HAL
open science

Répartition des points rationnels sur certaines classes de variétés algébriques

Kévin Destagnol

▶ **To cite this version:**

Kévin Destagnol. Répartition des points rationnels sur certaines classes de variétés algébriques. Théorie des nombres [math.NT]. Université Sorbonne Paris Cité, 2017. Français. NNT : 2017USPCC119 . tel-02007278

HAL Id: tel-02007278

https://theses.hal.science/tel-02007278v1

Submitted on 5 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Diderot (Paris 7)

Université Sorbonne Paris Cité

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (UMR 7586)

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

Présentée par

Kevin Destagnol

Répartition des points rationnels sur certaines classes de variétés algébriques

Dirigée par **Régis de la Bretèche**

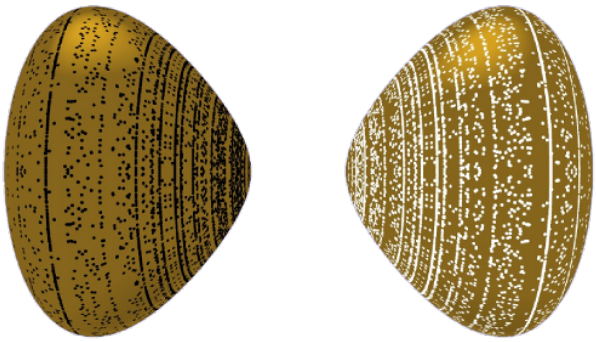
Soutenue publiquement le 8 juin 2017 devant le jury composé de :

M. Régis de la Bretèche	Université Paris Diderot	Directeur
M. Timothy Browning	University of Bristol	Examinateur
M. Étienne Fouvry	Université Paris-Sud	Président
Mme. Mathilde Herblot	Université Paris Diderot	Examinatrice
M. Marc Hindry	Université Paris Diderot	Examinateur
M. Emmanuel Peyre	Université Joseph Fourier	Rapporteur
M. Per Salberger	Chalmers University of Technology	Rapporteur

Au vu des rapports de :

M. Emmanuel Peyre	Université Joseph Fourier
M. Per Salberger	Chalmers University of Technology

Lien direct vers le manuscrit/ Direct link to the manuscript :
https://webusers.imj-prg.fr/~kevin.destagnol/these.pdf



Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
(CNRS – UMR 7586)
Université Paris Diderot (Paris 7)
Bâtiment Sophie Germain - Boîte Courrier 7012
8, place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13
France

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre
Boîte Courrier 290
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

«Ever tried, ever failed ? No matter. Try again. Fail again. Fail better.»
Samuel Beckett–

Remerciements

Le remerciement est un genre centrifuge, au sens ondulatoire du terme. Comme un caillou qu'on lance dans une mare, le remerciement fait des cercles... centrifuges... de plus en plus... larges... de plus en plus éloignés du centre.

Daniel Pennac, *Merci*

Voici (enfin) venu le temps de conclure ces quatre années de thèse et c'est l'occasion pour moi de regarder en arrière et d'adresser à travers ces quelques lignes mes remerciements à tous ceux qui ont de près ou de loin, directement ou indirectement, contribué à cette thèse. Suivant les conseils de Daniel Pennac, je vais m'efforcer de progresser par cercles sans oublier personne mais que l'on veuille bien me pardonner si, pris par la précipitation, j'en arrive à oublier quelqu'un par mégarde.

Mes premiers remerciements s'adressent bien évidemment à mon directeur de thèse, Régis de la Bretèche, qui a su me faire découvrir et me guider avec patience et enthousiasme à travers le monde de la recherche. Ses encouragements, sa disponibilité et son soutien ont été très importants durant ces années de thèse. Je tiens aussi tout particulièrement à le remercier, au delà de ses qualités humaines, pour sa grande générosité mathématique, pour ses relectures attentives de tous mes manuscrits, pour ses intuitions et sa redoutable efficacité mathématique et pour tout ce qu'il m'a appris. Merci également à lui de m'avoir donné l'opportunité de voyager grâce à sa bourse IUF tout au long de ces quatre années et ce dès mes premiers mois de thèse, me permettant ainsi de m'intégrer à la communauté internationale mais aussi de rencontrer d'autres chercheurs capables de me donner un éclairage différent lorsque j'en avais besoin. Enfin, merci pour son aide cette année dans la recherche d'un postdoc pour l'année prochaine.

Mes remerciements vont ensuite tout naturellement à Emmanuel Peyre et à Per Salberger qui m'ont fait l'honneur d'être mes deux rapporteurs. Je les remercie d'avoir eu la gentillesse et la patience (le courage ?) de lire avec bienveillance et intérêt mes travaux de recherche et en particulier la présente thèse, sur laquelle leurs travaux ont eu une influence considérable. Merci également à eux de m'avoir soutenu lors de ma recherche de postdoc et d'avoir accepté de m'écrire des lettres de recommandation à répétition. Je tenais plus spécifiquement à remercier Emmanuel pour les nombreuses discussions très enrichissantes et éclairantes que nous avons pu avoir que ce soit à la Barbade, à Paris ou à Grenoble où il a eu la gentillesse de me donner l'opportunité de venir présenter mon travail. De la

même façon, je tiens à remercier très chaleureusement Per Salberger pour m'avoir accordé du temps et pour avoir répondu à nombre de mes interrogations, notamment l'an dernier à Göteborg, mais aussi pour m'avoir transmis des notes personnelles qui m'ont permis de mener à bien mon deuxième article. Je le remercie également pour ses relectures et ses encouragements constants lors de la rédaction de ce même article.

Merci à Étienne Fouvry de me faire l'honneur de présider mon jury. Sa gentillesse, sa bonne humeur constante (sauf peut être à propos du RER B !), son enthousiasme, ses encouragements permanents mais aussi ses conseils mathématiques ont été précieux durant ces quatre années. Je voulais également le remercier de m'avoir invité à participer au célèbre groupe de travail hebdomadaire d'Orsay (aujourd'hui délocalisé à l'IHP) qui a toujours été extrêmement stimulant et enrichissant tout en nous permettant de présenter nos travaux achevés ou en cours (et ce toujours à profit).

Merci bien sûr à Tim Browning d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse malgré un semestre déjà chargé. Merci de m'avoir permis de participer à de belles conférences comme celle organisée à La Barbade ou celle organisée à l'institut Mittag-Leffler [1] et surtout d'y présenter mes travaux et ce alors que je n'étais qu'un jeune chercheur qui commençait sa thèse. Merci de t'être intéressé à mes travaux, pour ta disponibilité et pour tes encouragements constants mais aussi pour tous les éclairages mathématiques que tu as pu m'apporter. Merci enfin également pour les innombrables lettres de recommandation que tu as dû écrire pour moi.

Je remercie aussi chaleureusement Marc Hindry d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse mais également d'avoir accepté d'être mon tuteur durant ces quatre années de thèse. Merci pour ta disponibilité, ta gentillesse et ton aide (aussi bien sur le plan mathématique qu'administratif ces dernier mois) !

Enfin, mes plus vifs remerciements à Mathilde Herblot d'avoir accepté au pied levé de faire partie de mon jury et toutes mes excuses pour les raisons de ce remaniement de dernière minute !

Il y a bien sûr un certain nombre d'autres mathématicien(ne)s que je souhaite à présent remercier. Pour commencer, merci à Ulrich Derenthal et à Marta Pieropan de m'avoir invité à parler à Hanovre et de m'avoir initié avec patience à la machinerie des anneaux de Cox, ce qui m'a enfin permis d'obtenir la bonne constante dans mon premier article ! Merci à eux de continuer à répondre à mes questions parfois naïves sur le sujet. Merci à Efthymios Sofos pour son ironie perpétuelle. Il a joué un rôle non négligeable dans ma recherche de postdoc cette année et je le remercie pour son aide et ses relectures lorsque je commençais à me noyer dans les démarches de candidatures en parallèle de la rédaction de ce manuscrit. Merci à Dan Loughran et Damaris Schindler pour de nombreuses discussions intéressantes lors de diverses conférences, merci à Ramin Takloo-Bigash pour ses encouragements, son enthousiasme et son invitation à Chicago (en particulier au Greenmill !). Merci à Pierre Le Boudec pour son invitation à Lausanne et pour de nombreuses discussions enrichissantes. Merci à Valentin Blomer et Jörg Brüdern d'avoir donné leur accord pour que Per Salberger me transmette ses notes personnelles. Merci à Jean-Pierre Serre

1. *There are two ways, of essentially equal value, in which one's life can be brightened by the Royal Swedish Academy of Sciences. One is to receive a Nobel Prize. The other is to receive an invitation to Institut Mittag-Leffler*, **Jouko Väänänen**

pour une partie de ping-pong mémorable au CIRM. Merci à Florent Jouve de m'avoir donné envie de faire de la théorie des nombres lors de son cours de préparation à l'agrégation et pour son soutien lors de mon année de M2 à Orsay et durant ma thèse. Merci pour sa bonne humeur, ses encouragements et d'avoir pris du temps pour essayer de répondre à certaines de mes questions ! Merci à Cyril Demarche pour ses invitations au séminaire Variétés rationnelles (même le lendemain de ma soutenance !), pour l'intérêt qu'il porte à mon travail et pour les heures passées avec moi à essayer de décortiquer un article. Merci également à toute l'équipe du séminaire d'Orsay (passée et présente) : Étienne Fouvry, Régis de la Bretèche, Florent Jouve, Harald Helfgott, Farell Brumley et pour les thésards et postdocs : Ramon pour me rappeler qu'on peut toujours s'y prendre plus au dernier moment que moi, Djordjo pour les wine mondays et les verres à Paris, Montréal ou Berkeley, Élie pour ne pas me laisser seul oublier le jour du séminaire, Didier, Dante que j'ai retrouvé avec plaisir cette année à Toronto et à Berkeley, Sary, Lilian, Alisa et Lucile qui a repris l'organisation avec brio cette année, avec qui j'ai eu de nombreux et stimulants échanges mathématiques (mais pas seulement !) et qui sont tous passés de collègues à amis et avec qui j'ai passé de très bons moments. Merci enfin, pour conclure ce volet théorie des nombres et géométrie arithmétique, à Diego, Giancarlo mais aussi à Julie, Victoria, Aurélien et Richard pour de nombreuses discussions intéressantes. Merci également à toute l'équipe de Théorie des Nombres de l'IMJ et en particulier à Pascal et Mathilde pour leur gentillesse. Merci à tous les doctorants et postdocs avec qui j'ai pu passé d'excellents moments un peu partout en conférences ces dernières années : Dante, Ramon, Djordjo, Sary, Berke, Pierre, Sam, Raph, Vlad, Lilian, Damaris, Marta, Tony, Korneel, Alexandre, Claire, Adelina, Efthymios, Julie, Davide, Alisa, Lucile, Didier, Élie, Daniel, Kevin, Andrea, Coline, Gigi, Jennifer, Erik. Un merci particulier à Vlad pour les bons moments passés à Stockholm, à Marseille et pour m'avoir hébergé à Berkeley.

Sur un plan plus administratif, merci à l'IMJ, au Fields Institute, au MSRI, à l'UIC de m'avoir permis de voyager et de participer régulièrement à de nombreuses conférences enrichissantes. Merci au regretté Pascal Chiettini et à son remplaçant Sébastien Ramesh pour leur efficacité qui a toujours compensé ma propension à toujours tout faire au dernier moment. Merci à Élise Delos d'avoir traité mon dossier dans des délais très (trop) courts. Merci évidemment aux gestionnaires de l'IMJ pour leur bonne humeur, les pauses cafés et leur aide. En particulier merci à Aurélie, Claire, José, Sakina, Evariste, Mylène mais aussi à Jérôme pour les pots du vendredi soir. Merci aussi à la direction de l'IMJ et en particulier Isabelle Gallagher mais aussi à Claudine Picaronny, à Frédéric Pascal et à Clarisse Fiol et Karim Zayana pour leur aide lors de mes soucis administratifs avec le rectorat. Merci aussi à Arnaud pour sa gentillesse et ses lettres de recommandation.

Enfin, il est bien connu de n'importe quel thésard qu'une thèse se termine souvent dans la douleur et j'aimerais désormais passer à celles et ceux sans qui le quotidien de ces quatre dernières années auraient été bien moins agréable. Tout d'abord, il y a bien sûr toute l'équipe de doctorants de l'IMJ. À commencer par les anciens : Martin, Fathi, Simon, Sary, Amaury. Merci aussi à Nicolas pour les nombreux repas-jeux de société chez lui, à Jeremy pour avoir eu quelques points commun avec moi ces derniers temps et pour William Sheller, à Alexandre avec qui j'ai toujours plaisir à discuter, à Julie pour les discussions improvisées dans mon bureau, à Richard qui aime tout le monde, à Jesus pour les soirées cinéma et la recette de guacamole. Merci à ceux qui m'ont accompagné depuis le début de cette thèse (et même bien avant pour certains) : David pour les sorties footing mais aussi les soirées tarot et les nombreuses discussions mathématiques, à Baptiste pour

les râclées au ping-pong et pour ses coups de gueules, merci à Aurélien de partager bon nombre de galères administratives, merci à Martin pour sa gentillesse et sa solidarité pendant cette année d'ATER et merci au F. pour son humour et sa bonne humeur contagieuse. Merci aux nouveaux (même s'ils ne le sont plus vraiment tous) : Victoria pour sa bonne humeur, Marco pour les visites guidées au musée et son enthousiasme qui ne s'éteint (ou s'étend ?) jamais même en pleine préparation à l'agrégation. Merci à Élie pour les parties de jeux-vidéos au bureau, la reprise du ski (merci aussi à Amélie), pour les énigmes et le désormais traditionnel qpuc digestif. Merci aussi à Léa, Omar (grand chef doctorant), Charles, Kevin, Stéphane, Jorge, Leonard, Charlotte (la maître de conférence) et Assia (à quand l'ekiden ?), Pooney, Parisa, Antoine, Réda, Sacha, Alexandre, Théophile... Et bien sûr merci à notre Annalaura d'adoption pour sa bonne humeur et son rire communicatif qui nous aura manqué cette année.

Mais parce qu'une thèse est aussi l'aboutissement de quelques années d'enseignement supérieur : merci également à mes amis de Cachan ou du M2 et que je vois plus rarement désormais mais avec qui je continue de passer de bons moments régulièrement : Pierre-Damien (félicitations au passage !) et Marie-Cécile, Alexandre, Davide, Félix, Guillaume, Thibault, Louis, Thomas, Antoine, Clément, David et Aline, Baptiste mais aussi Marjolaine et Matthieu. Un merci particulier à Ahcène pour toutes ces vacances de Dubaï à Budapest en passant par les weekends à Londres où sa porte est toujours ouverte et par Barcelona et les patatas bravas y miel de la Fianna.

Merci à mes amis de prépas pour les (trop rares) bons moments passés ensemble ces dernières années et notamment pour nos récentes discussions sur la vie en thèse et le monde de la recherche. Merci à Guillaume et Amandine (et encore désolé d'avoir prévenu si tard !), à Camille, à Victor, à Vivien, à Paul, à Florent, à Alexis.

Merci à Charlotte et Guillaume de m'avoir accueilli pendant mes expéditions post-conférence au Québec et à Göteborg.

Ces années de thèse n'auraient pas été les mêmes sans mes heures d'enseignements qui ont parfois joué le rôle de soupape essentielle lors des inéluctables traversées du désert inhérentes au travail de recherche. Merci donc à mes étudiants pour les bons moments (que j'espère un minimum réciproques) que j'ai pu passer auprès d'eux. Merci également à mes professeurs de mathématiques du lycée et de prépa M. Rivillon, M. Duval et M. Vellutini de m'avoir donné envie de faire des maths et d'avoir en partie inspiré ma façon d'enseigner.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier ma famille et notamment mes parents et ma soeur qui m'ont toujours soutenu de manière indéfectible et se sont toujours investis pour que je puisse suivre le chemin que j'avais choisi et ce malgré parfois une certain incompréhension et inquiétude. Merci notamment pour leur soutien financier cette année qui m'a permis de pouvoir voyager.

Last but not least, merci à Alexandra qui a égayé cette fin de thèse. Merci pour ton soutien permanent même dans la période difficile de la rédaction et pour tout ce que tu m'apportes et que tu continueras à m'apporter encore longtemps j'espère (à Bonn ou ailleurs). Merci pour tout !
愛してる。

Résumé/Abstract

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions les conjectures de Manin et Peyre pour plusieurs classes de variétés algébriques. Les conjectures de Manin et Peyre décrivent pour les variétés "presque de Fano" le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur inférieure à B lorsque B tend vers l'infini en termes d'invariants géométriques de la variété.

Nous démontrons dans un premier temps, les conjectures de Manin et Peyre pour la famille de surfaces de Châtelet définies comme modèle minimal propre et lisse de variétés affines de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ d'équation

$$Y^2 + Z^2 = F(X, 1)$$

pour une forme binaire F de degré 4 sans racine multiple admettant une factorisation du type $F = L_1 L_2 Q$ avec L_1 et L_2 deux formes linéaires et Q une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$, achevant ainsi le traitement des conjectures de Manin et Peyre dans le cas des surfaces de Châtelet avec $a = -1$ initié par La Bretèche, Browning et Peyre.

Dans une deuxième partie de cette thèse, nous déterminons un anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$ de certaines surfaces fibrées en coniques comprenant les surfaces de Châtelet. Nous en déduisons une description de certains torseurs pour ces variétés. Cela nous permet de préciser la géométrie derrière les preuves de la conjectures de Manin et notamment de préciser le traitement de la constante dans le cas où $F = Q_1 Q_2$ pour Q_i une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$. Par ailleurs, cela permet également d'ouvrir l'espoir de nouvelles applications.

Enfin, dans une troisième partie, nous établissons pour tout $n \geqslant 2$, les conjectures de Manin et Peyre pour la famille d'hypersurfaces singulières, de dimension $2n-2$, normales et projectives W_n de $\mathbf{P}^{2n-1}$ définies par l'équation

$$x_1 y_2 y_3 \cdots y_n + x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots + x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0$$

généralisant les travaux de Blomer, Brüdern et Salberger dans le cas $n = 3$. Les méthodes utilisées reposent sur des travaux récents de La Bretèche sur le nombre de matrices aléatoires pour la partie comptage et sur une annexe de Salberger afin de construire une résolution crépante de W_n et d'expliciter son torseur versel pour la partie conjecture de Peyre.

Mots-clefs

Conjecture de Manin, constante de Peyre, descente sur des torseurs, comptage de points rationnels sur des variétés algébriques.

Distribution of rational points of bounded height on certain algebraic varieties

Abstract

In this thesis, we study the Manin and Peyre's conjectures for several families of algebraic varieties. The Manin and Peyre's conjectures describe the distribution of rational points of height less than B when B goes to infinity for "almost Fano" varieties in terms of geometric invariants of the variety.

We prove in a first part the Manin and Peyre's conjectures for the family of Châtelet surfaces defined as minimal proper smooth model of affine varieties of $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ of the shape

$$Y^2 + Z^2 = F(X, 1)$$

for a binary form F of degree 4 without multiple roots and factorizing as $F = L_1 L_2 Q$ with L_1 and L_2 two linear forms and Q a quadratic form irreducible over $\mathbf{Q}[i]$, settling the last remaining case of the Manin and Peyre's conjectures for Châtelet surfaces with $a = -1$ after works of La Bretèche, Browning, Peyre and Tenenbaum.

In a second part, we find a Cox ring of identity type over $\overline{\mathbf{Q}}$ for a family of conic bundle surfaces which contains Châtelet surfaces. This yields a description of some torsors over these surfaces over $\mathbf{Q}$ and it allows us to better describe the geometry behind the existing proofs of Manin's conjecture for Châtelet surfaces, especially in the case $F = Q_1 Q_2$ with Q_j a quadratic form which is irreducible over $\mathbf{Q}[i]$. Moreover, this result opens the way to new applications.

Finally, in a third part, we establish the Manin and Peyre's conjectures for all $n \geqslant 2$ for the family of singular normal projective hypersurfaces W_n of dimension $2n-2$ of $\mathbf{P}^{2n-1}$ defined by the equation

$$x_1 y_2 y_3 \cdots y_n + x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots + x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0$$

generalizing work of Blomer, Brüdern and Salberger in the case $n = 3$. The method used in this work relies on recent work of La Bretèche about the number of stochastic matrices for the counting part and on an Appendix by Salberger in order to construct a crepant resolution of W_n and to describe its versal torsor for Peyre's conjecture.

Keywords

Manin's conjecture, Peyre's constant, descent method on torsors, counting rational points on algebraic varieties.

Table des matières

Remerciements **v**

Résumé/Abstract **ix**

Introduction **5**
I.1 Les conjectures de Manin et Peyre 5
I.2 Méthodes et résultats connus 9
I.2.1 Contre-exemples et principe de Manin 9
I.2.2 Méthode du cercle et analyse harmonique 9
I.2.3 Descente sur les torseurs 10
I.2.4 Cas des surfaces 14
I.2.5 Cas de la dimension supérieure 15
I.3 Résultats de la thèse 16
I.3.1 Les surfaces de Châtelet 16
I.3.2 Une famille d'hypersurfaces en dimension supérieure 22
I.4 Plan de la thèse 27

Notations **29**

I Le principe de Manin sur certaines surfaces fibrées en coniques **31**

1 Le principe de Manin pour certaines surfaces de Châtelet **33**
1.1 Introduction 34
1.2 Estimations de sommes liées à la fonction r 35
1.3 Propriétés des fonctions ρ 39
1.4 Démonstration du Théorème 1.2.1 41
1.4.1 Extraction des valuations 2-adiques 41
1.4.2 Traitement de S_0 49
1.4.3 Traitement des $S_{\pm,\pm,\pm}$ et fin de la preuve du Théorème 1.2.1 53
1.5 Démonstration du Théorème 1.2.3 : interprétation de la constante 59
1.5.1 Le cas $p \equiv 1 \pmod 4$ 59
1.5.2 Le cas $p \equiv 3 \pmod 4$ 60
1.5.3 Le cas $p = 2$ 61

1.5.4 Le cas de la densité archimédienne . . . 61
1.6 Démonstration du Théorème 1.1.1 . . . 62
1.6.1 Passage aux torseurs et reformulation du problème de comptage . . 62
1.6.2 Fin de la preuve du Théorème 1.1.1 . . . 68
1.7 La constante de Peyre . . . 72
1.7.1 Les facteurs $\alpha(S)$ et $\beta(S)$ . . . 72
1.7.2 Torseurs versels . . . 74
1.7.3 Les torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin . . . 78
1.7.4 Expression de la constante de Peyre . . . 85
1.7.5 Transformation de la constante c_0 . . . 87
1.7.6 Fin de la preuve de la conjecture de Peyre . . . 89

2 La géométrie du principe de Manin pour certaines surfaces fibrées en coniques 93
2.1 Introduction . . . 94
2.1.1 Résultats . . . 98
2.2 Géométrie des surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$ . . . 100
2.2.1 Quelques réductions . . . 100
2.2.2 Calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ . . . 100
2.3 Arithmétique des surfaces $S_{a,F}$ . . . 106
2.4 Les torseurs versels . . . 109
2.4.1 L'anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$ . . . 109
2.4.2 Description des torseurs versels . . . 111
2.4.3 Exemples . . . 117
Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$ . . . 117
Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ . . . 117
Un cas de surface de Châtelet $\mathbf{LC}$ . . . 121
Un cas de surface de Châtelet $\mathbf{F}$ . . . 122
Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F scindé du type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\cdots\mathbf{L}_n$ . . . 123
Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F du type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{n/2}$ . . . 123
2.5 Les torseurs de type $\mathrm{Pic}\big(S_{a,F}\times_{\mathbf{Q}}\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$ . . . 124
2.5.1 Description de $\mathrm{Pic}\big(S_{a,F}\times_{\mathbf{Q}}\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$ . . . 125
2.5.2 Un exemple : Le cas des surfaces de Châtelet avec $a=-1$ et $F=Q_1Q_2$ 134

II Le principe de Manin pour une famille d'hypersurfaces en dimension supérieure 137

3 Le principe de Manin pour une famille d'hypersurfaces projectives singulières en dimension supérieure 139
3.1 Introduction et principaux résultats . . . 140
3.1.1 Introduction . . . 140
3.1.2 Résultats . . . 142
Cas $n=2$ . . . 142
Cas $n\geqslant 3$ . . . 143
3.2 Notations . . . 144
3.3 Démonstration des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 . . . 144
3.3.1 Démonstration du Théorème 3.1.1 . . . 145
3.3.2 Démonstration du principe de Manin lorsque $n\geqslant 3$ . . . 146
Réduction au cas $y_i\geqslant 1$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ . . . 146

Utilisation du Lemme 3.2.1 147
Une borne supérieure 151
Démonstration de l'asymptotique 154
3.4 Vérification de la conjecture de Peyre pour W_n 162
3.4.1 Résolution crépante des singularités de W_n et forme conjecturale de la constante de Peyre 162
Une résolution crépante de W_n 162
Les hypersurfaces W_n sont «presque de Fano» 163
Forme conjecturale de la constante de Peyre 164
Le facteur $\beta(X_{0,n})$ 164
Le facteur $\alpha(X_{0,n})$ 164
Construction du torseur versel associé à W_n 170
La construction explicite de la norme $v-$adique et du nombre de Tamagawa 181
Le nombre de Tamagawa $\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right)$ 191
3.4.2 Transformation de la constante obtenue par le Théorème 3.1.2 . . . 192
Mise sous forme de produit eulérien de la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ 192
Lien entre la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ et le nombre de Tamagawa associé à $X_{0,n}$ 194
3.4.3 Le dénouement 197

Annexe

Annexe A A crepant resolution for the hypersurfaces W_n **i**

Bibliographie **vii**

Introduction

L'étude des *équations diophantiennes* est un des plus anciens et des plus importants domaine des mathématiques. On peut le faire remonter de manière certaine à *Diophante d'Alexandrie* (entre 200 et 300 après J.-C.) mais on trouve vraisemblablement des traces d'études de telles équations dans une tablette babylonienne (*Plimpton 322*) datant d'il y a environ 3800 ans. L'objet d'étude principal de ce domaine est l'ensemble des solutions rationnelles (ou entières) d'un système

$$P_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r) \tag{I.0.1}$$

de r équations polynomiales homogènes à coefficients entiers. En termes plus formels, le système (I.0.1) définit une variété projective $V \subseteq \mathbf{P}^n$ et on s'intéresse à l'ensemble $V(\mathbf{Q}) = V \cap \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ de ses points rationnels. Plusieurs questions apparaissent alors naturelles.

- $(\mathbf{Q}_1)$ A-t-on $V(\mathbf{Q}) \neq \varnothing$?
- $(\mathbf{Q}_2)$ Si $V(\mathbf{Q}) \neq \varnothing$, l'ensemble $V(\mathbf{Q})$ est-il fini ou infini ?
- $(\mathbf{Q}_3)$ Si $V(\mathbf{Q})$ est fini, peut-on le décrire explicitement ? Le dénombrer ?
- $(\mathbf{Q}_4)$ Si $V(\mathbf{Q})$ est infini, comment peut-on décrire *quantitativement* la «complexité» de cet ensemble infini ? Que dire de la *répartition* des points rationnels de V ?

Cette thèse porte principalement sur l'étude de la question $(\mathbf{Q}_4)$ pour deux familles infinies de systèmes diophantiens.

I.1 Les conjectures de Manin et Peyre

On se place ainsi dans le cadre de la question $(\mathbf{Q}_4)$, à savoir dans le cas où $V(\mathbf{Q})$ est un ensemble infini. Pour répondre à cette question $(\mathbf{Q}_4)$ (même s'il est à noter que l'approche utilisée peut aussi permettre d'obtenir des réponses aux questions $(\mathbf{Q}_1)$ et $(\mathbf{Q}_2)$), une idée naturelle consiste à étudier l'ensemble des points rationnels de V de «taille» bornée. Pour mesurer la taille d'un point rationnel, on utilise *des fonctions de hauteurs*. On se donne une variété projective V ainsi que $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur V que l'on supposera *très ample*. Un choix de base de sections de $\mathcal{L}$ donne alors lieu à un plongement $\varphi_{\mathcal{L}} : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ pour un certain entier n tel que $\varphi_{\mathcal{L}}^* (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) = \mathcal{L}$. Pour tout choix de norme sur $\mathbf{R}^{n+1}$, on considère alors l'application de hauteur $H : \mathbf{P}^n(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}_*^+$ définie par

$$H([x_0 : \cdots : x_n]) = ||(x_0, \ldots, x_n)|| \tag{I.1.2}$$

où le représentant du point projectif $[x_0 : \cdots : x_n]$ a été choisi de sorte que $x_0, \ldots, x_n$ soient des entiers premiers entre eux. On définit ainsi une fonction de hauteur $H_{\mathcal{L}} = V(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}_*^+$ sur la variété V par $H_{\mathcal{L}} = H \circ \varphi_{\mathcal{L}}$. On s'intéresse alors à la quantité

$$N_{V,H_{\mathcal{L}}}(B) = \#\{x \in V(\mathbf{Q}) \mid H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}$$

pour $B \geqslant 1$. L'ensemble précédent dont on prend le cardinal est bien fini d'après un résultat de Northcott (voir [Nor49]). La situation est par exemple classique et bien connue dans le cas d'une courbe lisse $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}^2$ de degré d pour la hauteur

$$H([x_0 : \cdots : x_n]) = \max(|x_0|, \ldots, |x_n|). \tag{I.1.3}$$

Une courbe de genre 0 possédant un point rationnel est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et le problème de comptage se ramène alors facilement à un problème de comptage de points d'un réseau dans une certaine région (voir [Sch79]). Le cas de genre 1 correspond aux courbes elliptiques et nécessite de développer la théorie des hauteurs canoniques h qui vérifient $|h - \log(H)| \ll_E 1$ (voir [HS]). Enfin, le cas des courbes de genre $g > 2$ est couvert par le théorème de Faltings qui affirme que le nombre de points rationnels d'une telle courbe est fini (voir [Fal83]). Le tableau 1 résume le comportement de la quantité $N_{\mathcal{C},H}(B)$ dans chacun des cas.

Degré	Genre	Type de courbe	$N_{\mathcal{C},H}(B)$
1,2	0	Courbe rationnelle	$\sim c_{\mathcal{C}} B^{2/d}$
3	1	Courbe elliptique de rang r	$\sim c_{\mathcal{C}} (\log(B))^{r/2}$
>3	>2	Courbe de type général	$\ll_{\mathcal{C}} 1$

TABLEAU 1 – Répartition des points rationnels de hauteur bornée sur les courbes

À l'autre extrémité du spectre, on dispose pour les variétés de grande dimension du célèbre résultat de Birch suivant reposant sur la méthode du cercle.

Théorème I.1.1 (Birch,1962-[Bir62]). *Soit $V \subseteq \mathbf{P}^n$ une hypersurface non-singulière de degré d satisfaisant $n \geqslant (d-1)2^d$ et telle que*

$$V(\mathbf{R}) \prod_p V(\mathbf{Q}_p) \neq \varnothing.$$

Alors, pour la fonction de hauteur (I.1.3), on a $N_{V,H}(B) \sim c_V B^{n+1-d}$.

Entre ces deux extrêmes, lorsqu'une variété V a un point rationnel, on aimerait comprendre le comportement asymptotique de la quantité $N_{V,H_{\mathcal{L}}}(B)$ lorsque B tend vers $+\infty$ ou tout du moins le comportement asymptotique de la quantité

$$N_{U,H_{\mathcal{L}}}(B) = \#\{x \in U(\mathbf{Q}) \mid H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}$$

pour un certain ouvert de Zariski U de V. On note ω_V le fasiceau canonique de V et ω_V^{-1} le faisceau anticanonique de V. Le comportement attendu pour la quantité $N_{V,H}(B)$ diffère alors selon que ω_V, ω_V^{-1} ou aucun de ces deux faisceaux ne soit ample. En effet, un principe général de géométrie arithmétique affirme que si la variété est de *type général*, *i.e.* le faisceau ω_V est ample, alors V doit contenir *peu* de points rationnels tandis qu'à l'inverse si la variété V est *de Fano*, *i.e.* le faisceau ω_V^{-1} est ample, alors V doit contenir *beaucoup* de points rationnels (au moins sur une extension finie de $\mathbf{Q}$).

L'objet de cette thèse concerne l'étude du cas où la variété V est une variété de faisceau anticanonique ω_V^{-1} *très ample* et où la hauteur choisie est *anticanonique*, c'est-à-dire $H_V =$

$H_{\omega_V^{-1}}$. À la fin des années 1980, Yuri Manin et ses collaborateurs a initié un programme de recherche visant à comprendre le comportement asymptotique de la quantité N_{V,H_V} pour des hauteurs anticanoniques. Ce programme de recherche a donné lieu à la célèbre conjecture suivante, connue désormais sous le nom de *conjecture de Manin*.

Conjecture (**Manin,1989-[FMT87]-[BM90]**). *Soit V une variété lisse projective dont le faisceau anticanonique ω_V^{-1} est (très) ample et H_V une hauteur anticanonique. Il existe alors un ouvert U de V et une constante c_{V,H_V} tels que*

$$N_{V,H_V}(B) = c_{V,H_V} B(\log(B))^{\rho-1}(1+o(1)), \tag{I.1.4}$$

où $\rho = \mathrm{rang}(\mathrm{Pic}(V))$.

Le fait que la conjecture soit seulement formulée sur un ouvert de Zariski U de V provient du fait qu'il peut exister des *sous-variétés accumulatrices* incluses dans la variété V qui sont susceptibles de dominer et de cacher le comportement global de $N_{V,H}(B)$. L'ouvert U est donc le complémentaire de toutes ces sous-variétés accumulatrices [Pey95]. Dans le cas de la dimension 2, la situation est particulièrement simple puisque les seules sous-variétés accumulatrices sont les droites qui contribuent de l'ordre de $O(B^2)$ et l'ouvert U est automatiquement le complémentaire de toutes les droites incluses dans la variété V étudiée. La situation n'est pas aussi simple en dimension supérieure.

Une généralisation de cette conjecture importante pour ce manuscrit formulée par Peyre [Pey01] prévoit que cette dernière peut s'élargir aux variétés *«presque de Fano»* où une variété est dite «presque de Fano» si elle vérifie les propriétés suivantes :

- Les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathcal{O}_v)$ sont nuls pour $i \in \{1,2\}$;
- Le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ de V est sans torsion ;
- La classe du diviseur anticanonique $[-K_V]$ est dans C^1_{eff}, le cône fermé engendré par les classes des diviseurs effectifs.

Les variétés de Fano étant évidemment des cas particuliers de variétés «presque de Fano».

Enfin, Batyrev et Tschinkel ont proposé une version de cette conjecture pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ très ample appartenant au cône engendré par les diviseurs effectifs que nous ne détaillons pas ici puisque nous ne l'utiliserons pas dans cette thèse. On renvoie le lecteur intéressé à [BT98a] pour plus de détails.

Quelques années plus tard, dans les années 1990, Peyre ([Pey95] et [Pey01]) puis Batyrev et Tschinkel [BT98a] et enfin Salberger [Sal98] ont proposé une *interprétation conjecturale de la constante c_{V,H_V}* en termes d'*invariants géométriques* de la variété V que nous allons à présent détailler. On se fixe une base $s_0, \ldots, s_n$ de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$. Pour toute place v de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} \in V(\mathbf{Q}_v)$ et toute section $s \in \Gamma(V, \omega_V^{-1})$ ne s'annulant pas en $\mathbf{x}$, on pose

$$||s(\mathbf{x})||_v = \left(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \frac{s_i(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})} \right|_v \right)^{-1}.$$

On normalise alors la mesure de Haar $\mathrm{d}x_v$ sur $\mathbf{Q}_v$ de la manière suivante :

— Si $v = \infty$, alors $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$;

— Si $v < \infty$, alors on choisit $\mathrm{d}x_v$ telle que $\int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$.

On introduit ainsi la mesure borélienne sur $V(\mathbf{Q}_v)$ suivante

$$\omega_{H_V,v} = \left|\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right|\right|_v \mathrm{d}x_{1,v} \cdots \mathrm{d}x_{n,v}$$

pour des coordonnées locales analytiques $x_{1,v}, \ldots, x_{n,v}$ au voisinage d'un point $\mathbf{x} \in V(\mathbf{Q}_v)$. On choisit alors un nombre fini de places finies S ainsi qu'un modèle projectif $\mathcal{V}$ de V sur

$\mathcal{O}_S$ dont les fibres sont géométriquement intègres et tel que pour toute place finie p en dehors de S, le groupe $\mathrm{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p})$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}(\overline{V})$ et ce de façon compatible avec les actions de Galois. On pose alors

$$L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \prod_{p \notin S} L_p(s, \mathrm{Pic}(\overline{V}))$$

avec

$$L_p(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\det(1 - p^{-s}\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(\mathcal{V}_{\overline{\mathbb{F}}_p}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})}.$$

On introduit alors les facteurs correctifs

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \mathrm{Pic}(\overline{V})) & \text{si } v \notin S \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la quantité (*indépendante* de S et de $\mathcal{V}$)

$$\omega_{V,H_V} = \lim_{s \to 1} (s-1)^{\mathrm{rang}(\mathrm{Pic}(\overline{V}))} L_S(s, \mathrm{Pic}(\overline{V})) \prod_v \frac{\omega_{H_V,v}}{\lambda_v}. \tag{I.1.5}$$

Dans un second temps, on introduit $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \subseteq \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R})$, le cône dual de $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(V)$ constitué de toutes les applications linéaires $\Lambda : \mathrm{Pic}(V)^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\lambda([D]) \geqslant 0$ pour tout diviseur effectif D de V. Considérons de plus

$$\ell : \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

l'application linéaire qui à tout $\Lambda \in \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R})$ associe $\Lambda([-K_{X_V}])$. On munit alors $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R})$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}s$ normalisée telle que $L = \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(V), \mathbf{Z})$ soit de covolume 1 ainsi que l'hyperplan $\mathcal{H} = \ell^{-1}(\{1\})$ de la mesure $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)}$. On pose finalement

$$\alpha(V) = \mathrm{Vol}\,\{\Lambda \in \mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \quad | \quad \Lambda([-K_V]) = 1\} = \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(V)^\vee \cap \mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell - 1)}. \tag{I.1.6}$$

On dispose alors de la conjecture suivante, connue sous le nom de *conjecture de Peyre*.

Conjecture (Peyre/Batyrev-Tschinkel). *On a*

$$c_{V,H_V} = \alpha(V)\beta(V)\omega_{V,H_V}(\overline{V(\mathbf{Q})}),$$

pour $\alpha(V)$ défini en (I.1.6), $\beta(V) = \#H^1\left(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{V})\right)$ et ω_{V,H_V} définie en (I.1.5).

Il est à noter que Salberger utilise dans [Sal98] une constante un peu différente puisqu'il considère $\omega_{V,H_V}\left(V(\mathbf{Q})^{\mathrm{Br}(V)}\right)$ en lieu et place de $\omega_{V,H_V}(\overline{V(\mathbf{Q})})$, où $\mathrm{Br}(V) = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m)$ est le groupe de Brauer de V. On dispose pour ce groupe d'un accouplement issu de la théorie du corps de classe local

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(V) \times V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (A, (P_v)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_v \mathrm{inv}_v(A(P_v)) \end{array}$$

appelé *accouplement de Brauer-Manin*. Ce dernier permet de définir $V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}(V)}$ comme étant le noyau à droite de cet accouplement. On a alors

$$\overline{V(\mathbf{Q})} \subset V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}(V)} \subset V(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$$

et on dit que *l'obstruction de Brauer-Manin est la seule à l'approximation faible et au principe de Hasse* si

$$\overline{V(\mathbf{Q})} = V(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(V)}.$$

On conjecture [CT03] que si V est une surface définie sur $\mathbf{Q}$ géométriquement rationnelle, *i.e.* telle que $V \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}$ soit birationnelle à $\mathbf{P}^2_{\overline{\mathbf{Q}}}$, alors on a

$$\overline{V(\mathbf{Q})} = V(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(V)}$$

si bien que les deux formulations de la constante par Peyre et Salberger sont supposées être équivalentes. Ces deux formulations seront utiles dans ce manuscrit et pour toutes les variétés considérées, soit l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sera la seule soit l'approximation faible sera vérifiée, auquel cas les deux définitions seront effectivement les mêmes.

Les conjectures de Manin et de Peyre peuvent se résumer par l'aphorisme *La géométrie gouverne l'arithmétique* dans le sens où des propriétés et des invariants géométriques sont censés déterminer pour les variétés «presque de Fano» certaines propriétés arithmétiques. Néanmoins, il est bon de constater que ces conjectures ne donnent aucune information sur la répartition fine des points rationnels de V. Il existe plusieurs raffinements de ces conjectures tentant de rendre compte de la répartition plus fine de ces points rationnels. Ces derniers ne seront pas nécessaires à ce manuscrit et on renvoie donc à [Pey95], à [Pag], à [Hua17] ou à [MR15] par exemple pour plus de détails.

I.2 Méthodes et résultats connus

I.2.1 Contre-exemples et principe de Manin

Dans un premier temps, il est important de noter qu'il existe des contre-exemples à la version (I.1.4) de la conjecture de Manin. Le premier d'entre eux a été obtenu par Batyrev et Tschinkel [BT96b] sur les k-points avec k un corps de nombres contenant $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Loughran a ensuite exhibé en 2012 des contre-exemples valables pour les k-points avec k n'importe quel corps de nombres [Lou15] et d'autres contre-exemples ont notamment été exhibés par Le Rudulier [Rud]. Il existe alors des raffinements de la conjecture de Manin permettant de prendre en compte ces contre-exemples mais la version de la conjecture de Manin énoncée en (I.1.4) sera suffisante dans le cadre de cette thèse et il est néanmoins très intéressant de savoir pour quelles classes de variétés cette prédiction de Manin est valable. La conjecture sous cette forme a d'ailleurs fait l'objet d'une attention considérable depuis la fin des années 1980. Cela dit, au vu de l'existence de ces contre-exemples, on utilisera la dénomination *principe de Manin* à la place de *conjecture de Manin* dans toute la suite de ce manuscrit.

I.2.2 Méthode du cercle et analyse harmonique

La première méthode à porter ses fruits, lorsque le nombre de variables est «grand» devant le degré, a été la méthode du cercle avec notamment le célèbre résultat de Birch cité en section 1.2 et plus récemment des résultats de Browning et Heath-Brown [BHB17] ou Schindler [Sch14] et Mignot [Mig16] sur les hypersurfaces biprojectives ou triprojectives respectivement.

Dans le cas où la variété V est la compactification équivariante d'un groupe algébrique, alors la structure de groupe peut être exploitée et des techniques d'analyse harmonique peuvent permettre d'étudier les propriétés analytiques de la fonction zêta des hauteurs associée

$$\zeta_{H_V}(s) = \sum_{\mathbf{x}\in V(\mathbf{Q})} \frac{1}{H_V(\mathbf{x})^s} \qquad (\Re(s) > 1).$$

Le principe de Manin est alors obtenu grâce à un théorème taubérien et ce pour tout corps de nombres et pas seulement sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. De manière imprécise, la fonction ζ_{H_V} devrait avoir un pôle d'ordre ρ en $s = 1$ si, et seulement si, $N_{U,H_V}(B) \sim cB(\log(B))^{\rho-1}$. Cette approche s'est révélée fructueuse dans les cas suivants :

- variétés toriques (*i.e.* les compactifications équivariantes de tores algébriques) (voir [BT98b],[BT96a] et [BT95]) ;
- compactifications équivariantes de groupes additifs $\mathbf{G}_a^n$ [CLT02] ;
- compactifications équivariantes de groupes unipotents (voir [ST15] et [Sha04]) ;
- compactifiaction équivariante du groupe non commutatif $\mathbf{G}_a \rtimes_d \mathbf{G}_m$ où l'action est donnée par $g.x = g^d x$. [TT12]

En particulier, ces méthodes n'ont encore jamais été développées afin de traiter le cas de groupes abélien mélangeant une structure additive et une structure multiplicative du type $\mathbf{G}_a^m \times \mathbf{G}_m^k$ pour n et k deux entiers naturels.

Enfin, lorsque la variété V ne rentre dans aucune des deux catégories citées ci-dessus, il n'existe pas de méthode générale pour tenter de démontrer la conjecture. L'approche utilisée est alors de tenter de démontrer la conjecture classe de variétés par classe de variétés en utilisant une méthode de descente sur des variétés moralement plus simples appelées *torseurs* combinée à du comptage de points d'un réseau dans une région donnée. C'est parfois la seule méthode dont on dispose et c'est la méthode qui sera employée dans chacun des cas traités dans ce manuscrit.

I.2.3 Descente sur les torseurs

La méthode de descente sur des *torseurs* a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS77], [CTS79] et [CTS87] dans les années 1980 afin d'étudier des problèmes divers concernant les points rationnels : existence de points rationnels, principe de Hasse, approximation faible, densité des points rationnels... L'idée de base est la suivante : il s'agit d'attacher à la variété V dont on cherche à étudier les points rationnels une famille finie de variétés affines auxiliaires de dimension plus grande que celle de V mais de géométrie et d'arithmétique plus simple (en particulier même si la variété de base V ne satisfait pas le principe de Hasse et l'approximation faible, on s'attend à ce que ces variétés auxiliaires les vérifient), chacune de ces variétés étant équipée d'un $\mathbf{Q}$-morphisme dominant vers la variété V, et telles que tout point de $V(\mathbf{Q})$ soit l'image d'un point entier d'une des variétés auxiliaires.

Dans le cas élémentaire du plan projectif, on a clairement une bijection entre les points $[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ de hauteur plus petite que B et les points entiers

$$\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{Z}^{n+1} \smallsetminus \{(0, \ldots, 0)\}$$

vérifiant $\operatorname{pgcd}(y_0, \ldots, y_n) = 1$ et

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |y_i| \leqslant B$$

quitte à identifier $\mathbf{y}$ à $-\mathbf{y}$. Cette variété affine est alors un torseur associé à la variété $\mathbf{P}^n$. Le nombre de ces points entiers peut alors souvent être estimé en faisant appel à la théorie

analytique des nombres et au dénombrement de points d'un réseau dans une région donnée. Une des forces de cette méthode du point de vue analytique est que, le plus souvent, le nombre de variables augmente et ainsi celles-ci sont donc en général plus petites ce qui permet de mieux les contrôler.

Plus précisément, on notera $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et $\overline{V} = \overline{\mathbf{Q}} \times_{\mathbf{Q}} V$ pour une variété V définie sur $\mathbf{Q}$. On appelle alors V-torseur au-dessus d'une variété V définie sur $\mathbf{Q}$ sous un $\mathbf{Q}$-tore algébrique T un espace principal homogène $\mathcal{T} \to V$ sous T (voir [Sko] pour plus de détails). Les classes d'isomorphismes de V-torseurs sous T sont en bijection avec le groupe de cohomologie $H^1_{\text{ét}}(V, T)$ et si V est une variété lisse et géométriquement intègre vérifiant $H^0_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}^*$, alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(V, T) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)\right)$$

où $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)\right)$ envoie un caractère $\psi : \overline{T} \to \mathbf{G}_{m,\overline{Q}}$ sur la classe du $\overline{V}$-torseur $\overline{\mathcal{T}} \times^{\overline{T}} \mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}$ sous $\mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}$ obtenu à partir de $\overline{\mathcal{T}}$ et ψ où l'action de groupe de $\mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}$ est obtenue à partir de l'action de $\overline{T}$ et du morphisme ψ, ce qui fournit bien un élément de $H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}) = \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$. La quantité $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)\right)$ est appelé le `type` du torseur et si le tore T est déployé, alors il existe au plus un V-torseur sous T de `type` donné à isomorphisme près.

Si $\mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ est sans torsion et de type fini et que T est le tore de groupe de caractère $\hat{T} = \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$, alors si $\chi([\mathcal{T}]) = \mathrm{Id}$ on parle de *torseur versel*. On sait alors que si $V(\mathbf{Q}) \neq \varnothing$, les torseurs versels existent [CTS87].

Un des intérêts majeurs des torseurs réside dans la proposition suivante qui affirme que les torseurs permettent d'obtenir une description agréable de l'ensemble des points rationnels d'une variété V satisfaisant des hypothèses raisonnables.

Proposition I.2.1 ([CTS77])**.** *Soient V une variété lisse, projective, géométriquement intégré et telle que $\mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ soit sans torsion et de type fini et T un tore algébrique. Pour tout $P \in V(\mathbf{Q})$, il existe un T-torseur $\pi_P : \mathcal{T}_P \to V$ (unique à isomorphisme près) tel que $P \in \pi_P(\mathcal{T}_P(\mathbf{Q}))$.*
De plus, $V(\mathbf{Q})$ est la réunion disjointe des $\pi_{P_i}(\mathcal{T}_{P_i}(\mathbf{Q}))$ pour un ensemble fini de points $P_1, \ldots, P_n \in V(\mathbf{Q})$.

Les meilleurs candidats pour effectuer une descente afin d'étudier les points rationnels sont les *torseurs versels*. En effet, pour V une variété lisse, géométriquement intègre vérifiant $H^0_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}^*$ et $\mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ de type fini, $\mathcal{T}$ un torseur versel pour V et $\mathcal{T}^c$ une compactification lisse de $\mathcal{T}$ (qui existe d'après [Bry79]), alors les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible éventuelles disparaissent pour $\mathcal{T}^c$ [CTS87, Théorème 2.1.2]. Une autre classe importante de torseurs qui partage un certain nombre de propriétés importantes des torseurs versels est celle des *torseurs quasi-universels* où par torseur quasi-universel, on entend torseur de type $\lambda : \mathrm{Pic}\,(V_K) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ pour une extension galoisienne K de $\mathbf{Q}$ sur laquelle V est rationnelle avec la terminologie de [CTS87]. En effet, si K est une extension galoisienne sur laquelle V est rationnelle et $V(K) \neq \varnothing$, alors pour les torseurs quasi-universels de type $\lambda : \mathrm{Pic}\,(V_K) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible éventuelles disparaissent sur une compactification lisse. Dans toute la suite de ce manuscrit, on ne s'intéressera plus qu'à des torseurs quasi-universels.

C'est Salberger [Sal98] qui a le premier utilisé une méthode de descente sur les torseurs versels afin d'étudier le principe de Manin dans le cadre des variétés toriques propres, lisses et déployées sur le corps $\mathbf{Q}$. Depuis cet exemple, de nombreux cas du principe de Manin et de la conjecture Peyre ont été obtenus par une méthode de descente similaire. Les deux sections suivantes donnent une liste représentative mais non exhaustive de ces derniers.

À l'instar de cet exemple, la plupart des cas où le principe de Manin a été obtenu par cette méthode de descente sur des torseurs versels l'a été dans le cas de variétés déployées, c'est-à-dire telles que l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique soit triviale. Mais dans ces cas-là, la géométrie derrière la descente n'est en général pas explicitée et la paramétrisation ou le passage au torseur est établi de manière *ad hoc*. On peut malgré tout citer quelques exceptions notables dont le cas de certaines surfaces de Châtelet ([BB08] et [BT13]) ou encore le cas d'une surface de del Pezzo singulière de degré 4 [BB07c]. Néanmoins, dans chacun de ces cas, l'approximation faible est vérifiée ce qui simplifie le traitement de la conjecture de Peyre et ne rend pas indispensable la compréhension de la géométrie de la descente effectuée lors du comptage (sauf dans le cas Q_1Q_2 de [BT13] dans lequel le traitement de la conjecture de Peyre est en réalité incomplet). La géométrie de la descente utilisée dans [BB07c] a été précisé dans la thèse de Pieropan [Pie15]. Cela permet d'ores et déjà constater que dans le cas de variétés non déployées, les méthodes de descente utilisées pour établir le principe de Manin ne font pas nécessairement appel aux torseurs versels mais peuvent faire appel à des torseurs *quasi-universels* d'un autre type, ces derniers donnant lieu à une paramétrisation plus agréable. On peut également citer entre autres [CTS79] ou [CTCS80] où des méthodes de descente sur des torseurs quasi-universels sont utilisées de manière détaillée mais dans un objectif différent de celui de l'étude du principe de Manin.

Remarquons pour finir que dans dans le cas d'une variété satisfaisant l'approximation faible, le traitement de la constante de Peyre est grandement simplifié puisque le nombre de Tamagawa est alors simplement donné par $\omega_{V,H_V}(V(\mathbf{A_Q}))$. Au contraire, dans le cas où l'approximation faible n'est pas satisfaite, Salberger [Sal98] a établi comment la constante se remontait naturellement aux torseurs quasi-universels de type $\lambda : \mathrm{Pic}\,(V_K) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ de la façon suivante. Supposons donné J un ensemble fini indexant les classes d'isomorphismes de tels torseurs possédant un point rationnel au-dessus d'une variété projective V et pour tout $j \in J$, on note $\pi_j : \mathcal{T}_j \to V$ un représentant de la classe d'isomorphisme en question. On a alors

$$c_{\mathrm{Peyre}} = \frac{\alpha(X)\beta(X)}{\#Ш^1(\mathbf{Q},T)} \sum_{j\in J} \omega_{V,H_V}(\pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{A_Q})\right)) \tag{I.2.7}$$

où

$$Ш^1(\mathbf{Q},T) = \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbf{Q},T) \longrightarrow H^1(\mathbf{R},T)\prod_p H^1(\mathbf{Q}_p,T)\right)$$

et T est le tore dual de $\mathrm{Pic}\,(V_K)$. Deux questions se posent alors lors du traitement du principe de Manin et de la conjecture de Peyre sur une variété V.

- Quels torseurs quasi-universels sont utilisés lors de la démonstration du principe de Manin sur V ?
- (**Q'**) : Comment déterminer explicitement des équations de ces torseurs quasi-universels afin de calculer $\omega_{V,H_V}(\pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{A_Q})\right))$?

Ces questions seront au centre de la deuxième partie de cette thèse.

On dispose essentiellement de deux méthodes pour déterminer les torseurs quasi-universels associés à une variété V. La première, à la main en effectuant un certain nombre de transformations élémentaires sur les polynômes définissant la variété V est la méthode appliquée dans [CTS87] ou dans [Sko] dans le cas de variétés possédant un morphisme dominant vers $\mathbf{P}^1$ ou encore dans le cas des surfaces de Châtelet scindées [BBP12]. Dans le cas de [CTS87] ou [Sko], la méthode ne donne que des équations locales de certains torseurs quasi-universels, ce qui n'est pas suffisant pour répondre à la question (**Q'**). Dans le second cas [BBP12], les torseurs versels sont réalisés comme ouvert d'un certain espace affine. On dispose alors d'un formalisme plus général (dans lequel se traduisent les manipulations effectuées dans les deux exemples cités), reposant sur la théorie des *anneaux de Cox* et des *anneaux de Cox généralisés* développé notamment par Derenthal et Pieropan ([Pie15] et [DF13]), qui permet de réaliser les torseurs de certains types λ comme ouverts de certains espaces affines.

Pour être plus précis, si V est une variété normale projective de groupe de Picard libre et de type fini sur un corps algébriquement clos, alors on définit *l'anneau de Cox* de V comme l'algèbre [2] $\mathrm{Pic}(V)$-graduée

$$\mathcal{R}(V) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Pic}(V)} H^0\left(V, \mathcal{O}_V(D)\right)$$

et *l'anneau de Cox de type* $\lambda : \mathrm{Pic}\left(V_K\right) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ pour K un corps de nombres galoisien comme l'algèbre $\mathrm{Pic}(V_K)$-graduée

$$\mathcal{R}_\lambda(V) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Pic}(V_K)} \mathcal{R}(V)_D$$

où $\mathcal{R}(V)_D$ représente l'ensemble des éléments homogènes de $\mathcal{R}(V)$ de degré $[D]$. On a alors un unique torseur de type λ pour V et ce torseur se réalise comme un ouvert du spectre de $\mathcal{R}_\lambda(V)$.

C'est cette dernière méthode que l'on utilisera dans ce manuscrit et on renvoie à [ADHL] ou [Pie15] pour plus de détails. La principale difficulté de cette méthode réside dans la détermination d'un anneau de Cox pour une variété donnée. Cependant, de nombreux anneaux de Cox de variétés «presque de Fano» ont été calculés dans la littérature, notamment dans le cas de surfaces, entre autres par Batyrev, Popov [BP04], Hassett et Tschinkel [HT04], Hausen, Leifer et Laface [HKL14] ou encore Derenthal [Der06]. Un des intérêts des anneaux de Cox est qu'une fois déterminé *un* anneau de Cox sur un corps algébriquement clos, alors on peut, sous certaines hypothèses, obtenir relativement aisément par descente galoisienne des anneaux de Cox de tout type sur $\mathbf{Q}$ (à condition que la variété V possède un $\mathbf{Q}$-point par exemple) et ensuite toutes les classes d'isomorphismes d'anneaux de Cox en tordant l'anneau de Cox de départ par un élément de $H^1_{\text{ét}}(V, T)$ [Pie15]. Cela permet alors dans un premier temps de réaliser les torseurs versels comme ouvert du spectre d'un anneau de Cox et dans un second temps de réaliser les torseurs quasi-universels de tout type $\lambda : \hat{T} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ dont l'image contient un diviseur ample comme ouvert en passant par les anneaux de Cox généralisés et ainsi d'en expliciter des équations. Le cas où les anneaux de Cox sont de type fini est particulièrement intéressant puisqu'il permet de cette manière de réaliser les torseurs comme ouverts d'un espace affine.

2. Ici, la structure d'algèbre n'est pas immédiate, du fait qu'elle nécessite de choisir des isomorphismes cohérents $O_V(D_1) \otimes O_V(D_2) \cong O_V(D_1 + D_2)$ pour définir un produit. Mais sur un corps algébriquement clos, l'existence d'un point rationnel sur la variété V entraîne qu'un tel choix est possible.

I.2.4 Cas des surfaces

Comme mentionné précédemment, cette méthode de descente sur certains torseurs quasi-universels a donné lieu à de nombreuses applications dans le cadre du principe de Manin et de la conjecture de Peyre. Les variétés les plus naturelles pour initier cette approche sont bien évidemment *les surfaces de Fano*, autrement dit *les surfaces de del Pezzo*.

Par définition, une surface de del Pezzo est une surface S lisse telle que ω_S^{-1} soit ample. Une façon plus agréable de voir les surfaces de del Pezzo réside dans le théorème suivant.

Théorème I.2.1 ([Man86])**.** *Soit S une surface de Pezzo de degré d sur un corps algébriquement clos. Alors $1 \leqslant d \leqslant 9$ et soit $S \cong \mathbf{P} \times \mathbf{P}^1$ soit S est l'éclatement de $9-d$ points de $\mathbf{P}^2$ en position générale. Par position générale, on entend que trois points ne peuvent pas être alignés et six points ne peuvent pas appartenir à une même conique.*
Réciproquement, une surface obtenue de cette façon est une surface de del Pezzo.

On peut également montrer que si $d \geqslant 3$, alors en réalité ω_S^{-1} est très ample. La difficulté du principe de Manin et de la conjecture Peyre sur les surfaces de del Pezzo va de pair (conformément à la philosophie de ces conjectures selon laquelle «La géométrie gouverne l'arithmétique») avec la complexité de la géométrie des surfaces de del Pezzo, complexité qui va croissante lorsque le degré diminue. Lorsque $d \geqslant 6$, les surfaces de del Pezzo sont toutes toriques et le principe de Manin et la conjecture de Peyre découlent alors des travaux de Batyrev et Tschinkel [BT98b]. Lorsque $d = 5$, la situation se complique déjà nettement et il existe très peu de choses connues. La Bretèche a obtenu le principe de Manin et la conjecture de Peyre dans le cas d'une del Pezzo de degré 5 déployée [Bre02] et avec Fouvry dans le cas d'une del Pezzo de degré 5 obtenue comme éclatement de 4 points dont deux définis sur $\mathbf{Q}$ et deux autres conjugués sur $\mathbf{Q}(i)$ [BF04]. Les surfaces de del Pezzo suscitant le plus d'intérêt sont cependant les surfaces de del Pezzo de degré 4 et 3 qui sont respectivement des intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$ et des cubiques dans $\mathbf{P}^3$. Pour $d = 4$, le principe de Manin et la conjecture de Peyre ont été obtenus dans un seul cas par Browning et La Bretèche [BB11] en tirant parti d'une fibration conique et elles restent hors d'atteinte dès que $d \leqslant 3$ [HB97]. Le seul résultat général dont on dispose est une borne inférieure du bon ordre de grandeur pour une large classe de surfaces de del Pezzo admettant une fibration en conique de tout degré [FLS16].

La classification de ces surfaces de del Pezzo généralisées est classique et peut être trouvée dans [HP]. Pour $d = 4$, à isomorphisme près et sur $\overline{\mathbf{Q}}$, il existe 15 types de singularités possibles. C'est sur ce type de surface que porte la première partie de cette thèse. Une première approche a alors été de tenter de traiter un exemple déployé dans chacun de ces 15 cas de figures. Le fait de s'attaquer à des surfaces déployées permet de simplifier la géométrie, notamment du point de vue des torseurs comme on l'a vu en section 1.3.1. On donne alors la liste des résultats connus avant cette thèse. Grâce aux travaux de Derenthal [Der14] qui classifie les surfaces de del Pezzo singulières toriques et à Derenthal et Loughran [DL10] qui ont déterminé quelles surfaces de del Pezzo sont des compactifications équivariantes de $\mathbf{G}_a^2$, on obtient la conjecture dans un certain nombre de cas comme conséquence directe de [BT98b] ou de [CLT02].

Pour la plupart des références, le principe de Manin et la conjecture de Peyre sont établis pour un exemple agréable déployé concernant au type de singularité et au nombre de droites de la ligne correspondante du tableau. En revanche, très peu de cas de surfaces

Type	# lignes	Singularités	Résultat(s)
(i)	12	$\mathbf{A}_1$	
(ii)	9	$2\mathbf{A}_1$	
(iii)	8	$2\mathbf{A}_1$	[Lou10], [BT13], [BBP12], [BB12]
(iv)	8	$\mathbf{A}_2$	
(v)	6	$3\mathbf{A}_1$	[Bou12a]
(vi)	6	$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$	[Bou12a]
(vii)	5	$\mathbf{A}_3$	[DF13]
$(viii)$	4	$\mathbf{A}_3$	[Bou12c]
(ix)	4	$4\mathbf{A}_1$	[BT98b]
(x)	4	$2\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$	[BT98b]
(xi)	3	$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_3$	[Der09], [DF14], [FP13]
(xii)	3	$\mathbf{A}_4$	[BD09], [DF13]
$(xiii)$	2	$\mathbf{D}_4$	[DT07], [DF13]
(xiv)	2	$2\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_3$	[BT98b], [BB07c]
(xv)	1	$\mathbf{D}_5$	[CLT02], [DF13], [BB07b]

Tableau 2 – Principe de Manin et conjecture de Peyre dans le cas des surfaces de del Pezzo généralisées de degré 4 selon le type de singularités et de droites sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

de del Pezzo généralisées de degré 4 non déployées ont été abordées à l'exception des surfaces de Châtelet dont il sera question dans la section suivante et qui constitue le coeur de la première partie de ce manuscrit. Évidemment sur $\mathbf{Q}$ d'autres cas sont possibles et on renvoie à Lipman [Lip06] pour une classification plus complète. Pour un état des lieux dans le cas $d = 3$, on renvoie à l'introduction de la thèse de Le Boudec [Le 16].

I.2.5 Cas de la dimension supérieure

Le cas de la dimension supérieure est largement plus inexploré. Le premier écueil est que l'on ne dispose pas d'une classification aussi simple des variétés de Fano ou "presque" de Fano en dimension supérieure comme l'on peut en avoir une pour les surfaces de Fano. De plus, l'augmentation de la dimension complexifie également le comptage et enfin une dernière difficulté inhérente à la dimension supérieure apparaît lorsque l'on s'intéresse à des surfaces singulières. On a pu voir en section 1.3.2 que dans le cas d'une surface singulière avec des singularités isolées, on étudiait en réalité le principe de Manin sur une désingularisation minimale. Il résulte de [Zar39] qu'une telle désingularisation minimale existe toujours et est unique à isomorphisme prés dans le cas des surfaces mais ce n'est plus le cas en dimension supérieure. Une telle désingularisation peut s'obtenir en éclatant les points singuliers de la surface. De plus, on peut également s'intéresser aux cas de variétés possédant des singularités non isolées. La situation favorable analogue en dimension supérieure est alors celle où une variété singulière "presque de Fano" admet *une résolution crépante*, ce qui n'est pas automatique. Une résolution des singularités $f : \tilde{V} \to V$ est dite crépante si $f^*\omega_V = \omega_{\tilde{V}}$. Ainsi, si H_V est une hauteur anticanonique sur V, alors $H_{\tilde{V}}$ est une hauteur anticanonique sur $\tilde{V}$ et si f induit un isomorphisme d'un ouvert $\tilde{U}$ de $\tilde{V}$ sur un ouvert U de V, alors on a

$$\#\left\{x \in U(\mathbf{Q}) \mid H_V(x) \leqslant B\right\} = \#\left\{x \in \tilde{U}(\mathbf{Q}) \mid H_{\tilde{V}}(x) \leqslant B\right\}$$

et l'étude du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour V se réduisent donc au principe de Manin et à la conjecture de Peyre pour la résolution crépante $\tilde{V}$. Une telle

résolution crépante, au-delà du fait qu'elle n'existe pas toujours, peut se révéler très compliquée et il n'existe pas de procédure générale pour la déterminer contrairement au cas des surfaces.

Bien sûr, les méthodes telles que la méthode du cercle ou les méthodes d'analyse harmonique ont permis d'obtenir le principe de Manin et la conjecture de Peyre dans le cas de nombreuses variétés de dimension supérieure, mais ces derniers n'ont été obtenus que dans trois cas par la méthode de descente sur des torseurs quasi-universels. Ainsi, les variétés de dimension supérieure forment un réservoir d'exemples extrêmement intéressant pour continuer à tester le principe de Manin et la conjecture de Peyre et leurs différents raffinements.

Le premier cas, en dimension 3, est dû à Régis de la Bretèche et concerne la cubique de Segre définie dans $\mathbf{P}^5$ par

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'une cubique singulière et cet exemple est parfaitement représentatifs des difficultés qui apparaissent lorsqu'on s'attaque au principe de Manin et à la conjecture de Peyre en dimension supérieure en terme de comptage. En revanche, la cubique de Segre ne possédant que des singularités isolées, une résolution crépante est aisément obtenue dans ce cas.
Le second cas, en dimension 4, est dû à Schmidt et concerne la variété définie comme le déterminant d'une matrice carrée symétrique de taille 3 [Sch95]. Le troisième exemple, une cubique singulière de $\mathbf{P}^5$ est dû à Blomer, Brüdern et Salberger et sera au centre de la troisième partie de cette thèse.

I.3 Résultats de la thèse

I.3.1 Les surfaces de Châtelet

On définit *la surface de Châtelet* $S_{a,F}$ comme le modèle propre et lisse des variétés affines dans $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ d'équations de la forme

$$X^2 - aY^2 = F(X, 1) \tag{I.3.8}$$

où F est une forme binaire à coefficients entier de degré 4, de discriminant non nul et dont tous les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et a un entier sans facteur carré. Il n'est pas difficile de voir, comme dans [Sko], que les hypothèses effectuées ne sont pas restrictives et qu'un modèle propre et lisse d'une variété affine d'équation de la forme de (I.3.8) avec soit a soit F qui possède un facteur carré soit F qui possède un facteur irréductible sur $\mathbf{Q}$ réductible sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ est birationnel à une surface de Châtelet $S_{a',F'}$ au sens de la définition (I.3.8).

Ces surfaces apparaissent naturellement parmi les surfaces non triviales les plus simples dans la classification birationnelle des surfaces d'Iskovskikh [Isk80] puisqu'elles sont des désingularisations minimales de certaines surfaces de del Pezzo généralisées de degré 4 et de type de singularité $2\mathbf{A}_1$ conjuguées [BBP12, remarque 2.3]. En particulier, ces surfaces ne sont pas déployées. Les surfaces de Châtelet sont également arithmétiquement très riches puisque certaines de ces variétés ne satisfont ni le principe de Hasse ni le principe de l'approximation faible et correspondent au contre-exemple historique donné par

Swinnerton-Dyer en 1971 de variétés ne satisfaisant simultanément ni le principe de Hasse ni l'approximation faible. La seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour ces surfaces est en effet l'obstruction de Brauer-Manin d'après [CTSSD87a] et [CTSSD87b]. Ce dernier résultat est d'ailleurs établi à l'aide d'une descente sur les torseurs versels qui, eux, satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible. On donne le tableau récapitulatif suivant concernant le principe de Hasse et l'approximation faible sur les surfaces de Châtelet.

Cas	Principe de Hasse	Approximation Faible
$\mathbf{L_1L_2L_3L_4}$	✓	✗
LC	✓	✓
$\mathbf{Q_1Q_2}$	✗	✗
$\mathbf{L_1L_2Q}$	✓	✗
F	✓	✓

Tableau 3 – Principe de Hasse et approximation faible sur les surfaces de Châtelet. Le symbole ✓ signifie vérifié, le symbole ✗ signifie qu'il existe des cas pour lequel le principe est non vérifié mais que ce n'est pas nécessairement systématique et ✗ signifie non vérifié.

Il est également intéressant de noter qu'il s'agit de surfaces fibrées en coniques et qu'aucune droite n'est incluse dans $S_{a,F}$.

Le premier résultat en direction du principe de Manin et de la conjecture de Peyre sur les surfaces de Châtelet, considérées spécifiquement depuis 2005, est une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour tout F et tout $a < 0$ dans [Bro10]. Ce résultat a récemment été amélioré par Browning et Sofos dont les travaux [BS16] permettent d'obtenir une borne inférieure et une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour tout F et tout a. Ces deux résultats mis à part, tous les cas du principe de Manin et de la conjecture de Peyre obtenus jusqu'à présent l'ont été dans le cas particulier $a = -1$. Le système linéaire anticanonique $\left|\omega_{S_{-1,F}}^{-1}\right|$ étant sans point base, on obtient un morphisme $\psi : S_{-1,F} \to \mathbf{P}^4$ qui donne alors lieu à une hauteur anticanonique H comme en section 1.2. On s'intéresse alors pour établir le principe de Manin et la conjecture de Peyre au comportement asymptotique de la quantité

$$N(B) = \#\left\{x \in S_{-1,F}(\mathbf{Q}) \mid H(x) \leqslant B\right\}$$

lorsque $B \to +\infty$. La forme du résultat asymptotique conjecturé et les méthodes nécessaires pour l'obtenir sont subordonnées au type de factorisation de F dans $\mathbf{Q}$. La liste suivante explicite tous les cas possibles :

(i) $F = L_1L_2L_3L_4$, où les L_j sont des formes linéaires de $\mathbf{Q}[X]$ deux à deux non proportionnelles ;

(ii) $F = L_1L_2Q$ où les L_j sont des formes linéaires non proportionnelles, et Q une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}$ mais réductible sur $\mathbf{Q}[i]$ (cas dégénéré) ;

(iii) $F = L_1L_2Q$ où les L_j sont des formes linéaires non proportionnelles, et Q une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$;

(iv) $F = LC$, où L est une forme linéaire, et C est une forme cubique irréductible sur $\mathbf{Q}$ (et donc irréductible sur $\mathbf{Q}(i)$) ;

(v) $F = Q_1Q_2$, où les Q_j sont des formes quadratiques irréductibles non proportionnelles sur $\mathbf{Q}$, mais dont l'une au moins est réductible sur $\mathbf{Q}[i]$ (cas dégénéré) ;

(vi) $F = Q_1Q_2$ où les Q_j sont des formes quadratiques non proportionnelles irréductibles sur $\mathbf{Q}[i]$;

(vii) F est irréductible sur $\mathbf{Q}$, mais est réductible sur $\mathbf{Q}[i]$ (cas dégénéré) ;

(viii) F est une forme irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$.

L'évaluation asymptotique de $N(B)$ peut être reformulée en termes d'estimations de quantités de la forme

$$\mathcal{S}(X) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^2\cap\mathcal{R}(X)} r(F(\mathbf{x})) \tag{I.3.9}$$

pour

$$\mathcal{R}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid ||\mathbf{x}||_\infty \leqslant X, \quad F(\mathbf{x}) > 0\}$$

et où $r(n)$ désigne le nombre de représentations d'un entier n comme somme de deux carrés. Le premier exemple d'une formule asymptotique pour $S(X)$ lorsque $X \to \infty$ a été obtenu par Daniel [Dan99] pour le polynôme $F(X, Y) = X^4 + Y^4$, qui est du type *(vii)*. À la suite de ce travail, d'autres progrès ont été accomplis. Pour les formes de type *(i)*, l'évaluation asymptotique de $S(X)$ a été traitée par Heath-Brown dans [HB03]. Les précisions nécessaires à l'approche du principe de Manin ont été obtenues dans [BB08], ce qui a effectivement permis l'estimation asymptotique de $N(B)$ dans [BBP12] par Browning, La Bretèche et Peyre. Ce cas constitue le premier cas où le principe de Manin a été obtenue par des méthodes différentes de l'analyse harmonique dans le cas d'une variété ne vérifiant pas l'approximation faible. Les mêmes méthodes fonctionnent pour le type (iv) : les évaluations de $S(X)$ et de $N(B)$ ont ainsi été obtenues dans [BB12] par Browning et La Bretèche. Avec Tenenbaum ([BT12] et [BT13]), La Bretèche a établi les cas dans lesquels F n'est pas divisible par une forme linéaire, autrement dit les types *(vi)* et *(viii)*. Il reste donc certains cas dont le cas *(iii)* sachant que les cas *(ii)*, *(v)* et *(vii)* peuvent être considérés comme des cas dégénérés. On peut noter que le schéma de la démonstration diffère selon que le polynôme F possède un facteur linéaire ou non. En particulier, les outils analytiques requis pour estimer (I.3.9) dans le cas où F ne possède pas de facteur linéaire sont plus sophistiqués et font notamment appel à la fonction Δ de Hooley tordue par un caractère.

La première partie de cette thèse est alors consacrée à la démonstration du principe de Manin et de la conjecture de Peyre dans le dernier cas restant (*iii*) et ainsi d'achever le traitement de ces conjectures dans le cas des surfaces de Châtelet pour $a = -1$. Dans ce cas, la résolution de ce problème et l'estimation de (I.3.9) peut se ramener à l'estimation asymptotique de sommes du type

$$S(X) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^2\cap\mathcal{R}(X)} r(L_1(\mathbf{x}))r(L_2(\mathbf{x}))r(Q(\mathbf{x})), \tag{I.3.10}$$

On rappelle qu'on a l'expression

$$r(n) = 4\sum_{d|n} \chi(d),$$

où χ désigne le caractère de Dirichlet non principal modulo 4. La méthode pour estimer ces sommes est alors inspirée de l'article [BB10] où le même genre de sommes est étudiée

mais pour la fonction τ nombre de diviseurs à la place de la fonction r et de [BB08] où le même genre de somme est étudiée mais avec quatre formes linéaires non proportionnelles. Elle repose essentiellement sur une décomposition des sommes du type (I.3.10) due à Heath-Brown [HB97] permettant de réduire les intervalles de chacune des variables de façon acceptable et ainsi permettre l'utilisation d'estimations de géométrie des nombres inspirées de [Dan99] et [BB10]. Le résultat que l'on obtient est alors le suivant.

Théorème I.3.1. *Soient $a = -1$ et L_1 et L_2 deux formes linéaires non proportionnelles et Q une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$. On suppose que $\mathcal{R}$ est une région convexe, bornée avec une frontière continûment différentiable telle que*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \quad L_i(\mathbf{x}) > 0 \quad (i \in \{1,2\}), \quad Q(\mathbf{x}) > 0.$$

On pose pour $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbf{N}^3$

$$\rho(d_1, d_2, d_3) = \#\left\{\mathbf{x} \in [0, d[^2 \cap \mathbf{Z}^2 \mid d_i \mid L_i(\mathbf{x}) \quad (i \in \{1,2\}), \quad d_3 \mid Q(\mathbf{x})\right\}$$

et pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$\mathcal{E}_{2^n} = \left\{k \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \quad \mid \quad \exists \ell \in \mathbf{N}, \quad k \equiv 2^\ell \left(\mathrm{mod}\ 2^{\min\{\ell+2,n\}}\right)\right\}.$$

Soient

$$\eta = 1 - \frac{1 + \log\log(2)}{\log(2)} = 0.086071...$$

ainsi que $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant 1$ tels que $r' X^{1-\varepsilon} \geqslant 1$. On a alors

$$S(X) = \pi^3 \mathrm{vol}(\mathcal{R}) X^2 \prod_p \sigma_p + O_\varepsilon\left(\frac{X^2}{(\log(X))^{\eta-\varepsilon}}\right),$$

où

$$\sigma_p = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^3} \frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} \rho\left(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}\right)}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}$$

lorsque p est impair et

$$\sigma_2 = 8 \lim_{n \to +\infty} 2^{-2n} \#\left\{\mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \quad \middle| \quad F_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{2^n}\right\}.$$

Le produit $\prod_{p>2} \sigma_p$ est bien absolument convergent et la constante implicite du O_ε peut être rendue complètement explicite en les coefficients des formes L_1, L_2 et Q.

On en déduit en particulier le théorème suivant qui est en accord avec la prédiction de Manin.

Théorème I.3.2. *Lorsque $a = -1$ et $F = L_1 L_2 Q$ avec L_1 et L_2 deux formes linéaires non proportionnelles et Q une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$, on a*

$$N(B) \underset{B \to +\infty}{\sim} c_0 B \log(B),$$

où la constante $c_0 = c_{\mathrm{Peyre}}$ est la constante conjecturée par Peyre.

Remarque.– On peut noter que tous les cas traités pour $a = -1$, y compris les cas traités dans cette thèse, devraient s'adapter sans problème à tous les cas $a < 0$ sans nécessiter de nouvelles idées ou de nouveaux concepts mais au prix d'un certain nombre de complications techniques. On renvoie à [BT13] pour plus de détails.

La deuxième partie de cette thèse est dédiée à la géométrie derrière les différentes démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre dans le cas des surfaces de Châtelet et plus généralement à la géométrie des surfaces fibrées en coniques obtenues comme modèle minimaux propres et lisses de variétés affines dans $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ d'équations de la forme

$$X^2 - aY^2 = F(X, 1) \tag{I.3.11}$$

où F est une forme binaire à coefficients entier de degré quelconque, de discriminant non nul et dont tous les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et a un entier sans facteur carré.

En effet, les variétés considérées dans la première partie de cette thèse ne sont pas déployées et en accord avec la section I.2.1, on s'attend à ce que les torseurs utilisés soient différents des torseurs versels. De plus, pour les cas considérés dans cette thèse, l'approximation faible n'est pas nécessairement vérifiée, ce qui en fait le premier exemple de surfaces non déployées ne vérifiant pas l'approximation faible pour lequel le principe de Manin et la conjecture de Peyre sont établis par de telles méthodes de descente. Le passage successif du nombre de points rationnels de hauteur bornée à des sommes de type (I.3.9) puis à des sommes de type (I.3.10) correspond à deux descentes successives. La première descente est une descente de la surface de Châtelet sur un torseur intermédiaire $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{A}^5$ d'équation

$$y^2 + z^2 = t^2 F(u, v)$$

avec $(y, z, t) \neq (0, 0, 0)$ et $(u, v) \neq (0, 0)$. Pieropan a alors établi dans sa thèse [Pie15] qu'il s'agissait d'un torseur quasi-universel de type $\lambda : \mathrm{Pic}(S) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S})$. La deuxième descente effectuée l'est de ce torseur intermédiaire $\mathcal{T}$ sur des variétés d'équations

$$\begin{cases} L_i(u, v) = d_i(s_i^2 + t_i^2), & (i = 1, 2) \\ Q(u, v) = d_3(s_3^2 + t_3^2). \end{cases} \tag{I.3.12}$$

La majeure partie du travail afin de vérifier la conjecture de Peyre a donc été d'établir que ces variétés sont en réalité des torseurs quasi-universels d'un certain type $\lambda : \hat{T} \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S})$ et non des torseurs versels. Une description explicite des torseurs versels et des torseurs utilisés lors de la preuve du principe de Manin est alors établie en utilisant le formalisme des anneaux de Cox présenté en section 1.3.1, un anneau de Cox des surfaces de Châtelet sur $\overline{\mathbf{Q}}$ ayant été explicité dans [Der06]. On montre alors

$$c_{\mathrm{Peyre}} = \frac{\alpha(X)\beta(X)}{\#Ш^1(\mathbf{Q}, T)} \sum_{j \in J} \omega_{V, H_V}\left(\pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})\right)\right) \tag{I.3.13}$$

pour un ensemble fini J dépendant de la forme F. La démonstration du principe de Manin fournit qu'alors les torseurs de type λ utilisés dans la preuve satisfont le principe de Hasse. Ce travail a donné lieu à la publication [Des16b].

De manière analogue, on peut constater que parmi toutes les démonstrations du principe de Manin, le seul cas où une descente est utilisée sur les torseurs versels est le cas scindé (i). Dans tous les autres cas, on effectue une descente sur d'autres torseurs. Plus

précisément, si l'on s'intéresse à la surface de Châtelet $S_{a,F}$ avec $F = F_1 \cdots F_r$ pour $F_1, \ldots, F_r$ les facteurs irréductibles de F sur $\mathbf{Q}$, alors le problème de comptage est traité systématiquement au moyen de deux descentes successives, la première sur le torseur intermédiaire $\mathcal{T}$ puis la seconde sur les variétés de $\mathbf{A}^{2r+2} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[u, v, s_i, t_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r])$ définie par les équations

$$F_i(u, v) = d_i(s_i^2 + t_i^2) \qquad (1 \leqslant i \leqslant r). \tag{I.3.14}$$

Dans la plupart des cas, comprendre la géométrie derrière le problème de comptage et les torseurs ne se révèle pas indispensable pour vérifier que la conjecture de Peyre est vérifiée (même si la vérification de la constante peut se réexprimer en ces termes malgré tout) sauf dans les cas $L_1L_2L_3L_4$ (pour lequel il est établi dans [BBP12] que les variétés (I.3.14) sont des torseurs versels), L_1L_2Q (qui est traité dans ce manuscrit) et Q_1Q_2 (où la vérification de la constante est complétée dans ce manuscrit). On démontre alors le résultat plus général suivant qui explicite complètement la situation géométrique dans le cas des surfaces de Châtelet généralisées. On donne également une procédure pour obtenir des équations explicites des torseurs versels et des torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin. Le théorème suivant est valable pour tout a et sera donc utile notamment dans le cas des surfaces de Châtelet pour $a > 0$ qui est un projet en cours. Le résultat suivant pourrait également s'avérer utile dans le cas où le principe de Manin serait établie pour des surfaces de Châtelet généralisées avec $\deg(F) > 4$. Il est cependant important de noter que les méthodes présentées dans cette thèse ou les méthodes de [BT13] sont inopérantes dans ce cas et ne permettent de couvrir que les cas $\deg(F) \leqslant 4$. Les autres cas semblent hors de portée à l'heure actuelle, à part peut être le cas scindé qui pourrait être attaqué à l'aide de la machinerie de Green-Tao-Ziegler [GTZ12].

Théorème I.3.3. *Soit $S_{a,F}$ le modèle minimal propre et lisse de variétés affines de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme*

$$X^2 - aY^2 = F(X, 1)$$

où F est une forme binaire à coefficients entiers de degré n pair, de discriminant non nul et a un entier sans facteur carré. On suppose que $F = F_1 \cdots F_r$ pour $F_1, \ldots, F_r$ les facteurs irréductibles de F sur $\mathbf{Q}$ et que ces facteurs irréductibles restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. Il existe alors des torseurs pour $S_{a,F}$ de tout type dès que $S_{a,F} \neq \varnothing$, ce que l'on supposera dans la suite du théorème.
Supposons que $a < 0$ ou que $a > 0$ et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1 et que, si $a > 0$, le nombre de classes restreint soit également égal à 1. Soit $\mathcal{T}$ un torseur versel pour $S_{a,F}$. Il existe alors une variété $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{T} \cong \mathcal{X} \times \mathbf{A}^2$ et tel que sur le complémentaire de l'origine $\mathcal{X}^\circ$ de $\mathcal{X}$ on ait

$$F_i(u, v) = \beta_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

pour $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ vérifiant $\beta_1 \cdots \beta_r = \square \times N_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}}(x, y)$ et où s_i et t_i vérifient certaines conditions. Il est alors possible de déterminer explicitement des équations de $\mathcal{T}$ dès que F est explicite. Ainsi, ce ne sont pas les torseurs utilisés dans les différentes démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre [BB12], [BT13] et [Des16b]. Ce sont en revanche les torseurs utilisés dans la démonstration de [BBP12].
Par ailleurs, soit $\mathcal{T}$ un torseur de type $\lambda : \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S})$. Alors il existe une variété $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{T} = \mathcal{X} \times \mathbf{A}^2$ et telle que le complémentaire de l'origine $\mathcal{X}^\circ$ de $\mathcal{X}$ soit isomorphe à l'intersection complète de $\mathbf{A}^{2r+2}_{\mathbf{Q}} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u, v) = \beta_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

pour $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ *vérifiant* $\beta_1 \cdots \beta_r = N_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}}(x, y)$. *Il est alors possible de déterminer un système de représentant des classes d'isomorphismes de tels torseurs et de déterminer explicitement des équations de* $\mathcal{T}$ *dès que* F *est explicite.*
En particulier, les torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin pour $a = -1$ *sont des torseurs de type* $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)})$.

On peut remarquer que dans le cas des torseurs versels, les normes $N_{K_i/\mathbf{Q}}(\mathbf{x}_i)$ sont bien des normes sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ mais vérifiant des conditions particulières, ce qui rend notamment plus difficile d'expliciter un système de représentant de leurs classes d'isomorphismes.

I.3.2 Une famille d'hypersurfaces en dimension supérieure

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et W_n l'hypersurface normale projective de $\mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$ définie par l'équation

$$x_1 y_2 y_3 \cdots y_n + x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots + x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0 \tag{I.3.15}$$

où $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ désignent des coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$. Lorsque $n = 2$, la variété W_2 est lisse tandis que pour $n \geqslant 3$, la variété W_n est singulière, le lieu singulier étant donné par la réunion des sous-espaces fermés définis par les équations

$$y_i = y_j = y_k = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$$

ou

$$y_i = y_j = x_i = x_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

On pose U_n l'ouvert de Zariski de W_n défini par la condition $y_1 y_2 \cdots y_n \neq 0$. Sur cet ouvert, on peut réécrire l'équation (I.3.15) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = 0.$$

On constate alors que toutes les sous-variétés accumulatrices et les points singuliers de W_n sont inclus dans $W_n \smallsetminus U_n$ ([BBS14]). La variété W_n possède la structure algébrique suivante qui s'avérera très utile dans la suite. On considère le groupe algébrique

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q} \right\}$$

ainsi que

$$\Psi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} H^n & \longrightarrow & \mathbf{G}_a \\ \left(\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \end{array} \right.$$

et $G_n = \mathrm{Ker}(\Psi_n)/\mathbf{G}_m$ où l'on utilise le plongement

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m & \hookrightarrow & H^n \\ b & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) \end{array}.$$

On obtient alors que $G_n \cong U_n$. En effet, tout point de U_n admet un unique représentant de la forme $[x_1 : \cdots : x_n : 1 : y_2 : \cdots : y_n]$ et de même tout point de G_n possède une unique représentation du type $\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \right)$ si bien que

$$\begin{array}{ccc} U_n & \longrightarrow & G_n \\ [x_1 : \cdots : x_n : 1 : y_2 : \cdots : y_n] & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n & x_n \\ 0 & y_n \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

est un isomorphisme qui munit U_n d'une structure de groupe commutatif lorsque la multiplication de deux points $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n)$ est donnée par

$$(x_1y'_1 + x'_1y_1, \ldots, x_ny'_n + x'_ny_n, y_1y'_1, \ldots, y_ny'_n).$$

Il vient alors une immersion ouverte naturelle $j : G_n \hookrightarrow W_n$ et une action naturelle $\alpha : G_n \times W_n \to W_n$ de G_n sur W_n. Ce groupe

$$G \cong (\mathbf{G}_a)^{n-1} \times (\mathbf{G}_m)^{n-1}$$

n'est cependant pas de type produit et les techniques d'analyse harmonique utilisées par exemple dans [BT98b] et [CLT02] ne s'adaptent pas, *a priori*, à ce cas. Dans [BBS14], Blomer, Brüdern et Salberger établissent le principe de Manin sous sa forme forte conjecturée par Peyre pour la variété W_n dans le cas $n = 3$ pour la hauteur anticanonique

$$H([x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3]) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} (|x_i|, |y_i|)^3$$

où $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ sont des entiers premiers entre eux. Leur méthode repose sur la construction d'une résolution crépante $X \to W_3$ de W_3 puis sur une descente sur le torseur versel de X. La résolution crépante construite et leur méthode de comptage n'est plus valable dès que $n \geqslant 4$ mais il est à noter que leur formule asymptotique ([BBS14, theorem 1]) est plus précise que la prédiction de Manin à proprement parler puisqu'ils obtiennent un terme principal de la forme $BQ(\log(B))$ avec Q un polynôme de degré 4 dont le coefficient dominant correspond à la constante de Peyre.

Comme remarqué dans ce même article [BBS14, section 1.3], l'équation (I.3.15) définit également pour $n \geqslant 3$ une variété singulière $\widehat{W_n} \subset \left(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}\right)^n$ pour laquelle il est intéressant d'étudier le principe de Manin et la conjecture de Peyre pour la hauteur anticanonique

$$\widehat{H}([x_1 : y_1], \ldots, [x_n : y_n]) = \prod_{i=1}^{n} \max(|x_i|, |y_i|)$$

lorsque (x_i, y_i) sont deux entiers premiers entre eux pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. À la connaissance de l'auteur, ces deux conjectures ne sont connues pour aucune valeur de $n \geqslant 3$ pour les variétés $\widehat{W_n}$. Ces dernières ont pourtant un intérêt arithmétique puisqu'elles interviennent dans la détermination du cardinal des matrices stochastiques à coefficients rationnels tous de hauteur inférieure à une certaine borne $B \geqslant 1$. Dans [Shp16], Shparlinski obtient une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour ce cardinal et dans [Bre16], La Bretèche parvient à en obtenir une formule asymptotique en déterminant le nombre de points rationnels de hauteur inférieure à B sur $\widehat{W_n}$ lorsque $n \geqslant 3$ pour la hauteur

$$\widehat{H}_2([x_1 : y_1], \ldots, [x_n : y_n]) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|, |y_i|)$$

lorsque (x_i, y_i) sont deux entiers premiers entre eux pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il est cependant important de noter que cette hauteur n'est pas anticanonique et qu'ainsi le principe de Manin et la conjecture de Peyre ne s'appliquent pas dans ce cas.

Enfin, l'équation (I.3.15) définit également pour $n \geqslant 3$ une variété singulière biprojective $\widetilde{W_n} \subset \left(\mathbf{P}^{n-1}_{\mathbf{Q}}\right)^2$ pour laquelle il peut également être intéressant d'étudier le principe de Manin et la conjecture de Peyre par rapport à la hauteur anticanonique

$$\widetilde{H}([x_1 : \ldots : x_n], [y_1 : \ldots : y_n]) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^{n-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$$

lorsque $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont deux n-uplets d'entiers premiers entre eux. Il est à noter que dans ce cas, contrairement au cas de W_n, la variété $\widetilde{W}_n$ ne peut pas être écrite de façon naturelle comme la compactification équivariante d'un groupe. Dans le cas de W_n, c'est un aspect essentiel de la preuve du principe de Manin et de la conjecture de Peyre de [BBS14]. Le seul cas pour lequel un résultat est connu est le cas $n = 3$. La variété $\widetilde{W}_3$ est alors une cubique de dimension 3 et Blomer et Brüdern obtiennent dans un premier temps dans [BB16] le bon ordre de grandeur pour le problème de comptage associé avant de parvenir récemment avec Salberger à obtenir une formule asymptotique et le principe de Manin et la conjecture de Peyre dans [BBS16].

On démontre alors dans une troisième partie de cette thèse le principe de Manin et la conjecture de Peyre pour les hypersurfaces W_n pour tout $n \geqslant 2$. Le cas $n = 2$ étant couvert par [BT98b] et le cas $n = 3$ étant couvert par le résultat de [BBS14]. La démonstration utilise des résultats de Per Salberger qui explicitent une résolution crépante pour la variété W_n pour tout $n \geqslant 3$ et qui sont reproduits en annexe de ce manuscrit.

Pour tout $n \geqslant 2$ et pour un point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$ représenté par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{2n}$ premiers entre eux, on considère la hauteur

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|, |y_i|)^n$$

qui est une hauteur anticanonique naturelle sur W_n comme remarqué dans [BBS14]. De plus, pour tout $B \geqslant 1$, on pose

$$N(B; U_n) = \#\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_n(\mathbf{Q}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant B\}.$$

On démontre alors le théorème suivant, en accord avec la prédiction de Manin.

Théorème I.3.4. *Soit $B \geqslant 1$. Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que*

$$N(B; U_2) = c_2 B \log(B) + O(B)$$

avec

$$c_2 = \frac{4}{\zeta(2)^2}$$

et pour $n \geqslant 3$, il existe une constante $c_n > 0$ telle que

$$N(B; U_n) = c_n B (\log B)^{2^n - n - 1} + O\left(B (\log B)^{2^n - n - 2} \log(\log B)\right).$$

De plus, l'expression de la constante c_n est en accord avec la conjecture de Peyre.

La démonstration de ce résultat permet d'enrichir la liste des variétés de dimension supérieure pour lesquelles on connaît le principe de Manin et la conjecture de Peyre et présente l'avantage, contrairement aux cas précédemment cités en section I.2.3, d'être valable pour une famille infinie d'hypersurfaces. La démonstration repose essentiellement sur deux aspects distincts. Le premier est le problème de comptage à proprement parler. L'idée principale est d'utiliser la factorisation suivante

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad y_j = \prod_{1 \leqslant h \leqslant 2^n - 1} z_h^{\varepsilon_j(h)}$$

pour

$$h = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \varepsilon_j(h) 2^{j-1}$$

afin de transformer le problème de comptage sur (I.3.15) en un problème de comptage sur

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = 0 \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad d_i = \prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}. \tag{I.3.16}$$

On est ainsi en mesure de parfaitement contrôler toutes les conditions de coprimalité et on est capable d'estimer par des méthodes élémentaires, pour $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ fixés, le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Z}^n \quad : \quad \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=1}^{n} d_i \alpha_i = 0 \right\} \qquad (X \geqslant 1).$$

La deuxième partie de la démonstration vise à vérifier que la constante est en accord avec la conjecture de Peyre. Cependant les variétés W_n sont singulières dès que $n \geqslant 3$ et il est alors nécessaire de déterminer une résolution crépante $f_0 : X_0 \to W_n$. Puisque X_0 est une variété "presque de Fano" au sens de [Pey01, Définition 3.1], le principe de Manin prend la forme suivante où la constante de Peyre est donnée par la formule empirique [Pey01, formule 5.1]

$$N(B; U_n) = c_{\text{Peyre}} B \left(\log(B)\right)^{\text{rk}(\text{Pic}(X_0))-1} (1 + o(1)).$$

La deuxième partie de ce travail a donc constitué, en se basant sur l'annexe due à Per Salberger, à construire cette résolution crépante et à établir que le problème de comptage consistait en une descente sur le torseur versel associé à cet résolution crépante qui est explicitement construit. On démontre plus précisément le résultat suivant.

Théorème I.3.5. *On pose $N = 2^n - 1$ et on introduit pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, $\mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ comme étant l'espace biprojectif $\mathbf{P}^{s(h)-1} \times \mathbf{P}^{s(h)-1}$ de coordonnées bihomogènes*

$$\left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) = \left(Y_{i_1}^{(h)}, \ldots, Y_{i_{s(h)}}^{(h)}; Z_{i_1}^{(h)}, \ldots, Z_{i_{s(h)}}^{(h)}\right)$$

pour $\varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$. On définit alors la sous-variété fermée $X_{0,n} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ de coordonnées multihomogènes

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)$$

définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} Y_{i_1}^{(h)} Z_{i_1}^{(h)} = \cdots = Y_{i_{s(h)}}^{(h)} Z_{i_{s(h)}}^{(h)} & \textit{pour} \quad h \in [\![1,N]\!] \quad \textit{et} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1, \\ Y_i^{(h)} Y_j^{(\ell)} = Y_j^{(h)} Y_i^{(\ell)} & \textit{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1,N]\!] \quad \textit{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, \\ Z_i^{(h)} Z_j^{(\ell)} = Z_j^{(h)} Z_i^{(\ell)} & \textit{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1,N]\!] \quad \textit{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, \\ x_1 Z_1^{(N)} + \cdots + x_n Z_n^{(N)} = 0, & \\ y_i Y_j^{(N)} - y_j Y_i^{(N)} = 0 & \textit{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{cases} \tag{I.3.17}$$

La restriction de la projection sur le premier facteur

$$pr_1 : \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} \to \mathbf{P}^{2n-1}$$

à la variété $X_{0,n}$ définie par les équations (I.3.17) fournit un morphisme propre, G_n-équivariant d'une variété normale $X_{0,n}$ vers W_n. De plus, il s'agit d'une résolution crépante

de W_n. De plus, $X_{0,n}$ est un $\mathbf{P}^{n-1}$-fibré sur une variété $B_{0,n}$ isomorphe à la variété torique de Coxeter C_n de $\mathfrak{S}_n$ et $X_{0,n}$ est "presque de Fano".
Soit $O \subset \mathbf{A}^{2^n+n-1}$ la sous-variété ouverte de coordonnées $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ définie par

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N \\ h\neq h_n \\ s(h)\geqslant 2}} z_h^{1-\varepsilon_i(h)} \right) = 0. \tag{I.3.18}$$

et les conditions

$$z_{h_n} \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N \\ h\notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \quad ou \quad x'_i z_{2^{i-1}} \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N \\ h\notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \tag{I.3.19}$$

pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ tel que $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$ et

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \left\{ h_{1,\mathbf{j}} = 2^{j_1-1} \preceq \cdots \preceq h_{k,\mathbf{j}} = \sum_{s=1}^{k} 2^{j_s-1} \preceq \cdots \preceq h_{n,\mathbf{j}} = N \right\}.$$

Le morphisme $\varphi_O : O \to X_{0,n}$ défini par

$$\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \longmapsto \left(z_1 x'_1, \ldots, z_{2^{n-1}} x'_n, \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N \\ \varepsilon_1(h)=1}} z_h, \ldots, \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N \\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) \right) \tag{I.3.20}$$

où

$$\mathbf{Y}^{(h)} = \left(\frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=1}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ h\preceq \ell}} z_\ell}, \ldots, \frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=1}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ h\preceq \ell}} z_\ell} \right) \quad pour \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\mathbf{Z}^{(h)} = \left(\frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=0}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}} z_\ell}, \ldots, \frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=0}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}} z_\ell} \right) \quad pour \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

est alors le morphisme sous-jacent d'un torseur versel pour $X_{0,n}$.
Soit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des $2^n + n - 1$-uplets $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ tels que $x'_i \in \mathbf{Z}$, $z_h \in \mathbf{N}$ si $s(h) > 1$ et $z_h \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ si $s(h) = 1$ vérifiant la relation (I.3.19) ainsi que les conditions de coprimalité

$$\operatorname{pgcd}\left(z_{h_n}, x'_1 z_1, \ldots, x'_n z_{2^{n-1}}\right) = 1 \tag{I.3.21}$$

et que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}$ est réduit. Alors, l'application $\mathcal{A}_0 \to \mathbf{Z}^{2n}$ définie par

$$\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \in \mathcal{A}_0 \longmapsto \left(z_1 x'_1, \ldots, z_{2^{n-1}} x'_n, \prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{\varepsilon_1(h)}, \ldots, \prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{\varepsilon_n(h)} \right)$$

avec

$$\mathcal{A}_0 = \#\left\{ \left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \in \mathbf{Z}^n \times (\mathbf{Z}\smallsetminus\{0\})^{2^n-1} \ : \ \begin{array}{c} (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N} \ \ N\text{-uplet réduit}, \\ z_h > 0 \ \text{ si } \ s(h) \geqslant 2, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_j(h)} \right) z_{2^{j-1}} x'_j = 0 \end{array} \right\}$$

est une bijection entre $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{W}_n$, l'ensemble des solutions entières primitives de (I.3.15). De plus, dans ce cas, la condition (I.3.21) est équivalente à la condition

$$\mathrm{pgcd}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 1.$$

Cela permet alors de construire la mesure de Tamagawa et en tirant parti de la structure de groupe de W_n et de calculer tous les invariants intervenant dans la constante de Peyre grâce à [TT12]. Ce travail a donné lieu à la prépublication [Des16a]. Enfin, on précise que la méthode présentée dans le cas du plongement dans $\mathbf{P}^{2n-1}$ ne semble pas s'appliquer directement aux autres plongements.

I.4 Plan de la thèse

L'organisation de cette thèse est la suivante. Dans une première partie, on s'intéresse au principe de Manin et à la conjecture de Peyre pour les surfaces de Châtelet et plus généralement pour les surfaces fibrées en coniques obtenus comme modèle minimal propre et lisse de variétés affines de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme

$$X^2 - aY^2 = F(X, 1) \tag{I.4.22}$$

où F est une forme binaire à coefficients entiers de degré n, de discriminant non nul et a un entier sans facteur carré. Dans un premier chapitre, on reproduit la publication [Des16b] dans laquelle le principe de Manin et la conjecture de Peyre pour les surfaces de Châtelet dans le cas $a = -1$ et $F = L_1L_2Q$ sont établies. Le second chapitre est consacré à le description d'un anneau de Cox de type identité sur une clôture algébrique des surfaces (I.4.22). On donne alors, grâce à [Pie15] et à cet anneau de Cox, une description des torseurs versels et des torseurs de type $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ associés à ces surfaces. On éclaire ainsi la géométrie derrière les preuves du principe de Manin préalablement existantes et ouvre la voie à de nouvelles preuves de ce principe.

Dans une seconde partie, on reproduit la prépublication [Des16a] dans laquelle on démontre le principe de Manin et la conjecture de Peyre sur les hypersurfaces singulières (I.3.15). Cette partie comporte une annexe de Per Salberger sur lequel repose de manière importante la vérification de la constante de Peyre pour (I.3.15).

Notations

Dans tout le manuscrit, ε désignera une constante strictement positive arbitrairement petite. Cette constante sera autorisée à éventuellement changer de valeur d'une ligne à l'autre.

Toutes les dépendances (y compris en ε) des constantes implicites des notations de Vinogradov $\ll$ et de Landau O seront précisées en indice de celles-ci.

On notera indifféremment (n, m) et $\mathrm{pgcd}(m, n)$ le plus grand diviseur commun de deux entiers n et m ainsi que $[n, m]$ et $\mathrm{ppcm}(m, n)$ le plus petit multiple commun de deux entiers n et m.

Première partie

Le principe de Manin sur certaines surfaces fibrées en coniques

Table des matières

1 Le principe de Manin pour certaines surfaces de Châtelet 33
1.1 Introduction . . . 34
1.2 Estimations de sommes liées à la fonction r . . . 35
1.3 Propriétés des fonctions ρ . . . 39
1.4 Démonstration du Théorème 1.2.1 . . . 41
1.4.1 Extraction des valuations 2-adiques . . . 41
1.4.2 Traitement de S_0 . . . 49
1.4.3 Traitement des $S_{\pm,\pm,\pm}$ et fin de la preuve du Théorème 1.2.1 . . . 53
1.5 Démonstration du Théorème 1.2.3 : interprétation de la constante . . . 59
1.5.1 Le cas $p \equiv 1 \pmod 4$ . . . 59
1.5.2 Le cas $p \equiv 3 \pmod 4$ . . . 60
1.5.3 Le cas $p = 2$ . . . 61
1.5.4 Le cas de la densité archimédienne . . . 61
1.6 Démonstration du Théorème 1.1.1 . . . 62
1.6.1 Passage aux torseurs et reformulation du problème de comptage . . . 62
1.6.2 Fin de la preuve du Théorème 1.1.1 . . . 68
1.7 La constante de Peyre . . . 72
1.7.1 Les facteurs $\alpha(S)$ et $\beta(S)$ . . . 72
1.7.2 Torseurs versels . . . 74
1.7.3 Les torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin . . . 78
1.7.4 Expression de la constante de Peyre . . . 85
1.7.5 Transformation de la constante c_0 . . . 87
1.7.6 Fin de la preuve de la conjecture de Peyre . . . 89

2 La géométrie du principe de Manin pour certaines surfaces fibrées en coniques 93
2.1 Introduction . . . 94
2.1.1 Résultats . . . 98
2.2 Géométrie des surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$ . . . 100
2.2.1 Quelques réductions . . . 100
2.2.2 Calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ . . . 100
2.3 Arithmétique des surfaces $S_{a,F}$ . . . 106
2.4 Les torseurs versels . . . 109
2.4.1 L'anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$ . . . 109
2.4.2 Description des torseurs versels . . . 111
2.4.3 Exemples . . . 117
Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$ . . . 117
Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ . . . 117
Un cas de surface de Châtelet $\mathbf{LC}$ . . . 121
Un cas de surface de Châtelet $\mathbf{F}$ . . . 122
Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F scindé du type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\cdots\mathbf{L}_n$ . . . 123
Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F du type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{n/2}$ . . . 123
2.5 Les torseurs de type $\mathrm{Pic}\big(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$ . . . 124
2.5.1 Description de $\mathrm{Pic}\big(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$ . . . 125
2.5.2 Un exemple : Le cas des surfaces de Châtelet avec $a = -1$ et $F = Q_1Q_2$ 134

1

Le principe de Manin pour certaines surfaces de Châtelet

Sommaire

1.1 Introduction **34**
1.2 Estimations de sommes liées à la fonction r **35**
1.3 Propriétés des fonctions ρ **39**
1.4 Démonstration du Théorème 1.2.1 . . . . . **41**
1.4.1 Extraction des valuations 2-adiques 41
1.4.2 Traitement de S_0 49
1.4.3 Traitement des $S_{\pm,\pm,\pm}$ et fin de la preuve du Théorème 1.2.1 . . 53
1.5 Démonstration du Théorème 1.2.3 : interprétation de la constante 59
1.5.1 Le cas $p \equiv 1 \pmod 4$ 59
1.5.2 Le cas $p \equiv 3 \pmod 4$ 60
1.5.3 Le cas $p = 2$ 61
1.5.4 Le cas de la densité archimédienne 61
1.6 Démonstration du Théorème 1.1.1 . . . . . **62**
1.6.1 Passage aux torseurs et reformulation du problème de comptage 62
1.6.2 Fin de la preuve du Théorème 1.1.1 68
1.7 La constante de Peyre **72**
1.7.1 Les facteurs $\alpha(S)$ et $\beta(S)$ 72
1.7.2 Torseurs versels 74
1.7.3 Les torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin 78
1.7.4 Expression de la constante de Peyre 85
1.7.5 Transformation de la constante c_0 87
1.7.6 Fin de la preuve de la conjecture de Peyre 89

Abstract. Following the line of attack from La Bretèche, Browning and Peyre, we prove Manin's principle in its strong form conjectured by Peyre for a family of Châtelet surfaces which are defined as minimal proper smooth models of affine surfaces of the form

$$Y^2 - aZ^2 = F(X, 1),$$

where $a = -1$, $F \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ is a polynomial of degree 4 whose factorisation into irreducibles contains two non proportional linear factors and a quadratic factor which is irreducible over $\mathbf{Q}[i]$. This result deals with the last remaining case of the Manin's principle for Châtelet surfaces with $a = -1$ and essentially settles the study of the Manin's principle for Châtelet surfaces with $a < 0$. We reproduce here the publication [Des16b].

1.1 Introduction

On définit la surface de Châtelet $S_{a,F}$ comme modèle minimal propre et lisse de variétés affines de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme

$$X^2 - aY^2 = F(X, 1)$$

où F est une forme binaire à coefficients entiers de degré 4, de discriminant non nul et a un entier qui n'est pas un carré. Ces surfaces introduites par Châtelet ([Cha59] et [Cha66]) sont arithmétiquement très riches puisqu'elles correspondent à l'exemple historique donné en 1971 par Swinnerton-Dyer de variétés ne satisfaisant ni le principe de Hasse ni l'approximation faible. Elles sont également des désingularisations minimales de surfaces de del Pezzo de degré 4 de type de singularité $2\mathbf{A}_1$ conjuguées [BBP12, remarque 2.3]. Les surfaces de del Pezzo ont été parmi les premières à être considérées dans le traitement du principe de Manin ([BB07b], [Der06], [DT07] ou encore [Bou12b] entre autres) puisque les plus simples dans la classification birationnelle d'Iskovskikh [Isk80].

L'objet de cet article est de décrire la répartition des points rationnels sur les surfaces de Châtelet dans les cas où $S_{a,F} := S$ avec F produit de deux formes linéaires F_1 et F_2 non proportionnelles par une forme quadratique F_3 irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$ et $a = -1$. Tous les éléments quant à la géométrie de ces surfaces dont nous auront besoin ont été démontrés dans [CTSSD87a] et [CTSSD87b] et sont résumés dans [Bro10] et [BBP12] dans le cas où F est scindé. Ils s'adaptent au cas présent sans difficulté. En particulier, le système linéaire anticanonique $|\omega_S^{-1}|$ est sans point base, ce qui donne lieu à un morphisme $\psi : S \to \mathbf{P}^4$. On s'intéresse alors à la quantité

$$N(B) = \#\{x \in S(\mathbf{Q}) \quad | \quad (H_4 \circ \psi)(x) \leqslant B\},$$

où H_4 est une hauteur sur $\mathbf{P}^4(\mathbf{Q})$ qui sera définie en section 1.6.1. Le rang du groupe de Picard de S vaut ici 2 [Bro10] si bien que le principe de Manin prend la forme

$$N(B) \underset{B \to +\infty}{\sim} c_S B \log(B)$$

pour une certaine constante $c_S > 0$. Peyre [Pey95] dans un premier temps, puis Batyrev et Tschinkel [BT98a] dans un cadre plus général, ont proposé une expression conjecturale de la constante c_S s'exprimant en termes d'une mesure de Tamagawa sur l'espace adélique associé à la surface S (voir aussi la formule empirique donnée par Peyre dans [Pey01, formule 5.1]).

D'après [CTSSD87a] et [CTSSD87b], l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les surfaces de Châtelet et en particulier les surfaces considérées spécifiquement dans cet article ne satisfont pas nécessairement l'approximation faible mais satisfont le principe de Hasse. Il s'agit ici du troisième cas, après [BBP12] et [BT13], pour lequel le principe de Manin dans sa forme forte conjecturée par Peyre dans [Pey01, formule 5.1] est établi par des méthodes de descente sur des torseurs pour une classe de variétés ne satisfaisant pas l'approximation faible.

Les travaux de La Bretèche, Browning et Peyre [BBP12] utilisant l'approche par les torseurs versels (introduits par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS77], [CTS79] et [CTS87]

et utilisés dans ce cadre pour la première fois par Salberger dans [Sal98]) ont permis dans un premier temps d'établir le principe de Manin dans le cas de factorisations de type un produit de formes linéaires non proportionnelles [BBP12], puis les travaux de La Bretèche et Browning ont fourni le cas d'un produit d'une forme linéaire et d'une forme cubique irréductible sur $\mathbf{Q}$ [BB12], et enfin les travaux de La Bretèche et Tenenbaum ceux d'une forme irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$ de degré 4 ou d'un produit de deux formes quadratiques irréductibles sur $\mathbf{Q}[i]$ [BT13].

On achève dans cet article la preuve du principe de Manin dans le cas des surfaces de Châtelet avec $a = -1$. Le théorème suivant améliore notamment la borne $N(B) \ll B\log(B)$ obtenue par Browning dans [Bro10].

Théorème 1.1.1. *Lorsque $a = -1$ et $F = F_1F_2F_3$ avec F_1 et F_2 deux formes linéaires non proportionnelles et F_3 une forme quadratique irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$, on a*

$$N(B) \underset{B\to+\infty}{\sim} c_0 B\log(B),$$

où la constante $c_0 = c_S$ est la constante conjecturée par Peyre.

Remarque 1.1.1. On peut se convaincre assez aisément que les méthodes développées ici permettraient de généraliser le résultat à tous les $a < 0$ mais au prix d'un certain nombre de complications techniques comme expliqué dans [BT13, Introduction]. Le cas $a > 0$ semble nécessiter une approche différente du fait du nombre infini d'unités du corps quadratique réel $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et fait l'objet d'un travail en cours de l'auteur.

La méthode utilisée ici suit celle développée par La Bretèche, Browning et Peyre dans le cas précédemment cité. En particulier, la résolution de ce problème repose essentiellement sur l'estimation asymptotique de sommes du type

$$S(X) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^2\cap X\mathcal{R}} r(F_1(\mathbf{x}))r(F_2(\mathbf{x}))r(F_3(\mathbf{x})), \tag{1.1.1}$$

pour une région $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ convenable et où $r(n)$ désigne le nombre de représentations d'un entier n comme somme de deux carrés. On rappelle qu'on a l'expression

$$r(n) = 4\sum_{d|n}\chi(d),$$

où χ désigne le caractère de Dirichlet non principal modulo 4. La méthode pour estimer ces sommes est inspirée de l'article [BB10] où le même genre de sommes est étudiée mais pour la fonction τ nombre de diviseurs à la place de la fonction r. Pour la vérification de la conjecture de Peyre, on s'inspire ici de [BT13] et de [BBP12]. Cependant, à la différence du cas traité dans [BBP12], on établit que le traitement du principe de Manin se fait au moyen d'un passage sur des torseurs distincts des torseurs versels dont on donne une description précise en section 1.7.

1.2 Estimations de sommes liées à la fonction r

Plus précisément, on considère $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, F_1 et F_2 deux formes linéaires binaires dans $\mathbf{Z}[x_1, x_2]$, F_3 une forme quadratique dans $\mathbf{Z}[x_1, x_2]$ et $\mathcal{R}$ est une région de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les hypothèses suivantes que l'on notera **NH** :

i) Les formes F_1 et F_2 ne sont pas proportionnelles ;

ii) La forme quadratique F_3 est irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$;

iii) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \quad F_i(\mathbf{x}) > 0;$ (1.2.0)

iv) La région $\mathcal{R}$ est convexe, bornée avec une frontière continûment différentiable.

On définit

$$X\mathcal{R} = \{X\mathbf{x} \quad | \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}\}$$

et on pose $F_1(\mathbf{x}) = a_1x_1 + b_1x_2$, $F_2(\mathbf{x}) = a_2x_1 + b_2x_2$ et $F_3(\mathbf{x}) = a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3x_1x_2$, avec a_i, b_i et c_3 entiers. Lorsque $J, L \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ sont deux formes binaires homogènes, on note $\mathrm{disc}(J)$ le discriminant de $J(x, 1)$ et $\mathrm{Res}(J, L)$ le résultant de $J(x, 1)$ et de $L(x, 1)$. On considère alors

$$\Delta = \mathrm{disc}(F_3) = c_3^2 - 4a_3b_3 \neq 0, \ \Delta_{12} = \mathrm{Res}(F_1, F_2) = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{1.2.2}$$

et

$$\Delta_{i3} = \mathrm{Res}(F_i, F_3) = a_3b_i^2 + b_3a_i^2 - c_3a_ib_i = F_3(-b_i, a_i) \neq 0,$$

pour $i \in \{1, 2\}$ et, pour $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbf{N}^3$,

$$\Lambda(\mathbf{d}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \quad | \quad d_i|F_i(\mathbf{x})\right\},$$

où l'on note systématiquement (sauf mention contraire) $d_i|F_i(\mathbf{x})$ pour $d_1|F_1(\mathbf{x})$, $d_2|F_2(\mathbf{x})$ et $d_3|F_3(\mathbf{x})$. On introduit alors la quantité essentielle

$$\rho(\mathbf{d}) = \rho(\mathbf{d}, F_1, F_2, F_3) = \#\left(\Lambda(\mathbf{d}) \cap [0, d[^2\right)$$

où l'on note systématiquement $d = d_1d_2d_3$.

On pose également

$$L_\infty = L_\infty(F_1, F_2, F_3) = \max\{\| F_i \|\},$$

où $\| F_i \|$ désigne le plus grand coefficient en valeur absolue de la forme F_i,

$$r_\infty = r_\infty(\mathcal{R}) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

et

$$r' = r'(F_1, F_2, F_3, \mathcal{R}) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \max\left\{|F_1(\mathbf{x})|, |F_2(\mathbf{x})|, \sqrt{|F_3(\mathbf{x})|}\right\}.$$

On note enfin

$$\mathcal{E} = \left\{n \in \mathbf{Z} \quad | \quad \exists \ell \in \mathbf{N}, \quad n \equiv 2^\ell \left(\mathrm{mod}\ 2^{\ell+2}\right)\right\}$$

ainsi que $\mathcal{E}_{2^n}$ sa projection modulo 2^n

$$\mathcal{E}_{2^n} = \left\{k \in \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \quad | \quad \exists \ell \in \mathbf{N}, \quad k \equiv 2^\ell \left(\mathrm{mod}\ 2^{\min\{\ell+2,n\}}\right)\right\},$$

et

$$\eta = 1 - \frac{1 + \log\log(2)}{\log(2)} = 0.086071... \tag{1.2.3}$$

La borne $S(X) \ll X^2$ fournie par [BB07a], où la quantité $S(X)$ a été définie en (1.1.1), est alors améliorée par le résultat suivant.

Théorème 1.2.1. *On suppose que les formes F_1, F_2 et F_3 et la région $\mathcal{R}$ vérifient les hypothèses **NH** (1.2.0). Soient $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant 1$ tels que $r'X^{1-\varepsilon} \geqslant 1$. On a alors*

$$S(X) = \pi^3 \mathrm{vol}(\mathcal{R}) X^2 \prod_p \sigma_p + O_\varepsilon \left(\frac{L_\infty^\varepsilon (r_\infty r' + r_\infty^2) X^2}{(\log(X))^{\eta-\varepsilon}} \right),$$

où

$$\sigma_p = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^3} \frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} \rho\left(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}\right)}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}$$

lorsque p est impair et

$$\sigma_2 = 8 \lim_{n \to +\infty} 2^{-2n} \# \left\{ \mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \quad \middle| \quad F_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{2^n} \right\}.$$

Le produit $\prod_{p>2} \sigma_p$ est bien absolument convergent.

On introduit alors l'ensemble

$$\mathfrak{D} = \{(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \in \mathbf{N}^6 \quad | \quad d_i | D_i, \quad 2 \nmid D_i\}$$

et pour $(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \in \mathfrak{D}$, $X \geqslant 1$, on pose

$$\begin{aligned} S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) &= S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; \mathcal{R}, F_1, F_2, F_3) \\ &= \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{D}) \cap X\mathcal{R}} r\left(\frac{F_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) r\left(\frac{F_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) r\left(\frac{F_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Cette somme est directement liée à un problème de comptage sur la variété affine de $\mathbf{A}^8$ d'équations

$$F_i(\mathbf{x}) = d_i(s_i^2 + t_i^2), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.2.5}$$

où les (x_1, x_2) sont restreints à une certaine région.

On introduit ensuite les entiers ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et les formes primitives F_1^*, F_2^* et F_3^* telles que

$$F_i = \ell_i F_i^*. \tag{1.2.6}$$

On considère alors

$$\mathbf{D}' = \left(\frac{D_1}{(D_1, \ell_1)}, \frac{D_2}{(D_2, \ell_2)}, \frac{D_3}{(D_3, \ell_3)} \right),$$

$$a(\mathbf{D}, \boldsymbol{\Delta}) = (D_1, \Delta_{12}\Delta_{13})(D_2, \Delta_{12}\Delta_{23})(D_3, \Delta(\Delta_{13}, \Delta_{23})) \tag{1.2.7}$$

avec $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23})$ et

$$a'(\mathbf{D}, \boldsymbol{\Delta}) = a(\mathbf{D}', \boldsymbol{\Delta}') = (D_1', \Delta_{12}'\Delta_{13}')(D_2', \Delta_{12}'\Delta_{23}')(D_3', \Delta'(\Delta_{13}', \Delta_{23}'))$$

où

$$\boldsymbol{\Delta}' = (\Delta', \Delta_{12}', \Delta_{13}', \Delta_{23}') = \left(\frac{\Delta}{\ell_3^2}, \frac{\Delta_{12}}{\ell_1\ell_2}, \frac{\Delta_{13}}{\ell_1^2\ell_3}, \frac{\Delta_{23}}{\ell_2^2\ell_3} \right).$$

On a alors le résultat suivant, crucial en vue de l'obtention du principe de Manin.

Théorème 1.2.2. *Soient $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant 1$ tels que $r'X^{1-\varepsilon} \geqslant 1$. Si on suppose que les formes F_1, F_2 et F_3 et la région $\mathcal{R}$ vérifient les hypothèses **NH** (1.2.0) et que $(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \in \mathfrak{D}$, alors*

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \pi^3 \mathrm{vol}(\mathcal{R}) X^2 \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) + O_\varepsilon \left(\frac{L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon (r_\infty r' + r_\infty^2) a'(\mathbf{d}, \mathbf{\Delta}) X^2}{(\log(X))^{\eta - \varepsilon}} \right),$$

où

$$\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^3} \frac{\chi(p)^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} \rho\left(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}\right)}{p^{2(N_1 + N_2 + N_3)}}$$

avec $N_i = \max\{\nu_p(D_i), \nu_i + \nu_p(d_i)\}$ lorsque $p > 2$ et

$$\sigma_2(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sigma_2(\mathbf{d}) = 8 \lim_{n \to +\infty} 2^{-2n} \# \left\{ \mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z})^2 \;\middle|\; F_i(\mathbf{x}) \in d_i \mathcal{E}_{2^n} \right\}. \tag{1.2.8}$$

De plus, on a

$$\prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon a'(\mathbf{d}, \mathbf{\Delta}).$$

Remarque 1.2.1. Le même raisonnement que celui mené dans la section 6 de [BB10] permet, *mutatis mutandis*, de se ramener au Théorème 1.2.1 grâce à un changement de variables. Le fait que $\Lambda(\mathbf{D})$ ne soit pas un réseau (contrairement au cas de [BBP12]) est pallié en le reliant à une réunion de réseaux de la même manière que dans [Dan99]. Ainsi, on ne détaille pas ici la démonstration du Théorème 1.2.2. [1]

Pour terminer cette section, dans l'optique de vérifier la conjecture de Peyre, il est bon de réinterpréter la constante obtenue dans le Théorème 1.2.2. On définit pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{N}^3$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{N}^3$ et p premier différent de 2 :

$$N_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}}(p^n) = \# \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})^8 \;\middle|\; \begin{array}{l} F_i(\mathbf{x}) \equiv p^{\lambda_i}(s_i^2 + t_i^2) \pmod{p^n}, \\ p^{\mu_i} | F_i(\mathbf{x}) \end{array} \right\}$$

et

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}}(p) = \lim_{n \to +\infty} p^{-5n - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3} N_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}}(p^n). \tag{1.2.9}$$

Ces quantités sont bien définies et correspondent aux densités p-adiques associées à la variété définie par les équations (1.2.5). Pour le cas $p = 2$, on introduit

$$N_{\mathbf{d}}(2^n) = \# \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in (\mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z})^8 \;\middle|\; F_i(\mathbf{x}) \equiv d_i(s_i^2 + t_i^2) \pmod{2^n} \right\}$$

et

$$\omega_{\mathbf{d}}(2) = \lim_{n \to +\infty} 2^{-5n} N_{\mathbf{d}}(2^n). \tag{1.2.10}$$

Posant enfin $\omega_\infty(\mathcal{R})$ la densité archimédienne associée au problème de comptage (1.2.5), on obtient le résultat suivant, qui traduit le fait que le principe de Hasse est vérifié sur les torseurs décrits en section 1.7.

Théorème 1.2.3. *Supposons que les formes F_1, F_2 et F_3 et la région $\mathcal{R}$ vérifient les hypothèses **NH** (1.2.0) et que $(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \in \mathfrak{D}$. Pour tout nombre premier $p > 2$, on a $\omega_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}}(p) = \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ avec $\boldsymbol{\lambda} = (\nu_p(d_1), \nu_p(d_2), \nu_p(d_3))$ et $\boldsymbol{\mu} = (\nu_p(D_1), \nu_p(D_2), \nu_p(D_3))$, $\omega_{\mathbf{d}}(2) = \sigma_2(\mathbf{d})$ et $\omega_\infty(\mathcal{R}) = \pi^3 \mathrm{vol}(\mathcal{R})$.*

1. Cette démonstration détaillée peut se trouver en section 1.5 de mon mémoire de master https://webusers.imj-prg.fr/~kevin.destagnol/rapport_M_2_kevin_destagnol.pdf

1.3 Propriétés des fonctions ρ

La fonction ρ a été abondamment étudiée, notamment dans [Dan99], [Mar08] et [Mar10] ou [BB10]. Il résulte du théorème chinois que la fonction ρ est multiplicative dans le sens où si l'on se donne deux triplets $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ et $\mathbf{d}' = (d_1', d_2', d_3')$ tels que $(d_1d_2d_3, d_1'd_2'd_3') = 1$, alors on a

$$\rho(d_1d_1', d_2d_2', d_3d_3') = \rho(\mathbf{d})\rho(\mathbf{d}').$$

Il suffit donc de l'étudier sur les triplets de nombres premiers. Le lemme immédiat suivant tiré de [BB10, lemme 1] permet de se ramener à ce cas.

Lemme 1.3.1. *Soient F_1, $F_2 \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ des formes linéaires non proportionnelles et $F_3 \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ une forme quadratique. Avec les notations de (1.2.6), on a pour $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^3$,*

$$\frac{\rho(\mathbf{d}, F_1, F_2, F_3)}{(d_1d_2d_3)^2} = \frac{\rho(\mathbf{d}', F_1^*, F_2^*, F_3^*)}{(d_1'd_2'd_3')^2}$$

où $\mathbf{d}' = \left(\frac{d_1}{(d_1,\ell_1)}, \frac{d_2}{(d_2,\ell_2)}, \frac{d_3}{(d_3,\ell_3)}\right)$.

On a alors le résultat suivant.

Lemme 1.3.2. *Soient F_1, F_2 des formes linéaires primitives non proportionnelles et F_3 une forme quadratique primitive irréductible sur $\mathbf{Q}$.*

a) Pour tout nombre premier p, on a

$$\rho(p^\nu, 1, 1) = \rho(1, p^\nu, 1) = p^\nu.$$

b) Si $p \nmid 2\mathrm{disc}(F_3)$, alors

$$\rho(1, 1, p^\nu) = \varphi(p^\nu)\left(1 + \left(\frac{\mathrm{disc}(F_3)}{p}\right)\right)\left\lceil\frac{\nu}{2}\right\rceil + p^{2(\nu - \lceil \nu/2 \rceil)} \leqslant (\nu+1)p^\nu.$$

De plus, si p est un facteur impair de $\mathrm{disc}(F_3)$, on a

$$\rho(1, 1, p^\nu) \ll (\nu+1)p^{\nu + \min\{\lfloor \nu_p(\mathrm{disc}(F_3)/2)\rfloor, \lfloor \nu/2 \rfloor\}}$$

et si $p = 2$,

$$\rho(1, 1, 2^\nu) \ll (\nu+1)2^\nu.$$

c) Lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leqslant \lceil \frac{\nu_3}{2} \rceil$ et p impair, on a

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll (\nu_3+1)p^{2(\nu_1+\nu_2)+\nu_3}p^{\min\{\lfloor \nu_p(\mathrm{disc}(F_3)/2)\rfloor, \lfloor \nu_3/2 \rfloor\}}.$$

De plus, lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_3 = 1$ et $p \nmid \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, on a

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll p^{2(\nu_1+\nu_2)}.$$

Enfin, lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leqslant \lceil \frac{\nu_3}{2} \rceil$, on a

$$\rho(2^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, 2^{\nu_3}) \ll 2^{2(\nu_1+\nu_2)+\nu_3}.$$

d) Lorsque $\lceil \frac{\nu_3}{2} \rceil \leqslant \min\{\nu_1, \nu_2\}$ et pour tout nombre premier, on a

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll p^{\nu_1+\nu_2+2\nu_3+\min\{\nu_1,\nu_2,\nu_p(\Delta_{12})\}}.$$

e) Lorsque $\nu_j \leqslant \lceil \frac{\nu_3}{2} \rceil \leqslant \nu_3 \leqslant \nu_i$ *avec* $\{i,j\} = \{1,2\}$ *et pour tout nombre premier* p*, on a*

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll \nu_3 p^{2\nu_j + \nu_i + \nu_3 + \lfloor \nu_3/2 \rfloor} \left(p^{\min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil \nu_p(\Delta_{i3})/2 \rceil\}} + p^{r_p} \right),$$

où

$$r_p = \min\{\nu_i - \lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil \nu_p(\Delta_{i3})/2 \rceil\} + \min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil \nu_p(\mathrm{disc}(F_3))/2 \rceil\}.$$

f) On a pour tout nombre premier p*, la majoration*

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll \min\left\{ p^{2(\nu_2+\nu_3)+\nu_1}, p^{2(\nu_1+\nu_3)+\nu_2}, (\nu_3+1) p^{2(\nu_1+\nu_2)+3\frac{\nu_3}{2}} \right\}.$$

Démonstration.– La preuve des points a) à e) se trouve dans le lemme 3 de [BB10]. Démontrons donc le point f). En négligeant les deux conditions

$$p^{\nu_1} | F_1(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad p^{\nu_3} | F_3(\mathbf{x}),$$

on obtient les majorations

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leqslant p^{2(\nu_1+\nu_3)} \rho(1, p^{\nu_2}, 1) = p^{2(\nu_1+\nu_3)+\nu_2}.$$

On obtient aussi la majoration

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leqslant p^{2(\nu_2+\nu_3)+\nu_1}$$

en inversant les rôles de F_1 et F_2. En oubliant les deux conditions sur les formes linéaires, on obtient

$$\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leqslant p^{2(\nu_1+\nu_2)} \rho(1, 1, p^{\nu_3})$$

et on conclut grâce au point b). □

Suivant toujours la section 3 de [BB10], on peut déduire de ces deux lemmes que la fonction

$$f(\mathbf{d}) = \frac{\rho(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3}$$

est proche, au sens de la convolution, de la fonction $R : \mathbf{d} \mapsto R(\mathbf{d}) = r_\Delta(d_3)$ avec

$$r_\Delta(\ell) = \sum_{k|\ell} \chi_\Delta(k) \tag{1.3.11}$$

où $\chi_\Delta(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right)$ est le symbole de Kronecker et Δ a été défini en (1.2.2). On pose également h la fonction arithmétique satisfaisant

$$f(\mathbf{d}) = (h * R)(\mathbf{d}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^3 \\ k_i | d_i}} h\left(\frac{d_1}{k_1}, \frac{d_2}{k_2}, \frac{d_3}{k_3}\right) R(\mathbf{k}).$$

Lemme 1.3.3. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux formes linéaires non proportionnelles et* F_3 *une forme quadratique irréductible sur* $\mathbf{Q}$*. Avec la notation (1.3.11), on a pour tout* $A > 0$*,*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^3} \frac{|h(\mathbf{k})| \log(k_1 k_2 k_3)^A}{k_1 k_2 k_3} \ll L_\infty^\varepsilon.$$

En particulier,

$$\prod_{p>2} \sigma_p = L(1, \chi_\Delta \chi) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^3} \frac{h(\mathbf{k}) \chi(k_1 k_2 k_3)}{k_1 k_2 k_3} \ll L_\infty^\varepsilon. \tag{1.3.12}$$

Démonstration.– Il suffit de remarquer que la preuve du lemme 4 de [BB10] dans le cas $A = 1$ s'adapte immédiatement pour fournir le résultat. □

On définit également pour un polynôme $g \in \mathbf{Z}[X]$ la quantité

$$\rho_g(n) = \#\left\{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \quad | \quad g(x) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ n)\right\}.$$

Il s'agit d'une fonction multiplicative qu'il suffit donc d'étudier sur les puissances de nombres premiers. On aura besoin du résultat suivant (voir [BB12, lemme 1] par exemple).

Lemme 1.3.4. *Soient $g \in \mathbf{Z}[X]$ de degré $d \geqslant 2$ et p un nombre premier qui ne divise pas le contenu de g et tel que $p^\mu \parallel \mathrm{disc}(g)$. Alors, pour tout $\nu \geqslant 1$, on a*

$$\rho_g\left(p^\nu\right) \leqslant d \min\left\{p^{\frac{\mu}{2}}, p^{\left(1-\frac{1}{d}\right)\nu}, p^{\nu-1}\right\}.$$

1.4 Démonstration du Théorème 1.2.1

1.4.1 Extraction des valuations 2-adiques

On effectue ici un raisonnement préliminaire similaire à celui effectué à la section 3 de [BB12] afin de pouvoir utiliser des décompositions semblables à celles de la section 3 de [HB03]. En utilisant les formules $r(2n) = r(n)$ et $r(n) = 0$ si $n \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, on obtient l'égalité

$$S(X) = \sum_{k_0 \geqslant 0} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap X\mathcal{R} \\ 2^{k_0} \parallel \mathbf{x}}} r(F_1(\mathbf{x}))r(F_2(\mathbf{x}))r(F_3(\mathbf{x})) = \sum_{k_0 \geqslant 0} S^*\left(2^{-k_0}X\right),$$

où

$$S^*(X) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap X\mathcal{R} \\ 2 \nmid (x_1, x_2)}} r(F_1(\mathbf{x}))r(F_2(\mathbf{x}))r(F_3(\mathbf{x})).$$

En regroupant les termes selon la valuation 2−adique de $F_i(\mathbf{x})$, on a

$$S(X) = \sum_{k_0 \geqslant 0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^3} S_{\mathbf{k}}\left(2^{-k_0}X\right),$$

avec $S_{\mathbf{k}}(X)$ la restriction de $S^*(X)$ aux $\mathbf{x}$ tels que

$$\nu_2(F_i(\mathbf{x})) = k_i, \quad 2^{-k_i}F_i(\mathbf{x}) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$$

et $2 \nmid \mathbf{x}$. On a clairement que $2^{k_i} \leqslant F_i(\mathbf{x}) \leqslant (X')^{\deg(F_i)}$ donc $k_i \ll \log(X')$. On remarque également que $\min\{k_i, k_j\} \leqslant \nu_2\left(\Delta_{ij}\right)$.

Lemme 1.4.1. *Lorsque les conditions*

$$\nu_2(F_i(\mathbf{x})) = k_i \quad \textit{et} \quad 2^{-k_i}F_i(\mathbf{x}) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$$

et $2 \nmid \mathbf{x}$ sont réalisées, il existe une matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ inversible dans $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{x}' \in \mathbf{Z}^2$ avec $x'_1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ tels que $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}'$.

Démonstration.– En raisonnant comme dans la section 3 de [BB12], on peut supposer sans perte de généralité que a_1 est impair. La première condition

$$2^{-k_1}F_1(\mathbf{x}) \equiv 1 \pmod 4 \tag{1.4.13}$$

équivaut alors à l'existence de $x_1' \equiv 1 \pmod 4$ tel que $x_1 = cx_2 + c'2^{k_1}x_1'$ où $c' \in \{\pm 1\}$ tel que $c' \equiv a_1 \pmod 4$ et $c \in \left[0, 2^{k_1+2}\right[\cap \mathbf{Z}$ tel que

$$a_1 c \equiv -b_1 \left(\bmod\ 2^{k_1+2}\right).$$

Si $k_1 = 0$, on a alors automatiquement que $2 \nmid \mathbf{x}$ et sinon, cette condition devient équivalente au fait que x_2 soit impair.

Intéressons-nous à présent à la deuxième condition

$$2^{-k_2}F_2(\mathbf{x}) \equiv 1 \equiv x_1' \pmod 4.$$

Si on suppose la première condition vérifiée, cette condition est équivalente à

$$F_2\left(cx_2 + c'2^{k_1}x_1', x_2\right) \equiv 2^{k_2}x_1' \left(\bmod\ 2^{k_2+2}\right).$$

On considère alors $F_2'(X,Y) = F_2\left(cY + c'2^{k_1}X, Y\right) = 2^{k_2'}(aX + bY)$ pour k_2', a et b trois entiers tels que $(2, a, b) = 1$. Soit $k_2' > k_2$ et alors les deux premières conditions n'ont pas de solution commune. Soit $k_2' \leqslant k_2$ et on pose

$$k_2'' = k_2 - k_2' \geqslant 0 \tag{1.4.14}$$

et $F_2''(X,Y) = 2^{-k_2'}F_2'(X,Y)$ de sorte que

$$F_2''(x_1', x_2) \equiv 2^{k_2''}x_1' \left(\bmod\ 2^{k_2''+2}\right).$$

On peut écrire $x_2 \equiv \alpha_2 x_1' \left(\bmod\ 2^{k_2''+2}\right)$ pour un unique $\alpha_2 \in \left[0, 2^{k_2''+2}\right[\cap \mathbf{Z}$ pour obtenir

$$F_2''(1, \alpha_2) \equiv 2^{k_2''} \left(\bmod\ 2^{k_2''+2}\right). \tag{1.4.15}$$

Finalement, lorsque la première condition est vérifiée, la deuxième est vérifiée si, et seulement si, $k_2' \leqslant k_2$ et $x_2 = \alpha_2 x_1' + 2^{k_2''+2}x_2'$ pour α_2 solution de (1.4.15). De plus, si $k_1 \neq 0$, α_2 doit être choisi impair.

Posons $F_3'(X,Y) = F_3\left(cY + c'2^{k_1}X, Y\right) = 2^{k_3'}(cX^2 + dXY + eY^2)$ pour k_3', c, d et e quatre entiers tels que $(2, c, d, e) = 1$ et $k_3'' = k_3 - k_3'$ lorsque $k_3' \leqslant k_3$. L'égalité

$$2^{-k_3}F_3(\mathbf{x}) \equiv 1 \equiv {x_1'}^2 \pmod 4$$

conduit alors de même à montrer que si la première condition est remplie, la troisième l'est si, et seulement si, $k_3' \leqslant k_3$ et s'il existe $\alpha_3 \in \left[0, 2^{k_3''+2}\right[\cap \mathbf{Z}$ solution de

$$F_3''(1, \alpha_3) \equiv 2^{k_3''} \left(\bmod\ 2^{k_3''+2}\right) \tag{1.4.16}$$

tel que $x_2 = \alpha_3 x_1' + 2^{k_3''+2}x_2''$, α_3 devant être choisi impair lorsque $k_1 \neq 0$. Dans le cas où les trois conditions sont remplies simultanément, d'après ce qui précède, soit il n'existe pas de solution soit il existe α_2 solution de (1.4.15) et α_3 solution de (1.4.16) tels que

$$x_2 \equiv \alpha_2 x_1' \left(\bmod\ 2^{k_2''+2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 \equiv \alpha_3 x_1' \left(\bmod\ 2^{k_3''+2}\right).$$

On a donc

$$\alpha_2 \equiv \alpha_3 \left(\bmod\ 2^{\min\{k_2'',k_3''\}+2}\right)$$

et par conséquent x_2 est de la forme $x_2 = \alpha x_1' + 2^{\max(k_2'',k_3'')+2} x_2'$ avec $\alpha = \alpha_2$ si $k_2 \geqslant k_3$ et $\alpha = \alpha_3$ si $k_3 \geqslant k_2$ et pour un certain entier x_2'. On vient donc de montrer que si les conditions

$$\nu_2(F_i(\mathbf{x})) = k_i, \quad 2^{-k_i} F_i(\mathbf{x}) \equiv 1 \,(\bmod\ 4)$$

et $2 \nmid \mathbf{x}$ admettent des solutions, ces dernières peuvent s'écrire $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}'$ avec $x_1' \equiv 1 \,(\bmod\ 4)$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \mathbf{M}_\alpha &= \begin{pmatrix} c'2^{k_1} & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c'2^{k_1} + c\alpha & c2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2} \\ \alpha & 2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

où $\alpha \in \left[0, 2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2}\right[\cap \mathbf{Z}$ vérifie

$$\begin{cases} F_2''(1,\alpha) \equiv 2^{k_2''} \left(\bmod\ 2^{k_2''+2}\right), \\ F_3''(1,\alpha) \equiv 2^{k_3''} \left(\bmod\ 2^{k_3''+2}\right), \\ \alpha \equiv 1 \,(\bmod\ 2) \quad \text{lorsque} \quad k_1 \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.4.17}$$

On remarque pour conclure que

$$|\det(\mathbf{M})| = 2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}+2}.$$

□

On majore alors

$$n(\mathbf{k}) = n(k_1, k_2, k_3) \tag{1.4.18}$$

le nombre d'entiers α dans $\left[0, 2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2}\right[\cap \mathbf{Z}$ vérifiant les conditions (1.4.17).

Lemme 1.4.2. *On a $n(\mathbf{k}) \ll 1$ avec $n(\mathbf{k})$ défini en (1.4.18) et où la borne ne dépend que de la valuation 2-adique de $\Delta^* := \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta$.*

Démonstration.– On commence par traiter le cas où $k_1 \geqslant 1$ dans lequel on sait que α doit être impair. On a clairement la majoration suivante

$$n(\mathbf{k}) \leqslant \# \left\{ x \in \mathbf{Z}/2^{k_1+\max\{k_2,k_3\}+2}\mathbf{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \equiv -b_1\overline{a_1} \left(\bmod\ 2^{k_1}\right) \\ F_2(x,1) \equiv 0 \left(\bmod\ 2^{k_2}\right) \\ F_3(x,1) \equiv 0 \left(\bmod\ 2^{k_3}\right) \end{array} \right\},$$

où $\overline{a}_1$ désigne l'inverse multiplicatif de a_1 dans $\mathbf{Z}/2^{k_1}\mathbf{Z}$. On a alors, dans le cas où $k_1 \geqslant \max\{k_2, k_3\}$, l'inégalité

$$n(\mathbf{k}) \ll \frac{2^{k_1+\max\{k_2,k_3\}}}{2^{k_1}} = 2^{\max\{k_2,k_3\}}.$$

En utilisant le fait que $\min\{k_i, k_1\} \leqslant \nu_2(\Delta_{i1})$ pour $i \in \{2,3\}$, on en déduit la majoration

$$n(\mathbf{k}) \ll 2^{\nu_2(\Delta^*)} \ll 1.$$

Passons aux cas où $\max\{k_2, k_3\} > k_1$. On traite tout d'abord le cas $k_3 \geqslant k_2$. Par le Lemme 1.3.4, on a alors la majoration

$$n(\mathbf{k}) \ll \frac{2^{k_1+k_3}}{2^{k_3}} \rho_{F_3(x,1)}\left(2^{k_3}\right) \ll 2^{k_1} \rho_{F_3(x,1)}\left(2^{k_3}\right) \ll 2^{k_1+\frac{\nu_2(\Delta)}{2}} \ll 1.$$

Enfin, de la même manière, dans les cas où $k_2 \geqslant k_3$, on obtient

$$n(\mathbf{k}) \ll 2^{k_1} \rho_{F_2(x,1)}\left(2^{k_2}\right) \ll 2^{k_1} \ll 1.$$

Il reste à majorer $n(\mathbf{k})$ lorsque $k_1 = 0$, dans ce cas, on procède de même que ci-dessus pour les α impairs mais on doit ajouter tous les α pairs de $\left[0, 2^{\max\{k_2,k_3\}}\right[\cap \mathbf{Z}$ qui vérifient (1.4.17). Avec la notation (1.4.16), le nombre de ces α est majoré par celui des β tels que

$$F_3''(1, \beta) \equiv 0 \left(\bmod\ 2^{k_3''}\right).$$

Par le Lemme 1.3.4, cette quantité est majorée par $2^{\nu_2(\mathrm{disc}(F_3''))} \ll 1$, ce qui achève la preuve. □

On relie maintenant la quantité $n(\mathbf{k})$ et la constante σ_2 qui apparaît dans le Théorème 1.2.1.

Lemme 1.4.3. *On a*

$$\sigma_2 = 2 \sum_{k_0 \geqslant 0} \frac{1}{2^{2k_0}} \sum_{k_1,k_2,k_3 \in \mathbf{N}^3} \frac{n(\mathbf{k})}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}+2}},$$

où les entiers k_2'' et k_3'' se déduisent de k_2 et k_3 comme en (1.4.14) et (1.4.16).

Démonstration.– En partitionnant $(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2$ selon la valuation 2−adique de (x_1, x_2), on obtient l'égalité

$$\sigma_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{2^{2n}} \sum_{\substack{0\leqslant k_0\leqslant n \\ 0\leqslant k_1,k_2,k_3\leqslant n}} \# \left\{ \mathbf{x} \in \left(\mathbf{Z}/2^{n-k_0}\mathbf{Z}\right)^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2 \nmid \mathbf{x}, \\ F_i(\mathbf{x}) \equiv 2^{k_i} \pmod{2^{m_{\mathbf{k},n,i}}} \end{array} \right\},$$

où $m_{\mathbf{k},n,i} = \min\{k_i+2, n-k_0\}$ pour $i \in \{1,2,3\}$. On vérifie aisément grâce au Lemme 1.3.4 que la contribution des termes tels que pour au moins un des k_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ on ait $k_i + 2 > n - k_0$ à la triple somme intérieure est négligeable. On peut donc s'intéresser uniquement aux triplets tels que $\max\{k_1, k_2, k_3\} \leqslant n - k_0 - 2$, ce qui revient à estimer

$$\sigma_2 = 8 \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n} \sum_{\substack{0\leqslant k_0\leqslant n \\ 0\leqslant k_1,k_2,k_3\leqslant n-k_0-2}} \# \left\{ \mathbf{x} \in \left(\mathbf{Z}/2^{n-k_0}\mathbf{Z}\right)^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2 \nmid \mathbf{x}, \\ F_i(\mathbf{x}) \equiv 2^{k_i} \left(\bmod\ 2^{k_i+2}\right) \end{array} \right\}.$$

On a vu en (1.4.13) lors de la preuve du Lemme 1.4.1 qu'on pouvait supposer a_1 impair et que les conditions

$$\nu_2(F_i(\mathbf{x})) = k_i, \quad 2^{-k_i} F_i(\mathbf{x}) \equiv 1 \pmod 4, \quad 2 \nmid \mathbf{x}$$

impliquent l'existence de $x_1' \equiv 1 \pmod 4$ tel que

$$x_1 \equiv c x_2 + c' 2^{k_1} x_1' \left(\bmod\ 2^{k_1+2}\right)$$

avec $c' \in \{\pm 1\}$ et $c \equiv a_1 \pmod 4$. Par conséquent, x_1 est entièrement déterminé par la valeur de x_2 modulo 2^{k_1+2}. On sait ensuite que si on pose $x_2 \equiv \alpha x_1' \left(\bmod\ 2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2}\right)$, alors α est une des $n(\mathbf{k})$ solutions de (1.4.17) dans $\left[0, 2^{\max\{k_2'',k_3''\}+2}\right[\cap \mathbf{Z}$. Posant $k = \max\{k_1, k_2'', k_3''\}$, on constate alors que les trois conditions de congruence ne dépendent que de la classe de $\mathbf{x}$ modulo 2^{k+2}. Autrement dit, on obtient

$$\sigma_2 = 8 \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n} \sum_{\substack{0\leqslant k_0\leqslant n\\ 0\leqslant k_1,k_2,k_3\leqslant n-k_0-2}} 2^{2(n-k_0-k-2)} \times \#\left\{\mathbf{x} \in \left(\mathbf{Z}/2^{k+2}\mathbf{Z}\right)^2 \,\middle|\, 2 \nmid \mathbf{x},\ F_i(\mathbf{x}) \equiv 2^{k_i} \left(\bmod\ 2^{k_i+2}\right)\right\}$$

soit

$$\sigma_2 = 2 \sum_{k_0\geqslant 0} \frac{1}{2^{2k_0}} \sum_{k_1,k_2,k_3\geqslant 0} \frac{1}{2^{2k+2}} \times \#\left\{\mathbf{x} \in \left(\mathbf{Z}/2^{k+2}\mathbf{Z}\right)^2 \,\middle|\, 2 \nmid \mathbf{x},\ F_i(\mathbf{x}) \equiv 2^{k_i} \left(\bmod\ 2^{k_i+2}\right)\right\}.$$

Dans le cas par exemple où $k = k_1$, cela fournit une contribution

$$2 \sum_{k_0\geqslant 0} \frac{1}{2^{2k_0}} \sum_{0\leqslant k_2,k_3\leqslant k_1} \frac{1}{2^{2k_1+2}} 2^{k_1-\max\{k_2'',k_3''\}} n(\mathbf{k})$$

soit

$$2 \sum_{k_0\geqslant 0} \frac{1}{2^{2k_0}} \sum_{0\leqslant k_2,k_3\leqslant k_1} \frac{n(\mathbf{k})}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}+2}}.$$

On traite les deux autres cas de la même façon et en regroupant les trois contributions, on obtient finalement la formule

$$\sigma_2 = 2 \sum_{k_0\geqslant 0} \frac{1}{2^{2k_0}} \sum_{k_1,k_2,k_3\geqslant 0} \frac{n(\mathbf{k})}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}+2}} = \frac{2}{3} \sum_{k_1,k_2,k_3\geqslant 0} \frac{n(\mathbf{k})}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}}}.$$

□

On écrit ensuite

$$S(X) = \sum_{0\leqslant k_0} \sum_{0\leqslant \max(k_i)\leqslant \log\log X} S_{\mathbf{k}}\left(2^{-k_0}X\right) + \sum_{k_0\geqslant 0} \sum_{\max(k_i)>\log\log X} S_{\mathbf{k}}\left(2^{-k_0}X\right). \quad (1.4.19)$$

D'après ce qui précède, on a

$$S_{\mathbf{k}}(X) = \sum_{\alpha} S_{\mathbf{k},\alpha}(X) \quad (1.4.20)$$

où α parcourt les $n(\mathbf{k})$ solutions de (1.4.17) et où

$$S_{\mathbf{k},\alpha}(X) = \sum_{\substack{\mathbf{x}'\in\mathbf{Z}^2\cap X\mathcal{R}_{\mathbf{M}}\\ x_1'\equiv 1[4]}} r(F_1(\mathbf{M}\mathbf{x}'))r(F_2(\mathbf{M}\mathbf{x}'))r(F_3(\mathbf{M}\mathbf{x}')), \quad (1.4.21)$$

avec $\mathcal{R}_{\mathbf{M}} = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad \mathbf{M}\mathbf{x}' \in \mathcal{R}\}$. L'ensemble

$$\mathbf{M}\mathbf{Z}^2 = \{\mathbf{M}\mathbf{x}' \quad | \quad \mathbf{x}' \in \mathbf{Z}^2\}$$

est un réseau de covolume $\det(\mathbf{M}\mathbf{Z}^2) = \det(\mathbf{M})$. On considère alors une base réduite $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de $\mathcal{R}_{\mathbf{M}}$, c'est-à-dire une base telle que $\mathbf{e}_1$ soit un vecteur non nul de norme minimale et $\mathbf{e}_2$ soit un vecteur de $\mathcal{R}_{\mathbf{M}} \smallsetminus \mathbf{e}_1\mathbf{Z}$ de norme minimale. Notant $\| \mathbf{x} \| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, on écrit alors tout $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap X\mathcal{R}$ sous la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 \tag{1.4.22}$$

pour deux entiers λ et μ. On pose alors

$$F_i'(\lambda, \mu) = F_i(\lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad F_{\mathbf{M}} = F_1' F_2' F_3'. \tag{1.4.23}$$

On montre à présent que le second terme de (1.4.19) est un terme d'erreur acceptable dans l'optique du Théorème 3.1.1. Pour ce faire, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 1.4.4. *Pour tous $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant 1$, on a $E \ll (\det(\mathbf{M})L_\infty)^\varepsilon$, où*

$$E = \prod_{4<p\leqslant X} \left(1 + \frac{\rho^*_{F_{\mathbf{M}}}(p)\chi(p)}{p}\right) \prod_{i=1,2} \prod_{p\leqslant X} \left(1 + \frac{d_i \chi(p)}{p}\right),$$

avec

$$\rho^*_{F_{\mathbf{M}}}(n) = \frac{1}{\varphi(n)} \# \left\{ (x_1, x_2) \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} F_{\mathbf{M}}(x_1, x_2) \equiv 0 \pmod{n}, \\ (x_1, x_2, n) = 1 \end{array} \right\},$$

$d_i \in \{0, 1\}$ et $F_{\mathbf{M}}$ défini en (1.4.23).

Démonstration.– On a

$$\prod_{i=1,2} \prod_{p\leqslant X} \left(1 + \frac{d_i \chi(p)}{p}\right) \ll 1.$$

Notons $c(f)$ le contenu d'un polynôme f à coefficients entier. Lorsque p divise $\delta := c(F_1')c(F_2')c(F_3')$, on a une contribution majorée par

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{4<p \\ p|\delta}} \left(1 + \frac{\rho^*_{F_{\mathbf{M}}}(p)\chi(p)}{p}\right) &= \prod_{\substack{4<p \\ p|\delta}} \left(1 + \frac{(p+1)\chi(p)}{p}\right) \\ &\leqslant \prod_{p|\delta} \left(1 + \frac{p+1}{p}\right) \leqslant 3^{\omega(\delta)} \ll \delta^\varepsilon \ll (\det(\mathbf{M})L_\infty)^\varepsilon. \end{aligned}$$

L'inégalité élémentaire $\rho^*_{F_1'F_2'F_3'}(p) \leqslant \rho^*_{F_1'}(p) + \rho^*_{F_2'}(p) + \rho^*_{F_3'}(p)$, valable pour tout nombre premier p, implique que les premiers p qui ne divisent pas δ contribuent pour

$$\prod_{\substack{4<p\leqslant X \\ p\nmid\delta}} \left(1 + \frac{\rho^*_{F_{\mathbf{M}}}(p)\chi(p)}{p}\right) \ll \prod_{\substack{4<p\leqslant X \\ p\nmid\delta}} \left(1 + \frac{(\rho^*_{F_1'}(p) + \rho^*_{F_2'}(p) + \rho^*_{F_3'}(p))\chi(p)}{p}\right).$$

On peut alors aisément majorer cette contribution par

$$\exp\left(\sum_{\substack{4<p\leqslant X \\ p\nmid\delta}} \frac{(\rho^*_{F_1'}(p) + \rho^*_{F_2'}(p) + \rho^*_{F_3'}(p))\chi(p)}{p}\right).$$

Or, on a d'une part pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{4<p\leqslant X \\ p\nmid\delta}} \frac{\rho^*_{F_i'}(p)\chi(p)}{p} = \sum_{\substack{4<p\leqslant X \\ p\nmid\delta}} \frac{\chi(p)}{p} &= \sum_{p\nmid\delta} \frac{\chi(p)}{p} + O(1) \\ &\leqslant \log\log(\det(\mathbf{M})L_\infty) + O(1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{\substack{4<p\leqslant X\\ p\nmid\delta}} \frac{\rho^*_{F_3'}(p)\chi(p)}{p} \ll \sum_{\substack{4<p\leqslant X\\ p\nmid\delta}} \frac{\rho_{F_3'(x,1)}(p)\chi(p)}{p} + \log\log(\det(\mathbf{M})L_\infty) + O(1).$$

Pour pouvoir conclure, il nous reste donc à montrer que

$$\sum_{\substack{4<p\leqslant X\\ p\nmid\delta}} \frac{\rho_{F_3'(x,1)}(p)\chi(p)}{p} \ll \log\log(\det(\mathbf{M})L_\infty) + O(1)$$

sous l'hypothèse que F_3 est irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$. On voit tout de suite que

$$\rho_{F_3'(x,1)}(p) = 1 + \left(\frac{\operatorname{disc}(F_3'(x,1))}{p}\right)$$

où $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ désigne le symbole de Legendre modulo p. On décompose

$$\operatorname{disc}(F_3'(x,1)) = \varepsilon_3 u_3 v_3$$

où $\varepsilon_3 \in \{-1,1\}$, v_3 est un carré et u_3 est positif sans facteur carré. On a alors par multiplicativité

$$\rho_{F_3'(x,1)}(p) = 1 + \chi(p)^{\frac{1-\varepsilon_3}{2}} \left(\frac{u_3}{p}\right).$$

Comme la forme est irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$, on a $u_3 \neq 1$ et on obtient donc un caractère de Dirichlet modulo u_3 non principal et distinct de χ, ce qui permet de conclure la preuve. □

Lemme 1.4.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque $X \geqslant 1$ et $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^3$, on a*

$$S_{\mathbf{k}}(X) \ll 2^{\varepsilon(k_1+\max\{k_2,k_3\})} L_\infty^\varepsilon \left(\frac{X^2}{2^{\max\{k_1,k_2,k_3\}}} + X^{1+\varepsilon}\right), \tag{1.4.24}$$

où $S_{\mathbf{k}}$ est définie en (1.4.20).

Démonstration.– On reprend ici les notations (1.4.22). Un cas particulier du résultat de Davenport [Dav63, lemma 5] permet d'obtenir les estimations

$$\lambda \ll \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{e}_1\|} \quad \text{et} \quad \mu \ll \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{e}_2\|}.$$

D'où, avec les notations (1.4.23),

$$S_{\mathbf{k},\alpha}(X) \ll \sum_{\substack{\lambda\ll X/\|\mathbf{e}_1\|\\ \mu\ll X/\|\mathbf{e}_2\|}} r\left(F_1'(\lambda,\mu)\right) r\left(F_2'(\lambda,\mu)\right) r\left(F_3'(\lambda,\mu)\right).$$

On introduit alors, en notant $r_0 = \frac{1}{4}r$, une fonction multiplicative r_1 définie de la manière suivante

$$\forall p \text{ premier}, \quad \forall \nu \geqslant 1, \quad r_1(p^\nu) = \begin{cases} r_0(p) = 1+\chi(p) & \text{si } \nu = 1 \\ (1+\nu)^3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tous k, m et n entiers, on a ainsi

$$r_0(k)r_0(m)r_0(n) \leqslant r_1(kmn).$$

On en déduit la majoration

$$S_{\mathbf{k},\alpha}(X) \ll \sum_{\substack{\lambda \ll X/\|\mathbf{e}_1\| \\ \mu \ll X/\|\mathbf{e}_2\|}} r_1\left(F_{\mathbf{M}}(\lambda,\mu)\right)$$

où $F_{\mathbf{M}}$ est un polynôme de $\mathbf{Z}[x_1,x_2]$ de degré 4 défini en (1.4.23). On a alors

$$\| F_i' \| \leqslant (\deg(F_i')+1) \| \mathbf{M} \|^{\deg(F_i')} L_\infty$$

où $\| \mathbf{M} \|$ désigne le plus grand coefficient de la matrice en valeur absolue. Ici, à partir de l'expression de la matrice $\mathbf{M}$, on voit immédiatement que $\| \mathbf{M} \| \ll 2^{k_1+\max\{k_2,k_3\}}$. On a donc les inégalités

$$\| F_{\mathbf{M}} \| \ll 2^{4(k_1+\max\{k_2,k_3\})} L_\infty^3 \ll (2^{k_1+\max\{k_2,k_3\}} L_\infty)^4.$$

On déduit finalement du corollaire 1 de [BB08] et du Lemme 1.4.4 la majoration

$$S_{\mathbf{k},\alpha}(X) \ll 2^{\varepsilon(k_1+\max\{k_2,k_3\})} L_\infty^\varepsilon \left(\frac{X^2}{\| \mathbf{e}_1 \| \cdot \| \mathbf{e}_2 \|} + X^{1+\varepsilon} \right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Or, on sait que pour tout réseau Γ, de base réduite $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, on a

$$\det(\Gamma) \leqslant \| \mathbf{b}_1 \| \cdot \| \mathbf{b}_2 \| \ll \det(\Gamma).$$

On a donc, avec les notations (1.4.22),

$$\frac{1}{\| \mathbf{e}_1 \| \cdot \| \mathbf{e}_2 \|} \leqslant \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \leqslant \frac{1}{2^{\max\{k_1,k_2,k_3\}}},$$

ce qui fournit finalement

$$S_{\mathbf{k},\alpha}(X) \ll 2^{\varepsilon(k_1+\max\{k_2,k_3\})} L_\infty^\varepsilon \left(\frac{X^2}{2^{\max\{k_1,k_2,k_3\}}} + X^{1+\varepsilon} \right).$$

On conclut la preuve grâce au Lemme 1.4.2. □

On déduit de (1.4.20) et du Lemme 1.4.5 l'estimation

$$S_{\mathbf{k}}\left(2^{-k_0}X\right) \ll 2^{\varepsilon(k_1+\max\{k_2,k_3\})} L_\infty^\varepsilon \left(\frac{X^2}{2^{2k_0+\max\{k_1,k_2,k_3\}}} + \frac{X^{1+\varepsilon}}{2^{(1+\varepsilon)k_0}} \right).$$

On utilise alors cette majoration pour estimer le deuxième terme de (1.4.19). Traitons par exemple le cas de la somme

$$S_1 := \sum_{0 \leqslant k_0} \sum_{k_2,k_3 \leqslant \log\log(X)} \sum_{k_1 > \log\log X} S_{\mathbf{k}}\left(2^{-k_0}X\right).$$

Quitte à prendre ε assez petit, on a par des majorations élémentaires

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \sum_{k_2,k_3 \leqslant \log\log(X)} \sum_{k_1 > \log\log X} 2^{\varepsilon(k_1+\max\{k_2,k_3\})} L_\infty^\varepsilon \left(\frac{X^2}{2^{\max\{k_1,k_2,k_3\}}} + X^{1+\varepsilon} \right) \\ &\ll L_\infty^\varepsilon \log(X)^\varepsilon \sum_{k_1 > \log\log X} 2^{2\varepsilon k_1} \left(\frac{X^2}{2^{k_1}} + X^{1+\varepsilon} \right) \\ &\ll L_\infty^\varepsilon X^2 (\log(X))^{3\varepsilon\log(2)-\log(2)} \ll L_\infty^\varepsilon X^2 (\log(X))^{3\varepsilon\log(2)-\eta}. \end{aligned}$$

On traite de la même façon le terme d'erreur et les autres cas de sorte qu'avec les notations (1.4.21),

$$S(X) = \sum_{k_0 \geqslant 0} \sum_{0 \leqslant k_1, k_2, k_3 \leqslant \log\log(X)} S_{\mathbf{k}}\left(2^{-k_0} X\right) + O\left(\frac{L_\infty^\varepsilon X^2}{(\log(X))^{\eta-\varepsilon}}\right). \tag{1.4.25}$$

On pose alors $X' = r'X$, $Y = (r'X)^{1/2}/(\log(X))^C$ pour une constante $C > 0$ que l'on fixera plus tard et $F_{i,\mathbf{M}}(\mathbf{x}') = F_i(\mathbf{M}\mathbf{x}')$. Valables lorsque l'on a $0 \leqslant m \leqslant (X')^2$ et $2^{-\nu_2(m)} m \equiv 1 \pmod 4$, les décompositions suivantes permettent de restreindre les intervalles dans lesquels varient les variables de façon acceptable :

i) la décomposition $r(m) = 4A_+(m) + 4A_-(m)$ avec

$$A_+(m) = \sum_{\substack{d|m \\ d \leqslant \sqrt{X'}}} \chi(d) \quad \text{et} \quad A_-(m) = \sum_{\substack{e|m \\ m > e\sqrt{X'}}} \chi(e),$$

appliquée à $F_{2,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')$;

ii) la décomposition $r(m) = 4D_+(m) + 4D_-(m)$ avec

$$D_+(m) = \sum_{\substack{d|m \\ d \leqslant X'}} \chi(d) \quad \text{et} \quad D_-(m) = \sum_{\substack{e|m \\ m > eX'}} \chi(e),$$

appliquée à $F_{3,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')$;

iii) la décomposition $r(m) = 4B_+(m) + 4C(m) + 4B_-(m)$, avec

$$B_+(m) = \sum_{\substack{d|m \\ d \leqslant Y}} \chi(d), \quad C(m) = \sum_{\substack{d|m \\ Y < d \leqslant X'/Y}} \chi(d) \quad \text{et} \quad B_-(m) = \sum_{\substack{e|m \\ m > eX'/Y}} \chi(e),$$

appliquée à $F_{1,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')$.

On notera que, dans A_-, D_- et B_-, on a respectivement $e \leqslant \sqrt{X'}$, $e \leqslant X'$ et $e \leqslant Y$. On introduit alors les quantités

$$S_{\pm,\pm,\pm}(X; \mathbf{k}, \alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathbf{Z}^2 \cap X\mathcal{R}_{\mathbf{M}} \\ x_1' \equiv 1 [4]}} B_\pm\left(F_{1,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right) A_\pm\left(F_{2,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right) D_\pm\left(F_{3,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right)$$

et

$$S_0(X; \mathbf{k}, \alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathbf{Z}^2 \cap X\mathcal{R}_{\mathbf{M}} \\ x_1' \equiv 1 [4]}} C\left(L_{1,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right) r\left(F_{2,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right) r\left(F_{3,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right)$$

de sorte que

$$S_{\mathbf{k}}(X) = 4^3 \sum_\alpha \sum_{\pm,\pm,\pm} S_{\pm,\pm,\pm}(X; \mathbf{k}, \alpha) + 4 \sum_\alpha S_0(X; \mathbf{k}, \alpha). \tag{1.4.26}$$

1.4.2 Traitement de S_0

La contribution des sommes $S_0(X; \mathbf{k}, \alpha)$ est

$$S_0(X) = \sum_{k_0 \geqslant 0} \sum_{0 \leqslant k_1, k_2, k_3 \leqslant \log\log(X)} \sum_\alpha S_0\left(2^{-k_0} X; \mathbf{k}, \alpha\right).$$

On montre dans cette section que la somme S_0 constitue un terme d'erreur convenable dans l'optique du Théorème 1.2.1.

Lemme 1.4.6. *Soient $\varepsilon > 0$ et $X \geqslant 1$. Avec la notation (1.2.3), on a*

$$S_0(X) \ll \frac{L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2}{(\log(X))^{\eta-\varepsilon}}.$$

Le reste de la section est consacrée à la démonstration de ce lemme. On s'inspire ici de la méthode utilisée dans la section 4 de [BB08]. On a clairement que

$$S_0\left(X;\mathbf{k},\alpha\right) \ll \sum_{\substack{\mathbf{x}'\in\mathbf{Z}^2\cap X\mathcal{R}_\mathbf{M}\\ x_1'\equiv 1[4]}} \left|C\left(F_{1,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right)\right| r\left(F_{2,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right) r\left(F_{3,\mathbf{M}}(\mathbf{x}')\right).$$

On pose alors

$$E = \left\{m\in\mathbf{Z} \quad | \quad \exists d|m, \quad \text{tel que} \quad Y < d \leqslant \frac{X}{Y}\right\},$$

$$E_{k_0} = \{m\in\mathbf{Z} \quad | \quad \exists \mathbf{x}\in 2^{-k_0}X\mathcal{R} \quad \text{tel que} \quad F_1(\mathbf{x}) = m\}$$

et

$$\mathcal{B}_{k_0} = E\cap E_{k_0}$$

de sorte que

$$S_0\left(2^{-k_0}X;\mathbf{k},\alpha\right) \ll \sum_{m\in\mathcal{B}_{k_0}} S_{0,m}\left(2^{-k_0}X\right)|C(m)|$$

où

$$S_{0,m}\left(X\right) = \sum_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^2\cap X\mathcal{R}\\ F_1(\mathbf{x})=m}} r\left(F_2(\mathbf{x})\right) r\left(F_3(\mathbf{x})\right).$$

On en déduit donc que

$$S_0(X) \ll (\log\log(X))^3 \sum_{k_0\geqslant 0}\sum_{m\in\mathcal{B}_{k_0}} S_{0,m}\left(2^{-k_0}X\right)|C(m)|.$$

D'après [BB08, lemma 6], on a, lorsque $2^{k_0}\leqslant\sqrt{X}$,

$$\sum_{m\in\mathcal{B}_{k_0}}|C(m)| \ll \frac{r'2^{-k_0}X\log\log(X')^{9/4}}{(\log(X'))^\eta}.$$

On en déduit, pour tout $X\geqslant 1$, la majoration

$$S_0(X) \ll \frac{r'X\log\log(X')^{21/4}}{(\log(X'))^\eta}\sum_{k_0\geqslant 0} 2^{-k_0}\max_{m\in\mathbf{N}}\left|S_{0,m}\left(2^{-k_0}X\right)\right| + X. \tag{1.4.27}$$

On montre alors le lemme suivant qui permet de conclure que la contribution de S_0 donne un terme d'erreur convenable.

Lemme 1.4.7. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que*

$$S_{0,m}(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X(\log\log(X'))^c.$$

Démonstration.– On adapte ici la démonstration du lemme 5 de [BB08]. Supposons que $a_1 \neq 0$, alors on a

$$x_1 = \frac{m - b_1 x_2}{a_1}$$

et par conséquent

$$F_2(\mathbf{x}) = \frac{A_2 m + B_2 n}{a_1} = F_2'(m,n)$$

avec $A_2 = a_2$, $B_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ et $n = x_2$. On a alors

$$F_3(\mathbf{x}) = \frac{A_3 m^2 + B_3 n^2 + C_3 mn}{a_1^2} = F_3'(m,n)$$

avec $A_3 = a_3$, $B_3 = a_3 b_1^2 + b_3 a_1^2 - c_3 b_1 a_1$ et $C_3 = c_3 a_1 - 2a_3 b_1$. On peut remarquer que $B_2 B_3 \neq 0$. On pose alors

$$B_2' = \frac{B_2}{\gcd(A_2 m, B_2)}, \quad B_3' = \frac{B_3}{\gcd(A_3 m^2, B_3, C_3 m)}$$

ainsi que

$$A_2'(m) = \frac{A_2 m}{\gcd(A_2 m, B_2)}, \; A_3'(m) = \frac{A_3 m^2}{\gcd(A_3 m^2, B_3, C_3 m)}$$

et

$$C_3'(m) = \frac{C_3 m}{\gcd(A_3 m^2, B_3, C_3 m)}.$$

On introduit enfin $h := 2 \times 3 \times a_1 B_2 B_3 \Delta^*$ avec la notation du Lemme 1.4.2 et la fonction multiplicative r_2 définie pour p premier et ν un entier naturel par

$$r_2(p^\nu) = \begin{cases} (\nu+1)^2 & \text{si } p|h \quad \text{ou} \quad \nu \geqslant 2 \\ r_0(p^\nu) = 1 + \chi(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que

$$S_{0,m}(X) \leqslant 16\tau(h)^2 \sum_{n \leqslant R_\infty X} r_2(G_m(n)) \ll L_\infty^\varepsilon \sum_{n \leqslant R_\infty X} r_2(G_m(n)),$$

où

$$G_m(n) = (A_2'(m) + B_2' n)\left(A_3'(m) + B_3' n^2 + C_3'(m) n\right).$$

On rappelle qu'un nombre premier est dit fixe par un polynôme P à coefficients entiers si pour tout entier n, on a $P(n) \equiv 0 \pmod p$. Le polynôme G_m étant irréductible et primitif de degré 3, seuls $p = 2$ et $p = 3$ peuvent être des premiers fixes. Deux applications successives éventuelles du lemme 5 couplées à la remarque 8 de [BB07a] montrent qu'il existe $a \in \{0,1\}$, $b \in \{0,1,2\}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant 4$ tels que

$$G_{m,2}(x) = \frac{G_m(3^a \times 2^b x + k)}{3^a \times 2^\mu}$$

soit sans premier fixe pour un certain entier $k \leqslant 10$. On déduit finalement la majoration

$$S_{0,m}(X) \ll L_\infty^\varepsilon \sum_{n \ll r_\infty X} r_2(G_{m,2}(n)).$$

Pour $r_\infty X \gg L_\infty^\varepsilon (X')^\varepsilon$ et $\varepsilon \in]0,1[$, une application du théorème 2 de [BB07a] permet d'obtenir l'estimation

$$S_{0,m}(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X \prod_{p \ll r_\infty X} \left(\left(1 - \frac{\rho_{G_{m,2}}(p)}{p}\right) \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{r_2(p^\nu)\rho_{G_{m,2}}(p^\nu)}{p^\nu} \right).$$

En utilisant le Lemme 1.3.4, on obtient la majoration

$$\sum_{\nu \geqslant 1} \frac{r_2(p^\nu)\rho_{G_{m,2}}(p^\nu)}{p^\nu} \leqslant \frac{6}{p} + \frac{27}{p} + 3\sum_{\nu \geqslant 3} \frac{(\nu+1)^2}{p^{\frac{\nu}{3}}} \leqslant \frac{6}{p} + \frac{27}{p} + \frac{1167}{p} = \frac{1200}{p}. \tag{1.4.28}$$

On déduit de tout cela que les nombres premiers p qui divisent le discriminant de $G_{m,2}$ ont une contribution à $S_{0,m}(X)$

$$\ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X \prod_{p \mid \mathrm{disc}(G_{m,2})} \left(1 + \frac{1200}{p}\right).$$

Une étude attentive du passage de F_m à $G_{m,2}$ ainsi que le lemme 1 de [BB07a] montrent que $\mathrm{disc}(G_{m,2}) \ll L_\infty^{19} m^6$. On en déduit donc

$$L_\infty^\varepsilon r_\infty X \prod_{p \mid \mathrm{disc}(G_{m,2})} \left(1 + \frac{1200}{p}\right) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X (\log\log(X'))^{1200},$$

puisqu'il est nécessaire que $m \leqslant X'$ pour que $S_{0,m}(X)$ soit non nulle. On traite maintenant la contribution des p qui ne divisent pas le discriminant. Pour ces nombres premiers, on a une meilleure majoration de $\rho_{G_{m,2}}(p^\nu) \ll 1$, qui donne de la même façon qu'en (1.4.28) les majorations

$$\sum_{\nu \geqslant 2} \frac{r_2(p^\nu)\rho_{G_{m,2}}(p^\nu)}{p^\nu} \ll \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{(\nu+1)^2}{p^\nu} \ll \frac{1}{p^2}.$$

Cela permet de négliger tous les exposants $\nu \geqslant 2$. On en déduit donc finalement

$$S_{0,m}(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X (\log\log(X'))^{1200} \prod_{\substack{p \ll r_\infty X \\ p \nmid \mathrm{disc}(G_{m,2})}} \left(1 - \frac{\rho_{G_{m,2}}(p)}{p}\right)\left(1 + \frac{r_2(p)\rho_{G_{m,2}}(p)}{p}\right)$$

soit

$$\begin{aligned} S_{0,m}(X) &\ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X (\log\log(X'))^{1200} \prod_{\substack{p \ll r_\infty X \\ p \nmid \mathrm{disc}(G_{m,2})}} \left(1 + \frac{(r_2(p)-1)\rho_{G_{m,2}}(p)}{p}\right) \\ &\ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X (\log\log(X'))^{1200} \prod_{p \ll r_\infty X} \left(1 + \frac{\chi(p)\rho_{G_{m,2}}(p)}{p}\right) \\ &\ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X (\log\log(X'))^{1200+O(1)}. \end{aligned}$$

On raisonne ici comme lors de la preuve du Lemme 1.4.4 et on utilise le fait que pour tout $p \geqslant 5$, $\rho_{G_{m,2}}(p) = \rho_{G_m}(p)$ et le fait que G_m est irréductible sur $\mathbf{Q}[i]$. Dans le cas contraire, lorsque $n \leqslant L_\infty^\varepsilon (X')^\varepsilon$, on a

$$r_2(G_{m,2}(n)) \ll G_{m,2}(n)^\varepsilon \ll L_\infty^\varepsilon (X')^\varepsilon \ll L_\infty^\varepsilon {r_\infty}^\varepsilon X^\varepsilon.$$

La dernière majoration découle de l'inégalité $r' \leqslant 2L_\infty r_\infty$. D'où,

$$S_{0,m}(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X^\varepsilon \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty X(\log\log(X'))^{O(1)}$$

pour ε assez petit. □

Pour conclure, on tire finalement de (1.4.27) et du Lemme 1.4.7 la majoration

$$\begin{aligned} S_0(X) &\ll \frac{L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 \log\log(X')^{21/4+c_0}}{(\log(X'))^\eta} \sum_{k_0 \geqslant 0} 2^{-2k_0} \\ &\ll \frac{L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 \log\log(X')^{21/4+c_0}}{(\log(X'))^\eta}, \end{aligned}$$

ce qui fournit

$$S_0(X) \ll \frac{L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2}{(\log(X'))^{\eta-\varepsilon}}.$$

Puisque l'hypothèse $r'X^{1-\varepsilon} \geqslant 1$ garantit que $\log(X') \gg \log(X)$, cette estimation est convenable pour obtenir le Lemme 1.4.6. Ceci achève le traitement de S_0.

1.4.3 Traitement des $S_{\pm,\pm,\pm}$ et fin de la preuve du Théorème 1.2.1

On traite ici le cas de $S_{-,-,-}(X;\mathbf{k},\alpha)$ qui est le plus délicat, les autres cas se traitant de manière similaire. On utilise dans la suite les notations $V_1 = Y$, $V_2 = \sqrt{X'}$, $V_3 = X'$ et on pose

$$\mathcal{R}_{\mathbf{M},4,\mathbf{d}}^{-,-,-,} = \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}_{\mathbf{M}} \;\middle|\; \begin{array}{l} F_1(\mathbf{M}\mathbf{x}') > r'd_1Y^{-1} \\ F_2(\mathbf{M}\mathbf{x}') > (r')^{1/2}d_2X^{-1/2} \\ F_3(\mathbf{M}\mathbf{x}') > \frac{r'd_3}{X} \\ x_1' \equiv 1[4] \end{array} \right\}.$$

On a

$$S_{-,-,-}(X;\mathbf{k},\alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathbf{N}^3 \\ d_i \leqslant V_i}} \chi(d_1d_2d_3)\#\left(\Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) \cap X\mathcal{R}_{\mathbf{M},4,\mathbf{d}}^{-,-,-,}\right)$$

où $\Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbf{d}) = \Lambda(\mathbf{d}, F_{1,\mathbf{M}}, F_{2,\mathbf{M}}, F_{3,\mathbf{M}})$. On applique alors le lemme de géométrie des nombres suivant qui est dû à Daniel [Dan99, lemme 3.2] et La Bretèche et Browning [BB10, lemme 5].

Lemme 1.4.8. *Soient $\varepsilon > 0$, F_1, F_2 et F_3 des formes vérifiant les hypothèses **NH** (1.2.0), $X \geqslant 1$, V_1, V_2, $V_3 \geqslant 2$ et $V = V_1V_2V_3$. Alors il existe une constante absolue $A > 0$ telle que*

$$\sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathbf{N}^3 \\ d_i \leqslant V_i}} \left| \#\left(\Lambda(\mathbf{d}) \cap X\mathcal{R}_{4,\mathbf{d}}\right) - \mathrm{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}})X^2 \frac{\rho(\mathbf{d})}{4(d_1d_2d_3)^2} \right| \ll L_\infty^\varepsilon (r_\infty X\sqrt{V} + V)\log(V)^A,$$

avec $\mathcal{R}_{\mathbf{d}} \subset \mathcal{R}$ une région de frontière continûment différentiable dépendant de $\mathbf{d}$ et où $X\mathcal{R}_{4,\mathbf{d}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap X\mathcal{R}_{\mathbf{d}} \mid x_1 \equiv 1 \pmod 4\}$.

Démonstration.– Les éléments de la preuve sont dans l'article [Dan99] de Daniel ainsi que dans [Mar08], [Mar10] et [BB07a]. Il faut simplement préciser en plus la dépendance par rapport aux formes et noter que la dépendance de la région par rapport à l'indice

de sommation ne change absolument rien dans la preuve. Dernier point, le lemme se démontre pour des formes primitives et on passe aux formes vérifiant **NH** (1.2.0) comme dans [BB10]. □

On obtient ici l'égalité

$$S_{-,-,-}(X;\mathbf{k},\alpha) = \sum_{\substack{\mathbf{d}\in\mathbf{N}^3\\ d_i\leqslant V_i}} \chi(d_1d_2d_3)\frac{X^2}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3'\}+2}}\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}}^{-,-,-})}{4}\frac{\rho(\mathbf{d})}{(d_1d_2d_3)^2} \tag{1.4.29}$$

$$+O\left(2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon(r_\infty X\sqrt{V}+V)\log(V)^A\right)$$

où

$$\mathcal{R}_{\mathbf{d}}^{-,-,-} = \left\{\mathbf{x}\in\mathcal{R}\,\middle|\, F_1(\mathbf{x}) > \frac{r'd_1}{Y},\ F_2(\mathbf{x}) > \frac{(r')^{1/2}d_2}{X^{1/2}},\ F_3(\mathbf{x}) > \frac{r'd_3}{X}\right\}.$$

Posant

$$T = 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon(r_\infty X\sqrt{V}+V)\log(V)^A,$$

un calcul élémentaire fournit alors immédiatement

$$T \ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon X^2\left(\frac{r_\infty r'}{(\log(X))^{C/2-A}}+\frac{(r')^2}{(\log(X))^{C-A}}\right).$$

Si $r' \leqslant r_\infty(\log(X))^{A+1}$, l'estimation précédente donne avec $C = 2A+8$:

$$\begin{aligned} T &\ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon X^2\left(\frac{r_\infty r'}{(\log(X))^4}+\frac{r'r_\infty}{(\log(X))^7}\right)\\ &\ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon X^2\frac{r_\infty r'}{(\log(X))^4}. \end{aligned}$$

On remarque alors en utilisant le théorème 1 de [BB07a] que

$$\begin{aligned} T \ll S_{-,-,-}(X;\mathbf{k},\alpha) &\ll \sum_{x_i\leqslant r_\infty X}\tau(F_{1,\mathbf{M}}(\mathbf{x}))\tau(F_{2,\mathbf{M}}(\mathbf{x}))\tau(F_{3,\mathbf{M}}(\mathbf{x}))\\ &\ll \sum_{x_i\leqslant r_\infty X}\tau_0(F_{1,,\mathbf{M}}(\mathbf{x})F_{2,\mathbf{M}}(\mathbf{x})F_{3,\mathbf{M}}(\mathbf{x}))\\ &\ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon r_\infty^2X^2(\log(X))^3. \end{aligned}$$

où l'on a introduit la fonction multiplicative

$$\tau_0(p^\nu) = \begin{cases} 2=\tau(p^\nu) & \text{si } \nu=1\\ (\nu+1)^3 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cela permet d'obtenir, si $r' \geqslant r_\infty(\log(X))^{A+1}$, la majoration

$$\begin{aligned} T &\ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon r_\infty r'X^2(\log(X))^{3-A-1}\\ &\ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon r_\infty r'X^2(\log(X))^{2-A}, \end{aligned}$$

ce qui implique que dans ce cas également

$$T \ll 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}L_\infty^\varepsilon X^2\frac{r_\infty r'}{(\log(X))^4}.$$

Pour conclure le traitement du terme d'erreur, il ne reste plus qu'à remplacer X par $2^{-k_0}X$ puis à sommer pour obtenir une contribution

$$\ll L_\infty^\varepsilon r_\infty r' \sum_{k_0 \geqslant 0} \frac{2^{-2k_0}X^2}{\left(\log\left(2^{-k_0}X\right)\right)^4} \sum_{k_1,k_2,k_3 \leqslant \log\log(X)} 2^{\varepsilon(k_1+k_2+k_3)} n(\mathbf{k}).$$

En utilisant le Lemme 1.4.2, on obtient

$$\ll L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 \frac{(\log(X))^{3\varepsilon\log(2)}}{(\log(X))^4} \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty r' \frac{X^2}{\log(X)}$$

pour $\varepsilon \leqslant 1/\log(2)$. Ceci est satisfaisant dans l'optique du Théorème 1.2.1.

On passe maintenant à l'étude du terme principal de (1.4.29). On exploite pour ce faire les deux lemmes élémentaires suivants sur les séries de Dirichlet associées à des convolutions pour étudier

$$\mathcal{S}(V_1,V_2,V_3) = \sum_{d_i \leqslant V_i} \chi(d_1d_2d_3) \frac{\rho(d_1,d_2,d_3)}{(d_1d_2d_3)^2}. \tag{1.4.30}$$

Lemme 1.4.9. *Soient $A > 0$, g, w deux fonctions arithmétiques et C, C', C'' trois constantes telles que*

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{|w(d)|\log(2d)^A}{d} \leqslant C'' \quad \text{et} \quad \sum_{d \leqslant x} \frac{g(d)}{d} = C + O\left(\frac{C'}{(\log(2x))^A}\right).$$

On a alors que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{(g*w)(n)}{n} = C \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{w(d)}{d} + O\left(\frac{C''(C+C')}{(\log(2x))^A}\right).$$

Démonstration– La preuve se trouve dans [BB12, lemma 5]. □

Lemme 1.4.10. *Soient g, w deux fonctions arithmétiques et C, C', C'' trois constantes telles que*

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{|w(d)|\log(2d)}{d} \leqslant C'' \quad \text{et} \quad \sum_{d \leqslant x} \frac{g(d)}{d} = C\log(x) + O\left(C'\right).$$

On a alors que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{(g*w)(n)}{n} = C\log(x) \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{w(d)}{d} + O\left(C''(C+C')\right).$$

Démonstration– La preuve est très similaire à celle du lemme précédent et nous ne la rédigeons pas ici. □

On établit alors le lemme suivant.

Lemme 1.4.11. *Si on note $V_m = \min\{V_i\}$, pour tout $A > 0$, on a*

$$\mathcal{S}(V_1, V_2, V_3) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \prod_{p>2} \sigma_p + O\left(\frac{L_\infty^\varepsilon}{\log(V_m)^A}\right).$$

Démonstration– On utilise les notations du Lemme 1.3.3 pour écrire

$$\mathcal{S}(V_1, V_2, V_3) = \sum_{d_i \leqslant V_i} \chi(d_1 d_2 d_3) \frac{(h * R)(d_1, d_2, d_3)}{d_1 d_2 d_3}$$

où

$$\begin{aligned}\chi(d_1 d_2 d_3)&(h * R)(d_1, d_2, d_3)\\ &= \sum_{e_i | d_i} \chi\left(\frac{d_1}{e_1}\frac{d_2}{e_2}\frac{d_3}{e_3}\right) h\left(\frac{d_1}{e_1}, \frac{d_2}{e_2}, \frac{d_3}{e_3}\right) \chi(e_1 e_2 e_3) r_\Delta(e_3).\end{aligned}$$

Supposons que $V_3 \geqslant V_2 \geqslant V_1$. On commence alors par sommer sur d_3 et e_3 si bien qu'on doit estimer la somme suivante

$$\sum_{d_3 \leqslant V_3} \sum_{e_3 | d_3} \frac{\chi\left(\frac{d_3}{e_3}\right) h\left(\frac{d_1}{e_1}, \frac{d_2}{e_2}, \frac{d_3}{e_3}\right) \chi(e_3) r_\Delta(e_3)}{d_3}.$$

Le Lemme 1.4.9, avec $g = \chi r_\Delta = \chi * (\chi\chi_\Delta)$ et $w = \chi h$ où h est vue simplement comme fonction de sa troisième variable fournit alors que cette somme est égale à

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} L(1, \chi\chi_\Delta) \sum_{k_3 \geqslant 1} \frac{\chi(k_3) h\left(\frac{d_1}{e_1}, \frac{d_2}{e_2}, k_3\right)}{k_3}&\\ + O\left(\frac{1}{\log(V_3)^A} \sum_{k_3 \geqslant 1} \frac{\left|h\left(\frac{d_1}{e_1}, \frac{d_2}{e_2}, k_3\right)\right| \log(2k_3)^A}{k_3}\right),&\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $L(1, \chi) = \frac{\pi}{4}$. On somme alors désormais sur d_2 et e_2. Le terme principal ci-dessus, devient par une nouvelle application du Lemme 1.4.9 avec toujours $w = \chi h$ où h est vue comme fonction de la deuxième variable uniquement cette fois et avec $g = \chi$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 L(1, \chi\chi_\Delta) \sum_{k_2, k_3 \geqslant 1} \frac{\chi(k_2 k_3) h\left(\frac{d_1}{e_1}, k_2, k_3\right)}{k_2 k_3}&\\ + O\left(\frac{1}{\log(V_2)^A} \sum_{k_2, k_3 \geqslant 1} \frac{\left|h\left(\frac{d_1}{e_1}, k_2, k_3\right)\right| \log(2k_2)^A}{k_2 k_3}\right).&\end{aligned}$$

Pour traiter le terme d'erreur de la sommation sur d_3 et e_3, on va utiliser le Lemme 1.4.10 avec $g = 1$ et $w = |h|$ vue comme fonction de sa deuxième variable pour obtenir une contribution

$$O\left(\frac{\log(V_2)}{\log(V_3)^A} \sum_{k_2, k_3 \geqslant 1} \frac{\left|h\left(\frac{d_1}{e_1}, k_2, k_3\right)\right| \log(2k_3)^A \log(2k_2)^A}{k_2 k_3}\right).$$

On effectue alors la même manipulation sur la somme sur d_1 et e_1 et le Lemme 1.3.3 permet d'obtenir que les quantités de la forme

$$\sum_{k_1,k_2,k_3\geqslant 1} \frac{|h(k_1,k_2,k_3)|\log(2k_3)^A\log(2k_2)^A\log(2k_1)^A}{k_1k_2k_3}$$

ont une contribution

$$\ll \sum_{k_1,k_2,k_3\geqslant 1} \frac{|h(k_1,k_2,k_3)|\log(2k_1k_2k_3)^{3A}}{k_1k_2k_3} \ll L_\infty^\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure la preuve du lemme en utilisant l'expression (1.3.12) obtenue dans le Lemme 1.3.3. □

On est alors en mesure de terminer la démonstration du Théorème 1.2.1. Il ne reste plus qu'à introduire le terme $\mathrm{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}}^{-,-,-})$ dans (1.4.29). Pour ce faire, on pose

$$\mathcal{S}'(X;\mathcal{R}) = \sum_{d_i\leqslant V_i} \frac{\chi(d_1d_2d_2)\rho(\mathbf{d})\mathrm{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}}^{-,-,-})}{(d_1d_2d_3)^2}. \tag{1.4.31}$$

On s'inspire alors de [BT13, section 7.3] et on écrit

$$\mathrm{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}}^{-,-,-}) = \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_{\mathbf{d}}^{-,-,-}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

En réinjectant dans (1.4.31) et en intervertissant les sommations, on aboutit à

$$\mathcal{S}'(X;\mathcal{R}) = \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \sum_{\substack{d_1\leqslant\min\{Y,F_1(\mathbf{x})r'^{-1}Y\},\\ d_2\leqslant\min\{\sqrt{X'},F_2(\mathbf{x})r'^{-1/2}\sqrt{X}\},\\ d_3\leqslant\min\{X',F_3(\mathbf{x})r'^{-1}X\}}} \frac{\chi(d_1d_2d_2)\rho(\mathbf{d})}{(d_1d_2d_3)^2}\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Le Lemme 1.4.11 permet d'obtenir l'estimation

$$\mathcal{S}'(X;\mathcal{R}) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \mathrm{vol}(\mathcal{R})\prod_{p>2}\sigma_p + O\left(L_\infty^\varepsilon I(X)\right),$$

avec

$$\begin{aligned} I(X) &= I(X;F_1,F_2,Q)\\ &= \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\log(\min\{F_1(\mathbf{x})r'^{-1}Y, F_2(\mathbf{x})r'^{-1/2}\sqrt{X}, F_3(\mathbf{x})r'^{-1}X\})}\mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On établit alors l'estimation

$$I(X) \ll_\varepsilon \frac{r_\infty^2 L_\infty^\varepsilon}{\log(X)^\eta}. \tag{1.4.32}$$

Lorsque $L_\infty > (\log(X))^{1/\varepsilon}$, le Lemme 1.3.3 puis le changement de variables $\mathbf{x} = r_\infty\mathbf{z}$ permettent d'obtenir les majorations

$$\mathcal{S}'(X;\mathcal{R}) \ll L_\infty^\varepsilon \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \mathrm{d}\mathbf{x} \ll r_\infty^2 L_\infty^\varepsilon \iint_{\|\mathbf{z}\|\leqslant 1} \mathrm{d}\mathbf{z} \ll r_\infty^2 L_\infty^\varepsilon.$$

Ces dernières sont alors suffisantes pour établir (1.4.32). Dans le cas où on a $L_\infty \leqslant (\log(X))^{1/\varepsilon}$, on peut majorer $I(X)$ par la somme des $I_i(X)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ avec

$$\begin{aligned} I_1(X) &= \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\log(F_1(\mathbf{x})r'^{-1}Y+2)}\mathrm{d}\mathbf{x}; \\ I_2(X) &= \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\log(F_2(\mathbf{x})r'^{-1/2}X+2)}\mathrm{d}\mathbf{x}; \\ I_3(X) &= \iint_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}} \frac{1}{\log(F_3(\mathbf{x})r'^{-1}X+2)}\mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Traitons par exemple le cas du dernier terme ci-dessus. En effectuant un changement de variables $\mathbf{x} = r_\infty \mathbf{z}$, on a

$$I_3(X) \leqslant r_\infty^2 \iint_{\|\mathbf{z}\|\leqslant 1} \frac{1}{\log(F_3(\mathbf{z})r_\infty^2 r'^{-1}X+2)}\mathrm{d}\mathbf{z}.$$

On peut alors constater qu'un changement de variables $\mathbf{u} = E\mathbf{z}$ (voir [BB10, section 6]) fait apparaître l'inverse de $\det(E)$ et ainsi, on peut intégrer plutôt sur la forme J définie par $J(\mathbf{z}) = F_3(E\mathbf{z})$ (voir [BT13]) et obtenir par exemple la majoration

$$\begin{aligned} I_3(X) &\leqslant \frac{r_\infty^2}{\sqrt{\log(r_\infty^2 r'^{-1}X)}} \iint_{\|\mathbf{z}\|\leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{|\log(J(\mathbf{z})+2)|}}\mathrm{d}\mathbf{z} \\ &\ll \frac{r_\infty^2}{\sqrt{\log(r_\infty^2 r'^{-1}X)}}. \end{aligned}$$

Mais les inégalités $r'/(2L_\infty) \leqslant r_\infty \leqslant 2L_\infty r'$ démontrées en section 5 de [BB10] ainsi que l'hypothèse $r'X^{1-\varepsilon} \geqslant 1$ fournissent la majoration

$$\frac{1}{\log(r_\infty^2 r'^{-1}X)} \leqslant \frac{1}{\log\left(\frac{X^\varepsilon}{4\log(X)^{2/\varepsilon}}\right)},$$

qui permet de conclure également dans ce cas à la majoration (1.4.32). On traite de manière tout à fait analogue les autres cas, ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} S_{-,-,-}(X;\mathbf{k},\alpha) = \frac{X^2}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}+2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}{4}\prod_{p>2}\sigma_p \\ + O_\varepsilon\left(L_\infty^\varepsilon r_\infty^2 \frac{X^2}{(\log(X))^\eta}\right). \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

En combinant (1.4.25), (1.4.26), le Lemme 1.4.6, (1.4.33) et le Lemme 1.4.3, on conclut à l'estimation

$$\begin{aligned} S(X) = \sum_{k_0\geqslant 0}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3}\Bigg(\frac{2^{-2k_0+9}X^2 n(\mathbf{k})}{2^{k_1+\max\{k_2'',k_3''\}+2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{R})}{4}\prod_{p>2}\sigma_p \\ + O_\varepsilon\left(L_\infty^\varepsilon(r_\infty r' + r_\infty^2)\frac{2^{-2k_0}X^2}{\log(X)^{\eta-\varepsilon}}\right)\Bigg), \end{aligned}$$

qui permet d'achever la preuve du Théorème 1.2.1.

1.5 Démonstration du Théorème 1.2.3 : interprétation de la constante

Pour $A \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{N}$ et p^n une puissance d'un nombre premier, on pose

$$S_\alpha(A; p^n) = \#\left\{(x,y) \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^2 \quad | \quad p^\alpha(x^2+y^2) \equiv A \,(\mathrm{mod}\ p^n)\right\}.$$

Si $\alpha \leqslant n$, on a clairement

$$S_\alpha(A; p^n) = p^{2\alpha} S_0(A/p^\alpha; p^{n-\alpha})$$

lorsque $\alpha \leqslant \nu_p(A)$ et $S_\alpha(A; p^n) = 0$ sinon. Il suffit donc de traiter le cas $\alpha = 0$, ce que fournit le lemme suivant issu de la section 2 de [BB08].

Lemme 1.5.1. *Lorsque $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, on a*

$$S_0(A; p^n) = \begin{cases} p^n + np^n(1-1/p) & \textit{si } \nu_p(A) \geqslant n \\ (1+\nu_p(A))p^n(1-1/p) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, on a

$$S_0(A; p^n) = \begin{cases} p^{2[n/2]} & \textit{si } \nu_p(A) \geqslant n \\ p^n(1+1/p) & \textit{si } \nu_p(A) < n \quad \textit{et } 2|\nu_p(A) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

et pour $p = 2$, on a

$$S_0(A; 2^n) = \begin{cases} 2^n & \textit{si } \nu_2(A) \geqslant n-1 \\ 2^{n+1} & \textit{si } \nu_p(A) < n-1 \quad \textit{et } 2^{-\nu_2(A)}A \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4) \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1.5.1 Le cas $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$

On raisonne de manière similaire à la section 4 de [BB10] à la différence qu'on utilise le Lemme 1.5.1. On pose

$$M_\nu(p^n) = \#\left\{\mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^2 \quad | \quad \nu_p(F_i(\mathbf{x})) = \nu_i\right\}$$

et

$$M'_\nu(p^n) = \#\left\{\mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^2 \quad | \quad \nu_p(F_i(\mathbf{x})) \geqslant \nu_i\right\}.$$

Lorsque $n \geq \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, on a clairement la formule

$$M'_\nu(p^n) = p^{2n-2\nu_1-2\nu_2-2\nu_3}\rho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \tag{1.5.34}$$

et

$$M_\nu(p^n) = \sum_{\mathbf{e}\in\{0,1\}^3} (-1)^{e_1+e_2+e_3} M'_{\nu+\mathbf{e}}(p^n).$$

Avec la notation (1.2.9) et posant $m_j = \max\{\lambda_j, \mu_j\}$, on a alors

$$N_{\lambda,\mu}(p^n) = p^{3n+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left(1-\frac{1}{p}\right)^3 \sum_{m_j \leqslant \nu_j < n} M_\nu(p^n) \prod_{1\leqslant j\leqslant 3}(1+\nu_j-\lambda_j) + O(n^4p^{4n}).$$

En utilisant l'identité (1.5.34), en divisant par $p^{5n+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\omega_{\lambda,\mu}(p) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^3 \sum_{m_j \leqslant \nu_j} \sum_{\mathbf{e}\in\{0,1\}^3} (-1)^{e_1+e_2+e_3} \frac{\rho(p^{\nu_1+e_1}, p^{\nu_2+e_2}, p^{\nu_3+e_3})}{p^{2(\nu_1+e_1+\nu_2+e_2+\nu_3+e_3)}} \times \prod_{1\leqslant j\leqslant 3} (1+\nu_j-\lambda_j).$$

On effectue alors les changements de variables $n_j = \nu_j + e_j - \lambda_j$ pour obtenir

$$\omega_{\lambda,\mu}(p) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^3 \sum_{m_j-\lambda_j\leqslant n_j} \frac{\rho(p^{n_1+\lambda_1}, p^{n_2+\lambda_2}, p^{n_3+\lambda_3})}{p^{2(n_1+\lambda_1+n_2+\lambda_2+n_3+\lambda_3)}} \times \sum_{0\leqslant e_j\leqslant \min\{1,\lambda_j+n_j-m_j\}} (-1)^{e_1+e_2+e_3} \prod_{1\leq j\leq 3} (1+n_j-e_j).$$

Or, on a

$$\sum_{0\leqslant e\leqslant \min\{1,\lambda+n-m\}} (-1)^e(1+n-e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda+n-m \geq 1 \\ 1+m-\lambda & \text{si } \lambda+n-m = 0 \end{cases}$$

et $(1+m-\lambda) = \#\mathbf{Z}\cap[0, m-\lambda]$. On a donc l'égalité

$$\prod_{i=1}^{3} \#\mathbf{Z}\cap[0, m_i-\lambda_i] \times \frac{\rho(p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3})}{p^{2(m_1+m_2+m_3)}} = \sum_{n_i\leqslant m_i-\lambda_i} \frac{\rho(p^{\max\{m_1,\lambda_1+n_1\}}, p^{\max\{m_2,\lambda_2+n_2\}}, p^{\max\{m_3,\lambda_3+n_3\}})}{p^{2(\max\{m_1,\lambda_1+n_1\}+\max\{m_2,\lambda_2+n_2\}+\max\{m_3,\lambda_3+n_3\})}}$$

et finalement

$$\omega_{\lambda,\mu}(p) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^3 \sum_{n_i\geq 0} \frac{\rho(p^{\max\{m_1,\lambda_1+n_1\}}, p^{\max\{m_2,\lambda_2+n_2\}}, p^{\max\{m_3,\lambda_3+n_3\}})}{p^{2(\max\{m_1,\lambda_1+n_1\}+\max\{m_2,\lambda_2+n_2\}+\max\{m_3,\lambda_3+n_3\})}}.$$

On a donc bien obtenu l'identité $\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(p) = \sigma_p(\mathbf{d},\mathbf{D})$ pour tout nombre premier $p \equiv 1 \pmod 4$.

1.5.2 Le cas $p \equiv 3 \pmod 4$

Avec les mêmes notations que lors de la section précédente, lorsque $p \equiv 3 \pmod 4$, on aboutit de la même manière à l'expression

$$N_{\lambda,\mu}(p^n) = p^{5n+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\left(1+\frac{1}{p}\right)^3 \times \sum_{\substack{m_i\leqslant\nu_i \\ 2|\nu_i-\lambda_i}} \sum_{\mathbf{e}\in\{0,1\}^3} (-1)^{e_1+e_2+e_3} \frac{\rho(p^{\nu_1+e_1}, p^{\nu_2+e_2}, p^{\nu_3+e_3})}{p^{2(\nu_1+e_1+\nu_2+e_2+\nu_3+e_3)}} + O(n^4p^{4n}).$$

Passant à la limite et effectuant le même changement de variables que dans le cas précédent, on obtient

$$\omega_{\lambda,\mu}(p) = \left(1+\frac{1}{p}\right)^3 \sum_{n_i\geqslant m_i-\lambda_i} \frac{\rho(p^{n_1+\lambda_1}, p^{n_2+\lambda_2}, p^{n_3+\lambda_3})}{p^{2(n_1+\lambda_1+n_2+\lambda_2+n_3+\lambda_3)}} \sum_{\substack{0\leqslant e_i\leqslant\min\{1,\lambda_i+n_i-m_i\} \\ e_i\equiv n_i[2]}} (-1)^{e_1+e_2+e_3}.$$

Or,

$$\sum_{\substack{0\leqslant e\leqslant \min\{1,\lambda+n-m\}\\ e\equiv n[2]}} (-1)^e = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } \lambda+n-m\geq 1 \\ 1 & \text{si } \lambda+n-m=0 \quad \text{et } 2|m-\lambda \\ 0 & \text{si } \lambda+n-m=0 \quad \text{et } 2\not| m-\lambda. \end{cases}$$

On conclut alors comme lors de la section précédente à l'égalité souhaitée $\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(p) = \sigma_p(\mathbf{d},\mathbf{D})$ pour tout nombre premier $p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)$.

1.5.3 Le cas $p=2$

Le Lemme 1.5.1 fournit immédiatement la relation

$$\omega_{\mathbf{d}}(2) = \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n+3}\#\left\{\mathbf{x}\in(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \;\middle|\; F_i(\mathbf{x})\in d_i\mathcal{E}_{2^n}\right\} = \sigma_2(\mathbf{d}),$$

où $\sigma_2(\mathbf{d})$ est définie en (1.2.8) et $\omega_{\mathbf{d}}(2)$ en (1.2.10).

1.5.4 Le cas de la densité archimédienne

Enfin, pour terminer le traitement de la constante, il reste à regarder la densité archimédienne. On remarque pour commencer que

$$\omega_{\mathcal{R}}(\infty) = 2^6\omega_{\mathcal{R}}^+(\infty)$$

où $\omega_{\mathcal{R}}^+(\infty)$ est défini de la même façon que $\omega_{\mathcal{R}}(\infty)$ avec les conditions supplémentaires $s_i>0$ et $t_i>0$ pour tout $1\leqslant i\leqslant 3$. On utilise la forme de Leray en paramétrant par les t_i. La forme de Leray est par conséquent ici donnée par

$$(-2^3t_1t_2t_3)^{-1}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

En effet, la variété est définie comme le lieu des zéros des polynômes définis par

$$f_i(\mathbf{x},\mathbf{s},\mathbf{t}) = \frac{F_i(\mathbf{x})}{d_i} - (s_i^2+t_i^2) \quad (1\leqslant i\leqslant 3)$$

et on a

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_3} & \frac{\partial f_2}{\partial t_3} & \frac{\partial f_3}{\partial t_3} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2t_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2t_3 \end{pmatrix} = -2^3t_1t_2t_3.$$

On utilise ici le calcul de l'intégrale suivante

$$\int_0^{\sqrt{A}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{A-s^2}} = \frac{\pi}{2}. \tag{1.5.35}$$

En substituant $t_i = \sqrt{d_i^{-1}F_i(\mathbf{x})-s_i^2}$, on obtient finalement

$$\omega_{\mathcal{R}}^+(\infty) = 2^{-3}\int_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant 3}\int_0^{\sqrt{d_i^{-1}F_i(\mathbf{x})}} \frac{\mathrm{d}s_i}{\sqrt{d_i^{-1}F_i(\mathbf{x})-s_i^2}}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

soit

$$\omega_{\mathcal{R}}(\infty) = \pi^3\mathrm{vol}(\mathcal{R}).$$

Cela achève la preuve du Théorème 1.2.3.

1.6 Démonstration du Théorème 1.1.1

1.6.1 Passage aux torseurs et reformulation du problème de comptage

On note dans la suite Z^m l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{Z}^m$ premiers entre eux dans leur ensemble. On introduit également la norme de $\mathbf{R}^5$ suivante

$$\| \mathbf{x} \| = \max \left\{ |x_0|, |x_1|, |x_2|, \delta^{-1}|x_3|, \delta^{-1}|x_4| \right\}, \tag{1.6.36}$$

où

$$\delta = \sqrt{(|a_1| + |b_1|)(|a_2| + |b_2|)(|a_3| + |b_3| + |c_3|)}. \tag{1.6.37}$$

On introduit la hauteur exponentielle sur $\mathbf{P}^4(\mathbf{Q})$, associée à la norme définie en (1.6.36), définie par

$$H_4 : \begin{cases} \mathbf{P}^4(\mathbf{Q}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_*^+ \\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] & \longmapsto & \| (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \| \end{cases}$$

avec $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ choisi de telle sorte que les x_i soient des entiers premiers entre eux. On introduit aussi $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}} \subset \mathbf{A}^5_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}[y, z, t, u, v])$ le sous-schéma définie par l'équation

$$y^2 + z^2 = t^2 F_1(u, v) F_2(u, v) F_3(u, v) \tag{1.6.38}$$

avec les conditions $(y, z, t) \neq 0$ et $(u, v) \neq 0$. Il s'agit d'un $\mathbf{G}_m^2$-torseur pour S [BBP12, Définition 4.1]. On pose

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbf{N} \quad | \quad p|d \Rightarrow p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)\}.$$

Lorsque $d_0 \in \mathcal{D}$, alors tous les diviseurs de d_0 sont aussi dans l'ensemble $\mathcal{D}$. On introduit ensuite

$$r(n; m) = \#\{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \quad | \quad n = a^2 + b^2, \quad (m, a, b) = 1\}.$$

On a alors clairement $r(n; 1) = r(n)$ et on remarque que $r(y^2 n; y) = 0$ si $y \notin \mathcal{D}$.
Utilisant une inversion de Möbius pour traiter la condition de coprimalité, on aboutit, pour $y \in \mathcal{D}$, à la formule suivante

$$r(y^2 n; y) = \sum_{k|y} \mu(k) r\left(\frac{y^2 n}{k^2}\right). \tag{1.6.39}$$

Enfin, considérant l'ensemble

$$\Sigma := \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, +1\}^3 \quad | \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_1 = 1 \right\} \tag{1.6.40}$$

et pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma$ et $T \geqslant 1$ la région

$$R^{\boldsymbol{\varepsilon}}(T) = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 \quad \middle| \quad \begin{array}{c} |u|, |v| \leqslant \sqrt{T}, \\ \varepsilon_i F_i(u, v) > 0 \end{array} \right\},$$

on en déduit le lemme suivant.

Lemme 1.6.1. *On a $N(B) = N_1(B) + O(B)$ où*

$$N_1(B) = \sum_{k \in \mathcal{D}} \mu(k) \sum_{\substack{\ell \leqslant B/k \\ \ell \in \mathcal{D}}} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma} \sum_{(u,v) \in Z^2 \cap R^{\boldsymbol{\varepsilon}}(B/k\ell)} r\left(\ell^2 F_1^+(u, v) F_2^+(u, v) F_3^+(u, v)\right),$$

où l'on note $F_i^+ = \varepsilon_i F_i$.

Démonstration– Le lemme 2 de [Bro10] nous garantit que $N(B) = \frac{1}{4}T(B)$ avec

$$T(B) = \#\left\{(y,z,t;u,v) \in Z^3 \times Z^2 \quad \middle| \quad \begin{array}{l} \| (v^2t, uvt, u^2t, y, z)) \| \leqslant B, \\ y^2 + z^2 = t^2F(u,v) \end{array} \right\}.$$

Puisque pour un $(y,z,t;u,v)$ compté, on a

$$\| (v^2t, uvt, u^2t, y, z)) \| = \max\{u^2, v^2\}|t|,$$

on en déduit, par symétrie sur le signe de t, que

$$N(B) = \frac{1}{2}\#\left\{(y,z,t;u,v) \in (Z^3 \times Z^2) \cap \mathcal{T}_{\text{spl}} \quad | \quad 0 < \max\{u^2, v^2\}t \leqslant B\right\}.$$

Un raisonnement élémentaire montre que la contribution des (u,v) tels que

$$F_1(u,v)F_2(u,v)F_3(u,v) = 0$$

est $O(1)$ ce qui permet d'écrire $N(B) = N_1(B) + O(B)$ avec

$$N_1(B) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{t \leqslant B \\ t \in \mathcal{D}}} \sum_{\substack{\varepsilon_i \in \{-1,+1\} \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1}} \sum_{(u,v) \in Z^2 \cap R^{\boldsymbol{\varepsilon}}(B/t)} r(t^2F_1(u,v)F_2(u,v)F_3(u,v);t).$$

En posant $k\ell = t$, la formule (1.6.39) fournit par conséquent que $N_1(B)$ est égal à

$$\frac{1}{2}\sum_{k \in \mathcal{D}} \mu(k) \sum_{\substack{\ell \leqslant B/k \\ \ell \in \mathcal{D}}} \sum_{\substack{\varepsilon_i \in \{-1,+1\} \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1}} \sum_{(u,v) \in Z^2 \cap R^{\boldsymbol{\varepsilon}}(B/k\ell)} r\left(\ell^2F_1^+(u,v)F_2^+(u,v)F_3^+(u,v)\right).$$

On en déduit alors immédiatement la formule donnée dans l'énoncé du lemme avec $\varepsilon_1 = 1$. Le passage à la somme sur $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma$ sera utile en section 1.7 puisque l'ensemble Σ sera utilisé pour décrire certaines classes d'isomorphie de torseurs. □

Dans la suite, on notera pour éviter d'alourdir les notations

$$\omega(\text{pgcd}(a_0, \ldots, a_n)) = \omega(a_0, \ldots, a_n).$$

L'idée est maintenant de passer d'un problème de comptage sur $\mathcal{T}_{\text{spl}}$ à un problème de comptage sur des variétés affines de $\mathbf{A}^8$ de la forme (1.2.5), autrement dit d'exprimer le problème de comptage sur certains torseurs qui seront explicités en section 1.7. On introduit pour ce faire, lorsque $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$, $d = d_1d_2d_3$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ et $\mathbf{d}' = (d_1', d_2', d_3')$, les notations

$$c(d, \mathbf{n}) = 3^{\omega(d,n_1,n_2,n_3)} \times \prod_{\substack{\{i,j,k\} = \{1,2,3\} \\ i<j}} 2^{\omega(d,n_i,n_j) - \omega(d,n_i,n_j,n_k)}$$

et

$$c'(\mathbf{d}, \mathbf{d}', \mathbf{n}) = c(d, \mathbf{n}) \times 2^{\omega(d_1'd_2', n_1/d_1, n_2/d_2)}.$$

On a alors le lemme suivant où on rappelle qu'on note $r_0 = \frac{r}{4}$.

Lemme 1.6.2. *Soient n_0, n_1, n_2 et n_3 quatre entiers supérieurs ou égaux à 1 avec $n_0 \in \mathcal{D}$. On a alors la formule suivante*

$$r_0(n_0n_1n_2n_3) = \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3\\ d_1d_2d_3|n_0, d_id'_jd'_k|n_i}} \sum_{m_i|C(n_i)} \frac{\mu(d_1d_2d_3)\mu(d'_1d'_2)\mu(d'_3)}{c'(\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{n})} r_0\left(\frac{n_0}{d_1d_2d_3}\right)$$
$$\times r_0\left(\frac{n_1}{d_1d'_2d'_3m_1}\right) r_0\left(\frac{n_2}{d_2d'_1d'_3m_2}\right) r_0\left(\frac{n_3}{d_3d'_1d'_2m_3}\right),$$

où $\{i,j,k\}$ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$ et où

$$C(n_i) = \prod_{\substack{p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\\ \nu_p(n_i)\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\\ \nu_p(n_1n_2n_3)\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)}} p. \tag{1.6.41}$$

Démonstration– Utilisant la formule d'éclatement pour deux entiers (voir par exemple [BB10, lemme 10]), on obtient

$$r_0(n_0n_1n_2n_3) = \sum_{d|(n_1n_2n_3,n_0)} \mu(d) r_0\left(\frac{n_0}{d}\right) r_0\left(\frac{n_1n_2n_3}{d}\right).$$

Dans la somme, les entiers d sont sans facteur carré et dans $\mathcal{D}$ lorsque $n_0 \in \mathcal{D}$. On compte alors le nombre de décompositions $d = d_1d_2d_3$ avec $d_1|n_1$, $d_2|n_2$ et $d_3|n_3$. Posant

$$N(d,\mathbf{n}) = \#\left\{(d_1,d_2,d_3)\in\mathbf{N}^3 \quad | \quad d_i|n_i, \quad \text{et} \quad d = d_1d_2d_3\right\}$$

le nombre de telles décompositions, on a l'égalité $c(d,\mathbf{n}) = N(d,\mathbf{n})$, lorsque d est sans facteur carré. En effet, $c(\,\cdot\,,\mathbf{n})$ et $N(\,\cdot\,,\mathbf{n})$ sont deux fonctions multiplicatives. Il suffit donc de montrer qu'elles coïncident sur les nombres premiers. Soit alors p un nombre premier. Dans le cas où $p|n_1n_2n_3$, on a clairement

$$N(p,\mathbf{n}) = \#\{i \mid p|n_i\} = c(p,\mathbf{n}).$$

Cela permet bien de conclure à l'égalité souhaitée. On a par conséquent

$$r_0(n_0n_1n_2n_3) = \sum_{\substack{d_1d_2d_3|n_0\\ d_1|n_1, d_2|n_2, d_3|n_3}} \frac{\mu(d_1d_2d_3)}{c(d,\mathbf{n})} r_0\left(\frac{n_0}{d_1d_2d_3}\right) r_0\left(\frac{n_1}{d_1}\frac{n_2}{d_2}\frac{n_3}{d_3}\right).$$

Posant

$$n_i^{(1)} = \prod_{p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)} p^{\nu_p(n_i)}, \quad n_i^{(3)} = \prod_{p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)} p^{\nu_p(n_i)},$$

on a par multiplicativité,

$$r_0\left(\frac{n_1}{d_1}\frac{n_2}{d_2}\frac{n_3}{d_3}\right) = r_0\left(\frac{n_1^{(1)}}{d_1}\frac{n_2^{(1)}}{d_2}\frac{n_3^{(1)}}{d_3}\right) r_0\left(n_1^{(3)}n_2^{(3)}n_3^{(3)}\right). \tag{1.6.42}$$

On utilise alors la formule d'éclatement pour trois entiers donnée par le lemme 9 de [BBP12] pour le premier terme du membre de droite de (1.6.42) :

$$r_0\left(\frac{n_1^{(1)}}{d_1}\frac{n_2^{(1)}}{d_2}\frac{n_3^{(1)}}{d_3}\right) = \sum_{\substack{d'_id'_j|n_k/d_k\\ d'_i\in\mathcal{D}}} \frac{\mu(d'_1)\mu(d'_2d'_3)}{2^{\omega(d'_2,n_2/d_2)+\omega(d'_3,n_3/d_3)}}$$
$$\times r_0\left(\frac{n_1^{(1)}}{d_1d'_2d'_3}\right) r_0\left(\frac{n_2^{(1)}}{d_2d'_1d'_3}\right) r_0\left(\frac{n_3^{(1)}}{d_3d'_1d'_2}\right).$$

Concernant le deuxième terme du membre de droite de (1.6.42), en remarquant que r_0 ne prend que les valeurs 0 ou 1 sur des entiers n'ayant que des facteurs premiers congrus à 3 modulo 4, on a les égalités

$$\begin{aligned} r_0\left(n_1^{(3)}n_2^{(3)}n_3^{(3)}\right) &= r_0\left(\frac{n_1^{(3)}}{C(n_1)}\right) r_0\left(\frac{n_2^{(3)}}{C(n_2)}\right) r_0\left(\frac{n_3^{(3)}}{C(n_3)}\right) \\ &= \sum_{m_i|C(n_i)} r_0\left(\frac{n_1^{(3)}}{m_1}\right) r_0\left(\frac{n_2^{(3)}}{m_2}\right) r_0\left(\frac{n_3^{(3)}}{m_3}\right). \end{aligned}$$

La seconde égalité découle du fait que pour tout m_i divisant strictement $C(n_i)$, on a

$$r_0\left(\frac{n_1^{(3)}}{m_1}\right) r_0\left(\frac{n_2^{(3)}}{m_2}\right) r_0\left(\frac{n_3^{(3)}}{m_3}\right) = 0.$$

En regroupant les facteurs par multiplicativité, on obtient bien la formule souhaitée. □

On note dans la suite

$$F_{i,e} = eF_i^+ = e\varepsilon_i F_i \quad \text{et} \quad F_{3,e} = e^2F_3^+ = e^2\varepsilon_3 F_3,$$

pour tout entier naturel e. On introduit également

$$\Delta_{ij}^{(1)} = \prod_{\substack{p|\Delta_{ij} \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)}} p \quad \text{et} \quad \Delta_{ij}^{(3)} = \prod_{\substack{p|\Delta_{ij} \\ p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)}} p \tag{1.6.43}$$

et l'ensemble

$$M = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbf{N}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} m_i \,\Big|\, \left[\Delta_{ij}^{(3)}, \Delta_{ik}^{(3)}\right], (m_i, m_j)|\Delta_{ij}^{(3)} \\ \mu^2(m_i) = 1,\ \sqrt{m_1m_2m_3} \in \mathbf{N} \end{array}, \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \right\}. \tag{1.6.44}$$

Posant $\mathcal{R} = R^\varepsilon(1)$ et pour $d \in \mathbf{N}$ fixé,

$$f_d(n) = \sum_{sk=n} \mu(k) r(ds^2), \tag{1.6.45}$$

on déduit alors des Lemmes 1.6.1 et 1.6.2 le lemme suivant.

Lemme 1.6.3. *Avec les notations (1.2.4) et (1.6.40), on a*

$$\begin{aligned} N_1(B) = \frac{1}{2^6} \sum_{\substack{e\geqslant 1 \\ d\in\mathcal{D}}} \mu(e)\mu(d) \sum_{\substack{n\leqslant N \\ n\in\mathcal{D}}} f_d(n) \sum_{\varepsilon\in\Sigma} \sum_{\substack{k_4k_1k_1'|\gcd(\Delta_{23},d) \\ k_4k_2k_2'|\gcd(\Delta_{13},d) \\ k_4k_3k_3'|\gcd(\Delta_{12},d)}} \sum_{\substack{k_4k_4'|\gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d) \\ k_5k_5'|\Delta_{12}}} \\ \times \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}} \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3 \\ d=d_1d_2d_3, d_i'|\Delta_{jk} \\ k_5k_5'|d_1'd_2'}} \sum_{\mathbf{m}\in M} \mu(d_1'd_2')\mu(d_3') S\left(\sqrt{\frac{B}{de^2n}}, \mathbf{e}, \mathbf{E}\right), \end{aligned}$$

où $N = \frac{\delta B}{d^{5/4}e}$ *et*

$$S(e^{-1}\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E}) = S(e^{-1}\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E}; R^\varepsilon, F_{1,e}, F_{2,e}, F_{3,e})$$

pour $T \geqslant 1$ *et avec*

$$\begin{aligned} e_1 &= d_1 d_2' d_3' m_1, \quad e_2 = d_2 d_1' d_3' m_2, \quad e_3 = d_3 d_1' d_2' m_3, \\ E_1 &= [e_1, k_4 k_2 k_2', k_4 k_3 k_3', k_4 k_4', d_1 k_5 k_5'], \\ E_2 &= [e_2, k_4 k_1 k_1', k_4 k_3 k_3', k_4 k_4', d_2 k_5 k_5'], \\ E_3 &= [e_3, k_4 k_1 k_1', k_4 k_2 k_2', k_4 k_4']. \end{aligned} \tag{1.6.46}$$

Démonstration.– Pour (u, v) premiers entre eux, on a

$$\operatorname{pgcd}(F_i(u,v), F_j(u,v)) | \Delta_{ij}. \tag{1.6.47}$$

Or, grâce au Lemme 1.6.2, on obtient, pour $r\left(\ell^2 F_1^+(u,v) F_2^+(u,v) F_3^+(u,v)\right)$, l'expression suivante

$$\frac{1}{2^6} \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}' \in \mathcal{D}^3 \\ d_1 d_2 d_3 | \ell^2, d_i d_j' d_k' | F_i(u,v)}} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in M \\ m_i | F_i(u,v)}} \frac{\mu(d_1 d_2 d_3) \mu(d_1' d_2') \mu(d_3')}{c'(\mathbf{d}, \mathbf{d}', F_1^+(u,v), F_2^+(u,v), F_3^+(u,v))}$$
$$\times\, r\left(\frac{\ell^2}{d_1 d_2 d_3}\right) r\left(\frac{F_1^+(u,v)}{e_1}\right) r\left(\frac{F_2^+(u,v)}{e_2}\right) r\left(\frac{F_3^+(u,v)}{e_3}\right),$$

En effet, par (1.6.47), un triplet $\mathbf{m}$ tel que $m_i | C(F_i(u,v))$ avec la notation (1.6.41), est dans M. Par ailleurs, pour un triplet $\mathbf{m} \in M$ tel que $m_i | F_i(u,v)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$ mais $m_j \nmid C(F_j(u,v))$ pour un certain j, alors

$$r\left(\frac{F_1^+(u,v)}{d_1 d_2' d_3' m_1}\right) r\left(\frac{F_2^+(u,v)}{d_2 d_1' d_3' m_2}\right) r\left(\frac{F_3^+(u,v)}{d_3 d_1' d_2' m_3}\right) = 0.$$

L'entier $d = d_1 d_2 d_3$ divise ℓ et est donc nécessairement dans $\mathcal{D}$. On écrit alors $\ell = ds$ et on obtient grâce au Lemme 1.6.1

$$N_1(B) = \frac{1}{2^6} \sum_{\substack{dk \leqslant B \\ k, d \in \mathcal{D}}} \mu(d)\mu(k) \sum_{\substack{s \leqslant \frac{B}{dk} \\ s \in \mathcal{D}}} r(ds^2) \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}' \in \mathcal{D}^3 \\ d = d_1 d_2 d_3}} \sum_{\mathbf{m} \in M} \mu(d_1' d_2') \mu(d_3') \mathcal{S}_{\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{m}}\left(\frac{B}{dsk}\right)$$

où, pour $T \geqslant 1$, on a posé

$$\mathcal{S}_{\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{m}}(T) = \sum_{\varepsilon \in \Sigma} \sum_{\substack{(u,v) \in Z^2 \cap R^\varepsilon(T) \\ e_1 | F_1(u,v), e_2 | F_2(u,v), \\ e_3 | F_3(u,v)}} \frac{r\left(\frac{F_1^+(u,v)}{e_1}\right) r\left(\frac{F_2^+(u,v)}{e_2}\right) r\left(\frac{F_3^+(u,v)}{e_3}\right)}{c'(\mathbf{d}, \mathbf{d}', F_1^+(u,v), F_2^+(u,v), F_3^+(u,v))}.$$

Avec la notation (1.6.45) et grâce à (1.6.47), on aboutit à la formule

$$N_1(B) = \frac{1}{2^6} \sum_{\substack{dn \leqslant B \\ dn \in \mathcal{D}}} \mu(d) f_d(n) \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}' \in \mathcal{D}^3 \\ d = d_1 d_2 d_3, d_j' | \Delta_{ik}}} \sum_{\mathbf{m} \in M} \mu(d_1' d_2') \mu(d_3') \mathcal{S}_{\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{m}}\left(\frac{B}{dn}\right).$$

On obtient alors en utilisant à nouveau (1.6.47)

$$\mathcal{S}_{\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{m}}(T) = \sum_{\varepsilon \in \Sigma} \sum_{\substack{k_1 k_4 | \gcd(\Delta_{23}, d) \\ k_2 k_4 | \gcd(\Delta_{13}, d) \\ k_3 k_4 | \gcd(\Delta_{12}, d)}} \sum_{\substack{k_4 | \gcd(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23}, d) \\ k_5 | \gcd(\Delta_{12}, d_1' d_2')}} \frac{1}{3^{\omega(k_4)} 2^{\omega(k_5) + \omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3)}}$$
$$\times \sum_{\substack{(u,v) \in Z^2 \cap R^\varepsilon(T) \\ e_1 | F_1(u,v), e_2 | F_2(u,v) \\ e_3 | F_3(u,v)}} r\left(\frac{F_1^+(u,v)}{e_1}\right) r\left(\frac{F_2^+(u,v)}{e_2}\right) r\left(\frac{F_3^+(u,v)}{e_3}\right),$$

où la somme intérieure porte sur les couples (u,v) tels que

$$\begin{cases} k_1 = \gcd(d, F_2(u,v), F_3(u,v))/\gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)), \\ k_2 = \gcd(d, F_1(u,v), F_3(u,v))/\gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)), \\ k_3 = \gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v))/\gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)), \\ k_4 = \gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)), \\ k_5 = \gcd(d_1'd_2', F_1(u,v)/d_1, F_2(u,v)/d_2). \end{cases} \tag{1.6.48}$$

Plusieurs inversions de Möbius fournissent alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{m}}(T) = & \sum_{\varepsilon\in\Sigma} \sum_{\substack{k_4k_1k_1' \mid \gcd(\Delta_{23},d) \\ k_4k_2k_2' \mid \gcd(\Delta_{13},d) \\ k_4k_3k_3' \mid \gcd(\Delta_{12},d)}} \sum_{\substack{k_4k_4' \mid \gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d) \\ k_5k_5' \mid \gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}} \\ & \times \sum_{\substack{(u,v)\in Z^2\cap R^\varepsilon(T) \\ e_1\mid F_1(u,v), e_2\mid F_2(u,v) \\ e_3\mid F_3(u,v)}} r\left(\frac{F_1^+(u,v)}{e_1}\right) r\left(\frac{F_2^+(u,v)}{e_2}\right) r\left(\frac{F_3^+(u,v)}{e_3}\right), \end{aligned}$$

où la somme intérieure porte désormais sur les couples (u,v) tels que

$$\begin{cases} k_4k_1k_1' \mid \gcd(d, F_2(u,v), F_3(u,v)), \\ k_4k_2k_2' \mid \gcd(d, F_1(u,v), F_3(u,v)), \\ k_4k_3k_3' \mid \gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v)), \\ k_4k_4' \mid \gcd(d, F_1(u,v), F_2(u,v), F_3(u,v)), \\ k_5k_5' \mid \gcd(d_1'd_2', F_1(u,v)/d_1, F_2(u,v)/d_2). \end{cases} \tag{1.6.49}$$

On a $(\mathbf{e},\mathbf{E}) \in \mathfrak{D}$ et on peut alors réécrire cette somme sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbf{d},\mathbf{d}',\mathbf{m}}(T) = & \sum_{\varepsilon\in\Sigma} \sum_{\substack{k_4k_1k_1' \mid \gcd(\Delta_{23},d) \\ k_4k_2k_2' \mid \gcd(\Delta_{13},d) \\ k_4k_3k_3' \mid \gcd(\Delta_{12},d)}} \sum_{\substack{k_4k_4' \mid \gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d) \\ k_5k_5' \mid \gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}} \\ & \times \sum_{(u,v)\in Z^2\cap\sqrt{T}R^\varepsilon(1)\cap\Lambda(\mathbf{E})} r\left(\frac{F_1^+(u,v)}{e_1}\right) r\left(\frac{F_2^+(u,v)}{e_2}\right) r\left(\frac{F_3^+(u,v)}{e_3}\right). \end{aligned} \tag{1.6.50}$$

Reste encore à supprimer la condition de coprimalité sur les couples (u,v) au moyen d'une dernière inversion de Möbius. Avec la notation (1.2.4), la somme intérieure de (1.6.50) est alors égale à

$$\sum_{e=1}^{+\infty} \mu(e) S(e^{-1}\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E}).$$

On obtient ainsi le lemme avec $N = \frac{B}{de^2}$. Mais on peut remarquer que $S\left(\sqrt{\frac{B}{de^2n}}, \mathbf{e}, \mathbf{E}\right)$ est nulle si l'on n'a pas

$$d_1 \leqslant (|a_1| + |b_1|)\sqrt{\frac{B}{dn}},\ d_2 \leqslant (|a_2| + |b_2|)\sqrt{\frac{B}{dn}} \text{ et } d_3 \leqslant (|a_3| + |b_3| + |c_3|)\frac{B}{dn}.$$

En effet, on a par exemple

$$F_{1,e}(u,v) \leqslant (|a_1|+|b_1|)e\max\{|u|,|v|\} \leqslant (|a_1|+|b_1|)\sqrt{\frac{B}{dn}}$$

dans la région considérée. Avec la notation (1.6.37), on a donc en réalité que

$$d^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta B^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6.51}$$

Mais pour que $S\left(\sqrt{\frac{B}{de^2n}},\mathbf{e},\mathbf{E}\right)$ soit non nulle, il faut aussi imposer $de^2n \leqslant B$ et par conséquent, $d^{\frac{1}{2}}en^{\frac{1}{2}} \leqslant B^{\frac{1}{2}}$, ce qui, combiné avec l'inégalité (1.6.51), implique l'inégalité

$$d^{\frac{5}{4}}en \leqslant \delta B$$

et démontre bien le lemme énoncé. □

1.6.2 Fin de la preuve du Théorème 1.1.1

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 1.6.1. *Lorsque $B \to +\infty$, on a*

$$N(B) = c_0 B\log(B)(1+o(1)),$$

avec

$$c_0 = \frac{\pi^2}{2^4}\sum_{e=1}^{+\infty}\frac{\mu(e)}{e^2}\sum_{d\in\mathcal{D}}\frac{\mu(d)r_0(d)\varphi^\dagger(d)}{d}\sum_{\varepsilon\in\Sigma}\mathrm{vol}\,(R^\varepsilon(1))\sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3\\ d=d_1d_2d_3,d_i'|\Delta_{jk}}}\sum_{\mathbf{m}\in M}\mu(d_1'd_2')\mu(d_3')$$
$$\times\sum_{\substack{k_4k_1k_1'|\gcd(\Delta_{23},d)\\ k_4k_2k_2'|\gcd(\Delta_{13},d)\\ k_4k_3k_3'|\gcd(\Delta_{12},d)}}\sum_{\substack{k_4k_4'|\gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d)\\ k_5k_5'|\gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}}\frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}}\sigma^\varepsilon(\mathbf{e},\mathbf{E},e),$$

avec

$$\sigma^\varepsilon(\mathbf{e},\mathbf{E},e) := \prod_p \sigma_p^\varepsilon(\mathbf{e},\mathbf{E},e), \tag{1.6.52}$$

où

$$\sigma_p^\varepsilon(\mathbf{e},\mathbf{E},e) = \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^3\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3}\frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\rho\left(p^{N_1},p^{N_2},p^{N_3}\right)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}},$$

$N_i = \max\{\nu_p(E_i),\nu_i+\nu_p(e_i)\}$ *et*

$$\sigma_2^\varepsilon(\mathbf{e},e) = 8\lim_{n\to+\infty}2^{-2n}\#\left\{\mathbf{x}\in(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \;\middle|\; e^{\deg(F_i)}F_i(\mathbf{x})\in\varepsilon_i m_i\mathcal{E}_{2^n}\right\}.$$

La fin de cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. Il permet de démontrer le Théorème 1.1.1 modulo le fait que la constante c_0 soit bien la constante conjecturée par Peyre, ce qui fera l'objet de la section suivante. On utilise évidemment le Théorème 1.2.2 pour estimer la somme

$$S(\sqrt{T},\mathbf{e},\mathbf{E}) = S(\sqrt{T},\mathbf{e},\mathbf{E};\mathcal{R},F_{1,e},F_{2,e},F_{3,e})$$

et obtenir le lemme suivant.

Lemme 1.6.4. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $r'(\sqrt{T})^{1-\varepsilon} \geqslant 1$. On a alors avec les notations du Théorème 1.6.1*

$$S(\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E}) = \pi^3 \mathrm{vol}(R^\varepsilon(1)) T \prod_p \sigma_p^\varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{E}, e) + O_{\varepsilon, F_{i,e}}\left(\frac{T}{(\log(T))^{\eta-\varepsilon}}\right).$$

De plus, on a

$$\sigma^\varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{E}, e) \ll (de)^\varepsilon a'(\mathbf{E}, \mathbf{\Delta}),$$

uniformément en tous les paramètres $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}'$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, ε_i, e, $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$ *et* d.

On raisonne alors comme dans la preuve du lemme 9 de [BB10] afin d'obtenir une majoration uniforme de $S(\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E})$ mis à part qu'on utilise une majoration différente pour la quantité $\det(G_f(\mathcal{A}))$ qui y apparaît. On remarque ici qu'il faut bien faire attention au fait qu'on travaille avec les formes $F_{i,e}$ et qu'on a notamment une dépendance des coefficients en la variable e. On a ainsi le lemme suivant.

Lemme 1.6.5. *Pour $T \geqslant 1$ et $(\mathbf{e}, \mathbf{E}) \in \mathfrak{D}$, on a*

$$\begin{aligned} S(\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E}) \ll & c(F_1)c(F_2)c(F_3)(\Delta^*)^3 (deL_\infty)^\varepsilon \gcd(d, e) a'(\mathbf{E}, \mathbf{\Delta}) \\ & \times \left(r_\infty(R^\varepsilon(1))^2 \frac{T}{d} + r_\infty(R^\varepsilon(1))^{1+\varepsilon} T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

où l'on note $c(P)$ le contenu d'un polynôme à coefficients entiers.

Démonstration.– On raisonne ici comme dans la section 6 de [BB10]. Avec les notations (1.2.6), on pose

$$E_i'' = \frac{E_i}{\gcd(E_i', b)\gcd(E_i, e\ell_i)} \quad \text{et} \quad E_3'' = \frac{E_3}{\gcd(E_3', b^2)\gcd(E_3, e^2\ell_3)}.$$

Des calculs élémentaires garantissent qu'on a

$$E'' = E_1'' E_2'' E_3'' \geqslant \frac{E}{\gcd(E_1, be\ell_1)\gcd(E_2, be\ell_2)\gcd(E_3, b^2e^2\ell_3)}.$$

Mais revenant à la définition de $\frac{E_1}{\gcd(E_1, be\ell_1)}$, on obtient avec la notation du Lemme 1.4.2

$$\frac{E_1}{\gcd(E_1, be\ell_1)} \geqslant \frac{1}{\Delta^*} \frac{d_1}{\gcd(d_1, be\ell_1)}.$$

En procédant de la même façon avec les indices 2 et 3, on aboutit finalement à l'inégalité

$$E'' \geqslant \frac{1}{(\Delta^*)^3} \frac{d}{\gcd(d_1, be\ell_1)\gcd(d_2, be\ell_2)\gcd(d_3, b^2e^2\ell_3)}.$$

On obtient alors

$$E'' \geqslant \frac{1}{c(F_1)c(F_2)c(F_3)(\Delta^*)^3} \frac{d}{\gcd(d_1, be)\gcd(d_2, be)\gcd(d_3, b^2e^2)}.$$

Puisque $d = d_1d_2d_3$ est sans facteur carré, d_3 l'est aussi et donc

$$E'' \geqslant \frac{1}{c(F_1)c(F_2)c(F_3)(\Delta^*)^3} \frac{d}{\gcd(d_1, be)\gcd(d_2, be)\gcd(d_3, be)}.$$

Pour finir, on utilise le fait que

$$\gcd(d_1, be)\gcd(d_2, be)\gcd(d_3, be) = \gcd(d_1d_2d_3, be) = \gcd(d, be).$$

pour conclure à l'inégalité

$$E'' \geqslant \frac{1}{c(F_1)c(F_2)c(F_3)(\Delta^*)^3}\frac{d}{\gcd(d, be)}.$$

Cela permet de finir la démonstration du lemme exactement comme dans le lemme 9 de [BB10]. □

On a ensuite besoin de quelques résultats issus de [BB12, lemme 14] concernant la fonction f_d définie en (1.6.45) pour $d \in \mathcal{D}$. Si $d \in \mathcal{D}$ est sans facteur carré, alors, pour $x \geqslant 2$, on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{D}}} \frac{f_d(n)}{n} = \frac{4r_0(d)\varphi^\dagger(d)}{\pi}\left(\log(x) + O\left(\log^3(2+\omega(d))\right)\right), \tag{1.6.53}$$

où

$$\varphi^\dagger(d) = \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $0 < \theta \leqslant 1$, on déduit de ces résultats la majoration

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{D}}} \frac{|f_d(n)|}{n^\theta} \leqslant x^{1-\theta}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\mathcal{D}}} \frac{|f_d(n)|}{n} \ll d^\varepsilon x^{1-\theta}\log(x). \tag{1.6.54}$$

On en déduit à présent que les surfaces de Châtelet considérées vérifient le principe de Manin. On utilise la formule asymptotique obtenue grâce au Théorème 1.2.2 de $S(\sqrt{T}, \mathbf{e}, \mathbf{E})$ dans l'expression de $N_1(B)$ que l'on a obtenue dans le Lemme 1.6.4. Pour pallier la non uniformité de cette estimation, on pose

$$\mathcal{U}(B) = \mathcal{U}^\varepsilon_{\mathbf{e},\mathbf{E},e}(B) = \sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\in\mathcal{D}}} f_d(n) S\left(\sqrt{\frac{B}{de^2n}}, \mathbf{e}, \mathbf{E}\right),$$

avec N défini lors du Lemme 1.6.3, de telle sorte que

$$N_1(B) = \frac{1}{2^6}\sum_{\substack{e\geqslant 1\\ d\in\mathcal{D}}} \mu(e)\mu(d)\sum_{\varepsilon\in\Sigma}\sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3\\ d=d_1d_2d_3, d_i'|\Delta_{jk}}}\sum_{\mathbf{m}\in M}\mu(d_1'd_2')\mu(d_3')$$
$$\times \sum_{\substack{k_4k_1k_1'|\gcd(\Delta_{23},d)\\ k_4k_2k_2'|\gcd(\Delta_{13},d)\\ k_4k_3k_3'|\gcd(\Delta_{12},d)}}\sum_{\substack{k_4k_4'|\gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d)\\ k_5k_5'|\gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}}\mathcal{U}(B).$$

Avec la notation (1.6.52), on introduit alors la quantité $E^\varepsilon(B; \mathbf{e}, \mathbf{E}, e)$ comme étant donnée par

$$\frac{1}{B\log(B)}\left|\mathcal{U}(B) - 4\pi^2\mathrm{vol}(R^\varepsilon(1))\sigma^\varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{E}, e)r_0(d)\varphi^\dagger(d)\frac{B\log(B)}{de^2}\right|.$$

Les résultats (1.6.53) et (1.6.54) impliquent que

$$E^\varepsilon(B; \mathbf{e}, \mathbf{E}, e) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

à $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}'$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, d et e fixés. Pour conclure, on souhaite appliquer un théorème de convergence dominée et il suffit donc de montrer la majoration

$$\sum_{\substack{e\geqslant 1\\ d\in\mathcal{D}}}\sum_{\varepsilon\in\Sigma}\sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3\\ d=d_1d_2d_3,d_i'|\Delta_{jk}}}\sum_{\mathbf{m}\in M}\sum_{\substack{k_4k_1k_1'|\gcd(\Delta_{23},d)\\ k_4k_2k_2'|\gcd(\Delta_{13},d)\\ k_4k_3k_3'|\gcd(\Delta_{12},d)}}\sum_{\substack{k_4k_4'|\gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d)\\ k_5k_5'|\gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} E^{\varepsilon}(B;\mathbf{e},\mathbf{E},e)\ll 1.$$

Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.6.6. *Pour tout $\varepsilon>0$, on a $|\sigma^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)|\ll d^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}e^{\varepsilon}$.*

Démonstration.– On procède en majorant chaque facteur eulérien dans la définition de $\sigma^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)$ en (1.6.52). Pour $p=2$, on peut majorer $\sigma_2^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)$ par 8. Pour les p impairs, on utilise la majoration donnée par le point $f)$ du Lemme 1.3.2. On a alors

$$\left|\sigma_p^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)\right|\ll\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3}(N_3+1)\frac{1}{p^{\frac{N_1}{3}+\frac{N_2}{3}+\frac{N_3}{6}}},$$

où les $N_i=\max\{\nu_p(E_i),\nu_i+\nu_p(e_i)\}$ ont été définis dans le Lemme 1.6.4. On tire alors parti du fait que d soit sans facteur carré. On note $d=d_1d_2d_3$ et $\delta_i=\nu_p(d_i)$ de sorte qu'on peut supposer $\delta_1+\delta_2+\delta_3=1$ lorsque $p|d$. De plus, par définition de E_i et N_i, on voit que $N_i\geqslant\nu_i+\delta_i$ et donc on a

$$\prod_{p|d}\left|\sigma_p^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)\right|\ll\prod_{p|d}p^{-\frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3}{6}}\prod_{p|d}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3}(N_3+1)\frac{1}{p^{\frac{\nu_1}{3}+\frac{\nu_2}{3}+\frac{\nu_3}{6}}}.$$

On a alors

$$\prod_{p|d}p^{-\frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3}{6}}=\prod_{p|d}p^{-\frac{1}{6}}=d^{-\frac{1}{6}}$$

puisque d est sans facteur carré. D'autre part,

$$\prod_{p|d}\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3}(N_3+1)\frac{1}{p^{\frac{\nu_1}{3}+\frac{\nu_2}{3}+\frac{\nu_3}{6}}}\ll d^{\varepsilon}\prod_{p|d}(1+\nu_p(d))\ll d^{\varepsilon}$$

et finalement

$$\prod_{p|d}\left|\sigma_p^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)\right|\ll d^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}.$$

□

En raisonnant alors comme dans la section 7 de [BB12] et en utilisant le Lemme 1.6.5, on obtient

$$E^{\varepsilon}(B;\mathbf{e},\mathbf{E},e)\ll(de)^{\varepsilon}\gcd(d,e)a'(\mathbf{E},\boldsymbol{\Delta})\left(\frac{1}{d^2e^2}+\frac{1}{d^{\frac{9}{8}}e^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{d^{\frac{5}{4}}e^2}\right),$$

soit

$$E^{\varepsilon}(B;\mathbf{e},\mathbf{E},e)\ll(de)^{\varepsilon}\gcd(d,e)a'(\mathbf{E},\boldsymbol{\Delta})\frac{1}{d^{\frac{9}{8}}e^{\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite, puisque $a'(\mathbf{E},\boldsymbol{\Delta})$ concerne les formes primitives, on n'a en réalité pas de dépendance en e et par définition de cette quantité en (1.2.7), on obtient que

$$a'(\mathbf{E},\boldsymbol{\Delta})\ll 1$$

où la constante est indépendante des paramètres de sommation. Enfin, le fait que

$$\sum_{e=1}^{+\infty}\sum_{d\in\mathcal{D}}(de)^{\varepsilon}\gcd(d,e)\frac{1}{d^{\frac{9}{8}}e^{\frac{3}{2}}}\ll 1.$$

pour ε assez petit nous autorise à appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir le Théorème 1.6.1 et ainsi achever la démonstration du principe de Manin pour les surfaces de Châtelet considérées.

1.7 La constante de Peyre

Pour conclure la démonstration du Théorème 1.1.1, il reste à montrer que la constante c_0 obtenue dans le Théorème 1.6.1 est en accord avec la conjecture de Peyre [Pey01, formule 5.1], puisqu'on peut montrer que les surfaces de Châtelet sont des variétés «presque de Fano» au sens de [Pey01, Définition 3.1]. On note c_S la constante conjecturée par Peyre. Suivant [Pey95] et [Sal98], on a

$$c_S=\alpha(S)\beta(S)\omega_H\left(S(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}(S)}\right),$$

où

$$\beta(S)=\#H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}),\mathrm{Pic}(\overline{S}))=\mathrm{Coker}\left(\mathrm{Br}(\mathbf{Q})\to\mathrm{Br}(S)\right),$$

$\alpha(S)$ est le volume d'un certain polytope dans le dual du cône effectif et $\omega_H\left(S(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}(S)}\right)$ est un nombre de Tamagawa.

1.7.1 Les facteurs $\alpha(S)$ et $\beta(S)$

Pour commencer, il est nécessaire de rappeler quelques éléments relatifs à la géométrie de S tirés de [CTSSD87a] et [CTSSD87b]. On considère $K=\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ le corps de décomposition de F ainsi que le corps biquadratique $L=\mathbf{Q}\left(\sqrt{\Delta},i\right)$. Si l'on note $\mathcal{G}=\mathrm{Gal}\left(L/\mathbf{Q}\right)$, on a clairement que $\mathcal{G}\cong(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ engendré par la conjugaison complexe σ et par τ, la conjugaison dans K. Enfin, pour toute extension k de $\mathbf{Q}$, on notera $S_k=S\times_{\mathbf{Q}}\mathrm{Spec}(k)$.

Sur $\overline{\mathbf{Q}}$, on écrit également [2] $F_3(u,v)=a(u+b_3'v)(u+b_4'v)$, avec $a\in\mathbf{Z}$ et b_3' et b_4' dans K tels que $\tau(b_3')=b_4'$. En particulier, si l'on définit

$$\Delta_{34}=a(b_4'-b_3')\neq 0, \tag{1.7.55}$$

on a $\tau(\Delta_{34})=-\Delta_{34}$. Sur L, la surface S_L admet 10 diviseurs exceptionnels qui sont des courbes d'auto-intersection négative. Huit d'entre elles sont d'auto-intersection -1 et sont données pour $j\in\{1,2\}$ par

$$D_j^+:\quad u=-b_j,\quad x+iy=0;\qquad D_j^-:\quad u=-b_j,\quad x-iy=0$$

et pour $k\in\{3,4\}$ par

$$D_k^+:\quad u=-b_k',\quad x+iy=0;\qquad D_k^-:\quad u=-b_k',\quad x-iy=0$$

tandis que les deux dernières sont d'auto-intersection -2 et sont données par

$$E^+:\quad t=0,\quad x+iy=0;\qquad E^-:\quad t=0,\quad x-iy=0.$$

2. Noter ici qu'une légère modification est apportée par rapport à la publication [Des16b] dans laquelle le raisonnement n'était exact que dans le cas d'une forme quadratique unitaire.

On a également

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}(S_L) &= \langle [E^{\pm}], [D_i^{\pm}] \mid i \in \{1,2,3,4\}\rangle \\ &= \langle [E^+], [D_1^+], [D_2^+], [D_3^+], [D_4^+], [D_1^-]\rangle \cong \mathbf{Z}^6\end{aligned}$$

avec les relations

$$[D_i^+] + [D_i^-] = [D_j^+] + [D_j^-] \tag{1.7.56}$$

pour $i, j \in \{1,2,3,4\}$ et

$$[E^+] + [D_i^+] + [D_j^+] = [E^-] + [D_\ell^-] + [D_m^-] \tag{1.7.57}$$

pour $\{i,j,\ell,m\} = \{1,2,3,4\}$ et on rappelle que la formule d'adjonction fournit la relation

$$\omega_S^{-1} = 2E^+ + \sum_{i=1}^{4} D_i^+ = 2E^- + \sum_{i=1}^{4} D_i^-. \tag{1.7.58}$$

Or, $\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}}) \cong \mathrm{Pic}(S_L)$ et $\mathrm{Pic}(S) = (\mathrm{Pic}(S_L))^{\mathcal{G}}$ puisque $S(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$. Décrivons alors l'action de $\mathcal{G}$ sur le groupe de Picard géométrique. On a

$$\sigma(E^+) = E^-; \qquad \sigma(D_i^+) = D_i^-$$

pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ lorsque $\Delta > 0$ tandis qu'on a

$$\sigma(E^+) = E^-;\ \forall i \in \{1,2\},\ \ \sigma(D_i^+) = D_i^-;\ \sigma(D_3^+) = D_4^- \text{ et } \sigma(D_3^-) = D_4^+$$

et

$$\tau(D_3^+) = D_4^+; \qquad \tau(D_3^-) = D_4^-$$

les autres éléments étant fixés. On en déduit les lemmes suivants.

Lemme 1.7.1. *On a* $\mathrm{Pic}(S) = \langle [\omega_S^{-1}], [D_1^+] + [D_1^-]\rangle$.

Démonstration.– Soit $D = a[D_1^+] + b[D_2^+] + c[D_3^+] + d[D_4^+] + e[E^+] + f[D_1^-]$ un élément de $\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})$. On a que $D \in \mathrm{Pic}(S)$ si, et seulement si $\sigma(D) = \tau(D) = D$, soit si, et seulement si,

$$\begin{aligned}D = &(b+c+d-e)([D_1^+] + [D_1^-]) + f[D_1^+] + (a-e)[D_1^-] \\ &+ (e-b)[D_2^+] + (e-c)[D_3^+] + (e-d)[D_4^+] + e[E^+]\end{aligned}$$

et $D = a[D_1^+] + b[D_2^+] + d[D_3^+] + c[D_4^+] + e[E^+] + f[D_1^-]$ (ce qui implique notamment $c = d$). Comme $[D_1^+] + [D_1^-] \in \mathrm{Pic}(S)$, on en déduit que $D \in \mathrm{Pic}(S)$ si, et seulement si

$$\begin{aligned}\sigma\left(D - (b+c+d-e)([D_1^+]+[D_1^-])\right) &= \tau\left(D - (b+c+d-e)([D_1^+]+[D_1^-])\right) \\ &= D - (b+c+d-e)([D_1^+] + [D_1^-]).\end{aligned}$$

Cela équivaut à $e = 2b = 2c = 2d$ et $a = b + f$ si bien que

$$D - (b+c+d-e)([D_1^+] + [D_1^-]) = (a-2b)([D_1^+] + [D_1^-]) + b\left[\omega_S^{-1}\right]$$

et

$$D - (b+c+d-e)([D_1^+] + [D_1^-]) \in \mathbf{Z}\left([D_1^+] + [D_1^-]\right) \oplus \mathbf{Z}\omega_S^{-1}.$$

□

Lemme 1.7.2. *On a* $\alpha(S) = \frac{1}{2}$.

Démonstration.– Posons $e_1 = \omega_S^{-1}$ et $e_2 = [D_1^+] + [D_1^-]$. On sait que dans ce cas, le cône effectif $\Lambda_{\text{eff}}(S)$ est engendré par les sommes d'éléments d'orbites des courbes d'auto-intersections négatives. On a par conséquent ici

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{eff}}(S) &= \langle [E^+] + [E^-], [D_1^+] + [D_1^-], [D_3^+] + [D_4^+] + [D_3^-] + [D_4^-] \rangle \\ &= \langle [E^+] + [E^-], [D_1^+] + [D_1^-] \rangle.\end{aligned}$$

On utilise alors la définition suivante de la constante $\alpha(S)$ donnée dans [Pey95]

$$\alpha(S) = \text{Vol}\left\{x \in \Lambda_{\text{eff}}(S)^\vee \quad | \quad \langle \omega_S^{-1}, x \rangle = 1\right\},$$

où la mesure sur l'hyperplan

$$\mathcal{H} = \left\{x \in \text{Pic}(S)^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \quad | \quad \langle \omega_S^{-1}, x \rangle = 1\right\}$$

est définie dans [Pey95]. Le cône $\Lambda_{\text{eff}}(S)$ est donc engendré par $e_1 - 2e_2$ et e_2 si bien que la constante $\alpha(S)$ est donnée par le volume de la région

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 1, \quad y > 0, \quad x - 2y > 0\}.$$

Autrement dit, on obtient la longueur du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, soit $\alpha(S) = \frac{1}{2}$. □

On aurait également pu montrer que le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ ne fixe aucune (-1)-courbe et que le cardinal du groupe de Weyl associé au type de singularité $2\mathbf{A}_1$ où les deux singularités sont conjuguées est égal à 2. La table 2 de [DEJ] ainsi que [DJT] nous permettait alors d'en conclure que $\alpha(S) = \frac{1}{2}$.

Pour calculer $\beta(S)$, on utilise la proposition 7.1.2 de [Sko], qui fournit $\beta(S) = 2$ dans le cas considéré dans ce chapitre.

1.7.2 Torseurs versels

D'après [Pey12, proposition 8.3] ou [Der06, proposition 2.1], on déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme de torseurs versels au-dessus de S possédant au moins un point rationnel est fini, ce qui permet d'exhiber une partition finie de l'ensemble des points rationnels de S, indexée par toute famille de représentants de ces classes d'isomorphisme. Contrairement à [BBP12], il est plus délicat dans le cas de ce chapitre de déterminer explicitement un tel système de représentants.

On considère l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}[\Delta]^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \tau(\beta_3) = a\beta_4,\ \exists(\beta_3', n) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_3\beta_4 = \beta_3' n \\ \text{avec } \sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3'} \in \mathbf{Z} \text{ et } n \in N_{\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}}(\mathbf{Z}[i]) \end{array} \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble $\mathcal{B}_M^\Sigma$ des $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$ pour lesquels il existe $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ dans $\Sigma \times M$ tels que

$$\beta_1 = \varepsilon_1 m_1; \qquad \beta_2 = \varepsilon_2 m_2; \qquad \beta_3' = \varepsilon_3 m_3.$$

Il est bon de noter que l'ensemble $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}_M^\Sigma$ est infini. Pour $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$, on pose $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ le sous-ensemble constructible de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{10} = \text{Spec}\left(\mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4\right]\right)$ défini par les deux équations quadratiques invariantes sous le groupe de Galois $\mathcal{G}$ suivantes

$$\phi_1^{\boldsymbol{\beta}} = \phi_2^{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

avec

$$\begin{cases} \phi_1^{\boldsymbol{\beta}} = & a_2\beta_1\left(X_1^2+Y_1^2\right) - a_1\beta_2\left(X_2^2+Y_2^2\right) + \\ & \dfrac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}\Bigg(\beta_3\left(X_3^2+Y_3^2+\Delta\left(X_4^2+Y_4^2\right)+2\sqrt{\Delta}(X_3X_4+Y_3Y_4)\right) - \\ & a\beta_4\left(X_3^2+Y_3^2+\Delta\left(X_4^2+Y_4^2\right)-2\sqrt{\Delta}(X_3X_4+Y_3Y_4)\right)\Bigg) \\ \phi_2^{\boldsymbol{\beta}} = & b_2\beta_1\left(X_1^2+Y_1^2\right) - b_1\beta_2\left(X_2^2+Y_2^2\right) - \\ & \dfrac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}\Bigg(b_4'\beta_3\left(X_3^2+Y_3^2+\Delta\left(X_4^2+Y_4^2\right)+2\sqrt{\Delta}(X_3X_4+Y_3Y_4)\right) - \\ & ab_3'\beta_4\left(X_3^2+Y_3^2+\Delta\left(X_4^2+Y_4^2\right)-2\sqrt{\Delta}(X_3X_4+Y_3Y_4)\right)\Bigg), \end{cases}$$

et les inégalités

$$\forall i \neq j \in [\![0,2]\!]^2, \qquad ((X_i,Y_i),(X_j,Y_j)) \neq ((0,0),(0,0))$$

et

$$\forall i \in [\![0,2]\!], \qquad ((X_i,Y_i),(X_3,Y_3,X_4,Y_4)) \neq ((0,0),(0,0,0,0)).$$

Définissons à présent un morphisme $\pi_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}} \to S$. Pour ce faire, comme dans [BBP12, section 4], il suffit de définir un morphisme $\widehat{\pi_{\boldsymbol{\beta}}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}} \to \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$. Considérons alors une extension finie k de $\mathbf{Q}$ et $((x_i,y_i))_{0\leqslant i\leqslant 4}$ dans $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}(k)$. Il existe alors un couple $(u,v) \in k^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\begin{aligned} u =& \frac{1}{\Delta_{12}}\left(b_2\beta_1(x_1^2+y_1^2) - b_1\beta_2(x_2^2+y_2^2)\right) \\ =& \frac{1}{\Delta_{34}}\Bigg(b_4'\beta_3\left(x_3^2+y_3^2+\Delta\left(x_4^2+y_4^2\right)+2\sqrt{\Delta}(x_3x_4+y_3y_4)\right) - \\ & ab_3'\beta_4\left(x_3^2+y_3^2+\Delta\left(x_4^2+y_4^2\right)-2\sqrt{\Delta}(x_3x_4+y_3y_4)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v =& \frac{1}{\Delta_{12}}\left(-a_2\beta_1(x_1^2+y_1^2) + a_1\beta_2(x_2^2+y_2^2)\right) \\ =& \frac{1}{\Delta_{34}}\Bigg(\beta_3\left(x_3^2+y_3^2+\Delta\left(x_4^2+y_4^2\right)+2\sqrt{\Delta}(x_3x_4+y_3y_4)\right) - \\ & a\beta_4\left(x_3^2+y_3^2+\Delta\left(x_4^2+y_4^2\right)-2\sqrt{\Delta}(x_3x_4+y_3y_4)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

tels que

$$F_1(u,v) = \beta_1(x_1^2+y_1^2), \qquad F_2(u,v) = \beta_2(x_2^2+y_2^2)$$

et

$$F_3(u,v) = \beta_3\beta_4\left[\left(x_3^2-y_3^2-\Delta(x_4^2-y_4^2)\right)^2 + (x_3y_3-\Delta y_3y_4)^2\right].$$

On remarque en particulier que la quantité $F_3(u,v)/(\beta_3\beta_4)$ est bien une somme de deux carrés mais une somme de deux carrés particulière puisqu'il s'agit d'une norme de L sur $\mathbf{Q}$. On note alors α_β la racine carrée positive de $\beta_1\beta_2\beta_3'$ et $n = z_\beta\overline{z_\beta}$ et on considère

$$\begin{cases} x+iy = z_\beta\alpha_\beta\,(z_0)^2\prod_{j=1}^4 z_j \\ x-iy = \overline{z_\beta}\alpha_\beta\,(\overline{z_0})^2\prod_{j=1}^4 \overline{z_j} \\ t = z_0\overline{z_0} \end{cases}$$

où l'on a posé $z_j = x_j + iy_j$ pour $j \in \{0,1,2\}$ et

$$z_3 = \left(x_3^2 - y_3^2 - \Delta(x_4^2 - y_4^2)\right) + i\,(x_3y_3 - \Delta y_3y_4)\,.$$

On a alors $x^2+y^2 = t^2F(u,v)$ et $(x,y,t,u,v) \in \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(k)$, ce qui permet de définir π_β.

Lemme 1.7.3. *Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, la variété $\mathcal{T}_\beta$ équipée du morphisme π_β et de l'action naturelle de T_{NS} définie de la même façon que dans [BBP12, section 4] est un torseur versel pour S et*

$$S(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}_M^\Sigma} \pi_\beta\left(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q})\right).$$

Démonstration– On utilisera dans la suite les notations $\Delta_{ij} = \mathrm{Res}(F_i,F_j)$ et $\Delta_{43} = -\Delta_{34}$ qui généralisent (1.2.2) et (1.7.55). En particulier, on a que $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$. D'après [BBP12, section 4] et en utilisant le formalisme développé dans [Pie15, Example 2.4.3], on sait que sur $\overline{\mathbf{Q}}$, un anneau de Cox de S est donné par

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^+, Z_i^- \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/\left(\Delta_{jk}Z_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}Z_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}Z_k^+Z_k^-\right)_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} \tag{1.7.59}$$

où $\mathrm{div}(Z_0^\pm) = E^\pm$ et $\mathrm{div}(Z_i^\pm) = D_i^\pm$ pour $i \in [\![1,4]\!]$. On a plus précisément que

$$\left(\Delta_{jk}Z_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}Z_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}Z_k^+Z_k^-\right)_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} = (P_{1,2,3}, P_{1,2,4})$$

si l'on note $P_{i,j,k}$ la forme quadratique $\Delta_{jk}Z_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}Z_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}Z_k^+Z_k^-$. Considérons alors les variables invariantes sous $\mathcal{G}$ suivantes

$$X_k = \frac{Z_k^+ + Z_k^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_k = \frac{Z_k^+ - Z_k^-}{2i}$$

pour $k \in \{0,1,2\}$ et

$$X_3 = \frac{Z_3^+ + Z_4^+ + Z_3^- + Z_4^-}{4} \quad \text{et} \quad Y_3 = \frac{Z_3^+ - Z_3^- + Z_4^+ - Z_4^-}{4i}$$

et

$$X_4 = \frac{Z_3^+ - Z_4^+ + Z_3^- - Z_4^-}{4\sqrt{\Delta}} \quad \text{et} \quad Y_4 = \frac{Z_3^+ + Z_4^- - Z_3^- - Z_4^+}{4\sqrt{\Delta}i}.$$

En effet, on a

$$\phi_1^{(1,1,1,1)} = aP_{1,2,4} - P_{1,2,3} \quad \text{et} \quad \phi_2^{(1,1,1,1)} = \frac{1}{a}\left(\Delta_{34}P_{1,2,3} + ab_3'\phi_1^{(1,1,1,1)}\right),$$

une descente galoisienne garantit qu'un anneau de Cox pour S sur $\mathbf{Q}$ est donné par

$$R = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/(\phi_1^{(1,1,1,1)}, \phi_2^{(1,1,1,1)}).$$

Par [Sko, corollary 2.3.9], un torseur versel est unique à twist près par un élément de $H^1(\mathbf{Q}, T_{\mathrm{NS}})$. On peut alors montrer en adaptant la preuve de [Pie15, proposition 2.69] ou en utilisant [CTSSD87b, theorem 7.1] que pour tout cocycle $c \in H^1(\mathbf{Q}, T_{\mathrm{NS}})$, on obtient que l'anneau de Cox tordu par c est de la forme

$$R^c = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/(\phi_1^{\beta}, \phi_2^{\beta})$$

pour un certain $\beta \in \mathcal{B}$.

Finalement, il reste à établir le dernier point :

$$S(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_M^{\Sigma}} \pi_\beta \left(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q})\right).$$

Considérons un point $P \in S(\mathbf{Q})$. Il existe alors un unique $(y, z, t, u, v) \in \mathbf{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases} (y, z, t) = (u, v) = 1 \\ t > 0 \\ F_1(u, v) \geqslant 0 \\ t^2 F_1(u, v) F_2(u, v) F_3(u, v) = y^2 + z^2 \end{cases}$$

et $\pi_{\mathrm{spl}}((y, z, t, u, v)) = P$ avec π_{spl} l'application $\pi_{\mathrm{spl}} : \mathcal{T}_{\mathrm{spl}} \to S$ définie dans [BBP12, definition 4.1]. Lorsque $F_1(u, v)F_2(u, v)F_3(u, v) > 0$, il existe un unique triplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, +1\}^3$ avec $\varepsilon_1 = 1$ tels que $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ et

$$\varepsilon_i F_i(u, v) > 0.$$

Le fait que $F_1(u, v)F_2(u, v)F_3(u, v)$ soit une somme de deux carrés implique que, lorsque $p \equiv 3 \pmod 4$, on a

$$\begin{aligned} \nu_p(F_1(u, v)F_2(u, v)F_3(u, v)) &= \nu_p(F_1(u, v)) + \nu_p(F_2(u, v)) + \nu_p(F_3(u, v)) \\ &\equiv 0 \pmod 2. \end{aligned}$$

On pose alors

$$m_1 = \prod_{\substack{p \equiv 3 \pmod 4 \\ \nu_p(F_1(u,v)) \equiv 1 \pmod 2}} p, \quad m_2 = \prod_{\substack{p \equiv 3 \pmod 4 \\ \nu_p(F_2(u,v)) \equiv 1 \pmod 2}} p, \quad m_3 = \prod_{\substack{p \equiv 3 \pmod 4 \\ \nu_p(F_3(u,v)) \equiv 1 \pmod 2}} p,$$

de sorte que $m_i | F_i(u, v)$. On en déduit que si $p | m_1$, exactement une seule des deux valeurs $\nu_p(F_2(u, v))$ et $\nu_p(F_3(u, v))$ est impaire. On a donc que $p | m_1$ et $p | m_2$ par exemple et puisque $(u, v) = 1$, cela implique que $p | \Delta_{12}^{(3)}$, si bien qu'on en déduit les relations

$$m_1 \Big| \left[\Delta_{12}^{(3)}, \Delta_{13}^{(3)}\right], \quad m_2 \Big| \left[\Delta_{12}^{(3)}, \Delta_{23}^{(3)}\right], \quad m_3 \Big| \left[\Delta_{13}^{(3)}, \Delta_{23}^{(3)}\right],$$

$$(m_i, m_j) | \Delta_{ij}^{(3)},$$

et

$$\nu_p\left(\frac{F_i(u, v)}{m_i}\right) \equiv 0 \pmod 2,$$

pour tous les nombres premiers $p \equiv 3 \pmod 4$. De plus, $m_1 m_2 m_3$ est un carré. Si par exemple $F_1(u, v) = 0$, on pose $\varepsilon_1 m_1$ comme étant l'unique entier sans facteur carré tel que $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 m_1 m_2 m_3$ soit un carré.

On introduit alors $\beta_1 = \varepsilon_1 m_1$ et $\beta_2 = \varepsilon_2$. On pose alors g le plus petit diviseur de $F_3(u,v)$ tel que $\frac{\varepsilon_3 F_3(u,v)}{g}$ soit une norme de L. Nécessairement, en posant $\beta_3' = \varepsilon_3 m_3$, on a $\beta_3' \mid g$ donc on peut écrire $g = \beta_3' n$. On constate alors que, par définition de β_3', que n est une norme sur $\mathbf{Q}[i]$. Si l'on note $a = a'a''$ avec a'' le plus grand diviseur de a qui soit une norme sur K. On a alors nécessairement par définition de g et de F_3 que $a' \mid g$ et que g/a' est une norme sur K. On peut donc écrire $g = \beta_3\beta_4 = \beta_3' n$ avec $\tau(\beta_3) = a\beta_4$. Ainsi, $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}_M^{\Sigma}$ et $(y,z,t,u,v) \in \hat{\pi_\beta}(\mathcal{T}_\beta)$. □

En notant $\mathcal{X}_\beta$ le sous-schéma de $\mathbf{A}^8_{\mathbf{Q}} = \operatorname{Spec}(\mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4])$ défini par les équations ϕ_1^β et ϕ_2^β, on constate donc que $\mathcal{T}_\beta$ est égal au produit $\mathcal{X}_\beta \times \mathbf{A}^2_{\mathbf{Q}}$. En notant $\mathcal{X}_\beta^\circ$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{X}_\beta$, on a un isomorphisme entre l'intersection complète de $\mathbf{A}^{10}_{\mathbf{Q}} \smallsetminus \{0\}$ (car invariante par le groupe de Galois) donnée par les équations

$$F_1(u,v) = \beta_1(X_1^2 + Y_1^2), \quad F_2(u,v) = \beta_2(X_2^2 + Y_2^2),$$

$$au + ab_3'v = \beta_3\left(X_3^2 + Y_3^2 + \Delta\left(X_4^2 + Y_4^2\right) + 2\sqrt{\Delta}(X_3X_4 + Y_3Y_4)\right),$$

et

$$u + b_4'v = \beta_4\left(X_3^2 + Y_3^2 + \Delta\left(X_4^2 + Y_4^2\right) - 2\sqrt{\Delta}(X_3X_4 + Y_3Y_4)\right)$$

et le schéma $\mathcal{X}_\beta^\circ$. En particulier, sur $\mathcal{X}_\beta^\circ$, on a

$$F_1(u,v) = \beta_1(X_1^2 + Y_1^2), \quad F_2(u,v) = \beta_2(X_2^2 + Y_2^2)$$

et

$$F_3(u,v) = \beta_3\beta_4\left[\left(X_3^2 - Y_3^2 - \Delta(X_4^2 - Y_4^2)\right)^2 + (X_3Y_3 - \Delta X_4Y_4)^2\right],$$

Or, lors de la preuve du principe de Manin, on s'est ramené à un problème de comptage sur certaines variétés de la forme (1.2.5)

$$F_i(u,v) = \beta_i(X_i^2 + Y_i^2).$$

On n'a par conséquent pas utilisé une descente sur les torseurs versels mais sur des torseurs d'un type différent que l'on explicite dans la section suivante lors de notre preuve du principe de Manin. Cette description facilitera grandement le traitement de la constante afin d'établir que celle-ci correspond à la prédiction de Peyre. De plus, il apparaît difficile *a priori* d'obtenir un système de représentants des classes d'isomorphisme de torseurs versels et de décrire précisément les ensembles du type $\pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q}))$. En effet, pour ce faire, il faut caractériser les normes de l'extension biquadratique L.

Il est à noter plus généralement que dans les cas des articles [BBP12], [BB12] et [BT13], le même type de calculs fournissent que le seul cas du principe de Manin pour les surfaces de Châtelet où l'on utilise une méthode de descente sur les torseurs versels est celui pour lequel F est scindé. Dans tous les autres cas, on utilise une descente sur des torseurs d'un type différent dont la construction est analogue à celle de la section qui suit et sera effectuée dans une plus grande généralité dans le chapitre 2.

1.7.3 Les torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin

On décrit explicitement dans cette section les torseurs qui sont utilisés dans la preuve du Théorème 1.1.1, c'est-à-dire les torseurs qui correspondent aux variétés de la forme (1.2.5). Cette description repose sur le formalisme développé dans [Pie15] et [DP14].

Soit T le tore algébrique dont le groupe des caractères est donné par

$$\hat{T} = \left[E^+\right]\mathbf{Z} \oplus \left[D_1^+\right]\mathbf{Z} \oplus \left[D_2^+\right]\mathbf{Z} \oplus \left[D_3^+ + D_4^+\right]\mathbf{Z} \oplus \left[D_1^-\right]\mathbf{Z} \tag{1.7.60}$$

ainsi que l'injection $\lambda : \hat{T} \hookrightarrow \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})$. Il s'agit en réalité de l'injection $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}[i]}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})$.

Lemme 1.7.4. *La* $\mathbf{Q}-$*algèbre* $R' := \mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3\right]/(f_1)$, *avec*

$$f_1 = X_3^2 + Y_3^2 - \frac{1}{\Delta_{12}^2}\left(\Delta_{23}(X_1^2+Y_1^2) + \Delta_{31}(X_2^2+Y_2^2)\right)\left(\Delta_{24}(X_1^2+Y_1^2) + \Delta_{41}(X_2^2+Y_2^2)\right),$$

est un anneau de Cox de S *de type* λ *défini en (1.7.60).*

Démonstration– Puisque la surface S est quasi-projective, suivant la preuve de [Pie15, proposition 2.71], un anneau de Cox R' de type λ est donné par l'anneau des invariants sous le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de

$$\bigoplus_{m \in \hat{T}} \overline{R}_m,$$

où $\overline{R}$ a été défini (1.7.59) et $\overline{R}_m$ correspond aux éléments homogènes de degré m de $\overline{R}$. Supposons $m \in \hat{T}$ donné tel que

$$m = \left[a_0 E^+ + a_1 D_1^+ + a_2 D_2^+ + a_3(D_3^+ + D_4^+) + a_4 D_1^-\right]$$

avec $a_i \in \mathbf{Z}$. Pour déterminer $\overline{R}_m$, on cherche à résoudre le système linéaire donné par

$$\begin{aligned}\left[e_0^+ E^+ + e_0^- E^- + \sum_{j=1}^{4}\left(e_j^+ D_j^+ + e_j^- D_j^-\right)\right] \\ = \left[a_0 E^+ + a_1 D_1^+ + a_2 D_2^+ + a_3(D_3^+ + D_4^+) + a_4 D_1^-\right],\end{aligned}$$

où les $e_j^{\pm} \geqslant 0$. Grâce aux relations (1.7.56) et (1.7.57), ce dernier est équivalent à

$$\begin{cases} a_0 = e_0^+ + e_0^- \\ a_1 = \sum_{j=2}^4 e_j^- + e_1^+ - e_0^- \\ a_2 = e_2^+ - e_2^- + e_0^- \\ a_3 = e_3^+ - e_3^- + e_0^- = e_4^+ - e_4^- + e_0^- \\ a_4 = \sum_{j=1}^4 e_j^- - 2e_0^- \end{cases}$$

En résolvant ce système en les $e_j^{\pm}$ pour $0 \leqslant j \leqslant 4$, il vient que $\overline{R'}$ est isomorphe au sous-anneau de $\overline{R}$ engendré par les variables

$$Z_0^{\pm}; \quad Z_1^{\pm}; \quad Z_2^{\pm}; \quad Z_3^+ Z_4^+; \quad Z_3^- Z_4^-; \quad Z_3^+ Z_3^-; \quad Z_4^+ Z_4^-$$

vérifiant les relations

$$P_{1,2,3} = 0 \quad \text{et} \quad P_{1,2,4} = 0$$

ainsi que la relation suivante (d'après (1.7.59))

$$\begin{aligned}\left(Z_3^+ Z_4^+\right)\left(Z_3^- Z_4^-\right) &= \left(Z_3^+ Z_3^-\right)\left(Z_4^+ Z_4^-\right) \\ &= \frac{1}{\Delta_{12}^2}\left(\Delta_{23} Z_1^+ Z_1^- + \Delta_{31} Z_2^+ Z_2^-\right)\left(\Delta_{24} Z_1^+ Z_1^- + \Delta_{41} Z_2^+ Z_2^-\right).\end{aligned} \tag{1.7.61}$$

Les deux premières relations permettent d'éliminer les deux variables $Z_3^+ Z_3^-$ et $Z_4^+ Z_4^-$ tandis que la dernière relation (1.7.61) est bien invariante par le groupe de Galois $\mathcal{G}$. En considérant les variables $\mathcal{G}-$invariantes suivantes

$$X_k = \frac{Z_k^+ + Z_k^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_k = \frac{Z_k^+ - Z_k^-}{2i}$$

pour $k \in \{0, 1, 2\}$ et

$$X_3 = \frac{Z_3^+ Z_4^+ + Z_3^- Z_4^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_3 = \frac{Z_3^+ Z_4^+ - Z_3^- Z_4^-}{2i},$$

il vient alors bien

$$R' \cong \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3]/(f_1).$$

□

Le lemme suivant explicite le groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{Q}, \hat{T})$.

Lemme 1.7.5. *On a la série d'isomorphismes*

$$H^1(\mathbf{Q}, \hat{T}) \cong H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Démonstration– Le point clé concernant les torseurs de type λ est que l'action de la conjugaison τ dans K est triviale si bien que

$$H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}[i]\right), \hat{T}\right) = \{0\}.$$

Ainsi, la suite exatce de restriction-inflation

$$0 \longrightarrow H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}, \hat{T}) \longrightarrow H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}[i]\right), \hat{T}\right)$$

fournit l'isomorphisme $H^1(\mathbf{Q}, \hat{T}) \cong H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right)$. Puisque le groupe $\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right)$ est cyclique d'ordre 2 engendré par la conjugaison complexe σ, le groupe de cohomologie $H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right)$ coïncide avec l'homologie du complexe

$$\hat{T} \xrightarrow{\mathrm{Id}+\sigma} \hat{T} \xrightarrow{\mathrm{Id}-\sigma} \hat{T}.$$

Autrement dit,

$$H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right) \cong \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})/\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \sigma).$$

On obtient alors aisément le fait que $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})$ est engendré par

$$\left[D_1^+\right] - \left[D_1^-\right]; \quad \left[D_1^+\right] - \left[D_2^+\right]; \quad 2\left[D_1^+\right] - \left[D_3^+ + D_4^+\right]$$

et que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \sigma)$ est engendrée par

$$\left[D_1^+\right] - \left[D_1^-\right]; \quad 2\left[D_2^+\right] - \left[D_1^+\right] - \left[D_1^-\right]; \quad 2\left[D_3^+ + D_4^+\right] - 2\left[D_1^+\right] - 2\left[D_1^-\right]$$

et

$$\left[D_1^+\right] + 2\left[D_1^-\right] - \left[D_2^+\right] - \left[D_3^+ + D_4^+\right].$$

Il vient alors immédiatement que $H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ engendré par la classe de $\left[D_1^+\right] - \left[D_2^+\right]$. $\square$

À nouveau d'après [Sko, corollary 2.3.9], un torseur de type λ est unique à twist près par un élément de $H^1(\mathbf{Q}, T)$. On est ainsi désormais en mesure de décrire tous les anneaux de Cox de S de type λ. On s'inspire ici des deux preuves de [Pie15, propositions 2.69-2.70]. Tout élément de $H^1(\mathbf{Q}, T)$ est représenté par un cocycle $c : \mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right) \to T$, lui-même déterminé par l'image $c_\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(\hat{T}, \mathbf{Q}[i]^\times\right)$ de la conjugaison complexe.

Lemme 1.7.6. *Tout anneau de Cox pour S de type λ est isomorphe à une $\mathbf{Q}-$algèbre de la forme*

$$R'_{\mathbf{n}} := \mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3\right] / (f_1^{\mathbf{n}})$$

avec

$$\begin{aligned} f_1^{\mathbf{n}} = n_3\left(X_3^2 + Y_3^2\right) - \frac{1}{\Delta_{12}^2}\left(\Delta_{23} n_1 (X_1^2 + Y_1^2) + \Delta_{31} n_2 (X_2^2 + Y_2^2)\right) \\ \times \left(\Delta_{24} n_1 (X_1^2 + Y_1^2) + \Delta_{41} n_2 (X_2^2 + Y_2^2)\right) \end{aligned} \tag{1.7.62}$$

et $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in (\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\})^3$ tels que $n_1 n_2 n_3$ soit une somme de deux carrés.

Démonstration– On sait que, pour tout anneau de Cox R'_λ pour S de type λ, il existe un cocycle $c : \mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right) \to T$ tel que R'_λ soit un twist de R' défini en (1.7.4). D'après [Pie15, proposition 2.41], l'action de la conjugaison complexe sur $\overline{R'}$ est la suivante :

$$\sigma(Z_0^-) = c_\sigma\left(\left[E^+\right]\right) Z_0^+; \quad \forall j \in \{1, 2\} \quad \sigma(Z_j^-) = c_\sigma\left(\left[D_j^+\right]\right) Z_j^+$$

et

$$\sigma(Z_3^- Z_4^-) = c_\sigma\left(\left[D_3^+ + D_4^+\right]\right) Z_3^+ Z_4^+.$$

En prenant les nouvelles variables suivantes, invariantes sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right)$

$$X_0 = \frac{c_\sigma\left([E^+]\right) Z_0^+ + Z_0^-}{2}; \quad Y_0 = \frac{c_\sigma\left([E^+]\right) Z_0^+ - Z_0^-}{2i};$$

$$X_k = \frac{c_\sigma\left(\left[D_k^+\right]\right) Z_k^+ + Z_k^-}{2}; \quad Y_k = \frac{c_\sigma\left(\left[D_k^+\right]\right) Z_k^+ - Z_k^-}{2i}$$

pour $k \in \{1, 2\}$ et

$$X_3 = \frac{c_\sigma\left(\left[D_3^+ + D_4^+\right]\right) Z_3^+ Z_4^+ + Z_3^- Z_4^-}{2};$$

$$Y_3 = \frac{c_\sigma\left(\left[D_3^+ + D_4^+\right]\right) Z_3^+ Z_4^+ - Z_3^- Z_4^-}{2i},$$

il vient

$$R'_\lambda \cong \mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3\right] / (f_1^c)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1^c = n_{31}^c\left(X_3^2 + Y_3^2\right) - \frac{1}{\Delta_{12}^2}\left(\Delta_{23}(X_1^2 + Y_1^2) + \Delta_{31} n_{21}^c (X_2^2 + Y_2^2)\right) \\ \times \left(\Delta_{24}(X_1^2 + Y_1^2) + \Delta_{41} n_{21}^c (X_2^2 + Y_2^2)\right) \end{aligned}$$

et $n_{21}^c = c_\sigma\left(\left[D_1^+ - D_2^+\right]\right)$ et $n_{31}^c = c_\sigma\left(\left[2D_1^+ - D_3^+ - D_4^+\right]\right)$. Le fait que c soit un cocycle et les relations (1.7.56) et (1.7.57) impliquent que $\sigma(n_{i1}) = n_{i1}$ si bien $n_{i1} \in \mathbf{Q}^\times$ pour $i \in \{2,3\}$. En écrivant $n_{21}^c = n_2/n_1$ et $n_{31}^c = n_3/{n_1}^2$ pour trois entiers n_1, n_2 et n_3 non nuls, on obtient bien

$$R'_\lambda \cong \mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3\right]/(f_1^{\mathbf{n}}).$$

Pour conclure, il reste à établir le fait que $n_1n_2n_3$ est une somme de deux carrés. On a

$$n_1n_2n_3 = n_1^4 n_{21}^c n_{31}^c.$$

Puisque les conditions de cocycle s'écrivent

$$c_\sigma\left(\left[E^+\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[E^-\right]\right)\right) = 1; \quad \forall k \in \{1,2\} \quad c_\sigma\left(\left[D_k^+\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[D_k^-\right]\right)\right) = 1$$

et

$$c_\sigma\left(\left[D_3^+ + D_4^+\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[D_3^- + D_4^-\right]\right)\right) = 1,$$

les relations (1.7.56) et (1.7.57) fournissent

$$n_1n_2n_3 = n_1^4 c_\sigma\left(\left[E^+ + 2D_1^+\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[E^+ + 2D_1^+\right]\right)\right)$$

si bien que $n_1n_2n_3$ est bien une somme de deux carrés. On peut établir plus précisément, en suivant [Pie15, proposition 2.70] qu'étant donné (n_1, n_2, n_3) dans $\mathbf{Q}^\times$, il existe un cocycle $c : \mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right) \to T$ si, et seulement si, le produit $n_1n_2n_3$ est une somme de deux carrés. □

De façon analogue au Lemme 1.7.3, on voit que pour $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^3$ tel que $n_1n_2n_3$ soit une somme de deux carrés, le sous-ensemble constructible $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ de $\mathbf{A}^8_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Spec}\left(\mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 3\right]\right)$ défini par l'équation $f^{\mathbf{n}}$ donnée en (1.7.62) et les inégalités

$$\forall i \neq j \in [\![0,3]\!]^4, \quad ((X_i, Y_i), (X_j, Y_j)) \neq ((0,0),(0,0))$$

est un torseur de type λ au-dessus de S. Pour toute extension finie k de $\mathbf{Q}$ et tout $(x_i, y_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ dans $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}(k)$, à l'aide de

$$u = \frac{1}{\Delta_{12}}\left(b_2n_1(x_1^2 + y_1^2) - b_1n_2(x_2^2 + y_2^2)\right)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{12}}\left(-a_2n_1(x_1^2 + y_1^2) + a_1n_2(x_2^2 + y_2^2)\right)$$

on peut définir comme en section précédente un morphisme $\pi_{\mathbf{n}} : \mathcal{T}_{\mathbf{n}} \to S$. Lorsque $\mathbf{n}$ est de la forme

$$\forall i \in [\![1,3]\!], \quad n_i = \varepsilon_i m_i$$

pour un certain $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$, on note $\mathcal{T}_{\mathbf{n}} = \mathcal{T}_{\mathbf{m},\varepsilon}$ et $\pi_{\mathbf{n}} = \pi_{\mathbf{m},\varepsilon}$. On peut alors montrer comme lors de la preuve du Lemme 1.7.3 qu'on a l'égalité

$$S(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})\in\Sigma\times M} \pi_{\mathbf{m},\varepsilon}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\varepsilon}(\mathbf{Q})\right). \tag{1.7.63}$$

De plus, on a

$$\pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{Q})) = \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (t,u,v,x_3,x_4) \in \mathbf{Z}^5, \\ (t,u,v) = (x_3,x_4) = 1, \\ t \geqslant 0, x_3^2 + x_4^2 = t^2 F(u,v), \\ \varepsilon_i F_i(u,v) > 0, \\ \nu_p(F_i(u,v)) - \mu_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\,, \\ F_i(u,v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right\}$$
$$\bigsqcup \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (t,u,v,x_3,x_4) \in \mathbf{Z}^5, \\ (t,u,v) = (x_3,x_4) = 1, \\ t \geqslant 0, x_3^2 + x_4^2 = t^2 F(u,v), \\ \varepsilon_i F_i(-u,-v) > 0, \\ \nu_p(F_i(u,v)) - \mu_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\,, \\ F_i(-u,-v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right\}. \tag{1.7.64}$$

En effet, un point de S admet exactement deux représentants de la forme $[tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4]$ avec $(t,u,v,x_3,x_4) \in \mathbf{Z}^5$ et $(t,u,v) = (x_3,x_4) = 1$.

À nouveau de la même façon qu'en section précédente, on montre, en notant $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}}$ le sous-schéma de $\mathbf{A}^8_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}\,[X_i, Y_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 3])$ défini par l'équation $f^{\mathbf{n}}$ donnée en (1.7.62), que $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ est égal au produit $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}^2_{\mathbf{Q}}$. Si $\mathcal{Y}^\circ_{\mathbf{n}}$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}}$, on a alors un isomorphisme entre l'intersection complète de $\mathbf{A}^8_{\mathbf{Q}} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u,v) = n_i(X_i^2 + Y_i^2).$$

On retrouve ainsi une variété de la forme (1.2.5) et il s'agit donc bel et bien des torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin en section 1.6.

On donne alors deux derniers lemmes qui permettent d'exprimer la constante conjecturée par Peyre de manière adéquate à notre traitement du problème de comptage.

Lemme 1.7.7. *On a* $Ш^1(\mathbf{Q}, T) = \{0\}$ *où*

$$Ш^1(\mathbf{Q}, T) = \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1(\mathbf{R}, T) \prod_p H^1(\mathbf{Q}_p, T) \right).$$

Démonstration– Le théorème de Tate fournit l'accouplement naturel non dégénéré suivant

$$Ш^1(\mathbf{Q}, T) \times Ш^2(\mathbf{Q}, \hat{T}) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

si bien qu'il suffit d'établir que $Ш^2(\mathbf{Q}, \hat{T}) = \{0\}$. Puisque

$$H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}[i]\right), \hat{T}\right) = \{0\},$$

la suite de restriction-inflation d'ordre 2 fournit

$$0 \longrightarrow H^2\left(\mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q})\,, \hat{T}\right) \longrightarrow H^2(\mathbf{Q}, \hat{T}) \longrightarrow H^2\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}[i]\right), \hat{T}\right)$$

Montrons à présent qu'on a $H^2\left(\mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q})\,, \hat{T}\right) = \{0\}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q})$ étant cyclique engendré par la conjugaison complexe σ, il vient que

$$H^2\left(\mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q})\,, \hat{T}\right) = \hat{T}^{\langle\sigma\rangle}/\mathrm{Im}(\mathrm{Id} + \sigma) = \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id})/\mathrm{Im}(\mathrm{Id} + \sigma).$$

On établit comme lors de la preuve du Lemme 1.7.5 que $\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id})$ est de rang 2 engendré par $\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right]$ et $\left[\omega_S^{-1}\right]$. Or,

$$\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right] = (\mathrm{Id} + \sigma)\left(\left[D_1^+\right]\right) \quad \text{et} \quad \left[\omega_S^{-1}\right] = (\mathrm{Id} + \sigma)\left(\left[E^+\right] + 2\left[D_1^+\right]\right)$$

si bien que $\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} + \sigma)$ et $H^2\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}\right), \hat{T}\right) = \{0\}$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & Ш^2(\mathbf{Q}, \hat{T}) \arrow[d] & Ш^2(\mathbf{Q}[i], \hat{T}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^2(\mathbf{Q}, \hat{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}[i]\right), \hat{T}\right) \arrow[d] \\
 & \prod_{v \in \mathrm{val}(\mathbf{Q})} H^2(\mathbf{Q}_v, \hat{T}) \arrow[r] & \prod_{v \in \mathrm{val}(\mathbf{Q}[i])} H^2\left(\mathbf{Q}[i]_v, \hat{T}\right)
\end{tikzcd}$$

qui implique que tout élément de $Ш^2(\mathbf{Q}, \hat{T})$ appartient à $Ш^2(\mathbf{Q}[i], \hat{T})$. Or, sur $\mathbf{Q}[i]$, on a $\hat{T} \cong \mathbf{Z}^5$ avec action triviale si bien que $Ш^2(\mathbf{Q}[i], \hat{T}) = \{0\}$ d'après [San80, lemme 1.9], ce qui permet de conclure la preuve. □

Lemme 1.7.8. *On a l'égalité*

$$S\left(\mathbf{A}_\mathbf{Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigsqcup_{(\mathbf{m}, \varepsilon) \in M \times \Sigma} \pi_{\mathbf{m}, \varepsilon}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m}, \varepsilon}\left(\mathbf{A}_\mathbf{Q}\right)\right),$$

où $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$ *désigne l'anneau des adèles de* $\mathbf{Q}$.

Démonstration– Tout d'abord, d'après [Sko, theorem 6.1.2] et le Lemme 1.7.6, il vient

$$S\left(\mathbf{A}_\mathbf{Q}\right)^{\mathrm{Br}_\lambda(S)} = \bigcup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^3 \\ n_1 n_2 n_3 = \square + \square}} \pi_\mathbf{n}\left(\mathcal{T}_\mathbf{n}\left(\mathbf{A}_\mathbf{Q}\right)\right),$$

où $\mathrm{Br}_\lambda(S) = r^{-1}\left(\lambda_*\left(H^1(\mathbf{Q}, \hat{T})\right)\right)$, $\lambda_* : H^1(\mathbf{Q}, \hat{T}) \to H^1\left(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})\right)$ est associée à l'injection λ et $r : \mathrm{Br}(S) \to H^1\left(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})\right)$ est l'application canonique issue de la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^p\left(\mathbf{Q}, H^q\left(S_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{G}_m\right)\right) \Rightarrow H^{p+q}\left(S, \mathbf{G}_m\right).$$

On a ici utilisé le fait que la surface S est géométriquement rationnelle auquel cas $\mathrm{Br}_1(S) = \mathrm{Br}(S)$.

De la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \hat{T} \longrightarrow \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})/\hat{T} \longrightarrow 0$$

on tire la suite exacte

$$\left(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})/\hat{T}\right)^{\mathcal{G}} \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}, \hat{T}) \xrightarrow{\lambda_*} H^1\left(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})\right)$$

Or, on montre facilement que $\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})/\hat{T}$ est de rang 1 engendré par la classe de $\left[D_3^+\right]$ si bien que

$$\left(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})/\hat{T}\right)^{\mathcal{G}} = \{0\}$$

et λ_* est injective. Le Lemme 1.7.5 et la valeur de $\beta(S)$ impliquent par conséquent

$$\lambda_*\left(H^1(\mathbf{Q},\hat{T})\right) = H^1\left(\mathbf{Q},\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})\right)$$

de sorte que $\mathrm{Br}_\lambda(S) = \mathrm{Br}(S)$.

On a ainsi

$$S\left(\mathbf{A_Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigcup_{\substack{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^3\\ n_1n_2n_3=\square+\square}} \pi_{\mathbf{n}}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{A_Q}\right)\right)$$

et en particulier

$$\bigcup_{(\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon})\in M\times\Sigma} \pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathbf{A_Q}\right)\right) \subset S\left(\mathbf{A_Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)}.$$

D'autre part, d'après [CTSSD87a], il vient $\overline{S(\mathbf{Q})} = S\left(\mathbf{A_Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)}$ et par continuité de l'application $\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{Q}) \to S(\mathbf{Q})$ induite par $\pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}$ ainsi que (1.7.63), il s'ensuit

$$\overline{S(\mathbf{Q})} = S\left(\mathbf{A_Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigcup_{(\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon})\in M\times\Sigma} \pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\overline{\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathbf{Q}\right)}\right) \subset \bigcup_{(\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon})\in M\times\Sigma} \pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathbf{A_Q}\right)\right)$$

si bien qu'on peut conclure à l'égalité

$$S\left(\mathbf{A_Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigcup_{(\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon})\in M\times\Sigma} \pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathbf{A_Q}\right)\right).$$

Suivant alors l'argument utilisé dans [Sal98] lors de la preuve du lemme 6.17, on a que tout point de $S\left(\mathbf{A_Q}\right)^{\mathrm{Br}(S)}$ appartient à exactement $\#Ш^1(\mathbf{Q},T)$ ensembles de la forme $\pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\mathbf{A_Q}\right)\right)$ avec $(\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}) \in M\times\Sigma$. Le Lemme 1.7.7 permet alors d'en déduire que l'union est disjointe et de conclure la preuve. □

1.7.4 Expression de la constante de Peyre

Le Lemme 1.7.8 fournit

$$c_S = \alpha(S)\beta(S)\sum_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon}\in\Sigma\\ \mathbf{m}\in M}} \omega_H\big(\pi_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}}(\mathbf{A_Q}))\big).$$

On a $\alpha(S)\beta(S) = 1$ et on écrit

$$\omega_H(\pi_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}}(\mathbf{A_Q}))) = \omega_\infty(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})\prod_p \omega_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}),$$

où, en passant comme dans [BBP12] et [BB12] aux densités sur le torseur intermédiaire $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ défini par l'équation (1.6.38) et au vu de (1.7.64), l'on a les égalités :

$$\omega_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^{4n}}\#\left\{(u,v,y,z,t)\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} F(u,v)\equiv y^2+z^2 \pmod{p^n}\\ p\nmid(u,v),\quad p\nmid(y,z,t)\\ 2|\nu_p(F_i(u,v))-\mu_i\end{array}\right\}$$

pour $p \neq 2$. Pour tout entier d et $F \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$, on introduit alors

$$\rho^*(d) = \rho^*(d; F) = \#\{\mathbf{x} \in [0, d[^2 \quad | \quad d|F(\mathbf{x}), \quad (x_1, x_2, d) = 1\}.$$

Exactement le même type de raisonnements que dans la section 8.2 de [BT13] conduit, lorsque $p \nmid \Delta_{12}^{(3)}\Delta_{13}^{(3)}\Delta_{23}^{(3)}$, aux expressions

$$\omega_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{\chi(p^\nu)\rho^*(p^\nu; F)}{p^{2\nu}}\right)$$

lorsque $p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ et

$$\omega_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{\chi(p^\nu)\rho^*(p^\nu; F)}{p^{2\nu}}$$

lorsque $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$. En particulier, $\omega_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = \omega_p$ ne dépend ni de $\boldsymbol{\varepsilon}$ ni de $\mathbf{m}$. Dans le cas $p|\Delta_{12}^{(3)}\Delta_{13}^{(3)}\Delta_{23}^{(3)}$ et $p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, on a $(t, p) = 1$ et donc on obtient

$$\omega_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{p}}{p^{3n}} \#\left\{(u, v, y, z) \in (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} F(u, v) \equiv y^2 + z^2 \,(\mathrm{mod}\ p^n) \\ p \nmid (u, v) \\ 2|\nu_p(F_i(u, v)) - \mu_i \end{array}\right\}.$$

Pour $p = 2$, on a

$$\omega_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{4n}} \#\left\{(u, v, y, z, t) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^5 \,\middle|\, \begin{array}{l} F(u, v) \equiv y^2 + z^2 \,(\mathrm{mod}\ 2^n) \\ 2 \nmid (u, v), \quad 2 \nmid (y, z, t) \\ F_i(u, v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E}_{2^n} \end{array}\right\}$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{4n}} \#\left\{(u, v, y, z, t) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^5 \,\middle|\, \begin{array}{l} F(u, v) \equiv y^2 + z^2 \,(\mathrm{mod}\ 2^n) \\ 2 \nmid (u, v), \quad 2 \nmid (y, z, t) \\ F_i(-u, -v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E}_{2^n} \end{array}\right\}.$$

On a également $(2, t) = 1$ et donc, grâce au Lemme 1.5.1, on aboutit à l'expression

$$\omega_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = 2 \lim_{n \to +\infty} 2^{-2n} \#\left\{(u, v) \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} 2 \nmid (u, v) \\ F_i(u, v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E}_{2^n} \end{array}\right\}.$$

Noter ici qu'on a une dépendance en $\boldsymbol{\varepsilon}$ et en $\mathbf{m}$. Enfin on traite le cas de la densité archimédienne. Grâce à la symétrie du problème, on peut se restreindre à $y > 0$ et $z > 0$. En utilisant une forme de Leray en paramétrant en z, on obtient

$$\omega_\infty(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = 4 \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B \log(B)} \int_D \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{2\sqrt{t^2 F(u, v) - y^2}}$$

avec

$$D = \left\{(u, v, y, t) \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{c} (u, v) \in \mathcal{R}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}\left(\sqrt{B/t}\right) \sqcup \mathcal{R}_{(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_3)}\left(\sqrt{B/t}\right), \\ 0 < y < t\sqrt{F(u, v)}, \quad 1 < t < B \end{array}\right\}.$$

La formule (1.5.35) fournit alors immédiatement

$$\omega_\infty(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) = \pi\left(\mathrm{Vol}(\mathcal{R}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}(1)) + \mathrm{Vol}(\mathcal{R}_{(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_3)}(1))\right) = 2\pi \mathrm{vol}(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(1)),$$

qui ne dépend que de $\boldsymbol{\varepsilon}$ mais pas de $\mathbf{m}$. On obtient ainsi l'égalité

$$c_S = \sum_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma \\ \mathbf{m} \in M}} 2\pi \mathrm{vol}(\mathcal{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(1)) \prod_p \omega_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}). \tag{1.7.65}$$

1.7.5 Transformation de la constante c_0

On revient dans cette section à l'expression de la constante c_0 obtenue grâce au Théorème 1.6.1 que l'on met sous une forme similaire à celle de c_S en (1.7.65). On réécrit cette constante c_0 sous la forme suivante

$$\begin{aligned} c_0 = \frac{\pi^2}{2^4} \sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{\mu(d)r_0(d)\varphi^\dagger(d)}{d} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\in\Sigma} \mathrm{vol}\left(R^{\boldsymbol{\varepsilon}}(1)\right) \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3\\ d=d_1d_2d_3, d_i'|\Delta_{jk}}} \sum_{\mathbf{m}\in M} \mu(d_1'd_2')\mu(d_3') \\ \times \sum_{\substack{k_4k_1k_1'|\gcd(\Delta_{23},d)\\ k_4k_2k_2'|\gcd(\Delta_{13},d)\\ k_4k_3k_3'|\gcd(\Delta_{12},d)}} \sum_{\substack{k_4k_4'|\gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d)\\ k_5k_5'|\gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}} \sigma_*^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}), \end{aligned} \tag{1.7.66}$$

où

$$\sigma_*^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}) = \sum_{e=1}^{+\infty} \frac{\mu(e)}{e^2} \sigma^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E},e). \tag{1.7.67}$$

Par multiplicativité en e de la quantité $\sigma^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E},e)$, on peut écrire $\sigma_*^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E})$ sous forme d'un produit eulérien

$$\sigma_*^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}) = \prod_p \sigma_{*,p}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}). \tag{1.7.68}$$

Pour $p > 2$, le facteur eulérien est donné par

$$\sigma_{*,p}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3} \frac{\chi(p)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\tilde{\rho}(p^{N_1},p^{N_2},p^{N_3};F_1,F_2,F_3)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}}$$

où les N_i sont définis lors du Lemme 1.6.4 et avec

$$\tilde{\rho}(p^{N_1},p^{N_2},p^{N_3};F_1,F_2,F_3) = \#\left\{\mathbf{x}\in\left(\mathbf{Z}/p^{N_1+N_2+N_3+1}\mathbf{Z}\right)^2 \,\middle|\, p^{N_i}|F_i(\mathbf{x}), p\nmid\mathbf{x}\right\},$$

tandis que pour $p = 2$, on obtient un facteur eulérien

$$\sigma_{*,2}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}) = 8\lim_{n\to+\infty} 2^{-2n}\#\left\{\mathbf{x}\in(\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} F_i(\mathbf{x})\in e_i\varepsilon_i\mathcal{E}_{2^n} \\ 2\nmid\mathbf{x}\end{array}\right\}. \tag{1.7.69}$$

On écrit alors c_0 sous la forme

$$c_0 = \sum_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon}\in\Sigma\\ \mathbf{m}\in M}} \mathrm{vol}(\mathcal{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(1))c_0(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})$$

avec

$$\begin{aligned} c_0(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \frac{\pi^2}{2^4} \sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{\mu(d)r_0(d)\varphi^\dagger(d)}{d} \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3\\ d=d_1d_2d_3, d_i'|\Delta_{jk}}} \mu(d_1'd_2')\mu(d_3') \\ \times \sum_{\substack{k_4k_1k_1'|\gcd(\Delta_{23},d)\\ k_4k_2k_2'|\gcd(\Delta_{13},d)\\ k_4k_3k_3'|\gcd(\Delta_{12},d)}} \sum_{\substack{k_4k_4'|\gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d)\\ k_5k_5'|\gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}} \sigma_*^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E}), \end{aligned}$$

où $\sigma_{*,p}^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{e},\mathbf{E})$ a été défini en (1.7.67). De plus, en utilisant les notations (1.6.46) et en posant

$$e_1' = d_1d_2'd_3' \quad e_2' = d_2d_1'd_3', \quad e_3' = d_3d_1'd_2',$$

$$E_1' = [e_1', k_4k_2k_2', k_4k_3k_3', k_4k_4', d_1k_5k_5'],\ E_2' = [e_2', k_4k_1k_1', k_4k_3k_3', k_4k_4', d_2k_5k_5'],$$

et

$$E_3' = [e_3', k_4k_1k_1', k_4k_2k_2', k_4k_4'],$$

ainsi que

$$e_1'' = E_1'' = m_1 \quad e_2'' = E_2'' = m_2, \quad e_3'' = E_3'' = m_3,$$

on a les décompositions $e_i = e_i'e_i''$ et $E_i = E_i'E_i''$. On a alors immédiatement que $N_i = \max\{\nu_p(e_i')+\nu_i, \nu_p(E_i')\}$ lorsque $p \equiv 1 \pmod 4$ et $N_i = \max\{\nu_p(e_i'')+\nu_i, \nu_p(E_i'')\}$ lorsque $p \equiv 3 \pmod 4$. Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{*,2}^{\varepsilon}(\mathbf{e},\mathbf{E}) &= \sigma_{*,2}^{\varepsilon}(\mathbf{m}) \\ &= 8 \lim_{n\to+\infty} 2^{-2n} \# \left\{ \mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} F_i(\mathbf{x}) \in m_i\varepsilon_i\mathcal{E}_{2^n} \\ 2 \nmid \mathbf{x} \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}V_1(\mathbf{d},\mathbf{d}') = &\sum_{\substack{k_4k_1k_1' \mid \gcd(\Delta_{23},d) \\ k_4k_2k_2' \mid \gcd(\Delta_{13},d) \\ k_4k_3k_3' \mid \gcd(\Delta_{12},d)}} \sum_{\substack{k_4k_4' \mid \gcd(\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{23},d) \\ k_5k_5' \mid \gcd(\Delta_{12},d_1'd_2')}} \frac{\mu(k_1')\mu(k_2')\mu(k_3')\mu(k_4')\mu(k_5')}{3^{\omega(k_4)}2^{\omega(k_5)+\omega(k_1)+\omega(k_2)+\omega(k_3)}} \\ &\times \prod_{p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)} \sigma_{*,p}(\mathbf{e}',\mathbf{E}'),\end{aligned}$$

puis

$$V_3(\mathbf{m}) = \prod_{p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)} \sigma_{*,p}(\mathbf{e}'',\mathbf{E}'')$$

et enfin

$$V_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \frac{1}{4}\sigma_{*,2}^{\varepsilon}(\mathbf{m})$$

de sorte qu'on ait

$$c_0(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = 2\pi \prod_p \left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-2} c_1 \times V_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})V_3(\mathbf{m})$$

avec

$$c_1 = \sum_{d\in\mathcal{D}} \frac{\mu(d)r_0(d)\varphi^{\dagger}(d)}{d} \sum_{\substack{\mathbf{d},\mathbf{d}'\in\mathcal{D}^3 \\ d=d_1d_2d_3, d_i'\mid\Delta_{jk}}} \mu(d_1'd_2')\mu(d_3')V_1(\mathbf{d},\mathbf{d}').$$

On a ici utilisé la décomposition en produit eulérien

$$\frac{\pi}{8} = \prod_p \left(1+\frac{\chi(p)}{p}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-2}.$$

La stratégie pour conclure à la validation de la conjecture de Peyre est alors, suivant la section 9.5 de [BT13], de décomposer $c_0(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})$ sous la forme

$$c_0(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = 2\pi \prod_p c_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})$$

et d'établir que pour tout nombre premier p, on a $c_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \omega_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})$.

1.7.6 Fin de la preuve de la conjecture de Peyre

On pose $c_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = V_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})$ de sorte que $c_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \omega_2(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m})$. Dans le cas $p \equiv 1 \pmod 4$, on pose $\delta_i' = \nu_p(d_i')$ et

$$N_1' = \nu_1 + \delta_1 + \delta_2' + \delta_3',\ N_1 = \max\{N_1', \kappa_4 + \kappa_2 + \kappa_2', \kappa_4 + \kappa_3 + \kappa_3', \kappa_4 + \kappa_4', \kappa_5 + \kappa_5'\},$$

et

$$N_2' = \nu_2 + \delta_2 + \delta_1' + \delta_3',\ N_2 = \max\{N_2', \kappa_4 + \kappa_1 + \kappa_1', \kappa_4 + \kappa_3 + \kappa_3', \kappa_4 + \kappa_4', \kappa_5 + \kappa_5'\}$$

et enfin

$$N_3' = \nu_3 + \delta_3 + \delta_1' + \delta_2',\ N_3 = \max\{N_3', \kappa_4 + \kappa_1 + \kappa_1', \kappa_4 + \kappa_2 + \kappa_2', \kappa_4 + \kappa_4'\}.$$

Puisque $r_0(p) = 2$ et par définition de $\varphi^\dagger$, on a alors

$$c_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \sum_{0 \leqslant \delta \leqslant 1} \left(-\frac{2}{p+1}\right)^{\delta} \sum_{\substack{0 \leqslant \delta_1, \delta_2, \delta_3 \leqslant 1 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta}} f_p(\boldsymbol{\delta})$$

avec

$$\begin{aligned} f_p(\boldsymbol{\delta}) = & \sum_{\substack{0 \leqslant \delta_i' \leqslant \min\{\nu_p(\Delta_{jk}), 1\} \\ \delta_1'\delta_2' = 0}} (-1)^{\delta_1' + \delta_2' + \delta_3'} \sum_{\substack{\kappa_4, \kappa_4' \geqslant 0 \\ \kappa_4 + \kappa_4' \leqslant \min\{\delta, \nu_p(\Delta_{12}), \nu_p(\Delta_{13}), \nu_p(\Delta_{23})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_4'}}{3^{\kappa_4}} \\ & \times \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{\kappa_i, \kappa_i' \geqslant 0 \\ \kappa_4 + \kappa_i + \kappa_i' \leqslant \min\{\delta, \nu_p(\Delta_{jk})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_i'}}{2^{\kappa_i}} \sum_{\substack{\kappa_5, \kappa_5' \geqslant 0 \\ \kappa_5 + \kappa_5' \leqslant \min\{\delta_1' + \delta_2', \nu_p(\Delta_{12})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_5'}}{2^{\kappa_5}} \\ & \times \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^3} \frac{\tilde{\rho}\left(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}; F_1, F_2, F_3\right)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}}, \end{aligned} \tag{1.7.70}$$

avec $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Enfin, dans le cas $p \equiv 3 \pmod 4$, si l'on note $\mu_i = \nu_p(m_i)$, on pose

$$c_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) g(\boldsymbol{\mu}),$$

où

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^3} \frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} \tilde{\rho}\left(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}; F_1, F_2, F_3\right)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}},$$

et avec $N_1 = \mu_1 + \nu_1$, $N_2 = \mu_2 + \nu_2$ et $N_3 = \mu_3 + \nu_3$. On a ainsi

$$c_0(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = 2\pi \prod_p c_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}).$$

Il s'agit à présent de remonter la formule d'éclatement du Lemme 1.6.2 utilisée dans le passage aux torseurs. On distingue selon la congruence de p modulo 4. On commence par le cas $p \equiv 1 \pmod 4$ et on étudie la quantité

$$c_p'(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} c_p(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}).$$

Pour ce faire, on ne considère dans un premier temps que la quantité

$$\begin{aligned} f_p'(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}') = & \sum_{\substack{\kappa_4,\kappa_4'\geqslant 0\\ \kappa_4+\kappa_4'\leqslant \min\{\delta,\nu_p(\Delta_{ij})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_4'}}{3^{\kappa_4}} \sum_{\substack{\kappa_1,\kappa_1'\geqslant 0\\ \kappa_4+\kappa_1+\kappa_1'\leqslant \min\{\delta,\nu_p(\Delta_{23})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_1'}}{2^{\kappa_1}} \sum_{\substack{\kappa_2,\kappa_2'\geqslant 0\\ \kappa_4+\kappa_2+\kappa_2'\leqslant \min\{\delta,\nu_p(\Delta_{13})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_2'}}{2^{\kappa_2}} \\ & \times \sum_{\substack{\kappa_3,\kappa_3'\geqslant 0\\ \kappa_4+\kappa_3+\kappa_3'\leqslant \min\{\delta,\nu_p(\Delta_{12})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_3'}}{2^{\kappa_3}} \sum_{\substack{\kappa_5,\kappa_5'\geqslant 0\\ \kappa_5+\kappa_5'\leqslant \min\{\delta_1'+\delta_2',\nu_p(\Delta_{12})\}}} \frac{(-1)^{\kappa_5'}}{2^{\kappa_5}} \\ & \times \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3} \frac{\tilde{\rho}\left(p^{N_1},p^{N_2},p^{N_3};F_1,F_2,F_3\right)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}}. \end{aligned}$$

On raisonne comme dans la section 9.5 de [BT13] et on utilise, pour a et b deux entiers naturels, la formule

$$\sum_{\substack{\kappa,\kappa'\geqslant 0\\ \kappa+\kappa'\leqslant \min\{a,b\}\\ 0\leqslant\kappa'\leqslant 1}} \frac{(-1)^{\kappa'}}{z^{\kappa}} = \frac{1}{z^{\min\{a,b\}}}.$$

On commence par se placer dans le cas d'un nombre premier $p\equiv 1 \pmod 4$ qui divise tous les résultants Δ_{ij}. On obtient alors l'égalité

$$f_p'(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta}') = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3} \frac{(\nu_1+1)(\nu_2+1)(\nu_3+1)\rho^{\dagger}(p^{N_1'},p^{N_2'},p^{N_3'};F_1,F_2,F_3)}{C(\delta,N_1',N_2',N_3')2^{\min\{\delta_1'+\delta_2',N_1',N_2',N_3'\}}p^{2(N_1'+N_2'+N_3'+1)}},$$

où

$$C(\delta,N_1',N_2',N_3') = (3/8)^{\min\{\delta,N_1',N_2',N_3'\}}2^{\min\{\delta,N_2',N_3'\}+\min\{\delta,N_1',N_3'\}+\min\{\delta,N_2',N_3'\}}$$

et avec, lorsque $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{N}$,

$$\rho^{\dagger}(p^{a_1},p^{a_2},p^{a_3};F_1,F_2,F_3) = \#\left\{(u,v)\in\left(\mathbf{Z}/p^{a_1+a_2+a_3+1}\mathbf{Z}\right)^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} p^{a_i}\parallel F_i(u,v),\\ p\nmid (u,v)\end{array}\right\}.$$

Il reste à voir sur quels $\boldsymbol{\delta}'=(\delta_1',\delta_2',\delta_3')$ on somme. D'après (1.7.70), on somme sur les triplets suivants :

$$(0,0,0),\quad (0,0,1),\quad (1,0,1),\quad (0,1,1),\quad (1,0,0),\quad (0,1,0),$$

si bien que

$$\begin{aligned} f_p(\boldsymbol{\delta}) = & \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3} \frac{\rho^{\dagger}(p^{N_1''},p^{N_2''},p^{N_3''};F_1,F_2,F_3)}{C(\delta,N_1'',N_2'',N_3'')p^{2(N_1''+N_2''+N_3''+1)}}\Big((\nu_1+1)(\nu_2+1)(\nu_3+1) \\ & -\nu_1\nu_2(\nu_3+1)+\frac{1}{2}\nu_1\nu_3(\nu_2-1)+\frac{1}{2}\nu_2\nu_3(\nu_1-1) \\ & -\frac{1}{2}\nu_2\nu_3(\nu_1+1)-\frac{1}{2}\nu_1\nu_3(\nu_2+1)\Big) \\ = & \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3}(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)\frac{\rho^{\dagger}(p^{N_1''},p^{N_2''},p^{N_3''};F_1,F_2,F_3)}{C(\delta,N_1'',N_2'',N_3'')p^{2(N_1''+N_2''+N_3''+1)}}, \end{aligned}$$

avec $N_i''=\nu_i+\delta_i$. En remarquant que pour N_i'' fixés, il y a $C(\delta,N_1'',N_2'',N_3'')$ triplets $\boldsymbol{\delta}$ tels que $N_i''=\nu_i+\delta_i$, on peut conclure exactement comme dans [BT13, section 9.5] que l'on obtient la quantité adéquate.

Sans être complètement exhaustif, on traite ensuite un cas éloquent dont l'adaptation aux cas restants ne pose aucune difficulté. Tout d'abord, on se place dans un cas où $\nu_p(\Delta_{12}) = 0$. Supposons alors par exemple que $\nu_p(\Delta_{13}) = 0$ et $\nu_p(\Delta_{23}) \geqslant 1$. Dans ce cas de figure, on a clairement

$$\begin{aligned}\min\{\delta_1' + \delta_2', \nu_p(\Delta_{12}), N_1', N_2', N_3'\} \\ = \min\{\delta, \nu_p(\Delta_{12}), \nu_p(\Delta_{13}), \nu_p(\Delta_{23}), N_1', N_2', N_3')\} = 0\end{aligned}$$

et un examen des conditions sur les $\boldsymbol{\delta}'$ dans la formule (1.7.70) montre que la somme sur les $\boldsymbol{\delta}'$ porte sur les triplets $(0,0,0)$ et $(1,0,0)$, si bien qu'on obtient

$$\begin{aligned}f_p(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3} \frac{\rho^\dagger(p^{N_1'}, p^{N_2'}, p^{N_3'}; F_1, F_2, F_3)}{C'(\delta, N_1', N_2', N_3')p^{2(N_1'+N_2'+N_3'+1)}} \\ \times \left((\nu_1+1)(\nu_2+1)(\nu_3+1) - \nu_2\nu_3(\nu_1+1)\right),\end{aligned}$$

où

$$C'(\delta, N_1', N_2', N_3') = 2^{\min\{\delta, N_2', N_3'\} + \min\{\delta, N_1', N_3'\} + \min\{\delta, N_2', N_3'\}}.$$

Mais, le fait que p ne divise ni Δ_{12} ni Δ_{13} implique que nécessairement $\nu_1\nu_2 = \nu_1\nu_3 = 0$ de sorte que

$$\begin{aligned}(\nu_1+1)(\nu_2+1)(\nu_3+1) - \nu_2\nu_3(\nu_1+1) &= \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 1 + \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 \\ &= \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 1\end{aligned}$$

et on peut à nouveau conclure comme dans la section 9.5 de [BT13].

Pour finir, dans le cas $p \equiv 3 \pmod 4$, on a

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbf{N}^3} \frac{\rho^\dagger\left(p^{2\nu_1+\mu_1}, p^{2\nu_2+\mu_2}, p^{2\nu_3+\mu_3}; F_1, F_2, F_3\right)}{p^{2(2\nu_1+2\nu_2+2\nu_3+1)}}$$

que l'on traite comme dans la section 9.5 de [BT13]. Cela permet finalement de conclure à l'égalité

$$c_0 = \sum_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon}\in\Sigma \\ \mathbf{m}\in M}} \omega_\infty(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \prod_p \omega_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$$

et achève la preuve du fait que $c_0 = c_S$.

Remerciements

L'auteur tient ici à exprimer toute sa gratitude à son directeur de thèse Régis de la Bretèche pour ses conseils, son soutien et ses relectures tout au long de ce travail ainsi qu'à Tim Browning, Cyril Demarche, Ulrich Derenthal, Dan Loughran, Emmanuel Peyre et Marta Pieropan pour de nombreuses discussions éclairantes.

2

La géométrie derrière le principe de Manin et la conjecture de Peyre sur certaines surfaces fibrées en coniques

Sommaire

2.1 Introduction **94**
2.1.1 Résultats 98
2.2 Géométrie des surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$ **100**
2.2.1 Quelques réductions 100
2.2.2 Calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ 100
2.3 Arithmétique des surfaces $S_{a,F}$ **106**
2.4 Les torseurs versels **109**
2.4.1 L'anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$ 109
2.4.2 Description des torseurs versels 111
2.4.3 Exemples 117
Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$ 117
Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ 117
Un cas de surface de Châtelet $\mathbf{LC}$ 121
Un cas de surface de Châtelet $\mathbf{F}$ 122
Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F scindé du type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\cdots\mathbf{L}_n$ . . . 123
Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F du type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{n/2}$ 123
2.5 Les torseurs de type $\mathbf{Pic}\big(S_{a,F}\times_{\mathbf{Q}}\mathbf{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$ **124**
2.5.1 Description de $\mathrm{Pic}\big(S_{a,F}\times_{\mathbf{Q}}\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$ 125
2.5.2 Un exemple : Le cas des surfaces de Châtelet avec $a=-1$ et $F=Q_1Q_2$ 134

Abstract. Generalizing the work of La Bretèche, Browning and Peyre [BBP12] and of the author [Des16b], we describe the geometry required by the Manin's principle and by the Peyre's conjecture for a family of conic bundle surfaces containing Châtelet surfaces. These surfaces $S_{a,F}$ are conic bundle surfaces obtained as smooth minimal proper model of

$$Y^2 - aZ^2 = F(X,1)$$

with $a \in \mathbf{Z}$ squarefree and $F \in \mathbf{Z}[x_1, x_2]$ a binary form of even degree n without repeated roots and whose irreducible factors over $\mathbf{Q}$ remain irreducible over $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. In particular, we compute the α and β factors of Peyre's constant for these surfaces $S_{a,F}$. Then, using the formalism of generalized Cox rings developed by Pieropan and Derenthal ([DP14] and [Pie15]), we give a Cox ring of identity type for the surfaces $S_{a,F}$ over $\overline{\mathbf{Q}}$ allowing us to construct explicitly a (infinite) family of versal torsors $\pi_\gamma : \mathcal{T}_\gamma \to S_{a,F}$ above $S_{a,F}$ such that

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_\gamma \pi_\gamma\left(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q})\right).$$

Finally, using the Cox ring of identity type, we describe, up to isomorphism, every Cox ring for $S_{a,F}$ of injective type $\lambda : \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})$. Finally, we give an explicit description of torsors above $S_{a,F}$ of type λ for every a and obtain, for a such that $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ has class number one, a finite family of such torsors $\pi_j : \mathcal{T}_j \to S_{a,F}$ such that

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_j \pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{Q})\right)$$

yielding a nice expression of the Tamagawa factor of the Peyre's constant. We also show that these torsors of type $\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$ are the torsors used in every known proof of the Manin's principle and of the Peyre's conjecture for Châtelet surfaces ([BBP12], [BB12], [BT13], [Des16b]) and complete the verification of Peyre's constant in [BT13] in the case of two non proportional quadratic factors irreducible over $\mathbf{Q}[i]$.

2.1 Introduction

La méthode de descente sur des *torseurs* a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS77], [CTS79] et [CTS87] dans les années 1980 afin d'étudier des problèmes divers concernant les points rationnels : existence de points rationnels, principe de Hasse, approximation faible, densité des points rationnels... L'idée de base est la suivante : il s'agit d'attacher à la variété V dont on cherche à étudier les points rationnels une famille finie de variétés affines auxiliaires de dimension plus grande que celle de V mais de géométrie et d'arithmétique plus simple (en particulier même si la variété de base V ne satisfait pas le principe de Hasse et l'approximation faible, on s'attend à ce que ces variétés auxiliaires les vérifient), chacune de ces variétés étant équipée d'un $\mathbf{Q}$-morphisme dominant vers la variété V, et telles que tout point de $V(\mathbf{Q})$ soit l'image d'un point entier d'une des variétés auxiliaires. Le nombre de ces points entiers peut alors souvent être estimé en faisant appel à la théorie analytique des nombres et au dénombrement de points d'un réseau dans une région donnée. Une des forces de cette méthode du point de vue analytique est que, le plus souvent, le nombre de variables augmente et ainsi celles-ci sont donc en général plus petites ce qui permet de mieux les contrôler.

Plus précisément, on notera $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\overline{\mathbf{Q}})$ et $\overline{V} = \overline{\mathbf{Q}} \times_{\mathbf{Q}} V$ pour une variété V définie sur $\mathbf{Q}$. On appelle alors V-torseur au-dessus d'une variété V définie sur $\mathbf{Q}$ sous un $\mathbf{Q}$-tore algébrique T un espace principal homogène $\mathcal{T} \to V$ sous T (voir [Sko] pour plus de détails). Les classes d'isomorphismes de V-torseurs sous T sont en bijection avec le groupe de cohomologie $H^1_{\text{ét}}(V, T)$ et si V est une variété lisse et géométriquement intègre vérifiant $H^0_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}^*$, alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(V, T) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)\right)$$

où $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)\right)$ envoie un caractère $\psi : \overline{T} \to \mathbf{G}_{m,\overline{Q}}$ sur la classe du $\overline{V}$-torseur $\overline{\mathcal{T}} \times^{\overline{T}} \mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}$ sous $\mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}$ obtenu à partir de $\overline{\mathcal{T}}$ et ψ où l'action de groupe de $\mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}$ est obtenue à partir de l'action de $\overline{T}$ et du morphisme ψ, ce qui fournit bien un élément de $H^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{G}_{m,\overline{\mathbf{Q}}}) = \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$. La quantité $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)\right)$ est appelé le `type` du torseur et si le tore T est déployé, alors il existe au plus un V-torseur sous T de `type` donné à isomorphisme près.

Si $\mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ est sans torsion et de type fini et que T est le tore de groupe de caractère $\hat{T} = \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$, alors si $\chi([\mathcal{T}]) = \mathrm{Id}$ on parle de *torseur versel*. On sait alors que si $V(\mathbf{Q}) \neq \varnothing$, les torseurs versels existent [CTS87].

Un des intérêts majeurs des torseurs réside dans la proposition suivante qui affirme que les torseurs permettent d'obtenir une description agréable de l'ensemble des points rationnels d'une variété V satisfaisant des hypothèses raisonnables.

Proposition 2.1.1 ([CTS77])**.** *Soient V une variété lisse, projective, géométriquement intégré et telle que $\mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ soit sans torsion et de type fini et T un tore algébrique. Pour tout $P \in V(\mathbf{Q})$, il existe un T-torseur $\pi_P : \mathcal{T}_P \to V$ (unique à isomorphisme près) tel que $P \in \pi_P(\mathcal{T}_P(\mathbf{Q}))$.*
De plus, $V(\mathbf{Q})$ est la réunion disjointe des $\pi_{P_i}(\mathcal{T}_{P_i}(\mathbf{Q}))$ pour un ensemble fini de points $P_1, \ldots, P_n \in V(\mathbf{Q})$.

Les meilleurs candidats pour effectuer une descente afin d'étudier les points rationnels sont les *torseurs versels*. En effet, pour V une variété lisse, géométriquement intègre vérifiant $H^0_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}^*$ et $\mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ de type fini, $\mathcal{T}$ un torseur versel pour V et $\mathcal{T}^c$ une compactification lisse de $\mathcal{T}$ (qui existe d'après [Bry79]), alors les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible éventuelles disparaissent pour $\mathcal{T}^c$ [CTS87, Théorème 2.1.2]. Une autre classe importante de torseurs qui partage un certain nombre de propriétés importantes des torseurs versels est celle des *torseurs quasi-universels* où par torseur quasi-universel, on entend torseur de type $\lambda : \mathrm{Pic}\,(V_K) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ pour une extension galoisienne K de $\mathbf{Q}$ sur laquelle V est rationnelle avec la terminologie de [CTS87]. En effet, si K est une extension galoisienne sur laquelle V est rationnelle et $V(K) \neq \varnothing$, alors pour les torseurs quasi-universels de type $\lambda : \mathrm{Pic}\,(V_K) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible éventuelles disparaissent sur une compactification lisse. Dans toute la suite de cet article, on ne s'intéressera plus qu'à des torseurs quasi-universels.

C'est Salberger [Sal98] qui a le premier utilisé une méthode de descente sur les torseurs versels afin d'étudier le principe de Manin dans le cadre des variétés toriques propre, lisses et déployées sur le corps $\mathbf{Q}$. Depuis cet exemple, de nombreux cas du principe de Manin et de la conjecture de Peyre ont été obtenus par une méthode de descente similaire. On renvoie par exemple à l'introduction de [Le 16] pour une liste représentative mais non exhaustive de ces cas pour les surfaces et à l'introduction de [Des16a] pour un état des lieux en dimension supérieure.

À l'instar de cet exemple, la plupart des cas où le principe de Manin a été obtenu par cette méthode de descente sur des torseurs versels l'a été dans le cas de variétés déployées, c'est-à-dire telles que l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique soit triviale. Mais dans ces cas-là, la géométrie derrière la descente n'est en général pas explicitée et la paramétrisation ou le passage au torseur est établi de manière *ad hoc*. On peut malgré tout citer quelques exceptions notables dont le cas de certaines surfaces de

Châtelet ([BB08] et [BT13]) ou encore le cas d'une surface de del Pezzo singulière de degré 4 [BB07c]. Néanmoins, dans chacun de ces cas, l'approximation faible est vérifiée ce qui simplifie le traitement de la conjecture de Peyre et ne rend pas indispensable la compréhension de la géométrie de la descente effectuée lors du comptage (sauf dans le cas Q_1Q_2 de [BT13] dans lequel le traitement de la conjecture de Peyre est en réalité incomplet). La géométrie de la descente utilisée dans [BB07c] a été précisé dans la thèse de Pieropan [Pie15]. Cela permet d'ores et déjà constater que dans le cas de variétés non déployées, les méthodes de descente utilisées pour établir le principe de Manin ne font pas nécessairement appel aux torseurs versels mais peuvent faire appel à des torseurs *quasi-universels* d'un autre type, ces derniers donnant lieu à une paramétrisation plus agréable. On peut également citer entre autres [CTS79] ou [CTCS80] où des méthodes de descente sur des torseurs quasi-universels sont utilisées de manière détaillée mais dans un objectif différent de celui du principe de Manin.

Remarquons pour finir que dans dans le cas d'une variété satisfaisant l'approximation faible, le traitement de la constante de Peyre est grandement simplifié puisque le nombre de Tamagawa est alors simplement donné par $\omega_{V,H_V}(V(\mathbf{A_Q}))$. Au contraire, dans le cas où l'approximation faible n'est pas satisfaite, Salberger [Sal98] a établi comment la constante se remontait naturellement aux torseurs quasi-universels de type $\lambda : \mathrm{Pic}\,(V_K) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ de la façon suivante. Supposons donné J un ensemble fini indexant les classes d'isomorphismes de tels torseurs possédant un point rationnel au-dessus d'une variété projective V et pour tout $j \in J$, on note $\pi_j : \mathcal{T}_j \to V$ un représentant de la classe d'isomorphisme en question. On a alors

$$c_{\mathrm{Peyre}} = \frac{\alpha(X)\beta(X)}{\#Ш^1(\mathbf{Q},T)} \sum_{j\in J} \omega_{V,H_V}\left(\pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{A_Q})\right)\right) \tag{2.1.1}$$

où

$$Ш^1(\mathbf{Q},T) = \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbf{Q},T) \longrightarrow H^1(\mathbf{R},T)\prod_p H^1(\mathbf{Q}_p,T)\right)$$

et T est le tore dual de $\mathrm{Pic}\,(V_K)$. Deux questions se posent alors lors du traitement du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour une variété V.

- Quels torseurs quasi-universels sont utilisés lors de la démonstration du principe de Manin pour V ?
- (**Q'**) : Comment déterminer explicitement des équations de ces torseurs quasi-universels afin de calculer $\omega_{V,H_V}\left(\pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{A_Q})\right)\right)$?

C'est à ces questions dans le cas des surfaces de Châtelet généralisées que l'on s'intéresse dans cet article.

On dispose essentiellement de deux méthodes pour déterminer les torseurs quasi-universels associés à une variété V. La première, à la main en effectuant un certain nombre de transformations élémentaires sur les polynômes définissant la variété V est la méthode appliquée dans [CTS87] ou dans [Sko] dans le cas de variétés possédant un morphisme dominant vers $\mathbf{P}^1$ ou encore dans le cas des surfaces de Châtelet scindées [BBP12]. Dans le cas de [CTS87] ou [Sko], la méthode ne donne que des équations locales de certains torseurs quasi-universels, ce qui n'est pas suffisant pour répondre à la question (**Q'**). Dans le second cas [BBP12], les torseurs versels sont réalisés comme ouvert d'un certain espace affine. On dispose alors d'un formalisme plus général (dans lequel se traduisent les manipulations effectuées dans les deux exemples cités), reposant sur la théorie des *anneaux de Cox* et des *anneaux de Cox généralisés* développé notamment par Derenthal et Pieropan

([Pie15] et [DF13]), qui permet de réaliser les torseurs de certains types λ comme ouverts de certains espaces affines.

Pour être plus précis, si V est une variété normale projective de groupe de Picard libre et de type fini sur un corps algébriquement clos, alors on définit *l'anneau de Cox* de V comme l'algèbre [1] $\mathrm{Pic}(V)$-graduée

$$\mathcal{R}(V) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Pic}(V)} H^0\left(V, \mathcal{O}_V(D)\right)$$

et *l'anneau de Cox de type* $\lambda : \mathrm{Pic}\left(V_K\right) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ pour K un corps de nombres galoisien comme l'algèbre $\mathrm{Pic}(V_K)$-graduée

$$\mathcal{R}_\lambda(V) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Pic}(V_K)} \mathcal{R}(V)_D$$

où $\mathcal{R}(V)_D$ représente l'ensemble des éléments homogènes de $\mathcal{R}(V)$ de degré $[D]$. On a alors un unique torseur de type λ pour V et ce torseur se réalise comme un ouvert du spectre de $\mathcal{R}_\lambda(V)$.

C'est cette dernière méthode que l'on utilisera dans cet article et on renvoie à [ADHL] ou [Pie15] pour plus de détails. La principale difficulté de cette méthode réside dans la détermination d'un anneau de Cox pour une variété donnée. Un des intérêts des anneaux de Cox est qu'une fois déterminé *un* anneau de Cox sur un corps algébriquement clos, alors on peut obtenir relativement aisément, sous certaines hypothèses, par descente galoisienne des anneaux de Cox de tout type sur $\mathbf{Q}$ (à condition que la variété V possède un $\mathbf{Q}$-point par exemple) et ensuite toutes les classes d'isomorphismes d'anneaux de Cox en tordant l'anneau de Cox de départ par un élément de $H^1_{\text{ét}}(V, T)$ [Pie15]. Cela permet alors dans un premier temps de réaliser les torseurs versels comme ouvert du spectre d'un anneau de Cox et dans un second temps de réaliser les torseurs quasi-universels de tout type $\lambda : \hat{T} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{V}\right)$ dont l'image contient un diviseur ample comme ouvert d'un espace affine en passant par les anneaux de Cox généralisés et ainsi d'en expliciter des équations. Le cas où les anneaux de Cox sont de type fini est particulièrement intéressant puisqu'il permet de cette manière de réaliser les torseurs comme ouverts d'un espace affine.

Cet article est ainsi dédié à la géométrie derrière les différentes démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre dans le cas des surfaces de Châtelet et plus généralement à la géométrie derrière le principe de Manin et la conjecture de Peyre pour les surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$ que l'on définit comme modèle minimal propre et lisse de variétés affines de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = F(X, 1) \tag{2.1.2}$$

où F est une forme binaire à coefficients entiers de degré n dont les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, de discriminant non nul et a un entier sans facteur carré. Cette étude se généraliserait sans difficultés à l'étude de variété fibrées en coniques plus générales du type

$$Q(u, v) = F(x_1, x_2)$$

pour Q une forme quadratique entière et F un polynôme à coefficient entiers sans facteur carré et dont les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\Delta}\right)$ avec Δ le

1. Ici, la structure d'algèbre n'est pas immédiate, du fait qu'elle nécessite de choisir des isomorphismes cohérents $O_V(D_1) \otimes O_V(D_2) \cong O_V(D_1 + D_2)$ pour définir un produit. Mais sur un corps algébriquement clos, l'existence d'un point rationnel sur la variété V entraîne qu'un tel choix est possible.

discriminant de Q.

Il est cependant à noter que les méthodes utilisées afin d'obtenir le principe de Manin dans [BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b] ne peuvent fournir de formule asymptotique que si le degré de F est inférieur à 4, autrement dit précisément dans le cas des surfaces de Châtelet. Ainsi, il n'est pas clair (même si c'est probable) que les torseurs de type $\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$ décrits dans cet article soient les torseurs utilisés lors d'une preuve éventuelle du principe de Manin pour ce type de variétés pour une forme F de degré plus grand que 5. Une telle preuve semble totalement hors de portée à l'heure actuelle (sauf peut être le cas scindé en utilisant la machinerie de Green-Tao-Ziegler). Cependant, cette description étant valable pour toute factorisation de F et tout a, elle permet de préciser le traitement incomplet de la conjecture de Peyre de [BT13] et permettra surtout de faciliter le traitement de cette constante dans le cas $a > 0$. Le cas $a > 0$ est un travail en cours de l'auteur dans le cas où le nombre de classes de $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\Delta}\right)$ est égal à 1 et les premières investigations semblent indiquer que les torseurs utilisés dans la démonstration seront les torseurs de type $\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$ décrits dans ce chapitre. Enfin, comme préalablement mentionné, cette description pourrait également s'avérer utile dans le cas où le degré de F est supérieur à 5.

Il pourrait également se révéler intéressant de voir ce que l'on peut dire de l'application de ces méthodes au principe de Manin et à la conjecture de Peyre dans le cas des variétés fibrées en coniques plus générale

$$Q(u, v) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

pour Q une forme quadratique entière et F un polynôme à coefficient entiers sans facteur carré et dont les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\Delta}\right)$ avec Δ le discriminant de Q. La preuve du principe de Manin dans ce cadre est un travail en cours avec Efthymios Sofos.

2.1.1 Résultats

On décrit dans une première partie de cet article le groupe de Picard géométrique et le groupe de Picard sur $\mathbf{Q}$ de $S_{a,F}$ ainsi que le cône pseudo-effectif de $S_{a,F}$ à l'aide de considérations standards sur les surfaces fibrées en coniques. On en déduit alors le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *On a* $\mathrm{rang}(\mathrm{Pic}(S_{a,F})) = 2$ *et* $\alpha(S_{a,F}) = \frac{2}{n}$.

De plus, un résultat de [Sko, proposition 7.12] donne immédiatement lieu au résultat suivant.

Théorème 2.1.2 ([**Sko, proposition 7.12**]). *Si l'on suppose que le degré de F est pair et que $\overline{d_1}, \ldots, \overline{d_m}$ représentent les classes modulo 2 des degrés des facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ du polynôme F, alors $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}}))$ est isomorphe au quotient de l'orthogonal de $(\overline{d_1}, \ldots, \overline{d_m})$ par la droite engendrée par $(1, \ldots, 1)$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$.*

Dans une seconde partie, on exhibe un anneau de Cox de type identité pour les surfaces $\overline{S_{a,F}}$ en se basant sur une description des torseurs versels inspirée par [BBP12].

Théorème 2.1.3. *On pose* $\Delta_{i,j} = \mathrm{Res}(L_i(X, 1), L_j(X, 1))$ *si*

$$F(u, v) = \prod_{i=1}^{n} L_i(u, v) \tag{2.1.3}$$

avec L_i une forme linéaire sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Alors la $\overline{\mathbf{Q}}$-algèbre

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^{\pm} \mid 0 \leqslant i \leqslant n] / \left(\Delta_{j,k} Z_\ell^+ Z_\ell^- + \Delta_{k,\ell} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{\ell,j} Z_k^+ Z_k^-\right)_{1 \leqslant i < j < \ell \leqslant n}$$

est isomorphe à l'anneau de Cox de $\overline{S_{a,F}}$ de type $\mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})}$.

Cela permet alors d'en déduire le théorème suivant.

Théorème 2.1.4. *Supposons que $a < 0$ ou que $a > 0$ et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1 et que si $a > 0$ le nombre de classes restreint soit aussi égal à 1. Il existe un ensemble Γ infini et pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, il existe un torseur versel $\pi_{\boldsymbol{\gamma}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}} \to S_{a,F}$ tels que*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma} \pi_{\boldsymbol{\gamma}} \left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{Q})\right).$$

De plus, ces torseurs versels peuvent être obtenus explicitement et il ne s'agit pas des torseurs utilisés lors des démonstrations du principe de Manin et de la conjecture de Peyre de [BB12], [BT13] et [Des16b]. Il s'agit en revanche des torseurs utilisés dans le cas scindé [BBP12]. De plus, pour $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}$ un torseur versel avec $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, il existe une variété $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}$ telle que $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{A}^2$ et telle que le complémentaire de l'origine $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}^\circ$ de $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}$ soit isomorphe à l'intersection complète (invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathcal{G}$) de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n+2} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$L_i(u,v) = \beta_i(s_i^2 - a t_i^2), \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

avec les notations (2.1.3) et pour un certain n-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tel que l'application $L_i(u,v) \mapsto \beta_i$ soit $\mathcal{G}$-équivariante.

Remarque 2.1.1. Les hypothèses que le nombre de classes et le nombre de classes restreint de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1 nous seront utiles pour caractériser les entiers n tels que n soit de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z. Dans ce cas, un entier n s'écrit sous la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z si, et seulement si, $\nu_p(n) \equiv 0 \pmod 2$ pour tout nombre premier p tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Ces hypothèses impliquent en particulier que a soit un nombre premier congru à 1 modulo 4.

Cela couvre les neuf corps quadratiques imaginaires de nombre de classes 1 (à savoir les corps quadratiques imaginaires de discriminant fondamental égal à -2, -3, -4, -7, -11, -19, -43, -67, -163) et couvre de nombreux exemples de corps quadratiques réels (voir [CR99] pour de nombreux exemples). La conjecture de Gauss implique alors par ailleurs que le nombre de tels corps quadratiques réels est infini.

Dans le cas général, la situation est plus complexe (comme on peut déjà le voir pour l'équation de Pell-Fermat négative $x^2 - ay^2 = -1$) et fait intervenir le corps de classe de Hilbert restreint. Par exemple, l'équation $x^2 - 37y^2 = 12$ admet une solution entière mais pas l'équation $x^2 - 37y^2 = 3$ alors que $\left(\frac{37}{3}\right) = 1$.

On donne ensuite des exemples détaillés d'équations de torseurs versels dans le cas des surfaces de Châtelet pour chacun des différents type de factorisation possibles et pour tout a et on donne des exemples en degré n pair quelconque dans le cas où F est scindé et dans le cas où F est un produit de formes quadratiques non proportionnelles deux à deux et irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$.

Dans un troisième temps, on décrit, à isomorphisme près, tous les torseurs de type injectif $\lambda : \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})$ au-dessus de $S_{a,F}$ à l'aide de la machinerie des anneaux de Cox généralisés développée dans [Pie15] et [DF13].

Théorème 2.1.5. *Supposons que $a < 0$ ou que $a > 0$ et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1 et que si $a > 0$ le nombre de classes restreint soit aussi égal à 1. Il existe un ensemble fini J et pour tout $j \in J$, il existe un torseur de type λ tels que*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j \left(\mathcal{T}_j(\mathbf{Q})\right)$$

et

$$S_{a,F}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j \left(\mathcal{T}_j\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}\right)\right).$$

Ces torseurs peuvent être décrits explicitement pour tout a. Par ailleurs, pour $\mathcal{T}_j$ un torseur de type λ, il existe une variété $\mathcal{X}_j$ telle que $\mathcal{T} = \mathcal{X}_j \times \mathbf{A}^2$ et telle que le complémentaire de l'origine $\mathcal{X}_j^\circ$ de $\mathcal{X}_j$ soit isomorphe à l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+2} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u,v) = n_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

pour un r-uplet d'entier $(n_1, \ldots, n_r)$ tels que $\prod_{i=1}^{r} n_i$ soit de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z.

En particulier, les torseurs utilisés dans les différentes preuves du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour $a = -1$ sont des torseurs de type $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)})$.

On détaille pour finir l'exemple du cas où F est un produit de deux formes quadratiques, complétant par là le traitement de la constante de Peyre effectué dans [BT13].

2.2 Géométrie des surfaces fibrées en coniques $S_{a,F}$

2.2.1 Quelques réductions

Comme mentionné dans [Sko, 7.1], tout modèle propre et lisse d'une variété affine de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = F(X,1)$$

avec a un entier et F une forme binaire de degré quelconque est birationnel au modèle minimal propre et lisse d'une variété affine de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme

$$Y^2 - a'Z^2 = F'(X,1)$$

où F' est une forme binaire à coefficients entiers de degré n pair dont les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a'})$, de discriminant non nul et a' un entier sans facteur carré. On se placera donc *dans le suite* sous ces hypothèses que F est une forme binaire sans facteur multiple, à coefficients entiers, de degré n pair dont les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et que a est un entier sans facteur carré. Il est cependant probable que toute la procédure développée dans ce chapitre s'adapterait dans le cas n impair en utilisant le modèle explicité dans [CTS82].

2.2.2 Calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$

On définit la surface $S_{a,F}$ comme modèle minimal propre et lisse d'une variété affine de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{Q}}$ de la forme

$$Y^2 - aZ^2 = F(X,1) \tag{2.2.4}$$

où F est une forme binaire à coefficients entiers de degré n pair dont les facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ restent irréductibles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, de discriminant non nul et a un entier sans facteur carré. D'après la section 2.2.1, ces hypothèses ne sont pas restrictives. On retrouve lorsque $n = 4$ le cas de surfaces de Châtelet classiques. Ces surfaces sont brièvement mentionnées dans [CTSSD87b] et on détaille ici les éléments de leur géométrie qui nous seront utiles. Ces surfaces sont en particulier rationnelles sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et on supposera dans toute la suite que les surfaces $S_{a,F}$ considérées vérifient l'hypothèse suivante : $S_{a,F}(\mathbf{Q}) \neq \varnothing$.

Construisons dans un premier temps un modèle minimal propre et lisse de (2.2.4) de manière analogue à [BBP12]. Soient S_1 et S_2 les hypersurfaces de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ définies respectivement pour $([Y : Z : T], U) \in \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ et $([Y : Z : T], V) \in \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ par

$$Y^2 - aZ^2 = T^2 F(U, 1)$$

et

$$Y^2 - aZ^2 = T^2 F(1, V).$$

Si l'on considère U_1 l'ouvert de S_1 défini par $U \neq 0$ et U_2 l'ouvert de S_2 défini par $V \neq 0$, alors l'application [2]

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & U_2 \\ ([Y : Z : T], U) & \longmapsto & \left([Y : Z : U^{n/2}T], \frac{1}{U}\right) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme et $S_{a,F}$ peut être obtenue en recollant S_1 et S_2 le long de φ. Cela permet d'en déduire que les surfaces $S_{a,F}$ sont bien des surfaces fibrées en coniques. En effet, les applications $\varphi_i : S_i \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ pour $i \in \{1, 2\}$ définies respectivement par

$$([Y : Z : T], U) \longmapsto [U : 1]$$

et

$$([Y : Z : T], V) \longmapsto [1 : V]$$

se recollent pour donner lieu à une fibration conique $\pi : S_{a,F} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ possédant n fibres dégénérées [3] sur $\overline{\mathbf{Q}}$ au-dessus des points $[-b_i : a_i]$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et où sur $\overline{\mathbf{Q}}$, on a posé

$$F(u, v) = \prod_{k=1}^{n} (a_i u + b_i v),$$

pour a_i et b_i dans $\overline{\mathbf{Q}}$. On considère alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $D_i^{\pm}$ le sous-schéma irréductible de $\overline{S_{a,F}}$ définie par

$$U = -\frac{b_i}{a_i} \quad \text{et} \quad Y \pm \sqrt{a} Z = 0$$

ainsi que $E^{\pm}$ le sous-schéma irréductible de $\overline{S_{a,F}}$ défini par

$$T = 0 \quad \text{et} \quad Y \pm \sqrt{a} Z = 0.$$

Ces sous-schémas correspondent aux courbes exceptionnelles et ils vérifient

$$(E^+, E^+) = (E^-, E^-) = -2, \quad (D_j^+, D_j^+) = (D_j^-, D_j^-) = -1 \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

2. Ici, on utilise l'hypothèse n pair !

3. À nouveau, l'hypothèse n pair intervient ici puisque dans ce cas le fibre à l'infini est lisse, contrairement au cas n impair (voir [CTS82]).

et

$$(D_j^+, D_j^-) = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad (E^+, D_j^+) = (E^-, D_j^-) = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

toutes les autres multiplicité d'intersection étant nulles.

Des considérations standards sur les fibrations en coniques (voir par exemple [CTCS80]) fournissent alors que $\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})$ est libre engendré par les $2(n+2)$ courbes exceptionnelles avec les relations

$$\left[D_j^+\right] + \left[D_j^-\right] = \left[D_i^+\right] + \left[D_i^-\right] \qquad (i \neq j \in \{1, \ldots, n\}) \tag{2.2.5}$$

et

$$\left[E^+\right] + \left[D_{i_1}^+\right] + \cdots + \left[D_{i_{n/2}}^+\right] = [E^-] + \left[D_{i_{n/2+1}}^-\right] + \cdots + \left[D_{i_n}^-\right] \qquad \{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}. \tag{2.2.6}$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}}) = \left\langle \left[E^+\right], \left[D_1^+\right], \ldots, \left[D_n^+\right], \left[D_1^-\right] \right\rangle \cong \mathbf{Z}^{n+2}.$$

La formule d'adjonction fournit alors aisément, à la manière de [BBP12], que

$$\omega_S^{-1} = 2\left[E^+\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[D_i^+\right] = 2\left[E^-\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[D_i^-\right].$$

On en déduit alors les deux propositions suivantes.

Proposition 2.2.1. *Les sections* $(T, UT, \ldots, U^{n/2}T, Y, Z)$ *forment une base de* $H^0\left(S_{a,F}, \omega_{S_{a,F}}^{-1}\right)$.

Démonstration– La démonstration suit, *mutatis mutandis*, celle de [BBP12, lemma 2.1] dans le cas $n = 4$. □

Il s'ensuit en particulier le résultat suivant.

Proposition 2.2.2. *Le système linéaire* $\left|\omega_{S_{a,F}}^{-1}\right|$ *est sans point base et la base exhibée en Proposition 2.2.1 donne lieu à un morphisme* $\psi : S_{a,F} \to \mathbf{P}^{\frac{n}{2}+2}$ *dont l'image est la surface (singulière)* S' *donnée par l'intersection de* $\frac{n}{2}$ *quadriques*

$$\begin{cases} x_0x_2 = x_1^2 \\ x_1x_3 = x_2^2 \\ \vdots \\ x_{\frac{n}{2}-2}x_{\frac{n}{2}} = x_{\frac{n}{2}-1}^2 \\ x_{\frac{n}{2}+1}^2 - ax_{\frac{n}{2}+2}^2 = a_nx_{\frac{n}{2}}^2 + a_{n-1}x_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-2}x_{\frac{n}{2}-1}^2 + a_{n-3}x_{\frac{n}{2}-1}x_{\frac{n}{2}-2} + \cdots + a_0x_0^2 \end{cases}$$

si

$$F(X, 1) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

L'application induite $\psi : S_{a,F} \to S'$ *correspond à l'éclatement des points singuliers de* S' *donnés par* $P^{\pm} = [0 : \cdots : 0 : 1 : \pm\sqrt{a}]$ *et* $\psi^{-1}(P^{\pm}) = E^{\pm}$.

Ce morphisme ψ, permet, par exemple à la manière de [Des16b], de définir une hauteur sur $S_{a,F}$. On peut alors établir que $S_{a,F}$ est «presque de Fano» au sens de [Pey01, formule 5.1] et ainsi le principe de Manin et la conjecture de Peyre doivent décrire la répartition des points rationnels sur les surfaces $S_{a,F}$. En effet, puisque $S_{a,F}$ est géométriquement rationnelle, on a $H^1(S_{a,F}, \mathcal{O}_S) = H^2(S_{a,F}, \mathcal{O}_S) = \{0\}$. De plus, le groupe de Picard géométrique est sans torsion et on verra grâce à la Proposition 2.2.5 que le cône pseudo-effectif contient la classe du diviseur anticanonique. Le problème de comptage se ramène alors de façon analogue à [Des16b] à l'estimation de quantités du type

$$S(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}(X)} r_a(F(\mathbf{x})), \tag{2.2.7}$$

si $r_a(n)$ désigne le nombre de représentations d'un entier n sous la forme $n = y^2 - az^2$ avec y et z deux entiers vérifiant par ailleurs la condition $|y|, |z| \leqslant B$ lorsque $a > 0$. On montre le résultat suivant analogue de [Bro10] dans le cas des surfaces de Châtelet.

Proposition 2.2.3. *Supposons une norme $||.||$ de $\mathbf{R}^{\frac{n}{2}+3}$ donnée et que l'on travaille avec la hauteur*

$$H([x_0 : \cdots : x_{\frac{n}{2}+2}]) = ||(x_0, \ldots, x_{\frac{n}{2}+2})||$$

pour x_i des entiers premiers entre eux. On a alors, si

$$N(B) = \#\{x \in S_{a,F}(\mathbf{Q}) \mid H(x) \leqslant B\},$$

l'égalité

$$N(B) = \frac{1}{4}\#\left\{(y, z, t; u, v) \in \mathbf{Z}^5 \ : \ \begin{array}{c} (y, z, t) = (u, v) = 1 \\ ||(tu^{n/2}, tvu^{n/2-1}, \ldots, tv^{n/2}, y, z)|| \leqslant B \\ y^2 - az^2 = t^2 F(u, v) \end{array}\right\}.$$

Démonstration– On a immédiatement

$$N(B) = \frac{1}{2}\#\left\{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{n/2+3} \mid \mathrm{pgcd}(\mathbf{x}) = 1,\ \mathbf{x} \in S',\ ||\mathbf{x}|| \leqslant B\right\}.$$

Or, on a exactement deux façons d'écrire $(x_0, \ldots, x_{n/2}) \in \mathbf{Z}^{n/2+1}$ vérifiant

$$x_0 x_2 = x_1^2, \quad x_1 x_3 = x_2^2, \quad \ldots, \quad x_{\frac{n}{2}-2} x_{\frac{n}{2}} = x_{\frac{n}{2}-1}^2 \tag{2.2.8}$$

sous la forme

$$x_0 = tu^{n/2}, x_1 = tvu^{n/2-1}, \ldots, x_{n/2} = tv^{n/2},$$

où, au signe près, on a nécessairement

$$t = \mathrm{pgcd}(x_0, \ldots, x_{\frac{n}{2}}), \quad u = \mathrm{pgcd}\left(\frac{x_0}{t}, \ldots, \frac{x_{\frac{n}{2}-1}}{t}\right), \quad v = \mathrm{pgcd}\left(\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_{\frac{n}{2}}}{t}\right).$$

Lorsque $n \equiv 0 \pmod 4$, on ne peut qu'échanger le signe du couple (u, v) tandis que lorsque $n \equiv 2 \pmod 4$, on ne peut qu'échanger conjointement le signe du couple (u, v) et celui de t.

En effet, les relations (2.2.8) impliquent que si $p \mid v$, alors

$$\nu_p(x_i) = i\nu_p(x_1) \quad i \in \left\{1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$$

et si $p \mid u$, alors

$$\nu_p(x_i) = \left(\frac{n}{2} - i\right) \nu_p(x_{n/2-1}) \quad i \in \left\{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\right\}.$$

On poursuit alors en remarquant, grâce aux relations (2.2.8), que $\mathrm{pgcd}_{i \neq j}(x_i/t) = 1$ si $j \notin \{0, n/2\}$ et que les conditions $p \mid (x_i/(tv), x_j/(tv))$ pour $i, j \neq 0$ et $p \mid (x_i/(tu), x_j/(tu))$ pour $i, j \neq n/2$ conduisent à une contradiction. Autrement dit, si $p \mid x_i$ pour $i \in \{0, \ldots, n/2\}$, alors $p \mid t$ ou $p \mid u$ ou $p \mid v$. En effet, supposons que $p \mid x_i$ pour $i \in \{0, \ldots, n/2\}$, alors les relations (2.2.8) fournissent que $p \mid x_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n/2-1\}$. Supposons alors que $p \nmid x_{n/2}$. On a alors par récurrence

$$\nu_p(x_i) = \left(\frac{n}{2} - i\right) \nu_p(x_{n/2-1}) \quad i \in \{1, \ldots, n/2\}.$$

On déduit ainsi de $x_0 x_2 = x_1^2$ que $\nu_p(x_0) = \frac{n}{2} \nu_p(x_{n/2-1})$ et que par conséquent $p \mid x_0$. Le cas $p \nmid x_0$ se traite de manière analogue et fournit alors le résultat. On a clairement $(u, v) = 1$ et la condition $\mathrm{pgcd}(\mathbf{x}) = 1$ se traduit par $(y, z, t) = 1$. On conclut finalement la preuve en remarquant que si l'on note

$$Q(x_0, \ldots, x_{n/2}) = a_n x_{\frac{n}{2}}^2 + a_{n-1} x_{\frac{n}{2}} x_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-2} x_{\frac{n}{2}-1}^2 + a_{n-3} x_{\frac{n}{2}-1} x_{\frac{n}{2}-2} + \cdots + a_0 x_0^2$$

la $\frac{n}{2}$-ème forme quadratique définissant S', alors on a

$$Q(tu^{n/2}, tvu^{n/2-1}, \ldots, tv^{n/2}) = t^2 F(u, v).$$

□

On fait alors apparaître les sommes (2.2.7) par le même procédé que dans [Des16b]. On ne sait en revanche pas estimer ce type de sommes dès que $n > 4$. L'article [Bro10] s'adapte cependant sans difficulté pour fournir une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour $N(B)$ en remarquant que la démonstration ne fait pas appel au degré de F.

Proposition 2.2.4. *On a*

$$\mathrm{Pic}(S_{a,F}) = \left\langle \left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right], \left[\omega_{S_{a,F}}^{-1}\right] \right\rangle.$$

En particulier, on a $\mathrm{rang}\,(\mathrm{Pic}(S_{a,F})) = 2$ *et le principe de Manin prédit que*

$$N(B) = c_{\mathrm{Peyre}} B \log(B)(1 + o(1)).$$

Démonstration– Commençons par calculer $\left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\langle\sigma\rangle}$, pour σ la conjugaison dans $\mathbf{Q}\left(\sqrt{a}\right)$. Soit

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[D_i^+\right] + b\left[E^+\right] + c\left[D_1^-\right] \quad \text{avec} \quad (a_1, \ldots, a_n, b, c) \in \mathbf{Z}^{n+2}$$

un élément de $\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})$. On a que $D \in \left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\langle\sigma\rangle}$ si, et seulement si, $D = \sigma(D)$, soit si, et seulement si,

$$D = \left(\sum_{i=2}^{n} a_i + c - \left(\frac{n}{2} - 1\right) b\right) \left[D_1^+\right] + \sum_{i=2}^{n} (b - a_i) \left[D_i^+\right] + b\left[E^+\right] + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{n}{2} b\right) \left[D_1^-\right].$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} a_1 &= \sum_{i=2}^{n} a_i + c - \left(\frac{n}{2} - 1\right) b \\ b &= 2a_2 \\ &\vdots \\ b &= 2a_n \\ c &= \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{n}{2} b \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 &= a_2 + c \\ b &= 2a_2 \\ &\vdots \\ b &= 2a_n \end{cases}$$

si bien que $D = (a_1 - a_2)\left(\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right]\right) + a_2\left(\left[D_1^+\right] + \cdots + \left[D_n^+\right] + 2\left[E^+\right]\right)$ et

$$\left\langle \left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right], \left[\omega_{S_{a,F}}^{-1}\right] \right\rangle \subseteq \left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\langle\sigma\rangle}.$$

Le résultat suit alors aisément puisque

$$\left\langle \left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right], \left[\omega_{S_{a,F}}^{-1}\right] \right\rangle \subset \mathrm{Pic}(S_{a,F}) = \left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\mathcal{G}} \subset \left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\langle\sigma\rangle},$$

si $\mathcal{G}$ désigne le groupe de Galois de l'extension $K(\sqrt{a})$ pour K le corps de décomposition sur $\mathbf{Q}$ du polynôme $F(X,1)$. □

On démontre alors la proposition suivante, fondamentale pour le calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ intervenant dans la constante de Peyre. On pose $C_{\mathrm{eff}}(S_{a,F})$ le cône fermé engendré par les classes de diviseurs effectifs et $\mathcal{G}$ est le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de $K(\sqrt{a})$ avec K le corps de décomposition du polynôme $F(X,1)$.

Proposition 2.2.5. *On a*

$$C_{\mathrm{eff}}(S_{a,F}) = \left\langle \left[E^+\right] + \left[E^-\right], d\left(\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right]\right) \right\rangle$$

où d est le minimum des degrés des facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ de F.

Démonstration– En combinant le théorème 5.1.3.1 et la proposition 5.1.1.6 de [ADHL], on déduit que $C_{\mathrm{eff}}(\overline{S_{a,F}})$ est engendré par les classes des diviseurs premiers E tels que $E^2 < 0$. La démonstration de la proposition 5.2.1.10 de [ADHL] implique alors que $C_{\mathrm{eff}}(\overline{S_{a,F}})$ est engendré par les classes de $[E^\pm]$ et $\left[D_i^\pm\right]$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. On en déduit alors le résultat puisque

$$C_{\mathrm{eff}}(S_{a,F}) = \left(C_{\mathrm{eff}}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\mathcal{G}}.$$

□

Cette proposition permet le calcul du facteur $\alpha(S_{a,F})$ intervenant dans la conjecture de Peyre.

Proposition 2.2.6. *On a $\alpha(S_{a,F}) = \frac{2}{n}$.*

Posons $e_1 = \omega_{S_{a,F}}^{-1}$ et $e_2 = [D_1^+] + [D_1^-]$. On utilise alors la définition suivante de la constante $\alpha(S_{a,F})$ donnée dans [Pey95]

$$\alpha(S_{a,F}) = \mathrm{Vol}\left\{x \in C_{\mathrm{eff}}(S_{a,F})^\vee \quad | \quad \langle \omega_{S_{a,F}}^{-1}, x\rangle = 1\right\},$$

où la mesure sur l'hyperplan

$$\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathrm{Pic}(S_{a,F})^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \quad | \quad \langle \omega_{S_{a,F}}^{-1}, x \rangle = 1 \right\}$$

est définie dans [Pey95]. Le cône $C_{\mathrm{eff}}(S_{a,F})$ est donc engendré par $e_1 - \frac{2}{n} e_2$ et de_2 si bien que la constante $\alpha(S_{a,F})$ est donnée par le volume de la région

$$\left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 1, \quad dy > 0, \quad x - \frac{2}{n} y > 0 \right\}.$$

Autrement dit, on obtient la longueur du segment $\left[0, \frac{2}{n}\right]$, soit $\alpha(S_{a,F}) = \frac{2}{n}$. □

2.3 Arithmétique des surfaces $S_{a,F}$

On rappelle ici le résultat suivant que l'on peut trouver dans [Sko, Proposition 7.1.1] ou dans [San80, Proposition 1] et qui permet de calculer le coefficient $\beta(S_{a,F})$ intervenant dans l'expression conjecturale de la constante de Peyre

$$\beta(S_{a,F}) = \# H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})) = \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Br}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Br}(S_{a,F})\right).$$

Proposition 2.3.1 ([Sko]). *On suppose que le degré de F est pair. Soient $\overline{d_1}, \ldots, \overline{d_m}$ les classes modulo 2 des degrés des facteurs irréductibles sur $\mathbf{Q}$ du polynôme F. Alors $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}}))$ est isomorphe au quotient de l'orthogonal de $(\overline{d_1}, \ldots, \overline{d_m})$ par la droite engendrée par $(1, \ldots, 1)$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$.*

Démonstration– Voir [Sko, Proposition 7.1.1]. □

En particulier, si tous les d_i sont pairs, alors

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{m-1} \quad \text{et} \quad \beta(S_{a,F}) = 2^{m-1}$$

et sinon

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{m-2} \quad \text{et} \quad \beta(S_{a,F}) = 2^{m-2}.$$

On en déduit le tableau suivant dans le cas des surfaces de Châtelet qui nous intéressent tout particulièrement dans cette thèse :

Cas	$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}),\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}}))$	$\beta(S_{a,F})$
$\mathbf{L_1L_2L_3L_4}$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$	4
$\mathbf{LC}$	$\{0\}$	1
$\mathbf{Q_1Q_2}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	2
$\mathbf{L_1L_2Q}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	2
$\mathbf{F}$	$\{0\}$	1

Tableau 2.1 – Valeurs du facteur $\beta(S_{a,F})$ pour les surfaces de Châtelet

Cette quantité $\beta(S_{a,F})$ est fortement reliée aux concepts de principe de Hasse et d'approximation faible sur $S_{a,F}$. Ces deux notions se révèlent cruciales lorsqu'il s'agit d'interpréter la constante obtenue dans la formule asymptotique donnée par le principe de Manin. En effet, dans les cas où le principe de Hasse est vérifié, la constante est donnée par le produit des densités p-adiques comme par exemple dans [Bir62] ou [BHB17]. Enfin, le fait de vérifier ou non l'approximation faible s'avère capital puisque le troisième facteur de la constante de Peyre est la mesure de Tamagawa du noyau à droite de l'accouplement de Brauer-Manin $\omega_H\left(S_{a,F}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(S_{a,F})}\right)$ et que ce groupe de Brauer joue un rôle central en ce qui concerne les obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible. En effet, on a

$$\overline{S_{a,F}(\mathbf{Q})} \subset S_{a,F}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(S_{a,F})} \subset S_{a,F}(\mathbf{A_Q}).$$

On sait aujourd'hui qu'il ne s'agit pas de la seule obstruction possible mais on dispose de la conjecture suivante de Colliot-Thélène et Sansuc qui date des années 1970. Salberger laisse même entendre que celle-ci pourrait se généraliser aux surfaces unirationnelles [Sal98].

Conjecture. *Si S est une surface définie sur $\mathbf{Q}$ géométriquement rationnelle, i.e. telle que $S \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}$ soit birationnelle à $\mathbf{P}^2_{\overline{\mathbf{Q}}}$, alors on a*

$$\overline{S(\mathbf{Q})} = S(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(S)}.$$

En admettant cette conjecture, on peut voir que les deux définitions de la constante conjecturale de Salberger [Sal98] et de Peyre [Pey01] sont les mêmes, puisque les surfaces de Châtelet, et plus généralement les surfaces $S_{a,F}$, sont géométriquement rationnelles. Enfin, il est à noter, et ce sera très important dans la suite, que ce résultat a été démontré par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans le cas des surfaces de Châtelet ([CTSSD87a] et [CTSSD87b]).

Théorème 2.3.1 ([**CTSSD87a**] **et** [**CTSSD87b**])**.** *Si $S_{a,F}$ est une surface de Châtlelet, alors on a*

$$\overline{S_{a,F}(\mathbf{Q})} = S_{a,F}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(S_{a,F})}.$$

On déduit de ces deux mêmes articles [CTSSD87a, CTSSD87b] la proposition suivante.

Proposition 2.3.2. *Le principe de Hasse est vérifié dès que F possède un facteur linéaire, c'est-à-dire dans les cas* $\mathbf{L_1L_2L_3L_4}$, $\mathbf{L_1L_2Q}$ *et* $\mathbf{LC}$ *et dans le cas* $\mathbf{F}$ *où le polynôme* $\mathbf{F}$ *est irréductible. Dans le cas* $\mathbf{Q_1Q_2}$, *il existe des contre-exemples.*

L'approximation faible est vérifiée dans les cas $\mathbf{LC}$ *et* $\mathbf{F}$. *Elle n'est jamais vérifiée dans le cas déployé* $\mathbf{L_1L_2L_3L_4}$. *Elle n'est pas toujours vérifiée dans les cas* $\mathbf{Q_1Q_2}$ *et* $\mathbf{L_1L_2Q}$.

Démonstration– La partie de la proposition concernant le principe de Hasse est intégralement démontrée dans [CTSSD87a] et [CTSSD87b] si l'on y ajoute la remarque élémentaire que dans le cas où l'on a un facteur linéaire L, alors L a un zéro rationnel et donc cela fournit un point rationnel et le principe de Hasse est vérifié.

Concernant l'approximation faible, on trouve traité dans [BBP12] le cas $\mathbf{L_1L_2L_3L_4}$. Lorsque le groupe quotient $\mathrm{Br}(S_{a,F})/\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$ est trivial, on obtient par le Théorème 2.3.1 l'approximation faible (qui entraîne le principe de Hasse). C'est notamment le cas dans les cas $\mathbf{LC}$ et $\mathbf{F}$. Pour les deux derniers cas, à savoir $\mathbf{Q_1Q_2}$ et $\mathbf{L_1L_2Q}$, dès lors qu'on a un facteur quadratique Q qui change de signe, on peut procèder comme dans [BBP12] pour aboutir au fait que l'approximation faible n'est pas vérifiée. □

On donne le tableau récapitulatif suivant concernant le principe de Hasse et l'approximation faible pour les surfaces de Châtelet.

Cas	Principe de Hasse	Approximation Faible
$\mathbf{L_1L_2L_3L_4}$	✓	✗
$\mathbf{LC}$	✓	✓
$\mathbf{Q_1Q_2}$	✗	✗
$\mathbf{L_1L_2Q}$	✓	✗
$\mathbf{F}$	✓	✓

Tableau 2.2 – Principe de Hasse et approximation faible sur les surfaces de Châtelet. Le symbole ✓ signifie vérifié, le symbole ✗ signifie qu'il existe des cas pour lequel le principe est non vérifié mais que ce n'est pas nécessairement systématique et ✗ signifie non vérifié.

Lorsque $n > 4$, la situation est moins précise et l'on ne dispose que de la conjecture 2.3 qui affirme que la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible est l'obstruction de Brauer-Manin. En effet, les méthodes utilisées dans [CTSSD87a] et [CTSSD87b] reposent sur une descente sur les torseurs versels et plus particulièrement sur le fait que le principe de Hasse et l'approximation faible soient vérifiés sur l'intersection de deux quadriques. Dans le cas général et comme on le verra en section suivante, les torseurs versels sont une intersection de $n-2$ quadriques sur lesquels on ne sait pas étudier le principe de Hasse et l'approximation faible. Ainsi, cet article ne donne pas lieu à une étude de ces deux principes sur les surfaces $S_{a,F}$. On peut malgré tout noter que lorsque F est irréductible, l'obstruction de Brauer-Manin disparaît et il découle des travaux [CTS82] que le principe de Hasse et l'approximation faible sont vérifiés sous l'hypothèse H de Schinzel. De plus, si F n'admet que des facteurs irréductibles de degré pair, il existe un processus fini afin de déterminer si $S_{a,F}(\mathbf{Q})$ est vide ou non et dans le second cas, les points rationnels sont Zariski-denses et il existe un processus fini pour déterminer si un point adélique M appartient à l'adhérence de $V(\mathbf{Q})$ (voir [CTS82]).

2.4 Les torseurs versels

2.4.1 L'anneau de Cox de type identité sur $\overline{\mathbf{Q}}$

On commence par la proposition suivante, qui décrit explicitement les torseurs versels associés à $\overline{S_{a,F}}$. On pose sur $\overline{\mathbf{Q}}$

$$F(u,v) = \prod_{k=1}^{n} L_i(u,v) \quad \text{où} \quad L_i(u,v) = a_i u + b_i v \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

On pose alors pour tout $i \neq j \in \{1,\dots,n\}$

$$\Delta_{i,j} = \mathrm{Res}(L_i(x,1), L_j(x,1)).$$

On considère alors $\overline{\mathcal{T}}$ le sous-ensemble constructible de

$$\mathbf{A}^{2n+2} = \mathrm{Spec}\left(\mathbf{Q}[Z_0^{\pm}, Z_i^{\pm} \mid i \in \{1,\dots,n\}]\right)$$

défini par les équations

$$P_{j,k,\ell} = \Delta_{j,k} Z_\ell^+ Z_\ell^- + \Delta_{k,\ell} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{\ell,j} Z_k^+ Z_k^- \tag{2.4.9}$$

pour $1 \leqslant i < j < \ell \leqslant n$ et les inégalités

$$\left((Z_i^+, Z_i^-), (Z_j^+, Z_j^-)\right) \neq ((0,0),(0,0)) \tag{2.4.10}$$

pour $i \neq j \in \{0,\dots,n\}$. Définissons à présent un morphisme $\pi : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{S_{a,F}}$. Pour ce faire, comme dans [BBP12, section 4], il suffit de définir un morphisme $\hat{\pi} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}}$ où $\overline{\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}} \subset \mathbf{A}^5_{\overline{\mathbf{Q}}} = \mathrm{Spec}\left(\overline{\mathbf{Q}}[y,z,t,u,v]\right)$ est le sous-schéma défini par l'équation

$$y^2 + z^2 = t^2 F(u,v) \tag{2.4.11}$$

avec les conditions $(y,z,t) \neq 0$ et $(u,v) \neq 0$. Considérons alors $(z_j^{\pm})_{0 \leqslant j \leqslant n} \in \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathbf{Q}})$. On pose

$$u = \frac{1}{\Delta_{1,2}}\left(b_2 z_1^+ z_1^- - b_1 z_2^+ z_2^-\right)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{1,2}}\left(a_1 z_2^+ z_2^- - a_2 z_1^+ z_1^-\right)$$

de sorte que les relations (2.4.9) fournissent les égalités

$$u = \frac{1}{\Delta_{i,j}}\left(b_j z_i^+ z_i^- - b_i z_j^+ z_j^-\right)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{i,j}}\left(a_i z_j^+ z_j^- - a_j z_i^+ z_i^-\right)$$

pour tout $i \neq j \in \{1,\dots,n\}$. On a ainsi clairement

$$L_i(u,v) = z_i^+ z_i^- \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

On introduit alors $(y,z,t) \in \overline{\mathbf{Q}}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ définis par

$$\begin{cases} y+\sqrt{a}z = \left(z_0^+\right)^2 \prod_{i=1}^n z_i^+ \\ y-\sqrt{a}z = \left(z_0^-\right)^2 \prod_{i=1}^n z_i^- \\ t = z_0^+ z_0^- \end{cases}$$

de sorte que $y^2 - az^2 = t^2 F(u,v)$ et que $(y,z,t,u,v) \in \overline{\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}}(\overline{\mathbf{Q}})$. On obtient alors une description analogue à [BBP12] du tore de néron-Sévri T_{NS} et en suivant, *mutatis mutandis*, la démonstration de [BBP12, Proposition 4.4], il s'ensuit la proposition suivante, dont nous ne détaillons pas plus la preuve ici.

Proposition 2.4.1. *La variété $\overline{\mathcal{T}}$ équipée du morphisme $\pi : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{S_{a,F}}$ est un torseur versel au-dessus de $\overline{S_{a,F}}$.*

On déduit de cette proposition l'anneau de Cox de type identité associé à $\overline{S_{a,F}}$, qui généralise la proposition 2.67 de [Pie15].

Proposition 2.4.2. *La $\overline{\mathbf{Q}}$-algèbre*

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^{\pm} \mid 0 \leqslant i \leqslant n] / \left(\Delta_{j,k} Z_\ell^+ Z_\ell^- + \Delta_{k,\ell} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{\ell,j} Z_k^+ Z_k^-\right)_{1 \leqslant i < j < \ell \leqslant n}$$

est isomorphe à l'anneau de Cox de $\overline{S_{a,F}}$ de type $\mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})}$.

Démonstration– On utilise [ADHL, Proposition 6.1.3.9 (iii)] combiné avec la Proposition 2.4.1 pour obtenir que l'anneau de Cox $\overline{R}$ de $\overline{S_{a,F}}$ de type $\mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})}$ est donné par l'anneau des sections globales de la variété quasi-affine de $\mathbf{A}^{2n+2}_{\overline{\mathbf{Q}}}$ donnée par les équations (2.4.9) et les inégalités (2.4.10). On remarque alors que $\overline{\mathcal{T}}$ est recouvert par les ouverts affines $U_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}$ de $\overline{R}$ définis par les conditions

$$Z_{i_0}^{\pm} \neq 0 \quad \text{et} \quad Z_{i_1}^{\pm} \neq 0 \quad \text{et} \quad \dots \quad \text{et} \quad Z_{i_{n-1}}^{\pm} \neq 0$$

pour tous $0 \leqslant i_0 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n$. On se fixe à présent $0 \leqslant i_0 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n$ et $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \{\pm\}^n$ et on notera $S_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}$ la partie multiplicative engendrée par $Z_{i_0}^{s_0}$, $Z_{i_1}^{s_1}, \dots, Z_{i_{n-1}}^{s_{n-1}}$. À la manière de [Har08, Theorem 3.4], on établit qu'on a un isomorphisme entre $\mathcal{O}(U_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}})$ et le localisé $\overline{R}_{S_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}}$ en passant au quotient dans l'isomorphisme (par exemple dans le cas de $S_{0,\dots,n-1}^{(+,\dots,+)}$) entre $\overline{\mathbf{Q}}[Z_i^{\pm} \mid 0 \leqslant i \leqslant n,\ Z_i^{\pm} \notin S_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}]$ et $\overline{\mathbf{Q}}[Z_i^{\pm} \mid 0 \leqslant i \leqslant n]_{S_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}}$ défini par

$$f(Z_0^-, Z_1^-, \dots, Z_{n-1}^-, Z_n^+, Z_n^-) \longmapsto f\left(\frac{Z_0^-}{Z_0^+ \prod_{i=1}^{n-1} \left(Z_i^+\right)^2}, \dots, \frac{Z_{n-1}^-}{Z_{n-1}^+ \prod_{i=0}^{n-2} \left(Z_i^+\right)^2}, \frac{Z_n^+}{\prod_{i=0}^{n-1} Z_i^+}, \frac{Z_n^-}{\prod_{i=0}^{n-1} Z_i^+}\right).$$

Soit à présent $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{T}})$. Alors pour tout choix de $0 \leqslant i_0 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n$ et $\mathbf{s} \in \{\pm\}^n$, $f \in \mathcal{O}(U_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}})$ si bien qu'il existe $\mathbf{N}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{s}} = (N_{0,\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}, \dots, N_{n-1,\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}) \in \mathbf{N}^n$ et $f_i \in \overline{R}$ tels que

$$f = \frac{f_i}{\left(Z_{i_0}^{s_0}\right)^{N_{0,\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}} \left(Z_{i_1}^{s_1}\right)^{N_{1,\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}} \times \cdots \times \left(Z_{i_{n-1}}^{s_{n-1}}\right)^{N_{n-1,\mathbf{i}}^{\mathbf{s}}}}. \tag{2.4.12}$$

Établissons alors que $\overline{R}$ est un anneau factoriel. Il est clair que chaque $Z_i^{\pm}$ est un élément premier et que $\overline{R}$ est engendré par les

$$P_{1,2,i} = \Delta_{1,2} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{2,i} Z_1^+ Z_1^- + \Delta_{i,1} Z_2^+ Z_2^-$$

avec $i \in \{3, \ldots, n\}$. De plus, d'après les relations (2.4.10) l'anneau

$$\overline{R}_S \cong \overline{\mathbf{Q}} \left[\left\{ Z_i^{\pm} \mid 0 \leqslant i \leqslant 2 \right\} \cup \left\{ Z_i^+, \left(Z_i^+\right)^{-1} \mid 3 \leqslant i \leqslant n \right\} \right]$$

où S est la partie multiplicative engendré par les éléments premiers $Z_3^+, \ldots, Z_n^+$. Il s'agit en particulier d'un anneau factoriel et d'après le critère de Nagata, il s'ensuit par conséquent que $\overline{R}$ est un anneau factoriel. On peut donc supposer les f_i de (2.4.12) premiers avec $Z_{i_0}^{s_0}$, $Z_{i_1}^{s_1}, \ldots Z_{i_{n-1}}^{s_{n-1}}$ ce qui entraîne nécessairement que, pour tout $\mathbf{s}$, pour tout $\mathbf{i}$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $N_{k,\mathbf{i}}^{\mathbf{s}} = 0$. Finalement, $f \in \overline{R}$. Comme on a trivialement que $\overline{R} \subseteq \mathcal{O}(\overline{\mathcal{T}})$, il s'ensuit que $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{T}}) = \overline{R}$, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

2.4.2 Description des torseurs versels

La Proposition 2.4.2 permet alors, par descente galoisienne, d'obtenir explicitement des torseurs versels pour les surfaces de type $S_{a,F}$. Cette section est consacrée à cette description générale et au traitement plus en détails de quelques exemples sur les surfaces de Châtelet qui nous intéresse plus particulièrement puisque ce sont à l'heure actuelle les seules surfaces sur lesquelles on soit capable de mener à terme le comptage.

Avant toutes choses, il est nécessaire d'introduire quelques notations. On pose K le corps de décomposition de $F(X,1)$ sur $\mathbf{Q}$ ainsi que $L = K(\sqrt{a})$. On suppose également que $F = F_1 \cdots F_r$ est une décomposition en produit d'irréductibles de F sur $\mathbf{Q}$ (et donc *a fortiori* sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$) avec d_i le degré de F_i pour $1 \leqslant i \leqslant r$. On note également K_i le corps de décomposition de F_i sur $\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{g}_i = \mathrm{Gal}(K_i/\mathbf{Q})$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$. On suppose également que, sur $\overline{\mathbf{Q}}$, on a

$$F_i(u,v) = \alpha_i (u - \beta_{i,1} v)(u - \beta_{i,2} v) \cdots (u - \beta_{i,d_i} v) \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

pour $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ le plus petit diviseur du coefficient dominant δ_i de F_i tel que δ_i/α_i soit de la forme $\prod_{k=1}^{d_i} a_{i,k}$ avec $\beta_{i,k} \mapsto a_{i,k}$ $\mathfrak{g}_i$-équivariante. On notera alors pour $i \in [\![1, r]\!]$

$$L_{i,k}(u,v) = u - \beta_{i,k} v \qquad (1 \leqslant k \leqslant d_i).$$

On note ensuite Γ_i l'ensemble des $\boldsymbol{\gamma}_i = (\alpha_i \gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,d_i}) \in \overline{\mathbf{Q}}^{d_i}$ sur lesquels l'action de $\mathfrak{g}_i$ sur $\{\gamma_{i,k}\}_k$ est la même que sur l'ensemble $\{\beta_{i,k}\}_k$, autrement dit tels que l'application $\beta_{i,k} \mapsto \gamma_{i,k}$ soit $\mathfrak{g}_i$-équivariante. En particulier, on a

$$\alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} \in \mathbf{Z}.$$

On introduit finalement

$$\Gamma = \left\{ (\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r : \begin{array}{c} \forall i \in [\![1, r]\!], \ \exists (\gamma_i, n_i) \in \mathbf{Z}^2 \ \text{ tels que } \ \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} = \gamma_i n_i \\ \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \gamma_i} \in \mathbf{N} \ \text{ et } \ n_i \in N_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]\right) \end{array} \right\}.$$

Il s'agit de l'analogue de l'ensemble $\mathcal{B}$ défini dans [Des16b, Section 7.2] dans le cas où $F = L_1L_2Q$. On introduit alors les ensembles

$$\Sigma = \begin{cases} \{(1,\dots,1)\} \text{ si } a > 0 \\ \left\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^r \mid \prod_{i=1}^r \varepsilon_i = 1\right\} \text{ si } a < 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,r]\!] \text{ tel que } d_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \\ \left\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^r \mid \prod_{i=1}^r \varepsilon_i = 1 \text{ et } \varepsilon_{i_0} = 1\right\} \text{ si } a < 0 \text{ et } \exists i_0 \in [\![1,r]\!] \text{ tel que } d_{i_0} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2) \end{cases}$$

ainsi que

$$M = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbf{N}^r \quad : \quad \begin{array}{ll} m_i \Big| \mathrm{ppcm}\left(r_{ij}^{(3)} \mid j \in \{1,\dots,r\} \smallsetminus \{i\}\right) & 1 \leqslant i \leqslant r \\ (m_i, m_j) | r_{ij}^{(3)} & 1 \leqslant i \neq j \leqslant j \\ \mu^2(m_i) = 1, \quad \sqrt{m_1 \cdots m_r} \in \mathbf{N} & \end{array} \right\}$$

où l'on a posé $r_{ij} = \mathrm{Res}(F_i(X,1), F_j(X,1))$ et

$$r_{ij}^{(1)} = \prod_{\substack{p | r_{ij} \\ \left(\frac{a}{p}\right)=1}} p \quad \text{et} \quad r_{ij}^{(3)} = \prod_{\substack{p | r_{ij} \\ \left(\frac{a}{p}\right)=1 \text{ ou } a=p}} p.$$

On considère alors Γ_M^Σ des $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ pour lesquels il existe $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$ tels que

$$\gamma_i = \varepsilon_i m_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Il est bon de noter que l'ensemble Γ_M^Σ est infini.

Proposition 2.4.3. *Supposons que $a < 0$ ou que $a > 0$ et soit un nombre premier congru à 3 modulo 4 (ou $a = -1$) et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1. L'ensemble Γ_M^Σ indexe des classes d'isomorphisme de torseurs versels $\mathcal{T}_\gamma$ pour $S_{a,F}$ vérifiant*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_M^\Sigma} \pi_\gamma\left(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q})\right).$$

Par ailleurs, sur $\hat{\pi_\gamma}\left(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q})\right)$, on a

$$L_{i,k}(u,v)/\gamma_{i,k} \in N_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]\right).$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, la quantité

$$\frac{F_i(u,v)}{\alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k}}$$

est de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z mais avec y et z vérifiant certaines conditions. De plus, on peut obtenir une description explicite de ces torseurs versels.

Démonstration– On sait grâce à la Proposition 2.4.2 que sur $\overline{\mathbf{Q}}$, un anneau de Cox de $S_{a,F}$ est donné par

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^+, Z_i^- \mid 0 \leqslant i \leqslant n] / \left(\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-\right)_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \tag{2.4.13}$$

où $\mathrm{div}(Z_0^{\pm}) = E^{\pm}$ et $\mathrm{div}(Z_i^{\pm}) = D_i^{\pm}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. On a plus précisément que

$$\left(\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-\right)_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} = (P_{1,2,3}, \ldots, P_{1,2,n}).$$

On remarque alors que l'idéal

$$\left(\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-\right)_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} = (P_{1,2,3}, \ldots, P_{1,2,n})$$

est invariant sous l'action du groupe de Galois $\mathcal{G}$. On pose alors

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}}$$

et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, les variables

$$X_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^{\ell} (Z_k^+ + Z_k^-)}{2d_i}, \quad Y_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \overline{\beta_k}^{\ell} (Z_k^+ - Z_k^-)}{2\sqrt{a} d_i} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant d_i - 1, \tag{2.4.14}$$

où $\overline{\beta_k}$ désigne la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ si cette dernière appartient à $\mathfrak{g}_i$ et l'identité sinon. On constate que les variables $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r)$ sont $\mathcal{G}$-invariantes et que si l'on écrit les relations (2.4.14) sous la forme

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ Y_{1,1} \\ \vdots \\ X_{r,d_r} \\ Y_{r,d_r} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_1^+ \\ Z_1^- \\ \vdots \\ Z_n^+ \\ Z_n^- \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(M) = \prod_{k=1}^{r} \frac{\sqrt{a}^{d_k}}{2^{d_k} d_k^{2d_k}} \mathrm{Disc}(F_k) \neq 0.$$

Cela implique que l'on puisse exprimer les $Z_i^{\pm}$ en termes des $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r)$. On note $Z_i^{\pm} = f_i^{\pm}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ si bien que l'on obtient que la $\mathbf{Q}$-algèbre R suivante

$$\mathbf{Q}[X_0, Y_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1 \ldots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r]/I$$

où l'idéal I est donné par

$$I = \left(\Delta_{jk} f_i^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_i^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ki} f_j^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_j^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ij} f_k^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_k^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\right)$$

est un anneau de Cox pour $S_{a,F}$ sur $\mathbf{Q}$. On sait alors que $\dim(R) = n + 4$ si bien que l'idéal

$$\left(\Delta_{jk} f_i^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_i^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ki} f_j^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_j^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Delta_{ij} f_k^+(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) f_k^-(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\right)_{1 \leqslant j < k < \ell \leqslant n}$$

possède $n - 2$ générateurs combinaisons linéaires des $P_{i,j,k}$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ que l'on peut obtenir par descente galoisienne. Cela est fait en détails sur plusieurs exemples dans la suite mais il apparaît difficile de donner un système de générateurs en général du fait de la complexité éventuelle du groupe de Galois $\mathcal{G}$.

On considère alors l'ensemble constructible de

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n+2} = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}[X_0, Y_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r])$$

noté $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ défini par l'idéal $I_{\boldsymbol{\gamma}}$ suivant

$$\Big(\Delta_{jk}\gamma_i f_i^+(\mathbf{X},\mathbf{Y})f_i^-(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \Delta_{ki}\gamma_j f_j^+(\mathbf{X},\mathbf{Y})f_j^-(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \Delta_{ij}\gamma_k f_k^+(\mathbf{X},\mathbf{Y})f_k^-(\mathbf{X},\mathbf{Y})\Big)_{1\leqslant j<k<\ell\leqslant n}$$

si $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ et les conditions

$$\forall i \neq j \in [\![1, r]\!], \quad ((\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i), (\mathbf{X}_j; \mathbf{Y}_j)) \neq ((\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0})). \tag{2.4.15}$$

Considérons alors $(x_0, y_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r) \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}(k)$ pour k une extension finie de $\mathbf{Q}$. On pose

$$u = \frac{1}{\Delta_{1,2}}\Big(b_2\gamma_1 f_1^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_1^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) - b_1\gamma_2 f_2^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_2^-(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{1,2}}\Big(a_1\gamma_2 f_2^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_2^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) - a_2\gamma_1 f_1^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_1^-(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)$$

de sorte que les relations (2.4.9) fournissent les égalités

$$u = \frac{1}{\Delta_{i,j}}\Big(b_j\gamma_i f_i^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_i^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) - b_i\gamma_j f_j^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_j^-(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{i,j}}\Big(a_i\gamma_j f_j^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_j^-(\mathbf{x},\mathbf{y}) - a_j\gamma_i f_i^+(\mathbf{x},\mathbf{y})f_i^-(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)$$

pour tout $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors clairement que u et v sont dans k puisqu'invariants sous le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k)$ et que

$$F_i(u, v) = \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} f_k^+(\mathbf{x}) f_k^-(\mathbf{x}) \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Ainsi chaque quantité

$$\frac{F_i(u, v)}{\alpha_i \displaystyle\prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k}}$$

est bien de la forme $x^2 - ay^2$ pour deux entiers x et y mais avec des entiers x et y vérifiant certaines conditions.

On construit alors comme précédemment un morphisme $\pi_{\boldsymbol{\gamma}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}} \to S_{a,F}$ en posant $\alpha_{\boldsymbol{\gamma}}$ la racine carrée de $\prod_{i=1}^{n} \gamma_i$ et $\prod_{i=1}^{n} n_i = z_{\boldsymbol{\gamma}}\overline{z_{\boldsymbol{\gamma}}}$ avec $z_{\boldsymbol{\gamma}} = x_{\boldsymbol{\gamma}} + \sqrt{a}y_{\boldsymbol{\gamma}}$ pour deux entiers $x_{\boldsymbol{\gamma}}$ et $y_{\boldsymbol{\gamma}}$ et où la conjugaison désigne ici la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. En introduisant $(y, z, t) \in \mathbf{Q}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$ tels que

$$\begin{cases} y + \sqrt{a}z = \alpha_{\boldsymbol{\gamma}} z_{\boldsymbol{\gamma}} (z_0)^2 \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i^+(\mathbf{x}) \\ y - \sqrt{a}z = \alpha_{\boldsymbol{\gamma}} \overline{z_{\boldsymbol{\gamma}}} (\overline{z_0})^2 \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i^-(\mathbf{x}) \\ t = z_0\overline{z_0} \end{cases}$$

avec $z_0 = x_0 + \sqrt{a}y_0$. Ainsi $y^2 - az^2 = t^2F(u,v)$ et $(y,z,t,u,v) \in \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(k)$. On établit alors de façon analogue aux Propositions 2.4.1 et 2.4.2 que pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, la variété $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}$ équipée du morphisme $\pi_{\boldsymbol{\gamma}}$ et de l'action naturelle de T_{NS} est un torseur versel pour $S_{a,F}$. On a alors

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_M^{\Sigma}} \pi_{\boldsymbol{\gamma}}\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{Q})\right). \tag{2.4.16}$$

Commençons par établir (2.4.16). On pose

$$\mathcal{G}_i = \left\{ y = \prod_{k=1}^{d_i} \sigma_{i,k}\overline{\sigma_{i,k}} \mid \quad \beta_{i,k} \mapsto (\sigma_{i,k}, \overline{\sigma_{i,k}}) \text{ est } \mathfrak{g}_i - \text{équivariante} \right\}.$$

Il est important de noter que $\mathcal{G}_i$ un ensemble multiplicatif dans le sens où si y_1 et $y_2 \in \mathcal{G}_i$, alors $y_1y_2 \in \mathcal{G}_i$. Considérons alors un point $P \in S_{a,F}(\mathbf{Q})$. Il existe ainsi un unique $(y,z,t,u,v) \in \mathbf{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases} (y,z,t) = (u,v) = 1 \\ t > 0 \\ F_1(u,v) \geqslant 0 \\ t^2F_1(u,v)\cdots F_r(u,v) = y^2 - az^2 \end{cases}$$

s'il existe un facteur irréductible de degré impair que l'on peut supposer égal à F_1 tel que $\pi_{\mathrm{spl}}((y,z,t,u,v)) = P$ avec π_{spl} l'application $\pi_{\mathrm{spl}} : \mathcal{T}_{\mathrm{spl}} \to S_{a,F}$ définie dans [BBP12, definition 4.1] et il existe exactement [4] deux $(y,z,t,u,v) \in \mathbf{Z}^4$ tel que

$$\begin{cases} (y,z,t) = (u,v) = 1 \\ t > 0 \\ t^2F_1(u,v)\cdots F_r(u,v) = y^2 - az^2 \end{cases}$$

si tous les facteurs irréductibles de F sont de degré pair tels que $\pi_{\mathrm{spl}}((y,z,t,u,v)) = P$. On verra que le choix de l'un de ces deux points donnera lieu au même torseur $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}$. Il existe alors un unique r-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \Sigma$ tels que

$$\varepsilon_i F_i(u,v) > 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

si $a < 0$. Si $a > 0$, on posera par convention $\varepsilon_i = 1$ pour tout i. Commençons par supposer que $a > 0$ est un nombre premier congru à 3 modulo 4 tel que $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes 1. Le fait que $F_1(u,v)\cdots F_r(u,v)$ soit de la forme $y^2 - az^2$ implique que, lorsque p est un nombre premier vérifiant $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ ou $p = a$, on a

$$\nu_p(F_1(u,v)\cdots F_r(u,v)) = \nu_p(F_1(u,v)) + \cdots + \nu_p(F_r(u,v)) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\,.$$

On pose alors

$$m_i = \prod_{\substack{\left(\frac{a}{p}\right) = -1 \text{ ou } p = a \\ \nu_p(F_i(u,v)) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)}} p \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

de sorte que $m_i | F_i(u,v)$. On en déduit que si $p | m_1$, nécessairement il existe un $j \neq 1$ tel que $p \mid m_j$ et le nombre de tels j est nécessairement impair. Puisque $(u,v) = 1$, cela implique que $p | r_{1j}^{(3)}$, si bien qu'on en déduit les relations

$$m_i \Big| \mathrm{ppcm}(r_{ij}^{(3)} \mid j \in \{1, \ldots, r\} \smallsetminus \{i\}), \quad (m_i, m_j) | r_{ij}^{(3)},$$

4. Au signe près du couple (u,v).

et

$$\nu_p\left(\frac{F_i(u,v)}{m_i}\right) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\,,$$

pour tous les nombres premiers p tels que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ ou $p = a$. De plus, $m_1 \cdots m_r$ est un carré. Si par exemple $F_1(u,v) = 0$, on pose $\varepsilon_1 m_1$ comme étant l'unique entier sans facteur carré tel que $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r m_1 \cdots m_r$ soit un carré.

On pose alors g_i le plus petit diviseur de $F_i(u,v)$ tel que $\frac{\varepsilon_i F_i(u,v)}{g_i} \in \mathcal{G}_i$. Nécessairement, en posant $\gamma_i = \varepsilon_i m_i$, on a $\gamma_i \mid g_i$ donc on peut écrire $g_i = \gamma_i n_i$. On constate alors par définition de γ_i, que n_i est de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z. De plus, on peut écrire

$$g_i = \alpha_i \prod_{k=1}^{d_i} \sigma_{i,k}$$

avec $\beta_{i,k} \mapsto \sigma_{i,k}$ $\mathfrak{g}_i$-équivariante. En effet, on a nécessairement par multiplicativité que $\alpha_i \mid g_i$ et que $\frac{g_i}{\alpha_i}$ est de la forme $\prod_{k=1}^{d_i} \sigma_{i,k}$. Ainsi, $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_M^{\Sigma}$ et $(y,z,t,u,v) \in \hat{\pi}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}})$. On traite le cas $a < 0$ tel que $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit de nombre de classes 1 en utilisant la formule (1.5) de [BT13]. Cette dernière, qui est une fonction multiplicative au facteur w_a près, implique que si $(n_1, n_2) = 1$, alors $n_1 n_2$ est de la forme $y^2 - az^2$ si, et seulement si, n_1 et n_2 sont de cette forme également. Ainsi, en posant m_i le plus petit entier divisant $F_i(u,v)$ tel que le quotient soit de la forme $y^2 - az^2$, on peut mener la preuve ci-dessus de manière complètement analogue pour aboutir à la même conclusion.

On constate pour finir, en notant $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}$ le sous-schéma de

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n} = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}[\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r])$$

défini par l'idéal $I_{\boldsymbol{\gamma}}$, que $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}$ est égal au produit $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^2$. En notant $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\circ}$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}$, on a un isomorphisme entre l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2n+2} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations globalement invariantes sous l'action de Galois

$$L_{i,k}(u,v) = \gamma_{i,k} f^{+}_{k+\sum_{j\leqslant i} d_j}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) f^{-}_{k+\sum_{j\leqslant i} d_j}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$

et le schéma $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\circ}$. En particulier, sur $\hat{\pi}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{Q}))$, on a

$$F_i(u,v) = \prod_{k=1}^{d_i} \gamma_{i,k} f^{+}_{k+\sum_{j\leqslant i} d_j}(\mathbf{X}) f^{-}_{k+\sum_{j\leqslant i} d_j}(\mathbf{X}),$$

et $F_i(u,v)$ est de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z vérifiant certaines conditions. □

Lors de toutes les preuves du principe de Manin pour les surfaces de Châtelet connues à ce jour ([BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b]), on se ramène toujours à un problème de comptage sur certaines variétés de la forme

$$F_i(u,v) = n_i(X_i^2 - aY_i^2).$$

On n'a par conséquent pas utilisé une descente sur les torseurs versels (à part dans la cas scindé [BBP12]) mais sur des torseurs d'un type différent que l'on explicite dans la

section suivante. Cette description facilite grandement le traitement de la constante afin d'établir que celle-ci correspond à la prédiction de Peyre. De plus, il apparaît difficile *a priori* d'obtenir un système de représentant des classes d'isomorphisme de torseurs versels et de décrire précisément les ensembles du type $\pi_\gamma\left(\mathcal{T}_\gamma(\mathbf{Q})\right)$.

2.4.3 Exemples

On donne dans cette section des équations explicites pour les torseurs versels associés aux surfaces de Châtelet pour chaque type de factorisation et sous les mêmes hypothèses sur a que dans l'énoncé de la Proposition 2.4.3. On donne également quelques exemples dans le cas des surfaces $S_{a,F}$ pour certains types de factorisation.

Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$

Ce cas a été entièrement traité dans [Des16b].

Le cas des surfaces de Châtelet de type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$

On notera dans toute la suite Δ_i le discriminant de Q_i, τ_i la conjugaison dans $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\Delta_i}\right)$ et

$$Q_i(\mathbf{x}) = a_i x_1^2 + b_i x_1 x_2 + c_i v^2 \qquad (i \in \{1,2\}).$$

On notera également, comme dans [BT13], Δ le résultant de Q_1 et de Q_2 ainsi que

$$\Delta_3 = \prod_{\substack{\left(\frac{a}{p}\right)=1 \text{ ou } a=p \\ p\mid\Delta}} p. \tag{2.4.17}$$

On note également ici, que le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de L sur $\mathbf{Q}$ peut soit être isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ soit à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$.

D'après [Pey12, proposition 8.3] ou [Der06, proposition 2.1], on déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme de torseurs versels au-dessus de S possédant au moins un point rationnel est fini, ce qui permet d'exhiber une partition finie de l'ensemble des points rationnels de $S := S_{a,F}$, indexée par toute famille de représentants de ces classes d'isomorphisme. Contrairement à [BBP12] et de la même façon que dans [Des16b], il est plus délicat dans ce cas de déterminer explicitement un tel système de représentants. Par ailleurs, on peut montrer que $Ш^1(\mathbf{Q}, T_{\mathrm{NS}})$ n'est pas toujours trivial dans ce cas !

On considère l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Z}\left[\Delta_1\right]^2 \times \mathbf{Z}\left[\Delta_2\right]^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \tau_1(\beta_1) = \beta_2,\ \tau_2(\beta_3) = \beta_4 \\ \exists(\beta_1', n_1) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_1\beta_2 = \beta_1' n_1 \\ \exists(\beta_2', n_2) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_3\beta_4 = \beta_2' n_2 \\ \text{avec } \sqrt{\beta_1'\beta_2'} \in \mathbf{Z} \text{ et } n_1, n_2 \in N_{\mathbf{Q}[i]/\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]\right) \end{array} \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble $\mathcal{B}_M^\Sigma$ des $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$ pour lesquels il existe $\varepsilon \in \{-1;1\}$ et $m \mid \Delta_3$ tels que

$$\beta_1' = \beta_2' = \varepsilon m.$$

Il est bon de noter que l'ensemble $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}_M^\Sigma$ est infini. Pour $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$, on pose $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ le sous-ensemble constructible de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{10} = \mathrm{Spec}\left(\mathbf{Q}\left[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4\right]\right)$ défini par le système des deux équations quadratiques suivantes, invariant sous le groupe de Galois $\mathcal{G}$

$$\phi_1^{\boldsymbol{\beta}} = \phi_2^{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

avec

$$\begin{cases} \phi_1^{\boldsymbol{\beta}} = & \beta_1\Delta_{23}\left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1\left(X_2^2 - aY_2^2\right) + 2\sqrt{\Delta_1}\left(X_1X_2 + Y_1Y_2\right)\right) \\ & - \beta_2\Delta_{13}\left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1\left(X_2^2 - aY_2^2\right) - 2\sqrt{\Delta_1}\left(X_1X_2 + Y_1Y_2\right)\right) \\ & + \beta_3\Delta_{12}\left(X_3^2 + Y_3^2 + \Delta_2\left(X_4^2 - aY_4^2\right) + 2\sqrt{\Delta_2}\left(X_3X_4 + Y_3Y_4\right)\right) \\ \phi_2^{\boldsymbol{\beta}} = & \beta_1\Delta_{24}\left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1\left(X_2^2 - aY_2^2\right) + 2\sqrt{\Delta_1}\left(X_1X_2 + Y_1Y_2\right)\right) \\ & - \beta_2\Delta_{14}\left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1\left(X_2^2 - aY_2^2\right) - 2\sqrt{\Delta_1}\left(X_1X_2 + Y_1Y_2\right)\right) \\ & + \beta_4\Delta_{12}\left(X_3^2 + Y_3^2 + \Delta_2\left(X_4^2 - aY_4^2\right) - 2\sqrt{\Delta_2}\left(X_3X_4 + Y_3Y_4\right)\right), \end{cases}$$

et les inégalités

$$\forall i \in \{1,3\}, \qquad ((X_0,Y_0),(X_i,Y_i,X_{i+1},Y_{i+1})) \neq ((0,0),(0,0,0,0))$$

et

$$((X_1,Y_1,X_2,Y_2),(X_3,Y_3,X_4,Y_4)) \neq ((0,0,0,0),(0,0,0,0)).$$

Définissons à présent un morphisme $\pi_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}} \to S$. Pour ce faire, comme dans [BBP12, section 4], il suffit de définir un morphisme $\hat{\pi_{\boldsymbol{\beta}}} : \mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}} \to \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$. Considérons alors une extension finie k de $\mathbf{Q}$ et $((x_i,y_i))_{0\leqslant i\leqslant 4}$ dans $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}(k)$. Il existe alors un couple $(u,v) \in k^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ tel que

$$u = \frac{1}{\Delta_{34}}\Bigg(b_4\beta_3\left(x_3^2 - ay_3^2 + \Delta_2\left(x_4^2 - ay_4^2\right) + 2\sqrt{\Delta_2}(x_3x_4 + y_3y_4)\right) - \\ b_3\beta_4\left(x_3^2 - ay_3^2 + \Delta_2\left(x_4^2 - ay_4^2\right) - 2\sqrt{\Delta_2}(x_3x_4 + y_3y_4)\right)\Bigg)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{34}}\Bigg(a_3\beta_4\left(x_3^2 - ay_3^2 + \Delta_2\left(x_4^2 - ay_4^2\right) - 2\sqrt{\Delta_2}(x_3x_4 + y_3y_4)\right) - \\ a_4\beta_3\left(x_3^2 - ay_3^2 + \Delta_2\left(x_4^2 - ay_4^2\right) + 2\sqrt{\Delta_2}(x_3x_4 + y_3y_4)\right)\Bigg)$$

tels que

$$Q_1(u,v) = \beta_1\beta_2\left[\left(x_1^2 - y_1^2 - \Delta_1(x_2^2 - y_2^2)\right)^2 - a\left(x_1x_2 - \Delta_1y_1y_2\right)^2\right]$$

et

$$Q_2(u,v) = \beta_3\beta_4\left[\left(x_3^2 - y_3^2 - \Delta_2(x_4^2 - y_4^2)\right)^2 - a\left(x_3x_4 - \Delta_2y_3y_4\right)^2\right].$$

En effet, le résultat découle d'un calcul direct dans le cas de Q_2 et le fait que $((x_i,y_i))_{0\leqslant i\leqslant 4}$ soit dans $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}(k)$ fournit, après calculs, que

$$u = \frac{1}{\Delta_{12}}\Bigg(b_2\beta_1\left(x_1^2 - ay_1^2 + \Delta_1\left(x_2^2 - ay_2^2\right) + 2\sqrt{\Delta_1}(x_1x_2 + y_1y_2)\right) - \\ b_1\beta_2\left(x_1^2 - ay_1^2 + \Delta_1\left(x_2^2 - ay_2^2\right) - 2\sqrt{\Delta_1}(x_1x_2 + y_1y_2)\right)\Bigg)$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{12}}\Bigg(a_1\beta_2\left(x_1^2 - ay_1^2 + \Delta_1\left(x_2^2 - ay_2^2\right) - 2\sqrt{\Delta_1}(x_1x_2 + y_1y_2)\right) - \\ a_2\beta_1\left(x_1^2 - ay_1^2 + \Delta_1\left(x_2^2 - ay_2^2\right) + 2\sqrt{\Delta_1}(x_1x_2 + y_1y_2)\right)\Bigg).$$

Il peut être utile pour faire le calcul de remarquer les égalités

$$\begin{cases} x_1^2 - y_1^2 + \Delta_1\left(x_2^2 - ay_2^2\right) + 2\sqrt{\Delta_1}(x_1x_2 + y_1y_2) = Z_1^+Z_1^-, \\ x_1^2 - ay_1^2 + \Delta_1\left(x_2^2 - ay_2^2\right) - 2\sqrt{\Delta_1}(x_1x_2 + y_1y_2) = Z_2^+Z_2^-, \\ x_3^2 - ay_3^2 + \Delta_2\left(x_4^2 - ay_4^2\right) + 2\sqrt{\Delta_2}(x_3x_4 + y_3y_4) = Z_3^+Z_3^-, \\ x_3^2 - ay_3^2 + \Delta_2\left(x_4^2 - ay_4^2\right) - 2\sqrt{\Delta_2}(x_3x_4 + y_3y_4) = Z_4^+Z_4^-, \\ \left(x_1^2 - y_1^2 - \Delta_1(x_2^2 - y_2^2)\right)^2 - a\left(x_1x_2 - \Delta_1y_1y_2\right)^2 = Z_1^+Z_1^-Z_2^+Z_2^-, \\ \left(x_3^2 - y_3^2 - \Delta_2(x_4^2 - y_4^2)\right)^2 - a\left(x_3x_4 - \Delta_2y_3y_4\right)^2 = Z_3^+Z_3^-Z_4^+Z_4^-. \end{cases}$$

On remarque en particulier que les quantités $Q_1(u,v)/(\beta_1\beta_2)$ et$Q_2(u,v)/(\beta_3\beta_4)$ sont bien de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z mais pour des entiers y et z particuliers puisqu'il s'agit respectivement de normes de $\mathbf{Q}\left(\sqrt{a}, \sqrt{\Delta_1}\right)$ et $\mathbf{Q}\left(\sqrt{a}, \sqrt{\Delta_2}\right)$ sur $\mathbf{Q}$. On note alors α_β la racine carrée positive de $\beta_1'\beta_2'$ et $n_1n_2 = z_\beta\overline{z_\beta}$ et on considère

$$\begin{cases} x + iy = z_\beta\alpha_\beta\left(z_0\right)^2\prod_{j=1}^2 z_j \\ x - iy = \overline{z_\beta}\alpha_\beta\left(\overline{z_0}\right)^2\prod_{j=1}^2 \overline{z_j} \\ t = z_0\overline{z_0} \end{cases}$$

où l'on a posé $z_0 = x_0 + \sqrt{a}y_0$ et

$$z_1 = \left(x_1^2 - y_1^2 - \Delta_1(x_2^2 - y_2^2)\right) + \sqrt{a}\left(x_1x_2 - \Delta_1y_1y_2\right).$$

et

$$z_2 = \left(x_3^2 - y_3^2 - \Delta_2(x_4^2 - y_4^2)\right) + \sqrt{a}\left(x_3x_4 - \Delta_2y_3y_4\right).$$

On a alors $x^2 - ay^2 = t^2F(u,v)$ et $(x,y,t,u,v) \in \mathcal{T}_{\mathrm{spl}}(k)$, ce qui permet de définir π_β.

Lemme 2.4.1. *Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, la variété $\mathcal{T}_\beta$ équipée du morphisme π_β et de l'action naturelle de T_{NS} définie de la même façon que dans [BBP12, section 4] est un torseur versel pour $S_{a,F}$ et*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}_M^\Sigma}\pi_\beta\left(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q})\right).$$

Démonstration– On applique la procédure décrite en Proposition 2.4.3. D'après [BBP12, section 4] et en utilisant le formalisme développé dans [Pie15, Example 2.4.3], on sait que sur $\overline{\mathbf{Q}}$, un anneau de Cox de S est donné par

$$\overline{R} = \overline{\mathbf{Q}}[Z_i^+, Z_i^- \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/\left(\Delta_{jk}Z_i^+Z_i^- + \Delta_{ki}Z_j^+Z_j^- + \Delta_{ij}Z_k^+Z_k^-\right)_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} \tag{2.4.18}$$

où $\mathrm{div}(Z_0^{\pm}) = E^{\pm}$ et $\mathrm{div}(Z_i^{\pm}) = D_i^{\pm}$ pour $i \in [\![1,4]\!]$. On a plus précisément que

$$\left(\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-\right)_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 4} = (P_{1,2,3}, P_{1,2,4})$$

si l'on note $P_{i,j,k}$ la forme quadratique $\Delta_{jk} Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} Z_k^+ Z_k^-$. Considérons alors les variables invariantes sous $\mathcal{G}$ (et ce quel que soit le groupe de Galois) suivantes

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}},$$

$$X_1 = \frac{Z_1^+ + Z_2^+ + Z_1^- + Z_2^-}{4} \quad \text{et} \quad Y_1 = \frac{Z_1^+ - Z_1^- + Z_2^+ - Z_2^-}{4\sqrt{a}}$$

et

$$X_2 = \frac{Z_1^+ - Z_2^+ + Z_1^- - Z_2^-}{4\sqrt{\Delta_1}} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{Z_1^+ + Z_2^- - Z_1^- - Z_2^+}{4\sqrt{a}\sqrt{\Delta_1}}$$

ainsi que

$$X_3 = \frac{Z_3^+ + Z_4^+ + Z_3^- + Z_4^-}{4} \quad \text{et} \quad Y_3 = \frac{Z_3^+ - Z_3^- + Z_4^+ - Z_4^-}{4\sqrt{a}}$$

et

$$X_4 = \frac{Z_3^+ - Z_4^+ + Z_3^- - Z_4^-}{4\sqrt{\Delta_2}} \quad \text{et} \quad Y_4 = \frac{Z_3^+ + Z_4^- - Z_3^- - Z_4^+}{4\sqrt{a}\sqrt{\Delta_2}}.$$

En substituant les variables X_i, Y_i aux variables $Z_i^{\pm}$ et en considérant les équations $\mathcal{G}-$invariantes suivantes

$$\frac{P_{1,2,3} + P_{1,2,4}}{2\sqrt{\Delta_1}} \quad \text{et} \quad \frac{P_{1,2,3} - P_{1,2,4}}{2\sqrt{\Delta_2}},$$

on obtient aisément par une descente galoisienne qu'un anneau de Cox pour $S_{a,F}$ sur $\mathbf{Q}$ est donné par

$$R = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/(\phi_1^{(1,1,1,1)}, \phi_2^{(1,1,1,1)}).$$

Par [Sko, corollary 2.3.9], un torseur versel est unique à twist près par un élément de $H^1(\mathbf{Q}, T_{\mathrm{NS}})$. On peut alors montrer en appliquant les résultats de la section précédente que

$$R^c = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/(\phi_1^{\boldsymbol{\beta}}, \phi_2^{\boldsymbol{\beta}})$$

pour un certain $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$ est un anneau de Cox pour $S_{a,F}$.

Finalement, le dernier point :

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}_M^{\Sigma}} \pi_{\boldsymbol{\beta}}\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Q})\right)$$

découle de la démonstration de la Proposition 2.4.3. □

Sur $\pi_{\boldsymbol{\beta}}\left(\mathcal{T}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Q})\right)$, on a alors

$$Q_1(u,v) = \beta_1\beta_2\left[\left(X_1^2 - Y_1^2 - \Delta_1(X_2^2 - Y_2^2)\right)^2 - a\left(X_1X_2 - \Delta_1 Y_1 Y_2\right)^2\right]$$

et

$$Q_2(u,v) = \beta_3\beta_4\left[\left(X_3^2 - Y_3^2 - \Delta_2(X_4^2 - Y_4^2)\right)^2 - a\left(X_3X_4 - \Delta_2 X_4 Y_4\right)^2\right].$$

Or, lors de la preuve du principe de Manin, les auteurs de [BT13] se ramènent à un problème de comptage sur certaines variétés de la forme

$$F_i(u,v) = \beta_i(X_i^2 + Y_i^2) \quad (i \in \{1,2\}. \tag{2.4.19}$$

Ils n'ont par conséquent pas utilisé une descente sur les torseurs versels mais sur des torseurs d'un type différent que l'on explicite dans la section suivante lors de leur preuve du principe de Manin. Cette description permettra de justifier le traitement de la constante de [BT13] afin d'établir que celle-ci correspond à la prédiction de Peyre. De plus, il apparaît difficile *a priori* d'obtenir un système de représentant des classes d'isomorphisme de torseurs versels et de décrire précisément les ensembles du type $\pi_\beta(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q}))$. En effet, pour ce faire, il faut caractériser les normes d'extensions biquadratiques.

Un cas de surface de Châtelet LC

Dans ce cas, il existe plusieurs cas pour le groupe de Galois du corps de décomposition de C (voir [Con]), ce qui complique la descente de Galois. On s'intéresse aux cas de la forme $F(u,v) = (\alpha u + \beta v)(u^3 - 2v^3)$ avec α et β deux entiers à titre d'exemple. On a

$$C(u,v) = u^3 - 2v^3 = (u - \sqrt[3]{2}v)(u - j\sqrt[3]{2}v)(u - j^2\sqrt[3]{2}v)$$

et le groupe de Galois du corps de décomposition de $C(X,1)$ est $\mathfrak{S}_3$. On considère alors les variables invariantes par le groupe de Galois suivantes

$$X_i = \frac{Z_i^+ + Z_i^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{Z_i^+ - Z_i^-}{2\sqrt{a}}$$

pour $i \in \{0,1\}$ et

$$\begin{aligned}
X_2 &= \frac{Z_2^+ + Z_2^- + Z_3^+ + Z_3^- + Z_4^+ + Z_4^-}{6}\\
Y_2 &= \frac{Z_2^+ - Z_2^- + Z_3^+ - Z_3^- + Z_4^+ - Z_4^-}{6\sqrt{a}}\\
X_3 &= \frac{\sqrt[3]{2}(Z_2^+ + Z_2^-) + j\sqrt[3]{2}(Z_3^+ + Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{2}(+Z_4^+ + Z_4^-)}{6}\\
Y_3 &= \frac{\sqrt[3]{2}(Z_2^+ - Z_2^-) + j\sqrt[3]{2}(Z_3^+ - Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{2}(+Z_4^+ - Z_4^-)}{6\sqrt{a}}\\
X_4 &= \frac{\sqrt[3]{4}(Z_2^+ + Z_2^-) + j\sqrt[3]{4}(Z_3^+ + Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{4}(+Z_4^+ + Z_4^-)}{6}\\
Y_4 &= \frac{\sqrt[3]{4}(Z_2^+ - Z_2^-) + j\sqrt[3]{4}(Z_3^+ - Z_3^-) + j^2\sqrt[3]{4}(+Z_4^+ - Z_4^-)}{6\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

de sorte que puisque les équations $P_{2,3,4}$ et $\frac{P_{1,2,3}}{\Delta_{23}} + \frac{P_{1,3,4}}{\Delta_{34}} + \frac{P_{1,4,2}}{\Delta_{42}}$ sont invariantes, en appliquant la procédure de la Proposition 2.4.3, on obtient qu'un anneau de Cox de $S_{a,F}$ est donné par

$$R^c = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/(\phi_1, \phi_2)$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 4X_2X_3 + 4Y_2Y_3 + X_4^2 - aY_4^2\\
\phi_2 &= X_1^2 - aY_1^2 - \alpha(X_2^2 - aY_2^2 + X_3X_4 + Y_4Y_4) - \beta(X_2X_4 + Y_2Y_4 + \frac{X_3^2}{2} - a\frac{Y_3^2}{2}).
\end{aligned}$$

Ainsi, un torseur versel est donné par l'ensemble constructible de $\mathbf{A}^{10}$ défini par les équations ϕ_1 et ϕ_2 et les conditions (2.4.15). On pourrait obtenir les équations explicites de torseurs $\mathcal{T}_\gamma$ tels que

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_M^\Sigma} \pi_\beta\left(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q})\right)$$

en appliquant la même descente aux équations

$$P_{i,j,k}^{\mathbf{n}} = \Delta_{jk} n_i Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} n_j Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} n_k Z_k^+ Z_k^-$$

pour $\mathbf{n} \in \Gamma_M^\Sigma$ mais les équations deviennent plus compliquées et on ne les donne pas explicitement ici.

Un cas de surface de Châtelet F

Dans ce cas, à nouveau il existe plusieurs cas pour le groupe de Galois du corps de décomposition de F ce qui complique la descente de Galois [Con]. On s'intéresse au cas $F(u,v) = u^4 - 2v^4$ à titre d'exemple. On a

$$F(u,v) = (u - \sqrt[4]{2}v)(u + \sqrt[4]{2}v)(u - i\sqrt[4]{2}v)(u + i\sqrt[4]{2}v).$$

On considère alors les variables invariantes par le groupe de Galois suivantes

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}}$$

et

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{Z_1^+ + Z_1^- + Z_2^+ + Z_2^- + Z_3^+ + Z_3^- + Z_4^+ + Z_4^-}{8} \\
Y_1 &= \frac{Z_1^+ - Z_1^- + Z_2^+ - Z_2^- + Z_3^+ - Z_3^- + Z_4^+ - Z_4^-}{8\sqrt{a}} \\
X_2 &= \frac{\sqrt[4]{2}(Z_1^+ + Z_1^-) - \sqrt[4]{2}(Z_2^+ + Z_2^-) + i\sqrt[4]{2}(Z_3^+ + Z_3^-) - i\sqrt[4]{2}(+Z_4^+ + Z_4^-)}{8} \\
Y_2 &= \frac{\sqrt[4]{2}(Z_1^+ - Z_1^-) - \sqrt[4]{2}(Z_2^+ - Z_2^-) + i\sqrt[4]{2}(Z_3^+ - Z_3^-) - i\sqrt[4]{2}(+Z_4^+ - Z_4^-)}{8\sqrt{a}} \\
X_3 &= \frac{\sqrt[2]{2}(Z_1^+ + Z_1^-) - \sqrt[2]{2}(Z_2^+ + Z_2^-) - \sqrt[2]{2}(Z_3^+ + Z_3^-) + \sqrt[2]{2}(+Z_4^+ + Z_4^-)}{8} \\
Y_3 &= \frac{\sqrt[2]{2}(Z_1^+ - Z_1^-) - \sqrt[2]{2}(Z_2^+ - Z_2^-) - \sqrt[2]{2}(Z_3^+ - Z_3^-) + \sqrt[2]{2}(+Z_4^+ - Z_4^-)}{8\sqrt{a}} \\
X_4 &= \frac{\sqrt[4]{8}(Z_1^+ + Z_1^-) - \sqrt[4]{8}(Z_2^+ + Z_2^-) - i\sqrt[4]{8}(Z_3^+ + Z_3^-) + i\sqrt[4]{8}(+Z_4^+ + Z_4^-)}{8} \\
Y_4 &= \frac{\sqrt[4]{8}(Z_1^+ - Z_1^-) - \sqrt[4]{8}(Z_2^+ - Z_2^-) - i\sqrt[4]{8}(Z_3^+ - Z_3^-) + i\sqrt[4]{8}(+Z_4^+ - Z_4^-)}{8\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

de sorte que puisque les équations $P_{1,2,3} + P_{1,2,4} + P_{1,3,4} + P_{2,3,4}$ et $\frac{P_{1,2,3} - P_{1,2,4} - P_{1,3,4} - P_{2,3,4}}{\sqrt{a}}$ sont invariantes, en appliquant la procédure de la Proposition 2.4.3, on obtient qu'un anneau de Cox de $S_{a,F}$ est donné par

$$R^c = \mathbf{Q}[X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 4]/(\phi_1, \phi_2)$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 4X_1X_3 + 4Y_1Y_3 + 2(X_2^2 - aY_2^2) + X_4^2 - aY_4^2 \\
\phi_2 &= X_3X_4 + Y_3Y_3 + 2(X_1X_2 + Y_1Y_2).
\end{aligned}$$

Ainsi, un torseur versel est donné par l'ensemble constructible de $\mathbf{A}^{10}$ défini par les équations ϕ_1 et ϕ_2 et les conditions (2.4.15). On pourrait obtenir les équations explicites de torseurs $\mathcal{T}_\gamma$ tels que

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \Gamma_M^\Sigma} \pi_\beta \left(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q})\right)$$

en appliquant la même descente aux équations

$$P_{i,j,k}^{\mathbf{n}} = \Delta_{jk} n_i Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} n_j Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} n_k Z_k^+ Z_k^-$$

pour $\mathbf{n} \in \Gamma_M^\Sigma$ mais les équations deviennent plus compliquées on ne les donne pas explicitement ici.

Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F scindé du type $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 \cdots \mathbf{L}_n$

On obtient de la même façon que la Proposition 2.4.1 le fait que si l'on pose

$$\mathcal{S}_j = \left\{ p \text{ premier } : \left(\frac{a}{p}\right) = -1 \text{ ou } a = p \quad \text{et} \quad p \mid \prod_{k \neq j} \Delta_{j,k} \right\}$$

et

$$M = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \prod_{p \in \mathcal{S}_j} p^{\varepsilon_p} \mid \varepsilon_p \in \{0,1\}^{\mathcal{S}_j} \right\}$$

alors pour $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$, l'ensemble constructible

$$\Delta_{jk} m_i Z_i^+ Z_i^- + \Delta_{ki} m_j Z_j^+ Z_j^- + \Delta_{ij} m_k Z_k^+ Z_k^- = 0$$

et les inégalités

$$\Big((Z_i^+, Z_i^-), (Z_j^+, Z_j^-)\Big) \neq ((0,0),(0,0))$$

définit un torseur versel pour $S_{a,F}$ et que dans ce cas,

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{M}) \in \Sigma \times M} \pi_{(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{M})} \Big(\mathcal{T}_{(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{M})}(\mathbf{Q})\Big)$$

où la réunion est disjointe et $\Sigma \times M$ est fini.

Le cas des surfaces $S_{a,F}$ avec F du type $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{n/2}$

La méthode est la même que dans le cas Q_1Q_2 et on obtient que si l'on pose Δ_i le discriminant de Q_i et τ_i la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta_i})$, alors

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{\beta} \in \prod_{i=1}^{n/2} \mathbf{Z}\left[\Delta_i\right]^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \tau_1(\beta_1) = \beta_2,\, \tau_2(\beta_3) = \beta_4, \ldots,\, \tau_{n/2}(\beta_{n-1}) = \beta_n \\ \exists (\beta_i', n_i) \in \mathbf{Z}^2 \text{ tels que } \beta_1\beta_2 = \beta_1' n_1, \ldots, , \beta_{n-1}\beta_n = \beta_{n/2}' n_{n/2} \\ \text{avec } \sqrt{\beta_1' \cdots \beta_{n/2}'} \in \mathbf{Z} \text{ et } n_1, \ldots, n_{n/2} \in N_{\mathbf{Q}[\sqrt{a}]/\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Z}[\sqrt{a}]\right) \end{array} \right\}$$

alors l'ensemble constructible défini par les $n-2$ formes quadratiques $\phi^{\boldsymbol{\beta}}_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}-1$ et $j \in \{1,2\}$ données par

$$\begin{cases} \phi^{\boldsymbol{\beta}}_{i,1} = & \beta_1 \Delta_{2,2i+1} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 \left(X_2^2 - aY_2^2 \right) + 2\sqrt{\Delta_1} \left(X_1X_2 + Y_1Y_2 \right) \right) \\ & - \beta_2 \Delta_{1,2i+1} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 \left(X_2^2 - aY_2^2 \right) - 2\sqrt{\Delta_1} \left(X_1X_2 + Y_1Y_2 \right) \right) \\ & + \beta_{2i+1} \Delta_{12} \left(X_{2i+1}^2 - aY_{2i+1}^2 + \Delta_2 \left(X_{2i+2}^2 - aY_{2i+2}^2 \right) \right. \\ & \left. + 2\sqrt{\Delta_{2i+1}} \left(X_{2i+1}X_{2i+2} + Y_{2i+1}Y_{2i+2} \right) \right) \\ \phi^{\boldsymbol{\beta}}_{i,2} = & \beta_1 \Delta_{2,2i+2} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 \left(X_2^2 - aY_2^2 \right) + 2\sqrt{\Delta_1} \left(X_1X_2 + Y_1Y_2 \right) \right) \\ & - \beta_2 \Delta_{1,2i+2} \left(X_1^2 - aY_1^2 + \Delta_1 \left(X_2^2 - aY_2^2 \right) - 2\sqrt{\Delta_1} \left(X_1X_2 + Y_1Y_2 \right) \right) \\ & + \beta_{2i+2} \Delta_{12} \left(X_{2i+1}^2 - aY_{2i+1}^2 + \Delta_2 \left(X_{2i+2}^2 - aY_{2i+2}^2 \right) \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\Delta_{2i+1}} \left(X_{2i+1}X_{2i+2} + Y_{2i+1}Y_{2i+2} \right) \right), \end{cases}$$

et les inégalités (2.4.15) sont des torseurs versels au-dessus de $S_{a,F}$ vérifiant

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_M^{\Sigma}} \pi_\beta \left(\mathcal{T}_\beta(\mathbf{Q}) \right).$$

On décrit dans la section suivante les torseurs utilisés dans les preuves du principe de Manin pour $a = -1$, preuves qui s'étendraient aux cas $a < 0$ pour les surfaces de Châtelet. Il est probable que les cas $a > 0$ fassent appel au même type de torseurs. Les méthodes mises en œuvre tombent en défaut dès que $n > 4$ et bien qu'on ne sache pas attaquer à l'heure actuelle le principe de Manin pour les surfaces $S_{a,F}$ avec $n > 4$ (sauf peut être le cas scindé à l'aide de la machinerie de Green-Tao-Ziegler [GTZ12]), on présente les résultats de la section suivante dans la plus grande généralité possible afin d'aider au traitement de la constante de Peyre dans le cas où le principe de Manin serait établi dans certains cas avec $n > 4$ en utilisant les torseurs décrits ci-dessous.

2.5 Les torseurs de type $\mathbf{Pic}\big(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\big)$

Comme mentionné dans l'introduction, la majeure partie des cas pour lesquels le principe de Manin et la conjecture de Peyre ont été obtenues grâce à une méthode de descente sur des torseurs versels l'a été dans le cas de variétés déployées, c'est-à-dire telle que l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique soit triviale. Dans ce cas, le groupe de Picard et le groupe de Picard géométrique coïncident. Le cas de la del Pezzo non déployée de [BB07c], dont la géométrie a été étudiée dans la thèse de Pieropan [Pie15] est obtenu grâce à une descente sur des torseurs quasi-universels de type $\mathrm{Pic}(X)$. On peut alors noter que cette del Pezzo singulière a des singularités isolées sur $\mathbf{Q}$. Dans le cas des surfaces $S_{a,F}$, les singularités sont définies sur $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ et dans tous les cas de la preuve du principe de Manin traités à ce jour, on va établir que la descente a été effectuée en deux parties. En effet, les variétés considérées dans la première partie de cette thèse ne sont pas déployées, on s'attend par conséquent à ce que les torseurs utilisés soient différents des

torseurs versels. De plus, pour les surfaces $S_{a,F}$, l'approximation faible n'est pas nécessairement vérifiée. Le passage successif du nombre de points rationnels de hauteur bornée à des sommes de type

$$\mathcal{S}(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}(X)} r_a(F(\mathbf{x})) \tag{2.5.20}$$

pour

$$\mathcal{R}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid ||\mathbf{x}||_\infty \leqslant X, \quad F(\mathbf{x}) > 0\}$$

puis à des sommes de type

$$\mathcal{S}(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2 \cap \mathcal{R}(X)} r_a(F_1(\mathbf{x})) \cdots r_a(F_r(\mathbf{x}))$$

correspond à deux descentes successives. La première descente est une descente de la surface de Châtelet sur un torseur intermédiaire $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}} \subseteq \mathbf{A}^5$ d'équation

$$y^2 - az^2 = t^2 F(u, v)$$

avec $(y, z, t) \neq (0, 0, 0)$ et $(u, v) \neq (0, 0)$. Pieropan a alors établi dans sa thèse [Pie15] qu'il s'agissait d'un torseur quasi-universel de type $\lambda : \mathrm{Pic}(S) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S})$. La deuxième descente effectuée l'est de ce torseur intermédiaire $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ sur des variétés d'équations

$$F_i(u, v) = d_i(s_i^2 + t_i^2), \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{2.5.21}$$

La majeure partie de la vérification de la conjecture de Peyre de [Des16b] a donc été d'établir que ces variétés sont en réalité des torseurs quasi-universels d'un certain type et non des torseurs versels. De manière analogue, on peut constater que parmi toutes les démonstrations du principe de Manin, le seul cas où une descente est utilisée sur les torseurs versels est le cas scindé (i), auquel cas les torseurs décrits dans cette section coïncident avec les torseurs versels. Dans tous les autres cas, on effectue une descente sur d'autres torseurs. Dans la plupart des cas, comprendre la géométrie derrière le problème de comptage et les torseurs ne se révèle pas indispensable pour vérifier que la conjecture de Peyre est vérifiée (même si la vérification de la constante peut se réexprimer en ces termes malgré tout) sauf dans les cas $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{L}_3\mathbf{L}_4$ (pour lequel il est établi dans [BBP12] que les variétés (2.5.20) sont des torseurs versels), $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$ (qui est traité dans ce manuscrit) et $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ (où la vérification de la constante est complétée dans ce manuscrit). On décrit dans cette section les torseurs quasi-universels de type $\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$, établissant ainsi que toutes les démonstrations du principe de Manin ont été réalisées à l'aide d'une descente sur ces torseurs et complétant ainsi la démonstration de la vérification de la constante de Peyre dans le cas $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$. On donne aussi une expression de la constante qui peut permettre de simplifier la vérification de la constante de Peyre dans de futurs travaux sur les surfaces $S_{a,F}$.

2.5.1 Description de $\mathrm{Pic}\Big(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\Big)$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $\left[D_{i,k}^{\pm}\right] = \left[D^{\pm}_{\sum_{\ell=1}^{i-1} d_\ell + k}\right]$.

Proposition 2.5.1. *On a*

$$\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})) = \left[E^+\right]\mathbf{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{d_i} \left[D_{i,k}^+\right]\mathbf{Z}\right) \oplus \left(\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right]\right)\mathbf{Z}.$$

En particulier, le rang de $\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$ *vaut* $r + 2$.

Démonstration– On a que $\mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) = \left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right)^{\mathfrak{g}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$. Soit

$$[D] = a\left[E^+\right] + \sum_{i=1}^{n} a_i \left[D_i^+\right] + f\left[D_1^-\right] \in \left(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{Q}}})\right)^{\mathfrak{g}}.$$

On utilise alors le fait que $\left[E^+\right]$ est invariant par $\mathfrak{g}$ et que le groupe $\mathfrak{g}$ agit transitivement sur les racines de chaque F_i. En particulier, pour tout $i \in \{2, \ldots, r\}$ et tous $k \neq \ell \in \{1, \ldots, d_i\}$, il existe $g_{i,k,\ell} \in \mathfrak{g}$ tel que $g_{i,k,\ell}\left(\left[D_{i,k}^+\right]\right) = \left[D_{i,\ell}^+\right]$. On a alors, puisque $\left[D_1^+\right]$ est invariant par $g_{i,k,\ell}$ l'égalité

$$\sigma_{i,k,\ell}([D]) = [D]$$

qui entraîne que $a_{i,k} = a_{i,\ell}$. De la même façon, dans le cas $i = 1$, pour $k \in \{2, \ldots, d_1\}$, il existe $g_k \in \mathfrak{g}$ tel que $g_k\left(\left[D_1^+\right]\right) = \left[D_k^+\right]$ si bien que $g_k\left(\left[D_1^-\right]\right) = \left[D_k^-\right]$. On a alors

$$\sigma_k([D]) = [D]$$

qui entraîne que $a_1 - f = a_k$. On en déduit que

$$[D] = a\left[E^+\right] + \sum_{i=1}^{r} a_{d_i} \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + f\left(\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right]\right),$$

ce qui permet de conclure la démonstration. □

Remarque– On peut prendre, comme cela est fait dans [Des16b], $\left[D_1^-\right]$ comme générateur à la place de $\left[D_1^+\right] + \left[D_1^-\right]$ dans le cas où F possède un facteur linéaire que l'on peut supposer étant égal à F_1. Cela peut permettre de simplifier certains calculs.

On considère alors l'injection $\lambda : \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})$ et on va décrire les torseurs de type λ pour $S_{a,F}$. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.5.1. *Supposons que $a < 0$ ou que $a > 0$ et soit un nombre premier congru à 3 modulo 4 (ou $a = -1$) et supposons par ailleurs que le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ soit égal à 1. Il existe un ensemble fini J et pour tout $j \in J$, il existe un torseur $\pi_j : \mathcal{T}_j \to S_{a,F}$ de type λ tels que*

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j\left(\mathcal{T}_j(\mathbf{Q})\right)$$

et

$$S_{a,F}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigsqcup_{j \in J} \pi_j\left(\mathcal{T}_j\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}\right)\right).$$

Ces torseurs peuvent être décrits explicitement. Par ailleurs, pour $\mathcal{T}$ un torseur de type λ, il existe une variété $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{T} = \mathcal{X} \times \mathbf{A}^2$ et telle que le complémentaire de l'origine $\mathcal{X}^\circ$ de $\mathcal{X}$ soit isomorphe à l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^{2r+2} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u, v) = n_i(s_i^2 - at_i^2), \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

pour $(n_1, \ldots, n_r)$ vérifiant $n_1 \cdots n_r = y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z.
En particulier, les torseurs utilisés dans les différentes preuves du principe de Manin pour $a = -1$ sont des torseurs de type $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(i)})$.

Le reste de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème.

Suivant la preuve de [Pie15, proposition 2.71], un anneau de Cox R' de type λ est donné par l'anneau des invariants sous le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de

$$\bigoplus_{m \in \hat{T}} \overline{R}_m,$$

où $\overline{R}$ a été défini (2.4.2) et $\overline{R}_m$ correspond aux éléments homogènes de degré m de $\overline{R}$. Supposons $m \in \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$ donné par

$$m = a_0 \left[E^+\right] + \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + a_{r+1}\left[D_1^+ + D_1^-\right]$$

avec $a_i \in \mathbf{Z}$. Pour déterminer $\overline{R}_m$, on cherche à résoudre le système linéaire donné par

$$\left[e_0^+ E^+ + e_0^- E^- + \sum_{j=1}^{n} \left(e_j^+ D_j^+ + e_j^- D_j^-\right)\right] = a_0\left[E^+\right] + \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + a_{r+1}\left[D_1^+ + D_1^-\right],$$

où les $e_j^{\pm} \geqslant 0$. Grâce aux relations (2.2.5) et (2.2.6), ce dernier est équivalent à

$$\begin{cases} a_0 = e_0^+ + e_0^- \\ a_1 = e_0^- + e_{1,1}^+ - e_{1,1}^- = \cdots = e_0^- + e_{1,d_1}^+ - e_{1,d_1}^- \\ a_2 = e_0^- + e_{2,1}^+ - e_{2,1}^- = \cdots = e_0^- + e_{2,d_2}^+ - e_{2,d_2}^- \\ \vdots \\ a_r = e_0^- + e_{r,1}^+ - e_{r,1}^- = \cdots = e_0^- + e_{r,d_r}^+ - e_{r,d_r}^- \\ a_{r+1} = -\frac{n}{2} e_0^- + \sum_{i=1}^{n} e_i^- \end{cases}$$

Ce système est résoluble si, et seulement si,

$$\begin{cases} e_{1,1}^+ - e_{1,1}^- = \cdots = e_{1,d_1}^+ - e_{1,d_1}^- \\ e_{2,1}^+ - e_{2,1}^- = \cdots = e_{2,d_2}^+ - e_{2,d_2}^- \\ \vdots \\ e_{r,1}^+ - e_{r,1}^- = \cdots = e_{r,d_r}^+ - e_{r,d_r}^- \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\overline{R'}$ est isomorphe au sous-anneau de $\overline{R}$ engendré par les variables

$$\eta_0^{\pm} = Z_0^{\pm}; \quad \eta_i = Z_i^+ Z_i^- \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad ; \eta_j^+ = Z_{j,1}^+ \cdots Z_{j,d_j}^+ \quad (1 \leqslant j \leqslant r) \quad ;$$

$$\eta_j^- = Z_{j,1}^- \cdots Z_{j,d_j}^- \quad (1 \leqslant j \leqslant r).$$

vérifiant les relations suivantes (d'après (2.4.18))

$$\Delta_{j,k}\eta_\ell + \Delta_{k,\ell}\eta_j + \Delta_{\ell,j}\eta_k = 0 \quad (1 \leqslant j < k < \ell \leqslant n) \tag{2.5.22}$$

ainsi que

$$\prod_{k=1}^{d_j} \eta_{j,k} = \eta_j^+ \eta_j^- \quad (1 \leqslant i \leqslant r). \tag{2.5.23}$$

On notera

$$\phi_i = \eta_j^+ \eta_j^- - \prod_{k=1}^{d_j} \eta_{j,k} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

On notera $\eta_{i,1}, \ldots, \eta_{i,d_i}$ les variables η_j correspondant au facteur irréductible F_i. On remarque que ces équations sont invariantes sous l'action du groupe de Galois $\mathcal{G}$. On pose alors

$$X_0 = \frac{Z_0^+ + Z_0^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}}$$

ainsi que

$$X_j = \frac{\eta_j^+ + \eta_j^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_j = \frac{\eta_j^+ - \eta_j^-}{2\sqrt{a}} \quad (1 \leqslant j \leqslant r) \tag{2.5.24}$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ les variables

$$X_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^\ell \eta_{i,k}}{2d_i} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant d_i - 1. \tag{2.5.25}$$

On constate alors que les variables $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r)$ sont $\mathcal{G}$-invariantes et que si l'on écrit les relations (2.5.24) et (2.5.25) sous la forme

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

alors $\det(M) \neq 0$ si bien que cela implique que l'on puisse exprimer les η_i en termes des $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r)$. On notera $\eta_i = f_i(\mathbf{X})$ si bien qu'on obtient que la $\mathbf{Q}$-algèbre

$$R_\lambda = \mathbf{Q}[X_0, Y_0, X_i, Y_i \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r] / (P_{j,k,\ell}, \phi_i) \tag{2.5.26}$$

est un anneau de Cox pour $S_{a,F}$ sur $\mathbf{Q}$ de type λ. On sait alors que $\dim(R_\lambda) = r + 4$ si bien que l'idéal

$$(P_{j,k,\ell}, \phi_i)$$

possède $n+r-2$ générateurs combinaisons linéaires des $P_{i,j,k}$ et des ϕ_i à coefficients dans $\mathbf{Q}$ que l'on peut obtenir par descente galoisienne. Cela est fait en détails dans le cas où F est de degré 4 et se factorise sous la forme $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ avec Q_i deux formes quadratiques non proportionnelles dans la suite mais il apparaît difficile de donner un système de générateur en général du fait de la complexité éventuelle du groupe de Galois $\mathcal{G}$. On peut noter que l'on retrouve le résultat de [Des16b] dans le cas de factorisation $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$, auquel cas les variables $Z_3^+ Z_3^-$ et $Z_4^+ Z_4^-$ s'éliminent à l'aide de $P_{1,2,3}$ et de $P_{1,2,4}$.

Le lemme suivant explicite le groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})))$.

Lemme 2.5.1. *On a l'isomorphisme*

$$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))) \cong H^1\left(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})\right).$$

Démonstration– Le point clé concernant les torseurs de type λ est que l'action du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{a}))$ est triviale si bien que

$$H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\sqrt{a})\right), \mathrm{Pic}(S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a}))\right) = \{0\}.$$

Ainsi en notant $S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})} = S_{a,F} \times_{\mathbf{Q}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, la suite exacte de restriction-inflation

$$0 \longrightarrow H^1\left(G, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})\right) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \longrightarrow H^1\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a}), \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})\right) \tag{2.5.27}$$

avec $G = \mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}\right)$ fournit l'isomorphisme

$$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}\right), \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})\right).$$

Puisque le groupe $\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}\right)$ est cyclique d'ordre 2 engendré par la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$, notée σ, le groupe de cohomologie

$$H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}\right), \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})\right)$$

coïncide avec l'homologie du complexe

$$\hat{T} \xrightarrow{\mathrm{Id}+\sigma} \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}) \xrightarrow{\mathrm{Id}-\sigma} \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}).$$

Autrement dit,

$$H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}\right), \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})\right) \cong \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})/\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \sigma).$$

On obtient aisément le fait que $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})$ est donné par les éléments

$$x_0\left[E^+\right] + \sum_{i=1}^{r} x_i \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + x_{r+1}\left[D_1^+ + D_1^-\right]$$

tels que

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} d_i x_i + 2x_{r+1} = 0. \end{cases} \tag{2.5.28}$$

Deux cas se dégagent alors. Supposons dans un premier temps que tous les d_i soient pairs auquel cas les équations (2.5.28) se réécrivent

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} \frac{d_i}{2} x_i + x_{r+1} = 0 \end{cases}$$

si bien qu'on obtient aisément que les éléments

$$\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - \frac{d_i}{2}\left[D_1^+ + D_1^-\right] \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

forment une base de $\mathrm{Ker}(\sigma+\mathrm{Id})$. S'il existe au moins un d_i impair, par exemple $d_1 = 2d_1'+1$, alors en posant $t = x_{r+1} + d_1' x_1$, on obtient que les équations (2.5.28) sont équivalentes à

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = -\sum_{i=2}^{r} \frac{d_i}{2} x_i - 2t = 0 \\ x_{r+1} = d_1' \sum_{i=2}^{r} \frac{d_i}{2} x_i + d_1 t. \end{cases}$$

Cela entraîne alors immédiatement qu'une $\mathbf{Z}$-base de $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})$ est fournie dans ce cas par

$$-2\left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+\right] + d_1\left[D_1^+ + D_1^-\right], \quad -d_i\left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+\right] + \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + d_1' d_i\left[D_1^+ + D_1^-\right],$$

pour $2 \leqslant i \leqslant r$. D'autre part, $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \sigma)$ est engendrée par

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - \frac{n}{2}\left[D_1^+ + D_1^-\right]; \quad 2\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - d_i\left[D_1^+ + D_1^-\right] \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Commençons alors par le cas où tous les d_i sont pairs. Dans ce cas, puisque

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - \frac{d_i}{2}\left[D_1^+ + D_1^-\right]\right) = \sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - \frac{n}{2}\left[D_1^+ + D_1^-\right],$$

le groupe $H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}))$ est engendré par $r-1$ éléments d'ordre 2 et par conséquent

$$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{r-1}.$$

Dans le cas où d_1 est impair, puisqu'on a

$$\begin{aligned}
&-d_i\left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+\right] + \left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + d_1' d_i\left[D_1^+ + D_1^-\right] \\
&= -d_i\left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+\right] + d_1\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] + d_1'\left(2\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - d_i\left[D_1^+ + D_1^-\right]\right)
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}\left(-d_i\left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+\right] + d_1\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right) \\
&= -\frac{n}{2}\left(2\left[\sum_{k=1}^{d_1} D_{1,k}^+\right] - d_1\left[D_1^+ + D_1^-\right]\right) + d_1\left(\sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right] - \frac{n}{2}\left[D_1^+ + D_1^-\right]\right)
\end{aligned}$$

il s'ensuit que le groupe $H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})}))$ est engendré par $r-2$ éléments d'ordre 2 et par conséquent

$$H^1(\mathbf{Q}, \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{r-2}.$$

On conclut alors grâce à la Proposition 2.3.1. □

On est désormais en mesure de décrire tous les anneaux de Cox de $S_{a,F}$ de type λ. On s'inspire ici des deux preuves de [Pie15, propositions 2.69-2.70]. On note T le tore dont le groupe des caractères est donné par $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$. Tout élément de $H^1(\mathbf{Q}, T)$ est représenté par un cocycle $c : \mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}) \to T$, lui-même déterminé par l'image $c_\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}\,(T, \mathbf{Q}(\sqrt{a})^\times)$ de la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$.

On sait que, pour tout anneau de Cox R'_λ pour $S_{a,F}$ de type λ, il existe un cocycle $c : \mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}) \to T$ tel que R'_λ soit un twist de R_λ défini en (2.5.26). D'après [Pie15, proposition 2.41], l'action de la conjugaison dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ sur $\overline{R_\lambda}$ est la suivante :

$$\sigma(Z_0^-) = c_\sigma\left(\left[E^+\right]\right) Z_0^+$$

et

$$\sigma(\eta_j^-) = c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right)\eta_j^+; \quad \sigma(\eta_i) = c_\sigma\left(\left[D_1^+ + D_1^-\right]\right)\eta_i.$$

On choisit alors une racine carrée complexe r_1 de $c_\sigma\left(\left[D_1^+ + D_1^-\right]\right)$. Tout ce qui suit ne dépendra pas du choix de cette racine carrée. En prenant les nouvelles variables suivantes, invariantes sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}[\sqrt{a}]/\mathbf{Q})$

$$X_0 = \frac{c_\sigma\left([E^+]\right) Z_0^+ + Z_0^-}{2}; \quad Y_0 = \frac{c_\sigma\left([E^+]\right) Z_0^+ - Z_0^-}{2\sqrt{a}};$$

$$X_i = \frac{c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right)\eta_i^+ + \eta_i^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right)\eta_i^+ - \eta_i^-}{2\sqrt{a}} \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ les variables

$$X_{i,\ell} = \frac{\sum_{k=1}^{d_i} \beta_k^\ell r_1 \eta_{i,k}}{2d_i} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant d_i - 1,$$

on obtient que R'_λ est isomorphe à la $\mathbf{Q}$-algèbre

$$\mathbf{Q}[X_0, Y_0, X_i, Y_i\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r]/\left(P_{j,k,\ell}^c, \phi_i^c\right)$$

avec

$$P_{j,k,\ell}^c = \Delta_{j,k} r_1 \eta_\ell + \Delta_{k,\ell} r_1 \eta_j + \Delta_{\ell,j} r_1 \eta_k \quad (1 \leqslant j < k < \ell \leqslant n)$$

ainsi que

$$\phi_i^c = \prod_{k=1}^{d_j} r_1 \eta_{j,k} - r_1^{d_i}\eta_j^+\eta_j^- = r_1^{d_i} c_\sigma\left(\left[-\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right)\left(X_i^2 + Y_i^2\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

On constate que $P_{j,k,\ell}^c$ est invariante par conjugaison et que ϕ_i^c est invariante sous le groupe de Galois et est ainsi définie sur $\mathbf{Q}$. On sait alors que $\dim(R_\lambda) = r + 4$ si bien que l'idéal

$$\left(P_{j,k,\ell}^c, \phi_i^c\right) \tag{2.5.29}$$

possède $n + r - 2$ générateurs combinaisons linéaires des $P_{i,j,k}^c$ et des ϕ_i^c à coefficients dans $\mathbf{Q}$ que l'on peut obtenir par descente galoisienne. Cela est fait en détails l'exemple $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ dans la suite. On peut noter que l'on retrouve le résultat de [Des16b] dans le cas $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\mathbf{Q}$. On constate alors que la quantité $r_1^{d_i} c_\sigma\left(\left[-\sum_{k=1}^{d_i} D_{i,k}^+\right]\right)$ est invariante par conjugaison si bien que cette quantité est un nombre rationnel. En écrivant $n_{i1}^c = n_i/n_0^{d_i}$, on obtient que R'_λ est isomorphe à la $\mathbf{Q}$-algèbre

$$\mathbf{Q}[X_0, Y_0, X_i, Y_i\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r]/\left(P_{j,k,\ell}^{\mathbf{n}}, \phi_i^{\mathbf{n}}\right)$$

avec

$$P^c_{j,k,\ell} = \Delta_{j,k} r_1 n_0 \eta_\ell + \Delta_{k,\ell} r_1 n_0 \eta_j + \Delta_{\ell,j} r_1 n_0 \eta_k \quad (1 \leqslant j < k < \ell \leqslant n)$$

ainsi que

$$\phi^c_i = \prod_{k=1}^{d_j} r_1 n_0 \eta_{j,k} - n_i \left(X_i^2 - aY_i^2\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Puisque les conditions de cocycle s'écrivent

$$c_\sigma\left(\left[E^+\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[E^-\right]\right)\right) = 1;$$

et

$$c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D^+_{i,k}\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[\sum_{k=1}^{d_i} D^-_{i,k}\right]\right)\right) = 1,$$

les relations (2.5.24) et (2.5.25) fournissent

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^r n_i &= n_0^4 c_\sigma\left(\frac{n}{2}\left[D_1^+ + D_1^-\right] - \left[\sum_{k=1}^n D_k^+\right]\right)\\ &= c_\sigma\left(\left[E^+ + n\left(D_1^+ + D_1^-\right)\right]\right)\sigma\left(c_\sigma\left(\left[E^+ + n\left(D_1^+ + D_1^-\right)\right]\right)\right)\end{aligned}$$

si bien que $\prod_{i=1}^r n_i$ est bien de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z. On peut établir plus précisément, en suivant [Pie15, proposition 2.70] qu'étant donné $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Q}^\times$, il existe un cocycle $c : \mathrm{Gal}\left(\mathbf{Q}(\sqrt{a})/\mathbf{Q}\right) \to T$ si, et seulement si, le produit $\prod_{i=1}^r n_i$ est de cette forme.

De façon analogue au Lemme 2.4.1, on voit que pour $\mathbf{n}$ tel que $\prod_{i=1}^r n_i$ soit de la forme $y^2 - az^2$ pour deux entiers y et z, le sous-ensemble constructible $\mathcal{T}_\mathbf{n}$ de $\mathbf{A}_\mathbf{Q}^{2=n+2r} = \mathrm{Spec}\left(\mathbf{Q}\left[\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r, X_i, Y_i \mid 0 \leqslant i \leqslant r\right]\right)$ défini par l'idéal $\left(P^c_{j,k,\ell}, \phi^c_i\right)$ donné en (2.5.29) et les inégalités

$$\forall i \neq j \in [\![0, r]\!]^4, \quad ((X_i, Y_i), (X_j, Y_j)) \neq ((0,0),(0,0))$$

et

$$\forall i \neq j, \quad (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

est un torseur de type λ au-dessus de $S_{a,F}$. Pour toute extension finie k de $\mathbf{Q}$ et tout $((x_i, y_i), \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ dans $\mathcal{T}_\mathbf{n}(k)$, à l'aide de

$$u = \frac{1}{\Delta_{12}}\left(b_2 r_1 n_0 \eta_2 - b_1 r_1 n_0 \eta_1\right) \tag{2.5.30}$$

et

$$v = \frac{1}{\Delta_{12}}\left(-a_2 r_1 n_0 \eta_1 + a_1 r_1 n_0 \eta_1\right) \tag{2.5.31}$$

(qui sont bien dans k car invariants par le groupe de Galois), on peut définir comme en section précédente un morphisme $\pi_\mathbf{n} : \mathcal{T}_\mathbf{n} \to S_{a,F}$. En effet, grâce aux relations (2.5.23), on a

$$L_i(u, v) = r_1 n_0 \eta_i$$

si bien que

$$F_i(u, v) = n_i(X_i^2 - aY_i^2).$$

Lorsque $\mathbf{n}$ est de la forme

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad n_i = \varepsilon_i m_i$$

pour un certain $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}) \in \Sigma \times M$, on note $\mathcal{T}_{\mathbf{n}} = \mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\pi_{\mathbf{n}} = \pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}$. On peut alors montrer comme lors de la preuve du Lemme 2.4.1 qu'on a l'égalité

$$S_{a,F}(\mathbf{Q}) = \bigsqcup_{(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{m}) \in \Sigma \times M} \pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}} \left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{Q}) \right). \tag{2.5.32}$$

De plus, on a

$$\pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}} \left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{Q}) \right) = \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (t,u,v,x_3,x_4) \in \mathbf{Z}^5, (t,u,v) = (x_3,x_4) = 1 \\ t \geqslant 0, x_3^2 - a x_4^2 = t^2 F(u,v), \\ \varepsilon_i F_i(u,v) > 0 \\ \nu_p(F_i(u,v)) - \mu_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \\ F_i(u,v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right\}$$

$$\bigsqcup \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (t,u,v,x_3,x_4) \in \mathbf{Z}^5, (t,u,v) = (x_3,x_4) = 1 \\ t \geqslant 0, x_3^2 - a x_4^2 = t^2 F(u,v), \\ \varepsilon_i F_i(-u,-v) > 0 \\ \nu_p(F_i(u,v)) - \mu_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \\ F_i(-u,-v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right\}. \tag{2.5.33}$$

lorsqu'il existe un facteur irréductible de degré impair de F et on a

$$\pi_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}} \left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{Q}) \right) = \left\{ [tu^2 : tuv : tv^2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}} \;\middle|\; \begin{array}{c} (t,u,v,x_3,x_4) \in \mathbf{Z}^5, (t,u,v) = (x_3,x_4) = 1 \\ t \geqslant 0, x_3^2 - a x_4^2 = t^2 F(u,v), \\ \varepsilon_i F_i(u,v) > 0 \\ \nu_p(F_i(u,v)) - \mu_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \\ F_i(u,v) \in \varepsilon_i m_i \mathcal{E} \end{array} \right\} \tag{2.5.34}$$

sinon. À nouveau de la même façon qu'en section précédente, on montre, en notant $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}}$ le sous-schéma de $\mathbf{A}^{2+n+2r}_{\mathbf{Q}}$ défini par l'idéal donnée en (2.5.29), que $\mathcal{T}_{\mathbf{n}}$ est égal au produit $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}^2_{\mathbf{Q}}$. Si $\mathcal{Y}^\circ_{\mathbf{n}}$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}}$, on a alors un isomorphisme entre l'intersection complète $\mathcal{V}$ de $\mathbf{A}^{2+n+2r}_{\mathbf{Q}} \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$F_i(u,v) = n_i(X_i^2 - aY_i^2).$$

En effet, le morphisme $\mathcal{Y}^\circ_{\mathbf{n}} \to \mathcal{V}$ est donné par (2.5.30) et (2.5.31) tandis que le morphisme réciproque est donné par $\eta_{i,k} = L_i(u,v)$. On retrouve ainsi une variété de la forme (2.5.21) et il s'agit donc bel et bien des torseurs utilisés dans les preuves du principe de Manin lorsque $a = -1$ dans [BBP12], [BB12], [BT13] et [Des16b].

On donne alors deux derniers lemmes qui permettent d'exprimer la constante conjecturée par Peyre de manière adéquate à notre traitement du problème de comptage.

Lemme 2.5.2. *On a* $Ш^1(\mathbf{Q}, T) = \{0\}$ *où*

$$Ш^1(\mathbf{Q}, T) = \mathrm{Ker} \left(H^1(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1(\mathbf{R}, T) \prod_p H^1(\mathbf{Q}_p, T) \right).$$

Démonstration– La démonstratione st identique à celle de [Des16b]. □

Lemme 2.5.3. *On a l'égalité*

$$S_{a,F}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}\right)^{\mathrm{Br}(S)} = \bigsqcup_{(\mathbf{m},\varepsilon)\in M\times\Sigma} \pi_{\mathbf{m},\varepsilon}\left(\mathcal{T}_{\mathbf{m},\varepsilon}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}\right)\right),$$

où $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ *désigne l'anneau des adèles de* $\mathbf{Q}$.

Démonstration– La démonstration est à nouveau identique à [Des16b] une fois que l'on a précisé que, dans le cas général, $\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})/\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ est engendré par les classes de $\left[D_{i,k}^{+}\right]$ pour $i \in \{1,\ldots,r\}$ et $k \in \{1,\ldots,d_i-1\}$ et que la conjugaison agit sur $\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})/\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{Q}(\sqrt{a})})$ comme $-\mathrm{Id}$, ce qui entraîne

$$\left(\mathrm{Pic}(\overline{S_{a,F}})/\hat{T}\right)^{\mathcal{G}} = \{0\}.$$

□

Le Lemme 2.5.3 fournit

$$c_S = \alpha(S)\beta(S)\sum_{\substack{\varepsilon\in\Sigma\\ \mathbf{m}\in M}} \omega_H\left(\pi_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathcal{T}_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))\right)$$

et on écrit

$$\omega_H(\pi_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathcal{T}_{\varepsilon,\mathbf{m}}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))) = \omega_\infty(\varepsilon,\mathbf{m})\prod_p \omega_p(\varepsilon,\mathbf{m}),$$

où, en passant comme dans [BBP12] et [BB12] aux densités sur le torseur intermédiaire $\mathcal{T}_{\mathrm{spl}}$ défini par l'équation (2.4.11), l'on a pour tout nombre premier p l'égalité :

$$\omega_p(\varepsilon,\mathbf{m}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^{4n}}\#\left\{(u,v,y,z,t)\in(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} t^2F(u,v)\equiv y^2-az^2 \pmod{p^n}\\ p\nmid(u,v),\quad p\nmid(y,z,t)\\ 2|\nu_p(F_i(u,v))-\mu_i\end{array}\right\}.$$

2.5.2 Un exemple : Le cas des surfaces de Châtelet avec $a=-1$ et $F=Q_1Q_2$

D'après ce qui précède, tout anneau de Cox de type λ est isomorphe à

$$\mathbf{Q}[X_0,Y_0,X_i,Y_i\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_r]/\left(P_{j,k,\ell}^{\mathbf{n}},\phi_i^{\mathbf{n}}\right)$$

avec

$$P_{j,k,\ell}^{c} = \Delta_{j,k}r_1n_0\eta_\ell + \Delta_{k,\ell}r_1n_0\eta_j + \Delta_{\ell,j}r_1n_0\eta_k \quad (1\leqslant j<k<\ell\leqslant n)$$

ainsi que

$$\phi_i^c = \prod_{k=1}^{d_j} r_1n_0\eta_{j,k} - n_i\left(X_i^2+Y_i^2\right) \quad (1\leqslant i\leqslant r).$$

On a alors en posant les variables équivariantes suivantes

$$X_0 = \frac{c_\sigma\left([E^+]\right)Z_0^+ + Z_0^-}{2};\quad Y_0 = \frac{c_\sigma\left([E^+]\right)Z_0^+ - Z_0^-}{2i};$$

$$X_1 = \frac{c_\sigma\left(\left[D_1^+ + D_2^+\right]\right)\eta_1^+ + \eta_1^-}{2}\quad\text{et}\quad Y_1 = \frac{c_\sigma\left(\left[D_1^+ + D_2^+\right]\right)\eta_1^+ - \eta_1^-}{2i},$$

$$X_2 = \frac{c_\sigma\left(\left[D_3^+ + D_4^+\right]\right)\eta_2^+ + \eta_2^-}{2} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{c_\sigma\left(\left[D_3^+ + D_4^+\right]\right)\eta_2^+ - \eta_2^-}{2i},$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2$ les variables équivariantes suivantes

$$T_{i,1} = \frac{n_0 r_1(\eta_1 + \eta_2)}{2} \quad \text{et} \quad T_{i,2} = \frac{n_0 r_1(\eta_1 - \eta_2)}{2\sqrt{\Delta_i}}$$

que l'idéal est engendré par

$$f_1^{\mathbf{n}} = 2\Delta_{1,2}T_{2,1} + (\Delta_{2,3} + \Delta_{2,4})\,(T_{1,1} + \sqrt{\Delta_1}T_{1,2}) + (\Delta_{3,1} + \Delta_{4,1})\,(T_{1,1} - \sqrt{\Delta_1}T_{1,2});$$

$$f_2^{\mathbf{n}} = 2\Delta_{1,2}\sqrt{\Delta_2}T_{2,2} + (\Delta_{2,3} - \Delta_{2,4})\,(T_{1,1} + \sqrt{\Delta_1}T_{1,2}) + (\Delta_{3,1} - \Delta_{4,1})\,(T_{1,1} - \sqrt{\Delta_1}T_{1,2})$$

et

$$\begin{aligned}\phi_1^{\mathbf{n}} = n_1(X_1^2 - aY_1^2) - \frac{1}{\Delta_{3,4}^2}\Big(&(\Delta_{1,4}\Delta_{2,4} + \Delta_{1,4}\Delta_{3,2} + \Delta_{2,4}\Delta_{3,1} + \Delta_{3,1}\Delta_{3,2})\,T_{2,1}^2 \\ &+ 2\sqrt{\Delta_2}\,(\Delta_{1,4}\Delta_{2,4} - \Delta_{3,1}\Delta_{3,2})\,T_{2,2}T_{2,1} \\ &+ (\Delta_{1,4}\Delta_{2,4} - \Delta_2\Delta_{1,4}\Delta_{3,2} - \Delta_2\Delta_{2,4}\Delta_{3,1} + \Delta_{3,1}\Delta_{3,2})\,T_{2,1}^2\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi_2^{\mathbf{n}} = n_2(X_2^2 - aY_2^2) - \frac{1}{\Delta_{1,2}^2}\Big(&(\Delta_{3,2}\Delta_{4,2} + \Delta_{3,2}\Delta_{1,4} + \Delta_{4,2}\Delta_{1,3} + \Delta_{1,3}\Delta_{1,4})\,T_{1,1}^2 \\ &+ 2\sqrt{\Delta_1}\,(\Delta_{3,2}\Delta_{4,2} - \Delta_{1,3}\Delta_{1,4})\,T_{1,2}T_{1,1} \\ &+ (\Delta_{3,2}\Delta_{4,2} - \Delta_1\Delta_{3,2}\Delta_{1,4} - \Delta_1\Delta_{4,2}\Delta_{1,3} + \Delta_{1,3}\Delta_{1,4})\,T_{1,1}^2\Big).\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\Delta_{12}}\Big(b_2(T_{1,2} + \sqrt{\Delta_1}T_{1,2}) - b_1(T_{1,2} - \sqrt{\Delta_1}T_{1,2})\Big) \\ &= \frac{1}{\Delta_{34}}\Big(b_4(T_{2,2} + \sqrt{\Delta_2}T_{2,2}) - b_3(T_{2,2} - \sqrt{\Delta_2}T_{2,2})\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{\Delta_{12}}\Big(-a_2(T_{1,2} + \sqrt{\Delta_1}T_{1,2}) + a_1(T_{1,2} - \sqrt{\Delta_1}T_{1,2})\Big) \\ &= \frac{1}{\Delta_{34}}\Big(-a_4(T_{2,2} + \sqrt{\Delta_2}T_{2,2}) + a_3(T_{2,2} - \sqrt{\Delta_2}T_{2,2})\Big)\end{aligned}$$

on obtient alors, en notant $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}}^\circ$ le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{Y}_{\mathbf{n}}$, un isomorphisme entre l'intersection complète de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^8 \smallsetminus \{0\}$ donnée par les équations

$$Q_i(u,v) = n_i(X_i^2 - aY_i^2). \qquad (i \in \{1,2\})$$

On retrouve ainsi une variété de la forme (2.5.21) et il s'agit donc bel et bien des torseurs utilisés dans la preuve du principe de Manin dans [BT13]. On peut alors traiter la constante de Peyre comme cela est fait dans [BT13] en remplaçant toutes les occurrences de «torseurs versels» par «torseurs de type λ», $\omega_H\left(V_{(\varepsilon,m_3)}(\mathbf{Q})\right)$ par $\omega_H\left(\mathcal{T}_{(\varepsilon,m_3)}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})\right)$ dans la formule (9.46) et en utilisant (2.5.34).

Remerciements

L'auteur tient ici à exprimer toute sa gratitude à Marta Pieropan et à Ulrich Derenthal pour de nombreux échanges de mails éclairants.

Deuxième partie

Le principe de Manin pour une famille d'hypersurfaces en dimension supérieure

Table des matières

3 Le principe de Manin pour une famille d'hypersurfaces projectives singulières en dimension supérieure 138

3.1 Introduction et principaux résultats . . . 139
3.1.1 Introduction . . . 139
3.1.2 Résultats . . . 141
Cas $n = 2$ . . . 141
Cas $n \geqslant 3$ . . . 142
3.2 Notations . . . 143
3.3 Démonstration des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 . . . 143
3.3.1 Démonstration du Théorème 3.1.1 . . . 144
3.3.2 Démonstration du principe de Manin lorsque $n \geqslant 3$ . . . 145
Réduction au cas $y_i \geqslant 1$ pour tout $i \in \mathbf{J}1, n\mathbf{K}$ . . . 145
Utilisation du Lemme 3.2.1 . . . 146
Une borne supérieure . . . 150
Démonstration de l'asymptotique . . . 153
3.4 Vérification de la conjecture de Peyre pour W_n . . . 161
3.4.1 Résolution crépante des singularités de W_n et forme conjecturale de la constante de Peyre . . . 161
Une résolution crépante de W_n . . . 161
Les hypersurfaces W_n sont "presque de Fano" . . . 162
Forme conjecturale de la constante de Peyre . . . 163
Le facteur $\beta(X_{0,n})$ . . . 163
Le facteur $\alpha(X_{0,n})$ . . . 163
Construction du torseur versel associé à W_n . . . 169
La construction explicite de la norme $v-$adique et du nombre de Tamagawa . . . 180
Le nombre de Tamagawa $\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right)$ . . . 190
3.4.2 Transformation de la constante obtenue par le Théorème 3.1.2 . . . 191
Mise sous forme de produit eulérien de la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ . . . 191
Lien entre la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ et le nombre de Tamagawa associé à $X_{0,n}$ . . . 193
3.4.3 Le dénouement . . . 196

Annexe

Annexe A A crepant resolution for the hypersurfaces W_n i

3

Le principe de Manin pour une famille d'hypersurfaces projectives singulières en dimension supérieure

Sommaire

3.1 Introduction et principaux résultats 140

3.1.1 Introduction 140

3.1.2 Résultats 142

Cas $n = 2$ 142

Cas $n \geqslant 3$ 143

3.2 Notations 144

3.3 Démonstration des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 144

3.3.1 Démonstration du Théorème 3.1.1 145

3.3.2 Démonstration du principe de Manin lorsque $n \geqslant 3$ 146

Réduction au cas $y_i \geqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ 146

Utilisation du Lemme 3.2.1 147

Une borne supérieure 151

Démonstration de l'asymptotique 154

3.4 Vérification de la conjecture de Peyre pour W_n 162

3.4.1 Résolution crépante des singularités de W_n et forme conjecturale de la constante de Peyre 162

Une résolution crépante de W_n 162

Les hypersurfaces W_n sont «presque de Fano» 163

Forme conjecturale de la constante de Peyre 164

Le facteur $\beta(X_{0,n})$ 164

Le facteur $\alpha(X_{0,n})$ 164

Construction du torseur versel associé à W_n 170

La construction explicite de la norme $v-$adique et du nombre de Tamagawa 181

Le nombre de Tamagawa $\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right)$ 191

3.4.2 Transformation de la constante obtenue par le Théorème 3.1.2 . 192

Mise sous forme de produit eulérien de la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ . . 192

Lien entre la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ et le nombre de Tamagawa associé à $X_{0,n}$ 194

3.4.3 Le dénouement 197

Abstract. Inspired by a method of La Bretèche relying on some unique factorisation, we generalize work of Blomer, Brüdern, and Salberger to prove the Manin's principle in its strong form conjectured by Peyre for some infinite family of varieties of higher dimension. The varieties under consideration in this paper correspond to the projective varieties defined by the following equation

$$x_1y_2y_3\cdots y_n + x_2y_1y_3\cdots y_n + \cdots + x_ny_1y_2\cdots y_{n-1} = 0.$$

in $\mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$ for all $n \geqslant 3$. This paper comes with an Appendix by Per Salberger. We reproduce here the preprint [Des16a].

3.1 Introduction et principaux résultats

3.1.1 Introduction

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et W_n l'hypersurface normale projective de $\mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$ définie par l'équation

$$x_1y_2y_3\cdots y_n + x_2y_1y_3\cdots y_n + \cdots + x_ny_1y_2\cdots y_{n-1} = 0 \tag{3.1.1}$$

où $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ désignent des coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$. Lorsque $n = 2$, la variété W_2 est lisse tandis que pour $n \geqslant 3$, la variété W_n est singulière, le lieu singulier étant donné par la réunion des sous-espaces fermés définis par les équations

$$y_i = y_j = y_k = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$$

ou

$$y_i = y_j = x_i = x_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

On pose U_n l'ouvert de Zariski de W_n défini par la condition $y_1y_2\cdots y_n \neq 0$. Sur cet ouvert, on peut réécrire l'équation (3.1.1) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = 0.$$

On constate alors que toutes les sous-variétés accumulatrices et les points singuliers de W_n sont inclus dans $W_n \smallsetminus U_n$ (voir [BBS14]). La variété W_n possède la structure algébrique suivante qui s'avérera très utile dans la suite. On considère le groupe algébrique

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^* \right\}$$

ainsi que

$$\Psi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} H^n & \longrightarrow & \mathbf{G}_a \\ \left(\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \end{array} \right.$$

et $G_n = \mathrm{Ker}(\Psi_n)/\mathbf{G}_m$ où l'on utilise le plongement

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m & \hookrightarrow & H^n \\ b & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) \end{array}.$$

Il vient alors que $G_n \cong U_n$. En effet, tout point de U_n admet un unique représentant de la forme $[x_1 : \cdots : x_n : 1 : y_2 : \cdots : y_n]$ et de même tout point de G_n possède une unique représentation du type $\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}\right)$ si bien que

$$\begin{array}{ccc} U_n & \longrightarrow & G_n \\ [x_1 : \cdots : x_n : 1 : y_2 : \cdots : y_n] & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} y_n & x_n \\ 0 & y_n \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

est un isomorphisme qui munit U_n d'une structure de groupe commutatif lorsque la multiplication de deux points $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n)$ est donnée par

$$(x_1 y'_1 + x'_1 y_1, \ldots, x_n y'_n + x'_n y_n, y_1 y'_1, \ldots, y_n y'_n).$$

On obtient alors une immersion ouverte naturelle $j : G_n \hookrightarrow W_n$ et une action naturelle $\alpha : G_n \times W_n \to W_n$ de G_n sur W_n. Ce groupe

$$G_n \cong (\mathbf{G}_a)^{n-1} \times (\mathbf{G}_m)^{n-1}$$

est un produit de groupes additifs et multiplicatifs et les techniques d'analyse harmonique utilisées par exemple dans [BT98b] et [CLT02] ne s'adaptent pas *directement* à ce cas même s'il est possible qu'elles puissent s'y généraliser. La méthode utilisée dans cet article repose sur une approche différente du principe de Manin, à savoir une descente sur le torseur versel et avec [BBS14], il s'agit vraisemblablement du seul exemple de groupe de ce type pour lequel le principe de Manin et la conjecture de Peyre sont établis. Dans [BBS14], Blomer, Brüdern et Salberger établissent le principe de Manin sous sa forme forte conjecturée par Peyre pour la variété W_3 pour la hauteur anticanonique

$$H([x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3]) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \max(|x_i|, |y_i|)^3$$

lorsque $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ sont des entiers premiers entre eux. Leur méthode repose sur la construction d'une résolution crépante $X \to W_3$ de W_3 puis sur une descente sur le torseur versel de X. Le problème se réduit alors à un problème de comptage de points d'un réseau de dimension 10 dans une région dont la frontière rend le traitement difficile. Ce problème de géométrie des nombres est alors traité à l'aide de séries de Dirichlet multiples et de transformations de Mellin multidimensionnelles. La résolution crépante construite n'est plus valable lorsque $n \geqslant 4$ et leur méthode de comptage se complique considérablement dès que $n \geqslant 4$. Il est cependant à noter que, pour $n = 3$, leur formule asymptotique ([BBS14, theorem 1]) est plus précise que le principe de Manin à proprement parler puisqu'ils obtiennent un terme principal de la forme $BQ(\log(B))$ avec Q un polynôme de degré 4 dont le coefficient dominant correspond à la constante de Peyre. Enfin, pour $n \geqslant 4$, les auteurs indiquent dans [BBS14] sans donner de détails que leur méthode de comptage peut se généraliser afin de donner l'équivalent prédit par le principe de Manin sans terme d'erreur. On donne dans cet article une démonstration du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour tout $n \geqslant 3$ en utilisant une méthode de comptage différente adaptée à la combinatoire du problème.

Comme remarqué dans ce même article [BBS14, section 1.3], l'équation (3.1.1) définit également pour $n \geqslant 3$ une variété singulière $\widehat{W_n} \subset \left(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}\right)^n$ pour laquelle il est intéressant d'étudier le principe de Manin et la conjecture de Peyre pour la hauteur anticanonique

$$\widehat{H}([x_1 : y_1], \ldots, [x_n : y_n]) = \prod_{i=1}^{n} \max(|x_i|, |y_i|)$$

lorsque (x_i, y_i) sont deux entiers premiers entre eux pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. À la connaissance de l'auteur, ces deux conjectures ne sont connues pour aucune valeur de $n \geqslant 3$ pour les variétés $\widehat{W}_n$. Ces dernières ont pourtant un intérêt arithmétique puisqu'elles interviennent dans la détermination du cardinal des matrices stochastiques à coefficients rationnels tous de hauteur inférieure à une certaine borne $B \geqslant 1$. Dans [Shp16], Shparlinski obtient une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour ce cardinal et dans [Bre16], La Bretèche parvient à en obtenir une formule asymptotique en déterminant le nombre de points rationnels de hauteur inférieure à B sur $\widehat{W}_n$ lorsque $n \geqslant 3$ pour la hauteur

$$\widehat{H}_n\left([x_1 : y_1], \ldots, [x_n : y_n]\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(|x_i|, |y_i|\right)$$

lorsque (x_i, y_i) sont deux entiers premiers entre eux pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il est cependant important de noter que cette hauteur n'est pas anticanonique et qu'ainsi le principe de Manin et la conjecture de Peyre ne s'appliquent pas dans ce cas.

Enfin, l'équation (3.1.1) définit également pour $n \geqslant 3$ une variété singulière biprojective $\widetilde{W}_n \subset \left(\mathbf{P}^{n-1}_{\mathbf{Q}}\right)^2$ pour laquelle il peut également être intéressant d'étudier le principe de Manin et la conjecture de Peyre par rapport à la hauteur anticanonique

$$\widetilde{H}\left([x_1 : \ldots : x_n], [y_1 : \ldots : y_n]\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^{n-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$$

lorsque $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont deux n-uplets d'entiers premiers entre eux. Il est à noter que, contrairement au cas de W_n, la variété $\widetilde{W}_n$ ne peut pas être écrite de façon naturelle comme la compactification équivariante d'un groupe. Dans le cas de W_n, c'est un aspect essentiel de la preuve du principe de Manin et de la conjecture de Peyre de [BBS14] et du présent travail. Le seul cas pour lequel un résultat est connu est le cas $n = 3$. La variété $\widetilde{W}_3$ est alors une cubique de dimension 3 et Blomer et Brüdern obtiennent dans un premier temps dans [BB16] le bon ordre de grandeur pour le problème de comptage associé avant de parvenir récemment avec Salberger à obtenir une formule asymptotique et ainsi le principe de Manin et la conjecture de Peyre dans [BBS16]. Les méthodes utilisées présentent des similarités avec celles de [BBS14] et reposent là encore sur une descente sur le torseur versel associée à une résolution crépante de $\widetilde{W}_n$. Blomer, Brüdern et Salberger font en revanche appel à des techniques d'analyse de Fourier pour compter les points entiers sur ce torseur. La différence principale en termes de géométrie de la résolution crépante provient de l'absence de structure naturelle de groupe.

3.1.2 Résultats

L'objet de cet article est de démontrer le principe de Manin et la conjecture de Peyre dans le cas de W_n pour tout $n \geqslant 2$. Puisque W_2 est une variété torique lisse, le cas $n = 2$ est inclus dans les travaux généraux de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques lisses [BT98b] et le cas $n = 3$ est couvert par le résultat de [BBS14]. Cet article est accompagné d'une annexe de Per Salberger qui explicite une résolution crépante pour la variété W_n pour tout $n \geqslant 3$.

Cas $n = 2$

Pour la variété torique lisse W_2, on dispose du théorème suivant. Ce dernier établit le principe de Manin pour la variété W_2 et découle immédiatement des travaux plus généraux

de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques lisses [BT98b]. On en donnera une preuve élémentaire en section 3.3.1. D'après [BT98b], la constante c_2 *infra* est en accord avec la conjecture de Peyre.

Théorème 3.1.1. *Soit $B \geqslant 1$. Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que*

$$N(B; U_2) = c_2 B \log(B) + O(B)$$

avec

$$c_2 = \frac{4}{\zeta(2)^2}.$$

Cas $n \geqslant 3$

Pour tout $n \geqslant 3$ et pour un point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbf{Q}}$ représenté par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}^{2n}$ premiers entre eux, on considère la hauteur

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|, |y_i|)^n$$

qui est une hauteur anticanonique naturelle sur W_n comme remarqué dans [BBS14]. De plus, pour tout $B \geqslant 1$, on pose

$$N(B; U_n) = \#\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_n(\mathbf{Q}) : H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant B\}.$$

Lorsque $n \geqslant 3$, notre résultat est alors le suivant.

Théorème 3.1.2. *Soient $B \geqslant 2$ et $n \geqslant 3$. La variété W_n est «presque de Fano» au sens de [Pey01, Définition 3.1] et il existe une constante $c_n > 0$ telle que*

$$N(B; U_n) = c_n B (\log B)^{2^n - n - 1} + O\left(B (\log B)^{2^n - n - 2} \log(\log B)\right).$$

De plus, l'expression de la constante c_n est en accord avec la conjecture de Peyre.

Remarques.

— Une expression explicite de la constante c_n est donnée par la formule (3.3.34) en section 3.2.

— Le Théorème 3.1.2 permet de retrouver l'équivalent asymptotique qui découle de [BBS14, Theorem 1] pour $n = 3$. La démonstration donnée ici est en revanche différente de celle de [BBS14].

— Une adaptation simple de la démonstration de ce théorème conduirait à l'étude du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour l'hypersurface $W_{\mathbf{a},n}$ de $\mathbf{P}^{2n-1}$ définie par l'équation

$$a_1 x_1 y_2 y_3 \cdots y_n + a_2 x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots + a_n x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0,$$

pour un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers tous non nuls. On constate clairement que l'hypersurface $W_{\mathbf{a},n}$ est isomorphe à W_n et par conséquent on ne détaillera pas cet aspect.

Remerciements.– L'auteur tient à exprimer ici toute sa gratitude à son directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour ses conseils, son soutien et ses relectures tout au long de ce travail, ainsi qu'à Marc Hindry, Emmanuel Peyre et Tim Browning pour quelques discussions éclairantes. L'auteur tient également à remercier chaleureusement Per Salberger pour lui avoir communiqué ses résultats concernant la résolution crépante de W_n qui figurent en annexe et pour avoir été à l'origine de nombreux éclaircissements ainsi que Valentin Blomer et Jörg Brüdern.

3.2 Notations

On introduit dans cette section des notations qui seront utilisées tout au long de cet article. On notera $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs non nuls, $\mathrm{pgcd}(m,n)$ le pgcd de deux entiers m et n, $[m,n]$ leur ppcm et, lorsqu'il existe, $\overline{n}^a$ l'inverse de n modulo un entier a. On omettra la dépendance en a et on notera plutôt $\overline{n}$ dans les cas où aucune ambiguïté n'est possible sur l'entier a. Pour $n \geqslant 2$, on considère l'entier $N = 2^n - 1$ ainsi que pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, son développement en binaire

$$h = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \varepsilon_j(h) 2^{j-1},$$

avec $\varepsilon_j(h) \in \{0,1\}$. On notera $s(h) = \sum_{j \geqslant 1} \varepsilon_j(h)$ la somme des chiffres en base 2 de h. On utilise dans la suite de cet article la variante de la définition des ensembles de décomposition unique de [Hal96] et [BT16] introduite dans [Bre16]. On dit qu'un entier h est dominé par ℓ (respectivement strictement dominé) si pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a $\varepsilon_j(h) \leqslant \varepsilon_j(\ell)$. On notera $h \preceq \ell$ (respectivement $h \prec \ell$ lorsque $h \preceq \ell$ et $h \neq \ell$). On dira qu'un $N-$uplet $(z_1, \ldots, z_N)$ de $[\![1, n]\!]$ est réduit si $\mathrm{pgcd}(z_h, z_\ell) = 1$ lorsque $h \not\preceq \ell$ et $\ell \not\preceq h$. On a alors le lemme fondamental suivant.

Lemme 3.2.1. *Il existe une bijection entre l'ensemble des $n-$uplets $(y_1, \cdots, y_n)$ de $[\![1, n]\!]$ et les $N-$uplets réduits de $[\![1, n]\!]$ tels que*

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad y_j = \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h^{\varepsilon_j(h)} \quad \textit{et} \quad [y_1, \ldots, y_n] = \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h.$$

Démonstration– Il suffit de définir les z_h à $s(h)$ décroissant. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On pose $z_N = \mathrm{pgcd}(y_1, \ldots, y_n)$ et supposons les z_h construits pour $s(h) \geqslant k+1$. On pose alors pour h tel que $s(h) = k$

$$z_h = \mathrm{pgcd}\left(\frac{y_j}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N, s(\ell) \geqslant k+1 \\ \varepsilon_j(\ell) = 1}} z_\ell} \quad : \quad \varepsilon_j(h) = 1 \right).$$

Enfin, lorsque $h = 2^{i-1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$z_h = \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N, s(\ell) \geqslant 2 \\ \varepsilon_i(\ell) = 1}} z_\ell}.$$

Il est alors facile de vérifier que le N-uplet $(z_1, \ldots, z_N)$ de $[\![1, n]\!]$ est réduit. □

3.3 Démonstration des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

On sépare ici la preuve en deux sous-cas : le cas $n = 2$ et le cas $n \geqslant 3$. Dans le cas $n = 2$, la variété W_2 est torique et le comptage se simplifie particulièrement et ne nécessite pas toute la machinerie développée pour traiter les autres cas. Cependant, les grandes lignes de la méthode étant les mêmes, la preuve du cas $n = 2$ peut permettre d'éclairer celle du cas $n \geqslant 3$.

3.3.1 Démonstration du Théorème 3.1.1

L'objet de cette section est de démontrer le Théorème 3.1.1 pour la variété torique lisse W_2. Soit $B \geqslant 1$. On a l'égalité

$$N(B;U_2) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) N\left(\frac{B}{k^2}\right) + O(B) \tag{3.3.2}$$

avec

$$N(B) = \sum_{\substack{(y_1,y_2)\in\mathbf{N}^2 \\ 1\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\sqrt{B}}} N_{\mathbf{y}}(B)$$

et

$$N_{\mathbf{y}}(B) = \#\left\{(x_1,x_2)\in\mathbf{Z}^2 \quad : \quad |x_1|,|x_2|\leqslant\sqrt{B}, \quad x_1y_2+x_2y_1=0\right\},$$

Lorsque $y_1 \leqslant y_2$, on a

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{y}}(B) &= \#\left\{x_1\in\mathbf{Z} \ : \ |x_1|\leqslant\sqrt{B},\ x_1y_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ y_1)\,,\ \left|\frac{x_1y_2}{y_1}\right|\leqslant\sqrt{B}\right\} \\ &= 2\sqrt{B}\frac{\mathrm{pgcd}(y_1,y_2)}{y_2} + O(1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$N\left(\frac{B}{k^2}\right) = 2\frac{\sqrt{B}}{k} \sum_{\substack{(y_1,y_2)\in\mathbf{N}^2 \\ 1\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\sqrt{B}/k}} \frac{\mathrm{pgcd}}{(y_1,y_2)} y_2 + O\left(\frac{B}{k^2}\right). \tag{3.3.3}$$

On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Pour $X \geqslant 1$, on a*

$$S(X) := \sum_{1\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant X} \frac{(n_1,n_2)}{n_2} = \frac{X\log(X)}{\zeta(2)} + O\left(X\right).$$

Démonstration– On applique l'identité de convolution

$$\mathrm{pgcd}(n_1,n_2) = \sum_{d|\mathrm{pgcd}(n_1,n_2)} \varphi(d)$$

pour obtenir que

$$S(X) = X\sum_{1\leqslant d\leqslant X} \frac{\varphi(d)}{d^2} + O\left(X\right).$$

L'égalité

$$\varphi(d) = \sum_{m|d} \mu(m)\frac{d}{m}$$

fournit la formule

$$\sum_{1\leqslant d\leqslant X} \frac{\varphi(d)}{d^2} = \sum_{1\leqslant m\leqslant X} \frac{\mu(m)}{m} \sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant X \\ d\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)}} \frac{1}{d}.$$

Or,

$$\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant X \\ d\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)}} \frac{1}{d} = \frac{1}{m}\left(\log\left(\frac{X}{m}\right)+\gamma\right) + O\left(\frac{1}{X}\right)$$

avec γ la constante d'Euler, si bien que

$$\sum_{1\leqslant d\leqslant X}\frac{\varphi(d)}{d^2}=\frac{\log(X)}{\zeta(2)}+O\left(1\right).$$

Le résultat s'ensuit alors. □

Après report dans (3.3.2) et (3.3.3), il découle du Lemme 3.3.1 l'estimation

$$N(B;U_2)=\frac{4}{\zeta(2)^2}B\log(B)+O(B),$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1.1. □

3.3.2 Démonstration du principe de Manin lorsque $n\geqslant 3$

Le reste de cette section est consacrée à la preuve de la formule asymptotique du Théorème 3.1.2. On montrera ensuite que la variété W_n est «presque de Fano» au sens de [Pey01, Définition 3.1] et que la constante c_n obtenue est en accord avec le principe de Manin dans sa forme forte conjecturée par Peyre en section 3.4. La méthode employée, qui consiste à compter d'abord les $\mathbf{x}$ à $\mathbf{y}$ fixés n'est valable que lorsque la borne sur les x_i est plus grande que celle sur les y_i pour $i\in[\![1,n]\!]$. C'est en particulier pourquoi elle ne s'adapte pas, en tout cas directement, aux variétés définies lors de l'introduction $\widehat{W}_n$ et $\widetilde{W}_n$.

Réduction au cas $y_i\geqslant 1$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$

Quitte à changer le signe des x_i pour $i\in[\![1,n]\!]$, on peut supposer les y_i positifs pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et obtenir l'égalité

$$N(B;U_n)=2^{n-1}\#\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{Z}^n\times\mathbf{N}^n\quad:\quad\begin{array}{c}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|,y_i)\leqslant B^{1/n},\\(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=1,\\(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \text{ vérifie }\ (3.1.1)\end{array}\right\}.$$

Une inversion de Möbius fournit alors

$$N(B;U_n)=2^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)N\left(\frac{B}{k^n}\right)$$

où

$$\begin{aligned}N(B)&=\#\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{Z}^n\times\mathbf{N}^n\quad:\quad\begin{array}{c}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|,y_i)\leqslant B^{1/n},\\(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \text{ vérifie }\ (3.1.1)\end{array}\right\}\\&=\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n\\1\leqslant y_i\leqslant\sqrt[n]{B}}}N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right),\end{aligned}$$

avec, pour tous $\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n$ et $X\geqslant 1$,

$$N_{\mathbf{y}}(X)=\#\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^n\quad:\quad\begin{array}{c}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|\leqslant X,\\(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \text{ vérifie }\ (3.1.1)\end{array}\right\}.\tag{3.3.4}$$

Utilisation du Lemme 3.2.1

On se place ici dans le cas où $\mathbf{y} \in \mathbf{N}^n$ est fixé. L'équation (3.1.1) peut se réécrire en utilisant le Lemme 3.2.1 sous la forme

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = 0 \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad d_i = \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}. \tag{3.3.5}$$

On obtient ainsi la relation de divisibilité $z_{2^{j-1}} \mid x_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Mais contrairement au cas de [Bre16], on ne peut pas ici en déduire que $z_{2^{j-1}} = 1$ puisqu'on n'a pas les conditions $\operatorname{pgcd}(x_j, y_j) = 1$.
On considère alors, pour $X \geqslant 1$, l'ensemble

$$\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Z}^n \quad : \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=1}^{n} d_i \alpha_i = 0 \right\}.$$

On définit pour tout $r \geqslant 1$, l'ensemble $\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X)$ par

$$\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X) = \left\{ (\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^{n-r} \quad : \quad \max_{r+1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=r+1}^{n} d_i \alpha_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d_{1,r}) \right\} \tag{3.3.6}$$

où l'on a posé

$$\forall r \in [\![2,n]\!], \quad d_{1,r} = \prod_{\varepsilon_1(h) = \cdots = \varepsilon_r(h) = 0} z_h. \tag{3.3.7}$$

De plus, on introduit les notations

$$d_1' = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \quad \text{et} \quad \forall r \in [\![2,n]\!], \quad d_1^{(r-1)} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h) = \cdots = \varepsilon_{r-1}(h) = 0 \\ \varepsilon_r(h)=1}} z_h \tag{3.3.8}$$

de sorte que $d_{1,r-1} = d_{1,r} d_1^{(r-1)}$. Enfin, on pose

$$\forall r \in [\![2,n]\!], \quad d_r' = \prod_{\substack{\varepsilon_r(h)=0 \\ \varepsilon_1(h) + \cdots + \varepsilon_{r-1}(h) \neq 0}} z_h. \tag{3.3.9}$$

On obtient ainsi que $d_r = d_{1,r} d_r'$ et on constate en utilisant la section 3.2 que pour tout $2 \leqslant r \leqslant n$, on a $\operatorname{pgcd}\left(d_1^{(r-1)}, d_r'\right) = 1$.

On démontre alors les lemmes suivants qui permettent d'estimer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbf{y}; X)$ pour $X \geqslant 1$.

Lemme 3.3.2. *Soient $1 \leqslant r \leqslant n-1$ et $X \geqslant 1$. Avec les notations (3.3.6) et (3.3.8), on a l'estimation*

$$\#\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X) = 2^{n-r} \prod_{j=r+1}^{n} \frac{X}{d_1^{(j-1)}} + O\left(X^{n-r-1}\right).$$

Démonstration– Soit $r \geqslant 1$. L'idée principale de la preuve, inspirée de [Bre16], est de relier le cardinal de $\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y}, X)$ à celui de $\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X)$. Démontrons pour ce faire que pour tout $1 \leqslant r \leqslant n-2$, on a

$$\#\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X) = \left(\frac{2X}{d_1^{(r)}} + O(1) \right) \#\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y}, X). \tag{3.3.10}$$

En effet, pour un point $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X)$, $(\alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)$ appartient à $\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y}, X)$. D'autre part, considérons $(\alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)$ appartenant à $\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y}, X)$. Il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\sum_{i=r+2}^{n} d_i \alpha_i = d_{1,r+1} k. \tag{3.3.11}$$

Le $(n-r-1)$-uplet $(\alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)$ provient de la projection sur les $n-r-1$ dernières coordonnées d'un $(n-r)$-uplet $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X)$ s'il existe un entier $|\alpha_{r+1}| \leqslant X$ et $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\sum_{i=r+1}^{n} d_i \alpha_i = d_{1,r} \ell.$$

Grâce à (3.3.11), on en déduit la relation

$$d_{r+1}\alpha_{r+1} + d_{1,r+1} k = d_{1,r} \ell,$$

qui, au vu de (3.3.8) et (3.3.9), se réécrit sous la forme

$$\ell d_1^{(r)} - \alpha_{r+1} d'_{r+1} = k.$$

On en déduit que $d'_{r+1} \mid k - \ell d_1^{(r)}$, autrement dit que $\ell \equiv \overline{d_1^{(r)}} k \,(\mathrm{mod}\ d'_{r+1})$ et puisque $\alpha_{r+1} = \frac{\ell d_1^{(r)} - k}{d'_{r+1}}$, on a également

$$\frac{k - X d'_{r+1}}{d_1^{(r)}} \leqslant \ell \leqslant \frac{k + X d'_{r+1}}{d_1^{(r)}}.$$

Réciproquement, les relations (3.3.11) et (3.3.8) fournissent les égalités

$$\forall \ell \in \mathbf{Z}, \quad \sum_{i=r+2}^{n} d_i \alpha_i = d_{1,r} \ell + d_{1,r+1} \left(k - \ell d_1^{(r)} \right),$$

si bien que pour ℓ vérifiant

$$\ell \equiv \overline{d_1^{(r)}} k \,(\mathrm{mod}\ d'_{r+1}) \quad \text{et} \quad \frac{k - X d'_{r+1}}{d_1^{(r)}} \leqslant \ell \leqslant \frac{k + X d'_{r+1}}{d_1^{(r)}}, \tag{3.3.12}$$

on obtient que $(\alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)$ provient de $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{A}_r(\mathbf{y}, X)$ avec $\alpha_{r+1} = \frac{\ell d_1^{(r)} - k}{d'_{r+1}}$. Ainsi, on en déduit bien la formule (3.3.10). Or, par définition

$$\mathcal{A}_{n-1}(\mathbf{y}, X) = \{\alpha_n \in \mathbf{Z} \quad : \quad |\alpha_n| \leqslant X, \quad d_n \alpha_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d_{1,n-1})\}.$$

On constate que $d_{1,n-1} = d_1^{(n-1)}$ et que $\mathrm{pgcd}\,(d_{1,n-1}, d_n) = 1$ de sorte que

$$\#\mathcal{A}_{n-1}(\mathbf{y}, X) = \frac{2X}{d_1^{(n-1)}} + O(1).$$

Le lemme suit alors par récurrence.
□

Lemme 3.3.3. *Soit $n \geqslant 3$. Pour tout $X \geqslant 1$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{N}^n$, on a*

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \frac{X^{n-1}}{d_1}\left(b(\mathbf{y}) + O\left(\frac{1}{X}\sum_{j=2}^{n-1} d_1^{(j-1)}\right)\right)$$

avec les notations (3.3.8) et où

$$b(\mathbf{y}) = \mathrm{vol}\left\{(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in [-1,1]^{n-1} \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1\right\}. \tag{3.3.13}$$

Démonstration– La preuve proposée ne repose pas sur des arguments de géométrie des nombres mais suit les grandes lignes de la preuve du lemme 2.3 de [Bre16]. On a l'égalité

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \#\left\{(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^{n-1} \quad : \quad \max_{2\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \begin{array}{c} \sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d_1)\,, \\ \left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X \end{array}\right\}.$$

En raisonnant comme pour établir la formule (3.3.12) de la preuve du Lemme 3.3.2, on obtient alors

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)} \#\left\{\frac{k_2 - Xd_2'}{d_1'} \leqslant \ell \leqslant \frac{k_2 + Xd_2'}{d_1'} \quad : \quad \begin{array}{c} \ell \equiv -\overline{d_1'}k_2 \,(\mathrm{mod}\ d_2')\,, \\ \left|d_{1,2}\,(\ell d_1' - k_2) + \sum_{i=3}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X \end{array}\right\}, \tag{3.3.14}$$

avec $k_2 = \sum_{j=3}^{n} d_j\alpha_j/d_{1,2}$, où $d_{1,2}$ a été défini en (3.3.8). Or, on a

$$\begin{aligned} &\#\left\{\frac{k_2 - Xd_2'}{d_1'} \leqslant \ell \leqslant \frac{k_2 + Xd_2'}{d_1'} \quad : \quad \begin{array}{c} \ell \equiv -\overline{d_2'}k_2 \,(\mathrm{mod}\ d_2')\,, \\ \left|d_{1,2}\,(\ell d_1' - k_2) + \sum_{i=3}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X \end{array}\right\} \\ &\quad = \frac{1}{d_2'}\mathrm{vol}\left\{t \in \left[\frac{k_2 - Xd_2'}{d_1'}, \frac{k_2 + Xd_2'}{d_1'}\right] \ : \ \left|d_{1,2}\,(td_1' - k_2) + \sum_{i=3}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X\right\} + O(1). \end{aligned}$$

Le changement de variable $\alpha_2 = \frac{td_1' - k_2}{d_2'}$ fournit alors

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \frac{1}{d_1'}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)} \mathrm{vol}\left\{\alpha_2 \in [-X, X] \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X\right\} + O\left(\#\mathcal{A}_2(\mathbf{y}, X)\right).$$

D'après le Lemme 3.3.2, on aboutit à la formule

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y}; X) = \frac{1}{d_1'}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_2(\mathbf{y},X)} \mathrm{vol}\left\{\alpha_2 \in [-X, X] \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X\right\} + O\left(\prod_{j=3}^{n} \frac{X}{d_1^{(j-1)}}\right).$$

On pose

$$S_r(\mathbf{y}; X) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_r(\mathbf{y},X)} \mathrm{vol}\left\{(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in [-X, X]^{r-1} \quad : \quad \left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right| \leqslant d_1 X\right\}$$

Avec les notations (3.3.8) et pour tout $2 \leqslant r \leqslant n-1$, on montre alors l'estimation

$$S_r(\mathbf{y};X) = \frac{1}{d_1^{(r-1)}} S_{r+1}(\mathbf{y};X) + O\left(X^{r-1} \prod_{j=r+2}^{n} \frac{X}{d_1^{(j-1)}}\right). \tag{3.3.15}$$

En effet, en raisonnant de manière analogue à (3.3.14), on obtient que $S_r(\mathbf{y};X)$ est donnée par

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{r+1}(\mathbf{y},X)\\ \frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv-\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\mathrm{mod}\ d'_{r+1}\right)}} \mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}\ :\ \left|d_{1,r}(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}$$

avec $k_{r+1} = \sum_{j=r+2}^{n} d_j\alpha_j/d_{1,r+1}$. On écrit alors

$$\mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}\ :\ \left|d_{1,r}(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}$$
$$= \int_{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}} \mathbb{1}_{\left|(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_r$$

et on obtient ensuite en intervertissant la sommation sur ℓ avec l'intégrale

$$\sum_{\substack{\frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv-\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\mathrm{mod}\ d'_{r+1}\right)}} \mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}\ :\ \left|d_{1,r}(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\}$$
$$= \int_{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^{r-1}} \sum_{\substack{\frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv-\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\mathrm{mod}\ d'_{r+1}\right)}} \mathbb{1}_{\left|(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\alpha_2\cdots\mathrm{d}\alpha_r.$$

Le raisonnement précédent fournit alors

$$\sum_{\substack{\frac{k_{r+1}-Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\leqslant\ell\leqslant\frac{k_{r+1}+Xd'_{r+1}}{d_1^{(r)}}\\ \ell\equiv-\overline{d_1^{(r)}}k_{r+1}\left(\mathrm{mod}\ d'_{r+1}\right)}} \mathbb{1}_{\left|(\ell d'_{r+1}-k_{r+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq r+1}}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X}(\boldsymbol{\alpha})$$
$$= \frac{1}{d_1^{(r)}}\int_{\alpha_{r+1}\in[-X,X]} \mathbb{1}_{\left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant X|d_1|}\mathrm{d}\alpha_{r+1} + O(1).$$

Ainsi en utilisant le Lemme 3.3.2, on obtient bien (3.3.15). Finalement, en itérant (3.3.15), il vient

$$\#\mathcal{A}(\mathbf{y};X) = \frac{1}{d_1}\mathrm{vol}\left\{\boldsymbol{\alpha}\in[-X,X]^n\quad :\quad \left|\sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i\right|\leqslant d_1X\right\} + O\left(\sum_{r=2}^{n}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq r}}^{n}\frac{X}{d_1^{(j-1)}}\right),$$

puisqu'on a l'égalité

$$d_1 = \prod_{j=2}^{n} d_1^{(j-1)}. \tag{3.3.16}$$

Le résultat en découle après le changement de variables $\boldsymbol{\alpha}' = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{X}$ et grâce au fait que, d'après (3.3.16), l'on ait

$$\forall r \in [\![2, n]\!], \quad \frac{d_1}{\prod\limits_{\substack{j=2 \\ j\neq r}}^{n} d_1^{(j-1)}} = d_1^{(r-1)}.$$

□

Une borne supérieure

Lemme 3.3.4. *Lorsque $1 \leqslant y_i \leqslant X$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a l'estimation*

$$N_{\mathbf{y}}(X) \ll \frac{X^{n-1}}{||\mathbf{d}||_2}$$

où $N_{\mathbf{y}}(X)$ a été défini en (3.3.4) et $||.||_2$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$.

Démonstration– Soit $X \geqslant 1$. Par symétrie, on peut supposer que $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ si bien que

$$N_{\mathbf{y}}(X) \leqslant \# \left\{ (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^{n-1} \quad : \quad \max_{2\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant X, \quad \sum_{i=2}^{n} d_i\alpha_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ d_1) \right\}.$$

En utilisant le Lemme 3.3.2 et (3.3.16), on obtient bien

$$N_{\mathbf{y}}(X) \ll \frac{X^{n-1}}{d_1} \ll \frac{X^{n-1}}{||\mathbf{d}||_2}.$$

□

Remarque.– Comme mentionné dans [Bre16], il est ici important de voir que $||\mathbf{d}||_2$ peut être plus grand que B et que l'on fait donc mieux que l'estimation triviale en $O\left(\frac{B^{n-1}}{||\mathbf{d}||_2} + B^{n-2}\right)$. Cette estimation découle également de résultats de géométrie des nombres.

Quitte à appliquer une permutation de $[\![1, n]\!]$, il vient que

$$N(B) = n!N_1(B) + R(B), \tag{3.3.17}$$

avec

$$N_1(B) = \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) \tag{3.3.18}$$

et

$$R(B) = \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_i\leqslant \sqrt[n]{B} \\ \exists i\neq j,\ y_i=y_j}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) - n! \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B} \\ \exists i\neq j,\ y_i=y_j}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right).$$

Le lemme suivant fournit une borne supérieure du bon ordre de grandeur pour la quantité $N_1(B)$.

Lemme 3.3.5. *Lorsque $B \geqslant 2$, on a $N_1(B) \ll B(\log B)^{2^n-n-1}$.*

Démonstration– Lorsque $B \geqslant 2$, on a

$$N_1(B) \leqslant \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) \ll B^{1-\frac{1}{n}} \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{1}{d_1}$$

d'après le Lemme 3.3.4. On traduit à présent les conditions sur $\mathbf{y}$ en termes de conditions sur $\mathbf{z}$. Lorsque $1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B}$, on a en particulier $d_j \geqslant d_{j+1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n-1$. Pour $j \in [\![2, n-1]\!]$, cette dernière condition se réécrit

$$\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0}} z_h \leqslant \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h. \tag{3.3.19}$$

On constate alors en posant $H_0 = \left\{ h_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} : 2 \leqslant \ell \leqslant n-1 \right\}$, que dans l'inégalité (3.3.19), seule la variable h_j de H_0 apparaît et que (3.3.19) se réécrit par conséquent

$$z_{h_j} \leqslant Z_{h_j} := \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0 \\ h\neq h_j}} z_h^{-1}.$$

La condition $d_1 \geqslant d_2$ est équivalente à

$$\prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1 \\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h \geqslant \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0 \\ \varepsilon_1(h)=1}} z_h. \tag{3.3.20}$$

En notant $H_1 := \{5\}$ si $n \geqslant 4$ et $H_1 := \{1\}$ si $n = 3$, elle peut se réécrire

$$z_{h_1} := z_5 \leqslant Z_{h_1} := \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0 \\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1 \\ \varepsilon_2(h)=0 \\ h\neq 5}} z_h^{-1}$$

dans le cas $n \geqslant 4$ et

$$z_{h_1} := z_1 \leqslant Z_{h_1} := \frac{z_2 z_6}{z_5}$$

lorsque $n = 3$. Enfin, notant $H_2 = \left\{ h_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \right\}$, on remarque que la seule condition faisant apparaître z_{h_n} est $y_n \leqslant \sqrt[n]{B}$. On peut réécrire cette condition sous la forme

$$z_{h_n} \leqslant Z_{h_n} \quad \text{avec} \quad Z_{h_n} := \sqrt[n]{B} \prod_{\substack{\varepsilon_n(h)=1 \\ h\neq h_n}} z_h^{-1}.$$

Par conséquent, en négligeant les conditions de coprimalité provenant du fait que $\mathbf{z}$ est réduit, on obtient

$$N_1(B) \ll B^{1-\frac{1}{n}} \sum_{\substack{z_h\leqslant B^{1/n} \\ d_n\leqslant\cdots\leqslant d_1 \\ z_{h_n}\leqslant Z_{h_n}}} \frac{1}{d_1}.$$

La contribution des z_h pour $h \in H_0$ est alors majorée par

$$\ll \frac{B^{1-\frac{1}{n}}}{d_1} \prod_{2\leqslant j\leqslant n-1} Z_{h_j} = \frac{B^{1-\frac{1}{n}}}{d_1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0 \\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1 \\ \varepsilon_n(h)=0 \\ h\notin H_0}} z_h^{-1}.$$

En effet, pour $j \in [\![2, n-2]\!]$, on a

$$Z_{h_j} Z_{h_{j+1}} = \frac{\prod\limits_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h \prod\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h}{\prod\limits_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0}} z_h \prod\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0}} z_h} = \frac{\prod\limits_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h \prod\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h}{\prod\limits_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0}} z_h \prod\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1}} z_h} = \frac{\prod\limits_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h \prod\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}} z_h}{\prod\limits_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0}} z_h \prod\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1}} z_h}$$

$$= \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+2}(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+2}(h)=0\\ h\notin\{h_j,h_{j+1}\}}} z_h^{-1}$$

et il suffit d'itérer ce calcul pour obtenir l'expression

$$\prod_{2\leqslant j\leqslant n-1} Z_{h_j} = \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1}.$$

Remplaçant d_1 par son expression, il vient une contribution des z_h avec $h \in H_0$

$$\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\varepsilon_1(h)=0} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1}. \tag{3.3.21}$$

On remarque que z_5 intervient dans Z_3 et Z_7 mais disparaît dans le produit des Z_{h_j} et que z_5 n'intervient pas dans l'expression de d_1 lorsque $n \geqslant 4$. Sommant alors sur z_{h_1}, on aboutit à une contribution des z_h pour $h \in H_0 \cup H_1$

$$\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\varepsilon_1(h)=0} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}$$

$$\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=\varepsilon_n(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}$$

$$\ll B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_n(h)=0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=\varepsilon_n(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1} = B^{1-\frac{1}{n}} \prod_{\substack{\varepsilon_n(h)=0\\ h\notin H_0\cup H_1}} z_h^{-1}.$$

Une dernière sommation sur la variable z_{h_n} fournit de même une contribution des z_h avec $h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2$

$$\ll B \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1}. \tag{3.3.22}$$

Si $n = 3$, c'est la variable $z_{h_1} = z_1$ qui n'intervient pas et on somme alors sur z_1 puis sur $z_{h_3} = z_7$ pour obtenir

$$\ll B \sum_{z_2,z_4,z_5,z_6\leqslant \sqrt[3]{B}} \frac{1}{z_2 z_4 z_5 z_6}.$$

Dans tous les cas, il reste alors $2^n - n - 1$ variables $z_h \leqslant \sqrt[n]{B}$ à sommer. En effet, si $1 \leqslant y_i \leqslant \sqrt[n]{B}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors on a également $1 \leqslant z_j \leqslant \sqrt[n]{B}$ pour tout $j \in [\![1, N]\!]$ si bien qu'on obtient finalement

$$N_1(B) \ll B(\log B)^{2^n-n-1}.$$

□

On utilise alors ce résultat pour démontrer que la quantité $R(B)$ apparaissant dans (3.3.17) est bien un terme d'erreur.

Lemme 3.3.6. *Pour tout $B \geqslant 2$, on a $R(B) \ll B\,(\log B)^{2^{n-1}-n}$, où $R(B)$ a été défini en (3.3.17).*

Démonstration– Quitte à réordonner, on obtient

$$R(B) \ll \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B} \\ \exists i,\ y_i=y_{i+1}}} N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right).$$

De plus, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, la condition $y_i = y_{i+1}$ se réécrit

$$\prod_{\substack{\varepsilon_i(h)=1 \\ \varepsilon_{i+1}(h)=0}} z_h = \prod_{\substack{\varepsilon_i(h)=0 \\ \varepsilon_{i+1}(h)=1}} z_h. \tag{3.3.23}$$

Puisque deux entiers h et ℓ de $[\![1, N]\!]$ tels que $\varepsilon_i(h) = \varepsilon_{i+1}(\ell) = 1$ et $\varepsilon_{i+1}(h) = \varepsilon_i(\ell) = 0$ ne sont pas comparables pour la relation d'ordre $\preceq$ introduite en section 2, on en déduit que $\mathrm{pgcd}(z_h, z_\ell) = 1$. Il s'ensuit que

$$\forall h \in [\![1, N]\!] \quad \text{tel que} \quad \varepsilon_i(h) + \varepsilon_{i+1}(h) = 1, \quad z_h = 1. \tag{3.3.24}$$

En particulier, on a $Z_{h_i} = z_{h_i} = 1$.

Supposons alors que $y_i = y_{i+1}$ pour un certain $i \in [\![1, n-1]\!]$. Une sommation sur les z_h pour $h \in H_0$ suivie d'une sommation sur z_{h_1} et z_{h_n} fournit une contribution

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B} \\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2 \\ \varepsilon_i(h)+\varepsilon_{i+1}(h)\neq 1}} \prod_{\substack{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2 \\ \varepsilon_i(h)+\varepsilon_{i+1}(h)\neq 1}} z_h^{-1} \ll B\,(\log B)^{2^{n-1}-n},$$

au vu de (3.3.22) et (3.3.24). □

Démonstration de l'asymptotique

Estimons désormais le cardinal $N_1(B)$ défini en (3.3.18). D'après le Lemme 3.3.5, on a

$$N_1(B) \ll B(\log B)^{2^n-n-1}.$$

Pour $A > 0$ fixé, on peut supposer que

$$z_h > \log(B)^A \quad \text{pour} \quad h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2$$

avec les notations de la section précédente. En effet, en reprenant l'inégalité (3.3.22), on obtient une contribution complémentaire (c'est-à-dire pour laquelle au moins un $z_h \leqslant \log(B)^A$ pour $h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2$) majorée par

$$\ll B \log(B)^{2^n-n-2} \log(\log B).$$

Cela est suffisant pour donner lieu à un terme d'erreur en vue du Théorème 3.1.2. Cette réduction du domaine de comptage permet de contrôler le terme d'erreur du Lemme 3.3.3 de la façon suivante

$$\forall j \in [\![2, n-1]\!], \quad \frac{d_1^{(j-1)}}{B^{1/n}} \leqslant \frac{d_1^{(j-1)}}{y_j} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)+\cdots+\varepsilon_{j-1}(h)\neq 0 \\ \varepsilon_j(h)=1}} z_h^{-1} \leqslant \log(B)^{-A}$$

puisqu'on a $y_j \leqslant \sqrt[n]{B}$ et que tous les indices des variables intervenant dans le produit ci-dessus ne sont pas dans $H_0 \cup H_1 \cup H_2$. Par le Lemme 3.3.3, il s'ensuit l'estimation

$$N_{\mathbf{y}}\left(B^{1/n}\right) = \frac{B^{1-1/n}}{d_1} b(\mathbf{y}) + O\left(\frac{B^{1-1/n}}{d_1} \log(B)^{-A}\right)$$

puis grâce au Lemme 3.3.5

$$N_1(B) = B^{1-1/n} \sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1} + O\left(B(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\right).$$

On a ici remplacé la somme

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B} \\ z_h>\log(B)^A,\, h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1}$$

par la somme

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n \\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1}$$

au prix d'une contribution négligeable en raisonnant à nouveau comme dans la preuve du Lemme 3.3.5 puisque $b(\mathbf{y}) \ll 1$. On effectue alors la sommation dans le même ordre que lors de la preuve du Lemme 3.3.5. Lorsque $n \geqslant 4$, les conditions $Z_{h_j} \geqslant 1$ ne font intervenir la variable z_5 que dans Z_3 et Z_7. Comme on souhaite sommer sur les z_h avec $h \in H_0$ puis sur z_5 puis sur z_{h_n}, on restreint le domaine de comptage de façon à ne plus avoir cette dépendance en z_5 dans Z_3 et Z_7. Posant

$$Z_5' = \prod_{\substack{\varepsilon_2(h)=1 \\ \varepsilon_3(h)=0 \\ h\neq 3}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_3(h)=1 \\ \varepsilon_2(h)=0 \\ h\neq 5}} z_h^{-1},$$

la condition $Z_3 = z_5/Z_5' \geqslant 1$ se réécrit $z_5 \geqslant Z_5'$. Puisque $z_5 \leqslant Z_{h_1}$, on a $Z_5' \leqslant Z_{h_1}$ d'une part. D'autre part, la contribution des $\mathbf{z}$ tels que $z_5 < Z_5'$ est négligeable. En effet, de la même manière que lors de la preuve du Lemme 3.3.4, on montre que ces $\mathbf{z}$ contribuent pour

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B} \\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1} \times \frac{Z_5'}{Z_{h_1}}. \tag{3.3.25}$$

Si l'on considère alors la quantité indépendante de la variable z_9 définie par $Z_9 := \frac{Z_{h_1} z_9}{Z_5'}$, on écrit $\frac{Z_5'}{Z_{h_1}} = \frac{z_9}{Z_9}$ (avec $9 \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2$) si bien que la contribution de (3.3.25) est

$$\ll B \sum_{\substack{z_h\leqslant \sqrt[n]{B} \\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2 \\ z_9\leqslant Z_9}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2\cup\{9\}} z_h^{-1} \times \frac{1}{Z_9} \ll B\log(B)^{2^n-n-2}.$$

On peut donc remplacer la condition $Z_3 \geqslant 1$ par $Z_5' \leqslant Z_{h_1}$. De la même façon, en posant

$$Z_5'' = \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=1 \\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_3(h)=1 \\ \varepsilon_4(h)=0 \\ h\neq 5,7}} z_h^{-1},$$

la condition $Z_7 = Z_5''/z_5 \geqslant 1$ se réécrit $z_5 \leqslant Z_5''$. Si on a $Z_{h_1} \leqslant Z_5''$, alors puisque $z_5 \leqslant Z_{h_1}$, on a $z_5 \leqslant Z_5''$. Montrons alors que la condition $Z_7 \geqslant 1$ peut être remplacée par la condition $Z_{h_1} \leqslant Z_5''$. Pour cela, il suffit de voir que la contribution des $\mathbf{z}$ tels que $Z_5'' \leqslant Z_{h_1}$. Si l'on suppose $Z_5'' \leqslant Z_{h_1}$, la condition $z_5 \leqslant Z_{h_1}$ est alors remplacée par $z_5 \leqslant Z_5''$. Le raisonnement ci-dessus fournit alors une contribution

$$\ll B \sum_{\substack{z_h \leqslant \sqrt[n]{B} \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \prod_{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2} z_h^{-1} \times \frac{Z_5''}{Z_{h_1}}.$$

De même, on écrit alors $\frac{Z_5''}{Z_{h_1}} = \frac{z_9}{Z_9'}$ avec $Z_9' := \frac{Z_{h_1} z_9}{Z_5''}$ si bien que cette contribution est

$$\ll B \sum_{\substack{z_h \leqslant \sqrt[n]{B} \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2 \\ z_9 \leqslant Z_9'}} \prod_{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \{9\}} z_h^{-1} \times \frac{1}{Z_9'} \ll B \log(B)^{2^n - n - 2},$$

ce qui est négligeable. Pour finir, on remarque que lorsque $n = 3$, la condition $Z_{h_2} \geqslant 1$ ne fait pas intervenir la variable z_{h_1}. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer de telles restrictions du domaine dans ce cas-là.

On introduit ensuite la fonction $\tilde{b} : \mathbf{N}^N \to \mathbf{R}$ définie par

$$\tilde{b}(\mathbf{z}) = \mathrm{vol}\left\{ (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in [-1, 1]^{n-1} \quad : \quad \left| \sum_{i=2}^{n} d_i \alpha_i \right| \leqslant d_1 \right\}.$$

On constate en particulier que si $\mathbf{z}$ est réduit, alors $\tilde{b}(\mathbf{z}) = b(\mathbf{y})$ pour $\mathbf{y}$ l'unique n-uplet associé à $\mathbf{z}$ à travers la bijection explicitée dans le Lemme 3.2.1 et où b a été définie en (3.3.13). On considère également la fonction multiplicative $g : \mathbf{N}^N \to \mathbf{R}$, indicatrice de l'ensemble des N-uplets $\mathbf{z}$ réduits. Il s'agit ainsi, lorsque $n \geqslant 4$, de sommer $\frac{g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z})}{d_1}$ sur le domaine $\mathcal{V}$ suivant

$$\begin{cases} \forall j \in [\![4, n-1]\!] \cup \{1\}, \quad Z_{h_j} \geqslant 1, \quad Z_5' \leqslant Z_{h_1} \leqslant Z_5'', \text{ et } z_h \leqslant Z_h \text{ pour } h \in H_0 \cup H_1, \\ Z_{h_n} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad z_{h_n} \leqslant Z_{h_n}, \end{cases} \tag{3.3.26}$$

le N-uplet $\mathbf{z}$ étant réduit. À une contribution négligeable près de l'ordre de

$$O\left(B(\log B)^{2^n - n - 2} \log(\log B) \right),$$

on peut, comme dans [Bre16, section 4], se restreindre au domaine $\mathcal{V}'$ suivant

$$\begin{cases} \forall j \in [\![4, n-1]\!] \cup \{1\}, \quad Z_{h_j} > \log(B)^5, \quad Z_5'(\log(B))^6 \leqslant Z_{h_1} \leqslant \dfrac{Z_5''}{\log(B)^6}, \quad \text{et} \\ z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \quad \text{et} \quad \dfrac{Z_{h_1}}{\log(B)} < z_5 \leqslant Z_{h_1}, \\ Z_{h_n} \geqslant \log(B)^5 \quad \text{et} \quad z_{h_n} \leqslant Z_{h_n}, \end{cases} \tag{3.3.27}$$

en utilisant la formule (3.3.22) établie lors de la preuve du Lemme 3.3.5. En particulier, on a $Z_3 > \log(B)^5$ et $Z_7 > \log(B)^5$. Lorsque $n = 3$, il s'agit de sommer $\frac{g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z})}{d_1}$ sur le domaine $\mathcal{V}$ suivant

$$\begin{cases} Z_3 \geqslant 1, \quad Z_{h_1} \geqslant 1, \quad \text{et} \quad z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \cup H_1, \\ Z_7 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad z_7 \leqslant Z_7, \end{cases} \tag{3.3.28}$$

le N-uplet $\mathbf{z}$ étant réduit. À une contribution négligeable près de l'ordre de

$$O\left(B(\log B)^3 \log(\log B)\right),$$

on peut également se restreindre au domaine $\mathcal{V}'$ suivant

$$\begin{cases} Z_3 > \log(B)^5, \quad z_h \leqslant Z_h \quad \text{pour} \quad h \in H_0 \cup H_1, \\ \sqrt[3]{B} Z_7 \geqslant \log(B)^5 \quad \text{et} \quad z_7 \leqslant \sqrt[3]{B} Z_7. \end{cases} \tag{3.3.29}$$

On utilise alors les deux lemmes suivants. Le premier traduit le fait que la fonction g soit très proche, au sens de la convolution, de la fonction constante égale à 1 et le second est tiré de [Bre16].

Lemme 3.3.7. *La série de Dirichlet*

$$\forall \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N), \quad G(\mathbf{s}) = \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbf{N}^N \\ \mathbf{z} \text{ réduit}}} \frac{1}{\prod_{h=1}^{N} z_h^{s_h}}$$

est convergente sur le domaine $\mathfrak{Re}(s_i) > 1$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$. De plus, la fonction

$$\forall \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N), \quad F(\mathbf{s}) = G(\mathbf{s}) \prod_{h=1}^{N} \zeta(s_h)^{-1} \tag{3.3.30}$$

admet un prolongement holomorphe à la région $\mathfrak{Re}(s_h) > \frac{1}{2}$ pour tout $h \in [\![1, N]\!]$.

Démonstration– On constate que la variable z_N n'est soumise à aucune condition de coprimalité et que toutes les autres variables z_h sont soumises à au moins une condition de coprimalité. On note alors E_n l'ensemble des couples (k, ℓ) de $[\![1, N-1]\!]^2$ tels que, si $\mathbf{z}$ est réduit, $\operatorname{pgcd}(z_k, z_\ell) = 1$. Pour tout $\mathbf{s}$ tel que $\mathfrak{Re}(s_i) > 1$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on a ainsi

$$\begin{aligned} G(\mathbf{s}) &= \zeta(s_N) \prod_p \left(1 + \sum_{\substack{(\nu_1, \ldots, \nu_{N-1}) \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^{N-1} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n}} \frac{1}{p^{\nu_1 s_1 + \cdots + \nu_{N-1} s_{N-1}}} \right) \\ &= \zeta(s_N) \prod_p \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{p^{s_i}} + \sum_{\substack{(\nu_1, \ldots, \nu_{N-1}) \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^{N-1} \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n \\ \nu_1 + \cdots + \nu_{N-1} \geqslant 2}} \frac{1}{p^{\nu_1 s_1 + \cdots + \nu_{N-1} s_{N-1}}} \right). \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

Ainsi,

$$G(\mathbf{s}) \prod_{h=1}^{N} \zeta(s_h)^{-1} = \prod_p \left(\prod_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{p^{s_i}}\right) \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{p^{s_i}} + \sum_{\substack{(\nu_1, \ldots, \nu_{N-1}) \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}^{N-1} \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n \\ \nu_1 + \cdots + \nu_{N-1} \geqslant 2}} \frac{1}{p^{\nu_1 s_1 + \cdots + \nu_{N-1} s_{N-1}}} \right).$$

Le produit de droite étant convergent lorsque $\mathfrak{Re}(s_i) > \frac{1}{2}$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on obtient bien le résultat annoncé. □

Lemme 3.3.8. *Soient f une fonction multiplicative en une variable dont la série de Dirichlet est absolument convergente pour $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \frac{2}{3}$ et v une fonction bornée et dérivable sur $[0,1]$. On a alors pour tout $Z \geqslant 1$*

$$\sum_{z \leqslant Z} (\mathbb{1} * f)(z) v\left(\frac{z}{Z}\right) = Z \sum_{k \geqslant 1} \frac{f(k)}{k} \int_0^1 v(u)\,du + O\left(Z^{2/3} \sum_{k \geqslant 1} \frac{|f(k)|}{k^{2/3}} \int_0^1 |v'(u)|\, u^{2/3} du\right).$$

Démonstration– La démonstration de ce lemme s'obtient aisément à l'aide d'une sommation d'Abel (voir [Bre16, section 4]). □

On notera dans la suite $f : \mathbf{N}^N \to \mathbf{R}$ la fonction arithmétique associée à la série de Dirichlet F. Autrement dit, pour tout $\mathbf{s}$ tel que $\mathfrak{Re}(s_h) > 1$ pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, on a

$$F(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{N}^N} \frac{f(\mathbf{z})}{\prod\limits_{h=1}^{N} z_h^{s_h}}.$$

et $g = \mathbb{1} * f$. Une application des Lemmes 3.3.7 et 3.3.8 en sommant d'abord sur les z_h pour $h \in H_0$ et le fait que d_1 ne fasse intervenir aucune variable z_{h_j} pour $j \in [\![2, n-1]\!]$ fournit alors

$$\sum_{\substack{z_{h_j} \leqslant Z_{h_j} \\ h_j \in H_0}} g(\mathbf{z}) \tilde{b}(\mathbf{z}) = Z^{(0)} \beta\left(\frac{z_{h_1}}{Z_{h_1}}\right) \left(\sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod\limits_{h \in H_0} k_h} + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod\limits_{h \in H_0} k_h^{2/3}} \right) \right)$$

avec $Z^{(0)} = \prod\limits_{j=2}^{n-1} Z_{h_j}$ et

$$\beta(u_1) = \int_{[0,1]^{n-2}} \mathrm{vol}\left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [-1,1]^n \quad : \quad \left| \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{\ell=1}^{i-1} u_\ell \right) \alpha_i \right| \leqslant 1 \right\} \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}.$$

En effet, on a les égalités

$$\forall 2 \leqslant \ell \leqslant n-1, \quad \frac{d_{\ell+1}}{d_\ell} = \frac{z_{h_\ell}}{Z_{h_\ell}} \quad \text{et} \quad \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_{h_1}}{Z_1}$$

et, pour tout $\mathbf{z}$,

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\mathbf{z}) &= \mathrm{vol}\left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [-1,1]^n \quad : \quad \left| \sum_{i=2}^{n} \frac{d_i}{d_1} \alpha_i \right| \leqslant 1 \right\} \\ &= \mathrm{vol}\left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [-1,1]^n \quad : \quad \left| \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{\ell=1}^{i-1} \frac{d_{\ell+1}}{d_\ell} \right) \alpha_i \right| \leqslant 1 \right\}. \end{aligned}$$

est une fonction différentiable à dérivées partielles bornées sur $[0,1]$ si bien que chacun des termes

$$\int_0^1 |v'(u)|\, u^{2/3} \mathrm{d}u \ll 1.$$

De plus, grâce aux conditions (3.3.27), dans le terme d'erreur du Lemme 3.3.8, on a bien

$$\left(Z^{(0)}\right)^{2/3} = Z^{(0)} \left(Z^{(0)}\right)^{-1/3} \ll \frac{Z^{(0)}}{\log(B)^{5(n-2)/3}} \ll \frac{Z^{(0)}}{\log(B)}.$$

On pourra noter que $Z^{(0)}$ ne dépend pas de Z_{h_1} d'après (3.3.21). On effectue alors la sommation par rapport à z_{h_1} pour obtenir

$$\sum_{\substack{z_h \leqslant Z_h \\ h \in H_0 \cup H_1}} g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z}) =$$

$$Z^{(1)}\tilde{\beta}\left(\sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1} k_h} + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1} k_h^{2/3}}\right)\right),$$

où $Z^{(1)} = Z^{(0)} Z_{h_1}$ et

$$\tilde{\beta} = \int_0^1 \beta(u_1)\mathrm{d}u_1. \tag{3.3.32}$$

Les quantités $Z^{(1)}$ et d_1 étant indépendantes de z_{h_n}, en sommant sur z_{h_n}, il vient

$$\sum_{\substack{z_{h_j} \leqslant Z_{h_j} \\ h_j \in H_0 \cup H_1 \cup H_2}} g(\mathbf{z})\tilde{b}(\mathbf{z}) = Z^{(2)}\tilde{\beta}\left(\sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2} k_h}\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2} k_h^{2/3}}\right)\right),$$

avec $Z^{(2)} = Z^{(1)} Z_{h_n}$. On a ainsi

$$\sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbf{N}^n \\ 1 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \sqrt[n]{B}/k}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1} = \sqrt[n]{B}\tilde{\beta} \sum_{\substack{z_h \in \mathcal{V}',\ z_h \leqslant \sqrt[n]{B}/k \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \prod_{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2} z_h^{-1} \left(\sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2} k_h}\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h | z_h \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \sum_{\substack{k_h \geqslant 1 \\ h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h \in H_0 \cup H_1 \cup H_2} k_h^{2/3}}\right)\right).$$

Dans un premier temps, on remarque que l'on peut sommer sur $\mathcal{V}$ défini en (3.3.26) lorsque $n \geqslant 4$ et en (3.3.28) lorsque $n = 3$ quitte à rajouter une contribution négligeable. En effet, considérons $(z_h)_{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2} \in \mathcal{V} \smallsetminus \mathcal{V}'$. S'il existe $4 \leqslant \ell \leqslant n-1$ ou $\ell = 1$ tel que $Z_{h_\ell} \leqslant \log(B)^5$, alors

$$\prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=0 \\ h \neq h_j}} z_h^{-1} \leqslant \log(B)^5 \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h^{-1}$$

si bien que

$$\sum_{\substack{z_h \in \mathcal{V} \smallsetminus \mathcal{V}',\ z_h \leqslant \sqrt[n]{B} \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \prod_{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2} z_h^{-1} \ll \log(B)^5 \sum_{\substack{z_h \leqslant \sqrt[n]{B} \\ h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2}} \prod_{\substack{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2 \\ \varepsilon_j(h) = \varepsilon_{j+1}(h)}} z_h^{-1} \prod_{\substack{h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2 \\ \varepsilon_j(h)=0 \\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h^{-2}$$

$$\ll \log(B)^5 B^{2^{n-2}-1} \frac{1}{B^{2^{n-2}}} \log(B)^{2^n - n - 1 - 2^{n-1} - 1}$$

$$\ll \frac{\log(B)^{2^{n-1}-n+2}}{B} \ll 1.$$

De même, si $Z_5 \leqslant Z_5'(\log(B))^6$, on a

$$\frac{Z_5}{Z_5'} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3,5}} z_h^{-1}$$

et lorsque $Z_5 > \frac{Z_5''}{\log(B)^6}$, il vient

$$\frac{Z_5''}{Z_5''} = \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_4(h)\neq 1 \text{ ou } \varepsilon_3(h)\neq 0}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_4(h)\neq 0 \text{ ou } \varepsilon_3(h)\neq 1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)\neq 0 \text{ ou } \varepsilon_2(h)\neq 1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)\neq 1 \text{ ou } \varepsilon_2(h)\neq 0\\ h\neq 5}} z_h^{-1}$$

de sorte que le même raisonnement permet de conclure à une contribution $\ll 1$. On a donc

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbf{N}^n\\ 1\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant \sqrt[n]{B}}} \frac{b(\mathbf{y})}{d_1} = \sqrt[n]{B}\tilde{\beta} \sum_{\substack{z_h\in\mathcal{V},\ z_h\leqslant\sqrt[n]{B}\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \prod_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} z_h^{-1} \left(\sum_{\substack{k_h|z_h\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \sum_{\substack{k_h\geqslant 1\\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}} \frac{f(\mathbf{k})}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h} \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\log(B)} \sum_{\substack{k_h|z_h\\ h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}} \sum_{\substack{k_h\geqslant 1\\ h\in H_0\cup H_1\cup H_2}} \frac{|f(\mathbf{k})|}{\prod_{h\in H_0\cup H_1\cup H_2} k_h^{2/3}} \right) \right).$$

Le domaine $\mathcal{V}$ se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ h\neq h_j}} z_h \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad 4\leqslant j\leqslant n-1,\\ \prod_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}} z_h \leqslant \sqrt[n]{B}, \quad \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3}} z_h \leqslant 1, \quad \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} z_h \leqslant 1\\ \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} z_h \prod_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h^{-1} \prod_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} z_h \leqslant 1,\\ z_h \leqslant \sqrt[n]{B} \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2. \end{cases}$$

lorsque $n \geqslant 4$ et

$$\begin{cases} \dfrac{z_2}{z_4 z_5} \leqslant 1,\\ z_4 z_5 z_6 \leqslant \sqrt[3]{B}, \quad \dfrac{z_5}{z_2 z_6} \leqslant 1,\\ z_h \leqslant \sqrt[3]{B} \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2. \end{cases}$$

lorsque $n = 3$. En écrivant $z_h = B^{\frac{t_h}{n}}$ avec $t_h \geqslant 0$ pour tout $h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2$, on obtient

que l'ensemble des $(t_h)_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2}$ vérifie

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ h\neq h_j}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} t_h \quad \text{pour} \quad 4\leqslant j\leqslant n-1,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}} t_h \leqslant 1, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1}} t_h, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} t_h\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} t_h + \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} t_h + \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} t_h,\\ t_h\leqslant 1 \quad \text{pour} \quad h\notin H_0\cup H_1\cup H_2, \end{cases}$$

lorsque $n\geqslant 4$ et

$$\begin{cases} t_2\leqslant t_4+t_5\\ t_4+t_5+t_6\leqslant 1, \quad t_5\leqslant t_2+t_6,\\ t_2,t_4,t_5,t_6\leqslant 1 \end{cases}$$

si $n=3$ si bien que dans tous les cas, il est bien inclus dans $[0,1]^{2^n-n-1}$. Une application directe de [Le 16, lemma 8] fournit alors l'estimation

$$N\left(\frac{B}{k^n}\right)=\frac{2^{n-1}n!}{n^{2^n-n-1}k^n}\tilde{\beta}VF(\mathbf{1})B\log(B)^{2^n-n-1}+O\left(\frac{B}{k^n}(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\right),$$

avec

$$V=\operatorname{vol}\left\{(t_h)\in[0,1]^{2^n-n-1}\ :\ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=1\\ \varepsilon_{j+1}(h)=0\\ h\neq h_j}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_j(h)=0\\ \varepsilon_{j+1}(h)=1}} t_h \quad \text{pour} \quad 4\leqslant j\leqslant n-1,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}} t_h \leqslant 1, \quad \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0\\ h\neq 3}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1}} t_h,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} t_h,\\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=0\\ \varepsilon_2(h)=1}} t_h + \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} t_h \leqslant \sum_{\substack{\varepsilon_1(h)=1\\ \varepsilon_2(h)=0\\ h\neq 5}} t_h + \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} t_h \end{array}\right\} \tag{3.3.33}$$

lorsque $n\geqslant 4$ et

$$V=\operatorname{vol}\left\{(t_2,t_4,t_5,t_6)\in[0,1]^4\ :\ \begin{array}{l} t_2\leqslant t_4+t_5\\ t_4+t_5+t_6\leqslant 1, \quad t_5\leqslant t_2+t_6 \end{array}\right\}$$

si $n=3$. Finalement, il vient

$$N(B;U_n)=\frac{2^{n-1}n!\tilde{\beta}V}{n^{2^n-n-1}\zeta(n)}F(\mathbf{1})B\log(B)^{2^n-n-1}+O\left(B(\log B)^{2^n-n-2}\log(\log B)\right). \tag{3.3.34}$$

Remarque.– Géométriquement, on a transformé le problème de comptage sur la variété W_n en un problème de comptage sur la sous-variété (3.3.35)

$$\sum_{j=1}^{n} d_jx_j=0 \quad \text{avec} \quad \forall i\in[\![1,n]\!], \quad d_i=\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}. \tag{3.3.35}$$

On montrera plus tard que cette variété est liée au torseur versel d'une résolution crépante de W_n. Cela est cohérent avec les résultats et le torseur versel obtenus dans [BBS14].

3.4 Vérification de la conjecture de Peyre pour W_n

3.4.1 Résolution crépante des singularités de W_n et forme conjecturale de la constante de Peyre

On s'appuie ici sur le travail de Per Salberger présenté en Annexe de cet article. L'objet de cette partie est de construire à partir de cet Annexe, une résolution crépante des singularités de W_n puis de détailler tous les éléments de la géométrie de cette résolution crépante nécessaires à la vérification du fait que $c_n = c_{\text{Peyre}}$ pour tout $n \geqslant 3$ où c_n est la constante obtenue dans le Théorème 3.1.2 et c_{Peyre} est définie en (3.4.47) *infra* ou par [Pey95, formule 5.1].

Une résolution crépante de W_n

On reformule dans cette section le résultat principal de l'Annexe de Salberger en utilisant les notations de cet article sans donner aucune preuve. On renvoie le lecteur intéressé par ces dernières à cet Annexe en fin d'article.

On rappelle ici que $N = 2^n - 1$ et on introduit pour tout $h \in [\![1, N]\!]$, $\mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ comme étant l'espace biprojectif $\mathbf{P}^{s(h)-1} \times \mathbf{P}^{s(h)-1}$ de coordonnées bihomogènes

$$\left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) = \left(Y_{i_1}^{(h)}, \ldots, Y_{i_{s(h)}}^{(h)}; Z_{i_1}^{(h)}, \ldots, Z_{i_{s(h)}}^{(h)}\right)$$

pour $\varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$ et $B^{(h)} \subseteq \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ la sous-variété fermée définie par les équations

$$Y_{i_1}^{(h)} Z_{i_1}^{(h)} = \cdots = Y_{i_{s(h)}}^{(h)} Z_{i_{s(h)}}^{(h)} \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1. \tag{3.4.36}$$

On pose également $B_{0,n}$ comme étant la sous-variété fermée de $\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} B^{(h)}$ définie par les équations

$$\begin{cases} Y_i^{(h)} Y_j^{(\ell)} = Y_j^{(h)} Y_i^{(\ell)} & \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, \quad (3.4.37) \\ Z_i^{(h)} Z_j^{(\ell)} = Z_j^{(h)} Z_i^{(\ell)} & \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1. \quad (3.4.38) \end{cases}$$

On a un morphisme évident donné par la projection sur le dernier facteur $p_0 : B_{0,n} \to B^{(N)}$ défini par $\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) \mapsto \left(\mathbf{Y}^{(N)}; \mathbf{Z}^{(N)}\right)$.

On introduit également $C_n \subseteq \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)}$, la variété torique de Coxeter de $\mathfrak{S}_n$ de coordonnées multihomogènes $\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}\right)$ définie par les équations (A.0.4). Enfin, on définit la sous-variété fermée $X_{0,n} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ de coordonnées multihomogènes

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)$$

définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} Y_{i_1}^{(h)} Z_{i_1}^{(h)} = \cdots = Y_{i_{s(h)}}^{(h)} Z_{i_{s(h)}}^{(h)} \text{ pour } h \in [\![1, N]\!] \text{ et } \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1, & (3.4.39) \\ Y_i^{(h)} Y_j^{(\ell)} = Y_j^{(h)} Y_i^{(\ell)} \quad \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, & (3.4.40) \\ Z_i^{(h)} Z_j^{(\ell)} = Z_j^{(h)} Z_i^{(\ell)} \quad \text{pour} \quad \ell \preceq h \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_j(\ell) = 1, & (3.4.41) \\ x_1 Z_1^{(N)} + \cdots + x_n Z_n^{(N)} = 0, & (3.4.42) \\ y_i Y_j^{(N)} - y_j Y_i^{(N)} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n. & (3.4.43) \end{cases}$$

Le résultat principal de l'Annexe, dû à Per Salberger, est alors le suivant et permet d'obtenir une résolution crépante de W_n.

Théorème 3.4.1 (**Salberger, [Annexe]**). *Soit $n \geqslant 1$. La restriction de la projection sur le premier facteur*

$$pr_1 : \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} \to \mathbf{P}^{2n-1}$$

à la variété $X_{0,n}$ définie par les équations (3.4.39), (3.4.40), (3.4.41), (3.4.42) et (3.4.43) fournit alors une résolution crépante $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ des singularités de W_n. De plus, $X_{0,n}$ est un $\mathbf{P}^{n-1}$-fibré sur une variété $B_{0,n}$ isomorphe à la variété torique de Coxeter C_n de $\mathfrak{S}_n$.

On rappelle également que dans le cas $n = 3$ une résolution crépante est construite dans [BBS14]. Cette dernière est isomorphe à celle fournie par le Théorème 3.4.1 comme le remarque Salberger à la suite du théorème 1 de son Annexe. Cette résolution crépante est un $\mathbf{P}^2$-fibré sur la variété torique $B^{(3)}$. Plus généralement, Blomer, Brüdern et Salberger considèrent dans [BBS14] la variété triprojective $X_n \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ de coordonnées homogènes $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; Y_1, \ldots, Y_n; Z_1, \ldots, Z_n)$ définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n = 0, & (3.4.44) \\ y_i Y_j - y_j Y_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, & (3.4.45) \\ Y_1 Z_1 = \cdots = Y_n Z_n. & (3.4.46) \end{cases}$$

Il est alors établi dans [BBS14] que la projection $\mathrm{pr}_1 : \mathbf{P}^{2n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^{2n-1}$ donne lieu par restriction à un morphisme propre, G_n−équivariant et crépant $f_n : X_n \to W_n$. Le morphisme f_3 est alors la résolution crépante obtenue pour $n = 3$ dans [BBS14]. En revanche, X_n n'est pas lisse dès que $n \geqslant 4$.

Les hypersurfaces W_n sont «presque de Fano»

La proposition suivante permet de justifier que la formule empirique [Pey01, formule 5.1] de Peyre s'applique bien dans le cas des variétés W_n pour $n \geqslant 3$.

Proposition 3.4.1. *La variété $X_{0,n} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ définie par les équations (3.4.39), (3.4.40), (3.4.41), (3.4.42) et (3.4.43) est «presque de Fano» au sens de [Pey01, Définition 3.1].*

Démonstration.– Le Lemme 3.4.1 entraîne aisément, de la même façon que dans [BBS14, lemma 6], que le groupe de Picard géométrique de $X_{0,n}$ est sans torsion et que la classe anticanonique est dans l'intérieur de $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})$. Il ne reste donc qu'à justifier le fait que

$$H^1(X_{0,n}, O_{X_{0,n}}) = H^2(X_{0,n}, O_{X_{0,n}}) = \{0\}.$$

On utilise alors le fait que

$$H^1(B_{0,n}, O_{B_{0,n}}) = H^2(B_{0,n}, O_{B_{0,n}}) = \{0\}.$$

d'après [Bou11, section 3.3] et le fait que $X_{0,n}$ soit un $\mathbf{P}^{n-1}$-fibré sur $B_{0,n}$ permet de conclure. □

Forme conjecturale de la constante de Peyre

La prédiction originale de Manin [FMT87] et la conjecture de Peyre [Pey95] sur les variétés de Fano non singulières ne s'appliquent pas directement au problème de comptage associé à W_n puisque cette dernière est une hypersurface singulière pour $n \geqslant 3$. Néanmoins, puisque $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ est une résolution crépante de W_n dont la restriction à $X_{0,n}^\circ \to U_n$ est un isomorphisme où $X_{0,n}^\circ$ est l'ouvert de $X_{0,n}$ défini par les conditions $y_1 \cdots y_n \neq 0$, alors on a

$$N(B; U_n) = \#\left\{x \in X_{0,n}^\circ(\mathbf{Q}) \ : \ (H \circ f_{0,n})(x) \leqslant B\right\}$$

où la hauteur $H \circ f_{0,n}$ est une hauteur anticanonique puisque $f_{0,n}$ est crépante. Comme d'après la Proposition 3.4.1, la variété $X_{0,n}$ est une variété «presque de Fano» au sens de [Pey01, Définition 3.1], alors le principe de Manin prend la forme suivante où la constante de Peyre est donnée par la formule empirique [Pey01, formule 5.1]

$$N(B; U_n) = c_{\text{Peyre}} B \left(\log(B)\right)^{\text{rk}(\text{Pic}(X_{0,n}))-1} (1 + o(1))$$

avec

$$c_{\text{Peyre}} = \alpha(X_{0,n})\beta(X_{0,n})\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(X_{0,n})}\right) \tag{3.4.47}$$

et

$$\beta(X_{0,n}) = \#H^1\left(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}), \text{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right) = \text{Coker}\big(\text{Br}(\mathbf{Q}) \to \text{Br}(X_{0,n})\big), \tag{3.4.48}$$

$\alpha(X_{0,n})$ est le volume d'un certain polytope dans le dual du cône effectif et

$$\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}(X_{0,n})}\right)$$

est un nombre de Tamagawa que l'on détaillera en section 4.3.

Le facteur $\beta(X_{0,n})$

En raisonnant comme dans [BBS14], on obtient que le groupe de Brauer cohomologique de $X_{0,n}$, à savoir $\text{Br}(X_{0,n}) = H^2_{\text{ét}}(\overline{X}_{0,n}, \mathbf{G}_m)$, est trivial. En effet, c'est un invariant birationnel [Gro68] et on combine alors le fait que l'hypersurface W_n considérée soit rationnelle avec le fait que $\text{Br}(\mathbf{P}^r_{\mathbf{Q}}) = \{0\}$ pour tout $r \geqslant 1$ pour obtenir le résultat. Il s'ensuit alors de (3.4.48) que $\beta(X_{0,n}) = 1$.

Le facteur $\alpha(X_{0,n})$

Dans le but de calculer le facteur $\alpha(X_{0,n})$ apparaissant dans la constante de Peyre, il est nécessaire de décrire un peu plus précisément le géométrie de $X_{0,n}$ et notamment son groupe de Picard et son cône pseudo-effectif. On s'appuie pour ce faire sur [BBS14] où ce travail est effectué dans le cas $n = 3$ et sur les résultats de Salberger présentés en Annexe. On prouve pour commencer la proposition suivante. Les arguments reposent essentiellement sur le fait que la variété W_n soit la compactification équivariante d'un groupe algébrique.

Proposition 3.4.2. *Le morphisme $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ défini dans l'Annexe et en section 4.1 est un morphisme propre, G_n-équivariant d'une variété normale $X_{0,n}$ vers W_n. De plus, il s'agit d'une résolution crépante de W_n.*

Démonstration.– Le fait qu'il s'agisse d'une résolution crépante résulte du théorème 4 de l'Annexe de Salberger et le fait que $X_{0,n}$ soit normale résulte du fait que $X_{0,n}$ soit lisse. On tire aussi de la construction par Salberger de $f_{0,n}$ en Annexe le fait que $f_{0,n} = p_{X_n} \circ f_n$ avec

$$p_{X_n} : X_{0,n} \to X_n \quad \text{et} \quad f_n : X_n \to W_n$$

définie en [BBS14, section 3]. D'après le théorème 6 de [BBS14], il vient que f_n est un morphisme propre et G_n-équivariant. Il suffit donc de démontrer que p_{X_n} est un morphisme propre et G_n-équivariant afin de conclure. Pour ce faire on s'inspire de la preuve de ce théorème 6 de [BBS14]. On considère alors

$$U_n = j_n(G_n) = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in W_n \ : \ y_1 \cdots y_n \neq 0\}$$

pour $j_n : G_n \hookrightarrow W_n$. On a alors $f_{0,n}^{-1}(U_n) \subseteq B_0^*$ et $f_{0,n}$ est un isomorphisme de $f_{0,n}^{-1}(U_n)$ sur U_n. En effet, l'application inverse est donnée par

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in U_n \longmapsto \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{y}^{(h)}; \frac{1}{\mathbf{y}^{(h)}} \right) \right) \in f_{0,n}^{-1}(U_n),$$

où

$$\mathbf{y}^{(h)} = \left(y_{i_1}, \ldots, y_{i_{s(h)}} \right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\frac{1}{\mathbf{y}^{(h)}} = \left(\frac{1}{y_{i_1}}, \ldots, \frac{1}{y_{i_{s(h)}}} \right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1.$$

On peut donc considérer G_n comme un ouvert de $X_{0,n}$ et que $X_{0,n}$ est muni d'une G_n-action naturelle $\beta_0 : G_n \times X_{0,n} \to X_{0,n}$ pour laquelle

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \right) . \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)} \right) \right)$$

est donné par

$$\left(b_1 x_1 + a_1 y_1, \ldots, b_n x_n + a_n y_n, b_1 y_1, \ldots, b_n y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{b}\mathbf{Y}^{(h)}; \frac{\mathbf{Z}^{(h)}}{\mathbf{b}} \right) \right),$$

où l'on note

$$\mathbf{b}\mathbf{Y}^{(h)} = \left(b_{i_1} Y_{i_1}^{(h)}, \ldots, b_{i_{s(h)}} Y_{i_{s(h)}}^{(h)} \right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\frac{\mathbf{Z}^{(h)}}{\mathbf{b}} = \left(\frac{Z_{i_1}^{(h)}}{b_{i_1}}, \ldots, \frac{Z_{i_{s(h)}}^{(h)}}{b_{i_{s(h)}}} \right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1.$$

La restriction de β_0 à $G_n \times f_{0,n}^{-1}(U_n)$ donne simplement la loi de groupe de G_n et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C_n \times X_{0,n} \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}, f_{0,n})"'] & X_{0,n} \arrow[d, "f_{0,n}"] \\ G_n \times W_n \arrow[r, "\alpha"'] & W_n \end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui permet de compléter la preuve de la proposition. □

Passons maintenant à une description du groupe de Picard de $X_{0,n}$ et de son cône pseudo-effectif. De la même façon que dans [BBS14], le fait que $X_{0,n}$ soit une compactification équivariante de G_n nous permet d'exploiter le résultat de [TT12, proposition 1.1] suivant.

Proposition 3.4.3 ([**TT12, proposition 1.1**]). *Soient Y une compactification équivariante lisse et propre d'un groupe algébrique linéaire connexe et résoluble G, $\mathrm{Div}_{Y \smallsetminus G}(Y)$ le groupe abélien libre des diviseurs à support dans $Y \smallsetminus G$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(Y) \subseteq \mathrm{Pic}(Y) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ le cône pseudo-effectif engendré par les classes de diviseurs effectifs. Alors la frontière*

$$D = Y \smallsetminus G = \bigcup_{\iota \in I} D_\iota,$$

où I indexe les composantes irréductibles de D et D_ι est une composante irréductible de D pour $\iota \in I$, est un diviseur de Weil à croisements normaux. De plus,

(i) On a une suite exacte $0 \to \mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Div}_{Y \smallsetminus G}(Y) \to \mathrm{Pic}(Y) \to 0$.

(ii) On a $\mathrm{Pic}(Y) = \bigoplus_{\iota \in I} \mathbf{Z} D_\iota$.

(iii) On a $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(Y) = \sum_{\iota \in I} \mathbf{R}_{\geqslant 0} D_\iota$.

On écrira dans toute la suite $[D]$ pour la classe dans $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ d'un diviseur D de $X_{0,n}$, $\left[-K_{X_{0,n}}\right]$ pour la classe anticanonique, $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$ pour le faisceau anticanonique et $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n}) \subseteq \mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ le cône pseudo-effectif engendré par les classes de diviseurs effectifs. On introduit alors D_N la sous-variété de $X_{0,n}$ définie par les équations $y_1 = \cdots = y_n = 0$ et, pour tout $h \in [\![1, N-1]\!]$, on pose également D_h comme étant la sous-variété de $X_{0,n}$ définie par les équations

$$\forall \ell \in [\![1, N]\!] \quad \text{tel que} \quad \ell \not\preceq h \quad \text{et} \quad \ell \not\preceq N - h : \quad \begin{cases} Y_i^{(\ell)} = 0 & \text{si} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_i(h) = 1 \\ Z_j^{(\ell)} = 0 & \text{si} \quad \varepsilon_j(\ell) = 1 \text{ et } \varepsilon_j(h) = 0. \end{cases} \tag{3.4.49}$$

On remarque en particulier que la condition $\ell \not\preceq h$ implique l'existence d'un $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\varepsilon_{i_0}(\ell) = 1$ et $\varepsilon_{i_0}(h) = 0$ et la condition $\ell \not\preceq N - h$ implique l'existence d'un $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\varepsilon_{j_0}(\ell) = \varepsilon_{j_0}(h) = 1$ si bien que les conditions (3.4.49) sont bien définies. On démontre alors le lemme essentiel suivant, inspiré du lemme 4 de [BBS14].

Lemme 3.4.1. *(i) On a $X_{0,n} \smallsetminus G_n = \bigcup_{1 \leqslant h \leqslant N} D_h$ et $\mathrm{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n}) = \bigoplus_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{Z} D_h$.*

(ii) Le morphisme canonique de $\mathrm{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n})$ vers $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ est surjectif de noyau engendré par

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1}} D_h - \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_1(h) = 1}} D_h \quad \textit{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

En particulier $\mathrm{rang}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n})) = 2^n - n$.

(iii) On a

$$\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n}) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{R}_{\geqslant 0} D_h.$$

(iv) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le diviseur

$$n \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h$$

est un diviseur anticanonique.

Remarque.– On déduit alors du point (*ii*) du Lemme 3.4.1 (et plus particulièrement du fait que $\operatorname{rang}(\operatorname{Pic}(X_{0,n})) = 2^n - n$) que la puissance de log obtenue dans le Théorème 3.1.2 est bien conforme au principe de Manin.

Démonstration.– Commençons par le point (*i*). Par définition, on a

$$X_{0,n} \smallsetminus G_n = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(Y^h; Z^h \right) \right) \in X_{0,n} \ : \ y_1 \cdots y_n = 0 \right\}.$$

L'inclusion

$$\bigcup_{1 \leqslant h \leqslant N} D_h \subseteq X_{0,n} \smallsetminus G_n$$

est claire. Supposons que

$$P = \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} (\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}) \right) \in X_{0,n} \smallsetminus G_n.$$

On a alors deux cas. Soit $y_1 = \cdots = y_n = 0$, auquel cas on a immédiatement $P \in D_N$. Soit il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $y_{i_1} = \cdots = y_{i_k} = 0$ pour $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [\![1, n]\!]$ et $y_j \neq 0$ pour $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Alors, d'après (3.4.43) et (3.4.42), on a $Y_{i_1}^{(N)} = \cdots = Y_{i_k}^{(N)} = 0$ et $Z_i^{(N)} = 0$ pour tout $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Grâce aux équations (3.4.39), (3.4.40), (3.4.41), (3.4.42) et (3.4.43), on en déduit que $P \in D_h$ pour $h = \sum_{j=1}^{k} 2^{i_j - 1}$. Il suffit alors de constater que chacune des variétés D_h pour $h \in [\![1, N]\!]$ est irréductible et on peut alors conclure grâce à la Proposition 3.4.3.

Passons au point (*ii*). Le point (*i*) de la Proposition 3.4.3 permet d'obtenir la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Hom}(G_n, \mathbf{G}_m) \to \operatorname{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n}) \to \operatorname{Pic}(X_{0,n}) \to 0$$

où l'application $\operatorname{Hom}(G_n, \mathbf{G}_m) \to \operatorname{Div}_{X_{0,n} \smallsetminus G_n}(X_{0,n})$ est l'application diviseur des fonctions rationnelles. Comme dans [BBS14, Lemma 4.(*i*)], on obtient que $\operatorname{Hom}(G_n, \mathbf{G}_m)$ est le groupe abélien libre engendré par les $\frac{y_i}{y_1} = \frac{Y_i^{(N)}}{Y_1^{(N)}}$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. Il vient alors facilement que

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad \operatorname{div}\left(\frac{Y_i^{(N)}}{Y_1^{(N)}} \right) = \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h - \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_1(h)=1}} D_h \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

ce qui permet de conclure la démonstration de (*ii*).

Le point (*iii*) résulte immédiatement du point *(iii)* de la Proposition 3.4.3.

Enfin, démontrons le point (iv). Comme $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ est crépante et que $\omega_{W_n} \cong O_{W_n}(-n)$, d'après [Har08, II.6.17.1], il suffit d'établir que le sous-schéma fermé défini par $y_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ donne lieu au diviseur

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h.$$

Comme remarqué dans [BBS14, lemma 4], il est facile de voir que y_i a multiplicité 1 le long de D_0 et on est par conséquent ramené à établir que le sous-schéma fermé défini par $Y_i = 0$ donne lieu au diviseur

$$\sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N-1 \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h,$$

ce qui est clair au vu de (3.4.49). □

On est désormais en mesure de calculer, de façon analogue à [BBS14], le facteur $\alpha(X_{0,n})$ défini dans [Pey95]. On introduit $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^\vee \subseteq \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R}\right)$, le cône dual de $\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})$ constitué de toutes les applications linéaires $\Lambda : \mathrm{Pic}(X_{0,n})^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\lambda([D]) \geqslant 0$ pour tout diviseur effectif D de $X_{0,n}$. Considérons de plus $\ell : \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R}\right) \to \mathbf{R}$ l'application linéaire qui à tout $\Lambda \in \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R}\right)$ associe $\Lambda\left(\left[-K_{X_{0,n}}\right]\right)$. On munit alors $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R}\right)$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}s$ normalisée telle que $L = \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}), \mathbf{Z}\right)$ soit de covolume 1. On munit ainsi l'hyperplan $\mathcal{H} = \ell^{-1}(\{1\})$ de la mesure $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)}$. En particulier, si $z_1, \ldots, z_r$ sont des coordonnées de $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R}\right)$ correspondant à une $\mathbf{Z}-$base de L et si $\ell(z_1, \ldots, z_r) = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_r z_r$ pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbf{R}^r$, alors

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)} = \frac{\mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_{i-1} \widehat{\mathrm{d}z_i} \mathrm{d}z_{i+1} \cdots \mathrm{d}z_r}{|\alpha_i|} = \frac{\mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_{i-1} \mathrm{d}z_{i+1} \cdots \mathrm{d}z_r}{|\alpha_i|} \quad \text{dès que} \quad \alpha_i \neq 0. \tag{3.4.50}$$

On a alors, en accord avec [Pey95],

$$\alpha(X_{0,n}) = \mathrm{Vol}\left\{\Lambda \in \mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^\vee \quad | \quad \Lambda\left(\left[-K_{X_{0,n}}\right]\right) = 1\right\} = \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^\vee \cap \mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)}.$$

Lemme 3.4.2. *On a $\alpha(X_{0,n}) = \frac{1}{n^{2^n-n}} V$ où V est défini en (3.3.33).*

Démonstration.– Supposons que $n \geqslant 4$, le cas $n = 3$ étant couvert par [BBS14, lemma 5]. Grâce au Lemme 3.4.1, on sait que $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ est engendré par les D_h pour $h \in [\![1, N]\!]$ avec les relations

$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h)=1}} D_h - \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_j(h)=1}} D_h = 0.$$

Ces dernières fournissent les relations

$$\forall 4 \leqslant j \leqslant n-1, \quad D_{h_j} = \sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1 \\ \varepsilon_j(h)=0}} D_h - \sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0 \\ \varepsilon_j(h)=1 \\ h \neq h_j}} D_h \tag{3.4.51}$$

et

$$D_5 = \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1 \\ \varepsilon_1(h)=0}} D_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0 \\ \varepsilon_1(h)=1 \\ h \neq 5}} D_h \tag{3.4.52}$$

ainsi que

$$D_3 = \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} D_h - \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 3}} D_h \tag{3.4.53}$$

et enfin, en utilisant également la relation (3.4.52),

$$\begin{aligned} D_7 &= \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} D_h - \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 7}} D_h = \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} D_h - D_5 - \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} D_h \\ &= \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} D_h + \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} D_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} D_h - \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} D_h. \end{aligned} \tag{3.4.54}$$

On note bien que chacun des membres de droite des relations (3.4.51), (3.4.52), (3.4.53) et (3.4.54) ne fait intervenir aucune des variables D_{h_j} pour $h_j \in H_0 \cup H_1$. On en déduit que $(D_h)_{h\notin H_0\cup H_1}$ forme une $\mathbf{Z}$-base de $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$. On considère alors $(e_h)_{h\notin H_0\cup H_1}$ la $\mathbf{Z}$-base duale de L vérifiant $e_h([D_\ell]) = \delta_{h,\ell}$ pour tous $(h,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$ et on notera $(z_h)_{h\notin H_0\cup H_1}$ les coordonnées de $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Pic}(X_{0,n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}, \mathbf{R})$ relatives à cette base. Le Lemme 3.4.1 entraîne que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^\vee = \left\{ (z_h)_{h\notin H_0\cup H_1} \in (\mathbf{R}_{\geqslant 0})^{2^n-n} \ : \ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1\\ h\neq h_j}} z_h \geqslant 0, \quad 4 \leqslant j \leqslant n-1, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h \geqslant 0, \ \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 3}} z_h \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h + \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} z_h \geqslant 0. \end{array} \right\}$$

et le point (iv) du Lemme 3.4.1 entraîne que $\mathcal{H}$ a pour équation

$$n \sum_{\varepsilon_n(h)=1} z_h = 0,$$

équation qui ne fait pas intervenir aucune variable z_h pour $h \in H_0 \cup H_1$. D'après (3.4.50) et en éliminant z_N, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}(\ell-1)} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant h\leqslant N-1} \mathrm{d}z_h}{n}$$

si bien que

$$\alpha(X_{0,n}) = \frac{1}{n} \int_\Delta \prod_{1\leqslant h\leqslant N-1} \mathrm{d}z_h$$

où Δ est donné par

$$\left\{ (z_h)_{h\notin H_0\cup H_1\cup H_2} \in (\mathbf{R}_{\geqslant 0})^{2^n-n-1} : \begin{array}{l} n \sum\limits_{\substack{\varepsilon_n(h)=1\\ h\neq h_n}} z_h \leqslant 1, \\ \sum\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=1\\ \varepsilon_j(h)=0}} z_h - \sum\limits_{\substack{\varepsilon_{j+1}(h)=0\\ \varepsilon_j(h)=1\\ h\neq h_j}} z_h \geqslant 0 \qquad 4\leqslant j\leqslant n-1, \\ \sum\limits_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum\limits_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h \geqslant 0, \quad \sum\limits_{\substack{\varepsilon_3(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum\limits_{\substack{\varepsilon_3(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 3}} z_h \geqslant 0, \\ \sum\limits_{\substack{\varepsilon_4(h)=1\\ \varepsilon_3(h)=0}} z_h + \sum\limits_{\substack{\varepsilon_2(h)=0\\ \varepsilon_1(h)=1\\ h\neq 5}} z_h - \sum\limits_{\substack{\varepsilon_2(h)=1\\ \varepsilon_1(h)=0}} z_h - \sum\limits_{\substack{\varepsilon_4(h)=0\\ \varepsilon_3(h)=1\\ h\neq 5,7}} z_h \geqslant 0. \end{array} \right\}.$$

Le changement de variables $t_h = nz_h$ pour tout $h \notin H_0 \cup H_1 \cup H_2$ fournit alors immédiatement le résultat escompté. □

Construction du torseur versel associé à W_n

Soit $n \geqslant 3$. Si l'on note

$$\mathcal{W}_n = \#\left\{ (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in \mathbf{Z}^{2n} \ : \ \begin{array}{c} y_1y_2\cdots y_n \neq 0, \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \ \text{ vérifie } \ (3.1.1) \end{array} \right\} \tag{3.4.55}$$

et

$$\mathcal{A}_n = \#\left\{ \left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \in \mathbf{Z}^n \times (\mathbf{Z}\smallsetminus\{0\})^{2^n-1} \ : \ \begin{array}{c} (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N} \ \ N\text{-uplet réduit}, \\ z_h > 0 \ \text{ si } \ s(h) \geqslant 2, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\prod\limits_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_j(h)} \right) z_{2^{j-1}} x'_j = 0 \end{array} \right\},$$

la section 3.2.2 et en particulier la relation (3.3.35) permet d'obtenir le lemme suivant, qui coïncide avec [BBS14, Lemma 7] dans le cas $n = 3$.

Lemme 3.4.3. *L'application $\mathcal{A}_n \to \mathbf{Z}^{2n}$ définie par*

$$\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \in \mathcal{A}_n \longmapsto \left(z_1x'_1, \dots, z_{2^{n-1}}x'_n, \prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{\varepsilon_1(h)}, \dots, \prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{\varepsilon_n(h)} \right) \tag{3.4.56}$$

réalise une bijection de $\mathcal{A}_n$ sur $\mathcal{W}_n$.

C'est ce paramètrage de W_n qui nous a permis d'obtenir le Théorème 3.1.2. On explicite maintenant le torseur versel $\mathcal{T}$ associé à la résolution crépante $X_{0,n}$ explicitée en section 3.4.2 et on établit de façon analogue à [BBS14] que ce paramètrage du problème de comptage est en réalité une descente sur ce torseur versel $\mathcal{T}$. La constante de Peyre s'interprétera alors à la manière de [Sal98] et [BBS14] comme un volume adélique de $\mathcal{T}$. On renvoie à la section 3.4.2 de [BBS14] et au Lemme 3.4.1 pour un rappel concernant la notion de torseur versel et la justification qu'il n'existe, à isomorphisme près, qu'un seul torseur versel pour la variété $X_{0,n}$.

On suit ici le schéma de la démonstration dans le cas $n = 3$ de [BBS14]. La variété $X_{0,n}$ est une hypersurface de la variété $\Xi_0 \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ définie par les équations

(3.4.39), (3.4.40), (3.4.41) et (3.4.43). De la même façon que pour $X_{0,n}$, il est facile de voir que la restriction à Ξ_0 de la projection $\mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} \to \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$ donne lieu à un morphisme $\gamma : \Xi_0 \to B_{0,n}$ qui munit la variété Ξ_0 d'une structure de $\mathbf{P}^n$-fibré sur $B_{0,n}$. On commence, comme dans [BBS14], à décrire le torseur versel de Ξ_0. Pour ce faire, on tire parti du lemme fondamental suivant.

Lemme 3.4.4. *La variété Ξ_0 est une variété torique projective lisse et déployée. Le tore associé est l'ouvert U de Ξ_0 défini par*

$$x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ \varepsilon_i(h)=1}} Y_i^{(h)} Z_i^{(h)} \neq 0.$$

Démonstration.– On considère T_1 le tore déployé de dimension $2n-1$ défini comme le quotient du tore $\mathbf{G}_m^{2n}$ par le plongement diagonal de $\mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{G}_m^{2n}$. Lorsque la multiplication sur U est donnée par la multiplication coordonnée par coordonnée, l'application

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right)\right) \in U \longmapsto [(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)] \in T_1$$

est un isomorphisme de réciproque

$$[(t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_n)] \in T_1 \longmapsto \left(t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_n; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{U}^{(h)}; \frac{1}{\mathbf{U}^{(h)}}\right)\right) \in U,$$

avec

$$\mathbf{U}^{(h)} = \left(u_{i_1}, \ldots, u_{i_{s(h)}}\right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\frac{1}{\mathbf{U}^{(h)}} = \left(\frac{1}{u_{i_1}}, \ldots, \frac{1}{u_{i_{s(h)}}}\right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1.$$

Le tore $\mathbf{G}_m^{2n}$ agit sur Ξ_0 par multiplication coordonnée par coordonnée. Le produit

$$(t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_n). \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right)\right)$$

est donné par

$$\left(t_1 x_1, \ldots, t_n x_n, u_1 y_1, \ldots, u_n y_n; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{u}\mathbf{Y}^{(h)}; \frac{\mathbf{Z}^{(h)}}{\mathbf{u}}\right)\right),$$

avec

$$\mathbf{u}\mathbf{Y}^{(h)} = \left(u_{i_1} Y_{i_1}^{(h)}, \ldots, u_{i_{s(h)}} Y_{i_{s(h)}}^{(h)}\right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{Z}^{(h)}} = \left(\frac{Z_{i_1}^{(h)}}{u_{i_1}}, \ldots, \frac{Z_{i_{s(h)}}^{(h)}}{u_{i_{s(h)}}}\right) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1.$$

Cela fournit après passage au quotient une action $\rho : T \times \Xi_0 \to \Xi_0$ dont la restriction à U donne la loi de groupe de T et cela permet de conclure que Ξ_0 est un variété torique projective de dimension $2n-1$. Elle est lisse puisqu'il s'agit d'un $\mathbf{P}^n$-fibré sur $B_{0,n}$. $\square$

Comme dans [BBS14], on utilise alors, le résultat de [Sal98] suivant qui permet de décrire le torseur versel d'une variété torique déployée projective lisse. Le torseur versel $\mathcal{T}$ de Ξ_0 est ainsi donné par le morphisme de Cox de la sous-variété torique $\mathbf{A}^n \smallsetminus F$ de $\mathbf{A}^n$ dans Ξ_0 décrit dans [Cox95] où n est le nombre de cônes de dimension un (appelés arêtes) de l'éventail Δ de Ξ_0 (voir [Ful93] pour plus de détails à ce sujet) et $F \subseteq \mathbf{A}^n$ est le sous-ensemble fermé défini par les monômes $t^\sigma = \prod_{\rho \notin \sigma(1)} t_\rho$ où t_ρ est un système de coordonnées de $\mathbf{A}^n$ lorsque ρ décrit l'ensemble des arêtes de Δ, $\sigma \in \Delta$ un cône maximal et $\sigma(1)$ est l'ensemble des arêtes de σ. On applique alors ce résultat pour en déduire la proposition suivante.

Proposition 3.4.4. *Soit $\Omega \subset \mathbf{A}^{2^n+n-1}$ la sous-variété ouverte de coordonnées $\left(\mathbf{x}; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ définie par les conditions*

$$z_{h_n} \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \quad ou \quad x_i \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \tag{3.4.57}$$

pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ tel que $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$ et

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \left\{ h_{1,\mathbf{j}} = 2^{j_1 - 1} \preceq \cdots \preceq h_{k,\mathbf{j}} = \sum_{s=1}^{k} 2^{j_s - 1} \preceq \cdots \preceq h_{n,\mathbf{j}} = N \right\}.$$

Le morphisme $\varphi : \Omega \to \Xi_0$ défini par

$$\left(\mathbf{x}; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right) \longmapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_1(h) = 1}} z_h, \ldots, \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_n(h) = 1}} z_h; \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) \right) \tag{3.4.58}$$

où

$$\mathbf{Y}^{(h)} = \left(\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_1}(\ell) = 1}} z_\ell}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ h \preceq \ell}} z_\ell}, \ldots, \frac{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell) = 1}} z_\ell}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ h \preceq \ell}} z_\ell} \right) \quad pour \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\mathbf{Z}^{(h)} = \left(\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_1}(\ell) = 0}} z_\ell}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell) = 0 \text{ si } \varepsilon_i(h) = 1}} z_\ell}, \ldots, \frac{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell) = 0}} z_\ell}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell) = 0 \text{ si } \varepsilon_i(h) = 1}} z_\ell} \right) \quad pour \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

est alors le morphisme sous-jacent d'un torseur versel pour Ξ_0.

Démonstration.– On renvoie à [BBS14] et [Ful93] pour les trois résultats rappelés ci-dessous. Soient Δ l'éventail associé à la variété torique Ξ_0 et σ un cône de Δ. On notera alors O_σ l'orbite associée à σ et $V(\sigma) = \overline{O_\sigma}$. On a alors les trois résultats suivants qui vont s'avérer essentiels.

(i) Tout d'abord, il existe une bijection entre les arêtes ρ de Δ et les composantes irréductibles de $\Xi_0 \smallsetminus U$.

(ii) Ensuite, il existe également une bijection entre les cônes maximaux σ de Δ et les points fixes de $\Xi_0 \smallsetminus U$ sous l'action de U.

(iii) Enfin, pour $\sigma \in \Delta$ et $\rho \in \Delta$ une arête, on a l'équivalence suivante :

$$\rho \in \sigma(1) \quad \Longleftrightarrow \quad V(\sigma) \subseteq D_\rho$$

où D_ρ est la composante irréductible de $\Xi_0 \smallsetminus U$ associée à ρ.

Dans le cas de Ξ_0, les composantes irréductibles de $\Xi_0 \smallsetminus U$ s'obtiennent de la même façon que dans la démonstration du Lemme 3.4.1. On a $2^n + n - 1$ composantes irréductibles. Les n premières que l'on notera X_i dans la suite et à qui on associera la coordonnée ξ_i sont définies par l'équation $x_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. On a également D_N, associé à la coordonnée z_N, définie par l'équation $y_1 = \cdots = y_n = 0$. Enfin, pour tout $h \in [\![1, N-1]\!]$, on a D_h, associé à la coordonnée z_h, définie par les équations

$$\forall \ell \in [\![1, N]\!] \quad \text{tel que} \quad \ell \not\preceq h \quad \text{et} \quad \ell \not\preceq N-h : \quad \begin{cases} Y_i^{(\ell)} = 0 & \text{si} \quad \varepsilon_i(\ell) = \varepsilon_i(h) = 1 \\ Z_j^{(\ell)} = 0 & \text{si} \quad \varepsilon_j(\ell) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_j(h) = 0. \end{cases}$$

On déduit alors de [Sal98] et de la discussion *supra (i)* qu'il existe un plongement naturel du torseur versel $\mathcal{T}$ de Ξ_0 dans l'espace affine $\mathbf{A}^{2^n+n-1}$ de coordonnées $\left(\boldsymbol{\xi}; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$.

Au vue de l'action de U sur Ξ_0, un point P de $\Xi_0 \smallsetminus U$ est fixé par cette action si, et seulement si, son image a exactement une coordonnée non nulle par chacune des projections suivantes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod\limits_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} & \longrightarrow & \mathbf{P}^{2n-1} \\ \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod\limits_{1 \leqslant h \leqslant N} (\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)})\right) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

et pour tout $h \in [\![1, N]\!]$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod\limits_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} & \longrightarrow & \mathbf{P}^{(h)} \\ \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod\limits_{1 \leqslant h \leqslant N} (\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)})\right) & \longmapsto & \left(\mathbf{Y}^{(h)}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod\limits_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} & \longrightarrow & \mathbf{P}^{(h)} \\ \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod\limits_{1 \leqslant h \leqslant N} (\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)})\right) & \longmapsto & \left(\mathbf{Z}^{(h)}\right). \end{array}$$

On en déduit que pour point $\Xi_0 \smallsetminus U$ fixé par l'action de U, soit il existe $j_n \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_{j_n} \neq 0$ soit il existe $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_\ell \neq 0$. On admet à présent dans la suite de ce paragraphe que dès qu'un indice $i \in [\![1, n]\!]$ a été fixé tel que $Y_i^{(h)} \neq 0$ pour un certain $1 \leqslant h \leqslant N$ donné, alors pour tous les autres indices j tels que $\varepsilon_j(h) = 1$, on a $Y_j^{(h)} = 0$.

Plaçons-nous pour commencer dans le cas où $y_{j_n} \neq 0$. On a alors nécessairement $Y_{j_n}^{(N)} \neq 0$ d'après (A.0.8) et plus généralement, pour tout $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{j_n}(h) = 1$, on a $Y_{j_n}^{(h)} \neq 0$ d'après (A.0.5). De plus, il existe $\ell_n \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{j_n\}$ tel que $Z_{\ell_n}^{(N)} \neq 0$ et plus généralement, pour tout $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 1$, on a $Z_{\ell_n}^{(h)} \neq 0$ au vu de (A.0.4)

et de (A.0.6). On a donc que pour tout $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = \varepsilon_{j_n}(h) = 1$, $Y_{j_n}^{(h)} \neq 0$ et $Z_{\ell_n}^{(h)} \neq 0$. Intéressons-nous à présent aux $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 1$ et $\varepsilon_{j_n}(h) = 0$. Pour ces h, on a nécessairement $Z_{\ell_n}^{(h)} \neq 0$. On pose alors $h_{n-1,\mathbf{j}} = N - 2^{j_n - 1}$. Puisque P est fixé sous l'action de U, il existe $j_{n-1} \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{j_n, \ell_n\}$ tel que $Y_{j_{n-1}}^{(h_{n-1,\mathbf{j}})} \neq 0$ et plus généralement pour tout $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 1$ et $h \preceq h_{n-1,\mathbf{j}}$, on a $Y_{j_{n-1}}^{(h)} \neq 0$ d'après (A.0.4) et (A.0.5). On construit alors en itérant ce procédé $h_{2,\mathbf{j}}, \ldots, h_{n-1,\mathbf{j}}$ ainsi que $j_1, \ldots, j_{n-1}$ tel que pour tout $r \in [\![2, n-1]\!]$,

$$h_{r,\mathbf{j}} = N - \sum_{s=r+1}^{n} 2^{j_s - 1} = \sum_{s=1}^{r} 2^{j_s - 1}$$

et

$$Y_{j_r}^{(h)} \neq 0 \quad \forall h \in [\![1, N]\!] \quad \text{tel que} \quad h \preceq h_{r,\mathbf{j}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{j_r}(h) = 1$$

et $j_r \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{j_n, \ldots, j_{r+1}, \ell_n\}$ (ce qui est bien toujours possible). Passons à présent aux cas des $h \in [\![1, N]\!]$ tels que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 0$ et $\varepsilon_{j_n}(h) = 1$. Pour ces h, on a nécessairement $Y_{j_n}^{(h)} \neq 0$ et on note que tout $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 0$ et $\varepsilon_{j_n}(h) = 1$ vérifie $h \not\preceq \ell$ et $\ell \not\preceq h$ pour tout $\ell \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{j_n}(\ell) = 0$ et $\varepsilon_{j_{n-1}}(\ell) = 1$. On pose alors $h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}} = N - 2^{\ell_n - 1}$. Il existe ainsi $\ell_{n-1} \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{j_n, \ell_n\}$ tel que $Z_{\ell_{n-1}}^{(h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}})} \neq 0$ et plus généralement pour tout $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 0$ et $h \preceq h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}}$, on a $Z_{\ell_{n-1}}^{(h)} \neq 0$. On construit alors $h'_{3,\boldsymbol{\ell}}, \ldots, h'_{n-2,\boldsymbol{\ell}}$ ainsi que $\ell_3, \ldots, \ell_{n-1}$ tel que pour tout $r \in [\![3, n-1]\!]$,

$$h'_{r,\boldsymbol{\ell}} = N - \sum_{s=r+1}^{n} 2^{\ell_s - 1}$$

et

$$Z_{\ell_r}^{(h)} \neq 0 \quad \forall h \in [\![1, N]\!] \quad \text{tel que} \quad h \preceq h'_{r,\boldsymbol{\ell}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\ell_r}(h) = 1$$

et $j_r \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{\ell_n, \ldots, \ell_{r+1}, j_n, j_{n-1}\}$. Ensuite si on pose $h'_{2,\boldsymbol{\ell}} = h'_{3,\boldsymbol{\ell}} - 2^{\ell_{n-2} - 1}$, alors on a $Y_{j_n}^{(h'_{2,\boldsymbol{\ell}})} \neq 0$ et $Z_{j_{n-1}}^{(h'_{2,\boldsymbol{\ell}})} \neq 0$ car les chiffres de $h'_{2,\boldsymbol{\ell}}$ sont exactement j_n et j_{n-1}. Reste alors à traiter le cas des $h \in [\![1, N]\!]$ tel que $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 0$ et $\varepsilon_{j_n}(h) = 0$. Puisqu'on a $h_{2,\mathbf{j}} \preceq h_{3,\mathbf{j}} \preceq \cdots \preceq h_{n-1,\mathbf{j}}$ et $h'_{2,\boldsymbol{\ell}} \preceq h'_{3,\boldsymbol{\ell}} \preceq \cdots \preceq h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}}$, il existe r et s tels que $h \preceq h_{r,\mathbf{j}}$ et $h \preceq h'_{s,\boldsymbol{\ell}}$ et $h \not\preceq h_{i,\mathbf{j}}$ pour $i > r$ et $h \not\preceq h'_{j,\boldsymbol{\ell}}$ pour $j > s$. Il s'ensuit alors que $Y_{j_r}^{(h)} \neq 0$ et $Z_{\ell_s}^{(h)} \neq 0$. Par construction, $h_{i,\mathbf{j}}$ et $h'_{j,\boldsymbol{\ell}}$ ne sont pas comparables pour la relation $\preceq$ pour $i \geqslant 3$ et $j \geqslant 3$. On en déduit finalement que P n'appartient pas aux composantes irréductibles D_h avec $h \in [\![1, N-1]\!]$ telles que

$$\begin{cases} \varepsilon_{j_n}(h) = 1 \\ \text{ou} \quad h \prec h_{n-1,\mathbf{j}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{j_{n-1}}(h) = 1 \\ \text{ou} \quad h \prec h_{n-2,\mathbf{j}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{j_{n-2}}(h) = 1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \text{ou} \quad h \prec h_{2,\mathbf{j}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{j_2}(h) = 1 \end{cases} \tag{3.4.59}$$

ou

$$\begin{cases} \varepsilon_{\ell_n}(h) = 0 \\ \text{ou} \quad h \prec h'_{n-1,\boldsymbol{\ell}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\ell_{n-1}}(h) = 0 \\ \text{ou} \quad h \prec h'_{n-2,\boldsymbol{\ell}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\ell_{n-2}}(h) = 0 \\ \vdots \\ \text{ou} \quad h \prec h'_{3,\boldsymbol{\ell}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\ell_3}(h) = 0. \end{cases} \tag{3.4.60}$$

Les seuls $h \in [\![1,n]\!] \smallsetminus \{h_{2,\mathbf{j}}, \dots, h_{n-1,\mathbf{j}}\}$ qui ne vérifient pas les conditions (3.4.59) sont les h tels que $\varepsilon_{j_2}(h) = \varepsilon_{j_2}(h) = \cdots = \varepsilon_{j_n}(h) = 0$. En effet, les conditions $\varepsilon_{j_n}(h) = \cdots = \varepsilon_{j_{n-k+1}}(h) = 0$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ impliquent que $h \prec h_{k,\mathbf{j}}$. Il s'ensuit que $h = 2^{\ell_n - 1}$ et les conditions (3.4.59) entraînent que P n'appartient pas aux D_h tels que $h \notin \{2^{\ell_n-1}, h_{2,\mathbf{j}}, \dots, h_{n-1,\mathbf{j}}\}$. Les conditions (3.4.60) ne sont pas vérifiées par un élément $h \in \{2^{\ell_n-1}, h_2, \dots, h_{n-1}\}$. En effet, un tel élément vérifie $\varepsilon_{\ell_n}(h) = 1$ et ne vérifie jamais $h \preceq h'_{k,\ell}$ pour tout $k \in [\![3,n-1]\!]$. Ainsi les conditions (3.4.60) impliquent que le point P n'appartient pas à D_h pour $h \in [\![1,N-1]\!] \smallsetminus \{2^{\ell_n-1}, h_2, \dots, h_{n-1}\}$.

Le cas où $x_\ell \neq 0$ se traite de façon parfaitement analogue. Le sous-ensemble exceptionnel défini dans [Cox95] et dans la discussion précédant la proposition est donc donné par les monômes

$$z_{h_n} \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \quad \text{ou} \quad x_i \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0$$

pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$ tel que $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ et

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \left\{ h_{1,\mathbf{j}} = 2^{j_1 - 1} \preceq \cdots \preceq h_{k,\mathbf{j}} = \sum_{s=1}^{k} 2^{j_s - 1} \preceq \cdots \preceq h_{n,\mathbf{j}} = N \right\}.$$

Par conséquent, $\mathcal{T} = \mathbf{A}^{2^n+n-1} \smallsetminus F$ est bien l'ouvert Ω défini dans l'énoncé de la Proposition 3.4.4.

Grâce à la description du morphisme $\varphi : \mathcal{T} \to \Xi_0$ rappelée dans [BBS14] dans leur preuve du lemme 10, on sait que la restriction de φ à $\mathbf{G}_m^{2^n+n-1}$ est le morphisme de tores $\mathbf{G}_m^{2^n+n-1} \to U$ dual du morphisme «diviseur» $\mathbf{Q}[U]^*/\mathbf{Q}^* \to \mathrm{Div}_{\Xi_0 \smallsetminus U}(\Xi_0)$, où $\mathrm{Div}_{\Xi_0 \smallsetminus U}(\Xi_0)$ désigne le groupe abélien libre des diviseurs de Ξ_0 à support dans $\Xi_0 \smallsetminus U$. Le groupe $\mathbf{Q}[U]^*/\mathbf{Q}^*$ est engendré par $x_1/y_n, \dots, x_n/y_n, y_1/y_n, \dots, y_{n-1}/y_n$. Puisqu'on a

$$\mathrm{div}(x_i) = X_i, \quad \mathrm{div}(y_i) = \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1}} D_h \quad \text{pour} \quad i \in [\![1,n]\!]$$

ainsi que pour tout $h \in [\![1,N-1]\!]$,

$$\mathrm{div}\left(Y_i^{(h)}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell) = 1}} D_\ell - \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ h \preceq \ell}} D_\ell \quad \text{pour} \quad \varepsilon_i(h) = 1$$

et

$$\mathrm{div}\left(Z_i^{(h)}\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_i(\ell) = 0}} D_\ell - \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant N \\ \varepsilon_j(\ell) = 0 \text{ si } \varepsilon_j(h) = 1}} D_\ell \quad \text{pour} \quad \varepsilon_i(h) = 1,$$

on obtient aisément que la restriction de φ à l'ouvert dense de Ω sur lequel chacune des coordonnées est non nulle est bien donnée par (3.4.58) et on conclut alors par densité la démonstration de cette proposition. □

On déduit de la Proposition 3.4.4 le théorème suivant de manière analogue à [BBS14].

Théorème 3.4.2. *Soit $O \subset \mathbf{A}^{2^n+n-1}$ la sous-variété ouverte de coordonnées $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ définie par*

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \neq h_n \\ s(h) \geqslant 2}} z_h^{1 - \varepsilon_i(h)} \right) = 0. \tag{3.4.61}$$

et les conditions

$$z_{h_n} \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \quad \textit{ou} \quad x'_i z_{2^{i-1}} \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h \neq 0 \tag{3.4.62}$$

pour $i \in [\![1,n]\!]$ *et* $\mathbf{j} = (j_1,\dots,j_n)$ *tel que* $\{j_1,\dots,j_n\} = \{1,\dots,n\}$ *et*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \left\{ h_{1,\mathbf{j}} = 2^{j_1-1} \preceq \cdots \preceq h_{k,\mathbf{j}} = \sum_{s=1}^{k} 2^{j_s-1} \preceq \cdots \preceq h_{n,\mathbf{j}} = N \right\}.$$

Le morphisme $\varphi_O : O \to X_{0,n}$ *défini par*

$$\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) \longmapsto \left(z_1 x'_1, \dots, z_{2^{n-1}} x'_n, \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_1(h)=1}} z_h, \dots, \prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ \varepsilon_n(h)=1}} z_h; \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \left(\mathbf{Y}^{(h)}; \mathbf{Z}^{(h)}\right) \right) \tag{3.4.63}$$

où

$$\mathbf{Y}^{(h)} = \left(\frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=1}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ h\preceq \ell}} z_\ell}, \dots, \frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=1}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ h\preceq \ell}} z_\ell} \right) \quad \textit{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

et

$$\mathbf{Z}^{(h)} = \left(\frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_1}(\ell)=0}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}} z_\ell}, \dots, \frac{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_{i_{s(h)}}(\ell)=0}} z_\ell}{\prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant N\\ \varepsilon_i(\ell)=0 \text{ si } \varepsilon_i(h)=1}} z_\ell} \right) \quad \textit{pour} \quad \varepsilon_{i_1}(h) = \cdots = \varepsilon_{i_{s(h)}}(h) = 1$$

est alors le morphisme sous-jacent d'un torseur versel pour $X_{0,n}$.

Démonstration.– On obtient grâce à la suite spectrale de Leray (voir [BBS14]) le diagramme commutatif de $\mathfrak{g}$-modules triviaux suivants

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{B}_0) \arrow[r, "\overline{\gamma}^*"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \mathrm{Pic}(\overline{\Xi}_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{B}_0) \arrow[r, "\overline{\lambda}^*"] & \mathrm{Pic}(\overline{X}_0) \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right)$, $\overline{\lambda}^* : \overline{X}_0 \to \overline{B}_0$ et $\overline{\gamma}^* : \overline{\Xi}_0 \to \overline{B}_0$ sont les morphismes sur $\overline{\mathbf{Q}}$ provenant respectivement des fibrations $\lambda : X_{0,n} \to B_{0,n}$ et $\gamma : \Xi_0 \to B_{0,n}$. La flèche $\mathrm{Pic}(\overline{\Xi}_0) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}_0)$ est un isomorphisme et on a une suite exacte duale de $\mathbf{Q}$-tores algébriques

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow 1$$

avec T le tore dont le groupe des caractères est $\hat{T} = \mathrm{Pic}(\overline{\Xi}_0) = \mathrm{Pic}(\overline{X}_0)$ et S le tore dont le groupe des caractères est $\hat{S} = \mathrm{Pic}(\overline{B}_0)$. De la fonctorialité de la suite exacte (voir [CTS87])

$$0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(\mathbf{Q}, T) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X_{0,n}, T) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\hat{T}, \mathrm{Pic}\left(\overline{X}_0\right)\right)$$

par rapport à $X_{0,n} \to \Xi_0$, il s'ensuit que le T-torseur versel pour Ξ_0 se restreint au sous-ensemble $\varphi^{-1}(X_{0,n}) \subseteq \Omega$ à un T-torseur versel pour $X_{0,n}$. Le sous-ensemble $\varphi^{-1}(X_{0,n})$ est défini par l'équation (3.4.39). Après avoir remarqué que (3.4.64) et (3.4.39) sont équivalentes lorsque (3.4.1) est vérifiée et en utilisant la Proposition 3.4.4, cette dernière prend la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)} \right) = 0. \tag{3.4.64}$$

À la manière de [BBS14], on définit les n fonctions régulières $x'_1, \ldots, x'_n$ sur $\varphi^{-1}(X_{0,n})$. Sur l'ouvert

$$\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)} \neq 0$$

pour $i \in [\![1, n]\!]$ fixé, on pose

$$x'_i = -\frac{\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \xi_j \left(\prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ h \neq z_{2i-1}}} z_h^{1-\varepsilon_j(h)} \right)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}} \quad \text{et} \quad x'_j = \frac{\xi_j}{z_{2j-1}} \quad \text{pour} \quad j \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{i\}. \tag{3.4.65}$$

Si l'on impose de plus $z_{2i-1} \neq 0$, alors on vérifie aisément que $x'_i = \frac{\xi_i}{z_{2i-1}}$, ce qui assure que les définitions sur les différents ouverts lorsque i varie dans $[\![1, n]\!]$ sont compatibles et se recollent pour donner des fonctions régulières bien définies sur $\varphi^{-1}(X_{0,n})$. Cela permet d'obtenir la proposition. □

On adapte alors la fin de la section 4 de [BBS14] pour obtenir des informations sur les points entiers qui seront nécessaires afin de calculer le nombre de Tamagawa apparaissant dans la constante de Peyre. Soit $\underline{X_{0,n}} \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{(h)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{(h)}$ défini par les équations (3.4.39), (3.4.40), (3.4.41), (3.4.42) et (3.4.43) et $\underline{\Xi_0} \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{(h)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{(h)}$ défini par les équations (3.4.39), (3.4.40), (3.4.41) et (3.4.43). D'après [Ful93, pages 22-23], on peut étendre le morphisme $\varphi : \Omega \to \Xi_0$ de la Proposition 3.4.4 en un morphisme $\underline{\varphi} : \underline{\Omega} \to \underline{\Xi_0}$ entre deux schémas toriques puisque le morphisme de Cox provient d'un morphisme d'éventails. Les arguments utilisés lors de la démonstration de la Proposition 3.4.4 mais sur $\mathbf{Z}$ fournissent que $\underline{\Omega}$ est le sous-schéma de $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{2^n+n-1}$ de coordonnées $\left(\mathbf{x}, (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ défini par les conditions (3.4.1) et le morphisme $\underline{\varphi} : \underline{\Omega} \to \underline{\Xi_0}$ est défini par (3.4.58) est le morphisme sous-jacent d'un torseur $\underline{\varphi_{\mathcal{T}}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\Xi_0}$ sous un tore déployé sur $\mathbf{Z}$ que l'on notera $\underline{T} \cong \mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}}^{2^n-n}$ avec $H^1_{\text{ét}}(\mathbf{Z}, \underline{T})$. Ainsi il y a une bijection entre les $\underline{T}(\mathbf{Z})$-orbites de points entiers de $\underline{\Omega}$ et les points entiers de $\underline{\Xi_0}$ (voir [BBS14] et [Mil80, III.4.9] pour plus de détails). De même, en restreignant $\underline{\varphi}$ au fermé $\underline{O} = \underline{\varphi}^{-1}(\underline{X_{0,n}})$ de $\underline{\Omega}$ défini par l'équation (3.4.42), on peut également introduire des coordonnées $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ telles que $\underline{O}$ soit le sous-schéma localement fermé de $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{2^n+n-1}$ défini par (3.4.64) et (3.4.62). On obtient également un morphisme $\underline{\varphi_O} : \underline{O} \to \underline{X_{0,n}}$ donné par (3.4.63). On dispose alors du lemme suivant qui permet d'obtenir la Proposition 3.4.5 *infra*, équivalente au Lemme 3.4.3. Mais avant de pouvoir établir cette Proposition 3.4.5, on a besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 3.4.5. *La condition de coprimalité*

$$\operatorname*{pgcd}_{\mathbf{j}}\left(\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h\right)=1 \tag{3.4.66}$$

où $\mathbf{j}$ *décrit tous les* n*-uplets* $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ *tel que* $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ *et*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}}=\left\{h_{1,\mathbf{j}}=2^{j_1-1}\preceq\cdots\preceq h_{k,\mathbf{j}}=\sum_{s=1}^{k}2^{j_s-1}\preceq\cdots\preceq h_{n,\mathbf{j}}=N\right\}$$

est équivalente au fait que le N*-uplet* $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ *soit réduit.*

Démonstration.– Pour simplifier les notations, on notera dans toute cette démonstration

$$P_{\mathbf{j}}=\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ h\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}}} z_h$$

pour $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ et

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}}=\left\{h_{1,\mathbf{j}}=2^{j_1-1}\preceq\cdots\preceq h_{k,\mathbf{j}}=\sum_{s=1}^{k}2^{j_s-1}\preceq\cdots\preceq h_{n,\mathbf{j}}=N\right\}. \tag{3.4.67}$$

Supposons dans un premier temps que la condition de coprimalité suivante

$$\operatorname{pgcd}\left(P_{\mathbf{j}}\ :\ \mathbf{j}\right)=1$$

pour $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ comme en (3.4.67)) est vérifiée et considérons h et ℓ deux éléments de $[\![1,N-1]\!]$ non comparables, c'est-à-dire tels que $h\not\preceq\ell$ et $\ell\not\preceq h$. Soit $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$. On constate alors que soit $z_h\mid P_{\mathbf{j}}$ soit $z_\ell\mid P_{\mathbf{j}}$. En effet, supposons que $z_h\nmid P_{\mathbf{j}}$. Alors $h\in\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$. Clairement tous les éléments de $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ sont alors comparables à h si bien que $\ell\notin\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ et ainsi $z_\ell\mid P_{\mathbf{j}}$ d'après la définition de $P_{\mathbf{j}}$. On en déduit par conséquent que la condition de coprimalité (3.4.66) implique que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ soit réduit.

Réciproquement, supposons que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ soit réduit. Raisonnons alors par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre premier p tel que $p\mid P_{\mathbf{j}}$ pour tout $\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_n)$ tel que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{1,\dots,n\}$ et

$$\mathcal{H}_{\mathbf{j}}=\left\{h_{1,\mathbf{j}}=2^{j_1-1}\preceq\cdots\preceq h_{k,\mathbf{j}}=\sum_{s=1}^{k}2^{j_s-1}\preceq\cdots\preceq h_{n,\mathbf{j}}=N\right\}$$

comme en (3.4.67). En particulier, $p\mid P_{\{1,3,\dots,n-1,2\}}$ et par conséquent il existe $H_1\in[\![1,N-1]\!]$ tel que

$$\exists i\in[\![1,n]\!],\quad z_{H_1}\prec h_{i,\{1,3,\dots,n-1,2\}}.$$

Posons $k=s(H_1)$ et $c_1<c_2<\cdots<c_k$ les chiffres de H_1. Il existe alors $(n-k)!k!$ facteurs $P_{\mathbf{j}}$ qui ne sont pas divisibles par z_{H_1}. En effet, il s'agit des $\mathbf{j}$ tels que $\{j_1,\dots,j_k\}=\{c_1,\dots,c_k\}$. Soit alors un tel $\mathbf{j}$. Puisque $p\mid P_{\mathbf{j}}$, il existe $H_2\in[\![1,N-1]\!]\smallsetminus\{H_1\}$ tel que $p\mid z_{H_2}$ et

$$\exists i\in[\![1,n]\!],\quad z_{H_2}\prec h_{i,\mathbf{j}}.$$

On a alors deux cas. Puisque $p \mid (z_{H_1}, z_{H_2})$ et que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant N\leqslant N}$ est réduit, on en déduit que H_1 et H_2 sont comparables. Supposons alors par exemple que $H_2 \prec H_1$ et posons $\ell = s(H_2) < k = s(H_1)$. Le nombre de termes $P_{\mathbf{j}}$ qui ne sont ni divisibles par z_{H_1} ni divisibles par z_{H_2} est de $(n-k)!(k-\ell)!\ell!$. En effet, il s'agit des $\mathbf{j}$ tels que $j_1, \ldots, j_\ell$ soient les chiffres de H_2 et $j_{\ell+1}, \ldots, j_k$ soient les chiffres de H_1 qui ne sont pas des chiffres de H_2. Le cas $H_1 \prec H_2$ se traite de façon analogue. En itérant ce procédé, on construit $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1} \in [\![1, N]\!]^{n-1}$ tels que

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}, \quad H_{\sigma(1)} \prec H_{\sigma(2)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(n-1)}$$

et tel que le seul facteur $P_{\mathbf{j}_0}$ qui ne soit divisible par aucun des z_{H_i} pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ soit le n-uplet $\mathbf{j}_0$ défini par j_1 l'unique chiffre de $H_{\sigma(1)}$ puis pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, j_i l'unique chiffre de $H_{\sigma(i)}$ qui n'est pas un chiffre de $H_{\sigma(i-1)}$. On pose alors j_n tel que $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Puisque $p \mid P_{\mathbf{j}_0}$, il existe un facteur z_h de $P_{\mathbf{j}_0}$ tel que $p \mid z_h$. Montrons alors que pour tout facteur z_h de $P_{\mathbf{j}_0}$, il existe un $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que h et H_i ne soient pas comparables. Soit h tel que $z_h \mid P_{\mathbf{j}_0}$. On a alors que

$$z_h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}_0} = \left\{ H_{\sigma(1)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(k)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(n-1)} \prec N \right\}.$$

Si $h \not\prec H_{\sigma(n-1)}$, alors z_h et $z_{H_{\sigma(n-1)}}$ ne sont pas comparables. On peut donc supposer que $h \prec H_{\sigma(n-1)}$. On n'a alors que $h \not\succ H_{\sigma(n-2)}$ car il n'existe aucun $r \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $z_r \succ H_{\sigma(n-2)}$ et $z_r \prec H_{\sigma(n-1)}$. Si maintenant h et $H_{\sigma(n-2)}$ ne sont pas comparable, alors on a le résultat. On peut donc désormais supposer que $h \prec H_{\sigma(n-2)}$. Alors de même soit h et $H_{\sigma(n-3)}$ ne sont pas comparables soit $h \prec H_{\sigma(n-3)}$ et de proche en proche, ce raisonnement permet de conclure que dans tous les cas, il existe un $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que h et H_i ne soient pas comparables. On obtient donc finalement un

$$h \notin \mathcal{H}_{\mathbf{j}_0} = \left\{ H_{\sigma(1)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(k)} \prec \cdots \prec H_{\sigma(n-1)} \prec N \right\}$$

et un $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $p \mid (z_h, z_{H_i})$. Mais puisque h et H_i ne sont pas comparables, on a une contradiction et finalement, on a bien la condition de coprimalité (3.4.66). Cela conclut la preuve de ce lemme. □

Proposition 3.4.5. *Soit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des $2^n + n - 1$-uplets $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right)$ tels que $x'_i \in \mathbf{Z}$, $z_h \in \mathbf{N}$ si $s(h) > 1$ et $z_h \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ si $s(h) = 1$ vérifiant la relation*

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N \\ h\neq h_n \\ s(h)\geqslant 2}} z_h^{1-\varepsilon_i(h)} \right) = 0. \tag{3.4.68}$$

ainsi que les conditions de coprimalité

$$\operatorname{pgcd}\left(z_{h_n}, x'_1 z_1, \ldots, x'_n z_{2^{n-1}}\right) = 1 \tag{3.4.69}$$

et que le N-uplet $(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}$ est réduit. Alors, l'application $\mathcal{A}_0 \to \mathbf{Z}^{2n}$ définie par (3.4.56) est une bijection entre $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{W}_n$ défini en (3.4.55), l'ensemble des solutions entières primitives de (3.1.1). De plus, dans ce cas, la condition (3.4.69) est équivalente à la condition $pgcd(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 1$.

Démonstration.– La démonstration est très fortement inspirée de celle de [BBS14, lemma 11]. Soit $\underline{W_n} \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{2n-1}$ le sous-schéma défini par l'équation (3.1.1) et $\underline{f} : \underline{X_{0,n}} \to \underline{W_n}$ le morphisme induit par la projection

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{2n-1} \times \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{(h)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{(h)} \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{2n-1},$$

provenant de $f : X_{0,n} \to W_n$ après changement de base. On a alors des bijections naturelles $\underline{X_{0,n}}(\mathbf{Z}) = X_{0,n}(\mathbf{Q})$, $\underline{W_n}(\mathbf{Z}) = W_n(\mathbf{Q})$ et $X_{0,n}^{\circ}(\mathbf{Q}) = W_n^{\circ}(\mathbf{Q})$ pour $X_{0,n}^{\circ} \subseteq X_{0,n}$ et $W_n^{\circ} \subseteq W_n$ les deux ouverts définis par les conditions $y_1 y_2 \cdots y_n \neq 0$. Si l'on considère à présent les ouverts $\underline{X_{0,n}}^{\circ} \subseteq \underline{X_{0,n}}$ et $\underline{W_n}^{\circ} \subseteq \underline{W_n}$ provenant respectivement de $X_{0,n}^{\circ} \subseteq X_{0,n}$ et $W_n^{\circ} \subseteq W_n$, il vient la bijection $\underline{X_{0,n}}^{\circ}(\mathbf{Z}) = \underline{W_n}^{\circ}(\mathbf{Z})$. Enfin, on pose $O^{\circ} \subseteq O$ l'ouvert défini par la condition

$$\prod_{1 \leqslant h \leqslant N} z_h \neq 0.$$

On introduit alors $\underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z}) \subseteq \underline{O}(\mathbf{Z})$ correspondant à $O^{\circ}(\mathbf{Q}) \subseteq O(\mathbf{Q})$ et tel qu'on ait une bijection $\underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z}) = O^{\circ}(\mathbf{Q})$. Comme $\varphi^{-1}(W_n^{\circ}) = O^{\circ}$, il s'ensuit une bijection entre $\underline{X_{0,n}}^{\circ}$ et les $\underline{T}(\mathbf{Z})$-orbites de $\underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z})$. L'application de $\underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z})$ vers $\underline{W_n}^{\circ}(\mathbf{Z})$ s'obtient grâce à $\underline{f} \circ \underline{\varphi}$ donnée par (3.4.63)

Un point $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right) \in \underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z})$ si, et seulement si, il vérifie (3.4.68) et (3.4.64) modulo p pour tout nombre premier p, ce qui est bien équivalent à (3.4.68), (3.4.66) et (3.4.69). On obtient alors les conditions de coprimalité de l'énoncé de la proposition grâce au Lemme 3.4.5. On identifie alors à présent l'ensemble $\underline{X_{0,n}}^{\circ}(\mathbf{Z}) = \underline{W_n}^{\circ}(\mathbf{Z})$ avec l'ensemble des $(2n-1)$-uplets de la forme $\pm(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ à coordonnées premières entre elles et vérifiant (3.1.1) et $y_1 \cdots y_n \neq 0$. Chaque $\underline{T}(\mathbf{Z})$-orbites de $\underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z})$ comporte $2^{\dim(T)} = 2^{2^n - n}$ éléments qui ne diffèrent que par le signe de certaines composantes. Soit $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right) \in \underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z})$ vérifiant (3.4.66) et (3.4.69). D'après le Lemme 3.4.5, cela équivaut au fait que $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ vérifie les conditions (3.4.66) et que $(z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}$ est réduit. On a alors

$$\underline{f} \circ \underline{\varphi} = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \underline{W_n}^{\circ}(\mathbf{Z})$$

avec $\mathrm{pgcd}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 1$. D'après les propriétés générales des torseurs (voir [Sko, Chapter 2]), on sait que la $\underline{T}(\mathbf{Z})$-orbites de $\left(\mathbf{x}'; (z_h)_{1 \leqslant h \leqslant N}\right)$ est la fibre du point $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. D'après le Lemme 3.2.1, les points de cette fibre ne diffèrent que par leurs signes. Étudions alors combien de points de $\underline{O}^{\circ}(\mathbf{Z})$ appartiennent à cette fibre. On commence par fixer $x'_1, \ldots, x'_n$, ce qui fixe $z_1, z_2, \ldots, z_{2^{n-1}}$ et donne 2^n choix. Il s'agit alors de déterminer les signes possibles de $(z_h)_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ s(h) \geqslant 2}}$ tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1,\ h \neq 2^{i-1}}} z_h$$

soit de signe prescrit. Autrement dit, on cherche le cardinal des $(i_h)_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ s(h) \geqslant 2}} \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{2^n - n - 1}$ tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant N \\ \varepsilon_i(h) = 1,\ h \neq 2^{i-1}}} i_h \equiv k_i \pmod 2$$

pour $(k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ fixé. On peut choisir librement dans la première équation tous les i_h tels que $s(h) \geqslant 2$ et $\varepsilon_1(h) = 1$ excepté i_{N-1} qui est alors fixé par l'équation, ce

qui laisse

$$\#\{h \in [\![1, N]\!] \ : \ \varepsilon_1(h) = 1\} - 2 = 2^{n-1} - 2$$

choix. De même, dans la deuxième équation, on peut choisir librement tous les i_h tels que $s(h) \geqslant 2$, $\varepsilon_1(h) = 0$ et $\varepsilon_2(h) = 1$ excepté i_{N-2} qui est alors fixé par l'équation, ce qui laisse

$$\#\{h \in [\![1, N]\!] \ : \ \varepsilon_2(h) = 1, \ \varepsilon_1(h) = 0\} - 2 = 2^{n-2} - 2$$

choix. De même, on peut choisir comme cela librement dans l'équation $k \in [\![1, n-2]\!]$, $2^{n-k} - 2$ variables i_h librement tels que $s(h) \geqslant 2$ et $\varepsilon_k(h) = 1$, $\varepsilon_1(h) = \cdots = \varepsilon_{k-1}(h) = 0$. On constate alors que toutes les variables des deux dernières équations sont fixées excepté $i_{2^{n-2}+2^{n-1}}$. Il y a alors deux cas de figure, soit cette variable ne peut pas être fixée de sorte que les équations $n-1$ et n soient vérifiées, soit il existe une unique valeur de $i_{2^{n-2}+2^{n-1}}$ telle que les deux dernières équations $n-1$ et n soient vérifiées. De plus, cette variable peut être fixée si, et seulement si,

$$\sum_{\substack{\varepsilon_{n-1}(h)=1, \ \varepsilon_n(h)=0 \\ h \neq 2^{n-2}}} i_h \equiv \sum_{\substack{\varepsilon_{n-1}(h)=0, \ \varepsilon_n(h)=1 \\ h \neq 2^{n-2}}} i_h \pmod 2$$

où les variables en question dans les deux sommes ci-dessus ne font jamais intervenir les variables i_h pour $h = N - 2^{i-1}$ et $i \in [\![1, n-2]\!]$. On obtient ainsi

$$\left(\sum_{k=1}^{n-2} \left(2^{n-k} - 2 \right) \right) - 1 = 2^n - 2n - 1$$

choix. Finalement, on aboutit à $2^{2^n - n - 1}$ éléments au-dessus de $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. On obtient donc $2^{2^n - n}$ éléments au-dessus du point $\pm(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de $\underline{W_n}^\circ(\mathbf{Z})$.

Si on considère à présent, les points d'une $\underline{T}(\mathbf{Z})$-orbites de $\underline{O}^\circ(\mathbf{Z})$ tels que $z_h \in \mathbf{N}^*$ dès que $s(h) > 1$, on obtient exactement deux points dont toutes les coordonnées sont égales mis à part les $(z_{2^{i-1}})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ qui sont opposés. De plus, ces deux points ont pour images par $\underline{f} \circ \underline{\varphi}$ exactement $\pm(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Cela permet bien d'obtenir le résultat de la proposition. □

La construction explicite de la norme $v-$adique et du nombre de Tamagawa

On utilise alors cette construction pour expliciter le nombre de Tamagawa

$$\omega_H \left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})} \right)$$

associé à $X_{0,n}$ en suivant presqu'à la lettre la section 5 de [BBS14]. Afin de simplifier les notations, on notera dans toute la suite $x_i = y_{i-n}$ et

$$F(x_1, \ldots, x_{2n}) = x_1 y_2 \cdots y_n + \cdots + x_n y_1 \cdots y_n = x_1 x_{n+2} \cdots x_{2n} + \cdots + x_n x_{n+1} \cdots x_{2n-1}$$

pour $i \in [\![n+1, 2n]\!]$. De plus, pour $i \in [\![1, 2n]\!]$, on introduit $\Xi_0^{(i)} \subseteq \Xi_0$ (resp. $\mathbf{P}^{2n-1}_{(i)} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1}$, $W_n^{(i)} \subseteq W_n$ et $X_{0,n}^{(i)} \subseteq X_{0,n}$) les ouverts définis par la condition $x_i \neq 0$. On considèrera alors les coordonnées affines $x_j^{(i)} = x_j / x_i$ pour $j \in [\![1, 2n]\!] \smallsetminus \{i\}$ pour $\mathbf{P}^{2n-1}_{(i)} = \mathbf{A}^{2n-1}$ et

$\Xi_0^{(i)} \subseteq \mathbf{P}_{(i)}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$, $W_n^{(i)} \subseteq \mathbf{P}_{(i)}^{2n-1}$ et $X_{0,n}^{(i)} \subseteq \mathbf{P}_{(i)}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)}$. Ainsi, $W_n^{(i)}$ est l'hypersurface affine définie par

$$F_i\left(x_1^{(i)}, \ldots, \hat{x}_i^{(i)}, \ldots, x_{2n}^{(i)}\right) = F\left(x_1^{(i)}, \ldots, 1, \ldots, x_{2n}^{(i)}\right).$$

Pour définir la mesure ω_H, on a besoin de décrire la hauteur $H \circ f_0 : X_{0,n}(\mathbf{Q}) \to \mathbf{N}$ en terme de métrique adélique sur le faisceau anticanonique $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$. On définit cette métrique adélique en termes de sections globales de $\omega_{X_{0,n}}^{-1} = f_0^*\left(\omega_{W_n}^{-1}\right)$ qui sont les images inverses de sections globales de $\omega_{W_n}^{-1}$. Comme dans [BBS14], pour une section locale $s \in \Gamma(U, L)$ d'un O_W-module L, on écrira $f^*(s)$ la section $f^{-1}(s) \otimes_{f^{-1}O_W} 1 \in \Gamma\left(f^{-1}(U), f^*(L)\right)$ de $f^*(L) = f^{-1}(L) \otimes_{f^{-1}O_W} O_X$.
On a besoin du lemme suivant tiré de [Ful93, p.86] rappelé dans [BBS14].

Lemme 3.4.6. *Soit V une variété torique non singulière de dimension n et de tore U. Soit $\omega_V\left(\sum_{k=1}^r D_k\right)$ le faisceau des n-formes sur V possédant au plus un pôle simple le long de chacune des composantes irréductibles $D_1, \ldots, D_r$ de $V \smallsetminus U$. Alors, il existe une section globale $s_v \in \Gamma\left(V, \omega_V\left(\sum_{k=1}^r D_k\right)\right)$ telle que*

$$s_V = \pm \frac{d\chi_1}{\chi_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\chi_n}{\chi_n}$$

sur U pour tout ensemble de n caractères $\chi_i : U \to \mathbf{G}_m$ formant une base de $M = Hom(U, \mathbf{G}_m)$. La section s_V engendre le O_V-module $\omega_V\left(\sum_{k=1}^r D_k\right)$.

On applique alors ce lemme 3.4.6 au tore U défini par $x_1 \cdots x_{2n} \neq 0$ et aux variétés toriques $\mathbf{P}^{2n-1}$ et Ξ_0. Si l'on pose $p_1 : \Xi_0 \to \mathbf{P}^{2n-1}$ la restriction à Ξ_0 de la projection sur la première composante

$$\mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N} \mathbf{P}^{(h)} \times \mathbf{P}^{(h)} \to \mathbf{P}^{2n-1}$$

alors p_1 est un isomorphisme entre les ouverts $U_{\Xi_0}^{(i)} \subseteq \Xi_0$ et $U^{(i)} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1}$ tels que $x_i \neq 0$. En identifiant ces deux ouverts avec U, alors la loi de groupe de U s'étend en une action de U sur Ξ_0 et $\mathbf{P}^{2n-1}$ telle que p_1 soit U-équivariante. Cela implique d'après [Rei, p.41] et le lemme 3.4.6, si l'on note H_k l'hyperplan $x_k = 0$ pour $k \in [\![1, 2n]\!]$, on obtient l'existence d'une section globale qui ne s'annule jamais $s_{\mathbf{P}^{2n-1}}$ de $\omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}\left(\sum_{k=1}^{2n} H_k\right)$ telle que la restriction $s_{\mathbf{P}^{2n-1}}^{(i)}$ de $s_{\mathbf{P}^{2n-1}}$ à $\mathbf{P}_{(i)}^{2n-1}$ soit donnée par

$$s_{\mathbf{P}^{2n-1}}^{(i)} = (-1)^i \frac{\mathrm{d}x_1^{(i)}}{x_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\mathrm{d}x_i^{(i)}}{x_1^{(i)}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}x_{2n}^{(i)}}{x_{2n}^{(i)}} \in \Gamma\left(\mathbf{P}_{(i)}^{2n-1}, \omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}\left(\sum_{k=1}^{2n} H_k\right)\right).$$

De la démonstration du Lemme 3.4.4 et en gardant les mêmes notations que dans cette démonstration, on obtient 2^n+n-1 composantes irréductibles pour $\Xi_0 \smallsetminus U$ et on pose $D(\xi_i)$ l'image dans Ξ_0 du sous-ensemble de Ω défini par $\xi_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $D(z_h)$ comme l'image dans Ξ_0 du sous-ensemble D_h de Ω pour $h \in [\![1, N]\!]$. Le lemme 3.4.6 garantit alors l'existence d'une section globale s_{Ξ_0} de $\omega_{\Xi_0}(E)$ pour

$$E = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) + \sum_{h=1}^N D(z_h) \tag{3.4.70}$$

telle que la restriction $s_{\Xi_0}^{(i)}$ de s_{Ξ_0} à l'ouvert $\Xi_0^{(i)}$ soit donnée par

$$s_{\Xi_0}^{(i)} = (-1)^i \frac{\mathrm{d}x_1^{(i)}}{x_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\mathrm{d}x_i^{(i)}}{x_1^{(i)}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}x_{2n}^{(i)}}{x_{2n}^{(i)}} \in \Gamma\left(\Xi_0^{(i)}, \omega_{\Xi_0}(E)\right).$$

Considérons alors

$$\omega_i = \frac{x_1 \cdots x_{2n}}{x_i^n F} s_{\mathbf{P}^{2n-1}} \in \Gamma\left(\mathbf{P}_{(i)}^{2n-1}, \omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}(W_n + nH_i)\right)$$

et

$$\varpi_i = \frac{x_1 \cdots x_{2n}}{x_i^n F} s_{\Xi_0} \in \Gamma\left(\Xi_0^{(i)}, \omega_{\Xi_0}(X_{0,n} + np_1^* H_i)\right).$$

On a alors sur les ouverts tels que $x_i \neq 0$ ($i \in [\![1, 2n]\!]$) :

$$\omega_i = \frac{(-1)^i}{F_i} \mathrm{d}x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n}^{(i)} \in \Gamma\left(\mathbf{P}_{(i)}^{2n-1}, \omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}(W_n)\right)$$

et

$$\varpi_i = \frac{(-1)^i}{F_i} \mathrm{d}x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n}^{(i)} \in \Gamma\left(\Xi_0^{(i)}, \omega_{\Xi_0}(X_{0,n})\right).$$

On utilise alors les résidus de Poincaré de ces formes. Pour $i : W_n \to \mathbf{P}^{2n-1}$, il existe un unique homomorphisme de $O_{\mathbf{P}^{2n-1}}$-modules $\mathrm{Res} : \omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}(W) \to i_* \omega_{W_n}$ qui envoie ω_i sur la section $\mathrm{Res}(\omega_i) \in \Gamma\left(\mathbf{P}_{(i)}^{2n-1}, i_* \omega_{W_n}\right) = \Gamma\left(W_{(i)}, \omega_{W_n}\right)$ définie, sur l'ouvert de $W_{(i)}$ défini par $\frac{\partial F_i}{\partial x_k^{(i)}} \neq 0$ pour $k \in [\![1, n]\!] \smallsetminus \{i\}$, par

$$\mathrm{Res}(\omega_i) = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+k}}{\partial F_i / \partial x_k^{(i)}} \mathrm{d}x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_k^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n}^{(i)} \text{ si } i < k \\ \frac{(-1)^{i+k-1}}{\partial F_i / \partial x_k^{(i)}} \mathrm{d}x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_k^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n}^{(i)} \text{ si } k < i. \end{cases} \tag{3.4.71}$$

De manière analogue pour $\iota : X_{0,n} \to \Xi_0$, en remarquant que $X_{0,n}^{(i)} \subseteq \Xi_O^{(i)}$ est défini par F_i sur l'ouvert de $\Xi_O^{(i)}$ sur lequel

$$\exists i \in [\![1, n]\!], \quad \text{tel que} \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} y_j \neq 0, \tag{3.4.72}$$

il vient que

$$\mathrm{Res}(\varpi_i) = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+k}}{\partial F_i / \partial x_k^{(i)}} \mathrm{d}x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_k^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n}^{(i)} \text{ si } i < k \\ \frac{(-1)^{i+k-1}}{\partial F_i / \partial x_k^{(i)}} \mathrm{d}x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_k^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n}^{(i)} \text{ si } k < i \end{cases} \tag{3.4.73}$$

sur l'ouvert de $X_{0,n}^{(i)}$ défini par les conditions (3.4.72). On dispose alors du lemme suivant, parfait analogue de [BBS14, Lemma 13].

Lemme 3.4.7. *(i) La section $\mathrm{Res}(\omega_i)$ s'étend de manière unique à une section globale qui ne s'annule jamais de $\omega_{W_n}(n(H_i \cap W_n))$.*

(ii) *La section $Res(\varpi_i)$ s'étend de manière unique à une section globale qui ne s'annule jamais de $\omega_{X_{0,n}}(nf_0^*(H_i \cap W_n))$.*

(iii) *La section $f_0^*(Res(\omega_i)) \in \Gamma(X_{0,n}, f_0^*\omega_{W_n}(n(H_i \cap W_n)))$ a pour image $Res(\varpi_i)$ par l'application naturelle de $f_0^*\omega_{W_n}(n(H_i \cap W_n))$ vers $\omega_{W_n}(n(H_i \cap W_n))$.*

Démonstration.– (i) et *(ii)* : On utilise la formule d'adjonction [GH, pp.146-147] pour obtenir deux isomorphismes $i^*\omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}(W_n) \to \omega_{W_n}$ et $\iota^*\omega_{\Xi_O}(X_{0,n}) \to \omega_{\Xi_0}$ adjoints des applications résidues de Poincaré. Ces applications induisent alors des isomorphismes $i^*\omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}(W_n + nH_i) \to \omega_{n(W_n \cap H_i)}$ et $\iota^*\omega_{\Xi_O}(X_{0,n} + np_1^*H_i) \to \omega_{nf_0^*(\Xi_0 \cap W_n)}$ qui envoient respectivement $i^*\omega_i$ sur $\mathrm{Res}(\omega_i)$ et $\iota^*\varpi_i$ sur $\mathrm{Res}(\varpi_i)$. Il suffit dès lors pour établir les points *(i)* et *(ii)* de vérifier que les sections ω_i et ϖ_i engendrent respectivement le $O_{\mathbf{P}^{2n-1}}$-module $\omega_{\mathbf{P}^{2n-1}}(W_n + nH_i)$ et le O_{Ξ_0}-module $\omega_{\Xi_O}(X_{0,n} + np_1^*H_i)$, ce qui découle du lemme 3.4.6. *(iii)* : Le point *(iii)* découle immédiatement des relations (3.4.71) et (3.4.73). □

On peut à présent définir, grâce à ce lemme 3.4.7, des sections globales qui ne s'annulent jamais $\tau_i = \mathrm{Res}(\omega_i)^{-1}$ et $\sigma_i = \mathrm{Res}(\varpi_i)^{-1}$ de $\omega_{W_n}^{-1}(-n(H_i \cap W_n))$ et $\omega_{X_{0,n}}^{-1}(-nf_0^*(H_i \cap W_n))$ respectivement. Le fait que $\omega_{W_n}^{-1}(-n(H_i \cap W_n)) = \omega_{W_n}^{-1}$ sur $W_n^{(i)}$ et $\omega_{X_{0,n}}^{-1}(-nf_0^*(H_i \cap W_n)) = \omega_{X_{0,n}}^{-1}$ sur $X_{0,n}^{(i)}$ entraîne alors le lemme suivant.

Lemme 3.4.8. *(i)* *La section $\tau_i \in \Gamma\left(W_n, \omega_{W_n}^{-1}\right)$ ne s'annule jamais sur $W_n^{(i)}$.*

(ii) *La section $\sigma_i \in \Gamma\left(X_{0,n}, \omega_{X_{0,n}}^{-1}\right)$ ne s'annule jamais sur $X_{0,n}^{(i)}$.*

(iii) *La section $f_0^*\tau_i$ a pour image σ_i par l'isomorphisme canonique de $f_0^*\omega_{W_n}^{-1}$ vers $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$.*

Dans la suite, on notera $|.|_v : \mathbf{Q}_v \to \mathbf{R}^+$ la valeur absolue standard v-adique pour une place v de $\mathbf{Q}$. Puisque τ_i ne s'annule jamais sur $W_n^{(i)}$, on obtient pour toute place v, une norme v-adique sur $\omega_{W_n}^{-1}$ en posant

$$||\tau(w_v)||_v = \min_j \left|\frac{\tau}{\tau_j}(w_v)\right|_v = \min_j |(\tau \mathrm{Res}(\omega_j))(w_v)|_v$$

pour une section locale τ de $\omega_{W_n}^{-1}$ définie en $w_v \in W_n(\mathbf{Q}_v)$ et où le minimum est pris sur tous les entiers $j \in [\![1, 2n]\!]$ tels que $\tau_j(w_v) \neq 0$ (voir [Pey95] et [Sal98]). De la même façon, on obtient une norme v-adique sur $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$ en posant

$$||\sigma(x_v)||_v = \min_j \left|\frac{\sigma}{\sigma_j}(x_v)\right|_v = \min_j |(\tau \mathrm{Res}(\varpi_j))(x_v)|_v$$

pour une section locale σ de $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$ définie en $x_v \in X_{0,n}(\mathbf{Q}_v)$ et où le minimum est pris sur tous les entiers $j \in [\![1, 2n]\!]$ tels que $\sigma_j(x_v) \neq 0$. On dispose alors du lemme suivant, analogue du [BBS14, lemme 15].

Lemme 3.4.9. *(i)* *Soit $w \in W_n(\mathbf{Q})$ et τ une section locale de $\omega_{W_n}^{-1}$ telle que $\tau(w) \neq 0$. Alors*

$$H(w) = \prod_v ||\tau(w)||_v^{-1}.$$

(ii) *Soit $x \in X_{0,n}(\mathbf{Q})$ et σ une section locale de $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$ telle que $\sigma(x) \neq 0$. Alors*

$$H(x) = \prod_v ||\sigma(x)||_v^{-1}.$$

Démonstration.– (i) : Puisque $\prod_v |\alpha|_v = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbf{Q}^*$, il suffit d'établir le résultat pour une seule section locale τ. Soit par conséquent $G \in \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_{2n}]$ une forme de degré n telle que $G(w) \neq 0$ et $\tau = (G/x_i^n)\,\tau_j$ pour un certain j tel que $x_j(w) \neq 0$. Il vient alors

$$||\tau(w)||_v^{-1} = \max_{1\leqslant j\leqslant 2n} \left|\frac{\tau_j}{\tau}(w)\right|_v = \max_{1\leqslant j\leqslant 2n} \left|\frac{x_j^n}{G}(w)\right|_v$$

qui fournit bien le résultat.
(ii) : On utilise ici l'isomorphisme canonique de $f_0^*\omega_{W_n}^{-1}$ vers $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$. On choisit σ comme étant l'image $f_0^*\tau$ pour une certaine section locale τ de $\omega_{W_n}^{-1}$ telle que $\tau(w) \neq 0$ pour $w = f(x)$. Du lemme 3.4.8, on tire l'égalité

$$\forall v, \quad ||\tau(w)||_v = ||\sigma(x)||_v$$

et on conclut alors par le point *(i)*. □

On est à présent en mesure d'appliquer la définition [Pey95, (2.2.1)] d'une mesure μ_v sur $X_{0,n}(\mathbf{Q}_v)$ associée à la norme v-adique sur $\omega_{X_{0,n}}^{-1}$ construite ci-dessus. Si $|\mathrm{Res}(\varpi_i)|_v$ désigne la densité v-adique sur $X_{0,n}^{(i)}(\mathbf{Q}_v)$ de la forme volume $\mathrm{Res}(\varpi_i)$ de $X_{0,n}^{(i)}(\mathbf{Q}_v)$, alors on obtient

$$\mu_v(N_v) = \int_{N_v} \frac{|\mathrm{Res}(\varpi_i)|_v}{\max_{1\leqslant j\leqslant 2n} |\sigma_j \mathrm{Res}(\varpi_i)|_v} = \int_{N_v} \frac{|\mathrm{Res}(\varpi_i)|_v}{\max_{1\leqslant j\leqslant 2n} |(x_j/x_i)^n|_v}$$

pour tout borélien N_v de $X_{0,n}^{(i)}(\mathbf{Q}_v)$. En écrivant $t_j = x_j^{2n} = x_j/x_{2n}$, par (3.4.73), il vient

$$\omega_{2n} = \frac{1}{F_{2n}} \mathrm{d}t_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{2n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(\omega_{2n}) = \frac{(-1)^{k-1}}{\partial F_{2n}/\partial t_k} \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}t_k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{2n-1}$$

pour tout $k \in [\![1, 2n-1]\!]$ et

$$F_{2n}(t_1, t_2, \ldots, t_{2n-1}) = t_1 t_{n+2} t_{n+3} \cdots t_{2n-1} + t_2 t_{n+1} t_{n+3} \cdots t_{2n-1} + \cdots + t_n t_{n+1} t_{n+2} \cdots t_{2n-1}.$$

En choisissant $k = n$, il vient alors

$$\mu_v(N_v) = \int_{N_v} \frac{\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-1} \mathrm{d}t_{n+1} \cdots \mathrm{d}t_{2n-1}}{|t_{n+1} \cdots t_{2n-1}|_v \max\left(|t_1|_v^n, \ldots, |t_{n-1}|_v^n, \left|\frac{t_1}{t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|_v^n, |t_{n+1}|_v^n, \ldots, |t_{2n-1}|_v^n\right)} \tag{3.4.74}$$

pour tout borélien N_v de $\bigcap_{n\leqslant i\leqslant 2n} X_{0,n}^{(i)}(\mathbf{Q}_v)$. Dans toute la suite, on supposera que la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_v$ est la mesure de Lebesgue si $\mathbf{Q}_v = \mathbf{R}$ et normalisée telle que

$$\int_{\mathbf{Z}_p} dx = 1$$

sinon.
On a, par définition

$$L_p\left(s, \mathrm{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right) = \det\left(1 - p^{-s}\mathrm{Fr}_p \mid \mathrm{Pic}(X_{\overline{\mathbb{F}_p}}) \otimes \mathbf{Q}\right)^{-1}$$

pour p un nombre premier. Puisque $\mathrm{Pic}(X_{\overline{\mathbb{F}_p}}) = \mathbf{Z}^{2^n-n}$ avec action de Galois triviale, on obtient

$$L\left(s, \mathrm{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right) = \prod_p L_p\left(s, \mathrm{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-2^n+n} = \zeta(s)^{2^n-n}$$

pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re(s) > 1$. Il s'ensuit que

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^{2^n-n} L\left(s, \mathrm{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right) = 1$$

et que

$$L_p\left(s, \mathrm{Pic}(\overline{X_{0,n}})\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n}.$$

D'après [Pey95] et puisque l'approximation faible vaut pour $X_{0,n}$, la mesure de Tamagawa ω_H sur $X_{0,n}(\mathbf{A_Q}) = X_{0,n}(\mathbf{R})\prod_p X_{0,n}(\mathbf{Q}_p)$ est donnée par

$$\omega_H(X_{0,n}) = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n} \mu_p(X_{0,n}(\mathbf{Q}_p)). \tag{3.4.75}$$

En effet, le théorème de Sard garantit que

$$\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R})) = \mu_\infty(N_\infty(\mathbf{R}))$$

pour $N_\infty(\mathbf{R}) = \bigcap_{n\leqslant i\leqslant 2n} X_{0,n}^{(i)}(\mathbf{R})$.
Reste donc à présent à transformer la densité p-adique $\mu_p(X_{0,n}(\mathbf{Q}_p))$. D'après le lemme 3.4.6, il existe une (2^n+n-1)-forme rationnelle s_Ω sur la variété torique $\Omega \subseteq \mathbf{A}^{2^n+n-1}$ définie par

$$s_\Omega = \frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\mathrm{d}\zeta_n}{\zeta_n}\wedge\bigwedge_{1\leqslant h\leqslant N}\frac{\mathrm{d}z_h}{z_h}.$$

Pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$, on pose $\varpi_i^\Omega = (x_1\cdots x_{2n}/x_i^n F)s_\Omega$ ainsi que

$$\varpi^\Omega = \frac{1}{\Phi}\mathrm{d}\zeta_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\zeta_n\wedge\bigwedge_{1\leqslant h\leqslant N}\mathrm{d}z_h$$

pour

$$\Phi\left(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,(z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i\left(\prod_{1\leqslant h\leqslant N} z_h^{1-\varepsilon_i(h)}\right).$$

De la relation

$$F = z_N^{n-1}\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ s(h)=n-1}} z_h^{n-2}\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ s(h)=n-2}} z_h^{n-3}\cdots\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant N\\ s(h)=2}} z_h\Phi,$$

il vient $\varpi_i^\Omega = \varpi^\Omega$ sur $\Omega_{(i)} = \varphi^{-1}\left(\Xi_0^{(i)}\right)$ pour $i \in [\![1,2n]\!]$ et où $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1} = y_1,\ldots,x_{2n} = y_n$ représentent désormais les coordonnées affines données par (3.4.63). Chaque $\varpi_i^\Omega \in \Gamma\left(\Omega_{(i)},\omega_\Omega(O)\right)$ a un résidu de Poincaré $\mathrm{Res}(\varpi_i^\Omega) \in \Gamma\left(O_{(i)},\omega_0\right)$ sur $O_{(i)} = \varphi^{-1}\left(X_{0,n}^{(i)}\right)$. On peut alors comme ci-dessus construire une mesure v-adique m_v sur $O(\mathbf{Q}_v)$ grâce à

$$m_v(M_v) = \int_{M_v}\frac{|\mathrm{Res}(\varpi_i^\Omega)|_v}{\max_{1\leqslant j\leqslant 2n}|(x_j/x_i)^n|_v}$$

pour tout borélien M_v de $O_{(i)}$. Les deux lemmes suivants, analogues de [BBS14, lemmes 16 et 17] permettent de faire le lien entre les deux mesures v-adiques μ_p et m_p pour un nombre premier p.

Lemme 3.4.10. *Soit $E^{\Omega} = \varphi^* E \in Div(\Omega)$ avec la notation (3.4.70). Alors il existe une unique section globale ne s'annulant jamais $s_{\Omega/\Xi_0} \in \Gamma\left(\Omega, \omega_{\Omega/\Xi_0}\right)$ telle que $s_\Omega = s_{\Omega/\Xi_0} \otimes \varphi^* s_{\Xi_0}$ à travers l'isomorphisme naturel $\omega_\Omega\left(E^\Omega\right) = \omega_{\Omega/\Xi_0} \otimes \varphi^*\omega_{\Xi_0}(E)$. De plus, si on considère l'inclusion $\iota_O : O \to \Omega$ et $s_{O/X_{0,n}} \in \Gamma\left(O, \omega_{O/X_{0,n}}\right)$ l'image $\iota^* s_{\Omega/\Xi_0} \in \Gamma\left(O, \iota^*\omega_{\Omega/\Xi_0}\right)$ de s_{Ω/Ξ_0} à travers l'isomorphisme fonctoriel entre $\iota^*\omega_{\Omega/\Xi_0}$ et $\omega_{O/X_{0,n}}$ et $s^{(i)}_{O/X_{0,n}}$ la restriction de $s_{O/X_{0,n}}$ à $O_{(i)}$, alors*

$$Res\left(\omega_i^\Omega\right) = s^{(i)}_{O/X_{0,n}} \otimes \varphi_0^* Res\left(\varpi_i\right)$$

pour $i \in [\![1, 2n]\!]$ sous l'isomorphisme canonique $\omega_O = \omega_{O/X_{0,n}} \otimes \varphi_0^*\omega_{X_{0,n}}$.

Démonstration.– L'isomorphisme entre $\omega_\Omega\left(E^\Omega\right)$ et $\omega_{\Omega/\Xi_0} \otimes \varphi^*\omega_{\Xi_0}(E)$ est induit par l'isomorphisme canonique entre ω_Ω et $\omega_{\Omega/\Xi_0} \otimes \varphi^*\omega_{\Xi_0}$. La première partie du lemme est alors immédiate du fait que s_Ω (resp. $\varphi^* s_{\Xi_0}$) sont des générateurs de $\omega_\Omega\left(E^\Omega\right)$ (resp. $\omega_{\Omega/\Xi_0} \otimes \varphi^*\omega_{\Xi_0}(E)$). La deuxième partie du lemme découle de la fonctorialité des résidus de Poincaré. Cette dernière donne lieu au diagramme commutatif de O_O-modules suivant

$$\begin{tikzcd}
\iota^*\omega_\Omega\left(E^\Omega\right) \arrow[r] \arrow[d] & \iota^*\left(\omega_{\Omega/\Xi_0}\right) \otimes \iota^*\varphi^*\omega_{\Xi_0}(E) \arrow[d] \\
\omega_O \arrow[r] & \omega_{O/X_{0,n}} \otimes \varphi_O^*\omega_{X_{0,n}}
\end{tikzcd}$$

où la première application verticale est donnée par l'adjoint de l'application résidue de Poincaré de $\iota_O : O \to \Omega$ et la seconde application verticale provient de l'isomorphisme entre $\iota^*\varphi^*\omega_{\Xi_0}(E)$ et $\varphi_O^*\omega_{X_{0,n}}$ induit par l'application adjointe de l'application résidue de Poincaré de $i : X_{0,n} \to \Xi_0$. □

Lemme 3.4.11. *(i) L'application $\varphi_{O,v} : O(\mathbf{Q}_v) \to X_{0,n}(\mathbf{Q}_v)$ induite par φ_O est une submersion de variétés v-adiques faisant de $O(\mathbf{Q}_v)$ un $X_{0,n}(\mathbf{Q}_v)$-torseur analytique pour $T(\mathbf{Q}_v)$.*

(ii) La forme volume $s_{O/X_{0,n}} \in \Gamma\left(O, \omega_{O/X_{0,n}}\right)$ définit une mesure v-adique sur les fibres de $\varphi_{O,v}$ donnant lieu à une application linéaire $\Lambda_v : C_c(O(\mathbf{Q}_v)) \to C_c(X_{0,n}(\mathbf{Q}_v))$ par intégration le long des fibres de $\varphi_{O,v}$.

(iii) Si $\beta_v \in C_c(O(\mathbf{Q}_v))$, alors

$$\int_{O(\mathbf{Q}_v)} \beta_v m_v = \int_{X_{0,n}(\mathbf{Q}_v)} \Lambda_v(\beta_v)\mu_v.$$

Démonstration.– Ces résultats découlent de [Sal98, pp.126-127 et Theorem 1.22]. □

On est alors en mesure de réinterpréter le facteur p-adique du nombre de Tamagawa

$$\omega_H(X_{0,n}(\mathbf{A}_\mathbf{Q}))$$

intervenant dans la constante de Peyre.

Lemme 3.4.12. *Soit $\underline{O}$ le schéma défini en section précédente. Alors pour tout nombre premier p, on a*

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n} \mu_p\left(X_{0,n}(\mathbf{Q}_p)\right).$$

Démonstration.– On plonge $\underline{O}(\mathbf{Z}_p)$ dans $\underline{O}(\mathbf{Q}_p) = O(\mathbf{Q}_p)$ et on considère $\chi_p : O(\mathbf{Q}_p) \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de $\underline{O}(\mathbf{Z}_p)$. Alors, $\chi_p \in C_c(O(\mathbf{Q}_p))$ et

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \int_{X_{0,n}(\mathbf{Q}_p)} \Lambda_p(\chi_p)\mu_p$$

d'après le lemme 3.4.11. Montrons alors que

$$\Lambda_p(\chi_p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n}$$

en tout point de $X_{0,n}(\mathbf{Q}_p) = \underline{X_{0,n}}(\mathbf{Z}_p)$. On peut obtenir comme dans le lemme 3.4.10 deux générateurs $\underline{T}$-équivariants $s_{\underline{\Omega}/\underline{\Xi_0}}$ et $s_{\underline{O}/\underline{X_{0,n}}}$ de $\omega_{\underline{\Omega}/\underline{\Xi_0}}$ et $\omega_{\underline{O}/\underline{X_{0,n}}}$ respectivement. Si P est un $\mathbf{Z}_p$-point de $\underline{X_{0,n}}$ et $\underline{O}_P \to P$ l'extension de $\underline{O} \to \underline{X_{0,n}}$, alors $s_{\underline{O}/\underline{X_{0,n}}}$ est le tiré en arrière d'une section $\underline{T}_{\mathbf{Z}_p}$-équivariante d'une section $s_{\underline{O}_P}$ sur $\omega_{\underline{O}_P/\mathbf{Z}_p}$. Puisque le torseur au-dessus de P est trivial (voir la section 4.2.5), on peut trouver des coordonnées affines $(t_1, \ldots, t_{2^n-n})$ pour le $\mathbf{Z}_p$-schéma affine $\underline{O}_P$ telles que

$$s_{\underline{O}_P} = \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}t_{2^n-n}}{t_{2^n-n}}.$$

Ainsi,

$$\Lambda_p(\chi_p) = \int_{\underline{O}_P(\mathbf{Z}_p)} \left|s_{\underline{O}_P}\right| = \prod_{i=1}^{2^n-n} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{\mathrm{d}t_i}{t_i} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-n},$$

ce qui achève la démonstration. □

Il ne reste alors plus qu'à calculer les quantités $m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right)$. Pour ce faire, on donne une seconde définition de m_p. Puisque $\omega^\Omega \in \Gamma\left(\Omega, \omega_\Omega(O)\right)$, sa forme résiduelle $\mathrm{Res}\left(\omega^\Omega\right) \in \Gamma\left(O, \omega_O\right)$. On considère alors à nouveau des coordonnées affines x_i pour $i \in [\![1, 2n]\!]$ données par (3.4.63) de sorte que ω^Ω se restreint à $x_i^n \mathrm{Res}\left(\omega_i^\Omega\right)$ sur $O_{(i)}$ et

$$m_p(M_p) = \int_{M_p} \frac{|\mathrm{Res}(\omega^\Omega)|_p}{\max_{1 \leqslant j \leqslant 2n} \left|x_j^n\right|_p}$$

pour tout borélien M_p de $O(\mathbf{Q}_p)$ et pour la densité p-adique $|\mathrm{Res}(\omega^\Omega)|_p$ de $\mathrm{Res}(\omega^\Omega)$. En notant

$$|\mathrm{Res}(\omega^\Omega)|_p = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}\Phi}$$

avec $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_n$ et

$$\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \prod_{1 \leqslant h \leqslant N} \mathrm{d}z_h,$$

il s'ensuit l'expression

$$m_p(M_p) = \int_{M_p} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\max_{1 \leqslant j \leqslant 2n} \left|x_j^n\right|_p \mathrm{d}\Phi}.$$

On a alors le lemme suivant qui permet de conclure quant à l'expression du facteur p-adique de la constante de Peyre.

Lemme 3.4.13. *Avec $\underline{C}_n$ la variété torique de Coxeter de $\mathfrak{S}_n$, on a*

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{\left|\underline{C}_n(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{n-1}}.$$

Démonstration.– Pour $P \in \underline{\Omega}(\mathbf{Z}_p)$, il existe $j \in [\![1,2n]\!]$ tel que $p \nmid x_j(P)$ puisque $\underline{\varphi}$ se restreint en un morphisme de $\underline{\Omega}_{\mathbb{F}_p}$ vers $\underline{\Xi}_{0\mathbb{F}_p} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbb{F}_p} \times \prod_{1\leqslant h\leqslant N}\mathbf{P}^{(h)}_{\mathbb{F}_p} \times \mathbf{P}^{(h)}_{\mathbb{F}_p}$ modulo p. Cela entraîne que

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 2n}\left|x_j^n\right|_p = 1$$

pour $P \in \underline{O}(\mathbf{Z}_p) \subseteq \underline{\Omega}(\mathbf{Z}_p)$ et que

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \int_{M_p}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}\Phi}.$$

Cette mesure coïncide alors avec la mesure p-adique définie en [Sal98, 2.9]. Comme $\underline{O}$ est lisse sur $\mathbf{Z}$, cela nous permet d'appliquer [Sal98, Corollary 2.15] pour conclure à l'égalité

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \frac{\left|\underline{O}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\dim(O)}}.$$

Pour déterminer $|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|$, on utilise le fait que le $\underline{X_{0,n}}_{\mathbb{F}_p}$-torseur $\underline{O}_{\mathbb{F}_p}$ sous $\underline{T}_{\mathbb{F}_p}$ est trivial si bien que

$$\left|\underline{O}(\mathbb{F}_p)\right| = \left|\underline{T}(\mathbb{F}_p)\right|\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|.$$

Les égalités

$$\left|\underline{T}(\mathbb{F}_p)\right| = (p-1)^{2^n-n}$$

et

$$\dim(O) = \dim(X_{0,n}) + \dim(T) = \dim(X_{0,n}) + \mathrm{rg}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\right)$$

fournissent alors

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))}\frac{\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\dim(X_{0,n})}}.$$

On utilise alors pour finir le fait que $X_{0,n}$ soit un $\mathbf{P}^{n-1}$-fibré sur la variété torique C_n pour aboutir à l'expression

$$\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right| = \left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|\left|\underline{\mathbf{P}}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p)\right| = \frac{p^n-1}{p-1}\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|.$$

Il s'ensuit

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = (p-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))+\dim(X_{0,n})-n}}.$$

Comme on a

$$\dim(X_{0,n}) - n = 2n-2-n = n-2 = \dim(C_n) - 1,$$

on aboutit bien au résultat annoncé

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{n-1}}.$$

□

Remarques.–

— En réalité, [Sal98, Corollary 2.15] fournit

$$m_p\left(\underline{O}\left(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\right)\right) = \frac{|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|}{p^{r\dim(O)}}.$$

— Blomer, Brüdern and Salberger montrent dans [BBS14] que le facteur $\alpha(X_{0,n})$ de la constante de Peyre peut s'interpréter comme l'analogue archimédien des facteurs de convergence p-adiques $|\underline{T}(\mathbb{F}_p)|/p^{\dim(T)}$. Par sommation d'Abel, on a

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X_{0,n}^{\circ}(\mathbf{Q},B)} \frac{1}{H\circ f_0(x)} &\sim \omega_H(X_{0,n}(\mathbf{A_Q}))\left(\frac{\alpha(X_{0,n})}{\mathrm{rgPic}(X_{0,n})}\right)\log(B)^{2^n-n}\\ &= \omega_H(X_{0,n}(\mathbf{A_Q}))\int_{\Delta(B)}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.4.76}$$

où $X_{0,n}^{\circ}(\mathbf{Q},B) = \{x \in X_{0,n}^{\circ} \ : \ H\circ f_0(x) \leqslant B\}$ et $\Delta(B)$ représente l'ensemble des formes linéaires Λ sur $\mathrm{Pic}(X_{0,n})\otimes\mathbf{R}$ telles que $\Lambda\left(\left[-K_{X_{0,n}}\right]\right) \leqslant \log(B)$ et $\Lambda \in C_{\mathrm{eff}}(X_{0,n})^{\vee}$. Soit $x \in X_{0,n}$ à présent un point dont les n coordonnées x_i sont égales. On peut alors identifier T avec la fibre du torseur $\varphi_O : O \to X_{0,n}$ au-dessus de x tel que l'élément neutre de T corresponde au point de $\mathbf{A}^{2^n+n-1}$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Soit $D(P) \subseteq T(\mathbf{R})$ le sous-ensemble défini par

$$\min\left(\min_{s(h)>1} z_h, \min_{s(h)=1}|z_h|\right) \geqslant 1$$

et tel qu'il existe un $i \in [\![1,2n]\!]$ tel que $|x_i|^n \leqslant B$. Cette dernière condition implique que pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$, $|x_i|^n \leqslant B$. On a alors, puisque $y_1 = \cdots = y_n = 1$ sur $T(\mathbf{R})$, que tous les z_h pour $s(h) = 1$ ont le même signe. On pose alors $D^+(B) \subseteq D(B)$ le sous-ensemble défini par les conditions

$$\forall h \in [\![1,N]\!], \quad \text{tel que} \quad s(h) = 1, \quad z_h > 0$$

et $\mathrm{d}t$ la mesure sur $T(\mathbf{R})$ du lemme 3.4.11 et on obtient

$$\int_{D(B)}\mathrm{d}t = 2\int_{D^+(B)}\mathrm{d}t.$$

De plus, d'après le Lemme 3.4.1, on a

$$\int_{D^+(B)}\mathrm{d}t = \int_{\Delta(B)}\mathrm{d}s$$

si bien que

$$\frac{\alpha(X_{0,n})}{\mathrm{rgPic}(X_{0,n})}\log(B)^{2^n-n} = \frac{1}{2}\int_{D(B)}\mathrm{d}t.$$

On donne alors une interprétation heuristique du facteur $\alpha(X_{0,n})\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))$ apparaissant dans la constante de Peyre. Soit $F(B)$ l'ensemble des

$$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}) = (x_1', \ldots, x_n', (z_h)_{1\leqslant h\leqslant N}) \in \mathbf{R}^{2^n+n-1}$$

tels que

$$\min\left(\min_{s(h)>1} z_h, \min_{s(h)=1}|z_h|\right) \geqslant 1, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i|^n \leqslant B$$

et vérifiant (3.4.64). Alors, le Lemme 3.4.5 ainsi que (3.4.76) fournissent la conjecture

$$\sum_{(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\in F(B)\cap\mathbf{Z}^{2^n+n-1}} \frac{1}{\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i|^n} \sim \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))\int_{D(B)} \mathrm{d}t.$$

En effet, pour justifier cette heuristique, on peut approcher la somme ci-dessus par

$$\int_{F(b)} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i|^n \mathrm{d}\Phi} = m_\infty(F(B)).$$

Le lemme 3.4.11 fournit alors

$$m_\infty(F(B)) \sim \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))\int_{D(B)} \mathrm{d}t \sim \frac{2\alpha(X_{0,n})}{\mathrm{rgPic}(X_{0,n})}\log(B)^{2^n-n}\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))$$

pourvu que la contribution à $m_\infty(F(B))$ des fibres de $\varphi_{O,\infty} : O(\mathbf{R}) \to X_{0,n}(\mathbf{R})$ soit la même que celle de la fibre au-dessus de x.

Le nombre de Tamagawa $\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right)$

Cette construction, de manière complètement analogue à la section 5 de [BBS14], permet alors de construire explicitement le nombre de Tamagawa

$$\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right) = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n}\mu_p(X_{0,n}(\mathbf{Q}_p))$$

et ainsi d'obtenir l'expression conjecturale complète de la constante de Peyre. On obtient notamment les deux lemmes suivants dont le premier découle immédiatement de (3.4.74) et de [BBS14, section 5].

Lemme 3.4.14. *La quantité $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{R}))$ est donnée par*

$$\int_{\mathbf{R}^{2n-2}} \frac{dt_1\cdots dt_{n-1}dt_{n+1}\cdots dt_{2n-1}}{|t_{n+1}\cdots t_{2n-1}|\max\left(|t_1|^n,\ldots,|t_{n-1}|^n,\left|\frac{t_1}{t_{n+1}}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n,|t_{n+1}|^n,\ldots,|t_{2n-1}|^n\right)}.$$

Lemme 3.4.15. *Avec $\underline{C}_n$ la variété torique de Coxeter de $\mathfrak{S}_n$, on a*

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n}\mu_p(X_{0,n}(\mathbf{Q}_p)) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)\frac{|\underline{C}_n(\mathbb{F}_p)|}{p^{n-1}}.$$

Démonstration.– La démonstration est inspirée de la section 5 de [BBS14] et de l'Annexe. On déduit de [BBS14, Lemma 19] l'égalité

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^n-n}\mu_p(X_{0,n}(\mathbf{Q}_p)) = \frac{|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|}{p^{\dim(O)}}.$$

Pour déterminer $|\underline{O}(\mathbb{F}_p)|$, on utilise le fait que le $\underline{X_{0,n}}_{\mathbb{F}_p}$-torseur $\underline{O}_{\mathbb{F}_p}$ sous $\underline{T}_{\mathbb{F}_p}$ est trivial si bien que

$$|\underline{O}(\mathbb{F}_p)| = |\underline{T}(\mathbb{F}_p)|\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|.$$

Les égalités

$$|\underline{T}(\mathbb{F}_p)| = (p-1)^{2^n-n}$$

et

$$\dim(O) = \dim(X_{0,n}) + \dim(T) = \dim(X_{0,n}) + \mathrm{rg}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\right)$$

fournissent alors

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))} \frac{\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\dim(X_{0,n})}}.$$

On utilise alors pour finir le fait que $X_{0,n}$ soit un $\mathbf{P}^{n-1}$-fibré sur la variété torique C_n pour aboutir à l'expression

$$\left|\underline{X_{0,n}}(\mathbb{F}_p)\right| = \left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right| \left|\underline{\mathbf{P}}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p)\right| = \frac{p^n - 1}{p - 1} \left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|.$$

Il s'ensuit

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = (p-1)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))-1} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) \frac{\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))+\dim(X_{0,n})-n}}.$$

Comme on a

$$\dim(X_{0,n}) - n = 2n - 2 - n = n - 2 = \dim(C_n) - 1,$$

on aboutit bien au résultat annoncé

$$m_p\left(\underline{O}(\mathbf{Z}_p)\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n - 1} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) \frac{\left|\underline{C_n}(\mathbb{F}_p)\right|}{p^{n-1}}.$$

□

3.4.2 Transformation de la constante obtenue par le Théorème 3.1.2

L'objet de cette partie est de réécrire la constante c_n fournie par le Théorème 3.1.2 afin de vérifier que son expression coïncide avec la forme conjecturée par Peyre et explicitée en section 4.2.

Mise sous forme de produit eulérien de la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$

Lorsque le $N-$uplet $\mathbf{z}$ est réduit, la variable z_N n'est sujette à aucune condition de coprimalité tandis que toutes les autres variables sont sujettes à au moins une condition de coprimalité. On note alors A l'ensemble des couples (k, ℓ) d'un $N-$uplet $\mathbf{z}$ réduit tels que $\mathrm{pgcd}(z_k, z_\ell) = 1$ ainsi que $S = \{1, \ldots, N-1\}$ de sorte que $G = (S, A)$ définisse un graphe pour lequel on peut appliquer [BBS14, theorem 5] afin d'écrire $F(\mathbf{1})$ défini en (3.3.30) sous la forme d'un produit eulérien. Cette étape est capitale dans l'optique de démontrer la conjecture de Peyre puisque cette dernière prédit que le nombre de Tamagawa intervenant dans la constante est de la forme

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n} P_n\left(\frac{1}{p}\right)$$

avec P_n un polynôme à coefficients entiers.

Théorème 3.4.3 ([BBS14]). *Pour tout $U \subset A$, on définit $\mathrm{ver}(U) \subset A$ comme étant l'ensemble des sommets qui sont adjacents à au moins une arête de U. On a alors*

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \sum_{k=0}^{2^n - 2} \frac{b_k}{p^k}$$

avec, pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 2$,

$$b_k = \sum_{\substack{U \subset A \\ \mathrm{ver}(U)=k}} (-1)^{\#U}.$$

De plus, on a $B_{0,n} = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -\#A = -2^{n-1}(2^n+1) + 3^n$ *et la relation*

$$\sum_{k=0}^{2^n-2} b_k = 0.$$

Démonstration– On renvoie au théorème 5 de la section 2 de [BBS14] pour une preuve de ce résultat valable pour n'importe quel graphe $G = (S, A)$. La quantité $\#A$ s'obtient grâce à des arguments élémentaires de combinatoire. □

Il n'apparaît pas évident *a priori* de déterminer explicitement les valeurs de b_k pour $k \geqslant 2$ pour des valeurs de n quelconques ni de montrer directement que le polynôme $\sum_{k=0}^{2^n-2} b_k X^k$ admet 1 comme racine de multiplicité au moins $2^n - n - 1$, comme cela est prévue par la conjecture de Peyre. On donne alors le lemme suivant qui permet d'expliciter un peu plus le produit eulérien définissant $F(\mathbf{1})$.

Lemme 3.4.16. *On a*

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-1} \left(1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{(k+1)^n - k^n}{p^k}\right).$$

Démonstration– Par définition de F dans le Lemme 3.3.7 et au vu de (3.3.31), on a

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n-1} G_p,$$

où, pour tout nombre premier p, on a posé

$$G_p = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_N) \in \mathbf{N}^N \\ \nu_i \nu_j = 0 \text{ avec } (i,j) \in E_n}} \frac{1}{p^{\nu_1 + \cdots + \nu_N}}.$$

En utilisant la bijection décrite en section 3.2 par le Lemme 3.2.1, on obtient, pour tout nombre premier p, l'égalité

$$G_p = \sum_{(k_1,\dots,k_n) \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{p^{\max_j k_j}}.$$

On s'inspire alors des calculs effectués en fin de section 4 de [Bre16]. On regroupe la somme en fonction de la valeur $k := \max_j k_j$. Posant $r_1 = \#\{j \in [\![1, n]\!] : k_j = k\}$ et $r_2 = \#\{j \in [\![1, n]\!] : 1 \leqslant k_j \leqslant k-1\}$, on aboutit à l'expression

$$G_p = 1 + \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ 1 \leqslant r_1 \leqslant n \\ 0 \leqslant r_2 \leqslant n - r_1}} \frac{\rho(k, r_1, r_2)}{p^k},$$

avec $\rho(k, r_1, r_2)$ le nombre de $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$ correspondants. Or, on a

$$\rho(k, r_1, r_2) = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}(k-1)^{r_2}$$

si bien qu'on obtient

$$G_p = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{(k+1)^n - k^n}{p^k}.$$

□

On dispose alors du lemme suivant qui montre que le rapport $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ est de la forme conjecturée par Peyre.

Lemme 3.4.17. *Il existe un polynôme P_n unitaire de degré $n-1$ tel que*

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n - 1} P_n\left(\frac{1}{p}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le polynôme est défini par la relation

$$P_n(X) = (1-X)^{n+1} \sum_{k \geqslant 0} (k+1)^n X^k. \tag{3.4.77}$$

Démonstration– Grâce à un changement d'indice, on déduit du Lemme 3.4.16 l'expression

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(k+1)^n}{p^k}.$$

Une récurrence fournit alors l'existence de P_n unitaire (palindromique) de degré $n-1$ tel que

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{(k+1)^n}{p^k} = \frac{P_n\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n+1}},$$

avec

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_n(X) = (1-X)^{n+1} \sum_{k \geqslant 0} (k+1)^n X^k.$$

Les polynômes $(P_n)_{n \geqslant 1}$ vérifient la relation de récurrence

$$P_{n+1}(X) = (1 + nX)P_n(X) + X(1-X)P_n'(X)$$

et $P_1(X) = 1$. Cela permet de conclure la preuve du lemme. □

Lien entre la quantité $F(\mathbf{1})/\zeta(n)$ et le nombre de Tamagawa associé à $X_{0,n}$

On a prouvé lors du Lemme 3.4.17 que

$$F(\mathbf{1}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n - 1} P_n\left(\frac{1}{p}\right),$$

où

$$P_n(X) = (1-X)^{n+1} \sum_{k \geqslant 0} (k+1)^n X^k$$

est un polynôme à coefficients entiers. D'après les remarques faisant suite au théorème 2 de Salberger présentes en Annexe et de manière plus rigoureuse d'après [Ste92, page 315] et le Lemme 3.4.15, on obtient que le facteur p-adique du nombre de Tamagawa est donné par

$$\mu_p(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2^n - n - 1} F\left(\mathfrak{S}_n, \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^n}\right),$$

où $F(\mathfrak{S}_n, t)$ est la fonction d'excédance de $\mathfrak{S}_n$ définie dans [Ste92]. D'après [Ste92, page 315], on a

$$F(\mathfrak{S}_n, X) = (1-X)^{n+1} \sum_{k \geqslant 0} (k+1)^n X^k$$

si bien qu'on en déduit que $P_n = F(\mathfrak{S}_n, .)$. Ainsi,

$$\frac{F(\mathbf{1})}{\zeta(n)} = \prod_p \mu_p(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})). \tag{3.4.78}$$

Pour conclure le traitement du nombre de Tamagawa

$$\omega_H\left(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}(X_{0,n})}\right) = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})) \prod_p \mu_p(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})),$$

il reste à calculer la densité archimédienne. En utilisant le Lemme 3.4.14, on obtient l'expression suivante de $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{A_Q}))$

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_{n+1}\cdots \mathrm{d}t_{2n-1}}{|t_{n+1}\cdots t_{2n-1}| \max\left(|t_1|^n, \ldots, |t_{2n-1}|^n, \left|\frac{t_1}{t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n, 1\right)}. \tag{3.4.79}$$

On démontre alors le résultat suivant.

Lemme 3.4.18. *On a $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})) = n^2(n-1)!2^{n-1}\tilde{\beta}$, où $\tilde{\beta}$ a été défini en (3.3.32).*

Démonstration.– On part de l'expression (3.4.79) et on notera $I_\infty = \mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{A_Q}))$ dans la suite de la démonstration. Il vient immédiatement l'égalité

$$I_\infty = 2^{n-1} \int_{\substack{\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^{n-1} \\ t_{n+1},\ldots,t_{2n-1}\geqslant 0}} \frac{\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_{n+1}\cdots \mathrm{d}t_{2n-1}}{t_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{2n-1} \max\left(|t_1|^n, \ldots, t_{2n-1}^n, \left|\frac{t_1}{t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n, 1\right)}.$$

On utilise alors l'identité

$$\forall s \geqslant 1, \qquad \frac{1}{s} = \int_{t \geqslant s} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

pour obtenir l'expression suivante de I_∞

$$2^{n-1} \int_{\substack{\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^{n-1} \\ t_{n+1},\ldots,t_{2n-1}\geqslant 0}} \int_{t \geqslant \max\left(|t_1|^n, \ldots, |t_{2n-1}|^n, \left|\frac{t_1}{t_{n+1}} + \cdots + \frac{t_{n-1}}{t_{2n-1}}\right|^n, 1\right)} \frac{\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_{n+1}\cdots \mathrm{d}t_{2n-1}\mathrm{d}t}{t_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{2n-1}t^2}.$$

Le changement de variables suivant

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{u_{2n}^n}, \\ t_i = \dfrac{u_i}{u_{2n}} \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, 2n-1]\!] \smallsetminus \{n\}, \end{cases}$$

de jacobien

$$\left|\det\begin{pmatrix} -\frac{n}{u_{2n}^{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{u_1}{u_{2n}^2} & \frac{1}{u_{2n}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{u_{2n}} \end{pmatrix}\right| = \frac{n}{u_{2n}^{3n-1}}$$

fournit alors

$$I_\infty = n2^{n-1}\int_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^n,\ u_{n+1},\dots,u_{2n-1},u_{2n}\geqslant 0 \\ 1\geqslant\max\left(|u_2|,\dots,u_{2n-1},u_{2n},u_{2n}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}u_{n+1}\cdots\mathrm{d}u_{2n-1}\mathrm{d}u_{2n}}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{2n-1}}.$$

Établissons à présent qu'on peut supposer que $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\cdots\leqslant u_{2n}$ dans l'intégrale ci-dessus quitte à la mutliplier par un facteur $n!$. Pour toute permutation σ de $[\![n+1,2n]\!]$, on notera

$$I_{\infty,\sigma} = \int_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^n,\ 0\leqslant u_{\sigma(n+1)}\leqslant\cdots\leqslant u_{\sigma(2n)} \\ 1\geqslant\max\left(|u_1|,\dots,u_{2n-1},u_{2n},u_{2n}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}u_{n+1}\cdots\mathrm{d}u_{2n-1}\mathrm{d}u_{2n}}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{2n-1}}.$$

Si $\sigma(2n)=2n$, il est facile de voir que le changement de variables

$$\begin{cases} v_i = u_{\sigma(n+i)-n} \quad \text{pour} \quad 1\leqslant i\leqslant n-1, \\ v_i = u_{\sigma(n+i)} \quad \text{pour} \quad 1\leqslant i\leqslant n-1 \\ v_{2n} = u_{2n} \end{cases} \tag{3.4.80}$$

est de jacobien

$$\left|\det\begin{pmatrix} P_{\tilde\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & P_{\tilde\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \varepsilon(\tilde\sigma)^2 = 1,$$

où $\tilde\sigma$ est la permutation de $[\![n+1,2n-1]\!]$ induite par σ, $P_{\tilde\sigma}$ est la matrice de permutation associée à $\tilde\sigma$ et $\varepsilon(\tilde\sigma)$ est la signature de la permutation $\tilde\sigma$. Ce changement de variables fournit alors la relation $I_{\infty,\sigma}=I_{\infty,\mathrm{Id}}$. Supposons à présent que $\sigma(2n)<2n$. Dans ce cas, on considère $m=\sigma(2n)-n\in[\![1,n-1]\!]$. On effectue alors le changement de variables :

$$\begin{cases} v_i = u_i \quad \text{pour} \quad i\in[\![1,2n-1]\!]\smallsetminus\{n,m\} \\ v_m = -u_{2n}\left(\dfrac{u_1}{u_{n+1}}+\dfrac{u_2}{u_{n+2}}+\cdots+\dfrac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right) \end{cases}$$

de jacobien $\frac{u_m}{u_{2n}}$. Il s'ensuit alors que $I_{\infty,\sigma}$ est égale à

$$\int_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^n,\ 0\leqslant v_{\sigma(n+1)}\leqslant\cdots\leqslant v_{\sigma(2n)} \\ 1\geqslant\max\left(|v_1|,\dots,v_{2n},v_{n+m}\left|\frac{v_1}{v_{n+1}}+\cdots+\frac{v_{m-1}}{v_{n+m-1}}+\frac{v_m}{v_{2n}}+\frac{v_{m+1}}{v_{n+m+1}}+\cdots+\frac{v_{n-1}}{v_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_{n-1}\mathrm{d}v_{n+1}\cdots\mathrm{d}v_{2n-1}\mathrm{d}v_{2n}}{v_{n+1}\cdots v_{m-1}v_{m+1}\cdots v_{2n}}$$

car

$$|u_m| = u_{n+m}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{u_{m-1}}{u_{n+m-1}}+\frac{v_m}{u_{2n}}+\frac{u_{m+1}}{u_{n+m+1}}+\cdots+\frac{v_{n-1}}{v_{2n-1}}\right|.$$

Par choix de m, on se retrouve alors à nouveau dans un cas où

$$v_{n+m} = \max\{v_{n+i}\ :\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

et un changement de variables similaire à (3.4.80) permet d'obtenir l'égalité $I_{\infty,\sigma} = I_{\infty,\mathrm{Id}}$ également dans ce cas et ainsi de conclure que pour toute permutation σ de $[\![n+1, 2n]\!]$, on a $I_{\infty,\sigma} = I_{\infty,\mathrm{Id}}$. Par conséquent, il vient

$$I_\infty = n2^{n-1}n! \int_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^n,\ 0\leqslant u_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant u_{2n} \\ 1\geqslant\max\left(|u_1|,\ldots,u_{2n-1},u_{2n}\left|\frac{u_1}{u_{n+1}}+\cdots+\frac{u_{n-1}}{u_{2n-1}}\right|\right)}} \frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}u_{n+1}\cdots\mathrm{d}u_{2n-1}\mathrm{d}u_{2n}}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{2n-1}}. \tag{3.4.81}$$

On effectue alors le dernier changement de variables suivant, à $(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_{2n})$ fixés,

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{u_{2n}}{u_{n+1}} \\ v_i = \dfrac{u_{n+i-1}}{u_{n+i}} \quad \text{pour} \quad i \in [\![2, n-1]\!] \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_{2n}}{v_1} \\ u_{n+i} = \dfrac{u_{2n}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i} v_k} \quad \text{pour} \quad i \in [\![2, n-1]\!] \end{cases}$$

de jacobien

$$\frac{u_{2n}^{n-1}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} v_k^{n-k+1}}$$

puisque la matrice jacobienne est une matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux

$$-\frac{u_{2n}}{v_i^2 \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1} v_k}$$

pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Par conséquent, commme

$$\frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{2n-1}} = \frac{u_{2n}^{n-1}}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} v_k^{n-k}},$$

il s'ensuit que l'intégrale apparaissant dans (3.4.81) est égale à

$$\int_{\substack{0\leqslant v_1,\ldots,v_{n-1}\leqslant 1 \\ 1\geqslant\max(|u_1|,\ldots,|u_{n-1}|,|u_1v_1+\cdots+u_1v_1\cdots v_{n-1}|)}} \int_{0\leqslant u_{2n}\leqslant v_1v_2\cdots v_{n-1}} \frac{\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\mathrm{d}v_1\cdots\mathrm{d}v_{n-1}\mathrm{d}u_{2n}}{v_1v_2\cdots v_{n-1}} = \tilde{\beta},$$

où la dernière égalité est obtenue en intégrant par rapport à u_{2n}. Cela permet de conclure à l'égalité $\mu_\infty(X_{0,n}(\mathbf{A_Q})) = n!2^{n-1}n\tilde{\beta}$ et achève la démonstration du lemme. □

3.4.3 Le dénouement

Les Lemmes 3.4.18, 3.4.2, la relation (3.4.78) ainsi que le Théorème 3.1.2 impliquent alors que la constante $c_n = c_{\mathrm{Peyre}}$ est en accord avec la prédiction de Peyre et cela achève la démonstration du principe de Manin et de la conjecture de Peyre pour les hypersurfaces projectives W_n.

Annexe

A

A crepant resolution for the hypersurfaces W_n

Résumé. On reproduit ici sans modification un résultat non publié dû à Per Salberger qu'il a eu la gentillesse de me communiquer et qui est essentiel à la vérification de la conjecture de Peyre effectuée au chapitre 3. Il s'agit de la construction d'une résolution crépante des hypersurfaces W_n définies en (3.1.1).

In a previous paper with Blomer and Brüdern [BBS14], we constructed a partial resolution $f_n : X_n \to W_n$ of the projective hypersurface $W_n \subseteq \mathbf{P}^{2n-1}$ ($n \geqslant 1$) with homogeneous coordinates

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

defined by the equation

$$x_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n + x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots = x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0.$$

The variety $X_n \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ is the triprojective variety with trihomogeneous coordinates $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; Y_1, \ldots, Y_n; Z_1, \ldots, Z_n)$ defined by the following equations

$$\begin{cases} x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n = 0, & \text{(A.0.1)} \\ y_i Y_j - y_j Y_i = 0 \quad \text{for} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, & \text{(A.0.2)} \\ Y_1 Z_1 = \cdots = Y_n Z_n. & \text{(A.0.3)} \end{cases}$$

In [BBS14], we proved that the projection $\mathrm{pr}_1 : \mathbf{P}^{2n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^{2n-1}$ restricts to a birational projective morphism $f_n : X_n \to W_n$ which is *crepant*. We have thus $f_n^* \omega_{W_n} \cong \omega_{X_n}$.

We also showed for $n \geqslant 1$ in [BBS14] that the restriction of $\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_3 : \mathbf{P}^{2n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ to X_n gives rise to a morphism $\lambda_n : X_n \to B_n$ such that X_n is a $\mathbf{P}^{n-1}$-bundle over the biprojective variety $B_n \subseteq \mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ with bihomogeneous coordinates $(Y_1, \ldots, Y_n; Z_1, \ldots, Z_n)$ defined by the equations $(A.0.3)$. Note that for $n = 1$, there is no equation and $B_1 = \mathbf{P}^0 \times \mathbf{P}^0$ is a point.

Hence, X_n is non-singular for $n \leqslant 3$ as B_n is non-singular for $n \leqslant 3$. We have thus a crepant desingularisation $f_n : X_n \to W_n$ for $n \leqslant 3$. But for $n > 3$, both B_n and X_n are singular. The aim of this note is to construct a crepant resolution $p_{0,n} : B_{0,n} \to B_n$ for all $n \geqslant 1$. This will give a crepant desingularisation $p_{X_n} : X_{0,n} = B_{0,n} \times_{B_n} X_n \to X_n$ by pulling back $\lambda_n : X_n \to B_n$ along $p_{0,n}$ and hence a crepant resolution $p_{X_n} \circ f_n : X_{0,n} \to W_n$ for all $n \geqslant 1$.

For non-empty subsets $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, we write $\mathbf{P}^I \times \mathbf{P}^I$ for the biprojective space $\mathbf{P}^{k-1} \times \mathbf{P}^{k-1}$ with bihomogeneous coordinates

$$\left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) = \left(Y^I_{i_1}, \ldots, Y^I_{i_k}; Z^I_{i_1}, \ldots, Z^I_{i_k}\right)$$

and $B^I \subseteq \mathbf{P}^I \times \mathbf{P}^I$ for the closed subvariety defined by

$$Y^I_{i_1} Z^I_{i_1} = \cdots = Y^I_{i_k} Z^I_{i_k}. \tag{A.0.4}$$

In particular, $B^I = B_n$ for $I = [n] := \{1, \ldots, n\}$. We will never allow $I = \varnothing$ in this note. For products $\prod_{I \subseteq [n]} V^I$ of varieties indexed by $I \subseteq [n]$, it will thus be understood that $I \neq \varnothing$.

Now let $B_{0,n}$ be the closed subvariety of $\prod_{I \subseteq [n]} B^I$ defined by the equations

$$\begin{cases} Y^I_k Y^J_\ell = Y^I_\ell Y^J_k & \text{for} \quad k, \ell \in J \subsetneq I \subseteq [n] & \text{(A.0.5)} \\ Z^I_k Z^J_\ell = Z^I_\ell Z^J_k & \text{for} \quad k, \ell \in J \subsetneq I \subseteq [n] & \text{(A.0.6)} \end{cases}$$

There is an obvious morphism $p_{0,n} : B_{0,n} \to B_n$ which sends $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right)$ to $\left(\mathbf{Y}^{[n]}; \mathbf{Z}^{[n]}\right)$.

We shall also consider the Coxeter toric variety $C_n \subseteq \prod_{I \subseteq [n]} \mathbf{P}^I$ of $\mathfrak{S}_n$ with multihomogeneous coordinates $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right)$ defined by the equations $(A.0.5)$. It follows from a result of De Concini and Procesi (see [CP95, Theorem 4.2] and [Hen10, Prop. 2.9]) that C_n is a non-singular projective irreducible toric variety of dimension $n - 1$.

Proposition A.0.6. *Let $B^*_n \subsetneq B_n$ be the open subset where we do not have $Y_k = Z_k = 0$ for any $k \in [n]$ and $B^*_{0,n} = p^{-1}_{0,n}(B^*_n)$. Then*

(a) The morphism $pr_1 : B_{0,n} \to C_n$, which sends $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right)$ to $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right)$ is an isomorphism.

(b) $B_{0,n}$ is a non-singular projective irreducible toric variety.

(c) $B_{0,n} \smallsetminus B^*_{0,n}$ is of codimension at least two in $B_{0,n}$.

(d) $p_{0,n}$ is surjective and maps $B^*_{0,n}$ isomorphically onto B^*_n.

Proof.– (a) The morphism $\mathrm{pr}_1 : B_{0,n} \to C_n$ is dominant as any $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right) \in C_n$ with $Y^I_k \neq 0$ for all $I \subseteq [n]$ and $k \in I$ is the image of $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$ with $Z^I_k = 1/Y^I_k$ for all $I \subseteq [n]$ and $k \in I$. As C_n is integral, it is thus enough to show that pr_1 is a closed immersion and since pr_1 is proper and finitely presented that pr_1 is injective (see [Gro67, prop 8.11.5]). That is, we have to show that $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Z}^I\right) \in \prod_{I \subseteq [n]} \mathbf{P}^I$ is uniquely determined by $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I\right) \in \prod_{I \subseteq [n]} \mathbf{P}^I$ for $\prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right) \in B_{0,n}$.

To show this, we use induction with respect to n. If $n = 1$, then pr_1 is just the projection of $\mathbf{P}^0 \times \mathbf{P}^0$ onto $\mathbf{P}^0$ and the assertion is trivial. So suppose $n > 1$ and that

$\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\in B_{0,n}$. Then $\mathbf{Z}^I\in\mathbf{P}^I$ is uniquely determined by $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I\right)\in\prod_{I\subseteq[n]}\mathbf{P}^I$ for any $I\neq[n]$ by the induction hypothesis. Also, if $Y_i^{[n]}=0$ for some $i\in[n]$, then $Z_j^{[n]}=0$ for some $j\in[n]$. If, say $Z_n^{[n]}=0$, then $\left(\mathbf{Z}^{[n]}\right)=\left(Z_1^{[n-1]},\dots,Z_{n-1}^{[n-1]},0\right)$ in $\mathbf{P}^{n-1}$ by (A.0.6). Finally, if $Y_i^{[n]}\neq 0$ for all $i\in[n]$, then $\left(\mathbf{Z}^{[n]}\right)=\left(1/Y_1^{[n]},\dots,1/Y_n^{[n]}\right)\in\mathbf{P}^{[n]}$. Hence $\left(\mathbf{Z}^{[n]}\right)$ is uniquely determined by $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I\right)$ also for points on $B_{0,n}$.

(b) This follows from *(a)* and the above result for the Coxeter variety C_n due to De Concini and Procesi [CP95].

(c) It suffices to show that the closed subset $F_k\subseteq B_{0,n}$ defined by the equations $Y_k^{[n]}=Z_k^{[n]}=0$ is of codimension at least 2 in $B_{0,n}$ for all $k\in[n]$. But for such points in $B_{0,n}$, we see from (A.0.5) and (A.0.6), that $Y_k^I=Z_k^I=0$ for all $I\subseteq[n]$ where $k\in I$ and $\#I\geqslant 2$. The projection from F_k to $\prod_{I\subseteq[n]\smallsetminus\{k\}}B^I$ is thus a closed immersion and, by *(a)*, isomorphic to a proper variety of the $(n-2)-$dimensional Coxeter subvariety of $\prod_{I\subseteq[n]\smallsetminus\{k\}}\mathbf{P}^I$ defined by (A.0.5) and (A.0.6) for $J\subsetneq I\subseteq[n]\smallsetminus\{k\}$. This proves that $\dim(F_k)\leqslant n-3$.

(d) It is clear that the open subset of $B_{0,n}$ with $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]}\neq 0$ is mapped isomorphically onto the open subset of B_n with $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]}\neq 0$ as $\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\in\mathbf{P}^I\times\mathbf{P}^I$ is the projection of $\left(\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right)\in\mathbf{P}^{[n]}\times\mathbf{P}^{[n]}$ for any $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\in B_{0,n}$ with $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]}=\cdots=Y_n^{[n]}Z_n^{[n]}\neq 0$. Hence $p_{0,n}\left(B_{0,n}^*\right)$ is dense in B_n^*. It is thus just as in *(a)* enough to show that the map from $B_{0,n}^*$ to B_n^* is injective. As we have already seen that $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\in B_{0,n}$ is uniquely determined by $\left(\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right)\in\mathbf{P}^{[n]}\times\mathbf{P}^{[n]}$ if $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]}\neq 0$, suppose instead that $Y_1^{[n]}Z_1^{[n]}=0$. We may then, if $\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\in B_{0,n}^*$, find a partition $[n]=J\cup K$ such that $Y_j^{[n]}=0$ if, and only if, $j\in J$ and $Z_k^{[n]}=0$ if, and only if, $k\in K$. It now follows from (A.0.5) and (A.0.6) that $\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\in\mathbf{P}^I\times\mathbf{P}^I$ is uniquely determined by $\left(\mathbf{Y}^{[n]};\mathbf{Z}^{[n]}\right)$. If I is not contained in J, then $\mathbf{Y}^I\in\mathbf{P}^I$ is just the projection of $\mathbf{Y}^{[n]}$ and if $I\subseteq J$, then $\mathbf{Y}^I\in\mathbf{P}^I$ is represented by a tuple obtained by inverting the I-coordinates of $\mathbf{Z}^{[n]}$. Similarly, if I is not contained in K, then $\mathbf{Z}^I\in\mathbf{P}^I$ is just the projection of $\mathbf{Y}^{[n]}$ and if $I\subseteq K$, then $\mathbf{Z}^I\in\mathbf{P}^I$ is given by a tuple obtained by inverting the I-coordinates of $\mathbf{Y}^{[n]}$. This completes the proof. □

We now pull back the $\mathbf{P}^{n-1}$-bundle $\lambda_n:X_n\to B_n$ along $p_{0,n}:B_{0,n}\to B_n$. This gives us a $\mathbf{P}^{n-1}$-bundle $\lambda_{0,n}:B_{0,n}\times_{B_n}X_n\to B_{0,n}$. One can also describe $X_{0,n}$ more directly. It is the closed subvariety $X_{0,n}\subseteq\mathbf{P}^{2n-1}\times\prod_{I\subseteq[n]}\mathbf{P}^I\times\mathbf{P}^I$ with multihomogeneous coordinates

$$\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n;\prod_{I\subseteq[n]}\left(\mathbf{Y}^I;\mathbf{Z}^I\right)\right)$$

defined by (A.0.4), (A.0.5), (A.0.6) and (A.0.7) and (A.0.8) below

$$\begin{cases} x_1Z_1^{[n]}+\cdots+x_nZ_n^{[n]}=0, & \text{(A.0.7)}\\ y_iY_j^{[n]}-y_jY_i^{[n]}=0 \quad \text{for} \quad 1\leqslant i<j\leqslant n. & \text{(A.0.8)}\end{cases}$$

Théorème A.0.4. *The projection $p_{X_n} : X_{0,n} = B_{0,n} \times_{B_n} X_n \to X_n$ which sends*

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right)\right) \longmapsto \left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \mathbf{Y}^{[n]}; \mathbf{Z}^{[n]}\right)$$

is a crepant desingularisation of X_n.

Proof.– The variety $X_{0,n}$ is non-singular as it is a $\mathbf{P}^{n-1}$-bundle over a non-singular variety $B_{0,n}$. It is also clear from the Proposition 1 that the open subset $X_{0,n}^* = \lambda_{0,n}^{-1}\left(B_{0,n}^*\right) \subseteq X_{0,n}$ is mapped isomorphically onto the open subset $X_n^* = \lambda_n^{-1}\left(B_n^*\right) \subseteq X_n$. Therefore, the restrictions of $\omega_{X_{0,n}}$ and $p_{X_n}^* \omega_{X_n}$ to $X_{0,n}^*$ are isomorphic. By the Proposition 1, we have also that $X_{0,n} \smallsetminus X_{0,n}^*$ is of codimension at least two in $X_{0,n}$ and hence the restriction from $\mathrm{Pic}(X_{0,n})$ to $\mathrm{Pic}\left(X_{0,n}^*\right)$ is injective (see proposition 6.5b and corollary II.6.16 in [Har08]). Hence $\omega_{X_{0,n}}$ and $p_{X_n}^* \omega_{X_n}$ are canonically isomorphic invertible sheaves on $X_{0,n}$. □

Remark.– If $n \leqslant 3$, then p_{X_n} is an isomorphism as $p_{0,n}$ is an isomorphism for such n.

We can now derive the main theorem of this note.

Théorème A.0.5. *Let $n \geqslant 1$ and $W_n \subseteq \mathbf{P}^{2n-1}$ be the projective hypersurface defined by the following equation*

$$x_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n + x_2 y_1 y_3 \cdots y_n + \cdots = x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} = 0.$$

Let $X_{0,n} \subseteq \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{I \subseteq [n]} \mathbf{P}^I \times \mathbf{P}^I$ be the closed subvariety with multihomogeneous coordinates

$$\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; \prod_{I \subseteq [n]} \left(\mathbf{Y}^I; \mathbf{Z}^I\right)\right)$$

defined by the equations (A.0.4), (A.0.5), (A.0.6), (A.0.7) and (A.0.8). Then the projection $pr_1 : \mathbf{P}^{2n-1} \times \prod_{I \subseteq [n]} \mathbf{P}^I \times \mathbf{P}^I \to \mathbf{P}^{2n-1}$ restricts to a morphism $f_{0,n} : X_{0,n} \to W_n$ which is a crepant resolution of singularities of W_n. Moreover, $X_{0,n}$ is a $\mathbf{P}^{n-1}$-bundle over a variety $B_{0,n}$ isomorphic to the Coxeter toric variety C_n of $\mathfrak{S}_n$.

Proof.– The map $f_{0,n}$ is the composition of $p_{X_n} : X_{0,n} \to X_n$ and $f_n : X_n \to W_n$. We proved in [BBS14] that f_n is birational and crepant. We thus obtain the desired result by combining the results on f_n and X_n in [BBS14] with the results on p_{X_n} and $X_{0,n}$ from the Theorem 1. □

Remarks.– By (a slight generalisation of) Manin's conjecture, we expect as a consequence of the Theorem 2 that we have $\mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(X_{0,n})\right) - 1 = \mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(B_{0,n})\right) = \mathrm{rk}\left(\mathrm{Pic}(C_n)\right)$ log factors in the asymptotic formula for the counting function on the open subset of W_n with $y_1 y_2 \cdots y_{n-1} y_n \neq 0$.

We also expect that the constant in the main term of this asymptotic formula is given by Peyre's Tamagawa constant for $X_{0,n}$, which is interpreted as an adelic volume of the universal torsor $\boldsymbol{T}_0$ over $X_{0,n}$ in [Sal98]. The p-adic factor of Peyre's Tamagawa constant should thus be

$$\frac{\#\boldsymbol{T}_0\left(\mathbb{F}_p\right)}{\dim\left(\boldsymbol{T}_0\right)} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X_{0,n}))} \frac{\#X_{0,n}\left(\mathbb{F}_p\right)}{p^{\dim(X_{0,n})}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(C_n))} \frac{\#C_n\left(\mathbb{F}_p\right)}{p^{\dim(C_n)}} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right).$$

Here clearly, $\dim(C_n) = n-1$. The invariants $\mathrm{Pic}(C_n)$ and $\#C_n(\mathbb{F}_p)$ for the Coxeter toric variety C_n are also known and may be found in [Ste92]. We have

$$\mathrm{rk}\,(\mathrm{Pic}(C_n)) = 2^n - n - 1$$

as $\mathrm{rk}\,(\mathrm{Pic}(C_n))$ is equal to the second Betti number of C_n and

$$\#C_n(\mathbb{F}_p) = F(\mathfrak{S}_n, p)$$

where $F(\mathfrak{S}_n, t)$ is the symmetric polynomial of degree $n-1$ in t given by the associated excedance function [Ste92, pages 311 and 316]. Recall here that the excedance number of any $w \in \mathfrak{S}_n$ is the quantity $e(w) = \#\{i \in [n] \,:\, w(i) > i\}$ (see [Ste92, page 309]).

Examples.– In $\mathfrak{S}_3$, we have $e(\mathrm{Id}) = 0$, $e((12)) = 1$, $e((13)) = 1$, $e((23)) = 1$, $e((132)) = 1$ and $e((123)) = 2$. The generating excedance function $F(\mathfrak{S}_3, t)$ is thus $1\times t^0 + 4\times t^1 + 1\times t^2 = 1 + 4t + t^2$ and $\#C_3(\mathbb{F}_p) = 1 + 4p + p^2$.
For $n = 3$, we thus expect $\mathrm{rk}\,(\mathrm{Pic}(C_3)) = 2^3 - 4 = 4$ log factors and the $p-$adic factor

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^4 \left(1 + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^3}\right)$$

in the main term.

In $\mathfrak{S}_4$, we have :

- $e(\mathrm{Id}) = 0$;
- For σ one of the six transpositions or $\sigma = (132)$, (142), (143) or (1432), one has $e(\sigma) = 1$;
- For σ a product of two disjoint transpositions, a three cycle distinct from (132), (142) and (143) and a four cycle distinct from (1234), one hase $e(\sigma) = 2$;
- $e((1234)) = 3$.

So $F(\mathfrak{S}_4, t) = 1 + 11t + 11t^2 + t^3$ and $\#C_4(\mathbb{F}_p) = 1 + 11p + 11p^2 + p^3$.
For $n = 4$, we thus expect $\mathrm{rk}\,(\mathrm{Pic}(C_4)) = 2^4 - 5 = 11$ log factors and the $p-$adic factor

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{11} \left(1 + \frac{11}{p} + \frac{11}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)\left(1 - \frac{1}{p^4}\right)$$

in the main term.

Similarly, for $n = 5$, we expect $\mathrm{rk}\,(\mathrm{Pic}(C_5)) = 2^5 - 6 = 26$ log factors and the $p-$adic factor

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{26} \left(1 + \frac{26}{p} + \frac{66}{p^2} + \frac{26}{p^3} = \frac{1}{p^4}\right)\left(1 - \frac{1}{p^5}\right)$$

in the main term.

Remarks.– The odd Betti numbers vanish for any smooth projective toric variety. We have thus by the Weil conjectures (see [Har08, Appendix]) that

$$\#C_n(\mathbb{F}_p) = \beta_{2(n-1)}p^{n-1} + \beta_{2(n-2)}p^{n-2} + \cdots + \beta_2 p + \beta_0$$

and that

$$F(\mathfrak{S}_n, t) = \beta_{2(n-1)}t^{n-1} + \beta_{2(n-2)}t^{n-2} + \cdots + \beta_2 t + \beta_0$$

where $\beta_i = \dim\left(H^i\left(C_n(\mathbf{C})_{\mathrm{an}}, \mathbf{Q}\right)\right)$ is the i-th Betti number of C_n. In [Ste92], Stembridge gives thus a combinatorial interpretation of the Betti numbers of Coxeter toric varieties in terms of the excedance function of $\mathfrak{S}_n$.
For more background on the cohomology of toric varieties, see also [Ful93, section 4.5].

Bibliographie

[ADHL] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen et A. Laface : *Cox rings, volume 144 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, (2015).* ↑ 13, 97, 105, 110

[BB07a] R. de la Bretèche et T. Browning : Sums of arithmetic functions over values of binary forms. *Acta Arith.* **125**, 291–304, (2007). ↑ 36, 51, 52, 53, 54

[BB07b] R. de la Bretèche et T. Browning : On Manin's conjecture for singular del Pezzo surfaces of degree four, I. *Michigan Mathematical Journal,* **55**, 51–80, (2007). ↑ 15, 34

[BB07c] R. de la Bretèche et T. Browning : On Manin's conjecture for singular del Pezzo surfaces of degree four, II. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **143**, 579–605, (2007). ↑ 12, 15, 96, 124

[BB08] R. de la Bretèche et T. Browning : Binary linear forms as sums of two squares. *Compositio Mathematica,* **144 (6)**, 1375-1402, (2008). ↑ 12, 18, 19, 48, 50, 51, 59, 96

[BB10] R. de la Bretèche et T. Browning : Le problème des diviseurs pour des formes binaires de degré 4. *J. reine angew. Math.,* **646**, 1–44, (2010). ↑ 18, 19, 35, 38, 39, 40, 41, 53, 54, 58, 59, 64, 69, 70

[BB11] R. de la Bretèche et T. Browning : Manin's conjecture for quartic del Pezzo surfaces with a conic fibration. *Duke Mathematical Journal,* **160**, 1-69, (2011). ↑ 14

[BB12] R. de la Bretèche et T. Browning : Binary forms as sums of two squares and Châtelet surfaces. *Israel Journal of Math.* **191**, (2012). ↑ 15, 18, 21, 35, 41, 42, 55, 70, 71, 78, 85, 94, 98, 99, 116, 133, 134

[BB16] V. Blomer et J. Brüdern : The density of rational points on a certain threefold. *Contribution to analytic and algebraic number theory, Springer Proceedings in Mathematics 9 (eds V. Blomer and P. Mihailescu)*, 1-15, (2016). ↑ 24, 142

[BBP12] R. de la Bretèche, T. Browning et E. Peyre : On Manin's conjecture for a family of Châtelet surfaces. *Annals of Mathematics,* **175**, 1-47.Une version plus longue est aussi disponible à l'adresse http://arxiv.org/abs/1002.0255, (2012). ↑ 13, 15, 16, 18, 21, 34, 35, 38, 62, 64, 74, 75, 76, 77, 78, 85, 93, 94, 96, 98, 99, 101, 102, 108, 109, 110, 115, 116, 117, 118, 119, 125, 133, 134

[BBS14] V. BLOMER, J. BRÜDERN et P. SALBERGER : On a certain senary cubic form. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 108:911–964, (2014). ↑ 22, 23, 24, 140, 141, 142, 143, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 172, 175, 176, 177, 180, 181, 182, 183, 184, 186, 190, 191, 192, 193, i, iv

[BBS16] V. BLOMER, J. BRÜDERN et P. SALBERGER : The Manin-Peyre conjecture for a certain biprojective cubic threefold. *eprint arXiv :1609.02837,* https://arxiv.org/pdf/1609.02837v1.pdf, (2016). ↑ 24, 142

[BD09] T. BROWNING et U. DERENTHAL : Manin's conjecture for a quartic del Pezzo surface with $\mathbf{A}_4$ singularity. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble),* **59***(3)*, 1231-1265, (2009). ↑ 15

[BF04] R. de la BRETÈCHE et E. FOUVRY : L'éclaté du plan projectif en quatre points dont deux conjugués. *J. Reine. Angew. Math.*, 63–122, (2004). ↑ 14

[BHB17] T.D. BROWNING et D.R. HEATH-BROWN : Forms in many variables and differing degrees. *J. Eur. Math. Soc.* **9**, 357–394, (2017). ↑ 9, 107

[Bir62] B.J. BIRCH : Forms in many variables. *Proc. Roy. Soc. Ser.*, 245-263, (1962). ↑ 6, 107

[BM90] V. BATYREV et Y. MANIN : Sur le nombres de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques. *Math. Ann.* **286***(1-3)*, 27-43, (1990). ↑ 7

[Bou11] D. BOURQUI : *Fonction zêta des hauteurs des variétés toriques non déployées.* Memoirs of the American Mathematical Society volume 211. American Mathematical Society, 2011. ↑ 164

[Bou12a] P. Le BOUDEC : Manin's conjecture for two quartic del Pezzo surfaces with $\mathbf{A}_3$ singularity types and four lines. *Monatsh. Math.,* **151***(2)*, 109-163, (2012). ↑ 15

[Bou12b] P. Le BOUDEC : Manin's conjecture for a cubic surface with $2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$ singularity type. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, (2012). ↑ 34

[Bou12c] P. Le BOUDEC : Manin's conjecture for two quartic del Pezzo surfaces with $3\mathbf{A}_1$ and $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ singularity types. *Acta Arith.,* **167***(3)*, 481-502, (2012). ↑ 15

[BP04] V.V. BATYREV et O.N. POPOV : The Cox ring of a del Pezzo zurface. *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002) volume 226 of Progr. math.*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 85-103, (2004). ↑ 13

[Bre02] R. de la BRETÈCHE : Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de del Pezzo de degré 5. *Duke Math. J.,* **113** *no 3*, 421–464, (2002). ↑ 14

[Bre16] R. de la BRETÈCHE : Sur le nombre de matrices aléatoires à coefficients rationnels. *À paraître*, (2016). ↑ 23, 142, 144, 147, 149, 151, 156, 157, 158, 193

[Bro10] T.D. BROWNING : Linear growth for Châtelet surfaces. *Math. Annalen* **346**, 41–50, (2010). ↑ 17, 34, 35, 63, 103, 104

[Bry79] J.-L. BRYLINSKI : Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes. *C.R .Acad . Sci. Pari* **288** *série A*, 137-139, (1979). ↑ 11, 95

[BS16] T.D. BROWNING et E. SOFOS : Counting rational points on quartic del Pezzo surfaces with a rational conic . https://arxiv.org/abs/1609.09057, (2016). ↑ 17

[BT95] V.V. Batyrev et Y. Tschinkel : Rational points of boundend height on compactifications of anistropic tori. *Internat. Math. Res. Notices* **12**, 591-635, (1995). ↑ 10

[BT96a] V.V. Batyrev et Y. Tschinkel : Height zeta functions of toric varieties. *J. Math. sci.* **82**-*1, Algebraic geometry, 5.*, 3220-3239, (1996). ↑ 10

[BT96b] V.V. Batyrev et Y. Tschinkel : Rational points on some Fano cubic bundles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* **323***(1)*, 41-46, (1996). ↑ 9

[BT98a] V. Batyrev et Y. Tschinkel : Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties. *Astérisque* **251**, 299-340, (1998). ↑ 7, 34

[BT98b] V.V. Batyrev et Y. Tschinkel : Manin's conjecture for toric varieties. *Algebraic Geom.* **7(1)**, 15-53, (1998). ↑ 10, 14, 15, 23, 24, 141, 142, 143

[BT12] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Oscillations localisées sur les diviseurs. *Journal of London Math. Soc.,* **85 (3)**, 669-693, (2012). ↑ 18

[BT13] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet. *à paraître au Journal de l'Institut de Jussieu*, (2013). ↑ 12, 15, 18, 20, 21, 34, 35, 57, 58, 78, 86, 88, 90, 91, 94, 96, 98, 99, 100, 116, 117, 121, 133, 135

[BT16] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Sur les processus arithmétiques liés aux diviseurs. *Advances in Applied Probability*, Spec. Vol. **48A**, (volume en l'honneur de Bingham), (2016). ↑ 144

[Cha59] F. Chatelet : Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques. *Enseignement Math. (2)* **5**, 153-170, (1959). ↑ 34

[Cha66] F. Chatelet : Points rationnels sur certaines surfaces cubiques. *Colloque Inern. CNRS, les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres (Clermont-Ferrand, 1964), Paris*, 67-75, (1966). ↑ 34

[CLT02] A. Chambert-Loir et Y. Tschinkel : On the distribution of points of bounded height on equivaria nt compactifica- tions of vector groups. *Invent. Math.,* **148**, 421-452, (2002). ↑ 10, 14, 15, 23, 141

[Con] K. Conrad : Galois groups of cubics and quartics (not in characteristic 2). *http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/galoistheory/cubicquartic.pdf*. ↑ 121, 122

[Cox95] D.A. Cox : The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Alg. Geom.,* **4**, 17-50, (1995). ↑ 172, 175

[CP95] C. De Concini et C. Procesi : Wonderful models of subspace arrangements. *Selecta Math. (N.S.),* **1**, 459-494, (1995). ↑ ii, iii

[CR99] H. Cohen et X.-F. Roblot : Computing the Hilbert class field of real quadratic fields. *Math. of Computation* **69***(231)*, 1229–1244, (1999). ↑ 99

[CT03] J-L. Colliot-Thélène : Points rationnels sur les fibrations. *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Stud., vol. 12, Springer, Berlin*, 171-221, (2003). ↑ 9

[CTCS80] J-L. Colliot-Thélène, D. Conray et J.J. Sansuc : Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. *J. reine angew. Math.* **320**, 150–191, (1980). ↑ 12, 96, 102

[CTS77] J-L. Colliot-Thélène et J.J. Sansuc : La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **284**, 1215–1218, (1977). ↑ 10, 11, 34, 94, 95

[CTS79] J-L. Colliot-Thélène et J.J. Sansuc : La descente sur les variétés rationnelles. *Journées de géométrie algébrique d'Angers*, 223–237, (1979). ↑ 10, 12, 34, 94, 96

[CTS82] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc : Sur le principe de hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel. *Acta Arithemtica,* **XLI**, 33-53, (1982). ↑ 100, 101, 108

[CTS87] J-L. Colliot-Thélène et J.J. Sansuc : La descente sur les variétés rationnelles II. *Duke Math. J.* **54**, 375–492, (1987). ↑ 10, 11, 13, 34, 94, 95, 96, 176

[CTSSD87a] J-L. Colliot-Thélène, J.J. Sansuc et H.P.F. Swinnerton-Dyer : Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I. *J. reine angew. Math.* **373**, 37–101, (1987). ↑ 17, 34, 72, 85, 107, 108

[CTSSD87b] J-L. Colliot-Thélène, J.J. Sansuc et H.P.F. Swinnerton-Dyer : Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II. *J. reine angew. Math.* **374**, 72–168, (1987). ↑ 17, 34, 72, 77, 101, 107, 108

[Dan99] S. Daniel : On the divisor-sum problem for binary forms. *J. reine angew. Math.* **507**, 107–129, (1999). ↑ 18, 19, 38, 39, 53

[Dav63] H. Davenport : Cubic forms in 16 variables. *Proc. Roy. Soc. A* **272**, 285–303, (1963). ↑ 47

[DEJ] U. Derenthal, A-S. Elsenhans et J. Janhel : On the factor alpha in peyre's constant. ↑ 74

[Der06] U. Derenthal : Geometry of universal torsors. *PhD Thesis*, (2006). ↑ 13, 20, 34, 74, 117

[Der09] U. Derenthal : Counting integral points on universal torsors. *Int. Math. Res. Not. IMRN,* **14**, 2648-2699, (2009). ↑ 15

[Der14] U. Derenthal : Singular del Pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces. *Proc. London Math. Soc.* **108** *(3)*, 638-681, (2014). ↑ 14

[Des16a] K. Destagnol : La conjecture de Manin pour une famille de variétés en dimension supérieure. *Soumis,* *https://arxiv.org/abs/1612.06898*, (2016). ↑ 27, 95, 140

[Des16b] K. Destagnol : La conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet. Acta Arithmetica*,* **174***,* (2), 31–97, (2016). ↑ 20, 21, 27, 34, 72, 93, 94, 98, 99, 103, 104, 112, 116, 117, 125, 126, 128, 131, 133, 134

[DF13] U. Derenthal et C. Frei : Counting imaginary quadratic points via universal torsors. *Compositio Math.*, (2013). ↑ 13, 15, 97, 99

[DF14] U. Derenthal et C. Frei : Counting imaginary quadratic points via universal torsors II. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **156** *(3)*, 383-407, (2014). ↑ 15

[DJT] U. Derenthal, M. Joyce et Z. Teitler : The nef cone volume of genralized del Pezzo surfaces. ↑ 74

[DL10] U. Derenthal et D. Loughran : Singular del Pezzo surfaces that are equivariant compactifications. *Zapiski Nauchnykh Seminarov (POMI)*, 26-43, (2010). ↑ 14

[DP14] U. Derenthal et M. Pieropan : Cox rings over nonclosed fields. http://arxiv.org/abs/1408.5358, (2014). ↑ 78, 94

[DT07] U. Derenthal et Y. Tschinkel : Universal torsors over Del Pezzo surfaces and rational points. *Equidistribution in number theory, an introduction, volume 237 of NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, Springer, 169–196, (2007). ↑ 15, 34

[Fal83] G. Faltings : Endlickeitssätze für abelsche Varietätent über Zahlent körpern. *Invent. Math.* **73***(3)*, 349-366, (1983). ↑ 6

[FLS16] C. Frei, D. Loughran et E. Sofos : Rational points of bounded height on general conic bundle surfaces. *Prépublication*, (2016). ↑ 14

[FMT87] J. Franke, Y. Manin et Y. Tschinkel : Rational points on bounded height on Fano varieties. *Inv. Math. J.* **54**, 375-492, (1987). ↑ 7, 164

[FP13] C. Frei et M. Pieropan : O-minimality on twisted universal torsors and Manin's conjecture over number fields. *Ann. Sci. ENS*, (2013). ↑ 15

[Ful93] W. Fulton : *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, (1993). ↑ 172, 177, 182, v

[GH] P. Griffiths et J. Harris : *Principles of algebraic geometry.* Wiley, New York, (1978). ↑ 184

[Gro67] A. Grothendieck : *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, **32**, 361 pp, (1967). ↑ ii

[Gro68] A. Grothendieck : Le groupe de Brauer, III. Exemples et compléments. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Advanced studies in Pure Mathematics* **3***, North Holland publishing Company 11*, 88-188, (1968). ↑ 164

[GTZ12] B. Green, T. Tao et T. Ziegler : An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$-norm. *Ann. of Maths,* **176**, 1231-1372, (2012). ↑ 21, 124

[Hal96] R.R Hall : Sets of multiples. *Cambridge Tracts in Mathematics 118, Cambridge University Press, Cambridge*, (1996). ↑ 144

[Har08] R. Hartshorne : *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52 (Springer, Berlin, 1977), (2008). ↑ 110, 168, iv, v

[HB97] D.R. Heath-Brown : The density of rational points on cubic surfaces. *Acta Arith.,* **47***(1)*, 17-30, (1997). ↑ 14, 19

[HB03] D.R. Heath-Brown : Linear relations amongst sums of two squares. *Number theory and algebraic geometry, 133–176, London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **303**, CUP, (2003). ↑ 18, 41

[Hen10] A. Henderson : Rational cohomology of the real coxeter toric variety of type a. *preprint* `https://arxiv.org/pdf/1011.3860v1.pdf`, (2010). ↑ ii

[HKL14] J. Hausen, S. Keicher et A. Laface : Computing Cox rings. *Math. Comp.*, à paraître, (2014). ↑ 13

[HP] W.V.D Hodge et D. Pedoe : *Methods of algebraic geometry. Vol II. Book III : General theory of algebraic varieties in projective space. Book IV : Quadrics and Grassmann varieties.* ↑ 14

[HS] M. Hindry et J.H. Silverman : *Diophantine geometry. An introduction.* ↑ 6

[HT04] B. HASSETT et Y. TSCHINKEL : Universal torsors and Cox rings. *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002) volume 226 of Progr. math.*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 85-103, (2004). ↑ 13

[Hua17] Z. HUANG : Distribution locale des points rationnels de hauteur bornée sur une surface de del Pezzo de degré 6. *International Journal of Number Theory*, pages 1–36, (2017). ↑ 9

[Isk80] V.A. ISKOVSKIKH : Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. *Math. USSR Izv.* **14**, 17–39, (1980). ↑ 16, 34

[Le 16] P. LE BOUDEC : Manin's conjecture for two quartic del Pezzo surfaces with $3A_1$ and $A_1 + A_2$ singularity types. *Acta Arithmetica,* **151**, 109-163, (2016). ↑ 15, 95, 161

[Lip06] J. LIPMAN : Geometry of universal torsors. *PhD Thesis*, (2006). ↑ 15

[Lou10] D. LOUGHRAN : Manin's conjecture for a singular sextic del Pezzo surface. *J. Théor. Nombres Bordeaux,* **22***(3)*, 675-701, (2010). ↑ 15

[Lou15] D. LOUGHRAN : Rational points of bounded height and the Weil restriction. *Israel J. of Math.,* **210**-*1*, 47-79, (2015). ↑ 9

[Man86] Y.I. MANIN : Cubic forms. *volume 4 of North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, translated from the russian by M.Hazewinkel*, (1986). ↑ 14

[Mar08] G. MARASINGHA : On the representation of almost primes by pairs of quadratic forms. *Acta Arith.* **124**, 327–355, (2008). ↑ 39, 53

[Mar10] G. MARASINGHA : Almost primes represented by binary forms. *J. Lond. Math. Soc.*, (2010). ↑ 39, 53

[Mig16] T. MIGNOT : Points de hauteur bornée sur les hypersurfaces lisses de l'espace triprojectif. *Acta Arith.* **172**-*1*, 1–97, (2016). ↑ 9

[Mil80] J.S. MILNE : Étale cohomology. *Princeton university Press, Princeton,* **NJ**, (1980). ↑ 177

[MR15] David MCKINNON et Mike ROTH : Seshadri constants, diophantine approximation, and roth's theorem for arbitrary varieties. *Inventiones mathematicae*, **200**(2):513–583, 2015. ↑ 9

[Nor49] D.G. NORTHCOTT : An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45**, 502–518, (1949). ↑ 6

[Pag] S. PAGELOT : Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization. *Thèse non publiée.* ↑ 9

[Pey95] E. PEYRE : Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.* **79**, 101-218, (1995). ↑ 7, 9, 34, 72, 74, 105, 106, 162, 164, 168, 184, 185, 186

[Pey01] E. PEYRE : Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordeaux,* **15**, (2003), 319-349. Les XXIIèmes Journées Arithmétiques (Lilles, 2001). ↑ 7, 25, 34, 72, 103, 107, 143, 146, 163, 164

[Pey12] E. PEYRE : Counting points on varieties using universal torsors. *Annals of Mathematics,* **175**, (2012). ↑ 74, 117

[Pie15] M. Pieropan : Torsors and generalized Cox rings for Manin's conjecture. *PhD Thesis*, http ://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh15/828227667.pdf, (2015). ↑ 12, 13, 20, 27, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 94, 96, 97, 99, 110, 119, 124, 125, 127, 130, 131, 132

[Rei] M. Reid : *Chapter on algebraic surfaces.* Complex algebraic varieties, IAS/Park City Mathematics Series 3 (ed. J.Kollar ; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997). ↑ 182

[Rud] C. Le Rudulier : Points rationnels de hauteur bornée. *Thèse de doctorat.* ↑ 9

[Sal98] P. Salberger : Tamagawa numbers of universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Nombre et répartition de points de hauteur bornée,* **251**, 91-258, (1998). ↑ 7, 8, 12, 35, 72, 85, 95, 96, 107, 170, 172, 173, 184, 187, 189, 190, iv

[San80] J.-J. Sansuc : Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. reine angew. Math.* **327**, 12-80, (1980). ↑ 84, 106

[Sch79] S. Schanuel : Heights in number fieds. *Bull. Soc. Math. France* **107**, 433-449, (1979). ↑ 6

[Sch95] W. Schmidt : Northcott's theorem on heights. II. The quadratic case. *Acta Arith.,* **70**, 343-375, (1995). ↑ 16

[Sch14] D. Schindler : Manin's conjecture for certain biprojective hypersurfaces. *J. Théorie des Nombres Bordeaux* **26**, 483–506, (2014). ↑ 9

[Sha04] J. Shalika : Height zeta functions of equivariant compactifications of the heisenberg group. *Contribution to automorphic forms, geometry and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD*, 743-771, (2004). ↑ 10

[Shp16] I. Shparlinski : Linear equations with rational fractions of bounded height and stochastic matrices. *À paraître au Quart. J. Math.*, 2016. ↑ 23, 142

[Sko] A. Skorobogatov : *Torsors and rational points*, volume 16. Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2001). ↑ 11, 13, 16, 74, 77, 81, 84, 94, 96, 98, 100, 106, 120, 180

[ST15] J. Shalika et Y. Tschinkel : Height zeta functions of equivariant compactifications of unipotent groups. *prépublication*, (2015). ↑ 10

[Ste92] J.R. Stembridge : Eulerian numbers, tableaux, and the Betti variety of a toric variety. *Discrete Mathematics,* **99***, North Holland*, 302-320, (1992). ↑ 195, v

[TT12] S. Tanimoto et Y. Tschinkel : Height zeta functions of equivariant compactifications of semi-direct products of algebraic groups. *Contemp. Math.,* **566**, 119-157, (2012). ↑ 10, 27, 166

[Zar39] O. Zariski : The reduction of singularities of an algebraic surface. *Ann. of Maths* **40***(3)*, 639-689, (1939). ↑ 15