can see that for the low frequencies of the design line, only one transmitted peak behind the structure emerges in Fig. 23d. At middle frequencies two transmitted peaks in Fig. 23e are observed. And, finally at high frequencies, three transmitted peaks, exist (Fig. 23d). Arrows in Figs. 23d-23e mark the positions where the sound is transmitted depending on frequency.

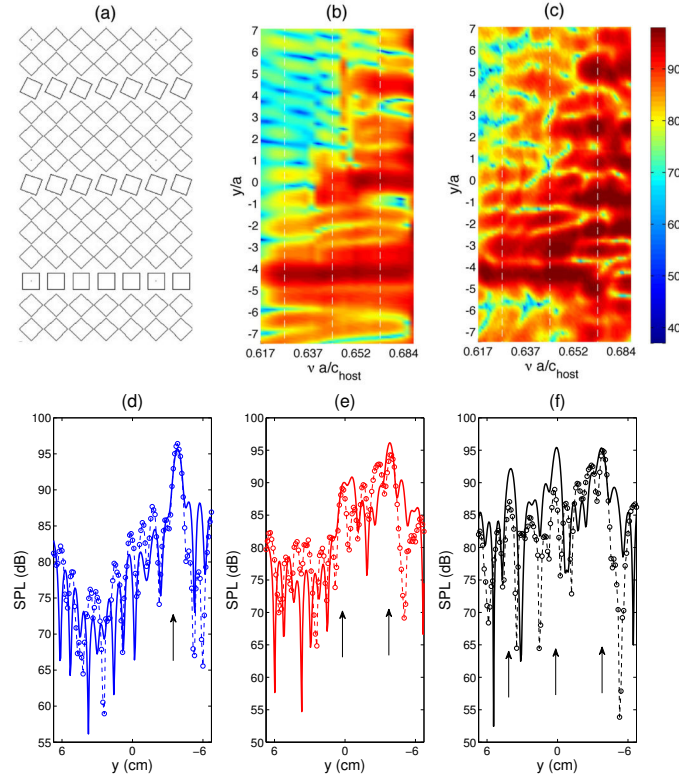


FIGURE 23 – (Color online) Spatial frequency acoustic filter. (a) Scheme of the acoustic filter. (b) and (c) represent the numerical and the experimental results in dB of the  $y/a$ -frequency SPL maps respectively. Color scale represents the values of the SPL. Each vertical line represents the SPL values along the points  $y/a = [-7, 7]$  at  $x/a = -8$  for a given normalized frequency ( $\nu a/c_{host}$ ). (d)-(f) represent the vertical cuts of the maps shown in (b) and (c) at the normalized frequencies 0.623, 0.648 and 0.675 respectively. Continuous lines are for the numerical predictions and dashed lines for the experimental results.

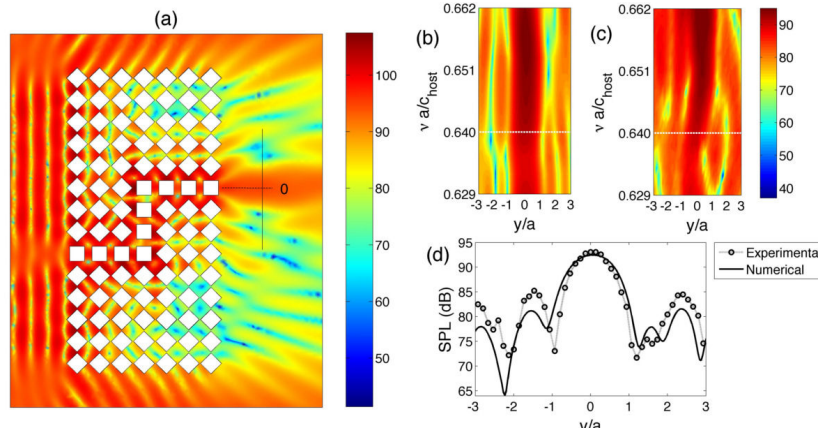


FIGURE 24 – (Color online) (a) Numerical SPL map at normalized frequency  $\nu a/c_{host} = 0.64$ . The SPL in dB is shown in the color scale. The black continuous line represents the measuring points. (b) and (c) show the numerical and experimental frequency- $y/a$  SPL map respectively. (d) Comparison of the numerically obtained SPL (black continuous line) with the experimental measurements (black dotted lines) measured in the point  $x/a = -8$  at the frequency  $\nu a/c_{host} = 0.64$ .

### Guiding and splitting waves inside the SC

Due to the tunability of the system shown in this work, one can design several paths to guide the sound through the structure only by rotating the scatterers. In this Section two different systems have been numerically and experimentally analyzed. Figs. 24a and 25a show the two cases analyzed in this Section. In the first one, sound is guided by a bended path and leaves the structure by one exit in a different  $y$ -position than the entrance. The second one consists of a bifurcated waveguide in which the sound is divided in two paths presenting two different exits, so showing the possibilities of splitting the waves in two different paths. The guided paths in both structures are generated by rotating the square-rod scatterers with  $\theta_{defect} = 0^\circ$ . The rest of square-rod scatterers in the array are fixed with  $\theta = 45^\circ$ .

Figure 24 shows the numerical and the experimental results for the case of the bended waveguide with one exit. Figure 24a shows the SPL map for one of the guided frequencies,  $\nu a/c_{host} = 0.64$ . One can observe the guidance of the wave through the bended waveguide and the maximum value of SPL in the exit of the waveguide. Figure 24b and 24c represent the numerical and the experimental frequency- $y/a$  SPL maps. It is easy to see the maximum values around  $y/a = 0$ , i.e., in front of the exit of the waveguide. For a better comparison between the numerical and experimental results, we plot the vertical cut along the points  $y/a = [-3, 3]$  (following the coordinate axis shown in Fig. 24a) measured in the point  $x/a = -8$  at the frequency  $\nu a/c_{host} = 0.64$  in Fig. 24d. Black continuous line represents the numerical simulations whereas the black dashed line represents the experimental results. A fairly good agreement is observed.

Figure 25 shows the numerical and the experimental results for the case of the bifurcated waveguide with two exits. Figure 25a shows the SPL map for one of the guided frequencies,  $\nu a/c_{host} = 0.629$ . The guidance of the wave through the bifurcated waveguide and the maximum value of SPL at the two exits of the waveguide are shown. Figure 25b and 25c represent the

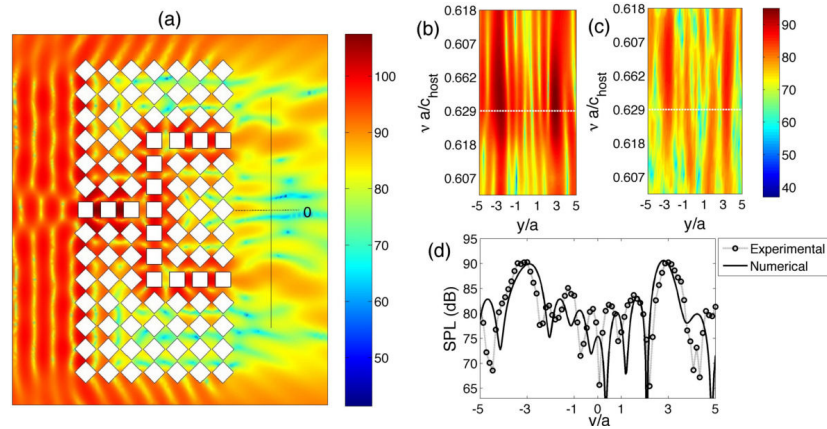


FIGURE 25 – (Color online) (a) Numerical SPL map at normalized frequency  $\nu a/c_{host} = 0.629$ . The SPL in dB is shown in the color scale. The black continuous line represents the measuring points. (b) and (c) show the numerical and experimental frequency- $y/a$  SPL map respectively. (d) Comparison of the numerical predictions of the SPL (black continuous line) with the experimental measurements (black dotted lines) measured in the point  $x/a = -8$  at the frequency  $\nu a/c_{host} = 0.629$ .

numerical and the experimental frequency- $y/a$  SPL maps. The maximum values around  $y/a = -3$  and  $y/a = 3$ , i.e., in the two ends of the bifurcated waveguide are clearly seen. For a better comparison between the numerical and the experimental results, we plot the vertical cut along the points  $y/a = [-5, 5]$  (following the coordinate axis shown in Fig. 25a) measured in the point  $x/a = -8$  at the frequency  $\nu a/c_{host} = 0.629$  in Fig. 25d. Once again the observed good agreement demonstrate the possibility of waveguiding by defect complex waveguides.

## Concluding remarks

In this work we use acoustic waves to experimentally proof the physical properties of modulated systems made of square-rod scatterers as well as to design applications for guiding and spatial filtering of acoustic waves. Extensive simulations and experimental results in order to show tunable waveguides made of arrays made of rigid square-rod scatterers embedded in air are performed here. We have experimentally and theoretically shown that by rotating some of the square-rod scatterers of an array one can easily produce a point defect, and even multiple point or line defects. This work could also be effectively extended to progressing toward the realization of tunable systems for light, liquid, and other waves, which will lead to great potential in ultrasonics, photoelectronics and so on. The tunability we demonstrated in this work could be applied to control not only the band gap and the waveguiding properties but also the refraction properties of the system. The use of such device as superlens for audible sound could be a perspective.

## Acknowledgement

This work was supported by MCI Secretaría de Estado de Investigación (Spanish government) and FEDER funds, under grant MAT2009-09438. VRG is grateful for the support of “Programa de Contratos Post-Doctorales con Movilidad UPV del Campus de Eexcelencia Internacional (CEI-01-11)” and of the grant “BEST2012” of the Generalitat Valenciana.



## ANNEXE 2

Dans cette annexe, les propriétés d'absorption d'un matériau métaporeux constitué d'inclusions non-résonantes 3D de formes simples (cube, cylindre, sphère, cône et tore) plongés dans une lame de poreux collée sur une paroi rigide sont étudiées. Comme pour le cas 2D, un coefficient d'absorption quasi-total peut être obtenu, pour une fréquence plus basse que la fréquence de résonance quart d'onde, dû à l'excitation d'un mode piégé. Pour être correctement excité, ce mode requière un *filling fraction* plus grand dans le cas tridimensionnel que dans le cas bidimensionnel pour des formes purement convexes (cube, cylindres, sphères et cônes). À basse fréquence, le cube est la meilleur inclusion convexe qu'il est possible d'inclure dans une cellule unitaire cubique, alors que l'inclusion d'une sphère ou d'un cône ne peut pas conduire à une absorption optimale pour certain matériaux poreux. Pour une position du barycentre et une forme purement convexe fixées, le coefficient d'absorption dépend exclusivement du *filling fraction* et ne dépend pas de la forme en dessous de la fréquence de Bragg, induite par l'interaction des inclusions et de leurs images par rapport à la paroi rigide. Les résultats, et en particulier, l'excitation du mode piégé sont validés expérimentalement dans le cas d'inclusions cubiques.

### Using simple shape three-dimensional inclusions to enhance porous layer absorption

Authors : J.-P. Groby, B. Nennig, C. Lagarrigue, B. Brouard, O. Dazel, and V. Tournat  
Submitted : Journal of the Acoustical Society of America in June 2013

#### Introduction

Acoustic porous materials are widely used in noise control applications because of their good sound absorbing properties in the middle and high frequency range. Nevertheless, porous materials suffer from a lack of absorption at low frequencies, when compared to their absorption capabilities at higher frequencies. The usual way to solve this problem is by multi-layering, while trying to keep the thickness of the treatment relatively small compared to the incident wavelength that has to be absorbed. The purpose of the present article is to investigate an alternative to multi-layering by embedding non-resonant simple shape three-dimensional inclusions in a rigidly backed porous sheet, thus creating a diffraction grating and therefore extending to 3-dimensional configurations previous studies [40, 108] already conducted in 2-dimensional ones.

These last decades, several ways to avoid the problem of the porous material low frequency absorption have been proposed, mainly by combining resonant phenomena with the traditional viscous and thermal losses. Whatever the frequency, the idea behind is to excite modes of the structure that will trap the energy inside it and therefore enhance the absorption of the whole structure. The material properties were modeled either through homogenization procedures or by accounting for the whole wave phenomena : double porosity materials, whose properties are due to the microporous material resonance between the macro-pores [37], or porous materials with small radius (compared to the wavelength) cylindrical inclusions embedded in [109], have been analyzed in the long wavelength limit, while metaporous materials [40, 108, 110] have been studied either semi-analytically or numerically in the entire frequency range of audible sound. In particular, the effect of the periodic embedment of both non-resonant and resonant inclusions in a porous layer on the absorption properties were studied in two-dimensions when the porous layer either is backed by a rigid backing [40, 108, 110], possibly incorporating cavities [62], or radiates in a semi-infinite half-space [111]. Different inclusion shapes were studied [40, 108, 110, 112] showing similar results at low frequencies. The increased absorption was explained by the excitation of local mode of the inclusion or of the cavities of the rigid backing, by the excitation of a trapped mode (TM) that traps the energy between the inclusion and the rigid backing, and by the excitation of the modified mode of the layer by coupling the layer mode with the Bloch waves originated by the added periodic heterogeneities. The effects of the inplane periodicity, whose main effect is the different excitation of modified mode of backed layer (MMBL), discussed in detail in [113] in case of parallelepipedic irregularities of the rigid backing, will not be investigated here.

In this article, the influence of the periodic embedment of three-dimensional elementary shape inclusions in a porous layer rigidly backed is studied by use of an in-house Finite Element (FE) code. These simple shape three-dimensional inclusions cover a wide range of topological characteristics. For instance, cube, cylindre, sphere and cone have purely convex geometry, while the torus is not convex and presents some concave faces. Furthermore, the cone does not possess geometric symmetry with respect to its barycenter contrary to the other. The absorption coefficient of the whole structure for different shapes and orientations of the inclusions is calculated. Only square lattice are considered, i.e., the periodicities are identical in both directions of the plane.

The present paper is organized as follows. The problem is described in section II. The FE method is then validated numerically and experimentally in section III. In section IV, various numerical examples with different inclusion shapes are discussed.

## Formulation of the problem

### Description of the configuration

A parallelepipedic unit cell of the 3D scattering problem is shown in Fig. 26. Before the addition of the inclusions, the layer is a rigid frame porous material saturated by air (e.g., a foam) which is modeled as a macroscopically homogeneous equivalent fluid  $M^p$  using the Johnson-Champoux-Allard model [114, 115]. The upper and lower flat and mutually parallel boundaries of the layer, whose  $x_3$  coordinates are  $L$  and  $0$ , are designated by  $\Gamma_L$  and  $\Gamma_0$  respectively. The upper semi-infinite material  $M^a$ , i.e., the ambient fluid that occupies  $\Omega^a$ , and  $M^p$  are in a firm contact at the boundary  $\Gamma_L$ , i.e., the pressure and normal velocity are continuous across  $\Gamma_L$ . A Neumann type boundary condition is applied on  $\Gamma_0$ , i.e. the normal velocity vanishes on  $\Gamma_0$ .

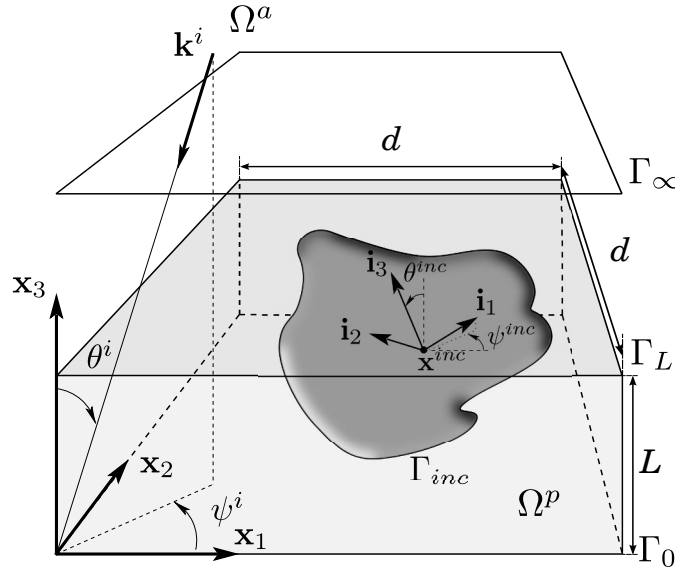


FIGURE 26 – Example of a  $d$ -periodic fluid-like porous sheet backed by a rigid wall with a periodic inclusion embedded in.

Inclusions, with a common spatial periodicity  $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, 0 \rangle$ , are embedded in the porous layer and create a two-dimensional diffraction grating in the plan  $x_1 - x_2$ . The periodicities  $d_1$  and  $d_2$  along the  $x_1$  and  $x_2$  directions are identical,  $d_1 = d_2 = d$ . In the following, five different infinitely-rigid simple-shape inclusions, depicted in Fig. 27, are considered : a cubic inclusion of edge  $a$ , a cylindrical inclusion of radius  $r$  and length  $h$ , a spherical inclusion of radius  $r$ , a conic inclusion of radius  $r$  and height  $h$ , and toric inclusions of neutral axis radius  $r$  and tore radius  $r^t$ . A Cartesian coordinate system, with the three unit vectors  $\mathbf{i}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , is attached to each inclusion barycenter. The position and orientation of the inclusion are referred to by its barycenter  $\mathbf{x}^{inc}$ , its azimuth  $\psi^{inc}$ , and its elevation  $\theta^{inc} = (\mathbf{i}_3, \mathbf{x}_3)$ .

The incident wave propagates in  $\Omega^a$  and is expressed by  $p^i(\mathbf{x}) = A^i e^{i(k_1^i x_1 + k_2^i x_2 - k_3^i (x_3 - L))}$ , wherein  $k_1^i = -k^a \sin \theta^i \cos \psi^i$ ,  $k_2^i = -k^a \sin \theta^i \sin \psi^i$ ,  $k_3^i = k^a \cos \theta^i$  and  $A^i = A^i(\omega)$  is the signal spectrum. The azimuth of the incident wavevector is  $\psi^i$  and its elevation  $\theta^i$ .

In each domain  $\Omega^\alpha$  ( $\alpha = a, p$ ), the pressure field fulfills the Helmholtz equation

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla p^\alpha \right) + \frac{(k^\alpha)^2}{\rho^\alpha} p^\alpha = 0, \quad (24)$$

with the density  $\rho^\alpha$  and the wavenumber  $k^\alpha = \omega/c^\alpha$ , defined as the ratio between the angular frequency  $\omega$  and the sound speed  $c^\alpha$ .

As the problem is periodic and the excitation is due to a plane wave, each field ( $X$ ) satisfies the Floquet-Bloch relation

$$X(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = X(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}_\perp^i \cdot \mathbf{d}}, \quad (25)$$

where  $\mathbf{k}_\perp^i = \langle k_1^i, k_2^i, 0 \rangle$  is the in-plane component of the incident wavenumber. Consequently, it suffices to examine the field in the elementary cell of the material to get the fields, via the Floquet relation, in the other cells. The periodic wave equation is solved with a FE method.

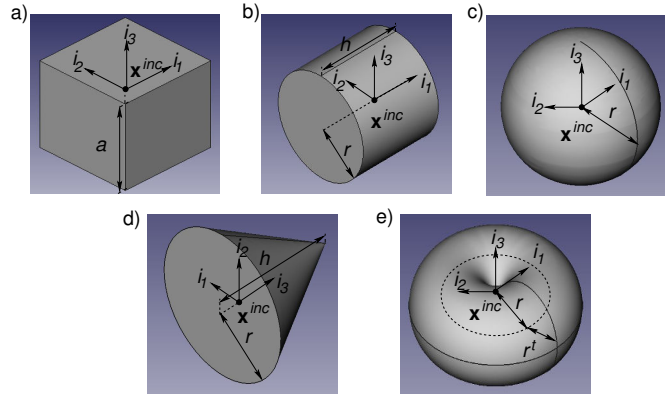


FIGURE 27 – Sketch of the different simple shape inclusions considered (of barycenter  $\mathbf{x}^{inc}$ ) : cubic inclusions (a), cylindrical inclusions (b), spherical inclusions (c), conic inclusion (d) and toric inclusion (e)

This FE method as well as the absorption coefficient calculation method are described in the appendix.

### Material modeling

The rigid frame porous material is modeled using the Johnson-Champoux-Allard model. The compressibility and density, linked to the sound speed through  $c^p = \sqrt{1/(K^p \rho^p)}$  are [114, 115]

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^p} &= \frac{\gamma P_0}{\phi \left( \gamma - (\gamma - 1) \left( 1 + i \frac{\omega'_c}{\text{Pr} \omega} G(\text{Pr} \omega) \right)^{-1} \right)}, \\ \rho^p &= \frac{\rho^a \alpha_\infty}{\phi} \left( 1 + i \frac{\omega_c}{\omega} F(\omega) \right), \end{aligned} \quad (26)$$

wherein  $\omega_c = \sigma \phi / \rho^a \alpha_\infty$  is the Biot frequency,  $\omega'_c = \sigma' \phi / \rho^a \alpha_\infty$  is the adiabatic/isothermal crossover frequency,  $\gamma$  the specific heat ratio,  $P_0$  the atmospheric pressure,  $\text{Pr}$  the Prandtl number,  $\rho^a$  the density of the fluid in the (interconnected) pores,  $\phi$  the porosity,  $\alpha_\infty$  the tortuosity,  $\sigma$  the flow resistivity, and  $\sigma'$  the thermal resistivity. The correction functions  $G(\text{Pr} \omega)$  [115] and  $F(\omega)$  [114] are given by

$$\begin{aligned} G(\text{Pr} \omega) &= \sqrt{1 - i \eta \rho^a \text{Pr} \omega \left( \frac{2 \alpha_\infty}{\sigma' \phi \Lambda'} \right)^2}, \\ F(\omega) &= \sqrt{1 - i \eta \rho^a \omega \left( \frac{2 \alpha_\infty}{\sigma \phi \Lambda} \right)^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

where  $\eta$  is the viscosity of the fluid,  $\Lambda'$  the thermal characteristic length, and  $\Lambda$  the viscous characteristic length. The thermal resistivity is related to the thermal characteristic length [115] through  $\sigma' = 8 \alpha_\infty \eta / \phi \Lambda'^2$ .

|    | $\phi$ | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$ ( $\mu\text{m}$ ) | $\Lambda'$ ( $\mu\text{m}$ ) | $\sigma$ (N.s.m <sup>-4</sup> ) |
|----|--------|-----------------|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| S1 | 0.95   | 1.42            | 180                         | 360                          | 8900                            |
| S2 | 0.99   | 1.02            | 120                         | 240                          | 11500                           |

TABLE 7 – Acoustical parameters of the porous material constituting the sheet of thickness  $L$ .

## Numerical and experimental validation

A large tortuosity ( $\alpha_\infty = 1.42$ ) 20 mm thick foam (Fireflex) sheet  $S1$  and a medium resistivity ( $\sigma = 11500$  N.s.m<sup>-4</sup>) 22 mm thick foam (Melamine) sheet  $S2$  are used thorough the article. The parameters of these two porous materials are reported in Table 9. These parameters have been evaluated using the traditional methods (Flowmeter for the resistivity and ultrasonic methods for the 4 other parameters, together with a cross-validation by impedance tube measurement) described in [116].

Extruded 2D configuration has first been used to validate the proposed 3D FE method by comparison with 2D results. This 2D configuration has been extensively validated with the multipole method [40], with a modal approach [108] and with FE method [40]. This 2D FE method was based on a slightly different approach. This configuration consists in a 2 cm thick foam  $S1$  with rigid circular inclusion of radius  $r = 7.5$  mm embedded in with a spatial periodicity  $d = 2$  cm. The comparison of the absorption coefficient calculated with the present FE method and the multipole method is presented in Fig.28, showing a good agreement for both oblique an normal incidences. Around 10 linear elements per edges (2 cm) on the elementary cell leads to less than 1% of error on the absorption coefficient below 10 kHz and around 5% above. With the same mesh, quadratic elements yield to less than 1 % of error on the absorption curves thorough 20 kHz. Quadratic elements are used through this paper when calculations are run through 20 kHz, while linear elements are used when calculations are run for frequencies lower than 10 kHz. These results are in line with standard FE rules of thumbs, i.e., 10 linear elements per wavelength for around 1% of error.

The proposed method has also been validated by comparison with experimental results at normal incidence. The tested sample is composed of a Melamine foam ( $S2$ , Table 9) as the porous matrix and four aluminum cubes of 15 mm length edges as shown Fig.29. The sample also contains 4 unit cells. The initial 22 mm-thick melamine foam was sliced and the material volumes that are then occupied by the inclusions were removed. The different elements are then gathered together with thin glue layers. The sample is placed at the end of an impedance tube, with a square cross-section and a side length of 42 mm, against a copper plug that closes the tube and acts as a rigid boundary. The tube cut-off frequency is 4200 Hz. By assuming that only plane waves propagate below the cut-off frequency, the infinitely rigid boundary conditions of the tube act like perfect mirrors and create a periodicity pattern in the  $x_1$  and  $x_2$  directions with a periodicity of 21 cm, because 4 inclusions are embedded in the sample. This technique was previously used in [113, 110] and allows to determine experimentally the absorption coefficient of a quasi-infinite inplane periodic structure just with one or a correctly arranged small number of unit cells.

Figure 30 shows a comparison between the absorption coefficient of this sample measured experimentally and calculated with the present FE method. Both absorption coefficients are in good agreement. The small differences can be attributed to the glue layers and possible thin air layers inside the sample. The absorption coefficient of the corresponding homogeneous layer is

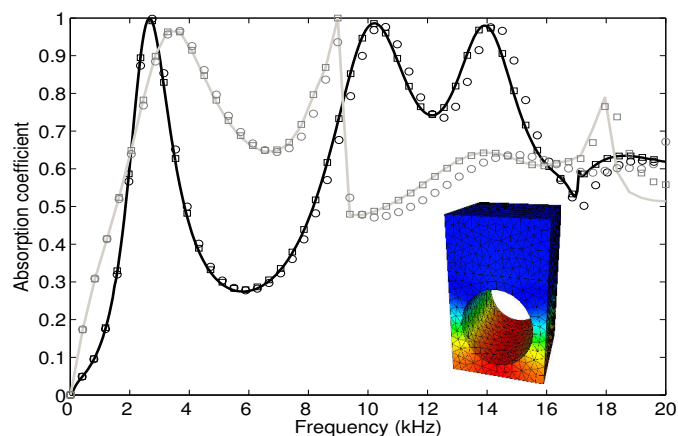


FIGURE 28 – Absorption coefficient for a through cylinder inclusion, when the layer is occupied by the foam S1, see Table 9, excited at normal incidence (black) or with  $\theta^i = \pi/3$  (gray) : reference results from [40], i.e., 2D results (solid line), linear elements ( $\circ$ ) and quadratic elements ( $\square$ ). The inset shows the snapshot of the pressure field magnitude at 2674 Hz.

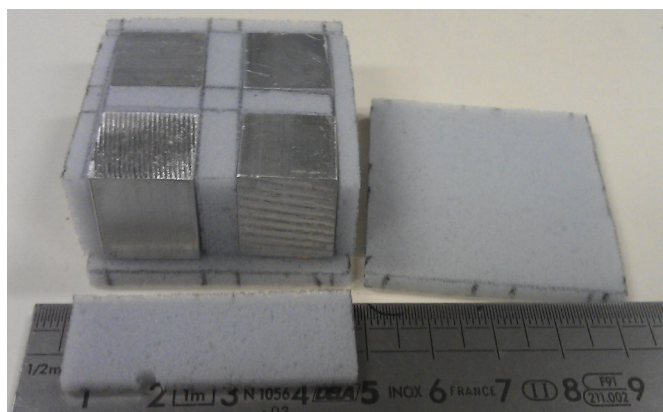


FIGURE 29 – Picture of the characterized sample, configuration C2 : a 2.2 cm thick Melamine foam with four 15 mm edge cube embedded in.

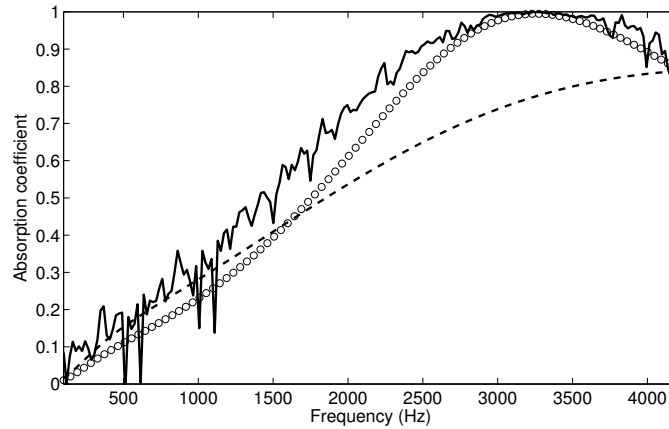


FIGURE 30 – Absorption coefficient (linear elements) of a 15 mm edge cube, when the layer is occupied by the foam S2, excited at normal incidence : experimental results (solid line), numerical results (circle), and homogeneous layer (dashed line).

| Configuration | $d$ (mm) | $L$ (mm) | Inclusion type | Inclusion dimensions (mm) | $\theta^{inc}, \psi^{inc}$ | $(x_1^{inc}, x_2^{inc}, x_3^{inc})$ |
|---------------|----------|----------|----------------|---------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| C1            | 20       | 20       | Cube           | $a=16$                    | 0, 0                       | (10, 10, 10)                        |
| C2            | 20       | 20       | Cube           | $a=15$                    | 0, 0                       | (10, 10, 10)                        |
| C3            | 20       | 20       | Cylinder       | $h = 15, r = 8.5$         |                            | (10, 10, 10)                        |
| C4            | 20       | 20       | Sphere         | $r = 9.3$                 | 0, 0                       | (10, 10, 10)                        |
| C5            | 20       | 20       | Cone           | $r = 8.5, h = 15$         |                            |                                     |
| C6            | 20       | 20       | Torus          | $r = 5, r^t = 4.75$       |                            | (10, 10, 10)                        |

TABLE 8 – Dimensions of the main studied configurations.

also depicted in Figure 30. Measurement of the initial 2.2 cm-thick foam, without inclusions were also performed showing a perfect agreement with the model. These measurements are not shown here for clarity of the figure. The experiments show an increase of the absorption coefficient (almost total) at low frequency due to the excitation of the trapped mode. Other experiments, not shown, were performed in the case of a vertical cylinder embedded in, also showing a good agreement with the calculations, therefore validating the FE calculations experimentally.

## Numerical results

Numerical simulations have been performed for various geometric parameters, various shape inclusions and within the frequency range of audible sound, particularly at low frequencies. One of the main constraints in designing acoustically absorbing materials is the size and weight of the configuration. In this sense, a low frequency improvement implies good absorption for wavelength larger than the thickness of the structure.

The dimensions of the main studied configurations are listed in Table 8.

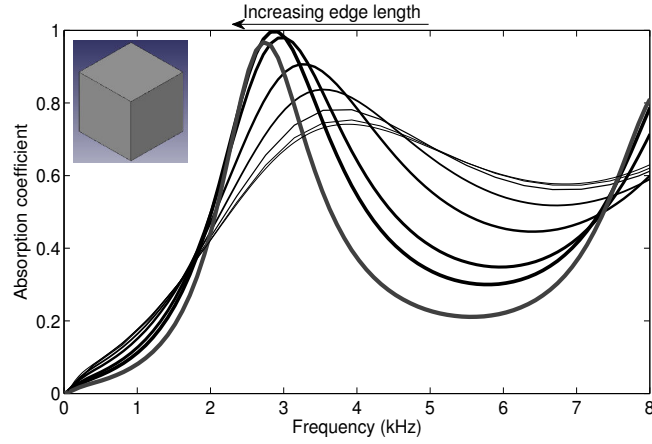


FIGURE 31 – Absorption coefficient (linear elements) of a cubic inclusion of edge length  $a$  centered in a cubic unit cell  $(d_1, d_2, L) = (2 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, 2 \text{ cm})$  occupied by the foam S1 when excited at normal incidence : from the thinnest to the thickest curves  $a = 0$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $a = 7.5 \text{ mm}$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $a = 12.5 \text{ mm}$ ,  $a = 15 \text{ mm}$ ,  $a = 16 \text{ mm}$ , and  $a = 17.5 \text{ mm}$ .

### Cubic inclusions

First, a  $a$ -edge cubic inclusion is considered in a cubic unit cell  $(d, d, L) = (2 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, 2 \text{ cm})$ . The cube is centered in the unit cell, i.e.  $\mathbf{x}^{inc} = (d/2, d/2, L/2)$ . The inclusion is oriented such that  $(\theta^{inc}, \psi^{inc}) = (0, 0)$ , i.e., the faces of the cube are parallel to those of the unit cell. Figure 31 depicts the evolution of the absorption coefficient at normal incidence for various edge lengths  $a$  from 0 mm to 17.5 mm leading to different filling fractions  $ff$  from 0 to  $\approx 0.67$ .

Similarly to the analysis carried out in the two-dimensional case [40, 108], a trapped mode (TM) is excited by the presence of the inclusion. The TM excitation frequency  $\nu^t$  becomes lower when the filling fraction increases for fixed position of the barycenter. This frequency is always lower than the quarter wavelength resonance one, when the barycenter is higher or equal to half of the layer thickness  $L$ . The absorption coefficient possesses a maximum as a function of the edge of the cube. The absorption is nearly total for  $a = 16 \text{ mm}$  edge cubic inclusion (configuration C1), which corresponds to a filling fraction of  $ff \approx 0.51$ . When compared to the results obtained in the 2D case [40] for a  $r = 7.5 \text{ mm}$  infinitely long cylinder centered in the same matrix material with identical geometry (Figure 28), the required filling fraction for the absorption peak to be total is larger in the 3D case, i.e.  $ff \approx 0.51$ , than in the 2D case,  $ff \approx 0.44$ . In the same way, when the nearly total absorption peak is reached,  $\nu^t$  is higher in the 3D case ( $\nu^t = 2860 \text{ Hz}$ ) than in the 2D case ( $\nu^t = 2680 \text{ Hz}$ ).

Figure 32 depicts a cross-sectional view ( $x_1 - x_3$  plane) of the pressure field magnitude inside the unit cell at  $x_2 = d/2$  of the configuration C1 at  $\nu^t = 2860 \text{ Hz}$ , showing that the wave is trapped between the inclusion and the rigid backing. Similarly to the 2D case, at fixed edge  $a$ ,  $\nu^t$  becomes smaller when the distance between the inclusion and the rigid backing is larger, i.e., when  $x_3^{inc}$  increases. Therefore, this increased absorption could be explained by the first Fabry-Perot interference between the inclusions and its image with respect to the rigid backing, as can be shown in the transmission case. Nevertheless, the Fabry-Perot interference appears when the vertical distance between two adjacent inclusions is equal to the quarter of the projection on

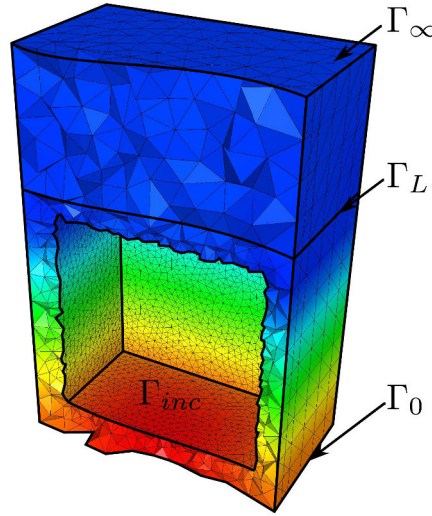


FIGURE 32 – Snapshot of the pressure field magnitude (linear elements) along a cross-sectional ( $x_1 - x_3$  plan) plan view at  $x_2 = d/2$  in the configuration C1, when the layer is occupied by the foam S1, excited at normal incidence at  $\nu = 2860$  Hz.

the vertical axis of the wavevector, which is impossible for two reasons : 1. because a quarter-wavelength is not possible with the rigid backing 2. because  $\nu^t$  would be identical for each cube edges and equal to the quarter-wavelength resonance frequency for a centered inclusion, if true.

Once the optimal edge size is determined to have a nearly total absorption peak at  $\nu^t$ , the absorption coefficient is calculated for the total frequency range of audible sound in Fig. 33. The first Bragg interference, which corresponds to the maximum of reflected energy leads to a minimum of absorption around 6000 Hz. This corresponds to constructive interferences between the scattered waves by the inclusion and its image with respect to the rigid backing. This minimum appears when  $2x_3^{inc}$  is equal to half of the wavelength in case of normal incidence.

The modified mode of the backed layer (MMBL), which traps the energy inside the porous plate and corresponds to an evanescent wave in the upper half plate and a propagative wave inside the porous plate is excited at  $\nu^{MMBL} \approx 17000$  Hz. This corresponds to the intersection of the longitudinal mode of the porous plate, which cannot be excited by a plane incident wave without heterogeneity, with the first Bloch wave, as explained in [117, 40, 113]. This mode is excited at relatively high frequency because the periodicity is here relatively small ( $d = 2$  cm). The enhanced absorption due to MMBL was extensively explained in case of parallelepiped irregularities of the rigid backing in [113] and used in [118].

The absorption coefficients calculated in the case of a centered  $a = 12.5$  mm ( $ff \approx 0.24$ ) edge cube with upper and lower interfaces parallel to  $\Gamma_L$  and  $\Gamma_0$  rotated around  $\mathbf{i}_3$  are almost identical below the first MMBL. In particular, the absorption coefficients calculated for  $\psi^{inc} = 0$  and  $\psi^{inc} = \pi/4$  ( $\theta^{inc} = 0$ ) are identical, while it is well known, [105, 89], that a 2D sonic crystal composed of square cross-section scatterers possesses full bandgap when  $\psi^{inc} = \pi/4$  and only a bandgap at normal incidence ( $\Gamma X$ ), when  $\psi^{inc} = 0$ . Some differences can be noticed near grazing incidence, but are not significant in case of an acoustic excitation by an airborne plane wave impinging the structure from the upper half-space. The bandgap were shown and

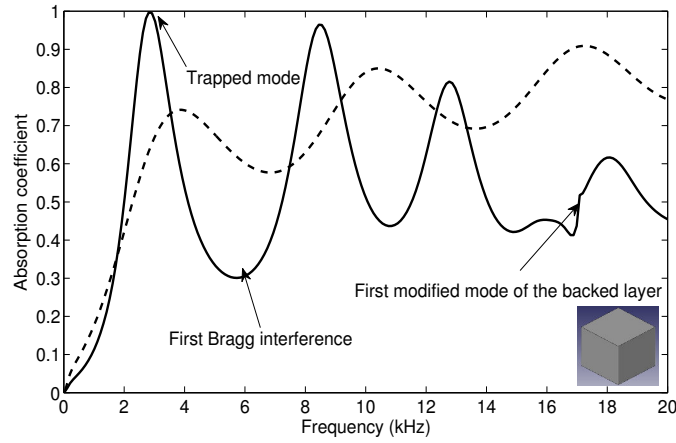


FIGURE 33 – Absorption coefficient (quadratic elements) of the configuration C1, when the layer is occupied by the foam S1, excited at normal incidence. The absorption coefficient of the homogeneous layer is depicted by the dashed line.

were clearly of interest because the excitation was performed in between the parallelepipedic scatterers in [119].

Parallelepiped scatterers were tested, exhibiting similar influence on the absorption. The advantage is that  $\nu^t$  can be smaller because the parallelepiped can be placed further from the hard backing  $\Gamma_0$ , letting  $x_3^{inc}$  being larger, but the filling fraction is then lower and a nearly total absorption peak is then difficult to reach at this frequency.

### Other simple shape inclusions at normal incidence

We first focus on the three purely convex simple inclusion shapes that possesse geometric symmetry with respect to their barycenter.

The absorption coefficients for different simple shape inclusions embedded in the same porous material with the same periodicity and at identical filling fraction are calculated and compared. For identical material layer and dimension of the unit cell, the large filling fraction required,  $ff \approx 0.51$ , to reach an almost total absorption coefficient at  $\nu^t$  in case of cube would impose a  $r \approx 9.9$  mm radius sphere. Such a filling fraction is also impossible to realize in practice when spheres are embedded with a periodicity  $d = 2$  cm. This also means that in a cubic unit cell, a cubic inclusion seems to be the best choice in the sense that this inclusion shape enables large filling fraction when compared with other simple shape inclusions, like sphere or cylinder. While the embedment of spheres in a porous materials probably do not lead to an optimal absorption, i.e. a unit amplitude absorption, at low frequency, this solution is used in practice [120].

The cube edge is also decreased to  $a = 15$  mm in order for the filling fraction to be  $ff \approx 0.42$ . A comparison between the absorption coefficients calculated for centered inclusions in the unit cell of a  $a = 15$  mm cube (configuration C2),  $h = 15$  mm and  $r = 8.5$  mm cylinder with different orientations (configuration C3 :  $\theta^{inc} = 0$  vertical cylinder and  $\theta^{inc} = \pi/2$  horizontal cylinder), and a  $r = 9.3$  mm sphere (configuration C4) is shown in figure 34. Several observations can be made. First, for fixed properties of material layer, inclusion barycenter position periodicity and filling fraction, the absorption coefficient is identical for the different inclusion shapes below the

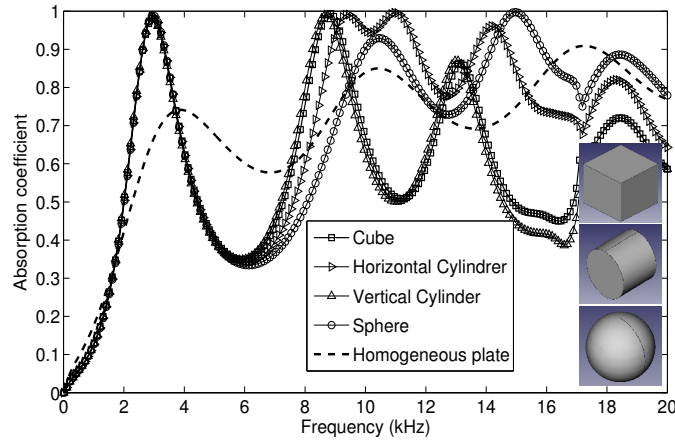


FIGURE 34 – Absorption coefficients (quadratic elements) of the configuration C2 ( $\square$ ), C3 ( $\theta^{inc} = 0$  ( $\triangleright$ ) and  $\theta^{inc} = \pi/2$  ( $\triangle$ ), and C4 ( $\circ$ ), when the layer is occupied by the foam S1, excited at normal incidence. The absorption coefficient of the homogeneous layer is depicted by the dashed line.

first Bragg frequency. This means that the absorption coefficient is mainly driven by the filling fraction below this frequency. Second, whatever the inclusion shape, the MMBL is excited at the same frequency  $\nu^{MMBL}$ , because it only depends on the layer material properties and periodicity. Thirdly, absorption coefficients are almost identical between a vertical cylinder (configuration C3,  $\theta^{inc} = 0$ ) and a cube (configuration C2). This means that at higher frequency flat interfaces parallel with the boundaries  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_L$  have more influence on the absorption coefficient than the lateral shape. Fourthly, absorption coefficients for flat interface inclusions parallel with  $\Gamma_L$  and  $\Gamma_0$  are completely different from those for non-flat interface inclusions. Fifthly, while cubic inclusion enable a larger filling fraction, spherical and horizontal cylindrical inclusions lead to larger absorption at higher frequency. The higher order Bragg interferences seem to be more excited than in case of cube and vertical cylinder. This is in accordance with the conclusion of [88] in which it is shown in 2D that square cross-section scatterer in square lattice provides a larger bandgap, than other scatterer shapes. The absorption is almost always larger than the one of the homogeneous layer between the Bragg frequency and the first MMBL frequency for spheres and horizontal cylinders. In average, the best absorption coefficient is obtained with an horizontal cylindrical inclusion.

Calculations were also performed for each inclusion shape when the filling fraction increases. For each inclusion shape,  $\nu^t$  decreases and the absorption amplitude increases with increasing  $ff$  at fixed barycenter position. For cylinders, it was possible to find a possible to manufacture configuration leading to a nearly total absorption peak, while it was not the case of a sphere. Once the optimum is reached, if the filling fraction  $ff$  is still increased, both frequency  $\nu^t$  and amplitude of the associated absorption peak decrease.

The last two shapes studied here present particularities : the cone does not present geometric symmetry with respect to its barycenter and the torus is not of convex shape.

Concerning conic inclusions, besides an apparent dependance of  $\nu^t$  on the orientation of the cone, all the phenomena are in accordance with the previously studied shapes. Figure 35(a) depicts the absorption coefficient of a  $h = 15$  mm,  $r = 8.5$  mm cone, configuration C5, embedded in

a porous sheet S1, and geometrically centered in the unit cell for different orientations : cone up,  $\mathbf{x}^{inc} = (10 \text{ mm}, 10 \text{ mm}, 6.25 \text{ mm})$ ,  $\theta^{inc} = 0$ ; cone horizontal,  $\mathbf{x}^{inc} = (6.25 \text{ mm}, 10 \text{ mm}, 10 \text{ mm})$ ,  $\theta^{inc} = -\pi/2$ ; and cone down,  $\mathbf{x}^{inc} = (10 \text{ mm}, 10 \text{ mm}, 13.25 \text{ mm})$ ,  $\theta^{inc} = \pi$ . The corresponding filling fraction is  $ff \approx 0.15$ . It is impossible to reach a sufficiently large filling fraction to obtain a nearly total absorption peak with the conic inclusion in this case. When the cone is horizontal, the  $x_3$ -coordinate of the barycenter is located in the middle height unit cell, i.e.  $x_3^{inc} = L/2$ . The configuration being periodic, it is possible to find a unit cell such that the barycenter is the center of the unit cell. In this case, the absorption peak associated with the excitation of the trapped mode is very close to the one of a  $a = 10 \text{ mm}$  cube,  $ff = 0.125$  (rigorously the edge of the cube should be  $a = 10.5 \text{ mm}$  for  $ff \approx 0.15$ ). When the cone is oriented towards the air medium, i.e. cone up, the barycenter is lower than the middle of the unit cell, while when the cone is oriented towards the rigid backing, i.e. cone down, the barycenter is higher than the middle of the unit cell. This dependence is identical to the one already noticed in case of a cube, a sphere and a cylinder, i.e.  $\nu^t$  decreases when  $x_3^{inc}$  increases.

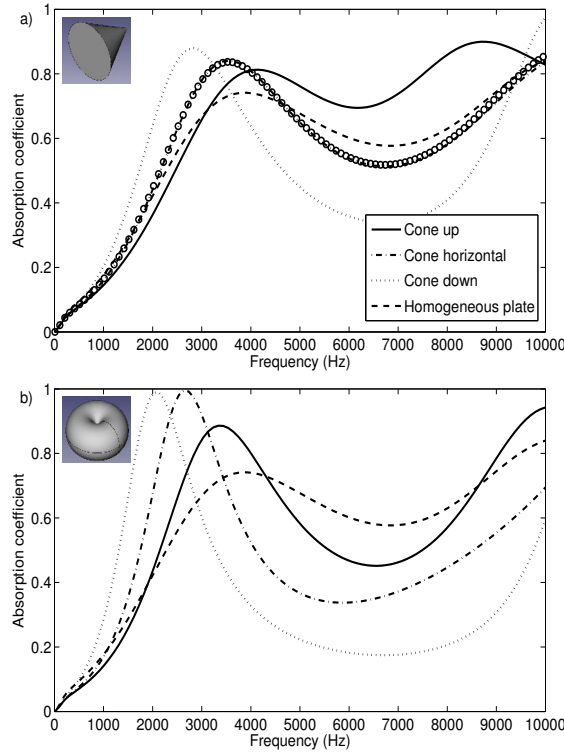


FIGURE 35 – Absorption coefficients of a) a  $h = 15 \text{ mm}$  and  $r = 8.5 \text{ mm}$  cone, configuration C5, in a  $2 \text{ cm}$  thick S1 layer, when the cone is up  $\theta^{inc} = 0$ , cone horizontal  $\theta^{inc} = -\pi/2$ , and cone down  $\theta^{inc} = \pi$  (the absorption coefficient of a  $a = 10 \text{ mm}$  cube is also plotted ( $\circ$ )) and b) a  $r = 5 \text{ mm}$  and  $r^t = 4.75 \text{ mm}$  torus, configuration C6 in a  $2 \text{ cm}$  thick S1 layer, centered in the unit cell when  $\theta^{inc} = 0$  (dashed-dotted line) and  $\theta^{inc} = \pi/2$  (solid line), and when  $x_3^{inc} = 3L/4$  for  $\theta^{inc} = 0$  (dotted line). The absorption coefficient of the homogeneous layer is depicted by the dashed line on a) and b).

The toric shape is more interesting and more complex. The absorption coefficients of  $r =$

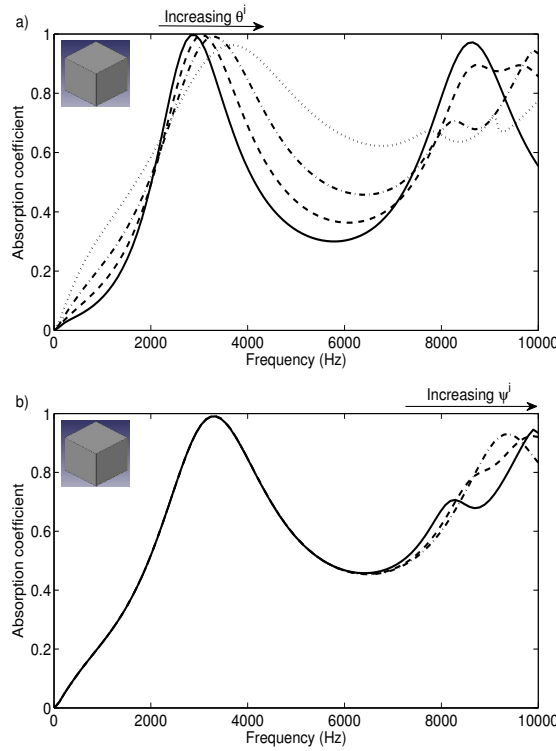


FIGURE 36 – Absorption coefficient of a layer with cubic inclusions of  $a = 16$  mm edge length centered in a cubic unit cell  $(d, L) = (2 \text{ cm}, 2 \text{ cm})$  occupied by the foam S1 when excited a) for  $\psi^i = 0$  and  $\theta^i = 0, \theta^i = \pi/6, \theta^i = \pi/4$ , and  $\theta^i = \pi/3$ , and b) for  $\theta^i = \pi/4$  and  $\psi^i = 0, \psi^i = \pi/6$ , and  $\psi^i = \pi/4$ .

5 mm and  $r^t = 4.75$  mm torus (configuration C6) embedded in the same S1 porous sheet, centered in the unit cell, i.e.,  $\mathbf{x}^{inc} = (10 \text{ mm}, 10 \text{ mm}, 10 \text{ mm})$ , with two different orientations,  $\theta^{inc} = 0$  and  $\theta^{inc} = \pi/2$  ( $\psi^{inc} = 0$ ), are shown in Figure 35(b). For this shape, a nearly total absorption peak can be obtained at  $\nu^t = 2680$  Hz and for a filling fraction  $ff \approx 0.28$ , i.e., both frequency and filling fraction are lower than those obtained in the case of purely convex shapes. This phenomenon is due to the non-convex shape which enables the volume below the inclusions to be larger in case of a torus than in case of purely convex shapes. This relatively low filling fraction associated with the toric shape also allows to reach a nearly total absorption peak at a very low frequency ( $\nu^t = 2100$  Hz) when  $x_3^{inc}$  is increased at  $x_3^{inc} = 3L/4$ , Fig. 35(b). Nevertheless, this last shape should be considered as a particular case of a simple 3D shape, and can be considered at high frequency as a resonant one.

### Numerical results at oblique incidence

The structure is obviously anisotropic, first because of the periodicity patterns itself, but also because of the inclusion shape. Figure 36 depicts the absorption coefficient of the configuration C1 when the layer material is the foam S1 for  $\theta^i \in [0, \pi/3]$  ( $\psi^i = 0$ ) and for  $\psi^i \in [0, \pi/4]$  with  $\theta^i = \pi/4$ . For symmetry reason, performing calculation for larger  $\psi^i$  is useless. The absorption

coefficients for  $\psi^i = \pi/3$  and  $\psi^i = \pi/6$  when  $\theta^i = \pi/4$ , were found to be identical, which provides another validation of the method. The frequency of excitation of the trapped mode is slightly modified when  $\theta^i$  increases :  $\nu^t$  increases when  $\theta^i$  increases. The absorption is nearly total up to  $\theta^i \approx \pi/3$ . At fixed  $\theta^i$ ,  $\psi^i$  only influences the results for frequencies higher than the first Bragg frequency. Similar results were found for the other inclusion shapes.

## Conclusion

The influence of the periodic embedment of non-resonant three-dimensional simple shape inclusions (cube, cylinder, sphere, cone and torus) in a rigidly backed porous layer modeled in the rigid frame approximation is studied numerically and experimentally. Similarly to the 2D case, the absorption coefficient of these structures is enhanced, because of the excitation of different type of modes in particular at low frequency because of the excitation of a trapped mode that traps the energy between the inclusions and the rigid backing. This entrapment is nearly total for a specific filling fraction which is larger in 3-D than in 2-D and the frequency of excitation of this trapped mode goes down when the filling fraction increases. The FE results are validated experimentally in case of cubic inclusions. Focusing on the absorption enhancement at low frequency, a cube is better than a sphere in a cubic unit cell because it allows a larger filling fraction. It is shown that in some cases, it is impossible to obtain a nearly total absorption peak by embedding spheres because the required filling fraction cannot be reached. At a fixed filling fraction and position of the barycenter, the absorption coefficients are identical below the first Bragg frequency for the various non-resonant inclusions. In other words, for only convex inclusions, the absorption coefficient only depends on the filling fraction and position of the barycenter and not on the shape of the inclusions below the first Bragg frequency. The torus required a lower filling fraction in order to reach a nearly total absorption peak at a frequency which is smaller than for the other shapes. Differences in terms of absorption coefficient are particularly noticeable at higher frequencies than the first Bragg frequency, and allow to classify the inclusion shape, either possessing faces parallel to the interface porous/air or the the rigid backing, or not. In particular, horizontal cylinders and torus lead to larger absorption coefficients than the other shape inclusions. The so-designed structures are obviously anisotropic. The trapped mode is poorly affected by the angle of incidence, when compared to the modified mode of the backed layer. At a fixed elevation angle of incidence, the trapped mode is not affected by the azimuthal angle. These results offers large perspectives in terms of absorption enhancement of porous layer through optimization procedures and embeddement of 3D resonant inclusions.

## Appendix

### Numerical model

#### Finite element formulation

The weak form associated to the Helmholtz equation (24), required for FE resolution, is

$$-\int_{\Omega^\alpha} \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla \bar{q}^\alpha \cdot \nabla p^\alpha \, d\Omega + \int_{\Omega^\alpha} \frac{(k^\alpha)^2}{\rho^\alpha} \bar{q}^\alpha p^\alpha \, d\Omega = -\int_{\partial\Omega^\alpha} \frac{1}{\rho^\alpha} \bar{q}^\alpha \nabla p^\alpha \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (28)$$

for all the test functions  $q^\alpha$ ,  $\alpha = a, p$ . The bar  $\bar{q}^\alpha$  denotes the complex conjugate of  $q^\alpha$ .

The solution being periodic, the pressure fields  $p^\alpha$  and the test function  $q^\alpha$  are demodulated so as to use the periodic part of the pressure denoted  $\hat{p}^\alpha$  such that  $\hat{p}^\alpha = e^{-i\mathbf{k}_\perp^i \cdot \mathbf{d}} p^\alpha$ , and of the test function  $\hat{q}^\alpha = e^{i\mathbf{k}_\perp^i \cdot \mathbf{d}} \bar{q}^\alpha$ . Introducing these expressions in the weak form (28) leads to

$$-\int_{\Omega^\alpha} \frac{1}{\rho^\alpha} \hat{\nabla} \hat{q}^\alpha \cdot \hat{\nabla} \hat{p}^\alpha \, d\Omega + \int_{\Omega^\alpha} \frac{(k^\alpha)^2}{\rho^\alpha} \hat{q}^\alpha \hat{p}^\alpha \, d\Omega = -\int_{\partial\Omega^\alpha} \frac{1}{\rho^\alpha} \hat{q}^\alpha \hat{\nabla} p^\alpha \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (29)$$

where the shifted gradient operator reads as  $\hat{\nabla} = \nabla - i\mathbf{k}_\perp^i$ ,  $\bar{\nabla} = \nabla + i\mathbf{k}_\perp^i$ .

The normal derivative of the pressure vanishes on the bottom surface  $\Gamma_0$  and on  $\Gamma_{inc}$  because the scatterer is infinitely rigid. The boundary term pairs on the lateral boundaries  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_l$  and  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_f$  vanish due to the periodicity of  $\hat{p}$  and  $\hat{q}$ . The pressure and the normal velocity are continuous on the coupling boundary between the air and the porous material  $\Gamma_L$ ,

$$p^a = p^p, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\rho^a} \frac{\partial p^a}{\partial n} = \frac{1}{\rho^p} \frac{\partial p^p}{\partial n}. \quad (31)$$

The second condition is automatically accounted for by removing the boundary integral on  $\Gamma_L$ . The continuity of the pressure or more precisely of  $\hat{p}^a = \hat{p}^p$  is ensured by the use of Lagrange multiplier  $\lambda$  and its associated test function  $\varsigma$ . To do that, the two following integrals are evaluated on the boundary  $\Gamma_L$

$$\int_{\Gamma_L} \varsigma(\hat{p}^a - \hat{p}^p) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_L} (\hat{q}^a - \hat{q}^p) \lambda \, d\Gamma. \quad (32)$$

Note that using Lagrange multiplier is not mandatory here and algebraical condition or penalization can be used. The main interests are to deal with Hermitian matrix and to ease the implementation.

For the sake of computation, the radiating boundary  $\Gamma_\infty$  of height  $L_\infty$  that truncate  $\Omega^a$  is introduced, Fig. 26. The radiation of the elementary cell can be handled in the FE method with (i) DtN map, (ii) PML or (iii) modal expansion. Note PML is not suitable for the long wave limit ( $\lambda \gg d$ ) and are not safe for this application. In this paper, the last solution is preferred for its robustness and because the modal coefficient are required to compute the absorption coefficient. In practice, only a few modes are propagative. The FE degree of freedom on  $\Gamma_\infty$  are removed from FEM matrix in favor of modal amplitude. The boundary term on  $\Gamma_\infty$  is easily computed thanks to Floquet mode orthogonality. On the plane boundary  $\Gamma_\infty$ , the total pressure reads  $p^a = p^i + p^\infty$  and the scattered pressure can be expanded as

$$p^\infty(\mathbf{x}, \omega)|_{\Gamma_\infty} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} A_{mn} \phi_{mn}, \quad (33)$$

with

$$\phi_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i(k_{1m}x_1 + k_{2n}x_2)}, \quad (34)$$

where  $A_{mn}$  are the amplitudes of the Floquet mode  $(n, m)$ ,  $k_{1m} = k_1^i + m \frac{2\pi}{d}$ ,  $k_{2n} = k_2^i + n \frac{2\pi}{d}$ ,  $k_{3mn}^a = \sqrt{(k^a)^2 - k_{1m}^2 - k_{2n}^2}$ , and  $S = d^2$  is the surface of the elementary cell. To satisfy the

radiation condition, i.e. the field remains bounded when  $x_3 \rightarrow \infty$ , the values of  $k_{3mn}^a$  are chosen to consider both propagative and evanescent waves in  $\Omega^a$ .

It is worth noting that the FE discretization of  $\Omega^a$  encapsuled by  $\Gamma_\infty$  is not mandatory if the interface  $\Gamma_L$  is a plane surface. In this case, the radiation condition can be applied directly on  $\Gamma_L$  instead of  $\Gamma_\infty$ . The general formulation proposed here can tackle with corrugated porous material surface.

The modal expansion for the periodic part of the pressure field reads as

$$\hat{p}|_{\Gamma_\infty} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} A_{mn} \hat{\phi}_{mn} + A^i e^{ik_3^{ai} L_\infty}, \quad (35)$$

with

$$\hat{\phi}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i(m \frac{2\pi}{d_1} x_1 + n \frac{2\pi}{d_2} x_2)}. \quad (36)$$

The modal profile is changed but the value of  $k_{3mn}^a$  remains the same. The coefficient  $A_{mn}$  can be used to compute the absorption of the material, see sec. 3.2. These coefficient are cast in the vector  $\mathbf{A}$ .

The weak formulation arising from (29) yields after FE discretization (the boundary integral on  $\Gamma_\infty$  will be stated later)

$$\mathbf{V}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{F}. \quad (37)$$

The unknowns vector  $\mathbf{U}$  can be cast into a vector  $\mathbf{U}_\infty$  containing the FE degree of freedom (dof) on the radiation boundary  $\Gamma_\infty$  and a vector  $\mathbf{U}'$  containing the other dof. The unknown vector can be expressed with (35)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}_\infty \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^\infty \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^i \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ A^i \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Here,  $\mathbf{P}$  stands for the modal projection matrix. The Floquet modes are stored in columns and the raw contains the nodal value. The same form is chosen for the test function

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^* \begin{pmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

where  $\mathbf{V}'$  and  $\mathbf{B}$  are associated to the FE and to the modal dof, respectively.

Introducing (38) and (39) in (37) leads to the modified system

$$\underbrace{\mathbf{T}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{U}}} = \underbrace{\mathbf{T}^\dagger \mathbf{F} - \mathbf{T}^\dagger \mathbf{K} \mathbf{G}}_{\tilde{\mathbf{F}}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ A^i \end{pmatrix}, \quad (40)$$

where  $\dagger$  is for the hermitian transpose. The boundary term on  $\Gamma_\infty$ , using the modal expansion from (35) and for the associated test function from (39), yields

$$\int_{\Gamma_\infty} \frac{1}{\rho^a} \bar{q}^a \nabla p^a \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} \bar{B}_{mn} \frac{ik_{3mn}^a}{\rho^a} A_{mn} + \bar{B}_{00} \frac{ik_3^i \sqrt{S} e^{ik_3^{ai} L_\infty}}{\rho^a} A^i. \quad (41)$$

These terms can be easily added at the end of  $\tilde{\mathbf{F}}$  and on the diagonal of  $\tilde{\mathbf{K}}$ . The last step is to solve the modified FE matrix  $\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}$  with a sparse solver [121].

### Absorption computation

Once the wave amplitudes have been evaluated, the integration of the acoustic intensity leading to the energy balance can be done. This integration is performed over the unit cell using the orthogonality relation of the Floquet modes. In practice, the number of propagating modes in  $\Omega^a$  is very small and often reduced to the fundamental mode  $(m, n) = (0, 0)$  (specular reflection) and the first modes.

Thanks to the conservation of the energy, the absorbed power is given by  $\mathcal{P}_{abs} = \mathcal{P}_i - \mathcal{P}_r$ , where the reflected power in the  $x_3$  direction is

$$\mathcal{P}_r = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} \operatorname{Re}(k_{3mn}^a) |A_{mn}|^2 / (\rho^a \omega), \quad (42)$$

to the incident power is

$$\mathcal{P}_i = S |A^i|^2 k_3^i / (\rho^a \omega). \quad (43)$$

The absorption coefficient is then defined as the ratio of the absorbed power to the incident power

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P}_{abs}}{\mathcal{P}_i} = \frac{\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i}. \quad (44)$$

### Implementation note

The implementation of the proposed method has been performed with the open source softwares. The finite element library FreeFEM++ [122] is used (version 3.20) with linear (P1) or quadratic (P2) lagrangian tetrahedral finite element, periodic boundary conditions and parallel computing facilities. The meshes were realized with Gmsh [123] (version 2.7) with coincident mesh constraint on each opposite lateral sides of the elementary cell. The inclusions have been designed with FreeCAD [124] (version 0.13).



## ANNEXE 3

Cette annexe traite de l'amélioration du coefficient d'absorption d'une mousse de mélanine, autant dans le régime visqueux qu'inertiel, par l'insertion périodique de résonateurs de Helmholtz remplis d'air. Ceci conduit à la création d'un métamériau pour l'absorption acoustique dans la gamme des fréquences audibles. Cette amélioration est due à l'excitation de modes : la résonance de Helmholtz dans le régime visqueux et le mode piégé dans le mode inertiel. Le coefficient d'absorption atteint 0.82 dans le régime visqueux, à la fréquence de résonance du résonateur, pour une longueur d'onde dans l'air 27 fois plus grande que l'épaisseur du matériau. En particulier, l'amélioration due à la résonance de Helmholtz peut être plus grande lorsqu'une petite quantité de matériau poreux est enlevée devant le col du résonateur. La bande de fréquence de forte absorption est donc élargie en utilisant des résonateurs de Helmholtz avec des longueurs de col différentes et correctement choisies. Tous les résultats numériques sont validés expérimentalement.

### **Enhancing the absorption properties of acoustic porous plates both in viscous and inertial regimes by periodically embedding Helmholtz resonators.**

Auteurs : J.-P. Groby, B. Nennig, C. Lagarrigue, B. Brouard, O. Dazel, and V. Tournat  
Submitted : Applied Physics Letters in July 2013

Air saturated porous materials, namely foams and wool, are often used as sound absorbing materials. Nevertheless, they suffer from a lack of absorption properties at low frequencies which is inerrant to their absorption mechanisms, even when used as optimized multilayer or graded porous materials. Effectively, these mechanisms only rely on viscous and thermal losses. In the inertial and adiabatic regimes, when the frequencies are larger than the Biot frequency  $f_\nu$ , relatively thin porous plates provide excellent tools to absorb sound, but they fail in the viscous and isothermal regime, i.e., at low frequencies. In the inertial and adiabatic regimes, the pressure satisfies an Helmholtz equation, with losses, while in the viscous and isothermal regime, it satisfies a diffusion equation.

These last decades, several solutions have been proposed to avoid this problem. They usually consist in coupling the viscous and thermal losses of porous materials with additional absorption mechanism, mainly associated with resonance phenomenon arising from the addition of heterogeneities. The absorption enhancement of double porosity materials [37, 38] arise from

resonances of the microporous material excited by the macropores. These macropores are heterogeneities obtained by drilling holes in the porous plate thickness. For high contrast flow resistivity between the micro and the macro porous materials, the absorption enhancement is obtained at the diffusion frequency  $f_d$ , which only depends on the geometry and organization of the holes in infinite double porosity medium. At this frequency, the microporous material is in the viscous regime and the macropore material is in the inertial regime. In practice,  $f_d$  is around the so-called quarter wavelength frequency of the homogeneous microporous plate. Another possibility consists in plugging dead-end pores, i.e. quarter-wavelength resonators, on open pores to create dead-end porosity materials [39]. This results in anomalies in the absorption coefficient when the wavelength is of the order of the dead-end pore length. Nevertheless, the absorption enhancement is still not completely understood and is subjected to the inertial regime with regards to the dead-end pores. Metaporous materials consist in exciting modes trapping the energy between periodic rigid inclusions embedded in the porous plate and the rigid backing or in the inclusions themselves (split-ring resonators). The absorption properties are enhanced at lower frequencies than the so-called quarter wavelength frequency [40]. When split-ring resonators are correctly arranged and coupled with the rigid backing, the absorption coefficient can be higher than 0.9 for wavelengths smaller than 10 times the material thickness, which largely overcome the usual limit of the quarter wavelength [125]. But this technique is only efficient in the inertial regime, because the split-ring resonators are occupied by porous materials enabling to lower their resonance frequency. Implicitly, this means that it is possible to absorb frequencies higher than the Biot frequency  $f_v$  with very thin structures, but that an increase of the thickness does not lead to enhanced absorption for lower frequencies. Effectively, the resonators cannot resonate when occupied by a porous material in the viscous and isothermal regime, because the pressure field satisfy a diffusion equation. Adding periodic air cavities to the rigid backing enable to partially solve this problem, but the wave phenomena, namely modified mode of the backed plate are associated with large lateral periodicity. Recently, membrane-type metamaterials that exhibit nearly total reflection at an anti-resonance frequency [42] or nearly total absorption due to the flapping motion of asymmetric rigid platelets added to the membrane [43] has been studied, but their absorption properties are limited in the metamaterial resonance frequency range. Metamaterials have induced a revival of interest in Helmholtz resonators (HRs) to manufacture negative bulk modulus and mass density materials [44, 45]. In [44], split hollow sphere were embedded in a sponge matrix. This material exhibit negative bulk modulus at the HR resonance, but the absorption properties of the structure was not analysed. Use of Helmholtz resonators as absorber is not new [46, 47, 48], but this was never been coupled with porous materials.

In this letter, the absorption of a 2.25 cm-thick Melamine plate is enhanced both in the viscous and inertial regimes by periodically embedding HRs occupied by the air medium. Melamine foam is widely used in anechoic room and sound packages. The numerical calculations are performed with an in-house Finite-Element method described in [126] and are validated with experiments. The rigid frame porous material is modeled using the Johnson-Champoux-Allard model [114, 115]. The bulk modulus  $K_p$  and density  $\rho_p$  account for the thermal and viscous losses respectively. They depend on the specific heat ratio  $\gamma = 1.4$ , the atmospheric pressure  $P_0 = 101325$  Pa, the Prandtl number  $Pr = 0.71$ , the density of the fluid in the (inter-connected) pores  $\rho_f = 1.213 \text{ kg.m}^{-3}$ , the viscosity of the fluid  $\eta = 1.839 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ , the porosity  $\phi$ , tortuosity  $\alpha_\infty$ , flow resistivity  $\sigma$ , the thermal resistivity  $\sigma'$ , thermal and viscous characteristic lengths  $\Lambda'$  and  $\Lambda$ , and viscous/inertial and adiabatic/isothermal crossovers  $\omega_v = 2\pi f_v = \sigma\phi/\rho_f\alpha_\infty$  and  $\omega_a = \sigma_a\phi/\rho_f\alpha_\infty$ . The thermal resistivity is related to the thermal characteristic length [115] through  $\sigma_a = 8\alpha_\infty\eta/\phi\Lambda'^2$ .

| $\phi$ | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$ ( $\mu\text{m}$ ) | $\Lambda'$ ( $\mu\text{m}$ ) | $\sigma$ (N.s.m <sup>-4</sup> ) | $f_\nu$ (Hz) | $f_a$ (Hz) |
|--------|-----------------|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------|--------------|------------|
| 0.98   | 1.02            | 180                         | 240                          | 12000                           | 1512         | 335        |

TABLE 9 – Acoustical parameters of the Melamine foam.

The parameters of the Melamine foam are reported in Table 9. These parameters have been evaluated using the traditional methods (Flowmeter for the flow resistivity and ultrasonic methods for the 4 other parameters, together with a cross-validation by impedance tube measurement) described in [116].

The sample is composed of a Melamine foam as the porous matrix and two HRs of cylindrical shapes as shown Fig.37. The brass hollow cylindrical shells are 8 mm outer radius, 6.8 mm inner radius, and 40 mm long. They are closed by two 1 mm thick circular aluminum plates glued on both ends of each shell. Therefore, the total length of the resonator is 42 mm. The  $x_3$  coordinate of both cylinders is  $x_3^{inc} = 11.5$  mm, while  $x_1^{inc^1} = 11.5$  mm and  $x_1^{inc^2} = 30.5$  mm. They are drilled at 12 mm from one end with a 4 mm in diameter hole. Aluminum necks of inner radius 1.5 mm and length  $l_{neck}$  are inserted in. The sample also contains 2 unit cells. The initial 22.5 mm-thick Melamine foam was drilled and the material volumes that are then occupied by the resonators were removed. The sample is placed at the end of an impedance tube, with a square cross-section with a side length 4.2 cm, against a copper plug that closes the tube and acts as a rigid boundary. This sample, also derived from a 2-dimensional configuration, because it was shown that 2D inclusion enable to reach nearly total absorption at the frequency of excitation of the trapped mode for lower filling fraction than a 3D inclusion, and because it enable a large volume of the resonators. The absorption coefficient of the sample is measured. The tube cut-off frequency is 4150 Hz. By assuming that plane waves propagate below the cut-off frequency, the infinitely rigid boundary conditions of the tube act like perfect mirrors and create a periodicity pattern in the  $x_1$  and  $x_2$  directions with a periodicity of 4.2 cm. This technique was previously used in [125] and allows to determine experimentally the absorption coefficient of a quasi-infinite 3D periodic structure just with one or a correctly arranged small number of unit cell.

HRs are first designed with  $l_{neck} = 10$  mm to resonate at the same frequency  $f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vl_{eff}}} = 540$  Hz. In the previous formula,  $c$  is the sound speed of air,  $A$  is the area of the neck,  $V$  the volume of the resonators, and  $l_{eff} = l_{neck} + 8d/3\pi$  is the effective length of the neck, with  $d$  the diameter of the neck. This resonance is far below  $f_\nu$  and close to  $f_a$ , which means that the porous material is in the viscous regime. The main advantage of HR is that it can resonate at a very low frequency for small dimension [48] compared to 2D resonator (double or simple split-ring resonator). The absorption coefficient of this sample is depicted Figure 38, showing a good agreement between the FE modeling (red curve) and the measurements (black curve). The differences are attributed to imperfections in the sample manufacturing. When compared to the absorption of the initial Melamine plate (blue curve), the absorption is largely increased around 3000 Hz, because of the excitation of a trapped mode that trap the energy between the cylindrical inclusions and the rigid backing, and around 560 Hz because of the HRs resonance. In particular, the absorption coefficient is 0.65 at  $f_r$  which corresponds to an increase of 0.5 when compared to the absorption of the initial Melamine plate. The associated wavelength in the air medium is 27 times larger than the sample thickness. This means that the absorption properties of porous materials in the viscous regime can be enhanced by embedding air filled HRs, but also that this type of structure can accurately absorb sound for frequencies much larger than the

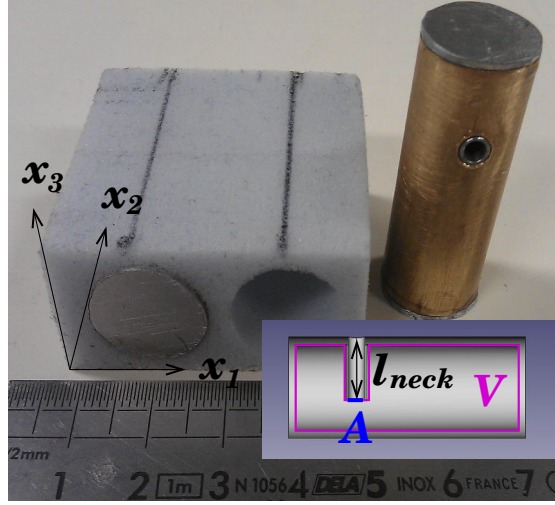


FIGURE 37 – Sample tested and sketch of the cross sectional plan view of a resonator.

sample thickness.

The influence of the position of the neck was investigated both numerically and experimentally. It was found to be quite difficult to couple them as it is the case with split-ring resonators [127, 125]. The largest absorption enhancement is obtained when the neck is facing the air medium. In this configuration, the energy advection by the HR is large. A larger velocity gradient in the neck and in its neighboring is induced leading to a larger viscous dissipation. When the neck is facing the rigid backing,  $f_r$  is lower, but the high of absorption peak is also lower because of a poor energy advection.

Following this idea, a small amount of porous material was removed just in front of the neck. The radiation impedance of HRs is also smaller allowing the advection to be larger. The amplitude of the absorption coefficient at the resonance frequency of the HRs is 26% larger and reach 0.82, as shown Figure 39. Nevertheless, this is associated with a thickening of absorption peak.

In order to enlarge the high absorption frequency band, the lengths of the HRs neck are modified to be  $l_{neck}^1 = 11 \text{ mm}$  ( $f_r^1 = 521 \text{ Hz}$ ) and  $l_{neck}^2 = 7 \text{ mm}$  ( $f_r^2 = 618 \text{ Hz}$ ). While the volume is usually modified [46, 47], in this letter a modification of the neck length is preferred. These two lengths were determined in order to sufficiently decoupled the two modes to enlarge the large absorption bandwidth but not sufficiently to lead to two separated peaks. While the absorption coefficient is modified around the frequency of excitation of the HRs, the absorption coefficient is unchanged at higher frequency. The absorption coefficient is larger than 0.5 over 120 Hz (between 500 Hz and 620 Hz) in case of two identical resonators, while it is over 190 Hz (between 500 Hz and 690 Hz) in case of these two different resonators, which represents an enlargement of 60% of the large absorption band width.

In this letter, the absorption of a small thickness porous foam is enhanced both in the viscous and inertial regime by embedding HRs. This embedment leads to trap mode excitation that enhanced the absorption coefficient for frequencies lower than the quarter-wavelength frequency and to HR excitation. In particular, a large absorption is reached for wavelength in the air 27 times larger than the sample thickness. The absorption amplitude and bandwidth is then enlarge

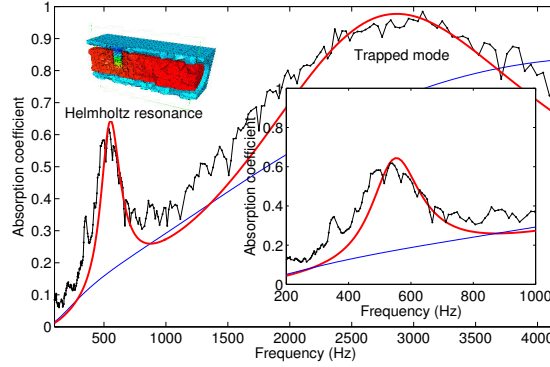


FIGURE 38 – Absorption coefficient of the Melamine foam with two HRs embedded measured (black curve) and calculated (red curve). The first inset depicts a snapshot of the pressure field modulus along a cross sectional plan view of the resonator at its resonance frequency, while the second inset shows a zoom the absorption coefficient around this frequency. The absorption coefficient of the initial Melamine foam is also shown (blue curve).

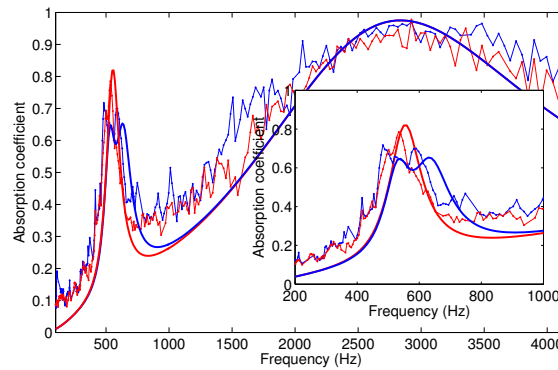


FIGURE 39 – Absorption coefficient of the Melamine foam with two  $l_{neck} = 10$  mm HRs embedded in (red curves) and one  $l_{neck}^1 = 11$  mm and  $l_{neck}^2 = 7$  mm HRs embedded in (blue curves) at normal incidence and with the porous material removed in front of the neck : measurements (solid curves with markers), FE results (solid curves). The inset shows a zoom the absorption coefficient around the HR frequency.

by removing porous material in front of the neck, enabling a lower impedance radiation, and by adjusting the resonance frequencies of the HR. This paves the way of future development of very thin broadband large absorption metamaterials based on optimized HRs coupled with porous materials.

## RÉFÉRENCES

- [1] Z. Yang, H. Dai, N. Chan, G. Ma, and P. Sheng, “Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50–1000 Hz regime,” *Applied Physics Letters*, vol. 96, p. 041906, 2010.
- [2] M. Saadatnia, G. Ebrahimi, and M. Tajvidi, “Comparing sound absorption characteristic of acoustic boards made of Aspen particles and different percentage of Wheat and Barely straws,” in *Abstracts of 17th World Conference on Non-Destructive Testing*, 2008.
- [3] J. Sanchez-Dehesa, V. Garcia-Chocano, D. Torrent, F. Cervera, S. Cabrera, and F. Simon, “Noise control by sonic crystal barriers made of recycled materials,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 129, p. 1173, 2011.
- [4] J. Vasseur, P. Deymier, A. Khelif, P. Lambin, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, L. Dobrzynski, N. Fettouhi, and J. Zemmouri, “Phononic crystal with low filling fraction and absolute acoustic band gap in the audible frequency range : A theoretical and experimental study,” *Physical Review E*, vol. 65, no. 5, p. 056608, 2002.
- [5] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. Chan, and P. Sheng, “Locally resonant sonic materials,” *Science*, vol. 289, no. 5485, p. 1734, 2000.
- [6] J. Vasseur, P. Deymier, B. Chenni, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and D. Prevost, “Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals,” *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 14, pp. 3012–3015, 2001.
- [7] X. Hu, K. Ho, C. Chan, and J. Zi, “Homogenization of acoustic metamaterials of Helmholtz resonators in fluid,” *Physical Review B*, vol. 77, no. 17, p. 172301, 2008.
- [8] J. Joannopoulos, *Photonic crystals : molding the flow of light*, ch. 5,10. Princeton Univ Pr, 2008.
- [9] D. P. Elford, L. Chalmers, F. V. Kusmartsev, and G. M. Swallowe, “Matryoshka Locally Resonant Sonic Crystal,” *ArXiv e-prints*, p. 1102.0399v1, Feb. 2011.
- [10] S. Guenneau, A. Movchan, G. Pétursson, and S. Ramakrishna, “Acoustic metamaterials for sound focusing and confinement,” *New Journal of Physics*, vol. 9, p. 399, 2007.
- [11] E. Fuster-Garcia, V. Romero-Garcia, J. Sanchez-Perez, and L. Garcia-Raffi, “Targeted band gap creation using mixed sonic crystal arrays including resonators and rigid scatterers,” *Applied physics letters*, vol. 90, p. 244104, 2007.
- [12] C. Linton and D. Evans, “The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 215, no. 1, pp. 549–569, 1990.

- [13] O. Umnova, K. Attenborough, and C. Linton, "Effects of porous covering on sound attenuation by periodic arrays of cylinders," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, p. 278, 2006.
- [14] F. Zaviska, "Über die beugung elektromagnetischer wellen an parallelen, unendlich. langen kreiszyhndern," *Annln. Phys.*, vol. 345, pp. 1023–1056, 1913.
- [15] A. Phani, J. Woodhouse, and N. Fleck, "Wave propagation in two-dimensional periodic lattices," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119, p. 1995, 2006.
- [16] T. Miyashita, "Sonic crystals and sonic wave-guides," *Measurement Science and Technology*, vol. 16, p. R47, 2005.
- [17] M. Plihal and A. A. Maradudin, "Photonic band structure of two-dimensional systems : The triangular lattice," *Phys. Rev. B*, vol. 44, pp. 8565–8571, Oct 1991. last view dated (09/04/12).
- [18] X. Wang, X.-G. Zhang, Q. Yu, and B. N. Harmon, "Multiple-scattering theory for electromagnetic waves," *Phys. Rev. B*, vol. 47, pp. 4161–4167, Feb 1993.
- [19] Z. Liu, C. Chan, P. Sheng, A. Goertzen, and J. Page, "Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects : Theory and experiment," *Physical Review B*, vol. 62, no. 4, pp. 2446–2457, 2000.
- [20] P. Barber and S. Hill, *Light scattering by particles : computational methods*, vol. 2, ch. 2, p. 30. World Scientific Pub Co Inc, 1990.
- [21] J. Page, A. Sukhovich, S. Yang, M. Cowan, F. Van Der Biest, A. Tourin, M. Fink, Z. Liu, C. Chan, and P. Sheng, "Phononic crystals," *physica status solidi (b)*, vol. 241, no. 15, pp. 3454–3462, 2004.
- [22] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, "Scattering by a random set of parallel cylinders," *JOSA A*, vol. 11, no. 9, pp. 2526–2538, 1994.
- [23] S. Guenneau, A. Movchan, F. Zolla, N. Movchan, and A. Nicolet, "Acoustic band gaps in arrays of neutral inclusions," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, no. 6, pp. 1962–1969, 2010.
- [24] V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, and L. Jaouen, "Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media," *Physical Review E*, vol. 70, no. 2, p. 026609, 2004.
- [25] H. Larabi, Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, and J. O. Vasseur, "Multicoaxial cylindrical inclusions in locally resonant phononic crystals," *Phys. Rev. E*, vol. 75, p. 066601, Jun 2007.
- [26] Z. Hou, J. Liu, W. Kuang, Y. Liu, and S. Wu, "Sonic crystal with open resonant cavities," *Phys. Rev. E*, vol. 75, p. 026608, Feb 2007.
- [27] V. Romero-García, J. Sánchez-Pérez, and L. Garcia-Raffi, "Tunable wideband bandstop acoustic filter based on two-dimensional multiphysical phenomena periodic systems," *Journal of Applied Physics*, vol. 110, p. 014904, 2011.
- [28] Z. Wang, S. Lee, C. Kim, C. Park, K. Nahm, and S. Nikitov, "Effective medium theory of the one-dimensional resonance phononic crystal," *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 20, p. 055209, 2008.
- [29] R. Zulkifli, M. Nor, A. Ismail, M. Nuawi, and M. Tahir, "Effect of Perforated Size and Air Gap Thickness on Acoustic Properties of Coir Fibre Sound Absorption Panels," *European Journal of Scientific Research*, vol. 28, no. 2, pp. 242–252, 2009.

- [30] L. Kinsler, A. Frey, A. Coppens, and J. Sanders, *Fundamentals of acoustics*, vol. 1, p. 284. 1999.
- [31] O. Umnova, A. S. Elliott, and R. Venegas, "Omnidirectional acoustic absorber with a porous core-theory and measurements," in *Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 19, p. 065018, 2013.
- [32] O. Richoux, *Etude de la propagation des ondes mécaniques dans un réseau unidimensionnel comportant du désordre et/ou des non-linéarités localisées*. Acoustic propagation in periodic media, LAUM, Avenue O. Messiaen, 2002.
- [33] O. Richoux, C. Depollier, and J. Hardy, "Characterization by a time-frequency method of classical waves propagation in one-dimensional lattice : effects of the dispersion and localized nonlinearities," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 88, no. 6, pp. 934–941, 2002.
- [34] S.-H. Seo and Y.-H. Kim, "Silencer design by using array resonators for low-frequency band noise reduction," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, p. 2332, 2005.
- [35] R. Chanaud, "Effects of geometry on the resonance frequency of helmholtz resonators," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 178, no. 3, pp. 337–348, 1994.
- [36] A. Selamet, M. Xu, I.-J. Lee, and N. Huff, "Helmholtz resonator lined with absorbing material," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, p. 725, 2005.
- [37] X. Olny and C. Boutin, "Acoustic wave propagation in double porosity media," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 114, pp. 73–89, 2003.
- [38] J. Auriault and C. Boutin *Transp. Porous Media*, vol. 14, pp. 143–162, 1998.
- [39] T. Dupont, P. Leclaire, O. Sicot, X. Gong, and R. Panneton, "Acoustic properties of air-saturated porous materials containing dead-end porosity," *J. Appl. Phys.*, vol. 110, p. 094903, 2011.
- [40] J.-P. Groby, A. Duclos, O. Dazel, L. Boeckx, and L. Kelders, "Enhancing absorption coefficient of a backed rigid frame porous layer by embedding circular periodic inclusions," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 130, pp. 3771–3780, 2011.
- [41] B. Nennig, Y. Renou, J.-P. Groby, and Y. Aurégan, "A mode matching approach for modeling two dimensional porous grating with infinitely rigid or soft inclusions," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 131, p. 3841, 2012.
- [42] Z. Yang, J. Mei, M. Yang, N. Chan, and P. Sheng, "Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 204301, 2008.
- [43] J. Mei, G. Ma, M. Yang, Z. Yang, W. Wen, and P. Sheng, "Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound," *Nature Communications*, p. ncommes1758, 2012.
- [44] C.-L. Ding and X.-P. Zhao, "Multi-band and broadband acoustic metamaterial with resonant structures," *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 44, p. 215402, 2011.
- [45] H. Zeng, C. Luo, H. Chen, S. Zhia, and X. Zhao *ArXiv*, p. 1210.2527, 2012.
- [46] S. Kim, Y.-H. Kim, and J.-H. Jang *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 119, pp. 1933–1936, 2006.
- [47] S.-H. Seo, "Silencer design by using array resonators for low-frequency band noise reduction," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118, pp. 2332–2338, 2005.

- [48] W. Yunker, C. Stevens, G. Flowers, and D. R.N., "Sound attenuation using microelectromechanical systems fabricated acoustic metamaterials," *J. Appl. Phys.*, vol. 113, p. 024906, 2013.
- [49] J. Groby, O. Dazel, A. Duclos, L. Boeckx, and L. Kelders, "Enhancing the absorption coefficient of a backed rigid frame porous layer by embedding circular periodic inclusions," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 130, no. 6, p. 3771, 2011.
- [50] J. Groby, A. Wirgin, L. De Ryck, W. Lauriks, R. Gilbert, and Y. Xu, "Acoustic response of a rigid-frame porous medium plate with a periodic set of inclusions," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 126, p. 685, 2009.
- [51] C. Linton and P. McIver, "Embedded trapped modes in water waves and acoustics," *Wave motion*, vol. 45, no. 1-2, pp. 16–29, 2007.
- [52] R. Porter and D. Evans, "Embedded rayleigh-bloch surface waves along periodic rectangular arrays," *Wave Motion*, vol. 43, no. 1, pp. 29–50, 2005.
- [53] D. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 176, no. 1, pp. 379–402, 1987.
- [54] Y. Champoux and J. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," *Journal of Applied Physics*, vol. 70, no. 4, pp. 1975–1979, 1991.
- [55] J. Allard, O. Dazel, G. Gautier, J. Groby, and W. Lauriks, "Prediction of sound reflection by corrugated porous surfaces," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 129, p. 1696, 2011.
- [56] A. Norris and G. Wickham, "Elastic helmholtz resonators," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 93, p. 617, 1993.
- [57] A. Krynkin, O. Umnova, A. Chong, S. Taherzadeh, and K. Attenborough, "Scattering by coupled resonating elements in air," *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 44, no. 12, p. 125501, 2011.
- [58] E. Shenderov, *Wave Problems in Underwater Acoustics*, p. p.126. Leningrad : Sudostroenie, 1972.
- [59] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55, p. p.363. Courier Dover Publications, 1964.
- [60] A. Movchan and S. Guenneau, "Split-ring resonators and localized modes," *Physical Review B*, vol. 70, no. 12, p. 125116, 2004.
- [61] J. Groby, W. Lauriks, and T. Vigran, "Total absorption peak by use of a rigid frame porous layer backed by a rigid multi-irregularities grating," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 127, p. 2865, 2010.
- [62] J.-P. Groby, A. Duclos, O. Dazel, L. Boeckx, and W. Lauriks, "Absorption of a rigid frame porous layer with periodic circular inclusions backed by a periodic grating," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 129, pp. 3035–3046, 2011.
- [63] E. H. Aarts and P. J. Van Laarhoven, "Statistical cooling : A general approach to combinatorial optimization problems.," *Philips J. Res.*, vol. 40, no. 4, pp. 193–226, 1985.
- [64] D. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional, 1 ed., 1989.

- [65] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence*. MIT press, 1992.
- [66] N. Durand, *Algorithmes génétiques et autres outils d'optimisation appliqués à la gestion de trafic aérien*. PhD thesis, Habilitation thesis, National Polytechnic Institute of Toulouse, France, 2004.
- [67] W. M. Spears and K. A. De Jong, "An analysis of multi-point crossover," tech. rep., DTIC Document, 1990.
- [68] Z. Michalewicz, *Genetic algorithms+ data structures= evolution programs*. springer, 1998.
- [69] M. Farhat, S. Guenneau, and S. Enoch, "Ultrabroadband elastic cloaking in thin plates," *Physical review letters*, vol. 103, no. 2, p. 024301, 2009.
- [70] R. Martinezsala, J. Sancho, J. Sanchez, V. Gomez, J. Llinares, and F. Meseguer, "Sound-attenuation by sculpture," *nature*, vol. 378, no. 6554, pp. 241–241, 1995.
- [71] J. Sánchez-Pérez, D. Caballero, R. Martinez-Sala, C. Rubio, J. Sánchez-Dehesa, F. Meseguer, J. Llinares, and F. Gálvez, "Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders," *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 24, p. 5325, 1998.
- [72] M. Sigalas, M. S. Kushwaha, E. N. Economou, M. Kafesaki, I. E. Psarobas, and W. Steurer, "Classical vibrational modes in phononic lattices : theory and experiment," *Zeitschrift für Kristallographie*, vol. 220, no. 9-10, pp. 765–809, 2005.
- [73] E. Yablonovitch, "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics," *Physical review letters*, vol. 58, no. 20, p. 2059, 1987.
- [74] S. John *et al.*, "Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices," *Physical review letters*, vol. 58, no. 23, pp. 2486–2489, 1987.
- [75] M. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, "Acoustic band structure of periodic elastic composites," *Physical Review Letters*, vol. 71, no. 13, p. 2022, 1993.
- [76] M. S. Kushwaha, "Stop-bands for periodic metallic rods : Sculptures that can filter the noise," *Applied Physics Letters*, vol. 70, no. 24, pp. 3218–3220, 1997.
- [77] Y. Pennec, J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzyński, and P. A. Deymier, "Two-dimensional phononic crystals : Examples and applications," *Surface Science Reports*, vol. 65, no. 8, pp. 229–291, 2010.
- [78] M. Sigalas, "Elastic wave band gaps and defect states in two-dimensional composites," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 101, p. 1256, 1997.
- [79] X. Li and Z. Liu, "Coupling of cavity modes and guiding modes in two-dimensional phononic crystals," *Solid state communications*, vol. 133, no. 6, pp. 397–402, 2005.
- [80] V. Laude, Y. Achaoui, S. Benchabane, and A. Khelif, "Evanescent bloch waves and the complex band structure of phononic crystals," *Physical Review B*, vol. 80, no. 9, p. 092301, 2009.
- [81] V. Romero-García, J. Sánchez-Pérez, S. Castiñeira-Ibáñez, and L. Garcia-Raffi, "Evidences of evanescent bloch waves in phononic crystals," *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 12, pp. 124102–124102, 2010.
- [82] V. Sánchez-Morcillo, K. Staliunas, V. Espinosa, I. Pérez-Arjona, J. Redondo, and E. Soliveres, "Propagation of sound beams behind sonic crystals," *Physical Review B*, vol. 80, no. 13, p. 134303, 2009.

- [83] A. Khelif, A. Choujaa, B. Djafari-Rouhani, M. Wilm, S. Ballandras, and V. Laude, "Trapping and guiding of acoustic waves by defect modes in a full-band-gap ultrasonic crystal," *Physical Review B*, vol. 68, no. 21, p. 214301, 2003.
- [84] M. Sigalas, E. Economou, and M. Kafesaki, "Spectral gaps for electromagnetic and scalar waves : Possible explanation for certain differences," *Physical Review B*, vol. 50, no. 5, pp. 3393–3396, 1994.
- [85] D. Caballero, J. Sanchez-Dehesa, C. Rubio, R. Martinez-Sala, J. Sanchez-Perez, F. Meseguer, and J. Llinares, "Large two-dimensional sonic band gaps," *Physical Review E*, vol. 60, no. 6, p. R6316, 1999.
- [86] C. M. Anderson and K. P. Giapis, "Larger two-dimensional photonic band gaps," *Physical review letters*, vol. 77, no. 14, p. 2949, 1996.
- [87] C. M. Anderson and K. P. Giapis, "Symmetry reduction in group 4mm photonic crystals," *Physical Review B*, vol. 56, no. 12, p. 7313, 1997.
- [88] R. Wang, X.-H. Wang, B.-Y. Gu, and G.-Z. Yang, "Effects of shapes and orientations of scatterers and lattice symmetries on the photonic band gap in two-dimensional photonic crystals," *J. Appl. Phys.*, vol. 90, p. 4307, 2001.
- [89] C. Goffaud and J. Vigneron, "Theoretical study of a tunable phononic band gap system," *Phys. Rev. B*, vol. 64, p. 075118, 2001.
- [90] R. C. Norris, J. S. Hamel, and P. Nadeau, "Phononic band gap crystals with periodic fractal inclusions : Theoretical study using numerical analysis," *Journal of Applied Physics*, vol. 103, no. 10, pp. 104908–104908, 2008.
- [91] O. R. Bilal and M. I. Hussein, "Ultrawide phononic band gap for combined in-plane and out-of-plane waves," *Physical Review E*, vol. 84, no. 6, p. 065701, 2011.
- [92] S.-C. S. Lin and T. J. Huang, "Tunable phononic crystals with anisotropic inclusions," *Physical Review B*, vol. 83, no. 17, p. 174303, 2011.
- [93] F. Lemoult, N. Kaina, M. Fink, and G. Lerosey, "Wave propagation control at the deep subwavelength scale in metamaterials," *Nature Physics*, 2012.
- [94] M. Kushwaha, P. Halevi, G. Martinez, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, "Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites," *Physical Review B*, vol. 49, no. 4, p. 2313, 1994.
- [95] F. Ihlenburg, *Finite element analysis of acoustic scattering*, vol. 132. Springer, 1998.
- [96] J.-H. Sun and T.-T. Wu, "Propagation of surface acoustic waves through sharply bent two-dimensional phononic crystal waveguides using a finite-difference time-domain method," *Physical Review B*, vol. 74, no. 17, p. 174305, 2006.
- [97] V. Romero-García, J. Sánchez-Pérez, and L. Garcia-Raffi, "Propagating and evanescent properties of double-point defects in sonic crystals," *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 8, p. 083024, 2010.
- [98] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of computational physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, 1994.
- [99] I. Harari, M. Slavutin, and E. Turkel, "Analytical and numerical studies of a finite element pml for the helmholtz equation," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 8, no. 01, pp. 121–137, 2000.

- [100] Q. Qi and T. L. Geers, "Evaluation of the perfectly matched layer for computational acoustics," *Journal of Computational Physics*, vol. 139, no. 1, pp. 166–183, 1998.
- [101] U. Basu and A. K. Chopra, "Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite-element implementation," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, no. 11, pp. 1337–1375, 2003.
- [102] Y. Zeng, J. He, and Q. Liu, "The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media," *Geophysics*, vol. 66, no. 4, pp. 1258–1266, 2001.
- [103] I. Navon, B. Neta, and M. Hussaini, "A perfectly matched layer approach to the linearized shallow water equations models," *Monthly Weather Review*, vol. 132, no. 6, pp. 1369–1378, 2004.
- [104] J.-L. Lions, J. Méttral, and O. Vacus, "Well-posed absorbing layer for hyperbolic problems," *Numerische Mathematik*, vol. 92, no. 3, pp. 535–562, 2002.
- [105] H. Pichard, O. Richoux, and J.-P. Groby, "Experimental demonstrations in audible frequency range of band gap tunability and negative refraction in two-dimensional sonic crystal," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 132, pp. 2816–2822, 2012.
- [106] L. Feng, X.-P. Liu, M.-H. Lu, Y.-B. Chen, Y.-F. Chen, Y.-W. Mao, J. Zi, Y.-Y. Zhu, S.-N. Zhu, and N.-B. Ming, "Refraction control of acoustic waves in a square-rod-constructed tunable sonic crystal," *Physical Review B*, vol. 73, no. 19, p. 193101, 2006.
- [107] L. Sanchis, A. Håkansson, F. Cervera, and J. Sánchez-Dehesa, "Acoustic interferometers based on two-dimensional arrays of rigid cylinders in air," *Physical Review B*, vol. 67, no. 3, p. 035422, 2003.
- [108] B. Nennig, Y. Renoux, J.-P. Groby, and Y. Aurégan, "A mode matching approach for modeling two dimensional porous grating with infinitely rigid or soft inclusions," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 131, pp. 3841–3852, 2012.
- [109] V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, and L. Jaouen, "Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media," *Phys. Rev. E*, vol. 70, p. 026609, 2004.
- [110] C. Lagarrigue, J.-P. Groby, V. Tournat, and O. Dazel, "Parametric study of a metaporous made of inclusions embedded in a rigid frame porous material glued on a rigid backing," in *Proc. of Acoustics 2012*, 2012. hal-00810737.
- [111] J.-P. Groby, A. Wirgin, and E. Ogam, "Acoustic response of a periodic distribution of macroscopic inclusions within a rigid frame porous plate," *Waves Random Complex*, vol. 18, pp. 409–433, 2008.
- [112] H. Hyun and L. Siu-Kit, "Effects of inclusion shapes within rigid porous materials on acoustic performance," in *164th Meeting of the Acoustical Society of America*, vol. 132, pp. 1905–1905, 2012. Kansas City.
- [113] J.-P. Groby, B. Brouard, O. Dazel, B. Nennig, and L. Kelders, "Enhancing the absorption of a rigid frame porous layer by use of a rigid backing with three-dimensional periodic multi-irregularities," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 133, pp. 821–831, 2013.
- [114] D. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J. Fluid Mech.*, vol. 176, pp. 379–402, 1987.
- [115] Y. Champoux and J.-F. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," *J. Appl. Phys.*, vol. 70, pp. 1975–1979, 1991.

- [116] J.-F. Allard and N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials*, ch. 5, pp. 73–107. Chichester : John Wiley & Sons, 2009.
- [117] J.-P. Groby, W. Lauriks, and T. Vigran, “Total absorption peak by use of a rigid frame porous layer backed with a rigid multi-irregularities grating,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 127, pp. 2865–2874, 2010.
- [118] M. Molerón, S. Félix, V. Pagneux, and O. Richoux, “Control of absorption and directivity properties of noise barriers using periodic surfaces,” in *Proc. of Internoise*, 2012.
- [119] M. Molerón, S. Félix, V. Pagneux, and O. Richoux, “Sound propagation in periodic urban area,” *J. Appl. Phys.*, vol. 111, p. 114906, 2012.
- [120] C. Fuller and T.-D. Saux, “Sound absorption using poro-elastic acoustic metamaterials,” in *Proc. of Internoise*, 2012.
- [121] P. R. Amestoy, I. S. Duff, and J.-Y. L’Excellent, “Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers,” *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.*, vol. 184, pp. 501–520, 2000.
- [122] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka, “Freefem++ manual (version 3.20).” <http://www.freefem.org/ff++/index.htm> (last view 5 mai 2014).
- [123] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, “Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities,” *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 79, no. 11, pp. 1309–1331, 2009.
- [124] “FreeCAD is a general purpose feature-based, parametric 3D modeler (version 0.13).” <http://free-cad.sourceforge.net/> (last view 5 mai 2014).
- [125] C. Lagarrigue, J.-P. Groby, V. Tournat, O. Dazel, and O. Umnova, “Absorption of sound by porous layers with embedded periodic array of resonant inclusions,” *accepted for publication in J. Acoust. Soc. Am. special issue Porous Material*, 2013.
- [126] J.-P. Groby, B. Nennig, C. Lagarrigue, B. Brouard, O. Dazel, and V. Tournat, “Enhancing backed rigid frame porous layer absorption by periodically embedding non-resonant simple shape three-dimensional inclusions.” *J. Acoust. Soc. Am.*, (submitted), 2013.
- [127] Y. Cheng and X. Liu *Appl. Phys. A*, vol. 109, pp. 805–811, 2012.

# THÈSE DE DOCTORAT

**Clément LAGARRIGUE**

**Métamatériaux performants dans la gamme des fréquences audibles**  
Simulations et validations expérimentales

**High performance metamaterials in the audible frequency range**  
Simulations and experimental validations

## Résumé

Depuis plusieurs dizaines d'années, les cristaux photoniques et phononiques font l'objet d'études poussées notamment en optique, électromagnétisme et en acoustique. Ces Métamatériaux, constitués de diffuseurs périodiques, ont des propriétés impossibles à observer pour des matériaux usuels et peuvent par exemple, courber les rayons ou interdire la transmission des ondes sonores sur certaines gammes de fréquences (bandes interdites). En agissant sur les caractéristiques géométriques du cristal il est possible de combiner les pertes en transmission liées à la période, à des effets de résonances plus basses fréquences liés aux diffuseurs (rigide, résonnant...) et obtenir des coefficients de transmission quasi nuls, ou d'absorption quasi totale sur de larges bandes de fréquences. Deux métamatériaux sont étudiés, visant à trouver des solutions alternatives à des problématiques rencontrées en acoustique et utilisant un réseau périodique d'inclusions résonantes. Le premier est un cristal sonore utilisé comme barrière acoustique et créé à l'aide de cannes de bambou percées comportant des pertes en transmission basses fréquences. Le second est un panneau de matériau poreux enfermant des inclusions résonantes et offrant une absorption acoustique quasi totale pour des longueurs d'ondes jusqu'à 10 fois supérieures à l'épaisseur du matériau. Les comportements de ces deux dispositifs ont été étudiés théoriquement, expérimentalement et numériquement via plusieurs méthodes qui ont permis de mettre en évidence leurs excellentes performances pour des applications acoustiques dans l'audible.

## Mots clés

Acoustique, développement durable, métaporeux, cristal sonore, éléments finis, PWE, MST

## Abstract

Since several decades, photonic and phononic crystals are the center of numerous studies and in particular in the optics, electromagnetism and acoustics fields. These metamaterials, created by a periodic array of inclusions, have properties impossible to obtain with usual materials. They can, for example, bend the waves or stop the waves for some frequency ranges (band gap). By changing the characteristic of the unit cell, it is possible to combine transmission losses linked to the periodicity, with low frequency resonances linked to the type of scatterer (rigid, resonator...) and obtain very low transmission coefficient or very high absorption coefficient on very large frequency ranges depending on the device. Two metamaterials devices are studied to find alternative solutions, for acoustics problems, by using periodic array of scatterers. The first device is a sonic crystal used as a noise barrier and built with drilled bamboo rods, that have low frequency transmission losses (around 300 Hz and around 2000 Hz). The second device is a periodic array of resonant inclusions embedded in a porous plate that can absorb almost all the waves for a wide frequency range that correspond to wavelength up to 10 times bigger than the thickness of the plate. The behavior of these two devices is studied theoretically, experimentally and numerically by using several methods (Plane Waves Expansion, Multiple Scattering Theory for the first device and finite element method for the second). All these methods allow to bring out the very good performances of these metamaterials devices in the audible frequency range.

## Key Words

Acoustic, sustainable development, metaporous, sonic crystal, finite element, PWE, MST