



Modélisations et outils numériques en mécanique non régulière et applications à la tenségrité

Shéhérazade Nineb

► To cite this version:

Shéhérazade Nineb. Modélisations et outils numériques en mécanique non régulière et applications à la tenségrité. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Montpellier 2 Sciences et Techniques du Languedoc, 2006. Français. NNT: . tel-02008508

HAL Id: tel-02008508

<https://theses.hal.science/tel-02008508>

Submitted on 5 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Mécanique – Génie Mécanique – Génie Civil

Ecole Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Shéhérazade NINEB

le 11 Décembre 2006.

Titre :

Modélisations et outils numériques en mécanique non régulière et applications à la tensegrité.

JURY

M. Brogliato Bernard	Directeur de recherche	INRIA Grenoble	, Président
M. Rey Christian	Professeur	ENS de Cachan	, Rapporteur
M. Wielgosz Christian	Professeur	Université de Nantes	, Rapporteur
M. Alart Pierre	Professeur	U. Montpellier 2	, Directeur de thèse
M. Dureisseix David	Professeur	U. Montpellier 2	, Co-directeur de thèse
M. Raous Michel	Directeur de recherche	U. Aix-Marseille	, Examineur
M. Dubois Frédéric	Ingénieur de recherche	CNRS	, Examineur

RESUME en français

La modélisation et la simulation numérique des systèmes mécaniques non réguliers conduisent à des systèmes algébriques du type problème de complémentarité linéaire. Pour traiter ces problèmes, une bibliothèque de solveurs non-réguliers a été implantée et testée sur des problèmes issus de la modélisation en mécanique non régulière, dans la plate-forme logicielle du projet européen SICONOS. Lorsque la taille du problème croît, une stratégie de calcul de type décomposition de domaine multiéchelle, permettant d'augmenter les performances, a été étendue dans ce travail à un milieu discret particulier : les structures de tensegrité tridimensionnelles pour lesquelles la non-régularité est diffuse dans toute la structure. Les applications concernent la simulation quasi-statique et dynamique du comportement de telles structures. Ces travaux ont été financés par le projet SICONOS (Simulation and COntrol of NONsmooth dynamical Systems, european project nIST2001-37172).

TITRE en anglais

Modelling and simulation tools for non smooth mechanics and application to tensegrity.

RESUME en anglais

Modelling and numerical simulation of non smooth mechanical systems lead to algebraic problems similar to the linear complementary problem. A library of non smooth solvers has been implemented and tested on problems arising from non smooth mechanics, within the numerical platform of European project SICONOS. When the size of the problem increases, a computing strategy of the multilevel domain decomposition type has been extended herein to a particular discrete medium : tridimensional tensegrity structures, for which the non smoothness is diffuse over the entire structure. The applications deal with quasi-static and dynamical simulations of the behavior of such structures. This work was funded by the European project SICONOS (Simulation and COntrol of NONsmooth dynamical Systems, european project nIST2001-37172).

DISCIPLINE

Mécanique – Génie Mécanique – Génie Civil

MOTS-CLES

Décomposition de domaine, dynamique non régulière, éléments finis, solveurs

INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC), Univ. Montpellier 2, CNRS UMR 5508
Univ. Montpellier 2, CC048, Place Eugene Bataillon, F-34095 MONTPELLIER CEDEX 5, FRANCE

Table des matières

1	INTRODUCTION	4
I	Systèmes mécaniques et solveurs non réguliers	6
2	Problème de contact sans frottement	10
2.1	Problème de contact sans frottement	11
2.1.1	Formulation variationnelle	12
2.1.2	Discrétisation du problème	14
2.1.3	Résolution	15
2.1.4	Méthodes de résolution numérique de type LCP (Linear Complementary Problem)	15
2.1.5	Comparaison des algorithmes sur quelques cas tests	24
3	Problème de contact avec frottement de Coulomb	34
3.1	Contact avec frottement de Coulomb	35
3.1.1	Formulation variationnelle	36
3.1.2	Problème de contact avec frottement de Coulomb en vitesse	37
3.1.3	Discrétisation temporelle	38
3.1.4	Résolution du problème de contact frottant	38
3.1.5	Comparaison de solveurs pour des problèmes de contact avec frottement	42
4	Problème de contact frottant d'une collection de corps rigides	44
4.1	Contacts frottants dans une collection de rigides	45
4.1.1	Relations cinématiques	46
4.1.2	Lois de contact frottant	47
4.1.3	L'équation de la dynamique	49
4.1.4	Résolution numérique : Méthode Non Smooth Contact Dynamics (NSCD)	50
4.1.5	Résolution du problème de contact frottant	53
4.1.6	Cas tests	57

II	Approche multiéchelle statique	61
5	Approche multiéchelle statique	62
5.1	Les systèmes de tenségrité	65
5.2	Approche micro-macro pour les systèmes discrets à non régularité diffuse	71
5.2.1	Problème de référence	71
5.2.2	Stratégie de sous-structuration	80
5.2.3	Stratégie numérique multiéchelle	82
5.3	Résultats numériques pour une nappe de tenségrité	92
5.3.1	Description du problème envisagé	92
5.3.2	Choix des directions de recherche	92
5.3.3	Résultats de la simulation	93
5.3.4	Comparaison avec une approche mono-domaine	97
5.3.5	Influence du nombre de sous domaine	100
5.4	Bilan et perspectives	101
III	Approche multiéchelle dynamique	102
6	Dynamique des tenségrités	103
6.1	Comportement des interactions en dynamique non régulière . . .	104
6.1.1	Interaction élémentaire	104
6.1.2	Exemple d'illustration : masse ponctuelle entrant en contact avec un obstacle rigide ou élastique	107
6.2	Simulation dans la plateforme SICONOS	116
6.2.1	Résultats de simulation	118
6.3	Décomposition de domaine multiéchelle dynamique : LATIN micro-macro	123
6.3.1	Extension de l'approche statique	123
6.3.2	Stratégie numérique multiéchelle	125
6.3.3	Résultats d'une modélisation avec câbles inextensibles . .	132
7	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	135

Remerciements

Je tiens à remercier Pierre Alart pour m'avoir accueillie dans son équipe, pour toute l'aide et les conseils qu'il m'a apportés.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et mon amitié à David Dureisseix pour avoir co-dirigé cette thèse, pour ses encouragements constants, ses précieux conseils, son aide et tout ce temps qu'il a pu me consacrer sans quoi ce travail aurait difficilement abouti.

Je remercie Frédéric Dubois pour m'avoir proposée ce sujet de thèse, pour ces différentes remarques constructives et pour le temps qu'il a pu m'accorder.

Je remercie les différents membres ayant participé au projet européen SICO-NOS avec lesquels j'ai pu travailler, notamment Bernard Brogliato, Vincent Acary et Franck Pérignon.

Je remercie René Motro pour le temps qu'il a pu m'accorder et les conseils qu'il a pu gentillemeent me donner.

J'ai une pensée pour ses femmes du laboratoire qui sont d'une aide précieuse et de véritable rayon de soleil : je pense entre autres à Danièle Bros, qui a toujours été présente, à Elisabeth Boulet avec qui j'ai pu avoir d'agréables discussions et à Reine Bonnet qui propose si gentillemeent des bonbons. Je les remercie pour leur bonne humeur.

Je remercie tous les membres de l'équipe Systèmes Multi-Contacts notamment Franck Jourdan, Thierry Vigo...

Je remercie tous les membres du jury d'avoir accepté de présider, d'examiner ou de rapporter ce travail. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont pu apporter à mes recherches.

Je remercie toute les personnes du Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil avec lesquelles j'ai pu discuter ces trois dernières années, et qui s'inscrivent dans cette magnifique expérience qu'a été la thèse.

Je remercie toutes les personnes qui m'accompagnent et sur lesquelles j'ai toujours pu compter : ma famille, mon cher Fabrice, mes amis géniaux : Etienne, qui a participé entièrement à l'élaboration de ce manuscrit, Emilien, Nicolas, Vincent...

Je dédie ce document à tous ceux qui me sont chers.

Chapitre 1

INTRODUCTION

 L'équipe Systèmes Multi Contacts (SMC) du Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil de Montpellier (LMGC), concentre ses activités sur la modélisation et la simulation numérique des systèmes non réguliers au premier rang desquels ceux régis par le contact et le frottement. Cette famille de problèmes regroupe déjà une diversité de situations tant en termes de modélisation (milieu continu, système de corps rigides...), d'évolution (dynamique/quasi-statique), que d'outils numériques (éléments finis / éléments discrets). Après discrétisation spatio-temporelle de ces problèmes, le système algébrique à résoudre est particulier, dans le sens où il contient des contraintes d'inégalité, pour lesquelles il existe de nombreuses formulations et algorithmes associés. Le système typique de base est le problème de complémentarité linéaire (LCP, Linear Complementary Problem) constitué d'un système linéaire, avec contraintes de positivité et orthogonalité sur un couple de variables duales. Il existe par ailleurs plusieurs extensions du LCP, attachées aux différentes problématiques ; par exemple le couplage contact/frottement induit une généralisation du LCP en NLCP (Non Linear Complementary Problem). Pour traiter ces problèmes il n'existe que peu de bibliothèques et d'outils génériques [www.cs.wisc.edu/cpnet] par comparaison aux résolutions de systèmes linéaires. Pourtant les problèmes de complémentarité intéressent plusieurs communautés, au delà de la mécanique, au point qu'ils sont au coeur d'un projet européen regroupant mathématiciens, mécaniciens, roboticiens, automaticiens... Le projet SICONOS (SIMulation and CONTROL of NONsmooth dynamical Systems), auquel participe l'équipe SMC, se propose de développer une plateforme logicielle, dans le domaine des systèmes non réguliers.

Une des participations à ce projet consistait en l'élaboration d'une bibliothèque de solveurs en langage C, utilisant notamment des bibliothèques de calculs scientifiques permettant l'optimisation des routines telles que BLAS et LAPACK. La première partie de ce mémoire propose donc de comparer quelques méthodes numériques de résolution de problèmes de contact avec ou sans frottement. Pour cela, un cadre minimal théorique est rappelé, permettant ainsi de recadrer le che-

minement menant finalement à la résolution des problèmes et par conséquent aux algorithmes. Ont été privilégiées la diversité des méthodes et la variété de nature des problèmes traités plus que le grand nombre de contacts, en se limitant aux problèmes bidimensionnels restreints à notre domaine de prédilection : la Mécanique.

Les différents problèmes traités dans la partie 1 se limitent en définitive à un cadre purement académique, de part leur simplicité (bidimensionnel) et de part leur taille. Or une spécificité des problèmes auxquels s'attaque l'équipe SMC réside à la fois dans le très grand nombre de contacts ou d'interactions et la complexité de l'évolution du système étudié. La simulation de granulats vibrés cycliquement tels que le ballast ferroviaire en est une illustration. Celle-ci cumule au moins trois difficultés : la taille du problème, la non régularité des lois d'interaction où un évènement local peut déclencher un phénomène traversant le milieu (déclenchement d'avalanche par exemple) et un chargement complexe en temps, qui pose alors des problèmes pour une simulation directe (coût CPU, stockage...). Pour simuler ce type de problème, le calcul intensif s'avère nécessaire. Ainsi afin d'amoindrir le temps de calcul, des solveurs sont améliorés [43] et des techniques avancées telles que la parallélisation ont été utilisées. Pour continuer dans ce sens, c'est à dire atténuer le coût, nous nous intéressons ici à l'extension d'une méthode de décomposition de domaine de type mixte qui, contrairement aux méthodes primales ou duales, traite à égalité les efforts et les déplacements aux bords des sous domaines. Cette approche s'inscrit dans une formulation et une stratégie adaptée à l'utilisation d'ordinateurs à architecture parallèle, ce qui cependant ne s'inscrit pas dans le cadre de ce travail.

Le premier problème rencontré pour la mise en place de cette stratégie de résolution est la définition même d'un V.E.R. En effet le comportement des granulats est tantôt celui d'un solide et tantôt celui d'un fluide. Pour palier cette difficulté propre aux granulats, il s'avère judicieux et préférable dans un premier temps de s'intéresser à des structures dont certaines propriétés s'apparentent à celles des milieux granulaires : les systèmes de tenségrité, systèmes réticulés spatiaux à contraintes initiales utilisés par les architectes afin de concevoir des structures légères et transparentes.

Il s'agit donc dans ce travail d'étendre l'approche LATIN (LArge Time INcrement method) micro-macro initialement développée pour les milieux continus hétérogènes et testée sur des cas bidimensionnels au cas des milieux discrets et appliquée à une nappe de tenségrité tridimensionnelle dans un cadre statique, dans la partie 2 puis dans un cadre dynamique non régulier dans la partie 3.

Première partie

Systèmes mécaniques et solveurs non réguliers

On s'intéresse dans un premier temps à l'écriture de la condition de non pénétration d'un solide déformable en contact avec un obstacle rigide, et à l'écriture du frottement. Ces lois de comportement seront par la suite utilisées dans les formulations des problèmes de contact avec ou sans frottement de corps déformables, que nous rencontrerons dans les deux prochains chapitres.

On se place sous l'hypothèse des petits déplacements. On considère un corps élastique déformable occupant un domaine Ω de frontière Γ suffisamment régulière dont la partition s'écrit $\Gamma_F \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$ où Γ_C est la zone potentielle de contact du solide avec l'obstacle. Sur le bord Γ_C , on décompose le déplacement et les forces de contact (actions de l'obstacle sur le corps) en composantes normales et tangentielles comme suit :

$$u = u_N n + u_T \quad (1.1)$$

$$F = F_N n + F_T \quad (1.2)$$

où F_T et u_T sont des vecteurs qui appartiennent au plan tangent (en dimension 3) et u_N et F_N sont des mesures algébriques suivant la direction normale (extérieure) n à Γ_C .

Dans le cas où il n'y a pas de jeu initial entre le corps élastique et l'obstacle rigide, les conditions de contact unilatéral, appelées aussi problème de Signorini, s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_N \leq 0 \\ F_N \leq 0 \\ u_N F_N = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

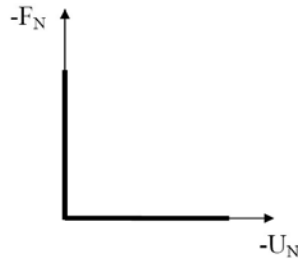


FIG. 1.1 – Graphe de la condition de Signorini

Regardons ce qui nous permet de dire que ces relations caractérisent le contact unilatéral :

- lorsque $u_N \leq 0$, le solide ne pénètre pas dans l’obstacle,
- lorsque F_N , force normale exercée par l’obstacle sur le solide, est telle que $F_N \leq 0$ alors elle caractérise l’absence d’adhésion,
- la relation de complémentarité $u_N F_N = 0$ décrit :
 - soit un contact établi ($u_N = 0$), la force normale est active ($F_N < 0$),
 - soit un décollement ($u_N < 0$), la force est donc nulle ($F_N = 0$),
 - soit un cas limite de contact effleurant ($u_N = 0, F_N = 0$).

La loi de frottement la plus rudimentaire et ancienne est celle de Coulomb. Elle se caractérise par le fait qu’une force motrice ne peut déclencher un glissement qu’une fois un certain seuil dépassé. Elle s’écrit comme suit :

$$\begin{cases} \|F_T\| \leq \mu |F_N| \text{ avec} \\ \text{si } \|F_T\| < \mu |F_N| \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{si } \|F_T\| = \mu |F_N| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_T = -\lambda F_T \end{cases} \quad (1.4)$$

On peut trouver des variantes de ces lois (Signorini et Coulomb) en particulier

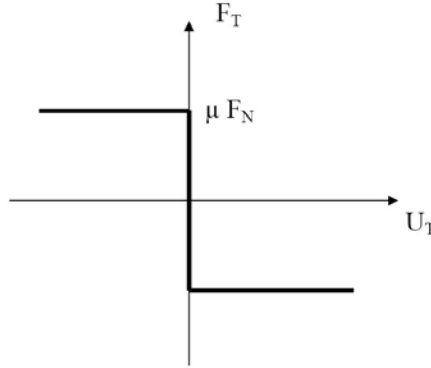


FIG. 1.2 – Graphe de la loi de Coulomb

dans [40].

Nous allons donc dans les deux prochains chapitres donner les formes discrétisées du problème de contact statique et du problème de contact frottant “statique” issues de la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est couramment utilisée pour obtenir des valeurs numériques représentatives des quantités cinématiques (déplacements, déformations) et mécaniques (contraintes) liées à l’équilibre d’un corps solide soumis à des sollicitations. Cette méthode permet d’obtenir une solution approximative

satisfaisant les lois de la physique écrites sous une forme variationnelle. En mécanique des solides et structures, les modèles variationnels les plus couramment utilisés sont le principe des travaux virtuels et le principe du minimum de l'énergie potentielle totale.

Nous n'allons pas, ici, poser entièrement le problème, ceci peut être trouvé dans les ouvrages suivants entre autre [11, 17, 29] . Par contre nous rappelons le chemin pris pour arriver à l'écriture finale que nous donnerons par la suite.

Tout d'abord, il s'agit de prendre en compte les équations classiques du problème d'élasticité à savoir : l'équilibre du solide, la loi de comportement du matériau, les conditions surfaciques (déplacements et efforts imposés) auxquelles on associe des équations supplémentaires qui définissent l'interaction entre deux corps sur la zone de contact.

Une forme variationnelle associée à ces relations est obtenue par la méthode des résidus pondérés [11]. Cette méthode consiste à rechercher des fonctions u (appartenant à l'ensemble des solutions admissibles qui satisfont les conditions aux limites) qui annulent la forme intégrale pour toutes fonctions de pondération ou de tests u^* (représentant un champ de déplacements virtuels)¹.

En intégrant par parties et en prenant en compte les conditions limites et les conditions unilatérales, on arrive à une forme intégrale dite faible (elle présente l'avantage de diminuer les conditions de dérivabilité de u par exemple). Cette forme intégrale n'est rien d'autre que l'expression du Principe des Travaux Virtuels, que l'on note *P.T.V.*.

¹le choix consistant à prendre u^* comme fonction de pondération, mène à une forme intégrale particulière dite de type Galerkin

Chapitre 2

Problème d'élasticité stationnaire de contact sans frottement

Contents

2.1	Problème de contact sans frottement	11
2.1.1	Formulation variationnelle	12
2.1.2	Discrétisation du problème	14
2.1.3	Résolution	15
2.1.4	Méthodes de résolution numérique de type LCP (Linear Complementary Problem)	15
2.1.5	Comparaison des algorithmes sur quelques cas tests	24

2.1 Problème d'élasticité stationnaire de contact sans frottement

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ occupé par un corps élastique dans son état non déformé. On suppose Ω borné de frontière Γ régulière, dont la partition est la suivante $\Gamma_F \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$ où :

- Γ_C est la zone potentielle de contact entre le corps élastique et un obstacle rigide,
- Γ_D est la partie de la frontière sur laquelle on impose des déplacements et on suppose que $mes(\Gamma_D) > 0$,
- Γ_F est la partie de la frontière sur laquelle on impose des forces surfaciques.

Le corps est soumis à une densité volumique de force ϕ_1 sur Ω et à une densité surfacique de force ϕ_2 sur Γ_F .

Sous les hypothèses de petites perturbations, le tenseur linéarisé des déformations ϵ est le gradient symétrique des déplacements u :

$$\epsilon(u) = grad_s(u) \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (2.2)$$

On considère ici un corps élastique, homogène et isotrope, régi par la loi de comportement de Hooke, relation linéaire entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations linéarisées ϵ :

$$\sigma = K\epsilon(u) \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij} = K_{ijkh} \epsilon_{kh} \quad (2.4)$$

Dans (2.4) les K_{ijkh} sont les coefficients d'élasticité, indépendants du tenseur de déformations. Les coefficients d'élasticité ont les propriétés de symétrie

$$K_{ijkh} = K_{jihk} = K_{khij} \quad (2.5)$$

et d'ellipticité

$$K_{ijkh} \epsilon_{ij} \epsilon_{kh} \geq \alpha_1 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}, \quad \alpha_1 \text{ constante} > 0, \forall \epsilon_{ij}. \quad (2.6)$$

Dans le cadre de la statique, les termes d'accélération sont négligés. En notant n la normale extérieure à Γ au domaine Ω , le problème mécanique de contact unilatéral (P_c) que l'on nomme problème de Signorini est le suivant :

Trouver le champ de déplacements u et le champ de contraintes σ vérifiant :

- La loi de comportement élastique

$$\text{sur } \Omega \quad \sigma = K\epsilon$$

- L'équilibre et la compatibilité des équations

$$\text{sur } \Omega \quad \begin{cases} div \sigma = -\phi_1 \\ \epsilon = grad_s u \end{cases}$$

- Les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot n &= \phi_2 \quad \text{sur } \Gamma_F \end{aligned}$$

- Les relations de contact unilatéral

$$\text{sur } \Gamma_C \left\{ \begin{array}{l} \sigma \cdot n = F, F_T = 0 \\ u_N \leq 0 \\ F_N \leq 0 \\ u_N F_N = 0 \end{array} \right.$$

où F est la densité surfacique de contact, une des inconnues du problème. On peut se référer à [12, 40, 11, 4].

Nous allons donc transformer ce problème en un problème équivalent qui nous permettra de bâtir le problème discrétisé.

2.1.1 Formulation variationnelle

On introduit le convexe fermé C qui est l'espace des déplacements admissibles, c'est à dire compatibles avec les liaisons (conditions aux limites et conditions unilatérales) :

$$C = \{v \in \mathcal{H}_D / v_N \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_C\}.$$

où $\mathcal{H}_D = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 / v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D\}$.

Soient $\phi_1 \in [L^2(\Omega)]^2$, $\phi_2 \in [L^2(\Gamma_F)]^2$ données, on pose :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \epsilon(v) dx \quad (2.7)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} K_{ijkh} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kh}(v) dx \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_D \quad (2.8)$$

avec $K_{ijkh} \in L^\infty(\Omega)$ $1 \leq i, j, k, h \leq 2$

et L une forme linéaire continue telle que :

$$L(v) = \int_{\Omega} \phi_1 v \, dx + \int_{\Gamma_F} \phi_2 v \, ds \quad \forall v \in \mathcal{H}_D. \quad (2.9)$$

Remarque :

- Il résulte des propriétés de symétrie et d'ellipticité des coefficients d'élasticité que $a(., .)$ est une forme bilinéaire, continue et coercive.

De manière formelle, cf.[12], le problème (P_c) correspond à la recherche de $u \in K$ tel que :

$$a(u, v - u) - L(v - u) = \int_{\Gamma_C} F_N(v_N - u_N) ds \quad \forall v \in C \quad (2.10)$$

La prise en compte des conditions unilatérales permet d'écrire le problème variationnel (P_v) suivant :

Trouver $u \in K$ tel que

$$a(u, v - u) - L(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in C \quad (2.11)$$

On montre que la forme variationnelle du problème (P_c) est équivalente à l'inéquation variationnelle¹ (6.14) qui traduit l'aspect unilatéral du problème. Cette écriture est l'expression du Principe des Travaux Virtuels. Elle sert de base pour construire les modèles déplacements en éléments finis.

La forme faible (6.14) peut être obtenue par la méthode des résidus pondérés [11, 4] appliquée à l'équilibre moyennant des intégrations par parties et la prise en compte des conditions aux limites et des conditions unilatérales. La méthode des résidus pondérés équivaut dans certains cas à rendre stationnaire une fonctionnelle². En mécanique des solides, cette fonctionnelle peut être l'énergie potentielle totale du système. Dans notre cas, la non linéarité introduite par le contact unilatéral fait que le problème ne dérive pas d'un potentiel.

On peut montrer néanmoins, voir [12], qu'il existe une fonctionnelle J , appelée énergie potentielle, associée à l'inéquation variationnelle (6.14). Les problèmes (P_c) et (P_v) sont alors équivalents au problème d'optimisation (P_{op}) suivant :

Trouver $u \in C$ telle que $\forall v \in C$

$$J(u) \leq J(v) \quad (2.12)$$

avec $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$.

Il s'agit là d'un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité.

L'existence et l'unicité des solutions du problème (P_v) découle du théorème de Lax-Milgram et de l'inégalité de Korn.

Nous verrons par la suite des méthodes de résolution, mais tout d'abord discrétisons ce problème.

¹On pourra trouver dans [12] l'établissement de l'équivalence du problème (P_c) et du problème (P_v) .

²Une fonctionnelle π est une fonction d'un ensemble de fonctions et de leurs dérivées : $\pi = \pi(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots)$, [11]

2.1.2 Discrétisation du problème

On choisit une discrétisation de type éléments finis [11, 4] du problème. Cette approximation par éléments finis se traduit par :

$$u(\xi) = [N(\xi)] u_n \text{ et } v(\xi) = [N(\xi)] v_n \quad (2.13)$$

où u_n et v_n sont les valeurs nodales du déplacement.

Il s'agit ici de discrétiser l'énergie potentielle J . On remplace donc les intégrales par une somme d'intégrales sur chaque élément Ω^e ou Γ^e de la discrétisation.

$$J = \sum_e J^e \quad \forall v \in C$$

avec

$$J^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \epsilon(v) K \epsilon(v) d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \phi_1 v d\Omega^e - \int_{\Gamma_F^e} \phi_2 v d\Gamma^e \quad (2.14)$$

On note $x = \langle x \ y \ z \rangle$ les coordonnées d'un point d'un élément réel et $\xi = \langle \xi \ \eta \ \zeta \rangle$ les coordonnées d'un point d'un élément de référence. Les relations déformations déplacements, voir [4], s'écrivent :

$$\{\epsilon\} = [B] \{v_n\} \quad (2.15)$$

où $[B]$ est fonction de ξ , η , ζ et des termes de j , l'inverse de la matrice jacobienne de la transformation géométrique³.

Les relations (2.13) et (2.15) permettent d'écrire J^e sous forme matricielle :

$$J^e = \frac{1}{2} \langle v_n \rangle [k] \{v_n\} - \langle v_n \rangle \{f_n\} \quad (2.16)$$

avec

$[k] = \int_{\Omega^e} [B]^t K [B] d\Omega^e$: matrice de rigidité élémentaire
 $\{f_n\} = \int_{\Omega^e} [N]^t \phi_1 d\Omega^e + \int_{\Gamma_F^e} [N]^t \phi_2 d\Gamma^e$: vecteur des forces élémentaires dues aux forces de volume et de surface.

Les termes des vecteurs et des matrices élémentaires sont calculés par intégration numérique sur la géométrie d'un élément [11, 4]. ainsi, l'énergie potentielle J est la somme des contributions élémentaires J^e . L'étape d'assemblage conduit alors à l'expression suivante de J :

$$J = \frac{1}{2} \langle V \rangle [K] \{V\} - \langle V \rangle \{F\} \quad (2.17)$$

où " $[K] = \sum_e [k]$ ", " $\{F\} = \sum_e \{f_n\}$ ", et $\{V\}$ est l'ensemble des variables nodales et $\{v_n\}$ est l'ensemble des variables nodales appartenant à l'élément e .

³La transformation géométrique considérée est τ , qui est telle que : $\xi \rightarrow x = x(\xi) = [N(\xi)] x_n$. Sa matrice jacobienne $[J]$ vérifie $\{\partial_\xi\} = [J]\{\partial_x\}$

La matrice $[K]$ et le vecteur $\{F\}$ définis dans l'opération d'assemblage ne tiennent pas compte des conditions unilatérales associées aux variables $\{V\}$. On cherche donc le vecteur $\{U\} \in C_h$ qui minimise l'énergie potentielle J . C_h étant la forme discrète du convexe C définie par : $C_h = \{V/V_N^i \leq 0 \text{ pour tout noeud } i \text{ de } \Gamma_C\}$.

La solution discrétisée $\{U\}$ est alors la solution du système linéaire :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.18)$$

sous la condition $U_N \leq 0$ sur Γ_C .

2.1.3 Résolution

Pour la résolution du problème discret de minimisation sous contraintes défini par l'équation (2.18), il existe un grand nombre de méthodes. Parmi elles, les méthodes de projection forment une classe importante. Elles s'appliquent à toutes les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires : Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, gradient conjugué... Par ailleurs, une formulation variationnelle équivalente à (6.14) qui permet une résolution du problème de contact sans frottement à l'aide de solveurs LCP (voir 2.1.4) itératifs ou directs est la suivante [17] :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{R}^N, F \in \mathbb{R}^N \text{ tels que} \\ K^*u = f^* + F \\ u_N \leq 0 \\ F_N \leq 0 \\ u_N F_N = 0 \end{array}} \quad (2.19)$$

où l'écriture est ici réduite aux seules inconnues de contact (forces et déplacements). Nous présenterons des solveurs de complémentarité linéaire de type itératifs tels que : Gauss-Seidel, la LATIN (LARGE TIME INCREMENT) et le gradient conjugué mais aussi de type direct tel que la méthode de Lemke.

2.1.4 Méthodes de résolution numérique de type LCP (Linear Complementary Problem)

On s'intéresse ici à la résolution numérique des systèmes algébriques (2.19) composés donc d'équations et d'inéquations. Le modèle de base d'un tel type de système est le Problème de Complémentarité Linéaire (LCP, Linear Complementary Problem [34]), constitué d'un système linéaire reliant deux variables que l'on impose positives et orthogonales entre elles.

Problème de Complémentarité Linéaire

Soient M une matrice carrée donnée de rang p et q un vecteur de $\mathbb{R}^p$ donné. Un problème de complémentarité linéaire (P_{LCP}) consiste à :

Trouver $w \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$w - Mz = q \quad (2.20)$$

$$w_i \geq 0, z_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (2.21)$$

$$w_i z_i = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (2.22)$$

On distingue deux grandes classes de méthodes de résolution :

- directes : Lemke, Dantzig...
- itératives : Gauss-Seidel, Gradient, LATIN, Newton généralisé...

Remarque :

Ces méthodes présentées pour résoudre un LCP peuvent aussi s'adapter aux problèmes avec frottement, soit par reformulation du problème en LCP, soit par adaptation spécifique de l'algorithme comme nous le verrons dans la section concernant les problèmes de contact avec frottement.

Nous présentons dans cette partie certains algorithmes implémentés dans la bibliothèque NSSPack de la plateforme SICONOS. Dans le dernier chapitre, nous donnerons la structure de cette plate-forme de calcul mais pour le moment, reprenons nos algorithmes.

Méthode directe : la méthode de Lemke

Cette méthode [30] est une méthode de programmation linéaire, elle s'applique à un problème de complémentarité linéaire. La méthode de Lemke est une méthode de pivotage, le nombre de pivotements est inférieur ou égal à 2^p . Le problème (2.20 - 2.21 - 2.22) est établi à l'aide de $2p$ variables. Il est non dégénéré si

$$w + z > 0 \quad (2.23)$$

c'est à dire que chaque solution de (2.20) a au moins $2p$ composantes non nulles.

Théorème [10, 35, 31, 17]

Pour tout $q \in \mathbb{R}^p$, le problème (P_{LCP}) possède une solution unique si et seulement si tous les déterminants principaux de la matrice M sont strictement positifs c'est à dire si M est une P-matrice.

De plus, si M est une matrice semi-définie positive et le système (2.20), (2.21) a une solution, alors le problème (P_{LCP}) a une solution.

Dans le cas semi-défini positif, ni l'existence ni l'unicité de la solution ne sont garanties. Cependant, quand le problème (P_{LCP}) est non dégénéré et M est

semi-définie positive, alors le problème a au moins une solution. L'idée de la méthode de Lemke est basée sur la remarque suivante :

Si $q_i > 0 \forall i = 1, \dots, p$ la solution est $z_i = 0$ et $w_i = q_i$.

S'il existe un indice j tel que $q_j \leq 0$, une variable supplémentaire réelle z_0 est introduite. Le problème (P_{LCP}) devient alors :

Problème $(P_{LCP'})$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in \mathbb{R}^p, \quad z \in \mathbb{R}^p \text{ et } z_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ Iw - Mz - 1z_0 = q \\ z_0 \geq 0 \\ w_i \geq 0, z_i \geq 0, w_i z_i = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{cases}$$

où $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, I est la matrice identité de $\mathbb{R}^p$.

Soient $A^0 = [I, -M, 1]$, la matrice à p lignes et $2p + 1$ colonnes, X et q^0 les vecteurs de $\mathbb{R}^{2p+1}$ et $\mathbb{R}^p$ définis par :

$$X = \begin{pmatrix} w \\ z \\ z^0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q^0 = q$$

Définition :

Soit $J \subset \{1, \dots, 2p + 1\}$ l'ensemble des indices de colonnes de la matrice identité de $\mathbb{R}^p$. Les composantes de X associées J sont appelées variables de base. (w_i, z_i) sont des variables complémentaires.

Lors de l'initialisation, la variable z_0 permet d'obtenir un second membre positif mais elle rentre dans la base. Le but de l'algorithme est donc de sortir z_0 de la base par pivotage, tout en gardant le second membre positif.

algorithme de Lemke :

- Initialisation : Soit l'indice s tel que : $q_s = \min_{i=1 \dots p} q_i$
La matrice a^1 et le second membre q^1 sont alors définis par :

$$\begin{cases} a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - a_{sj}^0 & j = 1 \dots 2p, i \neq s \\ a_{sj}^1 = -a_{sj}^0 & j = 1 \dots 2p + 1 \\ q_i^1 = q_i^0 - q_s^0 & \text{pour } i \neq s \\ q_s^1 = -q_s^0 \end{cases}$$

D'où le système à résoudre devient :

$$A^1 X = q^1$$

avec les conditions de complémentarité du problème $(P_{LCP'})$.

Remarque : Par construction, toutes les composantes de q^1 sont positives et z_0 devient alors la s^{ieme} variable de base à la place de w_s .

- Etape $k+1$: Soit t l'indice de colonne de la variable complémentaire de celle de sortie de la base à l'étape précédente et r l'indice de ligne tel que :

$$\frac{q_r^k}{a_{rt}^k} = \min_{i=1\dots p} \frac{q_i^k}{a_{it}^k}, a_{it}^k > 0$$

La matrice A^{k+1} et le second membre q^{k+1} valent alors :

$$\begin{cases} a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{it}^k}{a_{rt}^k} a_{rj}^k & j = 1\dots 2p+1, i \neq r \\ a_{rj}^{k+1} = \frac{a_{rj}^k}{a_{rt}^k} & j = 1\dots p \\ q_i^{k+1} = q_i^k - \frac{a_{it}^k}{a_{rt}^k} q_r^k & i \neq r \\ q_r^{k+1} = \frac{q_r^k}{a_{rt}^k} \end{cases}$$

Ainsi X_t rentre dans la base à la place de la r^{ieme} variable de base. Si $r = s$, z_0 sort de la base et la solution du problème est trouvée : les p variables de base seront alors respectivement égales aux p composantes de q^{k+1} et leurs variables complémentaires ainsi que z_0 seront nulles.

Convergence :

Quand M est semi-définie positive ou copositive -plus c'est à dire si M vérifie :

$$z^t M z \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \quad \text{ou/et} \quad z \geq 0 \quad \text{et} \quad z^t M z = 0 \Rightarrow (M + M^t)z = 0$$

terminer par un rayon l'algorithme de Lemke implique que le système (P_{LCP}) n'a pas de solution. Sinon il y a une terminaison en un nombre fini de pas (sauf problèmes d'arrondis numériques...).

Méthodes itératives

Dans cette section on introduit le nombre de contact nc . En effet les méthodes itératives se généralisant assez aisément au contact frottant, il est commode de distinguer nc , nombre de contacts, de la taille du système, noté p précédemment. Pour les problèmes sans frottement $p = nc$, pour les problèmes de contact frottant, $p = 2nc$ en $2D$ et $p = 3nc$ en $3D$.

Méthode de Gauss-Seidel non linéaire

Le LCP peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} w - Mz = q \\ w - \text{proj}_C(w - \rho z) = 0 \quad \text{o} \quad C = \mathbb{R}_{nc}^+, \rho > 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne consiste en nc lignes découplées, une par contact α : $w_\alpha - \max(0, w_\alpha - \rho z) = 0 \quad \alpha = 1\dots nc$. L'algorithme de Gauss-Seidel non linéaire [20]

va utiliser ce niveau local en associant à cette ligne, la ligne du système linéaire $w - Mz = q$ associée à ce contact α , c'est à dire à z_α , $w_\alpha - \sum_\beta M_{\alpha\beta} z_\beta = q_\alpha$.

Dans un processus itératif indicé par k , pour chaque contact α , on résout le système à deux inconnues $(z_\alpha^{k+1}, w_\alpha^{k+1})$, les autres inconnues étant par ailleurs fixées ($\beta \neq \alpha$), selon l'ordre de balayage, à valeurs à l'itéré k ou $k+1$,

$$\begin{cases} w_\alpha^{k+1} - M_{\alpha\alpha} z_\alpha^{k+1} = q_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} M_{\alpha\beta} z_\beta^{k+1} + \sum_{\beta > \alpha} M_{\alpha\beta} z_\beta^k \\ w_\alpha^{k+1} - \max(0, w_\alpha^{k+1} - \rho z_\alpha^{k+1}) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

C'est un système non linéaire de 2 équations à 2 inconnues (w_α^{k+1} et z_α^{k+1}), ces inconnues sont situées à l'intersection des graphes des fonctions continues affines par morceaux. La méthode s'apparente à une méthode de Gauss-Seidel non linéaire par "blocs" : chaque résolution du problème (2.24) pour le contact α est un problème non linéaire à résoudre sur le "bloc" des inconnues w_α et z_α , l'actualisation et le parcours de la liste des contacts relèvent de l'algorithme de Gauss-Seidel.

On introduit dans cette section les notations suivantes : on note N la taille du système et nc le nombre de contact. Pour les problèmes de contact sans frottement $N = nc$.

<i>Initialisation de w^0, z^0</i>	
[	while(iter < itermax) && (err > errmax))
	iter = iter + 1;
[	for(i = 0; i < nc; i++)
	avn = $\sum_{j=0}^{i-1} M(i, j) z^{k+1}(j)$;
	apn = $\sum_{j=i+1}^{nc} M(i, j) z^k(j)$;
	xn = $-q(i) - avn - apn$;
	if (xn > 0.)
	{ $z^{k+1}(i) = xn / M(i, i)$;
	$w^{k+1}(i) = 0.$; }
	else
	{ $z^{k+1}(i) = 0.$;
	$w^{k+1}(i) = -xn$; }
] Test de convergence	

TAB. 2.1 – Principe de l'algorithme de GSNL

Méthode LATIN

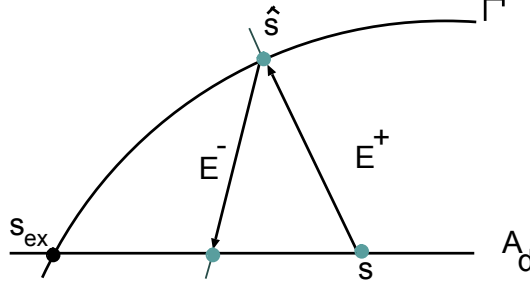


FIG. 2.1 – Principe de la méthode LATIN

Cette méthode [23] repose sur deux points essentiels dans le cas des problèmes stationnaires :

- le premier point de la stratégie consiste à séparer les difficultés en deux groupes : un premier regroupant les équations locales, non linéaires, un second regroupant les équations linéaires, globales.
- le deuxième point est l'utilisation d'une méthode itérative à deux étapes : une étape locale où l'on vérifie les conditions de contact unilatéral et une étape linéaire où l'on vérifie l'équilibre. L'algorithme nécessite l'utilisation d'une direction de recherche à choisir par l'utilisateur et qui sera détaillée dans la suite.

En notant s un élément solution d'un groupe d'équations, on définit alors deux ensembles : A_d l'ensemble des éléments s_n vérifiant les équations linéaires et Γ l'ensemble des éléments $\hat{s}_n$ vérifiant les équations locales non linéaires. La solution du problème est alors l'intersection des ensembles A_d et Γ .

L'algorithme considéré est itératif et à deux étapes. Le principe de la méthode consiste, à partir d'un élément initial $\hat{s}_0$ appartenant à l'ensemble Γ_d , à déterminer selon une direction de recherche des éléments appartenant successivement à l'ensemble A_d et à l'ensemble Γ_d jusqu'à convergence.

L'étape linéaire consiste à déterminer un élément s_{n+1} appartenant à A_d à partir d'une direction de recherche $-k$ et d'un élément appartenant à Γ_d supposé connu, $\hat{s}_n$. On vérifie donc :

- l'équilibre : $w - Mz = q$,
- et la direction de recherche : $w - \hat{w} = -k(z - \hat{z})$.

Les directions de recherche k et $-k$ sont des paramètres de la LATIN, la convergence est assurée à partir du moment où $k > 0$ [23].

L'étape locale, quant à elle, permet de trouver $\hat{s}_{n+1}$ appartenant à Γ_d à partir

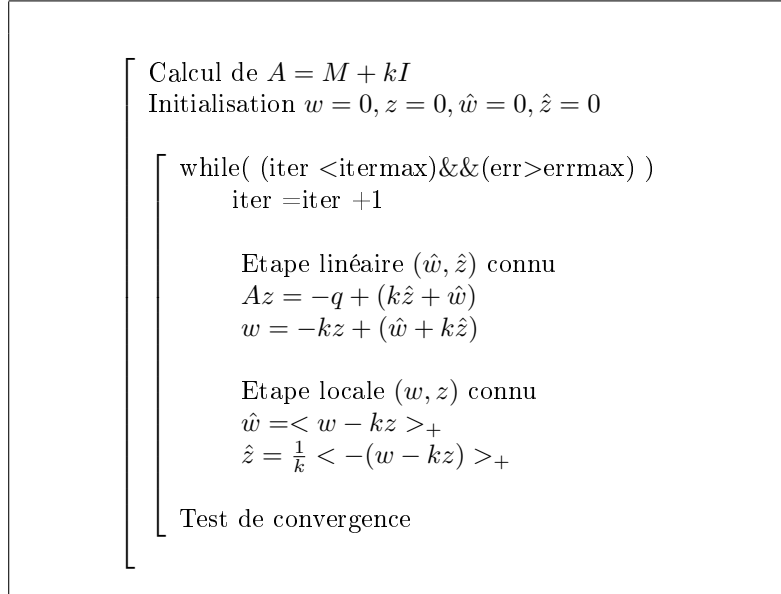
d'une direction de recherche k et d'un élément s_{n+1} appartenant à A_d supposé connu. On vérifie donc :

- la relation de comportement : $\hat{z} \geq 0, \hat{w} \geq 0, \hat{z}\hat{w} = 0$,
- et la direction de recherche : $\hat{w} - w = k(\hat{z} - z)$

Traitement des étapes linéaire et locale

- résolution de l'étape linéaire : En supposant connu $\hat{s}^n = (\hat{w}^n, \hat{z}^n)$, on cherche à déterminer s^{n+1} appartenant à A_d , pour cela on pose $\tilde{w}^n = \hat{w}^n + k\hat{z}^n$, et l'on obtient grâce aux relations ci-dessus $(M + kI)z^{n+1} = \tilde{w}^n - q$ et $w^{n+1} = \tilde{w}^n - kz^{n+1}$; ce qui nous permet d'obtenir simplement w^{n+1} et z^{n+1} .
- résolution de l'étape locale : Connaissant maintenant $s^{n+1} = (\hat{w}^{n+1}, \hat{z}^{n+1})$, on cherche $\hat{s}^{n+1}$ appartenant à Γ_d . On pose donc $\tilde{w}^{n+1} = w^{n+1} - kz^{n+1}$ et l'on obtient grâce aux relations ci-dessus : $\hat{w}^{n+1} = \max(0, \tilde{w}^{n+1})$ et $\hat{z}^{n+1} = -k^{-1}\max(0, -\tilde{w}^{n+1})$.

Dans le cas particulier des problèmes stationnaires, cette méthode s'apparente à une technique de Lagrangien augmenté.



TAB. 2.2 – Principe de l'algorithme de la LATIN

Méthode de Gradient Conjugué Projeté (GCP)

Comme il a été montré dans la section 2.1.1, on peut dans le cas du contact unilatéral sans frottement, écrire un problème d'optimisation quadratique sous contraintes (la matrice K étant symétrique et au moins définie positive). Adap-

Calcul de $r^0 = -q - Mz^0$ Initialisation de $w^0 = r^0, p^0 = r^0$ while((iter < itermax) && (err > errmax)) iter = iter + 1 $\alpha^{k+1} = \frac{r^k \cdot p^k}{p^k \cdot M p^k}$ $z^{k+\frac{1}{2}} = z^k + \alpha^{k+1} p^k$ $z^{k+1} = \text{proj}_C(z^{k+\frac{1}{2}})$ $r^{k+1} = -q - Mz^{k+1}$ $w^{k+1} = \text{proj}_{F_C^k}(r^{k+1})$ $z^{k+1} = \text{proj}_{F_C^k}(p^k)$ $\beta^{k+1} = -\frac{w^{k+1} \cdot M p^k}{p^k \cdot M p^k}$ $p^{k+1} = w^{k+1} + \beta^{k+1} z^{k+1}$ Test de convergence
--

TAB. 2.3 – Principe de l’algorithme du GCP

tée à notre problème de base *LCP*, la formulation est alors

$$z = \operatorname{argmin}_{\tilde{z} \in C} \left(\frac{1}{2} \tilde{z}^t M \tilde{z} + q^t \tilde{z} \right) \quad (2.25)$$

avec $C = \Re_+^{nc}$, orthant positif. Une écriture synthétique d’un algorithme de gradient conjugué projeté est donné dans [43],

$$z^{k+1} = \text{proj}_C\{z^k + \alpha_k p^k\} \quad \text{où} \quad p^k = w^k + \beta_k y^k \quad (2.26)$$

Dans ces expressions p^k désigne la direction de descente obtenu par conjugaison de deux directions w^k et y^k définies par projection sur le cône tangent à C en z^k , noté $N_C^0(z^k)$; respectivement du résidu r^k ($r^k = -q - Mz^k$) et de la direction de descente précédente $w^k = \text{proj}(r^k, N_C^0(z^k))$; $y^k = \text{proj}(p^{k-1}, N_C^0(z^k))$. Les paramètres scalaires sont :

- le paramètre de descente optimal, $\alpha^k = \frac{r^k \cdot p^k}{p^k \cdot M p^k}$
- la paramètre de conjugaison $\beta^k = -\frac{w^k \cdot M p^{k-1}}{p^{k-1} \cdot M p^{k-1}}$.

On trouvera plus de détails dans [43].

Bien que potentiellement moins robuste que les méthodes précédentes, on attend de cet algorithme une convergence plus rapide.

Comparaison des algorithmes sur quelques cas
tests

2.1.5 Comparaison des algorithmes sur quelques cas tests

Nous allons dans cette partie nous intéresser à la comparaison des méthodes de résolutions numériques présentées dans la section précédente. Trois points vont retenir notre attention : la qualité de la solution, la rapidité à la convergence pour les méthodes itératives et leur comportement quand le nombre de contraintes (contacts) augmente.

Dans le cadre du programme européen SICONOS (Modelling, Simulation and Control of Nonsmooth Dynamical Systems) n°IST2001-37172, nous avons implanté en langage C les algorithmes précédents dans une librairie numérique nommée NSSPack (Non Smooth Solvers Package). Cette librairie permet à l'ensemble de la plateforme de fournir un ensemble de solveurs génériques adaptés aux systèmes non réguliers. Bien qu'utilisés et testés ici pour des problèmes de mécanique, ces solveurs sont adaptés pour une large gamme de problématiques (électronique, robotique...). Des utilitaires ont aussi été réalisés comme l'interface avec le logiciel *matlab*TM que nous utiliserons pour les tests présentés ici.

Présentation d'un problème de rectangle

Le code éléments finis Cast3M est utilisé ici pour créer et mailler les structures et pour définir les matériaux et les conditions aux limites. Les calculs sont effectués sous Matlab en utilisant un logiciel prototype d'éléments finis. Le post-traitement utilise cast3M⁴ ou GMSH⁵ selon les cas.

L'étude s'effectue en contrainte plane. Le maillage choisi utilise des triangles à trois noeuds et une interpolation linéaire du déplacement.

La géométrie est donnée par la figure 2.2 (la longueur du rectangle $L = 1\text{m}$), un déplacement nul est imposé sur le bord gauche du rectangle, une répartition d'effort constante de 20MPa est appliquée sur une partie supérieure et un jeu de 0.5mm est laissé sur la partie inférieure entre la structure et un obstacle rigide. On prend un module d'Young $E = 200000\text{MPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.33$.

Nous choisissons comme solution de référence celle donnée par la méthode directe en notre possession : la méthode de Lemke. Elle nous permet donc de comparer la qualité des solutions obtenues par les différentes méthodes itératives. Cette comparaison se fait grâce au calcul de la différence entre les différentes solutions et celle de Lemke, que l'on note η avec :

$$\eta = \sqrt{\frac{(z_i - z_{lem})^t M (z_i - z_{lem})}{z_{lem}^t M z_{lem}}} \quad (2.27)$$

où z_i représente la solution obtenue par une méthode numérique itérative.

⁴<http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/index.jspCastem2004>

⁵<http://www.geuz.org/gmsh/>

Les méthodes de résolutions utilisées sont celles de Gauss-Seidel Non Linéaire (GSNL), du Gradient Projeté Conjugué (GPC) et de la LATIN. Les résultats obtenus sont donnés par les figures 2.3, 2.4, 2.5 et le tableau 2.4.

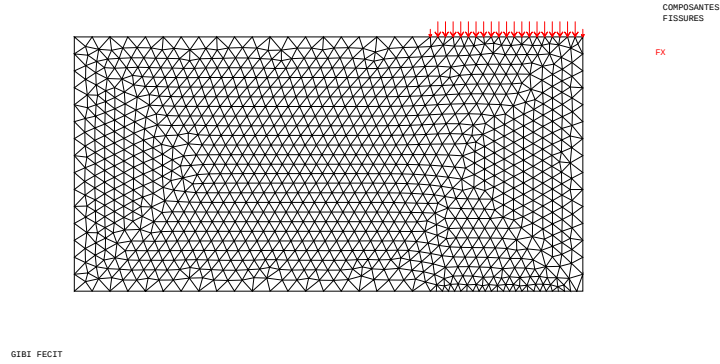


FIG. 2.2 – Problème du rectangle, 2386 degrés de liberté-26 noeuds de contact

Méthode	Nombre d'itérations pour obtenir une même qualité de solution ($\eta = 10^{-4}$)
<i>GSNL</i>	182
<i>GCP</i>	41
<i>LATIN</i> $k = 0.09$	50
<i>LATIN</i> $k = 0.2$	36
<i>LATIN</i> $k = 0.3$	59
<i>LATIN</i> $k = 0.5$	91
<i>LATIN</i> $k = 0.7$	127

TAB. 2.4 – Comparaison des méthodes.

Avant de tirer de quelconques conclusions sur le comportement des méthodes, nous décidons de traiter différents cas. Néanmoins, nous pouvons observer le comportement de la LATIN pour des valeurs de la direction de recherche différentes et constater qu'il existe des valeurs pour lesquelles on optimise la vitesse de convergence, cf. figure 2.5.

Nous traitons ensuite le même exemple avec un nombre de noeuds de contact

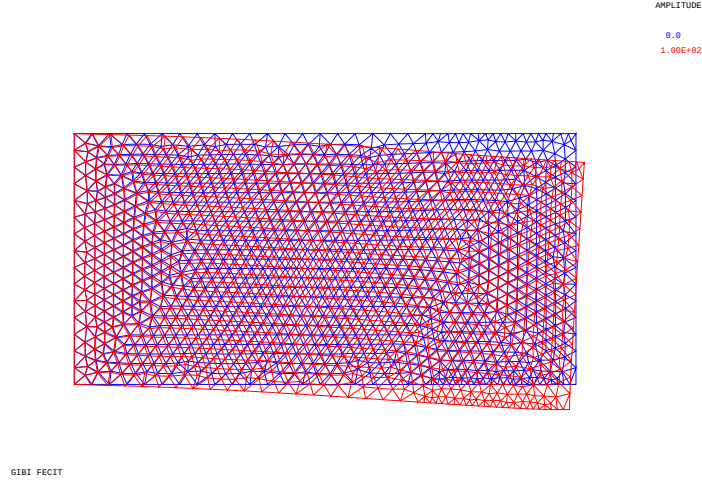


FIG. 2.3 – Géométrie déformée et non déformée

8 et 12 fois plus important en raffinant le maillage précédent et en augmentant la charge à $200MPa$ (cf. figure 2.7), dans le but :

- de tester la stabilité et la robustesse de la méthode qui sert à construire la référence, à savoir la méthode de Lemke ;
- d’étudier l’influence du nombre de noeuds de contact sur la solution.

Les résultats trouvés sont donnés par le tableau 2.5 :

nc	Résidu d’équi- libre normé	Min(z)	Max(z)	Min(w)	Max(w)	z^tw	Cond(M)
201	1.8928e-14	0	3.19e-04	0	1.1253	0	3.3801e+03
301	0.0263	0	3.14e-04	0	0.7707	0	5.1786e+03

TAB. 2.5 – Résultats donnés par la méthode de Lemke en fonction du nombre de noeuds de contact.

On remarque que la méthode de Lemke ne vérifie plus très bien l’équation d’équilibre

$$\left\| \frac{Mz - w - q}{q} \right\|$$

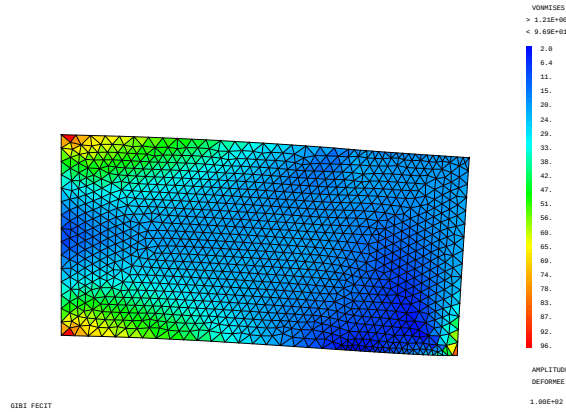


FIG. 2.4 – Contraintes de Von Mises

lorsque le nombre de noeuds de contact devient élevé : on passe d'une vérification de l'ordre de 10^{-14} , pour 201 noeuds de contact, à une vérification de l'ordre de 10^{-2} , pour 301 noeuds de contact. L'augmentation du conditionnement de M n'étant pas significative, il s'agit de cumuls d'erreurs numériques lors des pivotages successifs dont le nombre augmente avec le nombre de contacts potentiels. Ce résultat avait déjà été trouvé par Laurence Greco [17] sur une géométrie prenant en compte une partie d'une presse mécanique à haute pression. Le maillage était constitué de 11933 noeuds dont 250 noeuds de contact. La méthode de Lemke avait échoué dans ce cas.

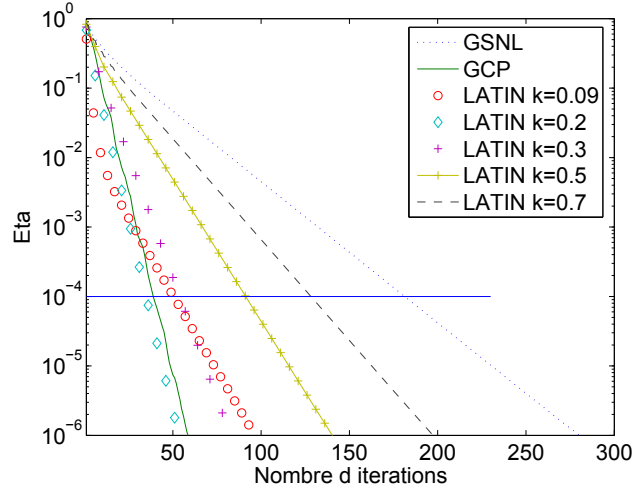


FIG. 2.5 – Convergence des méthodes itératives dans le cas du rectangle ayant 26 noeuds de contact

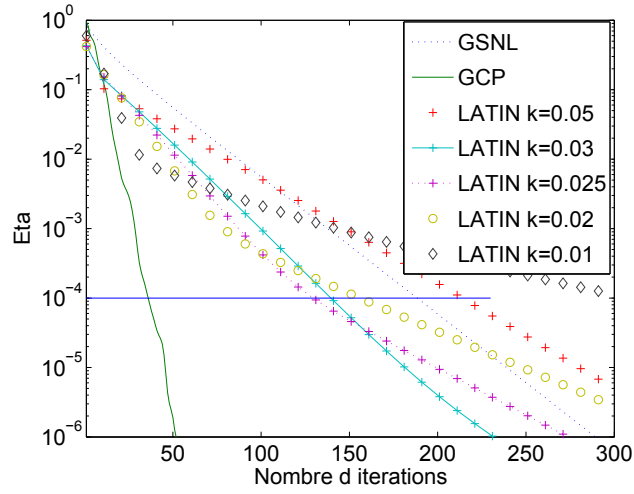


FIG. 2.6 – Convergence des méthodes pour 201 noeuds de contact

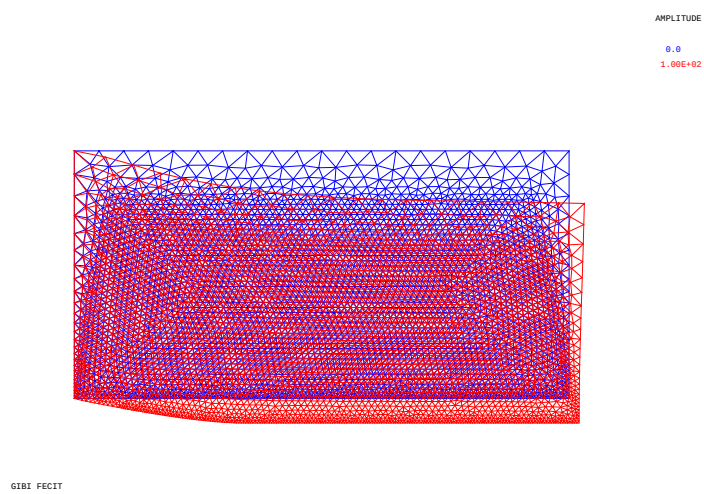


FIG. 2.7 – Déformée pour 201 noeuds de contact

Présentation d'un problème de poinçonnement

L'objectif de ce cas test est d'avoir un cas où le nombre de contacts actifs peut évoluer régulièrement en fonction du niveau de charge appliquée, de façon à forcer aussi son évolution pendant les itérés successifs.

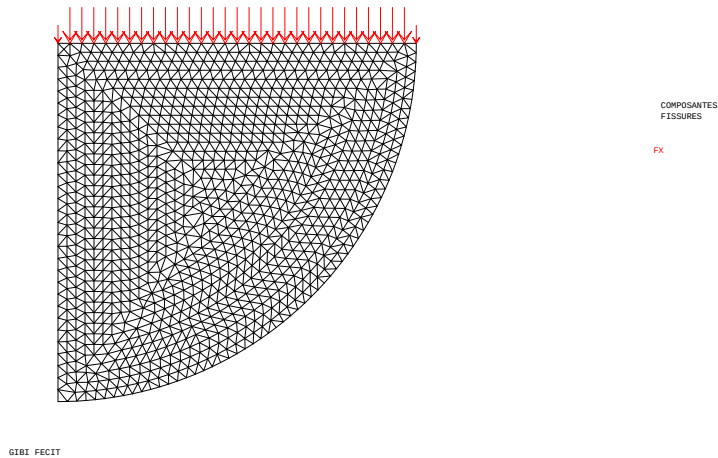


FIG. 2.8 – Maillage du poinçon, 2194 degrés de liberté-31 noeuds de contact

La géométrie étudiée est donnée par la figure 2.8, le maillage est triangulaire. Un déplacement nul selon x est imposé sur le bord gauche, une répartition d'effort constante de $30MPa$ est appliquée sur la partie supérieure. L'obstacle est toujours un $\frac{1}{2}$ plan infini horizontal. On prend un module d'Young $E = 200000MPa$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.33$.

La solution obtenue par la méthode de Lemke est choisie comme solution de référence pour comparer les méthodes entre elles.

Nous constatons dans ce cas que tous les algorithmes nous donnent une solution vérifiant aussi bien l'équilibre que les relations de complémentarité et ce, à un mouvement de solide rigide près.

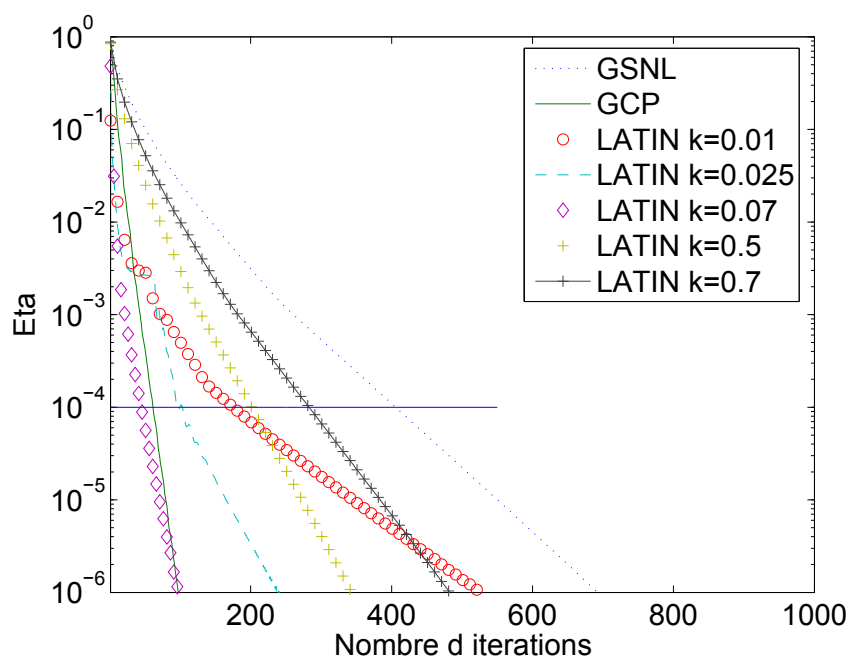


FIG. 2.9 – Convergence des différents solveurs du poinçon ayant 31 noeuds de contact ($F = 30$ MPa)

Nous traitons donc un autre exemple assez similaire cf. figure 2.10 : il s'agit d'un autre poinçonnement.

- dans un premier temps, on examine le comportement de la méthode directe pour un nombre de noeuds de contact variant du simple au double, en appliquant une répartition d'effort constante de $30MPa$ sur la partie supérieure cf. Tableau 2.6,
- dans un second temps, on s'intéresse à la convergence des méthodes itératives pour une charge constante appliquée de $3000MPa$ cf. Figure 2.11.

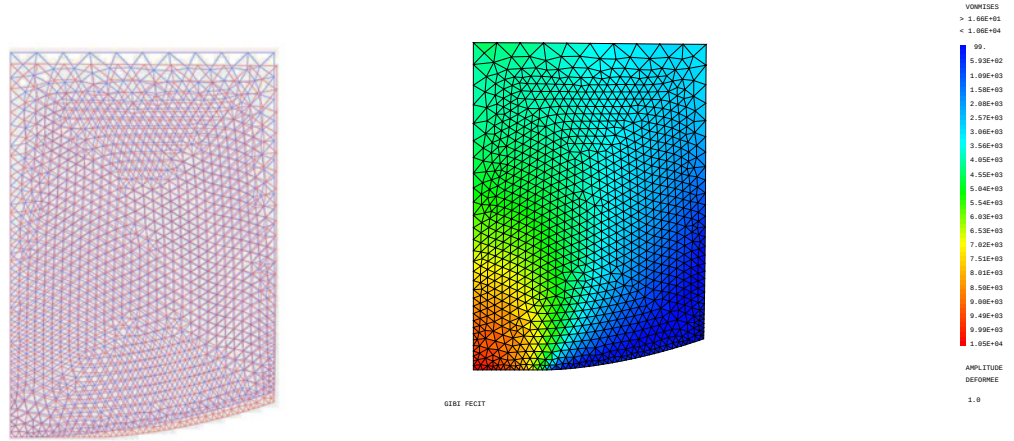


FIG. 2.10 – Déformée et Von Mises, 2258 ddl- 51 noeuds de contact avec un effort de $3000 MPa$

L'étude du comportement de la méthode de Lemke montre, lorsque le nombre de noeuds de contact croit, que l'équilibre est moins bien vérifiée. Les résultats trouvés sont donnés par le tableau 2.6 :

nc	Résidu d'équilibre normé	Min(z)	Max(z)	Min(w)	Max(w)	z^tw	Cond(M)
51	4.5924e-14	0	0.1200	0	11.7280	0	3.8282e+16
76	8.0112e-04	0	0.1198	0	12.2091	0	2.2490e+16
101	0.0822	0	0.1058	0	54.6521	0	9.782e+16

TAB. 2.6 – Résultats donnés par la méthode de Lemke en fonction du nombre de noeuds de contact pour un effort $F = 30 MPa$.

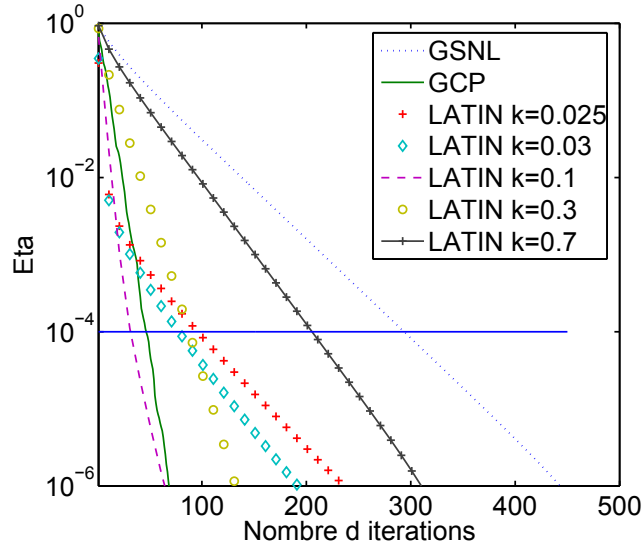


FIG. 2.11 – Convergence des différents solveurs, 2258 ddl-51 noeuds de contact avec un effort 3000 MPa

En terme de taux de convergence (nombre d'itérations pour atteindre une qualité de solution donnée), on observe un très bon comportement du Gradient. Quelque soit le nombre de noeuds de contacts, l'accroissement du nombre d'itérations est moins marqué par le gradient (cf. 2.5 et 2.6). Globalement, les résultats sont équivalents : les méthodes du GCP et de la LATIN semblent être les plus performantes alors que la méthode de GSNL est classiquement plus lente. Cependant, la LATIN nécessite une petite étude de sensibilité afin de choisir une direction de recherche optimale (dans le sens où, celle-ci améliore le taux de convergence).

La méthode directe a été mise en défaut sur deux types de problèmes pour des nombres de noeuds de contact différents (cf. Tableau 2.5 et Tableau 2.6). Dans ces deux cas, le conditionnement ne se dégrade pas nécessairement : il semble jouer un rôle secondaire dans cet échec. Le cumul d'erreurs d'arrondi pendant les pivotages et la nature du problème semblent par contre être les principaux facteurs d'échec de la méthode.

Chapitre 3

Problème de contact avec frottement de Coulomb

Contents

3.1	Contact avec frottement de Coulomb	35
3.1.1	Formulation variationnelle	36
3.1.2	Problème de contact avec frottement de Coulomb en vitesse	37
3.1.3	Discrétisation temporelle	38
3.1.4	Résolution du problème de contact frottant	38
3.1.5	Comparaison de solveurs pour des problèmes de contact avec frottement	42

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la résolution du problème de contact frottant en mécanique des structures. Nous allons donc avant d'aborder le sujet rappeler quelques lois de frottement qui seront utiles pour l'écriture du problème :

- le frottement de Tresca est une loi de frottement à seuil fixe donné g . Elle s'écrit

$$\begin{cases} \|F_T\| \leq g \text{ avec} \\ \text{si } \|F_T\| < g \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{si } \|F_T\| = g \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_T = -\lambda F_T \end{cases}$$

- le frottement de Coulomb est une loi de frottement à seuil dépendant de la contrainte normale. En remplaçant dans le frottement de Tresca, le seuil g par $\mu|F_N|$ on donne en fait l'expression du frottement de Coulomb. La formulation de cette loi s'écrit en terme de vitesse de glissement $\dot{u}_T$. Néanmoins, une écriture en déplacement de cette loi est souvent introduite dans le cadre de sollicitations particulières (chargements monotones par exemple).

3.1 Problème de contact statique avec frottement de Coulomb en déplacement

On considère un corps élastique déformable Ω de frontière supposée régulière Γ dont la partition est la suivante $\Gamma_F \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$. On note ϕ_1 une densité volumique de force donnée dans Ω , ϕ_2 une densité surfacique de force donnée sur Γ_F . On se place sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème mécanique de contact unilatéral avec frottement de Coulomb statique (P_{cf}) que l'on nomme problème de Signorini avec frottement de Coulomb est le suivant :

Trouver le champ de déplacements u vérifiant :

- La loi de comportement élastique et les équations d'équilibre

$$\text{sur } \Omega \quad \begin{cases} \epsilon = \text{grad}_s u \\ \sigma = K\epsilon \\ \text{div} \sigma = -\phi_1 \end{cases}$$

- Les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot n &= \phi_2 \quad \text{sur } \Gamma_F \end{aligned}$$

- Les relations de contact unilatéral et de frottement, exprimées en terme

de déplacement

$$sur \Gamma_C \left\{ \begin{array}{l} \sigma \cdot n = F \\ u_N \leq 0 \\ F_N \leq 0 \\ u_N F_N = 0 \\ \|F_T\| \leq \mu |F_N| \text{ avec} \\ \text{si } \|F_T\| < \mu |F_N| \text{ alors } u_T = 0 \\ \text{si } \|F_T\| = \mu |F_N| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_T = -\lambda F_T \text{ (si } F_N \neq 0) \end{array} \right.$$

On peut se référer à [12, 40, 17, 29, 11, 4].

Nous allons donc transformer ce problème en un problème équivalent qui nous permettra de bâtir le problème discrétisé.

3.1.1 Formulation variationnelle

On se place sous des hypothèses de régularité suffisantes pour les fonctions considérées. On introduit l'ensemble C des déplacements admissibles :

$$C = \{v \in U / v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$$

avec

$$U = \{v \in [H_1(\Omega)]^2 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

Le problème (P_{cf}) équivaut au problème variationnel (P_{vcf}) suivant :

Trouver $u \in C$ tel que

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in C \quad (3.1)$$

où $j(u, v) = \int_{\Gamma_C} \mu |F_N(u)| \|v_T\| ds$ est un terme non différentiable correspondant au travail de la force de frottement. On pourra trouver une preuve formelle dans [12, 29].

La forme implicite de l'inéquation variationnelle ne permettant pas d'associer directement un problème de minimisation au problème (P_{cf}) , on pose par conséquent un nouveau problème en introduisant un problème de point fixe sur le seuil de glissement.

A chaque étape de ce point fixe, on résoud un problème de frottement à seuil fixé (autrement dit un problème de Tresca) qui conduit à une inéquation variationnelle à laquelle on peut associer un principe de minimum. Ecrivons donc ces problèmes :

Problème (P_f) : Trouver g point fixe de l'application S :

$$S(g) = -\mu F_N(u_g) \quad (3.2)$$

où u_g est solution (unique) du problème de frottement de Tresca suivant :

Problème (P_T) : Pour g donné, trouver $u_g \in C$ tel que :

$$a(u_g, v - u_g) + j_g(v) - j_g(u_g) \geq L(v - u_g) \quad \forall v \in C \quad (3.3)$$

où $j_g(v) = \int_{\Gamma_C} g \|v_T\| dl$.

Remarque :

j_g est une fonctionnelle continue convexe non différentiable sur $(H^1(\Omega))^2$.

On montre [40] que le problème (P_T) peut se formuler en terme de minimisation sous contraintes d'une fonctionnelle contenant une partie quadratique et une partie non différentiable comme suit :

Problème (P_m) : Pour g donné, trouver $u_g \in C$ tel que :

$$J(u_g) \leq J(v) \quad \forall v \in C \quad (3.4)$$

avec $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) + j_g(v)$.

3.1.2 Problème de contact avec frottement de Coulomb en vitesse

Nous écrivons le problème en utilisant ici la forme naturelle du frottement de Coulomb c'est à dire son écriture en terme de vitesses. Il s'agit donc de remplacer dans (P_{cf}) le frottement statique par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \|F_T\| \leq \mu |F_N| \text{ avec} \\ \text{si } \|F_T\| < \mu |F_N| \text{ alors } \dot{u}_T = 0 \\ \text{si } \|F_T\| = \mu |F_N| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dot{u}_T = -\lambda F_T \end{cases}$$

On constate alors que l'écriture du problème fait intervenir d'une part des déplacements (formulation naturelle des conditions de contact unilatéral) et d'autre part des vitesses (formulation naturelle du frottement de Coulomb). Une formulation variationnelle permettant de conserver les deux variables a été développé dans [7, 8].

Cette formulation variationnelle se fait grâce à un couplage de deux inéquations :

$$\begin{cases} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq L(v - \dot{u}(t)) + \langle \sigma_N(u(t)), v_N - \dot{u}_N(t) \rangle, \quad \forall v \in V \\ \langle \sigma_N(u(t)), z_N - u_N(t) \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C \end{cases}$$

où $\langle \sigma_N(u(t)), z_N - u_N(t) \rangle = \int_{\Gamma_C} \sigma_N(u(t))(z_N - u_N(t)) dl$, caractérise la pénétration dans l'obstacle.

3.1.3 Discrétisation temporelle

On considère des pas de temps réguliers de longueur $h = t_{i+1} - t_i$. La forme incrémentale du problème peut être écrite sous la forme d'une seule inéquation variationnelle [8]. Il s'agit en fait d'une inéquation quasi-variationnelle, la fonctionnelle J ayant pour paramètre la solution elle-même u^{i+1} .

Problème (P_{inc}) : Trouver $u^{i+1} \in C$ tel que :

$$a(u^{i+1}, w - u^{i+1}) + j(u^{i+1}, w - u^i) - j(u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \geq L(w - u^{i+1}) \quad \forall w \in C \quad (3.5)$$

Pour résoudre ce problème, on met en place un point fixe et un problème de minimisation. On introduit un point fixe sur le seuil de glissement $g = \mu|F_N(u)|$ de telle manière que l'on ait à résoudre au cours du processus de point fixe le problème auxiliaire suivant :

Trouver $u \in C$ tel que :

$$a(u, v - u) + j_g(w - u^i) - j_g(u - u^i) - L(w - u) \geq 0 \quad \forall w \in C \quad (3.6)$$

où $j_g(v - u^i) = \int_{\Gamma_C} g \|v_T - u_T^i\|$.

Ce dernier problème présente l'avantage d'être reformulé comme un problème d'optimisation ou de quasi-optimisation [1] :

$$u \in \operatorname{argmin}_{v \in C} J(u, v) \quad (3.7)$$

avec $J(u, v) = \frac{1}{2}a(u, v) + \int_{\Gamma_C} \mu|F_N(u)| \|v_T - u_T^i\| dl - L(v)$

3.1.4 Résolution du problème de contact frottant

Les problèmes de contact frottant ne s'écrivent pas à priori sous la forme de problèmes de complémentarité (Linear Complementary Problem, LCP). Leur résolution peut être traitée de différentes façons :

- soit grâce à des algorithmes dédiés,
- soit grâce à la reformulation du problème sous la forme d'un LCP entraînant ainsi un changement de variable.

Nous allons donc dans ce qui suit présenter ces différents procédés de résolution numérique.

Le problème de contact frottant en LCP

On réduit le problème discret aux seules inconnues de contact (forces et déplacements normaux et tangentiels). La dimension du système est alors réduite à deux fois le nombre de noeuds de contact. On note 'l' l'indice relatif aux équations et variables libres, c'est à dire non concernées par le contact, et 'c' l'indice de celles relatives au contact. On note U le vecteur déplacement, F_c celui des forces de contact inconnues et f_l celui des forces appliquées. La matrice A

du problème discrétisé, se décompose selon les valeurs nodales des noeuds de contact, indicées par 'c' et les valeurs libres, indicées par 'l' de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{ll} & A_{lc} \\ A_{cl} & A_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l \\ U_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_l \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condensation sur les noeuds de contact consiste à éliminer la première ligne, conduisant au système (3.8) :

$$\underbrace{(A_{cc} - A_{cl}A_{ll}^{-1}A_{lc})}_{A^*} U_c - F_c = \underbrace{-A_{cl}A_{ll}^{-1}f_l}_{f^*} \quad (3.8)$$

Si l'on suppose U_c et F_c décomposés en leurs composantes normales U_N , F_N et tangentielles U_T , F_T , le système précédent s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} A_{NN}^* & A_{NT}^* \\ A_{TN}^* & A_{TT}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_N \\ U_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_N \\ F_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_N^* \\ f_T^* \end{pmatrix}$$

Remarque :

Dans le cas sans frottement pour lequel $F_T = 0$ une deuxième élimination conduit à

$$\underbrace{(A_{NN}^* - A_{NT}^*A_{TT}^{*-1}A_{TN}^*)}_{\tilde{A}} U_N - F_N = \underbrace{f_N^* - A_{NT}^*A_{TT}^{*-1}f_T^*}_{\tilde{f}} \quad (3.9)$$

On retrouve la forme classique du LCP en posant $z = U_N$, $w = F_N$, $M = \tilde{A}$ et $q = -f_N^* + A_{NT}^*A_{TT}^{*-1}f_T^*$.

Il s'agit maintenant d'écrire le problème de contact frottant sous la forme d'un LCP [41, 21, 22]. On peut s'y ramener dans le cas bidimensionnel en effectuant un changement de variables à partir du système (3.8) complété par les relations de Signorini et de Coulomb. On introduit les variables $a_1 = -F_T + \mu F_N$, $a_2 = F_T + \mu F_N$ et une décomposition en parties positive et négative du glissement tangentiel $U_T = b_2 - b_1$ ($b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$). La loi de Coulomb impose la positivité de a_1 et a_2 , et la complémentarité de a_1 et b_1 ($a_1 \cdot b_1 = 0$) et a_2 et b_2 ($a_2 \cdot b_2 = 0$). De plus F_N et F_T se retrouvent simplement à partir de a_1 et a_2 par $F_T = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$ et $\mu F_N = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

Le système (3.8) d'inconnues (U_N, U_T, F_N, F_T) est alors remplacé par le système suivant d'inconnues $(U_N, b_1, b_2, F_N, a_1, a_2)$

$$\begin{pmatrix} A_{NN}^* & -A_{NT}^* & A_{NT}^* \\ A_{TN}^* & -A_{TT}^* & A_{TT}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_N \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -0.5I & 0.5I \\ \mu I & 0.5I & -0.5I \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} F_N \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_N^* \\ f_T^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après inversion de la matrice B, on arrive à un problème de complémentarité en identifiant :

$$M = \begin{pmatrix} A_{NN}^* & -A_{NT}^* & A_{NT}^* \\ -A_{TN}^* & A_{TT}^* & A_{TT}^* \\ A_{TN}^* & -A_{TT}^* & A_{TT}^* \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{NN}^* & -A_{NT}^* & A_{NT}^* \\ A_{NN}^* & -A_{NT}^* & A_{NT}^* \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} f_N^* \\ -f_T^* \\ f_T^* \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ f_N^* \\ f_N^* \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} U_N \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} F_N \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Dans le cas tridimensionnel, il faut procéder à une facettisation du cône de Coulomb pour pouvoir se ramener à un problème de complémentarité; cette technique a cependant comme inconvénient de multiplier fortement le nombre de degrés de liberté.

Algorithme de type LATIN

On présente ici un algorithme dédié à la résolution de problèmes de contact avec frottement en mécanique des structures [23].

Le principe de la méthode reste le même que dans le cas d'un problème d'élasticité en contact sans frottement : l'étape linéaire consiste à déterminer un élément s_{n+1} appartenant à A_d à partir d'une direction de recherche $-k$ et d'un élément appartenant à Γ_d supposé connu, $\hat{s}_n$. On vérifie cette fois :

- l'équilibre : $F - AU = -f$,
- et les directions de recherche :

$$\begin{cases} F_N - \hat{F}_N = -k(U_N - \hat{U}_N) \\ F_T - \hat{F}_T = -k(U_T - \hat{U}_T) \end{cases}$$

Les directions de recherche k et $-k$ sont des paramètres de la Latin, la convergence est assurée à partir du moment où $k > 0$ [23].

L'étape locale, quant à elle, permet de trouver $\hat{s}_{n+1}$ appartenant à Γ_d à partir d'une direction de recherche k et d'un élément s_{n+1} appartenant à A_d supposé connu. On vérifie donc :

- les relations de contact : $\hat{U}_N \geq 0, \hat{F}_N \geq 0, \hat{U}_N \hat{F}_N = 0$,
- les relations de frottement : $\hat{U}_T \leq 0, \hat{F}_T - \mu \hat{F}_N \leq 0, \hat{U}_T \cdot (\hat{F}_N - \mu \hat{F}_N) = 0$,
- les directions de recherche :

$$\begin{cases} F_N - \hat{F}_N = -k(U_N - \hat{U}_N) \\ F_T - \hat{F}_T = -k(U_T - \hat{U}_T) \end{cases}$$

Traitement des étapes linéaire et locale

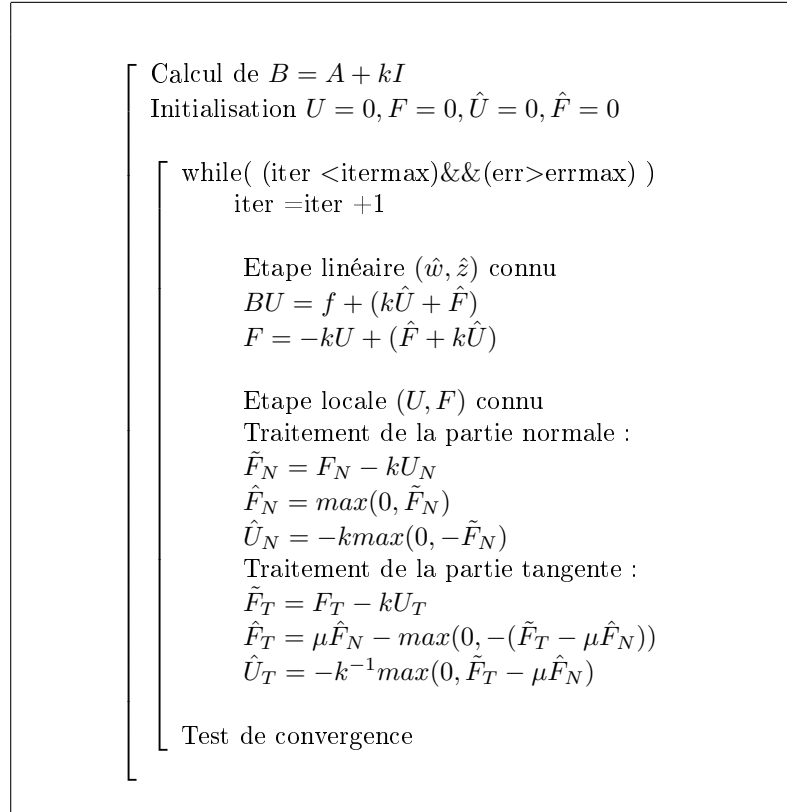
- résolution de l'étape linéaire : En supposant connu $\hat{s}^n = (\hat{U}^n, \hat{F}^n)$, on cherche à déterminer s^{n+1} appartenant à A_d , pour cela on pose $\tilde{F}^n = \hat{F}^n + k\hat{U}^n$, et l'on obtient grâce aux relations ci-dessus $(A + kI)U^{n+1} = \tilde{F}^n + f$ et $F^{n+1} = \tilde{F}^n - kU^{n+1}$; ce qui nous permet d'obtenir simplement F^{n+1} et U^{n+1} .
- résolution de l'étape locale : Connaissant maintenant $s^{n+1} = (\hat{U}^{n+1}, \hat{F}^{n+1})$, on cherche $\hat{s}^{n+1}$ appartenant à Γ_d . La résolution se fait en séparant la partie normale de la partie tangentielle : pour la partie normale, on pose

$\tilde{F}_N^{n+1} = F_N^{n+1} - kU_N^{n+1}$ et on obtient ainsi grâce aux relations ci-dessus :
 $\hat{F}_N^{n+1} = \max(0, \tilde{F}_N^{n+1})$ et $\hat{U}_N^{n+1} = -k^{-1}\max(0, -\tilde{F}_N^{n+1})$; grâce à ces relations et en posant $\hat{F}_T^{n+1} = F_T^{n+1} - kU_T^{n+1}$, on obtient pour la partie tangente $\hat{F}_T^{n+1} = \mu\hat{F}_N^{n+1} - \max(0, -(\tilde{F}_T^{n+1} - \mu\hat{F}_N^{n+1}))$ et $\hat{U}_T^{n+1} = -k\max(0, \tilde{F}_T^{n+1} - \mu\hat{F}_N^{n+1})$.

Remarque :

Appliquée à un incrément d'un problème de contact avec frottement, il n'y a plus de temps à proprement parler (au sens d'un problème d'évolution).

La méthode à Grand incrément de temps dans ce contexte est apparentée à des méthodes de Lagrangien augmenté [9, 2].



TAB. 3.1 – Principe de l'algorithme de la LATIN

3.1.5 Comparaison de solveurs pour des problèmes de contact avec frottement

On s'intéresse ici aux problèmes de contact frottant sur certains exemples traités précédemment, avec un coefficient de frottement $\mu = 0.5$. La résolution numérique de ces problèmes demande un travail de pré-traitement important : par exemple la méthode de Lemke nécessite une réécriture du problème, c'est à dire une condensation et un changement de variables (comme décrit auparavant) ; ce qui rend la matrice M non symétrique. La méthode du gradient conjugué projeté (GCP) pour résoudre un LCP ne peut donc plus être utilisée après cette modification du problème alors que la méthode de Gauss-Seidel non linéaire (GSNL) le peut. Pour la LATIN, nous utilisons un algorithme dédié à ce type de problème qui nécessite une simple condensation.

Pour les résultats suivants, la solution de référence est donnée par la méthode de Lemke.

Présentation d'un problème de poinçonnement

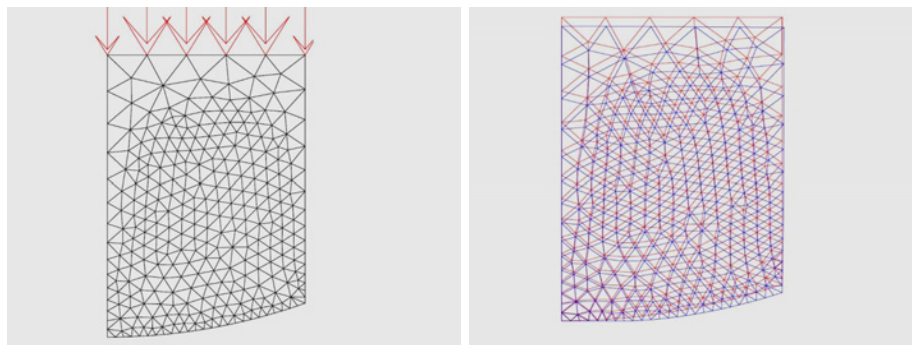


FIG. 3.1 – Problème de poinçonnement avec frottement , 596 degrés de liberté-50 noeuds de contact à gauche et géométrie déformée et non déformée à droite

Présentation d'un problème de rectangle

Ces problèmes sont évidemment plus difficile que que dans les cas correspondants sans frottement : le nombre d'itérations est plus élevé. Les tendances restent les mêmes : la méthode LATIN continue de converger plus rapidement que la méthode de GSNL. Cependant, il reste toujours une étude de sensibilité du paramètre de recherche à régler. Celui-ci permet d'ailleurs une amélioration nette du taux de convergence comme le montre les figures 3.2 et 3.4.

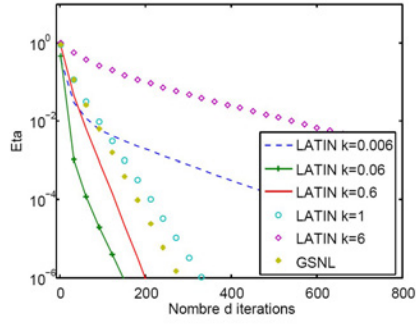


FIG. 3.2 – Comparaison des convergences pour le poinçon.

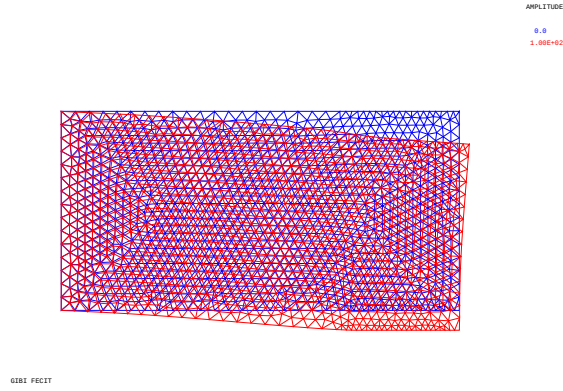


FIG. 3.3 – Maillage du rectangle, 2386 ddl - 52 noeuds de contact

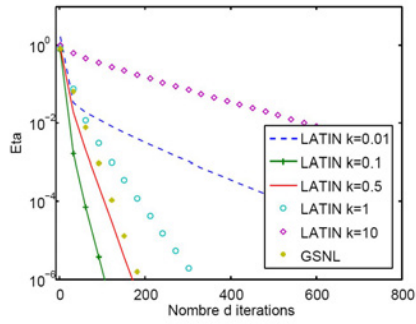


FIG. 3.4 – Comparaison des convergences pour le rectangle.

Chapitre 4

Problème de contact frottant d'une collection de corps rigides

Contents

4.1	Contacts frottants dans une collection de rigides	45
4.1.1	Relations cinématiques	46
4.1.2	Lois de contact frottant	47
4.1.3	L'équation de la dynamique	49
4.1.4	Résolution numérique : Méthode Non Smooth Contact Dynamics (NSCD)	50
4.1.5	Résolution du problème de contact frottant	53
4.1.6	Cas tests	57

4.1 Problème de contact frottant d’une collection de corps rigides

La mécanique des matériaux granulaires consiste à considérer une collection de grains (voir Figure 4.1¹) ; chaque grain est traité indépendamment comme un corps rigide ou déformable avec un nombre fini de degrés de liberté. Ces grains gouvernés par les équations de la dynamique, sont susceptibles d’interagir entre eux par l’intermédiaire de réactions physico-chimiques, d’actions de contact, de frottement, de cohésion...

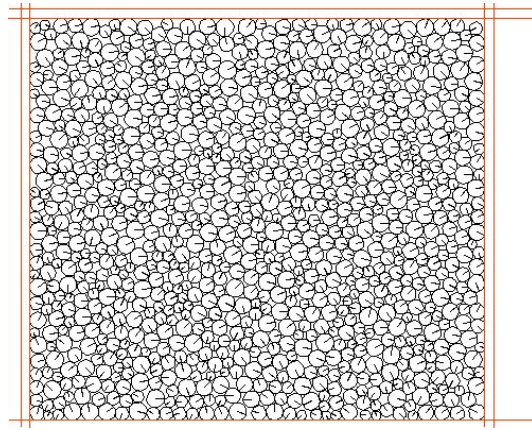


FIG. 4.1 – Echantillon polydisperse constitué de 980 grains

La simulation numérique de tel système s’avère coûteuse pour des raisons de limitation en taille de mémoire et en temps de calcul. Les échantillons de matériaux granulaires traités par le calcul numérique n’excèdent pas à l’heure actuelle 300000 grains. Ce qui représente un échantillon de petite taille lorsque l’on sait que 1 cm^3 de sable de plage fin contient environ 10^6 grains. On comprend donc aisément l’infaisabilité d’un calcul de fondation à cette échelle par exemple, par la méthode des éléments distincts et le recours inévitables de la mécanique des milieux continus. Néanmoins une force majeure de ce type de calcul réside dans le fait que toutes les grandeurs calculées, en particulier les forces locales intergranulaires, sont accessibles alors qu’elles sont difficilement mesurables par l’expérience. Dans le but de rendre les échantillons représentatifs de problèmes réels comportant un nombre de grains important, on s’intéresse à l’amélioration des outils de calcul en adaptant des algorithmes comme le gradient conjugué ou des méthodes multi-échelle du type LATIN et en utilisant le calcul parallèle. Dans l’espoir de pouvoir par la suite proposer une loi de comportement d’un milieu continu équivalent.

¹Echantillon utilisé pour l’étude de cisaillement de milieux granulaires de type Casagrande [38].

On peut distinguer parmi les différentes méthodes de simulations numériques les méthodes FEM (Finite Element Methods) qui traitent les modèles de milieux continus et les méthodes DEM (Distinct Element or Discrete Element Methods) qui traitent les modèles de milieux discrets.

Parmi les méthodes DEM (voir par exemple [5]), on distingue les méthodes “non smooth DEM” qui consistent à utiliser des lois d’interaction entre grains, décrites par des lois de choc ou toute autre relation (non différentiable en général) décrivant les sauts de vitesse et les seuils de force. La spécificité des variantes provient :

- de la nature du corps (rigide/déformable) et de sa géométrie (circulaire / sphérique uniquement ou de forme quelconque),
- d’une dynamique régulière ou non régulière (vol libre des grains ou pas),
- d’exclusion ou pas des contacts simultanés,
- du traitement implicite ou explicite de la dynamique et des relations intergranulaires,
- des algorithmes de résolution.

On trouve parmi ces méthodes, la méthode NSCD (Non Smooth Contact Dynamic) initiée par Michel Jean et Jean Jacques Moreau. Cette méthode s’applique à des collections de grains rigides ou déformables de formes quelconques. Les actions intergranulaires de contact frottant sont décrites par des lois à seuil, lois de choc, conditions unilatérales et frottement de Coulomb, dont les graphes sont “raides” c’est à dire présentant des pentes infinies. Cette méthode exige un traitement implicite de l’équation de la dynamique et des relations intergranulaires. Elle permet le traitement des contacts simultanés.

Nous allons dans ce qui suit poser le problème de contact frottant d’une collection de corps rigides mais avant cela nous commencerons par présenter les différentes lois qui interviennent sans pour autant entrer dans un rappel exhaustif qui n’aurait aucun intérêt ceci étant déjà l’oeuvre de l’excellent livre “Micromécanique des matériaux granulaires” de Michel Jean et al [5].

La configuration du système (une collection de grains rigides) est définie par une variable de Lagrange q , vecteur de $\mathbb{R}^N$ où N est le nombre total de degrés de liberté. A titre d’exemple, si la collection comporte N grains, dans la mesure où chaque grain dispose de 6 degrés de liberté, on trouve $N = 6n$.

4.1.1 Relations cinématiques

Chaque corps de la collection est susceptible d’entrer en contact avec un autre corps de la collection, ils jouent alors le rôle de corps dit *candidat* ou de corps dit *antagoniste*. La cinématique va permettre d’exprimer la vitesse relative en un point candidat au contact en fonction de la variable $\dot{q}$. Il s’agit

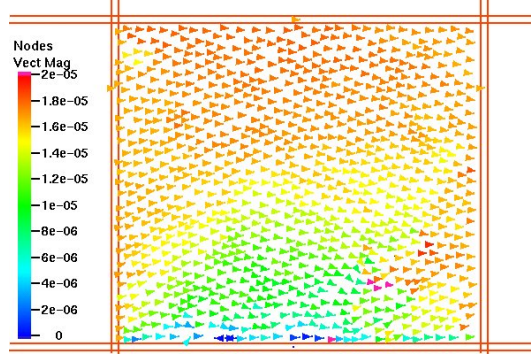


FIG. 4.2 – Champ de vitesses à un certain pas de temps : plus on se rapproche du plan de cisaillement plus la vitesse est faible.

de la relation suivante :

$$U^\alpha = H^{\alpha t}(q)\dot{q} \quad (4.1)$$

où $H^{\alpha t}(q)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{2ou3}$ selon que le problème est en dimension 2 ou 3, α représentant un candidat au contact c'est à dire une paire de corps candidat et de corps antagoniste.

La réaction exercée par l'antagoniste sur le candidat est désignée par la variable R et son représentant pour la variable q est notée par r (Une force $\vec{R}$, exercée sur un grain, de composantes (R_N, R_T) dans un repère local associé au contact entre deux corps possède une résultante de composantes (R_1, R_2, R_3) dans un repère global et un moment résultant (m_1, m_2, m_3) , soit un représentant r de composantes $(r_1 = R_1, r_2 = R_2, r_3 = R_3, r_4 = m_1, r_5 = m_2, r_6 = m_3)$ pour la variable de Lagrange q).

L'expression de la puissance tantôt avec les variables locales et tantôt avec les variables globales mène à l'expression suivante :

$$r^\alpha = H^\alpha(q)R^\alpha \quad (4.2)$$

où r^α est le représentant de la réaction locale R^α pour la configuration q .

4.1.2 Lois de contact frottant

D'une façon générale, on appelle loi de contact frottant toute relation entre les variables interstice g^2 , vitesse relative U et réaction normale R_N : $Ctact(g, U, R_N)$. On trouve parmi ces lois :

²Soient P et P' deux points matériels susceptibles d'entrer en contact. La distance algébrique $g = P\bar{P}'$ est appelée interstice. Elle est strictement positive si les corps ne se touchent pas, nulle s'ils se touchent. Pour des raisons numériques, elle peut admettre des valeurs négatives, représentant une pénétration.

- les lois de contact de type unilatéral,
- les lois de choc,
- les lois de frottement.

Lois d'unilatéralité

L'unilatéralité consiste à exprimer que deux corps ne se pénètrent pas. Autrement dit l'interstice g doit être positive ou nulle. On peut traduire ceci par deux situations :

- si $g = 0$, il y a contact et donc aussi une réaction. La forme la plus simple que cette réaction peut satisfaire est que $R_N \geq 0$.
- si $g > 0$, il n'y a pas contact et il n'y a donc pas de réaction. Mais par commodité on écrit que la réaction est nulle : $R = 0$.

On résume donc ces relations sous la forme d'une relation de *complémentarité*, que l'on appelle aussi *condition de Signorini en interstice* :

$$g \geq 0, R_N \geq 0, gR_N = 0 \quad (4.3)$$

On trouve aussi d'autres expressions de la condition d'unilatéralité comme la condition de *Signorini en vitesse* :

$$\begin{aligned} g(t_0) &\geq 0 \text{ au temps initial } t_0 \\ g(t) \leq 0 &\Rightarrow U_N^+(t) \geq 0, \quad R_N(t) \geq 0, \quad U_N^+(t)R_N(t) = 0 \quad \forall t \in I \\ g(t) > 0 &\Rightarrow R_N(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

où U_N^+ est la vitesse relative normale à droite.

Lois de choc

Lorsque les corps entrent en contact des chocs se produisent sur des intervalles de temps extrêmement brefs. Aux instants des chocs, les vitesses sont discontinues et supposées à variation bornée, ce qui assure l'existence de limites à gauche et à droite. Les vitesses relatives avant et après choc (U^- et U^+) sont parfois reliées par de simples relations telle que la loi de restitution de Newton $U_N^+ = -eU_N^-$ où le coefficient e correspond à la restitution de l'énergie absorbée au cours du choc. e est normalement compris entre 0 (choc parfaitement absorbant) et 1 (choc parfaitement élastique). On peut d'ailleurs remarquer que la loi de Signorini en vitesse peut s'interpréter comme une loi de choc inélastique : si un contact "appuyé" se produit, c'est à dire si $g = 0$ et $R_N > 0$, alors on a $U_N^+ = 0$.

Lois de frottement

Une loi de frottement est une relation liant la force de frottement R_T à la vitesse de glissement U_T . Elle peut aussi faire intervenir d'autres variables

comme R_N .

On distingue deux classes de lois de frottement :

- le frottement visqueux ou lubrifié,
- le frottement sec.

Le frottement exercé entre les grains d'un matériau granulaire (comme le sable sec) correspond à un frottement sec. Il se caractérise par le fait qu'une force motrice ne peut déclencher un glissement qu'une fois un certain seuil dépassé. La loi la plus rudimentaire et ancienne tenant compte des principaux traits du frottement sec est la loi de Coulomb, qui peut s'écrire :

$$\|R_T\| \leq \mu R_N, \|U_T\| \neq 0 \Rightarrow R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{\|U_T\|} \quad (4.5)$$

où μ est le coefficient de frottement. Cette loi est une loi inspirée par les expériences. La deuxième relation de cette loi exprime que la force de frottement R_T est proportionnelle à la réaction normale et que le vecteur de la force de frottement est de sens opposé à la vitesse de glissement U_T .

On trouvera des variantes de lois de frottement dans [5].

4.1.3 L'équation de la dynamique

Le système est constitué d'une collection de corps rigides. Chacun de ces corps est gouverné par les équations de la dynamique. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour chaque grain et en considérant les actions intergranulaires de contact frottant comme des forces extérieures, on arrive à l'expression suivante :

$$M(q)\ddot{q} + Q(q, \dot{q}) = P(t) + r \quad (4.6)$$

où q est la variable de Lagrange, dont les composantes sont les coordonnées des centres de gravité et les angles d'Euler, $M(q)$ la matrice de masse du système, $Q(q, \dot{q})$ une expression qui contient les "termes gyroscopiques et centrifuges" (qui proviennent du vecteur quantité d'accélération), P représente des forces extérieures explicitement connues et r les réactions de contact frottant.

Les équations du problème avec contact frottant

En résumé les équations du problème régissant une collections de grains en contact frottant sont les suivantes :

- l'équation de la dynamique que l'on choisit d'écrire comme suit :

$$M\ddot{q} = F(q, \dot{q}) + P(t) + r \quad (4.7)$$

où M est supposée constante. Cette relation relie les variables q , définissant la configuration du système, et r , représentant des réactions de

contact ;

– les relations cinématiques :

$$U^\alpha = H^{\alpha t}(q)\dot{q}, r = \sum_{\alpha} r^\alpha = \sum_{\alpha} H^\alpha(q)R^\alpha \dot{g}^{+\alpha} = U_N^{+\alpha} \quad (4.8)$$

Ces relations relient les variables $\dot{q}$ et les vitesses relatives U , les réactions locales R et leur représentant r mais aussi la dérivée de l'interstice $\dot{g}$ et la vitesse relative normale U_N .

– les relations de contact frottant : condition unilatérale de Signorini en vitesse (qui est une loi de choc inélastique c'est à dire à restitution nulle) et loi de frottement sec de Coulomb

$$\begin{cases} g(t_0) \geq 0 \text{ au temps initial } t_0 \\ g(t) \leq 0 \Rightarrow U_N^+(t) \geq 0, R_N(t) \geq 0, U_N^+(t)R_N(t) = 0 \quad \forall t \in I \\ g(t) > 0 \Rightarrow R_N(t) = 0 \end{cases}$$

et

$$\|R_T\| \leq \mu R_N, \|U_T\| \neq 0 \Rightarrow R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{\|U_T\|}$$

– les conditions aux limites et les conditions initiales.

4.1.4 Résolution numérique : Méthode Non Smooth Contact Dynamics (NSCD)

Cette méthode exige un traitement implicite de l'équation de la dynamique et des relations intergranulaires. Elle permet de plus le traitement des contacts simultanés.

Discretisation de l'équation de la dynamique

Comme on s'apprête à faire face à des discontinuités de vitesse, on évite d'avoir à traiter les accélérations. Pour ce faire, on écrit l'équation de la dynamique (4.7) sous une autre forme :

$$Md\dot{q} = F(q, \dot{q})dt + P(t)dt + r d\nu \quad (4.9)$$

où $d\dot{q}, dt, d\nu$ sont des mesures. r est le représentant de la densité d'impulsion exercée au point de contact.

Pour des raisons de simplification, on suppose les corps de la collection rigides sphériques. Les termes "gyroscopiques et centrifuges" sont donc nuls. Les forces extérieures sont des fonctions du temps supposées explicitement connues. En intégrant l'équation (4.9) sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$, on obtient :

$$M(\dot{q}(t_{i+1}) - \dot{q}(t_i)) = \int_{[t_i, t_{i+1}]} P ds + \int_{[t_i, t_{i+1}]} r d\nu \quad (4.10)$$

$$q(t_{i+1}) = q(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{q} ds \quad (4.11)$$

On note $P(i+1)$ une approximation de $\int_{[t_i, t_{i+1}]} P ds$, $r(i+1) = \frac{1}{h} \int_{[t_i, t_{i+1}]} r d\nu$ l'impulsion moyenne, et $\dot{q}(i), q(i), \dot{q}(i+1), q(i+1)$ les approximations respectives de $\dot{q}(t_i), q(t_i), \dot{q}(t_{i+1}), q(t_{i+1})$. En utilisant une méthode d'Euler implicite, on obtient :

$$M(\dot{q}(i+1) - \dot{q}(i)) = P(i+1) + hr(i+1) \quad (4.12)$$

$$q(i+1) = q(i) + h\dot{q}(i+1) \quad (4.13)$$

Discrétisation des relations cinématiques

La méthode NSCD considère les variables cinématiques en fin de pas de temps ou après l'instant du choc et l'impulsion moyenne comme les inconnues fondamentales. La discrétisation des relations cinématiques s'écrit comme suit :

$$U^\alpha(i+1) = H^{\alpha t}(\hat{q})\dot{q}(i+1) \quad (4.14)$$

$$r^\alpha(i+1) = H^\alpha(\hat{q})R^\alpha(i+1) \quad (4.15)$$

$$\dot{g}^\alpha(i+1) = U_N^\alpha(i+1)$$

La variable $\hat{q}$ désigne la configuration qui sert à déterminer les repères locaux. Différents choix sont possibles par exemple :

- $\hat{q} = q(i+1)$ qui correspond à de l'implicite mais qui apporte certaines complications techniques,
- $\hat{q} = q(i) + (1-\theta)h\dot{q}(i)$ qui correspond à une prédiction, avec $\theta \in [0, 1]$.

Discrétisation des relations de contact frottant

En respectant la mentalité NSCD, à savoir considérer comme variables inconnues les variables cinématiques en fin de pas et l'impulsion moyenne, une discrétisation possible de la loi de Signorini en vitesse et de la loi de Coulomb est la suivante :

$$R^\alpha(i+1) = 0$$

sauf si un contact est pronostiqué, c'est à dire si $g^\alpha(i) \leq 0$, auquel cas :

$$U_N^\alpha(i+1) \geq 0, R_N^\alpha(i+1) \geq 0, U_N^\alpha(i+1)R_N^\alpha(i+1) = 0$$

que l'on peut résumer sous la forme :

$$Signor(U_N^\alpha(i+1), R_N^\alpha(i+1)).$$

et

$$\|R_T^\alpha(i+1)\| \leq \mu R_{\alpha N}(i+1),$$

$$\|U_{\alpha T}(i+1)\| \neq 0 \Rightarrow R_T^\alpha(i+1) = -\mu R_N^\alpha(i+1) \frac{U_T^\alpha(i+1)}{\|U_T^\alpha(i+1)\|}$$

que l'on peut résumer sous la forme suivante :

$$Coul_{\mu^\alpha R_N^\alpha(i+1)}(U_T^\alpha(i+1), R_T^\alpha(i+1)).$$

Condensation de l'équation de la dynamique sur les candidats au contact

La condensation de l'équation de la dynamique sur les candidats au contact consiste à effectuer un changement de variables, pour transformer l'équation de la dynamique linéarisée (4.12) qui relie les variables généralisées ($\dot{q}(i+1)$ et $r(i+1)$) en une équation linéaire qui relie les variables locales ($U^\alpha(i+1)$, $R^\alpha(i+1)$). On utilise pour cela l'équation de la dynamique linéarisée (4.12) et les relations cinématiques (4.14,4.15). On arrive ainsi à l'équation suivante :

$$U^\alpha(i+1) = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta} W^{\alpha\beta} h R^\beta(i+1) \quad (4.16)$$

$$U_{free}^\alpha = H^{t\alpha}(\dot{q}(i) + M^{-1}P(i)), \quad W^{\alpha\beta} = H^{t\alpha} M^{-1} H^\beta$$

On remarque que lorsque toutes les réactions sont nulles, le terme U_{free}^α représente la valeur de $U^\alpha(i+1)$. On récrit la relation (4.16) sous la forme suivante :

$$U^\alpha(i+1) = U_{locfree}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R^\alpha(i+1) \quad (4.17)$$

$$U_{locfree}^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} W^{\alpha\beta} h R^\beta(i+1), \quad W^{\alpha\beta} = H^{t\alpha} M^{-1} H^\beta$$

Le problème “Signorini, μ -Coulomb standard”

On désigne par problème “Signorini, μ -Coulomb standard”, un problème où il s'agit de trouver $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \mathcal{U}_{locfree} + \mathcal{W} h \mathcal{R} \\ Signor(\mathcal{U}_N, \mathcal{R}_N) \\ Coul_{\mu \mathcal{R}_N}(\mathcal{U}_T, \mathcal{R}_T) \end{cases}$$

où $\mathcal{U}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}_{locfree}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^{2ou3}$ et où $\mathcal{W}$ est une matrice 2×2 ou 3×3 selon que le problème est à 2 ou 3 dimensions. Dans le cas de la méthode NSCD, en identifiant $\mathcal{U}_{locfree}$ à $U_{locfree}^\alpha$, $\mathcal{W}$ à $W^{\alpha\alpha}$, et en affectant $R^\beta(i+1)$ de valeurs provisoires, on trouve, si un contact est pronostiqué, que $\mathcal{U} = U^\alpha(i+1)$ et $\mathcal{R} = R^\alpha(i+1)$ sont solutions du problème “Signorini, μ -Coulomb standard”. Ce système est un système de 4 équations à 4 inconnues en dimension 2 et de 6 équations à 6 inconnues en dimension 3. Les inconnues $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$ sont situées aux intersections de graphes de fonctions continues affines par morceaux. L'intersection³ se discute au cas par cas.

³voir [5] pour la discussion cas par cas.

4.1.5 Résolution du problème de contact frottant

Dans cette partie, on présente de façon rudimentaire les algorithmes dérivés de ceux présentés précédemment. Ils sont aussi implantés dans la bibliothèque NSSPack permettant de résoudre des problèmes de contact frottant d'une collection de corps rigides.

Algorithme de Gauss-Seidel non linéaire par blocs

La résolution de ce type de problème se fait au niveau local, pour cela on résout le problème "Signorini, μ -Coulomb standard" contact après contact à la manière d'une méthode de Gauss-Seidel 'non linéaire (méthode la plus couramment employée dans la méthode NSCD). On suppose que la collection de corps comporte nc candidats au contact. On résout le problème comme suit : la solution approchée $R^\alpha(i+1)$ au pas $i, i+1$ est cherchée comme la limite d'une suite $R^\alpha(p)$ avec $p = 1, \dots, p_{max}$ où p_{max} est le nombre maximum d'itérations autorisées.

A l'itération $p+1$, on calcule une approximation de la réaction au candidat α et on adopte des valeurs provisoires des réactions sur les autres candidats : si $\beta > \alpha$, on adopte les valeurs calculées à l'itération p , mais si $\beta < \alpha$, on adopte les valeurs calculées à l'itération $p+1$.

On calcule alors la vitesse libre, c'est à dire la vitesse relative au contact α en l'absence de réaction en ce contact, en considérant les valeurs adoptées sur les contacts voisins :

$$U_{locfree}^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} W^{\alpha\beta} h R^\beta(p+1) + \sum_{\beta > \alpha} W^{\alpha\beta} h R^\beta(p)$$

Si aucun contact n'est pronostiqué alors $R^\alpha(p+1) = 0$ et $U^\alpha(p+1) = U_{locfree}^\alpha$ sinon on adopte les valeurs $R^\alpha(p+1)$ et $U^\alpha(p+1)$ fournies par le problème "Signorini, μ -Coulomb standard" avec les données $\mathcal{U}_{locfree} = U_{locfree}^\alpha$ et $\mathcal{W} = W^{\alpha\alpha}$. On actualise alors et on passe au candidat suivant, on parcourt ainsi la liste des candidats jusqu'à ce qu'un critère de qualité soit satisfait.

La convergence de cet algorithme est rarement mise en défaut, mais elle n'est pas démontrée sauf dans certains cas [20].

Algorithme de type LATIN

Le principe de la méthode reste toujours le même : l'étape linéaire consiste à déterminer un élément s_{n+1} appartenant à A_d à partir d'une direction de recherche $-k$ et d'un élément appartenant à Γ_d supposé connu, $\hat{s}_n$. On vérifie donc :

- l'équilibre : $U - WhR = U_{locfree}$,
- et les directions de recherche :

$$\begin{cases} U_N - \hat{U}_N = -k^{-1}(R_N - \hat{R}_N) \\ U_T - \hat{U}_T = -k^{-1}(R_T - \hat{R}_T) \end{cases}$$

Les directions de recherche k et $-k$ sont des paramètres de la Latin, la convergence est assurée à partir du moment où $k > 0$ [23].

L'étape locale, quant à elle, permet de trouver $\hat{s}_{n+1}$ appartenant à Γ_d à partir d'une direction de recherche k et d'un élément s_{n+1} appartenant à A_d supposé connu. On vérifie donc :

- les relations de contact : $\hat{R}_N \geq 0, \hat{U}_N \geq 0, \hat{R}_N \hat{U}_N = 0,$
- les relations de frottement : $\hat{R}_T \leq 0, \hat{U}_T - \mu \hat{U}_N \leq 0, \hat{R}_T \cdot (\hat{U}_N - \mu \hat{U}_N) = 0,$
- les directions de recherche :

$$\begin{cases} U_N - \hat{U}_N = -k^{-1}(R_N - \hat{R}_N) \\ U_T - \hat{U}_T = -k^{-1}(R_T - \hat{R}_T) \end{cases}$$

Traitement des étapes linéaire et locale

- résolution de l'étape linéaire : En supposant connu $\hat{s}^n = (\hat{U}^n, \hat{R}^n)$, on cherche à déterminer s^{n+1} appartenant à A_d , pour cela on pose $\tilde{U}^n = \hat{U}^n + k^{-1}\hat{R}^n$, et l'on obtient grâce aux relations ci-dessus $(M + k^{-1}I)R^{n+1} = \tilde{U}^n - q$ et $U^{n+1} = \tilde{U}^n - k^{-1}R^{n+1}$; ce qui nous permet d'obtenir simplement U^{n+1} et R^{n+1} .
- résolution de l'étape locale : Connaissant maintenant $s^{n+1} = (\hat{U}^{n+1}, \hat{R}^{n+1})$, on cherche $\hat{s}^{n+1}$ appartenant à Γ_d . La résolution se fait en séparant la partie normale de la partie tangentielle : pour la partie normale, on pose $\tilde{U}_N^{n+1} = U_N^{n+1} - k^{-1}R_N^{n+1}$ et on obtient ainsi grâce aux relations ci-dessus : $\hat{U}_N^{n+1} = \max(0, \tilde{U}_N^{n+1})$ et $\hat{R}_N^{n+1} = -k\max(0, -\tilde{U}_N^{n+1})$; grâce à

Pas de temps $t = i + 1$
 Evaluation de $U_{locfree}^\alpha$ pour $\alpha = 1, \dots, nc$
 Calcul de $W^{\alpha\beta}$

Itération $p = p+1$

Pour tous les contacts ($\alpha=1, nc$)

(i) Evaluation de $U_{locfree}^\alpha$:

$$U_{locfree}^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} W^{\alpha\beta} h R^\beta(p+1) + \sum_{\beta > \alpha} W^{\alpha\beta} h R^\beta(p)$$

(ii) Résolution du problème "Signorini, μ -Coulomb standard"

Test de convergence pour $p = 1, p_{max}$

TAB. 4.1 – Principe de l'algorithme de GSNL

ces relations et en posant $\hat{U}_T^{n+1} = U_T^{n+1} - k^{-1}R_T^{n+1}$, on obtient pour la partie tangente $\hat{U}_T^{n+1} = \mu\hat{U}_N^{n+1} - \max(0, -(\tilde{U}_T^{n+1} - \mu\hat{U}_N^{n+1}))$ et $\hat{R}_T^{n+1} = -k^{-1}\max(0, \tilde{U}_T^{n+1} - \mu\hat{U}_N^{n+1})$.

[	Calcul de $A = Wh + k^{-1}I$
	Initialisation $U = 0, R = 0, \hat{U} = 0, \hat{R} = 0$
]	while((iter < itermax) && (err > errmax))
	iter = iter + 1
	Etape linéaire ($\hat{w}, \hat{z}$) connu
	$Az = -q + (k^{-1}\hat{R} + \hat{U})$
	$U = -k^{-1}R + (\hat{U} + k^{-1}\hat{R})$
	Etape locale (U, R) connu
	Traitement de la partie normale :
	$\tilde{U}_N = U_N - k^{-1}R_N$
	$\hat{U}_N = \max(0, \tilde{U}_N)$
	$\hat{R}_N = -k^{-1}\max(0, -\tilde{U}_N)$
	Traitement de la partie tangente :
	$\tilde{U}_T = U_T - k^{-1}R_T$
	$\hat{U}_T = \mu\hat{U}_N - \max(0, -(\tilde{U}_T - \mu\hat{U}_N))$
	$\hat{R}_T = -k\max(0, \tilde{U}_T - \mu\hat{U}_N)$
	Test de convergence

TAB. 4.2 – Principe de l'algorithme de la LATIN

Algorithme de type Gradient Conjugué Projeté

Le problème constitué des équations de la dynamique réduites aux points de contact est formulable comme un problème d'optimisation en considérant les impulsions de contact comme variables primales. Dans une forme incrémentale le problème de contact frottant de Tresca [40, 42] (loi de frottement à seuil fixe) s'exprime comme un problème d'optimisation sous contrainte :

$$R \in \operatorname{argmin}_{\tilde{R} \in C(s)} \frac{1}{2} \tilde{R} \cdot Wh \tilde{R} + U_{locfree} \tilde{R} \quad (4.18)$$

où s_α est le seuil de frottement pour chaque contact α , l'ensemble contraint est le produit cartésien de demi-cylindres infinis dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ayant pour section $B(0, s_\alpha)$, le disque de rayon s_α : $C(s) = \prod_{\alpha}^{nc} \mathbb{R}^+ \times B(0, s_\alpha)$.

En utilisant une loi de frottement de type Coulomb, le problème de contact frottant ne s'écrit plus comme un problème d'optimisation mais un problème de 'quasi-optimisation' dont les contraintes dépendent des composantes normales de la solution. Ce problème s'exprime comme suit :

$$R \in \operatorname{argmin}_{\tilde{R} \in C(\mu R_n)} \frac{1}{2} \tilde{R} \cdot Wh \tilde{R} + U_{locfree} \tilde{R} \quad (4.19)$$

La méthode de Gradient Projeté Conjugué développée dans [43] est donnée dans le tableau 4.3.

Initialisation de $U^0 = -U_{locfree} - WhR^0$, $w^0 = U^0$, $p^0 = U^0$
 $k = k + 1$

$$\left[\begin{array}{l} R^{k+\frac{1}{2}} = R^k + \alpha^{k+1} p^k \text{ avec } \alpha^{k+1} = \frac{U^k \cdot p^k}{p^k \cdot Wh p^k} \\ R^{k+1} = \operatorname{proj}_C(R^{k+\frac{1}{2}}) \\ U^{k+1} = -U_{locfree} - WhR^{k+1} \\ \text{Projection des gradients :} \\ \quad w^{k+1} = \operatorname{proj}(U^{k+1}; T_C(R^{k+1})) \\ \quad z^{k+1} = \operatorname{proj}(p^k; T_C(R^{k+1})) \\ p^{k+1} = w^{k+1} + \beta^{k+1} z^{k+1} \text{ avec } \beta^{k+1} = -\frac{w^{k+1} \cdot Wh p^k}{p^k \cdot Wh p^k} \end{array} \right.$$

TAB. 4.3 – Principe de l'algorithme de Gradient Projeté Conjugué (GPC)

4.1.6 Cas tests

Présentation de problèmes de granulat

En mécanique des milieux continus, des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution d'un problème de contact unilatéral avec frottement non local ou d'un problème approché de contact unilatéral avec frottement de Coulomb local peuvent être trouvés dans l'article de Marius Cocu [6] ou dans la thèse de Laurence Greco[17]. Par contre, en mécanique des milieux discrets, il n'existe pas de théorème d'existence et d'unicité, on peut néanmoins trouver des tentatives de démonstration dans [20].

Le fait qu'il n'y ait pas unicité de la solution en granulaire avec frottement, ne nous permet plus de choisir une solution de référence comme nous le faisons précédemment. Par conséquent, chaque solution aura pour solution de référence celle donnée par l'algorithme après un nombre important d'itérations (noté, ∞), cette référence reste valable pour estimer la qualité (η) des itérés précédents tant que ceux-ci ne sont pas trop proche de cette référence.

$$\eta = \sqrt{\frac{(z_i - z_i^\infty)^t M(z_i - z_i^\infty)}{(z_i^\infty)^t M(z_i^\infty)}}$$

Nous effectuerons dans ce paragraphe une série de tests en augmentant le nombre de grains.

Le problème consiste tout d'abord à créer un échantillon de départ sur lequel on va résoudre le problème de contact avec frottement permettant de progresser d'un pas de temps dans la simulation.

On propose donc une série d'échantillons dont le nombre de grains diffère. On récupère du code par éléments discrets LMG C90 : les matrices M et les

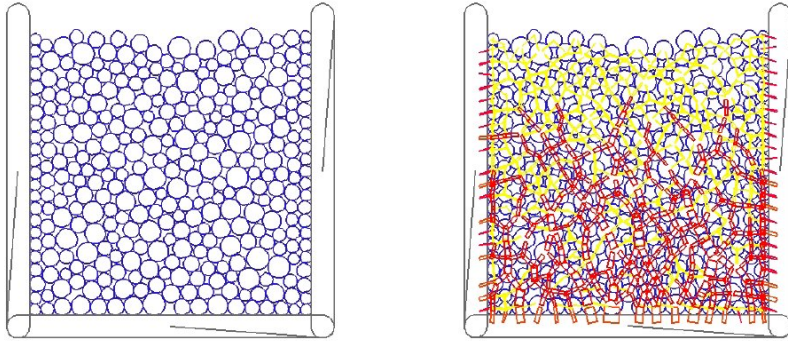


FIG. 4.3 – Echantillon de 330 billes avec un coefficient de frottement μ de 0.3 et réseau de contacts à droite.

second membres q , afin de procéder à la résolution des problèmes de contacts frottants.

Dans ces différents tests, le coefficient de frottement entre les billes est de 0.3 ainsi que celui entre les billes et les parois de la boîte.

Les billes se sont déposées sous l'effet de leur poids. On considère trois tests composés uniquement de billes :

- le premier contient 20 billes. La taille de la matrice M est 78×78 .
- le deuxième contient 84 billes. La taille de la matrice M est 314×314 .
- le troisième contient 330 billes. La taille de la matrice M est 1366×1366 .

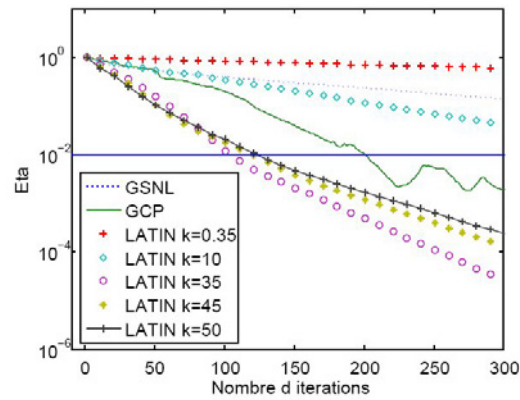


FIG. 4.4 – Comparaison des solutions dans le cas d'un échantillon de 20 billes avec $\mu = 0.3$.

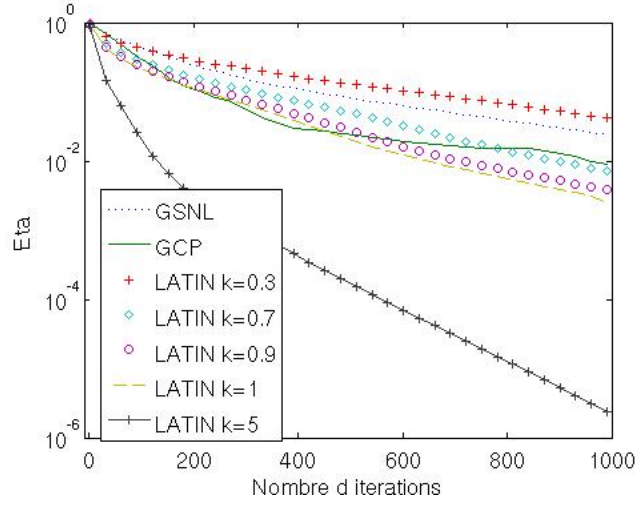


FIG. 4.5 – Comparaison des solutions dans le cas d'un échantillon de 84 billes avec $\mu = 0.3$.

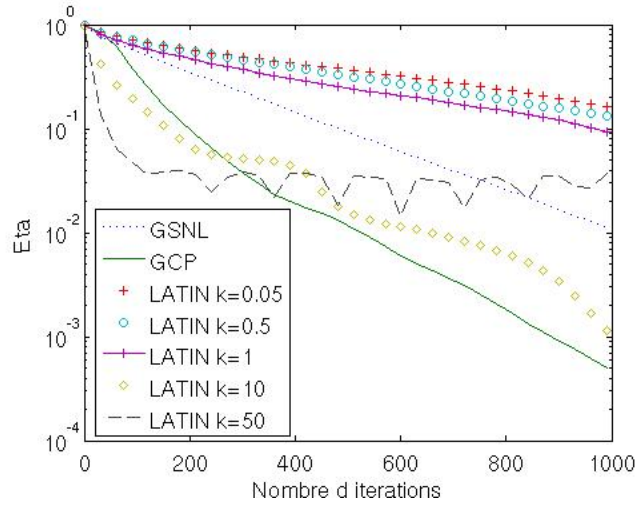


FIG. 4.6 – Comparaison des solutions dans le cas d'un échantillon de 330 billes avec $\mu = 0.3$.

Dans le tableau suivant 4.4, on vérifie les relations de complémentarité de la LATIN sur les variables normales.

Direction de recherche	Résidu de l'équilibre normé	$Min(z_n)$	$Min(w_n)$	$z_n^t w_n$
$k = 10.$	2.3548e-16	-8.004e-09	-3.5515e-06	7.1518e-08
$k = 50.$	2.4589e-16	-2.1687e-08	-7.7842e-06	1.4031e-06
$k = 1.$	2.7935e-16	-3.78e-10	-2.8938e-06	-4.1297e-08
$k = 0.05$	7.6524e-16	-1.1624e-08	-0.00081878	-4.9084e-06
$k = 0.5$	3.8633e-16	-3.1557e-09	-3.7189e-05	-6.0862e-07

TAB. 4.4 – Résultats donnés par la méthode LATIN dans le cas d'un échantillon constitué de 330 billes, $\dim(M) = 1366$, avec un coefficient de frottement de 0.3 en fonction de la direction de recherche.

L'analyse des résultats met en évidence une corrélation entre la taille du problème et la vitesse de convergence. Pour des problèmes de taille assez réduite eu égard aux problématiques généralement traité dans l'équipe de recherche SMC, la méthode qui converge le plus rapidement est la LATIN, suivie du GCP puis de GSNL. Bien évidemment une difficulté de la LATIN reste dans une évaluation nécessaire du paramètre de recherche. Lorsque la taille du problème augmente, la LATIN converge plus lentement alors que le Gradient se démarque en convergeant plus rapidement.

Deuxième partie

Approche multiéchelle statique

Chapitre 5

Approche multiéchelle statique

Contents

5.1	Les systèmes de tenségrité	65
5.2	Approche micro-macro pour les systèmes discrets à non régularité diffuse	71
5.2.1	Problème de référence	71
5.2.2	Stratégie de sous-structuration	80
5.2.3	Stratégie numérique multiéchelle	82
5.3	Résultats numériques pour une nappe de tenségrité	92
5.3.1	Description du problème envisagé	92
5.3.2	Choix des directions de recherche	92
5.3.3	Résultats de la simulation	93
5.3.4	Comparaison avec une approche mono-domaine . . .	97
5.3.5	Influence du nombre de sous domaine	100
5.4	Bilan et perspectives	101

Les systèmes discrets non réguliers peuvent provenir de différentes modélisations mécaniques. Par exemple, les systèmes granulaires [32] où les interactions entre grains sont de type contact frottant, ou encore les systèmes de tensegrité [33] où un grand nombre de câbles peuvent se détendre, conduisent à des problèmes non réguliers de grande taille. Lorsque le nombre de grains, ou de câbles, devient important, une approche multiéchelle intégrant une technique d'homogénéisation peut être bien adaptée comme stratégie de résolution de ces problèmes en complément de techniques numériques avancées (parallélisation [44], gradient conjugué [43],...). On s'intéresse ici au cas des structures de tensegrité, notamment dans le cas où elles sont construites à partir de l'agencement de modules élémentaires. Dans cette partie, l'approche LATIN micro-macro [26] initialement développée pour les milieux continus hétérogènes et testée sur des cas bidimensionnels [27, 39] est étendue au cas des milieux discrets et appliquée à une nappe de tensegrité tridimensionnelle.

Système discret avec non régularité diffuse

Si nous définissons un système discret comme un ensemble de noeuds et de liens entre ces noeuds, alors sa non régularité provient de la relation de comportement des liens. Un milieu granulaire prenant en compte le contact et le frottement entre les grains constitue un exemple type de système fortement non régulier pour lequel tous les liens engendrent un comportement non régulier : contact unilatéral et frottement sec. Un tel système motive l'étude numérique présente, mais il est très difficile de définir rigoureusement sur ce type de système une approche de décomposition de domaine et de procéder à des tests de validation ; et ce en dépit d'une modélisation des milieux granulaires bien adaptée à un large champ de comportements (aussi bien en quasi statique qu'en dynamique) basée sur une formulation vitesse-impulsion [32, 19] dans un schéma d'intégration en temps global. Par exemple, en dynamique, la sous-structuration d'un milieu granulaire doit régulièrement être ré-actualisée pour prendre en compte le changement de connectivité des particules. Au-delà de cette difficulté technique le système non régulier à résoudre à chaque pas de temps est entièrement spécifique aux propriétés de régularisation de la formulation dynamique. Nous préférons donc pour une première approche considérer un problème statique mettant en jeu une structure discrète. Une telle situation est proche des problèmes élastostatiques initialement étudiés avec des méthodes de décomposition de domaine [28].

Systemes réticulés particuliers : les systèmes de
tenségrité

5.1 Les systèmes de tenségrité

Les systèmes réticulés sont des systèmes constructifs tridimensionnels dont les éléments rectilignes, sont articulés entre eux ou sur un bâti de sorte qu'ils ne soient soumis qu'à des efforts de compression ou de traction simple. Cela suppose que ces systèmes vérifient les hypothèses suivantes :

- les liaisons entre les éléments sont des rotules parfaites, qui portent le nom de noeuds,
- toutes les fibres moyennes des éléments incidents à un noeud, concourent au centre du noeud,
- les actions sont des forces appliquées directement sur les noeuds (par exemple, le poids propre d'une couverture est transmis aux noeuds),
- les flexions induites par le poids propre des éléments peuvent être négligées.

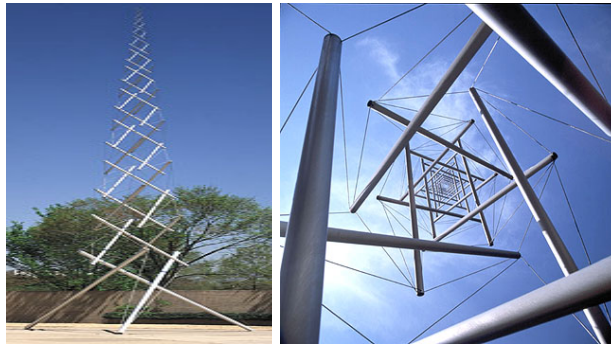


FIG. 5.1 – Vue en perspective et de dessous du "Needle Tower" réalisé par le sculpteur Snelson (1968)

Les éléments des systèmes réticulés rigides en compression et en traction, portent le nom de "barres", ceux rigides en traction uniquement, portent le nom de "câbles" et sont utilisés dans le génie civil, Figure 5.2 ([36, 33, 18]). Leur modélisation requiert de prendre en compte la non régularité diffuse à travers la structure. Une définition poétique de Fuller [16] consiste à les voir comme "islands of compression in an ocean of tension"; Motro [33] donne une définition plus précise : "systems in a stable selfstress state including a discontinuous set of compressed components inside a continuum of tensioned components". Par conséquent le comportement unilatéral des câbles, uniquement sollicités en tension en utilisation normale, est un caractère dominant à travers la structure. Il confère aux systèmes de tenségrité de grande taille un choix judicieux pour le test de notre approche multiéchelle non régulière pour la simulation des états limites, hors des états de service, où un nombre important de câbles peuvent se retendre sous un chargement extrême. De tels systèmes discrets diffèrent complètement des structures discrétisées issues des milieux continus. Par exemple,

dans le domaine microfissuré considéré dans [39] le nombre de degrés de liberté concerné par le contact est petit, même si cet exemple implique de nombreux contact d'interfaces.

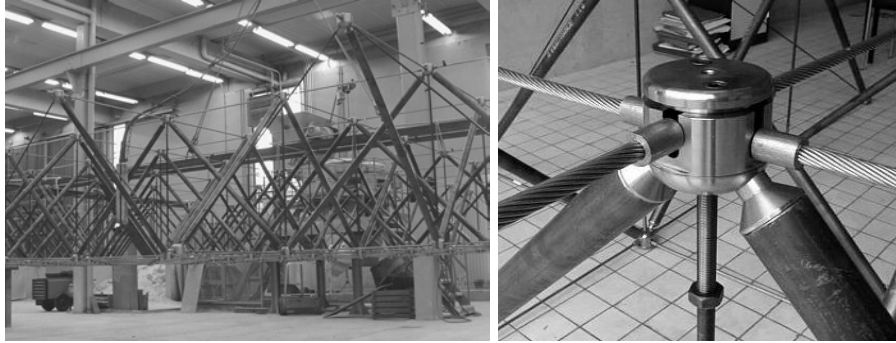


FIG. 5.2 – A gauche, structure de tensegrité du projet Tensarch (d'après R. Motro) ; à droite design d'un noeud

On trouve aujourd'hui les systèmes réticulés (systèmes triangulés ou treillis, systèmes spatiaux à barres,...) en architecture. Ils sont depuis les années 50 l'objet de nombreuses études. Ils ont intéressé les scientifiques en raison de l'admiration artistique, en effet on a l'impression que des barres sont en suspension dans l'air (Figure 5.1), mais aussi et surtout en raison du fait que ces structures détiennent l'avantage d'être dotées de propriétés de résistance tout en étant des structures légères et transparentes (Figure 5.3). Une façon de rendre ces structures encore plus légères consiste à remplacer les éléments tendus par des câbles, ce que l'on appelle aussi systèmes de tensegrité. L'invention du terme "structure de tensegrité" est à l'origine de Fuller en 1949. La Figure 5.3 représente le pavillon américain de l'Exposition Universelle de Montréal en 1967, où le dôme géodésique est à son appogée avec ses 76 m de diamètre. Cette structure est composée d'éléments d'acier recouvert de lentilles hexagonales en acrylique. Celles-ci fonctionnaient comme des diaphragmes d'appareil photo ou des moucharabiehs mécaniques, qui s'ouvraient et se fermaient en fonction de l'intensité du soleil. Ils peuvent donc permettre la protection et la régulation climatique, d'autres structures ont été mise au point aux Etats Unis, permettant le filtrage de rejets polluants d'usines grâce à des membranes.

Précharge d'un système réticulé

Pour assurer une rigidité à ces structures durant toute la vie de l'ouvrage et de façon permanente, il faut réussir à maintenir un état permanent de tension dans les éléments, et ce quelles que soient les actions auxquelles peut être soumise la structure. Néanmoins, par des chargements extrêmes, la structure peut quitter son domaine de service, des câbles peuvent se détendre, et des critères de sécurité demandent alors à ce que la structure conserve une réserve de rigidité.



FIG. 5.3 – Biosphere (1967) , Montréal (photo prise par Nicolas Janberg)

On pourrait aussi considérer les cas où les éléments puissent plastifier, où les barres puissent flamber ; ces cas ne seront cependant pas envisagés dans notre étude. Les structures conçues sont alors soit des systèmes précontraints, si le système nécessite des liaisons avec l'extérieur, soit des systèmes autocontraints, si le système ne nécessite pas de liaison avec l'extérieur. Ainsi l'état d'autocontrainte est l'état de tension interne vérifiant l'équilibre du système non chargé.

Nous pouvons donc distinguer 3 états :

- un état libre : configuration avant assemblage,
- un état autocontraint : configuration après assemblage et sans chargement extérieur (généralement état de référence),
- un état chargé : configuration après assemblage et sous chargement extérieur.

On notera d'un exposant "0" une grandeur définie dans la géométrie d'équilibre du système non chargé. L'expression de l'état de tension interne dans un élément (barre ou câble), par exemple, s'écrit donc de la façon suivante : $t^0 + t$ où t^0 est l'autocontrainte et t l'état de tension interne additionnel, c'est à dire la variation de tension interne de l'état de référence (état autocontraint) à l'état chargé.

Les mécanismes d'un système réticulé

Un système réticulé admet au moins un mécanisme, s'il existe au moins un vecteur déplacement des noeuds non nul n'impliquant au premier ordre aucune variation de longueur des éléments du système. Une base des mécanismes peut être obtenue à partir d'une base du noyau de la matrice transposée de la matrice d'équilibre [36]. N'importe quel mécanisme peut être défini par une combinaison linéaire des vecteurs constituant la base des mécanismes. Dans [36], on trouve une identification des déplacements propres à chacun des trois mécanismes internes du demi-cuboctaèdre lévogyre (voir Figure 5.4), module

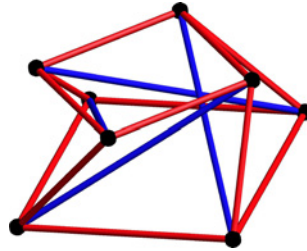


FIG. 5.4 – Demi-cuboctaèdre "lévogyre"

à 4 barres inclinées, et 12 câbles. Ainsi, pour ce quadruplex, on compte trois mécanismes :

- une rotation et une translation couplée de la partie supérieure par rapport à la partie inférieure (Figure 5.5),

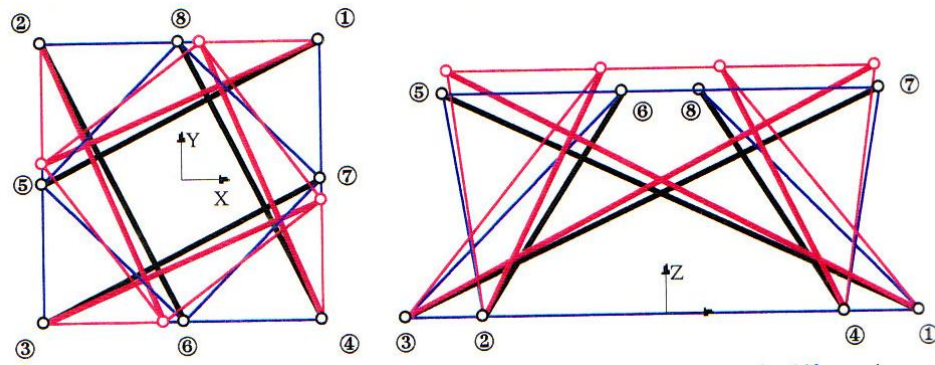


FIG. 5.5 – Vue de dessus et de face du demi-cuboctaèdre avant et après déformation suivant le mécanisme de rotation et de translation du carré [36]

- un déplacement d'un côté du demi-octaèdre par rapport au côté opposé (Figure 5.6),
- une déformation caractérisée par le déplacement d'un noeud du carré inférieur (Figure 5.7).

Bien entendu, en imposant au demi-cuboctaèdre des degrés de liaisons nous arrivons à éliminer tout ou une partie des mécanismes. Comme nous pourrions le voir dans la partie suivante.

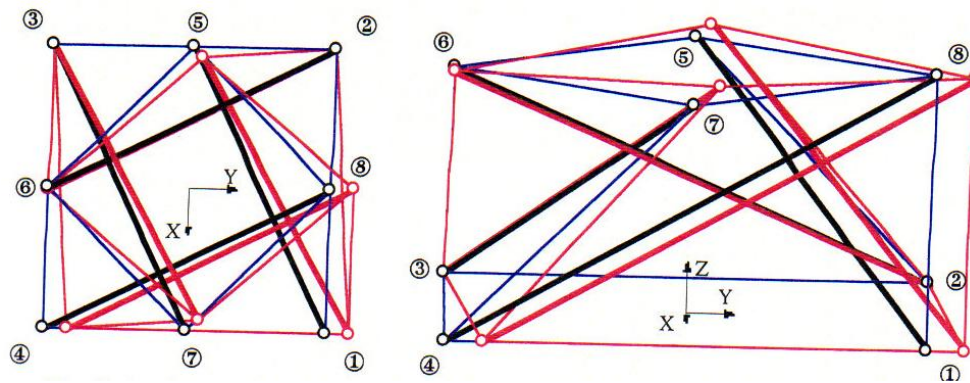


FIG. 5.6 – Vue de dessus et de face du demi-cuboctaèdre avant et après déformation suivant le mécanisme de déplacement d'un côté par rapport au côté opposé [36]

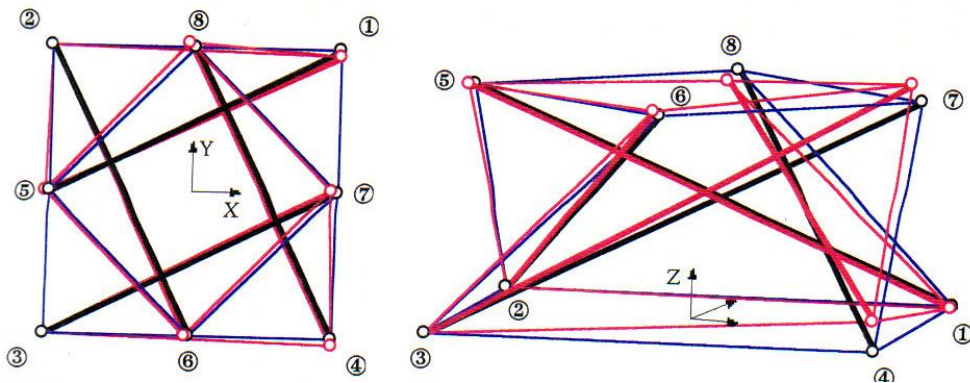


FIG. 5.7 – Vue de dessus et de face du demi-cuboctaèdre avant et après déformation suivant le mécanisme caractérisé par le déplacement d'un noeud du carré inférieur [36]

Approche micro-macro pour les systèmes
discrets à non régularité diffuse

5.2 Approche micro-macro pour les systèmes discrets à non régularité diffuse

Afin d'illustrer la mise en oeuvre, nous allons utiliser comme support le cas d'un système de tenségrité, en statique.

5.2.1 Problème de référence

Soit Ω l'ensemble des noeuds. Nous distinguons alors le sous-ensemble Γ_u des noeuds dont le déplacement est imposé. Trois configurations sont à considérer : la configuration courante Ω_1 , après assemblage et après chargement, pour laquelle les tensions et les déplacements sont les inconnues ; la configuration autocontrainte Ω_0 , après assemblage et avant chargement, qui attribue au système une rigidité, et la configuration relaxée Ω_{-1} , avant assemblage et avant chargement. Ces trois configurations sont supposées être suffisamment proches afin de préserver les hypothèses de petites perturbations. Nous considérons comme configuration de référence la configuration autocontrainte Ω_0 pour laquelle les tensions internes dans chaque élément sont notées t^0 et sont données. Suivant le Tableau 5.1, les inconnues principales sans indices sont les variables cinématique et statique de la configuration actuelle.

b, c	Indices des barres et des câbles
t^0, t_b^0, t_c^0	Autocontrainte
e^0, e_b^0, e_c^0	Variation de longueur
t, t_b, t_c	Tensions internes additionnelles
$\tau_c = t_c^0 + t_c$	Tensions internes dans les câbles
e, e_b, e_c	Variations de longueur
k_b, k_c	Rigidités locales (dans les câbles en tension)
$\lambda_c = -e_c + k_c^{-1}t_c$	Correction de variations de longueur dans les câbles
F, F^d	Forces nodales interne et externe
U, U^d	Déplacements nodaux inconnus et imposés
B^t	Matrice de mapping des liens aux noeuds
B	Matrice de mapping des noeuds aux liens
$K_b = B_b^t k_b B_b$	Rigidité dans les barres
$K_c = B_c^t k_c B_c$	Rigidité dans les câbles
$K = K_b + K_c$	Rigidité globale

TAB. 5.1 – Notations générales

Nous allons donc nous intéresser aux équations qui régissent le problème.

- L'équation d'équilibre implique les forces nodales internes et externes lesquelles sont liées aux tensions totales dans les barres et câbles par la

matrice de “mapping” B^t :

$$-F + F^d = 0 \quad (5.1)$$

où

$$F = B^t(t + t^0) = [B_b^t \quad B_c^t] \begin{bmatrix} t_b + t_b^0 \\ t_c + t_c^0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que l’autocontrainte t^0 vérifie l’équilibre sans chargement extérieur, i.e. $B^t t^0 = 0$.

- Les équations traduisant la compatibilité des déformations relient les déplacements nodaux aux variations de longueur des câbles et des barres ; le déplacement de certains noeuds est imposé par la fixation de la structure au bâti :

$$e = BU = \begin{bmatrix} B_b \\ B_c \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} e_b \\ e_c \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$U|_{\Gamma_u} = U^d \quad (5.3)$$

- Les relations de comportement diffèrent selon qu’il s’agisse de barres ou de câbles. Pour les barres nous considérons une rigidité locale entre la tension interne totale (ou l’autocontrainte) et la variation de longueur totale (ou la variation de longueur due à l’autocontrainte) qui satisfait la loi linéaire (5.4).

$$t_b + t_b^0 = k_b(e_b + e_b^0) \quad (5.4)$$

Les câbles impliquent des relations de complémentarité entre la tension totale τ_c et la correction de variation de longueur λ_c prenant en compte la rigidité locale des câbles : en utilisant la définition de τ_c et de λ_c dans (5.5), le comportement des câbles est donné par (5.6). Ces dernières équations peuvent être résumées avec la notation concise : $0 \leq \tau_c \perp \lambda_c \geq 0$.

$$\tau_c = t_c + t_c^0 \quad \text{et} \quad \lambda_c = -e_c + k_c^{-1} t_c \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} \tau_c \geq 0 \\ \lambda_c \geq 0 \\ (\tau_c)^t \lambda_c = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

e_b^0 est la variation de longueur due à l’autocontrainte dans les barres. Elle est liée à l’autocontrainte t_b^0 de sorte que $e_b^0 = k_b^{-1} t_b^0$.

Les relations de comportement sont illustrées sur la Figure 5.8.

Différentes formulations globales du problème de référence peuvent être établies, selon le type de non régularité mise en jeu.

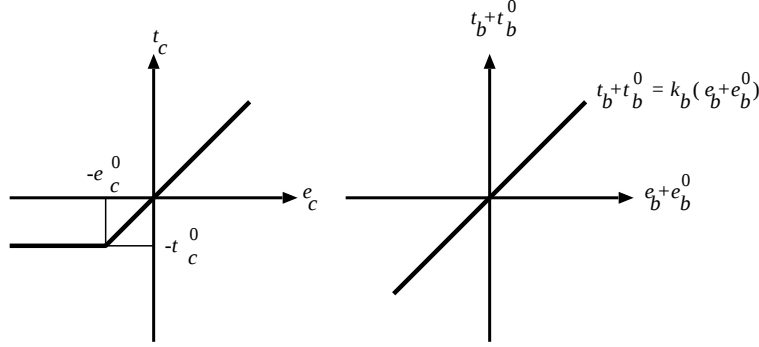


FIG. 5.8 – A gauche, comportement des câbles ; à droite, comportement des barres

Câbles inextensibles et formulation QP Si nous supposons que les câbles sont inextensibles, un problème de minimisation quadratique (QP) peut être mis en place si la tension totale des câbles apparaît comme un multiplicateur de Lagrange de la contrainte $B_c U \leq 0$.

$$\begin{cases} K_b U + B_c^t \tau_c = F^d - B_b^t t_b^0 \\ 0 \leq -B_c U \perp \tau_c \geq 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\min_{B_c U \leq 0} \frac{1}{2} U^t K_b U - U^t F^d - U^t B_b^t t_b^0 \quad (5.8)$$

La fonction quadratique du problème QP n'est pas nécessairement bornée inférieurement car la matrice K_b est positive mais non définie positive (matrice de raideur de l'ensemble des barres, qui n'est pas connexe dans le cas des systèmes de tensegrité). Par conséquent le noyau de K_b comporte les mouvements de solides rigides de chaque barre. De plus une solution, si elle existe, appartient au bord de l'ensemble des contraintes : soit la solution est nulle et la structure est parfaitement rigide grâce aux câbles inextensibles, soit au moins un câble est détendu. De telles situations ne sont pas réalistes car les câbles sont normalement plus flexibles que les barres. Par conséquent nous devons considérer des câbles extensibles (5.6) dans notre modélisation.

Câbles extensibles et formulation LCP En prenant en compte (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) et la définition de la correction de variation de longueur, l'équation d'équilibre peut s'exprimer en fonction du déplacement U et de la correction de variation de longueur des câbles λ_c ,

$$KU + B_c^t k_c \lambda_c = F^d \quad (5.9)$$

où la matrice K représente la rigidité totale de la structure, somme de la rigidité des câbles (en utilisant la rigidité en tension) et de la rigidité des barres. Le

résultat devrait être la rigidité d'un treillis composé uniquement de barres. En considérant les déplacements imposés, la matrice K est supposée être inversible si le problème de référence est bien posé. Alors l'équation (5.9) peut être multipliée par $k_c B_c K^{-1}$ et le déplacement U peut être éliminé de sorte à obtenir une équation dont le couple (λ_c, t_c) est inconnu,

$$(k_c - k_c B_c K^{-1} B_c^t k_c) \lambda_c - t_c = -k_c B_c K^{-1} F^d \quad (5.10)$$

En notant W la matrice $k_c - k_c B_c K^{-1} B_c^t k_c$ et en identifiant τ_c comme la variable duale de λ_c , nous trouvons un problème de complémentarité classique (LCP) [34] restreint aux variables des câbles,

$$\begin{cases} W \lambda_c - \tau_c = -k_c B_c K^{-1} F^d - t_c^0 \\ 0 \leq \lambda_c \perp \tau_c \geq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Ce LCP peut être résolu par une large gamme d'algorithmes. Sa résolution assure une solution de référence pour tester la stratégie de décomposition de domaine. Ainsi, nous proposons dans un premier temps d'éclaircir la mise en place de la formulation LCP et de choisir l'algorithme de résolution avant d'entrer dans l'approche de décomposition de domaine.

Formulation LCP des problèmes de tenségrité

La configuration de référence choisie est celle donnée par l'état du système avant assemblage. On suppose que le système réticulé est constitué de m éléments (barres et câbles) liés par n nœuds. Le nombre de degrés de liberté imposés aux nœuds du système par l'extérieur (c'est à dire par le bâti) est noté k . On en déduit ainsi le nombre N de ddl du système dans l'espace, soit $N = 3n - k$.

Les N équations d'équilibre du système de tenségrité, qui traduisent l'équilibre des nœuds sous l'action des forces extérieures et des efforts normaux, conduisent à un système d'équations linéaires pouvant se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$A q = f \quad (5.12)$$

où A est la matrice d'équilibre à N lignes et m colonnes, q est le vecteur à m composantes des efforts dans les éléments et f est le vecteur à N composantes des forces extérieures appliquées aux nœuds. En séparant les valeurs relatives aux câbles (indicées par c) et celles relatives aux barres (indicées par b), on a $A = [A_b, A_c]$ et l'équilibre devient $A_b q_b + A_c q_c = f$.

La condition de compatibilité qui lie le vecteur à N composantes des déplacements des nœuds u depuis l'état de référence au vecteur à m composantes de variations de longueur e des éléments s'écrit, en notant la transposée avec un exposant t ,

$$e = A^t u \quad \text{ou} \quad e_b = A_b^t u \quad \text{et} \quad e_c = A_c^t u \quad (5.13)$$

La loi de comportement linéaire vérifiée par les barres s'écrit :

$$q_b = k_b e_b \quad (5.14)$$

où k_b est une matrice diagonale constituée des raideurs des barres.

La loi de comportement des câbles est non régulière : l'effort interne est non nul sous traction et nul sous compression. Après changement de variable, on retrouve le graphe de Signorini avec pour variables q_c et R_c . L'expression de la variable introduite par le changement de variable est alors donnée par :

$$R_c = k_c^{-1} q_c - e_c - e_c^0. \quad (5.15)$$

où e_c^0 est la variation de longueur des câbles après assemblage (précharge).

On cherche dans la suite à formuler le problème précédent sous la forme canonique d'un système LCP.

Formulation de type décomposition de domaine

La non régularité étant essentiellement contenue dans le comportement des câbles, il paraît naturel d'utiliser une approche du type de celles adoptées en décomposition de domaine, après avoir séparé les éléments constitutifs d'un système de tenségrité en un réseau contenant les câbles (premier sous domaine), et en un réseau contenant les barres (deuxième sous domaine). La loi de comportement des barres (5.14) associée à l'équilibre mène à l'expression suivante $K_b u + A_c q_c = f$ où $K_b = A_b k_b A_b^t$ est la matrice de rigidité du système de barres. Celle-ci est potentiellement singulière (mais symétrique et positive), tout comme celle du système de câbles, $K_c = A_c k_c A_c^t$, la somme des deux $K = K_b + K_c$ étant supposée régulière si le problème est initialement bien posé. La condensation des inconnues u sur le réseau de câbles (où sont localisées les non régularités) peut être réalisée en utilisant une inverse généralisée K_b^+ de K_b [13] : en notant R la matrice constituée des modes singuliers de K_b ($K_b R = 0$) et α les coordonnées possibles du déplacement sur ces modes. L'emploi de l'inverse généralisée nous permet alors d'obtenir le système (5.16) :

$$\begin{cases} u = K_b^+ (f - A_c q_c) + R\alpha \\ R^t (f - A_c q_c) = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

La deuxième équation traduit la nécessaire orthogonalité aux modes singuliers. Une combinaison adéquate de (5.15) et (5.16) conduit au système qui suit :

$$\begin{cases} W q_c - N R_c = g \\ 0 \leq q_c \perp R_c \geq 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

où $N = k_c A_c^t R M^{-1} R^t A_c k_c - k_c$ avec $M = R^t A_c k_c A_c^t R$,

$$W = 1 + N A_c^t K_b^+ A_c$$

$$\text{et } g = k_c A_c^t K_b^+ f + k_c A_c^t R M^{-1} R^t (f - A_c k_c e_c^0 - K_c K_b^+ f) + k_c e_c^0.$$

La forme trouvée n'est pas celle d'un LCP standard. En outre W n'est pas symétrique et ceci restreint le champ des méthodes de résolution applicables. Cela exclut notamment celles définies sur un problème d'optimisation (GPC par exemple). De plus, la résolution de ce système peut s'avérer coûteuse car les modes singuliers sont très nombreux (jusqu'à 6 par barre!).

Une formulation plus adaptée est nécessaire. Elle peut cependant être encore construite à partir de la séparation initiale en barres et câbles.

Formulation algébrique

En utilisant simultanément l'équilibre, la loi de comportement des barres et le changement de variable proposé pour les câbles, on arrive à l'expression suivante :

$$Ku + A_c k_c R_c = f - A_c k_c e_c^0 \quad (5.18)$$

Une formulation symétrique pour R_c peut être obtenue en multipliant à gauche par $k_c A_c^t K^{-1}$, cela donne :

$$k_c A_c^t u + k_c A_c^t K^{-1} A_c k_c R_c = k_c A_c^t K^{-1} (f - A_c k_c e_c^0) \quad (5.19)$$

$e_c = A_c^t u$ peut finalement être remplacé en réutilisant le changement de variable (5.15), et on obtient :

$$q_c - M R_c = h \quad (5.20)$$

où $M = k_c - k_c A_c^t K^{-1} A_c k_c$ et $h = k_c A_c^t K^{-1} (f - A_c k_c e_c^0) + k_c e_c^0$.

Finalement, nous parvenons à la forme souhaitée d'un LCP standard :

$$\begin{cases} q_c - M R_c = h \\ 0 \leq q_c \perp R_c \geq 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

On peut montrer qu'outre la symétrie, M possède la propriété de positivité et que la dimension de son noyau est inférieure ou égale à celle du noyau de K_b . Cependant, M est généralement singulière, ce qui complique l'analyse mathématique du problème et la maîtrise du comportement des algorithmes de résolution.

Illustrations

Nous décrivons dans cette partie brièvement deux cas tests bidimensionnels, qui bien qu'étant des assemblages de barres et de câbles, ne sont pas à proprement parler des systèmes de tensegrité : celui d'un "mât" et celui d'un "cerf-volant".

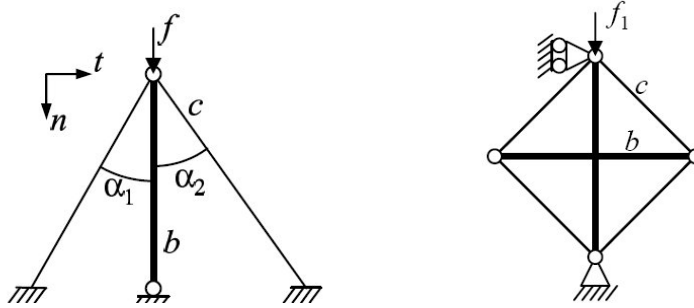


FIG. 5.9 – Mât à gauche et cerf-volant à droite

- Le mât. Nous présentons le cas non symétrique où l'angle α_1 est différent de l'angle α_2 . Les câbles sont supposés avoir la même raideur k_c . L'écriture de l'équilibre dans la base (n, t) , liée à la barre, donne les expressions suivantes :

$$A_c = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 & -\cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 \end{pmatrix}, A_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$K = k_b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_c \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 & \frac{1}{2}[-\sin(2\alpha_1) + \sin(2\alpha_2)] \\ \frac{1}{2}[-\sin(2\alpha_1) + \sin(2\alpha_2)] & (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la taille du noyau de K_b , comme celle de M , est de 1. Comme M est copositive plus, l'algorithme de Lemke est applicable comme méthode directe. On peut vérifier que les différents algorithmes redonnent la

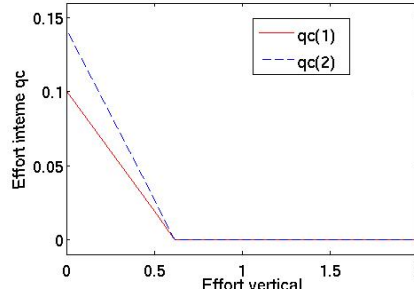


FIG. 5.10 – Effort interne dans les câbles du mât en fonction de la charge imposée verticalement.

même solution tant qu'il y a unicité (c'est à dire non détente simultanée des câbles) et qu'elles ne diffèrent que de R quand il y a plusieurs solutions différentes (détente simultanée des câbles au delà d'une charge critique).

- Le cerf-volant. Pour traiter ce cas, il faut écrire l'équilibre des 4 nœuds et écartier ensuite les différentes variables sur lesquelles les déplacements ont été imposés. A ce stade, on obtient le système matriciel (5.12). Dans ce cas, la dimension du noyau de M est 3.

Exemple d'une nappe de tenségrité

Description du problème Les structures étudiées sont des grilles planes [18], obtenues par assemblage de 9, de 81 puis de 256 demi-cuboctaèdre (cf. (5.11)) (quadruplex particulier ayant 8 nœuds, 12 câbles et 4 barres). Les paramètres caractéristiques du module sont donnés dans le tableau 5.2. L'assemblage de ces modules se fait au niveau de leurs nœuds. Connaissant un état d'autocontrainte du module c'est à dire un état de tension non nul vérifiant l'équilibre sans

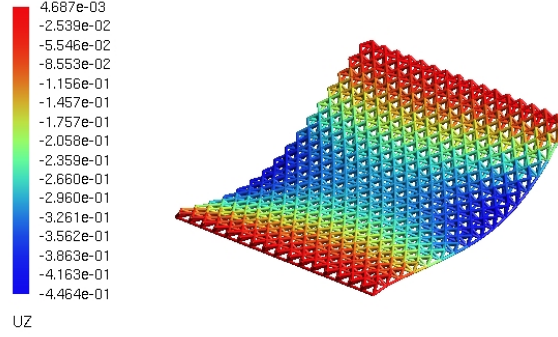


FIG. 5.11 – Résultats de déformée

chargement extérieur, on peut déduire un état d'autocontrainte de l'ensemble. Un déplacement nul est imposé sur les bords gauche et droit de la nappe, des efforts verticaux constants sont appliqués sur le reste des nœuds.

On dénombre respectivement 108, 972 et 3072 contraintes de complémentarité sur ces trois cas. La matrice M étant copositive plus, la méthode de Lemke est applicable.

$H = 0.5 \text{ m}$	Hauteur du module
$L = 1 \text{ m}$	Longueur du module
$S_c = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	Section des câbles
$E_c = 10^{11} \text{ Pa}$	Module d'Young des câbles
$S_b = 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	Section des barres
$E_b = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	Module d'Young des barres
$t_c^0 = 2000 \text{ N}$	autocontrainte des câbles inférieurs
$t_c^0 = \sqrt{2} \times 2000 \text{ N}$	autocontrainte des câbles supérieurs
$t_c^0 = \sqrt{1 + 4 \frac{H^2}{L^2}} \times 2000 \text{ N}$	autocontrainte des câbles inclinés
$t_b^0 = -\sqrt{5 + 4 \frac{H^2}{L^2}} \times 2000 \text{ N}$	autocontrainte des barres

TAB. 5.2 – Paramètres caractéristiques

Comparaison de solveurs LCP

Pour chaque méthode itérative, on choisit comme solution de référence celle obtenue soit par la méthode directe dans le cas de la petite nappe, soit celle obtenue après un grand nombre d'itérations par Gauss-Seidel que l'on notera

R_c^{ref} . Pour comparer la qualité des solutions, on effectue le calcul de la différence entre les solutions R_c^i obtenues par les différentes méthodes numériques et R_c^{ref} , qui représente l'erreur donnée par la formule ci-dessous :

$$\eta = \sqrt{(R_c^i - R_c^{ref})^t M (R_c^i - R_c^{ref}) / (R_c^i + R_c^{ref})^t M (R_c^i + R_c^{ref})}$$

Les résultats sont donnés par la figure 5.12. Différents paramètres de direction de recherche, k , ont été pris pour la LATIN.

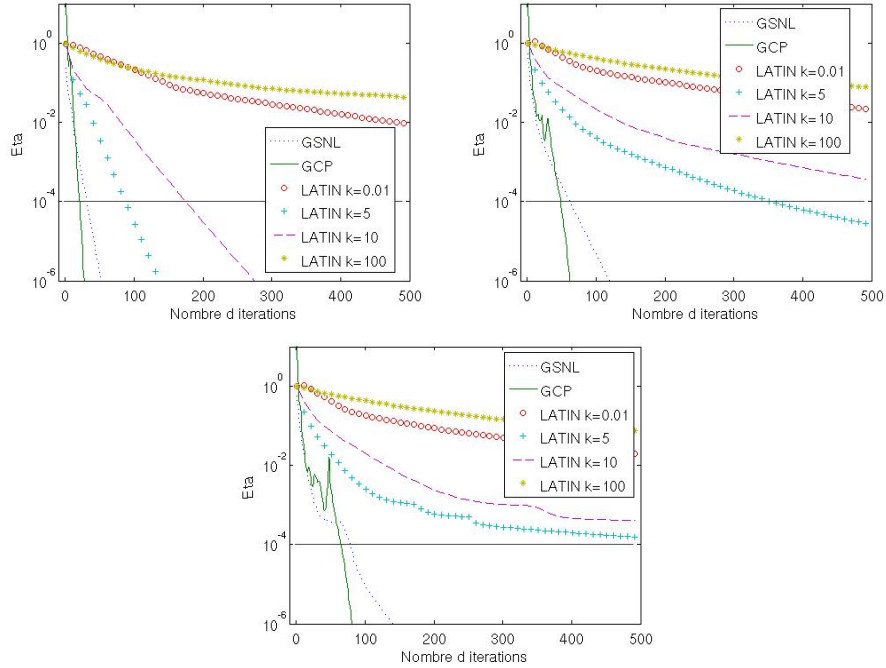


FIG. 5.12 – Résultats de convergence sur la structure à 9 modules en haut à gauche, sur la structure à 81 modules en haut à droite, et sur la structure à 256 modules en bas

Analyse des résultats et bilan

La méthode de Lemke, montre ses limites en terme de taille de matrice assez rapidement, ne convergeant plus au delà d'une centaine de contraintes. A cette étape de l'étude, il est difficile de séparer ce qui relève du comportement standard d'une méthode directe (qui reste performante dans le cas linéaire pour plusieurs milliers de variables), de ce qui est dû à la singularité de la matrice M (dont la taille du noyau peut être assez conséquente).

La comparaison des méthodes itératives en nombre d'itérations montre une dépendance vis à vis de la taille du problème. Pour un problème de taille réduite, la méthode de Gauss-Seidel converge très rapidement ; pour la méthode LATIN, il existe une valeur optimale du paramètre k de la direction de recherche, qui dépend de la taille du problème.

Quelques questions persistent quant aux choix du critère d'arrêt des algorithmes, les méthodes fournissant au cours des itérations des solutions ne satisfaisant pas exactement les mêmes propriétés.

Il semble que la singularité des problèmes diminue la robustesse des méthodes : dans le cas des problèmes de poinçon ou de rectangle par exemple la méthode LATIN convergeait plus rapidement que la méthode de GSNL (modulo le choix du paramètre de direction de recherche) par contre dans le cas des structures de tensegrité GSNL confirme une robustesse déjà constatée sur d'autres types de problèmes.

Nous choisissons une méthode de gradient projeté conjugué bien adaptée à ce type de problème (5.21) où W est positive mais non définie [43]. Le LCP est alors équivalent à un problème de minimisation quadratique. Un tel algorithme du gradient conjugué apparaît être efficace pour des systèmes de tensegrité de grande taille, mais pour obtenir la formulation LCP la matrice K doit être inversée, ce qui peut coûter cher, voir être impossible, et peut générer des imprécisions numériques. C'est pourquoi une approche de décomposition de domaine semble être une alternative intéressante et c'est ce que nous étudierons dans la prochaine section.

5.2.2 Stratégie de sous-structuration

Une première démarche vers une reformulation du problème, consiste en une décomposition de la structure en sous-structures et interfaces (voir Figure 5.13). Chacun de ces composants possède ses propres variables et équations. La méthode de sous-structuration utilisée est la méthode dite des boîtes. Elle permet de procéder de deux façons : soit en ventilant les noeuds parmi les sous-structures, les interfaces sont alors les liens reliant une sous-structure à une autre ; soit en ventilant les liens parmi les sous-structures, les interfaces sont alors les noeuds reliant une sous-structure à une autre. C'est ce dernier cas qui est envisagé ici (voir Figure 5.13) la particularité de ce choix est d'assurer un comportement parfait d'interface comme on le verra plus loin.

Une sous-structure E , est soumise aux actions des interfaces voisines $\Gamma_{EE'}$ (aux forces $F_{EE'}$ et aux déplacements $U_{EE'}$). En considérant l'ensemble des interfaces locales de la sous-structure E , les assemblages des champs précédents sont notés $F_{E\Gamma}$ et $U_{E\Gamma}$. Une interface $\Gamma_{EE'}$ transfère les forces $F_{EE'}$ et les déplacements $U_{EE'}$ de part et d'autre de ses côtés.

La solution $s = \bigcup_E s_E$ avec $s_E = (e_E, t_E, U_{EE'}, F_{EE'})$ du problème de réf-

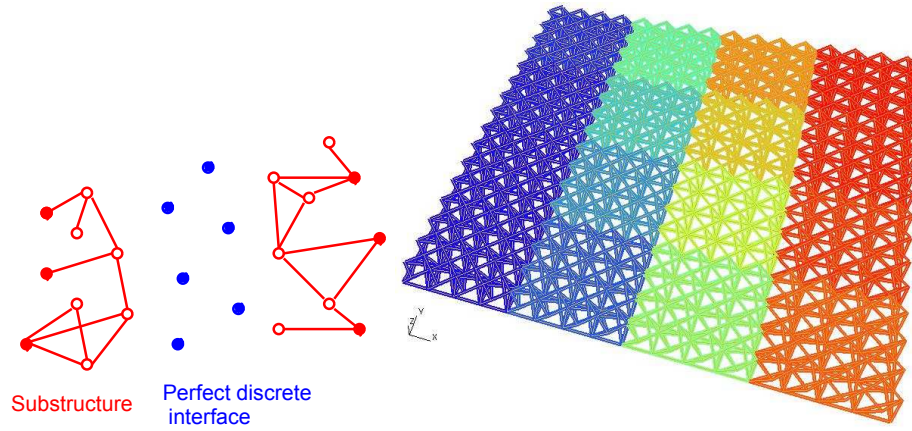


FIG. 5.13 – A gauche, interface discrète ; à droite, sous-structuration d'une nappe de tensegrité (en 16 sous-domaines)

F_E, F_E^d	Forces nodales interne et externe de la sous-structure E
U_E, U_E^d	Déplacements nodaux interne et externe de la sous-structure E
$\Gamma_{EE'}$	Interface entre les sous-structures E et E'
Γ	Interface globale
$C_{E\Gamma}$	Matrice de mapping booléenne des ddl de la frontière de la sous-structure
$F_{E\Gamma}$	Forces de l'interface Γ agissant sur la sous-structure E
$F_{EE'}$	Forces de l'interface $\Gamma_{EE'}$ agissant sur la sous-structure E
$U_{EE'}$	Déplacement des noeuds de $\Gamma_{EE'}$ connectés à E
$U_{E\Gamma}$	Déplacement de la frontière de la sous-structure E

TAB. 5.3 – Notations liées à la sous-structuration

rence doit satisfaire :

- L'équation d'équilibre :

$$-F_E + F_E^d + C_{E\Gamma}^t F_{E\Gamma} = 0 \quad (5.22)$$

où $F_E = B_E^t t_E$;

- la compatibilité des déplacements :

$$\begin{cases} U_{E\Gamma} = C_{E\Gamma} U_E \\ e_E = B_E U_E \\ U_E|_{\Gamma_u} = U_E^d \end{cases} \quad (5.23)$$

- les lois de comportement (5.4), (5.6)
- Le comportement de l'interface, à savoir :
l'équilibre des forces :

$$F_{EE'} + F_{E'E} = 0 \quad (5.24)$$

et la continuité des déplacements :

$$U_{EE'} = U_{E'E} \quad (5.25)$$

Les interfaces présentent un comportement parfait grâce à la continuité des déplacements et grâce à la localisation des non-régularités dans les sous-structures. Ce choix de modélisation est proche de celui utilisé dans [3] et en quelque sorte le dual de celui proposé dans [39] où la non-linéarité (contact dans les fissures) est isolée dans les interfaces. Cette stratégie de sous-structuration peut facilement être étendue aux milieux granulaires où les noeuds sont les centres de masse des grains et les liens sont les contacts ponctuels. Mais certaines relations doivent alors être modifiées afin de respecter la formulation en vitesse-impulsion, dans le cas de la dynamique non régulière.

5.2.3 Stratégie numérique multiéchelle

Afin de prendre en compte l'aspect multiéchelle du comportement d'une grande structure de tenségrité, en particulier lorsque celle-ci est issue de l'agencement de modules identiques, une stratégie numérique bien adaptée est mise en place. Nous entreprenons, dans cette étude, une approche multiéchelle de décomposition de domaine, nous choisissons de suivre l'approche proposée dans [26, 27] qui s'appliquait aux milieux continus, et de l'étendre aux systèmes discrets.

m, M	Indique une quantité micro et Macro
l	Paramètre de direction de recherche par sous-structure
d	Paramètre de direction de recherche par interface
$f_{EE'}$	Forces Macro généralisées de l'interface $\Gamma_{EE'}$ agissant sur la sous-structure E
$f_{E\Gamma}$	Forces Macro généralisées de l'interface Γ agissant sur la sous-structure E
$u_{EE'}$	Déplacements Macro généralisés des noeuds de $\Gamma_{EE'}$ connectés à E
$u_{E\Gamma}$	Déplacements Macro généralisés de la frontière de la sous-structure E
$R_{EE'}^t$	Projecteur sur l'espace macro généralisé

TAB. 5.4 – Notations micro-Macro

Description Micro-macro

Une fois la sous-structuration effectuée, la première étape consiste à définir le problème à partir des champs microscopiques et macroscopiques, champs portant sur les quantités d'interfaces du problème sous-structuré. On suit ici la démarche utilisée dans [25]. Par interface locale $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' , étant donnés un champ discret de forces $F_{EE'}$ aux noeuds de l'interface agissant sur E et un champ discret de déplacements $U_{EE'}$ des noeuds de l'interface connectés à E , nous décomposons en deux parties ces champs : une partie

Macro, marquée d'un indice M , et une partie complémentaire micro, marquée d'un indice m . Ce qui donne :

$$F_{EE'} = F_{EE'}^M + F_{EE'}^m \quad \text{et} \quad U_{EE'} = U_{EE'}^M + U_{EE'}^m \quad (5.26)$$

Les espaces micro et macro doivent être définis de façon unique : ils doivent être orthogonaux, c'est pourquoi un projecteur orthogonal doit être utilisé dans chaque sous espace. L'énergie s'écrit donc de la façon suivante :

$$\sum_{EE'} (F_{EE'})^t U_{EE'} = \sum_{EE'} (F_{EE'}^M)^t U_{EE'}^M + (F_{EE'}^m)^t U_{EE'}^m \quad (5.27)$$

L'exposant t indique la transposition L_2 : cette mesure d'énergie est spécifique aux systèmes discrets.

Représentation Macro

La partie macro tient sur un espace de petite taille : les champs macro sont définis à l'aide de peu de paramètres ; une base des champs macro peut être choisie comme suit : $F_{EE'}^M = R_{EE'} f_{EE'}$ où $f_{EE'}$ contient les paramètres macro des forces, et $R_{EE'}$ l'ensemble des vecteurs de base. Pour des raisons de simplicité, le paramètre macro correspondant au champ de déplacement, $u_{EE'}$, est choisi de façon à garder les mêmes vecteurs de base :

$$U_{EE'}^M = R_{EE'} u_{EE'} \quad \text{et} \quad F_{EE'}^M = R_{EE'} f_{EE'} \quad (5.28)$$

Les paramètres macro peuvent être choisis en fonction du problème à modéliser ; ici, nous choisissons les moyennes généralisées des champs $F_{EE'}$ et $U_{EE'}$ sur $\Gamma_{EE'}$, d'ordre 1. En 3D, il en résulte que :

- $f_{EE'}$ comprend les 3 résultantes des forces, les 3 moments, les deux tensions, et le cisaillement dans le plan de l'interface ;
- $u_{EE'}$ comprend les moyennes généralisées qui correspondent aux 3 translations moyennes, aux 3 rotations moyennes, aux 2 extensions, et au cisaillement dans le plan de l'interface.

On remarque que 9 paramètres sont nécessaires par interface pour les champs de forces macro généralisés (et 9 paramètres pour les champs de déplacements macro généralisés).

Comme simplification supplémentaire, la base $R_{EE'}$ est orthonormalisée :

$$R_{EE'}^t R_{EE'} = \mathbf{1}$$

pour obtenir

$$(F_{EE'}^M)^t U_{EE'}^M = f_{EE'}^t R_{EE'}^t R_{EE'} u_{EE'} = f_{EE'}^t u_{EE'}$$

En utilisant (5.27) les expressions du projecteur orthonormé sur l'espace macro donnent :

$$f_{EE'} = R_{EE'}^t F_{EE'} \quad \text{et} \quad u_{EE'} = R_{EE'}^t U_{EE'} \quad (5.29)$$

et l'orthogonalité : $R_{EE'}^t U_{EE'}^m = 0 = R_{EE'}^t F_{EE'}^m$.

Faisons quelques remarques dans le cas des systèmes discrets, car ils introduisent certaines spécificités :

- A la différence d'un partitionnement d'un milieu continu, le cas d'un milieu discret conduit à une connectivité de la décomposition plus élevée (grand nombre d'interfaces par rapport au nombre de sous-structures) mais aussi à quelques interfaces de petite taille (faible nombre de noeuds). De telles interfaces, qualifiées de "faibles", peuvent avoir trop peu de noeuds pour décomposer leur espace de discrétisation en un sous-espace macro et un sous-espace micro (par exemple moins de 4 noeuds en $3D$). On choisit alors de ne pas définir de partie macro sur ces interfaces faibles. En fait, si une interface en $3D$ a un nombre de noeuds inférieur ou égal à 3, seul 9 ddl sont concernés ; et un espace "grossier" de 9 dimensions ne peut être défini. Dans ce cas, l'interface $\Gamma_{EE'}$ n'est pas le support d'un espace macro : $R_{EE'} = \emptyset$;
- chaque interface $\Gamma_{EE'}$ est un nuage de noeuds et la partie macro d'un champ en $3D$ ne se définit pas de façon triviale dans ce cas. De plus, nous avons besoin d'un outil général pour le calcul de $R_{EE'}$. La première étape consiste à trouver le plan le plus proche de l'interface. Une minimisation des moindres carrés de la distance au plan est équivalente à trouver les vecteurs propres de la matrice "d'inertie" de l'ensemble des noeuds. Une fois le centre G , et la base locale (n_1, n_2, n_3) trouvés, où n_3 est normal à l'interface, voir Figure 5.14, $R_{EE'}$ est complété avec les vecteurs nodaux suivants :
 - les translations selon les directions n_i ,
 - les rotations autour des axes $(G, n_i) : n_i \wedge (X - G)$, où X est le vecteur de coordonnées du noeud courant,
 - l'extension suivant la direction $n_1 : n_1 n_1^t (X - G)$, l'extension suivant la direction $n_2 : n_2 n_2^t (X - G)$,
 - et finalement la torsion dans le plan $(n_1, n_2) : (n_1 n_2^t + n_2 n_1^t)(X - G)$.
Une procédure de Gram-Schmidt est ensuite appliquée pour obtenir le projecteur orthonormé $R_{EE'}$.

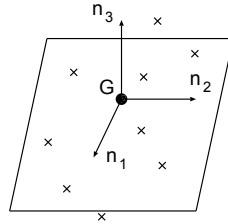


FIG. 5.14 – Base locale

Méthode LATIN (LArge Time Increment)

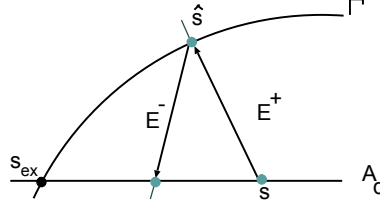


FIG. 5.15 – Principe de la méthode LATIN

La méthode LATIN [24] est utilisée comme un solveur pour trouver la solution du problème précédent. Brièvement, elle repose sur deux principes :

- tout d'abord, la séparation des difficultés en deux groupes d'équations :
 - (i) un premier groupe $\mathbf{A_d}$ dans lequel on trouve les équations d'équilibre par sous-structure (5.22) et la compatibilité des déformations par sous-structures, et (ii) un deuxième groupe $\mathbf{\Gamma}$ dans lequel on trouve les relations de comportement des liens (5.24) et le comportement des interfaces (5.25). Dans notre cas, $\mathbf{\Gamma}$ n'est pas différentiable à cause du comportement non-régulier des câbles ;
- ensuite, une procédure itérative à deux étapes : on construit alternativement des solutions qui appartiennent à $\mathbf{A_d}$ et à $\mathbf{\Gamma}$, en utilisant les directions de recherche $\mathbf{E+}$ et $\mathbf{E-}$, Figure 5.15.

La solution du problème, $s_{\text{ex}} = \{(e_E, t_E) ; (U_{EE'}, F_{EE'})\}$ est l'intersection de $\mathbf{A_d}$ et $\mathbf{\Gamma}$.

L'étape consistant à construire $\hat{s}$ connaissant s est dite "locale" : elle nécessite des paramètres de directions de recherche positifs d et l :

$$(\hat{t}_E - t_E) + l(\hat{e}_E - e_E) = 0 \quad (5.30)$$

et

$$(\hat{F}_{EE'} - F_{EE'}) - d(\hat{U}_{EE'} - U_{EE'}) = 0 \quad (5.31)$$

L'étape consistant à construire s connaissant $\hat{s}$ est dite "linéaire" : elle nécessite les mêmes paramètres bien que les directions $\mathbf{E+}$ et $\mathbf{E-}$ soient conjuguées : $(t_E - \hat{t}_E) - l(e_E - \hat{e}_E) = 0$ et $(F_{EE'} - \hat{F}_{EE'}) + d(U_{EE'} - \hat{U}_{EE'}) = 0$.

On montre, voir [24], qu'un tel choix de directions de recherche assure la convergence de la méthode.

Etape locale — solveur non-régulier local

Comme mentionné auparavant, cette étape consiste à trouver $\hat{s}$ à partir de s calculé à l'étape précédente. Elle mène à des problèmes locaux et linéaires par interfaces parfaites $\Gamma_{EE'}$, et à des problèmes de complémentarité linéaire (LCP) [34] diffus par sous-structures Ω_E .

Par interface $\Gamma_{EE'}$: le comportement (5.25) se décompose en une partie micro et une partie macro (ce qui est possible grâce à notre choix de sous-structuration, qui mène d'ailleurs à des interfaces parfaites) :

$$\begin{cases} \hat{F}_{EE'}^M + \hat{F}_{E'E}^M = 0 \\ \hat{U}_{EE'}^M = \hat{U}_{E'E}^M \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{F}_{EE'}^m + \hat{F}_{E'E}^m = 0 \\ \hat{U}_{EE'}^m = \hat{U}_{E'E}^m \end{cases} \quad (5.32)$$

La direction de recherche se décompose aussi en deux paramètres d^m et d^M :

$$(\hat{F}_{EE'}^m - F_{EE'}^m) - d^m(\hat{U}_{EE'}^m - U_{EE'}^m) = 0$$

et l'expression pour les champs de $E'E$ est similaire de part et d'autre de la même interface. Pour la partie macro, les expressions correspondantes sont dotées de l'exposant M .

La solution est explicite :

$$\begin{cases} \hat{U}_{E'E}^m = \hat{U}_{EE'}^m = \frac{1}{2}[(U_{EE'}^m + U_{E'E}^m) - \frac{1}{d^m}(F_{EE'}^m + F_{E'E}^m)] \\ \hat{F}_{E'E}^m = -\hat{F}_{EE'}^m = \frac{1}{2}[(F_{E'E}^m - F_{EE'}^m) - d^m(U_{E'E}^m - U_{EE'}^m)] \end{cases}$$

Une expression analogue est obtenue pour la partie macro.

Par sous-structure Ω_E : en utilisant un paramètre de direction de recherche scalaire l , on parvient à séparer le comportement des barres de celui des câbles.

Pour les barres, le couple $(\hat{e}_b, \hat{t}_b)$ doit vérifier la loi de comportement (5.4) et la direction de recherche (6.31). Il en résulte que :

$$\begin{cases} \hat{e}_b = (k_b + l)^{-1}(le_b + t_b) \\ \hat{t}_b = k_b \hat{e}_b \end{cases}$$

Pour les câbles, le couple $(\hat{e}_c, \hat{t}_c)$ doit satisfaire la loi de comportement (5.6). Il en résulte un LCP [34] une fois le changement de variables effectué (5.6), soit :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_c - (k_c^{-1} + l^{-1})\hat{\tau}_c = \tilde{\lambda} \\ 0 \leq \hat{\tau}_c \perp \hat{\lambda}_c \geq 0 \end{cases}$$

où la variable $\tilde{\lambda} = -[l^{-1}\tau_c + e_c + k_c^{-1}t_c^0]$ est connue à cette étape. La solution est donc

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_c = \langle \tilde{\lambda} \rangle_+ \\ \hat{\tau}_c = -(k_c^{-1} + l^{-1}) \langle \tilde{\lambda} \rangle_- \end{cases}$$

Remarquons que ce choix pour l'étape locale est le plus simple. On pourrait continuer ce travail en introduisant une version mettant en place un LCP global par sous-structure couplant les barres et les câbles, et pour lequel il existe des solveurs efficaces (cf Projet Européen SICONOS, <http://siconos.inria.fr>). Une telle version pourrait améliorer l'efficacité des solveurs directs globaux avec des techniques de décomposition de domaine en les employant pour la résolution

de problèmes de petites tailles par sous-structures (indépendantes les unes des autres), et en les couplant grâce à une procédure itérative au niveau des interfaces [28, 15]. De plus, ceci permettrait de remplacer les solveurs LCP globaux sur le problème entier par des solveurs locaux par sous-structures, comme celui utilisé dans la section précédente.

Etape linéaire — opérateur tangent linéaire

Cette étape est identique à celle décrite dans [27]. Néanmoins, la nature discrète du problème, nous mène à une formulation algébrique.

A partir de l'estimation de la solution $\hat{s}$ obtenue à l'étape locale précédente, l'étape linéaire consiste à trouver s qui satisfait les équations d'équilibre et la compatibilité des déformations par sous-structures (5.22), (5.23). Avec une approche en effort, on écrit la continuité des champs macro sur chaque interface $\Gamma_{EE'}$ comme suit :

$$F_{EE'}^M + F_{E'E}^M = 0 \quad (5.33)$$

Et pour éviter de sur-contraindre le problème, la direction de recherche est écrite sous forme faible ce que l'on verra dans la prochaine section.

Description Macro et direction de recherche

Tout d'abord, étant donné que dans cette étape on travaille par sous-structure, nous avons besoin d'introduire des notations supplémentaires :

- l'indice $(E\Gamma)$ se rapportera à l'ensemble des quantités (EE') liées à une même sous-structure E . Par exemple, à partir de (5.28) on peut obtenir le vecteur lié à E de la façon suivante : $F_{E\Gamma}^M = R_{E\Gamma} f_{E\Gamma}$.
- pour manipuler l'admissibilité des forces macro (5.33), on utilise un champ macro f_Γ défini sur l'interface globale Γ (assemblage des interfaces locales $\Gamma_{EE'}$). $f_{E\Gamma}$ peut donc s'écrire comme suit $f_{E\Gamma} = c_E f_\Gamma$ où c_E est une matrice booléenne signée. Il est possible d'extraire $f_\Gamma|_{EE'}$ ou $-f_\Gamma|_{E'E}$ pour chaque interface connectée à la sous-structure E .

N.B. : La quantité duale de f_Γ est bien sûr $u_\Gamma = \sum_E c_E^t u_{E\Gamma}$, celle-ci représente le saut de déplacement macro généralisé sur les interfaces.

Pour ne pas sur-contraindre le problème, on utilise une formulation faible pour l'écriture de la direction de recherche sur les interfaces :

$$\begin{aligned} & \min_{F_{E\Gamma}^m, U_{E\Gamma}^m, F_{E\Gamma}^M, U_{E\Gamma}^M} \\ & \frac{1}{2} \sum_E [(F_{E\Gamma}^m - \hat{F}_{E\Gamma}^m) + d^m(U_{E\Gamma}^m - \hat{U}_{E\Gamma}^m)] \frac{1}{d^m} [(F_{E\Gamma}^m - \hat{F}_{E\Gamma}^m) + d^m(U_{E\Gamma}^m - \hat{U}_{E\Gamma}^m)] + \\ & \frac{1}{2} \sum_E [(F_{E\Gamma}^M - \hat{F}_{E\Gamma}^M) + d^M(U_{E\Gamma}^M - \hat{U}_{E\Gamma}^M)] \frac{1}{d^M} [(F_{E\Gamma}^M - \hat{F}_{E\Gamma}^M) + d^M(U_{E\Gamma}^M - \hat{U}_{E\Gamma}^M)] \end{aligned}$$

pour des forces macro généralisées satisfaisant $F_{E\Gamma}^M = R_{E\Gamma} c_E f_\Gamma$. Ce qui mène à une forme forte de la direction de recherche micro

$$(F_{E\Gamma}^m - \hat{F}_{E\Gamma}^m) + d^m(U_{E\Gamma}^m - \hat{U}_{E\Gamma}^m) = 0 \quad (5.34)$$

et une forme faible pour la direction de recherche macro :

$$A^M(f_\Gamma - \hat{f}_\Gamma) + (u_\Gamma - \hat{u}_\Gamma) = 0 \quad (5.35)$$

où $A^M = \sum_E c_E^t R_{E\Gamma}^t \frac{1}{d^M} R_{E\Gamma} c_E$.

Une propriété remarquable dans le cas des interfaces parfaites est que $\hat{u}_\Gamma = 0$. Par ailleurs, en choisissant de prendre $d^M = \infty$, A^M est nulle et la direction de recherche macro se réduit alors à $u_\Gamma = 0$, i.e. la continuité des déplacements macro sur les interfaces. Dans la mesure où ce choix permet d'optimiser la méthode, nous choisissons de prendre $d^M = \infty$ par la suite ; ce résultat avait été montré dans le cas des milieux continus [27], et nous l'exploitons encore ici.

Formulation basique de l'étape linéaire.

En utilisant la compatibilité des déformations et les directions de recherche pour substituer les tensions internes et les forces micros :

$$t_E = (\hat{t}_E - l\hat{e}_E) + lB_E U_E \quad (5.36)$$

$$F_{E\Gamma}^m = (\hat{F}_{E\Gamma}^m + d^m \hat{U}_{E\Gamma}^m) - d^m (U_{E\Gamma} - R_{E\Gamma} u_{E\Gamma}) \quad (5.37)$$

les équations d'équilibre et la direction de recherche macro mènent à :

$$(K_E - C_{E\Gamma}^t R_{E\Gamma} d^m R_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma}) U_E - C_{E\Gamma}^t R_{E\Gamma} c_E f_\Gamma = \hat{F}_E^d \quad (5.38)$$

$$\sum_E c_E^t R_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma} U_E = 0 \quad (5.39)$$

où $K_E = B_E^t l B_E + C_{E\Gamma}^t d^m C_{E\Gamma}$, et

$$\hat{F}_E^d = F_E^d - B_E^t (\hat{t}_E - l\hat{e}_E - t_E^0) + C_{E\Gamma}^t (\hat{F}_{E\Gamma}^m + d^m \hat{U}_{E\Gamma}^m)$$

C'est un problème couplé en (U_E, f_Γ) , son interpretation est une méthode de décomposition de domaine avec des déplacements macros collant les interfaces. f_Γ peut être interprété comme le multiplicateur de Lagrange correspondant à ce recollement macro. Cette formulation a quelques inconvénients :

- tout d'abord, bien que la matrice K_E soit inversible, les termes provenant de la direction de recherche micro sur la frontière de la sous-structure font que la matrice du problème 5.38-5.39 entière ne l'est pas. En fait, le noyau contient les mouvements de solides rigides de la sous-structure puisque de tels mouvements sur les interfaces de E sont des déplacements macros. Cet inconvénient est inhérent à cette approche dès lors que le noyau ne produit aucune énergie. Ce qui s'apparente à la méthode FETI [14] où les mouvements de solides rigides sont utilisés comme espace macro ;
- ensuite, la matrice $R_{E\Gamma} d^m R_{E\Gamma}^t$ n'est pas creuse. Ce qui engendre un coût CPU élevé. Afin d'éviter ces difficultés, nous proposons une autre formulation de l'étape linéaire.

Reformulation de l'étape linéaire

L'approche proposée utilise un changement de variable : $u_{E\Gamma}^* = u_{E\Gamma} + \frac{1}{d^m} f_{E\Gamma}$ de cette façon les équations d'équilibre s'expriment grâce au couple d'inconnues $(U_E, u_{E\Gamma}^*)$ sous la condition qu'elles soient liées par

$$u_{E\Gamma} = R_{E\Gamma}^t U_E \quad (5.40)$$

Ce qui s'écrit finalement comme :

$$\begin{bmatrix} K_E & -C_{E\Gamma}^t R_{E\Gamma} d^m \\ -d^m R_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma} & d^m \mathbf{1}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_E \\ u_{E\Gamma}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_E^d \\ f_{E\Gamma} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

la matrice résultante a maintenant une "structure flèche". En additionnant la direction de recherche macro

$$\sum_E c_E^t u_{E\Gamma} = 0 \quad (5.42)$$

et en rappelant que $f_{E\Gamma} = c_E f_\Gamma$, le problème est fermé.

Problème macro homogénéisé

La partie homogénéisée du comportement de la sous-structure E est obtenue numériquement par la condensation du système précédent sur les ddl grossiers $u_{E\Gamma}^*$:

$$K_E^* u_{E\Gamma}^* = f_{E\Gamma} + g_E \quad (5.43)$$

avec

$$K_E^* = d^m \mathbf{1}_E - d^m R_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma} K_E^{-1} C_{E\Gamma}^t R_{E\Gamma} d^m$$

et où

$$g_E = d^m R_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma} K_E^{-1} \hat{F}_E^d$$

est donné à ce niveau. K_E est inversible, mais le même argument que pour la formulation précédente montre que K_E^* ne l'est pas : son noyau est l'ensemble des éléments macros des mouvements de solides rigides. Néanmoins, une inverse généralisée K_E^+ de K_E^* peut être utilisée [13] pour obtenir $u_{E\Gamma}^*$, ou de façon équivalente $u_{E\Gamma}$:

$$u_{E\Gamma} = L_E f_{E\Gamma} + K_E^+ g_E + R_E \alpha_E \quad (5.44)$$

avec $L_E = K_E^+ - \frac{1}{d^m} \mathbf{1}_E$. Cette matrice est en quelque sorte un opérateur d'homogénéisation R_E est le noyau de K_E^* (projection des mouvements de solides rigides dans l'espace macro) et α_E sont les amplitudes associées, encore inconnues jusque là. Bien entendu, pour qu'il y ait existence de cette solution, les conditions suivantes doivent être remplies :

$$R_E^t (f_{E\Gamma} + g_E) = 0 \quad (5.45)$$

Finalement, le problème macro consiste en (5.44), (5.45) et (6.43). Il peut s'écrire ainsi :

$$\begin{bmatrix} \sum_E c_E^t L_E c_E & N \\ N^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\Gamma \\ \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_E c_E^t K_E^+ g_E \\ g \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$\sum_E c_E^t L_E c_E$ est simplement l'assemblage des flexibilités macros homogénéisées, $\alpha^t = [\dots \alpha_E^t \dots]$ est le vecteur dont les composantes sont les amplitudes des mouvements de solides rigides des sous-structures, $N = [\dots c_E^t R_E \dots]$ contient les bases des mouvements de solides rigides des noyaux, et $g^t = [\dots g_E^t R_E \dots]$.

Ce problème macro est de petite taille (10 fois le nombre d'interfaces) et peut être factorisé une fois pour toute et ré-utilisé à chaque itération, tout comme on utilise une direction de recherche constante.

Relocalisation.

Une fois le problème macro résolu, $f_{E\Gamma}$ et α_E sont connus pour chaque sous-structure E , et $u_{E\Gamma}$ peut être post-traité avec (5.44). En remontant par substitution (5.41), on arrive à

$$U_E = K_E^{-1}(\hat{F}_E^d + C_{E\Gamma}^t R_{E\Gamma} d^m u_{E\Gamma}^*)$$

La partie micro additionnelle est $U_{E\Gamma}^m = U_{E\Gamma} - R_{E\Gamma}^t U_E = U_{E\Gamma} - R_{E\Gamma} u_{E\Gamma}$ et $F_{E\Gamma}^m$ est calculé grâce à la direction de recherche (5.37). La variation de longueur des liens est $e_E = B_E U_E$ et t_E est calculé grâce à la direction de recherche (5.37).

Résultats numériques pour une nappe de
tenségrité.

5.3 Résultats numériques pour une nappe de tensegrité

5.3.1 Description du problème envisagé

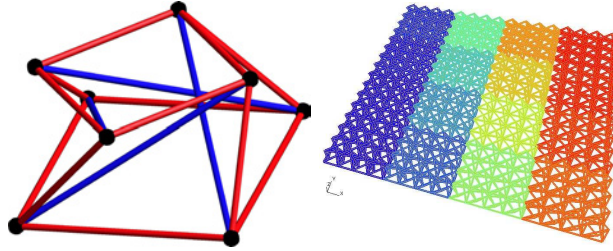


FIG. 5.16 – Modules utilisés (à gauche) et sous-structuration de la nappe (à droite)

On considère comme cas test une nappe de tensegrité obtenue par duplication d'un module autocontraint [18]. Un tel module est constitué de 8 noeuds, 12 câbles et 4 barres, Figure 5.16. Les paramètres caractéristiques de ce module sont donnés dans le Tableau 5.5. L'autocontrainte étant l'état de tension interne dans les liens vérifiant l'équilibre sans chargement extérieur, i.e. $Bt^0 = 0$. Par ailleurs, notons que chaque assemblage de tels modules est automatiquement autocontraint. La grille de tensegrité considérée possède $16 \times 16 = 256$ modules, elle se décompose en $4 \times 4 = 16$ sous-structures (chacune possédant 16 modules) et 24 interfaces fortes, Figure 5.16. Remarquons que la sous-structuration d'un milieu continu équivalent mènerait à 16 sous-structures et uniquement 24 interfaces, aucune interface ne pouvant être "faible". Comme conditions limites, les noeuds de la partie inférieure sont bloqués sur deux bords opposés et des efforts verticaux constants, $F^d = 40$ N, sont appliqués sur les noeuds complémentaires.

5.3.2 Choix des directions de recherche

Dans notre approche, nous utilisons deux paramètres qui définissent les directions de recherche : d^m et l . Concernant le paramètre l , notre choix est simple : l est la rigidité des liens sur lesquels on travaille, i.e. $l = k_c$ pour les câbles, et $l = k_b$ pour les barres. Concernant le paramètre d^m aux interfaces, une rigidité globale du module est calculée, et les valeurs correspondantes de la rigidité équivalente provenant des interfaces a été choisie. Cette procédure a l'avantage d'être automatique, bien que la valeur obtenue ne soit pas la valeur optimale. Dans le cas présent, nous avons pris $d^m = 3.92 \cdot 10^6$ N/m. Pour toutes les simulations suivantes, ces valeurs ont été fixées une fois pour toute.

$H = 0.5$ m	Hauteur du module
$L = 1$ m	Longueur du module
$S_c = 0.5 \cdot 10^{-4}$ m ²	Section des câbles
$E_c = 10^{11}$ Pa	Module d'Young des câbles
$S_b = 2.8 \cdot 10^{-4}$ m ²	Section des barres
$E_b = 2 \cdot 10^{11}$ Pa	Module d'Young des barres
$t_c^0 = 2000$ N	Aucontrainte des câbles inférieurs
$t_c^0 = \sqrt{2} \times 2000$ N	Autocontrainte des câbles supérieurs
$t_c^0 = \sqrt{(1 + 4\frac{H^2}{L^2})} \times 2000$ N	Autocontrainte des câbles inclinés
$t_b^0 = -\sqrt{(5 + 4\frac{H^2}{L^2})} \times 2000$ N	Autocontrainte des barres

TAB. 5.5 – Paramètres caractéristiques

5.3.3 Résultats de la simulation

En mode de fonctionnement limite, le chargement (ou la surcharge) appliqué peut aller jusqu'à détendre une partie des câbles, jusqu'à une éventuelle valeur critique où il y a perte de rigidité de la structure, analogue au flambement pour un milieu continu, où peuvent alors apparaître des mécanismes. On s'intéresse ici à ce type de chargement.

Nous considérons plusieurs amplitudes de chargements αF_d avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Pour ces valeurs de α , la simulation est effectuée sur un pas à partir de la configuration de référence Ω_0 à la configuration actuelle Ω_α sans "time stepping" mais en un seul incrément de charge à chaque fois.

La Figure 5.17 présente les valeurs de τ_c dans chacun des 3072 câbles triées dans l'ordre croissant, pour les différentes valeurs de α . Pour $\alpha = 0$, on retrouve les valeurs de τ_c^0 dans les câbles (cf Table 5.5). On constate que la redistribution de contraintes augmente avec α : le nombre de câbles détendus augmente (de même que la valeur maximale des tensions internes τ_c) pour arriver à une détente de 14 % en moyenne de câbles lorsque $\alpha = 1$.

Avec ce niveau de charge, on reste encore dans le domaine de fonctionnement stable de la structure, pour lequel elle continue de présenter une réserve de rigidité. Ce type de simulations est utile pour vérifier l'intégrité d'une telle structure sous des chargements extrêmes, bien au-dessus de l'état de service pour lequel, en général, aucun câble n'est détendu. Si des câbles sont détendus, le comportement de la structure peut être dangereux lorsque le chargement diminue et que les câbles détendus se chargent soudainement : le rapide changement de rigidité mène à des chargements dynamiques qui peuvent endommager les noeuds. Une simulation en dynamique sera nécessaire. Ici, le seul cas statique est envisagé et la Figure 5.18 présente l'évolution non-linéaire de la fraction de câbles détendus en fonction du chargement croissant, La Figure 5.19 présente la déformée de la structure (avec un coefficient 10 pour l'amplification des déplacements), et les tensions dans les câbles.

Pour tester la convergence de l'algorithme, une solution de référence est tout

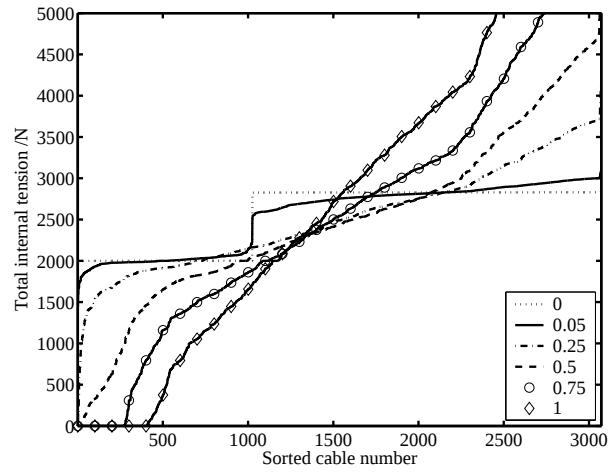


FIG. 5.17 – Tension interne dans les câbles pour différentes valeurs du paramètre de chargement α

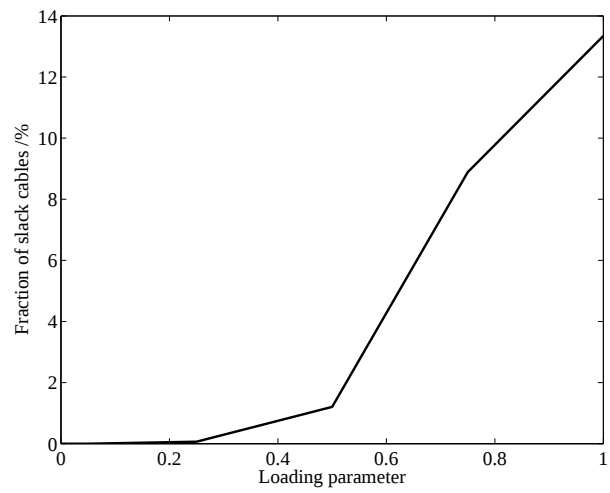


FIG. 5.18 – Fraction de câbles détendus en fonction du paramètre de chargement α

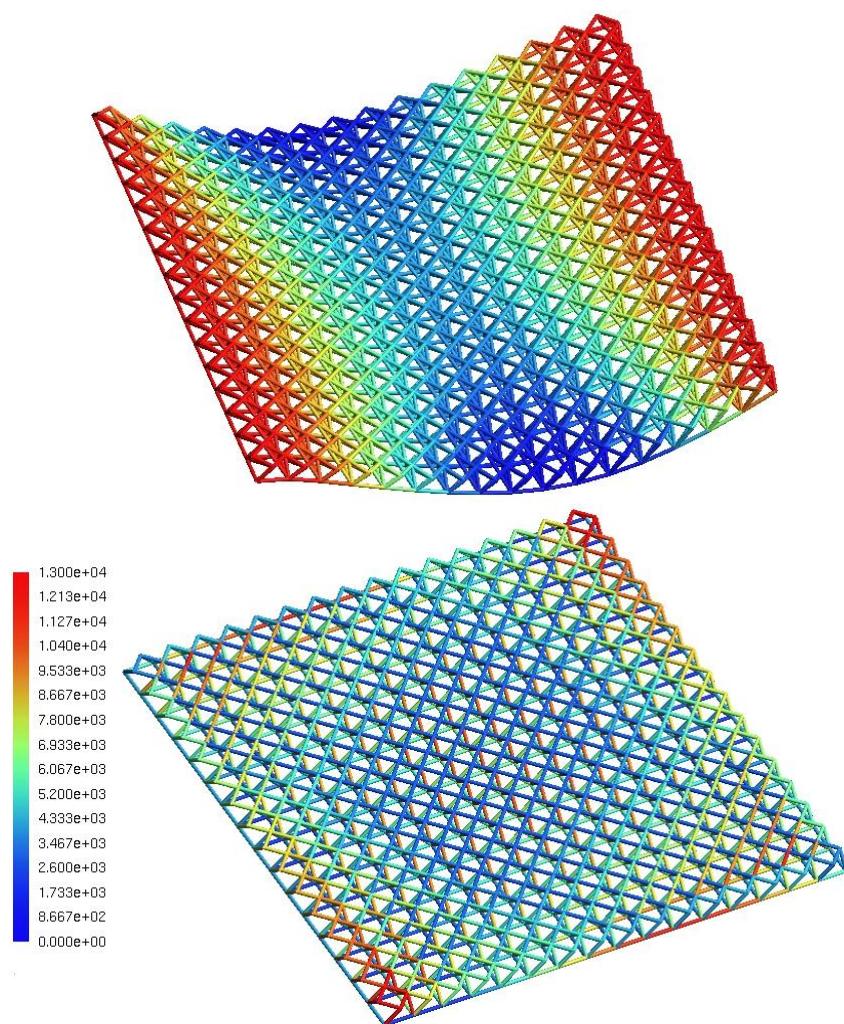


FIG. 5.19 – Structure déformée (valeurs du déplacement vertical) et tensions dans les câbles, pour $\alpha = 1$

d'abord obtenue avec un algorithme différent appliqué à une formulation LCP globale du problème. A chaque itération de l'approche multiéchelle, une erreur en énergie e entre la solution produite et la référence est calculée. Cette erreur est une mesure de la distance entre le champ de déplacement obtenue à l'étape linéaire et le champ de déplacement de référence U_{ref} :

$$e^2 = \frac{\frac{1}{2} \sum_E (B_E U_E - B_E U_{\text{ref}} |_{\Omega_E})^t l (B_E U_E - B_E U_{\text{ref}} |_{\Omega_E})}{\frac{1}{2} \sum_E (B_E U_{\text{ref}} |_{\Omega_E})^t l (B_E U_{\text{ref}} |_{\Omega_E})}$$

Bien entendu, pour contrôler l'algorithme et pour arrêter les itérations, nous utilisons en plus un indicateur d'erreur η qui n'utilise pas la solution de référence. Cet indicateur d'erreur est calculé après chaque étape linéaire, selon une approche mixte ; il mesure la distance entre $\hat{s} \in \Gamma$ et $s \in \mathbf{A}_d$: $\eta = \frac{\Delta\eta}{\tilde{\eta}}$ avec

$$\begin{aligned} (\Delta\eta)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_{EE'}} \Delta F_{EE'}^t \frac{1}{d^m} \Delta F_{EE'} + \Delta F_{E'E}^t \frac{1}{d^m} \Delta F_{E'E} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_E [(t_E - \hat{t}_E) + l(e_E - \hat{e}_E)]' l^{-1} [(t_E - \hat{t}_E) + l(e_E - \hat{e}_E)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_{EE'}} \tilde{U}_{EE'}^t d^m \tilde{U}_{EE'} + \tilde{F}_{EE'}^t \frac{1}{d^m} \tilde{F}_{EE'} + \tilde{U}_{E'E}^t d^m \tilde{U}_{E'E} + \tilde{F}_{E'E}^t \frac{1}{d^m} \tilde{F}_{E'E} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_E \frac{(e_E + \hat{e}_E)^t}{2} l \frac{(e_E + \hat{e}_E)^t}{2} + \frac{(t_E + \hat{t}_E)^t}{2} l^{-1} \frac{(t_E + \hat{t}_E)^t}{2} \end{aligned}$$

où $\Delta F_{EE'} = (F_{EE'} - \hat{F}_{EE'}) - d^m (U_{EE'} - \hat{U}_{EE'})$, $\tilde{U}_{EE'} = \frac{1}{2} (U_{EE'} + \hat{U}_{EE'})$, $\tilde{F}_{EE'} = \frac{1}{2} (F_{EE'} + \hat{F}_{EE'})$.

Concernant la convergence de l'algorithme, les Figures 5.20 et 5.21 reportent l'évolution de l'erreur e et de l'indicateur d'erreur η au cours des itérations, pour différentes valeurs du paramètre de chargement α . Pour des petites valeurs de α , il n'y a pas de câbles détendus et la convergence est très proche du cas linéaire (correspondant à un treillis). Lorsque α augmente, i.e. lorsque le nombre de câbles détendus augmente, la convergence est affectée et aussitôt on distingue deux taux de convergence différents : un taux initial lorsque la solution est corrigée globalement lors des premières itérations, puis un deuxième, moins élevé après 30 à 40 itérations lorsque les corrections apportées sont plus locales (de l'ordre de 10^{-4}). Un tel comportement pourrait être étudié minutieusement, par exemple en utilisant pour l'erreur une norme max, et sa projection sur les modes propres.

De plus, l'approche proposée ne montre pas un taux de convergence constant en fonction du ratio de non-régularité, défini comme la fraction de câbles détendus dans la Figure 5.18. En fait, lorsque le nombre de câbles détendus augmente, la raideur tangente de nombreux liens peut fortement changer.

Une adaptation de la direction de recherche l serait l'une des premières études à envisager dans la suite des développements pour améliorer la convergence, mais cela mènera à re-factoriser les matrices de rigidité des sous-structures, ce qui est une partie coûteuse de l'algorithme. En s'y prenant ainsi sur quelques itérations, cela permettrait de retrouver un taux de convergence constant au cours des itérations, mais probablement pas pour les différentes valeurs de α . Une seconde possibilité serait d'utiliser une direction de recherche globale par sous-structure, en ajoutant l'admissibilité locale au problème de l'étape locale. Dans ce cas, on arrive à un LCP global par sous-structure, pour lequel il existe des solveurs disponibles (cf Projet Européen Siconos, <http://siconos.inria.fr>).

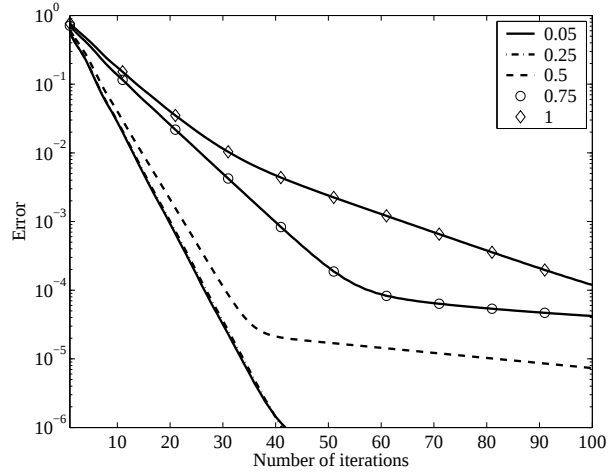


FIG. 5.20 – Evolutions de l'erreur vis à vis de la solution de référence, pour différentes valeurs du paramètre de chargement α

5.3.4 Comparaison avec une approche mono-domaine

Pour comparer les méthodes, nous utilisons le même problème test composé d'un unique domaine, et sans description multiéchelle. Dans ce cas, l'approche LATIN devient équivalente à une approche de Lagrangien Augmenté ; ce qui est aussi le cas des conditions unilatérales provenant de contact sans frottement [2]. L'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations est rappelée sur la Figure 5.22 pour un paramètre de chargement $\alpha = 1$. Bien évidemment, l'approche monodomaine exhibe un taux de convergence plus élevé, ce qui n'est pas surprenant si l'on considère le cas d'un problème linéaire, pour lequel le mono-

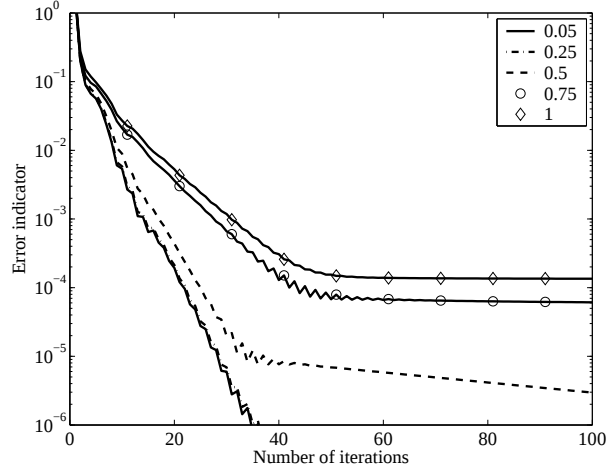


FIG. 5.21 – Evolutions de l'indicateur d'erreur, pour différentes valeurs du paramètre de chargement α

domaine est une méthode directe, tandis que les méthodes de décomposition de domaine nécessitent des itérations pour converger. De plus, nous avons besoin d'une évaluation du coût pour comparer les deux approches.

Chaque approche se décline en deux phases : (i) la phase d'initialisation où les coûts proviennent majoritairement des factorisations des matrices de rigidité, (ii) la phase d'itération où, pour chaque itération, le coût est dû d'une part à l'étape locale pour résoudre le comportement des liens et, d'autre part, à la résolution des problèmes linéaires (prenant en compte les différentes substitutions) ; pour cette seconde phase, le coût provient essentiellement des solutions linéaires et le coût de l'étape locale est le même pour les deux approches.

En ce qui concerne la phase d'initialisation, l'approche monodomaine nécessite la factorisation de la matrice de rigidité globale, tandis que l'approche multiéchelle nécessite la factorisation des matrices de chaque sous-structures, comme la matrice du problème macroscopique. Pour les mêmes raisons que les méthodes de décomposition de domaine surpassent les solveurs directs pour les problèmes de grande taille, le coût de l'initialisation est toujours plus élevé pour l'approche monodomaine.

En ce qui concerne la phase itérative, le coût d'une résolution linéaire pour une approche monodomaine est (en terme d'opérations sur des flottants) nl , où n est le nombre de ddl, et l la largeur de bande de la matrice de rigidité globale. Pour notre cas test, $n = 2500$ et $l = 200$ (utilisant un schéma de renumérotation inverse de Cuthill-McKee). Le nombre de sous-structures est $N_S = 16$, le nombre de ddl pour la matrice de rigidité locale est $n_S = 195$ et sa largeur de bande est $l_S = 50$; finalement, le nombre de ddl pour le problème grossier est $N = 216$ et sa largeur de bande $L = 60$. Le ratio des coûts pour une itération de l'approche

monodomaine et une itération pour l'approche multiéchelle (avec une machine monoprocesseur) est

$$a_{\text{iter}} \approx \frac{nl}{N_S n_S l_S + NL} = 2.9$$

Le ratio des taux de convergence obtenu dans la Figure 5.22 pour atteindre un seuil d'erreur de 1 % est proche de 3 : au cours du processus d'itération, les deux algorithmes ont la même efficacité. Le gain potentiel provient de la phase d'initialisation, pour laquelle le ratio du coût de factorisation est

$$a_{\text{init}} \approx \frac{\frac{1}{2}nl^2}{\frac{1}{2}N_S n_S l_S^2 + \frac{1}{2}NL^2} = 11.6$$

Lorsque la taille du problème augmente, si le taux de convergence est maintenu, on peut constater une augmentation de l'efficacité. A vrai dire, les coûts de factorisations n'augmentent pas de la même façon pour chacune des approches (typiquement, $n_S \approx n/N_S$ et $l_S \approx l/\sqrt{N_S}$ ce qui plaide en faveur d'une approche multidomaines).

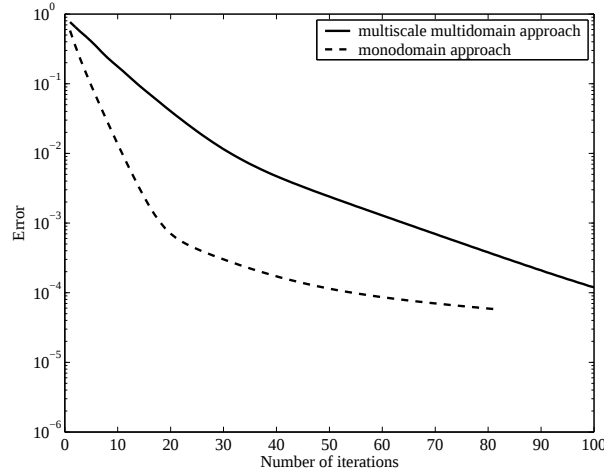


FIG. 5.22 – Comparaison des évolutions de l'erreur pour différentes approches

Influence des mécanismes internes

Notons que le module que nous avons utilisé dans cet exemple exhibe trois mécanismes infinitésimaux internes [36], et que l'assemblage des modules en sous-domaines, tout comme pour la structure entière, possède encore un mécanisme interne, lequel peut être éliminé par des conditions aux limites. Afin d'évaluer l'influence d'un tel mécanisme, un module modifié est testé ; celui-ci est pourvu de câbles supplémentaires : deux câbles croisés liant les quatre

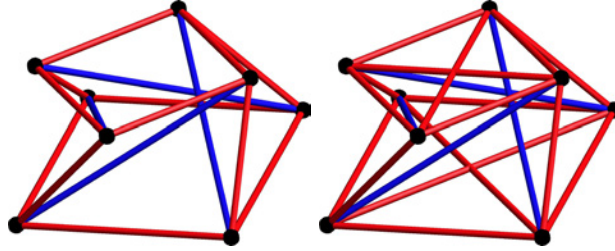


FIG. 5.23 – Modules utilisés (à gauche, module initial et à droite, module modifié)

noeuds supérieurs du module et deux autres liant les quatre noeuds inférieurs, voir Figure 5.23. Dans le cas présent, aucun des quatre câbles ajoutés par module n'est précontraint. La Figure 5.24 présente l'évolution de l'erreur au cours des itérations pour chacune des nappes, pour $\alpha = 1$ et lorsque tous les liens modélisés sont des barres (cas linéaire) ou avec des barres et des câbles (cas non régulier). Le taux de convergence initial est amélioré pour la grille formée des modules modifiés, bien que se ne soit pas une amélioration fulgurante.

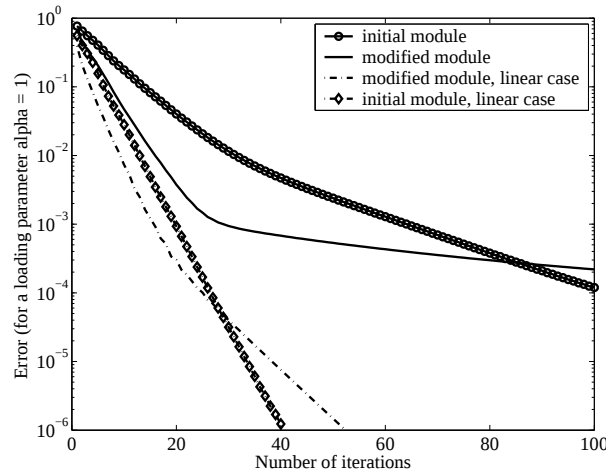


FIG. 5.24 – Comparaison des évolutions de l'erreur pour différents modules

5.3.5 Influence du nombre de sous domaine

On s'attend à ce que des algorithmes de décomposition de domaine multiniveaux montrent la faisabilité numérique en fonction du nombre de sous-domaines. Ceci ne doit pas être fonction du degré de diffusion de non-régularités

. Des modifications pourront être apportées pour palier cette difficulté, comme proposé dans la section précédente.

5.4 Bilan et perspectives

L’approche proposée traite des problèmes statiques non réguliers de grande taille résolus grâce à une approche de sous-structuration. Un algorithme multi-échelle est utilisé, suivant celui proposé dans [27], et étendu aux systèmes discrets possédant une non régularité diffuse. L’application a été effectuée sur des structures de tensegrité fortement chargées en quasi-statique, ayant par conséquent un nombre important de câbles détendus.

Une première perspective concerne le comportement dynamique de telles structures de tensegrité. La dynamique devrait apporter une formulation plus régulière du problème, mais dès que les câbles détendus se rechargeront violemment, ceci mènera à des chocs dans la solution, et à des difficultés numériques associées.

Un second type d’applications est le cas de milieux granulaires où la non-régularité provient des interactions de contact et de frottement entre les grains [32, 19]. Ce cas ne sera cependant pas abordé ici.

Au final, pour tous ces cas, l’algorithme fournit le comportement généralisé par sous-structure, L_E , qui peut relier le modèle discret et le modèle macro continu de la structure. Ce qui peut aussi mener à une stratégie numérique couplant différents modèles d’un même milieu dans différents domaines de la structure, lorsqu’une adaptation du modèle est nécessaire.

Troisième partie

Approche multiéchelle
dynamique

Chapitre 6

Dynamique des tenségrités

Contents

6.1	Comportement des interactions en dynamique non régulière	104
6.1.1	Interaction élémentaire	104
6.1.2	Exemple d'illustration : masse ponctuelle entrant en contact avec un obstacle rigide ou élastique	107
6.2	Simulation dans la plateforme SICONOS	116
6.2.1	Résultats de simulation	118
6.3	Décomposition de domaine multiéchelle dynamique : LATIN micro-macro	123
6.3.1	Extension de l'approche statique	123
6.3.2	Stratégie numérique multiéchelle	125
6.3.3	Résultats d'une modélisation avec câbles inextensibles	132

6.1 Comportement des interactions en dynamique non régulière

Nous nous intéressons ici à la loi de comportement des barres et des câbles dans le cadre de l'écriture de la dynamique. Nous verrons que l'écriture du comportement des barres s'écrit de façon tout à fait naturelle en dynamique ce qui n'est pas le cas du comportement des câbles. Nous chercherons donc à savoir si la loi de contact de type Signorini doit ou peut être écrite en déplacement ou en vitesse.

Un parallèle entre la loi de contact entre deux particules rigides et la loi d'interaction d'un câble sera fait ce qui permettra, par la suite, l'illustration du cas d'une masse ponctuelle, susceptible d'impacter un obstacle rigide.

L'écriture incrémentale d'un tel problème de dynamique peut se faire en utilisant différentes techniques : la méthode event-driven ou la méthode du time stepping [5] par exemple. Celle retenue ici est le time stepping.

6.1.1 Interaction élémentaire

Pour écrire la loi de comportement des barres en dynamique, on part de la loi de comportement des barres en statique soit :

$$t_b + t_b^0 = k_b(e_b + e_b^0). \quad (6.1)$$

Cette équation étant régulière et linéaire nous pouvons l'intégrer sans difficulté entre les instants t_i (supposé connu) et t_{i+1} :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_b + t_b^0) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_b(e_b + e_b^0) dt. \quad (6.2)$$

Posons $h r_b = \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_b dt$, r_b représente alors l'impulsion moyenne. En utilisant une θ -méthode comme schéma d'intégration, nous avons $t_b = \frac{1}{\theta} r_b - \frac{1-\theta}{\theta} t_b^i$ ce qui permet d'écrire t_b en fonction de l'impulsion moyenne r_b . On exprime e_b de la même façon : $e_b = e_b^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_b dt$ où v_b est le taux de variation de longueur de câble. On trouve alors modulo quelques développements l'expression de la loi de comportement des barres en dynamique, soit :

$$r_b - k_b h \theta^2 v_b = \theta k_b \epsilon_b^i + t_b^i + \theta k_b h (1 - \theta) v_b^i. \quad (6.3)$$

où $\theta k_b \epsilon_b^i = \theta [k_b(e_b^i + e_b^0) - (t_b^i + t_b^0)]$. Le choix de représentation des évolutions des paramètres est naturellement ici celui de la technique de time stepping. La loi de comportement précédente relie l'impulsion r_b au taux d'allongement v_b

Parallèle entre interactions de solides granulaires et câbles d'une ténacité

La loi de contact entre deux rigides est une loi qui fait intervenir l'impulsion moyenne et les vitesses de ces deux corps (en fait la vitesse relative d'un de ces corps par rapport à l'autre). Elle traduit comme nous avons pu voir dans les chapitres précédents la propriété selon laquelle deux corps ne se pénètrent pas.

La loi de comportement d'un câble exprime, quant à elle, le fait qu'en sollicitation de traction uniquement celui-ci a une certaine rigidité, autrement dit qu'il existe un état de tension interne. Cette loi fait intervenir la tension du câble et les déplacements des deux noeuds.



FIG. 6.1 – Conditions unilatérales

Les graphes correspondants sont les suivants :

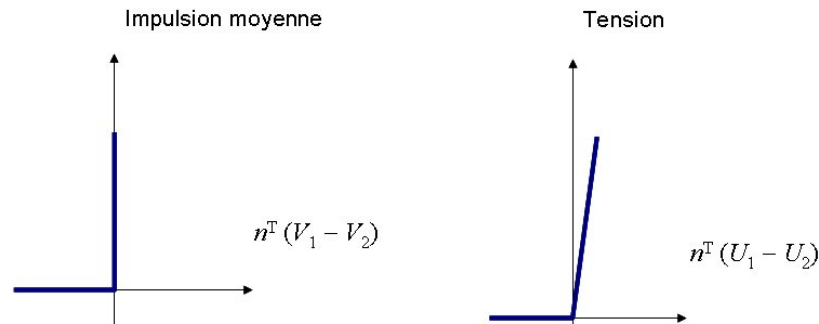


FIG. 6.2 – Loi de comportement de particules rigides, à gauche, et d'un câble extensible, à droite.

Faisons quelques remarques à propos de ces relations :

- Les expressions des comportements du câble et du contact entre deux particules rigides sont assez proches au signe près (et à un changement de variable près bien sûr). En effet, il y a présence d'une impulsion si il y a contact entre les deux particules, autrement dit si les particules se dirigent l'une vers l'autre. Tandis qu'il y a présence d'une tension dans le câble si il y a un effort de traction appliqué au câble, autrement dit si les noeuds du câble s'éloignent l'un de l'autre.
- La loi de comportement des câbles peut s'écrire sous forme de complémentarité via un changement de variable, reste alors à écrire cette loi en utilisant les variables de la dynamique : la vitesse v_c et l'impulsion moyenne r_c .

Nous donnons donc les expressions des ces lois dans ce qui suit, sous forme incrémentale et avec une approche de time stepping.

Contact entre grains

Cas inélastique unilatéral

$$\begin{cases} Si & e_c^p > 0 & r_c = 0 \\ Si & e_c^p \leq 0 & 0 \leq \dot{e}_c \perp r_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

où e_c^p est un prédicteur de la position cherchée.

Cas élastique unilatéral

$$\begin{cases} Si & e_c^p > 0 & r_c = 0 \\ Si & e_c^p \leq 0 & 0 \leq \lambda \perp r_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

avec $\lambda = \dot{e}_c + \frac{1}{kh} r_c + \frac{1}{h} < e_c^i >_-$ Où $< x >_-$ représente la partie négative de x .

Câbles

Cas inextensibles

$$\begin{cases} Si & e_c^p < 0 & r_c = 0 \\ Si & e_c^p \geq 0 & 0 \leq -\dot{e}_c \perp r_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

La prise en compte d'une précontrainte (prétension t_c^0 et préallongement e_c^0) donne la relation suivante :

$$\begin{cases} Si & e_c^p + e_c^0 < 0 & \tau_c = 0 \\ Si & e_c^p + e_c^0 \geq 0 & 0 \leq -\dot{e}_c \perp \tau_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

où τ_c est l'impulsion moyenne totale c'est à dire $\tau_c = r_c + r_c^0$.

Cas extensibles

$$\begin{cases} Si & e_c^p < 0 & r_c = 0 \\ Si & e_c^p \geq 0 & 0 \leq \lambda = -\dot{e}_c + \frac{1}{kh\theta} r_c - \frac{1}{h\theta} < e_c^i >_+ \perp r_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Si l'on prend en compte une précontrainte, la relation devient alors :

$$\begin{cases} Si & e_c^p + e_c^0 < 0 & \tau_c = 0 \\ Si & e_c^p + e_c^0 \geq 0 & 0 \leq \lambda = -\dot{e}_c + \frac{1}{kh\theta}r_c - \frac{1}{h\theta} < e_c^i + e_c^0 >_+ \perp \tau_c \geq 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Les formulations précédentes sont écrites avec une loi de comportement de type Signorini vitesse pour les parties non régulières. L'utilisation d'une formulation Signorini déplacement n'est pas adaptée car elle conduit à introduire des artéfacts numériques ; en particulier elle peut conduire à ajouter de l'énergie dans le système. Pour illustrer ce fait, considérons une formulation de type Signorini déplacement : un schéma d'intégration est utilisé pour faire apparaître les variables dynamiques. Donnons donc l'écriture dans le cas du contact unilatéral qui sera testé par la suite :

$$0 \leq e_c \perp r_c \geq 0$$

Soit h le pas de temps, en supposant le θ de la θ -méthode non nul, on a $\theta h > 0$. Par conséquent, au lieu d'écrire uniquement dans la loi de signorini $0 \leq e_c$, nous pouvons écrire $0 \leq \frac{e_c}{\theta h}$. En utilisant le schéma d'intégration suivant : $e_c = e_c^i + h(1 - \theta)v_c^i + h\theta v_c$ nous arrivons donc à la loi de comportement :

$$0 \leq v_c + \frac{1}{\theta h}e_c^i + \frac{1 - \theta}{\theta}v_c^i \perp r_c \geq 0 \quad (6.10)$$

Remarque :

Nous pouvons d'ores et déjà constater une différence majeure entre la loi de Signorini vitesse et la loi de Signorini déplacement (écrit avec des variables dynamiques grâce à un schéma d'intégration) : la première est constituée de conditions sur e_c alors que la deuxième ne l'est pas.

Dans ce qui suit l'écriture de Signorini vitesse et déplacement est testée pour différentes valeurs de prédicteur et de pas de temps.

6.1.2 Exemple d'illustration : masse ponctuelle entrant en contact avec un obstacle rigide ou élastique

On traite le cas 1D d'une masse que l'on lache et qui entre en contact avec le sol. Dans un premier temps, le sol est supposé rigide.

Nous allons traiter les différents cas séparément quitte à être un peu répétitif par souci de lisibilité.

Cas du choc "mou"

Les équations qui régissent ce problème sont :

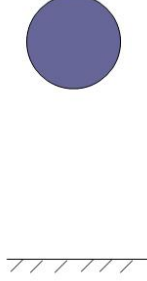


FIG. 6.3 – Problème de contact

– la dynamique :

$$m(\dot{e}_c - \dot{e}_c^i) = -mgh + hr_c$$

– la loi de Signorini vitesse (6.4).

Le choix $\theta = 1$ a été fait ici et sera conservé dans la suite.

Nous testerons les prédicteurs e_c^p suivants : $e_c^i, e_c^i + \frac{h}{2}\dot{e}_c^i$ et $e_c^{free} = e_c^i + h\dot{e}_c^{free}$ où $\dot{e}_c^{free} = \dot{e}_c^i - gh$.

La résolution de ce problème s'effectue donc comme suit :

$$\begin{aligned} Si \quad e_c^p > 0 \quad & \begin{cases} r_c^{i+1} = 0 \\ \dot{e}_c^{i+1} = \dot{e}_c^i - gh \end{cases} \\ Si \quad e_c^p \leq 0 \quad & \begin{cases} \dot{e}_c^{i+1} - \frac{h}{m}r_c^{i+1} = \dot{e}_c^i - gh \\ 0 \leq \dot{e}_c^{i+1} \perp r_c^{i+1} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La détermination du couple de variables $(\dot{e}_c^{i+1}, r_c^{i+1})$ peut être obtenue grâce aux solveurs LCP et e_c^{i+1} est donné par le schéma d'intégration : $e_c^{i+1} = e_c^i + h\dot{e}_c^{i+1}$. La Figure (6.4) présente les résultats.

Nous décidons ici de tester dans la foulée, la loi de Newton. Le cas de la loi de Newton coïncide avec la loi de Signorini vitesse lorsque le coefficient de restitution est nul, ce qui correspond à un choc mou. Il y a alors dissipation d'énergie. Dans le cas où le coefficient de restitution d'énergie e est utilisé, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} Si \quad e_c^p > 0 & r_c^{i+1} = 0 \\ Si \quad e_c^p \leq 0 & 0 \leq \dot{e}_c^{i+1,e} \perp r_c^{i+1} \geq 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

où $e_c^{i+1,e} = e_c^{i+1} + e\dot{e}_c^i$ et e est le coefficient de restitution ($0 \leq e \leq 1$). Nous faisons le choix de prendre pour prédicteur $e_c^p = e_c^i + \frac{h}{2}\dot{e}_c^i$. La résolution de ce problème est du même goût que celle employant Signorini vitesse, en voici les résultats :

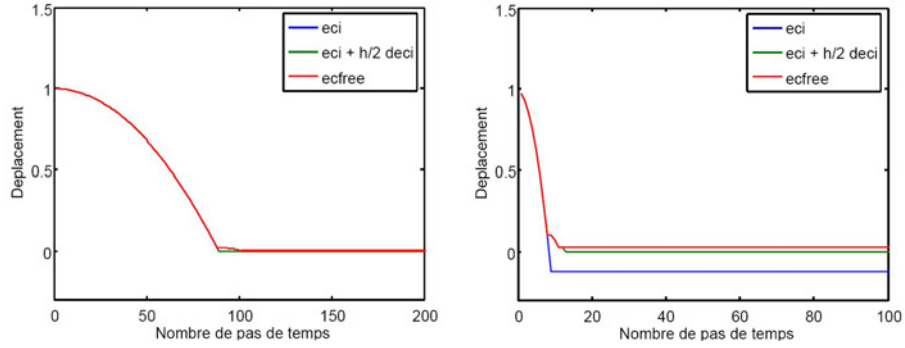


FIG. 6.4 – Résultats pour différents prédicteurs, à gauche $h = 0.005$; à droite, $h = 0.5$

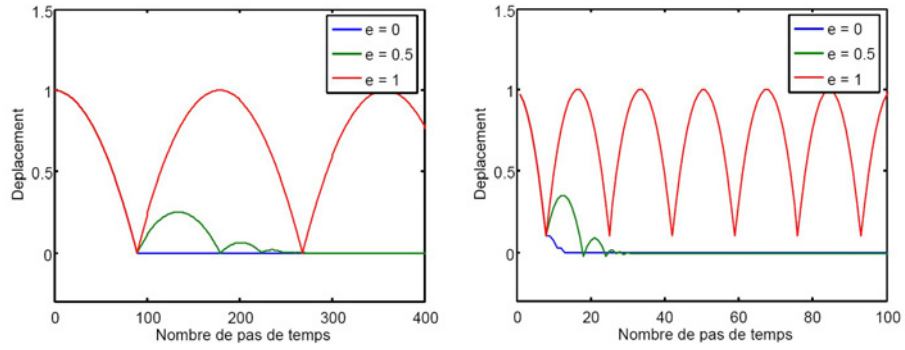


FIG. 6.5 – Résultats pour $h = 0.005$ à gauche et pour $h = 0.5$ à droite

Considérons maintenant le cas d'un sol élastique de raideur k . Bien que le problème considéré alors ne soit plus non régulier, sa formulation continue d'être écrite dans ce cadre, afin d'utiliser les mêmes outils de résolution.

Cas du choc élastique

Les équations qui régissent ce problème sont :

– la dynamique :

$$m(\dot{e}_c - \dot{e}_c^i) = -mgh + hr_c$$

– la loi de Signorini vitesse (6.5).

La résolution de ce problème s'effectue donc comme suit :

$$Si \quad e_c^p > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r_c^{i+1} = 0 \\ \dot{e}_c^{i+1} = \dot{e}_c^i - gh \end{array} \right.$$

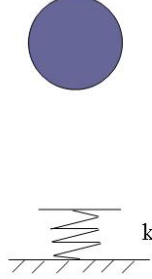


FIG. 6.6 – Problème de contact

$$Si \quad e_c^p \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda - (\frac{h}{m} + \frac{1}{kh})r_c^{i+1} = \dot{e}_c^i - gh + \frac{1}{h} < e_c^i >_- \\ 0 \leq \lambda \perp r_c^{i+1} \geq 0 \end{array} \right.$$

avec $\lambda = \dot{e}_c^{i+1} + \frac{1}{kh}r_c + \frac{1}{h} < e_c^i >_-$. Cette dernière condition se résout via un LCP, nous obtenons donc (λ, r_c^{i+1}) et par ricochet e_c^{i+1} . La Figure (6.7) présente les résultats.

Lorsque la rigidité k est infinie, on retrouve la loi de comportement du choc

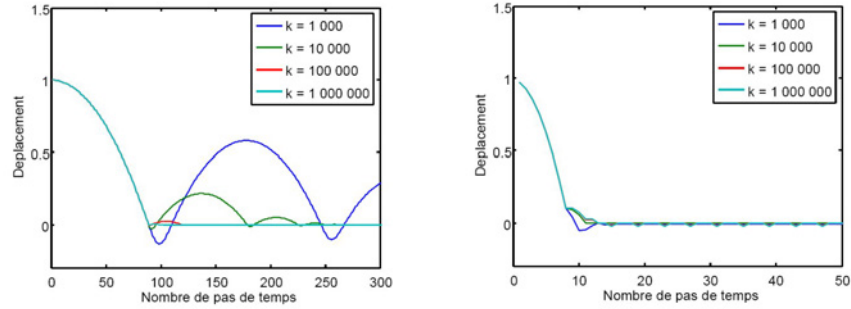


FIG. 6.7 – Résultats pour $h = 0.005$ à gauche et pour $h = 0.05$ à droite

inélastique. Remarquons que le terme en partie négative utilisé dans la loi discrétisée précédente est nécessaire pour éviter une dérive numérique observée en son absence : voir Figure (6.8) pour différentes rigidités.

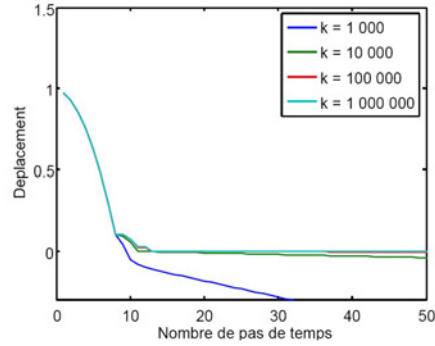


FIG. 6.8 – Résultats pour $h = 0.05$

Loi de comportement vitesse ou déplacement ?

Nous testons ici la loi de Signorini déplacement, utilisée dans le cadre de la dynamique, et illustrons le fait qu'elle ne permet pas d'assurer une dissipation énergétique.

Les équations de ce problème sont :

– la dynamique :

$$m(\dot{e}_c - \dot{e}_c^i) = -mgh + hr_c$$

– la loi de Signorini déplacement (6.10).

La résolution de ce problème s'effectue donc comme suit :

$$\begin{cases} \lambda - \frac{h}{m}r_c^{i+1} = \dot{e}_c^i - gh + \frac{1}{h}e_c^i \\ 0 \leq \lambda \perp r_c^{i+1} \geq 0 \end{cases}$$

avec $\lambda = \dot{e}_c^{i+1} + \frac{1}{h}e_c^i$. Cette dernière condition se résoud via un LCP, nous obtenons donc (λ, r_c^{i+1}) et par ricochet $\dot{e}_c^{i+1}$. La Figure (6.9) présente les résultats. Clairement, selon le pas de temps choisis, le schéma n'est plus consistant. Dans la suite, nous utiliserons donc la formulation Signorini vitesse exclusivement.

Connaissant désormais les lois de comportement des éléments à utiliser (barres et câbles), nous pouvons poser le problème de référence des systèmes de tensegrité dans le cadre dynamique, ce qui est l'objet des sections suivantes.

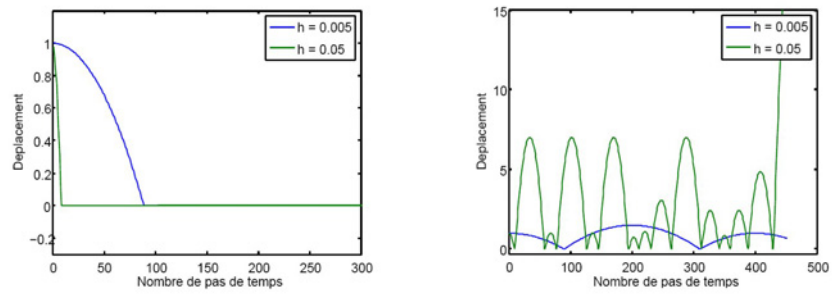


FIG. 6.9 – Résultats pour $h = 0.05$ - à gauche $\theta = 1.$; à droite, $\theta = 0.5$

Dynamique des systèmes de tensegrité :
problème de référence

Comme nous avons pu voir au chapitre 1, le principe des travaux virtuels (P.T.V.) s'obtient à partir de l'équilibre et des conditions limites mécaniques. Son expression est la suivante :

$$W = \int_V \langle \epsilon^* \rangle \{\sigma\} dV - \int_V \langle u^* \rangle \{f_V\} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS + \int_V \langle u^* \rangle \rho \{\ddot{u}\} dV = 0 \quad (6.12)$$

$\forall \{u^*\}$ avec $\{u^*\} = \{0\}$ sur S_u et $\{u\} = \{\bar{u}\}$ sur S_u .

La forme variationnelle servant de base pour construire les modèles déplacements en éléments finis est établie à l'aide du P.T.V auquel on associe les conditions limites sur les déplacements, la loi de comportement et la relation déformation-déplacement. Soit :

$$W(u^*, u) = \int_V \langle \epsilon^* \rangle H\{\epsilon\} dV - \int_V \langle u^* \rangle \{f_V\} dV - \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS + \int_V \langle u^* \rangle \rho \{\ddot{u}\} dV = 0 \quad (6.13)$$

$\forall \{u^*\}$ avec $\{u^*\} = \{0\}$ sur S_u et $\{u\} = \{\bar{u}\}$ sur S_u .

L'emploi de la discrétisation de la forme variationnelle, de l'approximation par éléments finis et de la relation déformation-déplacement ($\{\epsilon\} = [B]\{u_n\}$) mène à l'expression finale :

$$W = \langle u_n^* \rangle [[k]\{u_n\} - \{f_n\} + [m]\{\ddot{u}_n\}] \quad (6.14)$$

La dynamique régulière s'écrit donc :

$$[m]\{\ddot{u}_n\} + [k]\{u_n\} = \{f_n\}$$

Pour alléger l'écriture, la dynamique sera présentée sous la forme suivante :

$$M\ddot{U} + KU = F^d \quad (6.15)$$

Le problème étant purement élastique, (6.15) est équivalent à :

$$-F + F^d = M\ddot{U} \quad (6.16)$$

où $F = KU$ sont les forces intérieures.

En dynamique régulière (6.16) peut aussi être exprimée de la façon suivante :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} -F dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} M\ddot{U} dt = M \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{U} dt \quad (6.17)$$

en supposant que la matrice de masse M évolue peu sur $[t_i, t_{i+1}]$. En dynamique non régulière, l'accélération n'existe pas. Elle est par conséquent remplacée par le saut de vitesses. Les interactions extérieures ou intérieures peuvent notamment

être non régulières, ce qui mène à la formulation qui suit, avec un schéma de type time stepping :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} -F dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt - p + p^d = M(\dot{U} - \dot{U}^-)$$

soit :

$$-h\bar{R} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt + p^d = M(\dot{U} - \dot{U}^-)$$

où $-h\bar{R} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} -F dt - p$. p représente les éventuelles interactions internes non régulières, p^d les éventuelles interactions externes non régulières et $\bar{R}$ l'impulsion moyenne.

A ce stade, une discussion s'impose quant au choix de modélisation des systèmes de tenségrité. Quel corps choisir ?

Trois possibilités se distinguent alors :

- soit la plus petite entité élémentaire : la barre. Ce choix engendre des interactions extérieures non régulières : celles des câbles liés à la barre. Cette modélisation est très proche de celle utilisée pour les milieux granulaires. La résolution dans ce cas s'effectuera grâce à la plateforme SICONOS.
- soit la plus grande entité : la structure dans sa globalité. Il existe alors des interactions internes non régulières : celles dues aux câbles. Dans ce cas, on arrive rapidement à une limitation due à la taille de la structure.
- soit une entité intermédiaire : le sous-domaine. Les interactions non régulières externes proviennent des interfaces et les interactions non régulières internes proviennent des câbles. La résolution s'effectuera grâce à la LATIN microMacro, comme solveur incrémental, pour la dynamique.

Nous proposons donc la résolution du problème en utilisant deux approches différentes : une première considérant l'élément barre comme un corps à part entière, et une seconde considérant comme corps un sous-domaine.

6.2 Simulation dans la plateforme SICONOS

On considère comme systèmes dynamiques (DS - Dynamical System) les barres, les câbles sont dans ces conditions perçus comme des interactions avec l'extérieur. L'analogie avec les milieux granulaires est alors frappante (collections de corps rigides interagissant entre eux via des lois de comportement).

Dans cette perspective de modélisation, les seules interactions possibles sont extérieures. Voyons donc le problème à résoudre par barre en conservant bien entendu les notations précédentes et le formalisme de la plateforme SICONOS qui permettra d'effectuer des simulations numériques. Les équations mises en jeu sont :

Les relations de comportement :

- d'une part, des câbles ici considérés comme inextensibles (6.7),
- d'autre part, des liaisons permettant l'assemblage des modules de tensegrités. Pour réaliser ces liaisons, des liaisons non régulières bilatérales ont tout d'abord été testées, celles-ci conduisent à des difficultés numériques c'est pourquoi des liaisons boulonnées préchargées ont ensuite été testées. Leur graphe est donné par la Figure 6.10. t_l représente la force de l'interaction boulonnée sur le DS et t_l^0 la précharge. On remarque (cf. Figure 6.10) que les lois de comportement des câbles et des liaisons boulonnées sont assez similaires, ceci nous permet donc de donner directement la formulation en vitesse de la liaison boulonnée à partir de celle des câbles soit :

$$\begin{cases} Si & e_l^p < 0 & \tau_l = 0 = r_l + r_l^0 \\ Si & e_l^p \geq 0 & 0 \leq -\dot{e}_l \perp \tau_l \leq 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

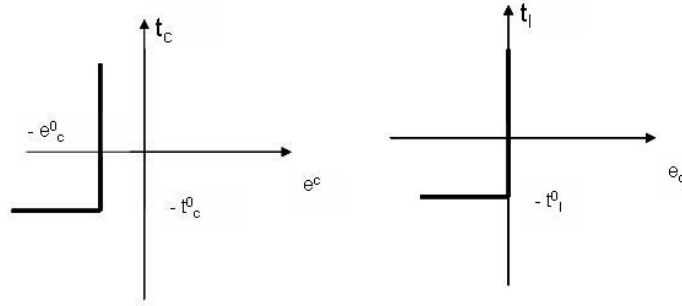


FIG. 6.10 – A gauche, comportement des câbles inextensibles; à droite, comportement du boulonnage

Les forces et interactions intérieures sont :

$$F = B_b^t(t_b + t_b^0) = K_b U$$

$$p = 0$$

et les interactions extérieures :

$$p^d = -B_l^t(r_l + r_l^0) - B_c^t(r_c + r_c^0) = -[B_l^t \quad B_c^t] \begin{bmatrix} r_l + r_l^0 \\ r_c + r_c^0 \end{bmatrix}$$

Et l'équilibre dynamique :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} -K_b U dt + B_l^t r_l^0 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt + p^d = M(\dot{U} - \dot{U}^-) \quad (6.19)$$

En utilisant un schéma d'intégration, on arrive à :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} K_b U dt = (\theta h)^2 K_b \dot{U} + f(U^-, \dot{U}^-) \quad (6.20)$$

A partir de ces équations, l'écriture du problème sous forme de LCP peut être mise en évidence, c'est ce que nous proposons ici de faire.

Partons donc de (6.19) et de (6.20), nous avons :

$$\underbrace{(M + (\theta h)^2 K_b)}_{\tilde{M}} \dot{U} = f(U^-, \dot{U}^-) + B_l^t r_l^0 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt + p^d + M \dot{U}^-$$

En multipliant par $\begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1}$, on arrive à :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \dot{U} &= \begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} \{ f(U^-, \dot{U}^-) + B_l^t r_l^0 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt + M \dot{U}^- \} \\ &\quad - \begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} [B_l^t \quad B_c^t] \begin{bmatrix} r_l + r_l^0 \\ r_c + r_c^0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Soit :

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \dot{U} - \begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} [B_l^t \quad B_c^t] \begin{bmatrix} r_l + r_l^0 \\ r_c + r_c^0 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} \{ f(U^-, \dot{U}^-) \\ &\quad + B_l^t r_l^0 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^d dt + M \dot{U}^- \} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Sachant que, les variables $-\begin{bmatrix} B_l \\ B_c \end{bmatrix} \dot{U}$ et $\begin{bmatrix} r_l + r_l^0 \\ r_c + r_c^0 \end{bmatrix}$ sont complémentaires, nous avons finalement un LCP à résoudre.

Nous proposons donc de présenter un exemple de simulation effectué grâce à cette plateforme de calculs.

6.2.1 Résultats de simulation

L'étude dynamique s'effectue sur le même type de nappe que précédemment mais la simulation traite une grille plus petite afin de diminuer le temps de calcul. Il s'agit là d'une nappe de tensegrité constituée de 64 modules. Les noeuds de la partie inférieure sont bloqués sur deux bords. Le chargement extérieur est de deux natures :

- la mise en précharge (nécessaire pour avoir une rigidité de la structure) de la nappe de tensegrité est obtenue en “tendant” les barres avec un effort intérieur donné. L'évolution en temps est donné sur la figure 6.12,
- le chargement extérieur consiste en des efforts verticaux aux noeuds, l'évolution en temps de l'effort est donné par la Graphe 6.11. Le temps de calcul simulé est de 6s, le pas temps h est de $10^{-3}s$.

L'utilisation de la plateforme SICONOS dans son état actuel a demandé un travail préalable (cf. Tableau 6.17) notamment :

- une programmation permettant la construction de fichiers XML servant d'interface à la plateforme et de fichiers de données pour le chargement des barres (autocontraintes),
- des programmes permettant l'ajout de câbles à cette modélisation, le calcul des déformations à partir des résultats de SICONOS et la création de fichiers permettant l'utilisation de GMSH pour le post-traitement.

La déformation d'une barre est calculée suite aux résultats de la plateforme de la façon suivante : $\epsilon = \frac{nt \cdot wt}{nt}$ où nt est le vecteur directeur du DS en question et wt le déplacement relatif.

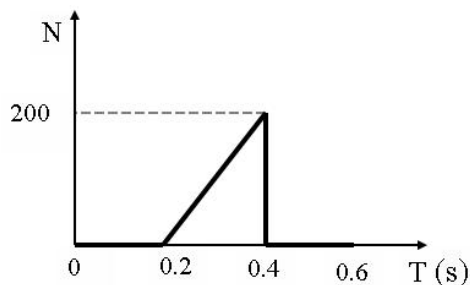


FIG. 6.11 – Graphe de l'effort appliqué.

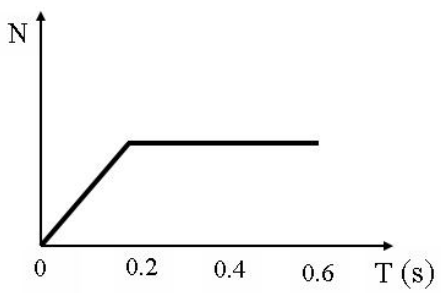


FIG. 6.12 – Graphe de la précharge appliquée.

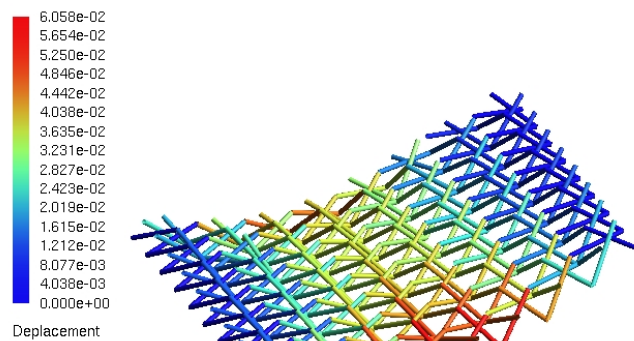


FIG. 6.13 – Déformée des barres de la grille au pas de temps 400 ($t = 0.4$ s).

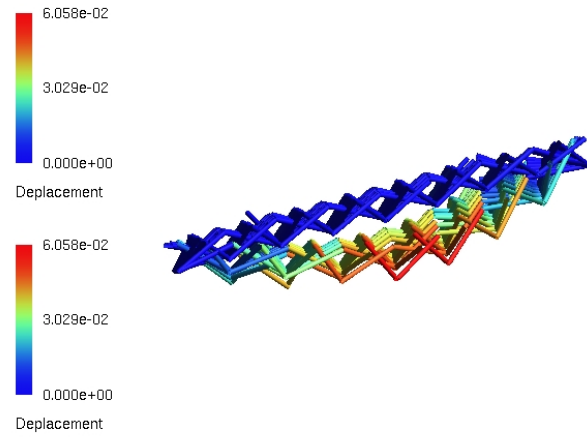


FIG. 6.14 – Comparaison des déformées des barres de la grille au pas de temps 200 (en haut, $t = 0.2\text{s}$) et au pas de temps 400 (en bas, $t = 0.4\text{s}$).

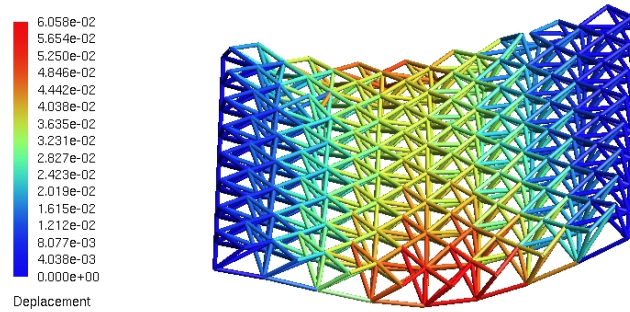


FIG. 6.15 – Déformée de l'ensemble de la grille au pas de temps 400 ($t = 0.4\text{s}$).

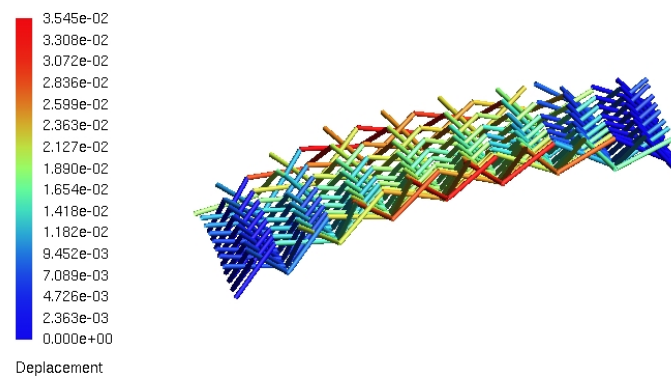


FIG. 6.16 – Déformée de l'ensemble de la grille au pas de temps 440 ($t = 0.44s$) : remise sous tension brutale des câbles, restitution de l'énergie de déformation emmagasinée sous forme d'énergie cinétique.

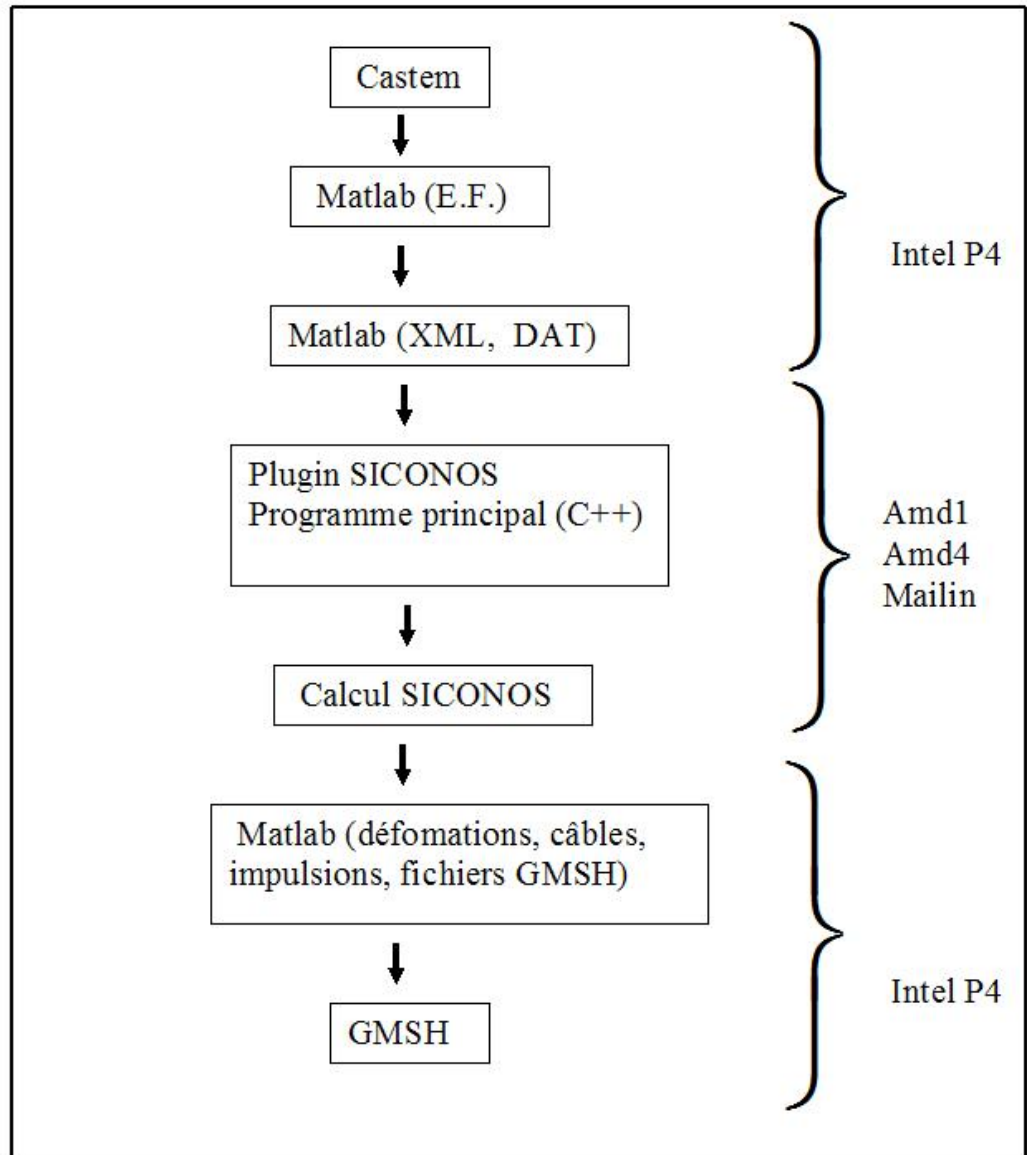


FIG. 6.17 – Chaînage de codes pour le pré-traitement, la résolution, et le post-traitement.

6.3 Décomposition de domaine multiéchelle dynamique : LATIN micro-macro

Nous nous intéressons ici à l'extension de la méthode de décomposition de domaine multiéchelle présentée dans le chapitre 2 au cas de la dynamique. Il ne s'agit pas de reprendre entièrement et dans les moindres détails cette méthode de nouveau, mais plutôt de faire apparaître les changements d'un statut à un autre au cours de l'évolution dynamique de la structure. Le solveur multiéchelle développé dans la partie 2 est ici étendu au cas d'une formulation incrémentale (par time-stepping) en dynamique non régulière.

6.3.1 Extension de l'approche statique

La configuration de référence est la configuration autocontrainte Ω_0 pour laquelle les tensions internes dans chaque élément sont notées t^0 et sont données. Suivant le Tableau 6.1, les inconnues principales sans indices sont les variables cinématique et dynamique de la configuration actuelle.

Une reformulation possible du problème de référence présenté au-dessus consiste

b, c	Indices des barres et des câbles
t^0, t_b^0, t_c^0	Autocontrainte
e^0, e_b^0, e_c^0	Variation de longueur
r, r_b, r_c	Impulsions additionnelles
$\tau_c = r_c^0 + r_c$	Impulsion totale
v, v_b, v_c	Vitesses de variations de longueur
k_b, k_c	Rigidités locales (dans les câbles en tension)
$\bar{R}, F^d$	Impulsion moyenne et forces externe
V, V^d	Vitesse de déplacements nodales inconnues et imposées
B^t	Matrice de mapping des liens aux noeuds
B	Matrice de mapping des noeuds aux liens

TAB. 6.1 – Notations générales

à décomposer la structure en sous-structures et interfaces par l'intermédiaire d'une stratégie de sous-structuration.

Stratégie de sous-structuration

Le choix de sous-structuration restant le même qu'en statique, le comportement parfait d'interface demeure assuré.

Une sous-structure E , est soumise aux actions des interfaces voisines $\Gamma_{EE'}$ (aux impulsions moyennes $\bar{R}_{EE'}$ et aux vitesses $V_{EE'}$). En considérant l'ensemble des interfaces locales de la sous-structure E , les assemblages des champs précédents sont notés $\bar{R}_{E\Gamma}$ et $V_{E\Gamma}$. Une interface $\Gamma_{EE'}$ transfère les impulsions

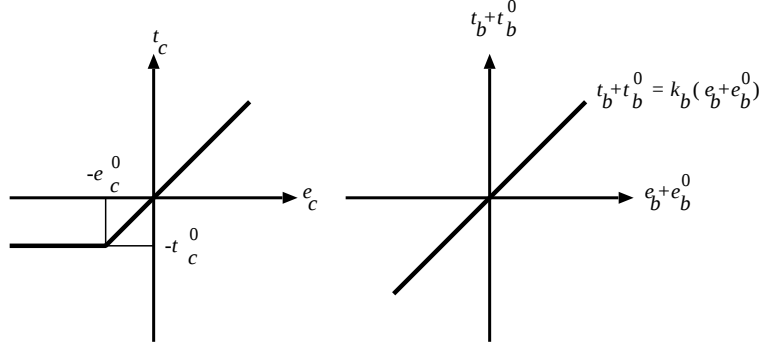


FIG. 6.18 – À gauche, comportement des câbles ; à droite, comportement des barres, en statique.

F_E, F_E^d	Forces nodales interne et externe de la sous-structure E
V_E, V_E^d	Vitesses de déplacements nodales interne et externe de la sous-structure E
$\Gamma_{EE'}$	Interface entre les sous-structures E et E'
Γ	Interface globale
$C_{E\Gamma}$	Matrice de mapping booléenne des ddl de la frontière de la sous-structure
$\bar{R}_{E\Gamma}$	Impulsions de l'interface Γ agissant sur la sous-structure E
$R_{EE'}$	Impulsions de l'interface $\Gamma_{EE'}$ agissant sur la sous-structure E
$V_{EE'}$	Vitesse de déplacement des noeuds de $\Gamma_{EE'}$ connectés à E
$V_{E\Gamma}$	Vitesse de déplacement de la frontière de la sous-structure E

TAB. 6.2 – Notations liées à la sous-structuration

moyennes $\bar{R}_{EE'}$ et les vitesses $V_{EE'}$ de part et d'autre de ses côtés.

La solution $\bar{s} = \bigcup_E \bar{s}_E$ avec $\bar{s}_E = (v_E, r_E, V_{EE'}, \bar{R}_{EE'})$ du problème de référence doit satisfaire :

- L'équation d'équilibre en non régulier :

$$-h\bar{R}_E + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_E^d dt + hC_{E\Gamma}^t \bar{R}_{E\Gamma} = \Gamma_E \quad (6.23)$$

où $\bar{R}_E = B_E^t r_E$ avec $r_E = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_E dt$.

- la compatibilité des vitesses :

$$\begin{cases} V_{E\Gamma} = C_{E\Gamma} V_E \\ v_E = B_E V_E \\ V_E|_{\Gamma_u} = V_E^d \end{cases} \quad (6.24)$$

- les lois de comportement (6.3), (6.7) ou (6.9)

- Le comportement de l'interface, à savoir :
l'équilibre :

$$\bar{R}_{EE'} + \bar{R}_{E'E} = 0 \quad (6.25)$$

et la continuité des vitesses :

$$V_{EE'} = V_{E'E} \quad (6.26)$$

Les interfaces présentent un comportement parfait grâce à la continuité des vitesses et grâce à la localisation des non-régularités dans les sous-structures.

6.3.2 Stratégie numérique multiéchelle

L'extension faite ici de l'approche statique précédente, s'applique à des systèmes discrets particuliers dans le cadre de la dynamique non régulière.

m, M	Indique une quantité micro et Macro
l	Paramètre de direction de recherche par sous-structure
d	Paramètre de direction de recherche par interface
$r_{EE'}$	Impulsions Macro généralisées de l'interface $\Gamma_{EE'}$ agissant sur la sous-structure E
$r_{E\Gamma}$	Impulsions Macro généralisées de l'interface Γ agissant sur la sous-structure E
$v_{EE'}$	Vitesses de déplacement Macro généralisés des noeuds de $\Gamma_{EE'}$ connectés à E
$v_{E\Gamma}$	Vitesses de déplacements Macro généralisés de la frontière de la sous-structure E
$P_{EE'}^t$	Projecteur sur l'espace macro généralisé

TAB. 6.3 – Notations micro-Macro

Description micro-Macro

Une fois la sous-structuration effectuée, la première étape consiste toujours à définir le problème à partir des champs microscopiques et macroscopiques, champs portant sur les quantités d'interfaces du problème sous-structuré. Par interface locale $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' , étant donnés un champ discret d'impulsions moyennes $\bar{R}_{EE'}$ aux noeuds de l'interface agissant sur E et un champ discret de vitesses $V_{EE'}$ des noeuds de l'interface connectés à E , nous décomposons en deux parties ces champs : une partie Macro, marquée d'un indice M , et une partie complémentaire micro, marquée d'un indice m . Ce qui donne :

$$\bar{R}_{EE'} = \bar{R}_{EE'}^M + \bar{R}_{EE'}^m \quad \text{et} \quad V_{EE'} = V_{EE'}^M + V_{EE'}^m \quad (6.27)$$

Les espaces micro et macro doivent être définis de façon unique : ils doivent être orthogonaux, c'est pourquoi un projecteur orthogonal doit être utilisé dans chaque sous espace. L'énergie s'écrit donc de la façon suivante :

$$\sum_{EE'} (\bar{R}_{EE'})^t V_{EE'} = \sum_{EE'} (\bar{R}_{EE'}^M)^t V_{EE'}^M + (\bar{R}_{EE'}^m)^t V_{EE'}^m \quad (6.28)$$

Représentation Macro

La partie macro tient sur un espace de petite taille : les champs macro sont définis à l'aide de peu de paramètres ; une base des champs macro peut être choisie comme suit : $\bar{R}_{EE'}^M = P_{EE'} r_{EE'}$ où $r_{EE'}$ contient les paramètres macro des impulsions, et $P_{EE'}$ l'ensemble des vecteurs de base. Pour des raisons de simplicité, le paramètre macro correspondant au champ de vitesse, $v_{EE'}$, est choisi de façon à garder les mêmes vecteurs de base :

$$V_{EE'}^M = P_{EE'} v_{EE'} \quad \text{et} \quad \bar{R}_{EE'}^M = P_{EE'} r_{EE'} \quad (6.29)$$

Les paramètres macro peuvent être choisis en fonction du problème à modéliser ; ici, nous choisissons les moyennes généralisées des champs $\bar{R}_{EE'}$ et $V_{EE'}$ sur $\Gamma_{EE'}$, d'ordre 1, comme pour la statique.

Comme simplification supplémentaire, la base $P_{EE'}$ est orthonormalisée :

$$P_{EE'}^t P_{EE'} = \mathbf{1}$$

pour obtenir

$$(\bar{R}_{EE'}^M)^t V_{EE'}^M = r_{EE'}^t P_{EE'}^t P_{EE'} v_{EE'} = r_{EE'}^t v_{EE'}$$

En utilisant (6.28) les expressions du projecteur orthonormé sur l'espace macro donnent :

$$r_{EE'} = P_{EE'}^t \bar{R}_{EE'} \quad \text{et} \quad v_{EE'} = P_{EE'}^t V_{EE'} \quad (6.30)$$

et l'orthogonalité : $P_{EE'}^t V_{EE'}^m = 0 = P_{EE'}^t \bar{R}_{EE'}^m$.

Méthode LATIN (LArge Time Increment)

La méthode LATIN [24] est utilisée ici comme un solveur sur un pas de temps pour trouver la solution du problème précédent. Les notations désignant les deux groupes d'équations sont conservées. La séparation des difficultés, la répartition des équations et la procédure itérative demeurent inchangées par rapport au cas statique. L'intersection de A_d et de Γ : $\bar{s}_{\text{ex}} = \{(v_E, r_E) ; (V_{EE'}, \bar{R}_{EE'})\}$ est la solution du problème. L'étape consistant à construire $\hat{s}$ connaissant s (l'étape "locale") nécessite des paramètres de directions de recherche positifs d et l :

$$(\hat{r}_E - r_E) + l(\hat{v}_E - v_E) = 0 \quad (6.31)$$

et

$$(\hat{\bar{R}}_{EE'} - \bar{R}_{EE'}) - d(\hat{V}_{EE'} - V_{EE'}) = 0 \quad (6.32)$$

L'étape consistant à construire s connaissant $\hat{s}$ (l'étape "linéaire") nécessite les mêmes paramètres bien que les directions $\mathbf{E}+$ et $\mathbf{E}-$ soient conjuguées : $(r_E - \hat{r}_E) - l(v_E - \hat{v}_E) = 0$ et $(\bar{R}_{EE'} - \hat{\bar{R}}_{EE'}) + d(V_{EE'} - \hat{V}_{EE'}) = 0$.

Nous avons conservé les notations d et l pour les directions de recherche. En dynamique, les valeurs adoptées sont différentes (le temps caractéristique intervient aussi).

Etape locale — solveur non-régulier local

Comme mentionné auparavant, cette étape consiste à trouver $\hat{s}$ à partir de s calculé à l'étape précédente. Elle mène à des problèmes locaux et linéaires par interfaces parfaites $\Gamma_{EE'}$, et à des problèmes de complémentarité linéaire (LCP) [34] diffus par sous-structures Ω_E .

Par interface $\Gamma_{EE'}$: le comportement (6.26) se décompose en une partie micro et une partie macro :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\bar{R}}_{EE'}^M + \hat{\bar{R}}_{E'E}^M = 0 \\ \hat{V}_{EE'}^M = \hat{V}_{E'E}^M \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\bar{R}}_{EE'}^m + \hat{\bar{R}}_{E'E}^m = 0 \\ \hat{V}_{EE'}^m = \hat{V}_{E'E}^m \end{array} \right. \quad (6.33)$$

La direction de recherche se décompose aussi en deux paramètres d^m et d^M :

$$(\hat{\bar{R}}_{EE'}^m - \bar{R}_{EE'}^m) - d^m(\hat{V}_{EE'}^m - V_{EE'}^m) = 0$$

et l'expression pour les champs de $E'E$ est similaire de part et d'autre de la même interface. Pour la partie macro, les expressions correspondantes sont dotées de l'exposant M .

La solution est explicite et similaire au cas statique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_{E'E}^m = \hat{V}_{EE'}^m = \frac{1}{2}[(V_{EE'}^m + V_{E'E}^m) - \frac{1}{d^m}(\bar{R}_{EE'}^m + \bar{R}_{E'E}^m)] \\ \hat{\bar{R}}_{E'E}^m = -\hat{\bar{R}}_{EE'}^m = \frac{1}{2}[(\bar{R}_{E'E}^m - \bar{R}_{EE'}^m) - d^m(V_{E'E}^m - V_{EE'}^m)] \end{array} \right.$$

Une expression analogue est obtenue pour la partie macro.

Par sous-structure Ω_E : en utilisant un paramètre de direction de recherche scalaire l , on parvient à séparer le comportement des barres de celui des câbles.

Pour les barres, le couple $(\hat{v}_b, \hat{r}_b)$ doit vérifier la loi de comportement (6.3) et la direction de recherche (6.31). Il en résulte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_b = (l + k_b h \theta^2)^{-1}[(r_b + l v_b) - \theta k_b \epsilon_b^i - \hat{t}_b^i - \theta k_b h (1 - \theta) \hat{v}_b^i] \\ \hat{r}_b = r_b - l(\hat{v}_b - v_b) \end{array} \right.$$

avec $\theta k_b \epsilon_b^i = \theta \{k_b(\hat{e}_b^i + e_b^0) - (\hat{t}_b^i + t_b^0)\}$. Les exposants i représentent les valeurs au pas de temps précédent ; pour éviter toute surcharge des variables, les variables sans exposant d'incrément représentent les variables du pas de temps actuel.

Pour les câbles deux cas sont distingués. Un premier prenant en compte un comportement inextensible des câbles et un second prenant en compte un comportement extensible des câbles. Regardons donc de plus près.

Câbles inextensibles.

Le couple $(\hat{v}_c, \hat{r}_c)$ doit satisfaire :

- la direction de recherche : $\hat{r}_c - r_c + l(\hat{v}_c - v_c) = 0$,
- et la loi de comportement :

$$\begin{cases} Si & e_c^p + e_c^0 < 0 & \hat{\tau}_c = 0 = \hat{r}_c + r_c^0 \\ Si & e_c^p + e_c^0 \geq 0 & 0 \leq \hat{\tau}_c \perp -\hat{v}_c^e \geq 0 \end{cases}$$

où $\hat{v}_c^e = \hat{v}_c + e\hat{v}_c^i$ et $e_c^p = \hat{e}_c^i + \frac{h}{2}\hat{v}_c^i$.

La solution est donc :

$$\begin{aligned} Si & e_c^p + e_c^0 < 0 & \begin{cases} \hat{r}_c = -r_c^0 \\ \hat{v}_c = v_c - l^{-1}(\hat{r}_c - r_c) \end{cases} \\ Si & e_c^p + e_c^0 \geq 0 & \begin{cases} \tau_c - l(-\hat{v}_c^e) = l(v_c + e\hat{v}_c^i) + r_c + r_c^0 \\ 0 \leq \tau_c \perp -\hat{v}_c^e \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La résolution de ce LCP donne alors $\hat{r}_c$ et $\hat{v}_c$.

Câbles extensibles.

Le couple $(\hat{v}_c, \hat{r}_c)$ doit satisfaire :

- la direction de recherche : $\hat{r}_c - r_c + l(\hat{v}_c - v_c) = 0$,
- et la loi de comportement :

$$\begin{cases} Si & e_c^p + e_c^0 < 0 & \hat{\tau}_c = 0 = \hat{r}_c + r_c^0 \\ Si & e_c^p + e_c^0 \geq 0 & 0 \leq \hat{\tau}_c \perp \hat{\lambda}_c \geq 0 \end{cases}$$

où $\hat{\lambda}_c = -\hat{v}_c + \frac{1}{\theta kh}\hat{r}_c - \frac{1}{\theta h} < e_c^i + e_c^0 >_+$.

La solution est donc :

$$\begin{aligned} Si & e_c^p + e_c^0 < 0 & \begin{cases} \hat{r}_c = -r_c^0 \\ \hat{v}_c = v_c - l^{-1}(\hat{r}_c - r_c) \end{cases} \\ Si & e_c^p + e_c^0 \geq 0 & \begin{cases} \hat{\tau}_c - l(1 + \frac{l}{\theta kh})^{-1} \hat{\lambda}_c = q_c \\ 0 \leq \hat{\tau}_c \perp \hat{\lambda}_c \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où $q_c = (1 + \frac{l}{\theta kh})^{-1}\{r_c + lv_c + (1 + \frac{l}{\theta kh})r_c^0 + \frac{l}{\theta kh} < e_c^i + e_c^0 >_+\}$.
La résolution de ce LCP donne alors $\hat{r}_c$ et $\hat{v}_c$.

Etape linéaire — opérateur tangent linéaire

A partir de l'estimation de la solution $\hat{s}$ obtenue à l'étape locale précédente, l'étape linéaire consiste à trouver s qui satisfait la dynamique et la compatibilité des déformations par sous-structures (6.23), (6.24). Avec une approche en impulsion, on écrit la continuité des champs macro sur chaque interface $\Gamma_{EE'}$ comme suit :

$$\bar{R}_{EE'}^M + \bar{R}_{E'E}^M = 0 \quad (6.34)$$

Et pour éviter de sur-contraindre le problème, la direction de recherche est encore écrite sous forme faible.

Description Macro et direction de recherche

Dans cette étape le travail s'effectue par sous-structure. De même qu'en statique, l'introduction de notations supplémentaires est nécessaire :

- l'indice $(E\Gamma)$ se rapporte toujours à l'ensemble des quantités (EE') liées à une même sous-structure E . Par exemple, à partir de (6.29) on peut obtenir le vecteur lié à E de la façon suivante : $\bar{R}_{E\Gamma}^M = P_{E\Gamma} r_{E\Gamma}$.
- pour manipuler l'admissibilité des impulsions macro (6.34), on utilise un champ macro r_Γ défini sur l'interface globale Γ (assemblage des interfaces locales $\Gamma_{EE'}$). $r_{E\Gamma}$ peut donc s'écrire comme suit $r_{E\Gamma} = c_E r_\Gamma$ où c_E est une matrice booléenne signée. Il est possible d'extraire $r_\Gamma|_{EE'}$ ou $-r_\Gamma|_{E'E}$ pour chaque interface connectée à la sous-structure E .

N.B. : La quantité duale de r_Γ est bien sûr $v_\Gamma = \sum_E c_E^t v_{E\Gamma}$, celle-ci représente le saut de vitesse macro généralisé sur les interfaces.

Pour ne pas sur-contraindre le problème, on utilise une formulation faible pour l'écriture de la direction de recherche sur les interfaces :

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{R}_{E\Gamma}^m, V_{E\Gamma}^m, \hat{R}_{E\Gamma}^m, \hat{V}_{E\Gamma}^m} \\ & \frac{1}{2} \sum_E [(\bar{R}_{E\Gamma}^m - \hat{R}_{E\Gamma}^m) + d^m(V_{E\Gamma}^m - \hat{V}_{E\Gamma}^m)] \frac{1}{d^m} [(\bar{R}_{E\Gamma}^m - \hat{R}_{E\Gamma}^m) + d^m(V_{E\Gamma}^m - \hat{V}_{E\Gamma}^m)] + \\ & \frac{1}{2} \sum_E [(\bar{R}_{E\Gamma}^M - \hat{R}_{E\Gamma}^M) + d^M(V_{E\Gamma}^M - \hat{V}_{E\Gamma}^M)] \frac{1}{d^M} [(\bar{R}_{E\Gamma}^M - \hat{R}_{E\Gamma}^M) + d^M(V_{E\Gamma}^M - \hat{V}_{E\Gamma}^M)] \end{aligned}$$

pour des impulsions macro généralisées satisfaisant $\bar{R}_{E\Gamma}^M = P_{E\Gamma} c_E r_\Gamma$. Ce qui mène à une forme forte de la direction de recherche micro

$$(\bar{R}_{E\Gamma}^m - \hat{R}_{E\Gamma}^m) + d^m(V_{E\Gamma}^m - \hat{V}_{E\Gamma}^m) = 0 \quad (6.35)$$

et une forme faible pour la direction de recherche macro :

$$A^{*M}(r_\Gamma - \hat{r}_\Gamma) + (v_\Gamma - \hat{v}_\Gamma) = 0 \quad (6.36)$$

où $A^{*M} = \sum_E c_E^t P_{E\Gamma}^t \frac{1}{d^M} P_{E\Gamma} c_E$.

Une propriété remarquable dans le cas des interfaces parfaites est que $\hat{v}_\Gamma = 0$. Par ailleurs, en choisissant de prendre $d^M = \infty$, A^M est nulle et la direction de recherche macro se réduit alors à $v_\Gamma = 0$, i.e. la continuité des vitesses de déplacements macro sur les interfaces. Dans la mesure où ce choix permet d'optimiser la méthode, nous choisissons de prendre $d^M = \infty$ par la suite, comme pour la statique.

Formulation de l'étape linéaire.

En utilisant la compatibilité des déformations et les directions de recherche :

$$r_E = (\hat{r}_E - l\hat{v}_E) + lB_EV_E \quad (6.37)$$

$$\bar{R}_{E\Gamma}^m = (\hat{R}_{E\Gamma}^m + d^m \hat{V}_{E\Gamma}^m) - d^m (V_{E\Gamma} - P_{E\Gamma} v_{E\Gamma}) \quad (6.38)$$

les équations d'équilibre et la direction de recherche macro mènent à :

$$\tilde{M}_E V_E - Q_E v_{E\Gamma}^* = h \hat{R}_E^d \quad (6.39)$$

$$\sum_E c_E^t P_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma} V_E = 0 \quad (6.40)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{M}_E &= M + hB_E^t lB_E + hC_{E\Gamma}^t d^m C_{E\Gamma}, \\ Q_E &= hC_{E\Gamma} d^m P_{E\Gamma}, \\ v_{E\Gamma}^* &= v_{E\Gamma} + d^{m-1} r_{E\Gamma} \text{ et} \\ h \hat{R}_E^d &= hC_{E\Gamma}^t (\hat{R}_{E\Gamma}^m + d^m \hat{V}_{E\Gamma}^m) - hB_E^t (\hat{r}_E - l\hat{v}_E) + MV_E^i + \int_{t^i}^{t^{i+1}} F_E^d dt. \end{aligned}$$

C'est un problème couplé en $(V_E, v_{E\Gamma}^*)$.

Reformulation de l'étape linéaire

Les équations d'équilibre s'expriment grâce au couple d'inconnues $(V_E, v_{E\Gamma}^*)$ sous la condition qu'elles soient liées par

$$v_{E\Gamma} = P_{E\Gamma}^t C_{E\Gamma} V_E \quad (6.41)$$

Ce qui s'écrit finalement comme :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} \tilde{M}_E & -C_{E\Gamma} d^m P_{E\Gamma} \\ -P_{E\Gamma}^t d^m C_{E\Gamma} & d^m \mathbf{1}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_E \\ v_{E\Gamma}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_E^d \\ r_{E\Gamma} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

En additionnant la direction de recherche macro

$$\sum_E c_E^t v_{E\Gamma} = 0 \quad (6.43)$$

et en rappelant que $r_{E\Gamma} = c_{E\Gamma} r_\Gamma$, le problème est fermé.

Problème macro homogénéisé

De la même façon que pour la statique, la partie homogénéisée du comportement de la sous-structure E est obtenue numériquement par la condensation du système précédent sur les ddl grossiers $v_{E\Gamma}^*$:

$$\frac{1}{h} A_E^* v_{E\Gamma}^* = r_{E\Gamma} + g_E^* \quad (6.44)$$

avec

$$A_E^* = h d^m \mathbf{1}_E - Q_E^t \tilde{M}_E^{-1} Q_E$$

et où

$$g_E^* = Q_E^t \tilde{M}_E^{-1} \hat{R}_E^d$$

est donné à ce niveau. $\tilde{M}_E$ est inversible et dans le cadre de la dynamique contrairement au cadre de la statique, A_E^* est inversible.

L'obtention de $v_{E\Gamma}^*$ est donc plus aisée :

$$v_{E\Gamma}^* = h A_E^* [r_{E\Gamma} + g_E^*]$$

Le problème macro à résoudre est constitué des équations suivantes :

$$\begin{aligned} v_{E\Gamma}^* &= h A_E^{*-1} [r_{E\Gamma} + g_E^*], \\ A^{*M} r_\gamma + \sum_E c_E^t (v_{E\Gamma} &= A^{*M} \hat{r}_\gamma + \sum_E c_E^t \hat{v}_{E\Gamma}) = \hat{w}^{d*} \\ \bar{R}_{E\Gamma}^M &= P_{E\Gamma} r_{E\Gamma} = P_{E\Gamma} c_E r_\Gamma \end{aligned}$$

avec $A^{*M} = \sum_E c_E P_{E\Gamma}^t d^{M-1} P_{E\Gamma} c_E$. Il s'écrit finalement aussi :

$$(A^{*M} + B^{*M}) r_\Gamma + \sum_E c_E^t h A_E^{*-1} g_E^* = \hat{w}_d^*$$

avec $B^{*M} = \sum_E c_E^t h \underbrace{(A_E^{-1*} - h^{-1} d^{m-1} \mathbf{1}_E)}_{L_E^*} c_E$.

Relocalisation.

Une fois le problème macro résolu, $r_{E\Gamma}$ est connu pour chaque sous-structure E , et $v_{E\Gamma}$ peut être post-traité avec $v_{E\Gamma} = h L_E^* r_{E\Gamma} + h A_E^{-1*} g_E^*$. En remontant par substitution (6.42), on arrive à l'expression :

$$\tilde{M}_E V_E = Q_E v_{E\Gamma}^* + h \hat{R}_E^d$$

qui est résolue grâce à la méthode de Cholesky.

La partie micro additionnelle est $V_{E\Gamma}^m = V_{E\Gamma} - P_{E\Gamma} v_{E\Gamma}$ et $\bar{R}_{E\Gamma}^m$ est calculé grâce à la direction de recherche (6.38). La variation de longueur des liens est $v_E = B_E V_E$ et r_E est calculé grâce à la direction de recherche (6.37).

6.3.3 Résultats d'une modélisation avec câbles inextensibles

Le cas test considéré est la nappe de tensegrité utilisée pour la simulation de SICONOS. Dans cette modélisation, l'état de configuration du système est l'état autocontraint ; ce qui diminue le temps de simulation par rapport à SICONOS (on passe de 0.6s à 0.4s, ce temps était nécessaire au chargement des barres pour la mise en place de l'autocontrainte dans le système).

Les noeuds de la partie inférieure sont bloqués sur deux bords et des efforts verticaux sont appliqués sur les noeuds complémentaires, l'évolution en temps de l'effort en valeur absolue est donc celle donnée par le Graphe 6.19. Le temps de calcul simulé est de 0.4s et le pas de temps h est de $10^{-3}s$.

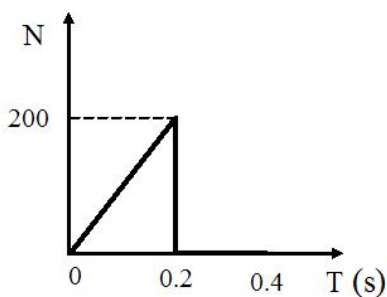


FIG. 6.19 – Graphe de l'effort appliqué.

Pour tester la convergence de l'algorithme, contrairement au cas statique, nous ne disposons pas de solution de référence. Il est cependant possible d'en obtenir une en mettant en place une formulation LCP globale du problème tout comme cela a été fait pour SICONOS dans la section précédente. Pour contrôler l'algorithme et pour arrêter les itérations, nous utilisons un indicateur d'erreur qui ne nécessite pas l'utilisation d'une solution de référence. Cet indicateur d'erreur est calculé après chaque étape linéaire, selon une approche mixte ; il mesure la distance entre les solutions appartenant d'une part à A_d et d'autre part à Γ de la même façon que cela se faisait en statique modulo quelques modifications dues à l'écriture de la dynamique (effort/impulsion, déplacement/vitesse,...).

La Figure 6.20 reporte l'évolution de l'indicateur d'erreur η en fin de chaque pas de temps. On constate qu'à partir de 200 pas de temps, c'est à dire de l'instant où l'effort est lâché, que l'indicateur d'erreur est affecté. A 200 pas de temps, les câbles sont le plus détendus ; aussitôt l'effort lâché, les câbles se rechargent violemment et mènent alors à des chocs dans la solution.

La Figure 6.21 présente les valeurs de l'impulsion moyenne de chacun des 768

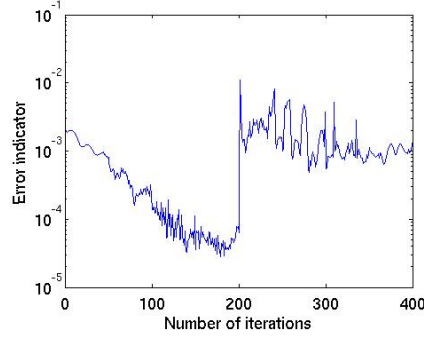


FIG. 6.20 – Evolution de l'indicateur d'erreur pour différents pas de temps.

câbles triés dans l'ordre croissant. On constate que la répartition des contraintes augmente avec la charge jusqu'à 200 pas de temps et qu'elle diminue ensuite. La Figure 6.22 présente la déformée de la structure.

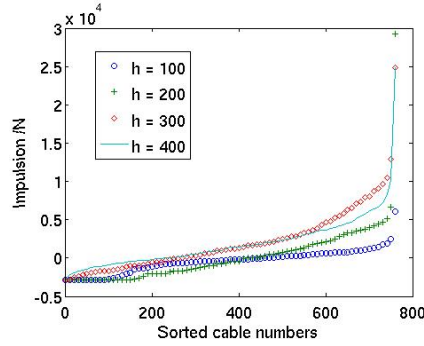


FIG. 6.21 – Impulsion moyenne interne dans les câbles pour différentes valeurs du pas de temps.

BILAN ET PERSPECTIVES

L'approche proposée traite des problèmes dynamiques non réguliers de grande taille résolus grâce à une approche de sous-structuration. Les résultats présentés ne sont que les prémices de l'étude dynamique. A court terme, il s'agit de s'intéresser à l'énergie totale du système, et d'effectuer différents tests prenant en compte une variété de chargements afin de mettre le doigt sur les difficultés numériques que les chocs peuvent produire. Une étude dans le cas d'une modélisation incluant des câbles extensibles est à venir, celle-ci ne demandant qu'un changement de comportement des liens au niveau de l'étape locale. Une

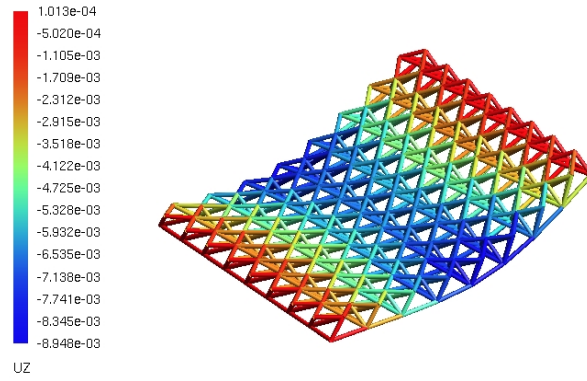


FIG. 6.22 – Structure déformée (valeurs du déplacement vertical) à 200 pas de temps ($t = 0.2s$).

comparaison des résultats entre la LATIN micro-macro dynamique et le logiciel TOYGL¹ permettra notamment de confronter les résultats.

Remerciements

Ces travaux ont été supportés par le projet européen SICONOS (Modelling, Simulation and Control of Nonsmooth Dynamical Systems), projet n°IST2001-37172.

¹logiciel de Julien Averseng spécifique à la tensegrité.

Chapitre 7

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

 e coeur de ce travail est l'outil numérique pour l'étude de milieux essentiellement discrets présentant une non régularité diffuse, c'est à dire répartie sur tout le système. Les milieux granulaires en sont une illustration. La non régularité de ces milieux réside dans les lois d'interactions de contact et/ou de frottement entre les grains. Leurs simulations font appel au calcul intensif, qui, de nos jours, consiste en l'alliance d'algorithmes de plus en plus performants et du calcul parallèle. Néanmoins, l'étude d'échantillons de plus en plus complexes et volumineux réclame la mise en place d'une stratégie de sous-structuration géométrique voire multiéchelle. Cette démarche s'introduit alors dès la formulation du problème.

Pour tester des méthodes de décomposition de domaine, les milieux granulaires s'avèrent être des candidats peu disciplinés en dynamique : leurs évolutions engendrent des reconfigurations des contacts entre grains qui demandent alors l'actualisation du contour des sous-structures. C'est pourquoi, il est nécessaire de considérer dans un premier temps un système intermédiaire s'approchant des milieux granulaires : les systèmes de tenségrité, systèmes constitués de barres et de câbles. Le comportement unilatéral des câbles dote ces systèmes d'une non régularité traversant toute la structure, et fait d'eux de meilleurs candidats pour les tests de stratégies multiéchelles.

La première partie de ce mémoire expose une partie des algorithmes programmés pour le projet européen SICONOS, donnant ainsi naissance à une librairie de solveurs non réguliers. Des tests permettant la validation des algorithmes y sont présentés. Des tests plus élaborés présentés par la suite, mettant en oeuvre les systèmes de tenségrité, ont mis le doigt sur la limitation de construction de matrices lorsque la taille du problème devenait importante.

La deuxième partie propose une technique de décomposition de domaine de type LATIN micro-macro [23] étendue à des milieux discrets en 3D. Celle-ci est testée sur des systèmes de tensegrité de grandes tailles fortement non réguliers. L'influence du nombre de sous-structures et du chargement sur le taux de convergence y sont présentées.

Il paraît toutefois intéressant de continuer cette étude afin d'avoir une sélection automatique d'une direction de recherche optimale vis-à-vis du taux de convergence de l'algorithme. La direction de recherche, choisie ici locale par élément (câble ou barre), pourrait aussi être prise globale par sous-structure; auquel cas le problème LCP devient vectoriel et requiert une résolution adaptée ([37], [43]).

La dernière partie entame l'étude de la dynamique des structures de tensegrité. Même si la dynamique améliore les propriétés de l'opérateur de Delassus, la non régularité persiste. C'est ainsi que, lorsque les câbles se détendent et se rechargent violemment, les chocs se propagent dans la structure. Le cas testé ici traite une modélisation prenant en compte des câbles inextensibles, les travaux en développements concernent notamment le cas des câbles extensibles et la comparaison avec le logiciel de temps réel TOYGL.

On s'attend à ce que les algorithmes multiéchelle de décomposition de domaine prouvent leur efficacité en fonction du nombre croissant de sous domaines.

A plus long terme, l'utilisation de ce type d'approche pourra être étendu au cas de la dynamique des milieux granulaires, pour laquelle une difficulté supplémentaire est l'évolution importante de la configuration lors des écoulements éventuels de grains.

Bibliographie

- [1] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [2] P. Alart, D. Dureisseix, and M. Renouf. Using nonsmooth analysis for numerical simulation of contact mechanics. In *Progresses in Nonsmooth Mechanics and Analysis*, chapter 17. Kluwer Academic Press, 2005. to appear.
- [3] M. Barboteu, P. Alart, and M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4785–4803, 2001.
- [4] J.-L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisations des structures par éléments finis*. Hermès, 1990.
- [5] B. Cambou and M. Jean. *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Science, 2001.
- [6] M. Cocu. Existence of solutions of signorini problems with friction. *Int. J. Engng Sci.*, 22, 1984.
- [7] M. Cocu, E. Pratt, and M. Raous. Existence d’une solution du problème quasi statique de contact unilatéral avec frottement non local. *C. R. Acad. Sci. Paris 320 Serie I*, pages 1413–1417, 1995.
- [8] M. Cocu, E. Pratt, and M. Raous. Formulation and approximation of quasistatic frictional and adhesion. *Int. J. Engng. Sci.*, 34 :783–798, 1996.
- [9] J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, P. Ladevèze, and P. Lorong. Expérimentation d’une approche parallèle en calcul des structures,. *Revue Européenne des Eléments finis*, 5 :197–220, 1996.
- [10] R. W. Cottle. *Fundamentals of quadratic programming and linear complementarity, Engineering plasticity by mathematical programming*. 2-12 Août 1979 Waterloo, Canada.
- [11] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A., Les presses de l’Université Laval, 1981.
- [12] G. Duvaut and J. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.

- [13] C. Farhat and D. Rixen. *Encyclopedia of Vibration*. Academic Press, 2002. isbn 0-12-227085-1.
- [14] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and inter-connecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227, 1991.
- [15] C. Farhat and F.-X. Roux. Implicit parallel processing in structural mechanics. In J. T. Oden, editor, *Computational Mechanics Advances*, volume 2. North-Holland, June 1994.
- [16] R. Fuller. *The dymaxion world of Buckingham Fuller*. 1979.
- [17] L. Greco. *Méthodes multiniveaux pour des problèmes de contact unilatéral avec frottement*. 1995.
- [18] M. K.-A. J. Quirant and R. Motro. Designing tensegrity systems : the case of a double layer grid. *Engineering Structures*, 25(9) :1121–1130, 2003.
- [19] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999.
- [20] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean. A gauss-seidel like algorithm to solve frictional contact problem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 155 :31–47, 1998.
- [21] A. Klarbring. Contact problems with friction by linear complementarity. *Unilateral Problems in Structural Analysis-2*, 304, 1987.
- [22] A. Klarbring and G. Bjorkman. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying surfaces. *Computer and Structures*, 5 :1185–1198, 1988.
- [23] P. Ladevèze. *Mécanique non-linéaire des structures*. Hermes Science, 1996.
- [24] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics — New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.
- [25] P. Ladevèze and D. Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences*, 327 :1237–1244, 1999.
- [26] P. Ladevèze and D. Dureisseix. A micro / macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28, 2000.
- [27] P. Ladevèze, O. Loiseau, and D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1–2) :121–138, 2001.
- [28] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. In *Computational Mechanics Advances*, volume 1. North-Holland, 1994.
- [29] F. Lebon. *Résolution numérique de problèmes de frottement de Coulomb accélération de convergence par une méthode multigrilles interne*.
- [30] C. E. Lemke. *On Complementary Pivot Theory*. Lectures in Applied Mathematics, 1968.

- [31] C. E. Lemke. *A survey of complementary theory, Variational inequalities and complementarity problems. Theory and applications*. 1980.
- [32] J. Moreau. Numerical aspects of sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :329–349, 1999.
- [33] R. Motro. *Tensegrity*. Hermes Science Publishing, London, 2003.
- [34] K. Murty. *Principal pivoting methos for LCP*. Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, 1997.
- [35] K. G. Murty. *On the number of solutions to complementarity problem and spanning properties of complementarity cones, Linear Algebra and its applications*. 1972.
- [36] V. Nicolas. *Recherche de forme et stabilité des systèmes réticulés autocontraints, application aux systèmes de tensegrité*. Thèse Université Montpellier 2, 1997.
- [37] S. Nineb, P. Alart, F. Dubois, and D. Dureisseix. Solveurs de systèmes de complémentarité et application à la tensegrité. *Actes du 17e Congrès Français de Mécanique, Troyes*, 2005.
- [38] S. Nineb, S. Bonelli, and P. Royet. *Simulation numérique du cisaillement de milieux granulaires en dynamique non régulière*. 2002. rapport DESS.
- [39] A. Nouy, P. Ladevèze, and O. Loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891, 2002.
- [40] M. Raous. *Contact, frottement, interfaces*. 2003. Cours du DEA de Mécanique de l’Université de la Méditerranée.
- [41] M. Raous, P. Chabrand, and F. Lebon. Numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. 1988.
- [42] M. Renouf. *Optimisation numérique et calcul parallèle pour l’étude des milieux divisés bi- et tridimensionnels*. PhD thesis, Université de Montpellier 2, 2004.
- [43] M. Renouf and P. Alart. Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004.
- [44] M. Renouf, F. Dubois, and P. Alart. A parallel version of non smooth contact dynamics algorithm applied to simulation of granular medium. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :375–382, 2004.