



**HAL**  
open science

# Eléments de dynamique du laser pour l'élaboration d'une source micro-onde miniaturisée sur la base de la double émission monomode d'un laser à modes de galerie.

Jean-Baptiste Ceppe

## ► To cite this version:

Jean-Baptiste Ceppe. Eléments de dynamique du laser pour l'élaboration d'une source micro-onde miniaturisée sur la base de la double émission monomode d'un laser à modes de galerie.. Optique / photonique. Université de Rennes 1, 2018. Français. NNT : . tel-02010230

**HAL Id: tel-02010230**

**<https://theses.hal.science/tel-02010230>**

Submitted on 7 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : PHOTONIQUE*

**Ecole doctorale Matière, Molécules et Matériaux**

**Jean-Baptiste Ceppe**

Préparée à l'unité de recherche Institut FOTON CNRS UMR 6082  
Equipe Systèmes Photoniques / Groupe Physique des Lasers et  
Applications

Ecole Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie

---

**Éléments de  
dynamique du laser  
pour l'élaboration  
d'une source micro-  
onde miniaturisée sur  
la base de la double  
émission monomode  
d'un laser à modes  
de galerie**

**Thèse rapportée par :**

**Fabien BRETENAKER**

Directeur de recherche CNRS, LAC, Université  
Paris Sud / *rapporteur*

**Massimo GIUDICI**

Professeur, INLN, Université Nice Sophia Antipolis /  
*rapporteur*

**et soutenue à Lannion  
le 29/06/2018**

devant le jury composé de :

**Mehdi ALOUINI**

Professeur, Institut FOTON (DOP), Université de  
Rennes I / *examineur*

**Gualtiero NUNZI-CONTI**

Chercheur CNR, IFAC, Firenze / *examineur*

**Gilles CIBIEL**

Docteur CNES, Microwave, Digital & Optic Dept.  
(DSO/RF/HNO) / *examineur*

**Patrice FERON**

Professeur, Institut FOTON (SP), Université de  
Rennes I / *directeur de thèse*

**Yannick DUMEIGE**

Maître de conférences HDR, Institut FOTON (SP),  
Université de Rennes I / *encadrant de thèse*



# Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés à l'Institut FOTON, au sein de l'équipe Systèmes Photoniques - groupe Physique du Laser et Applications. Je tiens à remercier le directeur du laboratoire Pascal Besnard pour m'avoir accueilli dans son établissement.

Bien entendu, je remercie ceux qui ont montré de l'intérêt pour mes travaux de recherche, en particulier Fabien Bretenaker et Massimo Giudici d'avoir rapporté ces travaux ainsi que Gilles Cibiel, Gualtiero Nunzi-Conti et Mehdi Alouini d'avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie également le CNES et la région Bretagne d'avoir soutenu mes travaux en me financant pendant ces trois années.

Il est bien vain de vouloir écrire sur quelques lignes la reconnaissance et le bonheur que j'ai pris à travailler pendant ces trois années (même six!) avec mes encadrants de thèse. Je me contenterai de dire simplement "Merci" à Patrice Féron et Yannick Dumeige (j'aimerais dire tellement plus!). Merci de répondre présent dès que possible, de m'avoir formé et de m'avoir donné l'occasion de m'exprimer scientifiquement autour des modes de galeries, merci de m'avoir fait confiance et de continuer à le faire, merci de m'avoir donné goût au monde académique et scientifique, en recherche et en enseignement (les TD de Physique atomique changeront la face du monde). Je remercie tout autant Yann Boucher d'avoir suivi de près comme de loin, avec un oeil attentif, les travaux présentés ici (tes remarques toujours très judicieuses et ton souci du détail ont placé la barre très haut).

Le laboratoire serait bien triste sans les interactions de ceux qui le constituent, au hasard des couloirs, de discussions (méta)physiques en discussions politiques, en salle de réunion ou salle café, sur le paradoxe  $E-P-R$  ou les mots-fléchés. Je profite de l'instant pour penser à ceux que j'ai cotoyé pendant mon séjour au laboratoire, Rodolphe Collin (*Spelunky!*), Margaux Barbier & Pauline Girault (et les nombreuses idées en commun), Paul Azuelos, Alphonse Rasoloniaina & Yohann Leguillon, Francois Fajjan (et les Salamandres), Shadrac Fresnel, Omar Sahni pour ses digressions philoso-

phiques du vendredi (et ses ragoutantes cultures), Carole Perrot, Stéphane Trébaol (*kakemono!*), Thierry Chartier, Sylvain Fève, Monique Thual ou encore *l'immarcescible* Christelle Pareige. Merci au personnel de l'ENSSAT et au service technique, Henry l'Her et Erwan Le Bigot. Mention spéciale pour Pierre Guillemé et Vincent Huet avec qui j'ai partagé le bureau et le laboratoire des micro-sphères : Vivi, mon courrier est bien moins fun sans tes talents de graphiste, Pierre, merci d'avoir toujours répondu présent lorsque j'étais bloqué sur la 5ème page du chapitre 4 section 2 de *Optical Waves in Crystals* ou du Cohen-Tannoudji, et pour le bouche-à-oreille d'Inkscape! Enfin, grâce au service des eaux de Lannion, la torche plasma ne se serait jamais bouchée et nous n'aurions jamais eu cette tranche de rire (et une douche gratuite).

Je profite également de l'occasion pour saluer mes collègues enseignants du DUT Mesures Physiques de Lille avec qui j'ai eu l'occasion de travailler Yves Quiquempois, Stéphane Briquez, Emmanuel Courtade, Jean Pesez, Laurent Hay, Natalia Correia, Alain Hedoux, Florence Danede, Mathieu Beaucamp, David Leroy, Sylvie Magnier, Isabelle Jankowiak, Eric Lutun, Mathieu Guerain, Aude Bouchet, Hilde De Block et Amandine Liagre. Egalement ceux de l'équipe Photonique de l'IRCICA Laurent Bigot, Arnaud Mussot, Alexandre Kudlinski, Andy Cassez, Géraud Bouwmans, Olivier Vanvincq, Rémi Bernard, Damien Labat et Stéphane Plus.

Merci à mes parents et mes deux soeurs pour supporter tout un charabia incompréhensible quand je parle de mon travail (et j'en parle souvent!). Agathe tu es maintenant un peu loin, j'essaye pourtant de trouver du temps pour passer dire bonjour, à toi et Nam, à Carrboro. Merci d'avoir fait le voyage jusqu'à San Francisco pour un petit week-end. Margaux, merci pour ta disponibilité, ton soutien et tes messages d'encouragement. Merci également à Théo pour ta proximité et ton suivi bienveillant!

Je n'oublie pas *l'exceptionnelle* promo de 2011 de l'ENSSAT. Merci à Francois (le vin rouge de la Drôme), Lucile ma binôme de TP et de palier (tu es dans les remerciements!) & Loïc (un petit peu), Corentin, Nono, Patou, Gagaux, Parnet, Beubeu, Nodal, Pierre *Lebal*, Ronan, Lydia, Mathieu, Méline, Bapt', Anto, Romano et les bars du Castro..., et mon parain Simon. Je n'oublie pas non plus les collègues de DUT MP Bertin, Nico, Sim et Sim, David, Romain, Clarisse, Jenna, Erwan et Briauc.

Enfin, ces trois années n'auraient pas été aussi stimulantes sans les nombreuses personnes que j'ai rencontré via l'Ultimate! Quentin, les frères Le Koz, Mathieu, Laurent, Kévin (*Savon / petites mains en mousse*), Anaïs, Flo, les anciens Pierre, Stéphane, Dim,

Mathieu B. ou encore Rémi, coach exceptionnel râleur bienveillant *gentil* d'une extraordinaire lucidité (peut-être aura-tu ici un aperçu de ce que j'ai fait avec tes impôts). Egalement Dr. Coco, Antoine, Jeff, JuC (baltringue! Qu'est-ce que tu attends pour être titulaire?) et les sympathiques *BSF*.

Il ne serait pas honnête de ma part de ne pas rendre hommage à ceux qui m'ont donné envie de poursuivre l'aventure à travers les enseignements prodigués, remarques ou curiosités piquées, et ceux qui ont contribué à l'envie de pousser le raisonnement le plus loin possible. Comme le dit si bien Patrice : *Posez-vous les bonnes questions*. Rien ne saurait être plus vrai! Apprendre à questionner, apprendre à raisonner, apprendre à *faire* apprendre, apprendre à transmettre - ce sont là les plus belles choses.



# Table des figures

1	Architecture d'un O <sup>2</sup> E. . . . .	2
2	Principe du battement <i>RF</i> entre deux lasers décalés en fréquence. . . . .	3
1.1	Schéma d'un résonateur en anneau couplé à une ligne d'accès. . . . .	10
1.2	Fonction de transfert en intensité $T(\omega)$ d'un résonateur en anneau pour différents couples $\{\underline{\alpha}, \rho\}$ . . . . .	11
1.3	Schéma d'une cavité sphérique couplée à une ligne d'accès, définition des "champs" $u(t)$ , $s_{in}(t)$ , $s_{out}(t)$ et des temps de vie intrinsèque $\tau_0$ et extrinsèque $\tau_e$ . . . . .	13
1.4	Spectre de transmission $T(\Omega)$ autour d'une résonance pour différentes valeurs de $\tau_0/\tau_e$ . . . . .	15
1.5	Transmission à résonance $T(\Omega = 0)$ pour différentes valeurs de $\tau_0/\tau_e$ , définition des régimes de couplages. . . . .	16
1.6	Schéma de deux cavités en anneaux identiques couplées à deux lignes d'accès (configuration <i>add/drop</i> ). . . . .	20
1.7	Fonction de transfert en intensité $ \mathcal{H}_T ^2$ et $ \mathcal{H}_R ^2$ de deux résonateurs en anneaux sans pertes internes ( $\tau_0 \rightarrow +\infty$ ) couplés avec un temps de vie $\tau_b = \tau_p/5$ . . . . .	21
1.8	Fonction de transfert en intensité $ \mathcal{H}_T ^2$ et $ \mathcal{H}_R ^2$ de deux résonateurs en anneaux sans pertes internes ( $\tau_0 \rightarrow +\infty$ ) couplés avec un temps de vie $\tau_b$ pour $\tau_b = \tau_p$ . . . . .	21
1.9	Schéma représentatif de deux résonateurs en anneaux identiques couplés par rétrodiffusion. . . . .	23
1.10	Effet des différents Hamiltoniens sur les niveaux d'énergie de l'ion Erbium. . . . .	27
1.11	Arrangement des mailles dans une structure (a) cristalline et (b) vitreuse (tous les deux non dopés). . . . .	29



1.12 (a) Dopants au sein d'une structure vitreuse et (b) élargissements homogènes des différents sites ioniques et élargissement inhomogène résultant. . . . .	30
1.13 Comparaison des spectre d'émission à 1064 nm de l'ion $Nd^{3+}$ inséré dans un cristal de YAG et dans un verre de silice (l'échelle verticale a été ajustée sur les deux spectres pour faciliter la comparaison). Figure extraite de [56]. . . . .	30
1.14 Coefficient d'atténuation linéique $\alpha$ du verre ZBLALiP dopé à 0.05 mol%. . . . .	32
1.15 Effet Stark sur les niveaux $^4I_{13/2}$ et $^4I_{15/2}$ de $Er^{3+}$ . . . . .	33
1.16 Sections efficaces d'émission et d'absorption. . . . .	33
1.17 (a) Absorption des niveaux supérieurs de l'ion Erbium, (b) Visualisation de la fluorescence à 550 nm. . . . .	34
1.18 Gain spectral pour différents taux de pompage $p$ pour un échantillon de verre dopé à 0.05 mol%. . . . .	35
1.19 (a) Temps de vie de la transition $^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ après excitation à 532 nm en fonction du taux de dopage pour des échantillons de verre ZBLALiP bruts et réduits en poudre, Figure extraite de [57]. (b) Effet de la géométrie de l'échantillon sur le temps de vie de la transition $^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ de l'Erbium dans un verre IOG-2, Figure extraite de [63]. . . . .	36
1.20 Sections efficaces d'émission et d'absorption de l'Erbium dans un verre IOG-1, Figure extraite de [64]. . . . .	37
1.21 Mesure de la décroissance de la fluorescence de la transition $^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ dans 4 verres IOG-1 à l'état solide. Figure extraite de [65]. . . . .	38
1.22 (a) Schéma et (b) photographie de la torche plasma micro-onde . . . . .	40
1.23 Etapes de collage d'une microsphère sur un piédestal. . . . .	41
2.1 Schéma représentatif de la trajectoire du rayon lumineux dans une sphère de rayon $a$ et d'indice relatif $N$ . . . . .	46
2.2 Définition du moment angulaire $L$ et de sa projection $L_z$ dans une sphère. . . . .	47
2.3 Schéma de la trajectoire du trajet d'un rayon lumineux lors d'une réflexion dans un plan équatorial de la sphère, illustration de l'effet <i>Goos-Hänchen</i> . . . . .	50
2.4 Représentation d'un ellipsoïde de révolution d'axe $\mathbf{u}_z$ de type prolate. Le champ électromagnétique circulant dans ce résonateur est caractérisé par son moment angulaire $L$ et décrit une trajectoire elliptique d'axes $r_e$ et $r_a$ . $L$ précesse' autour de l'axe $\mathbf{u}_z$ avec un angle $\alpha = \arccos(L_z/L)$ . . . . .	53

2.5	Distributions angulaires du vecteur de Poynting dans une sphère de rayon $a = 50 \mu m$ pour un mode TE tel que $n = 1, \ell = 288$ et $\ell -  m  = 0$ (a), 1 (b) et 2 (c). . . . .	60
2.6	Exemples de potentiels effectifs et de leurs fonctions radiales associées pour $n = 1$ et $n = 7$ dans le cas d'un mode TE, $\ell = 100$ , se propageant dans une micro-sphère de rayon $a = 10 \mu m$ et d'indice $N = 1.45$ . Le premier mode est un champ électromagnétique de longueur d'onde $\lambda_{n=1} = 873.2 nm$ tandis que le second est à $\lambda_{n=7} = 674.0 nm$ . . . . .	62
2.7	(a) Spectre des WGM dans une sphère parfaite ( $e = 0$ ) de rayon $a = 50 \mu m$ et d'indice relatif $N = 1.49$ pour les familles de modes $n = \{1, 2, 3\}$ TE et TM, (b) Spectre de fluorescence issu d'une micro-sphère de $55 \mu m$ de rayon en verre ZBLALiP dopé aux ions Erbium autour de $\lambda_0 = 1550 nm$ . . . . .	68
2.8	Distribution radiale de l'intensité d'un mode TE avec $n = 1, \ell =  m  = 288$ , $\lambda = 1562.76 nm$ dans une sphère de rayon $a = 50 \mu m$ et d'indice relatif $N = 1.49$ . $r_1$ est la caustique interne tandis que $r_{max}$ est la position de maximum de $r_\ell(kr)$ . . . . .	70
2.9	Définition des axes du faisceau elliptique gaussien pour le mode fondamental. . . . .	77
3.1	Différentes méthodes de couplage par onde evanescente dans un micro-résonateur WGM. . . . .	85
3.2	Rayon optimal du taper en fonction du rayon de la sphère permettant un bon accord de phase entre les modes du guides et les WGM pour $n=1$ à 4. . . . .	87
3.3	Indice effectif des modes du taper en fonction de son diamètre, $\lambda_0 = 1550 nm$ , $N = 1.45$ . . . . .	90
3.4	(a) Densité de puissance en fonction du rayon dans un taper de rayon $\rho = 0.5 \mu m$ , $\lambda_0 = 1550 nm$ , (b) Densité de puissance dans la section du taper (les pointillés indiquent la frontière gaine-air). Les Figures sont extraites de [90]. . . . .	91
3.5	Banc de fusion-étirage. . . . .	92
3.6	Profil longitudinal d'un taper. . . . .	92
3.7	Transmission en sortie du taper en fonction du temps, $\lambda_0 = 1550 nm$ . . . . .	93
4.1	Schéma du laser à trois niveaux. . . . .	102
4.2	Schéma fonctionnel des équations de Maxwell-Bloch. . . . .	103
4.3	Solutions stationnaires des équations de Statz et DeMars pour un laser à trois niveaux. . . . .	107

4.4	Architecture typique d'un laser à fibre monomode idéalisé. . . . .	111
5.1	Exemple de deux trajectoires d'un processus aléatoire $x$ . . . . .	119
5.2	Variations temporelles du champ émis par un atome. . . . .	123
5.3	(a) Variations temporelle d'un champ électromagnétique purement sinusoidal et (b) sa représentation dans le plan de Fresnel. $\nu$ est la fréquence de l'onde électromagnétique émise. . . . .	124
5.4	(a) Variations temporelles d'un champ électromagnétique soumis à des fluctuations pour plusieurs représentations, (b) et (c) sa représentation dans le plan de Fresnel. . . . .	125
5.5	(a) Spectre de $RIN$ théorique au premier ordre d'un laser de classe B dopé Erbium pour $r = 2$ , $\tau_p = 150 \text{ ns}$ , $T_1 = 10 \text{ ms}$ , $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$ ( $\mathcal{V} \simeq 2400 \mu\text{m}^3$ ), $D_{NN} = 10^{17} \text{ s}^{-1}$ et $D_{FF} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , définition de la pulsation de relaxation $\omega_{sp}$ et de l'amortissement $\Gamma$ , (b) zoom autour de la fréquence de relaxation du laser. . . . .	134
5.6	Spectre du deuxième ordre du $RIN$ théorique d'un laser de classe B dopé Erbium pour $r = 2$ , $\tau_p = 150 \text{ ns}$ , $T_1 = 10 \text{ ms}$ , $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$ ( $\mathcal{V} \simeq 2400 \mu\text{m}^3$ ), $D_{NN} = 10^{17} \text{ s}^{-1}$ et $D_{FF} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ . . . . .	138
5.7	Spectre du $RIN$ théorique d'un laser de classe B dopé Erbium pour $r = 2$ , $\tau_p = 150 \text{ ns}$ , $T_1 = 10 \text{ ms}$ , $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$ ( $\mathcal{V} \simeq 2400 \mu\text{m}^3$ ), $D_{NN} = 10^{17} \text{ s}^{-1}$ et $D_{FF} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ développé jusqu'à l'ordre 2. . . . .	140
5.8	Schema du montage de mesure de $RIN$ par détection directe. . . . .	141
5.9	Mesure du bruit thermique pour deux calibres différents. . . . .	142
5.10	Estimation du bruit de grenaille : (a) $DSP$ mesurées pour différentes puissance, (b) normalisation . . . . .	143
5.11	Compétition de modes d'un laser $WGM$ , la durée entre chaque acquisition est d'environ $2 \text{ min}$ . . . . .	145
5.12	(a) Spectre optique d'un laser $WGM$ multimode mesuré au Fabry-Perot d'analyse (b) Largeur de raie mesurée à l'auto-hétérodyneur dans le domaine électrique ( $\delta$ est le désaccord à la fréquence de modulation du modulateur acousto-optique). . . . .	146
5.13	Spectre de $RIN$ d'un laser $WGM$ multimode : (a) $DSP$ mesurées du laser et du bruit thermique et $DSP$ estimée du bruit de grenaille (par calcul), (b) Spectre de $RIN$ . . . . .	147
5.14	Spectres des pompes utilisées (a) pompe multimode (b) pompe monomode . . . . .	149
5.15	Schema expérimental de l'étude du $RIN$ d'un Laser $WGM$ , couplage par taper. . . . .	149

5.16	<i>RIN</i> d'un laser WGM en $Er$ : ZBLALiP couplé par taper droit, pompage monomode : (a) spectre expérimental et ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation. . . . .	150
5.17	<i>RIN</i> d'un laser WGM couplé par taper, pompage multimode : (a) spectre expérimental et ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation. . . . .	153
5.18	Schema expérimental de l'étude du <i>RIN</i> d'un laser WGM, couplage par pointe effilée. . . . .	154
5.19	<i>RIN</i> d'un laser WGM couplé par pointe effilée, pompage multimode : (a) spectre expérimental et premier ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation. . . . .	156
5.20	<i>RIN</i> d'un laser WGM couplé par pointe effilée, pompage multimode : (a) spectre expérimental et deuxième ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation. . . . .	156
6.1	Schéma du laser en anneau de longueur de cavité $L$ et d'indice $N$ , $\rho$ est le coefficient de réflexion en intensité, $T_{cav}$ est la fonction de transmission de la cavité. . . . .	162
6.2	Variations de la fréquence de battement en fonction de la pulsation normalisée $\Omega/\gamma$ pour différentes valeurs du coefficient $\delta\theta$ . . . . .	173
6.3	DSP des fluctuations du photocourant issu de la photodétection d'un Laser WGM en verre IOG-1, sphère de diamètre $2a = 105 \mu m$ . La puissance Laser mesurée au photodétecteur est de $7.1 nW$ . . . . .	179
6.4	Montage expérimental pour l'étude des corrélations entre les signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser WGM. . . . .	181
6.5	Spectres optiques des signaux WGM+ et WGM- mesurés à l'OSA. . . . .	182
6.6	Spectre de <i>RIN</i> des signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser WGM en IOG-1. . . . .	182
6.7	Traces temporelles des tensions réduites $x$ et $y$ dans un micro-résonateur en IOG-1, $G = 10^5 V.A^{-1}$ . . . . .	184
6.8	(a) Fonction d'intercorrélation normalisée $\Theta_{xy}$ des signaux photodétectés réduits, $G = 10^5 V.A^{-1}$ , (b) zoom autour de $\tau = 0$ . . . . .	184
6.9	Effet du filtre électrique utilisé sur le <i>RIN</i> des signaux électriques analysés. . . . .	185
6.10	Fonction d'intercorrélation des signaux photodétectés normalisés, $G = 10^6 V.A^{-1}$ . . . . .	187
6.11	Fonction d'intercorrélation des signaux co- et contra-propagatifs normalisés et ajustement théorique : $\tilde{\tau}_c = 1.8 \mu s$ , $f_0 = 660 kHz$ . . . . .	188
6.12	Largeur du résidu de bruit non filtré. . . . .	189

6.13	Principe de la mesure du spectre en transmission d'un résonateur par balayage lent de la fréquence $\nu$ d'un laser accordable. . . . .	191
6.14	Montage expérimental de la mesure du spectre en transmission d'un résonateur <i>WGM</i> en régime de compensation de pertes. . . . .	191
6.15	Spectre de transmission d'un micro-résonateur <i>WGM</i> en verre IOG-1 pompé sous le seuil laser. . . . .	192
6.16	Spectre de transmission d'un micro-résonateur <i>WGM</i> en verre ZBLA-LiP non dopé et de diamètre $2a = 95 \mu m$ . . . . .	193
6.17	Spectres optiques des signaux <i>WGM+</i> et <i>WGM-</i> mesurés à l'OSA. . .	194
6.18	Spectre de <i>RIN</i> des signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser <i>WGM</i> en ZBLALiP. . . . .	194
6.19	Traces temporelles des tensions réduites $x$ et $y$ dans un micro-résonateur en ZBLALiP, $G = 10^6 V.A^{-1}$ . . . . .	195
6.20	Fonction d'intercorrélation des signaux photodétectés normalisés dans un verre ZBLALiP, $G = 10^6 V.A^{-1}$ . . . . .	195
6.21	Fonction d'intercorrélation normalisée $\Theta_{xy}$ des signaux co- et contra-propagatifs réduits et ajustement : $\tilde{\tau}_c = 13 \mu s, f_0 = 125 kHz$ . . . . .	196

# Liste des tableaux

1.1	Correspondance entre les concentrations en $E_r^{3+}$ et $Y_b^{3+}$ et les échantillons de la Figure 1.21 dans [65]. . . . .	38
3.1	Comparaison des coefficients d'absorption et facteurs de qualité correspondant entre la silice et le verre ZBLALiP. . . . .	82
3.2	Géométries des résonateurs WGM et leur facteur de qualité. . . . .	84
4.1	Grandeurs utilisées dans l'étude du laser à trois niveaux . . . . .	109
4.2	Valeurs numériques des paramètres utilisées . . . . .	110
4.3	Comparaison entre les paramètres du laser WGM et le laser à fibre. . .	114
5.1	Calcul numérique des volumes des modes $\mathcal{V}$ (en $\mu m^3$ ) et des constantes de couplage $\kappa$ (en $s^{-1}$ ) pour des modes $TE$ dans une sphère en ZBLALiP ( $N = 1.49$ ) de rayon $a = 45 \mu m$ autour de $\lambda = 1565.7 nm$ . . . . .	152
5.2	Calcul numérique des volumes des modes $\mathcal{V}$ (en $\mu m^3$ ) et des constantes de couplage $\kappa$ (en $s^{-1}$ ) pour des modes $TM$ dans une sphère en ZBLALiP ( $N = 1.49$ ) de rayon $a = 42.5 \mu m$ autour de $\lambda = 1563.6 nm$ . . . . .	155
5.3	Comparaison des termes paramètres dynamiques du laser WGM pour différents systèmes de couplage et pompes. . . . .	158



# Table des matières

Table des figures	xii
Liste des tableaux	xiii
Table des matières	xix
Introduction	1
<b>1 Description d'un résonateur en verre dopé aux ions Erbium</b>	<b>7</b>
1.1 Description d'un résonateur . . . . .	9
1.1.1 Fonction de transfert d'un résonateur . . . . .	9
1.1.2 Les différents régimes de couplage . . . . .	16
1.1.3 Puissance intra-cavité . . . . .	17
1.1.4 Couplage de résonateurs . . . . .	19
1.1.5 Conclusion . . . . .	25
1.2 Propriétés spectroscopiques de l'ion Erbium . . . . .	25
1.2.1 Spectroscopie de l'ion Erbium $Er^{3+}$ . . . . .	25
1.2.2 Ion Erbium en matrice vitreuse . . . . .	30
1.3 Fabrication des micro-sphères en verre . . . . .	39
1.3.1 Fusion de poudre de verre à la torche plasma . . . . .	39
1.3.2 Collage de micro-sphère sur piédestal . . . . .	40
<b>2 Résonateur à modes de galerie</b>	<b>43</b>
2.1 Approche géométrique . . . . .	45
2.1.1 Position des résonances dans l'approximation géométrique . . . . .	46
2.1.2 Analogie corpusculaire . . . . .	46
2.1.3 Conclusion de l'approche géométrique . . . . .	47
2.2 Première approche ondulatoire . . . . .	47
2.2.1 Analogie corpusculaire . . . . .	48
2.2.2 Mouvement angulaire . . . . .	48



2.2.3	Mouvement radial . . . . .	49
2.2.4	Quantification des mouvements angulaires et radiaux . . . . .	50
2.2.5	Position des résonances dans l'approximation eikonale . . . . .	51
2.2.6	Effet d'une légère ellipticité . . . . .	52
2.3	Le problème électromagnétique exact . . . . .	54
2.3.1	Position du problème . . . . .	54
2.3.2	L'équation d'onde scalaire . . . . .	55
2.3.3	La méthode de Hansen . . . . .	57
2.3.4	Modes de galerie <i>TE</i> et <i>TM</i> dans une micro-sphère . . . . .	58
2.3.5	Condition de résonance . . . . .	63
2.3.6	Approximation du spectre des modes de galerie . . . . .	64
2.4	Spectre des modes de galerie . . . . .	65
2.4.1	Familles de modes . . . . .	65
2.4.2	Ordres de grandeur . . . . .	67
2.5	Approximation des champs pour $\ell \gg 1$ et $\ell -  m  \ll \ell$ . . . . .	68
2.5.1	Expression des champs <b>E</b> et <b>B</b> . . . . .	69
2.5.2	Cas du mode fondamental . . . . .	69
2.6	Volume de mode . . . . .	71
2.6.1	Calcul formel du volume de mode . . . . .	72
2.6.2	Calcul formel pour $n = 1$ et $\ell =  m $ : modèle de F. Treussart . . . . .	74
2.6.3	Approximation du volume du mode fondamental à partir de l'expression de $\mathbf{E}_\ell^\ell(\mathbf{r})$ . . . . .	76
2.6.4	Ordre de grandeur du volume du mode fondamental . . . . .	78
2.7	Conclusion . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Facteur de qualité et couplage</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Facteur de qualité . . . . .	80
3.1.1	Pertes par diffraction . . . . .	80
3.1.2	Pertes par absorption/diffusion . . . . .	82
3.1.3	Pertes par inhomogénéités de surface . . . . .	82
3.1.4	Bilan . . . . .	83
3.2	Couplage à un micro-résonateur à modes de galerie . . . . .	84
3.2.1	Couplage par onde evanescente . . . . .	85
3.2.2	Propagation de la lumière dans un taper . . . . .	88
3.2.3	Fabrication d'un taper . . . . .	91
3.2.4	Fabrication d'une pointe effilée . . . . .	94
3.2.5	Conclusion . . . . .	94

<b>4</b>	<b>Physique du laser dopé Erbium</b>	<b>95</b>
4.1	Rappel sur les grandeurs énergétiques . . . . .	97
4.2	Equations de Maxwell-Bloch du laser . . . . .	98
4.2.1	Equations d'évolution des populations et des cohérences . . . . .	98
4.2.2	Equation d'évolution du champ électrique . . . . .	100
4.2.3	Equation d'évolution de la polarisation . . . . .	101
4.2.4	Equation d'évolution de la densité d'inversion de population . . . . .	101
4.2.5	Les différentes classes de lasers . . . . .	103
4.3	Laser de classe B : des équations de Maxwell-Bloch aux équations de débit . . . . .	104
4.3.1	Simplification des équations de Maxwell-Bloch . . . . .	104
4.3.2	Inversion de population et nombre de photons . . . . .	106
4.3.3	Solutions stationnaires . . . . .	106
4.4	Application au laser à modes de galerie : ordres de grandeurs . . . . .	109
4.4.1	Volume de mode . . . . .	110
4.4.2	Inversion de population au seuil . . . . .	110
4.4.3	Puissance de pompe au seuil . . . . .	111
4.4.4	Puissance de sortie . . . . .	111
4.4.5	Laser à fibre dopée Erbium . . . . .	111
4.4.6	Bilan . . . . .	113
4.5	Conclusion . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Bruit relatif d'intensité d'un laser à modes de galerie dopé Erbium</b>	<b>115</b>
5.1	Elements de photodétection . . . . .	117
5.1.1	Introduction . . . . .	117
5.1.2	Propriétés statistiques . . . . .	118
5.1.3	Représentation du bruit d'intensité . . . . .	122
5.2	Bruit de photodétection . . . . .	126
5.2.1	Densité spectrale de puissance du bruit de photons . . . . .	126
5.2.2	Bruit thermique . . . . .	127
5.2.3	Bruit en excès . . . . .	127
5.2.4	Ensemble des contributions . . . . .	128
5.3	Modèle théorique du <i>RIN</i> d'un laser de classe B . . . . .	128
5.3.1	Expressions générales . . . . .	128
5.3.2	Traitement perturbatif des termes couplés . . . . .	130
5.3.3	<i>RIN</i> d'ordre 1 . . . . .	133
5.3.4	<i>RIN</i> d'ordre 2 . . . . .	134

5.3.5	<i>RIN</i> total . . . . .	139
5.3.6	<i>RIN</i> d'ordres supérieurs . . . . .	140
5.4	La mesure du bruit d'intensité . . . . .	141
5.4.1	Mesure du bruit thermique . . . . .	142
5.4.2	Estimation du <i>shot noise</i> . . . . .	143
5.5	<i>RIN</i> d'un laser WGM . . . . .	144
5.5.1	Monomode v.s. multimode . . . . .	145
5.5.2	Pompe monomode v.s. pompe multimode . . . . .	148
5.5.3	Couplage par taper . . . . .	148
5.5.4	Couplage par pointe effilée . . . . .	154
5.6	Conclusion . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Couplage de modes par rétrodiffusion</b>	<b>159</b>
6.1	Position du problème . . . . .	161
6.2	Modèle analytique du couplage par rétrodiffusion dans un laser à trois niveaux . . . . .	162
6.2.1	Equations d'évolutions . . . . .	162
6.2.2	Description du milieu atomique . . . . .	164
6.2.3	Inversion de population . . . . .	164
6.2.4	Deux systèmes d'équations pour décrire le laser . . . . .	165
6.3	Modèles simplifiés . . . . .	167
6.3.1	Absence de rétrodiffusion et de réseau d'inversion de population	168
6.3.2	Effets du réseau d'inversion de population en l'absence de rétrodiffusion . . . . .	168
6.3.3	Effets de la rétrodiffusion . . . . .	171
6.4	Régimes de fonctionnement du laser soumis à rétrodiffusion . . . . .	173
6.4.1	Définition du seuil laser . . . . .	174
6.4.2	Premier régime stationnaire : monomode unidirectionnel . . . . .	174
6.4.3	Régime non-stationnaire : automodulation . . . . .	176
6.4.4	Second régime stationnaire : bidirectionnel . . . . .	177
6.5	Rétrodiffusion dans un laser WGM en verre oxyde co-dopé Erbium/Ytterbium	178
6.5.1	Résultats préliminaires . . . . .	178
6.5.2	Corrélations entre les signaux co- et contra-propagatifs . . . . .	180
6.6	Rétrodiffusion dans un laser WGM en verre fluoré dopé Erbium . . . . .	192
6.7	Conclusion sur l'étude du couplage de mode par rétrodiffusion . . . . .	196

<b>Conclusion</b>	<b>199</b>
<b>A Détails des calculs de rétrodiffusion</b>	<b>201</b>
A.1 laser sous le seuil	202
A.2 Régime d'émission unidirectionnel	205
A.2.1 Hypothèses de départ	205
A.2.2 Densité moyenne d'inversion de population $\bar{N}$	205
A.2.3 Intensité normalisée du mode laser prédominant $E_1$	205
A.2.4 Harmonique à $2k$ de la densité d'inversion de population $\mathcal{N}_1$	206
A.2.5 Différence des phases $\Phi$	206
A.2.6 Amplitude du mode atténué	207
A.2.7 Bilan	207
A.2.8 Valeur limite de $\gamma$	207
A.3 Régime d'auto-modulation	208
A.3.1 Hypothèses de départ	208
A.3.2 Valeurs stationnaires des densités d'inversion de population	209
A.3.3 Modification des équations du laser et introduction de nouvelles variables	210
A.3.4 Equations d'évolution de $Y_0$ et $X_0$	211
A.3.5 Fréquence instantannée	212
A.3.6 Contraste de modulation	212
A.3.7 Bilan	213
A.4 Régime d'émission bidirectionnelle verrouillée en fréquence	213
A.4.1 Hypothèses de départ	213
A.4.2 Calculs avec le coefficient complexe $\tilde{\gamma}$	215
A.4.3 Valeurs stationnaires des densités d'inversion de population	215
A.4.4 Valeur stationnaire de la différence des phases $\Phi$	216
A.4.5 Valeur stationnaire de la somme des intensités normalisées $Y$	216
A.4.6 Valeur stationnaire de la différence des intensités normalisées $X$	217
A.4.7 Retour sur les densités d'inversion de population	218
A.4.8 Bilan	218
<b>Bibliographie</b>	<b>219</b>



# Introduction

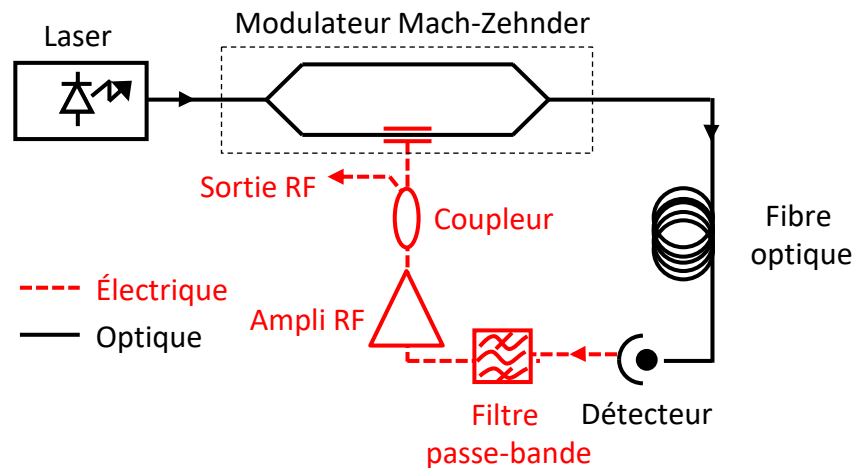
Du fait du nombre croissant d'applications utilisant la bande des radio-fréquences ( $RF$ , de  $9\text{ kHz}$  à  $300\text{ GHz}$ ) du spectre électromagnétique (trafic amateur, liaisons sans fil satellitaires, *GPS*, *GSM*, *Wi-Fi*, *4G*, ...), les sources micro-ondes de très haute pureté spectrale et de très grande stabilité temporelle sont très demandées. Parallèlement, les architectures classiques d'oscillateurs électroniques ont atteint leurs limites. L'utilisation de l'optique dans ces oscillateurs permet de lever ces verrous et d'atteindre des performances bien supérieures à celles de l'électronique analogique et numérique. Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit concernent l'élaboration d'une source micro-onde par voie optique en utilisant un micro-résonateur à modes de galerie (*Whispering gallery mode - WGM*). Pour cette application, deux architectures sont possibles :

- celle de l'oscillateur opto-électronique ( $O^2E$ ) où la ligne à retard est constituée d'un micro-résonateur de haut facteur de qualité
- celle où deux lasers "indépendants" sont combinés pour générer un signal micro-onde par photomélangement

Des modèles d' $O^2E$  ont été proposés par X. Yao et L. Maleki [1–4] à partir des années 1990 dans lesquels le signal  $RF$  module le signal optique et la boucle de contre-réaction est une fibre optique, comme présenté sur la Figure 1. Nous notons  $\tau$  le retard introduit par la propagation dans la fibre optique. Le facteur de qualité du signal micro-onde est directement proportionnel à  $\tau$  :

$$Q_{RF} = \frac{f_{RF}}{\Delta f_{RF}} = \pi\tau f_{RF} \quad (1)$$

où  $f_{RF}$  est la fréquence micro-onde et  $\Delta f_{RF}$  sa largeur spectrale. Ainsi, plus le retard  $\tau$  sera élevé, plus l'oscillateur  $RF$  sera spectralement pur. Toutefois, l'utilisation de la fibre optique présente ses limites. Pour des retards  $\tau$  suffisamment élevés, l'amplitude décroît à cause des pertes dans la fibre (absorption, diffusion, ...) et la fibre capte toutes les sources de bruit environnemental (vibrations mécaniques, acoustiques, température,...), ce qui rend l'asservissement de plus en plus contraignant. De plus, la fibre

FIGURE 1 – Architecture d'un O<sup>2</sup>E.

optique n'agit pas comme un filtre très sélectif. L'idée est alors de remplacer la fibre optique par un résonateur induisant un retard équivalent [5–7]. Le facteur de qualité de l'oscillateur s'écrit alors comme :

$$Q_{RF} = Q_{opt} \times \frac{f_{RF}}{f_{opt}} \quad (2)$$

où  $Q_{opt}$  est le facteur de qualité du résonateur optique et  $f_{opt}$  la fréquence d'émission du laser. Dans cette configuration, la modulation par un signal micro-onde génère deux bandes latérales de part et d'autre du spectre optique. La fonction de transfert du résonateur doit nécessairement conserver ces bandes latérales, autrement dit la fréquence micro-onde  $f_{RF}$  doit être un multiple entier de l'intervalle spectral libre du résonateur. Enfin, cette configuration offre davantage de liberté sur le choix de  $f_{RF}$ , notamment pour obtenir un facteur de qualité  $Q_{RF}$  le plus élevé possible. Le CNES s'intéresse aux oscillateurs ultra-stables pour les horloges. Il s'est fixé comme objectif<sup>1</sup> d'obtenir une solution alternative aux oscillateurs à quartz et présentant un bruit de fréquence de  $-70 \text{ dBrad}^2/\text{Hz}$  à 1 Hz de la porteuse, ramené à 10 GHz.

Une deuxième méthode de génération opto-hyper communément utilisée repose sur le battement entre deux lasers décalés en fréquence et potentiellement indépendants [3]. La fréquence d'émission du premier est notée  $\nu_1$  et celle du second  $\nu_2$ . Chaque laser possède son propre bruit de phase, contenu dans le terme  $\phi_p(t)$  avec  $p = \{1, 2\}$ , comme présenté sur la Figure 2. Afin de minimiser le bruit de phase du signal RF, les signaux doivent avoir les mêmes bruits de phase, autrement dit être sensible aux

1. C'est le but à long terme du projet Shyro (Sources hyperfréquences à très haute pureté spectrale à base de mini-résonateurs optiques). Plus d'informations sur le wiki : <https://wiki.univ-rennes1.fr/foton/doku.php?id=projets:shyro:accueil>

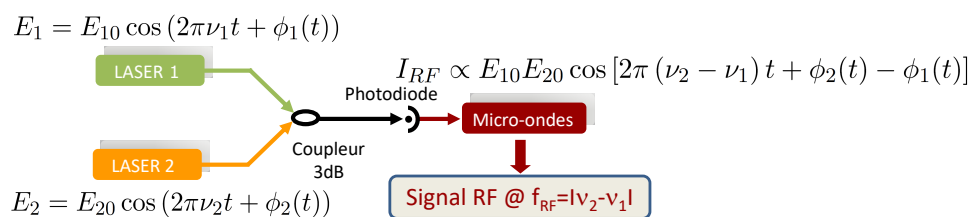


FIGURE 2 – Principe du battement RF entre deux lasers décalés en fréquence.

mêmes fluctuations. Ceci n'est possible que lorsque ces deux signaux sont issus de la même cavité : les fluctuations thermiques et mécaniques de l'ensemble vont induire une gigue en fréquence identique sur les deux modes laser. Cependant, cette configuration peut présenter de la compétition de mode puisque les modes puisent dans un milieu à gain commun au même milieu. Ainsi, il serait plus adéquat de parler d'architecture du laser "doublement monomode" où les efforts sont consacrés à minimiser la compétition et à rendre les deux modes indépendants. Les travaux de F. Bretenaker et A. Le Floch [8] en 1990 basés sur la résolution spatiale de deux modes de polarisation orthogonaux via l'angle de *walk-off* ont permis l'élaboration de source micro-ondes accordables jusqu'au THz [9–11]. Pour nos expériences, nous utilisons la symétrie sphérique du résonateur WGM pour obtenir deux effets lasers couplés suivant deux équateurs différents. Sur ce principe, L. Xiao *et al.* ont obtenu en 2009 un signal micro-onde à 10 GHz et de 22 kHz de largeur spectrale [12–14]. Le signal obtenu a montré une dérive inférieure à 300 kHz ainsi que des fluctuations de puissance de l'ordre de 1 dB pour un fonctionnement non asservi pendant 30 min. Ces résultats doivent cependant être complétés par des mesures de bruit d'intensité et de fréquence du signal micro-onde, ce qui passe nécessairement par l'évaluation de ces bruits dans le domaine optique et sur chaque mode laser. C'est donc autour de la dynamique du laser WGM que ces travaux de recherche s'inscrivent.

Les micro-résonateurs WGM sont des structures à symétrie cylindrique ou sphérique où la réflexion totale interne le long d'une paroi incurvée permet de stocker l'énergie pendant une longue durée. A partir des travaux de Mie [15, 16] et de Lord Rayleigh [17, 18] sur les propriétés optiques de ces modes de propagation, les micro-résonateurs WGM sont de plus en plus utilisés et leur propriété de confinement de la lumière mise à profit pour l'étude d'effets non-linéaires à partir des années 1990 [19]. Ces résonateurs ont évidemment suscité l'intérêt de l'étude de l'effet laser au sein de telles structures, notamment les travaux pionniers de C. Garret *et al.* [20] en 1961 portant sur l'émission stimulée dans un cristal de  $CaF_2$  dopé aux ions Samarium suivi par H.M. Tzeng *et al.* [21] en 1984 où l'effet laser est obtenu dans des micro-gouttes



d'éthanol et de rhodamine. Aujourd'hui, on trouve des lasers WGM dans diverses géométries (sphère [22,23], micro-disque [24–26] ou sphéroïde tronqué [27]) en semi-conducteur (*InGaAsP*, *InGaAs*, *InGaN*) ou en matériaux dopés aux ions de terres rares (*SiO<sub>2</sub>*, *CaF<sub>2</sub>*, *MgF<sub>2</sub>*, *ZBLAN*, *ZBLALiP* dopés *Er*, *Yb*, *Nd*,...). La grande variété des résonateurs WGM et des systèmes de couplage a permis d'observer des phénomènes dépendant des matériaux utilisés et dont les performances sont aujourd'hui bien comprises. Sandoghdar *et al.* ont ainsi obtenu en 1996 un laser WGM dans une micro-sphère en silice dopée aux ions Neodyme et présentant un seuil laser de 200 nW [22]. Lin et Campillo [28] ont réalisé un micro-laser Raman dans des micro-gouttes de disulfite de carbone avec seulement 3 photons de pompe. Outre l'aspect fondamental de ces résonateurs, ils peuvent également servir de capteur biochimique [29–31], de température [32,33] ou mécanique [34–36]. Cependant, dans toutes ces applications, le bruit intrinsèque au résonateur est une limite incontournable. Dans le cas d'un capteur basé sur l'effet laser, ce bruit est défini par le bruit relatif d'intensité (*Relative Intensity Noise - RIN*), densité spectrale des fluctuations du laser en excès par rapport à une source poissonnienne de même puissance, *i.e.* bruit au dessus du bruit quantique. Cependant, la dynamique du laser WGM est encore peu étudiée, que ce soit dans des structures semi-conductrices ou de terres rares en matrice cristalline ou vitreuse.

Ce manuscrit s'organise en six chapitres :

Le chapitre 1 s'attache à décrire les résonateurs dopés Erbium de façon générale en prenant comme modèle le résonateur en anneau monomode et en utilisant deux formalismes distincts. Les paramètres importants tels que les facteurs de qualité et les temps caractéristiques sont définis ainsi que les propriétés spectroscopiques des verres utilisés et le processus de fabrication des micro-sphères.

Le chapitre 2 est une étude théorique sur les résonateurs WGM. Les calculs effectués amènent à différentes expressions du spectre WGM et du volume de mode.

Le chapitre 3 présente les différentes contributions au facteur de qualité du micro-résonateur ainsi que le système de couplage utilisé dans les expériences que j'ai menées.

Le chapitre 4 est un chapitre de généralités sur l'effet laser dans un système atomique à trois niveaux et de classe B. Nous y développons les équations d'évolution qui nous

serviront par la suite.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude du *RIN* d'un laser *WGM* du point de vue théorique et expérimental dans diverses configurations de couplage et de pompe. Le modèle théorique propose une nouvelle approche du *RIN* d'un laser de classe B.

Le chapitre 6 est dédié aux expériences de couplage par rétrodiffusion dans un laser *WGM*. Après avoir rappelé les régimes de fonctionnement, basés sur le gyro-laser à l'état solide, nous présentons les mesures de corrélation entre les signaux co- et contre-propagatifs couplés dans deux types de cavités laser *WGM*.



# Chapitre 1

## Description d'un résonateur en verre dopé aux ions Erbium

### Sommaire

---

<b>1.1 Description d'un résonateur</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1.1 Fonction de transfert d'un résonateur . . . . .	9
1.1.1.1 Approche matricielle . . . . .	9
1.1.1.2 Approche temporelle . . . . .	12
1.1.1.3 Lien entre les deux approches . . . . .	14
1.1.2 Les différents régimes de couplage . . . . .	16
1.1.3 Puissance intra-cavité . . . . .	17
1.1.4 Couplage de résonateurs . . . . .	19
1.1.4.1 Approche temporelle . . . . .	19
1.1.4.2 Approche matricielle . . . . .	22
1.1.5 Conclusion . . . . .	25
<b>1.2 Propriétés spectroscopiques de l'ion Erbium</b> . . . . .	<b>25</b>
1.2.1 Spectroscopie de l'ion Erbium $Er^{3+}$ . . . . .	25
1.2.1.1 Éléments de Physique atomique . . . . .	26
1.2.1.2 Mécanismes d'élargissement d'une transition électronique . . . . .	27
1.2.2 Ion Erbium en matrice vitreuse . . . . .	30
1.2.2.1 Verre fluoré : ZBLALiP . . . . .	30
1.2.2.2 Verre oxyde : IOG-1 . . . . .	36

<b>1.3</b>	<b>Fabrication des micro-sphères en verre</b>	<b>39</b>
1.3.1	Fusion de poudre de verre à la torche plasma	39
1.3.2	Collage de micro-sphère sur piédestal	40

---

Depuis 1997, le laboratoire Foton étudie les micro-résonateurs à mode de galerie, que ce soit en régime laser [23, 37, 38], pour des applications en optique non-linéaire [39, 40] ou en optique hyper-fréquence [14]. Pour décrire ces résonateurs, une première approche consiste à utiliser le modèle du résonateur en anneau. La première section décrit brièvement les propriétés de ces résonateurs, en régime actif et passif. La deuxième section présente les propriétés des ions Erbium, dopant principal de nos expériences, insérés dans une structure vitreuse. Enfin, la troisième section est dédiée au processus de fabrication des micro-sphères en verre dopé aux ions Erbium.

## 1.1 Description d'un résonateur

Dans cette section, nous décrivons les résonateurs ainsi que leurs propriétés importantes telles que le facteur de qualité, la finesse ou encore les temps caractéristiques. Deux approches sont possibles pour décrire un résonateur en anneau couplé à une ligne d'accès : une première approche matricielle - ou harmonique - utilisant le formalisme des fonctions de transfert [41], et une approche temporelle [42] basée sur l'oscillateur harmonique amorti. A partir de ces études, nous établissons les différents régimes de fonctionnement du résonateur en fonction des valeurs relatives des temps caractéristiques. Enfin, nous réalisons une étude similaire en considérant deux résonateurs en anneaux identiques couplés entre eux, ce dernier modèle est appliqué au cas d'un résonateur en anneau unique soumis à rétrodiffusion Rayleigh.

### 1.1.1 Fonction de transfert d'un résonateur

#### 1.1.1.1 Approche matricielle

Cette approche a été développée par A. Yariv [41] et permet de connaître la réponse d'un système (ici optique) à une entrée sinusoïdale dont la pulsation  $\omega$  est fixée.

#### Description de l'ensemble

Un résonateur en anneau (Fig. 1.1) de rayon  $a$  est couplé à une ligne d'accès, tous les deux supposés monomodes et unidirectionnels.  $\underline{\alpha}$  est l'atténuation du champ sur un tour de cavité telle que  $\underline{\alpha} = e^{-\alpha L}$  où  $\alpha$  est l'atténuation linéique (en  $m^{-1}$ ) et  $L = 2\pi a$  le périmètre du résonateur.  $E_{in}$  et  $E_{out}$  sont respectivement les champs électriques en entrée et sortie de ligne d'accès,  $E_1$  est le champ couplé de la ligne d'accès vers le résonateur et  $E_2$  est le champ intra-cavité après un tour. Nous notons  $\varphi = N\omega L/c$  le déphasage acquis sur un tour de cavité avec  $N$  l'indice du matériau constituant le

résonateur,  $\omega$  la pulsation du champ électrique  $E_{in}$  et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide,  $\rho$  et  $\kappa$  caractérisent le couplage entre le guide d'accès et la cavité.

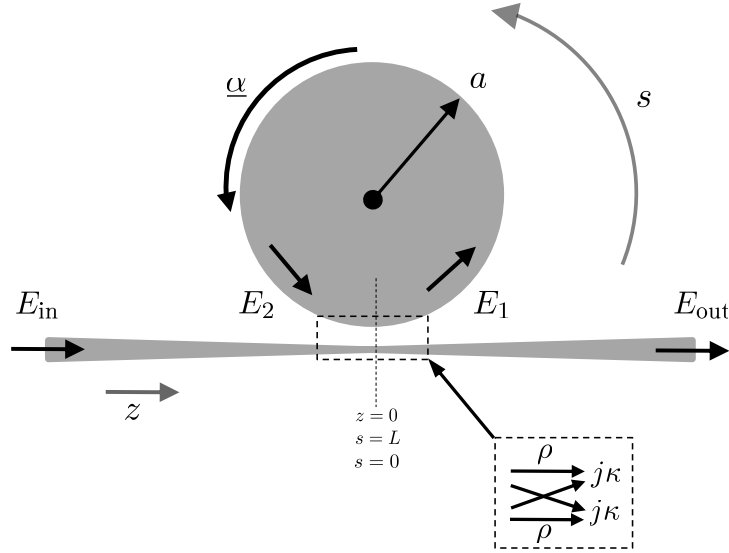


FIGURE 1.1 – Schéma d'un résonateur en anneau couplé à une ligne d'accès.

Les champs sont reliés ensemble en considérant la matrice de transfert du coupleur :

$$\begin{pmatrix} E_{out} \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & j\kappa \\ j\kappa & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{in} \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

ainsi que le déphasage acquis après propagation sur une distance  $L$  :

$$E_2 = \underline{\alpha} E_1 e^{j\varphi} \quad (1.2)$$

En supposant que le coupleur ne présente aucune perte ( $\kappa^2 + \rho^2 = 1$ ), la fonction de transfert  $\mathcal{H}(\omega)$  s'exprime alors comme :

$$\mathcal{H}(\omega) = \sqrt{T(\omega)} e^{j\Psi(\omega)} = \frac{\rho - \underline{\alpha} e^{j\varphi(\omega)}}{1 - \underline{\alpha}\rho e^{j\varphi(\omega)}} \quad (1.3)$$

où  $T(\omega)$  est la fonction de transfert en intensité :

$$T(\omega) = \frac{\rho^2 + \underline{\alpha}^2 - 2\underline{\alpha}\rho \cos \varphi(\omega)}{1 + \underline{\alpha}^2\rho^2 - 2\underline{\alpha}\rho \cos \varphi(\omega)} \quad (1.4)$$

La Figure 1.2 représente le spectre de la fonction de transfert en intensité  $T$  pour différentes valeurs du couple  $\{\underline{\alpha}, \rho\}$ . Cette fonction  $T$  peut être mesurée expérimentalement. Nous remarquons (Fig. 1.2) que  $T$  s'apparente à une fonction d'Airy et présente un spectre de résonances espacées d'un intervalle spectral libre  $\Delta\omega = 2\pi/\tau_L$  avec

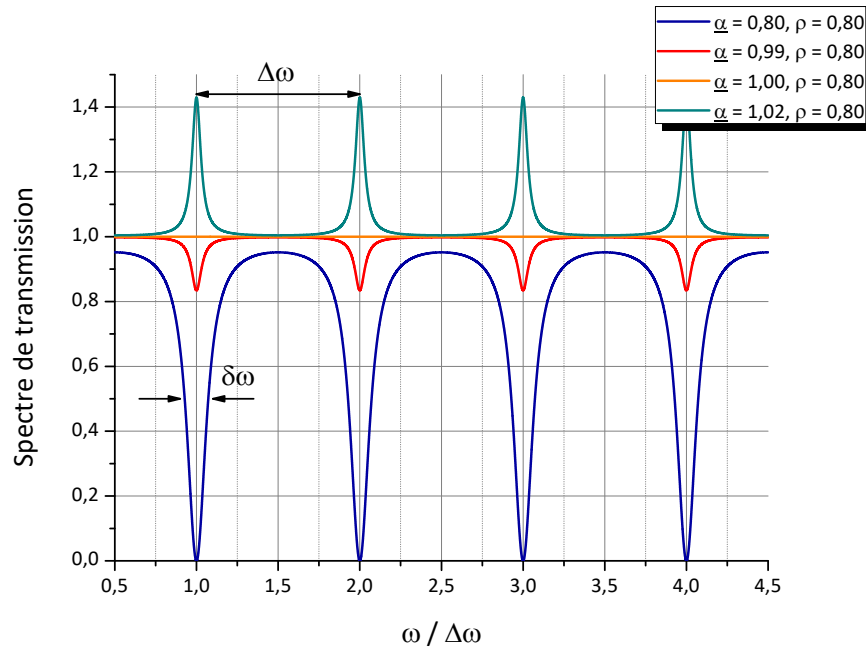


FIGURE 1.2 – Fonction de transfert en intensité  $T(\omega)$  d'un résonateur en anneau pour différents couples  $\{\underline{\alpha}, \rho\}$

$\tau_L = N_g L / c$  le temps de parcours dans l'anneau et  $N_g = \left[ N(\omega) + \frac{\partial N}{\partial \omega} \omega \right] \Big|_{\omega_0}$  l'indice de groupe à  $\omega_0$ .

Trois cas sont à distinguer en fonction de la valeur de  $\underline{\alpha}$  :

- $\underline{\alpha} < 1$  : le résonateur présente des pertes, la fonction de transmission s'apparente à une fonction d'Airy avec des creusements spectraux aux résonances. Ces dernières sont plus ou moins étroites et profondes en fonction de la valeur relative de  $\rho$  devant  $\underline{\alpha}$ . Le contraste est maximal lorsque  $\underline{\alpha} = \rho$  et, dans ce cas là, la transmission à résonance  $T(\omega_0 + k\Delta\omega)$  s'annule.
- $\underline{\alpha} = 1$  : le résonateur ne présente aucune perte, la fonction de transmission est constante (égale à 1) quelle que soit la pulsation  $\omega$ . Le résonateur agit alors comme un déphaseur pur, à l'instar de l'interféromètre de Gires-Tournois [43].
- $\underline{\alpha} > 1$  : le résonateur présente du gain, la fonction de transmission s'apparente à une fonction d'Airy avec des pics aux résonances. Le résonateur agit comme un amplificateur sélectif.

A partir du spectre de transmission au voisinage d'une résonance, il est possible d'ob-



tenir la largeur à mi-hauteur de celle-ci :

$$\delta\omega = \frac{2c(1 - \underline{\alpha}\rho)}{N_g L \sqrt{\underline{\alpha}\rho}} \quad (1.5)$$

La finesse  $\mathcal{F}$  d'une cavité est définie par :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} = \frac{\pi\sqrt{\underline{\alpha}\rho}}{1 - \underline{\alpha}\rho} \quad (1.6)$$

ainsi que le facteur de qualité  $Q$  :

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega} = \frac{N_g L}{\lambda_0} \mathcal{F} \quad (1.7)$$

que l'on peut écrire en fonction du temps de parcours de cavité  $\tau_L$  :

$$Q = \omega_0 \frac{\tau_L}{2} \left( \frac{\sqrt{\underline{\alpha}\rho}}{1 - \underline{\alpha}\rho} \right) \quad (1.8)$$

$\mathcal{F}$  représente le nombre de tours effectués par les photons dans la cavité avant d'en sortir tandis que  $Q$  est le rapport entre l'énergie stockée sur l'énergie perdue par cycle. Le facteur de qualité  $Q$  d'une cavité couplée est directement reliée au couplage à la ligne d'accès ( $\rho$ ) ainsi qu'au terme de gain ou de pertes ( $\underline{\alpha}$ ). Plus la portion du signal se couplant au résonateur est faible, plus  $\rho$  tend vers 1. De plus, pour des résonateurs présentant de faibles pertes, le produit  $\underline{\alpha}\rho$  tend également vers 1. Lorsque cette propriété est vérifiée, le dénominateur de l'équation 1.8 tend vers 0, exaltant d'autant le facteur de qualité  $Q$  de la résonance.

### 1.1.1.2 Approche temporelle

Cette approche utilise le modèle décrit par H. A. Haus [42]. L'ensemble est constitué d'une cavité couplée à une ligne d'accès.  $s_{in}(t)$  est le signal en entrée de ligne couplée ponctuellement au résonateur avec un temps de vie caractéristique  $\tau_e$ .  $u(t)$  est le champ intra-cavité et  $s_{out}(t)$  est le signal en sortie de ligne. Au temps de vie du couplage  $\tau_e$  nous adjoignons un temps de vie intrinsèque  $\tau_0$  correspondant à l'atténuation ou le gain du champ intra-cavité.  $s_{in}$ ,  $s_{out}$  et  $u$  sont normalisés de telle sorte que  $|s|^2$  soit homogène à une **puissance** tandis que  $|u|^2$  représente l'**énergie** intra-cavité. Les champs présentent une dépendance en  $e^{-j\omega t}$ .

Le champ intra-cavité  $u$  obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{du}{dt} = \left( -j\omega_0 - \frac{1}{2\tau_p} \right) u(t) + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} s_{in}(t) \quad (1.9)$$

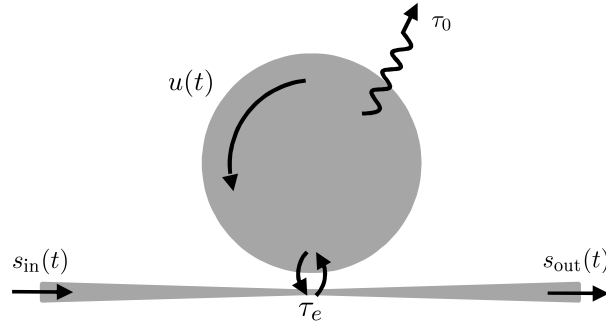


FIGURE 1.3 – Schéma d'une cavité sphérique couplée à une ligne d'accès, définition des "champs"  $u(t)$ ,  $s_{in}(t)$ ,  $s_{out}(t)$  et des temps de vie intrinsèque  $\tau_0$  et extrinsèque  $\tau_e$ .

où  $\tau_p$  est le temps de vie des photons. Il dépend des temps de vie caractéristiques du champ  $\tau_e$  et  $\tau_0$  par la relation suivante :

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{2}{\tau_e} + \frac{2}{\tau_0} \quad (1.10)$$

Enfin,  $s_{out}$  s'exprime en fonction de  $s_{in}$  et  $u$  comme :

$$s_{out}(t) = -s_{in}(t) + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} u(t) \quad (1.11)$$

### Facteurs de qualité

La relation 1.10 permet de relier le facteur de qualité global  $Q$  à deux grandeurs,  $Q_0$  et  $Q_e$  :

$$Q^{-1} = Q_e^{-1} + Q_0^{-1} \quad (1.12)$$

avec :

$$Q = \omega_0 \tau_p \quad (1.13)$$

$$Q_0 = \omega_0 \tau_0 / 2 \quad (1.14)$$

$$Q_e = \omega_0 \tau_e / 2 \quad (1.15)$$

$Q_0$  et  $Q_e$  sont respectivement les facteurs de qualité intrinsèque et dû au couplage. Ils représentent le facteur de qualité global  $Q$  dans les cas asymptotiques où le résonateur est limité par ses pertes internes ( $\tau_e^{-1} = 0$ ) et lorsque les pertes internes du résonateur sont négligeables devant la fuite d'énergie par la ligne d'accès ( $\tau_0^{-1} = 0$ ).

### Solution stationnaire, fonction de transfert

La solution stationnaire de l'équation 1.9 permet d'exprimer la fonction de transfert  $\mathcal{H}_T$  comme :

$$\mathcal{H}_T(\Omega) = \frac{s_{\text{out}}}{s_{\text{in}}} = \sqrt{T(\Omega)} e^{j\Psi(\Omega)} \quad (1.16)$$

où  $\Omega = \omega - \omega_0$  est le désaccord à résonance.  $T(\Omega)$  et  $\Psi(\Omega)$  sont respectivement les fonctions de transfert en intensité et en phase.  $T$  s'écrit comme :

$$T(\Omega) = \frac{\left(\frac{1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_0}\right)^2 + \Omega^2}{\left(\frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_0}\right)^2 + \Omega^2} \quad (1.17)$$

La Figure 1.4 représente la fonction de transfert  $T(\Omega)$  pour différentes valeurs du rapport  $\tau_0/\tau_e$  autour d'une résonance  $\omega_0$ . On remarque que selon la valeur de  $\tau_0/\tau_e$ , la résonance considérée est plus ou moins large et contrastée. En effet, la transmission à résonance  $T(\Omega = 0)$  s'exprime comme :

$$T(\Omega = 0) = \left(\frac{\tau_e - \tau_0}{\tau_e + \tau_0}\right)^2 \quad (1.18)$$

tandis que la largeur totale à mi hauteur  $\delta\omega$  des résonances est telle que :

$$\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e}\right)^2 + \left(\frac{\delta\omega}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_e}\right)^2 \quad (1.19)$$

soit :

$$\delta\omega = \frac{1}{\tau_p} \quad (1.20)$$

Plus le temps passé par les photons dans la cavité est important, plus la résonance est étroite.

### 1.1.1.3 Lien entre les deux approches

On établit un lien formel entre les deux approches précédemment considérées en comparant les largeurs à mi-hauteur dans les deux cas :  $\delta\omega = 1/\tau_p$  dans l'approche temporelle et  $\delta\omega = \frac{2}{\tau_L} \left(\frac{1 - \alpha\rho}{\sqrt{\alpha\rho}}\right)$  dans l'approche matricielle. Le facteur de qualité global  $Q$  permet de lier ces deux approches en posant :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega_0\tau_p} = \frac{2}{\omega_0\tau_L} \left(\frac{1 - \alpha\rho}{\sqrt{\alpha\rho}}\right) \quad (1.21)$$

$1 - \alpha\rho$  se développe comme :

$$1 - \alpha\rho = (1 - \underline{\alpha}) \left[1 - \frac{1}{2}(1 - \rho)\right] + (1 - \rho) \left[1 - \frac{1}{2}(1 - \underline{\alpha})\right] \quad (1.22)$$

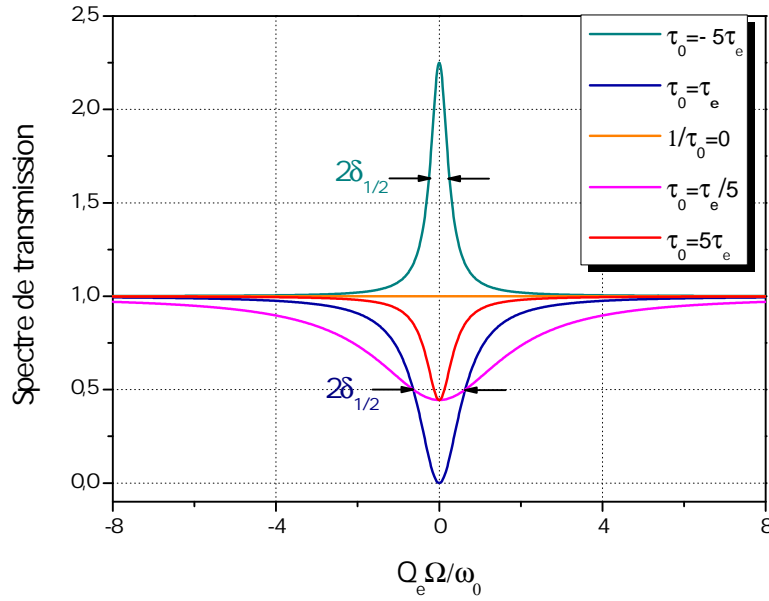


FIGURE 1.4 – Spectre de transmission  $T(\Omega)$  autour d'une résonance pour différentes valeurs de  $\tau_0/\tau_e$ .

On reconnaît dans l'expression 1.22 les développements limités de  $\sqrt{\underline{\alpha}}$  et  $\sqrt{\underline{\rho}}$  au premier ordre autour de 1. Cela revient à considérer que  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\rho}$  sont très proches de 1, ce qui est l'hypothèse fondamentale du développement de H. Haus [42] (résonateurs de grande finesse). Il vient alors :

$$\frac{1}{Q} \simeq \frac{2}{\omega_0 \tau_L} \left[ \frac{(1 - \underline{\alpha}) \sqrt{\underline{\rho}}}{\sqrt{\underline{\alpha} \underline{\rho}}} + \frac{(1 - \underline{\rho}) \sqrt{\underline{\alpha}}}{\sqrt{\underline{\alpha} \underline{\rho}}} \right] \quad (1.23)$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{Q} \simeq \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e} \quad (1.24)$$

avec :

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1 - \underline{\alpha}}{\sqrt{\underline{\alpha}}} \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1 - \underline{\rho}}{\sqrt{\underline{\rho}}} \quad (1.26)$$

$Q_0$  et  $Q_e$  sont respectivement les facteurs de qualité *intrinsèque* et *extrinsèque* (ou de couplage). Ils correspondent au facteur de qualité global  $Q$  (eq. 1.21) dans les cas particuliers respectifs d'un résonateur limité par ses pertes internes  $Q_0$  ( $\underline{\rho} = 1$ ) et d'un résonateur limité par le couplage  $Q_e$  ( $\underline{\alpha} = 1$ ). Il convient néanmoins de noter que le

lien entre les deux approches n'est que formel puisque le modèle de Haus ne prend pas en compte le temps de propagation dans le résonateur  $\tau_L$ <sup>1</sup>.

### 1.1.2 Les différents régimes de couplage

La valeur relative des pertes externes  $\tau_e$  par rapport aux pertes internes  $\tau_0$  permet de définir différents comportements de la fonction de transfert en intensité, comme nous l'avons remarqué sur la Figure 1.4. A partir de l'expression 1.18, on peut tracer l'évolution de la fonction de transfert en intensité à résonance  $T(\Omega = 0)$  en fonction de  $\tau_e/\tau_0$ , comme illustré sur la Figure 1.5.

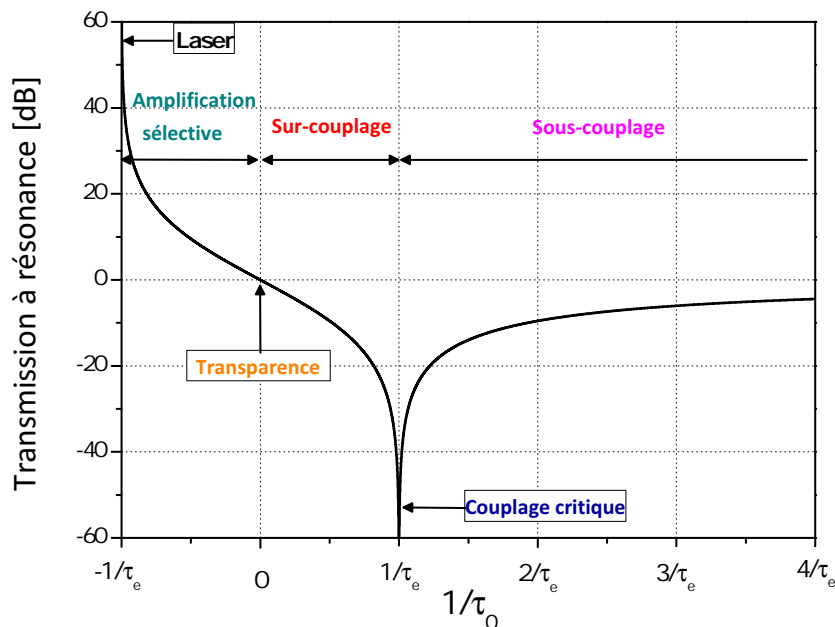


FIGURE 1.5 – Transmission à résonance  $T(\Omega = 0)$  pour différentes valeurs de  $\tau_0/\tau_e$ , définition des régimes de couplages.

On distingue 6 régimes distincts :

#### 1. Sous-couplage

Ce régime est défini par  $\tau_e > \tau_0$ , autrement dit  $Q_e > Q_0$  : les pertes du système coupleur/résonateur sont gouvernées par celles du résonateur (pertes intrinsèques). La courbe  $\tau_e = 5\tau_0$  de la Figure 1.4 présente un exemple de ce régime

1. Dans le modèle de Haus, les couplages de  $s_{in}$  vers  $u$  et de  $u$  vers  $s_{out}$  sont considérés comme instantanés, ce qui n'est pas vraiment le cas puisque  $u$  se propage dans le résonateur pendant  $\tau_L$  avant de se coupler à  $s_{out}$ .

de couplage. La transmission à résonance (eq. 1.18) est telle que  $0 < T(0) < 1$  (voir Fig. 1.5).

## 2. Couplage critique

Ce régime est défini par  $\tau_e = \tau_0$ , autrement dit  $Q_e = Q_0$  : les pertes internes sont exactement égales aux pertes de la ligne d'accès. Le champ interne couplé en sortie de ligne d'accès et le champ incident initial transmis s'annulent par interférences destructives, si bien que la transmission à résonance (Fig. 1.5) est telle que  $T(0) = 0$  : c'est le régime où les résonances sont les plus contrastées en régime passif.

## 3. Sur-couplage

Ce régime est défini par  $\tau_e < \tau_0$ , autrement dit  $Q_e < Q_0$  : les pertes du système coupleur/résonateur sont gouvernées par celles du coupleur (pertes extrinsèques). La courbe  $\tau_0 = 5\tau_e$  de la Figure 1.4 présente un exemple de ce régime de couplage. La transmission à résonance (Fig. 1.5) est telle que  $1 > T(0) > 0$ . Ce régime est le cas inverse du sous-couplage.

## 4. Transparence

Ce régime est défini par  $\tau_0^{-1} = 0$ , autrement dit  $Q = Q_e$  : le résonateur ne présente pas de pertes internes, le seul terme de pertes est dû au couplage. La transmission est constante quelle que soit la pulsation et vaut 1 (Fig. 1.4) : c'est un système purement déphasant (interféromètre de Gires-Tournois).

## 5. Amplification sélective

Ce régime est caractérisé par  $-\tau_e^{-1} < \tau_0^{-1} < 0$ . C'est une situation où le gain compense les pertes internes de la cavité mais ne compense pas la totalité des pertes. La transmission à résonance  $T(0)$  est supérieure à 1 (Fig. 1.5).

## 6. Régime laser

Ce régime est caractérisé par  $\tau_0^{-1} < -\tau_e^{-1} < 0$  : le gain intra-cavité compense à la fois les pertes internes et les pertes externes. Le seuil laser correspond à  $\tau_0 = -\tau_e$ . La transmission diverge (Fig. 1.5) et le modèle développé ici n'est plus valable. Les chapitres 4, 5 et 6 sont dédiés à développer ce régime d'émission et la dynamique qui l'accompagne.

### 1.1.3 Puissance intra-cavité

Avec nos conventions de la section 1.1.1,  $E_{in}$  est le champ en entrée de ligne d'accès et  $E_2$  est le champ intra-cavité après un tour de cavité (cf Figure 1.1). Ces deux quantités

sont reliées par la relation :

$$\frac{E_2}{E_{\text{in}}} = \frac{j\kappa\underline{\alpha}e^{j\varphi(\omega)}}{1 - \underline{\alpha}\rho e^{j\varphi(\omega)}} \quad (1.27)$$

Le facteur d'exaltation  $\mathcal{B}$  est défini comme le quotient de la puissance intra-cavité sur la puissance d'entrée<sup>2</sup> :

$$\mathcal{B}(\omega) = \left| \frac{E_2}{E_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{\underline{\alpha}^2 (1 - \rho^2)}{1 + \underline{\alpha}^2 \rho^2 - 2\underline{\alpha}\rho \cos(\varphi(\omega))} \quad (1.28)$$

A résonance,  $\mathcal{B}$  est maximal et vaut :

$$\mathcal{B}(\omega_0) = \frac{\underline{\alpha}^2 (1 - \rho^2)}{(1 - \underline{\alpha}\rho)^2} \quad (1.29)$$

Lorsque  $\underline{\alpha} \rightarrow 1$ , on peut écrire :

$$\mathcal{B}(\omega_0) \simeq \frac{1 + \rho}{1 - \underline{\alpha}\rho} \simeq \frac{2}{1 - \underline{\alpha}\rho} = \frac{4\tau_P}{\tau_L} \quad (1.30)$$

Lorsque  $\rho \rightarrow 1$ ,  $\mathcal{B}(\omega_0)$  s'identifie à la finesse par :

$$\mathcal{B}(\omega_0) \simeq \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \quad (1.31)$$

Ainsi, plus la finesse  $\mathcal{F}$  du résonateur considéré est grande, plus la densité de puissance à l'intérieur du résonateur est importante, donnant lieu à l'apparition d'effets non linéaires. Ceci n'a lieu que lorsque le terme  $\underline{\alpha}\rho$  est proche de 1 : la divergence du dénominateur de  $\mathcal{B}(\omega_0)$  exalte la densité de puissance intra-cavité. Cette dernière est maximale lorsque le temps de stockage des photons  $\tau_P$  est long et le temps de parcours de la cavité  $\tau_L$  est court. Il est donc nécessaire, pour obtenir une grande finesse, d'avoir un intervalle spectral libre élevé, donc des résonateurs de petite taille. C'est la raison pour laquelle nous utilisons des micro-résonateurs sphériques, dits résonateurs à mode de galerie, résonateurs en volume dont le diamètre est de l'ordre de la centaine de micro-mètres. Leur haut facteur de qualité, combiné à leur grande finesse donne lieu à une durée d'interaction entre le milieu constituant la cavité et le champ électromagnétique importante, ce qui favorise l'apparition d'effets non-linéaires. Ces résonateurs sont des candidats tout trouvés pour l'étude d'effets non-linéaires avec peu de photons [44, 45] ou pour l'obtention de cavités lasers avec des seuils très bas [22]. Le chapitre 2 développe les propriétés de ces résonateurs.

2. Une expression équivalente pour  $\mathcal{B}$  consisterait à prendre le quotient de la puissance intra-cavité sur la puissance de sortie :

$$\mathcal{B}(\omega_0) = \left| \frac{j\kappa\underline{\alpha}e^{j\varphi(\omega_0)}}{\underline{\alpha} - \rho e^{j\varphi(\omega_0)}} \right|^2 = \frac{\underline{\alpha}^2 (1 - \rho^2)}{\underline{\alpha}^2 + \rho^2 - 2\underline{\alpha}\rho} \simeq \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\underline{\alpha}\rho + \rho^2} \simeq \frac{1 - \rho^2}{(1 - \underline{\alpha}\rho)^2} \simeq \frac{2}{1 - \underline{\alpha}\rho}$$

### 1.1.4 Couplage de résonateurs

Le modèle présentant le couplage de deux résonateurs, supposés identiques, permet de dégager certaines propriétés utiles par la suite. Dans notre cas, lorsque un résonateur est soumis à un couplage par rétrodiffusion Rayleigh le modèle du couplage de deux résonateurs identiques s'applique [46, 47]. Nous considérons un couplage ponctuel via un coupleur  $\{\rho_2, \kappa_2\}$  ou un temps de vie effectif  $\tau_b$ . Même si l'effet de rétrodiffusion n'est pas aussi simple dans la mesure où le couplage s'opère sur la cavité étendue (effet de rétroaction distribuée) [36, 48], les effets observés s'apparentent au modèle présenté dans la mesure où l'on reste en régime linéaire, *i.e.* en dessous du seuil laser. Le modèle présenté ici sera utilisé au chapitre 6.

Comme précédemment, la description du couplage de résonateurs peut suivre une approche d'évolution temporelle pour les deux modes couplés ou matricielle. Dans tous les cas, les modes  $u_1$  et  $u_2$  ont les mêmes paramètres : mêmes temps caractéristiques  $\tau_0$ ,  $\tau_e$  et  $\tau_p$  pour le modèle temporel, mêmes pertes  $\underline{\alpha}$  et taux de couplage  $\{\kappa, \rho\}$  pour le modèle matriciel.

#### 1.1.4.1 Approche temporelle

Le modèle de Haus décrivant le couplage entre deux modes  $u_1$  et  $u_2$  revient à considérer deux oscillateurs harmoniques monomodes identiques couplés avec un temps caractéristique  $\tau_b$ , représenté sur la Figure 1.6. Les équations d'évolution des amplitudes des modes couplés sont [49, 50] :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \left(-j\omega_0 - \frac{1}{2\tau_p}\right) u_1(t) + \frac{j}{2\tau_b} u_2(t) + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} s_{in}(t) & (1.32a) \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{j}{2\tau_b} u_1(t) + \left(-j\omega_0 - \frac{1}{2\tau_p}\right) u_2(t) & (1.32b) \end{cases}$$

où  $u_1$  et  $u_2$  sont les amplitudes des modes couplés,  $s_{in}$  est le signal en entrée de ligne d'accès,  $\omega_0$  est la pulsation de résonance en l'absence de couplage,  $\tau_p$  est le temps de vie des photons,  $\tau_e$  est le temps de vie du couplage à la ligne d'accès,  $\tau_0$  le temps de vie du champ dans la cavité isolée et  $\tau_b$  est le temps de vie du couplage entre les deux résonateurs (en puissance).

Les amplitudes des signaux de sortie  $s_{out}$  et  $s_b$  peuvent être écrites sous la forme sui-



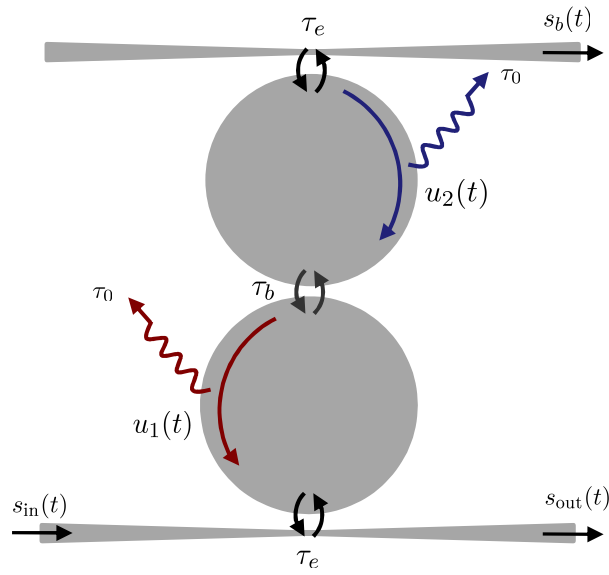


FIGURE 1.6 – Schéma de deux cavités en anneaux identiques couplées à deux lignes d'accès (configuration *add/drop*).

vante :

$$\begin{cases} s_{out}(t) = -s_{in}(t) + \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} u_1(t) & (1.33a) \\ s_b(t) = \sqrt{\frac{2}{\tau_e}} u_2(t) & (1.33b) \end{cases}$$

Les fonctions de transfert en transmission  $\mathcal{H}_T$  et en réflexion  $\mathcal{H}_R$  pour les champs s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_T = \frac{s_{out}}{s_{in}} = -1 + \frac{\frac{2}{\tau_e} \left( j\Omega + \frac{1}{2\tau_p} \right)}{\left[ j \left( \Omega - \frac{1}{2\tau_b} \right) + \frac{1}{2\tau_p} \right] \left[ j \left( \Omega + \frac{1}{2\tau_b} \right) + \frac{1}{2\tau_p} \right]} & (1.34a) \\ \mathcal{H}_R = \frac{s_b}{s_{in}} = \frac{\frac{j}{2\tau_b} \left( \frac{2}{\tau_e} \right)}{\left[ j \left( \Omega - \frac{1}{2\tau_b} \right) + \frac{1}{2\tau_p} \right] \left[ j \left( \Omega + \frac{1}{2\tau_b} \right) + \frac{1}{2\tau_p} \right]} & (1.34b) \end{cases}$$

où  $\Omega = \omega - \omega_0$  est le désaccord à résonance.

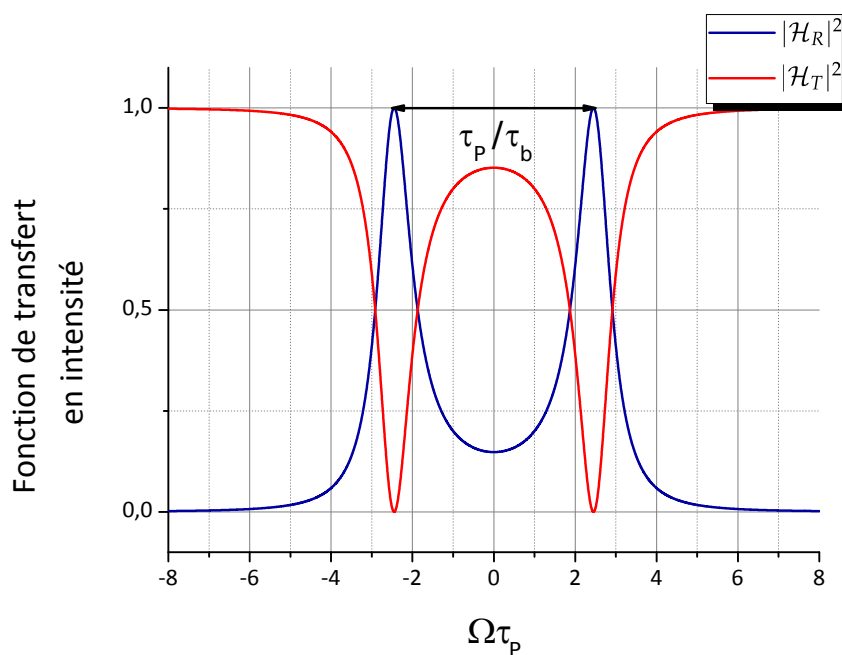


FIGURE 1.7 – Fonction de transfert en intensité  $|\mathcal{H}_T|^2$  et  $|\mathcal{H}_R|^2$  de deux résonateurs en anneaux sans pertes internes ( $\tau_0 \rightarrow +\infty$ ) couplés avec un temps de vie  $\tau_b = \tau_p/5$

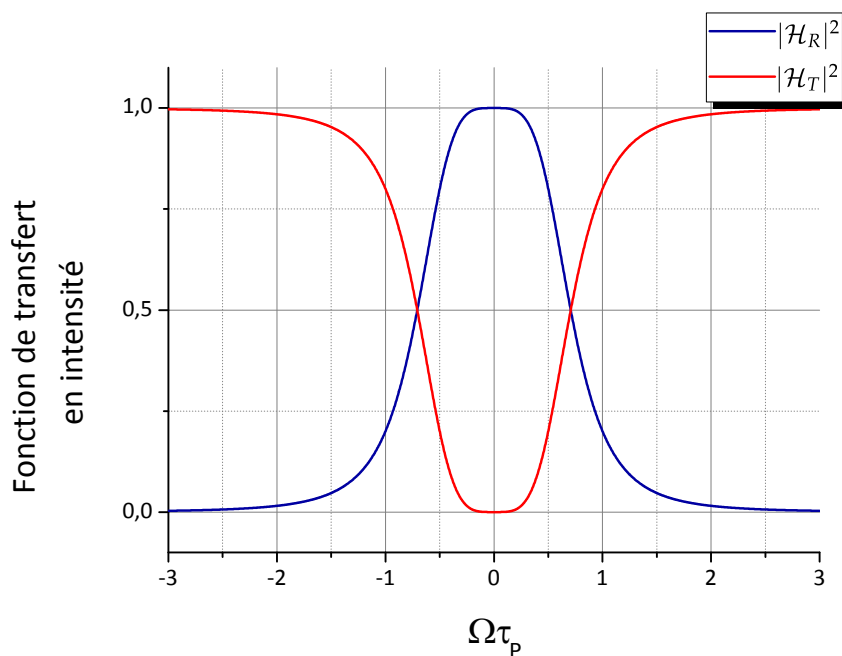


FIGURE 1.8 – Fonction de transfert en intensité  $|\mathcal{H}_T|^2$  et  $|\mathcal{H}_R|^2$  de deux résonateurs en anneaux sans pertes internes ( $\tau_0 \rightarrow +\infty$ ) couplés avec un temps de vie  $\tau_b$  pour  $\tau_b = \tau_p$ .

Les pôles des fonctions de transfert en intensité  $|\mathcal{H}_T|^2$  et  $|\mathcal{H}_R|^2$  sont obtenus lorsque leur dénominateur est un minimum. On cherche alors les valeurs particulières de  $\Omega$  qui annulent leur dérivée, ce qui donne :

$$4\Omega \left[ \Omega^2 - \left( \frac{1}{2\tau_b} \right)^2 + \left( \frac{1}{2\tau_p} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.35)$$

Les pôles de  $|\mathcal{H}_T|^2$  et  $|\mathcal{H}_R|^2$  sont donc :

$$\begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega_{\pm} = \pm \frac{1}{2\tau_b} \sqrt{1 - \left( \frac{\tau_b}{\tau_p} \right)^2} \end{cases} \quad (1.36)$$

La couplage lève la dégénérescence des modes  $u_1$  et  $u_2$  en entraînant une séparation des deux pulsations de résonances  $\omega_0$  d'une quantité  $\Delta\omega$  telle que :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau_b} \sqrt{1 - \left( \frac{\tau_b}{\tau_p} \right)^2} \quad (1.37)$$

La dégénérescence n'est levée qu'à partir du moment où  $\tau_p > \tau_b$ , c'est à dire lorsque le couplage n'est pas suffisant pour modifier le temps de vie global  $\tau_p$  obtenu en l'absence de couplage. Lorsque  $\tau_p \gg \tau_b$ , l'écart prend la forme  $\Delta\omega \simeq 1/\tau_b$ . Pour illustrer cette dernière remarque, les Figures 1.7 et 1.8 présentent la levée de dégénérescence due au couplage de deux résonateurs identiques autour d'une pulsation de résonance (le temps de vie des photons est tel que  $\tau_e \ll \tau_0$  où  $\tau_e$  est supposé identique pour les deux résonateurs, *i.e.*  $\tau_p \simeq \tau_e/2$ ).

- La Figure 1.7 correspond au cas où  $\tau_b = \tau_p/5$ . Le couplage est suffisamment fort pour résoudre les deux modes couplés par rétrodiffusion, entraînant une levée de dégénérescence  $\Delta\omega \simeq 1/\tau_b$ .
- La Figure 1.8 correspond au cas où  $\tau_b = \tau_p$ . Le couplage n'est pas suffisamment prononcé pour résoudre les modes couplés (*maximal flatness*).

#### 1.1.4.2 Approche matricielle

Le modèle matriciel consiste à considérer deux résonateurs en anneau identiques couplés chacun à une ligne d'accès avec les mêmes coefficients  $\rho_1$  et  $\kappa_1$  et couplés entre eux via les coefficients  $\rho_2$  et  $\kappa_2$ . Le signal d'entrée  $E_{in}$  est couplé au premier résonateur. Aucun signal est introduit dans la ligne d'accès du deuxième résonateur, elle sert à récupérer le signal rétrodiffusé  $E_b$ .

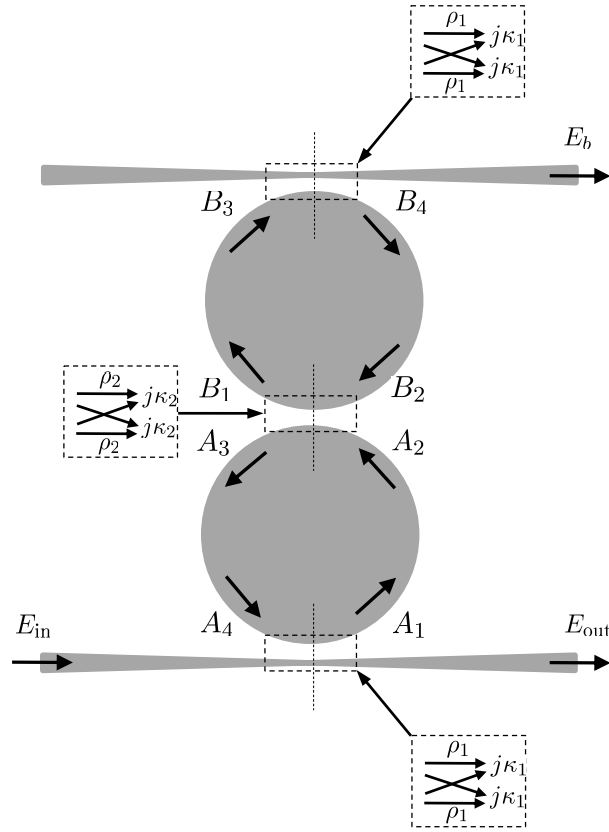


FIGURE 1.9 – Schéma représentatif de deux résonateurs en anneaux identiques couplés par rétrodiffusion.

Dans cette approche, nous notons  $\sqrt{\alpha}$  les pertes sur un demi-tour de cavité et  $\varphi/2$  le déphasage associé sur cette même distance. Tout calcul fait, la fonction de transfert en réflexion  $\mathcal{H}_R = E_b/E_{in}$  s'exprime comme :

$$\mathcal{H}_R = \frac{-j\kappa_1^2\kappa_2\alpha X}{1 - 2\alpha\rho_1\rho_2 X + \alpha^2\rho_1^2 X^2} \quad (1.38)$$

où nous avons noté  $X = e^{j\varphi}$ .

En supposant que le deuxième coupleur est sans pertes ( $\rho_2^2 + \kappa_2^2 = 1$ ), on peut poser  $\rho_2 \pm j\kappa_2 = e^{\pm j\theta}$ . La fonction de transfert en intensité  $|\mathcal{H}_R|^2$  s'écrit alors :

$$|\mathcal{H}_R|^2 = \frac{\kappa_1^4\kappa_2^2\alpha^2}{[1 + \alpha^2\rho_1^2 - 2\alpha\rho_1 \cos(\varphi - \theta)][1 + \alpha^2\rho_1^2 - 2\alpha\rho_1 \cos(\varphi + \theta)]} \quad (1.39)$$

Dans le cas d'un couplage faible,  $\rho_2 \simeq 1$ , si bien que  $\theta \simeq \kappa_2 \ll 1$ . On peut alors développer  $\varphi \pm \theta$  en :

$$\varphi \pm \theta = N\omega_0 \frac{L}{c} + \frac{NL}{c} \left( \Omega \pm \frac{c}{NL} \kappa_2 \right) \quad (1.40)$$

où  $\Omega$  est le désaccord à résonance. Si  $\omega$  est proche de  $\omega_0$ , on trouve :

$$\cos(\varphi \pm \theta) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left[ \tau_L \left( \Omega \pm \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right) \right]^2 \quad (1.41)$$

Si l'on considère un résonateur sans pertes internes ( $\underline{\alpha} = 1$ ) et avec un faible taux de couplage ( $\rho_1 \rightarrow 1$ ), il vient :

$$1 - \rho_1 \simeq \frac{\kappa_1^2}{2} \quad (1.42)$$

La fonction de transfert en intensité s'exprime alors comme :

$$|\mathcal{H}_R|^2 = \frac{16\kappa_2^2/\kappa_1^4}{\left[ 1 + \left( \frac{2\tau_L}{\kappa_1^2} \left( \Omega + \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right) \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{2\tau_L}{\kappa_1^2} \left( \Omega - \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right) \right)^2 \right]} \quad (1.43)$$

En procédant de la même façon que précédemment, on cherche les valeurs de  $\Omega$  qui annulent le dénominateur de  $|\mathcal{H}_R|^2$ . Il vient :

$$4\Omega \left( \frac{2\tau_L}{\kappa_1^2} \right)^4 \left[ \left( \frac{\kappa_1^2}{2\tau_L} \right)^2 + \Omega^2 - \left( \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.44)$$

Les pôles de  $|\mathcal{H}_R|^2$  sont :

$$\begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega_{\pm} = \pm \left( \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\kappa_1^2}{2\kappa_2} \right)^2} \end{cases} \quad (1.45)$$

La coupure sépare les deux modes propres initiaux, à l'origine situés en  $\omega_0$ , d'une quantité  $\Delta\omega$  telle que :

$$\Delta\omega = 2 \left( \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\kappa_1^2}{2\kappa_2} \right)^2} \quad (1.46)$$

Cette levée de dégénérescence n'a lieu que si  $2\kappa_2 \gg \kappa_1^2$ . Les deux approches donnent des expressions similaires pour  $|\mathcal{H}_R|^2$  :

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_R|^2 &= \frac{\tau_p^4/\tau_b^2\tau_e^2}{\left[ 1 + \tau_p^2 \left( \Omega - \frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right] \left[ 1 + \tau_p^2 \left( \Omega + \frac{1}{2\tau_b} \right)^2 \right]} \\ |\mathcal{H}_R|^2 &= \frac{16\kappa_2^2/\kappa_1^4}{\left[ 1 + \left( \frac{2\tau_L}{\kappa_1^2} \left( \Omega - \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right) \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{2\tau_L}{\kappa_1^2} \left( \Omega + \frac{\kappa_2}{\tau_L} \right) \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

Par identification, on peut associer  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  à  $\tau_p$  et  $\tau_b$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1^2 = \frac{2\tau_L}{\tau_e} \\ \kappa_2 = \frac{\tau_L}{2\tau_b} \end{array} \right. \quad (1.47a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1^2 = \frac{2\tau_L}{\tau_e} \\ \kappa_2 = \frac{\tau_L}{2\tau_b} \end{array} \right. \quad (1.47b)$$

### 1.1.5 Conclusion

Le résonateur en anneau couplé à une ligne d'accès est un modèle simple permettant de décrire correctement les propriétés des résonateurs *WGM* que nous utilisons.

- Les cavités utilisées sont des micro-sphères de diamètre autour de  $100 \mu m$ . Les chapitres 2 et 3 décrivent les spécificités de ces cavités.
- Les temps caractéristiques  $\tau_e$  et  $\tau_0$  définissent le régime de couplage du résonateur. Dans la suite de nos études, nous travaillons en régime laser. Nous verrons au chapitre 5 une méthode permettant de connaître le temps de vie du couplage en régime laser.
- Le couplage par rétrodiffusion est étudié au chapitre 6, en dessous et au dessus du seuil laser. Le modèle présenté ici n'est cependant plus valable dans le régime laser, ce qui nous amène à redéfinir le modèle en prenant en compte les spécificités de ce régime d'émission.

## 1.2 Propriétés spectroscopiques de l'ion Erbium

Dans cette section, nous rappelons la structure électronique de l'ion Erbium, dopant principal des verres utilisés. Nous définissons également les grandeurs spectroscopiques utilisées dans la suite de ce manuscrit et caractérisons deux verres dopés sur lesquels se basent nos expériences : les verres ZBLALiP et IOG.

### 1.2.1 Spectroscopie de l'ion Erbium $Er^{3+}$

La structure électronique des ions de terres rares est un problème traité dans de nombreux ouvrages. Nous donnons ici quelques généralités sur la structure atomique de l'ion Erbium et de ses niveaux d'énergie. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux ouvrages [51–55].

### 1.2.1.1 Éléments de Physique atomique

Le Hamiltonien décrit l'évolution temporelle de la fonction d'onde dans un système atomique via l'équation de Schrödinger. Les valeurs propres qui en découlent donnent les différents niveaux d'énergie. Le Hamiltonien total s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{W}_c + \mathcal{W}_{so} + \mathcal{W}_{cc} \quad (1.48)$$

- $\mathcal{H}_0$  est le Hamiltonien non perturbé dans l'approximation du champ central (électron dans le potentiel du noyau et d'un potentiel "moyen" créé par les autres électrons). Il donne les énergies des sous-couches électroniques  $ns, np, nd, nf, \dots$  pour une couche électronique  $n$  donnée ( $n \in \mathbb{N}^{+*}$ ). Dans le cas de l'ion Erbium triplement ionisé  $Er^{3+}$ , la couche électronique incomplète est la couche  $4f$  et contient 11 électrons. C'est une couche interne aux couches  $5s$  et  $5p$  préalablement remplies (règle de Klechovsky).
- $\mathcal{W}_c$  correspond à la perturbation apportée par les interactions électroniques. Il conduit à l'introduction des nombres quantiques  $L$  et  $S$  (respectivement moment angulaire total orbital et moment angulaire total de spin) et sépare le niveau  $4f$  en  $^{2S+1}L$  sous-niveaux espacés d'environ  $10^4 \text{ cm}^{-1}$ . Le niveau de plus basse énergie est obtenu suivant la règle de Hund, c'est le niveau  $^4I$ .
- $\mathcal{W}_{so}$  correspond à la perturbation apportée par le couplage spin-orbite (ou couplage  $L - S$  dans notre cas). Chaque niveau  $^{2S+1}L$  est séparé en sous-niveaux indexés par  $J$  (grand moment angulaire). Pour l'Erbium, le niveau  $^4I$  se scinde en 4 sous-niveaux indexés par  $J = \left\{ \frac{9}{2}; \frac{11}{2}; \frac{13}{2}; \frac{15}{2} \right\}$  et séparés d'environ  $100 \text{ cm}^{-1}$ . Le niveau fondamental est le niveau  $^4I_{15/2}$ .
- $\mathcal{W}_{cc}$  correspond à la perturbation apportée par l'insertion de l'ion dans une matrice hôte. Etant donné que le niveau  $4f$  est interne aux couches  $5s$  et  $5p$ , il est peu sensible à l'interaction avec les atomes de la matrice hôte [55]. La correction est donc *faible* (approximation de champ faible). Le champ statique cristallin lève la dégénérescence de chaque sous-niveaux  $^{2S+1}L_J$  par effet Stark dépendant de la symétrie du site. Pour l'Erbium, les niveaux  $^4I_{13/2}$  et  $^4I_{15/2}$  se scindent en respectivement 7 et 8 sous-niveaux Stark espacés d'environ  $10 \text{ cm}^{-1}$ .

Pour compléter l'étude sur le spectre d'émission de l'Erbium piégé dans une matrice hôte, on doit tenir compte de différents effets structuraux qui élargissent la raie d'émission d'une transition atomique donnée. Ces phénomènes d'élargissement dépendent de la nature de la matrice hôte et modifient en conséquence le spectre d'émission.

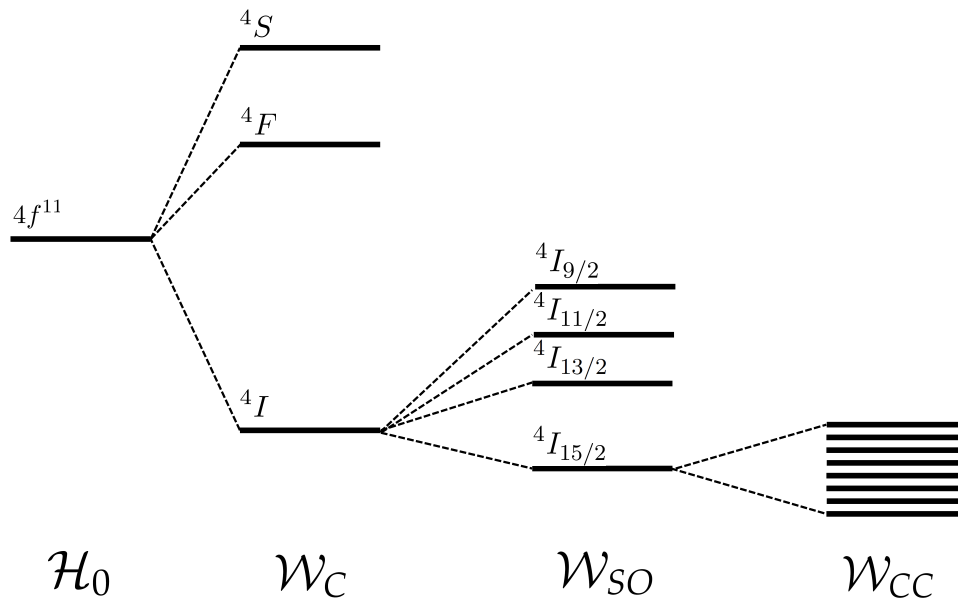


FIGURE 1.10 – Effet des différents Hamiltoniens sur les niveaux d'énergie de l'ion Erbium.

### 1.2.1.2 Mécanismes d'élargissement d'une transition électronique

La transition entre deux sous-niveaux Stark est due à différentes sources d'interactions. Elles sont de type :

- radiative
- ion-ion
- ion-phonon

Pour de faibles concentrations de dopant, l'interaction ion-phonon est prédominante devant les autres. C'est une interaction de type collisionnelle entre les électrons et les phonons de la matrice hôte. Le peuplement des phonons suit une loi de Bose-Einstein :

$$\langle N_{phonon} \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (1.49)$$

où  $\langle N_{phonons} \rangle$  est le nombre moyen de phonons peuplant le niveau d'énergie  $h\nu$ ,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Pour des plus fortes concentrations de dopants ( $> 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ ), les interactions ions-ions apparaissent (relaxation croisée, transfert assisté par phonon, *up-conversion*...).

En fonction de la structure dans laquelle l'ion est inséré, on distingue deux types d'élargissements : homogène en structure cristalline et inhomogène en structure vi-



treuse.

### Elargissement homogène dans une structure cristalline

Une structure cristalline est une structure où une maille élémentaire est répétée de façon ordonnée, comme représenté sur la Figure 1.11a. Si l'introduction d'impuretés dans le cristal (*i.e.* des dopants) ne modifie pas l'environnement et la structure ponctuelle du cristal, alors tous les ions actifs sont soumis au même champ cristallin, de sorte qu'ils absorbent ou émettent à la même fréquence de résonance pour une transition donnée. La transition est alors homogène.

La largeur homogène  $\Gamma_h$  de la transition dépend de la température  $T$  mais aussi de l'énergie des phonons  $h\nu$ , qui dépend elle-même de la composition chimique de la matrice hôte, qu'elle soit cristalline ou vitreuse. Elle est reliée au temps de vie des cohérences optiques  $T_2$  par la relation :

$$\Gamma_h = 1/\pi T_2 \quad (1.50)$$

L'élargissement est dit homogène lorsque tous les sites ioniques subissent le même effet. Le cas du cristal parfait n'est en pratique pas réalisable et il subsiste quelques dislocations. Chaque ion interagit avec un champ cristallin dans un environnement qui lui est propre. L'unicité de chaque fréquence de résonance associée à un site cristallin est la cause principale d'un élargissement inhomogène. Néanmoins, dans un cristal, l'élargissement prédominant est homogène. A température donnée, le spectre d'émission d'une collection d'ions actifs dans une matrice cristalline s'apparente à un spectre de raies.

### Elargissement inhomogène dans une structure vitreuse

Les différents arrangements cristallins au sein de la structure vitreuse entraînent l'interaction entre l'ion, Erbium dans notre cas, et ce qu'on appelle le champ de ligand, champ électrique local au site de l'ion. Cependant, une matrice vitreuse ne peut pas être considérée comme une structure cristalline. Prise indépendamment, chaque maille peut s'apparenter à celle d'un cristal, mais l'arrangement spatial des mailles (au motif identique) mises bout à bout ne l'est absolument pas (Figure 1.11b) et entraîne un degré de désordre beaucoup plus marqué que dans la structure cristalline, même soumise aux dislocations dues au dopage (les Figures 1.12a et 1.12b illustrent le cas de l'élargissement inhomogène dans une matrice vitreuse). De fait, une matrice vitreuse

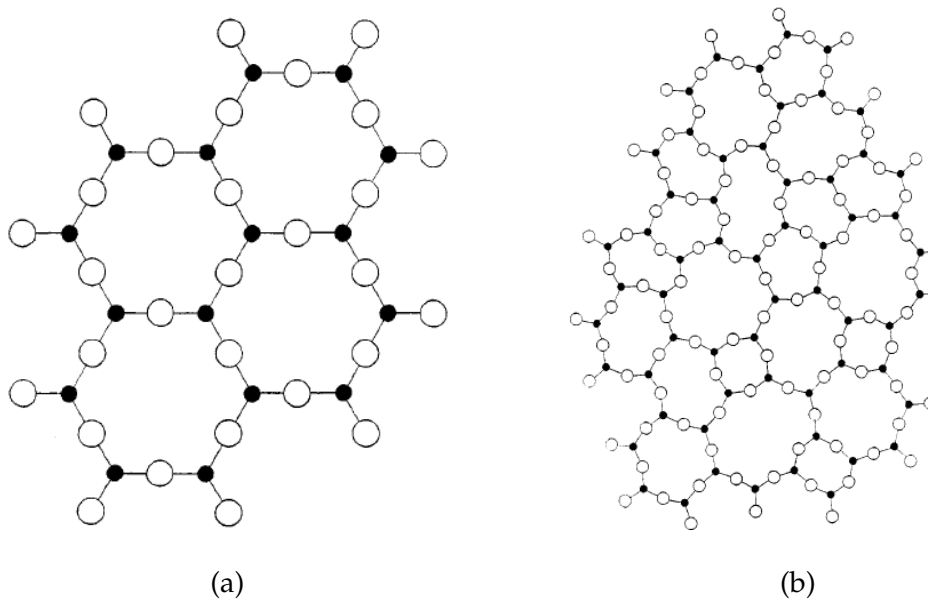


FIGURE 1.11 – Arrangement des mailles dans une structure (a) cristalline et (b) vitreuse (tous les deux non dopés).

est soumise à un élargissement inhomogène. A température donnée, le spectre d'émission d'une collection d'ions actifs dans une matrice vitreuse s'apparente à un spectre de bandes.

Ainsi, un ion terre-rare piégé en matrice cristalline ou matrice vitreuse n'aura pas le même spectre d'émission à cause de la nature de l'élargissement. La Figure 1.13 montre le spectre d'émission à  $1064\text{ nm}$  de l'ion  $Nd^{3+}$  dans un cristal de YAG et dans un verre de silice. On remarque la structure discrète du spectre de raies dans le cristal, à l'inverse du verre de silice où l'émission est très large. Pour réduire la plage d'émission dans une matrice vitreuse, on peut travailler à basse température.

Les résonateurs WGM utilisés dans nos expériences sont fabriqués à partir d'échantillons de verre dopés Erbium. Du fait de l'élargissement inhomogène, les spectres d'absorption et d'émission présentent un spectre faiblement résolu. La suite de ce chapitre est dédié à la caractérisation optique des différents verres utilisés.

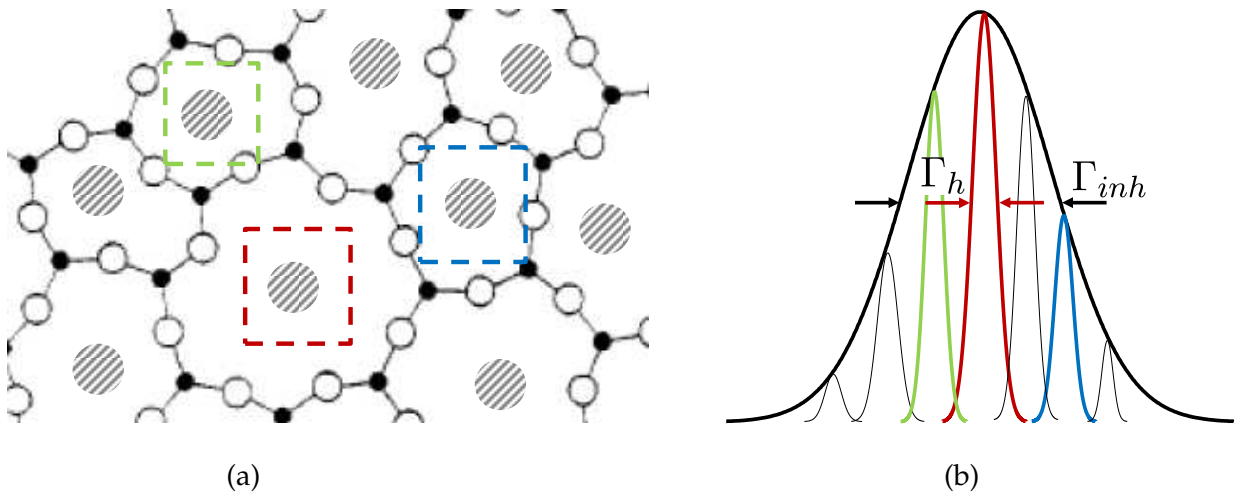


FIGURE 1.12 – (a) Dopants au sein d'une structure vitreuse et (b) élargissements homogènes des différents sites ioniques et élargissement inhomogène résultant.

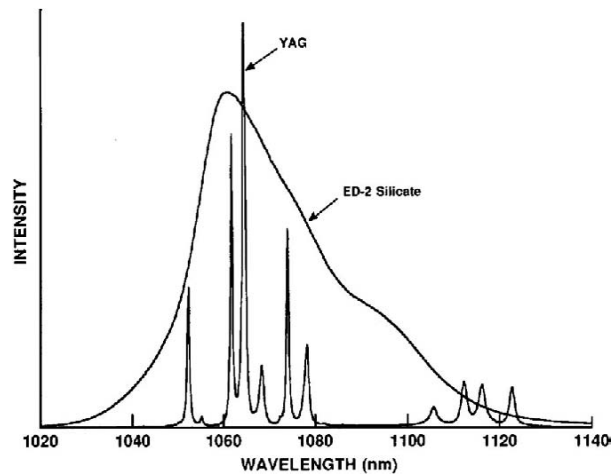
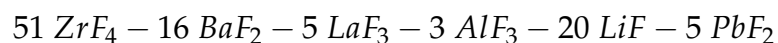


FIGURE 1.13 – Comparaison des spectre d'émission à  $1064 \text{ nm}$  de l'ion  $\text{Nd}^{3+}$  inséré dans un cristal de YAG et dans un verre de silice (l'échelle verticale a été ajustée sur les deux spectres pour faciliter la comparaison). Figure extraite de [56].

## 1.2.2 Ion Erbium en matrice vitreuse

### 1.2.2.1 Verre fluoré : ZBLALiP

Le verre ZBLALiP [57] est un verre de la famille des fluoro-zirconates. Sa formule chimique est :



Dans la littérature [56], nous obtenons les valeurs des élargissements homogène et inhomogène pour l'ion Erbium dans une matrice vitreuse en verre fluoré :

$$\begin{aligned} \text{élargissement inhomogène} & : \sim 60 \text{ cm}^{-1} \\ \text{élargissement homogène} & : 20 - 35 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

Le taux de dopage en  $ErF_3$  de nos échantillons pour ce verre varie de 0.01 à 6 mol%. Les caractérisations spectroscopiques ont été réalisées sur un échantillon de verre dopé à 0.05 mol% ( $0.945 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ) avec un spectromètre de résolution 0.1 nm. Pour nos expériences, le taux de dopage utilisé est de 0.1 mol%.

### Absorption du ZBLALiP autour de 1550 nm

Le coefficient d'absorption  $\alpha$ , en  $m^{-1}$ , représente l'atténuation du champ due à l'absorption et la diffusion en volume et obéit à la loi de Beer-Lambert :

$$I(z) = I(0)e^{-\alpha z} \quad (1.51)$$

Ce paramètre va nous permettre de calculer les sections efficaces d'émission  $\sigma_e$  et d'absorption  $\sigma_a$  et ainsi au gain spectral, paramètres très important dans le cadre de l'étude de l'effet laser. Une mesure d'absorption linéique a été réalisée [58–60]. Nous obtenons alors le spectre de la Figure 1.14. C'est de ce spectre que nous déduisons  $\sigma_a$  et  $\sigma_e$ .

### Sections efficaces d'absorption et d'émission

La section efficace d'absorption  $\sigma_a$  est définie comme :

$$\sigma_a = \frac{\alpha}{\mathcal{N}_{\text{tot}}} \quad (1.52)$$

où  $\mathcal{N}_{\text{tot}}$  est la densité totale de dopants.  $\sigma_a$  n'est pas une section à proprement parler mais représente une quantité spectroscopique, homogène à une surface, permettant de quantifier la probabilité d'absorption d'un matériau, quelles que soient les propriétés géométriques de la cible (longueur d'échantillon, section du faisceau d'excitation, densité d'atomes, ...). La section efficace d'émission représente, elle, la probabilité d'émission dans le matériau.

La théorie de Mc Cumber [61] permet de déterminer la section efficace d'émission  $\sigma_e$  à partir de la section efficace d'absorption  $\sigma_a$  :

$$\sigma_a = \sigma_e \frac{Z_1}{Z_2} e^{\frac{h}{k_B T}(\nu - \nu_0)} \quad (1.53)$$

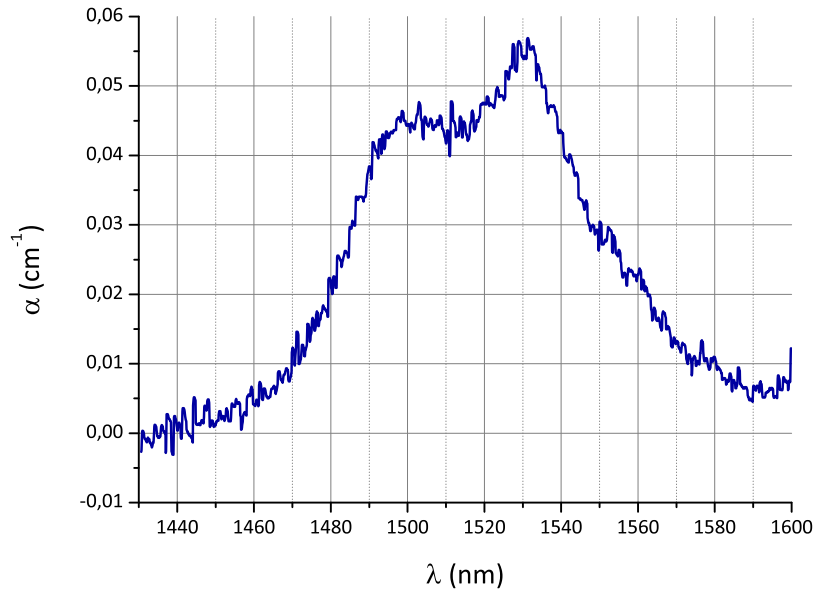


FIGURE 1.14 – Coefficient d'atténuation linéique  $\alpha$  du verre ZBLALiP dopé à 0.05 mol%.

où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont les fonctions de répartition des populations sur les sous-niveaux Stark de  ${}^4I_{13/2}$  et  ${}^4I_{15/2}$ ,  $h$  la constante de Planck,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température et  $\nu_0$  la fréquence correspondant au gap d'énergie  $E_0$  entre les deux sous-niveaux les plus bas de  ${}^4I_{13/2}$  et  ${}^4I_{15/2}$ . Le rapport  $Z_1/Z_2$  suit une statistique de Maxwell-Boltzmann avec les différents niveaux d'énergie :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 + \sum_{j=2}^8 e^{-\frac{E_{1j}}{k_B T}}}{1 + \sum_{j=2}^7 e^{-\frac{E_{2j}}{k_B T}}} \quad (1.54)$$

Dans le cas de l'Erbium, l'effet Stark scinde les niveaux  ${}^4I_{13/2}$  et  ${}^4I_{15/2}$  en respectivement 7 et 8 sous-niveaux dont les éclatements sont de  $327.3 \text{ cm}^{-1}$  et  $411 \text{ cm}^{-1}$ . Si l'on considère que les différents niveaux sont équidistants en énergie, en notant  $\Delta E_1$  la séparation de deux niveaux sur  ${}^4I_{15/2}$  et  $\Delta E_2$  celle de  ${}^4I_{13/2}$ , on obtient le diagramme d'énergie représenté sur la Figure 1.15.

$$E_0 = E_{21} - E_{11} = 6531.7 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Delta E_1 = \frac{E_{18} - E_{11}}{7} = 54.6 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Delta E_2 = \frac{E_{27} - E_{21}}{6} = 58.7 \text{ cm}^{-1}$$

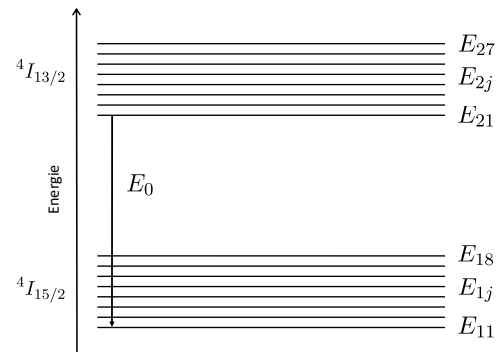


FIGURE 1.15 – Effet Stark sur les niveaux  ${}^4I_{13/2}$  et  ${}^4I_{15/2}$  de  $Er^{3+}$ .

Les sections efficaces d'émission et d'absorption sont représentées sur la Figure 1.16. La section efficace d'émission est calculée à partir de la section efficace d'absorption et des niveaux d'énergie calculés précédemment.

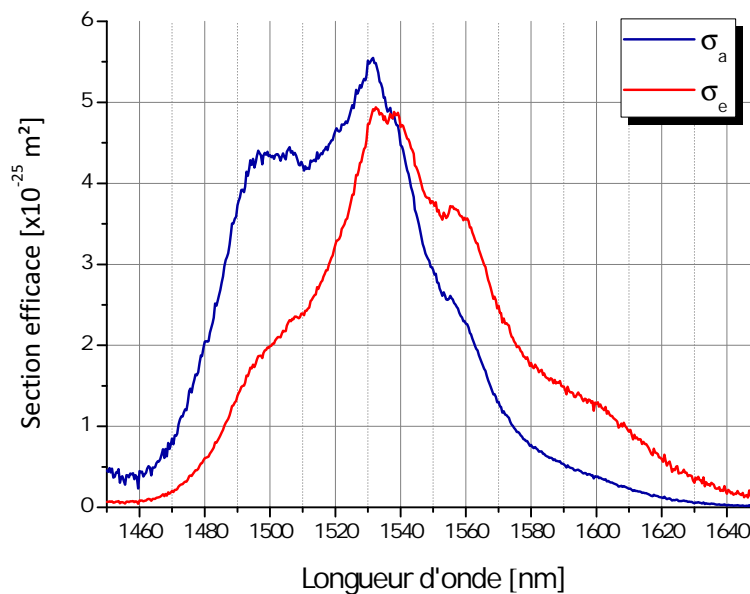


FIGURE 1.16 – Sections efficaces d'émission et d'absorption.

Le peuplement des niveaux suit une distribution de Maxwell-Boltzmann. Au sein d'un même multiplet ( ${}^4I_{13/2}$  ou  ${}^4I_{15/2}$ ), les sous-niveaux de plus basse énergie sont les plus peuplés car ils présentent une relaxation très rapide ( $\sim 1 \text{ ns}$ ) devant le temps de vie des niveaux ( $\sim 10 \text{ ms}$ ). La transition  ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$  est assimilée à un système à trois niveaux.

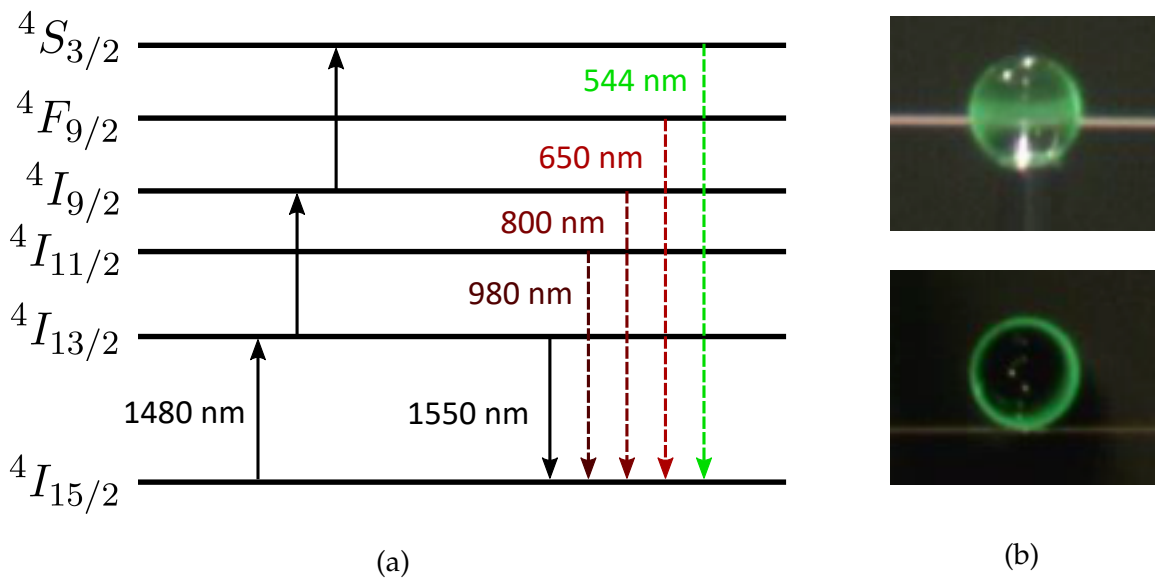


FIGURE 1.17 – (a) Absorption des niveaux supérieurs de l'ion Erbium, (b) Visualisation de la fluorescence à 550 nm.

En toute rigueur, certains processus d'interactions ions-ions sont présents. Le phénomène d'absorption par les niveaux supérieurs (*up-conversion*), représenté sur la Figure 1.17a, entraîne une fluorescence autour de 550 nm dans ce verre, visible expérimentalement (Figure 1.17b).

### Gain spectral

Le gain spectral linéique (en  $m^{-1}$ )  $G_\lambda$  est proportionnel à  $\sigma_e$  et  $\sigma_a$  ainsi qu'au taux d'ions Erbium effectivement excités, noté  $p$  [62] :

$$G_\lambda = \mathcal{N}_{Er} [p\sigma_e - (1 - p)\sigma_a] \quad (1.55)$$

Le gain spectral est représenté sur la Figure 1.18 pour différents taux de pompage  $p$  et pour un verre dopé à 0.05 mol%. On remarque que, pour de faibles valeurs de  $p$ , le domaine où le gain est positif a lieu préférentiellement autour de 1610 nm. En augmentant progressivement le nombre d'ions d'Erbium excités, la plage spectrale devient de plus en plus large et le maximum du gain se décale vers les longueurs d'ondes les plus courtes. Ainsi, dans ce verre, un faible taux de pompage donne un effet laser vers 1610 nm, tandis que pour un taux de pompage plus fort, l'effet laser apparaît préférentiellement autour de 1530 nm, dans la zone où le gain est le plus élevé.

**Temps de vie de la transition  $4I_{13/2} \rightarrow 4I_{15/2}$**

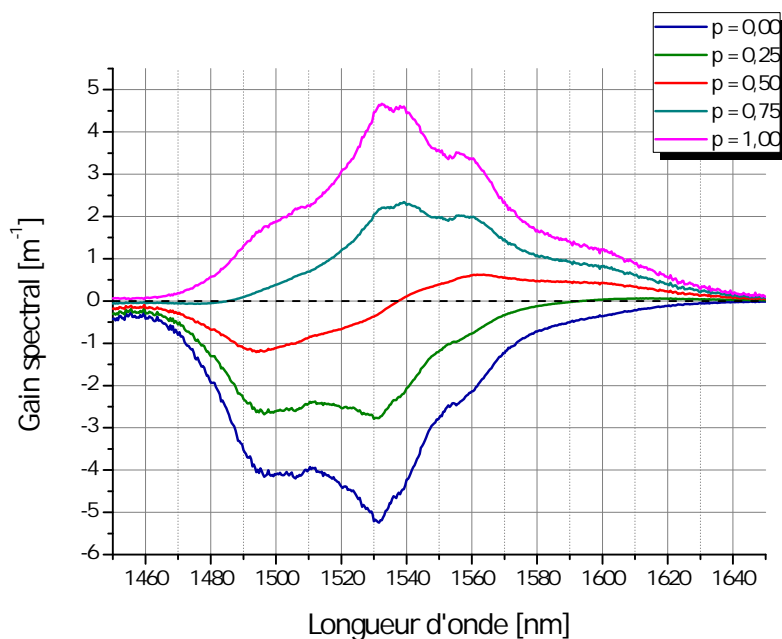


FIGURE 1.18 – Gain spectral pour différents taux de pompage  $p$  pour un échantillon de verre dopé à 0.05 mol%.

La durée de vie des populations de la transition  ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$  a été mesurée sur une collection de verres massifs en ZBLALiP avec différents taux de dopages. Le temps de vie de la transition est calculé en enregistrant la décroissance du signal de fluorescence de l'échantillon avec un photodétecteur (*InGaAs*) relié à un oscilloscope (Tektronix TDS350). Les échantillons sont excités avec un laser Nd:YAG à 1064 nm pulsé et doublé en fréquence. La Figure 1.19a, extraite de [57], présente les résultats de ces mesures. On remarque que la réduction du verre à l'état de poudre diminue le temps de vie de la transition. On peut également s'attendre à une diminution de ce temps de vie après un processus de fusion, nécessaire à l'obtention de résonateurs en verre. G. Nunzi-Conti *et. al.* [63] ont noté une diminution de 15% du temps de vie de la transition lorsque le verre est passé à l'état de microsphère dans un verre IOG-2, comme le montre la Figure 1.19b. Si nous supposons que ce verre est suffisamment proche du ZBLALiP, nous pouvons considérer que la diminution du temps de vie de la transition est la même<sup>3</sup>. Pour les taux de dopages utilisés, nous retenons un temps de vie  $T_1$  de 10 ms dans le ZBLALiP [40].

3. [63] montre également une diminution du temps de vie de 48% dans un verre Baccarat dopé Erbium à 0.5 mol% lorsque le verre est réduit à l'état de microsphère.



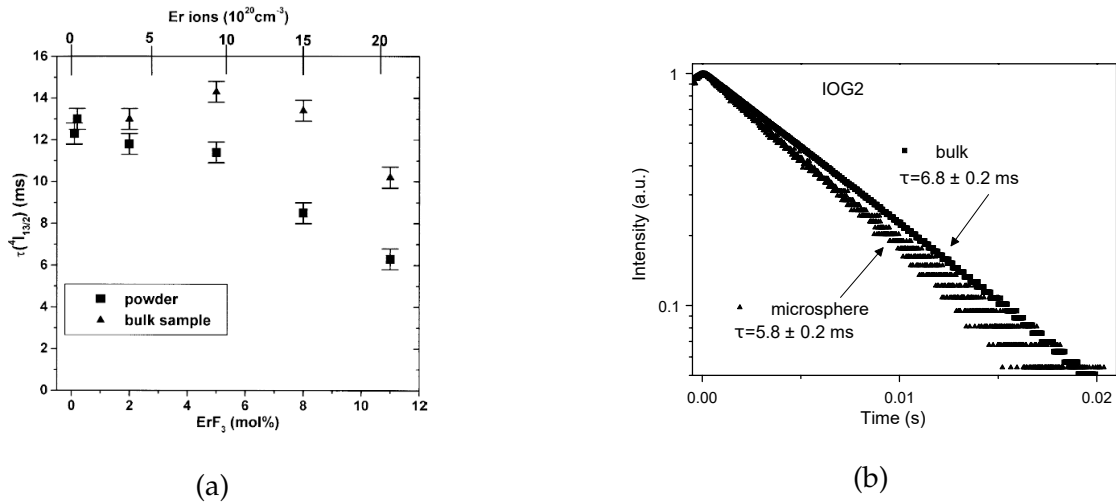
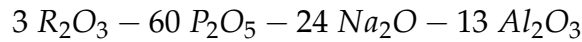


FIGURE 1.19 – (a) Temps de vie de la transition  $^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$  après excitation à  $532 \text{ nm}$  en fonction du taux de dopage pour des échantillons de verre ZBLALiP bruts et réduits en poudre, Figure extraite de [57]. (b) Effet de la géométrie de l'échantillon sur le temps de vie de la transition  $^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$  de l'Erbium dans un verre IOG-2, Figure extraite de [63].

### 1.2.2.2 Verre oxyde : IOG-1

Au cours de nos études, nous avons été amené à étudier le verre IOG-1 (particulièrement au chapitre 6). C'est un verre sodium-aluminophosphate industriel, de la marque Schott, co-dopé aux ions Erbium et Ytterbium et dont la composition chimique est [64] :



où  $R$  représente  $Er^{3+}$  ou  $Yb^{3+}$ . Ce verre est dopé en ion Erbium à  $1.15 \text{ mol}\%$  et en ion Ytterbium à  $4.73 \text{ mol}\%$ , soient des concentrations respectives de  $1.0$  et  $4.0 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ . La concentration d'ions Erbium est plus importante que dans le verre ZBLALiP (environ dix fois plus), ce qui conduit notamment à un seuil laser plus élevé.

### Sections efficaces et gain spectral

Les mesures spectroscopiques n'ont pas été réalisées sur ce verre, aussi nous prendrons celles données par le fournisseur. Les sections efficaces d'émission et d'absorption du verre IOG-1 sont présentées sur la Figure 1.20 et sont issues de [64].

Le pic d'émission a lieu à  $1542 \text{ nm}$  et la section efficace d'émission à cette longueur d'onde vaut  $6.6 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$  [64]. Le maximum de la section efficace d'émission du verre IOG-1 est légèrement plus importante que celui du verre ZBLALiP (Fig. 1.16).

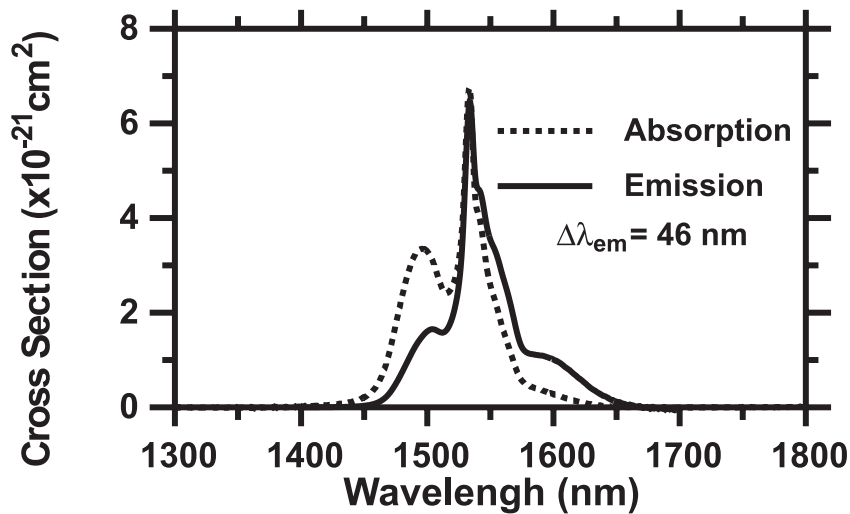


FIGURE 1.20 – Sections efficaces d'émission et d'absorption de l'Erbiun dans un verre IOG-1, Figure extraite de [64].

Nous n'avons pas pu tracer les courbes de gain spectral pour différents taux de pompage  $p$  car nous ne disposons pas de mesures précises de  $\sigma_e$  et  $\sigma_a$ . Néanmoins, on constate (Fig. 1.20) que la section efficace d'émission présente une zone autour de 1600 nm où elle n'est pas négligeable, contrairement à la section efficace d'absorption. Ainsi, pour un taux de pompage  $p$  modéré, le verre IOG-1 présente un gain autour de 1600 nm plus important que le verre ZBLALiP. Pour un taux de pompage plus important, le gain spectral est plus important autour de 1550 nm.

#### Temps de vie de la transition ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$

Concernant la durée de vie de la transition  ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$  dans le verre IOG-1, Liu et Pun [65] ont réalisé ces mesures dans des verres ayant différents taux de dopages en Erbium et Ytterbium. Ces taux de dopages sont présentés dans le Tableau 1.1. Les mesures de temps de vie de fluorescence ont été réalisées avec un monochromateur (SPEX 500M), un chopper optique à 25 Hz (Digirad C-980), une photodiode en In-GaAs et un oscilloscope (HP54600B). Les mesures et les ajustements théoriques sont présentés sur la Figure 1.21. Sur les 4 verres, les temps de vie de la transitions sont respectivement de 8.26, 9.18, 8.78 et 7.82 ms. Les temps de vie de cette transition sont plus faibles dans le verre IOG-1 que dans le verre ZBLALiP. Le verre correspondant le plus à celui utilisé dans nos expériences est le verre A, dont la durée mesurée de la transition est de 8.26 ms (en verre brut). Lorsque ce verre est réduit à l'état de sphères, en considérant que la réduction entraîne une réduction de 10% sur le temps de vie

initial [63], on peut s'attendre à un temps de vie de 7.02 ms.

TABLEAU 1.1 – Correspondance entre les concentrations en  $E_r^{3+}$  et  $Y_b^{3+}$  et les échantillons de la Figure 1.21 dans [65].

Echantillon	$\mathcal{N}_{E_r^{3+}}$ [ $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ]	$\mathcal{N}_{Y_b^{3+}}$ [ $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ]
A	0.99	3.99
B	1.88	3.98
C	2.00	3.01
D	3.47	2.53

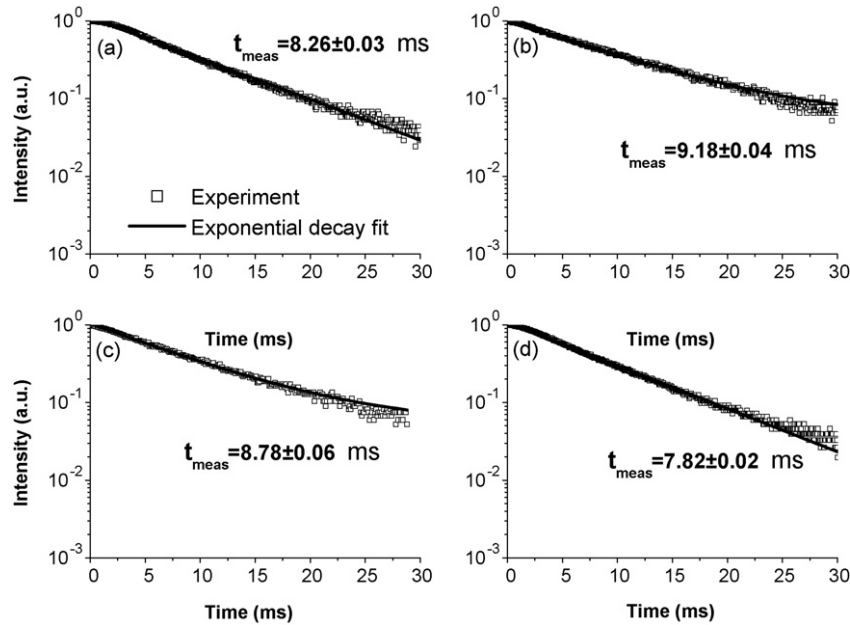


FIGURE 1.21 – Mesure de la décroissance de la fluorescence de la transition  ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$  dans 4 verres IOG-1 à l'état solide. Figure extraite de [65].

### Remarque :

Les verres présentés dans ce chapitre peuvent être utilisés pour l'étude de l'effet laser dans un micro-résonateur WGM. Ces deux verres, bien que tous les deux dopés Erbium, peuvent présenter des différences notables au vu de la composition chimique

de la matrice hôte. Les chapitres 5 et 6 présentent les résultats de la dynamique du laser dans ces deux types de verre.

## 1.3 Fabrication des micro-sphères en verre

### 1.3.1 Fusion de poudre de verre à la torche plasma

Les micro-sphères sont réalisées à partir d'échantillon de verre brut avec différents taux de dopage en ions Erbium et dans différentes matrices vitreuses (ZBLALiP et IOG-1). Le verre est concassé et réduit en poudre, puis traverse un plasma. Le schéma du dispositif est présenté sur la Figure 1.22. La flamme produite dépend de la puissance du signal micro-onde ainsi que des débits d'Ar et d'O<sub>2</sub>. Avec ce système, on peut obtenir des températures comprises entre 800 et plus de 2000 °C. La flamme chauffe le verre pilé, le faisant dépasser sa température de transition vitreuse. Les gouttes de verre sont alors en chute libre. A ce moment, les forces de tension superficielles qui s'appliquent sur le verre fondu lui donnent naturellement une forme sphérique. Ensuite, les échantillons sont récoltés dans une boîte de pétri.

Ce procédé physico-chimique est une trempe relativement violente et ne saurait être valable sur tout type de verre. Il faut s'assurer que le verre soumis à ces modifications instantanées de température puisse le supporter et s'affranchisse des éléments limitants suivants :

- La sublimation de certaines espèces chimiques constituant le verre donnent lieu à la présence de bulles piégées à l'intérieur de la micro-sphère. Une telle situation exalte la diffusion et augmente considérablement les pertes internes et diminuent fortement le facteur de qualité  $Q$  du résonateur.
- La cristallisation du verre peut s'amorcer pour de fortes températures mais est rapidement annulée à cause de la viscosité du verre ou à cause de la baisse instantanée de la température une fois que la flamme est dépassée. Dans de tels cas, les amorces de cristallisation, piégées dans la cavité, exaltent également la diffusion en volume.
- Si la poudre est versée trop rapidement dans le conduit de la torche, les nombreux échantillons peuvent fondre mutuellement et s'agglomérer pour former un solide asphérique. Dans une moindre situation, si la poudre de verre est trop volumineuse, l'ellipticité des échantillons récoltés s'en retrouve amplifiée.

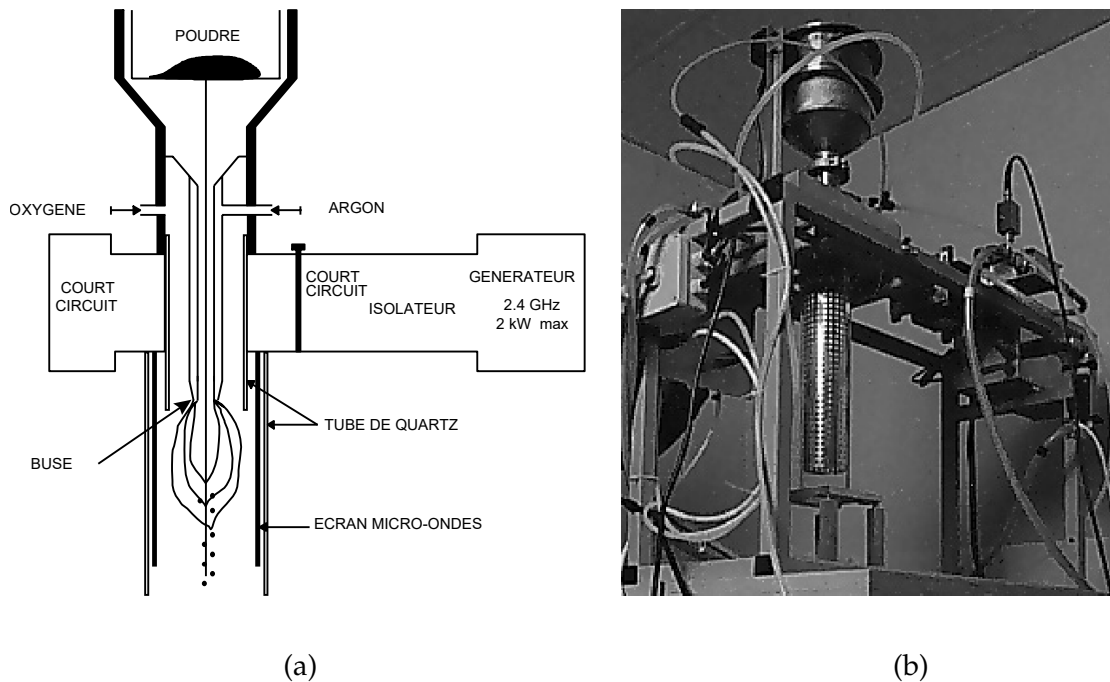


FIGURE 1.22 – (a) Schéma et (b) photographie de la torche plasma micro-onde

En fonction de la composition du verre, les paramètres de la torche plasma seront différents (puissance micro-onde, débit d' $O_2$ , débit d' $Ar$ ). Les verres utilisés sont chimiquement stables, ce qui leur permet de conserver leur structure amorphe par ce procédé (à partir du moment où la température de la flamme n'excède pas la température de sublimation de certains éléments composant la matrice vitreuse).

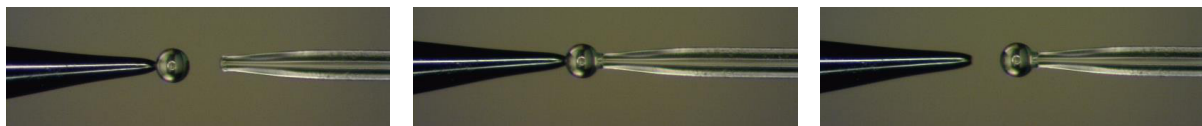
### 1.3.2 Collage de micro-sphère sur piédestal

Une fois les sphères obtenues, on passe à une étape de prospection au microscope pour sélectionner une sphère présentant le moins d'aspérités de volume et de surface. Cette étape est cruciale car le moindre défaut à l'intérieur du verre peut diffracter et diffuser le champ intracavité et diminuer fortement le facteur de qualité  $Q$  du résonateur. La sphère choisie est ensuite sélectionnée à l'aide d'une micropipette aspirante. On procède aux étapes suivantes :

- L'ensemble est aligné à une fibre optique dont le diamètre a été réduit aux alentours de  $50 \mu m$  (Figure 1.23a) et où l'on a préalablement déposé une goutte de colle sensible aux rayonnements  $UV$ . Cette fibre amincie fait office de piédestal et permet de manipuler le micro-résonateur simplement.
- Une fois l'alignement réalisé, la sphère est rapprochée délicatement du piédestal de façon à ce que la goutte de colle puisse figer la sphère sur la fibre sans

l'englober. L'ensemble est alors soumis au rayonnement d'une lampe *UV* pour polymériser la colle et assurer un maintien du résonateur sur le piédestal (Figure 1.23b).

- Lorsque la sphère est insolée, l'aspiration est coupée et l'ensemble sphère-piédestal et éloigné de la micro-pipette. On dispose ainsi d'une micro-sphère montée sur piédestal (Figure 1.23c).



(a)  
Alignement

(b)  
Contact et insolation

(c)  
Fin de l'aspiration

FIGURE 1.23 – Etapes de collage d'une micro-sphère sur un piédestal.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi les propriétés des résonateurs en anneau ainsi que les propriétés spectroscopiques des matériaux utilisés. Nous avons également présenté le processus de fabrication des micro-sphères en verre dopé Erbium. La propagation de la lumière dans de telles cavités et les propriétés optiques de tels modes de propagation, appelés modes de galerie (*WGM*), font l'objet du chapitre 2. Le facteur de qualité  $Q$  et les différents dispositifs de couplage au micro-résonateur sont présentés au chapitre 3.



# Chapitre 2

## Résonateur à modes de galerie

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Approche géométrique</b>	<b>45</b>
2.1.1	Position des résonances dans l'approximation géométrique	46
2.1.2	Analogie corpusculaire	46
2.1.3	Conclusion de l'approche géométrique	47
<b>2.2</b>	<b>Première approche ondulatoire</b>	<b>47</b>
2.2.1	Analogie corpusculaire	48
2.2.2	Mouvement angulaire	48
2.2.3	Mouvement radial	49
2.2.4	Quantification des mouvements angulaires et radiaux	50
2.2.5	Position des résonances dans l'approximation eikonale	51
2.2.6	Effet d'une légère ellipticité	52
<b>2.3</b>	<b>Le problème électromagnétique exact</b>	<b>54</b>
2.3.1	Position du problème	54
2.3.2	L'équation d'onde scalaire	55
2.3.3	La méthode de Hansen	57
2.3.4	Modes de galerie <i>TE</i> et <i>TM</i> dans une micro-sphère	58
2.3.5	Condition de résonance	63
2.3.6	Approximation du spectre des modes de galerie	64
<b>2.4</b>	<b>Spectre des modes de galerie</b>	<b>65</b>
2.4.1	Familles de modes	65



---

2.4.2	Ordres de grandeur . . . . .	67
<b>2.5</b>	<b>Approximation des champs pour <math>\ell \gg 1</math> et <math>\ell -  m  \ll \ell</math> . . . . .</b>	<b>68</b>
2.5.1	Expression des champs <b>E</b> et <b>B</b> . . . . .	69
2.5.2	Cas du mode fondamental . . . . .	69
<b>2.6</b>	<b>Volume de mode . . . . .</b>	<b>71</b>
2.6.1	Calcul formel du volume de mode . . . . .	72
2.6.2	Calcul formel pour $n = 1$ et $\ell =  m $ : modèle de F. Treussart . . . . .	74
2.6.3	Approximation du volume du mode fondamental à partir de l'expression de $\mathbf{E}_\ell^\ell(\mathbf{r})$ . . . . .	76
2.6.4	Ordre de grandeur du volume du mode fondamental . . . . .	78
<b>2.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>78</b>

---

Ce chapitre présente les propriétés principales des *WGM* dont nous nous servons dans la suite de ce manuscrit. Nous nous attarderons à décrire le champ électromagnétique circulant à l'intérieur de ces résonateurs pour en déduire les propriétés principales et les différentes familles de modes. Dans un premier temps, nous utiliserons le formalisme de l'optique géométrique pour décrire les modes de cavités puis nous utiliserons une approche plus rigoureuse par le biais de l'équation eikonale. Enfin, le problème électromagnétique exact est exposé ainsi que l'analogie quantique. Une fois le spectre *WGM* obtenu, nous présentons l'algorithme de calcul du volume de mode et en obtenons une expression approchée à partir d'approximations faites sur les expressions des champs précédemment obtenus.

## 2.1 Approche géométrique

Les micro-sphères que nous utilisons pour nos expériences ont des diamètres  $2a$  compris entre 50 et 200  $\mu\text{m}$ . Le paramètre de taille  $x = 2\pi a/\lambda$  permet de comparer la taille du résonateur à la longueur d'onde du champ électromagnétique circulant à l'intérieur. De ce fait, c'est un paramètre clé permettant de justifier ou non de la validité d'une approximation géométrique<sup>1</sup>. Dans notre cas, pour un champ électromagnétique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ , le paramètre de taille correspondant est compris entre 100 et 400. L'approximation géométrique est donc, dans un premier temps, tout à fait justifiée pour commencer l'étude des micro-résonateurs *WGM*<sup>2</sup>.

Nous considérons un rayon lumineux de longueur d'onde  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$  piégé dans une sphère de rayon  $a$  telle que  $a \gg \lambda$  et d'indice relatif  $N = N_{\text{sphère}}/N_{\text{milieu}}$  avec  $N > 1$ . Ce rayon reste confiné à l'intérieur de la sphère seulement s'il tombe sur le plan tangent à un point du dioptre avec un angle d'incidence  $i$  supérieur à l'angle de réflexion totale interne  $i_c = \arcsin(1/N)$ . Par réflexions successives le long de la paroi de la sphère, le chemin parcouru par le rayon se referme donnant lieu à un phénomène d'interférences. Les interférences sont constructives si le chemin optique associé est égal à un multiple entier, ordre d'interférence noté  $\ell$ , de la longueur d'onde.  $\ell$  représente alors le nombre de côtés du polygone formé par la trajectoire empruntée par le rayon dans la sphère, comme illustré sur la Figure 2.1 [66]. L'ensemble des

1. Le paramètre de taille fût introduit pour l'étude de la diffusion de la lumière par des particules sphériques par Gustave Mie en 1908 [15].

2. L'approximation géométrique n'est plus valable lorsque la propagation d'une onde électromagnétique s'effectue sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde du rayonnement étudié ou lorsqu'on s'intéresse plus particulièrement à la phase de l'onde.

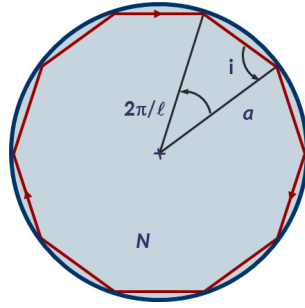


FIGURE 2.1 – Schéma représentatif de la trajectoire du rayon lumineux dans une sphère de rayon  $a$  et d'indice relatif  $N$

modes répondant à cette condition de retour en phase constitue le spectre des *WGM*. Si le rayon se propage très près de la paroi, c'est à dire si  $i \simeq \pi/2$ , on peut considérer que le chemin géométrique emprunté par le rayon est égal au périmètre de la sphère. La condition d'interférences constructives s'exprime, avec le paramètre de taille  $x$  :

$$Nx = \ell \quad (2.1)$$

Pour des valeurs plus faibles de  $i$ , le rayon pénètre plus profondément dans la sphère. Plus  $\ell$  sera faible, plus l'extension radiale du rayon lumineux sera importante. Cette extension a une valeur limite, définissant ainsi une caustique interne :  $r_1 = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$ , soit  $a/N$  pour la valeur extrême de  $r_1$ .

### 2.1.1 Position des résonances dans l'approximation géométrique

En terme de paramètre de taille, la position des résonances est donnée par la condition d'interférence 2.1. L'approximation géométrique donne lieu à un spectre de résonances séparées, dans l'espace de Fourier, d'une quantité  $\Delta_0$ , dite "intervalle spectral libre", définie par :

$$\Delta_0 = \frac{c}{2\pi Na} \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Analogie corpusculaire

L'indice  $\ell$  correspond au nombre de réflexions totales internes subies par le rayon lumineux sur un tour de cavité. Vue la symétrie sphérique du problème et la trajectoire du rayon, on peut définir un moment angulaire orbital  $\mathbf{L}$  pour un photon issu de ce rayon lumineux, comme illustré sur la Figure 2.2. Ce moment angulaire est défini par :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.3)$$

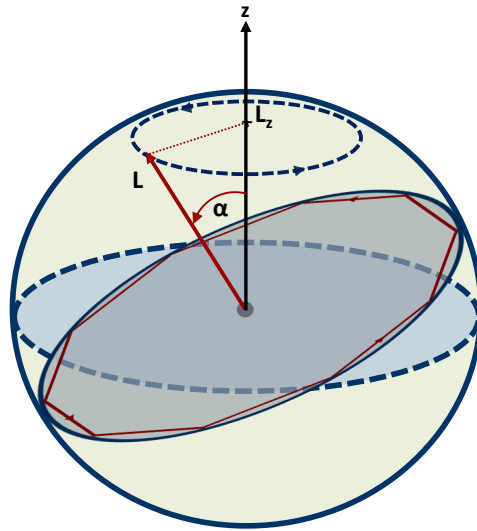


FIGURE 2.2 – Définition du moment angulaire  $\mathbf{L}$  et de sa projection  $L_z$  dans une sphère.

où  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  est la quantité de mouvement du photon et  $\mathbf{k}$  son vecteur d'onde.  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  forment un trièdre direct et sont perpendiculaires entre eux, nous avons directement, pour un photon de longueur d'onde  $\lambda$  dans une sphère de rayon  $a$  et d'indice  $N$  :

$$|\mathbf{L}| = \hbar N x = \hbar \ell \quad (2.4)$$

L'indice  $\ell$  s'identifie à la norme du moment angulaire des photons associés au WGM. Cependant, nous considérons ici un moment angulaire équivalent car  $\ell$  n'a pas d'unité (ou encore  $\hbar = 1$ ).

### 2.1.3 Conclusion de l'approche géométrique

Cette approche donne à un photon piégé dans un WGM un temps de stockage infini. Une telle propriété n'est pas physiquement acceptable tant que l'on ne rentre pas dans une description plus détaillée. Les résonateurs rencontrés dans ces travaux possèdent des diamètres de l'ordre de la centaine de  $\mu m$ .

## 2.2 Première approche ondulatoire

L'optique ondulatoire permet de décrire de manière plus précise les propriétés des WGM. Pour cela, on introduit un champ électrique qui s'écrit au point  $\mathbf{r}$  (orienté par rapport au centre de la sphère) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-j[\omega t - \mathcal{S}(\mathbf{r})]} \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{S}(\mathbf{r})$  est la phase accumulée sur le chemin optique entre les points  $|\mathbf{r}_0|$  et  $|\mathbf{r}|$  :

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k_0 N(s) ds \quad (2.6)$$

$s$  est l'abscisse curviligne et  $k_0$  la norme du vecteur d'onde dans le vide. Dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, *i.e.* lorsque la longueur d'onde est "petite" devant les variations de l'indice  $N(\mathbf{r})$ , la relation de dispersion est remplacée par l'équation eikonale [67]. En coordonnées sphériques, elle s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi}\right)^2 = N^2 k_0^2 \quad (2.7)$$

La séparation des variables radiales, angulaires et azimutales s'applique sur  $\mathcal{S}$  [68] en posant :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_R + \mathcal{S}_\Theta + \mathcal{S}_\Phi$$

### 2.2.1 Analogie corpusculaire

$\nabla \mathcal{S}$  se relie au moment angulaire  $\mathbf{L}$  en considérant que  $\mathcal{S}$  est l'action réduite telle que :

$$\mathcal{S} = \int \mathbf{p} \, d\mathbf{r}$$

Le moment angulaire équivalent associé au photon est tel que :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \nabla \mathcal{S} \quad (2.8)$$

En exprimant  $\mathbf{L}$  dans le référentiel tournant, on identifie ses différentes composantes en fonction de celle de  $\nabla \mathcal{S}$  et nous nous ramenons à un système de trois équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{S}_\Phi}{d\varphi} = L_Z \quad (2.9a) \\ \left(\frac{d\mathcal{S}_\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_Z^2}{\sin^2 \theta} = L^2 \quad (2.9b) \\ \left(\frac{d\mathcal{S}_R}{dr}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = N^2(r)k_0^2 \quad (2.9c) \end{array} \right.$$

qui décrivent le mouvement du rayon lumineux dans la sphère.

### 2.2.2 Mouvement angulaire

L'équation 2.9a exprime la conservation de la projection du moment angulaire  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_z = L_Z$  sur un axe de quantification, ici l'axe  $\mathbf{u}_z$ . Le champ aura alors une dépendance en  $\varphi$  de

la forme  $e^{jLz\varphi}$  [68]. Le moment angulaire  $\mathbf{L}$  est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $\mathbf{u}_z$  tel que  $\alpha = \arccos\left(\frac{L_z}{|\mathbf{L}|}\right)$  et est soumis à un mouvement de précession uniforme autour de celui-ci.

L'équation 2.9b exprime la conservation de la norme du moment angulaire  $\mathbf{L}$ , qui est une constante du mouvement dans une sphère parfaite [68]. Le mouvement du champ suivant  $\mathbf{u}_\theta$  est interprété comme une oscillation entre  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  et  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Au mouvement de précession uniforme de  $\mathbf{L}$  autour de  $\mathbf{u}_z$  est associé un mouvement de nutation.

### 2.2.3 Mouvement radial

Le mouvement radial (équation 2.9c) est une oscillation entre deux valeurs extrêmes qui sont les points de rebroussement donnés par  $r_1 = \frac{|\mathbf{L}|}{Nk_0} = \frac{a}{N}$  et  $r_2 = a$ . On retrouve la valeur de la caustique interne pour  $r_1$  et le rayon de la sphère pour  $r_2$ , lieu d'occurrence de la réflexion totale interne.

Pour être complet, étant donné qu'on travaille avec des angles supérieurs ou égaux à l'angle de réflexion totale interne  $i_c$ , nous devons prendre en considération l'effet *Goos-Hänchen*. Le déphasage induit par la réflexion totale, dépendant de la polarisation, décale latéralement le plan de réflexion initial (situé en  $a$ ) d'une valeur  $\delta_p$  et la réflexion a lieu en  $a_{\text{eff}} = a + \delta_p$  tel que :

$$Nk_0\delta_p \cos i = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}}{P \cos i}\right) \quad (2.10)$$

où :

$$P = \begin{cases} N & \text{pour un mode } TE \text{ (} \mathbf{E} \parallel \mathbf{u}_\theta ; \mathbf{H} \parallel \mathbf{u}_r \text{)} \\ N^{-1} & \text{pour un mode } TM \text{ (} \mathbf{E} \parallel \mathbf{u}_r ; \mathbf{H} \parallel \mathbf{u}_\theta \text{)} \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour des angles d'incidence proches de  $\pi/2$ , il vient :

$$Nk_0\delta_p \simeq \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} \quad (2.12)$$

La Figure 2.3 illustre la réflexion d'un rayon lumineux sur la surface de la sphère lorsque l'angle d'incidence est supérieur à  $i_c$ .

Le fait que le déphasage induit soit dépendant de la polarisation, et par extension la caustique externe, a pour conséquence que les modes *TE* et *TM* auront des fréquences de résonances différentes.

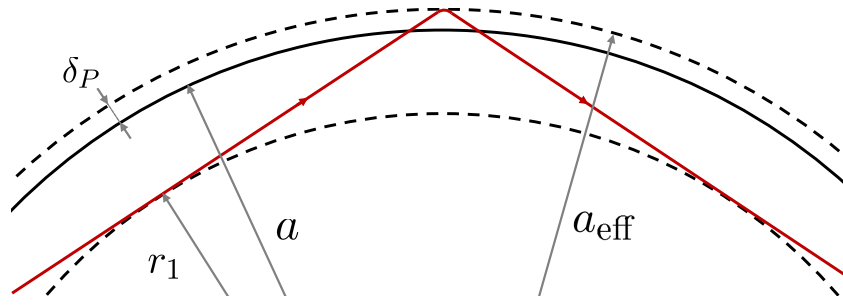


FIGURE 2.3 – Schéma de la trajectoire du trajet d'un rayon lumineux lors d'une réflexion dans un plan équatorial de la sphère, illustration de l'effet *Goos-Hänchen*.

## 2.2.4 Quantification des mouvements angulaires et radiaux

Une résonance est définie par un retour en phase sur chacune des composantes du mouvement du rayon lumineux dans la sphère. Mathématiquement, imposer l'égalité de l'intégration des trois équations du système 2.9 le long d'une période spatiale à un multiple entier de  $2\pi$  permet de définir trois nombres entiers, chacun étant associé à un mouvement particulier :  $n$  nombre radial,  $\ell$  nombre angulaire et  $m$  nombre azimutal.

Outre la quantification du retour en phase, il faut également prendre en compte les déphasages additionnels des différentes composantes, comme démontré par Landau & Lifchitz dans l'ouvrage "Théorie des champs" [69]. Le passage du rayon lumineux par une caustique ajoute un déphasage supplémentaire de  $-\pi/2$ . Ce phénomène a lieu en  $r_1$  et  $a_{\text{eff}}$  pour la variable radiale et en  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  et  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  pour la variable angulaire. L'intégration du système 2.9 permet de donner une expression pour les trois nombres quantiques  $n$ ,  $\ell$  et  $m$  :

$$\begin{cases} m = L_Z & (2.13a) \\ \ell + \frac{1}{2} = L & (2.13b) \\ n - \frac{1}{4} = \frac{L}{\pi} f\left(N \frac{x_{\text{eff}}}{L}\right) & (2.13c) \end{cases}$$

où  $f$  est la fonction définie par :

$$f : s \rightarrow \int_1^s \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}} du = \sqrt{s^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{s}\right) \quad (2.14)$$

Il convient de remarquer que les équations 2.13a et 2.13b sont les valeurs propres des opérateurs  $L$  et  $L_Z$  de la mécanique quantique dans l'approximation où  $\ell \gg 1$  (et avec  $\hbar = 1$ ).

Le nombre radial  $n$  est un nombre entier positif dont la valeur minimale est, selon sa définition par 2.13c, égale à 1. Il correspond au nombre d'extréma du champ entre la caustique interne et la caustique externe. Les nombres angulaire  $\ell$  et azimutal  $m$  définissent l'orientation du moment angulaire  $\mathbf{L}$  dans la sphère et conditionnent l'extension angulaire du WGM.  $m$  est la projection de  $\mathbf{L}$  sur l'axe  $\mathbf{u}_z$ , il est compris entre  $-\ell$  et  $\ell$ . Le moment angulaire  $\mathbf{L}$  est, lui, encadré par les valeurs des deux caustiques  $r_1$  et  $a_{\text{eff}}$ , tel que :

$$x_{\text{eff}} < \ell + \frac{1}{2} < Nx_{\text{eff}} \quad (2.15)$$

Compte tenu de l'équation 2.13c et du fait que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ , il vient l'encadrement suivant pour  $n$  :

$$0 < n - \frac{1}{4} < \frac{\ell + \frac{1}{2}}{\pi} \left[ \sqrt{N^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{N}\right) \right] \quad (2.16)$$

### Exemple

Prenons une micro-sphère de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  en verre d'indice  $N = 1.49$  où circule un champ électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ . Le paramètre de taille vaut  $x \simeq 203$ . Ceci donne un nombre  $\ell$  compris entre 203 et 302 ainsi qu'un nombre  $n$  pouvant aller jusqu'à 26.

## 2.2.5 Position des résonances dans l'approximation eikonale

L'équation 2.13c permet de déterminer la position des résonances :

$$Nx_{\text{eff}} = \left( \ell + \frac{1}{2} \right) f^{-1} \left( \frac{\pi}{\ell + \frac{1}{2}} \left( n - \frac{1}{4} \right) \right) \quad (2.17)$$

Une expression analytique est possible pour  $Nx_{\text{eff}}$  à partir du moment où l'on peut donner une forme approchée à  $f^{-1}$ . Cette dernière se développe en série de puissance autour de 0 à partir de l'expression 2.14. Tout calcul fait, on obtient :

$$f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{2} (3y)^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(y) \quad (2.18)$$

Ainsi, nous obtenons la position des résonances dans l'approximation eikonale pour une sphère parfaite :

$$Nx_{\text{eff}} = \left( \ell + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{\ell + \frac{1}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{3\pi}{2} \left( n - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (2.19)$$



qui devient, en prenant en compte la valeur de  $\delta_p$  :

$$Nx = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\ell + \frac{1}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{2}{3}} - \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} \quad (2.20)$$

Entre deux modes  $|n, \ell\rangle$  et  $|n, \ell + 1\rangle$  de même polarisation, nous retrouvons l'intervalle spectral libre "géométrique"  $\Delta_0$  mais modifié d'un facteur  $g(\ell)$  tel que :

$$g(\ell) = \frac{\partial Nx_{\text{eff}}}{\partial \ell} = 1 + \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{n - \frac{1}{4}}{\ell + \frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}} \quad (2.21)$$

Lorsque l'indice  $\ell$  augmente, l'espacement entre les WGM  $\Delta^{\ell, \ell+1}$  diminue. Les WGM ne sont pas espacés régulièrement. Dans la suite, nous nous référerons à  $\Delta_0$  en le nommant "pseudo" intervalle spectral libre.

### 2.2.6 Effet d'une légère ellipticité

Les résonateurs utilisés en pratique ne sont jamais parfaits et présentent une ellipticité résiduelle (inférieure au %). Une ellipticité, si petite soit elle, permet de lever la dégénérescence en  $m$  dans le spectre des WGM. Pour modéliser un ellipsoïde, nous considérons une sphère dont l'axe  $\mathbf{u}_z$  aurait subi une élongation. Le rayon paramétrique  $\bar{r}$  de l'ellipsoïde s'exprime comme [46] :

$$\bar{r}(\theta) = a \left[1 + \frac{e}{3} (3 \cos^2 \theta - 1)\right] \quad (2.22)$$

où  $\theta$  est l'angle polaire,  $a$  le rayon "moyen" de la sphère et  $e$  son ellipticité.  $e$  est définie à partir des rayons polaire et équatorial, respectivement notés  $r_p$  et  $r_e$  :

$$e = \frac{r_p - r_e}{a} \quad (2.23)$$

où  $r_p = \bar{r}(\theta = 0)$  et  $r_e = \bar{r}(\theta = \pi/2)$ . L'expression 2.22 n'est valable que pour de faibles ellipticités ( $e \ll 1\%$ ). Considérons un champ électromagnétique circulant dans un ellipsoïde de révolution et dont le moment angulaire  $\mathbf{L}$  est orienté d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $\mathbf{u}_z$  tel que  $\cos \alpha = L_z/L$ , comme représenté sur la Figure 2.4. Sur un tour de cavité, la trajectoire du rayon lumineux est une ellipse dont les demi-axes sont les rayons  $r_e$  et  $r_\alpha$  avec :

$$r_\alpha = \bar{r}(\pi/2 - \alpha) = a \left(1 + \frac{2e}{3} - e \cos^2 \alpha\right) \quad (2.24)$$

En faisant l'approximation du périmètre de l'ellipse par  $p \simeq \pi(r_e + r_\alpha)$  et en notant  $p_0 = 2\pi a$ , le périmètre de l'ellipse s'exprime :

$$p = p_0 \left[1 + \frac{e}{6} (1 - 3 \cos^2 \alpha)\right] \quad (2.25)$$

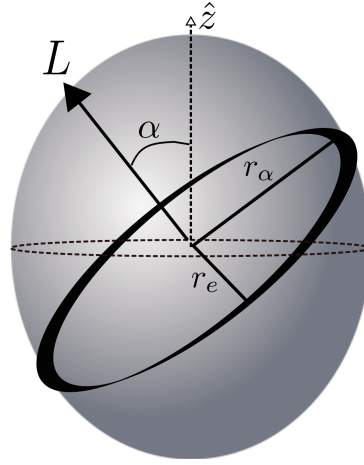


FIGURE 2.4 – Représentation d’un ellipsoïde de révolution d’axe  $\mathbf{u}_z$  de type prolate. Le champ électromagnétique circulant dans ce résonateur est caractérisé par son moment angulaire  $\mathbf{L}$  et décrit une trajectoire elliptique d’axes  $r_e$  et  $r_\alpha$ .  $\mathbf{L}$  précesse’ autour de l’axe  $\mathbf{u}_z$  avec un angle  $\alpha = \arccos(L_z/L)$ .

La correction au périmètre apportée par l’ellipticité modifie légèrement la position de la résonance :

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -\frac{\Delta v}{v_0} = -\frac{\Delta x}{x_0} \quad (2.26)$$

Pour un mode tel que  $\ell - |m| \ll \ell$ , on obtient :

$$\frac{\Delta x_{n,\ell,m}}{x_0} = \frac{e}{3} \left[ 1 - 3 \left( \frac{\ell - |m|}{\ell} \right) \right] \quad (2.27)$$

L’écart de position entre deux modes séparées d’une quantité  $|m'| - |m| = \Delta|m|$  est alors tel que :

$$\frac{\Delta x}{\Delta|m|} = e \frac{x_0}{\ell} = \frac{e}{N} \quad (2.28)$$

La position des résonances dans un ellipsoïde tire son expression analytique de l’expression 2.20 corrigée de l’effet de l’ellipticité :

$$Nx_{n,\ell,m}^P \simeq \left[ \left( \ell + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{\ell + \frac{1}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{3\pi}{2} \left( n - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} \right] \times \left[ 1 + \frac{e}{3} \left( 1 - 3 \frac{\ell - |m|}{\ell} \right) \right] \quad (2.29)$$

Cette expression n’est valable que pour des résonateurs de faible ellipticité, cependant Gorodetsky et Fomin [70] ont montré que l’approche eikonale permet de trouver les positions des résonances pour des résonateurs présentant une forte ellipticité.

De la même façon que l’on définit la vitesse de groupe dans une structure dispersive par  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  où  $k$  est le vecteur d’onde d’un champ en  $e^{\pm jkz}$ , la propagation sur la

coordonnée  $\varphi$  est définie par  $\frac{dS_\Phi}{d\varphi} = m$ . On a donc, sur la coordonnée angulaire  $\varphi$  un vecteur d'onde équivalent de norme  $|m|$ . La vitesse de groupe équivalente du moment angulaire s'écrit alors comme :

$$\frac{\partial v_{n,\ell,m}}{\partial |m|} \xrightarrow{m \simeq \ell} e \frac{v_0}{\ell} = \frac{1}{T_{\text{prec}}} \quad (2.30)$$

où  $v = \frac{cx}{2\pi a}$ . On rappelle le temps mis par la lumière pour effectuer un tour de cavité :

$$\tau_L = \frac{2\pi Na}{c} = \frac{\ell}{v_0} \quad (2.31)$$

Le rapport entre ces deux grandeurs est donc :

$$\frac{T_{\text{prec}}}{\tau_L} = e \quad (2.32)$$

ce qui signifie que la lumière circule dans le résonateur avec un mouvement de précession uniforme autour de l'axe  $\mathbf{u}_z$  très lent devant le temps mis pour parcourir le périmètre de la cavité. Ceci justifie le fait que le rayon lumineux décrit *effectivement* une ellipse sur un tour de cavité.

## 2.3 Le problème électromagnétique exact

Dans cette section, nous exposons le problème rigoureux des WGM. Nous décrivons succinctement les étapes de résolution en utilisant la méthode de Hansen [71] puis développons les dépendances radiale et angulaire des champs électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

### 2.3.1 Position du problème

Le problème électromagnétique exact nécessite de résoudre l'équation d'Helmholtz pour le champ vectoriel  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ , représentant  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  ou  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + k^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0 & (2.33a) \\ \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0 & (2.33b) \end{cases}$$

où  $k$  est le vecteur d'onde tel que  $\sqrt{\epsilon\mu_0}\omega = N\omega/c = 2\pi N/\lambda_0 = Nk_0$  où  $c$  est la célérité de la lumière et  $\lambda_0$  la longueur d'onde du champ dans le vide. La symétrie du problème impose la résolution du problème en coordonnées sphériques. Nous cherchons à obtenir l'expression des champs à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère diélectrique de rayon  $a$  et d'indice relatif  $N$  en appliquant les lois de l'électromagnétisme.

Le caractère vectoriel des solutions exige de travailler avec le laplacien vectoriel en coordonnées sphériques dont l'expression est donnée par :

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \\ - \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{2U_r}{r^2} - \frac{2 \cotan \varphi}{r^2} U_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 \cotan \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} U_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \\ + \frac{2 \cotan \varphi}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} U_\theta \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Cette expression bien compliquée de  $\Delta \mathbf{U}$  n'est pas résolvable dans un cas général car chaque composante est une équation aux dérivées partielles faisant intervenir les trois composantes de  $\mathbf{U}$ . D'ailleurs, dans un système de coordonnées autre que cartésiennes, le système n'a pas de solution simple. Néanmoins, la méthode de Hansen [71,72] permet de trouver les solutions vectorielles à partir de l'équation d'onde scalaire.

### 2.3.2 L'équation d'onde scalaire

L'équation d'onde scalaire s'écrit :

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.35)$$

En coordonnées sphériques, les solutions prennent la forme :

$$\Psi_\ell^m(r, \theta, \varphi) = f(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

où  $Y_\ell^m$  est l'harmonique sphérique de degré  $\ell$  et d'ordre  $m$  et  $f$  est une fonction radiale.

#### Dépendance angulaire

En mécanique quantique, les harmoniques sphériques  $Y_\ell^m$  sont les fonctions propres de l'opérateur "moment angulaire"  $\hat{L}^2$  associées aux valeurs propres  $\ell(\ell + 1)$ . Elles s'écrivent sous la forme :

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = C_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta) e^{jm\varphi}$$

avec  $C_{\ell m}$  une constante de normalisation :

$$C_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}}$$

et  $P_\ell^m$  est la fonction de Legendre de degré  $\ell$  définie pour  $m \geq 0$  par :

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1 - x)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \quad \text{et} \quad P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x)$$

où  $P_\ell$  est le polynôme de Legendre :

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left( (x^2 - 1)^\ell \right)$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur  $[-1, 1]$  :

$$\begin{aligned} \langle P_k^m | P_\ell^m \rangle &= \int_{-1}^1 P_k^m(x) P_\ell^m(x) dx = 0 \\ \langle P_\ell^m | P_\ell^m \rangle &= \int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2(\ell + m)!}{(2\ell + 1)(\ell - m)!} \end{aligned}$$

### Dépendance radiale

Lorsque l'on cherche des fonctions radiales de la forme :

$$f_\ell(r) = \frac{r_\ell(r)}{r}$$

l'équation différentielle de  $r_\ell$  s'écrit, au prix du changement de variable  $kr \rightarrow \rho$  :

$$\rho^2 r_\ell''(\rho) + \left( \rho^2 - \ell(\ell + 1) \right) r_\ell(\rho) = 0 \quad (2.36)$$

qui est une équation de Riccati-Bessel. Ses solutions sont les fonctions de Riccati d'ordre  $\ell$  de première et deuxième espèce, notées respectivement  $\psi_\ell$  et  $\chi_\ell$  :

$$\psi_\ell(x) = x j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\ell + \frac{1}{2}}(x) \quad (2.37)$$

$$\chi_\ell(x) = -x y_\ell(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{\ell + \frac{1}{2}}(x) \quad (2.38)$$

où  $j$  et  $y$  sont respectivement les fonctions de Bessel sphériques de première et deuxième espèce et  $J$  et  $Y$  les fonctions de Bessel cylindriques de première et deuxième espèce. La fonction radiale  $f_\ell$  est une combinaison linéaire de  $\psi_\ell$  et  $\chi_\ell$  :

$$f_\ell(kr) = \alpha \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} + \beta \frac{\chi_\ell(kr)}{kr} \quad (2.39)$$

où  $\{\alpha_\ell, \beta_\ell\} \in \mathbb{C}^2$ . Compte tenu de ce qui précède, la solution générale  $\Psi_\ell^m$  de l'équation d'onde scalaire en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Psi_\ell^m(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \alpha_\ell \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} + \beta_\ell \frac{\chi_\ell(kr)}{kr} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (2.40)$$

### 2.3.3 La méthode de Hansen

Le problème vectoriel nécessite de résoudre l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{U} + k^2 \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

En coordonnées sphériques, les solutions sont construites à partir de la solution de l'équation d'onde scalaire  $\Psi_\ell^m$  [71,72]. Ces trois solutions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\ell^m &= \nabla \Psi_\ell^m \\ \mathbf{M}_\ell^m &= \mathbf{L}_\ell^m \wedge \mathbf{r} \\ \mathbf{N}_\ell^m &= \frac{1}{k} \nabla \wedge \mathbf{M}_\ell^m \end{aligned} \quad (2.41)$$

En utilisant le développement de  $\Psi_\ell^m$  (équation 2.40), on obtient une expression simple de  $\mathbf{L}_\ell^m$ ,  $\mathbf{M}_\ell^m$  et  $\mathbf{N}_\ell^m$ . Elles impliquent l'utilisation des trois harmoniques sphériques vectorielles, notées  $\mathbf{X}_\ell^m$ ,  $\mathbf{Y}_\ell^m$  et  $\mathbf{Z}_\ell^m$  définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\ell^m &= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \nabla Y_\ell^m \wedge \mathbf{r} \\ \mathbf{Y}_\ell^m &= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} r \nabla Y_\ell^m \\ \mathbf{Z}_\ell^m &= Y_\ell^m \mathbf{u}_r \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ces fonctions vectorielles forment une base orthonormée. De plus,  $\mathbf{X}_\ell^m$  et  $\mathbf{Y}_\ell^m$  sont toutes les deux orthoradiales ( $\mathbf{X}_\ell^m \cdot \mathbf{r} = \mathbf{Y}_\ell^m \cdot \mathbf{r} = 0$ ).

$\mathbf{X}_\ell^m$ ,  $\mathbf{Y}_\ell^m$  et  $\mathbf{Z}_\ell^m$  s'écrivent également à partir de  $P_\ell^m(\cos \theta)$  comme :

$$\mathbf{X}_\ell^m = \frac{C_{\ell m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left( j \frac{m}{\sin \theta} P_\ell^m(\cos \theta) \mathbf{u}_\theta + \sin \theta (P_\ell^m)'(\cos \theta) \mathbf{u}_\varphi \right) e^{jm\varphi} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{Y}_\ell^m = \frac{C_{\ell m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left( -\sin \theta (P_\ell^m)'(\cos \theta) \mathbf{u}_\theta + j \frac{m}{\sin \theta} P_\ell^m(\cos \theta) \mathbf{u}_\varphi \right) e^{jm\varphi} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{Z}_\ell^m = C_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta) e^{jm\varphi} \mathbf{u}_r \quad (2.45)$$

$\mathbf{L}_\ell^m$ ,  $\mathbf{M}_\ell^m$  et  $\mathbf{N}_\ell^m$  se réécrivent alors comme :

$$\mathbf{L}_\ell^m = \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f_\ell(kr)}{r} \mathbf{Y}_\ell^m + k f_\ell'(kr) \mathbf{Z}_\ell^m \quad (2.46)$$

$$\mathbf{M}_\ell^m = \sqrt{\ell(\ell+1)} f_\ell(kr) \mathbf{X}_\ell^m \quad (2.47)$$

$$\mathbf{N}_\ell^m = \sqrt{\ell(\ell+1)} \left( \frac{1}{kr} \frac{\partial r f_\ell(kr)}{\partial r} \mathbf{Y}_\ell^m + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f_\ell(kr)}{kr} \mathbf{Z}_\ell^m \right) \quad (2.48)$$

Le champ  $\mathbf{U}$ , solution de l'équation d'onde vectorielle en coordonnées sphériques, est une combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\mathbf{U}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \alpha_\ell^m \mathbf{L}_\ell^m(r, \theta, \varphi) + \beta_\ell^m \mathbf{M}_\ell^m(r, \theta, \varphi) + \gamma_\ell^m \mathbf{N}_\ell^m(r, \theta, \varphi) \right) \quad (2.49)$$

où  $\{\alpha_\ell^m, \beta_\ell^m, \gamma_\ell^m\} \in \mathbb{C}^3$ .

### 2.3.4 Modes de galerie *TE* et *TM* dans une micro-sphère

Lorsque l'on considère des champs en un point  $\mathbf{r}$  éloigné de toutes sources ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  et  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), ils sont décrits par  $\mathbf{M}_\ell^m$  et  $\mathbf{N}_\ell^m$  seulement. Deux cas sont à considérer en fonction de la nature du multipôle rayonné :

- (i) s'il est de nature électrique, le champ  $\mathbf{E}$  est colinéaire à  $\mathbf{M}_\ell^m$  et le mode optique considéré est transverse électrique (*TE*) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = A_{i/o}^{TE} \mathbf{M}_\ell^m(r, \theta, \varphi)$$

où  $A_{i/o}^{TE}$  est l'amplitude complexe du mode dépendant du point d'observation ( $i$  à l'intérieur de la sphère,  $o$  en dehors). Le champ  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  est, lui, colinéaire à  $\mathbf{N}_\ell^m$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = j \frac{k}{\omega} A_{i/o}^{TE} \mathbf{N}_\ell^m(r, \theta, \varphi)$$

- (ii) s'il est de nature magnétique, le champ  $\mathbf{E}$  est colinéaire à  $\mathbf{N}_\ell^m$  et le mode optique considéré est transverse magnétique (*TM*) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = A_{i/o}^{TM} \mathbf{N}_\ell^m(r, \theta, \varphi)$$

Le champ  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  est, lui, colinéaire à  $\mathbf{M}_\ell^m$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = j \frac{k}{\omega} A_{i/o}^{TM} \mathbf{M}_\ell^m(r, \theta, \varphi)$$

$\mathbf{M}_\ell^m$  est purement orthoradiale tandis que  $\mathbf{N}_\ell^m$  est composite : elle possède une composante suivant  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{u}_\varphi$ . Suivant la polarisation du mode considéré, on conçoit a posteriori que  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ou  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  soit colinéaire à  $\mathbf{M}_\ell^m$ .

Les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  se développent alors en fonction de  $\mathbf{X}_\ell^m$ ,  $\mathbf{Y}_\ell^m$  et  $\mathbf{Z}_\ell^m$  :

$$\text{Mode } TE \begin{cases} \mathbf{E}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\ell(\ell+1)} A_{i/o}^{TE} \frac{r_\ell(kr)}{kr} \mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) &= j \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{k}{\omega} A_{i/o}^{TE} \left[ \frac{r'_\ell(kr)}{kr} \mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{r_\ell(kr)}{k^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) \right] \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\text{Mode } TM \begin{cases} \mathbf{E}_{\ell,m}^{TM}(\mathbf{r}) &= \sqrt{\ell(\ell+1)} A_{i/o}^{TM} \left[ \frac{r'_\ell(kr)}{kr} \mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{r_\ell(kr)}{k^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) \right] \\ \mathbf{B}_{\ell,m}^{TM}(\mathbf{r}) &= j \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{k}{\omega} A_{i/o}^{TM} \frac{r_\ell(kr)}{kr} \mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.51)$$

La Figure 2.5 donne trois exemples de distribution angulaire du vecteur de Poynting associé à des modes *TE*. Nous avons considéré une sphère de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  et d'indice  $N = 1.49$ , la longueur d'onde du champ électromagnétique est  $\lambda_0 = 1563 \text{ nm}$ . Les *WGM* sont caractérisés par  $n = 1$  et  $\ell = 288$ . Les trois cas correspondent respectivement à  $\ell - |m| = 0$  (Fig. 2.5a),  $\ell - |m| = 1$  (Fig. 2.5b) et  $\ell - |m| = 2$  (Fig. 2.5c).

Les indices  $\ell$  et  $m$  proviennent des harmoniques sphériques.  $\ell$  est le nombre total de passage par zéro,  $m$  est le nombre de passage par zéro sur une longitude (*i.e.* suivant la direction  $\mathbf{u}_\varphi$ ) tandis que  $\ell - |m|$  correspond au nombre de passage par zéro sur une latitude (*i.e.* suivant la direction  $\mathbf{u}_\theta$ ). Ainsi, plus  $\ell - |m|$  augmente, plus le nombre de lobes d'énergie augmente dans une coupe transverse de la sphère. Plus  $\ell - |m|$  est élevé, plus la distribution angulaire du champ dans la cavité est importante, donnant



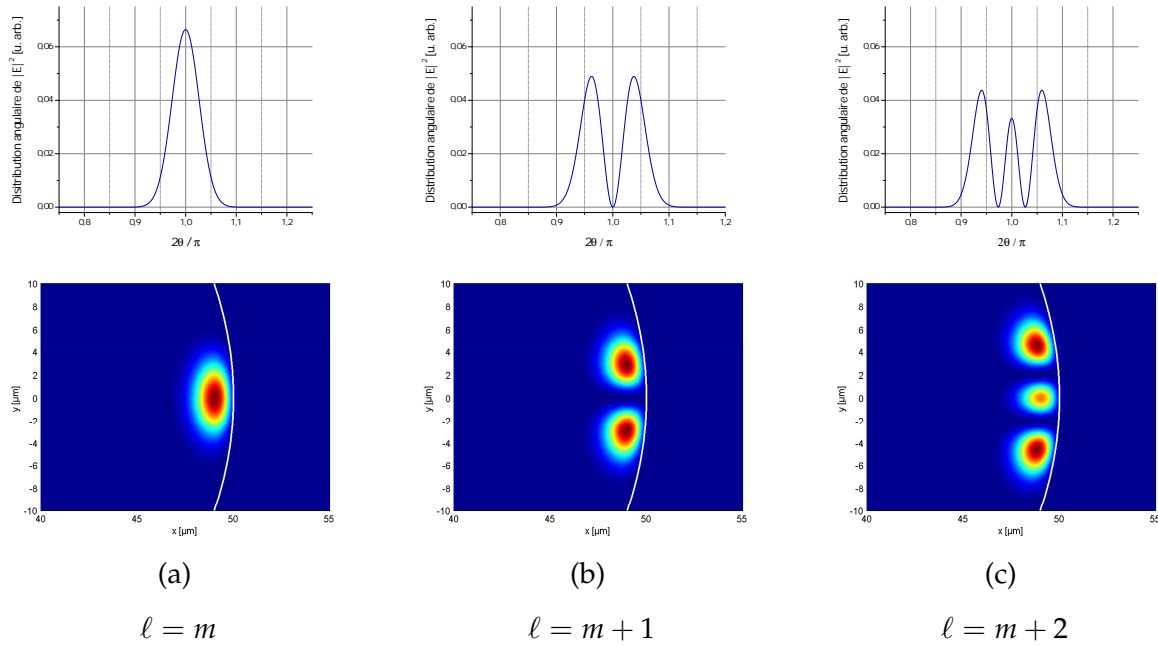


FIGURE 2.5 – Distributions angulaires du vecteur de Poynting dans une sphère de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  pour un mode TE tel que  $n = 1$ ,  $\ell = 288$  et  $\ell - |m| = 0$  (a), 1 (b) et 2 (c).

lieu à des volumes de modes plus importants.

### Remarque 1 : fonction radiale dans les deux milieux distincts

La fonction de Riccati-Bessel  $\chi_\ell$  est irrégulière en 0, elle est donc inadaptée pour décrire chaque champ à l'intérieur de la sphère. Ainsi, pour  $r \leq a$ , on aura  $\alpha_i = 1$  et  $\beta_i = 0$  : la fonction radiale des champs est alors décrite seulement par  $\psi_\ell$ . En dehors de la cavité, l'onde électromagnétique prend une nature évanescente jusqu'au point de rebroussement correspondant à la caustique externe, l'onde redevient radiative dès que cette caustique est dépassée. Ces oscillations représentent les pertes par diffraction de la lumière par une surface incurvée. En pratique, ces pertes sont très faibles devant les autres termes, si bien qu'on peut négliger la contribution de  $\psi_\ell$  en dehors de la sphère [66]. Cette approximation est d'autant plus vérifiée que le diamètre de la sphère considérée est important.

Fort de cette dernière remarque, les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  s'écrivent :

$$\text{Mode TE} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) = \begin{cases} A_i^{TE} \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} \mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) & \text{pour } r \leq a \\ A_o^{TE} \frac{\chi_\ell(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) & \text{pour } r > a \end{cases} \\ \mathbf{B}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) = \begin{cases} i \frac{k}{\omega} A_i^{TE} \left[ \frac{\psi'_\ell(kr)}{kr} \mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{\psi_\ell(kr)}{k^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) \right] & \text{pour } r \leq a \\ i \frac{k_0}{\omega} A_o^{TE} \left[ \frac{\chi'_\ell(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{\chi_\ell(k_0 r)}{k_0^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) \right] & \text{pour } r > a \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

$$\text{Mode TM} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\ell,m}^{TM}(\mathbf{r}) = \begin{cases} A_i^{TM} \left[ \frac{\psi'_\ell(kr)}{kr} \mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{\psi_\ell(kr)}{k^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) \right] & \text{pour } r \leq a \\ A_o^{TM} \left[ \frac{\chi'_\ell(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{\chi_\ell(k_0 r)}{k_0^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) \right] & \text{pour } r > a \end{cases} \\ \mathbf{B}_{\ell,m}^{TM}(\mathbf{r}) = \begin{cases} i \frac{k}{\omega} A_i^{TM} \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} \mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) & \text{pour } r \leq a \\ i \frac{k_0}{\omega} A_{i/o}^{TM} \frac{\chi_\ell(kr)}{k_0 r} \mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) & \text{pour } r > a \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

où  $\psi_\ell$  et  $\chi_\ell$  sont les fonctions définies par 2.37 et 2.38.

### Remarque 2 : analogie quantique du puits de potentiel

L'équation radiale 2.36 se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} -\Delta r_\ell(r) + \underbrace{\left( k_0^2 - k(r)^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right)}_{V_{\text{eff}}(E,r)} r_\ell(r) &= k_0^2 r_\ell(r) \\ -\Delta r_\ell(r) + V_{\text{eff}}(E,r) r_\ell(r) &= E r_\ell(r) \end{aligned} \quad (2.54)$$

ce qui correspond formellement à l'équation de Schrödinger indépendante du temps d'une particule d'énergie  $k_0^2$  soumise à un pseudo-potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  [73]. Le pseudo-potentiel est un un potentiel en "poche" dû à deux contributions : la discontinuité de l'indice  $1 - N^2(r)$  et le moment angulaire  $\ell(\ell+1)/r^2$ . On note que  $V_{\text{eff}}$  dépend de l'énergie  $k_0^2$  du mode considéré.

Les solutions de l'équation  $V_{\text{eff}} = k_0^2$  nous donnent la valeur des deux caustiques  $r_1$  et

$r_2$ , respectivement interne et externe :

$$\begin{aligned} r_1(k_0) &= \frac{a}{Nx} \sqrt{\ell(\ell+1)} = \frac{1}{Nk_0} \sqrt{\ell(\ell+1)} \\ r_2(k_0) &= Nr_1(k_0) = \frac{1}{k_0} \sqrt{\ell(\ell+1)} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Le champ confiné à l'intérieur de la sphère verra un puits de potentiel plus ou moins étroit et plus ou moins profond en fonction de sa propre énergie, *i.e.* de sa longueur d'onde via  $k_0$ . Le nombre d'extréma du champ entre les deux caustiques est égal au nombre radial  $n$  défini précédemment (cf. § 2.2.3).

Pour une famille de modes d'indice  $\ell$  donné, un puits relativement étroit ne pourra confiner qu'un mode d'indice  $n = 1$  si son énergie est assez faible. Cependant, si l'énergie du mode augmente, *i.e.* si l'on considère des modes aux longueurs d'ondes plus courtes, alors le puits sera de plus en plus large (pour ce même nombre  $\ell$ ) et d'autres modes d'indice  $n$  plus élevé pourront être confinés. Ainsi, pour un même nombre  $\ell$ , les modes pouvant être confinés (et correspondants aux modes  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ne seront pas localisés aux mêmes endroits sur le spectre des WGM, dans le sens où ils auront des longueur d'ondes très différentes.

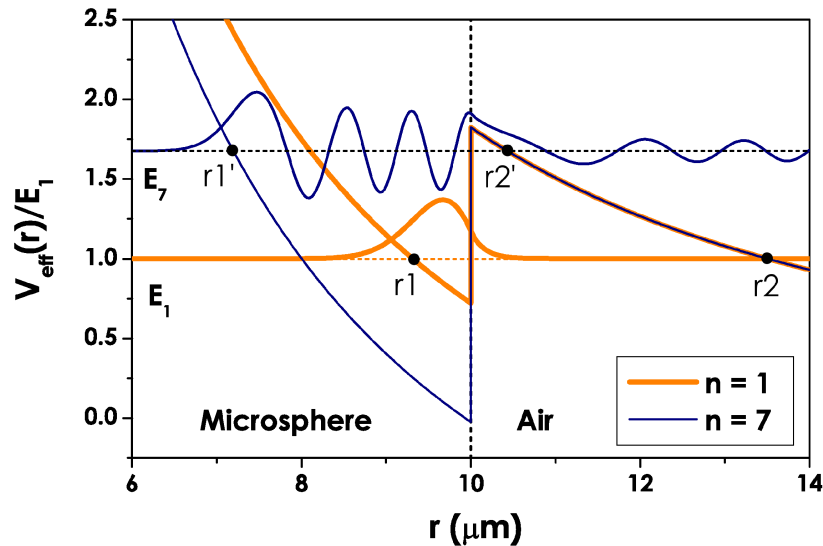


FIGURE 2.6 – Exemples de potentiels effectifs et de leurs fonctions radiales associées pour  $n = 1$  et  $n = 7$  dans le cas d'un mode  $TE$ ,  $\ell = 100$ , se propageant dans une micro-sphère de rayon  $a = 10 \mu\text{m}$  et d'indice  $N = 1.45$ . Le premier mode est un champ électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda_{n=1} = 873.2 \text{ nm}$  tandis que le second est à  $\lambda_{n=7} = 674.0 \text{ nm}$

A titre d'exemple, la Figure 2.6 représente deux exemples de fonction radiale se propageant dans une micro-sphère en silice de rayon  $a = 10 \mu\text{m}$ . Nous avons considéré un mode  $TE$  caractérisé par un indice  $\ell = 100$  pour  $n = 1$  et  $n = 7$ . L'axe des ordonnées a été normalisé par rapport à l'énergie du mode  $|n = 1, \ell = 100\rangle$ . Cet exemple permet de tirer quelques propriétés des  $WGM$ .

- **pour  $r < r_1$**  : le potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  est infiniment supérieur à l'énergie  $E$  du mode considéré. La fonction d'onde associée à l'intérieur de la barrière de potentiel est de type évanescence :  $\exp +Nk_0(r_1 - r)$ .
- **pour  $r_1 < r < a$**  : du fait de la décroissance du potentiel en  $r^{-2}$ , l'énergie du mode devient supérieure à  $V_{\text{eff}}$  et la fonction d'onde devient oscillante :  $\exp \pm jNk_0r$ . C'est dans cette zone que les modes sont confinés (états liés).
- **pour  $a < r < r_2$**  : la discontinuité due au changement de milieu entraîne une remontée de la valeur du potentiel  $V_{\text{eff}}$  au dessus de l'énergie du mode considéré en  $r = a$ . Ce mode voit alors une barrière de potentiel dont la largeur décroît avec le nombre radial  $n$ . La fonction d'onde est de type évanescence :  $\exp -k_0(r - a)$ . A titre d'exemple, l'énergie  $E_7$  est plus importante que  $E_1$ , si bien que la barrière de potentiel vue par le mode  $n = 7$  est bien plus courte que celle vue par le mode  $n = 1$ . De ce fait, la probabilité de passage par effet tunnel pour ce mode est plus importante (états quasi-liés).
- **pour  $r_2 < r$**  : après la caustique externe, l'énergie du mode redevient supérieure au potentiel  $V_{\text{eff}}$  et la fonction d'onde redevient de type oscillante. Il est à noter que pour de faibles valeurs de  $n$ , la portion d'énergie présente dans le milieu extérieur est négligeable car la barrière de potentiel  $[a; r_2]$  est très large. Ceci n'est plus valable pour de plus grandes valeurs de  $n$  où une partie du mode s'échappe. Les  $WGM$  ne sont pas considérés comme des modes guidés mais comme des modes à fuites.

### 2.3.5 Condition de résonance

En ne considérant que des  $WGM$  très confinés ( $n = 1$ ), nous pouvons négliger leur partie radiative dans le milieu extérieur, ce qui revient à exprimer la fonction radiale en dehors de la sphère exclusivement par  $\chi_\ell$ . En procédant ainsi, on ne traite que des  $WGM$  de haut facteur de qualité intrinsèque  $Q_0$ . Quel que soit le mode considéré ( $TE$  ou  $TM$ ), la condition de résonance s'écrit, à partir des conditions de continuité des

champs, comme :

$$P \frac{\psi'_\ell(ka)}{\psi_\ell(ka)} = \frac{\chi'_\ell(ka)}{\chi_\ell(ka)} \quad (2.56)$$

où  $P$  est le paramètre de polarisation ( $P = N$  pour un mode  $TE$  et  $P = 1/N$  pour un mode  $TM$ ). Compte tenu de l'ordre  $\ell$  élevé des fonctions, la solution ne peut être que numérique. Néanmoins, si l'on considère des résonateurs de grande taille ( $WGM$  tels que  $\ell \gg 1$ ), les fonctions de Bessel et de Riccati sont remplacées par leurs développements asymptotiques en puissance de  $\ell$  (développement de Debye) [74].

### 2.3.6 Approximation du spectre des modes de galerie

La condition de résonance 2.56 s'écrit également à partir des fonctions de Bessel  $J_\nu$  et de Neumann  $Y_\nu$  d'ordre  $\nu = \ell + \frac{1}{2}$  :

$$P \frac{J'_\nu(ka)}{J_\nu(ka)} = \frac{Y'_\nu(ka)}{Y_\nu(ka)} \quad (2.57)$$

avec  $ka = Nx$ . Du fait de la distribution radiale des  $WGM$ , nous avons encadré  $\nu$  entre  $x$  et  $Nx$  (équation 2.15). Pour des modes très bien confinés,  $|Nx - \nu|$  est proche de zéro. Cette différence s'exprime<sup>3</sup> en  $\nu^{1/3}$  :

$$Nx = \nu + z\nu^{1/3} \quad (2.58)$$

avec  $z = \mathcal{O}(1)$ . Pour  $\nu \gg 1$ , la condition de résonance 2.57 devient [74] :

$$P \frac{2^{1/3} \text{Ai}'(-2^{1/3}z)}{\nu^{1/3} \text{Ai}(-2^{1/3}z)} = \sqrt{\left(\frac{\nu}{x}\right)^2 - 1} \quad (2.59)$$

où  $\text{Ai}$  est la fonction d'Airy et  $\text{Ai}'$  sa dérivée. Pour les sphères de grande taille ( $a \gg \lambda$ ), puisque  $\nu \gg 1$ , l'effet de résonance n'est obtenu que lorsque  $\nu^{1/3} \text{Ai}(-2^{1/3}z)$  est proche de zéro. Il faut donc que  $\text{Ai}(-2^{1/3}z)$  compense  $\nu^{1/3}$ , c'est à dire que  $-2^{1/3}z$  soit proche d'un zéro de la fonction d'airy  $\text{Ai}$ , noté  $\alpha_n$  :

$$z \rightarrow 2^{-1/3} \alpha_n \quad (2.60)$$

ce qui nous permet de développer l'équation 2.58 en :

$$Nx_{n,\ell} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\ell + \frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3} \alpha_n \quad (2.61)$$

3. La position des résonances dans l'approximation eikonale est  $Nx = \nu + z\nu^{1/3}$  avec

$$z = \frac{1}{2} \left[ 3\pi \left( n - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}$$

En comparant cette dernière expression à l'équation 2.19, nous pouvons identifier  $\alpha_n$  avec l'indice radial  $n$  dans l'approche eikonale :

$$\alpha_n \rightarrow \left[ \frac{3\pi}{2} \left( n - \frac{1}{4} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (2.62)$$

Dans sa thèse, F. Treussart [66] compare la valeur du  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d'Airy avec son approximation dans l'approche eikonale et constate que l'erreur commise est inférieure à 1% pour  $n = 1$ . De plus, l'erreur tend à diminuer lorsque  $n$  augmente. Il s'avère que l'approximation utilisée est, au % d'erreur près, une excellente approximation correspondant à nos situations en pratique.

Enfin, notons que les développements asymptotiques effectués dans cette approche ont été poussés jusqu'à l'ordre 1. Si l'on effectue le calcul aux ordres supérieurs, on prend en compte les phénomènes de dispersion d'ordre élevés. On montre que l'équation 2.61 s'écrit [19, 31, 60, 75] :

$$Nx = v + a_{1n}v^{\frac{1}{3}} + a_0v^0 + a_{-1n}v^{-\frac{1}{3}} + \dots \quad (2.63)$$

où  $a_{1n} = 2^{-\frac{1}{3}}\alpha_n$ ,  $a_0 = -\frac{P}{\sqrt{N^2-1}}$  et  $a_{-1n} = \frac{3}{10}2^{-\frac{2}{3}}\alpha_n^2$ . Plus  $v$  est important, donc plus les sphères sont de grande taille, plus le phénomène de dispersion d'ordre élevé est négligeable.

## 2.4 Spectre des modes de galerie

L'expression du spectre de position des résonances au deuxième ordre en tenant compte de l'ellipticité s'exprime comme :

$$Nx_{n,\ell,m}^P \simeq \left[ \ell + \frac{1}{2} + \left( \frac{\ell + \frac{1}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \alpha_n - \frac{P}{\sqrt{N^2-1}} \right] \times \left[ 1 + \frac{e}{3} \left( 1 - 3 \left( \frac{\ell - |m|}{\ell} \right) \right) \right] \quad (2.64)$$

De cette expression, on peut extraire les écarts entre les différentes familles de modes.

### 2.4.1 Familles de modes

#### Pseudo-Intervalle Spectral Libre $\Delta\ell$

Pour les WGM d'une même famille d'ordre radial  $n$  et même polarisation, on définit un pseudo-Intervalle Spectral Libre correspondant à  $\Delta\ell = 1$ . Au premier ordre, pour un indice radial  $n$  donné, il vient :

$$\Delta x|_{\Delta\ell=1} \simeq 1 \quad (2.65)$$

### Ecart entre polarisation

L'écart entre les deux polarisation dans une sphère parfaite, à mêmes indices  $n$  et  $\ell$ , est défini par :

$$\Delta x|_{\Delta P} = \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N} \quad (2.66)$$

### Ecart entre deux familles d'ordre radial $n$ différent

L'écart entre deux familles d'ordre radial  $n$  pour une même polarisation et un même indice  $\ell$  est :

$$\begin{aligned} \Delta x|_{\Delta n} &\simeq \frac{\partial N x}{\partial n} \Delta n \\ &\simeq \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(n - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \Delta n \end{aligned} \quad (2.67)$$

Cet écart dépend de l'indice  $n$  de la famille considéré ainsi que de l'indice  $\ell$ .

### Effet de l'ellipticité

La levée de dégénérescence due à l'ellipticité du résonateur est, à l'ordre 1 :

$$\Delta x|_{\Delta|m|} \simeq e \Delta |m| \quad (2.68)$$

La conversion de ces écarts dans l'espace de Fourier est obtenue en multipliant chaque terme par le pseudo-intervalle spectral libre  $\Delta_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} N \Delta x|_{\Delta\ell=1} = 1 \\ N \Delta x|_{\Delta P} = \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N} \\ N \Delta x|_{\Delta n=1} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(n - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ N \Delta x|_{\Delta|m|=1} = e \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta v|_{\Delta\ell=1} = \Delta_0 \\ \Delta v|_{\Delta P} = \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N} \Delta_0 \\ \Delta v|_{\Delta n=1} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(n - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \Delta_0 \\ N \Delta v|_{\Delta|m|=1} = e \times \Delta_0 \end{array} \right. \quad (2.69)$$

### 2.4.2 Ordres de grandeur

Prenons l'exemple d'un champ électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda \simeq 1550 \text{ nm}$  piégé dans une sphère en ZBLALiP (dopée aux ions Erbium,  $N = 1.49$ ), de rayon  $a = 50 \text{ }\mu\text{m}$  et d'ellipticité  $e = 0.1\%$ . Le moment angulaire est tel que  $\ell \simeq 300$ .

- Le pseudo-intervalle spectral libre, écart spectral entre deux modes adjacents  $\ell$  et  $\ell + 1$  d'une même famille d'indice  $n$  vaut :

$$\Delta_0 \simeq 640 \text{ GHz}$$

- L'écart spectral entre deux polarisation  $TE$  et  $TM$ , pour un triplet  $\{n, \ell, m\}$  donné, vaut :

$$\Delta\nu|_{\Delta P} \simeq 480 \text{ GHz}$$

- L'écart spectral entre deux familles de modes  $n$  et  $n + 1$ , pour un  $\ell$  fixé, vaut :

$$\Delta\nu|_{\Delta n=1} \simeq 7 \text{ THz} > 10 \times \Delta_0$$

- L'écart spectral entre deux modes  $|m|$  et  $|m + 1|$ , à  $n$  et  $\ell$  fixés, vaut :

$$\Delta\nu|_{\Delta|m|=1} \simeq 640 \text{ MHz}$$

#### Remarques

Le spectre des WGM est un spectre complexe du fait des nombreuses familles de modes qui le composent. La Figure 2.7a présente un spectre WGM théorique en considérant 3 familles de modes d'indices  $n$  différents ( $n = \{1;2;3\}$  pour les modes  $TE$  et  $TM$ ). La Figure 2.7b est un spectre de fluorescence issu d'une micro-sphère de  $55 \text{ }\mu\text{m}$  de rayon en verre ZBLALiP dopé aux ions Erbium autour de  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ . Ce spectre de fluorescence est digitalisé par les WGM. Une analyse fine permet de remonter à différentes familles de modes. Il apparait que, autour d'une certaine plage spectrale, des modes de différents ordres radiaux  $n$  existent mais aussi des modes de polarisation différentes ou encore des modes adjacents dus à l'ellipticité naturelle du résonateur. Cependant, au vu des différents écarts spectraux calculés précédemment, des différentes familles de modes et de la résolution des analyseurs de spectres optiques commerciaux (autour de  $70 \text{ pm}$ , *i.e.*  $8 \text{ GHz}$  autour de  $1550 \text{ nm}$ ), une analyse plus fine du spectre optique doit être envisagée, notamment dans le cas d'un laser WGM.



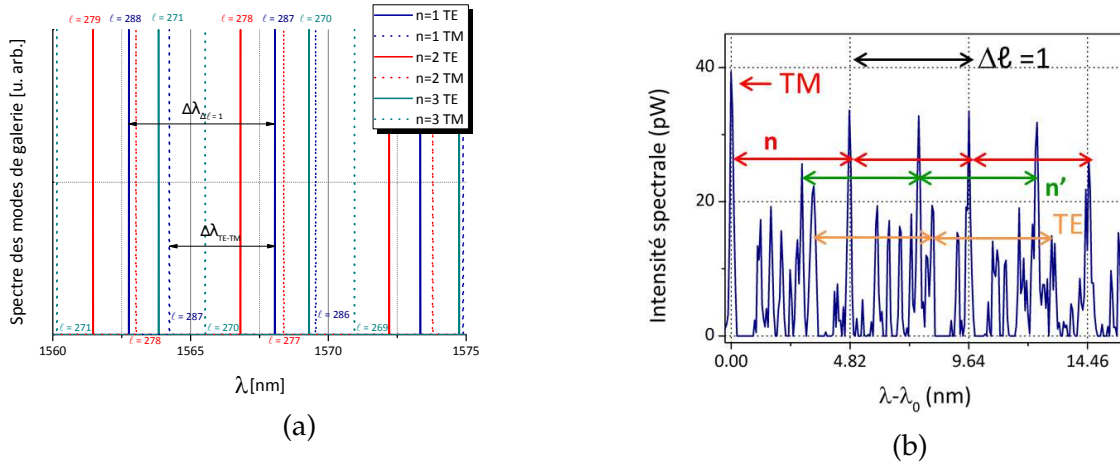


FIGURE 2.7 – (a) Spectre des WGM dans une sphère parfaite ( $\epsilon = 0$ ) de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  et d'indice relatif  $N = 1.49$  pour les familles de modes  $n = \{1, 2, 3\}$  TE et TM, (b) Spectre de fluorescence issu d'une micro-sphère de  $55 \mu\text{m}$  de rayon en verre ZBLALiP dopé aux ions Erbium autour de  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ .

## 2.5 Approximation des champs pour $\ell \gg 1$ et $\ell - |m| \ll \ell$

Dans l'approximation des sphères de grande taille, c'est à dire pour  $\ell \gg 1$ , les harmoniques sphériques  $\mathbf{X}_\ell^m$  et  $\mathbf{Y}_\ell^m$ , rappelées par les expressions 2.43 et 2.44, s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r}) \simeq C_{\ell m} \frac{j m}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \mathbf{u}_\theta \quad (2.70)$$

$$\mathbf{Y}_\ell^m(\mathbf{r}) \simeq C_{\ell m} \frac{j m}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{P_\ell^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \mathbf{u}_\varphi \quad (2.71)$$

$$\mathbf{Z}_\ell^m(\mathbf{r}) = C_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta) \mathbf{r} \quad (2.72)$$

Sous cette forme, nous exprimons alors les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  pour les modes TE et TM dans un cas général, puis pour le mode particulièrement bien confiné  $|n = 1, \ell = |m|\rangle$ , que nous appellerons le "mode fondamental".

### 2.5.1 Expression des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$

Sous cette approximation, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  des modes  $TE$  et  $TM$  s'écrivent comme :

$$\text{Mode } TE \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) \simeq j\sqrt{\ell(\ell+1)} A_{i/o}^{TE} \frac{r_\ell(kr)}{kr} \frac{m}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{Y_\ell^m(\mathbf{r})}{\sin\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{B}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) \simeq j\ell(\ell+1) \frac{1}{\omega} A_{i/o}^{TE} \frac{r_\ell(kr)}{kr} Y_\ell^m(\mathbf{r}) \mathbf{u}_r \end{array} \right. \quad (2.73)$$

$$\text{Mode } TM \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\ell,m}^{TM}(\mathbf{r}) \simeq \ell(\ell+1) A_{i/o}^{TM} \frac{r_\ell(kr)}{k^2 r} Y_\ell^m(\mathbf{r}) \mathbf{u}_r \\ \mathbf{B}_{\ell,m}^{TM}(\mathbf{r}) \simeq -\sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{k}{\omega} A_{i/o}^{TM} \frac{r_\ell(kr)}{kr} \frac{m}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{Y_\ell^m(\mathbf{r})}{\sin\theta} \mathbf{u}_\theta \end{array} \right. \quad (2.74)$$

Pour un mode  $TE$  le champ électrique  $\mathbf{E}$  est tangentiel à la sphère tandis qu'il est radial pour un mode  $TM$  (et inversement pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$ ).

### 2.5.2 Cas du mode fondamental

Pour avoir une idée de la solution "fondamentale" correspondant aux  $WGM$  les plus confinés, nous nous attachons à décrire le champ électrique tel que  $n = 1$  et  $\ell = m$ . Pour de tels ordres  $m$ , les fonctions de Legendre dont dépendent les champs s'écrivent comme :

$$P_\ell^\ell(\cos\theta) = \frac{(-1)^\ell (2\ell!)}{2^\ell \ell!} \sin^\ell \theta \quad (2.75)$$

Pour des ordres  $\ell \gg 1$ , il vient, en utilisant la formule de Stirling<sup>4</sup> :

$$Y_\ell^\ell(\mathbf{r}) = C_{\ell\ell} P_\ell^\ell(\cos\theta) \simeq \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sin^\ell \theta \frac{e^{j\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.76)$$

Le mode  $TE$  le plus confiné à l'intérieur de la sphère s'exprime comme :

$$\mathbf{E}_{\ell,m}^{TE}(\mathbf{r}) \simeq \underbrace{\left(\ell + \frac{1}{2}\right) A_i^{TE}}_{\text{amplitude normalisée}} \times \underbrace{\frac{r_\ell(kr)}{kr}}_{\text{dépendance radiale}} \times \underbrace{\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sin^{\ell-1} \theta \frac{e^{j\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}} e^{j\pi/2}}_{\text{dépendance angulaire}} \mathbf{u}_\theta \quad (2.77)$$

4. à savoir :

$$\ell! \simeq \sqrt{2\pi\ell} \left(\frac{\ell}{e}\right)^\ell$$

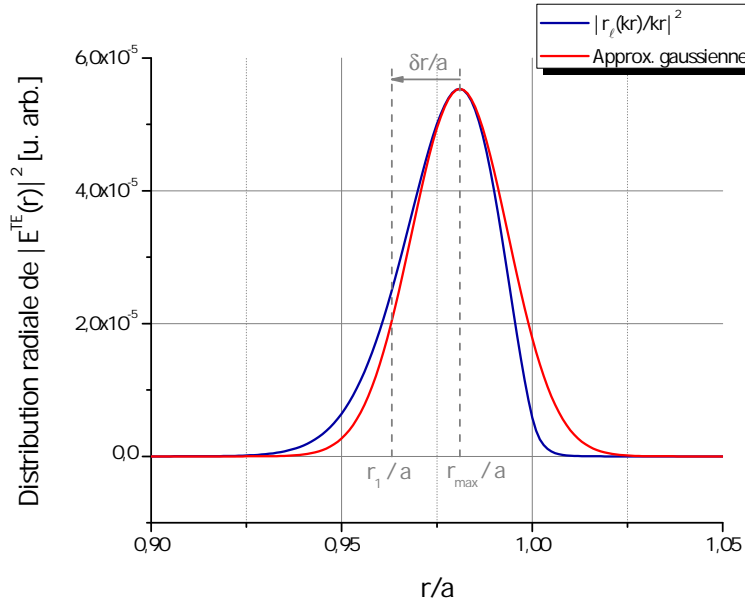


FIGURE 2.8 – Distribution radiale de l'intensité d'un mode  $TE$  avec  $n = 1$ ,  $\ell = |m| = 288$ ,  $\lambda = 1562.76 \text{ nm}$  dans une sphère de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  et d'indice relatif  $N = 1.49$ .  $r_1$  est la caustique interne tandis que  $r_{\max}$  est la position de maximum de  $r_\ell(kr)$

- un développement limité de  $\sin^\ell \theta$  autour de  $\pi/2$  donne :

$$\sin^\ell \left( \frac{\pi}{2} + \vartheta \right) = \cos^\ell \vartheta \simeq \left[ 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right]^\ell \simeq 1 - \ell \frac{\vartheta^2}{2} \simeq e^{-\ell \frac{\vartheta^2}{2}} \quad (2.78)$$

La dépendance angulaire du mode fondamental est une gaussienne centrée en  $\pi/2$  et de demi-largeur à  $1/e$  pour l'intensité de  $1/\sqrt{\ell}$  (cf. Figure 2.5a).

- Une bonne estimation de la largeur en  $1/e$  de la distribution radiale est la distance entre le maximum de  $r_\ell(r)$  ( $r_{\max} = a'_{\ell,1}/k$ ,  $a'_{\ell,1}$  étant le premier zéro de la fonction  $j'_\ell(kr)$ ) et la caustique interne ( $r_1 = (\ell + 1/2)/k$ ). Cette distance est notée  $\delta r$ . On peut raisonnablement approcher la fonction  $r_\ell(r)$  par une fonction gaussienne centrée en  $a'_{\ell,1}/k_0$  et de demi-largeur à  $1/e$  pour l'intensité de  $\delta r$  :

$$r_\ell(r) \simeq e^{-\frac{(r-r_{\max})^2}{2\delta r^2}} \quad (2.79)$$

avec :

$$r_{\max} \simeq \underbrace{\frac{1}{k} \times \left( \ell + \frac{1}{2} \right)}_{r_1} + \underbrace{\frac{1}{k} \times 0.8086 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{1/3}}_{\delta r} \quad (2.80)$$

La Figure 2.8 représente la distribution radiale de l'intensité d'un mode TE tel que  $n = 1$  et  $\ell = 288$ , correspondant à une longueur d'onde  $\lambda = 1563 \text{ nm}$  piégée dans une sphère de  $50 \text{ }\mu\text{m}$  de rayon et d'indice relatif  $N = 1.49$ . On constate que l'approximation gaussienne semble être adéquate pour modéliser un tel mode.

Les largeurs totales en  $1/e$ , obtenues sur la Figure 2.8, sont de  $1.73 \text{ }\mu\text{m}$  pour la distribution réelle et  $1.79 \text{ }\mu\text{m}$  pour l'approximation gaussienne, soit un écart relatif d'environ 3%. L'approximation gaussienne est suffisante pour modéliser la distribution radiale d'un mode fondamental  $|n = 1; \ell = |m|\rangle$ .

Ainsi, le mode fondamental  $|n = 1; \ell = |m|\rangle$  se met sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_{\ell,\ell}^{TE}(\mathbf{r}) \simeq E_i^{TE} e^{-\frac{(r-r_{\max})^2}{2\delta r^2}} e^{-\ell\frac{\theta^2}{2}} e^{j\ell\varphi} \mathbf{u}_\theta \quad (2.81)$$

## 2.6 Volume de mode

Le volume d'un WGM quantifie le confinement spatial du mode dans le résonateur. De cette quantité, on estime le seuil d'apparition d'effets non linéaires, le facteur de Purcell ou l'intensité lumineuse intra-cavité [76, 77]. En ce qui nous concerne, nous l'utiliserons pour calculer une "force de couplage" entre une population atomique et un nombre de photons (cf. chap. 5). Ce volume est défini comme l'intégrale de la densité d'énergie électromagnétique dans l'espace entier divisé par sa valeur maximale prise dans le résonateur [78] :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{w_{\max}} \int_{\mathbb{R}^3} w(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad (2.82)$$

où  $w$  est la densité d'énergie électromagnétique définie à partir des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  par :

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 \right) \quad (2.83)$$

Si nous considérons que les termes de pertes (par diffraction, diffusion, ...) sont négligeables, les contributions des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à  $w$  sont équivalentes [79]. On peut alors réécrire l'équation 2.82 comme :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\varepsilon_0 N^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2}{E_{\max}^2} \, d\mathbf{r} \quad (2.84)$$

Dans la suite, nous présentons une procédure pour le calcul numérique du volume de mode dans une micro-sphère de rayon  $a$ . Nous prenons le cas d'un mode TE. La procédure pour un mode TM est rigoureusement identique mais en prenant le champ  $\mathbf{B}$  plutôt que  $\mathbf{E}$  et conduit aux mêmes résultats.

### 2.6.1 Calcul formel du volume de mode

L'intégrale de l'équation 2.84 est prise sur le volume  $\mathbb{R}^3$ . Plutôt que de prendre le volume de tout l'espace, nous choisissons l'intégrale sur  $r$  borné de 0 à  $\mathcal{L}$ .  $\mathcal{L}$  doit être suffisamment importante pour que le champ électromagnétique puisse être considéré comme nul au delà de cette distance. On peut alors séparer l'intégrale de l'équation 2.84 en deux intégrales sur des domaines distincts : le premier domaine, de 0 à  $a$  correspond à l'intérieur de la sphère, le deuxième, de  $a$  à  $\mathcal{L}$ , pour le milieu environnant.

#### Volume intérieur et volume extérieur

Dans ces deux domaines, le champ  $\mathbf{E}$  prend l'expression donnée par l'équation 2.52.  $\mathcal{V}$  se développe alors comme :

$$\mathcal{V} = \frac{\ell(\ell+1)}{\varepsilon_0 N^2 E_{\max}^2} \left( \int_0^a \varepsilon_0 N^2 |A_i^{\text{TE}}|^2 \frac{\psi_\ell^2(kr)}{k^2} dr + \int_a^{\mathcal{L}} \varepsilon_0 |A_o^{\text{TE}}|^2 \frac{\chi_\ell^2(k_0 r)}{k_0^2} dr \right) \times \left( \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\mathbf{X}_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})|^2 \sin\theta d\theta d\varphi \right) \quad (2.85)$$

Nous reconnaissons la définition de la norme de l'harmonique sphérique  $\mathbf{X}$  :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r})|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \langle \mathbf{X}_\ell^m | \mathbf{X}_\ell^m \rangle = 1 \quad (2.86)$$

La contribution au volume du mode à l'intérieur de la sphère est notée  $\mathcal{V}_i$  tandis que celle à l'extérieur est notée  $\mathcal{V}_o$ . En se servant des équations 2.37, 2.38 et de la propriété des fonctions de Bessel [74] ( $F$  représente à la fois  $J$  et  $Y$ ) :

$$\int x F_\nu(kx)^2 dx = \frac{x^2}{2} \left( F_\nu(kx)^2 - F_{\nu-1}(kx) F_{\nu+1}(kx) \right) \quad (2.87)$$

Compte tenu des équations 2.52 et 2.57,  $\mathcal{V}_i$  et  $\mathcal{V}_o$  se développent comme :

$$\mathcal{V}_i = \frac{\ell(\ell+1)}{Nk_0} \frac{|A_i^{\text{TE}}|^2}{E_{\max}^2} \frac{\pi a^2}{4} \left( J_{\ell+\frac{1}{2}}^2(ka) - J_{\ell-\frac{1}{2}}(ka) J_{\ell+\frac{3}{2}}(ka) \right) \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_o &= \frac{\ell(\ell+1)}{N^3 k_0} \frac{|A_i^{\text{TE}}|^2}{E_{\max}^2} \frac{\pi \mathcal{L}^2}{4} \left( \frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}^2(ka)}{Y_{\ell+\frac{1}{2}}^2(k_0 a)} \right) \left( Y_{\ell+\frac{1}{2}}^2(k_0 \mathcal{L}) - Y_{\ell-\frac{1}{2}}(k_0 \mathcal{L}) Y_{\ell+\frac{3}{2}}(k_0 \mathcal{L}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{\mathcal{L}^2} Y_{\ell+\frac{1}{2}}^2(k_0 a) + \frac{a^2}{\mathcal{L}^2} Y_{\ell-\frac{1}{2}}(k_0 a) Y_{\ell+\frac{3}{2}}(k_0 a) \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

A ce stade du calcul, il nous reste à évaluer  $E_{\max}^2$ .

#### Evaluation de $E_{\max}^2$

Le maximum de  $\mathbf{E}$  est situé à l'intérieur de la sphère. De l'équation 2.52, on en déduit que :

$$E_{\max} = \sqrt{\ell(\ell+1)} A_i^{\text{TE}} \times \max \left| \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} \right| \times \max |\mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r})| \quad (2.90)$$

- Le maximum de la fonction  $|\psi_\ell(kr)/kr|$  (ou encore  $|j_\ell(kr)|$ ) coïncide avec celui de  $j_\ell(kr)$  et est obtenu lorsque la dérivée s'annule, autrement dit pour le premier zéro de  $j'_\ell(kr)$ , noté  $a'_{\ell,1}$ . Cela revient à résoudre l'équation [74] :

$$(\ell+1) J_{\ell+\frac{3}{2}}(x) - \ell J_{\ell-\frac{1}{2}}(x) = 0 \quad (2.91)$$

Ce problème ne peut être résolu que numériquement. Concrètement, on se place en  $x = a'_{\ell,1}$  et on recherche la valeur particulière de  $x$  solution de l'équation 2.91. Puisque l'on travaille dans l'approximation des sphères de grande taille (i.e.  $\ell \gg 1$ ), alors  $a'_{\ell,1}$  se développe en [74] :

$$\begin{aligned} a'_{\ell,1} \simeq & \left( \ell + \frac{1}{2} \right) + 0.8086165 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{1/3} - 0.236680 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{-1/3} \\ & - 0.20736 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{-1} + 0.0233 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{-5/3} \end{aligned} \quad (2.92)$$

La valeur initiale  $x = a'_{\ell,1}$  est un point de départ relativement proche de la solution du point de vue numérique.

- $\max |\mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r})|$  est une fonction dépendant des polynômes de Legendre. Au vu des ordres  $\ell$  avec lesquels nous travaillons, ces fonctions ne sont plus représentable en virgule flottante. Pour s'en acquitter, on peut travailler avec les fonctions semi-normalisées de Schmidt associées aux fonctions de Legendre  $S_\ell^m$  telles que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad P_\ell^m(x) = D_{\ell m} S_\ell^m(x) \quad (2.93)$$

avec

$$D_{\ell m} = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = 0 \\ (-1)^m \sqrt{\frac{2(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} & \text{pour } m > 0 \end{cases} \quad (2.94)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_\ell^m(\mathbf{r})|^2 = & \frac{C_{\ell m}^2 D_{\ell m}^2}{\sin^2 \theta} \left[ (m^2 + 1) S_\ell^m{}^2(\cos \theta) + ((\ell + 1)^2 - m^2) S_{\ell+1}^m{}^2(\cos \theta) \right. \\ & \left. - 2\sqrt{(\ell + 1)^2 - m^2} S_\ell^m(\cos \theta) S_{\ell+1}^m(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

avec :

$$C_{\ell m}^2 D_{\ell m}^2 = \begin{cases} \frac{2\ell + 1}{4\pi} & \text{pour } m = 0 \\ \frac{2\ell + 1}{8\pi} & \text{pour } m > 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

L'équation 2.95 ne peut être résolue que numériquement. Pour obtenir la valeur maximale de  $X_\ell^m$ , on procède par dichotomie dans un maillage de plus en plus résolu de  $[0, \pi]$  autour de  $\pi/2$ .

Une fois que l'on connaît les valeurs particulières de  $\theta$  et  $r$  qui maximisent  $j_\ell(kr)$  et  $X_\ell^m(\mathbf{r})$ , on calcule le volume de mode en utilisant les équations 2.88, 2.89 et 2.90.

Le calcul numérique du volume de mode suit un algorithme qui suppose que l'on connaît le WGM à travers les nombres  $n$ ,  $\ell$  et  $m$ . Ces derniers sont obtenus en résolvant la condition de résonance 2.56 et en comparant le spectre obtenu à un spectre de transmission ou d'émission.

## 2.6.2 Calcul formel pour $n = 1$ et $\ell = |m|$ : modèle de F. Treussart

### Bornes d'intégration

Dans [66], F. Treussart calcule l'intégrale du champ électrique sur tout le volume en négligeant la contribution du champ au delà du  $n^{\text{ième}}$  zéro  $a_n$  de la fonction radiale  $f_\ell(r)$ . Cela revient à prendre :

$$k\mathcal{L} \rightarrow a_n \quad (2.97)$$

De cette façon, on néglige la contribution oscillante de l'onde en dehors de la sphère et, puisque  $a_{\ell,n}$  est toujours situé à l'extérieur de la sphère, on prend en compte l'effet *Goos-Hanchen*. De cette façon, on réintègre la partie évanescence dans le résonateur en considérant un résonateur de rayon  $a_{\ell,n}$ , ce qui permet de calculer  $\mathcal{V}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{V} \simeq \frac{\ell(\ell + 1)}{k^3} \frac{|A_i^{TE}|^2}{E_{\max}^2} \int_0^{a_{\ell,n}} \psi_\ell^2(\rho) d\rho \quad (2.98)$$

Pour  $n = 1$ ,  $a_{\ell,1}$  prend la forme asymptotique suivante [74] :

$$a_{\ell,1} \simeq \left(\ell + \frac{1}{2}\right) + 1.8557571 \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{1/3} + 1.033150 \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{-1/3} - 0.00397 \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{-1} - 0.0908 \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{-5/3} + 0.043 \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{-7/3} \quad (2.99)$$

Pour un WGM d'indice  $\ell$  donné, on estime la valeur du premier zéro de la fonction radiale par l'équation 2.99. Compte tenu des propriétés des fonctions de Bessel [74] et de la relation 2.37, il vient :

$$\int_0^{a_{\ell,1}} \psi_\ell^2(\rho) d\rho = \frac{a_{\ell,1}}{2} \psi_\ell'^2(a_{\ell,1}) = \frac{a_{\ell,1}^3}{2} j_\ell'^2(a_{\ell,1}) \quad (2.100)$$

d'où l'expression du volume de mode :

$$\mathcal{V} \simeq \frac{\ell(\ell+1)}{k^3} \frac{|A_i^{\text{TE}}|^2}{E_{\text{max}}^2} \frac{a_{\ell,1}^3}{2} j_\ell'^2(a_{\ell,1}) \quad (2.101)$$

Il reste à évaluer la valeur de  $E_{\text{max}}^2$  dans l'équation 2.101.

### Evaluation de $E_{\text{max}}$

L'évaluation de  $E_{\text{max}}$  suit la même procédure qu'au paragraphe 2.6.1.

- Pour évaluer  $\max \left| \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} \right|$ , i.e.  $\max |j_\ell(kr)|$ , on prend la valeur de la fonction au premier zéro<sup>5</sup> de sa dérivée  $j_\ell'$ , noté  $a'_{\ell,1}$  :

$$\max \left| \frac{\psi_\ell(kr)}{kr} \right| = \max |j_\ell(kr)| = j_\ell(a'_{\ell,1}) \quad (2.102)$$

où  $a'_{\ell,1}$  est donné par l'équation 2.92.

- Dans le cas où  $\ell = |m|$ , en injectant l'expression 2.76 dans 2.70, il vient :

$$\max_{[0,\pi] \times [0,2\pi]} |\mathbf{X}_\ell^\ell(\mathbf{r})| \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\ell}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \underbrace{\max_{[0,\pi]} |\sin^{\ell-1}(\theta)|}_{=1} \quad (2.103)$$

Pour un mode  $\ell = |m|$  et  $n = 1$ ,  $E_{\text{max}}$  prends la forme suivante :

$$E_{\text{max}} \simeq \sqrt{\ell(\ell+1)} A_i^{\text{TE}} \times j_\ell(a'_{\ell,1}) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\ell}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.104)$$

ce qui donne, en injectant l'équation 2.103 dans 2.101, l'expression du volume de mode :

$$\mathcal{V} \simeq \left( \frac{1}{k} \right)^3 \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{\ell}} a_{\ell,1}^3 \left( \frac{j_\ell'(a_{\ell,1})}{j_\ell(a'_{\ell,1})} \right)^2 \quad (2.105)$$

---

5. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler que les fonctions de Bessel sphériques sont des fonctions oscillantes amorties. La valeur maximale de la fonction est obtenue pour le **premier** zéro de sa dérivée.



Sous nos hypothèses initiales ( $\ell \gg 1$ ),  $j'_\ell(a_{\ell,1})$  et  $j_\ell(a'_{\ell,1})$  se développent au premier ordre [74] par les formes suivantes :

$$j'_\ell(a_{\ell,1}) \simeq -1.1131028 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{-2/3} \quad (2.106)$$

$$j_\ell(a'_{\ell,1}) \simeq 0.6748851 \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^{-1/3} \quad (2.107)$$

Le volume de mode s'écrit alors sous forme réduite :

$$\mathcal{V} \simeq \left( \frac{\lambda_0}{2\pi N} \right)^3 2\pi^2 \times 0.76737 \times \ell^{11/6} \quad (2.108)$$

### 2.6.3 Approximation du volume du mode fondamental à partir de l'expression de $\mathbf{E}_\ell^\ell(\mathbf{r})$

Le mode fondamental est défini par l'expression 2.81. Le volume du mode s'apparente à un tore de section elliptique gaussienne où les demi-axes de l'ellipse sont respectivement les demi-largeurs à  $1/e \delta r$  et  $a\delta\theta$ , comme illustré sur la Figure 2.9.  $\delta r$  est défini par la relation 2.80.

La section  $\mathcal{S}$  de ce faisceau s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \pi \times \delta r \times a\delta\theta \\ &= \left( \frac{\lambda_0}{2\pi N} \right) a\pi \times 0.8086 \times \ell^{-1/6} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Le volume de mode  $\mathcal{V}$  est calculé en multipliant  $\mathcal{S}$  par le périmètre emprunté par le tore de lumière, ici estimé par  $2\pi a$  :

$$\mathcal{V} = \left( \frac{\lambda_0}{2\pi N} \right) 2\pi^2 a^2 \times 0.8086 \times \ell^{-1/6} \quad (2.110)$$

Ici, l'ellipse est supposée centrée en  $a$ . Si l'on suppose de plus que le rayon  $a$  est très grand devant la longueur d'onde, ce qui revient à considérer  $\ell \gg 1$ , alors  $ka \simeq \ell$ , ce qui permet de réécrire  $\mathcal{V}$  comme :

$$\mathcal{V} \simeq \left( \frac{\lambda_0}{2\pi N} \right)^3 2\pi^2 \times 0.8086 \times \ell^{11/6} \quad (2.111)$$

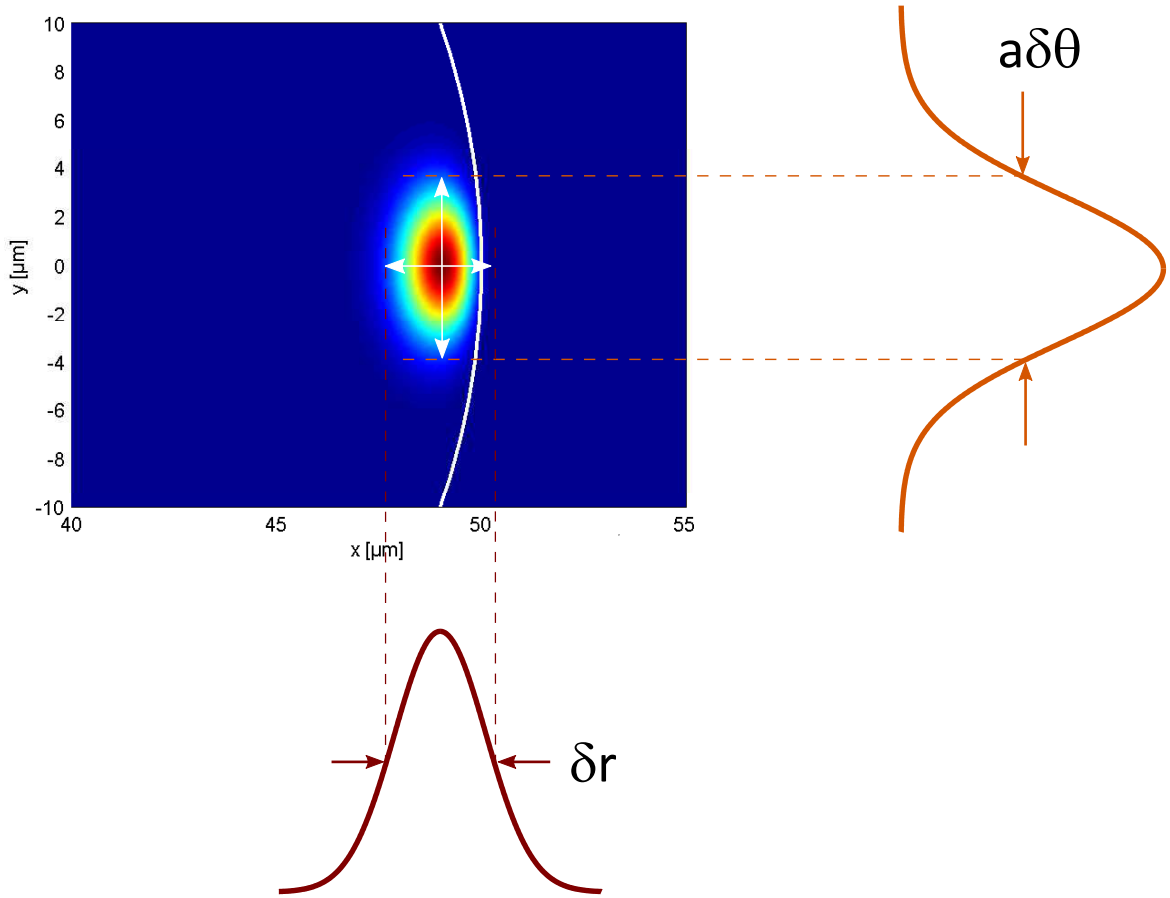


FIGURE 2.9 – Définition des axes du faisceau elliptique gaussien pour le mode fondamental.

L'écart relatif entre les expressions 2.111 et 2.108 est d'environ 5%. L'approximation gaussienne pour le mode fondamental est donc justifiée. On peut toutefois remarquer que l'approximation  $ak \simeq \ell$  n'est pas tout à fait vraie. Le tore de lumière n'est pas exactement centré en  $a$  mais  $y$  est relativement proche. Le maximum de la fonction radiale est situé en  $r = a'_{\ell,1}/k$ , aussi le volume de mode s'écrit plutôt :

$$\mathcal{V} = \left( \frac{\lambda_0}{2\pi N} \right)^3 2\pi^2 (a'_{\ell,1})^2 \times 0.8086 \times \ell^{-1/6} \quad (2.112)$$

Pour  $\ell = 300$ , en calculant le développement asymptotique de  $a'_{\ell,1}$ , il vient :

$$\mathcal{V} \simeq \left( \frac{\lambda_0}{2\pi N} \right)^3 2\pi^2 \times 0.8086(1 + 0.03959) \times \ell^{11/6} \quad (2.113)$$

Le volume d'un tel WGM fondamental est d'environ L'erreur apportée par l'approximation  $a'_{\ell,1} \simeq \ell$  au volume du mode fondamental est d'environ 4%, soit une erreur commise devant l'expression 2.108 d'environ 9%. Les approximations successives sur

les champs et les volumes de modes fournissent des résultats corrects à une erreur de 10% près. Cependant, le modèle n'est valable que pour le mode fondamental.

### 2.6.4 Ordre de grandeur du volume du mode fondamental

Le volume du mode fondamental  $|n = 1; \ell = |m|\rangle$  dans une sphère de rayon  $a = 50 \mu m$  d'indice  $N = 1.49$  autour de  $\lambda_0 = 1550 nm$  donne un nombre angulaire  $\ell \simeq 300$ . Le volume de ce WGM est calculé en utilisant la relation 2.108 et vaut :

$$\mathcal{V}_{n=1, \ell=m=300} \simeq 2400 \mu m^3$$

A titre de comparaison, le volume de la sphère vaut :

$$\mathcal{V}_{\text{sphère}} \simeq 524000 \mu m^3$$

Le volume de mode est tel que :

$$\mathcal{V}_{\text{sphère}} \simeq 215 \times \mathcal{V}_{n=1, \ell=m=300}$$

L'énergie électromagnétique est contenue dans 0.5% du volume total de la cavité.

## 2.7 Conclusion

Le confinement du champ électromagnétique par réflexion totale interne dans une cavité sphérique de taille micrométrique amène à définir les modes de galerie présentant à la fois un volume très réduit et un confinement temporel important. Les différentes familles de modes existant au sein de la cavité (modes longitudinaux repérés par  $\ell$  et modes transverses par  $n$  et  $\ell - |m|$ ) rendent la résolution du problème électromagnétique exact complexe sans approximation supplémentaire. Le fait de se restreindre aux WGM les plus confinés, ceux dont il est question dans nos expériences laser, permet de simplifier le problème initial, bien qu'il ne soit résolu que numériquement, tout comme le calcul du volume de mode. Les résultats issus de cette étude seront utilisés au chapitre 5 afin d'identifier le WGM en régime laser à partir du calcul du volume de mode, ce dernier intervient dans le spectre de bruit d'intensité relatif du laser.

# Chapitre 3

## Facteur de qualité et couplage

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Facteur de qualité</b> . . . . .	<b>80</b>
3.1.1	Pertes par diffraction . . . . .	80
3.1.2	Pertes par absorption/diffusion . . . . .	82
3.1.3	Pertes par inhomogénéités de surface . . . . .	82
3.1.4	Bilan . . . . .	83
<b>3.2</b>	<b>Couplage à un micro-résonateur à modes de galerie</b> . . . . .	<b>84</b>
3.2.1	Couplage par onde evanescente . . . . .	85
3.2.1.1	Couplage par prisme . . . . .	85
3.2.1.2	Couplage par fibre biseautée . . . . .	86
3.2.1.3	Couplage par taper . . . . .	86
3.2.1.4	Couplage par pointe effilée . . . . .	87
3.2.2	Propagation de la lumière dans un taper . . . . .	88
3.2.2.1	Modes propres . . . . .	88
3.2.2.2	Intensité de l'onde evanescente . . . . .	89
3.2.3	Fabrication d'un taper . . . . .	91
3.2.3.1	Banc de fusion-étirage . . . . .	91
3.2.3.2	Interférences entre modes . . . . .	92
3.2.4	Fabrication d'une pointe effilée . . . . .	94
3.2.5	Conclusion . . . . .	94

---

### 3.1 Facteur de qualité

Le facteur de qualité  $Q$  d'une résonance quantifie le confinement temporel des photons dans la cavité. C'est la quantité définie par :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée}}{\text{énergie perdue}} \Big|_{\text{sur un cycle}} = \omega_0 \tau_p = \frac{\omega_0}{\delta\omega} \quad (3.1)$$

avec  $\omega_0$  la pulsation de résonance et  $\tau_p$  le temps de vie du photon dans la cavité. C'est également le rapport entre la fréquence de résonance et sa largeur à mi-hauteur. Le guidage par réflexion totale interne dans une cavité circulaire permet d'emmagasiner efficacement la lumière. Dans le cas d'une cavité résonante couplée à une ligne d'accès, le facteur de qualité  $Q$  possède une composante intrinsèque  $Q_0$  ainsi qu'une composante liée au couplage  $Q_e$  tels que :

$$Q^{-1} = Q_0^{-1} + Q_e^{-1} \quad (3.2)$$

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, le champ électromagnétique est soumis à des pertes au cours de sa propagation, tendant à réduire l'énergie qu'il transporte. Nous pouvons alors écrire la variation de puissance sur une distance  $L$  comme :

$$P(L) = P(0)e^{-\alpha L} \quad (3.3)$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'atténuation (en  $m^{-1}$ ) et  $L$  est la longueur de propagation considérée. Le facteur de qualité intrinsèque  $Q_0$  s'écrit :

$$Q_0 = \frac{2\pi N}{\lambda\alpha} \quad (3.4)$$

Plus  $\alpha$  est négligeable, plus le temps de stockage de l'énergie dans le résonateur est importante, exhaltant le facteur de qualité  $Q_0$ .  $\alpha$  rassemble différentes contributions :

$$\alpha = \alpha_{\text{diff}} + \alpha_{\text{abs}} + \alpha_{\text{surf}} + \dots \quad (3.5)$$

Toutes ces différentes contributions participent au facteur de qualité intrinsèque  $Q_0$  :

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{diff}}} + \frac{1}{Q_{\text{abs}}} + \frac{1}{Q_{\text{surf}}} + \dots \quad (3.6)$$

#### 3.1.1 Pertes par diffraction

La contribution des pertes par diffraction au facteur de qualité  $Q_0$  se quantifie par  $Q_{\text{diff}}$  caractérisant les fuites à travers la barrière de potentiel due à la discontinuité de l'indice du milieu (cf. Fig. 2.6). Dans le cas de nos micro-sphères, nous avons  $\ell \simeq 302$ . En

ne considérant que des ordres radiaux  $n$  proches de 1, on a  $Nx \simeq \ell$ . F. Treussart [66] a montré qu'une double approximation *Wentzel-Kramers-Brillouin* (WKB) permet de donner une forme approchée des champs en dehors de la sphère ainsi qu'au point de transition.

Le WGM subit des pertes d'énergies compte tenu du fait qu'il redevient propageant au delà de la caustique externe. Ces pertes, et donc le facteur de qualité  $Q_{\text{diff}}$  associé, sont estimées en ne considérant que le premier terme du développement asymptotique en puissance de  $\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^{-1}$  (dit développement de Debye [74]) au voisinage du point de transition  $x = \ell + \frac{1}{2}$  :

$$\psi_\ell(x) \simeq \frac{1}{2} \frac{\exp\left[-(\ell + 1/2) g\left(\frac{x}{\ell + 1/2}\right)\right]}{\left(\left(\frac{\ell + 1/2}{x}\right)^2 - 1\right)^{1/4}} \quad (3.7a)$$

$$\chi_\ell(x) \simeq -\frac{\exp\left[(\ell + 1/2) g\left(\frac{x}{\ell + 1/2}\right)\right]}{\left(\left(\frac{\ell + 1/2}{x}\right)^2 - 1\right)^{1/4}} \quad (3.7b)$$

où  $x$  est le paramètre de taille et  $g$  la fonction définie par :

$$g : s \rightarrow -\sqrt{1 - s^2} + \operatorname{argcosh}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (3.8)$$

Le facteur de qualité  $Q_{\text{diff}}$  est donné par l'amortissement du champ à travers la barrière de potentiel, c'est à dire le rapport entre  $\chi_\ell$  et  $\psi_\ell$  (eq. 3.7a et 3.7b) :

$$Q_{\text{diff}} \simeq \frac{\ell}{N} e^{2\ell g(1/N) - 2\sqrt{N^2 - 1}(x - \frac{\ell}{N})} \quad (3.9)$$

En développant  $Q_{\text{diff}}$  avec 2.64 (dans le cas où  $e \ll 1$ ), il vient :

$$Q_{\text{diff}} \propto e^{-2\frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{\ell + 1/2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a_n\right)} e^{\frac{2P}{N}} \quad (3.10)$$

Les pertes par diffraction augmentent avec l'indice radial  $n$ , ce qui confirme notre analyse précédente : les modes d'indice radial  $n$  élevés sont moins bien confinés que ceux d'indice proche de 1. Notons également que  $Q_{\text{diff}}$  d'un mode *TE* sera légèrement supérieur à celui d'un mode *TM* pour les mêmes  $n$  et  $\ell$ :

$$\frac{Q_{\text{diff}}^{\text{TE}}}{Q_{\text{diff}}^{\text{TM}}} = e^{2(1 - N^{-2})} > 1 \quad (3.11)$$

Dans le cas d'une sphère de diamètre  $2a = 100 \mu m$  en silice ( $N = 1.45$ ) pour une longueur d'onde  $\lambda = 1550 nm$  et un mode  $TE$ , les calculs donnent<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} Q_{\text{diff}}|_{n=1} &= 2 \times 10^{44} \\ Q_{\text{diff}}|_{n=7} &= 4 \times 10^{18} \end{aligned}$$

ce qui montre que, pour des sphères dont le diamètre est proche de la centaine de  $\mu m$ , les pertes par diffraction ne sont pas la cause principale des pertes. Ce constat est vérifié pour des diamètres de sphères  $2a \leq 15\lambda$  ( $\simeq 23 \mu m$  autour de  $\lambda = 1550 nm$ ) où  $Q_{\text{diff}} > 10^{11}$ .

### 3.1.2 Pertes par absorption/diffusion

Le terme  $Q_{\text{mat}}$  désigne les pertes dues à l'absorption du champ par le milieu et par diffusion due aux inhomogénéités internes.

TABLEAU 3.1 – Comparaison des coefficients d'absorption et facteurs de qualité correspondant entre la silice et le verre ZBLALiP.

matériau	$\alpha_{\text{abs}} _{1550 nm}$		$Q_{\text{abs}} _{1550 nm}$
	$dB.km^{-1}$	$cm^{-1}$	$\emptyset$
silice	0.17	$3.95 \times 10^{-7}$	$1.49 \times 10^{11}$
ZBLALiP	$1.29 \times 10^4$	$3.00 \times 10^{-2}$	$2.00 \times 10^6$

Dans la silice, l'absorption et les inhomogénéités internes du matériau autour de  $1550 nm$  ne constituent pas une source importantes de pertes, à l'inverse du ZBLALiP où elles sont limitantes. Cependant, lorsque ce verre est dopé aux ions Erbium, l'excitation des niveaux supérieurs permet de considérer un gain intra-cavité pouvant compenser ces pertes, voir même jusqu'à obtenir un effet laser.

### 3.1.3 Pertes par inhomogénéités de surface

Les pertes par inhomogénéités de surface sont à distinguer des pertes par inhomogénéités de volume (contenues dans  $Q_{\text{mat}}$ ) car elles dépendent essentiellement de la

1. Un tel facteur de qualité, pour  $n = 1$ , donne, à  $\lambda = 1550 nm$ , un temps de vie  $\tau_p \simeq 1.6 \times 10^{29} s \simeq 5.2 \times 10^{21}$  années... Le mode  $n = 1$  est donc exceptionnellement bien confiné lorsqu'on ne considère que des pertes par diffraction pour une sphère de diamètre  $100 \mu m$ .

qualité de la surface de la micro-sphère. Cette dernière est davantage liée au processus de fabrication que de la chimie du matériau utilisé.

Dans sa thèse, S. Trébaol [46] compare les différents modèles d'évaluation de  $Q_{\text{surf}}$ . En première approximation, le modèle de Vernooy [80], justifié par Oraevski [81], relie la granularité de la surface aux fluctuations de la perméabilité diélectrique  $\varepsilon$  et donne, pour une collection de diffuseurs de petite taille ( $\sigma B^2 \ll \lambda^3$ ), l'expression du facteur de qualité  $Q_{\text{surf}}$  :

$$Q_{\text{surf}} \simeq \frac{3N^2(N^2 + 2)^2}{(4\pi)^3(N^2 - 1)^{5/2}} \frac{\lambda^{7/2}(2a)^{1/2}}{\sigma^2 B^2} \quad (3.12)$$

où  $2a$  est le diamètre de la sphère,  $B$  la longueur de corrélation des diffuseurs de surface et  $\sigma$  leur hauteur moyenne. Les valeurs numériques de  $\sigma$  et  $B$  dépendent du procédé de fabrication. Pour la silice, Vernooy *et. al.* ont obtenu, par microscopie à force atomique,  $\sigma = 1.7 \text{ nm}$  et  $B = 5 \text{ nm}$ . Pour une sphère de diamètre  $2a = 100 \text{ }\mu\text{m}$  et  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ , on trouve :

$$Q_{\text{surf}} = 2.26 \times 10^{10} \quad (3.13)$$

Pour des valeurs relativement faibles de  $\sigma$ ,  $Q_{\text{surf}}$  ne sera pas prédominant. Néanmoins, d'autres mécanismes de diffusion sont à considérer (contamination, couplage, diffusion volumique, ...). D'autre part, ces valeurs de  $\sigma$  et  $B$  ne sont valables que pour de la silice et non pour nos verres dopés Erbium.

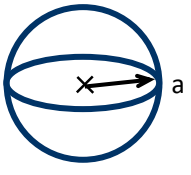
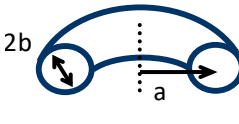
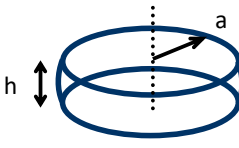
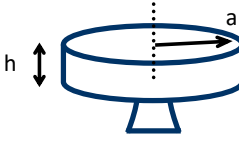
Que ce soit une diffusion volumique ou de surface, la rétrodiffusion couple les modes co- et contra-propagatifs et entraîne une levée de dégénérescence proportionnelle à la force de couplage [48]. Cette propriété sera étudiée plus en détail au chapitre 6 lorsque le résonateur fonctionne en régime laser.

### 3.1.4 Bilan

Le Tableau 3.2 récapitule les différentes architectures des résonateurs WGM, leurs matériaux, leurs dimensions ainsi que le facteur de qualité mesuré. Ce dernier a été mesuré avec un couplage tel que  $Q_e \gg Q_0$ , si bien qu'il ne limite pas la valeur du facteur de qualité global  $Q$ . On remarquera que les facteurs de qualité les plus élevés sont obtenus pour des résonateurs de taille millimétrique. De manière générale, les résonateurs étudiés ne sont pas limités par les pertes par courbure (diffraction) ce qui fait que le facteur le plus limitant est l'état de surface. D'autre part, l'expression 3.12 favorise les résonateurs de "grande" taille lorsque l'on considère des défauts de surface. Le facteur de qualité peut être augmenté en employant des techniques de polissage ou de recuit (majoritairement pour des "grands" résonateurs).



TABLEAU 3.2 – Géométries des résonateurs WGM et leur facteur de qualité.

	Forme	Matériaux (Fabrication)	Dimensions	Facteur Q (Couplage)
	Sphère	Silice, ZBLALiP, Chalcogénures (Fusion)	$a = 10 \sim 200 \mu\text{m}$	$10^7 \sim 10^9$ (Prisme ou fibre effilée)
	Tore	Silice (Fusion)	$a = 10 \sim 200 \mu\text{m}$ $2b = 5 \sim 10 \mu\text{m}$	$10^8$ (Fibre effilée)
	Sphéroïde tronqué	$\text{LiNbO}_3$ $\text{CaF}_2, \text{MgF}_2, \dots$ (Polissage)	$a \geq 1 \text{ mm}$ $h \geq 100 \mu\text{m}$	$10^8$ $> 3.10^{11}$ (Prisme)
	Disque	Silice sur Silicium $\text{GaAs}, \dots$ (Gravure)	$a = 0.1 \sim 4 \text{ mm}$ $h = 2 \sim 10 \mu\text{m}$	$10^9$ (Fibre effilée ou guide)

### 3.2 Couplage à un micro-résonateur à modes de galerie

Dans un microrésonateur WGM, et particulièrement pour un laser WGM, on doit penser un système de couplage permettant :

- d'exciter un mode de pompe ayant la densité de puissance la plus élevée, c'est à dire les modes d'indices  $n$  et  $\ell - |m|$  le moins élevé possible (idéalement  $n = 1$ ,  $\ell = |m|$ )
- de récupérer le mode où a lieu l'effet Laser (aux alentours de  $1550 \text{ nm}$ )

Comme l'indice radial des modes ciblés est proche de 1, ils ont une partie radiative négligeable en dehors de la sphère. Le couplage par faisceau en espace libre est donc proscrit. De plus, le mode laser ne peut pas être récupéré de cette manière. On doit

donc passer à un autre système de couplage utilisant la partie évanescente des *WGM*, on parle de couplage par onde évanescente.

### 3.2.1 Couplage par onde évanescente

Ce type de couplage impose à la lumière de se propager dans une structure où l'onde est localement évanescente. En pratique, on utilise la réflexion totale frustrée dans un prisme, une fibre biseautée ou une fibre dont le diamètre a été réduit (fibre effilée ou polie), comme représenté sur la Figure 3.1. Le point essentiel de ce type de couplage est d'avoir un bon recouvrement entre les *WGM* et les modes du coupleur.

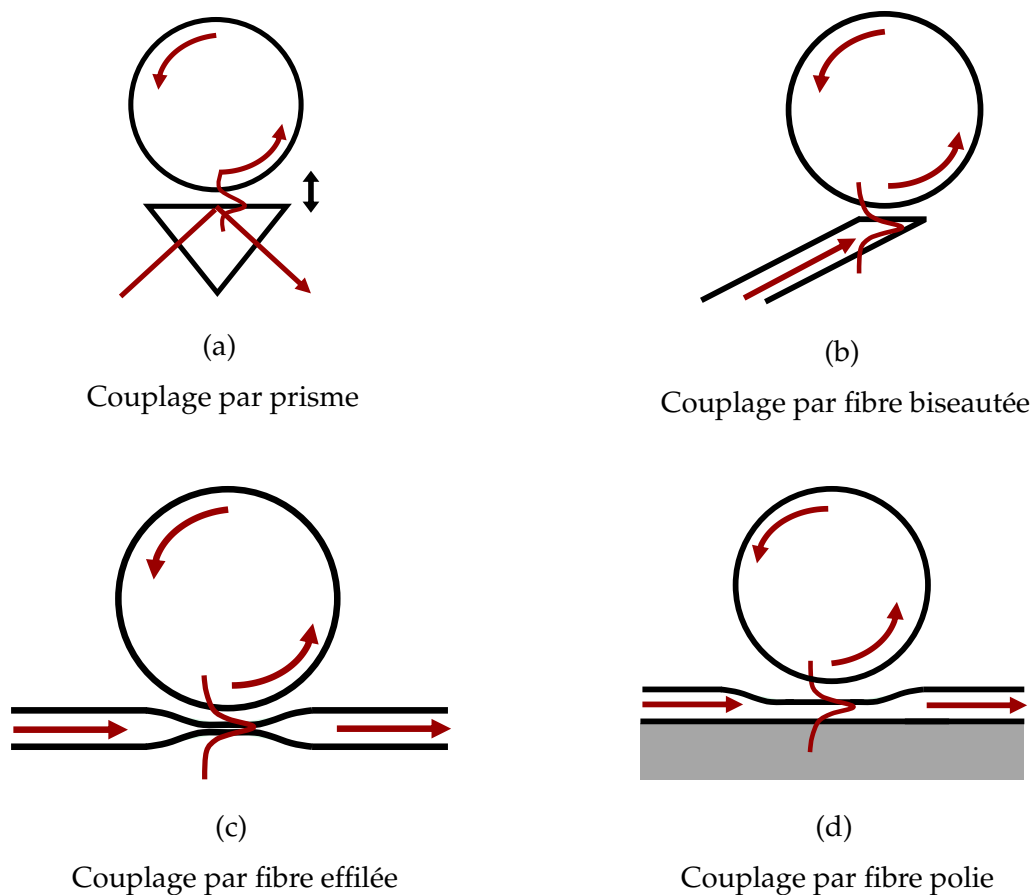


FIGURE 3.1 – Différentes méthodes de couplage par onde évanescente dans un micro-résonateur *WGM*.

#### 3.2.1.1 Couplage par prisme

Le couplage par prisme consiste à frustrer la réflexion totale interne d'un faisceau envoyé sur le prisme en amenant le résonateur dans la zone où l'onde est évanescente.

La condition d'accord de phase est réalisée en modifiant l'angle d'incidence. Cette méthode historique [82,83] de couplage est robuste et très sélective mais l'alignement est très difficile à réaliser.

### 3.2.1.2 Couplage par fibre biseautée

Le couplage par fibre biseautée [84,85] repose également sur la réflexion totale interne frustrée. Une fibre optique est biseautée de manière à obtenir une onde évanescence en sortie. L'alignement est moins contraignant que le couplage par prisme mais l'indice de la fibre utilisée restreint ce coupleur aux résonateurs en silice.

### 3.2.1.3 Couplage par taper

Une fibre effilée [86], en anglais *taper*, est une fibre optique dont le diamètre a été considérablement réduit de sorte que la lumière ne se propage plus que dans le guide (en réalité, le coeur est si réduit qu'il est considéré comme absent). Dans cette zone, l'onde s'y propage sous forme évanescence. Ces coupleurs peuvent présenter de très faibles pertes et un taux de couplage excellent dans le WGM d'intérêt. De plus, comme le diamètre de la fibre n'est pas constant, l'accord de phase est réalisé en changeant la position du taper. Cependant, pour une même distance entre la sphère et le guide, l'accord de phase peut être réalisé pour plusieurs modes longitudinaux [37,87]. C'est ce type de coupleur qui est utilisé pour les expériences au laboratoire, il est compatible à la fois pour les micro-résonateurs WGM en régime passif ou actif.

Au fur et à mesure de sa propagation dans le taper, le champ électromagnétique est de plus en plus déconfiné. Sa constante de propagation  $\beta_f$  approchée [86,88] est :

$$\beta_f \simeq \sqrt{k_0^2 N_f^2 - \left(\frac{2.405}{\rho}\right)^2} \quad (3.14)$$

où  $N_f$  est l'indice de la fibre,  $k_0$  la constante de propagation dans le vide et  $\rho$  le rayon du taper. Le couplage entre les modes du taper et les WGM est efficace lorsque les constantes de propagation du guide  $\beta_f$  et du WGM  $\beta_s$  sont très proches. Pour les modes les plus confinés, la constante de propagation  $\beta_s$  s'écrit [37] :

$$\beta_s = \frac{k\ell}{x_{n,\ell,m}} \quad (3.15)$$

où  $x$  est obtenu via l'équation 2.64 (en considérant une sphère parfaite, *i.e.*  $e = 0$ ). L'égalité des constantes de propagation  $\beta_f$  et  $\beta_s$  nous permet de calculer le rayon optimal du taper réalisant l'accord de phase total pour une longueur d'onde et un

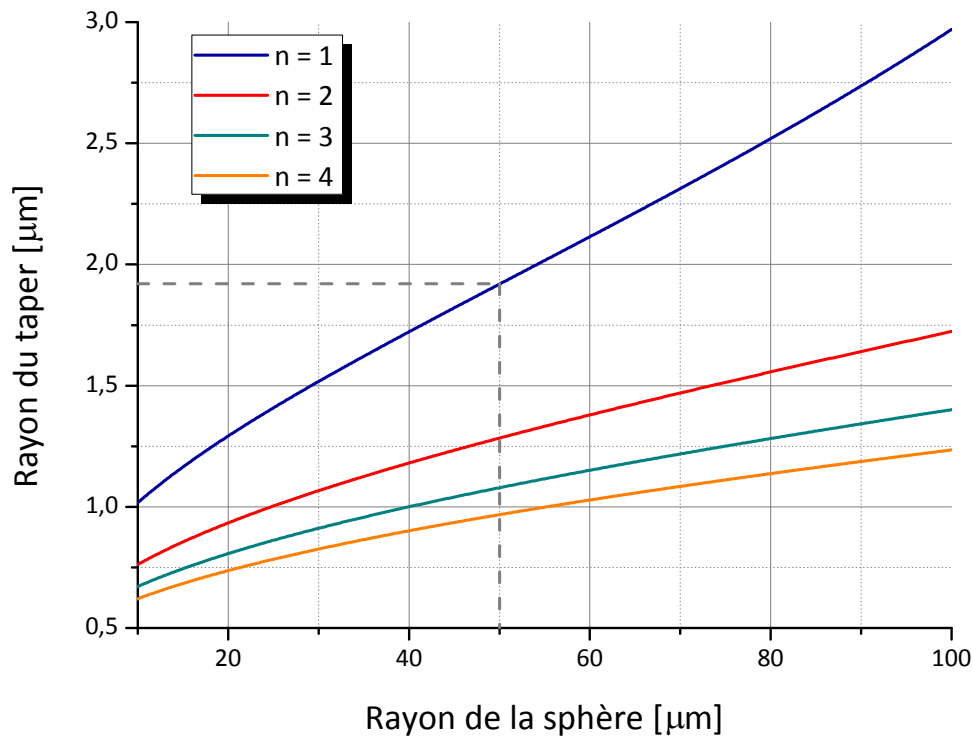


FIGURE 3.2 – Rayon optimal du taper en fonction du rayon de la sphère permettant un bon accord de phase entre les modes du guides et les WGM pour  $n=1$  à 4.

rayon de sphère donnés. La Figure 3.2 donne les valeurs optimales du rayon du taper en fonction du rayon du micro-résonateur pour les familles de modes  $n = 1$  à 4. Pour exciter les WGM d'intérêt, le taper doit avoir un rayon de l'ordre de  $2 \mu\text{m}$  à  $1550 \text{ nm}$ . Toutefois, la valeur donnée ici est à titre indicatif car l'expression 3.14 de  $\beta_f$  n'est qu'une approximation. Il est également possible de tirer parti de la géométrie du taper pour avoir une accordabilité de la constante de propagation  $\beta_f$  en couplant sur différentes zones du taper. Enfin, on fait varier le taux de couplage en modifiant la distance entre le résonateur et le taper.

#### 3.2.1.4 Couplage par pointe effilée

Lorsqu'une fibre effilée est étirée jusqu'à son point de rupture, on ne parle plus de taper mais de pointe effilée. C'est un coupleur permettant simplement d'obtenir un effet laser [37] ou pour la réalisation d'un laser bimode [14] et sera la configuration privilégiée pour la génération RF. Le principe de la propagation dans un tel guide reste cependant le même que dans un taper mais elle s'accompagne de pertes plus importantes et d'un couplage entre modes. Ces fibres sont plus courtes que les tapers afin d'avoir une bonne tenue mécanique, ce qui entraîne nécessairement qu'elles ne soient pas adiabatiques.

### 3.2.2 Propagation de la lumière dans un taper

Dans cette section, nous détaillons les modes de propagation dans un taper. Les constantes de propagation des modes guidés dans un tel guide sont déterminées en résolvant l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques et en appliquant les conditions de continuité aux limites.

#### 3.2.2.1 Modes propres

Dans un milieu inhomogène, la propagation du champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  doit tenir compte de l'inhomogénéité du milieu par un terme en  $N(\mathbf{r})$ . L'équation de propagation de  $\mathbf{E}$  dans un tel milieu s'écrit :

$$\Delta \mathbf{E} - \left(\frac{N}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \left( \mathbf{E} \cdot \nabla (\ln N^2) \right) \quad (3.16)$$

Le terme à droite de l'équation 3.16 introduit des couplages entre les différentes composantes de polarisation de  $\mathbf{E}$ , ce qui rend l'équation irrésolvable. Dans le cas de la propagation dans un taper de rayon  $\rho$ , on peut contourner la difficulté du problème initial en étudiant la propagation dans deux milieux homogènes d'indices  $N$  différents et en utilisant les conditions de continuité à l'interface entre les deux milieux.

Dans le taper (en silice,  $N = 1.46$ ) et dans le milieu extérieur (de l'air,  $N = 1$ ), la propagation est homogène (sauf à l'interface). la composante longitudinale des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  obéit aux équations d'ondes suivantes :

$$\Delta U_z - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{pour } r < a \quad (3.17a)$$

$$\Delta U_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{pour } r > a \quad (3.17b)$$

et les solutions recherchées sont de type :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(r, \theta) e^{j(\beta z - \omega t)} \quad (3.18)$$

où  $\beta = N_{\text{eff}} k_0$  est la constante de propagation et  $N_{\text{eff}}$  l'indice effectif du mode. On montre [89] que les modes de propagation dans un tel guide sont les vecteurs propres de l'équation de dispersion :

$$(m N_{\text{eff}})^2 \left(\frac{V}{UW}\right)^4 = \left[ \frac{N^2 J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{W K_m(W)} \right] \left[ \frac{J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{K'_m(W)}{W K_m(W)} \right] \quad (3.19)$$

où  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont les fréquences normalisées :

$$U = \rho k_0 \sqrt{N^2 - N_{\text{eff}}^2} \quad (3.20a)$$

$$W = \rho k_0 \sqrt{N_{\text{eff}}^2 - 1} \quad (3.20b)$$

$$V = \rho k_0 \sqrt{N^2 - 1} \quad (3.20c)$$

$J_m$  est la fonction de Bessel de première espèce et  $K_m$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Cette équation permet, pour un indice  $m$  donné, d'en déduire l'indice effectif des modes.

- Pour  $m = 0$ , la composante longitudinale de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{B}$  est nulle. Ces modes sont transverses électriques ( $TE$ ) ou transverses magnétiques ( $TM$ ). Ces modes présentent une symétrie circulaire puisqu'ils sont indépendants de  $\theta$ .
- Pour  $m \neq 0$ , la composante longitudinale de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{B}$  n'est pas nulle. Ce sont les modes dits hybrides<sup>2</sup>, notés  $HE$  ou  $EH$ .

L'ensemble du problème est conditionné par la valeur du rayon de coeur  $\rho$  dont dépendent  $U$ ,  $V$  et  $W$ . L'équation 3.19 se résoud numériquement en fonction du diamètre du taper  $2\rho$ , comme montré sur la Figure 3.3. On constate qu'il existe une valeur limite pour le diamètre du guide au delà de laquelle le taper devient multimode. Cette valeur critique est obtenue lorsque  $V$  est égale au premier zéro de la fonction de Bessel ( $\simeq 2.405$ ), ce qui correspond à un diamètre critique  $2\rho_c$  d'environ  $1.2 \mu\text{m}$ .

### 3.2.2.2 Intensité de l'onde évanescence

Nous prenons le cas d'une onde électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$  circulant dans un taper de diamètre  $2\rho = 1 \mu\text{m}$ . Les courbes de dispersion (Figure 3.3) montrent que ce taper est monomode, pour cette longueur d'onde : seul le mode  $HE_{11}$  est guidé. Afin d'évaluer la quantité d'énergie utilisable pour le couplage, on calcule la densité de puissance, ou intensité (en  $W.m^{-2}$ ), dans une section transverse du taper.

L'intensité  $I$  de l'onde électromagnétique est la composante longitudinale du vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}$  :

$$I = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}_z}{\mathcal{P}} \quad (3.21)$$

2. Dans l'approximation du guidage faible (dans une fibre optique, par exemple), les composantes longitudinales des champs tendent vers 0 et les modes sont transverses électromagnétiques, ou encore *linearly polarized* ( $LP$ )

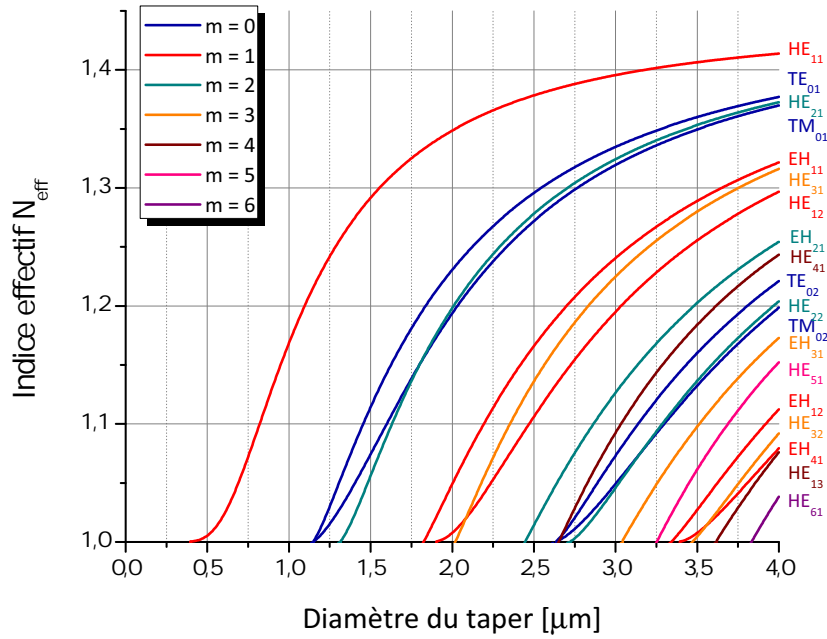


FIGURE 3.3 – Indice effectif des modes du taper en fonction de son diamètre,  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ ,  $N = 1.45$

où  $\mathcal{P}$  est une constante de normalisation :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}_z \, dS \quad (3.22)$$

de sorte que la puissance totale soit de 1 W. Le profil de l'intensité en fonction de la distance au centre du taper dans le plan  $\mathbf{z} = 0$  est représenté sur la Figure 3.4a (la symétrie du mode fait que le profil est indépendant de  $\theta$ ). La distribution dans l'ensemble du plan est représenté sur la Figure 3.4b où l'on a indiqué en pointillé l'interface silice-air.

Dans cet exemple, 70% de la puissance se propage sous forme evanescente. Ce type de coupleur est donc très intéressant pour coupler de la lumière dans un microrésonateur WGM. Il convient de remarquer que :

- Un taper monomode est obtenu lorsque son diamètre est inférieur au diamètre critique  $2\rho_c$  ( $1.2 \mu\text{m}$  pour  $N = 1.46$  et  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ ). Si l'on réduit davantage le diamètre, la constante de propagation en fera de même (cf. Figure 3.3). Cependant, plus le taper est fin, plus il est fragile et sensible aux vibrations. La moindre perturbation peut alors engendrer des pertes non négligeables. En pratique, les

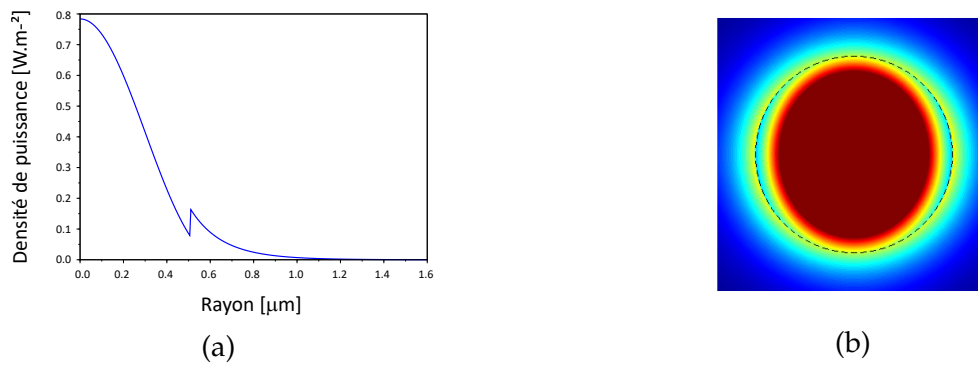


FIGURE 3.4 – (a) Densité de puissance en fonction du rayon dans un taper de rayon  $\rho = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$ , (b) Densité de puissance dans la section du taper (les pointillés indiquent la frontière gaine-air). Les Figures sont extraites de [90].

tapers réalisés ont un diamètre d'environ  $1 \mu\text{m}$ , ils offrent un bon compromis entre un fort déconfinement du champ et un guidage suffisant.

- Le diamètre du taper n'est pas constant mais est une fonction décroissante de  $z$ . L'aspect monomode du taper est relatif à la coordonnée  $z$  où l'on décide de coupler, ce qui nous offre un certain degré de liberté quant à la constante de propagation du mode de taper considéré. Ceci reste vrai lorsque la pente du taper est douce et que les modes propres ne se couplent pas entre eux lors de la propagation. Un tel taper est dit adiabatique.

### 3.2.3 Fabrication d'un taper

Les tapers sont réalisés à l'aide d'un dispositif de fusion-étirage : on chauffe localement une zone et on applique une contrainte d'élongation aux rebords. Les tapers sont réalisés à l'aide d'un banc de fusion-étirage motorisé pourvu d'un chalumeau.

#### 3.2.3.1 Banc de fusion-étirage

Le banc de fusion-étirage est schématisé sur la Figure 3.5 et est constitué des éléments suivants :

- Une fibre optique SMF-28 est dénudée et fixée sur deux mors motorisés. Ces derniers sont pilotés par ordinateur où l'on impose la vitesse et l'accélération du mouvement de translation.
- La zone dénudée est approchée dans la flamme d'un chalumeau alimenté par un mélange de butane et d'air, portant l'ensemble aux alentours de  $1200 \text{ }^\circ\text{C}$  sur une zone d'environ  $5 \text{ mm}$ .



- Un laser à 1550 nm est injecté et le signal est photodéecté après passage dans la fibre et relié à un oscilloscope pour mesurer la transmission en temps réel pendant l'étirage.

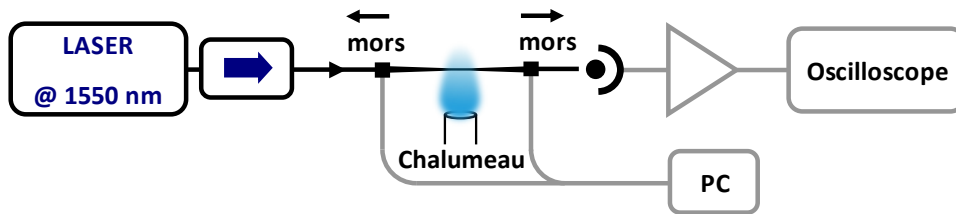


FIGURE 3.5 – Banc de fusion-étirage.

La modélisation du profil longitudinal du taper est la suivante [90] :

$$r(z) = \begin{cases} r_0 e^{-\frac{z}{h}} & \text{pour } 0 < z < \frac{L}{2} \\ r_0 e^{-\frac{L}{2h}} & \text{pour } \frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.23a)$$

$$r(z) = \begin{cases} r_0 e^{-\frac{z}{h}} & \text{pour } 0 < z < \frac{L}{2} \\ r_0 e^{-\frac{L}{2h}} & \text{pour } \frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3.23b)$$

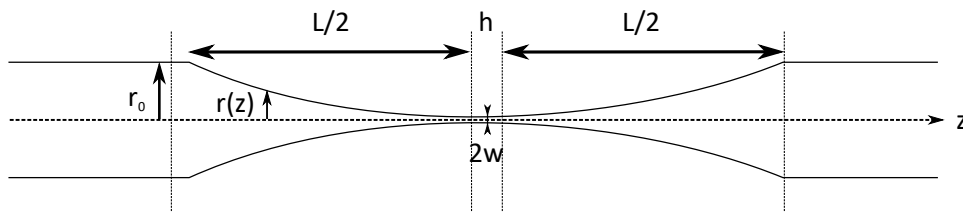


FIGURE 3.6 – Profil longitudinal d'un taper.

Dans la zone  $h$ , le diamètre du taper est constant, ce qui est important pour assurer un bon taux de couplage. Plus le taper est long, plus le diamètre de la zone la plus fine est long. Cependant, on ne peut pas connaître précisément la valeur du diamètre du taper. Pour en avoir une idée, on utilise la transition multimode-monomode du taper lors de l'élongation.

### 3.2.3.2 Interférences entre modes

Lors du suivi en temps réel du signal détecté après passage dans le taper, on constate que lorsque la fibre est très peu amincie, le signal ne subit aucune modification. Cependant, après une certaine distance d'élongation, des battements apparaissent. Ces interférences sont dues à un couplage entre les modes transverses. Ceci n'arrive que lorsque le coeur est tellement réduit que le guidage a lieu directement dans la gaine. A ce moment là, la différence entre l'indice de la gaine et l'indice de l'air est suffisamment élevée pour induire un couplage. Les modes vont alors se propager avec des

constantes de propagation  $\beta_i$  différentes. En sortie de taper, la fibre redevient monomode et l'on détecte l'énergie couplée dans le mode fondamental de la fibre ( $LP_{01}$ ). Le taper peut alors être vu comme un interféromètre de Mach-Zehnder où les coefficients de réflexion et de transmission dépendent des coefficients de couplage entre les modes. Plus la fibre est étirée, plus les battements sont rapides, jusqu'à un moment où ils disparaissent complètement. C'est le moment où le diamètre critique  $2\rho_c$  est dépassé : le taper est monomode. Les interférences, et particulièrement le moment où elle s'arrêtent brutalement, permettent de connaître précisément l'instant où l'on peut arrêter d'étirer la fibre. La Figure 3.7 est un exemple de suivi à l'oscilloscope des interférences entre les modes du taper pendant une élongation à vitesse constante, le passage multimode-monomode à  $t = 49$  s est mis en évidence dans le deuxième encart.

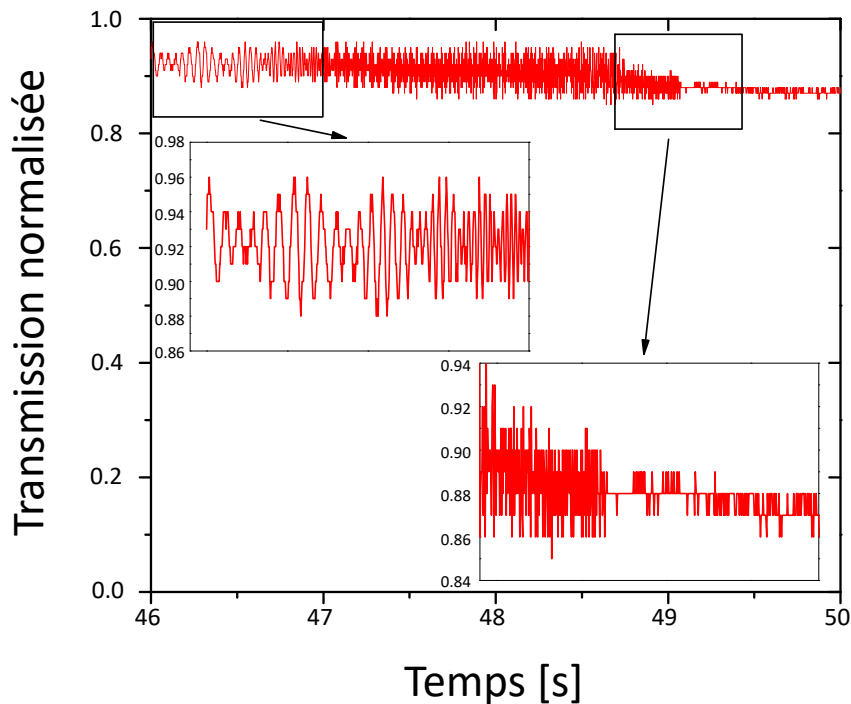


FIGURE 3.7 – Transmission en sortie du taper en fonction du temps,  $\lambda_0 = 1550$  nm

### Remarque sur le critère d'adiabaticité

Lorsqu'on considère la propagation d'un champ électromagnétique dans un taper, on ne peut pas réellement parler de modes propres puisque ceux-ci ont été calculés pour une fibre de diamètre constant, or le diamètre du taper évolue avec la distance longitudinale  $z$ . Dans la partie rétrécie, ces modes sont des pseudo-modes propres du taper et peuvent être décrits à partir des modes propres de la fibre sous condition que la va-

riation longitudinale du diamètre, *i.e.* la pente, soit douce. Dans un tel cas, le mode propre fondamental  $HE_{11}$  de la fibre évolue lentement vers le pseudo mode fondamental  $HE'_{11}$  du taper sans perte d'énergie. A l'inverse, si la variation de diamètre est trop abrupte, le mode fondamental de la fibre se projette sur plusieurs pseudo-modes propres du taper et des échanges d'énergie apparaissent. Si la fibre est monomode alors il se projette sur des modes radiatifs (en dehors du guide) et la propagation s'accompagne d'une forte atténuation. Un taper est alors non-adiabatique.

A partir de l'expression des pseudo-modes propres du taper dans le cas adiabatique [89,90], il est possible d'exprimer les coefficients de couplage du  $i^{\text{ième}}$  mode sur le  $j^{\text{ième}}$   $C_{ij}$  et les longueur caractéristiques de battement  $Z_{ij}$ . Le taper est adiabatique lorsqu'il satisfait le critère d'adiabaticité :

$$C_{ij}Z_{ij} < 1 \quad (3.24)$$

### 3.2.4 Fabrication d'une pointe effilée

Les pointes effilées sont des tapers mais l'élongation continue jusqu'à la rupture de la fibre. Elles sont réalisées à partir d'une soudeuse de fibres optiques programmable de la marque Ericsson. C'est sur le même principe de fusion et étirage que repose cette soudeuse. Une différence de potentiel est appliquée entre les deux électrodes, formant un arc électrique qui chauffe localement une fibre dénudée. Cette technique permet de réaliser des pointes dont le diamètre en bout de pointe est de l'ordre de  $1 \mu m$  sur une zone de  $0.1 mm$  (zone de diamètre constant) et étirées sur  $1 mm$ . La faible course des moteurs ne permet pas de réaliser des pointes effilées adiabatiques, néanmoins la connectivisation est moins contraignante et les coupleurs réalisés sont plus reproductibles.

### 3.2.5 Conclusion

Les tapers et pointes effilées peuvent servir des coupleurs de champ évanescent dans un micro-résonateur *WGM*. Ils permettent d'insérer un champ de pompe mais également d'extraire un champ laser avec le même coupleur. Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons ces deux types de coupleurs pour l'étude de l'effet laser et pour des expériences de rétrodiffusion.

# Chapitre 4

## Physique du laser dopé Erbium

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Rappel sur les grandeurs énergétiques</b>	<b>97</b>
<b>4.2</b>	<b>Equations de Maxwell-Bloch du laser</b>	<b>98</b>
4.2.1	Equations d'évolution des populations et des cohérences	98
4.2.2	Equation d'évolution du champ électrique	100
4.2.3	Equation d'évolution de la polarisation	101
4.2.4	Equation d'évolution de la densité d'inversion de population	101
4.2.5	Les différentes classes de lasers	103
<b>4.3</b>	<b>Laser de classe B : des équations de Maxwell-Bloch aux équations de débit</b>	<b>104</b>
4.3.1	Simplification des équations de Maxwell-Bloch	104
4.3.1.1	Elimination adiabatique de la polarisation	104
4.3.1.2	Population du niveau $ 2\rangle$	105
4.3.1.3	Equation d'évolution de la densité d'inversion de population	105
4.3.1.4	Equation d'évolution du flux de photons	105
4.3.2	Inversion de population et nombre de photons	106
4.3.3	Solutions stationnaires	106
<b>4.4</b>	<b>Application au laser à modes de galerie : ordres de grandeurs</b>	<b>109</b>
4.4.1	Volume de mode	110
4.4.2	Inversion de population au seuil	110
4.4.3	Puissance de pompe au seuil	111

4.4.4	Puissance de sortie . . . . .	111
4.4.5	Laser à fibre dopée Erbium . . . . .	111
4.4.6	Bilan . . . . .	113
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>113</b>

---

Un laser *WGM* dopé Erbium peut être considéré comme un laser à 3 niveaux de classe B. Dans ce chapitre, nous utilisons le formalisme de la matrice densité pour établir les équations de Maxwell-Bloch. Sous certaines conditions, le système peut se réduire à un ensemble de deux équations couplées. Enfin, nous donnons les ordres de grandeur des paramètres physiques du laser *WGM* dopé aux ion Erbium et nous le comparons à un laser à fibre afin d'en souligner ses spécificités.

## 4.1 Rappel sur les grandeurs énergétiques

Nous effectuons ici un rappel des différentes grandeurs rencontrées dans ce chapitre pour décrire le rayonnement issu d'un laser à trois niveaux.

- **Puissance** : la puissance  $P$  est une énergie (optique, électrique, mécanique, ...) mesurée, ou émise, par unité de temps (en  $W = J.s^{-1}$ ). Elle peut également être exprimée en *dBm*, rapport logarithmique de la puissance mesurée sur une puissance de 1 *mW*.
- **Intensité** : l'intensité instantanée  $I(\mathbf{r}, t)$  est une puissance mesurée par unité de surface ( $W.m^{-2}$ ). L'intégration de l'intensité optique sur la surface utile du détecteur donne la puissance mesurée.  $I$  est reliée au champ électrique  $\mathbf{E}$  par la relation :

$$I(\mathbf{r}, t) = Nc\epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (4.1)$$

où  $N$  est l'indice du milieu,  $c$  la vitesse de la lumière,  $\epsilon_0$  la perméabilité du vide et  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  un champ réel de la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}, t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{e} = \left( \frac{\tilde{E}_0(\mathbf{r}, t)}{2} e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \right) \mathbf{e}$$

où  $E_0$  est l'enveloppe réelle,  $\tilde{E}_0$  l'enveloppe complexe,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde,  $\omega$  la pulsation et  $\mathbf{e}$  la polarisation du champ électrique.

Les photodétecteurs ont un temps de réponse  $\tau_r$  bien plus grand que la période  $T = \lambda/c$  de l'onde électromagnétique incidente. On doit alors moyenner le signal reçu sur sa période et obtenir l'intensité moyenne à laquelle nous avons accès expérimentalement :

$$I \equiv \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_{\tau_r} = \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_T = \frac{1}{2} Nc\epsilon_0 |E_0(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (4.2)$$

où  $\langle \rangle_{\Delta t}$  est l'opération "valeur moyenne" mesurée sur l'intervalle  $\Delta t$ .

- **flux de photons** : le flux de photons  $\phi$  correspond au nombre de photons traversant une unité de surface  $\mathcal{S}$  par unité de temps  $\Delta t$  ( $m^{-2}s^{-1}$ ). Il est relié à l'intensité par la relation :

$$\phi = \frac{I}{\hbar\omega} \quad (4.3)$$

- **nombre de photons** : le nombre de photons  $F$  d'un faisceau photodéecté correspond au nombre de photons récoltés par le photodéecteur traversant une surface  $\mathcal{S}$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  donné (c'est un nombre, il n'a donc pas d'unité).

Par commodité, on choisit notre intervalle de temps  $\Delta t$  égal au temps de parcours de la cavité  $\tau_L$  qui vaut exactement  $NL/c$  où  $L$  correspond à la longueur de la cavité ( $L = 2\pi a$  pour une cavité circulaire). Avec cette définition, le flux de photons est lié au nombre de photons  $F$  par la relation :

$$\phi = \frac{c}{N} \frac{F}{\mathcal{V}} \quad (4.4)$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume du mode laser dans la cavité.

## 4.2 Equations de Maxwell-Bloch du laser

A partir des propriétés de la matrice densité d'un système atomique à trois niveaux et de la propagation d'un champ électrique dans un tel milieu, nous nous ramenons à un système de trois équations couplées permettant de décrire les différentes interactions mises en jeu dans le processus d'émission laser : les équations de Maxwell-Bloch.

### 4.2.1 Equations d'évolution des populations et des cohérences

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  représentant le système à trois niveaux est la somme de l'Hamiltonien sans interaction extérieure (*i.e.* non perturbé)  $\mathcal{H}_0$  et de l'Hamiltonien d'interaction dipolaire  $\mathcal{W}_d(t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$  [91]. On notera  $\hbar\omega_i$  l'énergie du niveau  $|i\rangle$  et  $\mathbf{d}_{ij}$  le moment dipolaire électrique de la transition  $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{E}_L & -\mathbf{d}_{02} \cdot \mathbf{E}_P \\ -\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_L & 0 & 0 \\ -\mathbf{d}_{20} \cdot \mathbf{E}_P & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$\mathbf{E}_P$  et  $\mathbf{E}_L$  sont les champs électriques respectivement concernés par les transitions  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  et  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ . Ils correspondent au champ électrique de pompe et champ

électrique de la transition laser.

L'évolution de la matrice densité est régie par l'équation de Liouville - Von Neumann [92]:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\mathcal{H}; \hat{\rho}] \quad (4.6)$$

Dans notre cas, les équations d'évolution des population  $\rho_{ii}$  des niveau  $|i\rangle$  correspondent aux termes diagonaux de l'opérateur 4.6, les cohérences  $\rho_{ij}|_{i \neq j}$  sont les termes restants.

Cependant, pour décrire l'interaction du système atomique avec le milieu extérieur, nous devons introduire des termes phénoménologique tels que la relaxation des populations et le brouillage des cohérences. Ces derniers sont décrits par leur taux de relaxation,  $\gamma_i$  pour les populations et  $\gamma_{ij}$  pour les cohérences.

En développant les opérateur  $\hat{\rho}$  et  $[\mathcal{H}; \hat{\rho}]$  dans l'équation 4.6, nous obtenons les équations d'évolution suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_{00}}{\partial t} = \frac{j}{\hbar} (\mathbf{d}_{01}\rho_{10} - \mathbf{d}_{10}\rho_{01}) \cdot \mathbf{E}_L + \frac{j}{\hbar} (\mathbf{d}_{02}\rho_{20} - \mathbf{d}_{20}\rho_{02}) \cdot \mathbf{E}_P + \gamma_1\rho_{11} \quad (4.7a) \\ \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} (\mathbf{d}_{01}\rho_{10} - \mathbf{d}_{10}\rho_{01}) \cdot \mathbf{E}_L - \gamma_1\rho_{11} + \gamma_2\rho_{22} \quad (4.7b) \\ \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} (\mathbf{d}_{02}\rho_{20} - \mathbf{d}_{20}\rho_{02}) \cdot \mathbf{E}_P - \gamma_2\rho_{22} \quad (4.7c) \\ \frac{\partial \rho_{10}}{\partial t} = -j \underbrace{(\omega_1 - \omega_0)}_{\omega_{10}} \rho_{10} - \frac{j}{\hbar} \mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{E}_L (\rho_{11} - \rho_{00}) - \frac{j}{\hbar} \mathbf{d}_{02} \cdot \mathbf{E}_P \rho_{12} - \gamma_{10}\rho_{10} \quad (4.7d) \\ \frac{\partial \rho_{20}}{\partial t} = -j \underbrace{(\omega_2 - \omega_0)}_{\omega_{20}} \rho_{20} - \frac{j}{\hbar} \mathbf{d}_{20} \cdot \mathbf{E}_P (\rho_{22} - \rho_{00}) - \frac{j}{\hbar} \mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{E}_L \rho_{21} - \gamma_{20}\rho_{20} \quad (4.7e) \\ \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = 0 \quad (4.7f) \end{array} \right.$$

où  $\omega_{10}$  et  $\omega_{20}$  sont les pulsations des transitions atomiques  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  et  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  du système à trois niveaux ( $\hbar\omega_{ij} = |E_i - E_j|$ ). Les transitions non radiatives ont été négligées, ce qui explique l'équation 4.7f.



Les champs  $\mathbf{E}_L$  et  $\mathbf{E}_P$  sont tels que :

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{\tilde{E}_L(\mathbf{r}, t) e^{j(k_L z - \omega_L t)} + \tilde{E}_L^*(\mathbf{r}, t) e^{-j(k_L z - \omega_L t)}}{2} \right) \mathbf{e}_L \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{\tilde{E}_P(\mathbf{r}, t) e^{j(k_P z - \omega_P t)} + \tilde{E}_P^*(\mathbf{r}, t) e^{-j(k_P z - \omega_P t)}}{2} \right) \mathbf{e}_P \quad (4.8b)$$

Nous considérons que les cohérences oscillent à la même fréquence que le champ concerné par la transition :

$$\rho_{10} = \frac{\tilde{\rho}_{10} e^{-j\omega_L t} + \tilde{\rho}_{10}^* e^{j\omega_L t}}{2} \quad (4.9a)$$

$$\rho_{20} = \frac{\tilde{\rho}_{20} e^{-j\omega_P t} + \tilde{\rho}_{20}^* e^{j\omega_P t}}{2} \quad (4.9b)$$

Comme la matrice densité est hermitique [92],  $\tilde{\rho}_{ij}^* = \tilde{\rho}_{ji}$ . Nous développons les équations d'évolution avec ces termes et ne conservons que les termes *lents* (approximation quasi-résonante) pour obtenir les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{00}}{\partial t} = \frac{j}{4\hbar} (d_{01} \tilde{\rho}_{10} \tilde{E}_L - d_{01}^* \tilde{\rho}_{10}^* \tilde{E}_L) + \frac{j}{4\hbar} (d_{02} \tilde{\rho}_{20} \tilde{E}_P - d_{02}^* \tilde{\rho}_{20}^* \tilde{E}_P) + \gamma_1 \rho_{11} \end{array} \right. \quad (4.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{11}}{\partial t} = -\frac{j}{4\hbar} (d_{01} \tilde{\rho}_{10} \tilde{E}_L^* - d_{01}^* \tilde{\rho}_{10}^* \tilde{E}_L) - \gamma_1 \rho_{11} + \gamma_2 \rho_{22} \end{array} \right. \quad (4.10b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{22}}{\partial t} = -\frac{j}{4\hbar} (d_{02} \tilde{\rho}_{20} \tilde{E}_P^* - d_{02}^* \tilde{\rho}_{20}^* \tilde{E}_P) - \gamma_2 \rho_{22} \end{array} \right. \quad (4.10c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{10}}{\partial t} = -\gamma_{10} [1 - j\delta_L] \tilde{\rho}_{10} - \frac{j}{\hbar} d_{10} \tilde{E}_L (\rho_{11} - \rho_{00}) \end{array} \right. \quad (4.10d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{20}}{\partial t} = -\gamma_{20} [1 - j\delta_P] \tilde{\rho}_{20} - \frac{j}{\hbar} d_{20} \tilde{E}_P (\rho_{22} - \rho_{00}) \end{array} \right. \quad (4.10e)$$

où  $\delta_L = \frac{\omega_L - \omega_{10}}{\gamma_{10}}$  et  $\delta_P = \frac{\omega_P - \omega_{20}}{\gamma_{20}}$  représentent respectivement le désaccord réduit du laser et de la pompe aux résonances atomiques.

## 4.2.2 Equation d'évolution du champ électrique

L'équation d'évolution du champ électrique dans un milieu linéaire, homogène et isotrope découle des équations de Maxwell et des relations constitutives [93, 94]. En présence de terme de polarisation (la réponse du milieu est un terme d'émission stimulée) et sous l'approximation des enveloppes lentement variables, l'équation de propagation s'écrit [95] :

$$\frac{\partial \tilde{E}_L}{\partial t} = -\frac{1}{2\tau_P} (1 - j\delta_c) \tilde{E}_L + j \frac{\omega}{2\varepsilon_0 N^2} \tilde{P} \quad (4.11)$$

avec  $\tau_P = \varepsilon_0 N^2 / \sigma_0$  le temps de décroissance de l'énergie dans la cavité, *i.e.* temps de vie des photons et  $\delta_c = 2\tau_P (\omega - \omega_c)$  est le désaccord réduit à résonance de cavité où  $\omega_c = k_0 c / N$  et  $k_0 = |\mathbf{k}| / N$ .

### 4.2.3 Equation d'évolution de la polarisation

La polarisation macroscopique  $|\mathbf{P}| = P$ , évoluant à  $\omega_L$  est donnée par :

$$P(\mathbf{r}, t) = \mathcal{N}_{\text{tot}} \text{Tr} [\hat{\rho} \mathbf{d}_{10}] = \mathcal{N}_{\text{tot}} (\rho_{10} \mathbf{d}_{01} + \rho_{01} \mathbf{d}_{10}) \quad (4.12)$$

En posant :

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{P}(\mathbf{r}, t) e^{j(k_L z - \omega_L t)} + \tilde{P}^*(\mathbf{r}, t) e^{-j(k_L z - \omega_L t)}}{2} \quad (4.13)$$

il vient :

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{N}_{\text{tot}} \mathbf{d}_{01} \tilde{\rho}_{10} \quad (4.14)$$

et on peut dorénavant écrire l'équation de Maxwell-Bloch pour la polarisation :

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\frac{1}{T_2} (1 - j\delta_L) \tilde{P} - \frac{j}{\hbar} |d_{01}|^2 \tilde{E}_L \mathcal{N} \quad (4.15)$$

où l'on a noté  $T_2 = \gamma_{10}^{-1}$  le temps de vie caractéristique du dipôle  $\mathbf{d}_{10}$ , également appelé temps de déphasage, temps de vie de la cohérence optique ou temps de cohérence.  $\gamma_{10}$  est proportionnelle à la largeur homogène de la transition considérée (cf. chap. 1). La Figure 4.1 schématise le laser à trois niveaux.

### 4.2.4 Equation d'évolution de la densité d'inversion de population

Les populations sur les niveaux  $|i\rangle$  sont notées :

$$\mathcal{N}_{ii} = \mathcal{N}_{\text{tot}} \rho_{ii} \quad (4.16)$$

Puisque la relaxation du niveau  $|2\rangle$  est quasiment instantanée, le niveau  $|2\rangle$  se vide très rapidement sur le niveau  $|1\rangle$  (cf Fig. 4.1) si bien qu'on peut considérer que la population  $\mathcal{N}_{22}$  est nulle. La densité totale d'ions  $\mathcal{N}_{\text{tot}}$  s'écrit alors comme :

$$\mathcal{N}_{\text{tot}} = \mathcal{N}_{11} + \mathcal{N}_{00} \quad (4.17)$$

et la densité d'inversion de population :

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{11} - \mathcal{N}_{00} \quad (4.18)$$

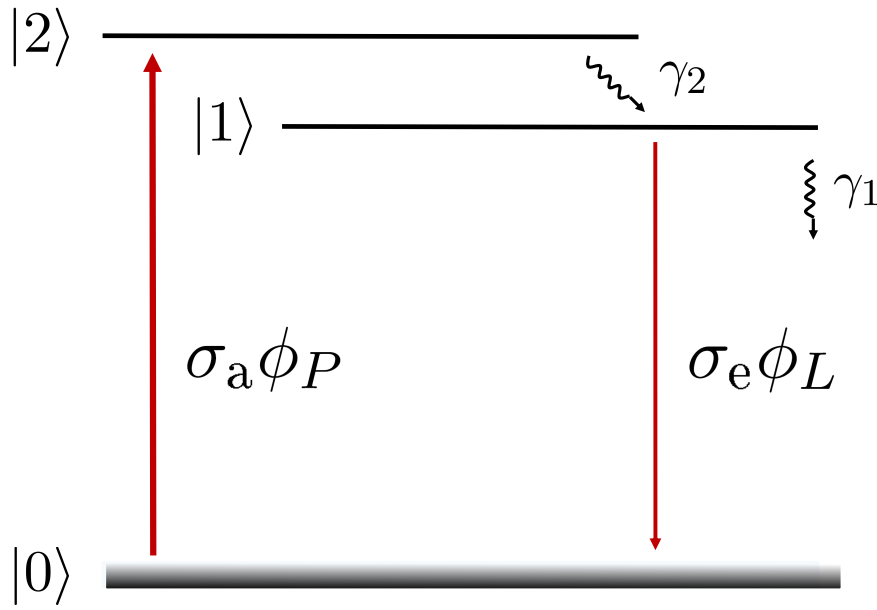


FIGURE 4.1 – Schéma du laser à trois niveaux.

puisque seuls les niveaux  $|1\rangle$  et  $|0\rangle$  sont peuplés<sup>1</sup>. Avec ces notations, nous pouvons exprimer l'équation d'évolution de  $\mathcal{N}$  comme :

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \mathcal{N}_{\text{tot}} \left( \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} - \frac{\partial \rho_{00}}{\partial t} \right) \quad (4.19)$$

$$= \underbrace{-\frac{j}{2\hbar} (d_{02}\tilde{\rho}_{20}\tilde{E}_P^* - d_{02}^*\tilde{\rho}_{20}^*\tilde{E}_P)}_{-2W_P(\mathcal{N}_{22} - \mathcal{N}_{00}) \simeq 2W_P\mathcal{N}_{00}} \mathcal{N}_{\text{tot}} - 2\gamma_1\mathcal{N}_{11} - \frac{j}{2\hbar} (\tilde{P}\tilde{E}_L^* - \tilde{P}^*\tilde{E}_L) \quad (4.20)$$

En effectuant les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} W_P + \gamma_1 &\rightarrow \frac{1}{\tau} \\ \left( \frac{W_P - \gamma_1}{W_P + \gamma_1} \right) \mathcal{N}_{\text{tot}} &\rightarrow \mathcal{N}_0 \end{aligned}$$

il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}) - \frac{j}{2\hbar} (\tilde{P}\tilde{E}_L^* - \tilde{P}^*\tilde{E}_L) \quad (4.21)$$

qui est l'équation de Maxwell-Bloch pour la densité d'inversion de population.

1. Nous avons négligé le phénomène d'absorption par les niveaux supérieurs (*up-conversion*)

### 4.2.5 Les différentes classes de lasers

Les équations de Maxwell-Bloch s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_L}{\partial t} = -\frac{1}{2\tau_P} (1 - j\delta_c) \tilde{E}_L + j\frac{\omega}{2\varepsilon_0 N^2} \tilde{P} & (4.22a) \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\frac{1}{T_2} (1 - j\delta_L) \tilde{P} - \frac{j}{\hbar} |d_{01}|^2 \tilde{E}_L \mathcal{N} & (4.22b) \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}) - \frac{j}{2\hbar} (\tilde{P} \tilde{E}_L^* - \tilde{P}^* \tilde{E}_L) & (4.22c) \end{cases}$$

Ces équations constituent les équations de Maxwell-Bloch dans le cas d'un laser à trois niveaux. Elles permettent de représenter la dynamique d'un laser sans autres considération que l'approximation des enveloppes lentement variables. Sous un apport d'énergie extérieur (pompage), le milieu répond à l'excitation par une polarisation  $\tilde{P}$ . Ce dernier terme va jouer le rôle de gain pour le champ  $\tilde{E}_L$  via la fonction de transfert de la cavité. C'est un intermédiaire entre  $\mathcal{N}$  et  $\tilde{E}_L$ , en général avec une dynamique très rapide. La relation d'autocompatibilité entre  $\tilde{E}_L$  et  $\mathcal{N}$  entraîne un effet de rétroaction sur le milieu actif. La Figure 4.2 illustre les relations entre  $\mathcal{N}$ ,  $\tilde{P}$  et  $\tilde{E}_L$  de manière simplifiée.

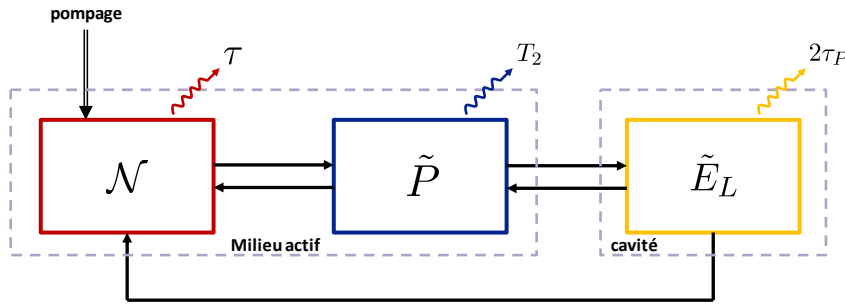


FIGURE 4.2 – Schéma fonctionnel des équations de Maxwell-Bloch.

Ces équations n'ont pas de solution analytique dans un cas général. Pour résoudre le système, on effectue un certain nombre d'approximations sur les temps de vie des différentes variables. En effet,  $\mathcal{N}$ ,  $\tilde{P}$  et  $\tilde{E}_L$  évoluent avec des temps caractéristiques qui leur sont propres :

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\rightarrow \tau_P \\ \tilde{P} &\rightarrow T_2 \\ \mathcal{N} &\rightarrow \tau \end{aligned}$$

En fonction de la vitesse à laquelle une variable atteint son état stationnaire, on peut procéder, ou non, à certaines approximations modifiant ainsi le système d'équations

de Maxwell-Bloch, définissant alors trois catégories, appelées classes de laser : A, B et C.

- Pour un laser de classe C,  $\tau_p$ ,  $T_2$  et  $\tau$  sont du même ordre de grandeur.
- Pour un laser de classe B,  $\tau_p$  et  $\tau$  sont beaucoup plus grand que  $T_2$  : la polarisation atteint très rapidement son état d'équilibre. On peut donc alors directement remplacer  $\tilde{P}$  par sa valeur stationnaire et se retrouver avec un système de deux équations à deux inconnues. On parle d'*élimination adiabatique de la polarisation*.
- Pour un laser de classe A,  $\tau_p$  est très grand devant  $\tau$  et  $T_2$ . De la même façon que pour un laser de classe B, on peut éliminer adiabatiquement la polarisation et la densité d'inversion de population.

### 4.3 Laser de classe B : des équations de Maxwell-Bloch aux équations de débit

Dans notre cas, nous utilisons un laser dopé aux ions Erbium où le temps de vie du niveau excité est  $T_1 = \gamma_1^{-1} = 10 \text{ ms}$  tandis que le temps de vie de cohérence  $\gamma_{10}^{-1} = T_2 = 1 \text{ ps}$ . La valeur très élevée de  $T_1$  entraîne que le système à trois niveaux rentre directement dans une dynamique de laser de classe B, et ce quel que soit le type de cavité considérée.

Pour la suite des calculs, nous introduisons les sections efficaces d'émission  $\sigma_e$  et d'absorption  $\sigma_a$  :

$$\sigma_{e/a} = \frac{|d_{01/02}|^2 \omega_{L/P}}{\hbar N c \epsilon_0 \gamma_{10/20}} \left( \frac{1}{1 + \delta_{L/P}^2} \right) = \frac{\sigma_{e/a}^0}{1 + \delta_{L/P}^2} \quad (4.23)$$

#### 4.3.1 Simplification des équations de Maxwell-Bloch

##### 4.3.1.1 Elimination adiabatique de la polarisation

La polarisation atteint très rapidement son état stationnaire qui permet d'écrire  $\tilde{P}$  comme :

$$\tilde{P} = -j \frac{|d_{01}|^2}{\hbar \gamma_{10}} \left( \frac{1 + j\delta_L}{1 + \delta_L^2} \right) \tilde{E}_L \mathcal{N} \quad (4.24)$$

La relaxation de la cohérence de la transition  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  est aussi très rapide. L'équation 4.10e conduit alors à :

$$d_{02}\tilde{\rho}_{20}\mathcal{N}_{\text{tot}} = -j\frac{|d_{02}|^2}{\hbar\gamma_{20}} \left( \frac{1+j\delta_P}{1+\delta_P^2} \right) \tilde{E}_P (\mathcal{N}_{22} - \mathcal{N}_{00}) \quad (4.25)$$

#### 4.3.1.2 Population du niveau $|2\rangle$

La transition  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  est non radiative et, de surcroît, très rapide. Le niveau  $|2\rangle$  se vide quasi-instantanément, si bien qu'on peut considérer  $\frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} = 0$ . En injectant les équations 4.24 et 4.25 dans 4.10b, nous obtenons :

$$\mathcal{N}_{22} = \left( \frac{\sigma_a\phi_P}{\gamma_2 + \sigma_a\phi_P} \right) \mathcal{N}_{00}$$

La relaxation est considérée comme instantanée, autrement dit  $\gamma_2 \rightarrow +\infty$ . On a alors  $\mathcal{N}_{22} \ll \mathcal{N}_{00}$ .

#### 4.3.1.3 Equation d'évolution de la densité d'inversion de population

Au vu des considérations précédentes, l'équation 4.22c devient :

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}) - 2\sigma_e\phi_L\mathcal{N} \quad (4.26)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_0 = \left( \frac{\sigma_a\phi_P - \gamma_1}{\sigma_a\phi_P + \gamma_1} \right) \mathcal{N}_{\text{tot}} \\ \frac{1}{\tau} = \sigma_a\phi_P + \gamma_1 \end{array} \right. \quad (4.27a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau} = \sigma_a\phi_P + \gamma_1 \end{array} \right. \quad (4.27b)$$

#### 4.3.1.4 Equation d'évolution du flux de photons

En injectant l'expression de  $\tilde{P}$  4.24 dans l'équation d'évolution de  $\tilde{E}$  4.22a, on obtient :

$$\frac{\partial\tilde{E}_L}{\partial t} = -\frac{1}{2\tau_P} (1 - j\delta_c) \tilde{E}_L + \frac{c\sigma_e}{2N} (1 + j\delta_L) \tilde{E}_L\mathcal{N} \quad (4.28)$$

Pour une pulsation  $\omega_L$  accordée sur une pulsation de cavité  $\omega_c$  et sur une résonance atomique  $\omega_{10}$ , l'équation 4.28 se réécrit :

$$\frac{\partial\phi_L}{\partial t} = \left( -\frac{1}{\tau_P} + \frac{c\sigma_e}{N}\mathcal{N} \right) \phi_L \quad (4.29)$$

L'ensemble des équations 4.26 et 4.29 forment les **équations de débit** d'un laser de classe B, également appelées **équations de Statz et DeMars** [93, 95–97].

### 4.3.2 Inversion de population et nombre de photons

La densité d'inversion de population s'écrit :

$$\mathcal{N} = \frac{\hat{N}}{\mathcal{V}_{\text{act}}}$$

tandis que le flux de photons s'écrit :

$$\phi_L = \frac{c F}{N \mathcal{V}}$$

où l'échelle de temps choisie est  $\Delta t = \tau_L$ ,  $\hat{N}$  est le nombre d'ions Erbium,  $\mathcal{V}$  est le volume du mode laser et  $\mathcal{V}_{\text{act}}$  est le volume de la zone active (*i.e.* le volume du mode de pompe alimentant le mode laser).

En considérant que le mode de pompe et le mode laser ont des longueurs d'onde relativement proches et les mêmes profils transverses (même famille de mode  $n$  et  $\ell - |m|$ ), le recouvrement entre les modes est optimal. On peut alors considérer que  $\mathcal{V}_{\text{act}} \simeq \mathcal{V}$ . Les équations de débit s'écrivent alors [98] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\hat{N}_0 - \hat{N}) - 2\kappa F \hat{N} & (4.30a) \\ \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{F}{\tau_p} + \kappa F \hat{N} & (4.30b) \end{cases}$$

avec :

$$\kappa = \frac{c \sigma_e}{N \mathcal{V}} \quad (4.31)$$

### 4.3.3 Solutions stationnaires

Ces solutions sont obtenues en posant  $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$  où  $X$  représente  $\hat{N}$  ou  $F$ . Deux couples de solutions sont obtenues : en dessous du seuil laser (solution **OFF**) et au dessus (solution **ON**) :

$$\begin{cases} \hat{N}_{\text{OFF}} = \hat{N}_0 & (4.32a) \\ F_{\text{OFF}} = 0 & (4.32b) \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{N}_{\text{ON}} = \frac{1}{\kappa \tau_p} & (4.33a) \\ F_{\text{ON}} = \frac{1}{2\kappa \tau} \left( \frac{\hat{N}_0}{\hat{N}_{\text{ON}}} - 1 \right) & (4.33b) \end{cases}$$

La Figure 4.3 montre l'évolution des solutions stationnaires en fonction du taux de pompage normalisé  $r$ .

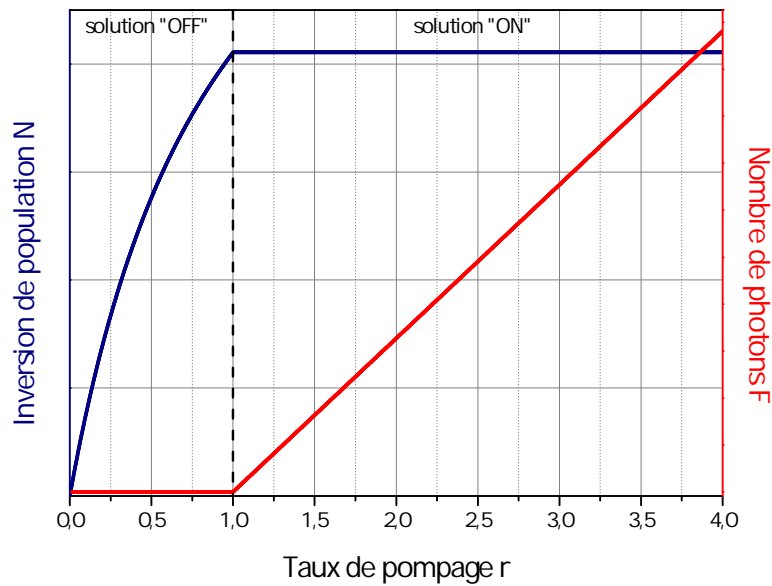


FIGURE 4.3 – Solutions stationnaires des équations de Statz et DeMars pour un laser à trois niveaux.

#### Solution OFF : sous le seuil laser

La solution triviale de l'équation 4.30b est  $F = 0$ , ce qui correspond au laser sous le seuil. Dans un tel régime, l'inversion de population  $\hat{N}$  croît avec le flux de photons de pompe  $\phi_P$  :

$$\hat{N}_{\text{OFF}} = \hat{N}_0 = \left( \frac{\sigma_a \phi_P - \gamma_1}{\sigma_a \phi_P + \gamma_1} \right) \hat{N}_{\text{tot}}$$

Le flux de photons de pompe absorbé par le milieu n'est pas suffisant pour engendrer l'émission stimulée. La densité d'inversion de population augmente de façon non linéaire avec le flux de photons de pompe.

#### Solution ON : au dessus du seuil laser

La deuxième solution de l'équation 4.30b correspond au cas où l'inversion de population est constante quelle que soit la valeur de  $\phi_P$  :

$$\hat{N}_{\text{ON}} = \frac{1}{\kappa \tau_P} = \frac{N \mathcal{V}}{c \sigma_e \tau_P}$$

On parle de *gain verrouillé* (*gain clamping*). Le nombre de photons en régime station-



naire prend alors la forme :

$$F_{\text{ON}} = \frac{1}{2\kappa\tau} \left( \frac{\hat{N}_0}{\hat{N}_{\text{ON}}} - 1 \right)$$

Le nombre de photons évolue linéairement avec le flux de photons de pompe  $\phi_P$  :

$$F_{\text{ON}} = \frac{1}{2\kappa} \left[ W_P \left( \frac{\hat{N}_{\text{tot}}}{\hat{N}_{\text{ON}}} - 1 \right) - \gamma_1 \left( \frac{\hat{N}_{\text{tot}}}{\hat{N}_{\text{ON}}} + 1 \right) \right] \quad (4.34)$$

Cette expression n'est valable qu'au dessus du seuil, c'est à dire lorsque  $\hat{N}_0 \leq \hat{N}_{\text{ON}}$ . Lorsque  $F_{\text{ON}} = 0$ , on est exactement au taux de pompage  $W_P$  correspondant au seuil du laser.

### Définition du seuil laser

L'égalité des deux solutions stationnaires du nombre de photons permet de définir le taux de pompage au seuil  $W_{P,\text{Th}}$ . On a alors :

$$W_{P,\text{Th}} = \gamma_1 \left( \frac{N_{\text{tot}} + N_{\text{ON}}}{N_{\text{tot}} - N_{\text{ON}}} \right) = \gamma_1 \left( \frac{\kappa\tau_P \hat{N}_{\text{tot}} + 1}{\kappa\tau_P \hat{N}_{\text{tot}} - 1} \right) \quad (4.35)$$

Nous définissons le **taux de pompage normalisé**  $r$  comme le rapport entre le taux de pompage et le taux de pompage au seuil :

$$r = \frac{W_P}{W_{P,\text{Th}}} \quad (4.36)$$

Avec cette définition, le nombre de photons au dessus du seuil s'écrit comme :

$$F_{\text{ON}} = \frac{\gamma_1}{2\kappa} (\kappa\tau_P \hat{N}_{\text{tot}} + 1) (r - 1) \quad (4.37)$$

On définit également le **degré d'excitation**  $\eta$  tel que

$$\eta = \frac{\hat{N}_0}{\hat{N}_{\text{ON}}} \quad (4.38)$$

qui, lui, n'évolue pas de manière linéaire avec le taux de pompage normalisé  $r$ .

Le nombre de photons en régime stationnaire au dessus du seuil s'écrit :

$$F_{\text{ON}} = F_{\text{sat}} (\eta - 1)$$

avec  $F_{\text{sat}} = 1/2\kappa\tau$ , il correspond au nombre de photons de saturation<sup>2</sup> de l'inversion de population non saturée  $\hat{N}_0$ . L'ensemble des variables introduites dans l'étude de la dynamique du laser à trois niveaux est résumé sur le Tableau 4.1.

TABLEAU 4.1 – Grandeurs utilisées dans l'étude du laser à trois niveaux

Variable	nom	définition
taux de pompage	$W_P$	$\sigma_a \phi_P$
constante de couplage	$\kappa$	$\frac{c \sigma_e}{N \mathcal{V}}$
temps de récupération	$\tau$	$(W_P + \gamma_1)^{-1}$
inversion de population non saturée	$\hat{N}_0$	$\left( \frac{W_P - \gamma_1}{W_P + \gamma_1} \right) \hat{N}_{\text{tot}}$
inversion de population au dessus du seuil	$\hat{N}_{\text{ON}}$	$\frac{1}{\kappa \tau_P}$
taux de pompage au seuil	$W_{P,\text{Th}}$	$\gamma_1 \left( \frac{\hat{N}_{\text{tot}} + \hat{N}_{\text{ON}}}{\hat{N}_{\text{tot}} - \hat{N}_{\text{ON}}} \right)$
taux de pompage normalisé	$r$	$\frac{W_P}{W_{P,\text{Th}}}$
degré d'excitation	$\eta$	$\frac{\hat{N}_0}{\hat{N}_{\text{ON}}}$
nombre de photons de saturation	$F_{\text{sat}}$	$\frac{1}{2\kappa\tau}$
nombre de photons au dessus du seuil	$F_{\text{ON}}$	$F_{\text{sat}} (\eta - 1)$

## 4.4 Application au laser à modes de galerie : ordres de grandeurs

Nous prenons l'exemple d'un WGM laser à 1563 nm dans une microsphère de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  d'indice de réfraction  $N = 1.49$  tel que  $n = 1$  et  $\ell = |m| = 288$ . Le matériau

2. En présence de photons spontanés,  $\hat{N}_{\text{OFF}}$  s'écrit :

$$\hat{N}_{\text{OFF}} = \frac{\hat{N}_0}{1 + 2\kappa\tau F} = \frac{\hat{N}_0}{1 + \frac{F}{F_{\text{sat}}}}$$

utilisé est un verre ZBLALiP dopé aux ions Erbium à 0.1%, ce qui correspond à une densité totale en ions Erbium  $\mathcal{N}_{\text{tot}} \simeq 2 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Le temps de vie des photons est estimé à 50 ns. Le pseudo-ISL de cette cavité est de 640 GHz.

TABLEAU 4.2 – Valeurs numériques des paramètres utilisées

Variable	laser WGM
$N$	1.49
$N_{\text{tot}}$	$2 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$
$\sigma_a$	$2 \times 10^{-25} \text{ m}^2$
$\sigma_e$	$3 \times 10^{-25} \text{ m}^2$
$T_1 (\gamma_1^{-1})$	10 ms
$T_2$	1 ps
$\tau_p$	50 ns

#### 4.4.1 Volume de mode

Comme développé au chapitre 3, le volume  $\mathcal{V}$  d'un WGM laser vaut, dans le cas d'un effet laser sur le mode fondamental ( $n = 1, \ell = |m|$ ) à 1563 nm dans une micro-sphère de rayon  $a = 50 \mu\text{m}$  :

$$\mathcal{V} \simeq 2384 \mu\text{m}^3$$

La section du faisceau dans la cavité est :

$$\mathcal{S} \simeq \frac{\mathcal{V}}{2\pi a} \simeq 7.59 \mu\text{m}^2$$

#### 4.4.2 Inversion de population au seuil

La densité d'inversion de population au seuil est telle que :

$$\mathcal{N}_{\text{Th}} = \frac{1}{\kappa \tau_p \mathcal{V}} = \frac{N}{c \sigma_e \tau_p} \simeq 3.31 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

La densité d'inversion de population au seuil est très inférieure à la densité totale d'ions Erbium dans la cavité ( $N_{\text{tot}}/N_{\text{Th}} \simeq 1.66 \%$ ).

### 4.4.3 Puissance de pompe au seuil

Le flux de photons de pompe au seuil est tel que :

$$\phi_{P,Th} = \frac{1}{\sigma_e T_1} \left( \frac{N_{tot} + N_{Th}}{N_{tot} - N_{Th}} \right) \simeq 3.45 \times 10^{26} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

La puissance de pompe au seuil correspondante est :

$$P_{P,Th} = \hbar\omega_p \times \mathcal{S} \times \phi_{P,Th} \simeq 351 \mu W$$

### 4.4.4 Puissance de sortie

Le flux de photons au dessus du seuil, pour un taux de pompage normalisé  $r = 1.5$ , vaut :

$$F_{ON} = \frac{\gamma_1}{2\kappa} (\kappa\tau_p \hat{N}_{tot} + 1) (r - 1) = 60587 \text{ photons}$$

soit une puissance de sortie lorsque les pertes sont essentiellement dues au coupleur de sortie :

$$P_{out} = \frac{\hbar\omega F_{ON}}{\tau_p} = 154 \text{ nW}$$

La faible puissance de sortie s'explique par le faible taux de couplage du coupleur de sortie ( $\tau_p$ ). Même si la puissance de pompe nécessaire pour obtenir l'effet laser est faible, peu de puissance est extraite de la cavité. On ne peut pas obtenir à la fois un temps de vie des photons  $\tau_p$  élevé et une puissance de sortie  $P_{out}$  élevée.

### 4.4.5 Laser à fibre dopée Erbium

Pour comparer les valeurs obtenues avec une architecture laser connue et ayant une dynamique similaire (classe B et dopage aux ions Erbium), nous utilisons le modèle du laser à fibre dopée aux ions Erbium.

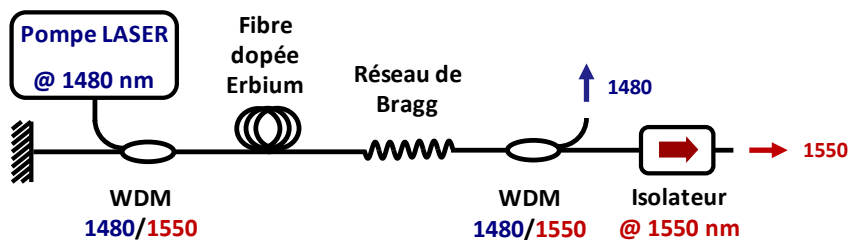


FIGURE 4.4 – Architecture typique d'un laser à fibre monomode idéalisé.

La cavité est une fibre de longueur  $L = 60 \text{ m}$  en silice dopée aux ions Erbium à  $45 \text{ ppm}$  (soit une densité d'environ  $3.56 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ). L'indice relatif est  $N = 1.46$ . L'ISL d'une

telle cavité est  $c/2NL$ , soit 1.7 MHz.

- Dans une telle fibre, les pertes internes sont essentiellement dues à l'absorption du matériau à 1550 nm, de l'ordre de  $0.2 \text{ dB.km}^{-1}$ , soit  $4.6 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ . Cela équivaut à un temps de vie intrinsèque des photons  $2\tau_0 \simeq 106 \mu\text{s}$ .
- Pour un réseau de Bragg tel que le coefficient de réflexion en intensité  $R$  vaut 0.9, les pertes dues au couplage sont telles que :

$$\alpha_{\text{ext}} = \frac{1}{2L} \ln(R) \simeq 8.78 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

soit un temps de vie extrinsèque des photons  $2\tau_e \simeq 5.5 \mu\text{s}$

- Le temps de vie des photons est exclusivement dû au couplage :

$$\tau_p \simeq 2\tau_e = 5.3 \mu\text{s}$$

- Si nous faisons l'approximation gaussienne du mode fondamental, la demi-largeur à  $1/e$  de l'intensité du champ, notée  $w$ , est estimée par la formule empirique de Marcuse [99] :

$$\frac{w\sqrt{2}}{a} \simeq 0.650 + 1.619V^{-\frac{3}{2}} + 2.879V^{-6}$$

où  $a$  est le rayon de coeur de la fibre et  $V$  est la fréquence normalisée du mode :

$$V = ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Pour une fibre de rayon de coeur  $a = 4 \mu\text{m}$ , la rayon du mode vaut environ  $3.24 \mu\text{m}$ . La section  $\mathcal{S}$  du faisceau vaut alors :

$$\mathcal{S} \simeq 32.9 \mu\text{m}^2$$

et le volume de mode :

$$\mathcal{V} \simeq 1.98 \text{ mm}^3$$

- Les sections efficaces d'émission et d'absorption sont [56] :

$$\sigma_a|_{1480 \text{ nm}} \simeq 2 \times 10^{-25} \text{ m}^2$$

$$\sigma_e|_{1550 \text{ nm}} \simeq 4 \times 10^{-25} \text{ m}^2$$

- La densité d'inversion de population au seuil est telle que :

$$\mathcal{N}_{\text{Th}} \simeq 2.31 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

- La puissance de pompe au seuil :

$$P_{P,Th} \simeq 1.10 \text{ mW}$$

- Pour un taux de pompage normalisé  $r = 1.5$ , la puissance de sortie vaut :

$$P_{out} = 2.30 \text{ mW}$$

#### 4.4.6 Bilan

Les paramètres importants des deux architectures laser sont exposés dans le Tableau 4.3. Dans un résonateur *WGM*, les champs évoluent dans une structure étroite, ce qui réduit considérablement le volume de mode par rapport à une cavité à fibre. La densité de puissance est alors plus importante pour une puissance équivalente. Ce type de cavité nécessite une puissance moindre pour voir apparaître des effets non linéaires comme un laser : la puissance de seuil est près de trois fois plus faible (bien que le résonateur *WGM* soit en ZBLALiP, matériau où les pertes sont relativement importantes devant celles de la silice dopée). Enfin, le temps de vie des photons est plus réduit mais la cavité est aussi beaucoup plus petite, ce qui augmente la finesse du résonateur.

Le laser *WGM* présente, de part sa taille, des propriétés intéressantes pour l'intégration de sources optiques. De plus, le facteur de qualité élevé entraîne nécessairement des largeurs spectrales très étroites. Leur très faible volume de mode amène des effets non-linéaires non observés dans les lasers conventionnels, notamment sur le bruit d'intensité comme nous le verrons dans la suite de ce manuscrit.

## 4.5 Conclusion

Le laser dopé Erbium est, de part son émission autour de 1550 nm (bande C des télécoms), largement utilisé aujourd'hui. Son régime de fonctionnement et les mesures spectroscopiques de l'ion Erbium sont dorénavant connues et sont l'objet de nombreux ouvrages [56, 100]. Les paramètres les plus importants sont le taux de pompage normalisé  $r$  et le temps de vie du photon  $\tau_P$ , l'un caractérisant le mécanisme de pompage et l'autre la cavité résonante. Expérimentalement, la difficulté réside dans l'évaluation de ces deux paramètres. Dans un laser *WGM*, le couplage par onde évanescente rend la mesure de la puissance de pompe effectivement absorbée difficile, et plus particulièrement en régime multimode où la pompe est spectralement large. De

TABLEAU 4.3 – Comparaison entre les paramètres du laser WGM et le laser à fibre.

Variable	laser WGM	laser à fibre
$P_{P,Th}$	$350 \mu W$	$1 mW$
$P_{out} (r = 1.5)$	$150 nW$	$2 mW$
$\mathcal{V}$	$3400 \mu m^3$	$2 mm^3$
$Q$	$6 \times 10^7$	$6 \times 10^9$
$ISL$	$640 GHz$	$2 MHz$
$\mathcal{F}$	$4 \times 10^6$	10

plus, en régime laser, la mesure du temps de vie du photon n'est pas accessible car le résonateur ne fonctionne plus en régime linéaire [46, 47, 101]. Cependant, une mesure de la densité spectrale de puissance ( $DSP$ ) des fluctuations de la puissance du laser autour de sa valeur moyenne permet de les estimer. Le chapitre 5 y est consacré.

# Chapitre 5

## Bruit relatif d'intensité d'un laser à modes de galerie dopé Erbium

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Elements de photodétection</b>	<b>117</b>
5.1.1	Introduction	117
5.1.2	Propriétés statistiques	118
5.1.2.1	Processus aléatoire	118
5.1.2.2	Moments d'une variable aléatoire	118
5.1.2.3	Stationnarité	119
5.1.2.4	Ergodisme	119
5.1.2.5	Corrélation	120
5.1.2.6	Théorème de Wiener-Khintchine	120
5.1.2.7	Théorème de Wick-Isserlis	121
5.1.3	Représentation du bruit d'intensité	122
<b>5.2</b>	<b>Bruit de photodétection</b>	<b>126</b>
5.2.1	Densité spectrale de puissance du bruit de photons	126
5.2.2	Bruit thermique	127
5.2.3	Bruit en excès	127
5.2.4	Ensemble des contributions	128
<b>5.3</b>	<b>Modèle théorique du <i>RIN</i> d'un laser de classe B</b>	<b>128</b>
5.3.1	Expressions générales	128



5.3.1.1	Propriétés des termes sources . . . . .	129
5.3.1.2	Equations stochastiques couplées . . . . .	129
5.3.2	Traitement perturbatif des termes couplés . . . . .	130
5.3.3	<i>RIN</i> d'ordre 1 . . . . .	133
5.3.4	<i>RIN</i> d'ordre 2 . . . . .	134
5.3.4.1	calcul de (a) . . . . .	136
5.3.4.2	calcul de (b) . . . . .	136
5.3.4.3	calcul de $\left\langle \left  \widehat{\delta F}^{(2)} \right ^2 \right\rangle$ . . . . .	137
5.3.5	<i>RIN</i> total . . . . .	139
5.3.6	<i>RIN</i> d'ordres supérieurs . . . . .	140
<b>5.4</b>	<b>La mesure du bruit d'intensité</b> . . . . .	<b>141</b>
5.4.1	Mesure du bruit thermique . . . . .	142
5.4.2	Estimation du <i>shot noise</i> . . . . .	143
<b>5.5</b>	<b><i>RIN</i> d'un laser WGM</b> . . . . .	<b>144</b>
5.5.1	Monomode v.s. multimode . . . . .	145
5.5.2	Pompe monomode v.s. pompe multimode . . . . .	148
5.5.3	Couplage par taper . . . . .	148
5.5.3.1	Pompe monomode . . . . .	150
5.5.3.2	Pompe multimode . . . . .	153
5.5.4	Couplage par pointe effilée . . . . .	154
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>157</b>

---

Les fluctuations de la puissance du laser autour de sa valeur moyenne ont plusieurs origines. Elles sont :

- dues à l'environnement extérieur et au conditionnement
- inhérentes au laser seul (bruit intrinsèque)

Le bruit intrinsèque du laser est une caractéristique importante quelle que soit l'application visée. En télécommunication, un bruit trop élevé est une limite à la détection des différents symboles binaires ou donne la bande passante de modulation [102]. Pour des applications capteurs où le signal du laser WGM est le transducteur, le bruit du laser donne une estimation du seuil de détectivité et de l'amplitude des paramètres à observer. Outre le côté applicatif, l'analyse du bruit d'amplitude du laser permet d'accéder à un certain nombre d'informations sur les phénomènes d'interaction matière-rayonnement qui ont lieu dans la cavité [103–106].

Dans ce chapitre, nous étudions le bruit d'intensité d'un laser WGM de classe B. Le modèle théorique se base sur l'analyse classique du bruit d'intensité d'un laser. La prise en compte des spécificités du laser WGM (volume de mode, temps de vie des photons, ...) nécessite une étude plus approfondie ainsi que le développement d'un nouveau modèle analytique. Celui-ci est ensuite appliqué au laser WGM dopé aux ions Erbium dans différentes configurations, en précisant la chaîne de mesure utilisée.

## 5.1 Elements de photodétection

### 5.1.1 Introduction

La lumière n'est pas mesurable directement mais doit nécessairement passer par une étape de transduction où l'information optique (amplitude et phase) est transposée dans un domaine d'analyse conventionnel (chimique, thermique, électrique). Dans ce qui suit, nous utilisons des détecteurs photoélectriques délivrant un courant proportionnel à la puissance optique détectée. Le terme générique *photodétecteur* y fera automatiquement référence.

En tant qu'onde électromagnétique, l'information complète sur la dynamique des termes sources réside dans l'amplitude et la phase du champ. Cependant, les fréquences optiques sont de l'ordre de  $10^{14}$  Hz et les détecteurs de lumière ne sont pas sensibles aux variations rapides de l'intensité lumineuse. Un photodétecteur usuel est

sensible à la moyenne temporelle de l'intensité lumineuse, intégrée sur le temps de réponse  $\tau_R$  du photodétecteur :

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\tau_R} \int_0^{\tau_R} N c \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 dt = \frac{1}{2} N c \epsilon_0 |E_0|^2 \quad (5.1)$$

Si nous considérons un photodétecteur de rendement quantique  $\eta_R$ , le photocourant  $i$  généré par la détection de photons de pulsation  $\omega$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  est :

$$i(t) = \frac{N_e(t)q}{\Delta t} = \frac{q\eta_R}{\hbar\omega} P(t) \quad (5.2)$$

où  $N_e$  est le nombre de charges,  $q$  la charge d'un électron et  $P$  la puissance détectée. Le photocourant généré est directement proportionnel à la **puissance** du champ électromagnétique détecté. Il est caractérisé par sa valeur moyenne  $\langle i(t) \rangle = i_0$  et ses fluctuations  $\delta i(t)$ , quantifiées par l'écart-type  $\sigma_i$ .

Enfin, notons que les mesures de bruit sont réalisées directement dans le domaine spectral en utilisant un analyseur de spectre électrique (*ASE*). Cet appareil mesure la densité spectrale de puissance (*DSP*) d'une tension électrique, c'est à dire la distribution de la puissance électrique mesurée dans le domaine de Fourier. La *DSP* d'un signal est reliée à la fonction d'autocorrélation de ce signal par le théorème de Wiener-Khinchine. Ces notions mathématiques sont rappelées à la section suivante.

## 5.1.2 Propriétés statistiques

Cette section est dédiée au rappel des notions mathématiques et théorèmes associés aux processus aléatoires rencontrés dans la pratique pour la modélisation du bruit d'intensité d'un laser.

### 5.1.2.1 Processus aléatoire

On appelle processus aléatoire une variable aléatoire  $x$  qui dépend d'un paramètre continu,  $t$ , où chaque trajectoire  $x(\theta_i, t)$  appartient à un ensemble probabiliste (à un instant  $t_0$  fixé,  $x(\theta, t_0)$  est une variable aléatoire). La Figure 5.1 montre un exemple de deux trajectoires  $x(\theta_1, t)$  et  $x(\theta_2, t)$  d'un même processus aléatoire  $x$ .

### 5.1.2.2 Moments d'une variable aléatoire

La dispersion statistique d'une variable aléatoire  $x$  est quantifiée par ses moments d'ordre  $n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathcal{M}_n = \langle x^n \rangle = \int x^n p(x) dx \quad (5.3)$$

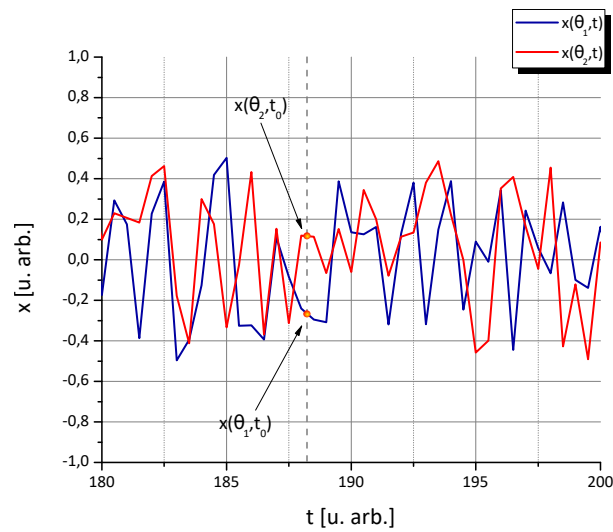


FIGURE 5.1 – Exemple de deux trajectoires d'un processus aléatoire  $x$ .

$p(x)$  est la loi de probabilité de la variable aléatoire  $x$ . En pratique, nous utiliserons principalement l'espérance  $\mathbb{E}[x]$  et l'écart-type  $\sigma_x$ , définis par :

$$\mathbb{E}[x] = \int_{\mathbb{R}} xp(x) dx \quad (5.4)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[x])^2 p(x) dx \quad (5.5)$$

### 5.1.2.3 Stationnarité

Le processus est dit stationnaire lorsque ses propriétés statistiques sont indépendantes du temps. L'espérance d'une fonction de processus stationnaires  $x_1(t_1), x_2(t_2), \dots$  devient invariante par translation :

$$\mathbb{E}[f(x_1(t_1)x_2(t_2)\dots)] = \mathbb{E}[f(x_1(t_1 + \Delta t)x_2(t_2 + \Delta t)\dots)] \quad (5.6)$$

Pour un tel processus, l'instant initial d'observation est arbitraire.

### 5.1.2.4 Ergodisme

Un processus est ergodique lorsque son espérance statistique  $\mathbb{E}[x]$  coïncide avec sa moyenne temporelle  $\langle x \rangle$  :

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\theta, t) dt \quad (5.7)$$

### 5.1.2.5 Corrélation

Le degré de ressemblance entre deux variables aléatoires stationnaires  $x_1$  et  $x_2$  prises chacune à deux instants différents  $t_1$  et  $t_2$  est contenu dans la fonction de corrélation  $\Gamma_{x_1x_2}(\tau)$  :

$$\Gamma_{x_1x_2}(\tau) = \langle x_1(t_1)x_2^*(t_2) \rangle \quad (5.8)$$

avec  $\tau = t_2 - t_1$ . Lorsque  $x_2 = x_1$  on parle d'autocorrélation, dans le cas contraire on parle d'intercorrélation.

### 5.1.2.6 Théorème de Wiener-Khintchine

Le théorème de Wiener-Khintchine permet de relier la *DSP* d'un processus aléatoire à sa fonction d'autocorrélation. Considérons le processus tronqué  $x_T(t)$  tel que :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } t \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous définissons l'opérateur  $\langle \rangle$  par :

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} x(t) dt \quad \text{dans le domaine temporel}$$

$$\langle \hat{x}(\omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} [\hat{x}_T(\omega)] \quad \text{dans le domaine fréquentiel}$$

où :

$$\hat{x}_T(\omega) = \mathcal{TF} [x_T(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

Le théorème de Wiener-Khintchine stipule que  $\mathbb{E} [\hat{x}_T(\omega)]$  existe pour  $T \rightarrow +\infty$  et que la *DSP* de  $x(t)$  s'écrit comme la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  :

$$S_x(\omega) = \mathcal{TF} [\langle x(t)x^*(t-\tau) \rangle] = \langle |\hat{x}(\omega)|^2 \rangle \quad (5.9)$$

Il se généralise à deux processus différents  $x$  et  $y$  et donne la *DSP* croisée  $S_{xy}(\omega)$  [107] :

$$S_{xy}(\omega) = \mathcal{TF} [\langle x(t)y^*(t-\tau) \rangle] = \langle \hat{x}(\omega)\hat{y}^*(\omega) \rangle \quad (5.10)$$

### 5.1.2.7 Théorème de Wick-Isserlis

Ce théorème permet de calculer les fonctions de corrélation d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > 2$ ) dans le cas de processus aléatoires particuliers. Pour une collection de processus aléatoires  $x_i$  **centrés** et **gaussiens**<sup>1</sup>, la fonction de corrélation mutuelle d'ordre  $n$  s'écrit :

$$\langle x_1(t_1)x_2(t_2)\dots x_n(t_n) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair} \\ \sum_{\substack{(n-1)!! \\ \text{combinaisons}}} \langle x_1(t_1)x_2(t_2) \rangle \langle x_3(t_3)x_4(t_4) \rangle \dots \langle x_{n-1}(t_{n-1})x_n(t_n) \rangle & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \quad (5.11)$$

où  $n!! = n \times (n-2) \times (n-4) \times \dots \times 2$ .

Exemple pour  $n = 4$  :

$$\begin{aligned} \langle x_1(t_1)x_2(t_2)x_3(t_3)x_4(t_4) \rangle &= \langle x_1(t_1)x_2(t_2) \rangle \langle x_3(t_3)x_4(t_4) \rangle + \langle x_1(t_1)x_3(t_3) \rangle \langle x_2(t_2)x_4(t_4) \rangle \\ &\quad + \langle x_1(t_1)x_4(t_4) \rangle \langle x_2(t_2)x_3(t_3) \rangle \end{aligned}$$

**Remarques :**

- La *DSP* du photocourant correspond à la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du photocourant  $\Gamma_{ii}(\tau)$  mesurée pendant une durée  $dt$ . C'est la mesure donnée par un ASE en détection directe (à la valeur de résistance de charge  $R$  de l'analyseur près). En développant  $i(t)$  autour de sa moyenne :

$$i(t) = i_0 + \delta i(t) \quad (5.12)$$

la *DSP* de  $i$  s'écrit :

$$S_i(\omega) = i_0^2 \left( \delta(\omega) + \mathcal{TF} \left[ \frac{\langle \delta i(t) \delta i^*(t-\tau) \rangle}{i_0^2} \right] \right) \quad (5.13)$$

Le premier terme correspond à la composante continue (*DC*) tandis que le second correspond à la *DSP* des fluctuations  $S_{\delta i}(\omega)$  de  $i(t)$ . Comme le photocourant est proportionnel à la puissance optique du signal photodétekté,  $S_{\delta i}(\omega)$  est,

1. Pour un processus gaussien, la densité de probabilité  $\varphi$  est la fonction :

$$\varphi : x \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

à un facteur multiplicatif près, la *DSP* des fluctuations de puissance du signal optique. De manière générale, le terme à évaluer est :

$$\frac{S_{\delta U}(\omega)}{\langle U(t) \rangle^2} \quad (5.14)$$

où  $U$  est une grandeur proportionnelle à la puissance optique reçue (éclairage, photocourant, nombre de photons, ...). Dans le cas d'un laser,  $U(t)$  est proportionnelle à la puissance optique du mode laser.

- $S_{\delta U}(\omega)$  s'écrit encore :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\delta U}_T(\theta, \omega) \widehat{\delta U}_T^*(\theta, \omega) p(\widehat{\delta U}_T, \widehat{\delta U}_T^*) d\widehat{\delta U}_T d\widehat{\delta U}_T^* \quad (5.15)$$

où  $p(\widehat{\delta U}_T, \widehat{\delta U}_T^*)$  est la fonction de probabilité conjointe de  $\widehat{\delta U}_T$  et  $\widehat{\delta U}_T^*$ .  $S_{\delta U}(\omega)$  s'exprime donc en [unité de  $U$ ] $^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ . Le terme *densité spectrale de puissance* est trompeur car ce n'est pas une puissance au sens physique mais au sens mathématique (si par exemple  $U$  est une puissance,  $S_{\delta U}$  s'exprime en  $\text{W}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ ). Dans tous les cas, l'expression 5.14 est un rapport entre deux grandeurs quadratiques identiques par unité de fréquence, il s'exprime en  $\text{Hz}^{-1}$ ,  $\% \cdot \text{Hz}^{-1}$  ou  $\text{dB} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

### 5.1.3 Représentation du bruit d'intensité

#### Origine des fluctuations

Le modèle classique considère la lumière émise par les atomes comme une onde électromagnétique continue. Ceci n'est qu'une approximation grossière de ce qui se passe dans la matière : les atomes émettent des trains d'ondes de durée de vie finie, notée  $\tau_c$ , comme présenté sur la Figure 5.2. Cependant, les temps de réponse de détection  $\tau_R$  sont bien supérieurs à la durée de vie de ces événements. Ainsi, sans photodétection adaptée, il n'est pas possible de percevoir chaque émission individuelle de photon. L'intégration de ces événements conduit à un signal de photodétection fluctuant autour d'une valeur moyenne bien définie. Ces fluctuations ont des temps caractéristiques supérieurs à  $\tau_R$ . En outre, les fluctuations de type collisionnel dues aux mouvements des atomes ou encore les fluctuations mécaniques de l'ensemble perturbent le processus d'émission et ajoutent du bruit supplémentaire, en amplitude et en phase.

#### Représentation du champ électrique dans le plan de Fresnel

Le champ électrique est décrit par [108, 109] :

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \left[ X(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t) \mathbf{e}_X + Y(\mathbf{r}, t) \sin(\omega t) \mathbf{e}_Y \right] \quad (5.16)$$

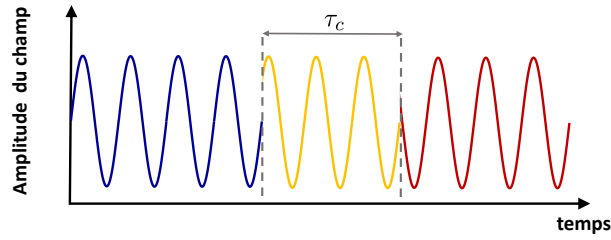


FIGURE 5.2 – Variations temporelles du champ émis par un atome.

où  $X$  et  $Y$  sont les quadratures du champ, définies par :

$$\begin{cases} X(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_X = \frac{1}{E_0} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)] & (5.17a) \\ Y(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_Y = -\frac{j}{E_0} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)] & (5.17b) \end{cases}$$

La phase du champ  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  est également reliée aux quadratures :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \arctan\left(\frac{X(\mathbf{r}, t)}{Y(\mathbf{r}, t)}\right) \quad (5.18)$$

Introduisons la variable sans dimensions  $\alpha$  telle que :

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = X(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_X + Y(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_Y \quad (5.19)$$

$\alpha$  représente l'orientation de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  dans un repère d'axes  $\{\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y\}$ . Ce plan est communément appelé plan de Fresnel. Dans une telle représentation, le champ complexe est représenté par un vecteur d'amplitude  $\alpha(\mathbf{r}, t) = \sqrt{X(\mathbf{r}, t)^2 + Y(\mathbf{r}, t)^2}$  et de phase  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  à l'instant  $t$  en un point de l'espace  $\mathbf{r}$  (dans le temps, ce vecteur tourne uniformément autour de l'origine à la pulsation angulaire  $\omega$ ).

Dans un cas idéal où l'onde électromagnétique a une amplitude et une phase déterminées ( $\alpha_0, \varphi_0$ ), sa représentation dans le plan de Fresnel est un unique point, comme illustré sur la Figure 5.3.

Lorsque le champ est soumis à des fluctuations, elles se retrouvent sur les quadratures ( $\delta X$  et  $\delta Y$ ) et donc sur  $\alpha$  et  $\varphi$ . Une telle configuration donne une amplitude normalisée telle que :

$$\alpha(\mathbf{r}, t) = \alpha_0 + \delta\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (5.20)$$

où  $\delta\alpha(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\delta X^2(\mathbf{r}, t) + \delta Y^2(\mathbf{r}, t)}$ , qui est nul en valeur moyenne.

Les fluctuations qui perturbent le point de fonctionnement, représenté par le vecteur  $\alpha$ , ont lieu dans toutes les directions de l'espace puisque  $\delta X(\mathbf{r}, t)$  et  $\delta Y(\mathbf{r}, t)$  ne



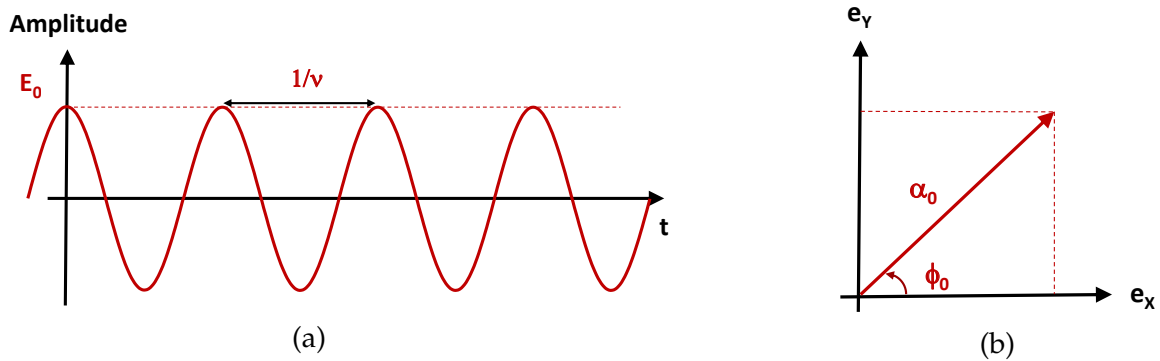


FIGURE 5.3 – (a) Variations temporelle d'un champ électromagnétique purement sinusoïdal et (b) sa représentation dans le plan de Fresnel.  $\nu$  est la fréquence de l'onde électromagnétique émise.

prennent pas nécessairement les mêmes valeurs à l'instant  $t$ . Chaque réalisation du signal va être représenté par un point particulier dans le plan de Fresnel. Cependant, les écart-types  $\Delta X$  et  $\Delta Y$  vont entacher le point central d'une distribution radiale et angulaire, correspondant respectivement au **bruit d'amplitude** et **bruit de phase** du champ électromagnétique. Cette situation est illustrée sur la Figure 5.4 où  $X$  et  $Y$  ont les mêmes propriétés statistiques.

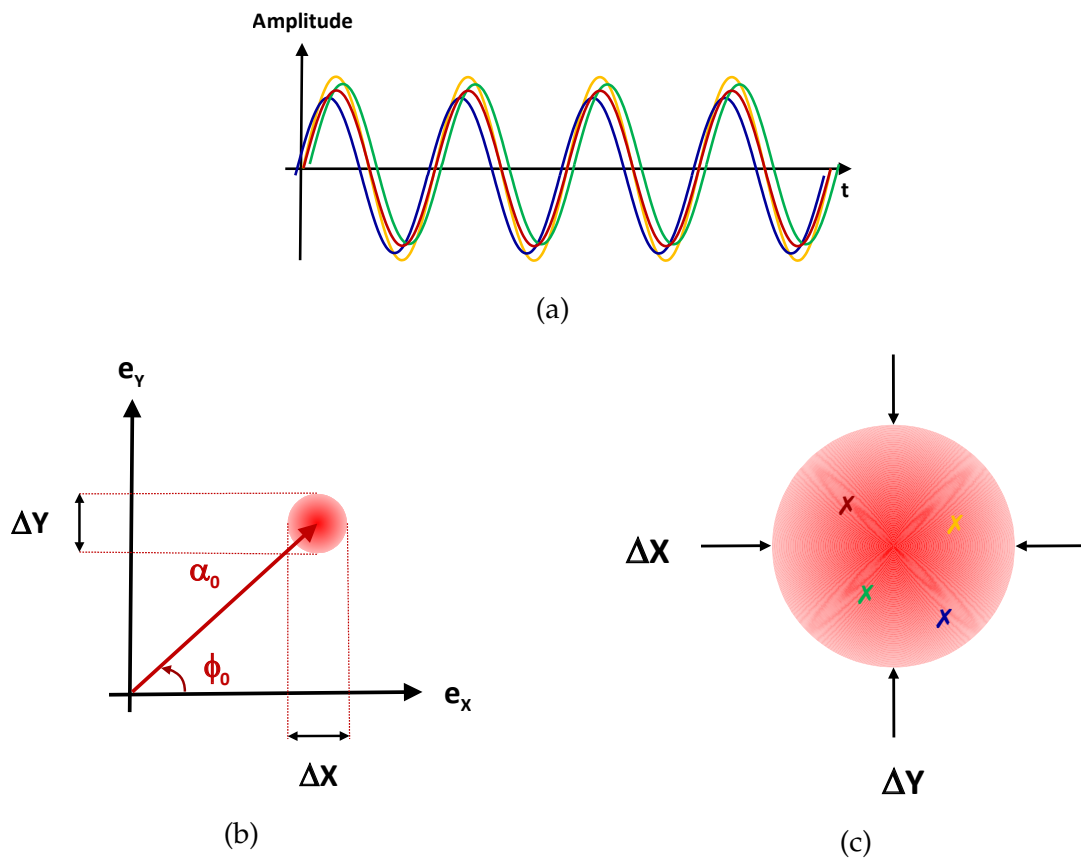


FIGURE 5.4 – (a) Variations temporelles d'un champ électromagnétique soumis à des fluctuations pour plusieurs représentations, (b) et (c) sa représentation dans le plan de Fresnel.

## 5.2 Bruit de photodétection

### 5.2.1 Densité spectrale de puissance du bruit de photons

Lorsqu'on s'intéresse au bruit d'intensité d'un champ électromagnétique, le modèle ondulatoire de la lumière n'est pas suffisant pour expliquer les phénomènes observés expérimentalement. Il existe un bruit dû à la statistique Poissonienne du champ émis, *i.e.* un bruit d'origine quantique. Nous considérons un état quantique du champ, dit *état cohérent* [110, 111], pour calculer la limite quantique du bruit d'intensité. Un tel état est un vecteur propre de l'opérateur *annihilation*,  $\hat{a}$ , et s'écrit à partir de l'état de Fock à  $m$  photons, noté  $|m\rangle$ , comme :

$$|\alpha\rangle = \sum_m \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \quad (5.21)$$

avec  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $|m\rangle$  tel que :

$$|m\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle \quad (5.22)$$

où  $\hat{a}^\dagger$  est l'opérateur *création* et  $|0\rangle$  l'état fondamental (état à zéro photons).

L'opérateur *nombre de photons*,  $\hat{n}$ , est défini par :

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (5.23)$$

Appliqué sur l'état cohérent 5.21, en posant  $n = |\alpha|^2$ , on obtient<sup>2</sup> les propriétés suivantes :

$$\langle \hat{n} \rangle = n \quad (5.24)$$

$$\sigma_n = \sqrt{n} \quad (5.25)$$

$n \in \mathbb{N}^*$  est le nombre moyen de photons de l'état  $|\alpha\rangle$  et sa variance est  $\sqrt{n}$ . Un flux de photons possède, au sens mathématique, un bruit intrinsèque de puissance  $\sigma_n^2 = n$ . Le modèle statistique servant à décrire le flux de photons introduit une limite de bruit ultime à laquelle il n'est pas possible de se soustraire<sup>3</sup> pour un état classique du champ.

2. en utilisant la définition de  $\hat{n}$  et le commutateur de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  :  $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1$

3. Cette remarque n'est pas vraie si l'on travaille avec des *états comprimés*. De tels états possèdent la propriété d'avoir une incertitude sur le nombre de photons inférieure à celle des états cohérents. Il n'y a, dans ce cas, aucune violation du principe d'incertitude d'Heisenberg puisque l'incertitude obtenue sur la variable conjuguée au nombre de photons, la phase, s'en retrouve augmentée [108, 111].

Ramenée en terme de photocourant, la puissance des fluctuations dues à la distribution Poissonienne du flux de photons détecté s'exprime comme :

$$\sigma_i^2 = \frac{q^2}{\Delta t^2} \sigma_n^2 = 2q \langle i \rangle \Delta f \quad (5.26)$$

où  $q$  est la charge élémentaire,  $\Delta t$  est le temps d'intégration,  $\Delta f$  est la bande passante d'intégration ( $\Delta f = 1/2\Delta t$ ) et  $\langle i \rangle$  est le photocourant issu de la photodétection des  $n$  photons.

La *DSP* des fluctuations du signal s'exprime alors :

$$N_{SN} = R \frac{\sigma_i^2}{\Delta f} = 2qR \langle i \rangle \quad (5.27)$$

où  $R$  est la résistance de charge de l'analyseur de spectre. On parle de *bruit de grenaille* ou *Shot Noise*. Ce bruit est **linéaire** avec le photocourant (*i.e.* la puissance du signal optique) détecté.

## 5.2.2 Bruit thermique

Considérons un système électrique passif. A l'équilibre thermodynamique, les grandeurs macroscopiques qui le définissent sont soumises à des fluctuations à cause de l'agitation thermique. Dans le cas d'un système de photodétection, même en l'absence de signal incident, un courant est généré par le mouvement des porteurs de charge au sein de la matière, définissant un courant d'obscurité [112]. La *DSP* des fluctuations due à l'agitation thermique s'exprime comme :

$$N_{Th} = \frac{\sigma_v^2}{\Delta f} = 4k_B T \quad (5.28)$$

où  $\sigma_v^2$  est l'écart-type de la tension électrique aux bornes du système,  $\Delta f$  est la bande passante d'intégration,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température de l'ensemble. Ce bruit est une **constante** dans l'espace de Fourier (bruit *blanc*).

## 5.2.3 Bruit en excès

Le bruit en excès est un bruit intrinsèque au laser qui quantifie le niveau de bruit en excès par rapport au bruit intrinsèque qu'aurait un flux de photons à distribution Poissonienne de même puissance. On utilise le bruit relatif d'intensité (*RIN*), qui est un bruit normalisé par la puissance délivrée par le mode laser.

La  $DSP$  du bruit en excès est reliée au  $RIN$  par :

$$RIN = \frac{N_{\text{excès}}}{R \langle i \rangle^2} \quad (5.29)$$

Avec cette définition, le  $RIN$  est évalué dans le domaine électrique. Le bruit en excès montre une dépendance **quadratique** avec le photocourant (*i.e.* la puissance du signal optique) détecté.

### 5.2.4 Ensemble des contributions

Les différentes sources de bruits sont considérées comme indépendantes, si bien que la  $DSP$  mesurée est la somme de toutes les  $DSP$  précédentes :

$$N_{\text{mes}} = N_{Th} + N_{SN} + N_{\text{excès}}$$

La réalisation d'une chaîne de détection est obligatoirement liée à une fonction de transfert  $H(f)$ , si bien que la  $DSP$  mesurée s'écrit :

$$N_{\text{mes}} = H(f) [N_{Th} + N_{SN} + N_{\text{excès}}] \quad (5.30)$$

## 5.3 Modèle théorique du $RIN$ d'un laser de classe B

### 5.3.1 Expressions générales

L'étude des fluctuations du nombre de photons et de l'inversion de population est réalisée autour de leur valeur stationnaire au dessus du seuil laser (solution ON) du système d'équations de débit. Le nombre de photons  $F$  et l'inversion de population  $\hat{N}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \hat{N}(t) = \hat{N}_{ON} + \delta N(t) & (5.31a) \\ F(t) = F_{ON} + \delta F(t) & (5.31b) \end{cases}$$

A partir des équations de Statz et DeMars 4.30a et 4.30b et des solutions stationnaires au dessus du seuil (solution ON) 4.33a et 4.33b, on obtient les équations d'évolutions des fluctuations  $\delta N$  et  $\delta F$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta N}{\partial t} = -\frac{\eta}{\tau} \delta N - \frac{2}{\tau_P} \delta F - 2\kappa \delta N \delta F & (5.32a) \\ \frac{\partial \delta F}{\partial t} = \left( \frac{\eta - 1}{2\tau} \right) \delta N + \kappa \delta F \delta N & (5.32b) \end{cases}$$

auxquelles on doit ajouter deux fonctions de Langevin. Ces fonctions,  $\zeta_N$  pour l'inversion de population et  $\zeta_F$  pour le nombre de photons, sont des termes de bruit agissant

comme des sources pour les fluctuations  $\delta N$  et  $\delta F$  (vibrations de la cavité, fluctuations de température, fluctuations du pompage, ...).

### 5.3.1.1 Propriétés des termes sources

Les fonctions  $\zeta_N(t)$  et  $\zeta_F(t)$  sont les termes sources du bruit dont les caractéristiques sont les suivantes ( $X$  représente  $N$  ou  $F$ ) [95,97,107] :

- $\zeta_X(t, \theta)$  est un processus stochastique **ergodique, stationnaire et gaussien**.
- Le processus est en moyenne nulle :

$$\langle \zeta_X(t) \rangle = 0$$

- Le processus est sans mémoire : la corrélation entre les deux événements  $\zeta_X(t)$  et  $\zeta_X(t - \tau)$  est vite perdue pour un retard  $\tau$  non nul. Cela se traduit par la relation :

$$\langle \zeta_X(t) \zeta_X^*(t - \tau) \rangle = D_{XX} \delta(\tau)$$

où  $D_{XX}$  est un *coefficient de diffusion* et  $\delta(\tau)$  la distribution de Dirac.

- Les processus sont indépendants : la corrélation entre les deux événements  $\zeta_N(t)$  et  $\zeta_F(t - \tau)$  est nulle<sup>4</sup> quel que soit le retard  $\tau$ . Cela se traduit par la relation :

$$\langle \zeta_N(t) \zeta_F^*(t - \tau) \rangle = \langle \zeta_F(t) \zeta_N^*(t - \tau) \rangle = 0$$

Cette hypothèse suit l'approche de E. Rosencher [97].

### 5.3.1.2 Equations stochastiques couplées

Avec les termes sources, les équations 5.32a et 5.32b deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta N}{\partial t} = -\frac{\eta}{\tau} \delta N - \frac{2}{\tau_p} \delta F - 2\kappa \delta N \delta F + \zeta_N(t) & (5.33a) \\ \frac{\partial \delta F}{\partial t} = \left(\frac{\eta - 1}{2\tau}\right) \delta N + \kappa \delta F \delta N + \zeta_F(t) & (5.33b) \end{cases}$$

4. En toute rigueur,  $\zeta_N$  et  $\zeta_F$  ne sont pas indépendants. Dans le cas du processus d'émission spontanée **seul**, lorsqu'un atome se désexcite à l'état fondamental en émettant un photon spontané, l'inversion de population diminue de une unité alors que le nombre de photon augmente également de une unité : les effets sont donc très corrélés (anticorrélation très forte). L'émission spontanée est cependant un processus particulier et d'autres termes de bruits prédominants affectent  $\dot{N}$  et  $F$  de manière indépendante (température, vibrations de la cavité, ...) lorsque le laser n'est pas isolé de l'environnement extérieur.

Dans le traitement usuel du *RIN*, les équations sont linéarisées, ce qui supprime les termes croisés. Cette méthode largement utilisée [97, 113, 114] permet de remonter facilement à l'expression du *RIN* d'un laser de classe B. Cependant, compte tenu de la valeur des volumes du mode fondamental  $\mathcal{V}$  dans un micro-résonateur *WGM* par rapport à un résonateur à fibre,  $\kappa$  est plus important d'un facteur  $10^6$ . Ainsi, dans le cas d'un micro-résonateur *WGM*, nous ne pouvons plus négliger les termes multipliés par  $\kappa$ .

Dans un cas général, ces équations ne trouvent pas de solution analytique simple. Cependant, un traitement perturbatif permet d'envisager des solutions physiquement acceptables, à partir du moment où la perturbation est *faible* devant les grandeurs attachées au système d'équations couplées [51, 91, 97].

**Remarque :**

$\zeta_N$  et  $\zeta_F$  sont des intermédiaires de calcul dont nous connaissons seulement les moments statistiques. On raisonnera en terme de spectre puisque les *DSP* de  $\zeta_N$  et  $\zeta_F$  sont égales à leurs coefficient de diffusion respectifs dans tout l'espace de Fourier (bruits blancs). On résoudra alors les équations dans le domaine de Fourier :

$$\begin{cases} -j\omega\widehat{\delta N} = -\frac{\eta}{\tau}\widehat{\delta N} - \frac{2}{\tau_P}\widehat{\delta F} - 2\kappa\widehat{\delta N} \otimes \widehat{\delta F} + \widehat{\zeta}_N & (5.34a) \\ -j\omega\widehat{\delta F} = \left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right)\widehat{\delta N} + \kappa\widehat{\delta F} \otimes \widehat{\delta N} + \widehat{\zeta}_F & (5.34b) \end{cases}$$

où  $\otimes$  est le produit de convolution.

### 5.3.2 Traitement perturbatif des termes couplés

Nous cherchons les solutions  $\hat{N}$  et  $F$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{N}(t) = \hat{N}_{ON} + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k \delta N^{(k)}(t) & (5.35a) \\ F(t) = F_{ON} + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k \delta F^{(k)}(t) & (5.35b) \end{cases}$$

où  $\lambda \in [0; 1]$ . Par approximations successives en identifiant terme à terme les puissances de  $\lambda$  on accède à  $\delta N^{(n)}$  et  $\delta F^{(n)}$ . Le développement commence à  $k = 1$ , le premier ordre s'identifie aux termes en  $\lambda^2$ , le deuxième ordre aux termes en  $\lambda^3$ , etc...

Le produit  $\delta N \delta F$  s'écrit :

$$\delta F(t) \delta N(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda^{p+k} \delta F^{(p)}(t) \delta N^{(k)}(t) \quad (5.36)$$

En se limitant à  $n = 2$ , il vient :

$$\delta F(t) \delta N(t) = \lambda^2 \left( \delta F^{(1)}(t) \delta N^{(1)}(t) \right) + \lambda^3 \left( \delta F^{(1)}(t) \delta N^{(2)}(t) + \delta F^{(2)}(t) \delta N^{(1)}(t) \right) + \lambda^4 \left( \delta F^{(2)}(t) \delta N^{(2)}(t) \right)$$

Pour le premier ordre, nous ne conservons que les termes en  $\lambda^2$ . Les équations 5.34a et 5.34b deviennent alors :

$$\begin{cases} -j\omega \widehat{\delta N}^{(1)} = -\frac{\eta}{\tau} \widehat{\delta N}^{(1)} - \frac{2}{\tau_p} \widehat{\delta F}^{(1)} - 2\kappa\lambda \left( \widehat{\delta N}^{(1)} \otimes \widehat{\delta F}^{(1)} \right) + \widehat{\xi}_N & (5.37a) \\ -j\omega \widehat{\delta F}^{(1)} = \left( \frac{\eta - 1}{2\tau} \right) \widehat{\delta N}^{(1)} + \kappa\lambda \left( \widehat{\delta F}^{(1)} \otimes \widehat{\delta N}^{(1)} \right) + \widehat{\xi}_F & (5.37b) \end{cases}$$

Si l'on néglige les termes en  $\lambda$  dans les équations 5.37a et 5.37b, cela revient à négliger les termes en  $\lambda^n$  où  $n \geq 2$  dans les expressions 5.35a et 5.35b. C'est exactement comme négliger les termes couplés dans le système initial d'équations couplées (en posant  $\kappa \simeq 0$ ) :

$$\begin{cases} -j\omega \widehat{\delta N}^{(1)} = -\frac{\eta}{\tau} \widehat{\delta N}^{(1)} - \frac{2}{\tau_p} \widehat{\delta F}^{(1)} + \widehat{\xi}_N & (5.38a) \\ -j\omega \widehat{\delta F}^{(1)} = \left( \frac{\eta - 1}{2\tau} \right) \widehat{\delta N}^{(1)} + \widehat{\xi}_F & (5.38b) \end{cases}$$

Pour le deuxième ordre, on conserve les termes jusqu'à  $\lambda^3$ . On obtient alors, par identification, les équations d'évolution pour  $\widehat{\delta N}^{(2)}$  et  $\widehat{\delta F}^{(2)}$ , respectivement les fluctuations de l'inversion de population et du nombre de photons au deuxième ordre :

$$\begin{cases} -j\omega \widehat{\delta N}^{(2)} = -\frac{\eta}{\tau} \widehat{\delta N}^{(2)} - \frac{2}{\tau_p} \widehat{\delta F}^{(2)} - 2\kappa \widehat{\delta N}^{(1)} \otimes \widehat{\delta F}^{(1)} \\ \quad - 2\kappa\lambda \left( \widehat{\delta N}^{(1)} \otimes \widehat{\delta F}^{(2)} + \widehat{\delta N}^{(2)} \otimes \widehat{\delta F}^{(1)} \right) & (5.39a) \\ -j\omega \widehat{\delta F}^{(2)} = \left( \frac{\eta - 1}{2\tau} \right) \widehat{\delta N}^{(2)} + \kappa \widehat{\delta F}^{(1)} \otimes \widehat{\delta N}^{(1)} \\ \quad + \kappa\lambda \left( \widehat{\delta N}^{(1)} \otimes \widehat{\delta F}^{(2)} + \widehat{\delta N}^{(2)} \otimes \widehat{\delta F}^{(1)} \right) & (5.39b) \end{cases}$$

De la même façon que précédemment, nous pouvons négliger les termes en  $\lambda$ . Il vient :

$$\begin{cases} -j\omega \widehat{\delta N}^{(2)} = -\frac{\eta}{\tau} \widehat{\delta N}^{(2)} - \frac{2}{\tau_p} \widehat{\delta F}^{(2)} - 2\kappa \widehat{\delta N}^{(1)} \otimes \widehat{\delta F}^{(1)} & (5.40a) \\ -j\omega \widehat{\delta F}^{(2)} = \left( \frac{\eta - 1}{2\tau} \right) \widehat{\delta N}^{(2)} + \kappa \widehat{\delta F}^{(1)} \otimes \widehat{\delta N}^{(1)} & (5.40b) \end{cases}$$



Par itérations successives, on peut trouver un système de deux équations couplées donnant les fluctuations d'ordre  $n$  pour  $n > 1$  :

$$\begin{cases} -j\omega\widehat{\delta N}^{(n)} = -\frac{\eta}{\tau}\widehat{\delta N}^{(n)} - \frac{2}{\tau_p}\widehat{\delta F}^{(n)} - 2\kappa \sum_{p=1}^{n-1} \widehat{\delta F}^{(p)} \otimes \widehat{\delta N}^{(n-p)} & (5.41a) \\ -j\omega\widehat{\delta F}^{(n)} = \left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right)\widehat{\delta N}^{(n)} + \kappa \sum_{p=1}^{n-1} \widehat{\delta F}^{(p)} \otimes \widehat{\delta N}^{(n-p)} & (5.41b) \end{cases}$$

qui devient après réinjection :

$$\begin{cases} \widehat{\delta N}^{(n)} = \underbrace{-2\kappa \left[ \frac{\frac{1}{\tau_p} - j\omega}{\mathcal{D}(\omega)} \right]}_{K_N(\omega)} \underbrace{\sum_{p=1}^{n-1} \widehat{\delta F}^{(p)} \otimes \widehat{\delta N}^{(n-p)}}_{\widehat{A}_n(\omega)} & (5.42a) \\ \widehat{\delta F}^{(n)} = \underbrace{\kappa \left[ \frac{\frac{1}{\tau} - j\omega}{\mathcal{D}(\omega)} \right]}_{K_F(\omega)} \underbrace{\sum_{p=1}^{n-1} \widehat{\delta F}^{(p)} \otimes \widehat{\delta N}^{(n-p)}}_{\widehat{A}_n(\omega)} & (5.42b) \end{cases}$$

$$\text{où } \mathcal{D}(\omega) = \left( \frac{\eta-1}{\tau\tau_p} \right) - \omega^2 - j\omega \frac{\eta}{\tau}.$$

Nous définissons la fonction  $A_n$  telle que :

$$A_n(t) = \sum_{p=1}^{n-1} \delta F^{(p)}(t) \delta N^{(n-p)}(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} \widehat{A}_n(\omega) = \sum_{p=1}^{n-1} \widehat{\delta F}^{(p)}(\omega) \otimes \widehat{\delta N}^{(n-p)}(\omega) \quad (5.43)$$

$K_N$  et  $K_F$  sont les fonctions de transfert pour l'inversion de population et le nombre de photons.

Les  $DSP$  des fluctuations de  $\delta F$  et  $\delta N$  d'ordre  $n$  sont calculées en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine (eq. 5.9) :

$$\begin{cases} \left\langle \left| \widehat{\delta N}^{(n)} \right|^2 \right\rangle = |K_N(\omega)|^2 \left\langle \left| \widehat{A}_n(\omega) \right|^2 \right\rangle & (5.44a) \\ \left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(n)} \right|^2 \right\rangle = |K_F(\omega)|^2 \left\langle \left| \widehat{A}_n(\omega) \right|^2 \right\rangle & (5.44b) \end{cases}$$

### 5.3.3 *RIN* d'ordre 1

Dans le domaine de Fourier, le système 5.38 se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\delta N}^{(1)} = \frac{-\frac{2}{\tau_P} \widehat{\xi}_F(\omega) - j\omega \widehat{\xi}_N(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)} \\ \widehat{\delta F}^{(1)} = \frac{\left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right) \widehat{\xi}_N(\omega) + \left(\frac{\eta}{\tau} - j\omega\right) \widehat{\xi}_F(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)} \end{array} \right. \quad (5.45a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\delta N}^{(1)} = \frac{-\frac{2}{\tau_P} \widehat{\xi}_F(\omega) - j\omega \widehat{\xi}_N(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)} \\ \widehat{\delta F}^{(1)} = \frac{\left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right) \widehat{\xi}_N(\omega) + \left(\frac{\eta}{\tau} - j\omega\right) \widehat{\xi}_F(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)} \end{array} \right. \quad (5.45b)$$

Le *RIN* est défini comme la *DSP* des fluctuations du nombre de photons sur le carré du nombre de photons. Au premier ordre, il s'écrit :

$$RIN^{(1)} = \frac{\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(1)} \right|^2 \right\rangle}{F_{ON}^2} = \frac{1}{F_{ON}^2} \frac{\left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right)^2 D_{NN} + \left[\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2 + \omega^2\right] D_{FF}}{|\mathcal{D}(\omega)|^2} \quad (5.46)$$

Nous retrouvons ici l'expression classique du *RIN* d'un laser de classe B. En basse fréquence, le *RIN* est constant tandis qu'à haute fréquence, il décroît en  $\omega^{-2}$ .

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} RIN^{(1)}(\omega) = \frac{\left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right) D_{NN} + \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2 D_{FF}}{\left(\frac{\eta-1}{\tau\tau_P}\right)^2} \quad (5.47)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} RIN^{(1)}(\omega) = \frac{D_{FF}}{\omega^2} \quad (5.48)$$

Entre ces deux extrêmes, le bruit subit un phénomène de résonance contenu dans  $|\mathcal{D}(\omega)|^2$ . La distribution du bruit s'apparente à une Lorentzienne définie par une pulsation de résonance  $\omega_{sp}$  et un amortissement  $2\Gamma$ . Ces quantités peuvent également être introduites en étudiant la stabilité de la solution stationnaire au dessus du seuil. Au premier ordre et en négligeant les termes sources,  $\delta N$  peut s'écrire sous la forme d'un oscillateur harmonique amorti (5.32a et 5.32b) :

$$\frac{\partial^2 \delta N}{\partial t^2} + \underbrace{\frac{\eta}{\tau}}_{2\Gamma} \frac{\partial \delta N}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{\eta-1}{\tau\tau_P}\right)}_{\omega_{sp}^2 + \Gamma^2} \delta N \simeq 0 \quad (5.49)$$

La pulsation  $\omega_{sp}$  est la pulsation naturelle de retour à l'équilibre du système laser à trois niveau. C'est la pulsation des pics obtenus lorsque le laser est soumis à un créneau de pompe, appelée pulsation de relaxation. Cette situation instable converge vers un état stationnaire avec un temps caractéristique  $1/\Gamma$ .

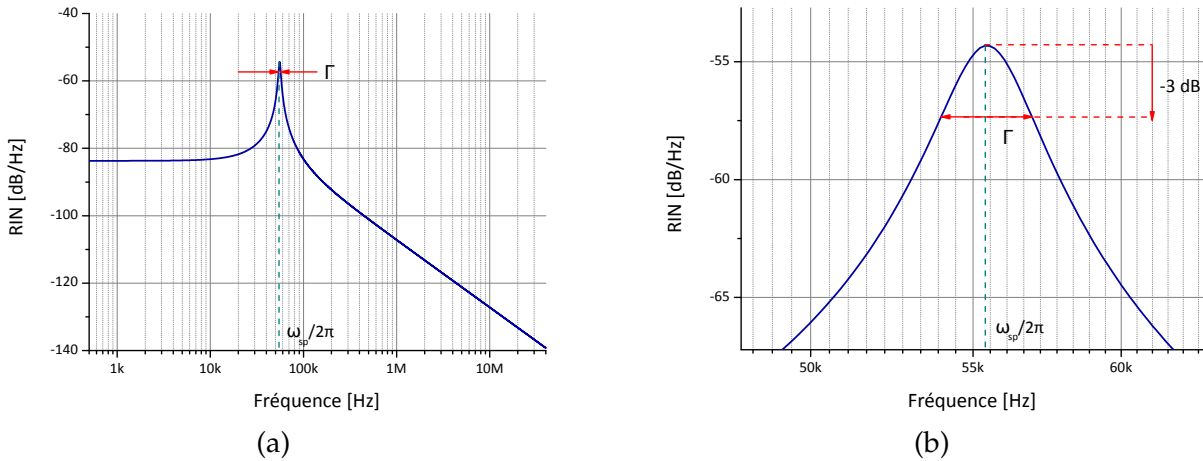


FIGURE 5.5 – (a) Spectre de  $RIN$  théorique au premier ordre d'un laser de classe B dopé Erbium pour  $r = 2$ ,  $\tau_p = 150 \text{ ns}$ ,  $T_1 = 10 \text{ ms}$ ,  $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$  ( $\mathcal{V} \simeq 2400 \mu\text{m}^3$ ),  $D_{NN} = 10^{17} \text{ s}^{-1}$  et  $D_{FF} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , définition de la pulsation de relaxation  $\omega_{sp}$  et de l'amortissement  $\Gamma$ , (b) zoom autour de la fréquence de relaxation du laser.

Les niveaux de bruit du laser sont caractérisés par les coefficients de diffusion tandis que la position de la pulsation de résonance dépend de la physique du matériau utilisé et du temps de vie des populations. Compte tenu de la durée de vie des populations du niveau  $^4I_{13/2}$ , la fréquence de relaxation est située aux alentours de  $100 \text{ kHz}$ .

### 5.3.4 $RIN$ d'ordre 2

Le calcul du  $RIN$  d'ordre 2 nécessite le calcul de  $\langle |\widehat{A}_2(\omega)|^2 \rangle$ . Il correspond à la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de  $A_2(t)$ . Formellement, elle s'écrit :

$$\langle A_2(t)A_2^*(t - \tau) \rangle \quad (5.50)$$

**Remarque :** dans un souci de simplification des notations, nous omettons d'explicitement la dépendance en  $t$  des variables complexes ainsi que la dépendance en  $t - \tau$  des variables complexes comprenant un  $*$ .

Cette fonction se développe en fonction de  $\delta F^{(1)}$  et  $\delta N^{(1)}$  sous la forme suivante :

$$\langle A_2 A_2^* \rangle = \langle \delta F^{(1)} \delta N^{(1)} \delta F^{(1)*} \delta N^{(1)*} \rangle \quad (5.51)$$

A cette étape du calcul, nous n'avons aucune connaissance sur la variable équivalente  $A_2(t)$  ainsi que sur ses propriétés statistiques, de même que nous n'avons aucune information sur la fonction de corrélation d'ordre 4. Néanmoins, en considérant que les

variables  $\delta F$  et  $\delta N$  sont des bruits **gaussiens** (non blancs), on peut dans ce cas appliquer le théorème de Wick-Isserlis (5.11), ce qui nous permet de nous ramener à des produits de fonctions de corrélation d'ordre 2, qui, elles, peuvent être développées à partir de celles de  $\zeta_N(t)$  et  $\zeta_F(t)$  que nous connaissons. Ainsi, la fonction d'autocorrélation de  $A_2(t)$  se développe en :

$$\begin{aligned} \langle A_2 A_2^* \rangle &= \langle \delta F^{(1)} \delta N^{(1)} \rangle \langle \delta F^{(1)*} \delta N^{(1)*} \rangle + \langle \delta F^{(1)} \delta F^{(1)*} \rangle \langle \delta N^{(1)} \delta N^{(1)*} \rangle \\ &+ \langle \delta F^{(1)} \delta N^{(1)*} \rangle \langle \delta N^{(1)} \delta F^{(1)*} \rangle \end{aligned} \quad (5.52)$$

Nous n'avons pas d'expression simple de  $\delta F$  et  $\delta N$  dans le domaine temporel. On peut toutefois travailler dans le domaine de Fourier et utiliser le théorème de Wiener-Khintchine généralisé pour développer la *DSP* de  $\widehat{A}_2$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \widehat{A}_2(\omega) \right|^2 \right\rangle &= \underbrace{\mathcal{TF} \left[ \langle \delta F^{(1)} \delta N^{(1)} \rangle \langle \delta F^{(1)*} \delta N^{(1)*} \rangle \right]}_{c \delta(\omega)} + \underbrace{\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(1)} \right|^2 \right\rangle \otimes \left\langle \left| \widehat{\delta N}^{(1)} \right|^2 \right\rangle}_{(a)} \\ &+ \underbrace{\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta N}^{(1)*} \right\rangle \otimes \left\langle \widehat{\delta F}^{(1)*} \widehat{\delta N}^{(1)} \right\rangle}_{(b)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Le premier terme est, dans le domaine de Fourier, le produit de convolution de deux transformées de Fourier de fonction de corrélation toutes les deux prises en  $\tau = 0$ . C'est donc la Transformée de Fourier d'un terme constant, c'est à dire une distribution de Dirac centrée en  $\omega = 0$ . Ce terme est une composante continue supprimée expérimentalement qui n'apporte pas d'information pertinente au calcul, aussi nous le négligerons pour le *RIN* d'ordre 2.

Les variables intermédiaires de calcul que sont  $\zeta_N$  et  $\zeta_F$  n'ont pas d'expression simple car se sont des termes statistiques. Les calculs de (a) et (b) doivent alors être développées en fonction de  $\widehat{\zeta}_N$  et  $\widehat{\zeta}_F$  afin d'évaluer chaque contribution individuellement.

## 5.3.4.1 calcul de (a)

On connaît l'expression de  $\left|\widehat{\delta N}^{(1)}\right|^2$  et  $\left|\widehat{\delta F}^{(1)}\right|^2$  via les relations 5.45a et 5.45b. On développe (a) comme :

$$\begin{aligned}
(a) &= \left[ \frac{\left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right)^2 D_{NN} + \left[\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2 + \omega^2\right] D_{FF}}{|\mathcal{D}(\omega)|^2} \right] \otimes \left[ \frac{\left(\frac{2}{\tau_P}\right)^2 D_{FF} + \omega^2 D_{NN}}{|\mathcal{D}(\omega)|^2} \right] \\
&= \left(\frac{\eta-1}{\tau\tau_P}\right)^2 D_{NN} D_{FF} \left(|\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right) + \left(\frac{2}{\tau_P}\right)^2 D_{FF}^2 \left(\omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right) + \\
&\quad \left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right)^2 D_{NN}^2 \left(|\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right) + D_{NN} D_{FF} \left(\omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right) + \\
&\quad \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2 \left(\frac{2}{\tau_P}\right)^2 D_{FF}^2 \left(|\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right) + \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2 D_{NN} D_{FF} \left(|\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\tag{5.55}$$

## 5.3.4.2 calcul de (b)

(b) fais intervenir le produit  $\widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta N}^{(1)*}$  et son complexe conjugué. On doit alors développer ces produits avant de les réaliser leur produit de convolution. A partir des équations 5.45a et 5.45b, il vient :

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta N}^{(1)*} \right\rangle &= \frac{1}{|\mathcal{D}(\omega)|^2} \left\langle \left[ \left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right) \widehat{\xi}_N(\omega) + \left(\frac{\eta}{\tau} - j\omega\right) \widehat{\xi}_F(\omega) \right] \left[ -\frac{2}{\tau_P} \widehat{\xi}_F^*(\omega) + j\omega \widehat{\xi}_N^*(\omega) \right] \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}(\omega)|^2} \left( -\frac{2}{\tau_P} \left(\frac{\eta}{\tau}\right) D_{FF} + j\omega \left[ \left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right) D_{NN} + \frac{2}{\tau_P} D_{FF} \right] \right)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
(b) &= \left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta N}^{(1)*} \right\rangle \otimes \left\langle \widehat{\delta N}^{(1)} \widehat{\delta F}^{(1)*} \right\rangle \\
&= \left[ \frac{2}{\tau_P} \left(\frac{\eta}{\tau}\right) D_{FF} \right]^2 \left(|\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right) + \\
&\quad \left[ \left(\frac{\eta-1}{2\tau}\right) D_{NN} + \frac{2}{\tau_P} D_{FF} \right]^2 \left(\omega |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}\right)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

### 5.3.4.3 calcul de $\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(2)} \right|^2 \right\rangle$

Pour calculer  $\left\langle \left| \widehat{A}_2(\omega) \right|^2 \right\rangle$ , on reporte les résultats précédents dans l'expression 5.53. Pour en alléger l'écriture, nous introduisons les variables intermédiaires suivantes :

$$\mathcal{U}_1(\omega) = |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}$$

$$\mathcal{U}_2(\omega) = \omega |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}$$

$$\mathcal{U}_3(\omega) = |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}$$

$$\mathcal{U}_4(\omega) = \omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2} \otimes \omega^2 |\mathcal{D}(\omega)|^{-2}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \widehat{A}_2(\omega) \right|^2 \right\rangle &= (a) + (b) \\ &= \mathcal{U}_1(\omega) \times \left[ \left( \frac{\eta-1}{\tau\tau_P} \right)^2 D_{NN}D_{FF} + 2 \left( \frac{\eta}{\tau} \right)^2 \left( \frac{2}{\tau_P} \right)^2 D_{FF}^2 \right] \\ &+ \mathcal{U}_2(\omega) \times \left[ \left( \frac{\eta-1}{2\tau} \right) D_{NN} + \frac{2}{\tau_P} D_{FF} \right]^2 \\ &+ \mathcal{U}_3(\omega) \times \left[ \left( \frac{\eta-1}{2\tau} \right)^2 D_{NN}^2 + \left( \frac{2}{\tau_P} \right)^2 D_{FF}^2 + \left( \frac{\eta}{\tau} \right)^2 D_{NN}D_{FF} \right] \\ &+ \mathcal{U}_4(\omega) \times D_{NN}D_{FF} \end{aligned} \tag{5.58}$$

Enfin, on calcule  $\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(2)} \right|^2 \right\rangle$  en se servant de l'équation 5.44b :

$$\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(n)} \right|^2 \right\rangle = |K_F(\omega)|^2 \left\langle \left| \widehat{A}_n(\omega) \right|^2 \right\rangle$$

La Figure 5.6 est un exemple du deuxième ordre du *RIN* d'un laser de classe B dopé Erbium, calculé avec les mêmes paramètres que ceux de la Figure 5.5. Le *RIN* d'ordre 2 est composé de deux pics : le premier à  $\omega_{sp}$  et le deuxième à  $2\omega_{sp}$ , ce sont les pulsations principales où le *RIN* d'ordre 2 apporte une contribution significative. La réso-

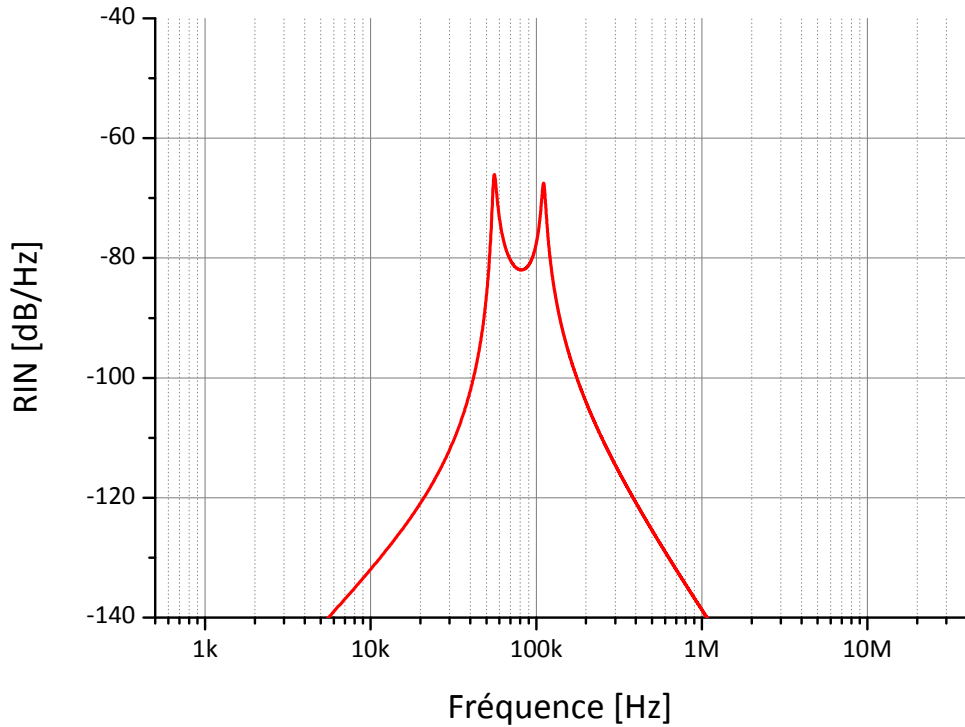


FIGURE 5.6 – Spectre du deuxième ordre du  $RIN$  théorique d'un laser de classe B dopé Erbium pour  $r = 2$ ,  $\tau_P = 150 \text{ ns}$ ,  $T_1 = 10 \text{ ms}$ ,  $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$  ( $\mathcal{V} \simeq 2400 \mu\text{m}^3$ ),  $D_{NN} = 10^{17} \text{ s}^{-1}$  et  $D_{FF} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ .

nance de l'ordre 2, correspondant à la deuxième harmonique de la pulsation de relaxation  $\omega_{sp}$ , est contenue dans les fonctions intermédiaires, notées  $\mathcal{U}_i$ . Ce sont des produits de convolution de fonctions polynomiales du dénominateur  $\mathcal{D}(\omega)$  de la fonction de transfert du laser, qui contient le phénomène de résonance initial. Il n'est donc pas surprenant d'observer des harmoniques de la pulsation de relaxation au vu des fonctions obtenues.

Les termes  $\mathcal{U}_i$  sont capitaux car ce sont eux qui contiennent le terme de résonance d'ordre 2.  $\left\langle \left| \widehat{A}_2(\omega) \right|^2 \right\rangle$  est une combinaison linéaire de ces variables pondérées par des coefficients dépendant de  $D_{FF}^2$ ,  $D_{NN}^2$  et  $D_{FF}D_{NN}$ . Le calcul du  $RIN$  à l'ordre 2 permet de diminuer l'incertitude sur  $D_{NN}$  et  $D_{FF}$  qu'on pourrait obtenir avec le seul modèle d'ordre 1.

### 5.3.5 *RIN* total

A partir de la définition de  $\delta F$  (eq. 5.35b), la *DSP* totale s'écrit, en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine généralisé :

$$\left\langle \left| \widehat{\delta F} \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(1)} \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(2)} \right|^2 \right\rangle + \left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta F}^{(2)*} \right\rangle + \left\langle \widehat{\delta F}^{(1)*} \widehat{\delta F}^{(2)} \right\rangle \quad (5.59)$$

Calculons les termes croisés  $\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta F}^{(2)*} \right\rangle$  et  $\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)*} \widehat{\delta F}^{(2)} \right\rangle$ . En utilisant l'équation 5.42b, il vient :

$$\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta F}^{(2)*} \right\rangle = K_F^*(\omega) \left\langle \widehat{\delta F}^{(1)}(\omega) \left( \widehat{\delta F}^{(1)}(\omega) \otimes \widehat{\delta N}^{(1)}(\omega) \right)^* \right\rangle$$

En appliquant le théorème de Wiener-Khintchine généralisé, on obtient :

$$\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)} \widehat{\delta F}^{(2)*} \right\rangle = K_F^*(\omega) \mathcal{T} \mathcal{F} \left[ \left\langle \delta F^{(1)}(t) \left( \delta F^{(1)}(t - \tau) \delta N^{(1)}(t - \tau) \right)^* \right\rangle \right]$$

Le dernier terme est la Transformée de Fourier d'une fonction de corrélation de trois variables, toutes à statistique gaussienne. Il est donc nul par application du théorème de Wick-Isserlis (eq. 5.11). Le même raisonnement s'applique pour le terme  $\left\langle \widehat{\delta F}^{(1)*} \widehat{\delta F}^{(2)} \right\rangle$ .

Les *DSP* se somment sans subir de phénomène d'interférence (somme quadratique) et le *RIN* total est la somme de chaque *RIN* calculé indépendamment :

$$RIN = RIN^{(1)} + RIN^{(2)} \quad (5.60)$$

En étendant le raisonnement jusqu'à l'ordre  $n$ , il vient :

$$RIN = \sum_{k=1}^{n \rightarrow +\infty} RIN^{(k)} \quad (5.61)$$

Le *RIN* total est finalement "simple" à calculer dans le sens où il se réduit à la somme de chaque contribution calculée indépendamment. La difficulté réside dans le calcul des *RIN* d'ordres supérieurs. Ces derniers font intervenir des produits de convolution de fonctions de transfert relativement complexes et l'évaluation numérique de ces quantités est nécessairement longue.

La Figure 5.7 est un exemple de simulation numérique obtenue lorsque l'on considère un laser dopé aux ions Erbium avec les mêmes paramètres que précédemment. Le



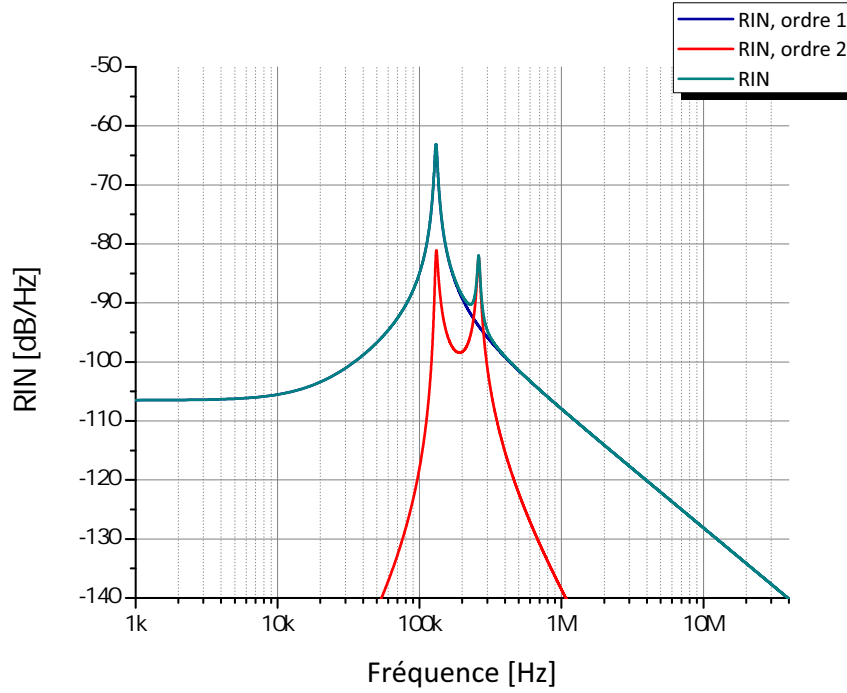


FIGURE 5.7 – Spectre du RIN théorique d'un laser de classe B dopé Erbium pour  $r = 2$ ,  $\tau_p = 150 \text{ ns}$ ,  $T_1 = 10 \text{ ms}$ ,  $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$  ( $\mathcal{V} \simeq 2400 \mu\text{m}^3$ ),  $D_{NN} = 10^{17} \text{ s}^{-1}$  et  $D_{FF} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$  développé jusqu'à l'ordre 2.

*RIN* d'ordre 2 apporte une contribution non négligeable au *RIN* total à  $2\omega_{\text{sp}}$ , mais sa contribution  $\omega_{\text{sp}}$  est négligeable devant le *RIN* du premier ordre à cette pulsation. Signalons également que le *RIN* à  $2\omega_{\text{sp}}$  est inférieur au *RIN* à  $\omega_{\text{sp}}$  d'environ 15 dB, ce qui justifie à posteriori l'approche perturbative utilisée dans notre modèle.

### 5.3.6 RIN d'ordres supérieurs

La DSP des fluctuations du nombre de photons à l'ordre 3 s'écrit :

$$\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(3)}(\omega) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| K_F(\omega) \left( \widehat{\delta F}^{(2)}(\omega) \otimes \widehat{\delta N}^{(1)}(\omega) + \widehat{\delta F}^{(1)}(\omega) \otimes \widehat{\delta N}^{(2)}(\omega) \right) \right|^2 \right\rangle$$

que l'on développe avec les équations 5.42a et 5.42b :

$$\left\langle \left| \widehat{\delta F}^{(3)}(\omega) \right|^2 \right\rangle = |K_F(\omega)|^2 \left\langle \left| K_F(\omega) \left( \widehat{A}_2(\omega) \otimes \widehat{\delta N}^{(1)}(\omega) \right) + \widehat{\delta F}^{(1)} \otimes \left( K_N(\omega) \widehat{A}_2(\omega) \right) \right|^2 \right\rangle$$

Le *RIN* d'ordre 3 nécessite le calcul de 16 fonctions intermédiaires (à l'instar des  $\mathcal{U}_i(\omega)$ ) qui sont des produits de convolution de polynômes de degré 3 en  $\omega$  avec  $\mathcal{D}^3(\omega)$ . Le calcul des ordres du *RIN* supérieurs à 2 n'a pas été effectué.

## 5.4 La mesure du bruit d'intensité

La mesure de  $RIN$  est une mesure de  $DSP$  par détection directe. Le banc de mesure est schématisé sur la Figure 5.8. Les composants utilisés sont les suivants :

- un Photodétecteur en  $InGaAs$  de rendement  $\frac{q\eta R}{h\nu} \simeq 1 A.W^{-1}$  à  $\lambda = 1550 nm$ . Sa bande passante est de 1.2 GHz.
- un Amplificateur transimpédance de gain variable. Sa bande passante dépend du calibre utilisé. On utilisera généralement un gain transimpédance de  $10^6 V.A^{-1}$  donnant une bande passante de 1.2 MHz.
- un filtre électrique passe-haut, noté DC-Block, dont la fréquence de coupure est de 1 Hz.
- un Analyseur de Spectre Electrique de la marque *Agilent* dont la bande d'analyse bas bruit est limité à 40 MHz.

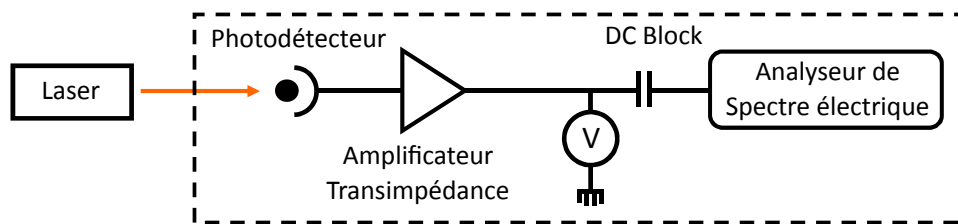


FIGURE 5.8 – Schema du montage de mesure de  $RIN$  par détection directe.

Pour rappel, une mesure de  $DSP$  s'exprime :

$$N_{mes} = H(f) [N_{Th} + N_{SN} + N_{excès}]$$

avec

$$N_{excès} = Ri^2 RIN$$

Le  $RIN$  s'écrit donc à partir des autres contributions à la mesure de  $DSP$  comme :

$$RIN = \frac{2q}{\langle i \rangle} \left[ \left( \frac{N_{mes} - H(f)N_{SN}}{H(f)N_{SN}} \right) - 1 \right] \quad (5.62)$$

L'évaluation des quantités  $H(f)N_{Th}$  et  $H(f)N_{SN}$  permet d'extraire le  $RIN$  d'une mesure de  $DSP$ . Il est évident que l'évaluation du bruit thermique et du bruit de grenaille doit se faire dans les mêmes conditions expérimentales pour avoir le même  $H(f)$ . La source de référence doit alors fournir une puissance du même ordre de grandeur que la puissance du laser dont on veut mesurer le  $RIN$ .

### 5.4.1 Mesure du bruit thermique

La mesure du bruit thermique est une mesure "a vide", *i.e.* sans aucun signal (optique). C'est le niveau de signal minimal mesurable par la chaîne de détection. La Figure 5.9 montre deux exemples de *DSP* de bruit thermique mesurée à deux calibres de gain différents ( $10^2$  et  $10^6$   $V.A^{-1}$ ).

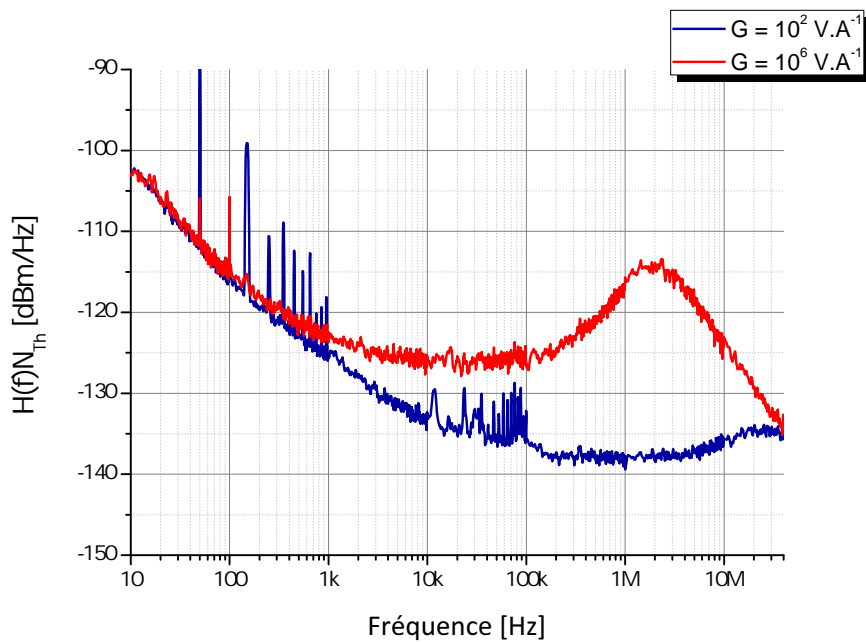


FIGURE 5.9 – Mesure du bruit thermique pour deux calibres différents.

On remarque que le spectre n'est pas homogène sur toute la bande d'analyse mais possède sa distribution spectrale. Nous avons ici une chaîne de détection complexe composée d'amplificateurs et d'éléments de filtrage, contenus dans le terme  $H(f)$ , il n'est donc pas surprenant d'observer des écarts importants à l'équation 5.28.

- Pour de faibles gains, nous sommes limités par le bruit intrinsèque de l'analyseur de spectre électrique (les multiples pics entre 10  $kHz$  et 100  $kHz$  proviennent de l'instrument). Cependant, pour un fort gain, le bruit dû à l'amplificateur est prédominant, notamment autour de la fréquence de coupure.
- A basse fréquence, nous mesurons un bruit en  $1/f$  quel que soit le calibre utilisé. Son origine proviendrait des fluctuations des composants électriques actifs [115–117]. Les nombreux pics en basse fréquence sont des harmoniques de

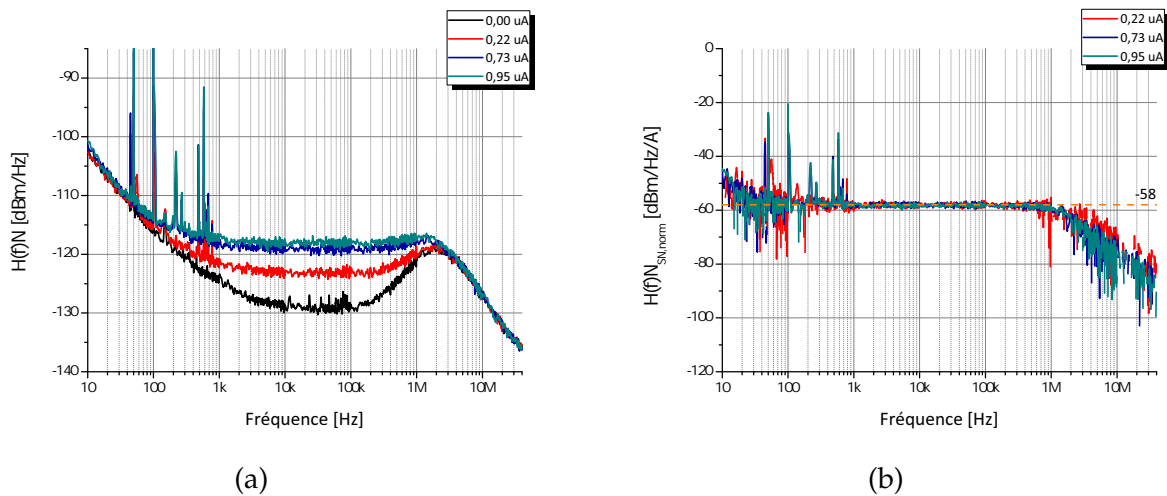


FIGURE 5.10 – Estimation du bruit de grenaille : (a) DSP mesurées pour différentes puissances, (b) normalisation

la fréquence fondamentale du réseau électrique (50 Hz). Plus le nombre d'instruments branchés sur le secteur est important, plus ces pics sont nombreux et intenses.

## 5.4.2 Estimation du *shot noise*

Le bruit de grenaille évolue de façon linéaire avec le photocourant. Ainsi, pour une configuration expérimentale donnée, le bruit de grenaille normalisé par le photocourant (et retranché du bruit thermique)  $H(f)N_{SN, norm}$ , est une constante multipliée par la fonction de transfert du banc et vaut  $2qRH(f)$ . Pour l'évaluer, nous utilisons une source de référence où le  $RIN$  est nul ou négligeable devant le bruit de grenaille. Dans notre cas, c'est une source large bande de la marque *Anritsu*. Les Figures 5.10a et 5.10b donnent les DSP obtenues pour différents points de fonctionnement de la source.

On constate que les spectres de  $H(f)N_{SN, norm}$  se superposent totalement et sont constants entre 1 kHz et 1 MHz. Aux basses fréquences, le spectre est très bruité, ce bruit provient des vibrations mécaniques du système de refroidissement de la source. A haute fréquence, la décroissance est due au dépassement de la fréquence de coupure de l'amplificateur transimpédance. Les mesures de  $RIN$  seront donc valides à partir de 1 kHz. Pour un gain de  $10^6 \text{ V}\cdot\text{A}^{-1}$ ,  $H(f)N_{SN, norm}$  est évalué à  $-58 \text{ dB}\cdot\text{Hz}^{-1}\cdot\text{A}^{-1}$ .

## 5.5 RIN d'un laser WGM

La mesure du *RIN* d'un laser *WGM* n'est pas aisée. Les microcavités de haute finesse ne peuvent pas fournir un signal laser à la fois très cohérent et très intense, aussi le gain électrique post-photodétection est nécessairement élevé, réduisant la bande passante d'analyse spectrale.

Les différentes familles de modes existant au sein de la microcavité sont nombreuses et le spectre des *WGM* est très dense, comme nous l'avons vu au chapitre 2. De plus, l'écart entre les différents modes de familles différentes peut être très faible, d'une part si l'ellipticité est peu marquée la levée de dégénérescence entre deux modes le sera tout autant, d'autre part les familles de modes peuvent se recouper. Même si l'effet laser a préférentiellement lieu sur les modes d'indice  $n = 1$ , rien n'interdit les familles de mode  $n = 2$  ou  $n = 3$  de dépasser le seuil laser. De plus, le gain inhomogène de l'Erbium dans un verre fluoré autorise l'émission sur une bande relativement large (cf chap. 1). Ainsi, un laser *WGM* rigoureusement monomode est difficilement obtainable.

Considérons un effet laser multimode dont les modes laser sont définis par des nombres  $n$  différents ou  $\ell - |m|$  différents. Ces modes n'ont pas les mêmes temps de vie  $\tau_p$  ni les mêmes volumes de mode  $\mathcal{V}$  puisque leur confinement dépend de l'indice radial  $n$  et leur distribution angulaire de  $\ell - |m|$ . Ils ne sont d'ailleurs pas alimentés de la même façon. En vertu de ces arguments, leurs fréquences de relaxation seront légèrement différentes. A l'inverse, un laser monomode n'aura qu'une seule fréquence de relaxation puisqu'un seul mode dépasse le seuil (même si le pompage est multimode).

Pour un couplage donné, plusieurs modes peuvent être alimentés sans qu'un mode ne soit prédominant. Dans cette situation, des échanges d'énergie apparaissent entre les modes puisant dans le même milieu à gain. Ces échanges s'effectuent sur des durées relativement longues. La Figure 5.11 illustre cette situation, les spectres ont été mesurés avec un analyseur de spectre optique toutes les 2 *min*. Sur cette Figure, on constate que le deuxième mode apparaît au bout de 10 *min* tandis que le premier mode tend à s'évanouir. Au bout de 30 *min*, la situation inverse se produit : le deuxième mode s'atténue au profit du premier. Notons toutefois que, en raison des faibles puissances et des faibles largeurs de raie des signaux optiques mesurés, la bande passante vidéo de l'analyseur doit être relativement faible pour rendre le rapport signal sur bruit le plus élevé possible. Les mesures sont alors relativement longues (entre 30 *sec*

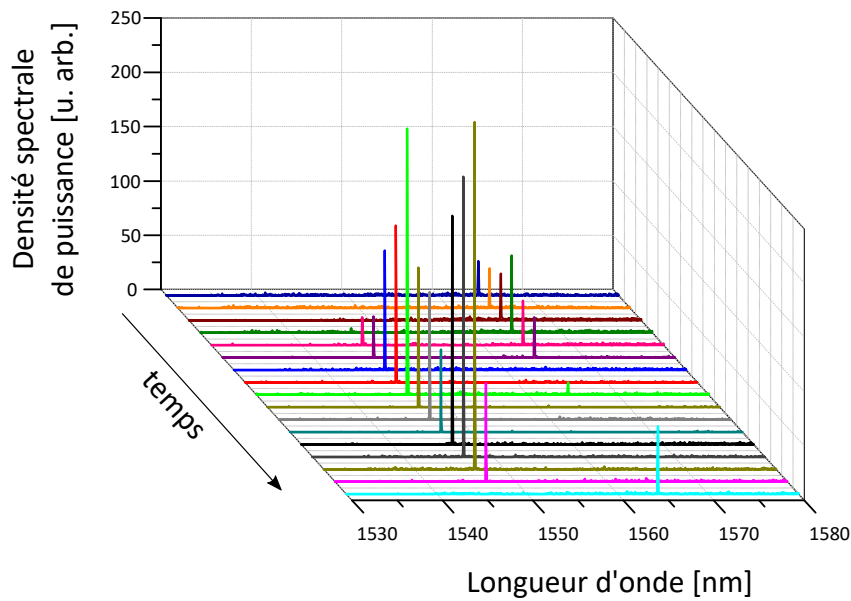


FIGURE 5.11 – Compétition de modes d'un laser WGM, la durée entre chaque acquisition est d'environ 2 min.

et 1 min par acquisition pour une *video bandwidth* de 100 Hz). Cette lente acquisition donne une estimation de la dynamique maximale observable avec ce type d'appareil. Il n'est donc pas possible d'observer des phénomènes plus rapides avec un analyseur de spectre optique. A l'inverse, les mesures de DSP à l'analyseur de spectre électrique sont relativement rapides et ne permettent pas d'observer de tels phénomènes. Un spectre de RIN d'un effet laser à priori monomode peut en réalité présenter des instabilités auxquelles la mesure n'est pas sensible.

### 5.5.1 Monomode v.s. multimode

Nous présentons un exemple typique d'un effet laser obtenu dans une sphère en verre ZBLALiP dopée aux ions Erbium à 0.1 mol%, de diamètre  $2a \simeq 90 \mu\text{m}$  et couplée par taper. La puissance du laser est calculée à partir de la tension mesurée au voltmètre et est estimée à  $P \simeq 219 \text{ nW}$ . Le signal obtenu est monomode à l'OSA ( $\lambda \simeq 1559 \text{ nm}$ ). Cependant, à cause de la résolution limitée d'un tel appareil (70 pm, soit environ 10 GHz aux alentours de 1550 nm), il est nécessaire d'utiliser des outils d'analyse spectrale plus résolus.

Nous utilisons alors un Fabry-Perot d'analyse, qui est une cavité plan-concave dont un des miroirs est monté sur un cristal piezo-électrique. Une rampe de tension est appliquée sur le cristal de façon à mesurer le spectre du laser sur un intervalle spectral

libre de la cavité Fabry-Perot, sous réserve que la finesse  $\mathcal{F}$  du Fabry-Perot d'analyse soit plus importante que la finesse du mode à sonder (auquel cas la fonction d'appareil est mesurée). La résolution de l'analyseur est de  $100\text{ MHz}$ , ce qui est toujours insuffisant pour mesurer la largeur de raie d'un laser WGM. Cependant, l'intervalle spectral libre de cet analyseur Fabry-Perot est de  $10\text{ GHz}$ . On peut donc mesurer le spectre du laser WGM sur une bande spectrale plus étroite que ne le ferait un analyseur de spectre optique. La Figure 5.12a est une mesure du spectre du laser WGM précédemment obtenu tandis que la Figure 5.12b est une mesure de largeur de raie à l'auto-hétérodyne retardé (DSH), interféromètre de Mach-Zehnder déséquilibré.

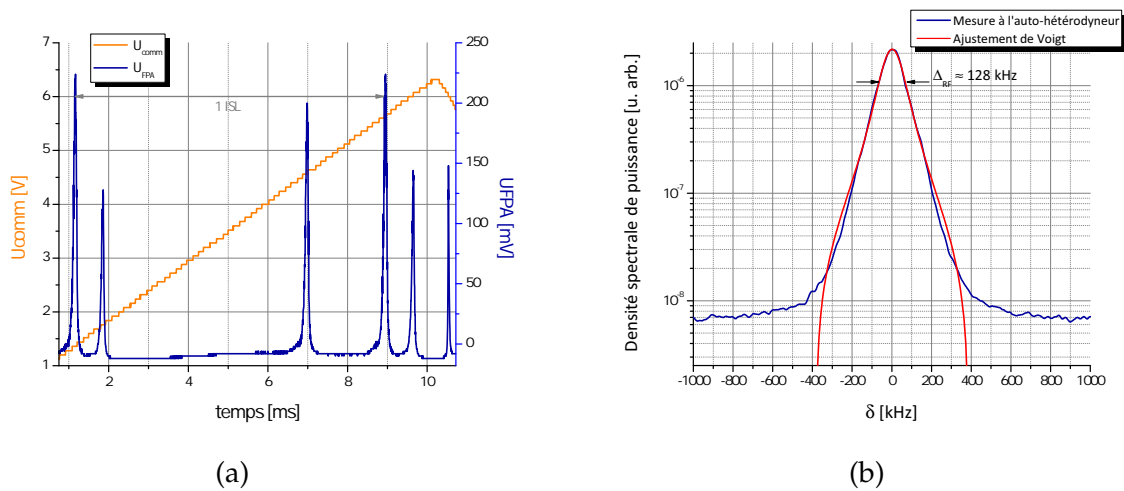


FIGURE 5.12 – (a) Spectre optique d'un laser WGM multimode mesuré au Fabry-Perot d'analyse (b) Largeur de raie mesurée à l'auto-hétérodyne dans le domaine électrique ( $\delta$  est le désaccord à la fréquence de modulation du modulateur acousto-optique).

On constate que, sur un intervalle spectral libre de la cavité Fabry-Perot, il y a au moins 3 modes. Le laser WGM est donc multimode. La largeur de raie optique est d'environ  $65\text{ kHz}$ . Cependant, du fait de l'aspect multimode du laser, la largeur spectrale mesurée prend en compte les contributions de tous les modes. La mesure indiquée n'est donc pas représentative. Néanmoins nous avons une idée de l'ordre de grandeur de la largeur de raie du mode laser le plus large.

Nous procédons ensuite à une mesure de  $RIN$  du laser obtenu en utilisant le banc de mesure présenté sur la Figure 5.8. Les résultats des mesures de  $DSP$  sont présentées sur la Figure 5.13a et le spectre de  $RIN$  calculé à partir de ces mesures sur la Figure 5.13.

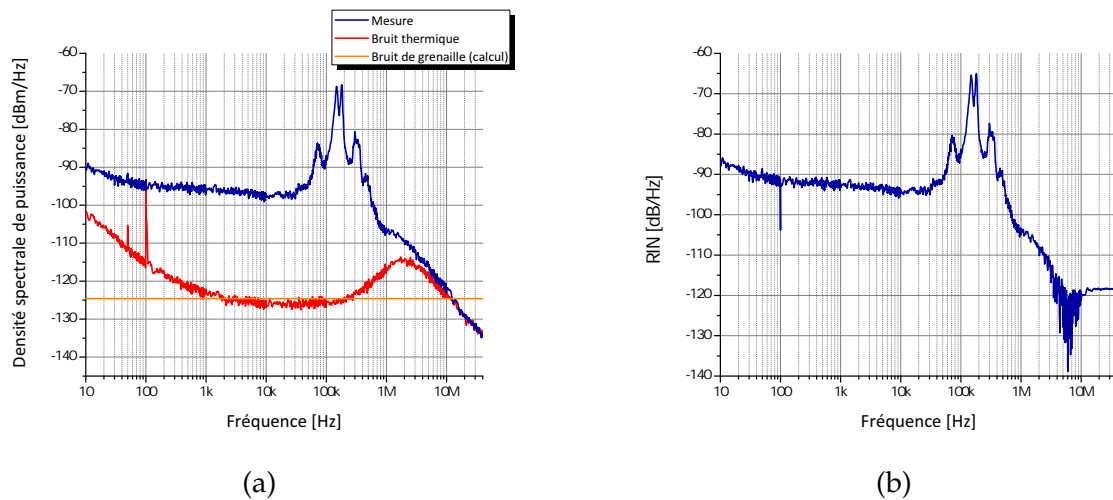


FIGURE 5.13 – Spectre de  $RIN$  d'un laser WGM multimode : (a)  $DSP$  mesurées du laser et du bruit thermique et  $DSP$  estimée du bruit de grenaille (par calcul), (b) Spectre de  $RIN$ .

Le bruit de grenaille est calculé à partir de la calibration avec la source de référence pour ce calibre de gain, estimé à  $-58 \text{ db} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ . La puissance mesurée est d'environ  $219 \text{ nW}$ , donnant un bruit de grenaille d'environ  $-124.6 \text{ dBm} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

Le spectre de  $RIN$  obtenu est constitué de multiples pics entre  $50$  et  $500 \text{ kHz}$ , reflétant le caractère multimode du laser. En basse fréquence, le bruit est blanc tandis qu'à haute fréquence, le signal décroît (cet effet est moins marqué car il est masqué par la coupure due à l'amplificateur transimpédance).

### Remarque sur la normalisation

Le modèle du  $RIN$  développé précédemment s'exprime comme la densité spectrale de puissance des fluctuations de  $U$  (puissance, nombre de photons, flux de photons, ...) sur le carré de la valeur moyenne de  $U$ . Néanmoins, le modèle a été développé sur un laser monomode : il faut donc normaliser la  $DSP$  par le carré de la valeur moyenne de  $U$  **dans le mode laser**, or le signal optique est multimode... On ne peut pas normaliser simplement par le carré du photocourant puisque c'est une mesure intégrée sur toute la bande optique du photodétecteur (de  $1300$  à  $1600 \text{ nm}$ ). La normalisation est fautive tant que le signal optique n'est pas filtré autour du mode d'intérêt avec notre définition précédente du  $RIN$ . Cependant, le filtrage autour du mode d'intérêt modifie considérablement l'information sur la dynamique du laser : on passe d'un laser



multimode à un laser multimode filtré si bien que la dynamique globale est perdue. De plus, le bruit de partition est tel que le bruit global est moins élevé que le bruit de chaque mode pris séparément : les fluctuations se compensent à cause de la compétition de modes. On ne peut donc raisonnablement pas filtrer le signal. Le *RIN* du laser précédent est donc largement sous-estimé.

Dans le cas d'un laser monomode, la difficulté est levée puisqu'il n'y a qu'un seul mode laser, à partir du moment où la puissance du laser est plus élevée que la puissance de l'émission spontanée, ce qu'on suppose être le cas. Les prochaines sections s'attachent à étudier le *RIN* d'un laser *WGM* en fonctionnement monomode pour différents systèmes de couplage : pointe effilée ou taper.

### 5.5.2 Pompe monomode v.s. pompe multimode

La pompe utilisée est un laser peuplant le niveau  $^4I_{13/2}$  de l'Erbium. Elle doit émettre aux alentours de 1480 nm et être accordée sur un mode de cavité (les *WGM* de pompe). A cause de effets thermiques, l'ensemble est soumis à des fluctuations importantes. La pompe est alors choisie suffisamment large pour que les *WGM* de pompe soient insensibles à ces fluctuations et que le pompage soit le plus constant possible. Notre choix s'est porté sur une diode laser à cavité étendue dont le spectre est présenté sur la Figure 5.14a. Nous disposons également d'une diode laser monomode à 1480 nm très cohérente ( $\Delta\nu < 10$  kHz), présentée sur la Figure 5.14b.

L'avantage d'un pompage multimode est que les nombreux modes de pompe sont davantage susceptibles d'engendrer un effet laser qu'un pompage monomode. L'inconvénient est que de nombreux modes peuvent alimenter un même mode Laser si bien que le taux de pompage n'évolue pas de manière linéaire avec la puissance de pompe. Un pompage monomode est plus intéressant dans la mesure où le taux de pompage est linéaire et l'effet laser monomode est plus facile à obtenir, mais la condition sur la longueur d'onde de pompe est beaucoup plus contraignante et la moindre fluctuation thermique éloigne la pompe du mode d'absorption. Sans asservissement de la longueur de pompe sur un *WGM*, l'effet laser est très sensible et peu reproductible.

### 5.5.3 Couplage par taper

Dans un premier temps, nous utilisons un couplage par taper, comme présenté au chapitre 3. Le montage expérimental est schématisé sur la Figure 5.15.

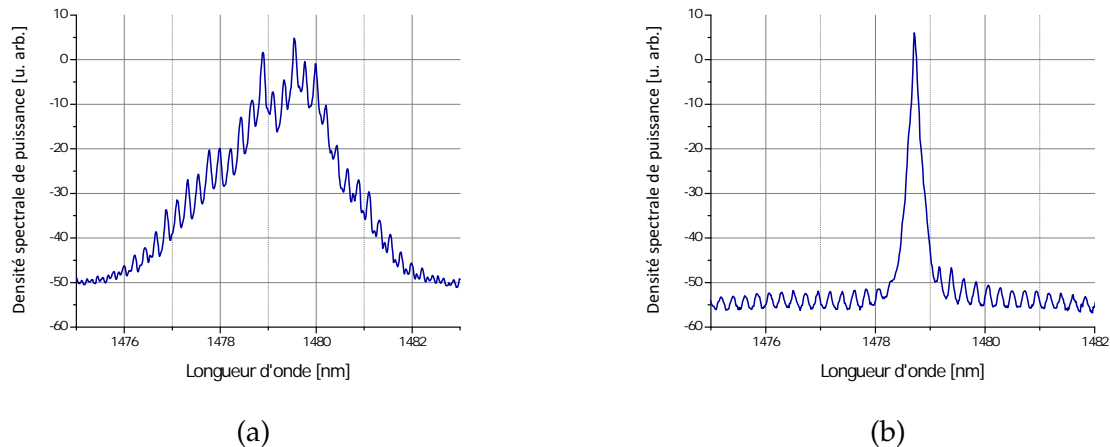


FIGURE 5.14 – Spectres des pompes utilisées (a) pompe multimode (b) pompe mono-mode

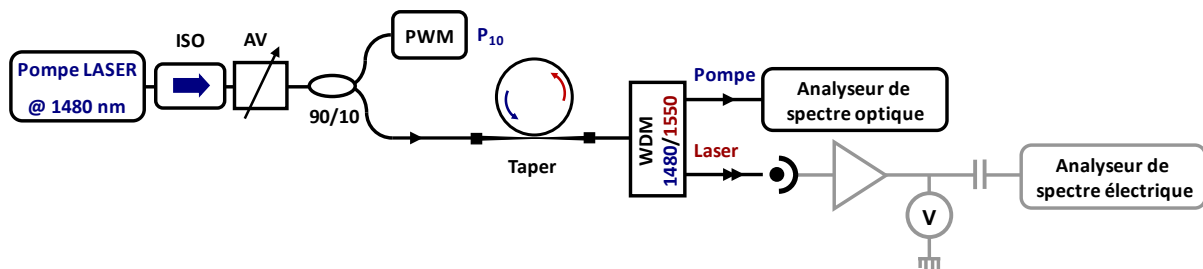


FIGURE 5.15 – Schéma expérimental de l'étude du RIN d'un Laser WGM, couplage par taper.

La pompe utilisée passe dans un isolateur optique puis dans un atténuateur variable de façon à travailler à un point de fonctionnement donné (*i.e.* pour ne pas modifier le spectre de la pompe) puis dans un coupleur 90/10. 10% de la puissance initiale est mesurée au puissance-mètre (notée  $P_{10}$ ) tandis que 90% est injectée dans le taper. Ce dernier vient coupler le signal de pompe dans la micro-sphère et le signal laser (copropagatif) est récupéré par ce même coupleur. Un démultiplexeur permet de séparer le signal laser du signal de pompe en sortie de taper avant la photodétection et l'analyse spectrale dans le domaine électrique.

Pour ces études, nous avons utilisé les deux pompes disponibles : la pompe mono-mode et la pompe multimode.

### 5.5.3.1 Pompe monomode

Le résonateur utilisé est une sphère en ZBLALiP dopée aux ions Erbium à 0.1 mol% et de diamètre  $2a \simeq 90 \mu\text{m}$ . L'effet laser obtenu est centré à  $1565.7 \text{ nm}$ , la puissance intégrée estimée est de  $129 \text{ nW}$ . La Figure 5.16 présente le spectre de  $RIN$  d'un tel signal ainsi que l'ajustement théorique correspondant au modèle développé précédemment.

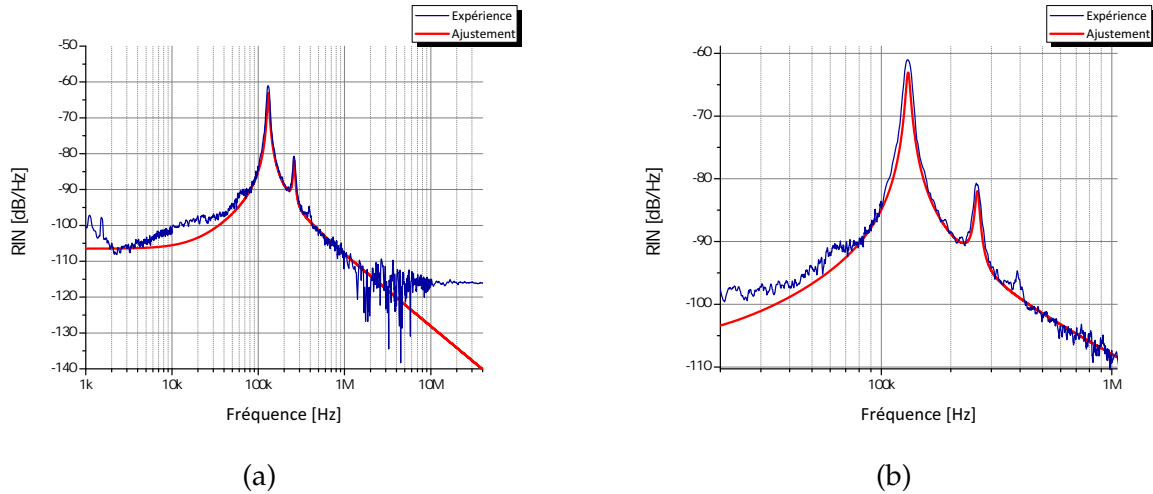


FIGURE 5.16 –  $RIN$  d'un laser WGM en  $Er : ZBLALiP$  couplé par taper droit, pompe monomode : (a) spectre expérimental et ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation.

Le spectre expérimental a été ajusté en utilisant les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 6.5 \pm 0.1 \\ \tau_P = 47 \pm 5 \text{ ns} \\ \kappa = (2.2 \pm 0.2) \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ D_{NN} = (1.5 \pm 0.5) \times 10^{16} \text{ s}^{-2} \\ D_{FF} = (3.0 \pm 0.6) \times 10^{14} \text{ s}^{-2} \end{array} \right.$$

Les barres d'erreurs des paramètres d'ajustement ont été obtenues en utilisant la méthode suivante :

- 1 % d'erreur sur  $r$  entraîne un décalage de 1 kHz sur la fréquence de relaxation.
- 10 % d'erreur sur  $\tau_P$  entraîne une erreur de 1.5 dB sur l'amplitude du pic à la fréquence de relaxation.
- 30 % d'erreur sur  $D_{NN}$  entraîne une erreur de 1 dB sur le bruit en basses fréquences.

- 20 % d'erreur sur  $D_{FF}$  entraîne une erreur de 1 *dB* sur l'amplitude du pic à la fréquence de relaxation.
- 10 % d'erreur sur  $\kappa$  entraîne une erreur de 1 *dB* sur l'amplitude relative du bruit de la seconde harmonique sur le fondamental de la fréquence de relaxation.

La mesure du spectre expérimental et l'ajustement réalisé amènent les commentaires suivants :

- Le spectre obtenu est typique d'un laser de classe B où le phénomène de résonance dû à la relaxation du laser est bien marqué, ici à 131 *kHz*. En basse fréquence, le *RIN* n'est pas blanc mais est légèrement distordu. Cela est probablement dû à une levée du bruit lorsqu'un deuxième mode est proche de dépasser le seuil. A très basse fréquence, le *RIN* n'est pas évalué à cause de notre source de référence, très bruitée en dessous de 100 *Hz*. Au delà de la fréquence de relaxation, le *RIN* suit bien une décroissance proportionnelle à  $1/f^2$ .
- Un effet remarquable est la présence de plusieurs pics entre 100 *kHz* et 1 *MHz*. A première vue cela semble correspondre à la signature d'un effet laser multimode. Cependant, ces pics sont présents aux harmoniques multiples de la fréquence de relaxation (262 et 393 *kHz*, cf Fig. 5.16b). Ils correspondent aux ordres multiples du *RIN* (ici les ordres 2 et 3) tels que développés dans notre modèle théorique.
- L'ajustement théorique donne accès aux paramètres  $r$ ,  $\tau_p$ ,  $D_{NN}$  et  $D_{FF}$ . Le temps de vie du photon (limité par le couplage) est estimé à 47 *ns*, ce qui donne un facteur de qualité  $Q \simeq 5.66 \times 10^7$ . Cette valeur est cohérente avec celles obtenues dans les travaux de A. Rasoloniaina [47] et V. Huet [101] sur les micro-résonateurs en verre ZBLALiP dopés aux ions Erbium en régime d'amplification sélective.
- Le *RIN* d'ordre 2 apparaît bien comme une perturbation de l'ordre 1 puisque le *RIN* à  $2\omega_{sp}$  est inférieur de 20 *dB* au *RIN* à  $\omega_{sp}$ . L'hypothèse du traitement perturbatif est donc bien appropriée et le modèle est cohérent.

### Remarques

L'amplitude du *RIN* du deuxième ordre dépend fortement de la constante de couplage  $\kappa$  dont nous rappelons l'expression :

$$\kappa = \frac{c \sigma_e}{N \mathcal{V}}$$

$\sigma_e$  est connu des mesures spectroscopiques [58]. Le seul paramètre expérimental dont l'ajustement dépend est le volume de mode  $\mathcal{V}$ . Il apparaît donc comme un paramètre d'ajustement. Le seul moyen de le fixer est d'identifier parfaitement le WGM. Pour cela, des expériences particulières d'analyse modale existent [118, 119] mais le laboratoire Foton ne dispose pas de ces bancs de mesure<sup>5</sup>. Du fait du couplage par taper, on peut tout de même restreindre les modes susceptibles de supporter un effet laser aux familles  $n \leq 2$  et  $\ell - |m| \leq 6$ .

A partir des paramètres géométriques de la cavité et de la longueur d'onde d'émission, on peut calculer les indices  $\ell$  des WGM pour  $n = 1$  et  $n = 2$ . On s'aperçoit que les modes correspondant le plus aux mesures expérimentales sont les modes *TE* avec  $\lambda = 1565.57 \text{ nm}$  et  $\ell = 258$  pour  $n = 1$  et  $\lambda = 1566.08 \text{ nm}$  et  $\ell = 249$  pour  $n = 2$ . On peut alors calculer les volumes des modes pour ces deux familles de modes ainsi que le facteur  $\kappa$  correspondant. Les résultats des calculs sont présentés sur le Tableau 5.1. L'ajustement théorique de la Figure 5.16 correspond à  $\kappa = 0.022 \text{ s}^{-1}$ . Cela correspondrait à un mode  $n = 1$ ,  $\ell = |m| + 1$ . De plus, la résolution numérique donne longueur d'onde théorique pour  $n = 1$  relativement proche de la valeur expérimentale.

TABLEAU 5.1 – Calcul numérique des volumes des modes  $\mathcal{V}$  (en  $\mu\text{m}^3$ ) et des constantes de couplage  $\kappa$  (en  $\text{s}^{-1}$ ) pour des modes *TE* dans une sphère en ZBLALiP ( $N = 1.49$ ) de rayon  $a = 45 \mu\text{m}$  autour de  $\lambda = 1565.7 \text{ nm}$ .

	$\ell -  m  = 0$	$\ell -  m  = 1$	$\ell -  m  = 2$	$\ell -  m  = 3$	$\ell -  m  = 4$	$\ell -  m  = 5$	$\ell -  m  = 6$
$n = 1$	$1966.37 \mu\text{m}^3$ $0.0307 \text{ s}^{-1}$	$2665.61 \mu\text{m}^3$ $0.0227 \text{ s}^{-1}$	$2969.08 \mu\text{m}^3$ $0.0203 \text{ s}^{-1}$	$3156.77 \mu\text{m}^3$ $0.0191 \text{ s}^{-1}$	$3288.95 \mu\text{m}^3$ $0.0184 \text{ s}^{-1}$	$3385.55 \mu\text{m}^3$ $0.0178 \text{ s}^{-1}$	$3463.13 \mu\text{m}^3$ $0.0174 \text{ s}^{-1}$
$n = 2$	$2456.68 \mu\text{m}^3$ $0.0246 \text{ s}^{-1}$	$3331.99 \mu\text{m}^3$ $0.0181 \text{ s}^{-1}$	$3704.98 \mu\text{m}^3$ $0.0163 \text{ s}^{-1}$	$3941.73 \mu\text{m}^3$ $0.0153 \text{ s}^{-1}$	$4102.83 \mu\text{m}^3$ $0.0147 \text{ s}^{-1}$	$4223.93 \mu\text{m}^3$ $0.0143 \text{ s}^{-1}$	$4321.52 \mu\text{m}^3$ $0.0140 \text{ s}^{-1}$

Signalons enfin que les valeurs de  $D_{NN}$  et  $D_{FF}$  ne sont que relatives à  $\kappa$  de façon à ajuster au mieux le spectre expérimental. Il y a donc autant de valeurs de  $D_{NN}$  et  $D_{FF}$  possibles que de  $\kappa$  possibles.

5. La méthode du *Shift over Broadening Ratio*, présentée dans la thèse de Y. Candéla [119], permet d'identifier l'indice radial  $n$  du WGM excité mais n'est pas utilisable en régime laser.

### 5.5.3.2 Pompe multimode

Le résonateur utilisé est le même que précédemment. L'effet laser obtenu a lieu à  $1565.1 \text{ nm}$  et la puissance intégrée estimée est de  $105 \text{ nW}$ . Les Figures 5.17a et 5.17b présentent le spectre de  $RIN$  mesurée ainsi que leur ajustement théorique.

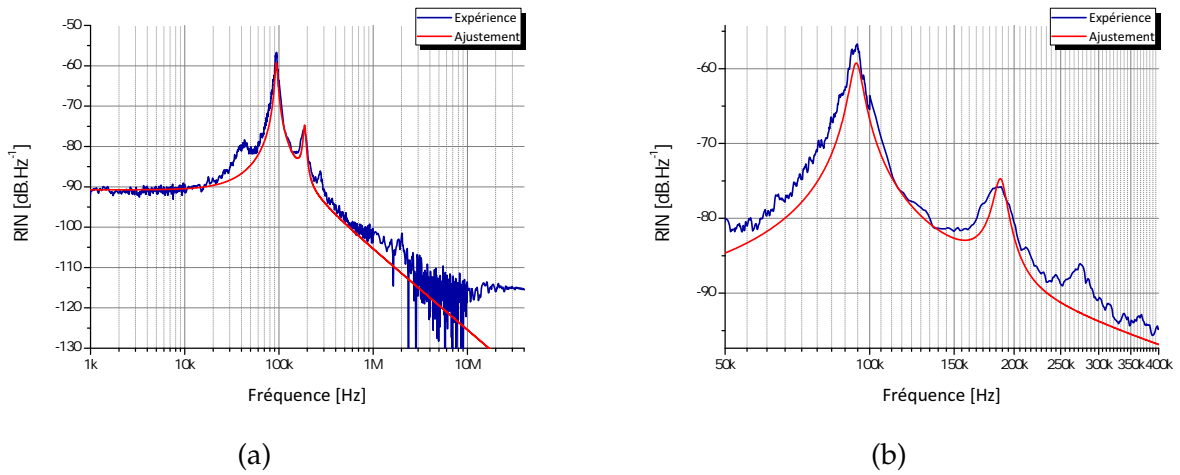


FIGURE 5.17 –  $RIN$  d'un laser WGM couplé par taper, pompage multimode : (a) spectre expérimental et ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation.

Les paramètres d'ajustement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 3.8 \pm 0.1 \\ \tau_p = 100 \pm 10 \text{ ns} \\ \kappa = (2.0 \pm 0.2) \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ D_{NN} = (2.5 \pm 0.8) \times 10^{17} \text{ s}^{-2} \\ D_{FF} = (8.5 \pm 1.7) \times 10^{14} \text{ s}^{-2} \end{array} \right.$$

La valeur de  $D_{NN}$  obtenue est plus importante qu'en utilisant un pompage monomode. Cela provient de l'influence des autres WGM de pompe qui ne participent pas à l'émission stimulée et amènent du bruit. En revanche, la valeur de  $D_{FF}$  reste très proche de la configuration précédente.

De la même façon que précédemment, on calcule les volumes des différents WGM autour de  $\lambda = 1565.1 \text{ nm}$  pour  $a = 45 \mu\text{m}$ . Comme la longueur d'onde du WGM laser est très proche de celle obtenue avec le pompage monomode, les valeurs de  $\mathcal{V}$  et de  $\kappa$  sont les mêmes que sur le Tableau 5.1. Pour la valeur de  $\kappa$  issue de la simulation numérique du spectre de  $RIN$ , il apparaît que le WGM laser correspond à  $n = 1$ ,  $\ell - |m| = 2$ .

### 5.5.4 Couplage par pointe effilée

Pour coupler la pompe dans le résonateur, nous utilisons également une pointe effilée. Ce type de couplage est bien adapté pour des expériences utilisant un laser WGM et peut être utilisé pour des applications potentielles en opto-hyperfréquences. Le montage expérimental est montré sur la Figure 5.18.

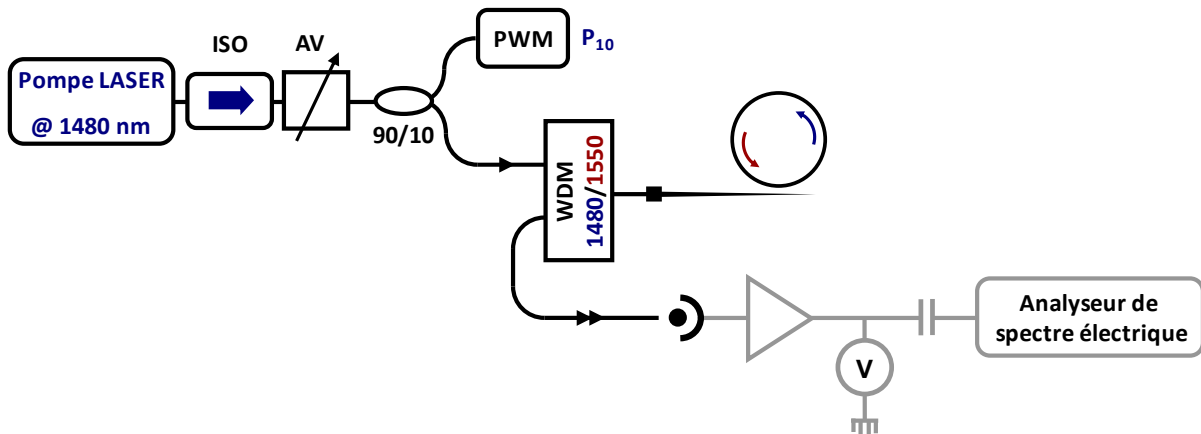


FIGURE 5.18 – Schéma expérimental de l'étude du *RIN* d'un laser WGM, couplage par pointe effilée.

Le montage est le même que précédemment, hormis le fait que la pointe récolte le signal laser contra-propagatif et le démultiplexeur est positionné en amont du système de couplage. Nous n'avons pas obtenu d'effet laser avec un pompage monomode, l'étude réalisée concerne seulement le pompage multimode.

Dans cette configuration, nous avons obtenu un effet laser à  $1563.6 \text{ nm}$  et de puissance intégrée de  $57 \text{ nW}$ . Le spectre expérimental du *RIN* mesuré est présenté sur les Figures 5.19 et 5.20. Dans cette configuration, on remarque :

- Le spectre du *RIN* suit clairement le modèle d'un laser de classe B avec un bruit blanc à basse fréquence ( $-82 \text{ dB} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ), un phénomène de relaxation (à  $163 \text{ kHz}$ ) et une décroissance du bruit en  $1/f^2$  à haute fréquence.
- Les harmoniques de la fréquence de relaxation sont également très marquées ici (jusqu'à la 3<sup>ème</sup> harmonique).
- La remontée du bruit à  $35 \text{ kHz}$  pourrait provenir d'un éventuel WGM proche du seuil.

Nous calculons les volumes des modes des familles considérées précédemment en recherchant numériquement les WGM à partir du diamètre et de la longueur d'onde d'émission. On constate que les familles de modes les plus proches de la situation expérimentale sont les modes  $TM$  avec  $\lambda = 1562.77 \text{ nm}$  et  $\ell = 243$  pour  $n = 1$  et  $\lambda = 1564.51 \text{ nm}$  et  $\ell = 234$  pour  $n = 2$ . Les volumes de modes et les constantes de couplage sont présentées dans le Tableau 5.2.

TABLEAU 5.2 – Calcul numérique des volumes des modes  $\mathcal{V}$  (en  $\mu\text{m}^3$ ) et des constantes de couplage  $\kappa$  (en  $\text{s}^{-1}$ ) pour des modes  $TM$  dans une sphère en ZBLALiP ( $N = 1.49$ ) de rayon  $a = 42.5 \mu\text{m}$  autour de  $\lambda = 1563.6 \text{ nm}$ .

	$\ell -  m  = 0$	$\ell -  m  = 1$	$\ell -  m  = 2$	$\ell -  m  = 3$	$\ell -  m  = 4$	$\ell -  m  = 5$	$\ell -  m  = 6$
$n = 1$	$1762.84 \mu\text{m}^3$ $0.0343 \text{ s}^{-1}$	$2390.90 \mu\text{m}^3$ $0.0253 \text{ s}^{-1}$	$2660.17 \mu\text{m}^3$ $0.0227 \text{ s}^{-1}$	$2824.35 \mu\text{m}^3$ $0.0214 \text{ s}^{-1}$	$2941.86 \mu\text{m}^3$ $0.0205 \text{ s}^{-1}$	$3028.80 \mu\text{m}^3$ $0.0199 \text{ s}^{-1}$	$3094.41 \mu\text{m}^3$ $0.0195 \text{ s}^{-1}$
$n = 2$	$2200.92 \mu\text{m}^3$ $0.0274 \text{ s}^{-1}$	$2982.63 \mu\text{m}^3$ $0.0203 \text{ s}^{-1}$	$3317.15 \mu\text{m}^3$ $0.0182 \text{ s}^{-1}$	$3525.08 \mu\text{m}^3$ $0.0171 \text{ s}^{-1}$	$3668.99 \mu\text{m}^3$ $0.0165 \text{ s}^{-1}$	$3774.61 \mu\text{m}^3$ $0.0160 \text{ s}^{-1}$	$3859.02 \mu\text{m}^3$ $0.0157 \text{ s}^{-1}$

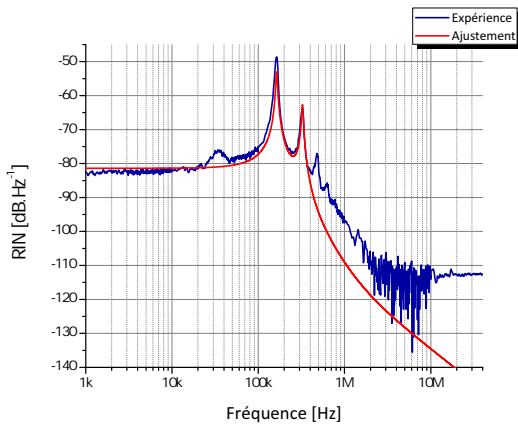
Numériquement, il n'est pas possible d'obtenir des valeurs de  $D_{NN}$  et  $D_{FF}$  pour  $\kappa = 0.0343 \text{ s}^{-1}$ , c'est à dire en considérant le mode le plus confiné  $n = 1, \ell = |m|$  car le couplage de l'ordre 2 est trop important. D'un autre côté, si l'on diminue  $D_{NN}$  ou  $D_{FF}$ , le RIN d'ordre 1 est modifié en fonction et ne correspond plus aux données expérimentales. Par approximations successives, on obtient deux couples de valeurs de  $D_{NN}$  et  $D_{FF}$ , l'un pour  $\kappa = 0.025 \text{ s}^{-1}$ , l'autre pour  $\kappa = 0.020 \text{ s}^{-1}$ . Les résultats des simulations numériques sont présentés sur les Figures 5.19 et 5.20.

Les paramètres des ajustements sont les suivants :

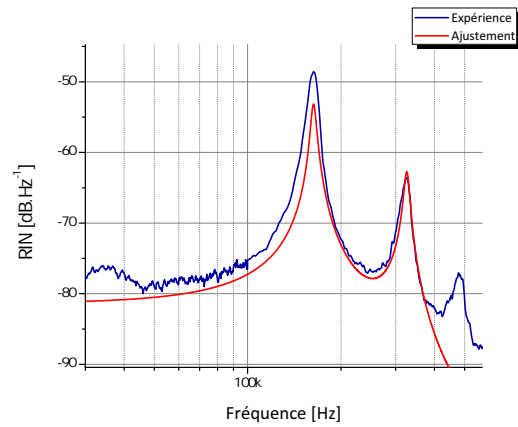
$$\text{Ajustement 1 : } \begin{cases} r = 9.5 \pm 0.1 \\ \tau_P = 40 \pm 4 \text{ ns} \\ \kappa = (2.0 \pm 0.2) \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ D_{NN} = (2.0 \pm 0.6) \times 10^{19} \text{ s}^{-2} \\ D_{FF} = (1.5 \pm 0.3) \times 10^{14} \text{ s}^{-2} \end{cases}$$



$$\text{Ajustement 2 : } \left\{ \begin{array}{l} r = 9.5 \pm 0.1 \\ \tau_P = 40 \pm 4 \text{ ns} \\ \kappa = (2.5 \pm 0.3) \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ D_{NN} = (1.2 \pm 0.4) \times 10^{19} \text{ s}^{-2} \\ D_{FF} = (5.0 \pm 1.0) \times 10^{14} \text{ s}^{-2} \end{array} \right.$$

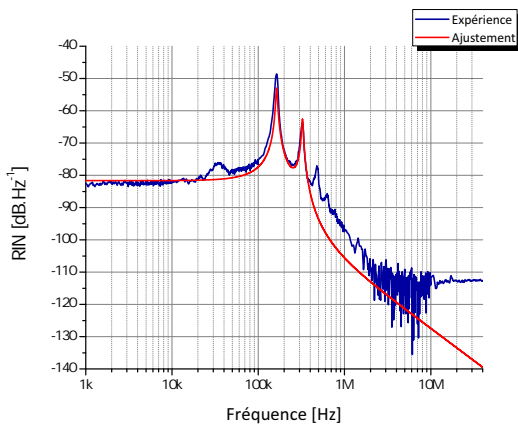


(a)

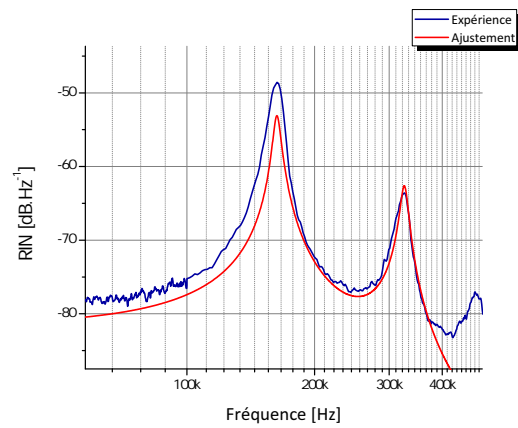


(b)

FIGURE 5.19 – RIN d'un laser WGM couplé par pointe effilée, pompage multimode : (a) spectre expérimental et premier ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation.



(a)



(b)

FIGURE 5.20 – RIN d'un laser WGM couplé par pointe effilée, pompage multimode : (a) spectre expérimental et deuxième ajustement théorique, (b) zoom autour de la fréquence de relaxation.

Sur ces spectres, nous obtenons un écart entre le spectre expérimental et théorique au niveau de la fréquence de relaxation d'environ 4.6 dB. Les valeurs données déduites du modèle théorique sont donc à prendre avec précautions devant cet écart relativement important (65% en linéaire). une méthode d'automatisation des calculs numériques pourrait réduire cet écart. Enfin, l'algorithme de calcul n'est pas optimisé et les calculs sont relativement longs (notamment à cause des produits de convolution).

## 5.6 Conclusion

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous avons mesuré pour la première fois le spectre de *RIN* d'un laser *WGM*. Le comportement inhabituel (et très reproductible) observé du spectre de *RIN* semble caractéristique des micro-résonateurs *WGM* et nous a amené à développer un nouveau modèle analytique pour le *RIN* d'un laser de classe B. Ce modèle, par l'introduction d'un terme non linéaire et basé sur une méthode perturbative, permet un bon ajustement des spectres expérimentaux et fournit des informations sur les termes sources mais également sur le volume de mode considéré. Cette mesure présente donc un double intérêt : quantifier les niveaux de bruit et avoir une estimation de l'identité du *WGM* laser  $|n, \ell, |m|\rangle$ .

Les résultats des mesures de bruit sont résumés dans le Tableau 5.3. Les indices des *WGM* sont obtenus en calculant numériquement les volumes de mode permettant un bon ajustement via le terme  $\kappa$ .

- De manière générale,  $D_{NN}$  semble plus élevé avec un couplage par pointe effilée qu'avec un couplage par taper droit. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où le couplage par pointe effilée n'est pas adiabatique et induit des couplages entre pseudo-modes propres du guide. Ces derniers pourraient amener du bruit supplémentaire sur l'inversion de population par l'intermédiaire du pompage.
- Les termes  $D_{FF}$  sont du même ordre de grandeur quel que soit le système de couplage utilisé. Nous notons toutefois une légère augmentation avec une pompe multimode.
- Les *WGM* obtenus correspondent à des familles de modes présentant un indice radial  $n$  proche de 1 (2 dans le pire des cas) ainsi qu'une valeur de  $\ell - |m|$  relativement faible (entre 0 et 1 pour la majorité des cas), ce qui correspond aux *WGM* les mieux confinés.

TABLEAU 5.3 – Comparaison des termes paramètres dynamiques du laser WGM pour différents systèmes de couplage et pompes.

couplage	pompe	$D_{NN} [s^{-2}]$	$D_{FF} [s^{-2}]$	$r [\emptyset]$	$\tau_P [ns]$	$Q [\emptyset]$	$ n, \ell,  m \rangle_P$
taper	monomode	$1.5 \times 10^{16}$	$3.0 \times 10^{14}$	6.5	47	$5.7 \times 10^7$	$ 1, 258, 257\rangle_{TE}$
	multimode	$2.5 \times 10^{17}$	$8.5 \times 10^{14}$	3.9	100	$1.2 \times 10^8$	$ 1, 258, 256\rangle_{TE}$
pointe effilée	monomode	?	?	?	?	?	?
	multimode (1)	$2.0 \times 10^{19}$	$1.5 \times 10^{14}$	9.5	40	$4.8 \times 10^7$	$ 1, 243, 242\rangle_{TM}$
	multimode (2)	$1.2 \times 10^{19}$	$5.0 \times 10^{14}$	9.5	40	$4.8 \times 10^7$	$ 2, 234, 233\rangle_{TM}$ $ 1, 243, 239\rangle_{TM}$

# Chapitre 6

## Couplage de modes par rétrodiffusion

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>161</b>
<b>6.2</b>	<b>Modèle analytique du couplage par rétrodiffusion dans un laser à trois niveaux</b>	<b>162</b>
6.2.1	Equations d'évolutions	162
6.2.2	Description du milieu atomique	164
6.2.3	Inversion de population	164
6.2.4	Deux systèmes d'équations pour décrire le laser	165
<b>6.3</b>	<b>Modèles simplifiés</b>	<b>167</b>
6.3.1	Absence de rétrodiffusion et de réseau d'inversion de population	168
6.3.2	Effets du réseau d'inversion de population en l'absence de rétrodiffusion	168
6.3.2.1	Suivi adiabatique de l'inversion de population	168
6.3.2.2	Cas réaliste : inertie du milieu à gain	169
6.3.3	Effets de la rétrodiffusion	171
<b>6.4</b>	<b>Régimes de fonctionnement du laser soumis à rétrodiffusion</b>	<b>173</b>
6.4.1	Définition du seuil laser	174
6.4.2	Premier régime stationnaire : monomode unidirectionnel	174
6.4.3	Régime non-stationnaire : automodulation	176
6.4.4	Second régime stationnaire : bidirectionnel	177

<b>6.5</b>	<b>Rétrodiffusion dans un laser WGM en verre oxyde co-dopé Erbium/Ytterbium</b>	<b>178</b>
6.5.1	Résultats préliminaires . . . . .	178
6.5.2	Corrélations entre les signaux co- et contra-propagatifs . . . . .	180
6.5.2.1	Mesures à $G = 10^5 \text{ V.A}^{-1}$ . . . . .	183
6.5.2.2	Mesures à $G = 10^6 \text{ V.A}^{-1}$ . . . . .	186
6.5.2.3	Confrontation Densité spectrale de puissance / intercorrélation . . . . .	186
6.5.2.4	Ordre de grandeur de $\gamma_{\text{lim}}$ . . . . .	188
6.5.2.5	Mesure de la transmission sous le seuil laser . . . . .	190
<b>6.6</b>	<b>Rétrodiffusion dans un laser WGM en verre fluoré dopé Erbium</b>	<b>192</b>
<b>6.7</b>	<b>Conclusion sur l'étude du couplage de mode par rétrodiffusion</b>	<b>196</b>

---

## 6.1 Position du problème

Nous avons vu précédemment que lorsqu'on utilise un sphéroïde pour décrire un micro-résonateur *WGM*, la dépendance en  $|m|$  dans le spectre de résonances s'exprime via l'ellipticité du résonateur utilisé (chap. 2, eq. 2.29). Cependant, chaque mode subit une dégénérescence supplémentaire, dite de *Kramers*, liée à la circulation du *WGM* considéré (sens horaire/anti-horaire, lié au signe de  $m$ ). Celle-ci est levée lorsqu'une partie de l'énergie du mode horaire se couple au mode anti-horaire par rétrodiffusion : le couplage entre les modes horaire  $|n, \ell, m\rangle$  et anti-horaire  $|n, \ell, -m\rangle$  entraîne un dédoublement de la résonance considérée en deux résonances distinctes dont la séparation est proportionnelle à la force de couplage entre ces deux modes [48–50, 83]. Le modèle de deux oscillateurs harmoniques couplés prévoit exactement ce comportement, comme présenté au chapitre 1, et est tout à fait adapté pour la description du problème en régime passif, que ce soit par un diffuseur ponctuel [30] ou par une collection de diffuseurs [36]. L'expression de la force de couplage par rétrodiffusion s'exprime [66, 83] :

$$\gamma = \frac{2\pi c}{\lambda} \sqrt{\frac{\rho_{sc} \bar{\alpha}^2}{\mathcal{V}}} \quad (6.1)$$

où  $\rho_{sc}$  est la densité des diffuseurs dans la cavité,  $\bar{\alpha}$  leur polarisabilité moyenne et  $\mathcal{V}$  le volume du mode  $|n, \ell, m\rangle$  considéré.

L'effet de la rétrodiffusion dans un laser *WGM* dopé terres rares demeure aujourd'hui peu étudié et la dynamique spécifique de ce régime d'émission reste inconnue (citons toutefois les travaux de He *et. al.* [30, 120] où la rétrodiffusion dans un laser *WGM* est mise à profit pour utiliser le micro-laser en tant que capteur ultra-sensible). De nombreuses études relatent la dynamique du laser soumis à un couplage de modes par rétrodiffusion dans des micro-lasers semi-conducteurs [121–127], mais la dynamique du milieu s'éloigne de celle des lasers dopés terres rares et les modèles développés ne peuvent pas être appliqués à nos lasers *WGM*.

Le problème du laser *WGM* soumis à rétrodiffusion envisage l'existence de deux champs électromagnétiques circulant en sens opposés :

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{E}_1(z, t) e^{-j(\omega t - kz)} + \tilde{E}_2(z, t) e^{-j(\omega t + kz)} \right] \mathbf{e} + \text{c.c.} \quad (6.2)$$

où  $z$  est l'abscisse curviligne.  $\tilde{E}_1$  est le mode se propageant dans le sens des  $z$  positifs (mode co-propagatif) tandis que  $\tilde{E}_2$  se propage dans le sens des  $z$  négatifs (mode contra-propagatif). Le laser en anneau à l'état solide semble être un modèle adapté

pour décrire nos lasers *WGM*. Il fut sujet à de nombreuses études depuis les années 80, notamment en ce qui concerne le développement du gyro-laser à l'état solide [93, 128–135], même si la taille de ces lasers n'est absolument pas comparable à celle de nos lasers *WGM*.

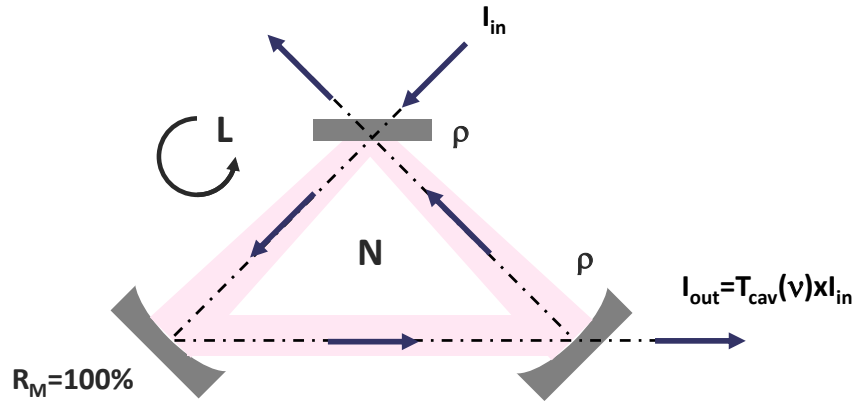


FIGURE 6.1 – Schéma du laser en anneau de longueur de cavité  $L$  et d'indice  $N$ ,  $\rho$  est le coefficient de réflexion en intensité,  $T_{cav}$  est la fonction de transmission de la cavité.

L'idée ici est de réécrire les équations du laser de classe B dopé Erbium en tenant compte du couplage par rétrodiffusion, en s'inspirant très largement des travaux de S. Schwartz [131–133].

## 6.2 Modèle analytique du couplage par rétrodiffusion dans un laser à trois niveaux

### 6.2.1 Equations d'évolutions

Le modèle du gyro-laser en anneau est similaire à celui du laser classique, développé au chapitre 4, en insérant un terme supplémentaire contra-propagatif pour le champ et la polarisation en  $e^{-j(\omega t + kz)}$ . Nous notons  $|u_p\rangle$  le mode propre indexé par  $p = \{1, 2\}$  tel que :

$$\tilde{E}_p e^{-j(\omega t - (-1)^{p+1}kz)} = \tilde{E}_p |u_p\rangle \quad (6.3)$$

où  $p = 1$  correspond au mode co-propagatif et  $p = 2$  au mode contra-propagatif. L'approximation des enveloppes lentement variables appliquée à l'équation d'Helmholtz donne :

$$\sum_{p=1}^2 \left[ \varepsilon \frac{d\tilde{E}_p}{dt} + j\varepsilon(\omega_L - \omega) \tilde{E}_p + \frac{\sigma}{2} \tilde{E}_p + \frac{\omega}{2j} \tilde{P}_p \right] e^{-(-1)^{p+1}kz} = 0 \quad (6.4)$$

Afin d'obtenir une équation de propagation pour chaque mode, nous projetons l'équation 6.4 sur les deux modes propres.

### Projection sur les modes propres longitudinaux

Pour exprimer l'équation d'évolution du mode  $\tilde{E}_1$ , nous multiplions l'équation 6.4 par  $e^{-jkz}$  puis moyennons le long de la cavité [131, 133, 134]. Nous utilisons les relations :

$$\frac{1}{L_{\text{cav}}} \oint_{L_{\text{cav}}} dz = 1 \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{L_{\text{cav}}} \oint_{L_{\text{cav}}} e^{\mp 2jkz} dz = 0 \quad (6.6)$$

ainsi que la notation suivante :

$$\frac{1}{L_{\text{cav}}} \oint_{L_{\text{cav}}} f(z) e^{\mp 2jkz} dz = \langle f \rangle_{\mp} \quad (6.7)$$

Les relations précédentes et l'approximation des enveloppes lentement variables appliquées à l'équation 6.4 amènent à l'équation d'évolution de  $\tilde{E}_1$  :

$$\frac{d\tilde{E}_1}{dt} = -\frac{1}{2\tau_p} \tilde{E}_1 + j\frac{\tilde{\gamma}_1}{2} \tilde{E}_2 + j\frac{\omega_L}{2\varepsilon} \tilde{P}_1 \quad (6.8)$$

avec :

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (6.9)$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{\omega}{2\varepsilon} \left[ \langle \varepsilon \rangle_+ + j\frac{\langle \sigma \rangle_+}{\omega} \right] \quad (6.10)$$

L'équation d'évolution de  $\tilde{E}_2$  est obtenue en procédant de la même façon mais en multipliant par  $e^{+jkz}$ . Il vient :

$$\frac{d\tilde{E}_2}{dt} = -\frac{1}{2\tau_p} \tilde{E}_2 + j\frac{\tilde{\gamma}_2}{2} \tilde{E}_1 + j\frac{\omega_L}{2\varepsilon} \tilde{P}_2 \quad (6.11)$$

où nous avons posé :

$$\tilde{\gamma}_2 = \frac{\omega}{2\varepsilon} \left[ \langle \varepsilon \rangle_- + j\frac{\langle \sigma \rangle_-}{\omega} \right]$$

### Remarques :

Le coefficient complexe  $\tilde{\gamma}_p$  tient compte des inhomogénéités spatiales des éléments constituant la cavité  $(\varepsilon, \sigma)$ . Il est interprété comme le taux de rétrodiffusion d'un mode dans l'autre (en  $s^{-1}$ ). C'est une quantité complexe qui entraîne un déphasage  $\theta_p$  sur



le mode rétrodiffusé. Ce coefficient a une importance capitale dans le fonctionnement du laser solide en anneau et dans la dynamique qui l'accompagne.

Les champs  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  ont, en l'absence de tout élément non réciproque, les mêmes pulsations propres  $\omega_L$  et temps de vie dans la cavité  $\tau_p$ . Par raison de symétrie, il en est de même pour  $\tilde{\gamma}_p$ , même si ces coefficients n'induisent pas le même déphasage  $\theta_p$ .

## 6.2.2 Description du milieu atomique

Les équations d'évolution des cohérences et des populations dans un laser à trois niveaux, développées au chapitre 4 sont également valables ici, sous réserve d'écrire la cohérence de la transition  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  sous la forme :

$$\rho_{10} = \left| \rho_{10}^{(1)} \right| e^{-j(\omega t - kz)} + \left| \rho_{10}^{(2)} \right| e^{-j(\omega t + kz)} \quad (6.12)$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}} &= \frac{1}{L} \oint_{\text{cav}} \mathcal{N} \\ \mathcal{N}_{1,2} &= \frac{1}{L} \oint_{\text{cav}} \mathcal{N} e^{\mp 2jkz} dz \end{aligned}$$

$\bar{\mathcal{N}}$  représente la valeur moyenne de la densité d'inversion de population au niveau de la zone de gain<sup>1</sup> tandis que  $\mathcal{N}_{1,2}$  représente son harmonique à la fréquence spatiale  $\pm 2k$ .

Les polarisations  $\tilde{P}_p$  sont ensuite calculées via la relation 4.14 :

$$\tilde{P}_p = N_{\text{tot}} \mathbf{d}_{01} \rho_{10}^{(p)} \quad (6.13)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \tilde{P}_1 = -j \frac{|d_{10}|^2}{\hbar \gamma_{10}} \left( \frac{1 + j\delta_L}{1 + \delta_L^2} \right) [\tilde{E}_1 \mathcal{N} + \tilde{E}_2 \mathcal{N}_1] \\ \tilde{P}_2 = -j \frac{|d_{10}|^2}{\hbar \gamma_{10}} \left( \frac{1 + j\delta_L}{1 + \delta_L^2} \right) [\tilde{E}_1 \mathcal{N}_2 + \tilde{E}_2 \mathcal{N}] \end{cases} \quad (6.14a)$$

$$\quad (6.14b)$$

## 6.2.3 Inversion de population

L'équation de la densité d'inversion de population en présence des deux modes s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}) - \frac{N c \epsilon_0 \sigma_e}{\hbar \omega_L} \left| \tilde{E}_1 e^{jkz} + \tilde{E}_2 e^{-jkz} \right|^2 \mathcal{N} \quad (6.15)$$

1. Dans notre cas, la longueur de la cavité est égale à la longueur du milieu à gain car la cavité est dopée aux ions Erbium de manière homogène.

Contrairement à un laser unidirectionnel, l'introduction d'un mode contra-propagatif supplémentaire en interaction avec le mode co-propagatif entraîne, dans l'expression de l'évolution de  $\mathcal{N}$ , un terme d'interférences rendant la résolution de l'équation différentielle beaucoup plus compliquée (c'est une dérivée *partielle*  $\partial$  car  $\mathcal{N}$  dépend de  $z$  et de  $t$  à cause du terme d'interférences tandis que l'approximation des enveloppes lentement variables nous a amené à négliger la dépendance en  $z$  de  $\tilde{E}_p$ ). Néanmoins, on peut s'affranchir de cette difficulté en exprimant la densité d'inversion de population  $\mathcal{N}$  comme la somme de sa valeur moyenne  $\bar{\mathcal{N}}$  et de son harmonique spatiale  $\mathcal{N}_{1,2}$  à  $\pm 2k$ . On obtient alors deux équations d'évolution : une pour  $\bar{\mathcal{N}}$  et une pour  $\mathcal{N}_{1,2}$  (la deuxième est obtenue par  $\mathcal{N}_{2,1} = \mathcal{N}_{1,2}^*$ ). De plus, lorsqu'on considère un faible taux de pompage,  $\mathcal{N}$  est proche de sa valeur au seuil et  $|E|^2$  est proportionnel au degré d'excitation  $\eta$ . En développant 6.15 au premier ordre en  $\eta$ , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}) - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \end{array} \right. \quad (6.16a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{N}_{1,2}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{N}_{1,2} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{\tilde{E}_{1,2} \tilde{E}_{2,1}^*}{E_{\text{sat}}^2} \right) \end{array} \right. \quad (6.16b)$$

où  $E_{\text{sat}}^2 = \frac{Nc\epsilon_0\sigma_e\tau}{\hbar\omega_L}$  (introduit au chapitre 4). Le terme d'interférence est responsable de la modulation spatiale du gain et n'intervient que dans l'expression de l'harmonique à  $\pm 2k$  tandis que la valeur moyenne des intensités n'est contenue que dans la valeur moyenne du gain. Ces deux équations décrivent l'évolution de la densité d'inversion de population.

#### 6.2.4 Deux systèmes d'équations pour décrire le laser

Les variables  $\tilde{E}_p$  et  $\tilde{\gamma}_p$  sont des complexes. Pour séparer, dans les équations, les amplitudes des phases, nous développons  $\tilde{E}_j$  et  $\tilde{\gamma}_j$  en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_{1,2} = E_{1,2} e^{-j\varphi_{1,2}} \end{array} \right. \quad (6.17a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_{1,2} = \gamma e^{j(-1)^{2,1}\theta_{1,2}} \end{array} \right. \quad (6.17b)$$

En notant  $\Phi$  la différence de phase entre  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  :

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6.18)$$

le système des équations du laser soumis à un couplage de mode par rétrodiffusion

s'exprime comme :

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{E_1}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \frac{\gamma}{2} E_2 \sin(\Phi + \theta_1) + \frac{c\sigma_e E_2}{NL} \frac{1}{2} \int_{\text{cav}} \mathcal{N} \cos(2kz + \Phi) dz \quad (6.19a)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -\frac{E_2}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) + \frac{\gamma}{2} E_1 \sin(\Phi + \theta_2) + \frac{c\sigma_e E_1}{NL} \frac{1}{2} \int_{\text{cav}} \mathcal{N} \cos(2kz + \Phi) dz \quad (6.19b)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\gamma E_2}{2 E_1} \cos(\Phi + \theta_1) - \frac{c\sigma_e E_2}{2NL} \frac{1}{E_1} \int_{\text{cav}} \mathcal{N} \sin(2kz + \Phi) dz \quad (6.19c)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{\gamma E_1}{2 E_2} \cos(\Phi + \theta_2) + \frac{c\sigma_e E_1}{2NL} \frac{1}{E_2} \int_{\text{cav}} \mathcal{N} \sin(2kz + \Phi) dz \quad (6.19d)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}) - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (6.19e)$$

$$\frac{d\mathcal{N}_{1,2}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{N}_{1,2} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{\tilde{E}_{1,2} \tilde{E}_{2,1}^*}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (6.19f)$$

Remarquons que  $\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}$  se développe en :

$$\mathcal{N}_1 e^{j\Phi} = \underbrace{\frac{1}{L} \int_{\text{cav}} \mathcal{N} \cos(2kz + \Phi) dz}_{\Re[\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}]} + j \times \underbrace{\frac{1}{L} \int_{\text{cav}} \mathcal{N} \sin(2kz + \Phi) dz}_{\Im[\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}]} \quad (6.20)$$

Il en va de même pour  $\mathcal{N}_2 e^{-j\Phi}$ .

Dans certains cas, il est plus judicieux de travailler avec la somme et la différence des carrés des modules des champs, notées respectivement  $Y$  et  $X$  :

$$\begin{aligned} Y &= |\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2 \\ X &= |\tilde{E}_1|^2 - |\tilde{E}_2|^2 \end{aligned}$$

Le système 6.19 devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) - \gamma \sin(\Phi + \theta_2) - 2 \frac{c\sigma_e}{N} \Re(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \right] \\ \frac{dX}{dt} = -X \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) + \gamma \sin(\Phi + \theta_2) \right] \\ \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{c\sigma_e}{N} \Im(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \\ \frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}) - \frac{\mathcal{N}_{Th}}{\tau} \left( \frac{Y}{E_{sat}^2} \right) \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{N}_1 - \frac{\mathcal{N}_{Th}}{2\tau} \left( \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{E_{sat}^2} \right) e^{-j\Phi} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (6.21a) \\ (6.21b) \\ (6.21c) \\ (6.21d) \\ (6.21e) \end{array}$$

Nous disposons de deux systèmes d'équations couplées pour décrire le laser. Le premier système est préférable lorsque l'on étudie le laser en dessous du seuil ainsi qu'en régime unidirectionnel, *i.e.* lorsque l'amplitude d'un des modes est négligeable devant l'autre. Dans les régimes d'émission auto-modulé et bidirectionnel, *i.e.* lorsque les amplitudes sont du même ordre de grandeur, il est préférable de travailler avec la somme et la différence des intensités normalisées.

### 6.3 Modèles simplifiés

Dans cette section, nous prenons des hypothèses de départ très fortes pour visualiser simplement l'effet des phénomènes sur les modes co- et contra-propagatifs. Nous nous intéressons à trois limites distinctes :

- sans rétrodiffusion ni réseau d'inversion de population
- effet du réseau d'inversion de population sans rétrodiffusion
- effet de la rétrodiffusion

### 6.3.1 Absence de rétrodiffusion et de réseau d'inversion de population

Cette configuration appelle les hypothèses suivantes :

$$\tilde{E}_2 = \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \gamma = 0 \quad (6.22)$$

Le système 6.19 devient identique à celui étudié au chapitre 4, qui est le modèle classique d'un fonctionnement monomode unidirectionnel en l'absence de couplage par rétrodiffusion. L'onde se propage dans la cavité selon un seul sens de parcours.

### 6.3.2 Effets du réseau d'inversion de population en l'absence de rétrodiffusion

#### 6.3.2.1 Suivi adiabatique de l'inversion de population

Dans cette section, nous considérons que la densité d'inversion de population suit adiabatiquement les variations des champs  $\tilde{E}_{1,2}$ , ce qui est n'est pas notre cas en pratique (c'est celui d'un laser de classe A) mais donne des résultats qui nous seront utiles par la suite. Sous cette hypothèse, la valeur stationnaire de  $\mathcal{N}$  est, si l'on suppose que le taux de pompage  $r$  est proche de 1 :

$$\mathcal{N}_{\text{stat}} = \frac{\mathcal{N}_0}{1 + \frac{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(2kz + \Phi)}{E_{\text{sat}}^2}} \rightarrow \mathcal{N}_0 \left[ 1 - \left( \frac{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(2kz + \Phi)}{E_{\text{sat}}^2} \right) \right] \quad (6.23)$$

Nous pouvons alors calculer les quantités  $\tilde{\mathcal{N}}$  et  $\mathcal{N}_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_0 \left[ 1 - \left( \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \right] \end{array} \right. \quad (6.24a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_1 = -\mathcal{N}_0 \left( \frac{E_1E_2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \end{array} \right. \quad (6.24b)$$

Les équations d'évolution des amplitudes des champs  $E_p$  se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1^2}{dt} = E_1^2 \left[ \left( \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 - \frac{1}{\tau_p} \right) - \left( \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \right) \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} - 2 \left( \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \right) \frac{E_2^2}{E_{\text{sat}}^2} \right] \end{array} \right. \quad (6.25a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_2^2}{dt} = E_2^2 \left[ \left( \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 - \frac{1}{\tau_p} \right) - 2 \left( \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \right) \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} - \left( \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \right) \frac{E_2^2}{E_{\text{sat}}^2} \right] \end{array} \right. \quad (6.25b)$$

qui deviennent, pour les intensités normalisées  $\mathcal{I}_p = E_p^2 / E_{\text{sat}}^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = \mathcal{I}_1 [\alpha - \beta_1 \mathcal{I}_1 - \beta_2 \mathcal{I}_2] \\ \frac{d\mathcal{I}_2}{dt} = \mathcal{I}_2 [\alpha - \beta_2 \mathcal{I}_1 - \beta_1 \mathcal{I}_2] \end{array} \right. \quad (6.26a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{I}_1}{dt} = \mathcal{I}_1 [\alpha - \beta_1 \mathcal{I}_1 - \beta_2 \mathcal{I}_2] \\ \frac{d\mathcal{I}_2}{dt} = \mathcal{I}_2 [\alpha - \beta_2 \mathcal{I}_1 - \beta_1 \mathcal{I}_2] \end{array} \right. \quad (6.26b)$$

où  $\alpha = \left( \beta_1 - \frac{1}{\tau_p} \right)$ ,  $\beta_1 = \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0$  et  $\beta_2 = 2\beta_1$ .  $\alpha$  est un terme de gain (ou de pertes),  $\beta_1$  un terme d'auto-saturation et  $\beta_2$  un terme de saturation croisée. Ce système d'équations non linéaires couplées adopte deux comportements différents en fonction de la valeur relative de  $\beta_2$  devant  $\beta_1$  [93]. Notons  $\mathcal{C}$  une constante de couplage telle que :

$$\mathcal{C} = \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^2$$

- si  $\mathcal{C} < 1$ , les deux modes coexistent et échangent de l'énergie en dépit du fait qu'ils entrent en compétition et puisent dans le même milieu à gain.
- si  $\mathcal{C} > 1$ , un des deux modes monopolise tout le gain disponible ( $\mathcal{I}_1$ ) au détriment de l'autre ( $\mathcal{I}_2$ ). Dans ce cas,  $\mathcal{I}_2 \ll \mathcal{I}_1$ , la saturation croisée accentue la différence d'intensité entre les deux modes, si bien que  $\mathcal{I}_2$  tend vers 0.

Dans notre cas,  $\beta_2 = 2\beta_1$ , donc  $\mathcal{C} = 4$ . Les modes co- et contra-propagatifs ne peuvent pas exister simultanément. L'un des deux modes s'accapare tout le gain au détriment de l'autre. C'est un effet dû au réseau d'inversion de population. Il a donc pour effet de stabiliser l'émission unidirectionnelle.

### 6.3.2.2 Cas réaliste : inertie du milieu à gain

L'hypothèse du suivi adiabatique des variations du champ par la densité d'inversion de population ne correspond pas à un laser de classe B. En réalité, du fait du temps de vie du niveau excité relativement élevé ( $\simeq 10$  ns), le milieu à gain possède une inertie qui ne lui permet pas de suivre les variations rapides du champ. La densité d'inversion de population n'est donc sensible qu'aux valeurs stationnaires de l'amplitude des champs  $E_{1,\text{st}}$  et  $E_{2,\text{st}}$ .  $\mathcal{N}$  reste donc à sa valeur stationnaire :

$$\mathcal{N}_{\text{stat}} = \frac{\mathcal{N}_0}{1 + \frac{E_{1,\text{st}}^2 + E_{2,\text{st}}^2 + 2E_{1,\text{st}}E_{2,\text{st}} \cos(2kz + \Phi)}{E_{\text{sat}}^2}} = \frac{\mathcal{N}_0}{a + b \cos(2kz + \Phi)} \quad (6.27)$$

où  $a = 1 + \frac{E_{1,\text{st}}^2 + E_{2,\text{st}}^2}{E_{\text{sat}}^2}$  et  $b = \frac{2E_{1,\text{st}}E_{2,\text{st}}}{E_{\text{sat}}^2}$ .

L'effet du réseau de population sur les mode  $\tilde{E}_{1,2}$  est contenu dans l'expression du gain  $g_{1,2}$  :

$$g_{1,2} = \frac{c\sigma_e}{2NL} \left( \oint_{L_{\text{cav}}} \mathcal{N}_{\text{stat}} dz + \frac{E_{2,1}}{E_{1,2}} \oint_{L_{\text{cav}}} \mathcal{N}_{\text{stat}} \cos(2kz + \Phi) dz \right) \quad (6.28)$$

### calcul de $\bar{\mathcal{N}}$ et $\mathcal{N}_1$

A partir des expressions de  $a$  et  $b$ , nous avons nécessairement  $a^2 > b^2$ , et ce quelle que soient les valeurs de  $E_{1,\text{st}}$  et  $E_{2,\text{st}}$  (au dessus ou en dessous du seuil laser)<sup>2</sup>.

On intègre  $z$  sur toute la zone de gain. Dans notre cas, le milieu actif constitue l'intégralité de la cavité, autrement dit on intègre de 0 à  $L_{\text{cav}}$  où  $L_{\text{cav}} = \ell\lambda$ ,  $\ell$  étant le nombre angulaire du WGM. Les fonctions à intégrer sont paires et  $\pi$ -périodiques, ce qui nous permet de nous ramener à une intégration de 0 à  $\pi$  sur la variable  $x$  telle que  $x = 2kz$  :

$$\oint_{L_{\text{cav}}} \frac{\mathcal{N}_0}{a + b \cos(2kz + \Phi)} dz = \frac{2\ell\mathcal{N}_0}{k} \int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} \quad (6.29)$$

$$\oint_{L_{\text{cav}}} \frac{\mathcal{N}_0 \cos(2kz + \Phi)}{a + b \cos(2kz + \Phi)} dz = \frac{2\ell\mathcal{N}_0}{k} \int_0^\pi \frac{\cos x}{a + b \cos x} dx \quad (6.30)$$

Puisque  $a^2 > b^2$ , il vient [136] :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan(x/2)}{a + b} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos x}{a + b \cos x} dx &= \frac{\pi}{b} - \frac{a}{b} \int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} \\ &= -\frac{\pi}{b} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

L'intégration de  $\mathcal{N}$  le long de la cavité permet de remonter au gain net :

$$\frac{1}{L_{\text{cav}}} \oint_{L_{\text{cav}}} \mathcal{N} dz = \frac{\mathcal{N}_0}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \bar{\mathcal{N}} \quad (6.33)$$

La valeur de l'intégrale 6.32 est nécessairement négative puisque  $a^2 > b^2$ , autrement dit :

$$\frac{1}{L_{\text{cav}}} \oint_{L_{\text{cav}}} \mathcal{N} \cos(2kz + \Phi) dz = -\frac{\mathcal{N}_0}{b} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - 1 \right) = \mathcal{N}_1 \quad (6.34)$$

2. Si l'on prend  $E_{1,\text{st}} = E_{2,\text{st}}$ , il vient naturellement  $a^2 = (1 + b)^2$ .

Prenons le cas où un mode est prédominant sur l'autre, par exemple  $E_1$ . Nous pouvons réécrire l'équation 6.28 en faisant intervenir le rapport  $\frac{E_2}{E_1} = \varepsilon \ll 1$  :

$$\begin{cases} g_1 = \frac{c\sigma_e}{2N} \left( \mathcal{N} - |\mathcal{N}_1| \varepsilon \right) & (6.35a) \\ g_2 = \frac{c\sigma_e}{2N} \left( \mathcal{N} - |\mathcal{N}_1| \frac{1}{\varepsilon} \right) & (6.35b) \end{cases}$$

Dans le cas où  $E_1 \gg E_2$ , et en l'absence de rétrodiffusion, le gain  $g_1$  est beaucoup moins impacté par le réseau d'inversion de population que ne l'est  $g_2$ . Le réseau d'inversion de population a tendance à diminuer le gain du mode le moins intense et privilégier le mode prédominant.

### 6.3.3 Effets de la rétrodiffusion

En présence de couplage par rétrodiffusion, les gains  $g_1$  et  $g_2$  s'écrivent (via 6.28) :

$$\begin{cases} g_1 = \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N} - \left( \frac{c\sigma_e}{2N} |\mathcal{N}_1| + \frac{\gamma}{2} \sin(\Phi + \theta_1) \right) \frac{E_2}{E_1} & (6.36a) \\ g_2 = \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N} - \left( \frac{c\sigma_e}{2N} |\mathcal{N}_1| - \frac{\gamma}{2} \sin(\Phi + \theta_1) \right) \frac{E_1}{E_2} & (6.36b) \end{cases}$$

Toujours dans le cas où  $E_1 \gg E_2$ , l'introduction du paramètre  $\gamma$  peut modifier l'impact du réseau d'inversion de population sur le gain de chaque mode. Si la force du couplage par rétrodiffusion  $\gamma$  est suffisamment élevée, le gain  $g_1$ , bien que multiplié par l'infiniment petit  $\frac{E_2}{E_1}$ , s'en retrouvera réduit. D'autre part, on remarque que l'effet de la rétrodiffusion s'oppose au couplage par le gain dans l'expression de  $g_2$  et va augmenter le gain du mode de plus faible amplitude.

Pour aller plus loin, nous poussons le raisonnement au point de négliger l'effet du couplage par le gain devant le couplage par rétrodiffusion. Nous montrons ici l'effet de la rétrodiffusion sur le déphasage entre les modes co- et contra-propagatifs. Si l'on considère que ces modes sont chacun sujets à un effet permettant de lever la dégénérescence en fréquence (effet Sagnac, effet Fresnel-Fizeau, ...), alors les phases absolues subissent une correction  $\pm\Omega/2$ . Nous établissons l'équation du déphasage relatif  $\Phi$  et nous faisons tendre cette correction  $\Omega$  vers 0 pour retomber à notre problème initial. Une hypothèse supplémentaire consiste à considérer que les amplitudes des modes



sont égales. Les équations d'évolution des phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{\Omega}{2} \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{\Omega}{2} \end{cases} \quad (6.37a)$$

$$\quad (6.37b)$$

ce qui donne l'équation d'évolution de  $\Phi$  :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega - \gamma \sin \left| \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| \sin \left( \Phi + \pi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \quad (6.38)$$

qui est connue sous le nom d'équation d'Adler [93, 137] :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega - \omega_{\text{lock}} \sin \Phi \quad (6.39)$$

où nous avons posé  $\omega_{\text{lock}} = \gamma \sin \left| \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|$ .

Les solutions stationnaires sont obtenues pour  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ , ce qui impose à  $\Omega$  l'encadrement suivant :

$$-\omega_{\text{lock}} \leq \Omega \leq \omega_{\text{lock}} \quad (6.40)$$

Lorsque  $\Omega$  est compris dans l'intervalle  $\Delta\omega = 2\omega_{\text{lock}}$ , communément appelée *zone aveugle*, le déphasage entre les modes  $E_1$  et  $E_2$  est constant et vaut :

$$\Phi = - \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi \right) \quad (6.41)$$

Puisque le déphasage  $\Phi$  entre les modes  $E_1$  et  $E_2$  est indépendant du temps, la pulsation instantanée des modes est constante et le laser est verrouillé en fréquence. La Figure 6.2 présente la résolution de l'équation 6.38 pour plusieurs valeurs de  $\delta_\theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ .

L'effet de verrouillage en fréquence dépend fortement de la valeur du déphasage  $\delta_\theta$  du coefficient de rétrodiffusion. En effet, lorsque celle-ci est nulle, l'effet de verrouillage en fréquence est supprimé et le système répond linéairement aux effets non réciproques (contenus dans  $\Omega$ ). Lorsque  $\delta_\theta$  augmente, l'effet de verrouillage est obtenu, la zone aveugle est maximale pour  $\delta_\theta = \pi$  et, dans ce cas, la fréquence de battement évolue en  $\sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ . Aux fortes valeurs de  $\Omega$ , l'effet de  $\gamma$  est négligeable.

Dans notre cas, il n'y a aucun effet justifiant l'introduction de  $\Omega$ , même si l'approche utilisée reste valable. Les modes sont tous les deux à la pulsation  $\omega_L$ . Le couplage par rétrodiffusion entraîne, lorsqu'il est suffisamment fort, un effet de verrouillage automatique car on est certain d'injecter au centre de la zone aveugle.

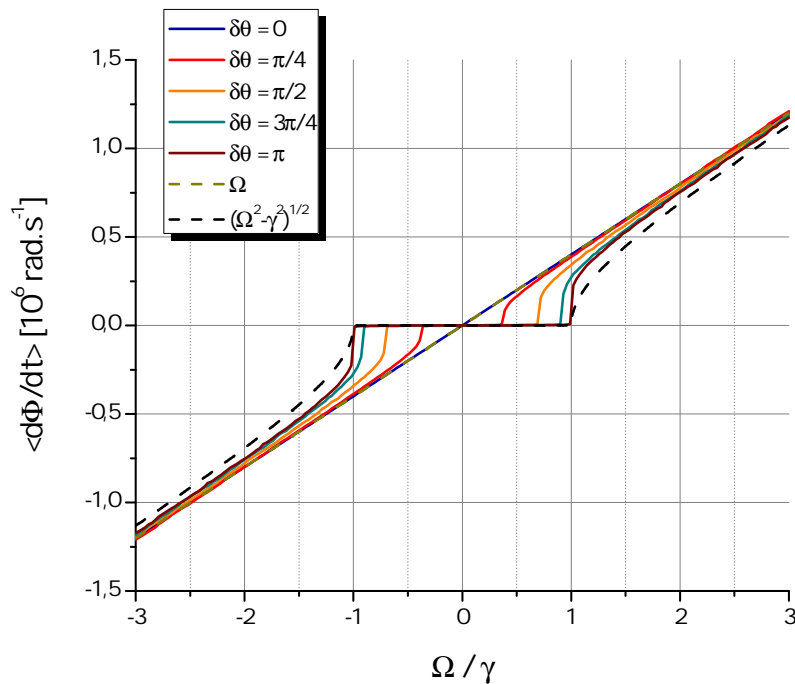


FIGURE 6.2 – Variations de la fréquence de battement en fonction de la pulsation normalisée  $\Omega/\gamma$  pour différentes valeurs du coefficient  $\delta\theta$ .

## 6.4 Régimes de fonctionnement du laser soumis à rétrodiffusion

Le laser solide soumis à rétrodiffusion peut fonctionner sous trois régimes distincts :

- unidirectionnel
- bidirectionnel
- auto-modulé (non stationnaire)

et sont régis par la valeur du coefficient de rétrodiffusion  $\gamma$ . Les solutions des équations du laser dans ces différents régimes de fonctionnement sont détaillés dans l'Annexe A. Nous ne donnons ici que les résultats de l'analyse mathématiques et les commentaires qui en découlent.

### 6.4.1 Définition du seuil laser

La solution stationnaire correspondant à un pompage insuffisant pour dépasser le seuil laser est telle que :

$$\begin{cases} E_1 = 0 & (6.42a) \\ E_2 = 0 & (6.42b) \\ \bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_0 & (6.42c) \\ \mathcal{N}_1 = 0 & (6.42d) \end{cases}$$

Toute l'énergie apportée par le pompage est transférée au gain mais celui ci n'est pas suffisant pour compenser les pertes  $\tau_p^{-1}$  pour les deux modes  $E_1$  et  $E_2$ . Un tel régime de fonctionnement n'est stable qu'à partir du moment où le gain non saturé est inférieur aux pertes :

$$\frac{c\sigma_e}{N}\mathcal{N}_0 < \frac{1}{\tau_p} - \gamma |\sin(\delta_\theta)| \quad (6.43)$$

Le seuil laser est défini, en présence de rétrodiffusion, par :

$$\frac{c\sigma_e}{N}\mathcal{N}_{\text{Th}} = \frac{1}{\tau_p} - \gamma |\sin(\delta_\theta)| = \frac{1}{\tau_p'} \quad (6.44)$$

Du fait de la rétrodiffusion, l'énergie est redistribuée dans la cavité, ce qui a pour effet d'abaisser le seuil laser. Cet effet est fortement dépendant du déphasage  $\delta_\theta$ , tout comme pour le verrouillage en fréquence (Figure 6.2), maximal pour  $\delta_\theta = \pi$ , et nul pour  $\delta_\theta = 0$

### 6.4.2 Premier régime stationnaire : monomode unidirectionnel

Dans ce régime, un mode prédomine sur l'autre puisque le coefficient de rétrodiffusion  $\gamma$  n'est pas assez élevé pour s'opposer à l'effet du réseau d'inversion de population. Nous choisissons arbitrairement que le mode  $E_1$  l'emporte sur  $E_2$ . Sous ces hypothèses, la solution du système d'équations du laser est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{E_2}{E_1} = \frac{\gamma\tau_p'}{\eta - 1} & (6.45a) \\ \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} = \eta - 1 & (6.45b) \\ \sin(\Phi + \theta_2) = 1 & (6.45c) \\ \bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_{\text{Th}} & (6.45d) \\ \mathcal{N}_1 = -\mathcal{N}_{\text{Th}}\gamma\tau_p' e^{-j\Phi} & (6.45e) \end{cases}$$

Le taux d'extinction d'un mode sur l'autre est donné par  $\frac{\gamma\tau'_p}{\eta-1}$  qui est très inférieur à 1 dans notre cas. Ce constat va de paire avec le fait que nous avons considéré un faible taux de rétrodiffusion  $\gamma$ . Dans ce régime, la somme des intensités normalisées  $Y$  vaut :

$$\frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} = \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_{\text{sat}}^2} = (\eta - 1) \left[ 1 + \left( \frac{\gamma\tau'_p}{\eta - 1} \right)^2 \right] \simeq \eta - 1 \quad (6.46)$$

Tout le gain disponible  $\eta - 1$  est utilisé malgré la présence du réseau d'inversion de population, représenté par  $\mathcal{N}_1$ . On note toutefois que  $\frac{c\sigma_e}{N}\mathcal{N}_1 = -\gamma e^{-j\Phi}$ , qui est, par définition, faible mais néanmoins présent. Dans ce régime d'émission, le réseau d'inversion de population atténue un mode au profit du mode dominant qui récupère tout le gain mis à disposition (mais comme  $\gamma \neq 0$ , le mode  $E_2$  reste présent).

L'étude de la stabilité des solutions obtenues montre que les racines du polynôme caractéristique sont imaginaires pures et telles que :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \pm j\omega_{\text{sp}} & (6.47a) \\ \lambda_2 = \pm j\frac{\omega_{\text{sp}}}{\sqrt{2}} & (6.47b) \end{cases}$$

où  $\omega_{\text{sp}}$  est la pulsation de relaxation du laser de classe B (cf chapitre 5, 5.49). Si une petite perturbation extérieure (*i.e.* du bruit) déstabilise le laser, le retour à l'équilibre s'effectue, dans le cas d'un laser de classe B, avec une fréquence caractéristique du régime transitoire oscillant  $\omega_{\text{sp}}/2\pi$ . Dans le cas du régime d'émission monomode unidirectionnel où le taux de rétrodiffusion est faible, il existe non pas une unique fréquence caractéristique du retour à l'équilibre mais deux. La signature de ce régime d'émission est donc présente dans le spectre de bruit d'intensité du laser.

L'étude de la stabilité des racines du polynôme caractéristique montre que ce régime n'est stable que lorsque le taux de rétrodiffusion  $\gamma$  satisfait la relation :

$$\gamma < \sqrt{\frac{\eta - 1}{4\tau\tau'_p}} = \frac{\omega_{\text{sp}}}{2} \quad (6.48)$$

Dès que  $\gamma$  devient supérieur à cette valeur limite, on ne peut plus considérer le régime d'émission monomode unidirectionnel. Dans ce cas, puisque la rétrodiffusion permet au deuxième mode d'exister, d'autres régimes sont à prendre en considération.

Pour finir, notons qu'en l'absence d'effets non-réciproques (aussi infimes soient-ils), rien ne nous permet de statuer sur le sens de l'émission laser. Ceci dépend de paramètres aléatoires tels que la statistique de répartition des pertes au sein de la cavité ou encore le bruit du laser.

### 6.4.3 Régime non-stationnaire : automodulation

Considérons à présent le régime où la condition  $\frac{E_2}{E_1} \ll 1$  n'est pas respectée, soit :

$$\gamma \gg \frac{\eta - 1}{\tau'_p} \quad (6.49)$$

Puisque l'un des modes n'est plus privilégié par rapport à l'autre, on considère la situation où les modes  $E_1$  et  $E_2$  sont potentiellement du même ordre de grandeur.

On montre que l'on peut écrire les intensités normalisées des modes  $E_1$  et  $E_2$  sous la forme :

$$\frac{E_{1,2}^2}{E_{\text{sat}}^2} = \frac{1}{2} \frac{Y_0}{E_{\text{sat}}^2} + \frac{(-1)^{2,1}}{2} \frac{X_0}{E_{\text{sat}}^2} \sin(\gamma t + \varphi) \quad (6.50)$$

où  $Y_0$  et  $X_0$  sont les enveloppes lentement variables de  $Y$  et  $X$  et sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_0}{E_{\text{sat}}^2} = (\eta - 1) - \gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau'_p \\ \frac{\sqrt{Y_0^2 - X_0^2}}{E_{\text{sat}}^2} = 2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau'_p \end{array} \right. \quad (6.51a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_0}{E_{\text{sat}}^2} = (\eta - 1) - \gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau'_p \\ \frac{\sqrt{Y_0^2 - X_0^2}}{E_{\text{sat}}^2} = 2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau'_p \end{array} \right. \quad (6.51b)$$

La fréquence instantanée du laser  $\frac{d\Phi}{dt}$  est telle que :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pm \frac{\gamma X_0 \sqrt{Y_0^2 - X_0^2} \sin(\gamma t + \varphi)}{Y_0^2 - X_0^2 \sin(\gamma t + \varphi)} \quad (6.52)$$

Les intensités des deux modes  $E_1^2$  et  $E_2^2$  battent en opposition de phase à la fréquence des échanges par rétrodiffusion  $\gamma/2\pi$  et n'atteignent jamais de régime stationnaire. C'est un régime intermédiaire où deux effets opposés, le réseau d'inversion de population et la rétrodiffusion, agissent de concert et donnent lieu à des phénomènes de modulation. Il est à noter que le battement n'est pas un effet de compétition de modes mais résulte de la dynamique de ce régime qui entraîne une relation de phase particulière entre ces deux modes.

Le contraste de modulation s'écrit :

$$\begin{aligned} \left| \frac{Y_0}{X_0} \right| &= \sqrt{1 - \left( \frac{2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau_p'}{Y_0/E_{\text{sat}}^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left( \frac{2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau_p'}{\eta - 1 - \gamma |\sin(\delta_\theta)| \tau_p'} \right)^2} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Pour de faibles valeurs de  $\gamma$ , à  $\eta$  fixé, le contraste est proche de 1, le battement est alors très marqué, cela signifie que  $Y_0 = X_0$ , par conséquent, 6.51 entraîne nécessairement que la somme des intensités normalisées vaut  $\eta - 1$ , comme pour le régime d'émission unidirectionnel.

Lorsque  $\gamma$  croît, le contraste diminue de plus en plus jusqu'à atteindre 0. Cette situation correspond à la limite de stabilité du régime d'automodulation. A ce moment,  $\gamma$  prend la valeur :

$$\gamma = \frac{1}{\tau_p |\sin(\delta_\theta)|} \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 2} \right) = \gamma_{\text{lim}} \quad (6.54)$$

Lorsque le contraste de modulation est nul, les champs  $E_1$  et  $E_2$  sont totalement superposés. Un tel régime de fonctionnement est étudié au paragraphe suivant.

#### 6.4.4 Second régime stationnaire : bidirectionnel

Nous cherchons une solution de 6.21 dans la limite où :

$$\frac{|X|}{Y} \ll 1 \quad (6.55)$$

Les solutions stationnaires de ce régime d'émission sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c\sigma_e \mathcal{N}}{N} = \frac{c\sigma_e \mathcal{N}_{\text{Th}}}{N} \left( \frac{\eta + 2}{3} \right) \end{array} \right. \quad (6.56a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c\sigma_e \mathcal{N}_1}{N} = -\frac{c\sigma_e \mathcal{N}_{\text{Th}}}{N} \left( \frac{\eta - 1}{3} \right) \end{array} \right. \quad (6.56b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} = \frac{2(\eta - 1)}{3} \end{array} \right. \quad (6.56c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \end{array} \right. \quad (6.56d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = -\left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi \right) \end{array} \right. \quad (6.56e)$$

Dans ce régime d'émission, l'intensité normalisée  $\frac{Y}{E_{\text{sat}}^2}$  est égale à  $\frac{2(\eta - 1)}{3}$ , tandis qu'elle vaut  $\eta - 1$  en régime d'émission unidirectionnel. Dans cette situation le laser n'utilise pas tout le gain disponible. Cela provient de la non-uniformité de gain

qui fait apparaître des zones où l'amplification laser sera plus efficace que d'autres, ce qui n'est pas le cas dans le régime d'émission unidirectionnel où, puisque  $\gamma$  est assez faible, le gain est saturé uniformément. Comme mentionné précédemment, la rétrodiffusion stabilise l'émission bidirectionnelle et entraîne une différence d'intensité normalisée  $X$  nulle. Ceci n'est vrai qu'en l'absence d'éléments non-réciproques. Le déphasage entre les modes est constant et dépend essentiellement de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On parle de verrouillage en fréquence des deux modes. Ce régime apparaît dès que  $\gamma$  dépasse la valeur seuil  $\frac{1}{\tau_p |\sin(\delta_\theta)|} \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 2} \right)$ , soit :

$$\gamma |\sin(\delta_\theta)| > \frac{1}{\tau_p} \left( \frac{\mathcal{N}'_1}{\bar{\mathcal{N}}} \right) \quad (6.57)$$

Il apparaît donc dans l'inégalité 6.57 que ce régime d'émission est caractérisé par un effet dû à la rétrodiffusion prédominant devant l'effet dû au réseau d'inversion de population. On constate effectivement l'effet stabilisateur de la rétrodiffusion sur l'émission bidirectionnelle.

## 6.5 Rétrodiffusion dans un laser WGM en verre oxyde co-dopé Erbium/Ytterbium

### 6.5.1 Résultats préliminaires

L'effet laser a été étudié expérimentalement dans un verre oxyde co-dopé aux ions Erbium/Ytterbium. C'est un verre commercial (de la marque Schott) réputé pour fournir un gain relativement élevé. Il apparaît donc comme un bon candidat pour les applications potentielles.

Nous avons entrepris l'analyse spectrale du *RIN* d'un laser WGM dans une microsphère de 105  $\mu\text{m}$  de diamètre en verre IOG-1. La Figure 6.3 est un résultat typique de mesure de *DSP* des fluctuations du photocourant du signal Laser détecté. La puissance intégrée est estimée à 7.1 *nW*.

Ce spectre est constitué de deux zones distinctes : une première, notée I, de 100 *Hz* à 400 *kHz* et une seconde, notée II, de 400 *Hz* à 40 *MHz*.

Dans la zone I, on observe un comportement type d'une *DSP* d'un laser de classe B : un bruit blanc de 100 *Hz* à 10 *kHz*, un effet de résonance autour de 50 *kHz*, puis une décroissance en  $f^{-2}$ . Le bruit de grenaille est estimé à -139.5 *dBm.Hz*<sup>-1</sup>. Le laser est

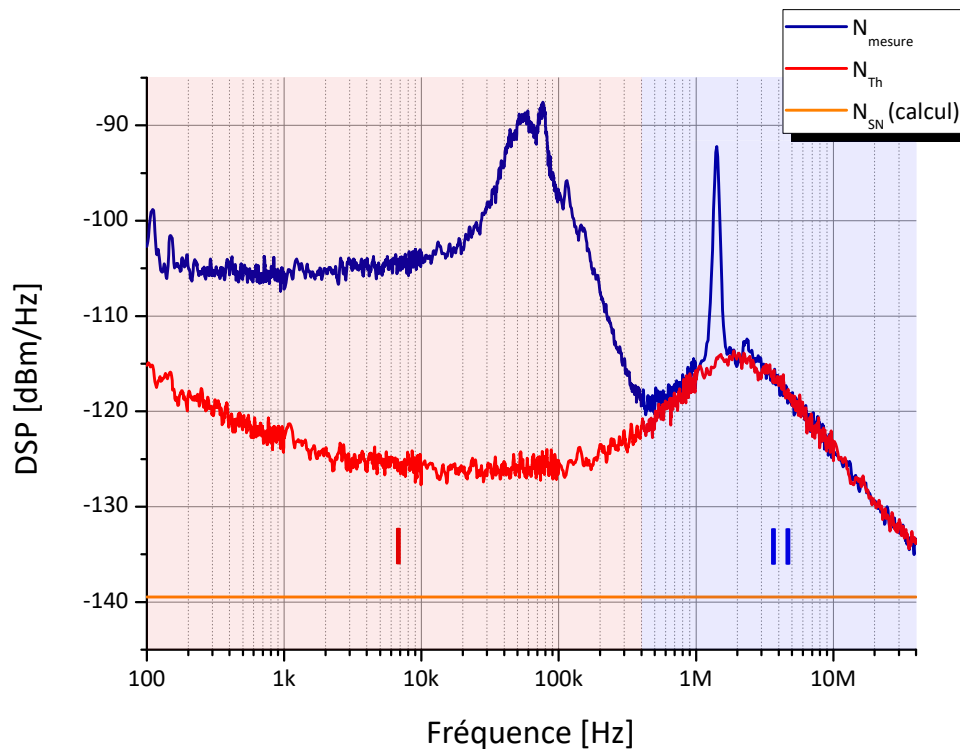


FIGURE 6.3 – *DSP* des fluctuations du photocourant issu de la photodétection d'un Laser *WGM* en verre IOG-1, sphère de diamètre  $2a = 105 \mu\text{m}$ . La puissance Laser mesurée au photodétecteur est de  $7.1 \text{ nW}$ .

plutôt multimode car l'effet de résonance, autour de  $50 \text{ kHz}$ , est constitué de deux pics de relaxation (et leurs harmoniques, comme développé au chapitre 5). Signalons ici que la puissance mesurée est tout de même relativement faible et le laser est déjà multimode. Avec ce type de verre, nous travaillerons préférentiellement à faible taux de pompage.

En plus du comportement attendu de la *DSP* du laser *WGM*, nous constatons la présence d'un pic fortement marqué autour de  $1.5 \text{ MHz}$  dans la zone II. Il s'est avéré que ce pic est peu sensible à la puissance de pompe mais très sensible au taux de couplage  $\tau_e$  (comme le prévoit l'équation 1.37) ainsi qu'à la polarisation de la pompe. Cette fréquence particulière présente dans le spectre de *RIN* pourrait être la signature d'un battement possible. Ce battement peut être dû :

- à un fonctionnement bimode du laser à deux longueurs d'ondes indépendantes
- à un couplage par rétrodiffusion

La fréquence du battement observé, mesuré entre  $1$  et  $30 \text{ MHz}$ , est de l'ordre de la levée de dégénérescence due au couplage par rétrodiffusion dans des micro-sphères



passives en silice [47, 50], levée de dégénérescence qui dépend, elle aussi, du taux de couplage  $\tau_e$ . Cela nous amène à penser que ce battement serait plutôt dû à un couplage par rétrodiffusion.

Si l'hypothèse d'un couplage par rétrodiffusion entre deux *WGM* lasers co- et contra-propagatifs est avérée, alors le laser peut potentiellement fonctionner dans les trois régimes présentés en section 6.4. Cependant, on constate sur la Figure 6.3 que la fréquence particulière observée est bien supérieure à la fréquence de relaxation du laser. La limite de stabilité du régime unidirectionnel est dépassée (équation 6.48), ce qui suppose que le laser fonctionne :

- soit en régime d'auto-modulation
- soit en régime bidirectionnel

Ces deux régimes se distinguent par le fait que, dans le régime d'auto-modulation, les intensités des modes co- et contra-propagatifs sont modulés à la fréquence d'échanges par rétrodiffusion  $\gamma/2\pi$  et sont en opposition de phase. A l'inverse, lorsque le laser fonctionne en régime bidirectionnel, le contraste de modulation est tellement réduit que les intensités des modes sont totalement superposées et les anti-corrélations supprimées. Si maintenant l'hypothèse d'un couplage par rétrodiffusion n'est pas vérifiée, les deux modes ne présentent aucune corrélation.

Quoiqu'il en soit, une mesure de corrélation entre les signaux co- et contra-propagatifs nous permettrait de déterminer le régime de fonctionnement du laser ainsi que l'origine du battement observé. Nous avons donc développé un banc de mesure de corrélations entre les signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser *WGM*, présenté sur la Figure 6.4. La comparaison des traces temporelles des signaux co- et contra-propagatifs ainsi que de leur spectre de *RIN* permet de statuer sur l'origine de ce battement : des (anti)corrélations très marquées seront synonyme d'un couplage par rétrodiffusion tandis qu'une absence de corrélation signifierait un fonctionnement bi-mode longitudinal. On notera toutefois que la valeur de la *DSP* du photocourant à 1.5 MHz est tout de même inférieure à sa valeur au niveau de la résonance de relaxation (bruit intrinsèque du laser).

### 6.5.2 Corrélations entre les signaux co- et contra-propagatifs

Le laser de pompe est une diode laser multimode émettant autour de 1480 nm et excitant une micro-sphère de 105  $\mu\text{m}$  de diamètre en verre IOG-1 via un taper. Les

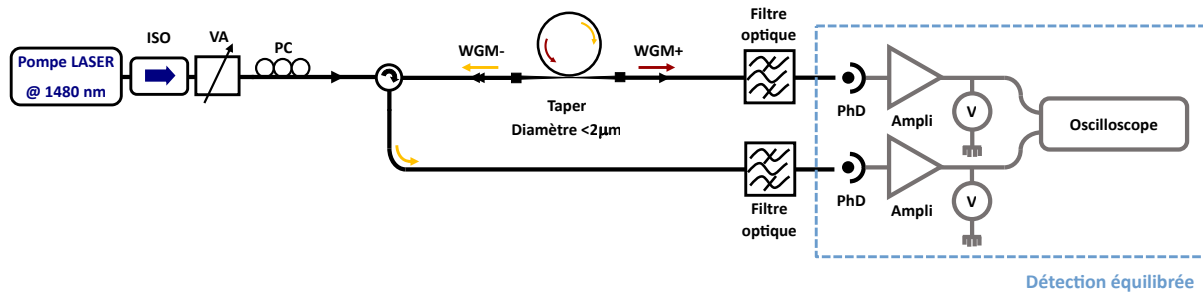


FIGURE 6.4 – Montage expérimental pour l'étude des corrélations entre les signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser WGM.

signaux co- et contra-propagatifs, respectivement  $WGM+$  et  $WGM-$  (cf Figure 6.4), sont récupérés par cette même ligne d'accès (un circulateur permet de rediriger le signal  $WGM-$  vers le dispositif d'analyse). Les deux signaux sont ensuite filtrés, puis photodétectés. On s'assure d'avoir deux systèmes de traitement du signal électrique rigoureusement identiques, c'est pourquoi on utilise les mêmes photodétecteurs ainsi que les mêmes amplificateurs transimpédance. Les tensions électriques, respectivement  $V_1$  et  $V_2$ , sont ensuite observés à l'oscilloscope et leur trace temporelle est numérisée.

Le filtre optique accordable permet de conserver seulement le mode sur lequel le battement a lieu. Une fois l'ensemble réglé sur le mode co-propagatif, on règle le deuxième filtre sur la même longueur d'onde pour le mode contra-propagatif. La Figure 6.5 est une mesure à l'OSA des spectres optiques de  $WGM+$  et  $WGM-$ . Le filtre optique est centré autour de  $1564 \text{ nm}$ , longueur d'onde commune aux deux spectres mesurés.

Une fois que l'ensemble des filtres est réglé, on procède à une mesure de  $RIN$  des signaux. La Figure 6.6 donne le spectre de  $RIN$  des deux signaux  $WGM+$  et  $WGM-$  photodétectés et amplifiés.

Les spectres de  $RIN$  sont totalement superposés, ce qui signifie que les modes Lasers analysés ont les mêmes propriétés de bruit et les mêmes propriétés dynamiques : mêmes taux de pompage, temps de stockage des photons, facteur de qualité et volume de mode. Ce sont donc deux modes  $|n, \ell, \pm|m\rangle$ , ce qui nous amène à penser que c'est un couplage par rétrodiffusion qui s'opère ici.

Nous souhaitons connaître les phases relatives des signaux co- et contra-propagatifs, modulées à la fréquence d'échanges par rétrodiffusion (autour de  $10 \text{ MHz}$  ici). C'est

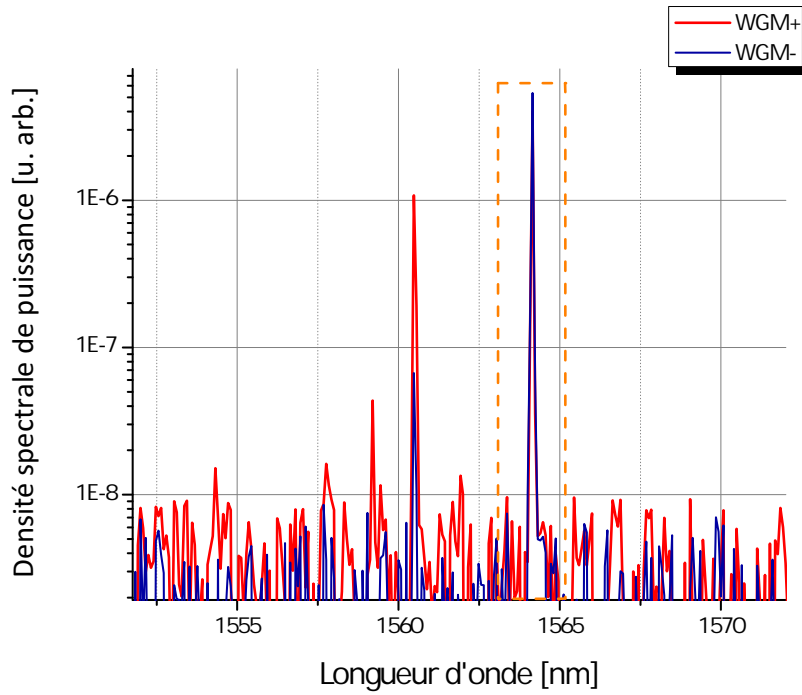


FIGURE 6.5 – Spectres optiques des signaux  $WGM+$  et  $WGM-$  mesurés à l'OSA.

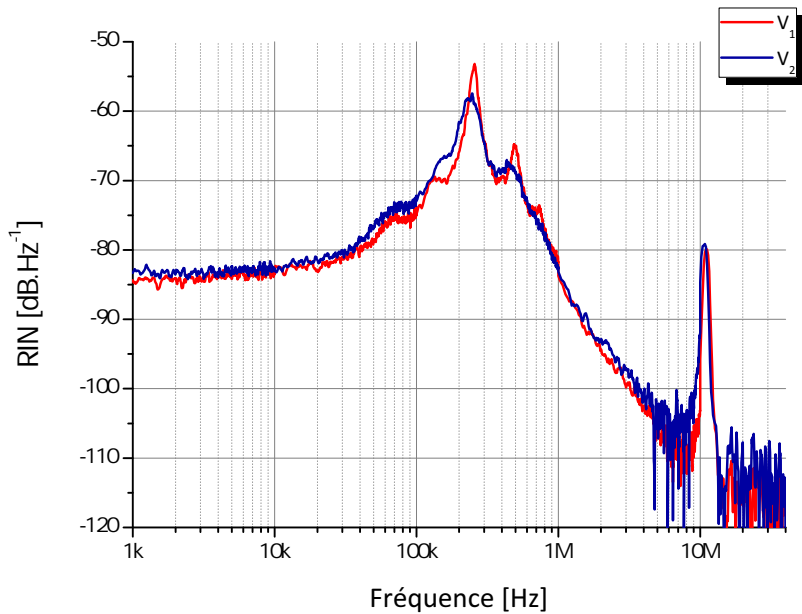


FIGURE 6.6 – Spectre de  $RIN$  des signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser  $WGM$  en IOG-1.

autour de cette fréquence que l'information est contenue. Néanmoins, les spectres de *RIN* des signaux obtenus montrent que la puissance relative de la fréquence d'intérêt est inférieure à celle du bruit intrinsèque du laser *WGM* d'environ 27 dB. Pour résoudre cette limitation, nous pourvoyons chaque bras du système de détection d'un filtre électrique passe-haut (PH) dont la fréquence de coupure est de 1 MHz. L'oscilloscope utilisé est un WaveMaster8500 LeCroy de 5 GHz de bande passante. Nous prenons plusieurs mesures en modifiant la fenêtre d'observation (donc la bande passante). Une fois que les acquisitions enregistrées, les données sont normalisées de la façon suivante :

$$z : V \rightarrow \frac{V - \langle V \rangle}{\sigma_V} \quad (6.58)$$

où  $\langle V \rangle$  est la moyenne de  $V$  et  $\sigma_V$  son écart-type. On note  $x = z(V_1)$  et  $y = z(V_2)$ . En procédant ainsi, les corrélations sont davantage mises en avant. Nous calculons ensuite numériquement la fonction d'intercorrélation  $\Gamma_{xy}(\tau)$  :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t)y(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau) dt \quad (6.59)$$

La fonction de corrélation mutuelle normalisée  $\Theta_{xy}$  est calculée en posant :

$$\Theta_{xy}(\tau) = \frac{\Gamma_{xy}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{xx}(0)\Gamma_{yy}(0)}} \quad (6.60)$$

### 6.5.2.1 Mesures à $G = 10^5 \text{ V.A}^{-1}$

La Figure 6.7 est un exemple de trace temporelle des tensions réduites  $x$  et  $y$  prises sur un intervalle de 10  $\mu\text{s}$ . La fonction d'intercorrélation normalisée est présentée sur la Figure 6.8.

Nous constatons que  $\Theta_{xy}$  présente une anticorrélation très prononcée ainsi que des oscillations amorties ( $f_1$ ) et surmodulées ( $f_2$ ). Les fréquences de telles oscillations sont telles que :

$$\begin{aligned} f_1 &\simeq 703 \text{ kHz} \\ f_2 &= 12 \text{ MHz} \end{aligned}$$

La surmodulation à 12 MHz correspond à la fréquence de battement présente dans le spectre de *RIN* des signaux observés. La fréquence de 703 kHz correspond à un résidu du bruit intrinsèque du Laser non filtré par le filtre passe-haut. En effet, le tiers de la fréquence mesurée correspond à la fréquence de relaxation des *WGM*  $|n, \ell, \pm |m\rangle$

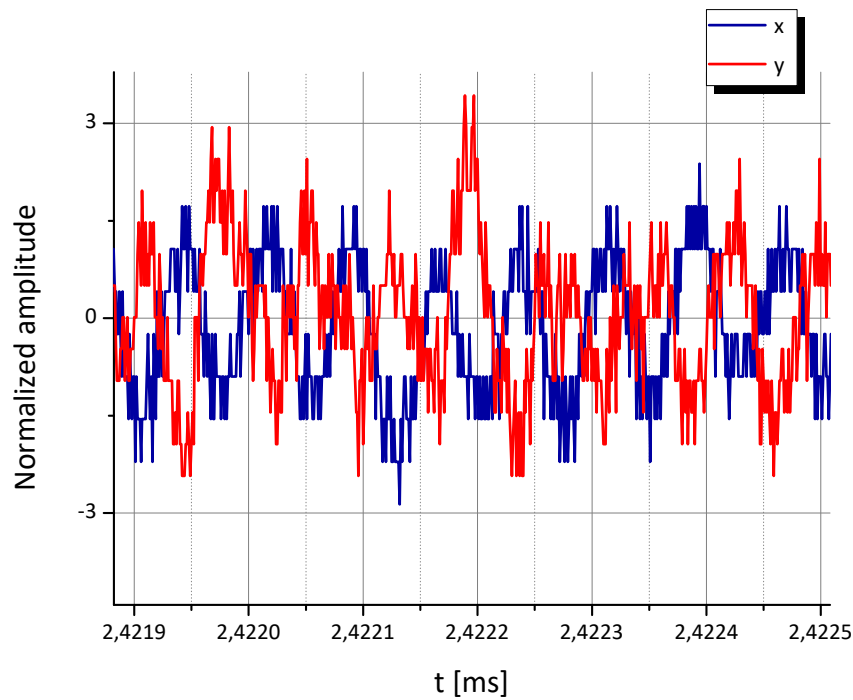


FIGURE 6.7 – Traces temporelles des tensions réduites  $x$  et  $y$  dans un micro-résonateur en IOG-1,  $G = 10^5 \text{ V.A}^{-1}$ .

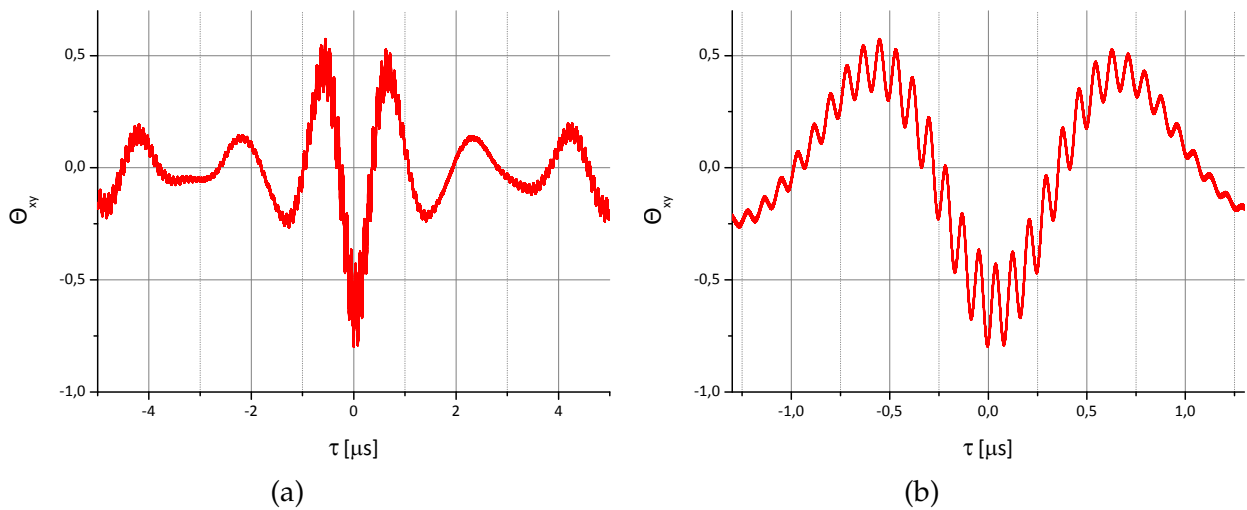


FIGURE 6.8 – (a) Fonction d'intercorrélation normalisée  $\Theta_{xy}$  des signaux photodétectés réduits,  $G = 10^5 \text{ V.A}^{-1}$ , (b) zoom autour de  $\tau = 0$ .

(environ  $257 \text{ kHz}$  sur le spectre de  $RIN$ , Figure 6.6). Pour s'en assurer, nous mesurons la  $DSP$  des signaux électriques avec un DC Block et avec le filtre PH. La Figure 6.9 montre les résultats obtenus pour les modes co- et contra-propagatifs.

Malgré la présence du filtre PH, le résidu de bruit intrinsèque du laser est tout de

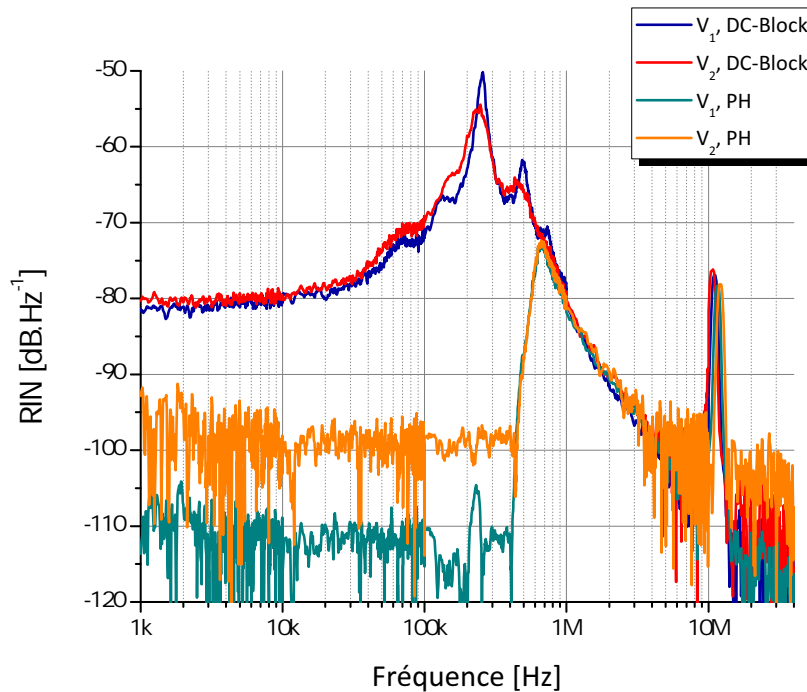


FIGURE 6.9 – Effet du filtre électrique utilisé sur le *RIN* des signaux électriques analysés.

même plus intense que la portion du signal à 12 *MHz* d'environ 5 *dB*, comme le montre la Figure 6.9. Cependant, on constate que la présence du bruit intrinsèque du laser n'est pas limitante dans l'observation des anticorrélations de  $\Theta_{xy}$  : l'anticorrélation constatée est présente sur le résidu de bruit du laser. La corrélation est présente quelle que soit la fréquence d'analyse considérée. Ainsi, toute information sur la corrélation est également contenue dans le bruit d'intensité du laser, ce qui nous permet de nous affranchir de l'étape de filtrage électrique et d'observer l'effet escompté sans augmenter les pertes, déjà élevées.

Notre interprétation des observations sur les anticorrélations entre les modes co- et contra-propagatifs est la suivante. Le phénomène de relaxation du laser de classe B est un effet dû au couplage entre les photons et le milieu amplificateur. Si, pour une raison ou une autre, le flux de photons considéré est modulé, alors le couplage est tel que cette modulation se retrouvera sur le gain et l'information sera retranscrite sur le phénomène de relaxation. Après réflexion, il n'est pas surprenant de retrouver l'information sur la corrélation par l'intermédiaire de la fréquence de relaxation. Le battement à 12 *MHz* n'est pas dû au couplage par le gain mais ce dernier permet d'en visualiser l'effet. Toutefois, les mesures de corrélations n'ont été réalisées que

sur un intervalle de temps restreint, c'est à dire pour une certaine plage de fréquence. En basses et hautes fréquences, rien ne nous assure que les corrélations sur les bruits des modes co- et contra-propagatifs proviennent également d'un couplage par rétrodiffusion ou d'un comportement particulier du laser. Des mesures complémentaires sont à réaliser sur des durées d'observations différentes pour connaître les différentes origines des corrélations observées.

### 6.5.2.2 Mesures à $G = 10^6 \text{ V.A}^{-1}$

Les amplificateurs transimpédance sont maintenant réglés sur un gain de  $10^6 \text{ V.A}^{-1}$ . L'augmentation du gain réduit la bande passante, passant à  $1.8 \text{ MHz}$ , et ne permet plus d'observer la fréquence de modulation. On montre ici (expérimentalement) que les anticorrélations peuvent être observées malgré l'absence de signe distinctif dans le spectre de  $RIN$ . Nous avons procédé aux mêmes mesures et avons obtenu la fonction d'intercorrélation normalisée  $\Theta_{xy}$  présentée sur la Figure 6.10.

Comme attendu, la surmodulation à haute fréquence n'apparaît pas sur  $\Theta_{xy}$ , néanmoins l'anticorrélation est toujours fortement marquée en raison des arguments cités précédemment. Ainsi, même si la signature du couplage par rétrodiffusion n'est pas visible dans le spectre de  $RIN$  (bande passante trop réduite), on peut tout de même en visualiser l'effet sur le bruit intrinsèque du Laser. Ceci va nous permettre d'effectuer les mêmes mesures dans un Laser  $WGM$  en  $ZBLALiP$  où nous n'avons pas obtenu de signature de couplage de mode dans le spectre de  $RIN$ .

### 6.5.2.3 Confrontation Densité spectrale de puissance / intercorrélation

L'allure du  $RIN$  mesuré s'apparente à une Lorentzienne centrée en  $f_{sp}$  (Fig. 6.9). Dans le domaine temporel, la fonction d'autocorrélation est sa Transformée de Fourier inverse, qui est une fonction oscillante à  $f_{sp}$  amortie et dont la constante d'amortissement est égale à la largeur à mi-hauteur de la Lorentzienne. On peut alors calculer ce taux d'amortissement :

- par mesure directe sur le spectre de  $RIN$
- par ajustement (arbitraire) de la fonction  $\Theta_{xy}$  :

$$\Theta_{xy}(\tau) = \Theta_{xy}(0) \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tilde{\tau}_c}\right) \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (6.61)$$

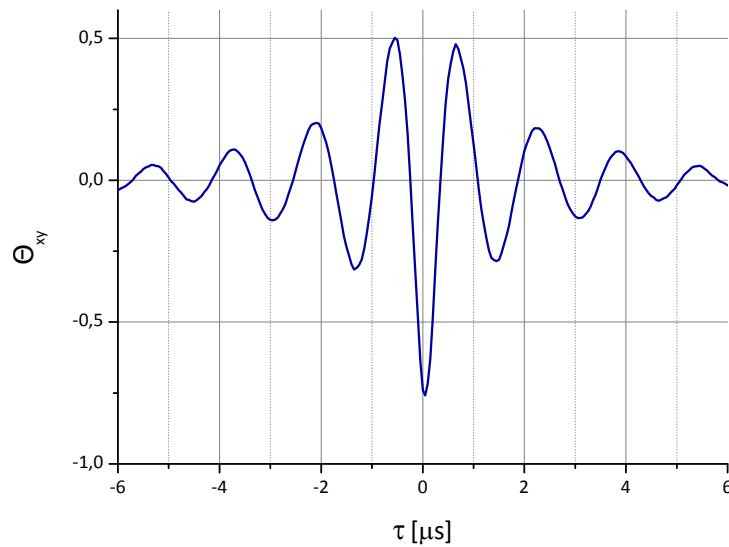


FIGURE 6.10 – Fonction d’intercorrélacion des signaux photodéteetés normalisés,  $G = 10^6 \text{ V.A}^{-1}$ .

Ces deux mesures sont complémentaires, la même quantité est évaluée mais dans deux domaines différents. L’ajustement donne les résultats présentés sur la Figure 6.11 pour  $\tilde{\tau}_c = 1.8 \mu\text{s}$  et  $f_0 = 660 \text{ kHz}$ .

Il est à noter que la fonction utilisée pour l’ajustement ne prend pas en compte le bruit de fréquence de la résonance de relaxation alors que les mesures dans le domaine temporel intègrent ce bruit supplémentaire (bruit de pompe, bruit de couplage, ...). De plus, les mesures effectuées dans le domaine temporel ont été filtrées électriquement, de façon à n’obtenir que le bruit à haute-fréquence, comme obtenu sur la Figure 6.9. L’ajustement ne concerne que le **résidu du bruit intrinsèque du laser**, qui n’est pas réellement Lorentzien. Le  $\tilde{\tau}_c$  obtenu n’est donc qu’une estimation de la largeur de la troisième harmonique du pic de relaxation.

La mesure directe de la largeur du résidu de la troisième harmonique donne une largeur  $\Delta f_{3,exp} \simeq 172 \text{ kHz}$ , comme présenté sur la Figure 6.12.

$\Delta f_{3,exp}$  est à comparer avec  $\frac{1}{\pi \tilde{\tau}_c}$ . Au final :

$$\begin{aligned} \Delta f_{3,exp} &\simeq 172.3 \text{ kHz} \\ \frac{1}{\pi \tilde{\tau}_c} &= \frac{1}{\pi \times 1.8 \times 10^{-6}} \simeq 176.8 \text{ kHz} \end{aligned}$$

soit une différence de 2.6 %. L’approximation Lorentzienne du résidu du spectre de *RIN* est donc vérifiée puisque l’erreur commise sur l’amortissement ne dépasse pas



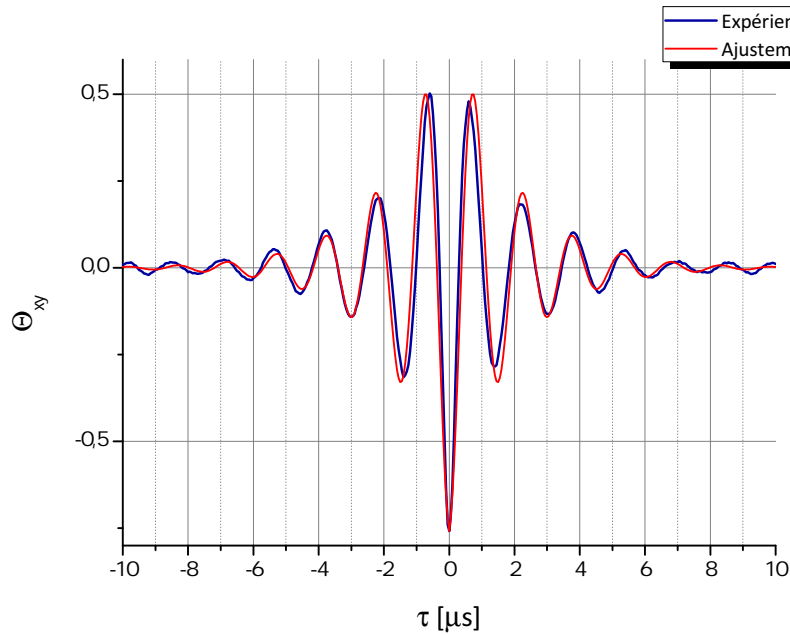


FIGURE 6.11 – Fonction d’intercorrélation des signaux co- et contra-propagatifs normalisés et ajustement théorique :  $\tilde{\tau}_c = 1.8 \mu s$ ,  $f_0 = 660 \text{ kHz}$ .

3%.

La fonction d’intercorrélation  $\Theta_{xy}$  donne deux informations. Elle permet d’avoir les variations jointes des deux modes ainsi que les propriétés de chacun des modes (fréquence de relaxation, amortissement). Les premières mesures réalisées ici ainsi que l’observation effectuée sur l’anticorrélation nous permet de statuer sur le régime d’émission du micro-laser *WGM* en *IOG-1*. L’étude sur les corrélations entre les deux bruits doit cependant être poussée davantage, comme cela a été réalisé par De *et. al.* dans un *VECSEL* de classe A [138].

#### 6.5.2.4 Ordre de grandeur de $\gamma_{\text{lim}}$

La transition entre le régime d’auto-modulation et le régime bidirectionnel a lieu lorsque  $\gamma = \gamma_{\text{lim}}$ . Dans notre cas, il s’écrit comme :

$$\gamma_{\text{lim}} = \frac{1}{\tau_P |\delta_\theta|} \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 2} \right) < \frac{1}{\tau_P |\delta_\theta|} \quad (6.62)$$

Pour un temps de vie des photons  $\tau_P$  estimé à  $50 \text{ ns}$ , il vient :

$$\frac{\gamma_{\text{lim}}}{2\pi} < \frac{3 \text{ MHz}}{\delta_\theta} \quad (6.63)$$

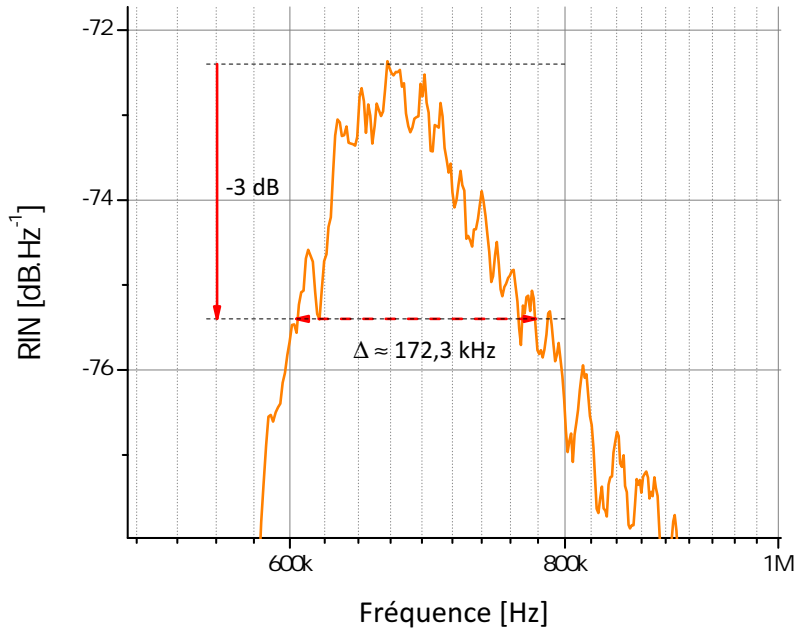


FIGURE 6.12 – Largeur du résidu de bruit non filtré.

Par le spectre de  $RIN$ , nous mesurons  $\frac{\gamma}{2\pi} \simeq 10 \text{ MHz}$ , ce qui veut dire que  $\delta_\theta$  doit nécessairement satisfaire à la relation :

$$\delta_\theta < 0.3 \text{ rad} \simeq \frac{\pi}{10} \quad (6.64)$$

Puisque nous n'avons aucune information sur la valeur de  $\delta_\theta$ , on ne peut pas donner une valeur exacte de  $\gamma_{\text{lim}}$ . Cependant, puisque nous mesurons la valeur de  $\gamma$  via le spectre de  $RIN$  du laser fonctionnant en régime d'automodulation (information apportée par la fonction d'intercorrélacion  $\Theta_{xy}$ ), alors on peut estimer la valeur maximale de  $\delta_\theta$ . On vérifie donc a posteriori que  $\delta_\theta \ll \frac{\pi}{2}$ . La faible valeur de  $\delta_\theta$  rejette  $\gamma_{\text{lim}}$  au delà de 3 MHz.

#### Remarque :

En prenant  $\gamma \equiv 2\pi \times 10 \text{ MHz}$  et  $\delta_\theta|_{\text{max}} = \pi/10$ , on obtient un ordre de grandeur de la taille de la zone aveugle en utilisant les équations 6.40 et 6.41, soit une zone aveugle surestimée de  $40 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Cette valeur élevée de zone aveugle semble compromettante vis à vis de l'utilisation du micro-laser WGM en tant que gyrolaser. Cependant, S. Schwartz *et. al.* [133] ont obtenu une zone aveugle d'environ  $0.5 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$  avec  $\gamma = 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\delta_\theta = \pi/78$  dans un gyrolaser en  $Nd : YAG$ . Toutefois, l'expres-

sion de la zone aveugle dans l'article cité ci-dessus est légèrement différente. Pour connaître précisément la taille de la zone aveugle, il s'avère nécessaire de mesurer le battement du laser lorsque la cavité est en rotation. Ces mesures n'ont pas été réalisées car l'expérience nous éloignait du sujet initial.

### 6.5.2.5 Mesure de la transmission sous le seuil laser

On cherche ici à mesurer la levée de dégénérescence due au couplage par rétrodiffusion dans le spectre des *WGM* du micro-résonateur (cf. chap. 1, eq. 1.37 et 1.46). Puisque l'on ne dispose pas d'*OSA* avec une résolution suffisante, le spectre des *WGM* d'un micro-résonateur est accessible seulement sous le seuil laser par une méthode de scan, comme cela a été présenté dans des travaux précédents [47, 50]. Le montage expérimental est présenté sur les Figures 6.13 et 6.14.

- La pompe vient exciter le résonateur par pointe effilée tandis que le signal de sonde est amené par taper. Bien que l'utilisation d'un système de couplage différent pour la pompe et pour la sonde augmente les pertes globales du résonateur, en procédant ainsi, on s'assure d'avoir des taux de couplage indépendants pour la pompe et pour la sonde, ce qui permet de changer le taux de couplage du signal de sonde sans modifier le taux de pompage.
- Le générateur de fréquence (GF) génère un signal triangle d'amplitude  $\pm 18$  V et de fréquence 30 Hz. Ce signal vient moduler la longueur d'onde du laser de sonde. Le balayage lent de la sonde devant le temps de charge/décharge du résonateur permet de mesurer son spectre en transmission. Pour ces réglages de GF, la vitesse de balayage est de  $0.31 \text{ MHz} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ .
- La chaîne de détection est pourvue d'un amplificateur optique (EDFA) et d'un filtre optique accordable centré sur le mode d'intérêt afin d'amplifier signal utile et de supprimer l'émission spontanée amplifiée de l'EDFA.

Le spectre *WGM* obtenu par une méthode de scan sur un micro-résonateur en IOG-1 est présenté sur la Figure 6.15. L'écart en fréquence mesuré est de 27 MHz, ce qui correspond à l'ordre de grandeur des fréquences obtenues sur les spectre de *RIN* des fluctuations du photocourant d'un laser *WGM* en verre IOG-1. L'ajustement théorique (eq. 1.37) donne  $\tau_0 = 14.5 \text{ ns}$ ,  $\tau_e = 64 \text{ ns}$  et  $\tau_b = 6 \text{ ns}$ , soit une levée de dégénérescence d'environ 23 MHz. Dans ce type de résonateur, les pertes sont importantes car elles sont gouvernées par l'absorption de l'Erbium. Le verre étant fortement dopé, les résonances sont alors relativement larges, ce qui limite la plage d'écart spectral

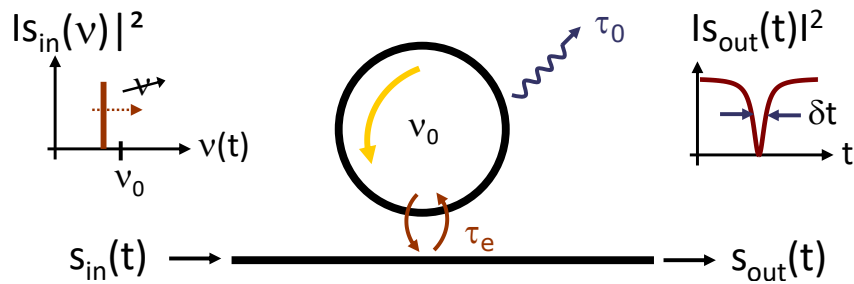


FIGURE 6.13 – Principe de la mesure du spectre en transmission d’un résonateur par balayage lent de la fréquence  $\nu$  d’un laser accordable.

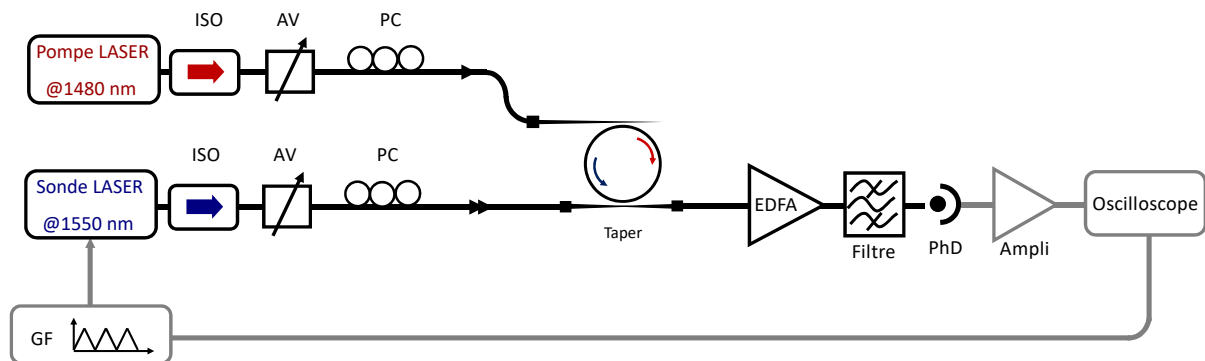


FIGURE 6.14 – Montage expérimental de la mesure du spectre en transmission d’un résonateur WGM en régime de compensation de pertes.

mesurable dans ce verre avec la méthode de scan, malgré le régime de compensation de pertes.

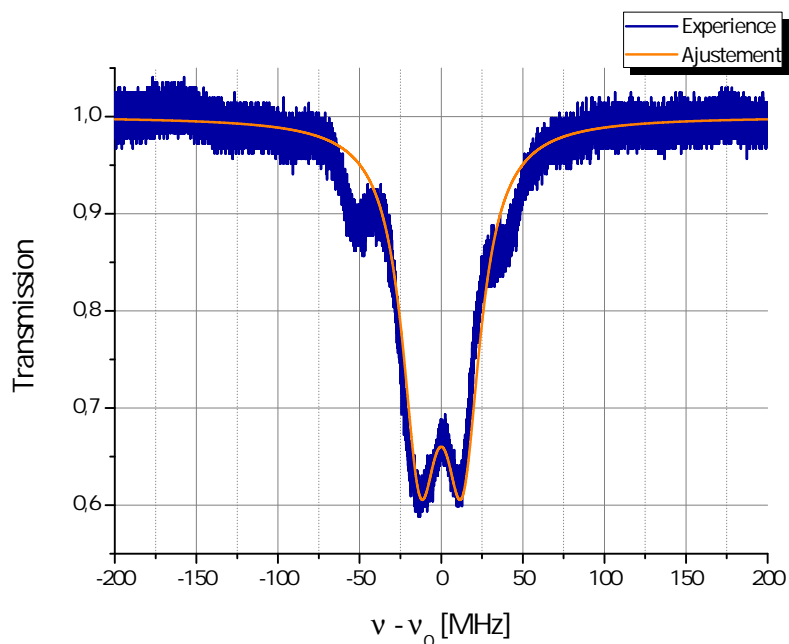


FIGURE 6.15 – Spectre de transmission d’un micro-résonateur WGM en verre IOG-1 pompé sous le seuil laser.

## 6.6 Rétrodiffusion dans un laser WGM en verre fluoré dopé Erbium

Les mesures de couplage de modes par rétrodiffusion dans un micro-résonateur en verre ZBLALiP (non dopé) montrent des écarts spectraux de l’ordre de plusieurs centaines de  $MHz$  (Figure 6.16), la signature du couplage de mode sort donc de notre fenêtre de mesure. Pour l’étude du couplage par rétrodiffusion dans un laser WGM en verre fluoré, il n’y a aucun moyen de savoir si le couplage par rétrodiffusion s’opère par mesure directe du spectre de  $RIN$  à cause de notre bande passante très réduite ( $40 MHz$ , soit un ordre de grandeur en dessous de l’écart spectral obtenu en passif). Si l’effet a effectivement lieu, sa mesure est inaccessible. Cependant, une simple mesure à l’analyseur de spectre optique permet d’estimer si un mode laser WGM a lieu dans les deux sens de parcours (sous condition d’avoir une bonne calibration des outils d’analyse). Nous avons donc, pour l’étude du couplage de mode par rétrodiffusion dans un laser WGM en ZBLALiP, cherché à obtenir un effet laser dont l’un des modes était présent à la fois sur  $WGM+$  et  $WGM-$ .

Les mesures de  $RIN$  des signaux filtrés ont été réalisées avec un gain trans impédance

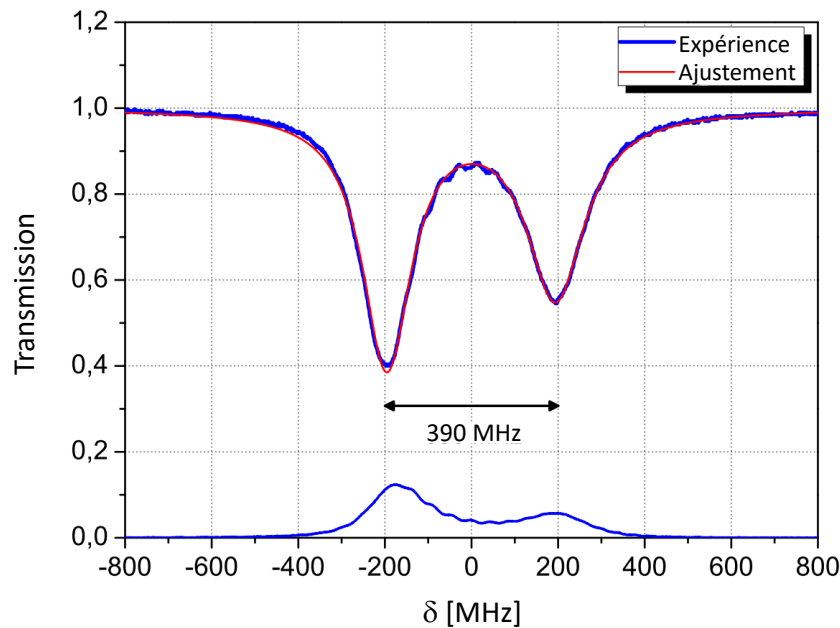


FIGURE 6.16 – Spectre de transmission d'un micro-résonateur WGM en verre ZBLA-LiP non dopé et de diamètre  $2a = 95 \mu\text{m}$ .

de  $10^6 \text{ V}\cdot\text{A}^{-1}$  et sont présentés sur la Figure 6.18. Il n'est pas surprenant de retrouver le comportement précédent. La superposition des spectres de *RIN* sur les signaux filtrés permet de s'assurer qu'on observe effectivement les deux modes co- et contra-propagatifs  $|n, \ell, \pm m\rangle$ . Notons toutefois que les spectres optiques *WGM+* et *WGM-* ne sont pas rigoureusement monomodes puisque deux résonances sont obtenues dans les spectres de *RIN*. Les tensions électriques sont ensuite numérisées à l'oscilloscope et réduites selon la procédure 6.58. Les traces temporelles obtenues sont représentées sur la Figure 6.19. Les fonctions d'intercorrélation normalisées sont calculées pour différents fenêtrages et affichés sur la Figure 6.20.

A la différence du verre IOG-1, les signaux *WGM+* et *WGM-* issus d'un résonateur en verre ZBLALiP oscillent à la fréquence de relaxation en phase. Le laser WGM en ZBLALiP obtenu fonctionne donc comme un laser bidirectionnel tandis que celui en IOG-1 est en régime d'auto-modulation.

L'ajustement 6.61 a été réalisé sur la fonction d'intercorrélation et est superposé aux données expérimentales sur la Figure 6.21. Les paramètres d'ajustement sont  $\tilde{\tau}_c = 13 \mu\text{s}$  et  $f_0 = 125 \text{ kHz}$ . Comme précédemment, les mesures sont à comparer avec la fréquence

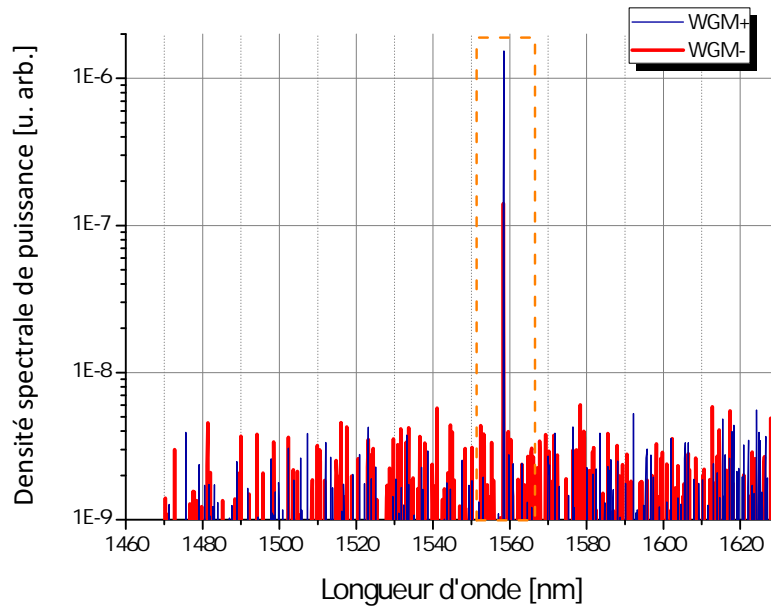


FIGURE 6.17 – Spectres optiques des signaux  $WGM+$  et  $WGM-$  mesurés à l'OSA.

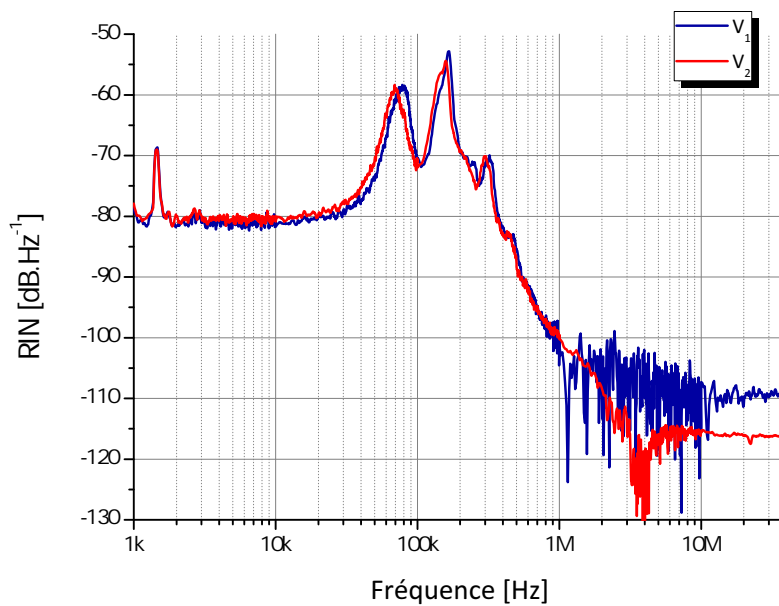


FIGURE 6.18 – Spectre de  $RIN$  des signaux co- et contra-propagatifs issus d'un laser  $WGM$  en  $ZBLALiP$ .

de relaxation  $f_{sp}$  du laser et à son amortissement  $\Gamma$ . Nous obtenons :

$$f_{sp} = 158.5 \text{ kHz}$$

$$f_0 = 125.0 \text{ kHz}$$

$$\Gamma = 26.0 \text{ kHz}$$

$$\frac{1}{\pi\tilde{\tau}_c} = 24.5 \text{ kHz}$$

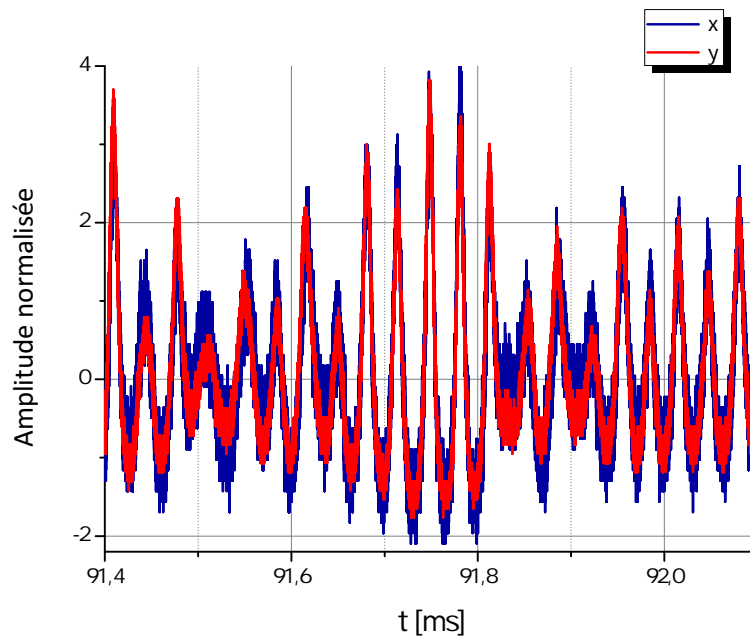


FIGURE 6.19 – Traces temporelles des tensions réduites  $x$  et  $y$  dans un micro-résonateur en ZBLALiP,  $G = 10^6 \text{ V.A}^{-1}$ .

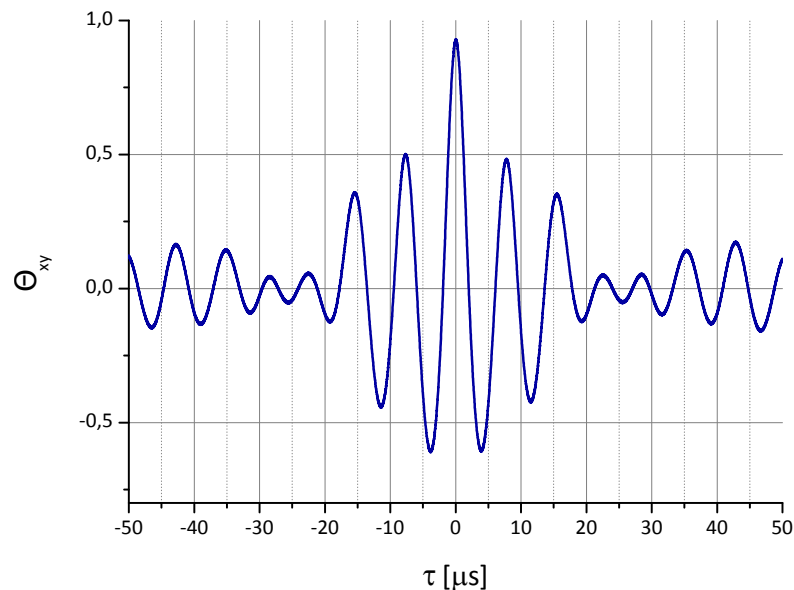


FIGURE 6.20 – Fonction d'intercorrélation des signaux photodétectés normalisés dans un verre ZBLALiP,  $G = 10^6 \text{ V.A}^{-1}$ .

Les différences entre le modèle et les données expérimentales peuvent provenir :

- de l'influence du deuxième mode sur la fonction d'intercorrélation. Nous n'avons pas d'informations supplémentaires quant à la dynamique de compétition entre les deux modes supposés et les mesures réalisées à l'oscilloscope sont des me-



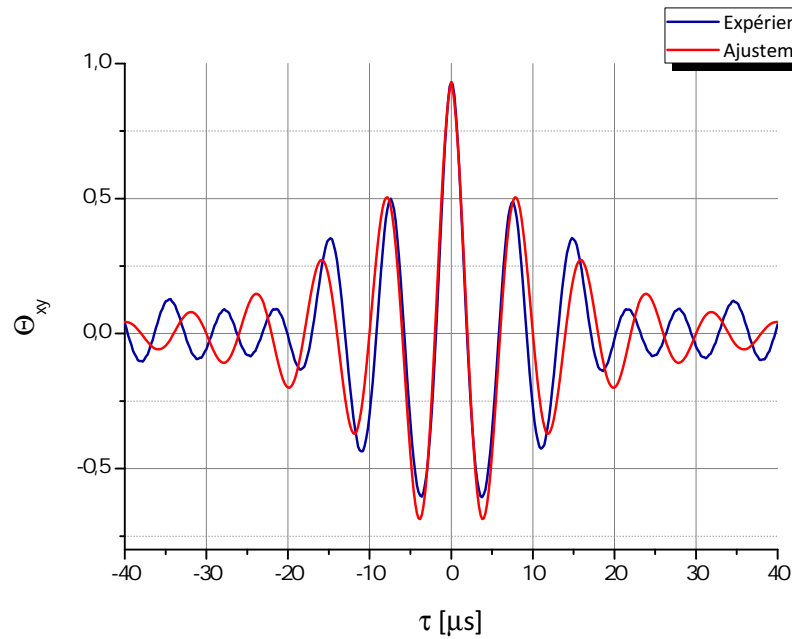


FIGURE 6.21 – Fonction d’intercorrélacion normalisée  $\Theta_{xy}$  des signaux co- et contra-propagatifs réduits et ajustement :  $\tilde{\tau}_c = 13 \mu s$ ,  $f_0 = 125 \text{ kHz}$ .

sures intégrées sur des temps relativement courts.

- du bruit de fréquence de la résonance de relaxation (variations temporelles du taux de pompage  $r$  ou du temps de vie du photon  $\tau_p$  via les variations du taux de couplage  $\tau_c$ ).
- de l’approximation Lorentzienne du *RIN*. En effet, la fonction n’est pas tout à fait Lorentzienne (cf chap. 5, eq. 5.46) car l’amortissement de ce modèle dépend de la fréquence  $f$  d’observation.

Les remarques ci-dessus sont toutefois à prendre avec précautions puisque rien ne justifie, autre que l’allure de la fonction d’intercorrélacion, l’ajustement par la fonction donnée en 6.61. Néanmoins, la confrontation entre ce modèle et les résultats expérimentaux conforte nos hypothèses.

## 6.7 Conclusion sur l’étude du couplage de mode par rétrodiffusion

Le modèle théorique de la dynamique du laser monomode soumis à un couplage par rétrodiffusion a été réalisé et appliqué sur un laser Erbium. Cette étude nous a permis

de montrer que le laser peut potentiellement fonctionner dans trois régimes d'émission différents : monomode unidirectionnel pour une rétrodiffusion "faible", automodulé pour une rétrodiffusion "intermédiaire" et monomode bidirectionnel pour une rétrodiffusion "forte".

La difficulté expérimentale de l'étude du couplage par rétrodiffusion réside dans l'observation de ces différents régimes et du spectre laser. En effet, nos outils d'analyse spectrale ne nous permettent pas de mesurer le spectre du résonateur fonctionnant en régime laser de manière précise (précision de l'ordre de la largeur de raie) et les analyseurs de spectre optique ayant une résolution suffisante sont aujourd'hui très onéreux. Cependant, la mesure du spectre de *RIN* du laser *WGM* peut, dans certains cas, renseigner sur un éventuel couplage par rétrodiffusion d'un des mode laser. La mesure de la fonction d'intercorrélacion permet de connaître les phases relatives des modes couplés et de statuer entre un régime d'automodulation et un régime monomode bidirectionnel. De plus, même si la bande passante électrique d'analyse, relativement réduite, est inférieure à la fréquence d'échanges par rétrodiffusion, l'effet de modulation est également visible sur la fréquence de relaxation du laser. Toutes ces analyses ont été appliquées sur deux laser *WGM* : en IOG-1 et en ZBLALiP. Le premier fonctionne en régime d'auto-modulation tandis que le second en régime d'émission bidirectionnelle. Ainsi, en fonction du comportement souhaité, il est préférable d'utiliser tel ou tel type de verre.

On peut toutefois remarquer :

- Le verre IOG-1 peut-il adopter un régime d'émission bidirectionnel ? Comment s'en assurer ? Si la fréquence de couplage par rétrodiffusion est supérieure à 40 MHz alors le pic de modulation sort de notre plage d'analyse et le problème est le même que celui d'un laser en verre ZBLALiP.
- Les mesures de *RIN* effectuées sur le verre ZBLALiP n'ont jamais fait apparaître de signature de couplage par rétrodiffusion. Aussi, on ne peut pas être certain du régime de fonctionnement du laser sans avoir au préalable mesuré la fonction d'intercorrélacion des signaux co- et contra-propagatifs.

Le problème ici est de pouvoir contrôler précisément le taux de couplage d'un mode sur l'autre. On peut alors supposer qu'une expérience de couplage d'un micro-résonateur *WGM* avec une cavité externe (un miroir métallique) pour réinjecter un mode fuyant dans le micro-résonateur [60, 139] sur le mode contra-propagatif pourrait répondre à cette problématique. De plus, on peut augmenter la bande passante du système de

détection en utilisant un analyseur de spectre ayant une plus grande bande passante et ayant un bruit interne relativement bas ainsi qu'en utilisant un double étage d'amplification électrique (un amplificateur transimpédance suivi un amplificateur de tension). Les analyseur de spectre électriques bas bruit sont cependant encore onéreux aujourd'hui.

Signalons que la mesure de  $RIN$  et la mesure de corrélations sont complémentaires puisque la  $DSP$  d'un signal photodéfecté n'est rien d'autre que la Transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Une mesure complémentaire de  $RIN$  de la différence entre les signaux  $WGM+$  et  $WGM-$  aurait donné des informations sur la corrélation entre ces deux signaux : un signal nul serait synonyme d'une absence de corrélation tandis qu'un signal non nul serait une signature de leur corrélation [109, 140]. En notant  $i_d(t) = i_1(t) - i_2(t)$ , la  $DSP$  de  $i_d$  se calcule en effectuant la Transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF} [\langle i_d(t)i_d(t-\tau) \rangle] (f) &= \mathcal{TF} [\langle i_1(t)i_1(t-\tau) \rangle + \langle i_2(t)i_2(t-\tau) \rangle - \langle i_1(t)i_2(t-\tau) \rangle - \langle i_2(t)i_1(t-\tau) \rangle] (f) \\ S_{i_d}(f) &= S_{i_1}(f) + S_{i_2}(f) - 2\mathcal{TF} [\Gamma_{i_1i_2}(\tau)] (f) \end{aligned} \quad (6.65)$$

où le terme  $\mathcal{TF} [\Gamma_{i_1i_2}(\tau)] (f)$  est le spectre d'intercorrélation. Cette expression doit cependant être précisée au voisinage des fréquences de relaxation.

Le laser  $WGM$  présente, lorsqu'il est soumis à un couplage par rétrodiffusion, différents comportements dépendant de la matrice hôte dans laquelle les ions sont insérés. Dans le cas d'un gyrolaser, la différence de fréquence entre les modes co- et contre-propagatifs est proportionnelle à la vitesse de rotation de la cavité seulement si la levée de dégénérescence due à l'effet Sagnac est plus importante que celle due au couplage par rétrodiffusion [141]. Il apparait donc que le verre IOG-1 semble plus adapté que le ZBLALiP en tant que micro-gyrolaser. Le résonateur  $WGM$  présentant la levée de dégénérescence due à la rétrodiffusion Rayleigh la moins élevée est plus sensible à la rotation de la cavité. Néanmoins, en régime laser, des effets de verrouillage en fréquence et d'auto-modulation sont observés dans certains cas. Lorsque la cavité est en rotation, les régimes d'émission observés à l'arrêt ne sont plus valables [131]. Des études plus approfondies sur le micro-gyrolaser  $WGM$  en verre dopé aux ion Erbium sont nécessaires pour conclure sur l'application potentielle du laser  $WGM$  en tant que gyrolaser.

# Conclusion générale

Dans ce document, nous avons présenté les résultats de nos études. La finalité étant de réaliser une source micro-onde miniaturisée en utilisant un micro-laser *WGM* supportant deux *WGM* indépendants, nous nous sommes intéressés à la caractérisation dynamique d'un signal issu d'un laser *WGM* monomode et ne supportant que cet unique *WGM* laser.

Nous avons présenté les micro-résonateurs *WGM* dopés Erbium et leurs propriétés optiques et spectroscopiques. Ces résonateurs présentent naturellement des facteurs de qualité  $Q$  élevés. Leur important temps de stockage des photons exaltent les interactions avec le milieu actif amenant des propriétés non linéaires intéressantes. Ces effets peuvent être observés lorsque le résonateur *WGM* fonctionne en régime laser.

Nos lasers rentrent dans la catégorie des lasers de classe B à trois niveaux et sont caractérisés par un phénomène de résonance de relaxation dans le spectre du bruit d'intensité. L'approche conventionnelle de l'étude du bruit permet d'associer cette fréquence de résonance et sa largeur spectrale aux paramètres dynamiques du Laser tels que le taux de pompage normalisé, le temps de vie des photons ou encore le temps de vie du niveau atomique excité. Cette approche n'est pourtant pas suffisante pour décrire les phénomènes observés dans nos lasers présentant à la fois un fort confinement spatial (volume de mode  $\mathcal{V}$  réduit) et temporel ( $Q$  élevé). Ces propriétés uniques amènent un couplage non linéaire fortement marqué entre les fluctuations du nombre de photons et de l'inversion de population qui n'est pas pris en compte dans le modèle conventionnel. Nous avons alors proposé un modèle analytique prenant en compte ce couplage basé sur un développement perturbatif des populations et des photons. Ce modèle amène des harmoniques de la fréquence de relaxation du laser et permet d'évaluer le volume de mode  $\mathcal{V}$  du *WGM* Laser duquel on déduit les nombres quantiques  $n$ ,  $\ell$  et  $m$ , permettant ainsi d'identifier clairement le *WGM*. Les résultats issus de la confrontation théorie/expérience amènent des volumes de modes ainsi que des facteurs de qualité tout à fait cohérents avec nos dispositifs d'excitation par onde

evanescente. En utilisant le spectre de bruit d'intensité d'un laser *WGM*, nous pouvons ainsi estimer le volume de mode  $\mathcal{V}$  ainsi que le facteur de qualité  $Q$  d'un *WGM* fonctionnant en régime laser.

Dans une seconde partie, nous avons étudié le couplage par rétrodiffusion intracavité en régime laser. Ce régime a lieu lorsque deux modes couplés dépassent simultanément le seuil laser. Cette configuration particulière a été obtenue dans un verre IOG-1 co-dopé aux ions Erbium et Ytterbium. En régime laser, deux types de couplage sont possibles entre le couplage linéaire par rétrodiffusion intra-cavité et le couplage non-linéaire par le gain. Le modèle du gyro-laser à l'état solide prévoit l'existence de trois régimes de fonctionnement en fonction de la force du couplage par rétrodiffusion devant celle du couplage par le gain. Dans notre cas, la présence d'un pic de battement autour de 10 MHz ainsi que la superposition des spectres de bruit d'intensité pour les modes co- et contra-propagatifs serait la signature d'un régime d'auto-modulation. Les anti-corrélations très fortes entre les modes co- et contrapropagatifs observées expérimentalement assurent que le laser fonctionne dans ce régime d'émission. De plus, les mesures de spectre *WGM* en dessous du seuil laser ont montré une levée de dégénérescence entre les modes co- et contra-propagatifs de l'ordre de la fréquence de battement observée en régime laser dans ce type de verre, confortant l'idée d'un couplage par rétrodiffusion. Dans le verre ZBLALiP, la levée de dégénérescence due à la rétrodiffusion est plus importante et entraîne un régime d'émission bidirectionnel entre les deux modes potentiellement couplés avec une absence d'anti-corrélation mais des corrélations très fortes. Ces expériences sont intéressantes pour des applications du laser *WGM* en tant que micro-gyrolaser, ce qui ouvre la voie à de nouvelles études (effet de la rotation de la cavité sur les régimes d'émission obtenus, estimation de la zone aveugle, impact des effets non-linéaires, sensibilité, rapport signal à bruit, ...). D'autre part, les régimes de fonctionnement du laser *WGM* pourraient être étudiés en complétant ces études par l'étude du couplage entre un laser *WGM* soumis à rétrodiffusion intra-cavité avec des expériences de couplage avec une cavité externe de façon à réinjecter une portion du signal dans la micro-cavité.

Enfin, la caractérisation complète du bruit du laser *WGM* monomode nécessite la mesure du bruit de fréquence du signal émis avant de s'intéresser au fonctionnement doublement monomode pour la génération de micro-ondes. Les mesures de ces performances permettraient d'envisager des améliorations possibles au système actuel de façon à réduire les sources de bruit du laser *WGM* comme l'isolation phonique ou le type de couplage.

# Annexe A

## Détails des calculs de rétrodiffusion

Cette annexe présente le détails des calculs effectués pour l'étude du laser à mode de galerie soumis au couplage par rétrodiffusion. Nous rappelons que, pour décrire l'ensemble du système, nous disposons de deux systèmes d'équations équivalents (cf chapitre 6, 6.19 et 6.21). Le premier concerne les champs :

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{E_1}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \frac{\gamma}{2} E_2 \sin(\Phi + \theta_1) + \frac{c\sigma_e}{NL} \frac{E_2}{2} \oint_{\text{cav}} \mathcal{N} \cos(2kz + \Phi) dz \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -\frac{E_2}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) + \frac{\gamma}{2} E_1 \sin(\Phi + \theta_2) + \frac{c\sigma_e}{NL} \frac{E_1}{2} \oint_{\text{cav}} \mathcal{N} \cos(2kz + \Phi) dz \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{\gamma E_2}{2 E_1} \cos(\Phi + \theta_1) - \frac{c\sigma_e}{2NL} \frac{E_2}{E_1} \oint_{\text{cav}} \mathcal{N} \sin(2kz + \Phi) dz \quad (\text{A.1c})$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{\gamma E_1}{2 E_2} \cos(\Phi + \theta_2) + \frac{c\sigma_e}{2NL} \frac{E_1}{E_2} \oint_{\text{cav}} \mathcal{N} \sin(2kz + \Phi) dz \quad (\text{A.1d})$$

$$\frac{d\tilde{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \tilde{\mathcal{N}}) - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (\text{A.1e})$$

$$\frac{d\mathcal{N}_{1,2}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{N}_{1,2} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{\tilde{E}_{1,2} \tilde{E}_{2,1}^*}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (\text{A.1f})$$

et le deuxième sur les somme  $Y$  et différence  $X$  des modules des champs au carré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) - \gamma \sin(\Phi + \theta_2) - 2 \frac{c\sigma_e}{N} \Re(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \right] \\ \frac{dX}{dt} = -X \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) + \gamma \sin(\Phi + \theta_2) \right] \\ \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{c\sigma_e}{N} \Im(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \\ \frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}) - \frac{\mathcal{N}_{Th}}{\tau} \left( \frac{Y}{E_{sat}^2} \right) \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{N}_1 - \frac{\mathcal{N}_{Th}}{2\tau} \left( \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{E_{sat}^2} \right) e^{-j\Phi} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (A.2a) \\ (A.2b) \\ (A.2c) \\ (A.2d) \\ (A.2e) \end{array}$$

En fonction de la situation considérée, on choisira [A.1](#) ou [A.2](#) de manière à obtenir les solutions stationnaires le plus simplement possible.

## A.1 laser sous le seuil

Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'effet de la rétrodiffusion sur le seuil laser. Comme la rétrodiffusion entraîne une redistribution de l'énergie dans la cavité, la définition de l'inversion de population au seuil doit être redéfinie. Pour cela, nous nous plaçons sous le seuil laser et cherchons les conditions d'instabilité de ce régime.

Sous le seuil, les solutions stationnaires sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ \mathcal{N}_1 = 0 \\ \bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (A.3a) \\ (A.3b) \\ (A.3c) \\ (A.3d) \end{array}$$

Le gain augmente progressivement avec l'apport d'un flux de photons de pompe jusqu'au moment où la valeur d'instabilité est dépassée. Cependant, le gain est encore trop faible pour compenser les pertes des modes  $E_1$  et  $E_2$ .

Considérons les variations infinitésimales  $\delta E_1$ ,  $\delta E_2$  et  $\delta \mathcal{N}$  telles que :

$$X(t) = \langle X(t) \rangle + \delta X(t)e^{\lambda t}$$

où  $\langle X(t) \rangle$  est la solution stationnaire de  $X$ ,  $X$  représentant  $E_{1,2}$  ou  $\mathcal{N}$ . Nous recherchons les conditions pour que le système, lorsqu'il est soumis à de petites variations, converge vers sa solution d'équilibre. Ceci implique :

$$\Re(\lambda) < 0 \quad (\text{A.4})$$

En développant les équations de A.1, nous obtenons, pour les quantités  $\delta E_1$ ,  $\delta E_2$  et  $\mathcal{N}$  le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\delta E_1}{dt} = -\frac{\delta E_1}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \right) - \frac{\gamma}{2} \delta E_2 \sin(\Phi + \theta_1) & (\text{A.5a}) \\ \frac{d\delta E_2}{dt} = -\frac{\delta E_2}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \right) + \frac{\gamma}{2} \delta E_1 \sin(\Phi + \theta_2) & (\text{A.5b}) \\ \frac{d\mathcal{N}}{dt} = -\frac{\delta \mathcal{N}}{\tau} & (\text{A.5c}) \end{cases}$$

La recherche des valeurs propres revient à diagonaliser la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_p} + \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_0 - \lambda & -\frac{\gamma}{2} \sin(\Phi + \theta_1) & 0 \\ \frac{\gamma}{2} \sin(\Phi + \theta_2) & -\frac{1}{\tau_p} + \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} - \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

La valeur propre triviale  $\lambda = -\frac{1}{\tau}$  n'entraîne aucune implication sur la condition de stabilité car elle est toujours négative. Les autres valeurs propres sont telles que :

$$\left( -\frac{1}{2\tau_p} + \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_0 - \lambda \right)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \sin(\Phi + \theta_1) \sin(\Phi + \theta_2) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Le discriminant  $\Delta$  de cette équation du second degré est :

$$\Delta = \frac{\gamma^2}{2} (\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (\text{A.8})$$

La condition de stabilité est conditionnée par le signe de  $\Delta$  :



- si  $\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) < \cos(\theta_1 - \theta_2)$ , alors les valeurs propres sont :

$$\lambda_{\pm} = - \left( \frac{1}{2\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_0 \right) \pm i \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}} \quad (\text{A.9})$$

et la condition de stabilité :

$$\frac{1}{\tau_p} > \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \quad (\text{A.10})$$

Cette condition est identique à celle obtenue en l'absence de rétrodiffusion. Autrement dit la rétrodiffusion n'a aucun effet sur la définition du seuil laser.

**Remarque :**

Ici, les pertes (représentées par  $\tau_p^{-1}$ ) sont supérieures au gain, le seuil laser n'est pas dépassé.

- si  $\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) > \cos(\theta_1 - \theta_2)$ , alors les valeurs propres sont :

$$\lambda_{\pm} = - \left( \frac{1}{2\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_0 \right) \pm i \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}} \quad (\text{A.11})$$

et la condition de stabilité est telle que :

$$\frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \pm \gamma \sqrt{\frac{\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}} < 0 \quad (\text{A.12})$$

Elle doit être vérifiée quelle que soit la valeur de  $\Phi$ . En ne conservant que la solution donnant  $\Re(\lambda) < 0$ , on peut noter :

$$\frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 - \gamma \left| \sin \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right| < 0 \quad (\text{A.13})$$

La limite de stabilité est atteinte lorsque :

$$\frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_0 \geq \frac{1}{\tau_p} - \gamma \left| \sin \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right| \quad (\text{A.14})$$

qui n'est autre que la valeur de la densité d'inversion de population au seuil  $\mathcal{N}_{\text{Th}}$ . Sans perte de généralités, on posera :

$$\frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} = \frac{1}{\tau_p} - \gamma |\sin(\delta_\theta)| = \frac{1}{\tau_p'} \quad (\text{A.15})$$

où  $2\delta_\theta = \theta_1 - \theta_2$ .

## A.2 Régime d'émission unidirectionnel

### A.2.1 Hypothèses de départ

Dans ce régime d'émission, la rétrodiffusion  $\gamma$  est beaucoup moins influente que le réseau d'inversion de population si bien qu'un mode est prédominant sur l'autre. Nous choisissons arbitrairement  $E_1 \gg E_2$  et notons  $\varepsilon = E_2/E_1$ , ce qui permet de négliger les termes en  $\varepsilon^2$  des équations. Nous obtenons ainsi le nouveau système d'équations d'évolution :

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{E_1}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \frac{\gamma}{2} E_2 \sin(\Phi + \theta_1) + \frac{c\sigma_e}{N} \frac{E_2}{2} \Re(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \quad (\text{A.16a})$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -\frac{E_2}{2} \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) + \frac{\gamma}{2} E_1 \sin(\Phi + \theta_2) + \frac{c\sigma_e}{N} \frac{E_1}{2} \Re(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \quad (\text{A.16b})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \left( \frac{E_2}{E_1} \cos(\Phi + \theta_1) - \frac{E_1}{E_2} \cos(\Phi + \theta_2) \right) - \frac{c\sigma_e}{2N} \left( \frac{E_2}{E_1} + \frac{E_1}{E_2} \right) \Im(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \quad (\text{A.16c})$$

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}) - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (\text{A.16d})$$

$$\frac{d\mathcal{N}_{1,2}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{N}_{1,2} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \left( \frac{E_{1,2} E_{2,1}}{E_{\text{sat}}^2} \right) e^{-j\Phi} \quad (\text{A.16e})$$

### A.2.2 Densité moyenne d'inversion de population $\bar{\mathcal{N}}$

Le seuil laser est dépassé, si bien que la densité d'inversion de population atteint sa valeur au seuil :

$$\frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} = \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} = \frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\tau_p} - \gamma |\sin(\delta_\theta)| \quad (\text{A.17})$$

$\gamma$  est tout de même relativement faible, aussi  $\mathcal{N}_{\text{Th}}$  est peu modifié par la rétrodiffusion.

### A.2.3 Intensité normalisée du mode laser prédominant $E_1$

La solution stationnaire de  $\mathcal{N}$  nous donne l'expression de  $|E_1|^2$  :

$$\frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} = \frac{\mathcal{N}_0}{\mathcal{N}_{\text{Th}}} - 1 = \eta - 1 = \gamma_1 \tau \left( \frac{\mathcal{N}_{\text{tot}}}{\mathcal{N}_{\text{Th}}} + 1 \right) (r - 1) \quad (\text{A.18})$$

où  $\eta$  est le degré d'excitation et  $r$  le taux de pompage.

### A.2.4 Harmonique à $2k$ de la densité d'inversion de population $\mathcal{N}_1$

La solution stationnaire de  $\mathcal{N}_1$  est telle que :

$$\mathcal{N}_1 e^{j\Phi} = -\mathcal{N}_{\text{Th}} \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} \varepsilon \quad (\text{A.19})$$

qui est un réel, ce qui nous permet de simplifier les équations d'évolution de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $\Phi$  de A.16 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1}{dt} = -\frac{E_1}{2} \left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \frac{\gamma}{2} E_2 \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{E_1^2 E_2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \varepsilon \\ \frac{dE_2}{dt} = -\frac{E_2}{2} \left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) + \frac{\gamma}{2} E_1 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{E_1^3}{E_{\text{sat}}^2} \right) \varepsilon \\ \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \left( \frac{E_2}{E_1} \cos(\Phi + \theta_1) - \frac{E_1}{E_2} \cos(\Phi + \theta_2) \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.20a})$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -\frac{E_2}{2} \left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) + \frac{\gamma}{2} E_1 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{c\sigma_e}{2N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{E_1^3}{E_{\text{sat}}^2} \right) \varepsilon \quad (\text{A.20b})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \left( \frac{E_2}{E_1} \cos(\Phi + \theta_1) - \frac{E_1}{E_2} \cos(\Phi + \theta_2) \right) \quad (\text{A.20c})$$

Notons également que, du fait de la dépendance de  $\mathcal{N}_1$  en  $\varepsilon$ , sa valeur est relativement faible, ce qui n'est pas surprenant car comme  $E_1 \gg E_2$ , l'effet des interférences est peu marqué et le réseau d'inversion de population peu contrasté. Néanmoins, on doit expliciter l'expression de  $\varepsilon$ .

### A.2.5 Différence des phases $\Phi$

La solution stationnaire de  $\Phi$  est telle que :

$$\cos(\Phi + \theta_2) = \varepsilon^2 \cos(\Phi + \theta_1) \simeq 0 \quad (\text{A.21})$$

et donc :

$$\sin(\Phi + \theta_2) = \pm 1 = \zeta \quad (\text{A.22})$$

Pour connaître le signe de  $\zeta$ , il nous faut exprimer les solutions stationnaires de  $E_1$  et  $E_2$  et déduire  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \gamma \varepsilon \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \varepsilon^2 \end{array} \right. \quad (\text{A.23a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\varepsilon \left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) + \gamma \zeta - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{A.23b})$$

Par identification entre A.23a et A.23b, nous trouvons la relation :

$$\zeta = \frac{c\sigma_e}{N\gamma} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} \right) \varepsilon \quad (\text{A.24})$$

Comme  $\varepsilon > 0$ , on en déduit :

$$\sin(\Phi + \theta_2) = \zeta = 1 \quad (\text{A.25})$$

### A.2.6 Amplitude du mode atténué

En tenant compte des expressions de  $\mathcal{N}_{\text{Th}}$  (A.17),  $E_1^2$  (A.18) et  $\zeta$  (A.25) dans A.24, nous obtenons l'expression du rapport  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\gamma\tau'_p}{\eta-1} = \frac{\gamma\tau'_p}{r-1} \left( \gamma_1\tau \left( \frac{\mathcal{N}_{\text{tot}}}{\mathcal{N}_{\text{Th}}} + 1 \right) \right)^{-1} \ll 1 \quad (\text{A.26})$$

Ainsi, ce régime n'est valide que dans la limite où  $\gamma \ll \frac{\eta-1}{\tau'_p}$

L'expression de  $\mathcal{N}_1$  devient :

$$\mathcal{N}_1 = -\mathcal{N}_{\text{Th}}\gamma\tau'_pe^{-j\Phi} \quad (\text{A.27})$$

### A.2.7 Bilan

Les solutions stationnaires des variables décrivant le laser en régime d'émission monomode unidirectionnel sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_2}{E_1} = \frac{\gamma\tau'_p}{\eta-1} \quad (\text{A.28a}) \\ \frac{E_1^2}{E_{\text{sat}}^2} = \eta-1 \quad (\text{A.28b}) \\ \sin(\Phi + \theta_2) = 1 \quad (\text{A.28c}) \\ \mathcal{N} = \mathcal{N}_{\text{Th}} \quad (\text{A.28d}) \\ \mathcal{N}_1 = -\mathcal{N}_{\text{Th}}\gamma\tau'_pe^{-i\Phi} \quad (\text{A.28e}) \end{array} \right.$$

### A.2.8 Valeur limite de $\gamma$

Lorsque l'on étudie la stabilité des solutions A.16, nous sommes amenés à résoudre l'équation caractéristique suivante [131] :

$$\left[ -\lambda + d - \frac{1}{2} \left( \frac{\eta-1}{\tau'_p} \right) \left( \frac{1}{1+\lambda\tau} \right) \right] \times \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\eta-1}{\tau'_p} \right)^2 \left( \frac{1}{1+\lambda\tau} \right)^2 + (\lambda-d) \left( \lambda + \frac{3}{2} \left( \frac{\eta-1}{\tau'_p} \right) \left( \frac{1}{1+\lambda\tau} \right) \right) \right] = 0 \quad (\text{A.29})$$

où  $d = \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N}\mathcal{N}$ . Pour des variations de l'ordre de la pulsation de relaxation  $\omega_{\text{sp}}$ , A.29 se réécrit :

$$\left[ -\lambda - \frac{\omega_{\text{sp}}^2}{2\lambda} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{sp}}^4}{2\lambda^2} + \lambda^2 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{\text{sp}}^2}{\lambda} \right] = 0 \quad (\text{A.30})$$

A.30 admet deux racines simples  $\lambda_{1,2}$  et deux racines doubles  $\lambda_{3,4,5,6}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_{\text{sp}} \\ \lambda_{3,4,5,6} = \pm i\frac{\omega_{\text{sp}}}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.31a)} \\ \text{(A.31b)} \end{array}$$

L'analyse de stabilité des solutions obtenues consiste à considérer de petites variations  $\delta\lambda$  autour des valeurs propres obtenues et d'établir une condition nécessaire pour que le signe de la partie réelle de  $\delta\lambda$  reste négatif. Une telle analyse n'est pas exposée ici et nous nous contenterons d'exploiter le résultat directement. Le lecteur pourra s'orienter vers les références [128, 131] pour plus de détails.

La limite de stabilité du régime d'émission unidirectionnelle s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\eta - 1}{4\tau\tau'_p}} = \frac{\omega_{\text{sp}}}{2} \quad \text{(A.32)}$$

Dès que  $\gamma$  dépasse cette valeur limite, le laser sort du régime d'émission monomode unidirectionnel et passe en régime d'auto-modulation.

## A.3 Régime d'auto-modulation

### A.3.1 Hypothèses de départ

On se place entre la zone unidirectionnelle et bidirectionnelle verrouillée en fréquence. Lors de l'étude du régime d'émission unidirectionnel, un mode était fortement atténué sur l'autre. Ce n'est plus vrai ici, si bien que le coefficient de rétrodiffusion suppose :

$$\gamma \gg \frac{\eta - 1}{\tau'_p} \quad \text{(A.33)}$$

Nous supposons également que  $\delta_\theta \ll 1$ , ce qui nous permet d'alléger le système d'équations du laser.

Etant donné que les amplitudes des deux champs  $E_1$  et  $E_2$  sont du même ordre de grandeurs, nous travaillons préférentiellement avec les variables  $Y$  et  $X$ .

Sous ces hypothèses, les équations du laser deviennent, à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} \left[ \gamma \cos(\Phi) \delta_\theta - \frac{c\sigma_e}{N} \Re(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.34a})$$

$$\frac{dX}{dt} = -X \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} \gamma \sin(\Phi) \quad (\text{A.34b})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\gamma}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \left( X \cos(\Phi) - Y \sin(\Phi) \delta_\theta \right) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{c\sigma_e}{N} \Im(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \quad (\text{A.34c})$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \quad (\text{A.34d})$$

$$\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = -\frac{\mathcal{N}_1}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{2\tau} \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{E_{\text{sat}}^2} e^{-j\Phi} \quad (\text{A.34e})$$

Dans ce qui suit, on considère que la somme des intensités normalisées  $Y$  n'est pas affectée par la modulation de la densité d'inversion de population  $\mathcal{N}_1$  mais seulement par sa valeur moyenne  $\bar{\mathcal{N}}$ , à l'inverse de la différence des intensités normalisées  $X$ . De plus, la valeur stationnaire de  $\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}$  est réelle. Ces considérations nous permettent de modifier le système A.34. Enfin, nous négligeons tous les termes multipliés par  $\delta_\theta$ . Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.35a})$$

$$\frac{dX}{dt} = -X \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} \gamma \sin(\Phi) \quad (\text{A.35b})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{X}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \gamma \cos(\Phi) \quad (\text{A.35c})$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{\tau} \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \quad (\text{A.35d})$$

$$\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = -\frac{\mathcal{N}_1}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{2\tau} \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{E_{\text{sat}}^2} e^{-j\Phi} \quad (\text{A.35e})$$

### A.3.2 Valeurs stationnaires des densités d'inversion de population

Les valeurs stationnaires de  $\bar{\mathcal{N}}$  et  $\mathcal{N}_1$  sont :

$$\frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} = \frac{1}{\tau_p} \quad (\text{A.36})$$

$$\mathcal{N}_1 e^{j\Phi} = \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}} \sqrt{Y^2 - X^2}}{2 E_{\text{sat}}^2} \quad (\text{A.37})$$

### A.3.3 Modification des équations du laser et introduction de nouvelles variables

En prenant en compte les valeurs stationnaires de  $\mathcal{N}$ , le système A.35 se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.38a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -\sqrt{Y^2 - X^2} \gamma \sin(\Phi) \end{array} \right. \quad (\text{A.38b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{X}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \gamma \cos(\Phi) \end{array} \right. \quad (\text{A.38c})$$

La résolution de A.38 nécessite l'introduction de deux nouvelles variables  $U$  et  $V$  telles que :

$$U = \sqrt{Y^2 - X^2} \cos(\Phi) \quad (\text{A.39})$$

$$V = -\sqrt{Y^2 - X^2} \sin(\Phi) \quad (\text{A.40})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.41a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = -\gamma X \end{array} \right. \quad (\text{A.41b})$$

et satisfont la relation :

$$U^2 + V^2 = Y^2 - X^2 \quad (\text{A.42})$$

Ainsi, le système A.38 se résoud simplement au prix de l'introduction de deux équations supplémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Y} = 0 \\ \dot{X} = \gamma V \\ \dot{U} = 0 \\ \dot{V} = -\gamma X \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = Y_0 \\ X = X_0 \sin(\gamma t + \varphi) \\ U = U_0 \\ V = X_0 \cos(\gamma t + \varphi) + V_0 \end{array} \right.$$

La relation A.42 permet de calculer les constantes d'intégration :

$$U_0 = \zeta \sqrt{Y_0^2 - X_0^2} \quad (\text{A.43})$$

$$V_0 = 0 \quad (\text{A.44})$$

avec  $\zeta = \pm 1$

On peut calculer les valeurs des intensités normalisées des modes  $E_1$  et  $E_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{E_{1,2}^2}{E_{\text{sat}}^2} &= \frac{Y \pm X}{2} \\ &= \frac{Y_0}{2} \pm \frac{X_0}{2} \sin(\gamma t + \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Les intensités normalisées des modes  $E_1$  et  $E_2$  n'atteignent jamais un état stationnaires mais oscillent continuellement en opposition de phase à la pulsation  $\gamma$  même si leurs valeurs moyennes sont égales. Les valeurs de  $Y_0$  et  $X_0$  doivent être explicitées à partir des équations d'évolution de  $Y$  et  $X$ .

### A.3.4 Equations d'évolution de $Y_0$ et $X_0$

$Y_0$  et  $X_0$  sont des amplitudes lentement variables par rapport à la pulsation  $\gamma$ . On trouve leurs expressions en moyennant A.35 sur plusieurs périodes.

L'équation d'évolution de  $\mathcal{N}_1$  se réécrit avec les variables  $U$  et  $V$  :

$$\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = -\frac{\mathcal{N}_1}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{2\tau} \left( \frac{U + iV}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (\text{A.46})$$

En moyennant sur plusieurs périodes  $\frac{2\pi}{\gamma}$ , on obtient la valeur moyenne de  $\mathcal{N}_1$  :

$$\langle \mathcal{N}_1 \rangle = -\zeta \frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{2} \frac{\sqrt{Y_0^2 - X_0^2}}{E_{\text{sat}}^2} \quad (\text{A.47})$$

Les équations d'évolution de  $Y_0$  et  $X_0$  se réécrivent au premier ordre en  $\delta_\theta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY_0}{dt} = -Y_0 \left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \zeta \sqrt{Y_0^2 - X_0^2} \left( \gamma \delta_\theta - \frac{c\sigma_e}{N} \langle \mathcal{N}_1 \rangle \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.48a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_0}{dt} = -X_0 \left( \frac{1}{\tau_P} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.48b})$$

Il vient alors les solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} = \frac{1}{\tau_P} \end{array} \right. \quad (\text{A.49a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c\sigma_e}{N} \langle \mathcal{N}_1 \rangle = \gamma \delta_\theta \end{array} \right. \quad (\text{A.49b})$$



En se servant alors des équation [A.35d](#), [A.46](#) et [A.49](#), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{Y_0^2 - X_0^2}}{E_{\text{sat}}^2} = 2\gamma |\delta_\theta| \tau'_p \\ \frac{Y_0}{E_{\text{sat}}^2} = \eta - \frac{\tau'_p}{\tau_p} = \eta - 1 - \gamma |\delta_\theta| \tau'_p \end{array} \right. \quad (\text{A.50})$$

### A.3.5 Fréquence instantannée

En tenant compte des solutions précédemment obtenues, l'équation d'évolution de  $\Phi$  s'écrit :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pm \frac{\gamma X_0 \sqrt{Y_0^2 - X_0^2} \sin(\gamma t + \varphi)}{Y_0^2 - X_0^2 \sin(\gamma t + \varphi)} \quad (\text{A.51})$$

L'équation  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$  n'admet pas de solution, autrement dit la fréquence instantannée dépend toujours du temps.

### A.3.6 Contraste de modulation

Les deux modes battent en opposition de phase à la pulsation  $\gamma$ . Le contraste de modulation est le rapport  $\frac{X_0}{Y_0}$ . En injectant les solutions [A.50](#) l'une dans l'autre, on obtient l'expression du contraste de modulation :

$$\left| \frac{X_0}{Y_0} \right| = \sqrt{1 - \left( \frac{2\gamma |\delta_\theta| \tau'_p}{\eta - 1 - \gamma |\delta_\theta| \eta \tau'_p} \right)^2} \quad (\text{A.52})$$

Pour de faibles valeurs de  $\gamma$ , le contraste de modulation est égal à 1. Plus  $\gamma$  augmente, plus le contraste diminue jusqu'au point où le battement n'est plus visible. Ceci permet de définir une valeur limite à  $\gamma$ , définissant ainsi la limite de stabilité du régime d'émission doublement monomode :

$$\gamma \geq \frac{1}{\tau_p |\delta_\theta|} \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 2} \right) \quad (\text{A.53})$$

On obtient le même résultat en procédant à une analyse de stabilité [\[131\]](#). Ici encore, comme dans la définition de la zone aveugle du gyro-laser, on constate l'importance du paramètre  $\delta_\theta$  dans la dynamique du laser.

### A.3.7 Bilan

Les solutions stationnaires des variables décrivant le laser en régime d'auto-modulation sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} = \frac{1}{\tau_p} - \gamma |\delta_\theta| \\ \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} = \frac{1}{\tau_p} \\ \frac{c\sigma_e}{N} \langle \mathcal{N}_1 \rangle = -\gamma |\delta_\theta| \\ \frac{\sqrt{Y_0^2 - X_0^2}}{E_{\text{sat}}^2} = 2\gamma |\delta_\theta| \tau_p' \\ \frac{Y_0}{E_{\text{sat}}^2} = \eta - \frac{\tau_p'}{\tau_p} = \eta - 1 - \gamma |\delta_\theta| \tau_p' \\ \frac{d\Phi}{dt} = \zeta \frac{\gamma X_0 \sqrt{Y_0^2 - X_0^2} \sin(\gamma t + \varphi)}{Y_0^2 - X_0^2 \sin(\gamma t + \varphi)} \end{array} \right.$$

## A.4 Régime d'émission bidirectionnelle verrouillée en fréquence

### A.4.1 Hypothèses de départ

Dans ce régime, on suppose que les intensités des modes  $E_1$  et  $E_2$  sont équivalentes. Cela se traduit par l'inégalité suivante :

$$\frac{X}{Y} \ll 1 \quad (\text{A.54})$$

On suppose également que la limite d'instabilité du régime d'auto-modulation est dépassée, si bien que :

$$\gamma \gg \frac{1}{\tau_p |\sin(\delta_\theta)|} \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 2} \right) \quad (\text{A.55})$$

Sous ces hypothèses, A.2 devient, au premier ordre en  $\delta_\theta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \frac{Y}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) - \gamma \sin(\Phi + \theta_2) - 2 \frac{c\sigma_e}{N} \Re(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \right] \\ \frac{dX}{dt} = -X \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} \right) - \frac{Y}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) + \gamma \sin(\Phi + \theta_2) \right] \\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\gamma}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \left( X \cos(\Phi) - Y \sin(\Phi) \delta_\theta \right) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{c\sigma_e}{N} \Im(\mathcal{N}_1 e^{j\Phi}) \\ \frac{d\bar{\mathcal{N}}}{dt} = \frac{\mathcal{N}_0 - \bar{\mathcal{N}}}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{Th}}{\tau} \frac{Y}{E_{sat}^2} \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = -\frac{\mathcal{N}_1}{\tau} - \frac{\mathcal{N}_{Th}}{2\tau} \frac{Y}{E_{sat}^2} e^{-j\Phi} \end{array} \right. \quad (A.56a)$$

(A.56b)

(A.56c)

(A.56d)

(A.56e)

### A.4.2 Calculs avec le coefficient complexe $\tilde{\gamma}$

Par la suite, nous allons devoir utiliser un coefficient de rétrodiffusion effectif complexe, noté ici  $\tilde{\gamma}$  défini par :

$$\tilde{\gamma} = \gamma \left( e^{j\theta_1} - e^{j\theta_2} \right) = |\tilde{\gamma}| e^{j\theta} \quad (\text{A.57})$$

où le module et l'argument de  $\tilde{\theta}$  sont :

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}| &= 2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \\ \tan(\theta) &= \frac{\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)}{\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

La résolution du système A.56 va nous conduire à calculer les deux termes suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2j} \left( \tilde{\gamma} e^{j\Phi} - \tilde{\gamma}^* e^{-j\Phi} \right) &= \frac{1}{2j} |\tilde{\gamma}| \left( e^{j(\Phi+\theta)} - e^{j(\Phi-\theta)} \right) \\ &= 2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \sin(\Phi + \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \tilde{\gamma} e^{j\Phi} + \tilde{\gamma}^* e^{-j\Phi} \right) &= \frac{1}{2j} |\tilde{\gamma}| \left( e^{j(\Phi+\theta)} + e^{j(\Phi-\theta)} \right) \\ &= 2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \cos(\Phi + \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

### A.4.3 Valeurs stationnaires des densités d'inversion de population

La solution stationnaire de l'harmonique à  $\pm 2k$  de la densité d'inversion de population  $\mathcal{N}_1$  est directe et vaut :

$$\mathcal{N}_1 e^{j\Phi} = -\frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{2} \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \quad (\text{A.61})$$

La solution stationnaire de la valeur moyenne de la densité d'inversion de population  $\bar{\mathcal{N}}$  est :

$$\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \eta - \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \right) \quad (\text{A.62})$$

Le système A.56 se réduit alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \left[ \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \eta - \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \right) \right] - \frac{Y}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) - \gamma \sin(\Phi + \theta_2) \right] \\ \quad + \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.63a})$$

$$\frac{dX}{dt} = -X \left( \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N} \right) - \frac{Y}{2} \left[ \gamma \sin(\Phi + \theta_1) + \gamma \sin(\Phi + \theta_2) \right] \quad (\text{A.63b})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \left( \cos(\Phi + \theta_1) - \cos(\Phi + \theta_2) \right) \quad (\text{A.63c})$$

#### A.4.4 Valeur stationnaire de la différence des phases $\Phi$

En développant sous forme exponentielle les fonctions  $\cos(\Phi + \theta_1)$  et  $\cos(\Phi + \theta_2)$  et en utilisant l'équation A.60, il vient naturellement :

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\gamma |\sin(\delta_\theta)| \cos(\Phi + \theta) \quad (\text{A.64})$$

Les solutions stationnaires de  $\Phi$  sont telles que :

$$\Phi = -\theta \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.65})$$

L'étude de stabilité de  $\Phi$  permet de statuer sur le signe devant  $\frac{\pi}{2}$ . Pour cela, considérons de faibles variations  $\delta\Phi \ll 1$  autour de  $\Phi$ . L'équation A.64 se réécrit alors :

$$\frac{d\delta\Phi}{dt} = -\gamma |\sin(\delta_\theta)| \cos\left(\delta\Phi \pm \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{A.66})$$

La seule solution stable est la solution "-", ainsi :

$$\Phi = -\theta - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.67})$$

si bien que :

$$\tan(\Phi) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)} \quad (\text{A.68})$$

#### A.4.5 Valeur stationnaire de la somme des intensités normalisées $Y$

En développant sous forme exponentielle les fonctions  $\sin(\Phi + \theta_1)$  et  $\sin(\Phi + \theta_2)$  et en utilisant A.59, il vient naturellement :

$$\frac{dY}{dt} = -Y \left[ \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \eta - \frac{3}{2} \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \right) - \gamma |\sin(\delta_\theta)| \right] \quad (\text{A.69})$$

En utilisant A.17, la solution stationnaire de  $Y$  s'écrit :

$$\frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} = \frac{2}{3}(\eta - 1) \quad (\text{A.70})$$

**Remarque :**

On peut développer  $\gamma \sin(\Phi + \theta_1) - \gamma \sin(\Phi + \theta_2)$  de deux façons :

$$\begin{aligned} \gamma \sin(\Phi + \theta_1) - \gamma \sin(\Phi + \theta_2) &= 2\gamma \sin(\delta_\theta) \cos\left(\Phi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\ &= 2\gamma |\sin(\delta_\theta)| \sin(\Phi + \theta) \end{aligned}$$

Si l'on suppose que  $0 < \delta_\theta < \frac{\pi}{2}$ , alors on peut identifier les deux égalités et poser :

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.71})$$

#### A.4.6 Valeur stationnaire de la différence des intensités normalisées $X$

L'équation d'évolution de  $X$  se réécrit :

$$\frac{dX}{dt} = -X \left[ \frac{1}{\tau_p} - \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \eta - \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \right) \right] - Y\gamma \cos(\delta_\theta) \sin\left(\Phi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (\text{A.72})$$

En utilisant les équations A.70 et A.71, il vient :

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{X}{3} \left[ \frac{1}{\tau_p} (1 - \eta) + \gamma |\sin(\delta_\theta)| (\eta + 2) \right] \quad (\text{A.73})$$

Le solution stationnaire de  $X$  amène deux cas possibles :

$$\text{solution 1 : } X = 0$$

$$\text{solution 2 : } \gamma = \frac{1}{\tau_p |\sin(\delta_\theta)|} \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 2} \right)$$

Cependant, la solution 2 est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Il reste donc seulement la solution  $X = 0$  qui, elle, est conforme avec nos hypothèses initiales. Dans ce régime, la rétrodiffusion est suffisamment forte pour stabiliser l'émission bidirectionnelle au point où les intensités des deux modes co- et contra-propagatifs sont exactement égales.

### A.4.7 Retour sur les densités d'inversion de population

Les solutions stationnaires de  $\bar{\mathcal{N}}$  et  $\mathcal{N}_1$  peuvent se réécrire en utilisant l'équation A.70 :

$$\bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{\eta + 2}{3} \right) \quad (\text{A.74})$$

$$\mathcal{N}_1 e^{j\Phi} = -\mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \frac{\eta - 1}{3} \right) \quad (\text{A.75})$$

On notera la relation :

$$\bar{\mathcal{N}} + \mathcal{N}_1 e^{j\Phi} = \mathcal{N}_{\text{Th}} \quad (\text{A.76})$$

### A.4.8 Bilan

Les solutions stationnaires des variables décrivant le laser en régime d'émission bidirectionnelle sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} = \frac{1}{\tau_p} - \gamma |\delta\theta| \\ \frac{c\sigma_e}{N} \bar{\mathcal{N}} = \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_{\text{Th}} \left( \eta - \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \right) \\ \frac{c\sigma_e}{N} \mathcal{N}_1 = -\frac{\mathcal{N}_{\text{Th}}}{2} \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} \\ \frac{Y}{E_{\text{sat}}^2} = \frac{2}{3} (\eta - 1) \\ X = 0 \\ \tan(\Phi) = \frac{\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)} \end{array} \right.$$

# Bibliographie

- [1] X.S. Yao and L. Maleki. High frequency optical subcarrier generator. *Electronics Letters*, 30:1525–1526, 1994.
- [2] X.S. Yao and L. Maleki. Optoelectronic oscillator for photonic systems. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 32:1141–1149, 1996.
- [3] J. Yao. Microwave photonics. *Journal of Lightwave Technology*, 27(3):314–335, 2009.
- [4] X.S. Yao and L. Maleki. Optoelectronic microwave oscillator. *Journal of Optical Society of America B*, 70:1725–1735, 2004.
- [5] L. Maleki, A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, and V. S. Ilchenko. Tunable delay line with interacting Whispering-Gallery-Mode resonators. *Optics Letters*, 29(6):626–628, 2004.
- [6] A. Coillet, R. Henriët, P. Salzenstein, K. Phan Huy, L. Larger, and Y. K. Chembo. Time-domain dynamics and stability analysis of optoelectronic oscillators based on Whispering-Gallery Mode resonators. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 19(5):6000112, 2013.
- [7] R. M. Nguimdo, K. Saleh, A. Coillet, G. Lin, R. Martinenghi, and Y. K. Chembo. Phase noise performance of optoelectronic oscillators based on Whispering-Gallery Mode resonators. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 51(11):1–8, 2015.
- [8] F. Bretenaker and A. Le Floch. The dynamics of spatially-resolved laser eigenstates. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 26(9):1451–1454, 1990.
- [9] M. Brunel, A. Amon, and M. Vallet. Dual-polarization microchip laser at 1.53  $\mu\text{m}$ . *Optics Letters*, 30(18):2418–2420, Sep 2005.
- [10] G. Pilllet, L. Morvan, M. Brunel, F. Bretenaker, D. Dolfi, M. Vallet, J.-P. Huignard, and A. Le Floch. Dual-frequency laser at 1.5  $\mu\text{m}$  for optical distribution and



- generation of high-purity microwave signals. *Journal of Lightwave Technology*, 26(15):2764–2773, 2008.
- [11] G. Danion, C. Hamel, L. Frein, F. Bondu, G. Loas, and M. Alouini. Dual frequency laser with two continuously and widely tunable frequencies for optical referencing of GHz to THz beatnotes. *Optics express*, 22(15):17673–17678, 2014.
- [12] L. Xiao, S. Trebaol, Y. Dumeige, Z. Cai, M. Mortier, and P. Féron. Dual wavelength  $Er^{3+}$ : ZBLALiP Whispering Gallery Mode laser. In *Transparent Optical Networks, 2009. ICTON'09. 11th International Conference on*, pages 1–4. IEEE, 2009.
- [13] P. Féron, L. Xiao, S. Trebaol, Y. Dumeige, Y. G. Boucher, Z. Cai, and M. Mortier. Simultaneous oscillation of wavelength-tunable singlemode lasers using  $Er^{3+}$  : ZBLALiP Whispering Gallery Mode resonator. In *Frontiers in Optics*, page FThO3. Optical Society of America, 2009.
- [14] L. Xiao, S. Trebaol, Y. Dumeige, Z. Cai, M. Mortier, and P. Féron. Miniaturized optical microwave source using a dual-wavelength Whispering Gallery Mode laser. *IEEE Photonics Technology Letters*, 22(8):559–561, 2010.
- [15] G. Mie. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der physik*, 330(3):377–445, 1908.
- [16] G. Mie. Pioneering mathematical description of scattering by spheres. *Ann. Phys*, 25:337, 1908.
- [17] L. Rayleigh. the problem of the whispering gallery. *Scientific papers*, 5:617, 1912.
- [18] L. Rayleigh. Further applications of Bessel's functions of high order to the whispering gallery and allied problems. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27:100–109, 1914.
- [19] C. C. Lam, P. T. Leung, and K. Young. Explicit asymptotic formulas for the positions, widths, and strengths of resonances in Mie scattering. *Journal of Optical Society of America B*, 9(9):1585, 1992.
- [20] C. G. B. Garret, W. Kaiser, and W. L. Bond. Stimulated emission into optical whispering modes of spheres. *Physical Review Letters*, 15:1807, 1961.
- [21] H. M. Tzeng, K. F. Wall, M. B. Long, and R. K. Chang. Laser emission from individual droplets at wavelength corresponding to Morphology Dependent Resonances. *Optics Letters*, 11:614–616, 1984.

- [22] V. Sandoghdar, F. Treussart, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Very low threshold Whispering-Gallery-Mode microsphere Laser. *Physical Review A*, 54:1777, 1996.
- [23] P. Féron. Whispering Gallery Mode Laser in Erbium doped fluoride glasses. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 29(1-2):279–309, 2004.
- [24] M. Kuwata-Gonokami, S. Ozawa, R. H. Jordan, A. Dodabalapur, H. E. Katz, M. L. Schilling, and R. E. Slusher. Polymer microdisk and microring Lasers. *Optics letters*, 20(20):2093–2095, 1995.
- [25] P. Michler, A. Kiraz, L. Zhang, C. Becher, E. Hu, and A. Imamoglu. Laser emission from quantum dots in microdisk structures. *Applied Physics Letters*, 77(2):184–186, 2000.
- [26] T. J Kippenberg, J. Kalkman, A. Polman, and K. J. Vahala. Demonstration of an Erbium-doped microdisk Laser on a silicon chip. *Physical Review A*, 74(5):051802, 2006.
- [27] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, V. S. Ilchenko, and L. Maleki. Optical resonators with ten million finesse. *Optics Express*, 15(11):6768–6773, 2007.
- [28] H.-B. Lin and A. J. Campillo. CW nonlinear optics in droplet microcavities displaying enhanced gain. *Physical Review Letters*, 73:2440–2443, 1994.
- [29] J. Zhu, S. K. Ozdemir, Y.-F. Xiao, L. Li, L. He, D.-R. Chen, and L. Yang. On-chip single nanoparticle detection and sizing by mode splitting in an ultrahigh-Q microresonator. *Nature photonics*, 4(1):46–49, 2010.
- [30] L. He, Ş. K. Özdemir, J. Zhu, W. Kim, and L. Yang. Detecting single viruses and nanoparticles using Whispering Gallery microlasers. *Nature nanotechnology*, 6(7):428–432, 2011.
- [31] G. C. Righini, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, G. Nunzi Conti, D. Ristic, and S. Soria. Whispering Gallery Mode microresonators: fundamentals and applications. *Rivista del Nuovo Cimento*, 34(7):435–488, 2011.
- [32] G. Guan, S. Arnold, and M. V. Otugen. Temperature measurements using a micro-optical sensor based on Whispering Gallery Modes. *AIAA journal*, 44(10):2385, 2006.

- [33] Q. Ma, T. Rossmann, and Z. Guo. Whispering Gallery Mode silica microsensors for cryogenic to room temperature measurement. *Measurement Science and Technology*, 21(2):025310, 2010.
- [34] A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, D. Strekalov, V. S. Ilchenko, and L. Maleki. Review of applications of Whispering Gallery Mode resonators in photonics and nonlinear optics. *IPN Progress Report*, 42(162):1–51, 2005.
- [35] T. Ioppolo, M. Kozhevnikov, V. Stepaniuk, M. V. Ötügen, and V. Sheverev. Micro-optical force sensor concept based on Whispering Gallery Mode resonators. *Applied Optics*, 47(16):3009–3014, 2008.
- [36] M. R. Foreman, J. D. Swaim, and F. Vollmer. Whispering Gallery Mode sensors. *Advances in Optics and Photonics*, 7(2):168–240, Jun 2015.
- [37] F. Lissillour, D. Messenger, G.M. Stéphan, and P. Féron. Whispering Gallery Modes laser at  $1,56 \mu\text{m}$  excited by a fiber taper. *Optics Letters*, 26(14):1051–1053, July 2001.
- [38] F. Lissillour, R. Gabet, P. Féron, P. Besnard, and G. Stéphan. Linewidth narrowing of a DFB semiconductor laser at  $1.55 \mu\text{m}$  by optical injection of an Er:ZBLAN microspherical laser. *Europhysics Letters*, 55(4):499–504, 2001.
- [39] Y. Dumeige, A. M. Yacomotti, P. Grinberg, K. Bencheikh, E. Le Cren, and J. A. Levenson. Microcavity-quality-factor enhancement using nonlinear effects close to the bistability threshold and coherent population oscillations. *Physical Review A*, 85(6):063824, 2012.
- [40] V. Huet, A. Rasoloniaina, P. Guillemé, P. Rochard, P. Féron, M. Mortier, J. A. Levenson, K. Bencheikh, A. M. Yacomotti, and Y. Dumeige. Millisecond photon lifetime in a slow-light microcavity. *Physical Review Letters*, 116(13):133902, 2016.
- [41] A. Yariv. Universal relations for coupling of optical power between microresonators and dielectric waveguides. *Electronics Letters*, 36(4):321, February 2000.
- [42] H. Haus. *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.
- [43] F. Gires and P. Tournois. Interféromètre utilisable pour la compression d’impulsions lumineuses modulées en fréquence. *Compte Rendus de l’Académie des Sciences*, 258:6112–6115, 1964.
- [44] V. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and V. S. Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering gallery modes. *Physics Letters A*, 137:393, 1989.

- [45] R. K. Chang and A. J. Campillo. *Optical processes in microcavities*, volume 3 of *Advanced Series in Applied Physics*. World Scientific, 1996.
- [46] S. Trebaol. *Etudes expérimentales des propriétés dispersives de structures photoniques à base de microrésonateurs pour la réalisation de fonctions optiques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2010.
- [47] A. Rasoloniaina. *Études expérimentales de dispositifs intégrés à base de microrésonateurs à mode de galerie en verres actifs*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2014.
- [48] M. L. Gorodetsky, A. D. Pryamikov, and V. S. Ilchenko. Rayleigh scattering in high- $Q$  microspheres. *Journal of Optical Society of America B*, 17:1051–1057, 2000.
- [49] T.J. Kippenberg, S.M. Spillane, and K.J. Vahala. Modal coupling in traveling-wave resonators. *Optics Letters*, 27:1669–1671, 2002.
- [50] S. Trebaol, Y. Dumeige, and P. Féron. Ringing phenomenon in coupled cavities: Application to modal coupling in Whispering-Gallery-Mode resonators. *Physical Review A*, 81:043828, Apr 2010.
- [51] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique Quantique, Tome I*. Hermann, 1973.
- [52] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique Quantique, Tome II*. Hermann, 1973.
- [53] A. Messiah. *Mécanique Quantique*. Dunod, 1995.
- [54] R. Hull, J. Parisi, R. M. Osgood Jr., H. Warlimont, G. Liu, and B. Jacquier. *Spectroscopic properties of rare earths in optical materials*. Springer, 2005.
- [55] C. A. Morrison and R. P. Leavitt. *Handbook on the Physics and Chemistry of Rare Earths*. North Holland Publishing Company, 1982.
- [56] M. J. F. Digonnet. *Rare-earth-doped fiber lasers and amplifiers, second edition, revised and expanded*. CRC press, 2001.
- [57] M. Mortier, P. Goldner, P. Féron, G. M. Stephan, H. Xu, and Z. Cai. New fluoride glasses for laser applications. *J. Non-Cryst. Solids*, 326 & 327:505 – 509, 2003.
- [58] D. G. O’Shea, J. M. Ward, B. J. Shortt, M. Mortier, P. Féron, and S. Nic Chormaic. Upconversion channels in  $Er^{3+}$  : ZBLALiP fluoride glass microspheres. *European Physical Journal Applied Physics*, 40:181–188, 2007.

- [59] Z. P. Cai, H. Y. Xu, G. M. Stephan, P. Feron, and M. Mortier. Red-shift in *Er* : ZBLALiP whispering gallery mode laser. *Optics Communications*, 229:311–315, 2004.
- [60] C. Arnaud. *Etude de fonctions actives et/ou passives à base de micro-résonateurs à mode de galerie*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2004.
- [61] D. E. Mc Cumber. Theory of phonon-terminated optical masers. *Physical Review*, 134:A299–A306, Apr 1964.
- [62] S. Taccheo, P. Laporta, and C. Svelto. Widely tunable single frequency Erbium-Ytterbium phosphate glass laser. *Applied Physics Letters*, 68(19):2621–2623, 1996.
- [63] G. Nunzi Conti, A. Chiasera, L. Ghişa, S. Berneschi, M. Brenci, Y. Dumeige, S. Pelli, S. Sebastiani, P. Feron, M. Ferrari, et al. Spectroscopic and lasing properties of  $Er^{3+}$ -doped glass microspheres. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 352(23):2360–2363, 2006.
- [64] D. L. Veasey, D. S. Funk, P. M. Peters, N. A. Sanford, G. E. Obarski, N. Fontaine, M. Young, A. P. Peskin, W.-C. Liu, S.-N. Houde-Walter, et al. *Yb – Er*-codoped and *Yb*-doped waveguide lasers in phosphate glass. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 263:369–381, 2000.
- [65] K. Liu and E. Y. B. Pun. Comparative studies of spectroscopic properties in  $Er^{3+}$ - $Yb^{3+}$  codoped phosphate glasses. *Journal of Alloys and Compounds*, 470(1):340–346, 2009.
- [66] F. Treussart. *Etude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions Néodyme*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1997.
- [67] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press, 1987.
- [68] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2001.
- [69] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie des champs*. Mir Moscou, 1964.
- [70] M. L. Gorodetsky and A. E. Fomin. Geometrical theory of Whispering-Gallery Modes. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12:33–39, 2006.
- [71] J. Stratton. *Théorie de l'électromagnétisme*. Dunod, 1961.
- [72] W. W. Hansen. A new type of expansion in radiation problems. *Physical Review*, 47(2):139, 1935.

- [73] H. M. Nussenzveig. *Diffraction effects in semi-classical scattering*. Cambridge University Press, 1992.
- [74] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover publications, 1970.
- [75] S. Schiller and R. L. Byer. High-resolution spectroscopy of whispering gallery modes in large dielectric spheres. *Optics Letters*, 16(15):1138–1140, 1991.
- [76] F. Treussart, V. S. Ilchenko, J.-F. Roch, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Evidence for intrinsic Kerr bistability of high- $Q$  microsphere resonators in superfluid helium. *European Physical Journal D*, 1:235, 1998.
- [77] J. Bravo-Abad, A. Rodriguez, P. Bermel, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, and M. Soljacic. Enhanced nonlinear optics in photonic-crystal microcavities. *Optics Express*, 15(24):16161, 2007.
- [78] K. J. Vahala. *Optical Microcavities*. World Scientific Pub Co Inc, 2004.
- [79] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons, 1975.
- [80] D. W. Vernooy, V. S. Ilchenko, H. Mabuchi, E. W. Streed, and H. J. Kimble. High- $Q$  measurements of fused-silica microspheres in the near infrared. *Optics Letters*, 23(4):247–249, 1998.
- [81] A. N. Oraevsky. Whispering-gallery waves. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 32(5):377–400, 2002.
- [82] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and V. S. Ilchenko. Quality-factor and nonlinear properties of optical Whispering-Gallery Modes. *Physics Letters A*, 137(7):393 – 397, 1989.
- [83] D. S. Weiss, V. Sandoghdar, J. Hare, V. Lefevre-Seguin, J.-M. Raimond, and S. Haroche. Splitting of high- $Q$  Mie modes induced by light backscattering in silica microspheres. *Optics Letters*, 20:1835–1837, 1995.
- [84] V. S. Ilchenko, X. S. Yao, and L. Maleki. Pigtailling the high- $Q$  microsphere cavity: a simple fiber coupler for optical Whispering-Gallery Modes. *Optics Letters*, 24:723–725, 1999.
- [85] B.E. Little, S.J.P. Laine, D.R. Lim, H. A. Haus, L.C. Kimerling, and S.T. Chu. Pedestal antiresonant reflecting waveguides for robust coupling to microsphere

- resonators and for microphotonic circuits. *Optics Letters*, 25(1):73–75, January 2000.
- [86] J. C. Knight, G. Cheung, F. Jacques, and T. A. Birks. Phase-matched excitation of whispering-gallery-mode resonances by a fiber taper. *Optics Letters*, 22(15):1129–1131, 1997.
- [87] M. Cai and K. Vahala. Highly efficient optical power transfer to Whispering-Gallery Modes by use of a symmetrical dual-coupling configuration. *Optics Letters*, 25(4):260, February 2000.
- [88] F. Lissillour. *L'effet laser dans des microsphères de verre fluore dopées Neodyme et Erbium: Etude expérimentale de différents couplages et de largeurs de raie*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2000.
- [89] J. Bures. *Optique guidée: fibres optiques et composants passifs tout-fibre*. Presses inter Polytechnique, 2009.
- [90] P. Guillemé. *Génération de seconde harmonique dans les microdisques de phosphore de gallium intégrés sur silicium*. Thèse de doctorat, Université Bretagne Loire, 2016.
- [91] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre. *Introduction aux Lasers et à l'optique quantique*. 1997.
- [92] K. Blum. *Density matrix theory and applications*, volume 64. Springer Science & Business Media, 2012.
- [93] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, Calif, 1986.
- [94] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, 1992.
- [95] F. Bretenaker and C. Drag. Cours de physique des lasers. *Archive ouverte de la Société Française d'Optique*, SFO-00334462, 2008.
- [96] H. Statz and G. DeMars. Transients and oscillation pulses in masers. In *Quantum Electronics*, page 530, 1960.
- [97] E. Rosencher and B. Vinter. *Optoelectronics*. Cambridge University Press, 2002.
- [98] S. De, V. Pal, A. El Amili, G. Pillet, G. Baili, M. Alouini, I. Sagnes, R. Ghosh, and F. Bretenaker. Intensity noise correlations in a two-frequency VECSEL. *Optics Express*, 21(3):2538–2550, Feb 2013.

- [99] D. Marcuse. Loss analysis of single-mode fiber splices. *Bell System Technical Journal*, 56(5):703–718, may 1977.
- [100] W. T. Silfvast. *Laser Fundamentals*. Cambridge University Press, 2012.
- [101] V. Huet. *Étude et réalisation de lignes à retard optique intégrées dans des micro-résonateurs à modes de galerie en verres actifs dopés erbium*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, Décembre 2015.
- [102] F. Tan, M. K. Wu, M. Liu, M. Feng, and N. Holonyak Jr. Relative intensity noise in high speed microcavity laser. *Applied Physics Letters*, 103(14):141116, 2013.
- [103] G. Björk, A. Karlsson, and Y. Yamamoto. Definition of a laser threshold. *Physical Review A*, 50(2):1675, 1994.
- [104] Y. Yamamoto and R. E. Slusher. Optical processes in microcavities. *Physics Today*, 46:66–73, 1993.
- [105] A. Lebreton, I. Abram, R. Braive, I. Sagnes, I. Robert-Philip, and A. Beveratos. Unequivocal differentiation of coherent and chaotic light through interferometric photon correlation measurements. *Physical Review Letters*, 110(16):163603, 2013.
- [106] A. Lebreton, I. Abram, N. Takemura, M. Kuwata-Gonokami, I. Robert-Philip, and A. Beveratos. Stochastically sustained population oscillations in high- $\beta$  nanolasers. *New Journal of Physics*, 15(3):033039, 2013.
- [107] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [108] C. Fabre, G. Grynberg, and A. Aspect. *Introduction aux lasers et l'optique quantique*. Ellipse, 1997.
- [109] H.-A. Bachor and T. C. Ralph. *A guide to experiments in quantum optics*. Wiley, 2004.
- [110] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes: introduction à l'électrodynamique quantique*. InterEditions, Editions du CNRS, 1987.
- [111] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 1973.
- [112] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Physical Review*, 32(1):110, 1928.



- [113] G. Baili, F. Bretenaker, M. Alouini, L. Morvan, D. Dolfi, and I. Sagnes. Experimental investigation and analytical modeling of excess intensity noise in semiconductor class-A lasers. *Journal of Lightwave Technology*, 26(8):952–961, 2008.
- [114] G. Baili, M. Alouini, T. Malherbe, D. Dolfi, I. Sagnes, and F. Bretenaker. Direct observation of the class-B to class-A transition in the dynamical behavior of a semiconductor laser. *Europhysics Letters*, 87(4):44005, 2009.
- [115] F. N. Hooge, T. G. M. Kleinpenning, and L. K. J. Vandamme. Experimental studies on  $1/f$  noise. *Reports on Progress in Physics*, 44(5):479–532, may 1981.
- [116] L.K.J. Vandamme, X. Li, and D. Rigaud.  $1/f$  noise in MOS devices, mobility or number fluctuations? *IEEE Transactions on Electron Devices*, 41(11):1936–1945, 1994.
- [117] L. K. J. Vandamme and F. N. Hooge. What do we certainly know about  $1/f$  noise in MOSTs? *IEEE Transactions on Electron Devices*, 55(11):3070–3085, nov 2008.
- [118] G. Lin, B. Qian, F. Oručević, Y. Candela, J.-B. Jager, Z. Cai, V. Lefèvre-Seguin, and J. Hare. Excitation mapping of whispering gallery modes in silica microcavities. *Optics Letters*, 35(4):583–585, 2010.
- [119] Y. Candéla. *Microcavités de silice : Excitation par fibre des modes de galerie et fonctionnalisation par des nanocristaux de silicium*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2011.
- [120] L. He, S.K. Ozdemir, Y.-F. Xiao, and L. Yang. Gain-induced evolution of mode splitting spectra in a high- $Q$  active microresonator. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 46(11):1626–1633, 2010.
- [121] Y. Barbarin, E. A. J. M. Bente, M. J. R. Heck, J. H. Den Besten, G. Guidi, Y S. Oei, J. J. M. Binsma, and M. K. Smit. Realization and modeling of a 27-GHz integrated passively mode-locked ring laser. *IEEE Photonics Technology Letters*, 17(11):2277–2279, 2005.
- [122] G. Giuliani, R. Miglierina, M. Sorel, and A. Scire. Linewidth, autocorrelation, and cross-correlation measurements of counterpropagating modes in  $GaAs - AlGaAs$  semiconductor ring lasers. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 11(5):1187–1192, 2005.

- [123] J. Javaloyes and S. Balle. Emission directionality of semiconductor ring lasers: A traveling-wave description. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 45(5):431–438, 2009.
- [124] M. Kim, K. Kwon, J. Shim, Y. Jung, and K. Yu. Partially directional microdisk laser with two rayleigh scatterers. *Optics Letters*, 39(8):2423–2426, 2014.
- [125] M. Sorel, P. J. R. Laybourn, A. Scirè, S. Balle, G. Giuliani, R. Miglierina, and S. Donati. Alternate oscillations in semiconductor ring lasers. *Optics Letters*, 27(22):1992–1994, 2002.
- [126] M. Sorel, G. Giuliani, A. Scire, R. Miglierina, S. Donati, and P. J. R. Laybourn. Operating regimes of *GaAs – AlGaAs* semiconductor ring lasers: experiment and model. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 39(10):1187–1195, 2003.
- [127] G. Van der Sande, L. Gelens, P. Tassin, A. Scirè, and J. Danckaert. Two-dimensional phase-space analysis and bifurcation study of the dynamical behaviour of a semiconductor ring laser. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 41(9):095402, 2008.
- [128] E. L. Klochan, L. S. Kornienko, N. V. Kravtsov, E. G. Lariontsev, and A. N. She-laev. Oscillation regimes in a rotating solid-state ring laser. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 65:1344–1356, 1973.
- [129] S. J. Frisken. Transient bragg reflection gratings in Erbium-doped fiber amplifiers. *Optics Letters*, 17(24):1776–1778, 1992.
- [130] S. K. Kim, H. K. Kim, and B. Y. Kim.  $Er^{3+}$ -doped fiber ring laser for gyroscope applications. *Optics Letters*, 19(22):1810–1812, 1994.
- [131] S. Schwartz. *Gyrolaser à état solide. Application des lasers à atomes à la gyrométrie*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X, 2006.
- [132] S. Schwartz, G. Feugnet, P. Bouyer, E. Lariontsev, A. Aspect, and J.-P. Pocholle. Mode-coupling control in resonant devices: Application to solid-state ring lasers. *Physical Review Letters*, 97(9):093902, 2006.
- [133] S. Schwartz, G. Feugnet, E. Lariontsev, and J.-P. Pocholle. Oscillation regimes of a solid-state ring laser with active beat-note stabilization: From a chaotic device to a ring-laser gyroscope. *Physical Review A*, 76(2):023807, 2007.

- 
- [134] F. Schwartz, F. Guty, G. Feugnet, P. Bouyer, and J.-P. Pocholle. Suppression of nonlinear interactions in resonant macroscopic quantum devices: The example of the solid-state ring laser gyroscope. *Physical Review Letters*, 100(18):183901, 2008.
- [135] F.-J. Rao, S.-F. Chen, and L. Fu. Bidirectional oscillations in *Er*-doped fiber ring cavity with polarization splitting for rotation sensing. *Optics Communications*, 284(5):1284–1288, 2011.
- [136] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [137] R. Adler. A study of locking phenomena in oscillators. *Proceedings of the IRE*, 34(6):351–357, 1946.
- [138] S. De, G. Baili, S. Bouchoule, M. Alouini, and F. Bretenaker. Intensity-and phase-noise correlations in a dual-frequency vertical-external-cavity surface-emitting laser operating at telecom wavelength. *Physical Review A*, 91(5):053828, 2015.
- [139] P. Féron, C. Arnaud, M. Boustimi, G. Nunzi-Conti, G.-C. Righini, and M. Mor-tier. Optical feedback on Whispering Gallery Mode laser: wavelength shifts in Erbium-doped microspherical laser. In *Photonics Europe*, pages 199–209. International Society for Optics and Photonics, 2004.
- [140] S. De, A. El Amili, M. Alouini, F. Bretenaker, et al. Theoretical and experimental analysis of intensity noise correlations in an optically pumped, dual-frequency *Nd* : YAG laser. *Journal of the Optical Society of America B*, 30(11):2830–2839, 2013.
- [141] W. Liang, A. Savchenkov, V. Ilchenko, R. Griffith, E. De Cuir, S. Kim, A. Matsko, and L. Maleki. On sagnac frequency splitting in a solid-state ring raman laser. *Optics Letters*, 42(22):4736–4739, 2017.

