



**HAL**  
open science

# Analyse et correction de surface d'onde post-coronographique pour l'imagerie d'exoplanètes

Olivier Herscovici-Schiller

► **To cite this version:**

Olivier Herscovici-Schiller. Analyse et correction de surface d'onde post-coronographique pour l'imagerie d'exoplanètes. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. NNT : 2018PSLEO022 . tel-02015796v2

**HAL Id: tel-02015796**

**<https://theses.hal.science/tel-02015796v2>**

Submitted on 17 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Observatoire de Paris  
Université de recherche Paris Sciences et Lettres

Préparée au Département Optique et Techniques Associées  
de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

## Analyse et correction de surface d'onde post-coronographique pour l'imagerie d'exoplanètes

École doctorale n°127

ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

Spécialité ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Soutenue par  
**Olivier Herscovici-Schiller**  
le jeudi 11 octobre 2018

Dirigée par **Laurent Mugnier**



### COMPOSITION DU JURY :

Daniel Rouan  
Observatoire de Paris, président

Dimitri Mawet  
California Institute of Technology  
& Jet Propulsion Laboratory, rapporteur

Frantz Martinache  
Observatoire de la Côte d'Azur, rapporteur

Karine Perraut  
Institut de Planétologie et d'Astrophysique  
de Grenoble, examinatrice

Kjetil Dohlen  
Laboratoire d'Astrophysique de Marseille,  
examineur

Raphaël Galicher  
Université Paris VII – Denis Diderot  
& Observatoire de Paris, examineur

Laurent Mugnier  
ONERA, directeur de thèse

Jean-François Sauvage  
ONERA & Laboratoire d'Astrophysique  
de Marseille, codirecteur

Jean-Michel Le Duigou  
Centre National d'Études Spatiales, invité



**ANALYSE ET CORRECTION DE SURFACE  
D'ONDE POST-CORONOGRAPHIQUE POUR  
L'IMAGERIE D'EXOPLANÈTES**

Olivier Herscovici-Schiller

sous la direction de  
Laurent Mugnier

et de  
Jean-François Sauvage



*La Nuit étoilée*, de Vincent van Gogh. Crédit du cliché : inconnu/MoMA

*À Alexandra.*



---

# Sommaire

---

<b>Sommaire</b>	<b>V</b>
<b>Remerciements</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Contexte, objectifs et méthodes</b>	<b>3</b>
1 En quête d'autres mondes	5
2 Modélisation de la formation d'images et formalisme de la diversité de phase coronographique	19
<b>II Diversité de phase coronographique en présence de turbulence</b>	<b>31</b>
3 Un modèle analytique d'imagerie coronographique en présence de turbulence	33
4 Extension de la diversité de phase coronographique à la mesure en présence de turbulence	47
5 Validation en laboratoire de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence	61
<b>III Analyse et contrôle de surface d'onde coronographique pour l'imagerie à très haut contraste</b>	<b>75</b>
6 Validation expérimentale de la reconstruction conjointe de phase et d'amplitude par diversité de phase coronographique	77
7 Optimisation non linéaire du contraste	93
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>105</b>



<b>Annexes : Calculs et publications</b>	<b>107</b>
<b>A Publications, présentations et activités hors recherche</b>	<b>109</b>
<b>B Publication : forme analytique de la réponse impulsionnelle d'un télescope coronographique en présence de turbulence (<i>MNRAS</i>, 2017)</b>	<b>113</b>
<b>C Calculs</b>	<b>119</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>
<b>Table des figures</b>	<b>131</b>
<b>Table des matières</b>	<b>135</b>

*« Nous sommes comme des nains assis sur des épaules de géants. Si nous voyons plus de choses et plus lointaines qu'eux, ce n'est pas à cause de la perspicacité de notre vue, ni de notre grandeur, c'est parce que nous sommes élevés par eux. »*

Bernard de Chartres,  
d'après Jean de Salisbury

---

## Remerciements

---



ETTE THÈSE doit beaucoup à Laurent Mugnier. Après m'avoir choisi pour étudier le problème dont traitent mes travaux, Laurent m'a guidé, conseillé et dirigé. Nos fréquentes discussions devant son tableau font partie de mes beaux souvenirs de thèse. Il m'a expliqué patiemment tous les concepts scientifiques que j'aurais pu trouver dans des livres quand j'en avais besoin. Surtout, il m'a inculqué ce qu'on ne trouve dans aucun livre par ses recommandations, ses critiques et son exemple. Qu'il s'agisse de propagation du champ électromagnétique, de problèmes inverses, de manière de présenter un texte scientifique ou des mille autres choses qui font le quotidien du chercheur, il a dirigé mon apprentissage avec disponibilité et bienveillance. Je l'en remercie.

Cette thèse doit également beaucoup à Jean-François Sauvage, qui a codirigé mes travaux. Je le remercie de nos nombreuses discussions, de ses commentaires sur mes textes et mes présentations, et du travail que nous avons accompli ensemble. Son aide et son enseignement ont été cruciaux dans la plupart de mes expériences ; j'ai encore en tête l'écho des secondes qui s'écoulent dans le noir du sous-sol du LAM. Je le remercie également de m'avoir transmis une forme de pragmatisme et d'efficacité sans lesquels le chercheur peut se mettre à tourner en rond.

Je remercie Daniel Rouan de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie Frantz Martinache et Dimitri Mawet d'avoir bien voulu être rapporteurs de ce manuscrit.

Je remercie Karine Perraut d'avoir participé à mon jury de thèse.

Je remercie Kjetil Dohlen d'avoir participé à mon jury de thèse, ainsi que de son aide pendant les expériences sur le banc MITHiC. Voir Kjetil créer un nouveau plan pupille et réaligner le banc en quelques quarts d'heures tout en m'expliquant simplement ce qu'il faisait et les principes optiques sous-jacents, ce fut un peu comme d'assister à un tour de magie.

Je remercie Raphaël Galicher d'avoir participé à mon jury de thèse. Je le remercie particulièrement pour ses nombreuses remarques et corrections, qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit. Je le remercie, ainsi que Pierre Baudoz, de leur intérêt pour mes travaux et du travail que nous avons fait ensemble sur le banc THD, tant en ce qui concerne la diversité de phase coronographique que l'optimisation du contraste. Leurs points de vue m'ont toujours beaucoup donné à réfléchir. Je leur suis également reconnaissant d'avoir pris du temps pour discuter avec moi des possibilités de carrière dans la recherche, et de m'avoir recommandé à l'occasion.

Je remercie Arthur Vigan de ses conseils et de son aide lors des expériences sur le banc

MITHiC et le traitement des données correspondantes. Je le remercie d'avoir participé à l'acquisition sur SPHERE des données dont j'espère qu'elles confirmeront l'efficacité de COFFEE et feront progresser notre compréhension des aberrations différentielles.

Je remercie Mamadou N'Diaye de nos échanges toujours stimulants, et d'avoir acquis les données SPHERE avec Arthur.

Je remercie Lucie Leboulleux de notre collaboration. Ses talents d'opticienne et son indéfectible enthousiasme ont été déterminants dans nos premiers résultats de *dark hole* en temps très contraint.

Je remercie Olivier Guyon de son intérêt pour la diversité de phase coronographique et de nos discussions sur la méthode et sa mise en œuvre pratique. J'espère que COFFEE sera un jour effectivement utilisé sur Subaru ! Je remercie Gérard Rousset de m'avoir donné l'occasion d'enseigner à l'Université Paris VII – Denis Diderot, et à l'École d'ingénieurs de cette université. J'espère continuer longtemps à bénéficier du contact de ses étudiantes et étudiants. Je remercie également Gérard d'avoir pris le temps de me conseiller sur l'accès aux carrières d'enseignant-chercheur et de chercheur.

Je remercie Carlos Correia de m'avoir fait rentrer dans le monde de l'imagerie à haute résolution en m'accueillant en stage à l'institut d'astrophysique de l'Université de Porto.

Je remercie Laurent Pueyo de nos discussions scientifiques, ainsi que pour la fois où il s'est levé beaucoup trop tôt afin de discuter avec moi des perspectives dans la recherche aux États-Unis.

Je remercie Marie Ygouf, Johan Mazoyer, Olivier Absil, Elsa Huby et Gilles Orban de Xivry de leur intérêt pour mon travail et de leurs encouragements.

Je remercie Baptiste Paul de ses encouragements, ainsi que d'avoir laissé une bibliothèque COFFEE bien documentée et utilisable.

Je remercie Jacques Le Bourlot et William Thuillot de s'être assurés du bon déroulement de ma thèse. Leur vigilance et leur disponibilité y ont beaucoup contribué. Je remercie Jacqueline Plancy, Géraldine Gaillant, Murielle Pizzichemi et Élodie Esperanssa de leur disponibilité, de leur efficacité et de leur aide.

Je remercie mes collègues du département *traitement de l'information et systèmes* de l'ONERA, notamment Sébastien Reynaud, Jocelyn Couetdic, Pierre-Emmanuel Haensler, Sylvain Bertrand, Luc Meyer, Fabien Gachet, Michaël Lienhardt, Baptiste Levasseur et Hélène Piet-Lahanier de m'avoir si bien accueilli. Je remercie particulièrement Sébastien de m'avoir choisi pour rejoindre son équipe.

Je remercie Jean-Michel Le Duigou d'avoir soutenu mon travail, de m'avoir offert le soutien du CNES, d'avoir suivi mes travaux et d'avoir participé à mon jury de thèse. Son implication est un facteur essentiel du succès de la communauté française d'imagerie à haut contraste.

Je remercie le Centre national d'études spatiales et l'Office national d'études et de recherches aérospatiales d'avoir financé ma thèse, et de m'avoir permis de la préparer dans un environnement matériel de très bonne qualité, ainsi que d'avoir financé ma participation à plusieurs colloques. Ce travail a bénéficié de financements par l'Union Européenne (financement numéro 312430 OPTICON du septième programme cadre), par le Centre national de la recherche scientifique (défi Imag'In) et de l'ONERA dans le cadre du projet de recherche VASCO. Je remercie toutes celles et tous ceux qui ont rendu ce travail possible. Ce manuscrit utilise la feuille de style  $\LaTeX$  préparée par Pierre Guillou pour la couverture, et la classe *memoir* de Peter Wilson, Lars Madsen et d'autres. Je remercie mes co-auteurs, les éditeurs de revue et les relecteurs anonymes pour leur travail sur mes publications.

Je remercie tous les membres de l'équipe *haute résolution angulaire* de l'ONERA, où j'ai préparé ma thèse. Je remercie Francis Mendez de m'avoir aidé à régler tous les problèmes de matériels et Bruno Fleury pour les nombreuses discussions et anecdotes, sans oublier Joseph Montri. Je remercie Cyril Petit de m'avoir recommandé à Laurent et de m'avoir mis en contact avec Carlos. Je remercie Marie-Thérèse Velluet de sa bibliographie mensuelle et de nos

discussions autour d'une tasse de thé. Je remercie Frédéric Cassaing d'avoir égayé par ses jeux de mots nos discussions sur le calcul de verseurs intenses. Je remercie aussi Clélia Robert et Béatrice Sorrente de nos discussions. Je remercie Serge Meimon d'avoir rendu les HRApéros plus intéressants pour les thésards ; aucun sigle ne trompe sa vigilance ! Je remercie Caroline Lim de son aide et de ses bons conseils à la fin de ma thèse. Je remercie Jean-Marc Conan de ses lumières sur la modélisation et l'interprétation des fonctions de transfert optiques, et pour les discussions sur les énigmes de *La Recherche*.

Je remercie particulièrement Aurélie Bonnefois de m'avoir fait profiter de sa science des aberrations optiques, de m'avoir dépanné en thé plus d'une fois, et de m'avoir aidé en moult occasions. Je remercie Thierry Fusco de ses avis toujours francs et précisément argumentés ; ses critiques ont contribué à certaines orientations de mon travail. Je lui suis également très reconnaissant d'avoir plusieurs fois pris le temps de longuement m'aider à orienter ma carrière de jeune chercheur. Je remercie Nicolas Védrenne pour nos discussions, tant scientifiques que personnelles. Je le remercie de ses conseils, de sa confiance, et d'avoir beaucoup fait pour que l'équipe HRA soit un lieu d'épanouissement pour les thésards. Je remercie Vincent Michau d'avoir largement contribué à faire de l'unité HRA un cadre très propice à un travail de thèse, et d'avoir beaucoup aidé au bon déroulement de la mienne en faisant partie de mon comité de suivi. Je remercie Éric Gendron d'avoir fait partie de mon comité de suivi. Son assistance, notamment pour l'organisation de la fin de ma thèse et de ma soutenance, m'a été précieuse.

Je remercie les thésards, les stagiaires et les chercheurs en contrat post-doctoral passés par l'unité HRA, d'avoir créé une ambiance agréable et stimulante. Beaucoup sont devenus des amis. Je pense à Silvère Gousset, Jessica Jarosz, Cédric Plantet, Adrien Richard Cambouives, Khanh Linh Nguyen, Lucien Canuet, Charly Petre, Julie Mano, Sébastien Viévard, Kassem Saab, Joel Texeira, Pedro Baraçal de Mecê, Anaïs Pruvot, Sylvain Egron, Léonard Prengère, Romain Fétick, Iva Laginja, Matthieu Piniard, Leonardo Blanco, Antoine Chen, Laurie Paillier, Chloé Sauvage, Faustine Cantalloube et Elena Gofas Salas ; avec mention spéciale à mes cobus successifs, Clément Escolle, Roberto Baena Gallé, et Yann Lai-Tim, que je n'aurai pas trop empêchés de travailler le matin. Je remercie particulièrement Elena de son soutien, et Sébastien de nos discussions. Je remercie beaucoup Faustine de m'avoir pris sous son aile à mon arrivée à l'ONERA, de m'avoir soutenu, de m'avoir hébergé à Heidelberg, d'avoir collaboré avec moi, et de m'avoir beaucoup aidé à éviter les écueils de la thèse.

Je remercie les thésards du LAM de leur bon accueil chaque fois que je suis passé par chez eux. Lucie Leboulleux, bien sûr, mais aussi Anaïs Bernard, Olivier Fauvarque, et tous les autres. Merci en particulier à Cédric Taïssir Héritier d'avoir partagé son repas avec moi ! Merci à Charlotte Bond de notre discussion sur la pyramide, qui a répondu à plusieurs de mes questions ; merci à Roberto Ragazzoni de la longue discussion que nous avons eue un soir à Édimbourg, et qui m'a fait me poser plus de questions encore.

Merci à l'équipe de choc qui a organisé Elbereth 2017, notamment Charlotte Gehan, Dan Lévy, Jan Vatant d'Ollone, William Polycarpe, Dimitri Chuard, Marion Spir-Jacob, Mathilde Gaudel et Lisa Bardou. Je remercie particulièrement Lisa pour toutes nos discussions, de la science à la fantasy.

Je remercie les membres et organisateurs de l'*International Astronomical Youth Camp* d'animer une institution extraordinaire, où l'astronomie s'associe à de beaux souvenirs d'amitié. C'est là, alors que j'étais tout jeune étudiant, que j'ai pour la première fois envisagé la recherche en astronomie non pas simplement comme un rêve, mais comme une possibilité sérieuse et concrète. Je remercie les membres du club astro de Supaéro de m'avoir initié aux outils d'observation, mais aussi de m'avoir fait rencontrer des chercheurs qui m'ont permis de me projeter dans la thèse.

La formation scientifique commence bien avant la thèse. Je remercie donc mes professeurs. En particulier, je remercie Claire Flurin, Marie-Pierre Le Marc et Joël Baillie, dont l'enseignement m'a beaucoup marqué, de m'avoir montré tôt comment mettre la rigueur au service de

l'inventivité. Je remercie de leur excellent enseignement mes professeurs de mathématiques et de physique du lycée Fénelon : Vincent Puyhaubert, Jérôme Ropert, Pierre Briche et Bruno Jeauffroy. Une fois où je bougonnais parce que je peinais à mettre en évidence je ne sais plus quel phénomène délicat sur l'écran d'un oscilloscope, ce dernier m'a dit que, si je parvenais un jour à obtenir un résultat nouveau, ce ne serait pas immédiat ni facile, mais au contraire que ce serait au terme d'un long travail, parmi des signaux flous et changeants. J'y ai souvent repensé en analysant des données sur des bancs coronographiques. Je remercie Jérôme Tignon, qui a accepté d'encadrer mon TIPE, de m'avoir le premier expliqué en détail en quoi consisterait la préparation d'un doctorat. Je remercie Bertrand Georgeot d'avoir été mon premier encadrant dans un laboratoire de recherche, de m'y avoir donné goût, et de m'avoir conseillé pour la suite. Même si je suis désormais très loin des multifractales et du chaos quantique, l'expérience de ces premiers stages a été un avant-goût de mon travail de thèse, et m'y a très bien préparé. Je remercie Yves Gourinat de son aide, de sa patience et de son soutien au cours de mes études. Je remercie Alan Bonnet de son enseignement, si difficile sur le moment, mais sans lequel j'aurais sans doute été moins capable de me débrouiller d'équations compliquées pour y trouver un sens physique. Je remercie David Mimoun d'avoir construit un parcours de spécialité autour des sciences de l'univers qui contenait ce dont j'ai eu besoin par la suite, et particulièrement des sujets d'importance cruciale mais dont je ne voyais pas l'intérêt sur le moment. Je remercie Xavier Claeys de son enseignement et de ses conseils qui m'ont mis sur la voie de la recherche. Je remercie tout particulièrement Denis Matignon d'avoir entièrement renouvelé l'enseignement des mathématiques à Supaéro et d'y avoir créé une option de troisième année associée à un master recherche. Je le remercie de ses conseils, de son engagement, de sa disponibilité et de son soutien.

Je remercie tous les amis rencontrés hors des laboratoires qui, par leur soutien et les beaux moments passés ensemble, ont éclairé ces années de thèse. Je pense en particulier à Charles Ehrlacher, Marie et Maxime Parolini, Clément Gazzino, Valérian Piento, Laura Bourgeois, Chloé Royer, Alice Bercker, Tiffany Gillet, Pia Désérable et Kévin Canévet, Angela Bovo et Pascal Schmidt, Blanche Lagny et Pauline Donon, Victoria Le Boloc'h-Salama, Justine et Thibault Guédon, Nathanaël Jefroykin, et tous les cultistes de Cthulouse. Mention spéciale à Charles et à Maxime pour leur relecture d'une première version du début de ce manuscrit, et à Clément et à Maxime pour leur soutien le jour de ma soutenance. Je voudrais rappeler ici le souvenir de Thomas Luchier.

Je remercie ma belle-famille de leur accueil, de leurs conseils, de leurs encouragements et de leur soutien. Je remercie en particulier Sophie, Olivier, Grégoire, Raphaël, Diane, Gabriel et Henri Schiller, Madeleine Grouchko et Pierre Rouault, Alice Mantel, ainsi que la tribu Grouchko. Je remercie beaucoup Olivier de s'être occupé avec brio de mon pot de thèse. Je remercie Jean-Marc Victor d'être venu à ma soutenance de thèse. Je voudrais également rappeler le souvenir d'Yvette Fleury et de sa très grande gentillesse.

Je remercie ma famille de l'amour qu'ils m'ont donné, de leurs conseils, de leurs encouragements et de leur soutien. Je remercie en particulier mes parents de m'avoir donné le goût des livres, des études et plus généralement des choses de l'esprit. Je remercie mon père, Alain Herscovici, d'avoir éveillé et entretenu en moi le goût des sciences dès mon enfance. Je remercie ma mère, Nathalie Herscovici, de son soutien et de sa confiance. Je remercie ma grand-mère, Monique Cohen, de son soutien ; mon goût pour l'harmonie mathématique n'est pas sans lien avec l'harmonie musicale. Je remercie mon grand-père, Norbert Cohen, de m'avoir transmis sa foi en la culture. Je remercie Anne-Claude et Éric ainsi que Solal, Élias et Abigaëlle Fraillon-Cohen, de leur gentillesse à mon égard. Je remercie Christiane Martin et Jean Herscovici de leur gentillesse et de leur soutien. *Le Mécanique quantique* de Landau & Lifschitz que Jean m'a offert est le premier ouvrage scientifique de référence que j'ai possédé ; d'autres l'ont rejoint depuis. Je tiens à rappeler ici le souvenir de ma grand-mère Malscha Herscovici et de mon grand-père Henri Herscovici.

Je remercie toutes celles et tous ceux qui auraient mérité que je les cite ici, mais que j'ai omis de mentionner, et les prie de me pardonner cet oubli.

Je te remercie, lectrice ou lecteur qui parcours ces lignes, de ton intérêt. Si tu t'apprêtes à étudier crayon en main le travail que je présente ici, je te demande d'avoir de l'indulgence pour les défauts de cette œuvre de jeunesse. Surtout, je te souhaite bon courage !

Je remercie Clélie de son soutien inconditionnel, de ses ronronnements toujours à propos, et d'avoir souvent toléré que je travaille dans le salon à une heure où les honnêtes chats tentent de dormir.

Par-dessus tout, je remercie Alexandra Herscovici-Schiller de son soutien, son aide, ses relectures, ses encouragements, sa patience, sa présence, de notre vie et de nos bonheurs, de ce qu'elle a fait pour moi et de ce qu'elle fait chaque jour.



*« La Terre est le berceau de  
l'humanité, mais on ne passe pas  
sa vie entière au berceau. »*

Constantin Tsiolkovski

---

## Introduction

---



A-T-IL DE LA VIE ailleurs que sur notre planète ? Nul ne le sait actuellement, mais nous pourrions bien avoir la réponse dans les prochaines décennies. Si la contemplation du ciel nocturne est sans doute plus vieille que notre espèce, nous n'avons accès à l'espace que depuis le quatre octobre 1957, et la première détection confirmée d'une planète autour d'une étoile de la séquence principale autre que le soleil ne date que de 1995. Plusieurs milliers d'exoplanètes ont été découvertes depuis. Cependant, la plupart l'ont été par des méthodes dites indirectes, qui relèvent la signature d'une planète sans la voir. Nous ne disposons en fait d'images que de quelques dizaines d'entre elles !

Obtenir ce type d'images représente un immense défi, et nous ne sommes pas capables actuellement de produire des images d'une planète comme la Terre autour d'une étoile telle que le Soleil. Pourtant, l'imagerie d'exoplanètes apporte des informations inaccessibles à une détection indirecte, et de nombreux projets prévoient de créer de nouveaux instruments toujours plus performants pour arriver à cette fin. La quasi-totalité des instruments actuels et la majorité des instruments à l'étude reposent sur l'utilisation de dispositifs qui filtrent la lumière de l'étoile au centre du champ d'observation et laissent voir son environnement. De tels dispositifs sont appelés coronographes.

Tout défaut du système optique coronographique, aussi minime soit-il, déforme le front d'onde lumineux émis par l'étoile et son environnement qui a traversé l'espace jusqu'à nous parvenir. Cette déformation entraîne des fuites de lumières à travers le coronographe. Ces fuites engendrent des tavelures sur les images scientifiques, qui cachent de possibles planètes. Il s'agit donc de corriger les défauts optiques à l'origine des tavelures, et, pour cela, il faut avant tout les mesurer. On peut aussi décider de jouer avec ces défauts pour créer une zone particulièrement sombre dans une zone de l'image scientifique. Une des manières d'analyser et de contrôler la lumière dans les instruments coronographiques est d'inverser un modèle physique fidèle, et donc non linéaire, de l'instrument. Cette approche est au cœur de ma thèse.

Dans la première partie, je détaille les objectifs de ce travail, ainsi que le cadre et les méthodes utilisés. En particulier, je présente la diversité de phase coronographique, qui est la principale technique étudiée dans cette thèse. Dans la deuxième partie, j'expose l'extension de la diversité de phase coronographique à l'estimation d'aberrations de phase en présence de turbulence résiduelle, ce qui est nécessaire sur les télescopes terrestres. Cette extension comprend l'établissement d'un modèle analytique d'imagerie coronographique en présence de turbulence, l'inversion et l'incorporation de ce modèle dans l'algorithme de diversité de phase coronographique, et la validation expérimentale de la méthode. Dans la troisième et



dernière partie, je présente mes travaux sur l'analyse et le contrôle de surface d'onde post-coronographique pour l'imagerie à très haut contraste. Comme ce cadre est plutôt celui d'instruments spatiaux, la contrainte de gérer les effets de la turbulence disparaît. En revanche, les performances visées sont telles qu'il ne suffit plus de reconstruire les aberrations de phase, il faut aussi reconstruire conjointement les défauts d'amplitude; c'est ce qui occupe le premier chapitre de cette partie. Ensuite, j'expose les résultats expérimentaux de création d'une zone sombre dans le plan focal. L'originalité de la méthode employée réside dans sa non-linéarité, qui permet d'atteindre l'objectif en un nombre très réduits d'itérations.

**Première partie**

**Contexte, objectifs et méthodes**



« Il y a d'innombrables soleils et une infinité de planètes qui orbitent autour de ces soleils, à l'instar des sept planètes que nous voyons tourner autour de notre Soleil. »

Giordano Bruno

# Chapitre 1

## En quête d'autres mondes



LE CHAPITRE INTRODUCTIF présente le contexte et les objectifs de cette thèse. J'y esquisse quelques grandes étapes historiques de l'astronomie des planètes. J'y décris brièvement les principales méthodes de détection d'exoplanètes, puis d'imagerie d'exoplanètes en particulier. J'y présente les principales techniques d'analyse et de contrôle de surface d'onde coronographique. Enfin, j'y expose les objectifs de mes travaux.

### 1.1 Une brève histoire de l'astronomie des planètes

#### 1.1.1 Les anciens

Les premières traces connues d'activité astronomique remontent à la préhistoire. On ne peut que conjecturer les raisons qui poussaient des humains à s'intéresser aux mouvements des astres. On peut penser à des préoccupations de mesure du temps, essentielles pour une société qui dépend des cycles de la nature, tant pour l'agriculture que la chasse et la pêche ou simplement pour faire des réserves de combustibles en vue de l'hiver. On peut aussi penser à des motifs religieux, qui se retrouvent jusque dans les pratiques actuelles. Enfin, la beauté du ciel nocturne constitue en soi une excellente raison de le contempler. Et, comme notre cerveau trouve sans cesse des correspondances et des motifs, il est probable que les étoiles ont été regroupées en constellations, les cycles de la Lune compris, et les planètes visibles à l'œil identifiées, depuis l'aube de l'humanité [de la Cotardière, 2012].

En tout cas, il est certain que ces planètes étaient identifiées à l'époque de Platon (*République*, X, 617a et *Timée*, 38d dans [Platon, 348]). Les explications y sont parfois très éloignées de nos modèles actuels, notamment par la place de la Terre au centre du cosmos, ou la divination des astres. Cependant, elles sont également très proches de nous pour certains faits, mais aussi et surtout par la méthode. Toujours chez Platon, (*Lois*, VII 822b), le mouvement des planètes est circulaire, donc soumis à des lois, et qui plus est des lois qui s'expriment en termes mathématiques. La vérité de ces lois se vérifie de deux façons : leur beauté, qui est pour Platon un signe de vérité (aspect théorique) et leur cohérence avec les observations (aspect observationnel). On trouve là les signes de l'émergence d'une pensée scientifique rationnelle autonome qui décrit la nature en termes mathématiques et confronte la théorie à l'observation.

Les observations s'accumulèrent au cours des siècles dans le monde grec puis dans le monde arabe. Les premiers modèles héliocentriques du cosmos datent au moins d'Aristarque de Samos [Archimède, 212], moins d'un siècle après Platon, mais l'idée ne s'est imposée qu'à la Renaissance.

### **1.1.2 Renaissance, modernité, et découverte de notre système stellaire**

L'héliocentrisme fut de nouveau sérieusement discuté en Europe au milieu du XVI<sup>e</sup> siècle avec la publication de [Copernic, 1543]. Les observations de Tycho Brahe ouvrirent la voie aux lois de Kepler [Kepler, 1609], qui s'accordent aux observations avec une haute précision, et surtout qui permirent enfin de prédire convenablement les éclipses. C'est également à cette époque que Giordano Bruno proposa que le Soleil n'est qu'une étoile parmi d'autres [Bruno, 1584b], et énonça une première version du principe de relativité [Bruno, 1584a]. Ces efforts théoriques furent développés et synthétisés par Galilée. Qui plus est, l'invention de la lunette permit à ce dernier de décrire Io, Europe, Ganymède et Callisto [Galilei, 1610]. Il observa que ces corps sont en orbite autour de Jupiter. Cette observation de satellites qui ne tournent manifestement pas autour de la Terre finit d'affermir les modèles héliocentriques par opposition aux géocentriques. Enfin, Isaac Newton formula dans [Newton, 1687] les lois du mouvement, qu'il appliqua aussi aux astres. L'astronomie commençait à prendre la forme qu'on lui connaît actuellement.

### **1.1.3 Découverte des planètes et des exoplanètes**

En 1781, William Herschel annonça qu'un corps connu depuis l'Antiquité, dont on pensait qu'il s'agissait d'une étoile, se comporte différemment des étoiles lointaines. La découverte fut annoncée à la Royal Society [Herschel et Watson, 1781], et se diffusa dans la communauté scientifique en quelques mois. Rapidement, Charles Messier fit remarquer que l'objet était rond comme une planète et non allongé comme une comète. André Lexell calcula son orbite, et découvrit que c'était celle d'une planète, et non d'une comète. Ainsi fut découverte Uranus, la première planète identifiée à l'époque moderne. Les modalités de cette découverte ne sont pas sans rappeler l'organisation contemporaine de notre discipline : annonce d'une découverte par publication auprès d'une institution scientifique organisée, diffusion dans une communauté internationale, et collaboration entre théoriciens et observateurs de divers pays afin d'établir un consensus scientifique.

De perturbations de la trajectoire d'Uranus, Urbain Le Verrier déduisit l'existence de Neptune [Le Verrier, 1845], qui fut ainsi la première planète détectée de manière indirecte, par son influence gravitationnelle sur un autre corps du système solaire.

Beaucoup plus récemment, l'article fondateur de [Mayor et Queloz, 1995] confirma que d'autres étoiles de la séquence principale que le Soleil ont des planètes. Depuis, des milliers de planètes ont été découvertes par différentes méthodes que je vais à présent exposer.

## **1.2 Les principales méthodes de détection d'exoplanètes autour d'étoiles de la séquence principale**

Cette section s'appuie sur une revue récente des défis technologiques que posent les diverses techniques de détection d'exoplanètes, [Guyon, 2017]. On pourra aussi consulter l'excellent site de l'Observatoire de Paris à destination des étudiants et du grand public, [Roques et Baudino, 2018].

**La méthode des transits** consiste à mesurer précisément la luminosité d'une étoile pendant une longue durée, typiquement de plusieurs mois au minimum. Si la luminosité apparente baisse périodiquement, c'est qu'un corps opaque passe périodiquement sur la ligne de visée [Borucki *et al.*, 1985]. On peut en déduire la présence d'une planète, ainsi que la période de celle-ci. C'est cette méthode qui a permis le plus de détections d'exoplanètes, grâce notamment à la mission Kepler [Borucki *et al.*, 2003].

**La méthode des vitesses radiales** consiste à mesurer des variations dans le spectre de l'étoile. Une variation périodique du décalage Doppler-Fizeau du bleu au rouge puis du rouge au bleu révèle une influence gravitationnelle, tout comme pour la méthode des variations astrométriques. Cependant, ces deux méthodes ne sont pas redondantes : l'astrométrie apporte une information dans une direction orthogonale à la ligne de visée, tandis que la méthode des vitesses radiales apporte une information parallèle à la ligne de visée. C'est par la méthode des vitesses radiales que [Mayor et Queloz, 1995] ont détecté la première exoplanète autour d'une étoile de la séquence principale.

**La méthode des variations astrométriques** consiste à mesurer cette fois la position d'une étoile [Benedict *et al.*, 2002]. Si celle-ci subit une variation périodique, c'est que l'influence gravitationnelle d'une planète agit sur la trajectoire de l'étoile. Cette méthode présente l'avantage d'être applicable quelle que soit l'orientation de l'orbite de la planète.

**La méthode des lentilles gravitationnelles** consiste à constater une anomalie dans la variation soudaine de luminosité apparente d'une étoile d'arrière-plan passant derrière le système stellaire étudié. En effet, quand une étoile d'arrière-plan s'aligne avec un objet massif comme une étoile ou un système stellaire, sa magnitude apparente varie. On peut imputer cette variation de magnitude apparente à la déflexion des rayons lumineux de l'étoile d'arrière-plan par le champ gravitationnel engendré par une étoile présente sur la ligne de visée : c'est ce qu'on appelle une lentille gravitationnelle. Si l'étoile a une planète, un système de pics caractéristiques se superpose à la courbe habituelle de variation de luminosité [Bond *et al.*, 2004]. Cette technique présente l'inconvénient de s'appuyer sur une coïncidence, à savoir l'alignement du système de l'exoplanète sur la trajectoire des photons qui relie l'étoile d'arrière-plan à la Terre. Elle n'est donc pas répétable.

**L'imagerie**, consiste tout simplement à produire une image de la planète en recueillant les photons qu'elle émet. Évidemment, produire de telles images n'a en fait rien de simple [Lagrange *et al.*, 2009]. On pourra noter au passage que, au contraire des techniques précédentes, qui, à l'exception de la méthode des lentilles gravitationnelles, sont fondées sur la détection de l'influence de la planète sur son étoile, l'imagerie est plutôt gênée par l'étoile. Ainsi, l'imagerie est complémentaire des autres méthodes. Les méthodes de détection indirecte permettent de détecter des planètes proches de leur étoile, alors que la détection directe est plus adaptée à la détection de planètes brillantes, et donc massives, loin de leur étoile.

La figure 1.1 indique les méthodes de détection qui ont permis de découvrir un échantillon des exoplanètes connues sur un diagramme donnant la masse des planètes en fonction de leur distance à leur étoile. En abscisse est indiqué une estimation du demi-grand axe de l'orbite de la planète, en échelle logarithmique. En ordonnée est indiquée une estimation de la masse de la planète, également en échelle logarithmique. La Terre sert de référence du système d'unité. On observe que les méthodes des vitesses radiales et des transits permettent de découvrir principalement des planètes proches de leur étoile, tandis que l'imagerie permet de découvrir des planètes massives et loin de leur étoile. On observe aussi que nous sommes encore loin d'être capables de produire des images de planètes comparables à la Terre !

Par ailleurs, disposer de lumière de la planète permet d'étudier son spectre, ce qui apporte une information très riche. Par exemple, on peut envisager de chercher dans des spectres planétaires des traces d'associations de molécules qui constituent des marqueurs de vie [Cockell *et al.*, 2009]. L'imagerie d'exoplanètes est donc une méthode de choix pour caractériser celles-ci.

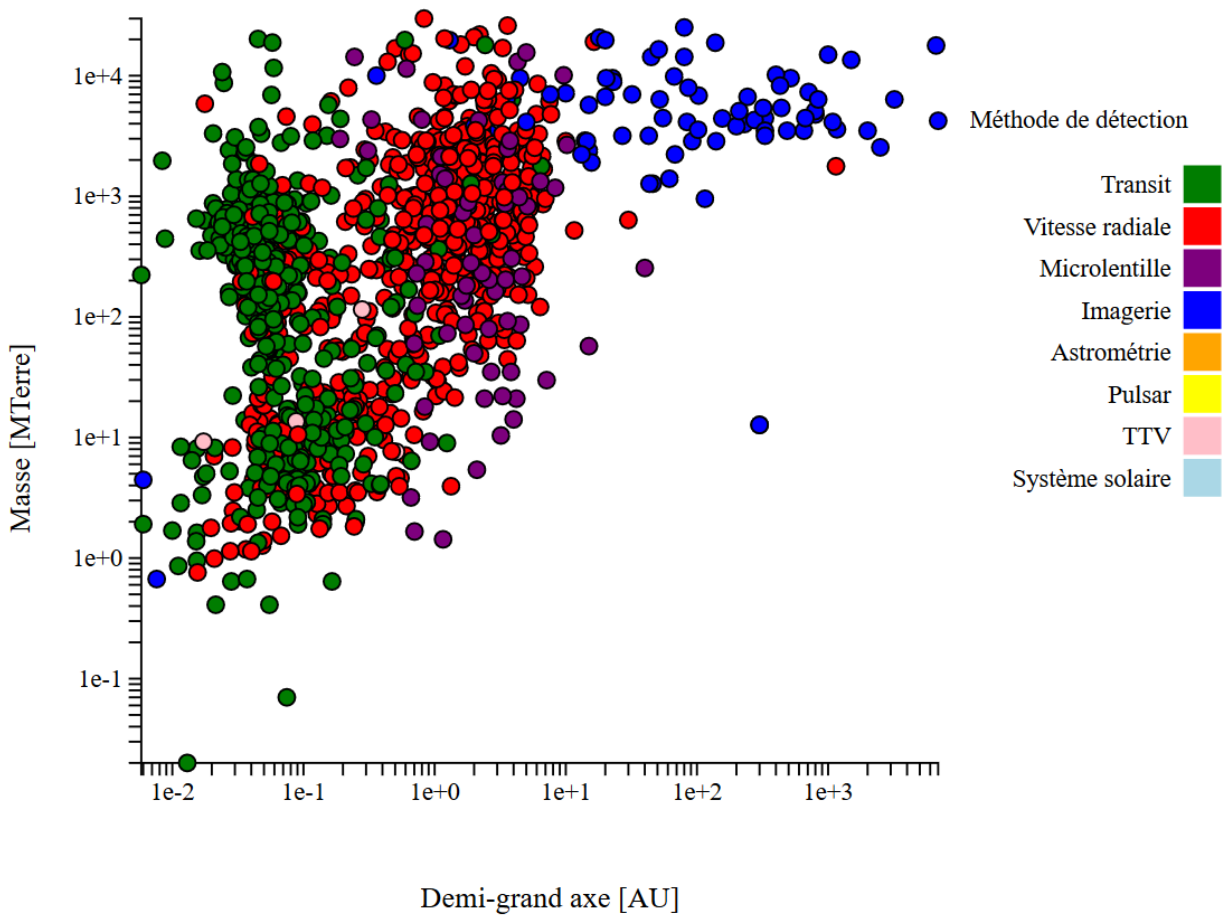


FIGURE 1.1 – Diagramme masse-demi grand axe des exoplanètes connues. Les exoplanètes détectées par imagerie sont en bleu : on observe qu’il s’agit généralement de planètes lourdes loin de leurs étoiles. Source : [Roques et Baudino, 2018].

### 1.3 Limites de l’imagerie d’exoplanètes

Il existe quelques instruments dédiés à l’imagerie à très haut contraste, qui équipent des télescopes terrestres de la classe des huit mètres. Parmi eux, on peut citer SPHERE (*spectro-polarimetric high contrast exoplanet research*) sur le très grand télescope de l’observatoire européen austral [Beuzit *et al.*, 2008]; GPI (*Gemini planet imager*) sur le télescope Gemini sud [Macintosh *et al.*, 2008]; et SCExAO (*Subaru extreme adaptive optics system*) sur le télescope Subaru [Jovanovic *et al.*, 2015]. Quoique chaque instrument soit unique, ils sont assez semblables dans leur principe car ils remplissent les mêmes fonctions. Ils sont au foyer de grands télescopes, ils utilisent une optique adaptative extrême, un coronographe, et des post-traitements.

Je ne traite pas le vaste problème du post-traitement dans cette thèse. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Cantalloube, 2016].

L’utilisation de grands télescopes est préférable pour deux raisons. La première est que la quantité de lumière collectée pendant une nuit d’observation est proportionnelle à la surface du télescope. La deuxième raison, qui est détaillée en même temps que le problème de la haute résolution angulaire, est que la taille du télescope conditionne l’écart angulaire minimal entre l’étoile et les objets que l’on cherche à détecter. L’optique adaptative et la coronographie méritent chacune que l’on s’y attarde un peu.

### 1.3.1 Imagerie à haute résolution angulaire et optique adaptative

La première difficulté à surmonter pour l'imagerie depuis le sol est la très faible séparation angulaire entre la planète cible et son étoile. En effet, la fréquence angulaire de coupure d'un télescope parfait est donnée par  $D/\lambda$ , où  $D$  est le diamètre de la pupille d'entrée du télescope et  $\lambda$  la longueur d'onde d'observation. Le plus petit élément de résolution angulaire est donc un angle  $\alpha_0 = \lambda/D$  entre l'axe optique et la direction d'observation. Pour un télescope de la classe des huit mètres de diamètre tel que le Very Large Telescope opérant en bande H, soit 1 600 nanomètres,  $\alpha_0$  vaut  $2 \times 10^{-7}$  radians, soit environ 40 millisecondes d'arc.

La principale limitation naturelle de résolution des grands télescopes terrestres n'est cependant pas la limite de diffraction, mais la turbulence atmosphérique. Les mouvements de masses d'air de différentes températures engendrent des variations d'indice de réfraction local de l'atmosphère. La surface d'onde incidente est donc déformée, au point que, pour un télescope de plus d'un mètre, la largeur de la tache centrale est avant tout déterminée par la force de la turbulence atmosphérique. Je reviendrai sur la modélisation de ce phénomène [Roddier, 1981] en détail dans la section 3.1.

Pour remédier à l'élargissement de la tache d'Airy par la turbulence atmosphérique, les télescopes modernes, et en particulier les instruments dédiés à la détection directe d'exoplanètes, sont équipés de systèmes d'optique adaptative [Fusco *et al.*, 2006b, Sauvage *et al.*, 2010, Macintosh *et al.*, 2008]. On pourra se référer à [Roddier, 1999] pour un exposé détaillé de l'optique adaptative, et à [Perrin *et al.*, 2003] pour une analyse de la structure des images à haute résolution. Le schéma de principe d'une optique adaptative est présenté sur la figure 1.2. Il s'agit d'un outil dédié à la compensation des déformations de surface d'onde par l'atmosphère. Il est composé de trois éléments matériels principaux : l'analyseur, le calculateur en temps réel, et le miroir déformable.

L'onde lumineuse incidente provenant de l'espace traverse l'atmosphère, qui la déforme. Elle entre dans le télescope. Elle est réfléchi sur un miroir déformable, puis séparée en deux. Un faisceau continue directement jusqu'au capteur scientifique, tandis que l'autre est envoyé sur un analyseur de surface d'onde, qui estime la déformation instantanée du front d'onde. À partir de cette forme de surface d'onde, un calculateur détermine la commande à appliquer à un miroir déformable pour compenser la déformation de surface d'onde. Il s'agit donc d'un système en boucle fermée, dont la cadence typique est de plusieurs centaines de Hertz. La différence de résolution angulaire sans ou avec optique adaptative est illustrée sur la figure 1.3.

Il est à noter que les miroirs déformables n'ont qu'un nombre fini d'actionneurs. Par conséquent, la correction de phase n'est possible que dans une gamme de fréquences spatiales limitée par le pas inter-actionneurs. Cet effet explique la correction limitée à une zone visible au centre du panneau de droite de la figure 1.4, qui montre l'impact d'une optique adaptative sur la réponse impulsionnelle d'un télescope. Sur cette figure issue d'une simulation, le miroir déformable dispose de  $40 \times 40$  actionneurs, ce qui lui permet de corriger une zone de  $20\lambda/D$  de rayon [Ygouf *et al.*, 2013], zone dont la frontière est très visible sur la figure.

Les optiques adaptatives extrêmes constituent un raffinement des optiques adaptatives afin d'atteindre des niveaux de corrections très élevés, avec des rapports de Strehl [Strehl, 1902] au-dessus de 80%. La fréquence de la boucle principale est plus élevée, typiquement supérieure au kilohertz. Par ailleurs, des boucles de correction secondaires, telle une boucle de stabilisation de la pupille, sont mises en places pour atteindre les performances visées.

Bien sûr, une manière de s'affranchir totalement de la turbulence atmosphérique est de placer le télescope hors de l'atmosphère. Cependant, le coût de lancement et d'opération d'un télescope en orbite est extrêmement élevé. Par ailleurs, le diamètre du miroir primaire, ou son équivalent pour un télescope segmenté, dépend de la capacité d'emport de la coiffe du lanceur. Les télescopes spatiaux et les télescopes terrestres ont donc généralement des objectifs plutôt complémentaires. En effet, les télescopes spatiaux sont plus petits que les télescopes



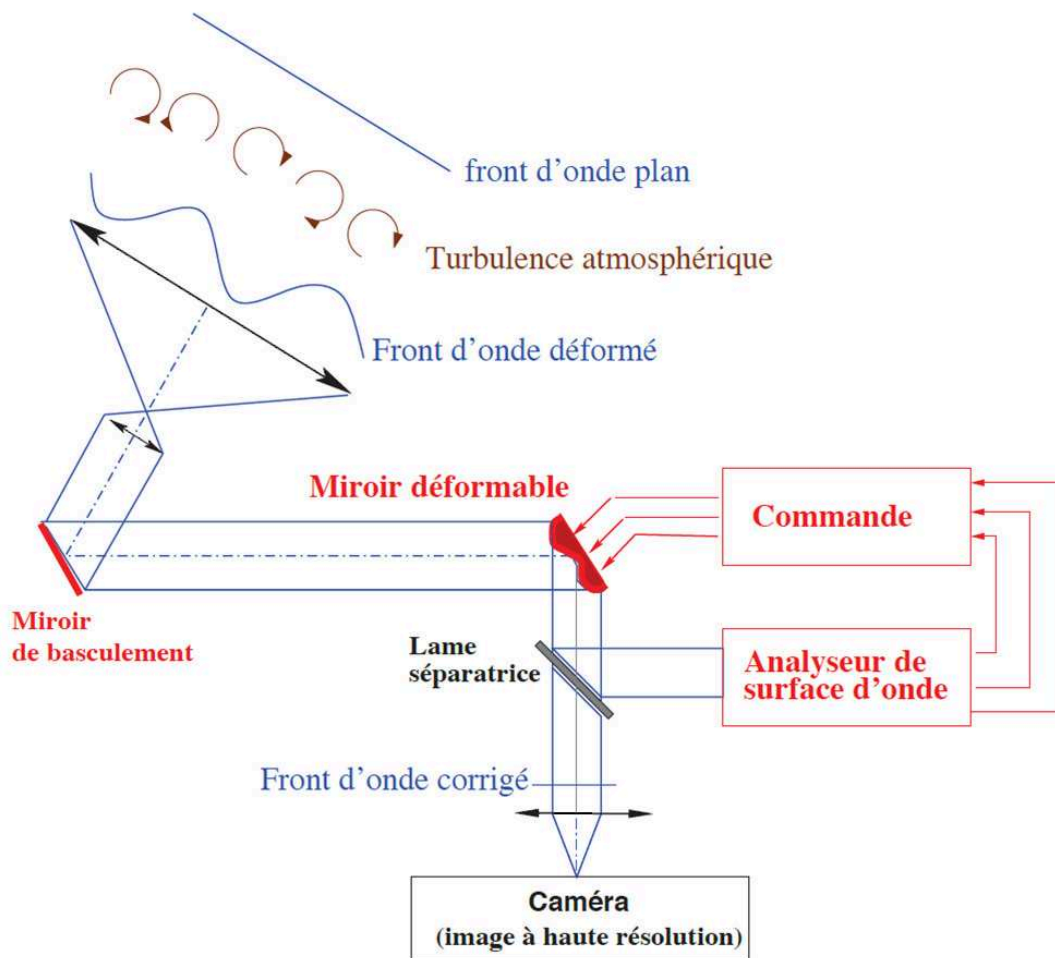


FIGURE 1.2 – Schéma de principe d'une optique adaptative.

terrestres, et donc ont un pouvoir de collecte de lumière et une résolution angulaire maximale plus faible. Par contre, ils ne subissent pas les effets de la turbulence atmosphérique. Leur longueur d'onde d'observation n'est pas contrainte par la transparence de l'atmosphère. Enfin, les télescopes spatiaux placés au point de Lagrange L2 du système Soleil-Terre ne subissent pas l'alternance du jour et de la nuit [Lagrange, 1772], et peuvent donc observer en continu. Ce sera par exemple le cas du télescope spatial James Webb [Gardner *et al.*, 2006].

### 1.3.2 Imagerie à haut contraste et coronographie

L'immense contraste entre la planète et son étoile pose une difficulté observationnelle majeure. Dans le visible ou le proche infra-rouge, le contraste, c'est à dire le rapport de flux, entre la Terre et le Soleil est d'environ  $10^{-10}$  à  $10^{-11}$ . À titre de comparaison, le contraste atteint systématiquement par l'instrument au sol le plus performant, SPHERE, est d'environ  $10^{-6}$  à une demi-seconde d'arc en bande H (longueur d'onde autour de 1 600 nm) après traitement. Pour atteindre de tels contrastes, les instruments d'imagerie à très haut contraste sont équipés non seulement d'optiques adaptatives, mais encore de coronographes.

Le coronographe est un instrument inventé par Bernard Lyot [Lyot, 1931, Lyot, 1932] pour l'observation de la couronne solaire. Le principe de l'instrument est d'atténuer autant que possible la lumière émise par l'étoile tout en laissant passer la lumière émise par son environnement. Dans un coronographe de Lyot, la lumière passe par une pupille d'entrée. Elle est ensuite focalisée sur une pastille opaque dont le diamètre angulaire est conçu pour être de

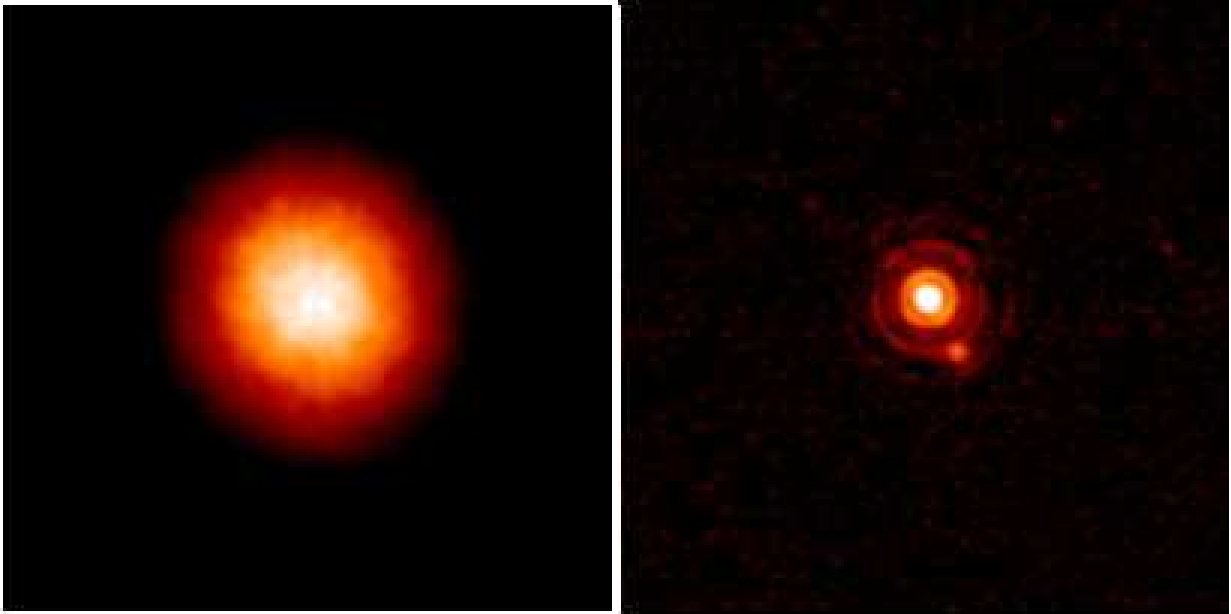


FIGURE 1.3 – Gauche : observation d’une étoile double sans optique adaptative. Droite : observation de la même étoile double par SPHERE/IRDIS en utilisant le système d’optique adaptative SAXO, qui augmente considérablement la résolution angulaire et permet de distinguer le compagnon. Images obtenues sur le très grand télescope de l’observatoire européen austral en observant Achernar ( $\alpha$  Eridani) en bande H. Remerciements T. Fusco et consortium SPHERE.

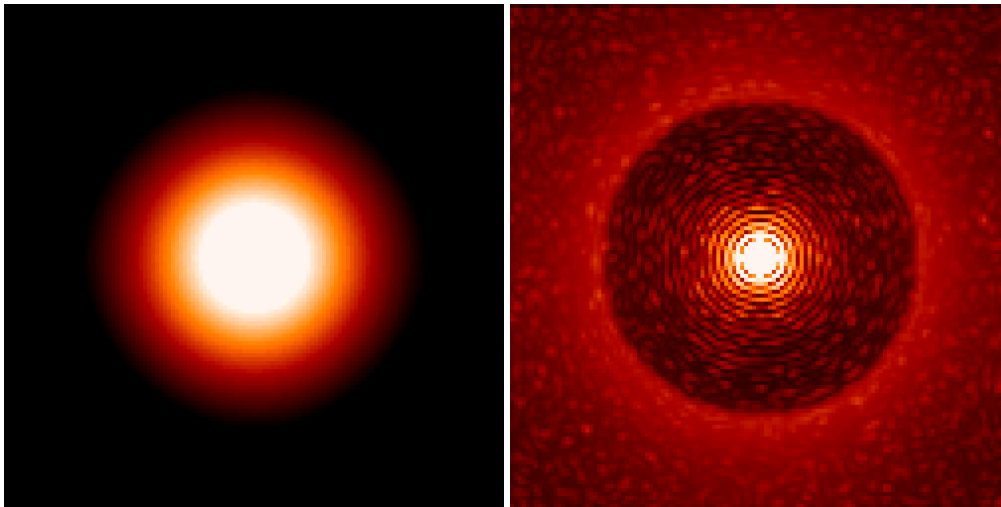


FIGURE 1.4 – Gauche : image simulée en présence de turbulence, sans optique adaptative. Droite : image simulée en présence de turbulence, avec optique adaptative. L’échelle de couleurs est en arc de sinus hyperbolique.

l’ordre de quelques  $\lambda/D$  pour un coronographe stellaire (ce qui correspond typiquement à quelques dizaines de micromètres de diamètre, selon l’ouverture du système optique), puis passe par une pupille légèrement plus petite que la pupille d’entrée, appelée diaphragme de Lyot. Enfin, elle est focalisée sur le détecteur. Ainsi, la pastille focale diffracte le cœur de la tache de diffraction, et le diaphragme de Lyot filtre la lumière diffractée. Donc, lors de la focalisation sur le capteur, l’essentiel de l’énergie de la source sur axe (l’étoile) a été filtrée, sans incidence sur les sources hors axe (couronne pour un coronographe solaire, planète ou disque pour un coronographe stellaire). Le modèle optique formel du coronographe sera présenté dans le chapitre 2. La figure 1.5 montre l’influence d’un coronographe pour l’observation d’un

système double, où l'étoile la plus brillante est environ trente fois plus lumineuse que sa compagne [Kervella *et al.*, 2008]. On voit bien sur cet exemple que l'étoile centrale est notablement atténuée par le coronographe, ce qui laisse apparaître le compagnon.

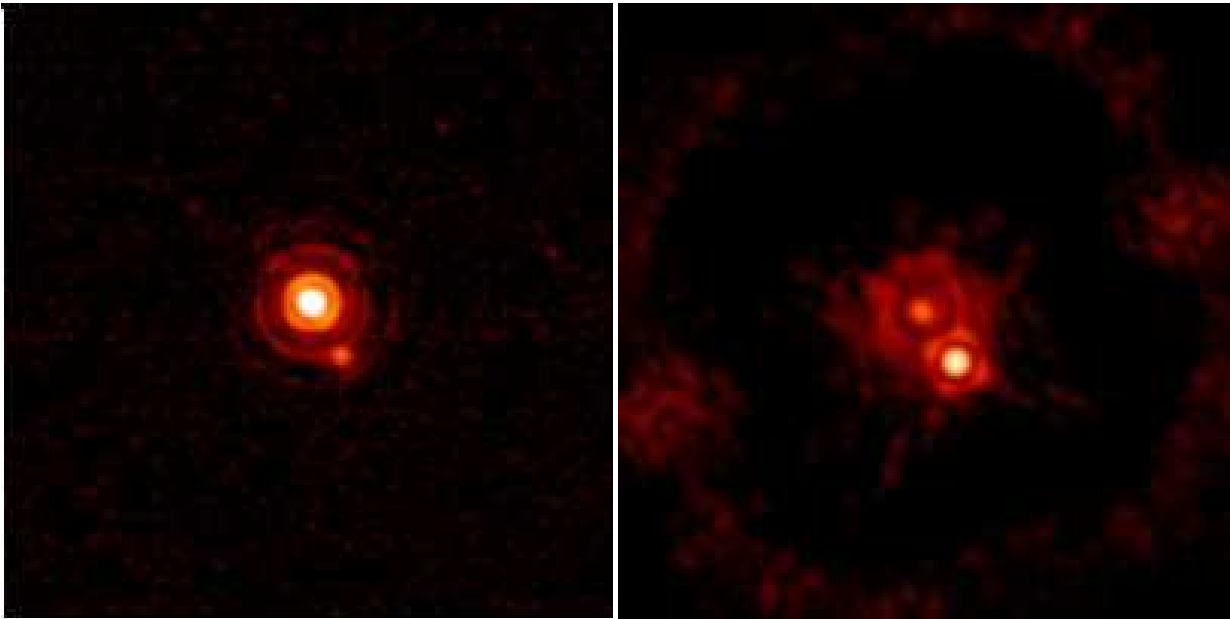


FIGURE 1.5 – Gauche : observation d'une étoile double par SPHERE/IRDIS utilisant le système d'optique adaptative SAXO, sans coronographe. Droite : observation de la même étoile double par SPHERE/IRDIS utilisant le système d'optique adaptative SAXO avec coronographe de Lyot, à une échelle de couleur trente fois plus petite que l'image de gauche. Images obtenues sur le très grand télescope de l'observatoire européen austral en observant Achernar ( $\alpha$  Eridani) en bande H. Remerciements T. Fusco et consortium SPHERE.

### 1.3.3 La limite ultime : les aberrations quasi-statiques

Pour les exoplanètes d'intérêt d'instruments tel que SPHERE ou GPI, qui sont conçus pour produire des images de planètes de type Jupiter chaud, le rapport de flux est inférieur à  $10^{-5}$ . Il est donc autrement plus difficile de faire apparaître une exoplanète que de révéler un compagnon stellaire. Le rapport de flux de la Terre au Soleil est inférieur à  $10^{-10}$  : il reste plusieurs ordres de grandeurs à combler pour pouvoir voir des planètes comparables à la Terre autour d'étoiles comme le Soleil à une distance d'un parsec !

La figure 1.6 présente une image à très haut contraste de HIP 73 145 vue par SPHERE. Cette image est centrée sur l'intérieur de la zone de correction par optique adaptative, dont le diamètre est de  $40 \times \lambda/D$ , soit 1,6 seconde d'arc. Les bords de ce disque sont marqués par des tavelures qui ne sont pas corrigées par le miroir déformable, au contraire de la zone corrigée. Cependant, même la zone corrigée est mouchetée de tavelures. Ce champ de tavelures complique voire rend impossible la détection des planètes, à moins qu'elles ne soient extrêmement lumineuses. Les tavelures sont la manifestation de fuites de lumière stellaire à travers le coronographe. Ces fuites sont la conséquence d'aberrations optiques en amont du coronographe.

Les sources des aberrations sont de trois types. D'abord, des défauts de polissage et des contraintes mécaniques sont inévitables lors de la fabrication, même pour des pièces de très haute qualité. Ensuite, pendant les phases d'assemblage, d'intégration et de tests, de nouvelles contraintes mécaniques s'appliquent aux optiques, et l'alignement n'est jamais absolument parfait. Enfin, l'environnement de l'instrument pendant les opérations est à

l'origine de déformations. Celles-ci sont causées par les variations spatiales et temporelles de la température, ainsi que des contraintes mécanique comme la rotation de l'instrument.

Ainsi, pour pousser les chasseurs d'exoplanètes à leur limite de détection, il faut mesurer et contrôler les aberrations, par exemple au moyen d'un miroir déformable. Comme la plus haute précision est recherchée, on ne peut pas se contenter de laisser cette mesure à l'analyseur utilisé par la boucle d'optique adaptative classique. En effet, le faisceau qui atteint le détecteur et celui qui atteint l'analyseur de surface d'onde de l'optique adaptative ont suivi des trajets différents, et subissent donc des aberrations différentes. Il est donc préférable d'utiliser directement le détecteur scientifique lui-même comme analyseur de surface d'onde. Le résultat de cette analyse peut servir de nouvelle référence à la boucle d'optique adaptative, voire constituer la base d'une stratégie de contrôle du miroir déformable [Mawet *et al.*, 2012].

Les sections suivantes présentent une sélection non exhaustive de méthodes d'analyse de surface d'onde post-coronographique et de contrôle de surface d'onde.

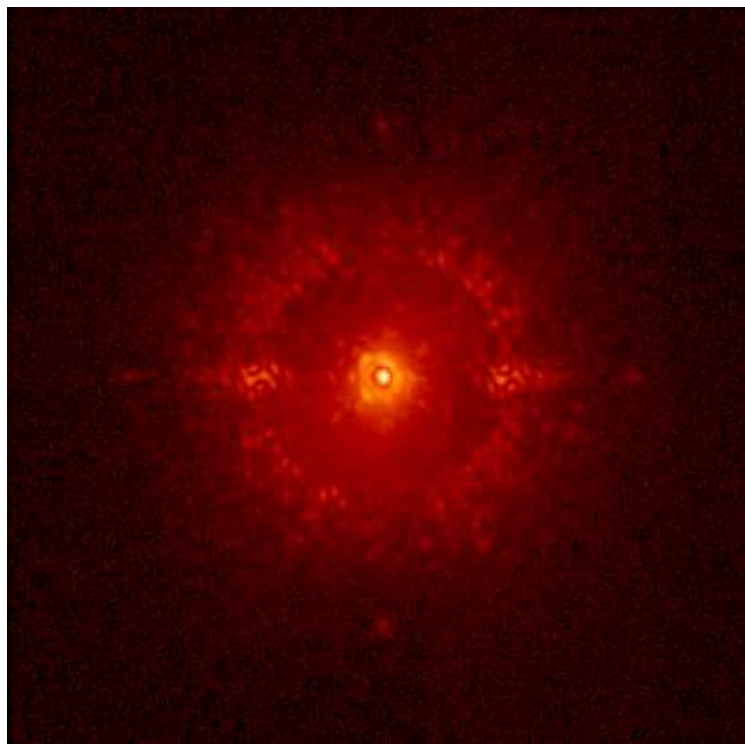


FIGURE 1.6 – Images obtenues par l'instrument SPHERE sur le très grand télescope de l'observatoire européen austral en observant HIP 73 145 en bande H. Remerciements J.-F. Sauvage et consortium SPHERE.

## 1.4 Analyse de surface d'onde en présence de coronographe

La majorité des méthodes de correction de front d'onde nécessite une analyse post-coronographique des aberrations résiduelles avant et après le coronographe. Ces méthodes d'analyse doivent être capables de mesurer les aberrations plus vite que celles-ci n'évoluent. Or l'évolution des aberration a plusieurs échelles de temps caractéristiques, avec des niveaux assez importants à l'ordre de l'heure [Martinez *et al.*, 2012, Martinez *et al.*, 2013]. Par ailleurs, les niveaux de précision recherchés contraignent l'analyse de surface d'onde à mesurer les aberrations de tout le train optique jusqu'au capteur scientifique, derrière le coronographe. Il faut donc disposer d'une analyseur de surface d'onde dédié. J'en présente ici quelques-uns.

### 1.4.1 L'analyseur de surface d'onde coronographique de bas ordre

L'analyseur de surface d'onde coronographique de bas ordre (*low-order coronagraphic wavefront sensor*) [Guyon *et al.*, 2009] consiste à modifier le masque focal du coronographe. Le centre de celui-ci est opaque, entouré d'un anneau réfléchissant. La lumière réfléchiée par l'anneau est ensuite recueillie, et on peut en déduire au moins le basculement du faisceau. On peut également déduire la valeur de la défocalisation, à condition que l'image réfléchiée se forme sur un capteur lui-même défocalisé. L'analyse des bas ordres est hautement critique pour deux raisons. La première raison est que l'on cherche des planètes les plus proches possible de l'axe optique. Or, ce sont les aberrations de phase de basses fréquences qui engendrent des tavelures près de l'axe optique. On cherche donc à corriger du mieux possible les basses fréquences de la phase. La deuxième raison est que, si le faisceau bascule au point de ne plus être centré sur le masque coronographique, celui-ci est presque sans effet : le train optique n'atténue pas la lumière stellaire, et la perte de contraste peut atteindre plusieurs ordres de grandeurs. La plupart des instruments coronographiques disposent d'ailleurs d'un correcteur de basculement dédié.

### 1.4.2 L'analyseur à contraste de phase ZELDA

ZELDA [N'Diaye *et al.*, 2013] est un analyseur où le masque focal du coronographe est remplacé par un masque déphaseur. Comme dans le cas du microscope à contraste de phase, les variations de phase dans la pupille sont alors codées dans le plan du capteur sous forme de variation d'intensité lumineuse. Cette méthode a donné récemment des premiers résultats prometteurs pour la mesure des aberrations de SPHERE [Vigan *et al.*, 2018].

### 1.4.3 La détection par auto-interférences

La détection par auto-interférences (*self-coherent camera*) [Galicher *et al.*, 2008] consiste à pratiquer un trou quasi-ponctuel dans le diaphragme de Lyot pour obtenir une interférence à séparation de faisceau avec une seule source. Ainsi, l'image produite sur le capteur est le résultat d'une interférence entre le champ électrique propagé depuis la source à travers la voie classique du coronographe et le champ électrique passée par le trou du diaphragme de Lyot. En considérant la transformée de Fourier de l'image, il est possible de reconstituer la phase et l'amplitude des aberrations optiques dans l'instrument. Il s'agit donc d'un analyseur de surface d'onde post-coronographique.

On peut remarquer que l'image présente des franges qui sont le résultat de l'interférence de la lumière de l'étoile passée par le coronographe avec la lumière de l'étoile passée par le trou du diaphragme de Lyot. Si une planète est présente dans le système observé, cette planète est incohérente avec l'étoile, et donc la tache correspondante n'est pas frangée vu que la lumière n'est pas diffractée dans le trou latéral. Cette méthode présente donc l'avantage qu'une planète ne peut pas être confondue avec une tavelure. Cette méthode est toujours en cours de développement : [Delorme *et al.*, 2016] a démontré en laboratoire une évolution pour gérer le problème de perte de contraste des franges lors de l'utilisation en bande spectrale large. Par ailleurs, l'adaptation à la mesure en présence de turbulence résiduelle n'a pas encore été réalisée.

### 1.4.4 La diversité de phase coronographique

La diversité de phase coronographique (COFFEE : *coronagraphic focal-plane wave-front estimation for exoplanet detection*) [Sauvage *et al.*, 2012, Paul *et al.*, 2013b, Paul *et al.*, 2013a, Paul, 2014] consiste comme son nom l'indique en une extension de la diversité de phase

[Gonsalves, 1982, Mugnier *et al.*, 2006] aux systèmes coronographiques. Le principe de la diversité de phase est d'utiliser conjointement des images expérimentales et un modèle de l'instrument pour déterminer les aberrations dans l'instrument. Il ne suffit cependant pas d'utiliser une image unique pour remonter aux aberrations, car plusieurs aberrations différentes peuvent donner la même image, comme montré dans la section 2.3.1. Pour lever cette ambiguïté, on utilise, en plus d'une image focalisée, une image dite de diversité où on a volontairement introduit une aberration connue. Comme ma thèse est principalement consacrée à la diversité de phase coronographique, le formalisme complet en est détaillé dans le chapitre 2.

Un avantage crucial de cette méthode est qu'elle permet une analyse de surface d'onde post-coronographique, donc sans aberration différentielles. À ce propos, on peut signaler que la diversité de phase classique (non-coronographique) a été utilisée sur SPHERE pour estimer les aberrations de manière différentielle. Malheureusement, cette approche différentielle ne permet pas en pratique d'estimer les aberrations avec une précision suffisante. Notamment, il est très difficile de distinguer aberration en amont et aberration en aval du coronographe.

Un autre avantage de la diversité de phase coronographique est qu'elle permet une estimation de très hauts ordres, qui n'est limitée en théorie que par le champ de vue des images formées par le détecteur.

Enfin, un avantage pratique de cette approche est qu'elle n'implique aucune modification matérielle des instruments : seuls sont nécessaires un accès aux données du détecteur et la possibilité d'introduire une phase de diversité bien maîtrisée, par exemple en utilisant le miroir déformable de l'optique adaptative. L'impact de la connaissance de la phase de diversité sur la précision de la mesure est discutée au chapitre refchap :formalisme.

## 1.5 Correction et contrôle de surface d'onde post-coronographique

### 1.5.1 Conjugaison de phase

En optique adaptative, et en l'absence de coronographe, l'approche classique est de mesurer l'aberration de phase pour la corriger en la compensant. Ceci est fait à une cadence de l'ordre du kilohertz dans les systèmes actuels.

Une première méthode pour améliorer la qualité des images coronographiques part du constat que le champ de tavelure dans les images longue pose (exposition de plusieurs secondes) trouve son origine dans les aberrations optiques quasi-statiques. En particulier, hors du régime des contrastes très élevés atteignables seulement par des télescopes spatiaux, les aberrations optiques sont avant tout des aberrations de phase. Pour limiter l'impact des tavelures, le plus simple est donc de mesurer puis compenser la phase aberrante pour que le niveau des aberrations effectivement présentes dans l'instrument soit le plus bas possible. Cette méthode de minimisation de la phase de l'onde en plan pupille est appelée la conjugaison de phase. C'est l'approche classique pour les instruments au sol.

### 1.5.2 Techniques d'optimisation du contraste

Pour atteindre de meilleurs contrastes que ceux obtenus par simple conjugaison de phase, il est possible de trouver des commandes du miroir déformable qui compensent explicitement les tavelures en minimisant le module du champ électrique en plan focal. L'annulation de tavelures (*speckle nulling*) [Malbet *et al.*, 1995] a été la première méthode expérimentalement probante pour augmenter le contraste dans des images coronographiques. Le principe physique de cette méthode est d'approximer le champ électrique dans le plan focal du détecteur par la transformée de Fourier de l'aberration de phase en plan pupille amont  $\phi_{up}$ . Ceci revient à

linéariser la relation entre aberration en plan pupille et champ électrique en plan focal. Alors, si on considère la tavelure la plus brillante sur le détecteur, on peut la modéliser par un pic de Dirac, dont la transformée de Fourier est une sinusoïde. En appliquant la sinusoïde opposée sur un miroir déformable en plan pupille, on réduit donc considérablement l'intensité de la tavelure la plus brillante. L'amplitude de la sinusoïde est déduit de l'intensité de la tavelure. Sa fréquence spatiale est déduite de la position de la tavelure dans l'image focale. Sa phase à l'origine, par contre, doit être obtenue par tâtonnement.

Une fois la tavelure la plus brillante éteinte, il ne reste plus qu'à recommencer avec celle qui est désormais la plus brillante, et ainsi de suite jusqu'à avoir atteint le niveau de contraste souhaité. Cette méthode itérative présente l'inconvénient d'être très lente. Par exemple, sur le banc HiCAT du Space Telescope Science Institute, l'opération d'annulation de tavelures exige des centaines de milliers d'itérations [Leboulleux *et al.*, 2017] et prend une nuit. De plus, la méthode présente un risque de saturation des actionneurs du miroir déformable. Son principal avantage est qu'elle se passe d'analyseur de surface d'onde.

Diverses évolutions de cette méthode ont vu le jour. En général, elles ne distinguent pas explicitement la méthode d'analyse de la méthode de contrôle proprement dit. On pourra trouver dans [Leboulleux *et al.*, 2017] une revue récente de ces techniques. Leur point commun, outre qu'elles supposent que l'aberration d'amplitude est négligeable devant l'aberration de phase, est de supposer une relation linéaire entre la phase en plan pupille et le champ électrique en plan focal, ce qui est une approximation au premier ordre en phase, et donc de s'appuyer sur une recalibration régulière de la matrice qui décrit (au premier ordre) l'influence du miroir déformable sur l'intensité.

L'annulation de champ de tavelures (*speckle field nulling*) [Bordé et Traub, 2006] permet de déterminer les commandes pour annuler simultanément les tavelures dans toute une zone du plan focal. Cette méthode suppose donc une détermination préalable du champ électrique en plan focal, alors que ce n'est pas nécessaire dans la méthode originale d'annulation des tavelures.

Une méthode proche dans son principe, qui se distingue notamment par ses algorithmes de contrôle, est la conjugaison de champ électrique (*electric field conjugation*) [Give'on *et al.*, 2007, Riggs *et al.*, 2016].

Enfin, la minimisation des déformations (*stroke minimization*) [Pueyo *et al.*, 2009] a pour but de remédier à un défaut des autres méthodes, qui ne prennent pas en compte la finitude de la course des actionneurs du miroir déformable. Le principe de cette méthode consiste à minimiser la déformation du miroir sous contrainte d'atteindre un certain niveau de contraste dans une zone donnée du plan focal. Le nom et le principe de la méthode peuvent étonner en mettant l'accent avant tout sur la course des actionneurs. Cependant, dans le formalisme des multiplicateurs de Lagrange, ceci est équivalent à optimiser le contraste sous contrainte de déformations limitées du miroir : on peut donc voir cette méthode comme une extension des précédentes, mais avec prise en compte des limites du miroir déformable.

Diverses autres méthodes suivent le même principe. Par exemple, le banc *très haute dynamique* de l'Observatoire de Paris-Meudon atteint des contrastes extrêmement élevés par une méthode itérative dite de *speckle minimization* [Mazoyer *et al.*, 2014].

L'optimisation non linéaire du contraste (*non-linear dark hole*) [Paul *et al.*, 2013a], à rebours des méthodes linéarisées, consiste à trouver le jeu de tensions qui minimise l'énergie lumineuse dans une zone donnée du plan focal en inversant un modèle non linéaire de formation d'image coronographique en présence d'un champ d'aberrations donné. Il faut donc un modèle aussi précis que possible de l'instrument, ainsi qu'une détermination préalable des aberrations optiques en amont et en aval du coronographe. Cette technique est présentée en détails dans le chapitre 7. Elle ne prétend pas obtenir des niveaux de contraste plus élevés que les méthodes linéaires, mais, du fait de son absence de linéarisation, elle permet d'atteindre ces niveaux de contraste plus rapidement.

## 1.6 Objectifs de cette thèse

### 1.6.1 Structure de mes travaux

La première partie de ma thèse présente le contexte de mes travaux, mes objectifs, et le formalisme employé. Ce chapitre positionne mes travaux. Le suivant présente les modèles physiques et le formalisme mathématique employé pour la description et la calibration des aberrations. La deuxième partie de ma thèse est consacrée à l'amélioration des performances de contraste des instruments au sol, et plus précisément à la mesure des aberrations en présence de turbulence. La troisième partie est consacrée à l'amélioration du contraste obtenu par des instruments spatiaux. Elle traite à la fois de mesure et de correction des aberrations.

### 1.6.2 Mesures en présence de turbulence pour les télescopes terrestres

Sur des instruments terrestres de dernière génération tels que SPHERE, les aberrations quasi-statiques qui diffèrent entre le chemin optique de l'analyseur de surface d'onde et le capteur scientifique sont une source importante de limitation du contraste. Elles sont appelées aberrations différentielles ou encore « NCPA » pour *non-common path aberrations*. Ces aberrations évoluent au cours de la nuit, avec une dérive non linéaire variable selon la fréquence spatiale et l'instrument, mais qui est de l'ordre d'un nanomètre par heure [Martinez *et al.*, 2012, Martinez *et al.*, 2013]. Il faudrait donc mesurer ces aberrations, et idéalement les compenser, plusieurs fois par nuit. Comme il est hors de question d'interrompre longuement les observations pour procéder à des calibrations des instruments, il serait fort utile de réussir à calibrer les aberrations pendant les observations, directement sur le ciel.

Dans la deuxième partie de cette thèse, je présente mes travaux d'extension de la diversité de phase coronographique à la mesure d'aberrations de phase en présence de turbulence partiellement corrigée par optique adaptative. D'abord, le chapitre 3 expose un modèle analytique d'imagerie coronographique en présence de turbulence. Ce modèle sépare l'influence des aberrations instrumentales de l'influence de la turbulence atmosphérique. Ensuite, le chapitre 4 explique l'inversion de ce modèle pour remonter aux aberrations instrumentales à partir d'images acquises par l'instrument. Enfin, le chapitre 5 présente la validation expérimentale de la méthode en laboratoire.

### 1.6.3 Mesure conjointe de la phase et de l'amplitude du champ complexe, et optimisation du contraste, pour les télescopes spatiaux

Dans le cas de télescopes spatiaux, les contrastes visés, au-delà de  $10^{-10}$ , sont tels qu'il ne suffit plus de corriger seulement la phase : il faut également mesurer et corriger l'amplitude de l'onde. Dans un contexte non coronographique, la diversité de phase a permis de telles mesures [Védrenne *et al.*, 2014]. Le chapitre 6, qui ouvre la troisième et dernière partie de cette thèse, présente la validation expérimentale de la mesure du champ complexe, c'est-à-dire la mesure conjointe du champ d'aberrations de phase et du champ d'aberrations d'amplitude, grâce à la diversité de phase coronographique.

Le chapitre 7 traite de la correction des aberrations par optimisation non linéaire du contraste. L'optimisation du contraste permet d'atteindre de meilleures performances que la simple conjugaison de phase. Le caractère non linéaire doit permettre des gains de vitesse importants, ce qui est particulièrement crucial pour des missions spatiales, dont le temps de vol est nécessairement compté. Ce dernier chapitre présente notamment les premiers résultats expérimentaux de l'optimisation non linéaire du contraste.



## Conclusion

L'imagerie d'exoplanètes est complémentaire des méthodes de détection indirecte. Par ailleurs, elle offre la possibilité d'analyser le spectre des exoplanètes, entre autres dans l'espoir de révéler des traces de vie. Pour pallier le très haut contraste entre l'étoile et son environnement, on utilise des coronographes. Depuis le sol, la turbulence atmosphérique déforme la surface de l'onde lumineuse, si bien qu'il faut une optique adaptative pour pouvoir séparer planète et étoile. Enfin, les aberrations quasi-statiques constituent la limite ultime des instruments coronographiques actuels. Il faut donc les mesurer et les compenser au moyen d'un miroir déformable, voire activement déformer la surface d'onde de manière à créer une zone de très haut contraste dans le plan focal. Dans cette thèse, je présente mes travaux théoriques, numériques et expérimentaux en analyse de surface d'onde par diversité de phase coronographique. Je présente également des travaux numériques et expérimentaux sur l'optimisation non linéaire du contraste. Ces méthodes ont pour originalité et pour point commun de reposer sur l'inversion d'un modèle non linéaire de propagation de la lumière jusqu'au capteur de l'instrument.

« Il faut se concentrer sur la méthode, et non sur les découvertes, parce que c'est une bonne méthode qui mène à de belles découvertes. »

Lev Landau

## Chapitre 2

# Modélisation de la formation d'images et formalisme de la diversité de phase coronographique



LA THÈSE SE concentre sur une méthode non linéaire d'analyse de surface d'onde post-coronographique : la diversité de phase coronographique. Comme cette méthode repose sur l'inversion d'un modèle de propagation de la lumière dans les instruments coronographiques, je commence par présenter le formalisme optique que j'utilise. Je présente ensuite le modèle de formation d'image par le capteur, et un modèle des bruits que celui-ci introduit. Enfin, je présente la diversité de phase coronographique elle-même comme un problème inverse dans un cadre bayésien, sans éluder les difficultés mathématiques que pose ce problème.

## 2.1 Propagation de la lumière et coronographie

### 2.1.1 Propagation du champ électromagnétique et notations

Dans cette thèse, j'utilise principalement l'optique ondulatoire scalaire pour décrire la propagation du champ électromagnétique dans le télescope. Par conséquent, tout le formalisme suppose que la lumière n'est pas polarisée ([Born et Wolf, 1959], 8.4 *Transition to a scalar theory*). Par ailleurs, comme les détecteurs ne sont sensibles qu'à l'intensité moyenne du champ électromagnétique dans le domaine de longueurs d'onde étudié, j'omettrai systématiquement la dépendance temporelle périodique de l'onde. J'omettrai également les termes de phase pure qui n'ont pas d'impact sur la répartition de l'énergie. En termes mathématiques, je suppose que la lumière est décrite par un champ scalaire complexe  $\psi$  dépendant de la seule coordonnée spatiale, qui est un vecteur à trois composantes réelles. Dans un plan pupille, la coordonnée spatiale bi-dimensionnelle est notée  $r$ . Dans un plan focal, la coordonnée spatiale bi-dimensionnelle est décrite par l'angle  $\alpha$ . L'application du principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer permet de montrer que la propagation de l'onde de lumière depuis le foyer d'une lentille ou d'un miroir vers un plan focal est décrite, à un facteur de phase près, par la transformation de Fourier inverse du champ complexe,  $\psi$

[Goodman, 2017, Landau et Lifchitz, 1998b]. Comme les détecteurs ne sont sensibles qu'à la moyenne temporelle de l'énergie, seul le carré du module du champ complexe est détectable. J'omettrai donc par la suite les termes de déphasage pur. La propagation de la lumière de longueur d'onde  $\lambda$  vers un plan focal depuis un plan pupille est décrite par la transformation de Fourier optique inverse, définie par

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](\alpha) = \iint \psi(r) \times \exp\left(\frac{-i2\pi\alpha \cdot r}{\lambda}\right) dr. \quad (2.1)$$

En l'absence de précision sur le domaine d'intégration, l'intégrale est prise sur le plan  $\mathbb{R}^2$ .

De la même manière, la propagation de la lumière vers un plan pupille à travers un plan focal est décrite par la transformation de Fourier directe, qui est définie par

$$\mathcal{F}[\Psi](r) = \iint \Psi(\alpha) \times \exp\left(\frac{i2\pi r \cdot \alpha}{\lambda}\right) d\alpha. \quad (2.2)$$

La modélisation de la propagation du champ électromagnétique tantôt par une transformation directe et tantôt par une transformation inverse peut sembler arbitraire au premier abord. Cette convention est introduite car elle permet d'écrire de manière simple des modèles de formation d'images à travers de multiples plans focaux et pupilles successifs. En effet, le renversement de l'image d'un objet par une lentille est un résultat classique. Si l'on ne veut pas devoir faire intervenir explicitement des renversements dans les modèles d'instrument, il suffit de prendre une convention opposée d'orientation des axes : on prend donc comme convention de renverser l'orientation des axes d'un plan focal au suivant. Comme  $\forall \psi \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}), \forall \alpha \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}[\psi](\alpha) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](-\alpha)$ , ce choix de convention d'orientation des axes est équivalent à modéliser la propagation vers un plan focal par une transformation de Fourier inverse.

### 2.1.2 Réponse impulsionnelle d'un instrument coronographique

En suivant la propagation de la lumière dans les plans successifs du coronographe représenté sur la figure 2.1, on peut établir l'expression de la réponse impulsionnelle du système coronographique. On note  $P_{\text{up}}$  la transmission en amplitude de la pupille d'entrée du télescope, et on modélise l'impact des aberrations au cours de cette propagation par un unique champ complexe d'aberration  $\psi_{\text{up}}$  présent dans la pupille. Après propagation à travers la pupille d'entrée, le champ électrique incident dans le premier plan focal, de coordonnée  $\alpha_1$ , est décrit par

$$\Psi_1(\alpha_1) = \mathcal{F}^{-1}[P_{\text{up}}\psi_{\text{up}}](\alpha_1). \quad (2.3)$$

On note  $M$  le masque focal du coronographe. Le passage par le masque focal et la propagation vers le plan pupille permettent d'écrire le champ électrique incident dans le plan pupille de Lyot, de coordonnée  $r_2$  :

$$\psi_2(r_2) = \mathcal{F}\{M \times \mathcal{F}^{-1}[P_{\text{up}}\psi_{\text{up}}]\}(r_2). \quad (2.4)$$

Ensuite, le passage par la pupille de Lyot et la propagation vers le plan focal du détecteur permettent de décrire le champ électrique dans ce plan focal, de coordonnée  $\alpha$  :

$$\Psi_3(\alpha) = \mathcal{F}^{-1}(P_{\text{down}}\psi_{\text{down}} \times \mathcal{F}\{M \times \mathcal{F}^{-1}[P_{\text{up}}\psi_{\text{up}}]\})(\alpha), \quad (2.5)$$

où  $P_{\text{down}}$  désigne la transmission en amplitude de la pupille de Lyot et  $\psi_{\text{down}}$  le champ d'aberrations rencontré lors de la propagation et ramené à la traversée de la pupille de Lyot. Enfin, comme le détecteur n'est sensible qu'à l'intensité de la lumière, la réponse impulsionnelle du système optique est décrite par

$$h_c(\alpha) = \left| \mathcal{F}^{-1}(P_{\text{down}}\psi_{\text{down}} \times \mathcal{F}\{M \times \mathcal{F}^{-1}[P_{\text{up}}\psi_{\text{up}}]\}) \right|^2(\alpha). \quad (2.6)$$

Dans le cas particulier d'un instrument non-coronographique,  $M = 1$  et  $P_{\text{down}} = 1$  et l'équation 2.6 se réduit à

$$h(\alpha) = |\mathcal{F}^{-1}[P_{\text{up}}\psi]|^2(\alpha), \quad (2.7)$$

où on a noté  $\psi = \psi_{\text{up}}\psi_{\text{down}}$ , car il n'y a plus de sens à faire la distinction entre aberrations en amont et en aval d'un coronographe absent.

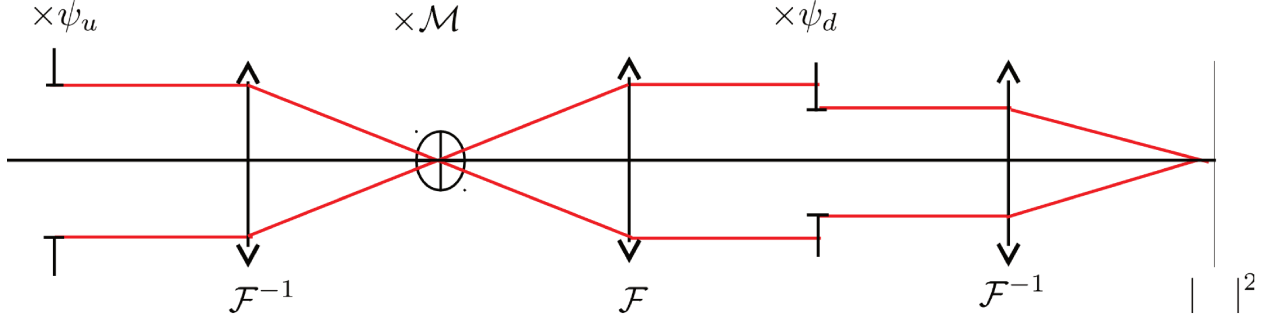


FIGURE 2.1 – Schéma optique d'un coronographe

### 2.1.3 Impact des aberrations en amont et en aval du masque du coronographe

Pour comprendre la différence d'impact des aberrations en amont et en aval du masque, on peut réécrire cette réponse impulsionnelle en développant la transformée de Fourier inverse la plus extérieure sur son argument :

$$h_c(\alpha) = |\mathcal{F}^{-1}(P_{\text{down}}\psi_{\text{down}}) \star \{M \times \mathcal{F}^{-1}[P_{\text{up}}\psi_{\text{up}}]\}|^2(\alpha), \quad (2.8)$$

où  $\star$  désigne la convolution. On voit sur cette formulation que l'impact des aberrations en aval du masque coronographique est de déformer le noyau de convolution qui s'applique à la réponse impulsionnelle donnée par les aberrations en amont. L'interprétation physique est que les aberrations en aval peuvent déformer les tavelures dans l'image, mais pas en créer. Ce sont les aberrations en amont qui peuvent engendrer des tavelures sur les images, et donc dégrader le contraste. Ainsi, la mesure et la correction des aberrations en amont du coronographe est beaucoup plus critique que la mesure et la correction des aberrations en aval.

### 2.1.4 Quelques fonctions de transfert coronographiques

Dans un coronographe de Lyot, le masque focal est décrit par une fonction de transmission en intensité :

$$M_{\text{Lyot}}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\alpha\| \leq \alpha_R \\ 1 & \text{si } \|\alpha\| > \alpha_R \end{cases}, \quad (2.9)$$

où le rayon angulaire  $\alpha_R$  du masque focal est de l'ordre de quelques fois la taille du cœur de la tache d'Airy, soit  $\alpha_R \gtrsim \lambda/D$ . Le diaphragme de Lyot, qui est dans le plan pupille suivant, doit être de diamètre légèrement inférieur à celui de la pupille d'entrée pour une bonne extinction. Par ailleurs, le coronographe de Lyot atteint de meilleurs contrastes s'il est apodisé grâce à un apodiseur en plan pupille. Enfin, on peut noter que, même dans un cas idéal sans aucune aberration, le coronographe de Lyot ne permet pas une extinction totale de la lumière stellaire.

Pendant la préparation de cette thèse, j'ai employé deux autres types de coronographes : le coronographe de Roddier & Roddier et le coronographe à quatre quadrants. Il s'agit de raffinements du concept de Lyot. Le coronographe de Roddier & Roddier [Roddier et Roddier, 1997]

est muni d'une pastille non pas opaque, mais qui introduit un déphasage de  $\pi$ , ce qui permet une meilleure extinction, et même une extinction théorique totale en l'absence d'aberration :

$$M_{R\&R}(\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \|\alpha\| \leq \alpha_R \\ 1 & \text{si } \|\alpha\| > \alpha_R \end{cases} . \quad (2.10)$$

Ce coronographe doit être également muni d'un diaphragme de Lyot. On peut noter qu'il est par nature sensible au chromatisme.

Le coronographe à quatre quadrants [Rouan *et al.*, 2000], quant à lui, est constitué comme son nom l'indique de quatre quadrants. Deux d'entre eux, symétriques l'un de l'autre par rapport au centre, induisent un déphasage de  $\pi$  par rapport aux deux autres quadrants. Ce concept de coronographe, en l'absence d'aberration, permet une extinction complète de la source située sur axe pour une pupille circulaire sans occultation [Abe *et al.*, 2003]. Il doit comme les autres être muni d'un diaphragme de Lyot. Le masque focal de ce coronographe est décrit par

$$M_{4Q}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{angle}(\alpha) \in [0; \pi/2[ \cup [\pi; 3\pi/2[ \\ -1 & \text{si } \text{angle}(\alpha) \in [\pi/2; \pi[ \cup [3\pi/2; 2\pi[ \end{cases} . \quad (2.11)$$

D'autres types de coronographes existent, avec leurs avantages et leurs inconvénients. En particulier, les coronographes de type vortex [Foo *et al.*, 2005, Mawet *et al.*, 2010], qui constituent une généralisation du coronographe à quatre quadrants, permettent une excellente extinction très près de l'axe optique. Cependant, ils sont extrêmement sensibles aux erreurs d'alignement si leur charge est faible. On trouvera une revue des techniques coronographiques dans [Mawet *et al.*, 2012].

Finalement, il faut mentionner que d'autres moyens de bloquer la lumière de l'étoile que les coronographes sont à l'étude. En particulier, depuis l'espace, on envisage de faire voler un masque occultant (appelé *starshade*) en formation avec le télescope, qui volerait dans l'ombre portée du masque. Celui-ci cacherait l'étoile en laissant voir son environnement [Cash, 2006, Turnbull *et al.*, 2012]. L'avantage principal de cette approche est qu'il n'y a pas d'aberration optique en amont de ce dispositif. La conception optique est donc grandement simplifiée, et en particulier le problème de l'analyse de surface d'onde devient très secondaire. En revanche, tout dépointage du télescope impose un mouvement du masque d'au moins plusieurs milliers à un million de kilomètres. Qui plus est, il est difficile et coûteux de positionner et surtout de maintenir à poste le masque par rapport au télescope. On remplace alors un problème d'optique très difficile par un problème très difficile de contrôle d'attitude de satellites en formation, ce qui sort du cadre de cette thèse.

## 2.2 Détection

### 2.2.1 Discrétisation par le détecteur

Les images effectivement enregistrées par le détecteur et utilisées par l'astrophysicien ne sont pas des images continues. Ce sont des tableaux bidimensionnels de valeurs discrètes, les pixels, et de taille finie. La valeur de chaque pixel dépend du produit  $A$  de l'intensité du champ électromagnétique sur la réponse de l'élément du détecteur correspondant à ce pixel. Si on note  $x \mapsto \mathbf{h}_{\text{dét}}[\mathbf{x}_0](x)$  la fonction qui mesure la réponse du pixel de coordonnées bidimensionnelles  $\mathbf{x}_0$ , et  $\psi(x)$  la valeur du champ électromagnétique en ce même point, la valeur de la réponse du pixel dépend donc de

$$A(\mathbf{x}_0) = \iint |\psi(x)|^2 \times \mathbf{h}_{\text{dét}}[\mathbf{x}_0](x) dx. \quad (2.12)$$

Si, de plus, on suppose que la forme de la réponse de tous les pixels est identique, ce qui est attendu au moins en première approximation, on peut légèrement simplifier cette intégrale. En effet, dans ce cas, on peut changer de notation en posant  $\mathbf{h}_{\text{dét}}[\mathbf{x}_0](x) = \mathbf{h}_{\text{dét}}(\mathbf{x}_0 - x)$ , et l'intégrale précédente devient

$$A(\mathbf{x}_0) = \iint |\psi(x)|^2 \times \mathbf{h}_{\text{dét}}(\mathbf{x}_0 - x) dx. \quad (2.13)$$

On reconnaît là un produit de convolution, et on peut noter

$$A(\mathbf{x}_0) = |\psi|^2 \star \mathbf{h}_{\text{dét}}(\mathbf{x}_0). \quad (2.14)$$

Par exemple, une discrétisation particulièrement simple peut être de modéliser  $\mathbf{h}_{\text{dét}}$  par un dirac. On aurait alors directement pour chaque pixel

$$A(\mathbf{x}_0) = |\psi(x)|^2. \quad (2.15)$$

Cependant, la grandeur  $A$  ne détermine pas à elle seule la valeur enregistrée par le détecteur. En effet, à cette grandeur déterministe s'ajoutent un certain nombre de variables aléatoires, dont la prise en compte est indispensable à une description physique correcte de la formation d'images, et donc au traitement des images expérimentales.

### 2.2.2 Bruits à la détection

L'amplitude de l'onde de lumière  $\psi$  en chaque point ne détermine pas complètement l'énergie effectivement détectée. En effet, il faut prendre en compte divers aléas. Parmi ces aléas, il y a le caractère aléatoire de toute mesure de phénomène où les effets quantiques jouent un rôle, ce qui est le cas pour le rayonnement. Une description dite semi-classique permet de modéliser ces effets. Les nombreux autres phénomènes aléatoires ou mal maîtrisés internes au détecteur lors de la détection constituent une autre catégorie d'aléas. Il est hors de question ici d'entrer dans les détails de la théorie quantique des champs ou des sciences qui interviennent dans la conception ou la caractérisation des détecteurs : je ne donnerai que les modèles choisis, qui sont ceux usuellement utilisés dans le cadre de l'imagerie à haut contraste. On pourra se reporter au chapitre 7 de [Léna *et al.*, 2008] pour des détails, et vers [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a, Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997b, Landau et Lifchitz, 1998a] pour la physique sous-jacente aux modèles qui y sont détaillés.

En ce qui concerne la statistique de la mesure de l'énergie électromagnétique, la grandeur  $|\psi(\mathbf{x})|^2$  représente la densité de probabilité spatiale de mesure [Landau et Lifchitz, 1967] au pixel de coordonnées  $\mathbf{x}$  du détecteur [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a] (chapitre 1). Le nombre de photons reçus en un point au cours de la détection, quant à lui, est modélisé par une loi de Poisson [Léna *et al.*, 2008, Landau et Lifchitz, 1998a, Snyder *et al.*, 1995] de paramètre  $|\psi(\mathbf{x})|^2$ .

Le détecteur n'est pas parfaitement efficace et ne détecte donc qu'une partie du flux. Qui plus est, les pixels n'ont pas tous la même sensibilité. Ce problème est réglé par une calibration préalable du détecteur et une renormalisation pixel à pixel. Le fait de ne pas connaître le flux incident total ne pose pas de problème insurmontable dans le cadre étudié, vu que la grandeur d'intérêt est la répartition spatiale de l'intensité indépendamment de la normalisation d'ensemble. La résultante des bruits du détecteur, quant à elle, est la somme de plusieurs processus aléatoires. Pour les applications en lumière visible ou proche infra-rouge, le bruit de détecteur est dominé par le bruit de lecture, qui est gaussien [Snyder *et al.*, 1995].

Le bruit total sur chaque pixel du détecteur est donc modélisé à ce stade par la somme d'un bruit poissonnien et d'un bruit gaussien. Si le pixel n'est pas atteint par de la lumière, le bruit gaussien domine le bruit poissonnien, et donc le bruit total peut être bien approximé par un bruit gaussien. Au contraire, si l'illumination du pixel n'est pas négligeable, mais de

plus de quelques dizaines de photons, le paramètre de la loi de Poisson est lui-même de quelques dizaines, et on peut alors bien approximer la loi de Poisson par une loi gaussienne. Alors, le bruit total devient gaussien comme somme de deux bruits gaussiens. De plus, la variance du bruit total est la somme des deux variances des bruits gaussiens. Pour le bruit de détecteur, cette variance peut être calibrée *a priori*. Pour le bruit photonique, approximé par une gaussienne mais qui est à la base une distribution de Poisson, la variance du bruit de photons est l'espérance du flux, estimée par sa moyenne temporelle. On peut donc estimer la variance directement à partir de la valeur du pixel.

De toute manière, dans le cadre des expériences des chapitres 5, 6 et 7, les images traitées sont des sommes ou moyenne de piles de centaines d'images acquises. Le théorème central sur la limite permet alors de modéliser le bruit de chaque pixel par une variable aléatoire gaussienne [Léna *et al.*, 2008] dont l'écart-type sera typiquement de l'ordre de l'électron pour les applications de cette thèse.

En conclusion, le bruit sera modélisé dans toute la suite par un bruit gaussien centré. Sa variance est la somme de la variance du bruit de détecteur calibrée *a priori* et de la variance du bruit de photon directement estimé par la valeur enregistrée par le détecteur. Ce bruit est noté  $\mathfrak{B}$ .

La valeur enregistrée du pixel de coordonnées  $\mathbf{x}$  est donc finalement modélisée par la variable aléatoire

$$\mathfrak{I}(\mathbf{x}) = f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\mathbf{x}) + f_2 + \mathfrak{B}(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

où  $f_1$  est le flux incident en photons,  $\mathbf{h}_{\text{dét}}$  la réponse impulsionnelle du détecteur,  $h_c$  la réponse impulsionnelle optique du coronographe qui dépend des aberrations,  $f_2$  le fond, et  $\mathfrak{B}$  une variable aléatoire gaussienne centrée.

## 2.3 La diversité de phase coronographique vue comme un problème inverse bayésien

Nous disposons à présent d'un modèle de formation d'images coronographiques. Cette section présente la diversité de phase coronographique, une méthode qui exploite ce modèle pour traiter des images issues d'un instrument afin d'estimer les aberrations optiques de ce dernier.

### 2.3.1 Nécessité d'utiliser plusieurs images

Il est impossible de remonter aux aberrations de phase d'un imageur simple à symétrie de révolution à partir d'une seule image. En termes plus mathématiques, si on note  $h[\phi]$  un modèle d'image qui dépend d'un champ d'aberrations  $\phi$ , alors nous allons montrer que  $h$  n'est pas injectif.

Pour cette démonstration, on part du constat expérimental qu'il est impossible, à partir d'une seule image défocalisée, de dire si le capteur est en avant ou en arrière du foyer image. Il y a donc une ambiguïté de signe pour la défocalisation, qui est une aberration paire. Prenons donc  $\phi$  un champ d'aberration tel que  $\forall r, \phi(-r) = \phi(r)$ . On note  $\forall r, \check{\phi}(r) = \phi(-r)$ . On considère également une pupille symétrique  $P$ .

D'abord, le modèle d'image est

$$h[\phi] = \left| \mathcal{F}^{-1}[P e^{i\phi}] \right|^2 \quad (2.17)$$

$$= \left\{ \mathcal{F}^{-1}[P e^{i\phi}] \right\}^* \mathcal{F}^{-1}[P e^{i\phi}] \quad (2.18)$$

$$h[\phi] = \mathcal{F}[P e^{-i\phi}] \mathcal{F}^{-1}[P e^{i\phi}]. \quad (2.19)$$

Le modèle d'image obtenue à partir de l'aberration opposée est donc

$$h[-\phi] = \mathcal{F}[Pe^{i\phi}] \mathcal{F}^{-1}[Pe^{-i\phi}]. \quad (2.20)$$

Comme on a choisi d'étudier une aberration symétrique avec une pupille symétrique,  $\check{P}e^{i\check{\phi}} = Pe^{i\phi}$ , ce qui revient à  $\mathcal{F}^2[Pe^{i\phi}] = Pe^{i\phi}$ . Pour la même raison,  $\mathcal{F}^2[Pe^{-i\phi}] = Pe^{-i\phi}$ . En utilisant le fait que  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$ , l'équation précédente peut donc être réécrite en

$$h[-\phi] = \mathcal{F}^{-1}[Pe^{i\phi}] \mathcal{F}[Pe^{-i\phi}]. \quad (2.21)$$

En reconnaissant l'expression de l'équation 2.19, on a alors le résultat recherché :

$$\forall \phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}, \check{\phi} = \phi \Rightarrow h[-\phi] = h[\phi]. \quad (2.22)$$

Ceci démontre que deux aberrations paires de signe opposé forment la même image. On ne peut donc pas remonter aux aberrations à partir d'une seule image, à cause d'une ambiguïté sur le signe des aberrations paires. Ce résultat est exposé par exemple dans [Martinache, 2013]. On peut trouver une démonstration plus générale, sans hypothèse sur la parité de l'aberration, en annexe de [Blanc, 2002]. Cette démonstration prouve qu'il y a une indétermination de signe sur la partie paire de la phase. Cette limitation est levée par l'ajout d'une phase de diversité qui a une composante paire [Mugnier *et al.*, 2006]. Enfin, le résultat reste valable pour une formation d'image coronographique.

Il faut donc au minimum deux images différentes l'une de l'autre d'une aberration de phase paire connue pour espérer remonter aux aberrations (en l'absence d'aberration d'amplitude). En pratique, donc, les données sont des piles d'images effectivement enregistrées qui diffèrent entre elles de diversités connues. Je noterai  $i_k(x)$  la valeur du pixel de coordonnée angulaire  $x$  dans l'image numéro  $k$ . Je réserverai  $k = 0$  à l'image focalisée, et  $k \geq 1$  aux images de diversité. On recherche avant tout les aberrations en amont du masque coronographique, donc on applique la diversité en amont du coronographe.

### 2.3.2 Cadre probabiliste et maximum *a posteriori*

Le problème consistant à remonter à une cause en connaissant ses effets s'exprime mathématiquement comme un problème inverse [Hadamard, 1902]. Il s'agit d'un grand domaine des mathématiques omniprésent en physique. Le but n'est pas ici d'exposer cette théorie, mais simplement de présenter la méthode au moyen d'un formalisme bayésien. On pourra se référer à la section 9.6 de [Léna *et al.*, 2008] ou aux références de [Sabatier, 1985] pour les questions purement mathématiques. Sur la méthode de la diversité de phase, on peut se référer à la revue de [Mugnier *et al.*, 2006]. Pour ce qui est de la diversité de phase coronographique elle-même, on pourra se reporter à [Sauvage *et al.*, 2012] et [Paul *et al.*, 2013a].

Par souci de clareté et de concision, je présenterai la diversité de phase coronographique comme moyen de remonter à l'aberration de phase en amont du coronographe,  $\phi_{\text{up}}$ ; mais la méthode s'étend naturellement à l'estimation des aberrations d'amplitude ainsi que des aberrations en aval du coronograhe. L'instrument forme un ensemble de données  $\mathbf{i}$  d'images effectivement observées. Le but est d'estimer  $\phi_{\text{up}}$  connaissant  $\mathbf{i}$ , sous un ensemble d'hypothèses  $\theta$ . L'ensemble  $\theta$  est appelé ensemble des hyperparamètres du problème. Il comprend notamment le modèle de bruit, la variance du bruit, et le type de statistique suivi par  $\phi_{\text{up}}$ .

L'approche bayésienne utilisée pour estimer  $\phi_{\text{up}}$  sachant  $\mathbf{i}$  sous un ensemble d'hypothèses indiqué par les hyperparamètres  $\theta$  consiste à utiliser un modèle probabiliste des erreurs de mesures et une loi *a priori* sur l'inconnue  $\phi_{\text{up}}$ . La règle de Bayes permet de relier la densité de probabilité conjointe de  $\mathbf{i}$  et  $\phi_{\text{up}}$  d'une part à la densité de cette mesure, et d'autre part à une densité de  $\phi_{\text{up}}$  sachant  $\mathbf{i}$  :

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta) \times \mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta) = \mathcal{P}(\mathbf{i}, \phi_{\text{up}}; \theta) = \mathcal{P}(\mathbf{i}; \theta) \times \mathcal{P}(\phi_{\text{up}}|\mathbf{i}; \theta), \quad (2.23)$$



où  $\mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta)$  désigne la densité de probabilité d'observer  $\mathbf{i}$  sachant  $\phi_{\text{up}}$  sous l'ensemble d'hypothèses  $\theta$ .

La donnée dont on dispose en pratique est  $\mathbf{i}$ , l'ensemble d'images effectivement observées. On va donc exprimer la densité dite *a posteriori* de  $\phi_{\text{up}}$  :

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}|\mathbf{i}; \theta) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta) \times \mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta)}{\mathcal{P}(\mathbf{i}; \theta)}. \quad (2.24)$$

Le principe de la méthode, de toute méthode de maximum *a posteriori* en fait [Idier, 2002, Léna *et al.*, 2008], est de maximiser la densité *a posteriori* de  $\phi_{\text{up}}$ , c'est-à-dire le terme noté  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}|\mathbf{i}; \theta)$ . Pour cela, il faut disposer d'un modèle de la vraisemblance,  $\mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta)$ , ainsi que d'un modèle *a priori*,  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta)$ . Ces modèles sont détaillés dans les sous-sections suivantes. On peut noter qu'il n'est pas nécessaire de calculer la densité de probabilité  $\mathcal{P}(\mathbf{i}; \theta)$ , vu que celle-ci est indépendante de  $\phi_{\text{up}}$ .

### 2.3.3 Modèle direct et attache aux données

La loi du terme de vraisemblance  $\mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta)$  dépend directement du modèle de formation des données, aussi appelé modèle direct, qui est donné par l'équation 2.16. En effet, si on isole la source de bruit dans cette équation, elle se réécrit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J} - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c - f_2, \quad (2.25)$$

Le bruit  $\mathfrak{B}$  est modélisé par une variable aléatoire gaussienne centrée sans corrélation pixel à pixel. Comme le terme  $f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c + f_2$  est constant à  $\phi_{\text{up}}$ ,  $f_1$  et  $f_2$  donnés, on peut écrire directement sa densité de probabilité, qui est le terme de vraisemblance recherchée, en fonction de sa covariance  $\Sigma_{\mathfrak{B}}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\dim(\mathfrak{J})} \det(\Sigma_{\mathfrak{B}})}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{i} - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}) - f_2]^\dagger \times \Sigma_{\mathfrak{B}}^{-1} \times [\mathbf{i} - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}) - f_2] \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comme le bruit  $\mathfrak{B}$  est décorréolé (le bruit de chaque pixel est indépendant du bruit sur les autres pixels), sa matrice de covariance est diagonale, et on peut donc exprimer sa densité de probabilité comme produit de densités élémentaires :

$$\mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\dim(\mathfrak{J})} \det(\Sigma_{\mathfrak{B}})}} \prod_{k,x} \exp \left\{ -\frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}, k) - f_2]^2}{2\sigma^2(k, \mathbf{x})} \right\}. \quad (2.27)$$

Dans cette expression,  $k$  est l'indice de la phase de diversité employée : pour  $k = 0$ ,  $h_c(\phi_{\text{up}}, 0) = h_c(\phi_{\text{up}})$  et pour  $k = 1$  ou  $k = 2$ ,  $h_c(\phi_{\text{up}}, k) = h_c(\phi_{\text{up}} + \phi_{\text{div}, k})$ . Les  $\sigma^2$  sont les éléments diagonaux de  $\Sigma_{\mathfrak{B}}$ .

### 2.3.4 *A priori* et régularisation

Le terme d'*a priori* sur les aberrations,  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}})$ , dépend comme son nom l'indique uniquement de notre connaissance du comportement typique attendu des aberrations. Comme la phase est définie à une constante près, on peut toujours la définir de sorte que sa moyenne soit nulle. De plus, les aberrations de phase peuvent être considérées comme stationnaires (si cette hypothèse est prise en défaut, c'est la partie stationnaire des aberrations qui sera estimée). Le

postulat le moins fort à moyenne et densité d'énergie donnée est de supposer une densité de probabilité *a priori* gaussienne [Robert, 2007]. On a donc

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}}\right]. \quad (2.28)$$

Il faut alors calculer  $\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}}$ . Pour cela, on va s'appuyer sur le fait que les aberrations sont stationnaires. L'annexe C.1 montre un résultat connu qui est que, comme les aberrations sont stationnaires,  $\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}$  est diagonale.

On peut utiliser cette propriété de  $\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}$  pour calculer  $\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}}$  dans le plan de Fourier. En effet,

$$\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}} = \phi_{\text{up}}^\dagger \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \mathbb{E}[\phi_{\text{up}} \phi_{\text{up}}^\dagger]^{-1} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \phi_{\text{up}} \quad (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} = \text{Id}) \quad (2.29)$$

$$= (\mathcal{F} \phi_{\text{up}})^\dagger \mathbb{E}[\mathcal{F} \phi_{\text{up}} \phi_{\text{up}}^\dagger \mathcal{F}^\dagger]^{-1} \mathcal{F} \phi_{\text{up}} \quad (\mathcal{F} \text{ est unitaire : } \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^\dagger) \quad (2.30)$$

$$= (\mathcal{F} \phi_{\text{up}})^\dagger \mathbb{E}[(\mathcal{F} \phi_{\text{up}})(\mathcal{F} \phi_{\text{up}})^\dagger]^{-1} (\mathcal{F} \phi_{\text{up}}) \quad (2.31)$$

$$= (\mathcal{F} \phi_{\text{up}})^\dagger \Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}^{-1} (\mathcal{F} \phi_{\text{up}}) \quad (2.32)$$

$$\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}} = \iint \frac{|\mathcal{F}[\phi_{\text{up}}]|^2(f)}{\mathcal{S}_{\phi_{\text{up}}}(f)} df \quad (\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})} \text{ est diagonale}). \quad (2.33)$$

Pour poursuivre, il faut expliciter l'expression de la densité spectrale d'énergie  $\mathcal{S}_{\phi_{\text{up}}}$  des aberrations. Un bon modèle de celle-ci pour les optiques astronomiques est une loi de puissance avec une décroissance quadratique [Brown et Burrows, 1990, Hugot *et al.*, 2012] :

$$\mathcal{S}_{\phi_{\text{up}}}(f) \propto \frac{1}{\|f\|^2}, \quad (2.34)$$

On obtient donc

$$\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}} \propto \iint \|f\|^2 \|\mathcal{F}[\phi_{\text{up}}](f)\|^2 df \quad (2.35)$$

$$\propto \iint \|\mathcal{F}[\nabla \phi_{\text{up}}]\|^2(f) df \quad (\text{propriété de } \mathcal{F}) \quad (2.36)$$

$$\phi_{\text{up}}^\dagger \Sigma_{\phi_{\text{up}}}^{-1} \phi_{\text{up}} \propto \iint \|\nabla \phi_{\text{up}}\|^2(r) dr \quad (\text{théorème de Parseval}). \quad (2.37)$$

L'expression de l'*a priori* est donc du type

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta) \propto \exp\left[-\frac{\mu \iint \|\nabla \phi_{\text{up}}\|^2(r) dr}{2}\right], \quad (2.38)$$

où  $\mu$  est un coefficient de proportionnalité. Pour déterminer ce coefficient, il suffit de réécrire l'expression précédente en faisant apparaître explicitement la covariance de cette densité :

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta) \propto \exp\left[-\frac{(\nabla \phi_{\text{up}})^\dagger (\mu \text{Id}) (\nabla \phi_{\text{up}})}{2}\right] \quad (2.39)$$

On remarque alors que le terme  $\mu^{-1} \text{Id}$  est la covariance uniforme dans la densité gaussienne  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}})$ . On prendra donc la notation plus usuelle

$$\mu = \frac{1}{\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2}, \quad (2.40)$$

et on peut écrire

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta) \propto \exp \left[ -\frac{\iint \|\nabla \phi_{\text{up}}\|^2(r) \, dr}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \right]. \quad (2.41)$$

Une difficulté mathématique apparaît à ce stade : comme  $\phi_{\text{up}}$  est de dimension infinie, la densité  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta)$  n'est pas normalisable, est n'est en fait pas à proprement parler la densité de probabilité d'une variable aléatoire ! Cette remarque, qui pourrait sembler catastrophique, n'est en fait pas un problème, pour au moins deux raisons.

La première, est que, comme toute méthode numérique, la diversité de phase coronographique ne s'applique en fait pas à des variables de dimension infinie, mais à des approximations discrètes par des vecteurs de dimension finie. Alors, si on note  $\phi_{\text{up}}$  une version discrétisée de  $\phi_{\text{up}}$ , même de très grande dimension, il n'y a pas de problème à normaliser le préfacteur de  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}})$ , et l'*a priori* s'exprime simplement comme la densité de probabilité

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\dim(\phi_{\text{up}})} \sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}} \exp \left[ -\frac{\sum_r \|\nabla \phi_{\text{up}}(r)\|^2}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \right]. \quad (2.42)$$

La deuxième raison est que, comme la suite le montre, la normalisation des densités n'a en fait aucun impact sur la méthode : seul compte l'argument de l'exponentielle, qui est parfaitement défini que  $\phi_{\text{up}}$  soit continu ou discret.

### 2.3.5 Le critère du maximum *a posteriori*

En utilisant les expressions de la vraisemblance et de l'*a priori*, on peut écrire explicitement et complètement la dépendance en  $\phi_{\text{up}}$  de la densité de probabilité *a posteriori*, au moins dans le cas où  $\phi_{\text{up}}$  est discret :

$$\mathcal{P}(\phi_{\text{up}} | \mathbf{i}; \theta) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{i} | \phi_{\text{up}}; \theta) \times \mathcal{P}(\phi_{\text{up}}; \theta)}{\mathcal{P}(\mathbf{i}; \theta)} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\phi_{\text{up}} | \mathbf{i}; \theta) &= \frac{1}{\mathcal{P}(\mathbf{i}; \theta) \sqrt{2\pi}^{\dim(\mathcal{I}) + \dim(\phi_{\text{up}})} \sqrt{\det(\Sigma_{\mathcal{B}})} \sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}} \\ &\times \prod_{k,x} \exp \left\{ -\frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}, k) - f_2]^2}{2\sigma^2(k, \mathbf{x})} \right\} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\sum_r \|\nabla \phi_{\text{up}}(r)\|^2}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

L'estimée de  $\phi_{\text{up}}$  par la méthode du maximum *a posteriori* est la valeur  $\widehat{\phi}_{\text{up}}$  qui maximise  $\mathcal{P}(\phi_{\text{up}} | \mathbf{i}; \theta)$ . Mathématiquement, il est complètement équivalent de minimiser l'opposé du logarithme de cette densité ou de maximiser la densité. Cette transformation permet un meilleur comportement numérique de la minimisation, et permet également des formules plus légères. On s'attache donc à minimiser  $-\log[\mathcal{P}(\mathbf{i} | \phi_{\text{up}}; \theta)]$ . Comme le préfacteur  $[\mathcal{P}(\mathbf{i}_k; \theta) \sqrt{2\pi}^{\dim(\mathcal{I}) + \dim(\phi_{\text{up}})} \sqrt{\det(\Sigma_{\mathcal{B}})} \sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}]^{-1}$  est indépendant de  $\phi_{\text{up}}$  (la taille et variance de

$\phi_{\text{up}}$  sont données *a priori*), maximiser  $\mathcal{P}(\mathbf{i}|\phi_{\text{up}}; \theta)$  revient à minimiser le critère

$$\mathcal{J}(\phi_{\text{up}}) = -\log \left( \prod_{k,\mathbf{x}} \exp \left\{ \frac{-[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}, k) - f_2]^2}{2\sigma^2(k, \mathbf{x})} \right\} \times \exp \left[ -\frac{\sum_r \|\nabla \phi_{\text{up}}(\mathbf{r})\|^2}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \right] \right) \quad (2.45)$$

$$\mathcal{J}(\phi_{\text{up}}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\mathbf{x}} \frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}, k) - f_2]^2}{\sigma^2(k, \mathbf{x})} + \frac{1}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \sum_r \|\nabla \phi_{\text{up}}(\mathbf{r})\|^2 \quad (2.46)$$

De la même manière, l'estimateur du maximum *a posteriori* du champ d'aberrations continu  $\phi_{\text{up}}$ , noté  $\widehat{\phi}_{\text{up}}$ , est donné par

$$\widehat{\phi}_{\text{up}} = \arg \left\{ \min_{\phi_{\text{up}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}} [\mathcal{J}(\phi_{\text{up}})] \right\}, \quad (2.47)$$

avec

$$\mathcal{J}(\phi_{\text{up}}) = \frac{1}{2} \sum_{k,\mathbf{x}} \frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_c(\phi_{\text{up}}, k) - f_2]^2}{\sigma^2(k, \mathbf{x})} + \frac{1}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \iint \|\nabla \phi_{\text{up}}(\mathbf{r})\|^2 d\mathbf{r}. \quad (2.48)$$

Le premier terme est le carré d'une distance entre données et sortie du modèle. Cette distance au carré est pondérée par la variance du bruit. Ainsi, pour un champ d'aberrations  $\phi_{\text{up}}$ , plus la sortie du modèle de formation d'image est proche des données, plus ce terme est petit, et on tolère un écart au modèle d'autant plus grand en un point que le bruit en ce point est fort. Le deuxième terme, quant à lui, est un terme de régularisation. Il pénalise l'irrégularité spatiale de la phase : il est d'autant plus petit que les variations spatiales du champ d'aberrations sont faibles.

On peut noter que, contrairement à beaucoup de méthodes de résolution de problèmes inverses régularisés, le choix du poids relatif du terme d'attache au données et du terme de régularisation n'est pas un hyperparamètre à régler « à la main », mais qu'il est au contraire réglé sans supervision, grâce à la connaissance *a priori* de la statistique du champ d'aberration.

## Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai présenté le formalisme de l'optique de Fourier et la modélisation de la formation de l'image d'un point source par un imageur coronographique qui seront utilisés tout au long de cette thèse. Cette modélisation inclut les bruits qui interviennent à la détection. Enfin, j'ai présenté le cadre bayésien utilisé par cette thèse pour l'estimation des aberrations. Ce cadre permet d'introduire la diversité de phase coronographique, qui est une méthode d'analyse de surface d'onde fondée sur l'inversion régularisée d'un modèle physique d'instrument coronographique.



## **Deuxième partie**

### **Diversité de phase coronographique en présence de turbulence**



## Chapitre 3

# Un modèle analytique d'imagerie coronographique en présence de turbulence

**U**NE LIMITATION IMPORTANTE des chasseurs d'exoplanètes exposées est le champ de tavelures dans les images. Comme je l'ai expliqué dans le chapitre 1, ces tavelures sont engendrées par les aberrations quasi-statiques. Pour pouvoir limiter l'effet de ces aberrations sur les images scientifiques, il faut les mesurer puis les corriger. Malheureusement, les aberrations mesurées sur source interne et celles vues par un instrument coronographique sur le ciel sont différentes [Vigan *et al.*, 2018], et l'optique adaptative ne semble pas corriger cette différence. Idéalement, il faudrait donc mesurer les aberrations statiques dans la configuration d'acquisition d'images astrophysiques : au niveau du capteur scientifique directement sur le ciel, et donc en présence de turbulence résiduelle, afin de corriger exactement les aberrations quasi-statiques vues par les images scientifique.

La diversité de phase coronographique est une méthode tout à fait indiquée pour accomplir cette tâche : elle permet de mesurer précisément des aberrations jusqu'à de hautes fréquences spatiales, sans modification matérielle de l'instrument. Comme la diversité de phase coronographique présentée au chapitre 2 est fondée sur l'inversion d'un modèle, il faut donc disposer d'un modèle précis et utilisable d'imagerie coronographique en présence de turbulence résiduelle derrière le système d'optique adaptative. Ce chapitre présente la construction, l'analyse et la mise en œuvre numérique de ce modèle. Le chapitre 4 présentera l'inversion du modèle et son intégration dans COFFEE, le code de diversité de phase coronographique. Une partie des résultats de ces chapitres est présentée dans [Herscovici-Schiller *et al.*, 2017], qui est reproduit en annexe B. Enfin, le chapitre 5 présentera la validation expérimentale de la méthode en laboratoire.

### 3.1 Imagerie classique en présence de turbulence

L'imagerie classique (au sens de non coronographique) en présence de turbulence est décrite par [Roddier, 1981]. Le modèle de Roddier décrit la formation d'images en longue pose



(au sens de moyenne d'une pose infinie) en présence de turbulence supposée stationnaire et ergodique.

Ce modèle s'appuie sur la fonction de structure de phase, notée  $D_{\phi_t}$ , qui est définie par

$$D_{\phi_t}(r) = \left\langle \left| \phi_t(r' + r; t) - \phi_t(r'; t) \right|^2 \right\rangle_t, \quad (3.1)$$

où  $\phi(r; t)$  est la valeur de l'écran de phase turbulente aléatoire à la coordonnée spatiale  $r$  à l'instant  $t$ . Le processus stochastique qui décrit la phase est supposé stationnaire et ergodique.

Notons  $\phi$  le champ d'aberrations statiques de l'instrument et  $h(\phi)$  la réponse impulsionnelle associée, donnée par

$$h(\phi) = \left| \mathcal{F}^{-1} [e^{i\phi}] \right|^2. \quad (3.2)$$

Alors, la formule de Roddier décrit l'image  $h_{lp}(D_{\phi_t}, \phi)$  issue d'une longue pose par une convolution :

$$h_{lp}(D_{\phi_t}, \phi) = h_a(D_{\phi_t}) \star h(\phi), \quad (3.3)$$

où  $h_a(D_{\phi_t})$  est définie par

$$h_a(D_{\phi_t}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}} \right] \quad (3.4)$$

et est appelée réponse impulsionnelle atmosphérique. La quantité  $e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}}$  est la fonction de transfert de l'atmosphère. Non seulement la formule (3.3) exprime l'image longue pose sous une forme élégante et calculable simplement, mais elle sépare aussi l'influence de la turbulence atmosphérique de l'influence des aberrations statiques de l'instrument. J'ai cherché à établir un analogue de cette formule pour des images coronographiques. Par analogue, j'entends une formule qui décrit des images coronographiques issues de longues poses en présence de turbulence résiduelle tout en respectant la contrainte d'être aussi concise et calculable que possible, et de séparer autant que faire se peut l'influence de la turbulence de l'influence des aberrations statiques de l'instrument. Pour reprendre le mot de Vladimir Arnold, le but était de créer un modèle utile, et donc aussi simple que possible.

Entrons donc dans la démonstration, qui s'appuie sur celle de [Roddier, 1981].

## 3.2 Image post-coronographique issue d'une longue pose en présence de turbulence

### 3.2.1 La longue pose vue comme une somme de courtes poses

On note toujours  $h_c$  la fonction d'étalement du point d'un imageur coronographique. Une image coronographique issue d'une longue pose en présence de turbulence est notée  $h_{lp,c}$ . On note toujours  $\phi_t$  l'écran de phase turbulente, qui prend la valeur  $\phi_t(t)$  à chaque instant  $t$ . L'aberration vue par l'imageur en amont du coronographe est le produit de l'aberration quasi-statique,  $\psi_{up}$ , par l'aberration instantannée due à la turbulence,  $e^{i\phi_t(t)}$ . Alors, d'après l'équation 2.6, l'image instantannée d'un point source par le télescope est donnée par

$$h_c(\psi_{up} \times e^{i\phi_t(t)}, \psi_{down}) = \left| \mathcal{F}^{-1} \left( P_{down} \psi_{down} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} \times e^{i\phi_t(t)} \right] \right\} \right) \right|^2. \quad (3.5)$$

L'image longue pose est la moyenne d'un grand nombre d'images courtes poses, chacune affectée par une réalisation d'écran de phase de turbulence atmosphérique. On décrit la statistique de ces écrans de phase par  $D_{\phi_t}$ , pour marquer que l'image longue pose dépend de cette statistique. On peut donc écrire

$$h_{lp,c}(\psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = \left\langle h_c(\psi_{up} e^{i\phi_t(t)}, \psi_{down}) \right\rangle_t. \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Calcul de la moyenne temporelle

Tout le problème est d'opérer une moyenne sur le temps  $t$  d'une expression non linéaire. Cette moyenne ne concerne que  $e^{i\phi_t(t)}$ , qui est au cœur de l'expression. Pour pouvoir calculer la moyenne, il serait judicieux de pouvoir l'inclure au cœur de l'expression, et pour cela, il faut trouver une formulation de la non-linéarité qui commute avec la moyenne. C'est possible en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine, qui dit que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}), \forall g \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}), \mathcal{F}[f \otimes g] = \mathcal{F}[f]^* \times \mathcal{F}[g], \quad (3.7)$$

où le symbole  $\otimes$  indique le produit de corrélation :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}), \forall g \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}), f \otimes g(r) = \iint f^*(s)g(r+s) ds. \quad (3.8)$$

En injectant l'équation 3.5 dans l'équation 3.6, et en appliquant le théorème de Wiener-Khintchine, on obtient

$$h_{lp,c}(\psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = \left\langle \mathcal{F}^{-1} \left[ \left( P_{down} \psi_{down} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\} \right) \otimes \left( P_{down} \psi_{down} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\} \right) \right] \right\rangle_t. \quad (3.9)$$

Vu que la transformation de Fourier inverse la plus extérieure porte sur l'espace et que la moyenne porte sur le temps, ces deux opérateurs commutent. Pour alléger un peu cette expression très chargée, on va se débarrasser de la transformation de Fourier inverse la plus extérieure au terme de gauche. Pour cela, on prend la transformée de Fourier de l'expression. Ceci revient simplement à considérer une fonction de transfert plutôt qu'une fonction d'étalement du point. On note  $r$  la coordonnée plan pupille. La fonction de transfert s'écrit alors

$$\mathcal{F} [h_{lp,c}(\psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t})](r) = \left\langle \left( P_{down} \psi_{down} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\} \right) \otimes \left( P_{down} \psi_{down} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\} \right) \right\rangle_t. \quad (3.10)$$

On peut alors exprimer l'autocorrélation de  $P_{down} \psi_{down} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\}$  sous forme intégrale avec variable  $r_1$ , ce qui permettra de faire rentrer l'opération de moyenne temporelle dans l'expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [h_{lp,c}(\psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t})](r) = & \iint P_{down}^*(r_1) \psi_{down}^*(r_1) P_{down}(r_1+r) \psi_{down}(r_1+r) \\ & \times \left\langle \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\}^*(r_1) \right. \\ & \left. \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i\phi_t(t)} \right] \right\}(r_1+r) \right\rangle_t dr_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour faire porter la moyenne temporelle sur les termes qui dépendent du temps, il faut exprimer les transformées de Fourier sous leur forme intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [h_{lp,c}(\psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t})](r) = & \iint P_{down}^*(r_1) \psi_{down}^*(r_1) P_{down}(r_1+r) \psi_{down}(r_1+r) \left\langle \iint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} M^*(\alpha_1) \right. \\ & \times \iint e^{-i2\pi \alpha_1 r_2} P_{up}^*(r_2) \psi_{up}^*(r_2) e^{-i\phi_t(r_2;t)} dr_2 d\alpha_1 \iint e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} M(\alpha_2) \\ & \left. \times \iint e^{i2\pi \alpha_2 r_3} P_{up}(r_3) \psi_{up}(r_3) e^{i\phi_t(r_3;t)} dr_3 d\alpha_2 \right\rangle_t dr_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

On a trouvé une expression de la fonction de transfert de la longue pose coronographique en présence de turbulence où l'opération de moyenne temporelle peut commuter avec les autres opérateurs. On réarrange les termes pour ne faire porter la moyenne temporelle que sur les termes qui dépendent du temps :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \\
 & \iint P_{\text{down}}^*(r_1) \psi_{\text{down}}^*(r_1) P_{\text{down}}(r_1 + r) \psi_{\text{down}}(r_1 + r) \iint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} M^*(\alpha_1) \\
 & \times \iint e^{-i2\pi \alpha_1 r_2} P_{\text{up}}^*(r_2) \psi_{\text{up}}^*(r_2) d\alpha_1 \iint e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} M(\alpha_2) \\
 & \times \iint e^{i2\pi \alpha_2 r_3} P_{\text{up}}(r_3) \psi_{\text{up}}(r_3) d\alpha_2 \left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t) - \phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t dr_2 dr_3 dr_1. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

On peut exprimer  $\left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t) - \phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t$  en fonction de la fonction de structure de phase  $D_{\phi_t}$  de la turbulence. Pour cela, on utilise le raisonnement succinctement évoqué par [Roddier, 1981], page 293, et qui est détaillé à l'annexe C.2. On y démontre que

$$\left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t) - \phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t = e^{-\frac{1}{2} D_{\phi_t}(r_3 - r_2)}. \quad (3.14)$$

En utilisant ce résultat, l'expression de la fonction de transfert optique devient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \\
 & \iint P_{\text{down}}^*(r_1) \psi_{\text{down}}^*(r_1) P_{\text{down}}(r_1 + r) \psi_{\text{down}}(r_1 + r) \iint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} M^*(\alpha_1) \\
 & \times \iint e^{-i2\pi \alpha_1 r_2} P_{\text{up}}^*(r_2) \psi_{\text{up}}^*(r_2) d\alpha_1 \iint e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} M(\alpha_2) \\
 & \times \iint e^{i2\pi \alpha_2 r_3} P_{\text{up}}(r_3) \psi_{\text{up}}(r_3) d\alpha_2 e^{-\frac{1}{2} D_{\phi_t}(r_3 - r_2)} dr_2 dr_3 dr_1. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Désentrelacement des variables

À ce stade, on a réussi à calculer la moyenne temporelle en explicitant produit de corrélation et transformation de Fourier sous leurs formes intégrales. Cependant, cette formule contient cinq intégrales doubles. Elle n'est donc pas utilisable en pratique telle quelle. De plus, les intégrales sur  $r_2$  et  $r_3$  ne sont pas calculables directement, car ces deux variables sont liées par  $D_{\phi_t}(r_3 - r_2)$ . Pour aboutir à une forme utilisable, il faut désentrelacer ces variables. Pour cela, on peut prendre la transformée de Fourier inverse de  $e^{-\frac{1}{2} D_{\phi_t}(r_3 - r_2)}$ , ce qui permettra une séparation des variables en faisant apparaître  $\alpha'$ , variable conjuguée de  $r_3 - r_2$ . Une autre manière de voir cette opération est de dire qu'il s'agit de considérer la fonction d'étalement du point de l'atmosphère,  $h_a$ , plutôt que sa fonction de transfert. La fonction de transfert optique de la longue pose coronographique devient alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \\
 & \iint P_{\text{down}}^*(r_1) \psi_{\text{down}}^*(r_1) P_{\text{down}}(r_1 + r) \psi_{\text{down}}(r_1 + r) \iint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} M^*(\alpha_1) \\
 & \times \iint e^{-i2\pi \alpha_1 r_2} P_{\text{up}}^*(r_2) \psi_{\text{up}}^*(r_2) d\alpha_1 \iint e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} M(\alpha_2) \\
 & \times \iint e^{i2\pi \alpha_2 r_3} P_{\text{up}}(r_3) \psi_{\text{up}}(r_3) d\alpha_2 \iint e^{i2\pi(r_3 - r_2)\alpha'} \mathcal{F} \left[ e^{-\frac{1}{2} D_{\phi_t}} \right] (\alpha') d\alpha' dr_2 dr_3 dr_1. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que, par définition de la fonction de structure de phase  $D_{\phi_t}$ , celle-ci est réelle et paire, donc

$$\mathcal{F} \left[ e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}} \right] (\alpha') = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}} \right] (\alpha') \quad (3.17)$$

$$\mathcal{F} \left[ e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}} \right] (\alpha') = h_a(\alpha'). \quad (3.18)$$

En tenant compte de cette relation dans l'équation (3.16), la séparation des variables  $r_2$  et  $r_3$  dans l'expression de la fonction de transfert optique de la longue pose coronographique fait intervenir la réponse impulsionnelle atmosphérique :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \\ & \iint P_{\text{down}}^*(r_1) \psi_{\text{down}}^*(r_1) P_{\text{down}}(r_1+r) \psi_{\text{down}}(r_1+r) \iint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} M^*(\alpha_1) \\ & \times \iint e^{-i2\pi \alpha_1 r_2} P_{\text{up}}^*(r_2) \psi_{\text{up}}^*(r_2) d\alpha_1 \iint e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} M(\alpha_2) \\ & \times \iint e^{i2\pi \alpha_2 r_3} P_{\text{up}}(r_3) \psi_{\text{up}}(r_3) d\alpha_2 \iint e^{i2\pi(r_3-r_2)\alpha'} h_a(\alpha') d\alpha' dr_2 dr_3 dr_1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Maintenant que  $r_3$  et  $r_2$  sont séparables, on regroupe d'une part l'intégrale double qui dépend de  $r_3$  et d'autre part l'intégrale double qui dépend de  $r_2$ . L'expression devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \\ & \iint h_a(\alpha') \iint P_{\text{down}}^*(r_1) \psi_{\text{down}}^*(r_1) P_{\text{down}}(r_1+r) \psi_{\text{down}}(r_1+r) \\ & \times \iint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} M^*(\alpha_1) \iint e^{-i2\pi \alpha_1 r_2} P_{\text{up}}^*(r_2) \psi_{\text{up}}^*(r_2) e^{-i2\pi r_2 \alpha'} dr_2 d\alpha_1 \\ & \times \iint e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} M(\alpha_2) \iint e^{i2\pi \alpha_2 r_3} P_{\text{up}}(r_3) \psi_{\text{up}}(r_3) e^{i2\pi r_3 \alpha'} dr_3 d\alpha_2 dr_1 d\alpha'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.2.4 Simplifications et formule finale

Dans la dernière formule, on reconnaît des transformations de Fourier dans les intégrales portant sur  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . En notant Id la fonction identité, on peut simplifier l'écriture de l'expression précédente en

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \\ & \iint h_a(\alpha') \iint P_{\text{down}}^*(r_1) \psi_{\text{down}}^*(r_1) P_{\text{down}}(r_1+r) \psi_{\text{down}}(r_1+r) \\ & \times \mathcal{F} \left\{ M \mathcal{F}^{-1} [P_{\text{up}} \psi_{\text{up}} e^{i2\pi \alpha' \text{Id}}] \right\}^* (r_1) \times \mathcal{F} \left\{ M \mathcal{F}^{-1} [P_{\text{up}} \psi_{\text{up}} e^{i2\pi \alpha' \text{Id}}] \right\} (r_1+r) dr_1 d\alpha'. \end{aligned} \quad (3.21)$$

On peut se souvenir que l'intégrale sur  $r_1$  provient du développement d'un produit de corrélation, on reconnaît alors dans cette intégrale une nouvelle autocorrélation :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [h_{\text{p,c}}(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t})](r) = & \iint h_a(\alpha') \\ & \times [P_{\text{down}} \psi_{\text{down}} \mathcal{F} \left\{ M \mathcal{F}^{-1} [P_{\text{up}} \psi_{\text{up}} e^{i2\pi \alpha' \text{Id}}] \right\}] \otimes [P_{\text{down}} \psi_{\text{down}} \mathcal{F} \left\{ M \mathcal{F}^{-1} [P_{\text{up}} \psi_{\text{up}} e^{i2\pi \alpha' \text{Id}}] \right\}](r) d\alpha'. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On peut alors repasser à l'expression de la fonction d'étalement du point en prenant la transformée de Fourier inverse de cette expression de la fonction de transfert atmosphérique.

On applique à nouveau le théorème de Wiener-Khinchine, et on obtient, en notant toujours  $\alpha$  la variable de position angulaire en plan focal,

$$h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = \iint h_a(\alpha') \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{down} \psi_{down} \mathcal{F} \left\{ M \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'Id} \right] \right\} \right] \right|^2(\alpha) d\alpha' \quad (3.23)$$

Finalement, on reconnaît la fonction d'étalement du point de l'instrument coronographique en l'absence de turbulence,  $h_c$ , dans  $\left| \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{down} \psi_{down} \mathcal{F} \left\{ M \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'Id} \right] \right\} \right] \right|^2$ . Ceci nous permet d'atteindre la formule finale :

$$h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = \iint h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down}) d\alpha' \quad (3.24)$$

### 3.3 Interprétation physique

#### 3.3.1 Cas limite : absence de turbulence

En l'absence de turbulence, on peut prendre  $\phi_t$  comme une constante nulle. Alors,

$$h_a(\alpha') = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-\frac{1}{2} D_{\phi_t}} \right](\alpha') = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-\frac{1}{2} \times 0} \right](\alpha') = \delta(\alpha'). \quad (3.25)$$

En injectant cette valeur de  $h_a$  dans la formule 3.24, on obtient immédiatement que

$$h_{lp,c} = h_c.$$

On a donc vérifié que, en l'absence de turbulence, la fonction d'étalement du point en longue pose est la fonction d'étalement du point de l'instrument sans turbulence.

#### 3.3.2 Cas limite : absence de coronographe, et comparaison avec la formule de Roddier

S'il n'y a pas de coronographe, la fonction d'étalement du point est décrite par l'équation (3.23), avec  $M = 1$  et  $P_{down} = 1$ . Alors l'équation 3.24 devient

$$h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = \iint h_a(\alpha') \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} \psi_{down} e^{i2\pi\alpha'Id} \right] \right|^2(\alpha) d\alpha' \quad (3.26)$$

$$= \iint h_a(\alpha') \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} \psi_{down} \right] \star \delta_{\alpha'}(\alpha) \right|^2 d\alpha' \quad (3.27)$$

$$= \iint h_a(\alpha') \left| \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{up} \psi_{up} \psi_{down} \right] (\alpha - \alpha') \right|^2 d\alpha' \quad (3.28)$$

$$h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = h_a \star h(P_{up} \psi_{up} \psi_{down})(\alpha) \quad (3.29)$$

Et donc, dans le cas où il n'y a pas de coronographe, la formule 3.24 se réduit directement à la formule de Roddier (équation 3.3).

Cette comparaison montre que le modèle de formation d'image coronographique en longue pose en présence de turbulence est une extension directe du modèle de Roddier de formation d'image classique en longue pose en présence de turbulence. En particulier, les hypothèses nécessaires à l'établissement de la formule sont les mêmes. Par ailleurs, le modèle d'imagerie coronographique en présence de turbulence sépare l'influence de la turbulence ( $h_a$ ) de l'influence des aberrations statiques de l'instrument ( $h_c$ ), tout comme la formule de Roddier. Enfin, cette formule s'exprime comme une seule intégrale, ce qui rend le calcul numérique possible en pratique.

### 3.3.3 Interprétation de la réponse impulsionnelle de l'atmosphère

On suppose toujours que la turbulence est un processus stationnaire et ergodique. La réponse impulsionnelle de l'atmosphère est définie par

$$h_a = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-\frac{1}{2}D\phi_t} \right] \quad (3.30)$$

$$h_a = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left\langle e^{i[\phi_t(r+r')-\phi_t(r')]} \right\rangle_t \right\} \quad (\text{annexe C.2}). \quad (3.31)$$

On note  $\psi_t = e^{i\phi_t}$  la déformation du champ électrique par la turbulence. Il s'agit simplement du champ associé au déphasage turbulent,  $\phi_t$ . De cette manière, on peut écrire

$$h_a = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \left\langle \psi_t^*(r', t) \psi_t(r+r') \right\rangle_t \right\}. \quad (3.32)$$

On reconnaît là la transformée de Fourier de l'autocorrélation de  $\psi_t$ , qui est par définition la densité spectrale d'énergie de  $\psi_t$ .

On peut donc interpréter  $h_a$  comme la densité spectrale d'énergie du champ complexe optique engendré par la turbulence. Physiquement, cela signifie que  $h_a(\alpha')$  est la fraction de l'énergie lumineuse totale de la source qui est diffractée par l'atmosphère dans la direction  $\alpha'$  au cours de la longue pose.

### 3.3.4 Interprétation du terme dépendant des aberrations

Le terme  $h_c(\alpha; \psi_{\text{up}} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{\text{down}})$  ne diffère de la réponse instrumentale en l'absence de turbulence,  $h_c(\alpha; \psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}})$ , que par le terme  $e^{i2\pi\alpha'1d}$  qui multiplie l'aberration amont. Pour l'interpréter, on écrit  $\psi_{\text{up}}$  en fonction de sa phase  $\phi_{\text{up}}$ . Ce qui suit est écrit dans le cas où il n'y a pas d'aberration d'amplitude. S'il y en a, il suffit de les ajouter en préfacteur et cela ne change rien au résultat, qui est vrai indépendamment de l'existence d'aberrations d'amplitude.

$$\psi_{\text{up}}(\alpha') = e^{i\phi_{\text{up}}(\alpha')}. \quad (3.33)$$

On voit alors que

$$\psi_{\text{up}}(\alpha') e^{i2\pi\alpha'1d} = e^{i\phi_{\text{up}}(\alpha')} e^{i2\pi\alpha'1d} \quad (3.34)$$

$$\psi_{\text{up}}(\alpha') e^{i2\pi\alpha'1d} = e^{i[\phi_{\text{up}}(\alpha') + 2\pi\alpha'1d]} \quad (3.35)$$

Le terme  $\psi_{\text{up}}(\alpha') e^{i2\pi\alpha'1d}$  consiste donc en l'ajout à l'aberration  $\psi_{\text{up}}$  d'un déphasage qui est un pur basculement, dont l'amplitude est donnée par  $\alpha'$ .

On peut interpréter  $h_c(\alpha; \psi_{\text{up}} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{\text{down}})$  comme la fonction d'étalement du point qu'aurait l'instrument en l'absence de turbulence, mais en présence d'une phase de basculement supplémentaire, donnée par l'angle  $\alpha'$ .

### 3.3.5 Synthèse : la fonction d'étalement du point coronographique en présence de turbulence

On peut finalement voir la formule 3.24 comme une décomposition de  $h_{\text{p,c}}$  sur une famille de fonctions d'étalement du point. Les vecteurs de cette famille sont les fonctions d'étalement du point de l'instrument affectées du basculement  $\alpha'$  en amont du coronographe. Le poids de chaque vecteur de cette famille est la fraction de l'énergie lumineuse totale qui est diffractée par la turbulence dans la direction donnée par  $\alpha'$ .

### 3.4 Mise en œuvre numérique

#### 3.4.1 De la formulation continue de la loi physique à une approximation discrète finie

Le but est de calculer en pratique la formule 3.24, qui est rappelée ici :

$$h_{\text{lp,c}}(\alpha; \psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t}) = \iint h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{\text{up}} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{\text{down}}) d\alpha'. \quad (3.36)$$

La formule se prête bien à une transcription algorithmique directe. En pratique, j'ai choisi de coder la formule analytique comme

$$h_{\text{lp,c}}(\alpha; \psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}, D_{\phi_t}) = \sum_{\alpha'_y=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{\alpha'_x=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h_a(\alpha') \times h_c(\alpha; \psi_{\text{up}} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{\text{down}}). \quad (3.37)$$

Comme le code COFFEE renvoie des tableaux carrés de taille paire centrés entre quatre pixel, j'ai formulé la discrétisation de l'intégrale de telle sorte à ce que les arguments soient de taille paire, et centrés entre quatre pixels (d'où les bornes à  $(N-1)/2$  dans les sommes). J'ai choisi de prendre le même échantillonnage en plan focal des variables  $\alpha$  et  $\alpha'$  : le côté de la grille  $N$  est pris égal au côté du tableau  $h_c(\alpha; \psi_{\text{up}} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{\text{down}})$ . Comme les contributions des différents termes de la somme n'ont pas de raison *a priori* d'être incommensurables sur un ordinateur moderne si on les représente comme des flottants en double précision, la double somme est simplement calculée au moyen d'une double boucle « FOR ». La première source d'imprécision de cette approximation discrète est que les champs calculés numériquement ne sont pas d'extension infinie.

#### 3.4.2 Calcul des termes constitutifs de la formule, $h_a$ et $h_c$

Le terme  $h_a$  est calculé une fois pour toute à partir de la connaissance de la fonction de structure de phase de la turbulence,  $D_{\phi_t}$ , par la formule

$$h_a(D_{\phi_t}) = \mathcal{F} \left[ e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}} \right]. \quad (3.38)$$

La transformation de Fourier est approximée par une transformation de Fourier discrète calculée par l'algorithme de transformation de Fourier rapide. La fonction de structure de phase de la turbulence est un paramètre de la formule, elle est supposée connue. Elle peut être estimée à partir de données de télémétrie, ou directement par traitement des données de l'analyseur de surface d'onde du système d'optique adaptative. Une autre possibilité serait de décrire  $D_{\phi_t}$  au moyen de quelques paramètres, et d'estimer ces paramètres au même titre que  $\phi_{\text{up}}$ . Il faudrait alors étudier ce problème d'inversion, problème qui n'est pas étudié dans ma thèse.

Le terme  $h_c(\alpha; \psi_{\text{up}} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{\text{down}})$ , quant à lui, est calculé directement par transformations de Fourier successives, en suivant la formule (2.6) :

$$h_c(\alpha) = \left| \mathcal{F}^{-1} \left( P_{\text{down}} \psi_{\text{down}} \times \mathcal{F} \left\{ M \times \mathcal{F}^{-1} \left[ P_{\text{up}} \psi_{\text{up}} \right] \right\} \right) \right|^2(\alpha) \quad (3.39)$$

telle qu'elle a été codée dans la thèse de mon prédécesseur [Paul, 2014]. Dans le cas des coronographes à pastille tels que les coronographes de Lyot et de Roddier et Roddier, les transformations de Fourier vers et depuis le plan focal du masque coronographique sont calculées par transformées de Fourier discrète matricielle, afin de conserver un échantillonnage du masque adapté à sa forme, comme proposé par [Soummer *et al.*, 2007]. Les autres transformations de Fourier sont calculées par transformation de Fourier rapide. Pour éviter le repliement que l'élévation du module au carré pourrait introduire, le calcul de  $h_c$  est fait sur un tableau de côté plus grand que celui des pupilles d'un facteur d'échantillonnage d'au moins 2.

### 3.4.3 Illustration par simulation : convergence de la moyenne empirique vers l'espérance

Le terme de droite de la formule (3.24) est obtenu comme une espérance, mais est aussi une limite de moyenne empirique. On peut donc vérifier la justesse de la formule analytique, et mesurer l'intérêt de sa formulation, en comparant le résultat de calculs de moyenne empirique à la formule analytique.

La figure 3.1 présente des résultats de simulation. On fixe une phase  $\phi_{\text{up}}$ , tirée au hasard, ainsi qu'une autre phase  $\phi_{\text{down}}$  tirée elle aussi au hasard. Leur statistique est un bruit gaussien dont la densité spectrale d'énergie suit une loi en  $1/f^2$ . L'écart-type de  $\phi_{\text{up}}$  est 50 nm à une longueur d'onde de 1589 nm, et celui de  $\phi_{\text{down}}$  est 10 nm. On choisit par ailleurs une fonction de structure de phase  $D_{\phi_t}$  représentative des performances de SAXO, l'optique adaptative de l'instrument SPHERE [Fusco *et al.*, 2006a]. À partir de ces éléments, on produit deux types d'images. Le premier type est une moyenne empirique de courtes poses où la turbulence suit la statistique imposée par  $D_{\phi_t}$ . Le calcul de chaque écran de phase aléatoire  $\phi_t$  utilise la méthode décrite dans [Kasdin, 1995]. Le deuxième type d'image est une longue pose dite analytique, calculée directement par la formule (3.24). La figure 3.1 présente de gauche à droite une courte pose, une moyenne empirique de dix courtes poses, une moyenne empirique de cent courtes poses, une moyenne empirique de mille courtes poses, et enfin le résultat du calcul de la longue pose analytique. On voit bien une convergence des moyennes de courtes poses vers la longue pose analytique. En particulier, il est impossible de distinguer à l'œil la moyenne de mille courtes poses et la longue pose analytique.

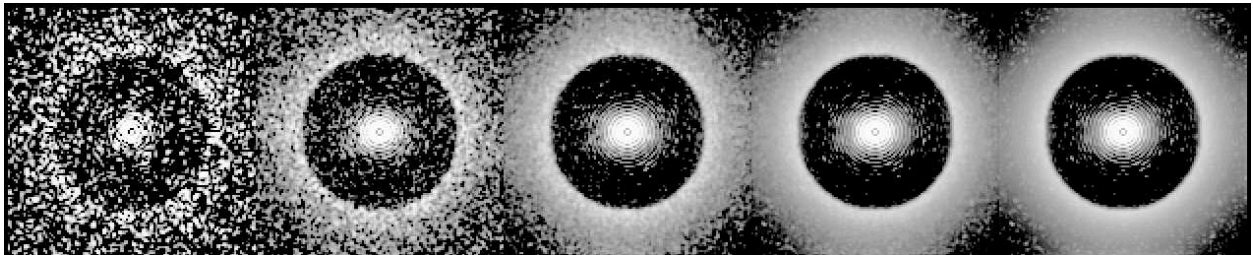


FIGURE 3.1 – De gauche à droite : courte pose, moyenne empirique de 10 courtes poses, moyenne empirique de 100 courtes poses, moyenne empirique de 1 000 courtes poses, et longue pose calculée au moyen de la formule analytique 3.24. L'échelle est en arc de sinus hyperbolique, qui fait ressortir les niveaux les plus faibles.

La figure 3.2 montre l'erreur due au défaut de convergence lors de cette simulation. L'erreur est définie comme l'écart quadratique moyen entre la moyenne de courtes poses et la longue pose analytique. Le seuil de  $10^{-3}$  d'erreur n'est pas arbitraire. Il s'agit d'une estimation de l'erreur d'échantillonnage due à la discrétisation du champ électrique dans le plan focal du coronographe quand la simulation de propagation échantillonne la pastille d'un coronographe de Roddier et Roddier de la même façon que le champ électrique dans le plan focal du détecteur. C'est à dire que, pour une simulation de type Monte-Carlo, l'erreur de simulation est dominée par le bruit de convergence jusqu'à environ dix millions de courtes poses. En prenant une propagation complète du plan pupille au plan focal comme unité de mesure, la formule analytique a un coût de calcul de  $128^2 = 16384$  pour des images de taille  $128 \times 128$ , et ce sans aucune des accélérations proposées dans la sous-section suivante. Une autre manière de voir ce graphe est que, pour un même coût de calcul de 16 384, l'erreur de convergence par calcul de type Monte-Carlo est environ dix fois plus élevée que l'erreur d'échantillonnage du coronographe, alors le calcul de longue pose analytique n'a pas cette erreur. Cependant, ce coût de calcul serait trop élevé pour que la formule analytique soit commode d'utilisation en pratique. Heureusement, il y a plusieurs possibilités d'accélération de ce calcul.



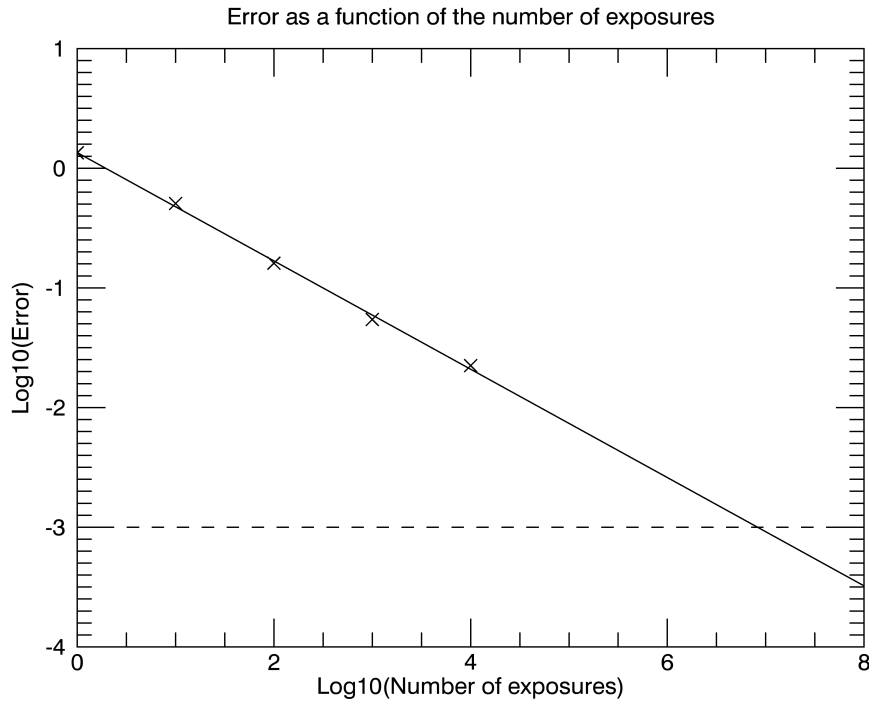


FIGURE 3.2 – Écart quadratique moyen entre la moyenne empirique de courtes poses et la longue pose analytique en fonction du nombre de courtes poses sommées au cours du calcul de la moyenne.

### 3.4.4 Accélération du calcul

L'algorithme de calcul de la formule analytique peut être accéléré de plusieurs manières. Je ne considère pas en détails la possibilité de pré-calculer le terme  $h_c$  pour toutes les configurations possibles d'un instrument donné, puis de procéder au calcul par convolution. Il s'agit d'une possibilité théorique de diminution de la complexité en temps qui serait séduisante si elle n'exigeait pas au préalable des pré-calculs extrêmement longs et une complexité en mémoire immense : il faudrait précalculer  $h_c(\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}})$  pour chaque carte  $\psi_{\text{up}}$  et chaque carte  $\psi_{\text{down}}$  possibles.

D'un point de vue purement algorithmique, comme le calcul consiste en une somme double calculée au moyen de boucles « FOR », il est tentant de paralléliser l'exécution du calcul. Le gain obtenu par cette parallélisation dépend fortement du temps d'initialisation des fils de calcul : il faut que le temps d'initialisation soit petit devant le temps de calcul d'une somme intérieure pour que l'opération en vaille la peine. On peut noter au passage que la formule analytique est très facilement parallélisable, et sans les problèmes d'initialisation de graines aléatoires qui peuvent accompagner la parallélisation d'un code Monte-Carlo.

Surtout, il est possible de diminuer considérablement le calcul pour des coronographes à pastille, tels le coronographe de Lyot et le coronographe de Roddier et Roddier, ou des coronographes à transitions, tels le coronographe à quatre quadrants, le coronographe à huit octants, ou le déphaseur à deux zones (*dual zone phase mask coronagraph*). L'idée de cette accélération est que le calcul de fonction d'étalement du point coronographique en longue pose est plus long que le calcul non-coronographique car, à cause de la présence du coronographe, la fonction d'étalement du point de l'instrument sans tenir compte de la turbulence n'est pas invariante spatialement. Il est donc impossible de faire le calcul par convolution comme dans

le cas sans turbulence (formule 3.3). Le défaut d'invariance spatiale est introduit par le masque focal d'un coronographe à pastille par sa pastille justement. Le défaut d'invariance spatiale d'un coronographe à transitions est introduit par ses transitions. Si on considère un faisceau dont le centre tombe loin de la pastille ou des transitions du masque focal, par exemple à plus de  $5\lambda/D$  de ceux-ci, leur influence sur le faisceau dans le plan pupille suivant est négligeable : dans ces zones, le masque focal est essentiellement sans influence, ou au pire un simple facteur multiplicatif global, et il est spatialement invariant. On peut donc découper le plan du masque focal coronographique en deux zones : les zones proches de la pastille ou des transitions, et les zones qui en sont loin. On calcule le champ par sommation point par point dans les premières zones, et par convolution dans les secondes. À partir de maintenant, je détaille les explications et les calculs pour les coronographes à pastilles, sachant que le procédé est le même pour les coronographes à transitions.

Encore une fois, on repart de la formule 3.24 :

$$h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) = \iint h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{down}) d\alpha'. \quad (3.40)$$

On sépare le plan focal du masque coronographique, autrement dit l'espace balayé par  $\alpha'$  dans l'intégrale double, en deux zones. La première,  $\mathcal{C}$ , est la zone centrale. La seconde  $\mathcal{P}$ , est la zone périphérique. Les deux zones sont complémentaires. L'équation précédente devient

$$\begin{aligned} h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) &= \iint_{\mathcal{C}} h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{down}) d\alpha' \\ &+ \iint_{\mathcal{P}} h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{down}) d\alpha'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dans l'intégrale sur la zone loin de la pastille,  $\mathcal{P}$ , la fonction d'étalement du point de l'instrument  $h_c$  est toujours calculée pour un basculement important. Or, pour un coronographe à pastille, un basculement important équivaut à ce que la lumière passe à côté de la pastille, et donc le masque focal a un impact négligeable. On peut donc, dans la zone  $\mathcal{P}$ , assimiler fonction d'étalement du point coronographique  $h_c$  et fonction d'étalement du point non-coronographique  $h$ . On a donc

$$\begin{aligned} h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) &= \iint_{\mathcal{C}} h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{down}) d\alpha' \\ &+ \iint_{\mathcal{P}} h_a(\alpha') h(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{down}) d\alpha'. \end{aligned} \quad (3.42)$$

On pourrait calculer l'intégrale sur  $\mathcal{P}$  comme une convolution entre  $h_a$  et  $h$  si le domaine d'intégration était  $\mathbb{R}^2$  tout entier. Qu'à cela ne tienne ! On définit  $h_a^0$  par

$$h_a^0(\alpha') = \begin{cases} h_a(\alpha') & \text{si } \alpha' \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{si } \alpha' \in \mathcal{C} \end{cases}, \quad (3.43)$$

et on obtient finalement

$$\begin{aligned} h_{lp,c}(\alpha; \psi_{up}, \psi_{down}, D_{\phi_t}) &= \iint_{\mathcal{C}} h_a(\alpha') h_c(\alpha; \psi_{up} e^{i2\pi\alpha'1d}, \psi_{down}) d\alpha' \\ &+ h_a^0 \star h(\psi_{up}, \psi_{down})(\alpha). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Comme le calcul de  $h_a^0$  et le calcul de  $h(\psi_{up}, \psi_{down})$  peuvent être faits une fois pour toutes, la partie du calcul dont le coût est significatif est seulement l'intégrale sur  $\mathcal{C}$ .

Le calcul est donc séparé en deux parties : une partie convolutive, dont le coût de calcul est celui de la formule de Roddier, et une partie coronographique non-convolutive, dont le coût de calcul pour une bonne précision est typiquement de l'ordre d'une centaine de propagations de la pupille d'entrée jusqu'au plan focal du détecteur. Reprenons l'évaluation de coût de calcul pour des images de taille  $128 \times 128$  échantillonnées à la limite de Shannon, c'est à dire avec un pas d'échantillonnage de  $\lambda/(2D)$ . Si on prend pour  $\mathcal{C}$  un carré de côté  $5\lambda/D$ , le coût total du calcul passe de  $128^2 = 16384$  à 100, en négligeant le coût de la convolution, soit un gain d'un facteur environ 164 en temps de calcul. Pour des images de taille  $256 \times 256 = 65536$ , le gain est d'environ 655.

La question se pose alors de connaître la qualité de la fonction d'étalement du point en fonction de la taille de  $\mathcal{C}$ . La figure 3.3 présente l'énergie contenue dans la différence entre le champ calculé exactement et le champ calculé par approximation convolutive, pour différentes tailles de côté de la zone  $\mathcal{C}$  prise comme carrée. Le coronographe utilisé est un coronographe de Lyot de diamètre  $2\lambda/D$ , l'aberration de phase en amont du coronographe est d'écart-type 100 nm à 1589 nm, et la fonction de structure de phase utilisée est typique de l'optique adaptative SAXO de l'instrument SPHERE. La normalisation est telle qu'une fonction d'étalement du point coronographique sans aberration, en l'absence de turbulence, a pour énergie totale 1.

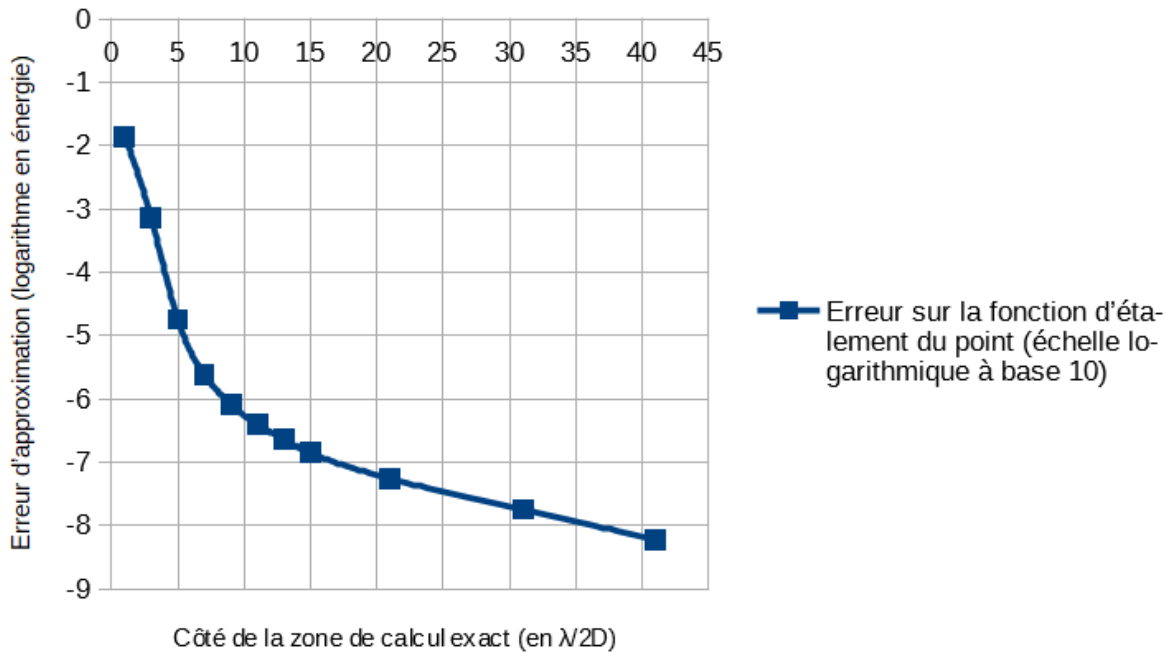


FIGURE 3.3 – Qualité de l'approximation de la fonction d'étalement du point coronographique en présence de turbulence en fonction du côté du carré dans lequel l'influence du coronographe est prise en compte.

On peut constater que la perte de précision due à l'approximation a deux régimes. Le premier est un régime de décroissance rapide quand le nombre de points de calcul exact est faible. Aux alentours d'une taille d'environ  $5\lambda/D$ , le régime change, et la décroissance est plus lente, dans des régimes d'énergie sous  $10^{-6}$ . Dans ce régime, d'autres sources d'imprécision du calcul peuvent exister, comme par exemple les défauts de discrétisation. De plus, la précision de la connaissance de la fonction de structure de phase,  $D_{\phi_s}$ , ne permet pas d'envisager des calculs à ce genre de précision. On peut donc faire les calculs avec une approximation convolutive, en ne faisant le calcul exact que sur une zone de taille typique  $5\lambda/D \times 5\lambda/D$ .

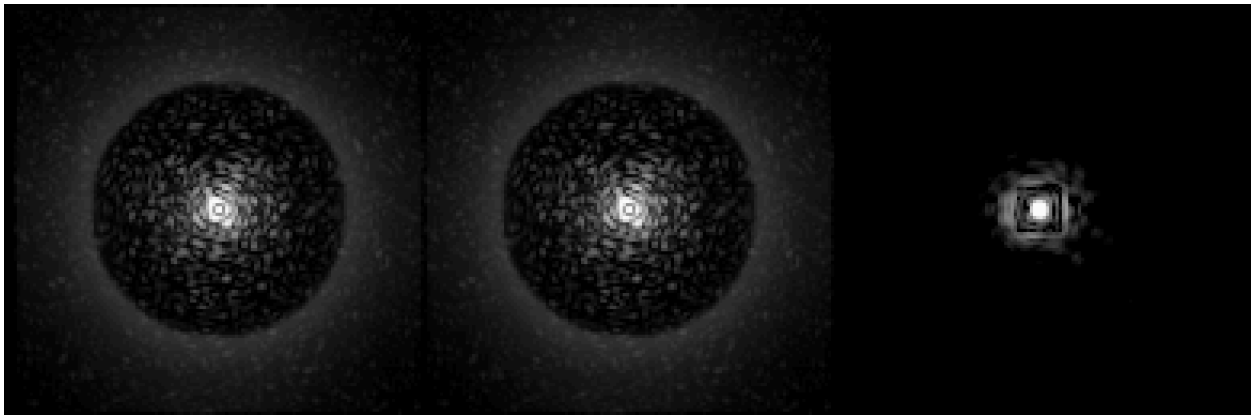


FIGURE 3.4 – De gauche à droite : fonction d'étalement du point calculée sans approximation, fonction d'étalement du point calculée par convolution sauf sur un carré de côté  $5,5 \lambda/D$ , et 50 000 fois la valeur absolue de leur différence. L'échelle est en argument de sinus hyperbolique.

Ainsi, pour certains types de coronographes parmi les plus répandus tels que le coronographe de Lyot ou le coronographe à quatre quadrants, le coût de calcul de la longue pose coronographique peut être ramené à une centaine de fois le coût de la propagation du champ dans l'instrument, ce qui rend la formule facilement utilisable en pratique.

## Conclusion

Il est possible de représenter la fonction d'étalement du point d'un instrument coronographique en longue pose en présence de turbulence comme une décomposition sur une famille de fonction d'étalement du point de l'instrument avec un basculement mais sans turbulence. Le poids d'une telle fonction dans la décomposition est donné par la fraction de l'énergie diffractée par l'atmosphère turbulente dans la direction de son basculement, c'est à dire la réponse impulsionnelle atmosphérique. Cette représentation est une extension de la formule de Roddier qui décrit l'imagerie en longue pose en présence de turbulence [Herscovici-Schiller *et al.*, 2017, Roddier, 1981]. En particulier, elle est suffisamment simple pour être calculée en pratique, et elle sépare l'influence de la turbulence atmosphérique de l'influence des aberrations statiques de l'instrument.

Les conditions d'emploi de la formule sont les mêmes que celles de la formule de Roddier. La turbulence est considérée comme un processus stationnaire et ergodique, et donc temps de pose infini. En pratique, on se contentera d'un temps de pose de l'ordre de la minute, grand devant le temps caractéristique d'évolution de la turbulence (de l'ordre de dix à cent milliseconde) mais faible devant le temps caractéristique d'évolution des aberrations statiques (de l'ordre de la dizaine de minutes à l'heure [Martinez *et al.*, 2012, Martinez *et al.*, 2013]).

Le calcul pratique de la formule n'est pas considérablement plus complexe que le calcul de l'image coronographique sans turbulence, et seulement quelques dizaines de fois plus long. À coût de calcul donné, il est beaucoup plus précis que la simulation Monte-Carlo. Ceci permet d'utiliser la formule analytique tant pour la simulation et la conception de systèmes que pour le post-traitement des données scientifiques, ou, comme dans ma thèse, l'analyse et le contrôle de surface d'onde.

Le chapitre suivant expose justement comment on peut remonter en pratique aux aberrations de l'instrument à partir d'images produites sur le ciel par le capteur scientifique et d'une estimation de la fonction de structure de phase de l'atmosphère.



*« The fundamental laws necessary for the mathematical treatment of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty lies only in the fact that application of these laws leads to equations that are too complex to be solved. »*

Paul Dirac

## Chapitre 4

# Extension de la diversité de phase coronographique à la mesure en présence de turbulence

**D**ANS LE CHAPITRE précédent, j'ai développé un modèle direct d'imagerie coronographique longue pose en présence de turbulence. L'inversion de ce modèle permettra de mesurer les aberrations de l'ensemble du train optique du miroir primaire du télescope jusqu'au détecteur en présence de turbulence résiduelle, ce que ne permet pas la mesure sur source interne. De plus, comme les aberrations évoluent pendant la nuit, une méthode de mesure des aberrations directement sur le ciel permet de réétalonner ces dernières plusieurs fois au cours de la nuit avec un impact minime sur les opérations. Je présente d'abord l'algorithme d'inversion du modèle par minimisation de critère. Ensuite, je présente des résultats d'inversion sur des données simulées représentatives des conditions d'utilisation d'instruments au sol de dernière génération. Enfin, j'explore la tolérance de la méthode à la présence d'une planète dans les images et à des erreurs d'origines variées : influence du niveau de bruit et étalonnage de la fonction de structure de phase. Dans tout ce chapitre, je suppose que les aberrations sont dominées par les aberrations de phase, et je ne considère pas les aberrations d'amplitude.

## 4.1 Inversion du modèle

### 4.1.1 Méthode d'inversion

Comme je l'ai présenté dans le chapitre 2, la méthode COFFEE s'appuie sur la minimisation d'un critère qui comporte deux termes. Le premier terme est un terme de vraisemblance qui exprime la distance entre observation et modèle. Dans l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien, il s'agit d'un terme de moindres carrés pondérés par la variance du bruit. Le deuxième terme, qui exprime la régularité de la solution, est la norme de Frobenius du gradient de la phase inconnue. En terme d'équations, l'estimateur  $\widehat{\phi}_{\text{up}}$  de l'aberration de phase  $\phi_{\text{up}}$  en amont du coronographe est défini par l'équation 2.48 comme un maximum *a posteriori* :

$$\widehat{\phi}_{\text{up}} = \arg \left\{ \min_{\phi_{\text{up}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^2}} [\mathcal{J}(\phi_{\text{up}})] \right\}, \quad (4.1)$$

avec

$$\mathcal{J}(\phi_{\text{up}}) = \sum_{k,x} \frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star h_{\text{p,c}}(\alpha; \phi_{\text{up}} + \phi_{\text{div},k}, \phi_{\text{down}}, D_{\phi_t}) - f_2]^2}{2\sigma^2(k, \mathbf{x})} + \frac{\iint \|\nabla \phi_{\text{up}}(r)\|^2 \, dr}{2\sigma_{\nabla \phi_{\text{up}}}^2} \quad (4.2)$$

où l'indice  $k$  court sur les images expérimentales obtenues en introduisant des phases de diversité  $\phi_{\text{div},k}$ . Le modèle d'image utilisé est décrit par l'équation 2.16, où la réponse impulsionnelle optique  $h_{\text{p,c}}$  est donnée par la formule 3.24.

Il s'agit donc en pratique de minimiser le critère  $\mathcal{J}$ .

Il n'y a pas de solution analytique connue à ce problème de minimisation, et il faut donc passer par une méthode numérique. Comme le critère  $J$  est lisse, il est possible de procéder à la minimisation par une approche de type descente de gradient. Cette approche classique ne va pas sans poser de difficultés.

D'un point de vue théorique, le critère  $J$  n'a aucune raison d'être convexe. En fait, vu que les modèles optique sont périodiques de période  $2\pi$  en la phase, on sait même que le critère non régularisé n'est pas convexe. Un minimiseur par descente de gradient risque donc de se retrouver piégé dans un minimum local.

Ce problème a été étudié en diversité de phase classique par [Blanc, 2002], qui a montré la possibilité de reconstruire l'aberration de phase *modulo*  $2\pi$ . En diversité de phase coronographique, [Sauvage *et al.*, 2012] montre l'existence d'une large vallée autour du minimum global. Enfin, on constate en pratique que, dans les cas de test de la méthode où on connaît l'aberration de phase recherchée, le minimum effectivement atteint en partant d'une condition initiale nulle est bien la solution recherchée. On peut donc se contenter d'une méthode de type descente de gradient classique.

Comme les algorithmes de descentes de gradient sans utilisation de dérivées secondes sont lents, mais que le coût de calcul et d'inversion de la matrice hessienne du critère serait très élevé, on se base sur une méthode dite quasi-newtonienne. Cette méthode consiste à construire une approximation de l'inverse de la matrice hessienne à partir du critère et du gradient. L'algorithme est fondé sur la méthode dite de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno ou encore méthode BFGS [Broyden, 1970a, Broyden, 1970b, Fletcher, 1970, Goldfarb, 1970, Shanno, 1970]. Le programme utilisé est une mise en œuvre en langage C de la méthode *variable metric with limited memory and bounds*, ou méthode VMLMB [Thiébaud, 2002], qui est une variation sur la méthode BFGS adaptée aux problèmes de grande dimension sous contraintes de domaine.

Le flux de la source,  $f_1$ , et le fond,  $f_2$ , peuvent être déterminés de manière analytique par une simple inversion d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues (voir [Paul, 2014], annexe A). Ceci rend la minimisation du critère plus facile.

#### 4.1.2 Calcul du gradient du terme de régularisation par rapport à la phase

Le minimiseur choisi utilise fortement le gradient du critère. Il faut donc calculer analytiquement ce dernier et ainsi économiser un calcul d'autant plus coûteux que la dimension du problème est grande.

Le gradient du terme de régularisation est le plus simple. Surtout, c'est exactement le même terme que dans le cas non-turbulent. Je détaille complètement les calculs pour ce terme en considérant la phase comme continue, en m'appuyant sur les règles de la dérivation fonctionnelle [Courant et Hilbert, 1953].

Le terme de régularisation est

$$\mathcal{R}(\phi_{\text{up}}) = \frac{1}{2\sigma_{\nabla\phi_{\text{up}}}^2} \iint \|\nabla\phi_{\text{up}}(r)\|^2 dr, \quad (4.3)$$

où  $\nabla$  désigne le gradient par rapport aux coordonnées spatiales dans l'image. Pour calculer le gradient de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\phi_{\text{up}}$  de manière complètement explicite, on développe le gradient en ses composantes spatiales :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

où on note par souci de compacité  $\nabla_x = \partial/\partial x$  et  $\nabla_y = \partial/\partial y$ .

En développant  $\|\nabla\phi_{\text{up}}\|$ , on obtient

$$\mathcal{R}(\phi_{\text{up}}) = \frac{1}{2\sigma_{\nabla\phi_{\text{up}}}^2} \iint |\nabla_x\phi_{\text{up}}(r)|^2 + |\nabla_y\phi_{\text{up}}(r)|^2 dr. \quad (4.5)$$

En utilisant une propriété démontrée en annexe C.3, le calcul du gradient de ce terme donne directement

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \phi_{\text{up}}}(\phi_{\text{up}}) = -\frac{1}{\sigma_{\nabla\phi_{\text{up}}}^2} \Delta\phi_{\text{up}} \quad (4.6)$$

En pratique, dans COFFEE, le code de diversité de phase coronographique, la phase  $\phi_{\text{up}}$  est discrétisée sur une grille cartésienne régulière. Le terme de régularisation est donc une somme discrète. Le gradient est codé par différences finies retardées, et le laplacien correspondant est codé par différences finies centrées. [Paul, 2014], annexe B, montre par un calcul direct que ce choix de discrétisation du gradient entraîne cette discrétisation du laplacien. On peut noter au passage qu'il y a une coquille dans l'expression du terme de régularisation dans [Paul *et al.*, 2013a] (équation 24), et que c'est bien l'expression calculée ici (et cohérente avec [Paul, 2014]) qu'il faut utiliser.

### 4.1.3 Calcul du gradient du terme d'attache aux données par rapport à la phase

L'expression du gradient du terme d'attache aux données est un peu plus compliquée que celle du terme de régularisation. Cependant, il est aussi calculable analytiquement. Si on note  $\mathcal{A}(\phi_{\text{up}})$  le terme d'attache aux données présenté dans le chapitre 2,

$$\mathcal{A}(\phi_{\text{up}}) = \sum_{k,\mathbf{x}} \frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{\text{dét}} \star \mathbf{h}_{\text{p,c}}(\alpha; \phi_{\text{up}} + \phi_{\text{div},k}, \phi_{\text{down}}, D_{\phi_t}) - f_2]^2}{2\sigma^2(k, \mathbf{x})}. \quad (4.7)$$

On peut décomposer le problème de la dérivation en prenant  $h_{\text{p,c}}$  comme variable intermédiaire. En effet, par dérivation composée,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi_{\text{up}}}(\phi_{\text{up}}) = \left[ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial h_{\text{p,c}}}(h_{\text{p,c}}) \right]^\dagger \frac{\partial h_{\text{p,c}}}{\partial \phi_{\text{up}}}(\phi_{\text{up}}) \quad (4.8)$$

L'expression du terme  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial h_{\text{p,c}}}(h_{\text{p,c}})$  est donnée par l'équation (22) de [Paul *et al.*, 2013a]. Il ne reste donc plus qu'à calculer le terme  $\frac{\partial h_{\text{p,c}}}{\partial \phi_{\text{up}}}(\phi_{\text{up}})$ , en repartant à nouveau de la formule



3.24.

$$\frac{\partial h_{p,c}}{\partial \phi_{up}}(\phi_{up}) = \frac{\partial}{\partial \phi_{up}} \iint h_a(\alpha') h_c(\alpha; e^{i\phi_{up}} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down}) d\alpha' \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial h_{p,c}}{\partial \phi_{up}}(\phi_{up}) = \iint h_a(\alpha') \frac{\partial h_c(\alpha; e^{i\phi_{up}} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down})}{\partial \phi_{up}} d\alpha' \quad (4.10)$$

Ainsi, on se ramène au calcul de  $\frac{\partial h_c(\alpha; e^{i\phi_{up}} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down})}{\partial \phi_{up}}$ , qui est un calcul nécessaire à l'établissement du gradient du critère en l'absence de turbulence.

On peut donc écrire que

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi_{up}}(\phi_{up}) = \left[ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial h_{p,c}}(h_{p,c}) \right]^\dagger \iint h_a(\alpha') \frac{\partial h_c(\alpha; e^{i\phi_{up}} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down})}{\partial \phi_{up}} d\alpha'. \quad (4.11)$$

Et finalement,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi_{up}}(\phi_{up}) = \iint h_a(\alpha') \left[ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial h_{p,c}}(h_{p,c}) \right]^\dagger \frac{\partial h_c(\alpha; e^{i\phi_{up}} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down})}{\partial \phi_{up}} d\alpha'. \quad (4.12)$$

Le calcul du terme  $g(\alpha') = \left[ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial h_{p,c}}(h_{p,c}) \right]^\dagger \frac{\partial h_c(\alpha; e^{i\phi_{up}} e^{i2\pi\alpha'Id}, \psi_{down})}{\partial \phi_{up}}$  est donné par l'équation (21) de [Paul *et al.*, 2013a]. Ce calcul, qui s'appuie beaucoup sur le fait que  $\forall f \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2})$ ,  $\forall g \in L^2(\mathbb{C}^{\mathbb{R}^2})$ ,  $f^\dagger \mathcal{F}g = (\mathcal{F}^{-1}f)^\dagger g$ , est nécessaire aussi en l'absence de turbulence, et est donc déjà intégré à COFFEE.

Ainsi, le gradient du terme d'attache aux données est

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi_{up}}(\phi_{up}) = \iint h_a(\alpha') g(\alpha') d\alpha', \quad (4.13)$$

où  $g$  est calculée selon l'équation (21) de [Paul *et al.*, 2013a].

Cette formule a la même structure que la formule 3.24, et son calcul numérique peut donc bénéficier des mêmes accélérations, exposées dans la section 3.4.4, que le calcul de la fonction d'étalement du point. Notamment, il est possible de calculer ce terme par une convolution, sauf sur une centaine de points, et de paralléliser le calcul sur la partie non-convolutive. On peut donc à chaque itération calculer le critère et son gradient pour un coût raisonnable. Par exemple, pour une exécution parallélisée sur huit cœurs de calcul, le coût de calcul à chaque itération est de l'ordre d'environ douze fois celui du coût de calcul du gradient en l'absence de turbulence.

Ceci est un autre intérêt de la formule analytique : elle permet non seulement le calcul de la fonction d'étalement du point, mais surtout le calcul de son gradient, pour un coût raisonnable.

En conclusion, le critère effectivement minimisé dans COFFEE est

$$\mathcal{J}(\phi_{up}) = \frac{1}{2} \sum_{k,x} \frac{[\mathbf{i}_k - f_1 \times \mathbf{h}_{dét} \star h_c(\phi_{up}, k) - f_2]^2}{\sigma^2(k, \mathbf{x})} + \frac{1}{2\sigma_{\nabla\phi_{up}}^2} \sum_{\mathbf{r}} \|\nabla\phi_{up}(\mathbf{r})\|^2, \quad (4.14)$$

où  $\phi_{up}$  est discrétisé sur une grille cartésienne, et le gradient est calculé par différences finies retardées. Le gradient de ce critère est

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{up}}(\phi_{up}) = \sum_{\mathbf{y}} h_a(\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) - \frac{1}{\sigma_{\nabla\phi_{up}}^2} \Delta\phi_{up}, \quad (4.15)$$

où le laplacien est calculé par différences finies centrées.

## 4.2 Validation numérique de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence

### 4.2.1 Simulation

Maintenant qu'un modèle de formation d'image coronographique en présence de turbulence est disponible et intégré dans COFFEE, le code de diversité de phase coronographique, je présente des résultats de reconstruction de COFFEE dans un cadre dit de crime inverse en présence de turbulence. Le crime inverse consiste, en toute généralité, à tenter de reconstruire une entrée à partir d'images synthétisées en utilisant le même modèle direct que celui utilisé par la méthode d'inversion. Dans le cas présent, il s'agit de choisir une aberration de phase « vraie »  $\phi_{\text{up}}$ , de produire des images synthétiques grâce au modèle numérique de formation d'image incluant un bruit, puis d'utiliser ces images comme entrée de COFFEE. La sortie de COFFEE,  $\widehat{\phi}_{\text{up}}$ , pourra alors être comparée à  $\phi_{\text{up}}$ . L'opération de crime inverse apporte plusieurs informations. D'abord, la comparaison de l'entrée à la sortie permet de s'assurer qu'elles diffèrent qualitativement peu entre elles, ce qui est un moyen de s'assurer que l'inversion fonctionne correctement. Surtout, la comparaison quantitative de la distance de la sortie à l'entrée donne une borne inférieure à l'erreur qui sera commise sur des données réelles, dont la formation n'est, elle, pas parfaitement modélisée par le modèle utilisé dans l'inversion. Autrement dit, le crime inverse quantifie les performances ultimes de la méthode. Qui plus est, le crime inverse permet d'étudier l'influence du niveau de bruit indépendamment des biais du modèle. Enfin et surtout, cette étude en simulation permet de quantifier la robustesse de la méthode à toute erreur de modèle. Ce point est crucial pour toute méthode fondée sur un modèle. En particulier la connaissance de la turbulence étant un pré-requis à cette méthode, et l'estimation de la turbulence étant un exercice ardu, il est important de quantifier l'impact d'une méconnaissance à ce paramètre. La fonction de structure de phase de la turbulence résiduelle post-optique adaptative peut être estimée par ailleurs à l'aide des résidus de l'analyseur de surface d'onde mesurés par l'optique adaptative.

Dans tout ce qui suit, les erreurs de phases sont exprimées pour une longueur d'onde de 1 589 nm. La simulation prend en argument une fonction de structure de phase  $D_{\phi_t}$ , représentée figure 4.1, qui est représentative de la fonction de structure de phase résiduelle après correction par l'optique adaptative de SPHERE. L'aberration de phase en amont du coronographe,  $\phi_{\text{up}}$  a une densité spectrale d'énergie en  $1/f^2$ , et un écart-type de 50 nm. C'est la quantité à reconstruire. L'aberration de phase en aval du coronographe,  $\phi_{\text{down}}$ , suit la même loi de densité spectrale d'énergie, et a un écart-type de 20 nm. Le coronographe est un coronographe de Lyot, sans apodisation, avec un diaphragme de Lyot de diamètre 95% du diamètre de la pupille d'entrée. Il n'y a pas d'aberration d'amplitude. Ces valeurs sont typiques des aberrations effectivement observées sur SPHERE. Le flux total de la source est de  $10^9$  photons dans la pupille pendant la durée d'exposition, et le détecteur a un bruit électronique d'écart-type un électron par pixel. Les conditions de bruit sont donc représentatives d'un cas de bon rapport signal à bruit. La phase de diversité, parfaitement connue, est une défocalisation d'écart-type 125 nm. Les images en plan focal sont échantillonnées sur  $128 \times 128$  pixels. L'échantillonnage des images est choisi à 2 pour respecter tout juste la condition de Shannon et donc réduire le temps de calcul, ce qui donne un échantillonnage des phases recherchées sur  $64 \times 64$  pixels.

Les images synthétisées, qui sont utilisées comme données de la reconstruction, sont présentées sur la figure 4.2. Dans les deux images, on repère au centre la signature du coronographe, qui masque l'étoile. Autour du centre, on voit des résidus diffractifs typiques du coronographe de Lyot, modulés par les tavelures statiques. Plus loin, le cercle brillant marque le halo résiduel d'une optique adaptative identique à celle de l'instrument SPHERE, avec un diamètre de correction de  $40\lambda/D$ . La principale différence est au centre, où on remarque bien



FIGURE 4.1 – Fonction de structure de phase utilisée pour la reconstructions de la figure 4.3.

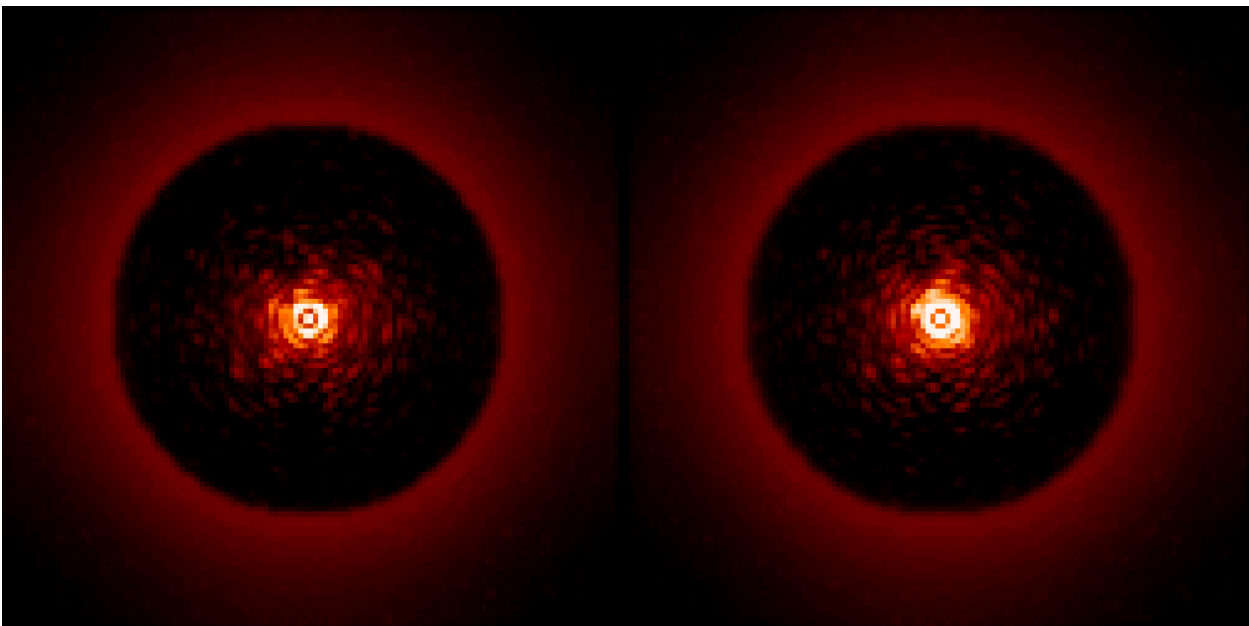


FIGURE 4.2 – Images utilisées comme données pour la reconstruction présentée sur la figure 4.3. À gauche, l'image focalisée. À droite, l'image de diversité.

l'impact de la défocalisation introduite pour obtenir une image de diversité.

Les résultats de la reconstruction sont présentés sur la figure 4.3. Y sont affichés la phase amont  $\phi_{up}$ , son estimée par COFFEE  $\widehat{\phi}_{up}$ , et cent fois leur différence.

La différence entre la phase vraie et la phase estimée est d'écart-type 0,14 nanomètres, pour une phase vraie d'écart-type 50 nanomètres. Pour mieux comprendre l'erreur, on peut s'intéresser à sa structure spectrale. La figure 4.4 présente la carte de la transformée de Fourier

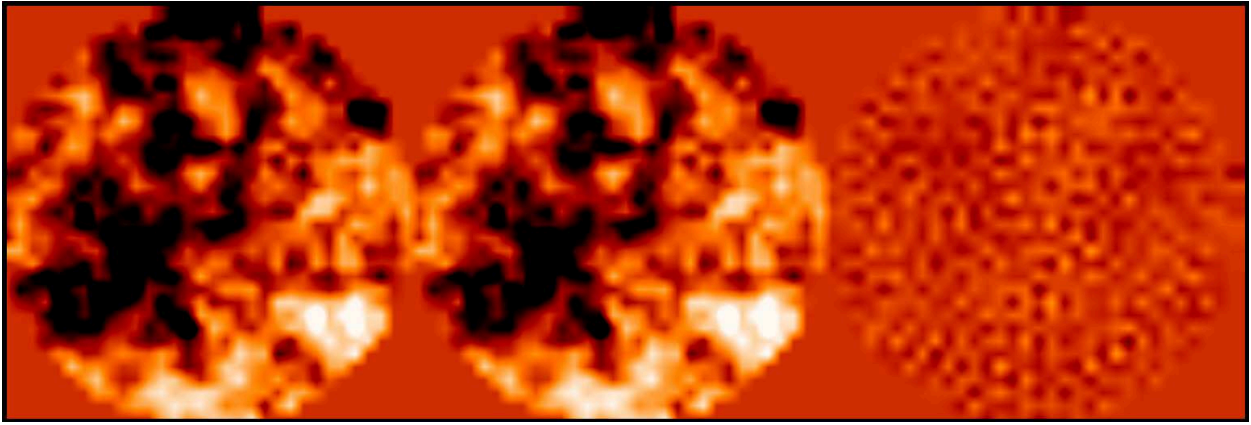


FIGURE 4.3 – À gauche : phase amont  $\phi_{\text{up}}$  à reconstruire, utilisée pour la génération des images montrées sur la figure 4.2, et d'écart-type 50 nanomètres. Au centre, estimée  $\widehat{\phi}_{\text{up}}$  de la phase amont, d'écart-type 50 nanomètres également. À droite, 100 fois leur différence, d'écart-type 0,14 nanomètres. L'échelle est linéaire et commune aux trois images.

de l'erreur,  $|\mathcal{F}(\widehat{\phi} - \phi)|$ .

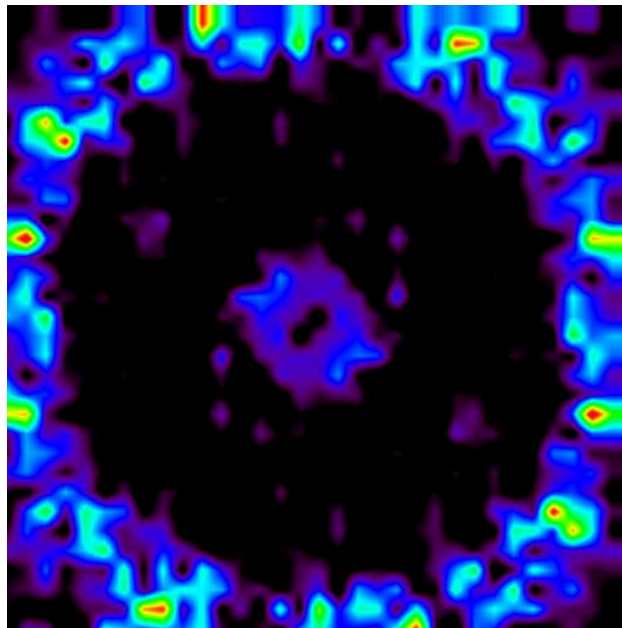


FIGURE 4.4 – Module de la transformée de Fourier de l'erreur d'estimation.

On peut constater sur cette figure que la structure spectrale de l'erreur n'est pas homogène. En effet, c'est hors de la zone de correction de l'optique adaptative que l'erreur est la plus élevée : l'erreur d'estimation dans la vaste zone corrigée compte pour moins de 25% de l'écart-type de l'erreur totale. À niveau d'erreur totale donné, il s'agit plutôt d'une nouvelle intéressante pour deux raisons. La première raison est que, même si ces fréquences étaient bien estimées, on ne pourrait pas les corriger par le miroir déformable. La deuxième raison, qui est liée à la première, est que ces fréquences spatiales de la phase correspondent à des zones non corrigées dans les images scientifiques. Il s'agit donc de zones dans lesquelles on ne pourra de toute manière pas détecter d'exoplanètes, ou du moins de zones qui ne sont pas dans le secteur de recherche. Enfin, il faut garder en tête que ce niveau de performance est issu d'une simulation, et ne donne qu'une borne inférieure de l'erreur commise par la méthode en conditions réelles.

Malgré les limites de cette simulation, cette expérience numérique de crime inverse constitue une validation du principe de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence. Elle permet une estimation de l'erreur due au bruit en l'absence de biais d'étalonnage. Elle permet également d'étudier la structure de l'erreur d'estimation, qui est principalement localisée hors de la zone de correction du miroir déformable.

Cette étude est limitée par le fait que, en condition réelle, les données ne se formeront pas exactement de la manière prévue par le modèle de formation utilisée dans l'inversion. Un paramètre important, qui ne sera pas parfaitement maîtrisé en pratique, est la statistique de la turbulence après correction par optique adaptative, c'est à dire le paramètre  $D_{\phi_t}$ .

#### 4.2.2 Étude de la tolérance aux erreurs sur la fonction de structure de phase

Dans cette section, je quantifie l'impact d'une méconnaissance de la fonction de structure de phase  $D_{\phi_t}$  sur la reconstruction finale. Cette fonction peut être estimée de différentes façons, et cette estimation n'est pas traitée dans cette thèse. D'une part, l'estimation peut être faite à partir des données de télémétrie (seeing, vitesse de vent), qui, conjointement avec les paramètres du système d'optique adaptative, peuvent être utilisées en entrée d'un programme de simulation numérique d'optique adaptative qui renvoie en sortie la fonction de structure de phase. C'est d'ailleurs de cette façon qu'a été créée la fonction utilisée en section précédente. D'autre part, il est possible de reconstruire cette fonction à partir des mesures obtenues en temps réel pendant l'observation par le système d'optique adaptative, à savoir les tensions du miroir déformable et les pentes résiduelles de l'analyseur de surface d'onde de l'optique adaptative. Pour cela, j'ai reproduit l'étude précédente, à un détail près : la carte de fonction de structure de phase,  $D_{\phi_t}$ , est toujours utilisée dans les simulations permettant de former les données, mais la carte de fonction de structure de phase utilisée pour les reconstructions de phase à partir des images simulées est multipliée par une constante. Une reconstruction faite avec une constante 1 est un crime inverse. Une reconstruction faite avec une constante valant  $1 - p$  est appelée une reconstruction avec erreur de  $p$  sur  $D_{\phi_t}$ . Ce cas correspondrait à effectuer une mesure de surface d'onde en sous-estimant la force de la turbulence, c'est à dire le seeing, mais en estimant correctement la vitesse du vent et la magnitude de la source. La figure 4.5 présente l'écart-type de l'écart de la phase reconstruite à la phase estimée en fonction de l'erreur commise sur  $D_{\phi_t}$ , pour cinq valeurs différentes de l'erreur.

Sur SAXO, l'optique adaptative de SPHERE, on peut raisonnablement espérer commettre une erreur de l'ordre de 5 % à 15 % pour un fonctionnement nominal. On peut donc espérer une erreur totale de l'ordre de un à trois nanomètres sur la partie des aberrations que le miroir déformable peut corriger. Surtout, ces simulations plus réalistes permettent d'espérer estimer les aberrations de phase avec une précision de l'ordre de quelques nanomètres. Il est donc réaliste d'envisager d'utiliser COFFEE pour mesurer et corriger les aberrations quasi-statiques des imageurs d'exoplanètes plusieurs fois par nuit directement sur ciel.

#### 4.2.3 Étude de la tolérance au bruit en présence d'une erreur d'estimation de la fonction de structure de phase

Le niveau de flux incident a une influence déterminante sur le niveau de bruit. J'ai repris les paramètres des simulations précédentes, avec une erreur de 10% sur  $D_{\phi_t}$ , et j'ai étudié l'influence du flux incident sur la qualité de la reconstruction de l'aberration de phase amont. Plus le flux incident est élevé, plus le terme d'attache aux données est fiable, et meilleure devrait être la qualité de la reconstruction. Cette intuition est confirmée par la figure 4.6, qui montre

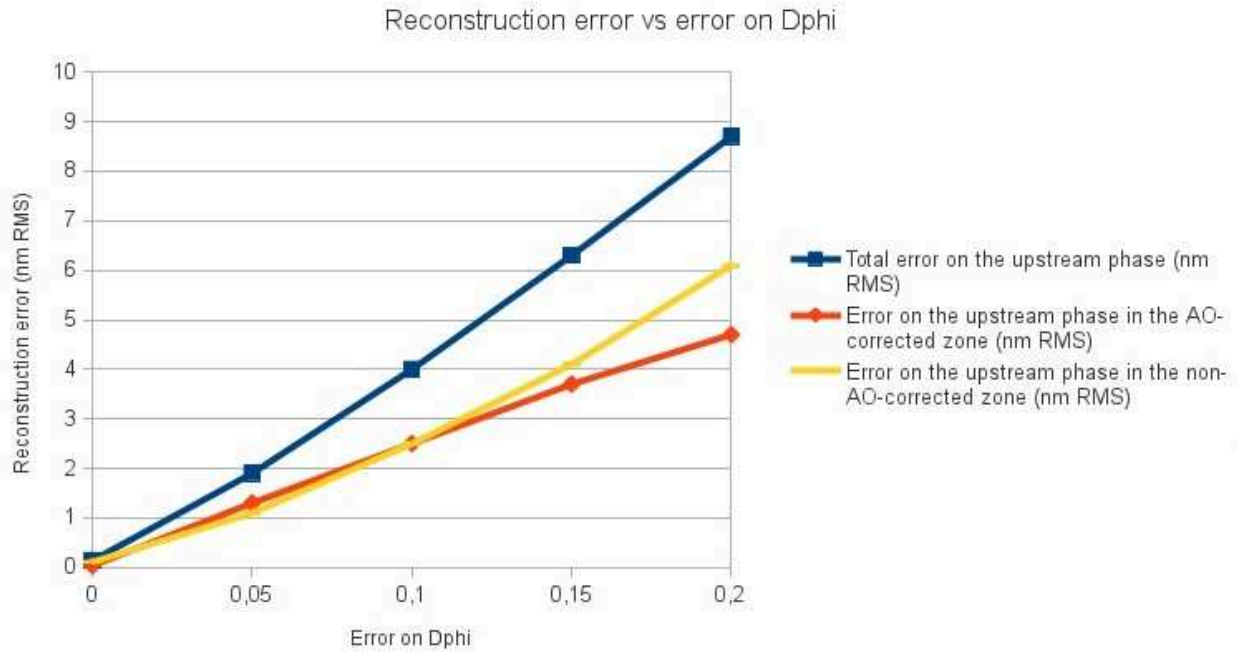


FIGURE 4.5 – Évolution de l’erreur de reconstruction en fonction de l’erreur sur  $D_{\phi_i}$ , avec erreur totale séparée en erreur dans la zone de correction du miroir déformable et erreur hors de la zone de correction.

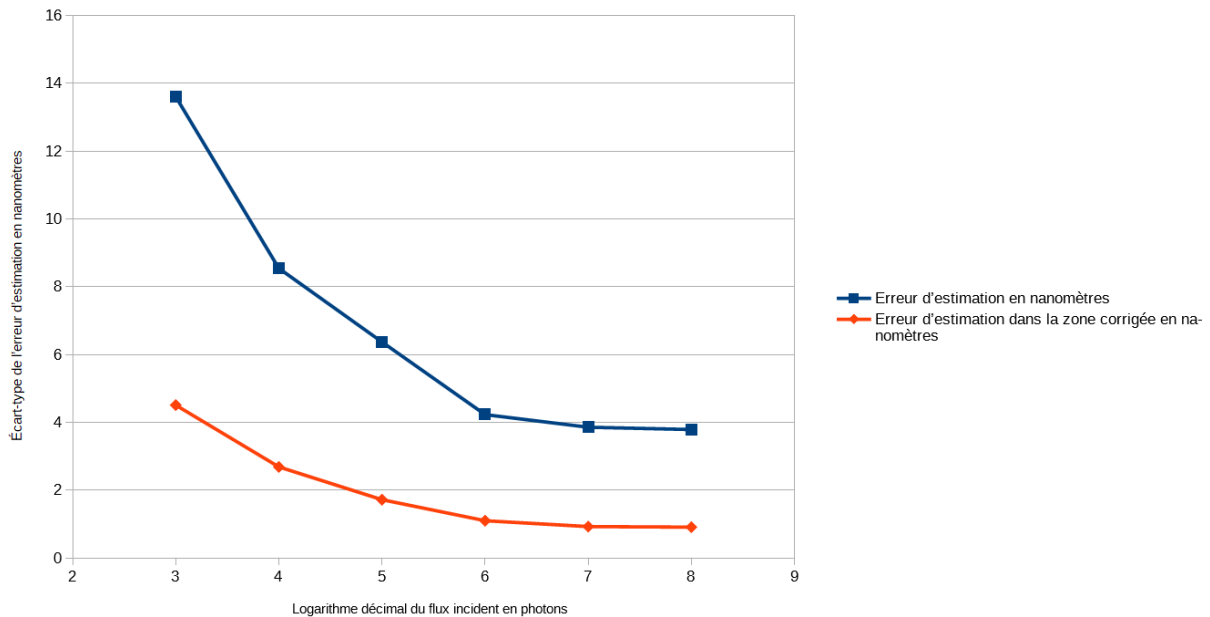


FIGURE 4.6 – Écart-type de l’erreur d’estimation de la phase amont en fonction du flux incident en photons. L’estimation est faite avec une erreur de 10% sur la fonction de structure de phase de la turbulence.

que la qualité de reconstruction commence à être peu sensible au flux incident à partir d’un à dix millions de photons incidents dans la pupille pendant la pose.

Ce flux critique n’a rien d’arbitraire. Estimons un ordre de grandeur du rapport signal à bruit dans l’image pour un flux incident de  $10^6$  photons. Le coronographe éteint environ 90% du flux, ce qui laisse environ  $10^5$  photons qui se répartissent sur les  $128 \times 128 = 16\,384$  pixels

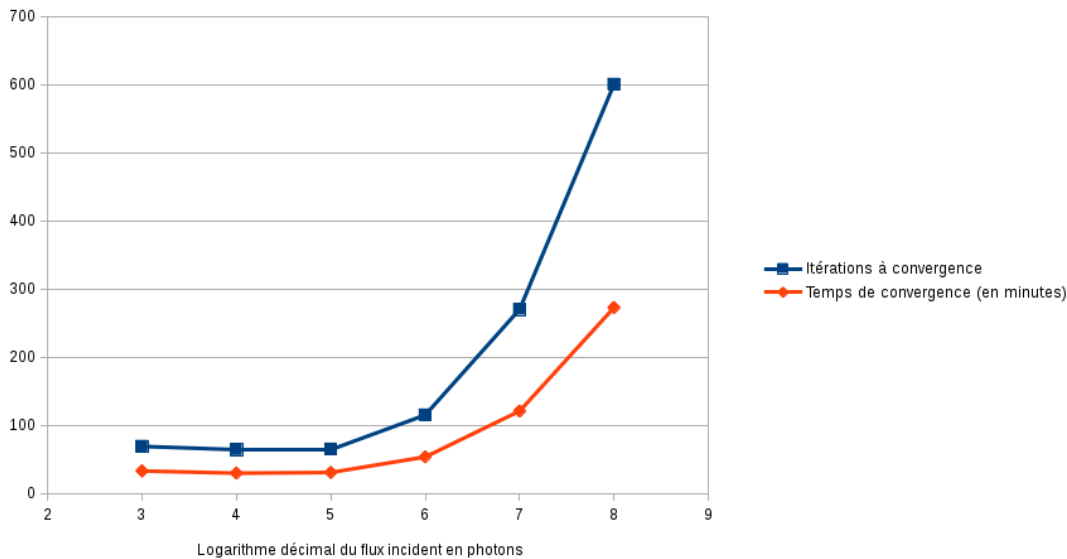


FIGURE 4.7 – Nombre d'itérations et temps en minutes nécessaires à la convergence en fonction du flux incident en photons.

du capteur, soit en moyenne environ 6 photo-électrons par pixel. Le bruit électronique dans la simulation est d'un électron par pixel. Ainsi, la qualité de reconstruction commence à ne plus être limitée par le flux quand le signal commence à dominer le bruit.

Par ailleurs, j'ai étudié l'évolution du nombre d'itérations pour atteindre le seuil de convergence (fixé à une évolution relative du critère  $\mathcal{J}$  inférieure à  $10^{-5}$  dans ce cas) en fonction du flux incident. Les résultats sont résumés sur la figure 4.7. On constate qu'il faut d'autant plus d'itérations que le flux de la source est important. Ce résultat peut sembler contre-intuitif, et surtout on pourrait être tenté d'en conclure qu'une solution de bonne qualité prend un temps inacceptable. Il n'en est rien. En effet, le poids du terme de régularisation a d'autant moins de poids dans le critère que le flux de la source augmente. Or, le terme de régularisation est quadratique, ce qui signifie que les algorithmes de quasi-Newton sont particulièrement performants pour atteindre le minimum de ce terme. On attend donc plus d'itérations pour atteindre la convergence quand le terme de régularisation a moins de poids, c'est à dire quand le flux de la source est plus élevé. L'évolution de la figure 4.7 est donc tout à fait conforme à ce qui est attendu pour une reconstruction régularisée. En ce qui concerne la qualité de la reconstruction, celle-ci est surtout dépendante des premières itérations, et très peu dépendante des dernières. Il ne faut donc pas conclure de la figure 4.7 qu'une reconstruction de bonne qualité prend un temps inacceptable. Par exemple, pour un flux incident de  $10^8$  photons dans la pupille, on peut décider d'arrêter la reconstruction au bout de cent itérations seulement. Dans ce cas, le temps de convergence est sensiblement le même que dans le cas d'un flux de  $10^6$  photons, et même légèrement inférieur. Et l'écart-type de l'erreur d'estimation est alors de 4,0 nanomètres, dont 1,0 nanomètres dans la zone corrigée. La figure 4.8 montre l'écart entre la phase amont reconstruite à convergence et la phase amont reconstruite en cent itérations.

Cette étude de l'impact du niveau de bruit sur la qualité de la reconstruction peut servir à estimer l'importance du niveau de bruit sur un instrument couplé à un télescope de la classe des huit mètres.

Par exemple, quand le *very large telescope* observe une étoile de magnitude 15 dans le visible, le flux photonique détecté par le capteur en l'absence de coronographe est de l'ordre de  $2 \times 10^5$  photons par seconde en bande H (source du bilan photométrique : Jean-François Sauvage). Comme les données utilisées sont typiquement des piles de quelques centaines

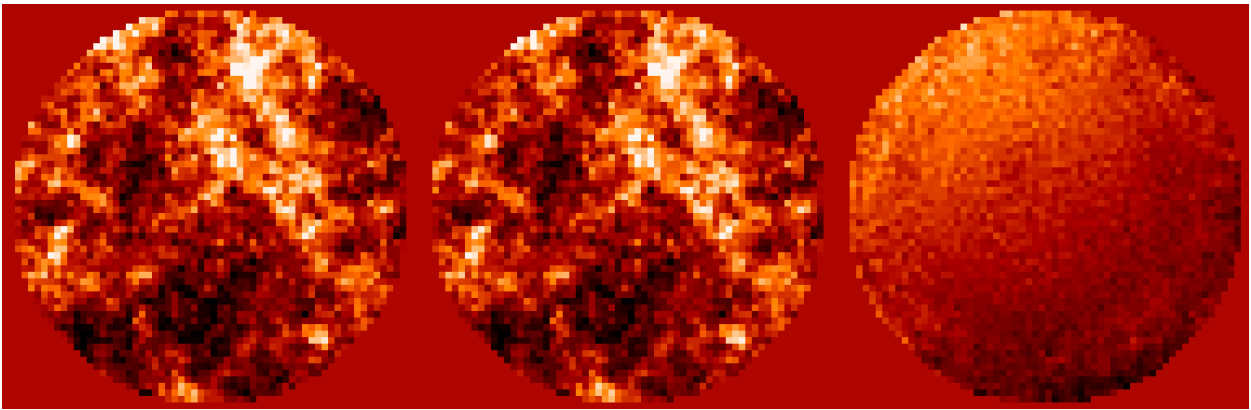


FIGURE 4.8 – À gauche : reconstruction à convergence. Au milieu : reconstruction avec une convergence arrêtée à cent itérations. À droite : dix fois la différence, à la même échelle. Échelle linéaire.

d'images exposées chacune une seconde, le nombre total de photons résultant est de l'ordre de  $10^7$ , ce qui est bien suffisant pour ne pas être limité par le bruit.

#### 4.2.4 Impact d'une planète sur les performances de COFFEE

Le modèle de formation d'images utilisé dans COFFEE repose sur la propagation de lumière depuis un point source. Dans des cas d'utilisation pratique sur ciel, il faudrait que COFFEE puisse estimer les aberrations en présence de planètes. Je présente ici des résultats de reconstruction de phase par COFFEE à partir d'image simulées comportant une planète. J'ai choisi des paramètres réalistes au vu des simulations précédentes, à savoir 10% d'erreur sur l'estimation de  $D_{\phi_t}$  et un flux incident de  $10^6$  électrons sur la pupille. La planète est positionnée à une distance angulaire de  $3,5\lambda/D$  de l'étoile. J'ai procédé à des simulations pour des rapports de flux de  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  entre la planète et l'étoile, afin de tester les différences d'impact de la planète sur la reconstruction.

La figure 4.9 présente les reconstructions par COFFEE sans planète, et pour des planètes ayant des flux par rapport à l'étoile de  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ . Dans le cas d'un rapport de flux de  $10^{-5}$ , la reconstruction de phase n'est pas perturbée par la planète. Dans ce cas, l'écart-type de l'écart à la reconstruction en l'absence de planète est minime, de seulement 0,35 nm. Cet écart est majoritairement imputable au fait que les réalisations du bruit dans les données ayant servi aux reconstructions sont différentes. Dans le cas d'un rapport de flux de  $10^{-3}$ , la reconstruction de phase est problématique. En regardant la carte d'erreur, en bas à droite de la figure 4.9, on voit à l'œil une structure sinusoïdale qui permet d'ajuster la planète présente dans les données. L'écart à la reconstruction en l'absence de planète a alors pour écart-type 6,0 nm, qui plus est dans un mode très localisé. Dans le cas intermédiaire du rapport de flux de  $10^{-4}$ , l'erreur commence à présenter une structure sinusoïdale que l'on devine à peine, et l'écart à la reconstruction en l'absence de planète a pour variance 0,5 nm.

Pour contrôler la répartition fréquentielle de l'erreur, je considère le carré du module de la transformée de Fourier de l'erreur de reconstruction, représenté sur la figure 4.10. Dans le cas d'un rapport de flux de  $10^{-3}$ , on y voit un couple de points qui constituent un artefact dû à la présence de la planète. On peut aussi noter une structure de l'erreur qui est notablement plus forte sur le pourtour de la zone de correction par optique adaptative. Au contraire, dans le cas des rapports de flux de  $10^{-4}$  et de  $10^{-5}$ , on ne repère pas d'artefact imputables à la présence de la planète.

Cette étude montre que la luminosité de la planète a une influence déterminante sur le fait d'être ou non reconstruite par COFFEE comme une aberration. Cette influence du flux



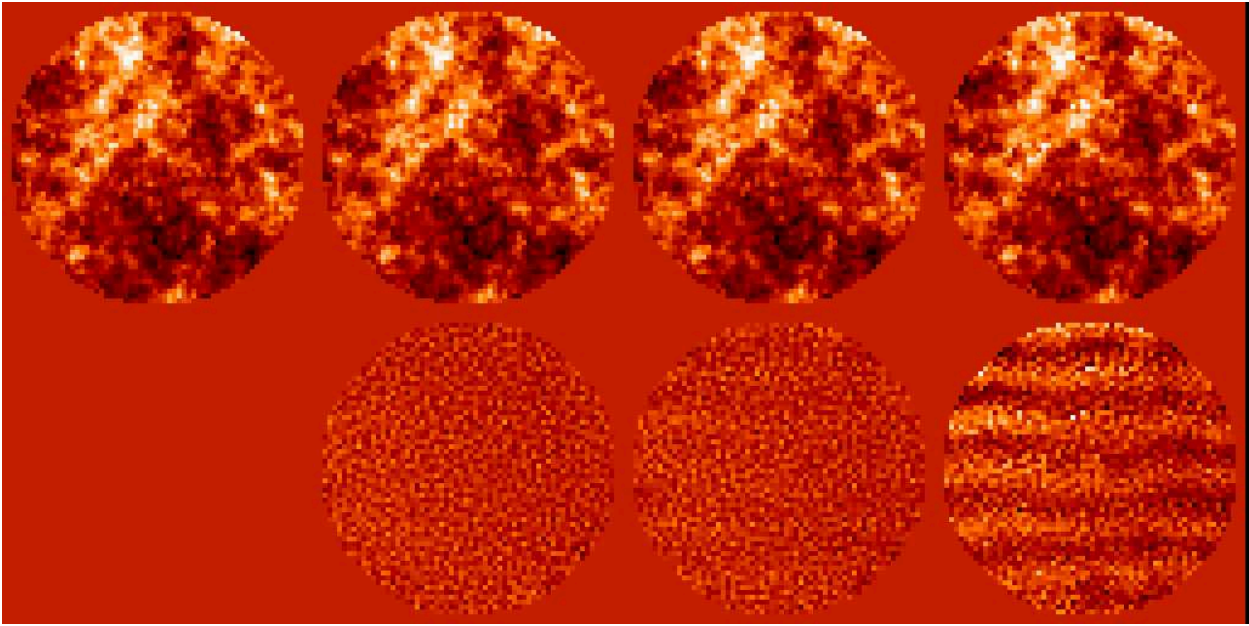


FIGURE 4.9 – En haut, de gauche à droite : phase reconstruite par COFFEE en l'absence de planète, pour une planète de flux relatif à l'étoile  $10^{-5}$ , pour une planète de flux relatif à l'étoile  $10^{-4}$  et pour une planète de flux relatif à l'étoile  $10^{-3}$ . En bas sont affichées les différences de la phase reconstruite par rapport à la phase reconstruite en l'absence de planète (affichée en haut à gauche). Échelle linéaire.

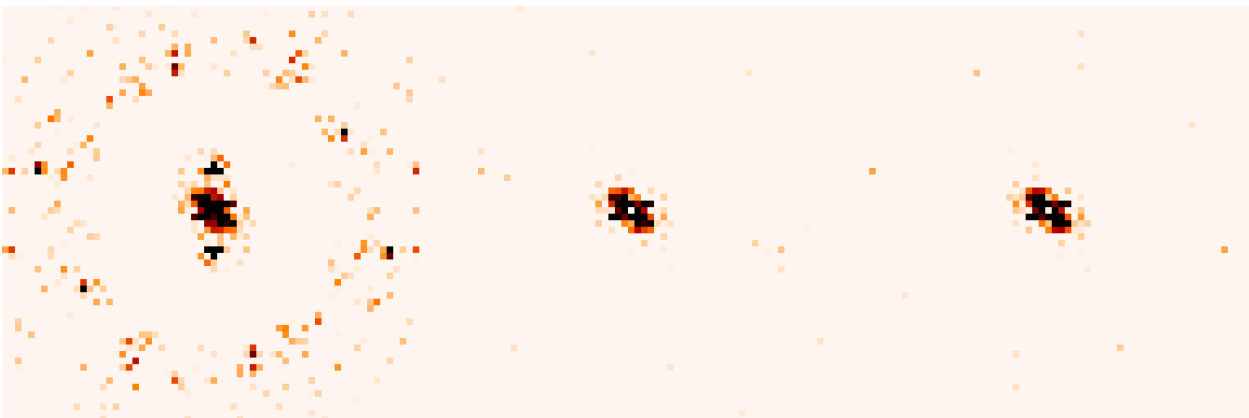


FIGURE 4.10 – De gauche à droite : structure fréquentielle de l'erreur sur la phase reconstruite pour une planète de flux relatif à l'étoile de  $10^{-3}$ , pour une planète de flux relatif à l'étoile  $10^{-4}$  et pour une planète de flux relatif à l'étoile  $10^{-5}$ . Échelle linéaire.

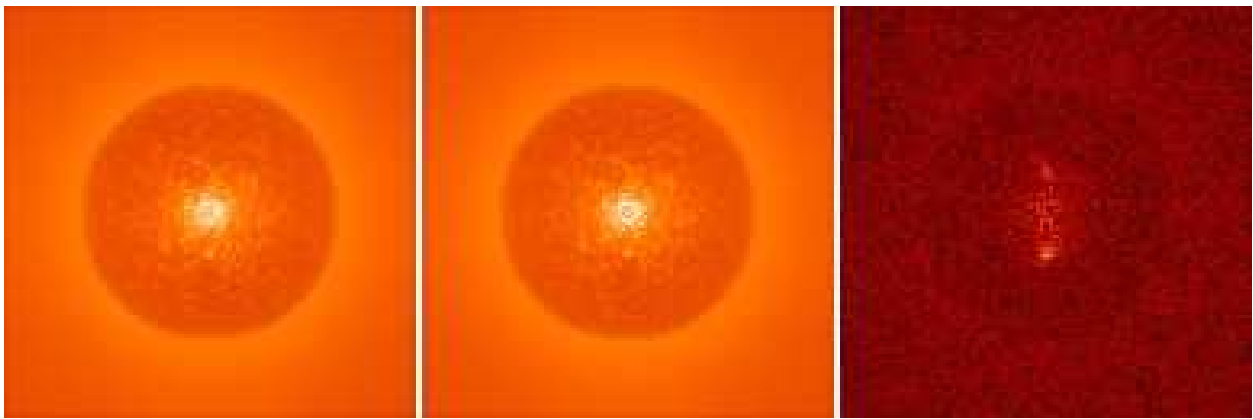


FIGURE 4.11 – À gauche : image focalisée utilisée comme donnée de COFFEE, comprenant une planète placée verticalement sous le centre, au tiers du rayon de la zone corrigée, avec un flux relatif à l'étoile de  $10^{-3}$ . Au milieu : image synthétisée à partir de la phase estimée par COFFEE. À droite : différence entre l'image du milieu et l'image synthétisée à partir de la phase vraie : l'impact de la planète est particulièrement visible.



FIGURE 4.12 – À gauche : image focalisée utilisée comme donnée de COFFEE, comprenant une planète placée verticalement sous le centre, au tiers du rayon de la zone corrigée, avec un flux relatif à l'étoile de  $10^{-5}$ . Au milieu : image synthétisée à partir de la phase estimée par COFFEE. À droite : différence entre l'image du milieu et l'image synthétisée à partir de la phase vraie : il n'y a pas d'impact de la planète, contrairement au cas de la figure 4.11.

peut s'expliquer en le mettant en regard du niveau de régularisation. Si le flux de la planète est fort, le bruit associé aux pixels qui forment son image sur le capteur est faible, et la planète a une influence importante sur le terme d'attache aux données qui se traduit par un artefact sinusoïdal. En revanche, si le flux de la planète est faible, les pixels qui forment son image ont peu d'impact sur le terme d'attache aux données, et la régularisation empêche la formation d'un artefact. Cet effet est particulièrement flagrant quand on compare les figures 4.11 et 4.12. Ainsi, dès lors que la planète n'est pas visible dans les images, la qualité de l'estimation par COFFEE est inchangée.

## Conclusion : vers une application sur ciel de COFFEE

J'ai intégré le modèle d'imagerie coronographique en présence de turbulence présenté au chapitre précédent dans le code COFFEE de diversité de phase coronographique. Pour cela, j'ai obtenu une expression des gradients du critère COFFEE par rapport à la phase amont.

Une étude numérique de crime inverse permet de valider le principe de la méthode. Cette étude permet également de caractériser le spectre de l'erreur d'estimation : celle-ci est dominée par les fréquences hors de la zone de correction de l'optique adaptative, qui sont les fréquences où les erreurs sont les moins gênantes en pratique, vu qu'on n'a de toute manière que peu d'espoir d'y détecter une planète.

Une étude numérique plus réaliste, qui tient compte de la méconnaissance de la fonction de structure de phase post-optique adaptative, permet de prévoir l'erreur d'estimation de l'aberration de phase quasi-statique en amont du coronographe dans la zone corrigée par l'optique adaptative. Pour un système tel que SPHERE, où l'estimation est faite pour une aberration phase d'environ cinquante nanomètres d'écart-type à la longueur d'onde de 1 589 nanomètres, cette erreur devrait être de l'ordre de quelques nanomètres d'écart-type.

L'étude de l'impact de la turbulence sur la qualité de l'estimation de l'aberration de phase statique montre une influence importante de la qualité de la connaissance de la fonction de structure de phase. Il faudrait donc avoir une bonne connaissance de cette fonction pendant les observations, avec une précision meilleure que 15%. Pour cela, on pourrait envisager de la reconstruire à partir des données de télémétrie de la boucle d'optique adaptative. On pourrait également envisager de l'estimer à partir des images elles-mêmes, ce qui ferait une inconnue de plus à estimer par COFFEE.

Ceci a une conséquence pratique sur la façon d'acquérir les données. Pour que l'image focalisée et l'image de diversité soient formées à partir de la même fonction de structure de phase, il faudrait idéalement acquérir les images brutes en alternant images focalisées et images de diversité d'une trame à l'autre. Ce mode d'acquisition est actuellement disponible sur SCEXAO grâce à une coordination fine du miroir déformable avec le détecteur.

En ce qui concerne le temps d'acquisition des images, des poses de l'ordre de quelques minutes permettrait à la fois de recueillir suffisamment de flux et d'obtenir des images où la turbulence est bien moyennée.

Enfin, pour ce qui est de l'influence d'une planète sur la qualité de la reconstruction, plusieurs solutions sont possibles. En l'état actuel, on pourrait envisager de calibrer les aberrations directement sur ciel sur un point source connu pour ne pas avoir de compagnon, mais proche de la cible d'observations, et de pointer ensuite la cible. Une autre solution serait de masquer les pixels montrant la planète pour la reconstruction dans le cas où on observe une planète. En tout cas, si la planète est trop peu brillante pour être détectée, elle n'aura pas d'impact sur les performances de l'estimation.

Il reste une étape avant d'envisager de porter COFFEE sur le ciel : une validation de la méthode sur des données expérimentales, et non simulées. C'est le propos du prochain chapitre.

« Pour un physicien, “le poison subtil de la formation mathématique”, selon l’expression de Félix Klein, c’est justement que le modèle devenu autonome se sépare de la réalité et ne lui est plus comparé. »

Vladimir Arnold

## Chapitre 5

# Validation en laboratoire de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence

**R** IEN NE VAUT l’expérience ! La théorie développée au chapitre 3, comme la mise en œuvre numérique et sa validation de principe présentées au chapitre 4, étaient des jalons vers une mise en œuvre pratique de la méthode. La validation expérimentale a été réalisée en laboratoire sur le banc MITHiC du LAM. Elle constitue une dernière étape avant la mise en œuvre de la mesure des aberrations directement sur le ciel par diversité de phase coronographique sur un télescope astronomique équipé d’une optique adaptative. Je présente dans un premier temps les objectifs de l’expérience, les moyens, et la méthode. Dans un deuxième temps, je détaille l’intégralité des étalonnages préalables. Dans un troisième temps, je présente l’acquisition et le pré-traitement des données de l’expérience. Dans un dernier temps, je présente la mesure et la reconstruction d’une phase présentant de hautes fréquences, qui valide expérimentalement la diversité de phase coronographique en présence de turbulence et ouvre la voie à son utilisation directe sur le ciel pendant les observations.

## 5.1 Présentation de l’expérience

### 5.1.1 But de l’expérience

Le but de cette validation est de démontrer que COFFEE est capable de mesurer correctement des aberrations statiques en présence de résidus de turbulence corrigée par optique adaptative. Pour cela, il fallait un banc d’optique muni d’un coronographe, d’un miroir déformable, et d’un simulateur de turbulence corrigée par optique adaptative. C’est le cas du banc MITHiC.

### 5.1.2 Le banc MITHiC

MITHiC, le *Marseille Imaging Testbed for High Contrast imaging*, est comme son nom l’indique un banc coronographique dédié à l’imagerie à haut contraste. Il est développé au

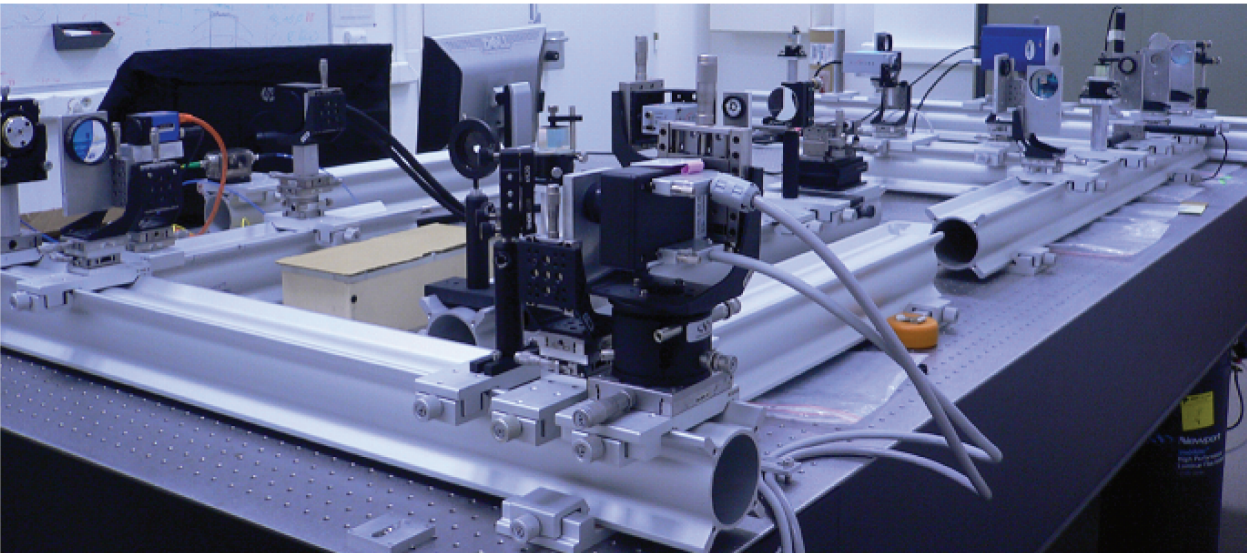


FIGURE 5.1 – Photographie du banc MITHiC

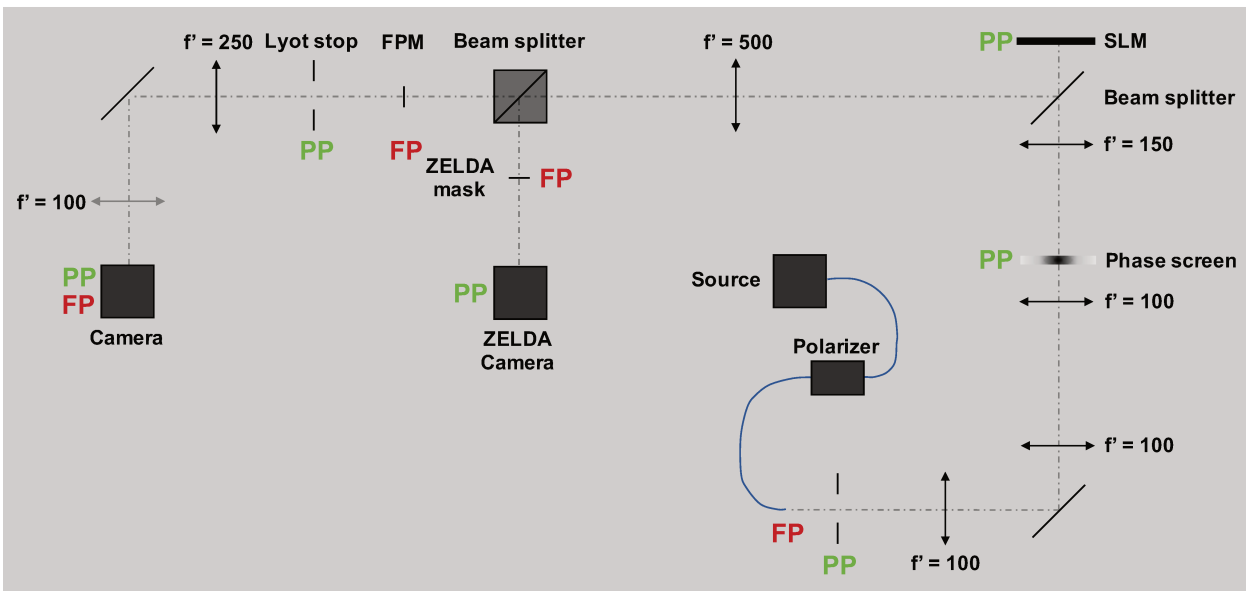


FIGURE 5.2 – Schéma du banc MITHiC, issu de [Leboulleux, 2018], et reproduit avec l'aimable autorisation de l'auteur.

laboratoire d'astrophysique de Marseille [N'Diaye *et al.*, 2012] depuis près de dix ans. De plus, il est muni d'un module d'écrans de phases tournant qui simulent des résidus de turbulence atmosphérique typiques du site de Paranal après correction soit par SPHERE/SAXO soit par HARMONI [Vigan *et al.*, 2016]. Une photographie de MITHiC est présentée sur la figure 5.1 et son plan est présenté sur la figure 5.2. La source de lumière est une diode à super-luminescence qui émet dans une bande spectrale étroite centrée sur une longueur d'onde  $\lambda = 677$  nm. Elle sera considérée comme monochromatique dans la suite. La lumière est ensuite polarisée linéairement, puis injectée sur le banc en passant par une pupille d'entrée. Elle est alors propagée dans un deuxième plan pupille où elle passe à travers un écran transparent en rotation. Sur l'écran sont gravées des différences de marches aléatoires. Leur statistique suit la statistique des déphasages induits par la turbulence atmosphérique corrigée par une optique adaptative comparable à celle de SPHERE. Les différences de marche sont mises à l'échelle afin que le déphasage induit par la turbulence atmosphérique sur SPHERE à la longueur d'onde de

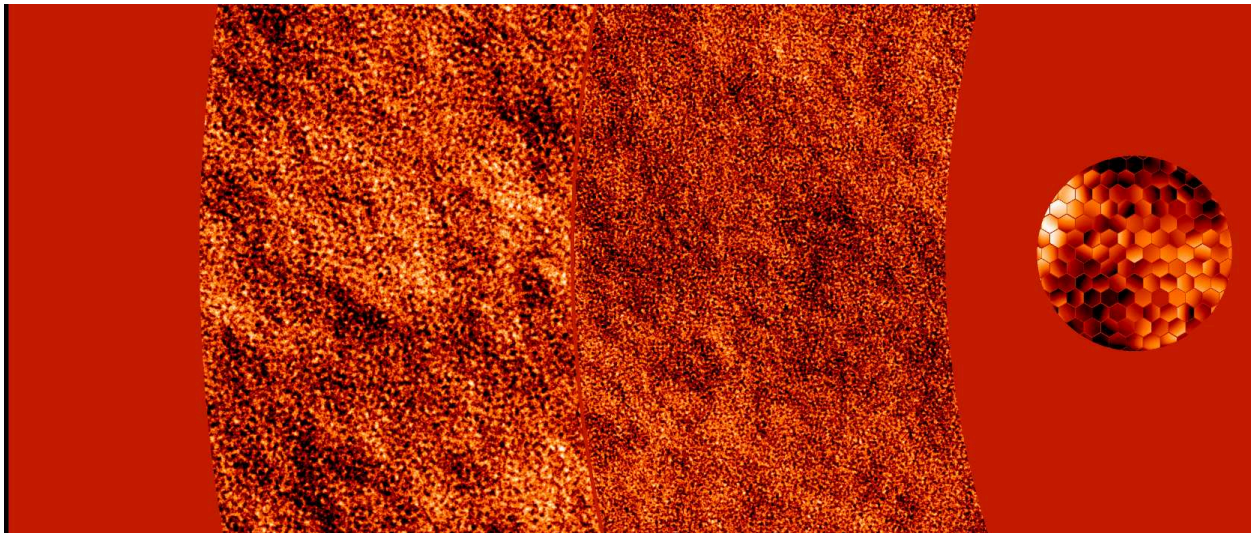


FIGURE 5.3 – Détail de l'écran de phase représentatif des aberrations post-optique adaptative utilisé sur MITHiC. La bande au centre-gauche est la bande HARMONI, non utilisée. La bande au centre-droit est la bande SPHERE. Ces bandes se referment pour constituer un grand anneau. Complètement à droite est une aberrations de bas ordre sur un télescope segmenté, non utilisée, mais qui donne une échelle de l'écran de turbulence.

1 600 nm soit le même que celui induit par le disque à la longueur d'onde de la source, soit 677 nm. Une portion de cet écran est représentée sur la figure 5.3.

Dans un troisième plan pupille, la lumière rencontre la surface d'un modulateur spatial de lumière (ou SLM pour *spatial light modulator*), qui joue le rôle d'un miroir déformable de très haute résolution spatiale. Le principal inconvénient de cette technologie est que le modulateur agit uniquement dans une direction de polarisation : c'est pour cela que la source est polarisée. Le faisceau rencontre ensuite un cube séparateur, qui prélève une partie du flux pour l'envoyer vers l'analyseur Zelda [N'Diaye *et al.*, 2013]. L'analyseur Zelda n'est pas utilisé par cette expérience. En revanche, le cube séparateur est à l'origine d'un fantôme dans les images, ce qui posera quelques problèmes pour les traiter. À partir de là, le trajet de la lumière correspond également à la figure 2.1 : le faisceau est concentré sur une pastille focale qui impose un déphasage de  $\pi$ , passe par un diaphragme de Lyot (ce qui constitue un coronographe de Roddier et Roddier), puis est focalisé sur le détecteur. Une lentille mobile permet de produire des images de la pupille de Lyot sur le détecteur.

Il s'agit là d'un simulateur de SPHERE où tous les ingrédients nécessaires à notre expérience sont présents : miroir déformable dans une pupille amont, turbulence résiduelle et coronographe. La figure 5.4 permet de comparer une fonction d'étalement du point enregistrée sur MITHiC à une fonction d'étalement du point enregistrée sur SPHERE.

Ces deux images présentent des caractéristiques communes. Ce sont toutes deux des images coronographiques, avec une signature du coronographe au centre de l'image. Cette signature diffère entre les images, car le coronographe utilisé sur MITHiC est un coronographe de Roddier et Roddier, tandis que le coronographe utilisé sur SPHERE lors de la prise de cette image est un coronographe de Lyot apodisé. L'aberration en forme de croix sur l'image de MITHiC est la marque d'un astigmatisme, qui sera d'ailleurs repéré par COFFEE. Dans les deux images, on distingue très nettement la zone de correction de l'optique adaptative. La turbulence est moyennée pendant une longue durée sur l'image MITHiC, alors que la pose est relativement plus courte sur l'image de SPHERE, ce qui explique la granularité des tavelures hors de la zone de correction. Enfin, sur l'image obtenue sur MITHiC, on peut remarquer en bas, juste en-dehors de la zone de correction, la présence d'un fantôme engendré par le cube

séparateur. On peut aussi distinguer sur les bords à l'horizontal et à la verticale des traits droits, qui constituent la mire de centrage du coronographe.

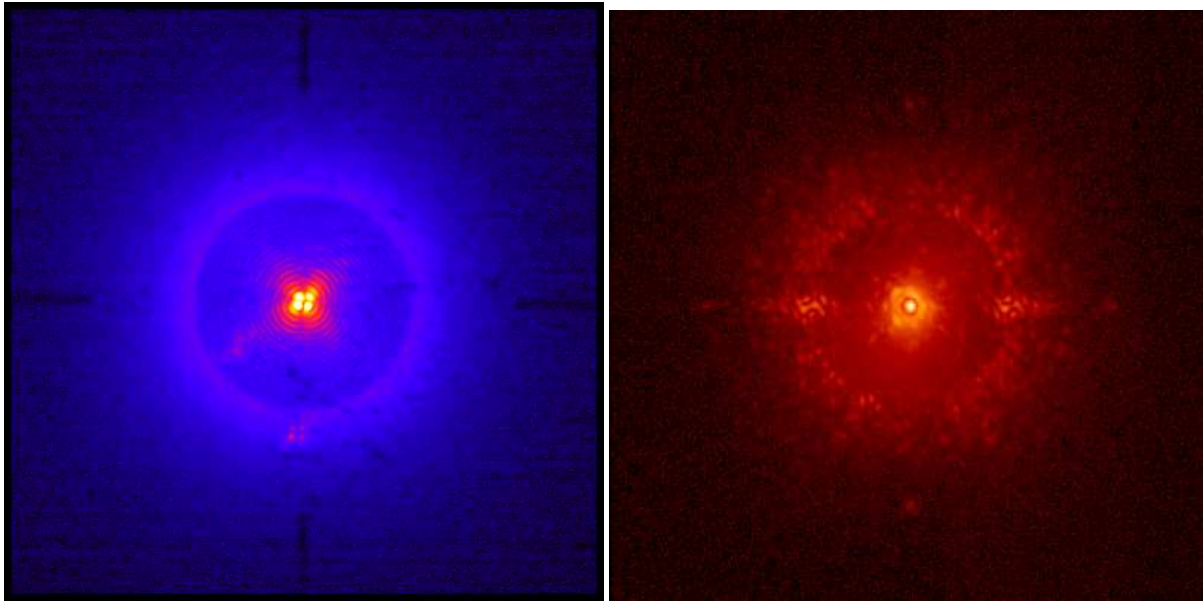


FIGURE 5.4 – À gauche : image obtenue sur MITHiC. À droite : image obtenue sur SPHERE, présentée sur la figure 1.6. Les deux images sont affichées avec une échelle en arc de sinus hyperbolique.

J'ai mené de bout en bout l'expérience présentée ici. Laurent Mugnier et Jean-François Sauvage ont largement contribué à la planification. Jean-François Sauvage a réalisé une partie du travail expérimental avec moi. Nous avons bénéficié de l'assistance ponctuelle d'Arthur Vigan. Kjetil Døhlen nous a également aidé, avec notamment la création express d'un nouveau plan pupille dédié aux écrans de phase et le réaligement du banc. J'ai réalisé les traitements.

### 5.1.3 Stratégie de mesure

Pour valider la diversité de phase coronographique en présence de turbulence résiduelle, il faut pouvoir comparer la mesure faite par cette méthode à une référence.

Pour cela, j'ai utilisé le modulateur spatial de lumière pour introduire une aberration maîtrisée,  $\phi_{\text{up}}^{\text{F}}$ . J'acquies alors une image focalisée et une image de diversité, rassemblées dans la pile  $\mathbf{i}^1$ . L'aberration vue par la mesure COFFEE est alors la somme de cette aberration  $\phi_{\text{up}}^{\text{F}}$  et de l'aberration statique du banc,  $\phi_{\text{up}}^0$ . L'estimée de cette somme d'aberrations est notée  $\widehat{\phi_{\text{up}}^{\text{F}} + \phi_{\text{up}}^0}$ .

Par ailleurs, j'ai fait une autre mesure à partir d'une image focalisée et d'une image de diversité rassemblées dans la pile  $\mathbf{i}^0$ , cette fois sans introduire d'aberration avec le modulateur spatial de lumière. Cette autre mesure, notée  $\widehat{\phi_{\text{up}}^0}$  donne donc directement accès aux aberrations statiques du banc,  $\phi_{\text{up}}^0$ .

En faisant la différence entre les deux mesures, on a une mesure différentielle par COFFEE de l'aberration introduite par le modulateur spatial de lumière, que l'on peut comparer à la consigne effectivement donnée au modulateur spatial de lumière. Cette stratégie est récapitulée sur la figure 5.5.

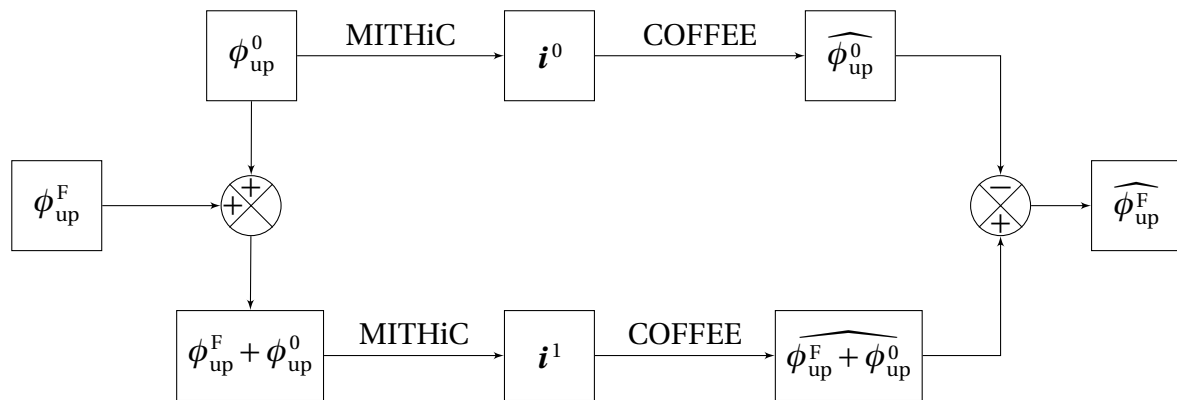


FIGURE 5.5 – Stratégie de validation de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence.

## 5.2 Étalonnages

### 5.2.1 Alignement et centrage

Une partie du travail a consisté à vérifier l’alignement du banc. En particulier, il a fallu vérifier quelle zone du modulateur spatial de lumière correspondait à la pupille, et également aligner le coronographe. Pour l’alignement du modulateur spatial de lumière aux pupilles, j’ai tracé des séries de mires successives que j’ai fait afficher par le modulateur spatial de lumière, jusqu’à obtenir un centrage de la mire avec la pupille au pixel près, comme illustré sur la figure 5.6. Comme la pupille n’est pas alignée avec le centre du modulateur spatial de lumière, mais décalée par rapport à celui-ci, la mire est assez visiblement loin du centre du modulateur spatial de lumière. La croix marque le centre de la mire, mais c’est le cercle extérieur qui m’a servi de référence pour le centrage.

L’alignement de la pastille focale du coronographe, quant à lui, est fait en deux temps. Dans un premier temps, le masque focal est aligné grossièrement en utilisant la mire visible sur les bords de l’image de droite de la figure 5.4. Dans un deuxième temps, la pastille est alignée finement en déplaçant petit à petit le masque focal jusqu’à obtenir la meilleure extinction du faisceau.

### 5.2.2 Étalonnage des commandes du modulateur spatial de lumière

Le modulateur spatial de lumière est utilisé pour introduire la phase  $\phi_{up}^F$  à mesurer de manière différentielle. Il est également utilisé pour introduire une défocalisation, qui sert de phase de diversité.

J’ai décidé d’introduire une phase asymétrique comportant des hautes fréquences, et j’ai donc utilisé une forme de F, d’où la notation  $\phi_{up}^F$ . Pour vérifier que la phase  $\phi_{up}^F$  introduite est bien celle voulue, j’ai là encore utilisé l’imagerie de pupille. La commande du modulateur spatial de lumière et l’image de pupille correspondante sont visibles sur la figure 5.7. On peut remarquer au passage que l’orientation des images pupilles correspond à la convention d’orientation des images sur le modulateur spatial de lumière.

Par ailleurs, il faut acquérir des images de diversité pour avoir des données utilisables par COFFEE. Il a donc fallu vérifier la qualité de la défocalisation introduite par le modulateur spatial de lumière, l’amplitude de celle-ci, et la linéarité de la réponse. Pour cela, nous avons remplacé la voie ZELDA de MITHiC par un analyseur de surface d’onde HASO d’Imagine Optic. L’aberration vue par le HASO, ainsi que sa décomposition de Zernike, sont présentées sur la



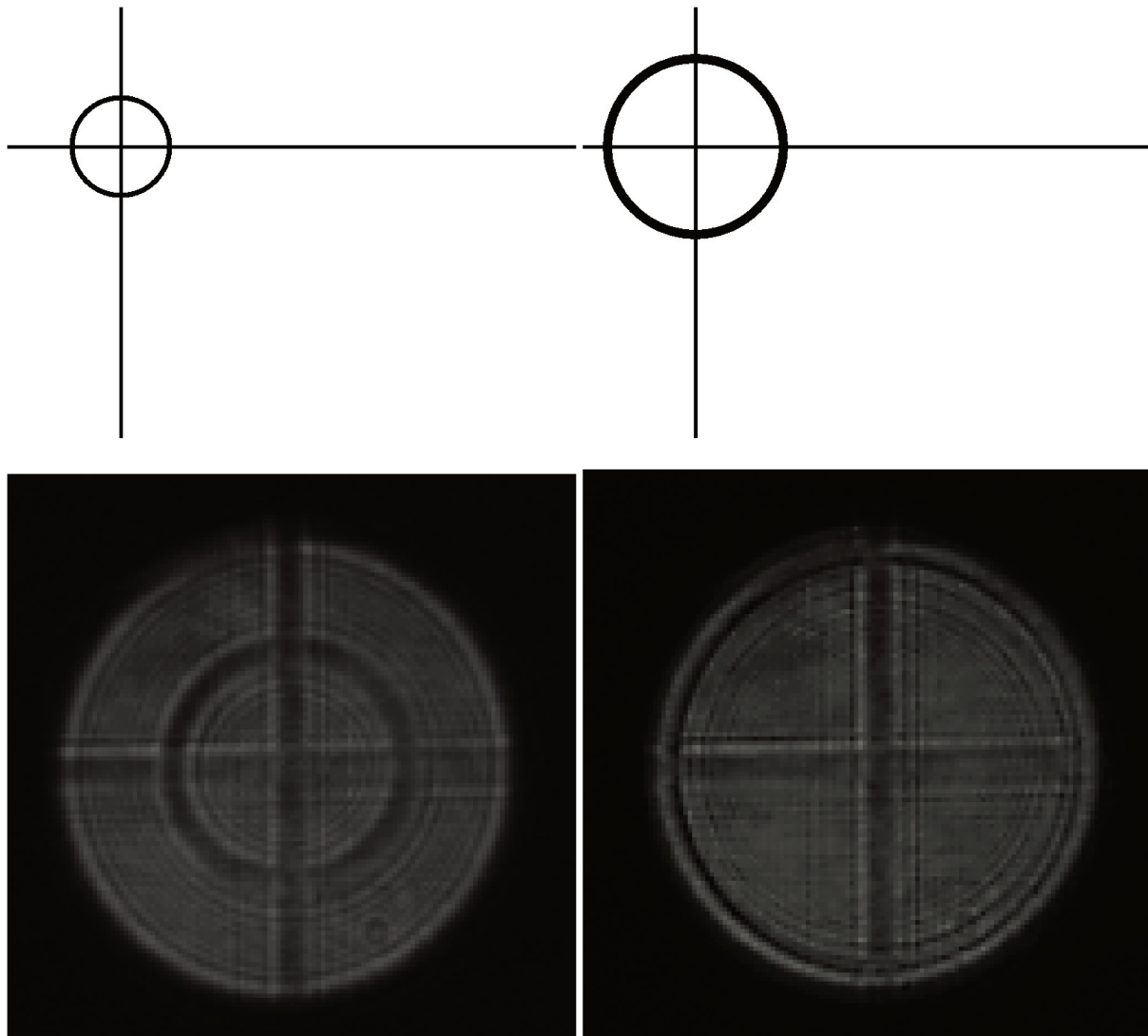


FIGURE 5.6 – Alignement d’une mire sur le modulateur spatial de lumière avec la pupille d’entrée. En haut à gauche : commande de mire envoyée au modulateur spatial de lumière utilisée pour le centrage grossier de la pupille. En bas à gauche : image de pupille correspondante. En haut à droite : commande de mire envoyée au modulateur spatial de lumière pour le centrage fin au pixel près de la pupille. En bas à droite : image de pupille correspondante.

figure 5.8. Sur une aberration totale de 196 nanomètres vue par le HASO (hors basculement), le mode dominant est la défocalisation avec un écart-type de 195 nanomètres — il s’agit donc bien d’une défocalisation de très bonne qualité.

La figure 5.9 présente l’amplitude de la défocalisation mesurée par le HASO en fonction de l’amplitude de la consigne de défocalisation donnée au modulateur spatial de lumière. On constate une excellente linéarité de la réponse, avec un coefficient de corrélation linéaire de 0,994.

### 5.2.3 Échantillonnage

Une information importante pour le traitement des images est de connaître l’échantillonnage des images sur le détecteur. Pour ce faire, j’ai enregistré une fonction d’étalement du point non-coronographique sur MITHiC, et j’ai représenté la moyenne circulaire du module de sa transformée de Fourier. Elles sont représentées sur la figure 5.10. L’image, carrée, fait



FIGURE 5.7 – Gauche : commande de phase en forme de F du modulateur spatial de lumière. Droite : imagerie de pupille correspondante.

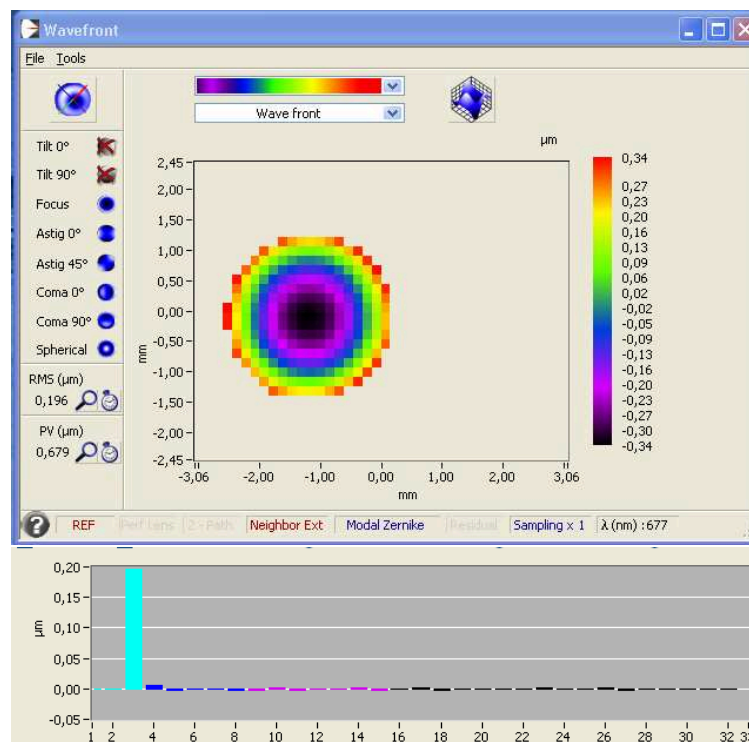


FIGURE 5.8 – En haut : aberration vue par le HASO quand une commande de pure défocalisation est appliquée au modulateur spatial de lumière. En bas : projection de cette aberration sur les 32 premiers modes de Zernike.

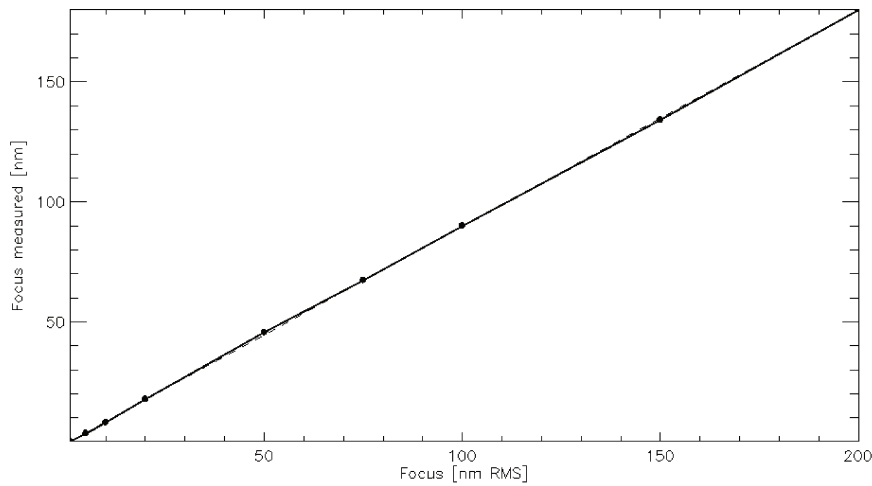


FIGURE 5.9 – Linéarité de la réponse du modulateur spatial de lumière à une commande de défocalisation

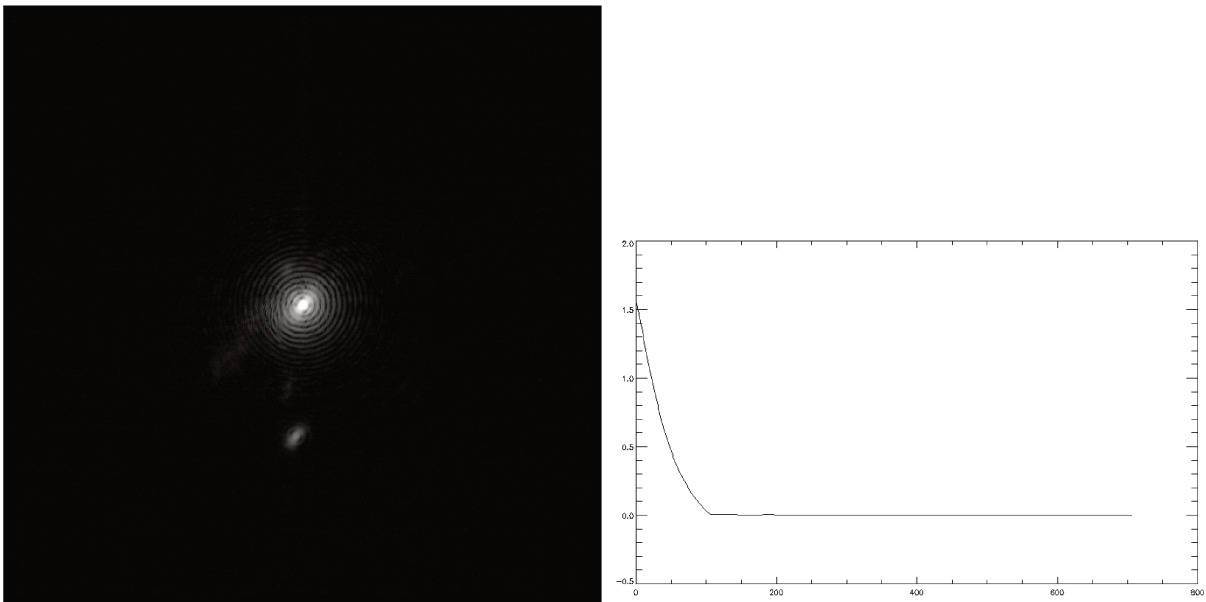


FIGURE 5.10 – Gauche : fonction d'étalement du point du banc. On remarque que le fantôme introduit par le cube est déjà très visible. Droite : moyenne circulaire de la fonction de transfert de modulation.

mille pixels de côté. La coupure de la fonction de transfert est au pixel numéro 107. Le facteur d'échantillonnage, défini comme le rapport de la fréquence d'échantillonnage à la fréquence de coupure optique du système, est donc donné par

$$\text{échantillonnage} = \frac{1000}{107 \pm 1} \quad (5.1)$$

$$\text{échantillonnage} = 9,43 \pm 0,1. \quad (5.2)$$

Afin d'éviter des temps de calcul très long, j'ai sous-échantillonné les images en plan focal d'un facteur 4. L'échantillonnage résultant étant supérieur à 2, la condition de Shannon reste respectée et les traitements sont plus rapides, sans perte d'information dans la reconstruction.

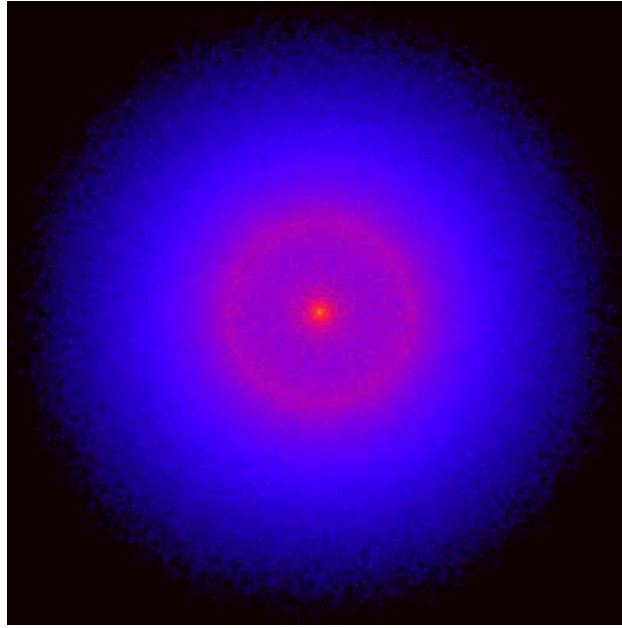


FIGURE 5.11 – Fonction d'étalement du point atmosphérique,  $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}}]$ , correspondant à la bande SPHERE des écrans de phase sur MITHiC.

#### 5.2.4 Rapport de Lyot

Le modèle de formation d'image dépend également du rapport de Lyot, c'est à dire de la taille entre le diaphragme de Lyot et de la pupille d'entrée. J'ai donc, comme pour la détermination de l'échantillonnage, acquis une fonction d'étalement du point, mais cette fois-ci avec le diaphragme de Lyot dans le train optique. En traçant la fonction de transfert de modulation, j'ai trouvé une fréquence de coupure entre les pixels 99 et 100. Comme le rapport des diamètres des pupilles est proportionnel au rapport des fréquences de coupures, le rapport de Lyot est

$$r_L = \frac{99,5 \pm 0,5}{107 \pm 1} \quad (5.3)$$

$$r_L = 0,93 \pm 0,01. \quad (5.4)$$

#### 5.2.5 Bruit de détecteur

D'après [Paul *et al.*, 2014a], le bruit électronique théorique du détecteur est d'écart-type un électron. Cependant, la description du détecteur par le constructeur, [Photometrics, 2014], donne seulement un écart-type inférieur à 5 électrons. Un calcul de la variance sur une pile de 400 images prises avec le cache du détecteur en place, lui, donne un écart-type de 1,6 électrons. C'est cette valeur, supposée uniforme, que j'utilise dans la suite.

#### 5.2.6 Fonction de structure de phase

Il faut connaître la fonction de structure de phase turbulente,  $D_{\phi_t}$ , pour reconstruire l'aberration de phase à partir des images. Pour estimer empiriquement la fonction de structure de phase, j'ai suivi la définition de  $D_{\phi_t}$  donnée par l'équation 3.1. La turbulence instantanée post optique adaptative est donnée directement par la bande SPHERE de l'écran de phase tournant, dont une portion est visible sur la figure 5.3. J'utilise alors différentes réalisations de phase directement sur cet écran pour calculer  $D_{\phi_t}$ . La fonction d'étalement du point atmosphérique correspondante,  $|\mathcal{F}[\exp(-D_{\phi_t}/2)]|$ , est représentée sur la figure 5.11.

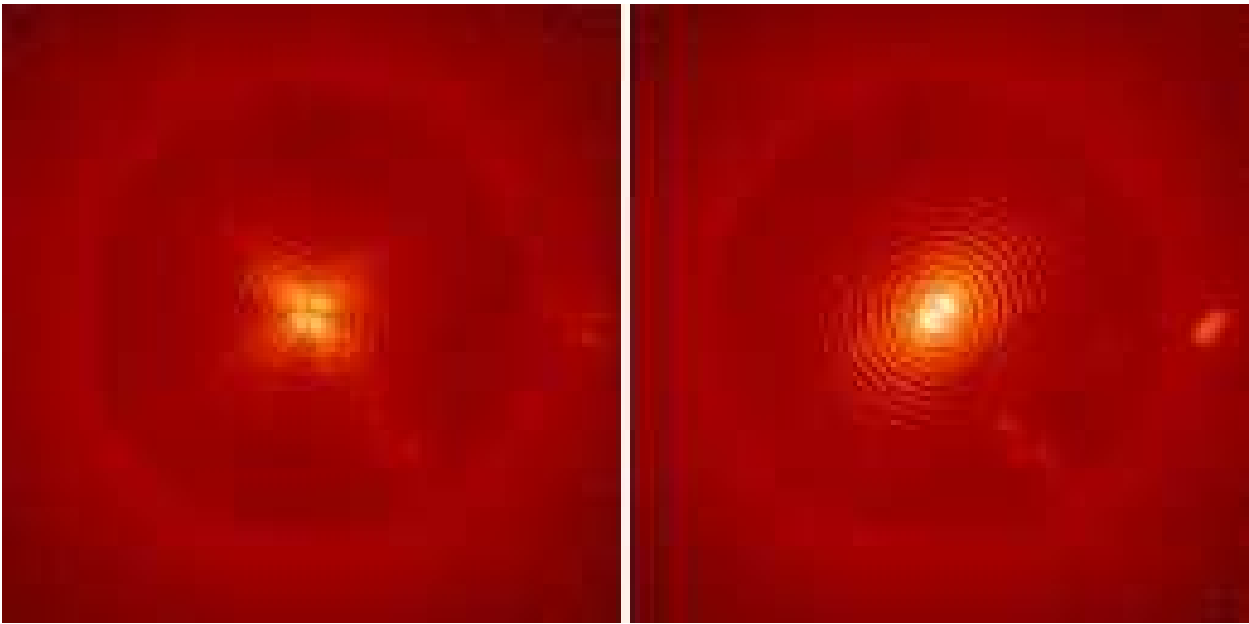


FIGURE 5.12 – Images expérimentales coronographiques focalisée et de diversité (75 nm de défocalisation) de référence utilisées pour la reconstruction.

## 5.3 Mesure de la surface d'onde de référence

### 5.3.1 Données

Le coronographe est mis en place, le simulateur de turbulence est en marche, et la source est allumée. Le modulateur spatial de lumière suit une consigne de mise à plat; l'aberration de phase résultante sur le banc est notée  $\phi_{\text{up}}^0$  sur la figure 5.5. Une pile de 400 images est enregistrée. Chaque exposition dure trente-cinq millisecondes afin de ne pas saturer le détecteur, avec un délai de vingt millisecondes entre chaque pose. La moyenne de cette pile est appelée la donnée brute moyennée.

La source est ensuite éteinte, et une pile de 400 images est enregistrée dans les mêmes conditions. La médiane de cette pile est appelée le fond.

Le fond est soustrait à la donnée brute moyennée, et l'image résultante recadrée et sous-échantillonnée d'un facteur quatre, notée  $i_{\text{foc}}^0$ , servira de donnée d'entrée à COFFEE.

Toute cette procédure est ensuite répétée en appliquant au modulateur spatial de lumière une consigne de défocalisation. L'image de diversité résultante, notée  $i_{\text{div}}^0$ , servira également de donnée d'entrée à COFFEE.

Les images  $i_{\text{foc}}^0$  et  $i_{\text{div}=75\text{nm}}^0$  sont présentées sur la figure 5.12. Ensemble, elles constituent la donnée notée  $i^0$  sur la figure 5.5.

### 5.3.2 Reconstruction

En utilisant les données d'entrée et les paramètres étalonnés dans la section précédente, j'ai reconstruit grâce à COFFEE les aberrations en amont du coronographe, ce qui donnera une estimation de la phase de référence  $\phi_{\text{up}}^0$ . Le modèle synthétisé par COFFEE à partir des données réelles est présenté sur la figure 5.13. La phase reconstruite  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^0$  est présentée sur la figure 5.14.

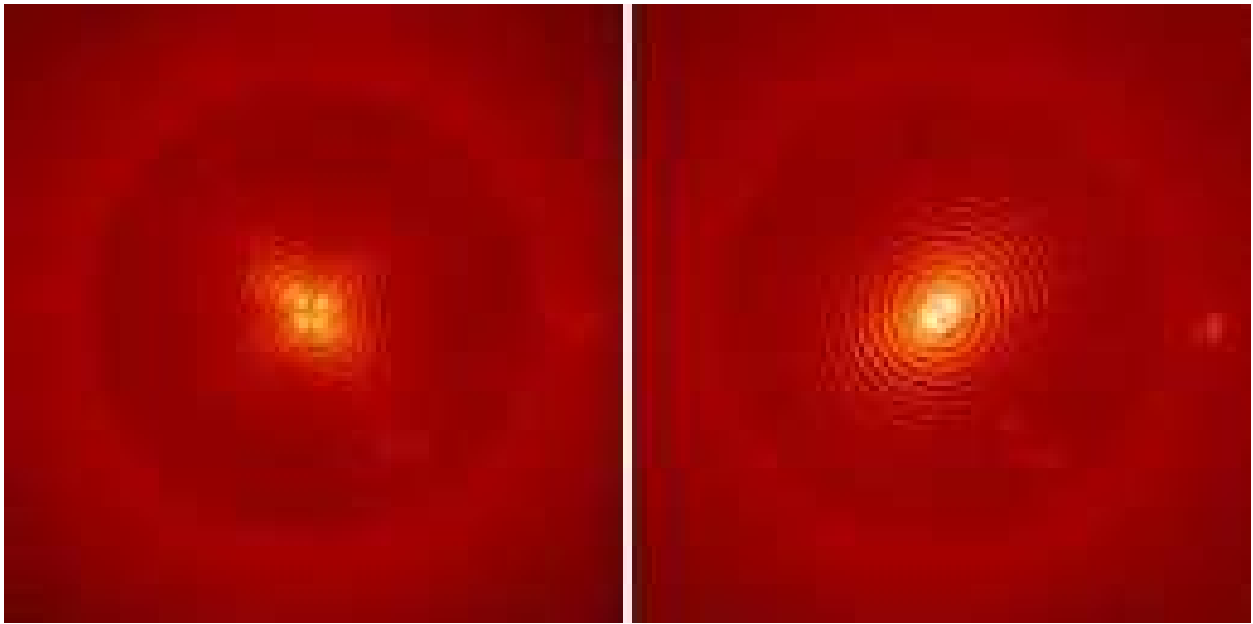


FIGURE 5.13 – Images de synthèse créées par COFFEE qui minimisent le critère  $\mathcal{J}$  pour les données présentées sur la figure 5.12.

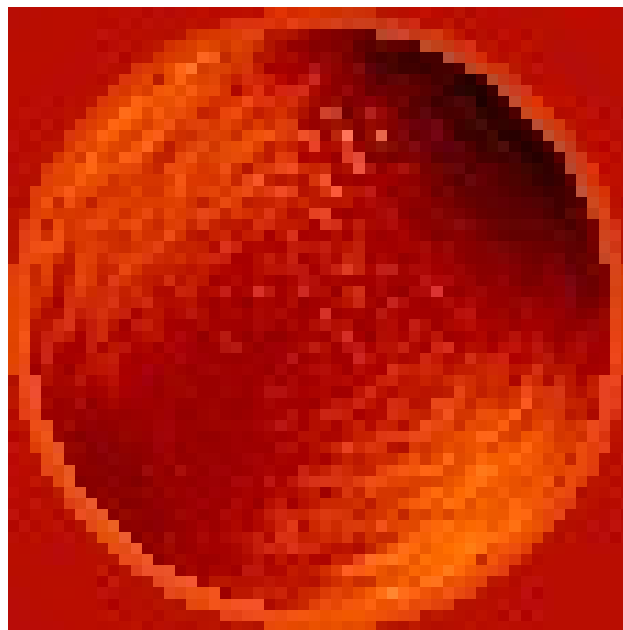


FIGURE 5.14 – Estimée de la phase de référence,  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^0$ .

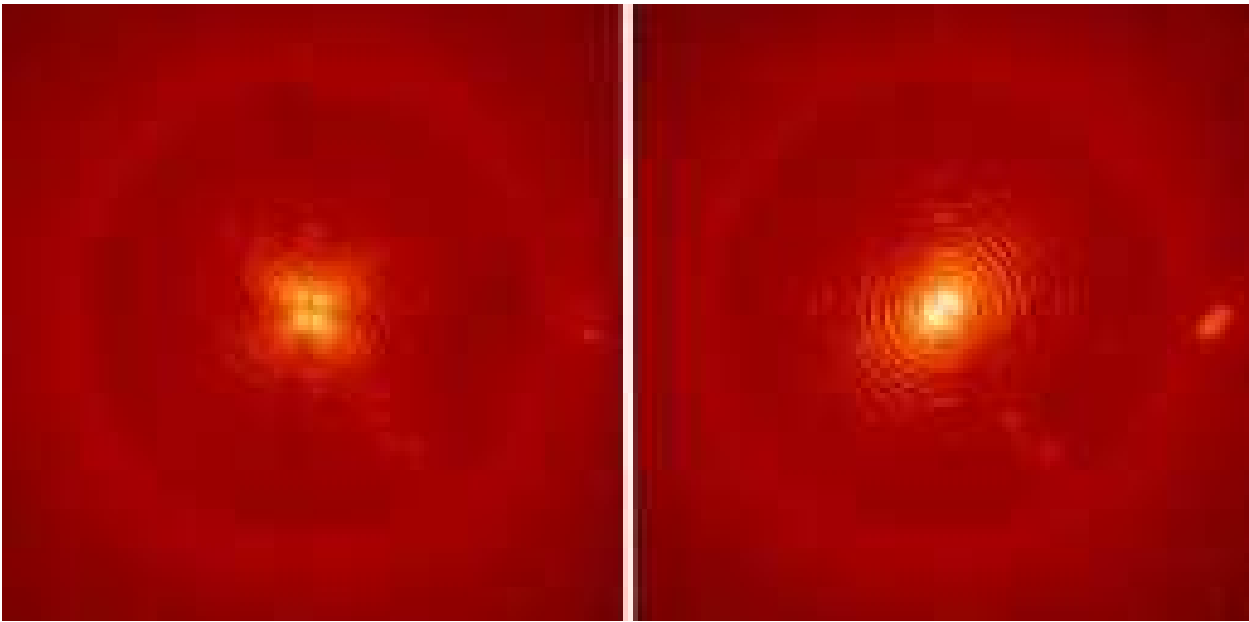


FIGURE 5.15 – Image focalisée et image de diversité (75 nm de défocalisation) engendrées par l’aberration en forme de F et utilisées pour la reconstruction.

## 5.4 Mesure d’une phase haute fréquence

### 5.4.1 Données

Une fois la phase de référence évaluée, la même procédure d’acquisition que celle de  $i^0$ , détaillée dans la sous-section 5.3.1, est appliquée, mais avec une consigne du miroir déformable qui ajoute à la mise à plat une forme de F représentée sur la figure 5.7. L’aberration de phase résultante sur le banc est notée  $\phi_{\text{up}}^0 + \phi_{\text{up}}^F$  sur la figure 5.5. La pile de données est notée  $i^1$  sur cette même figure. L’image focalisée et l’image de diversité qui constituent cette pile de données sont représentées sur la figure 5.15.

### 5.4.2 Reconstruction

De la même manière que précédemment, j’ai utilisé les données d’entrée et les paramètres étalonnés dans la section précédente pour reconstruire les aberrations en amont du coronographe. Le modèle synthétisé par COFFEE à partir des données réelles est présenté sur la figure 5.13. La phase reconstruite  $\widehat{\phi_{\text{up}}^F + \phi_{\text{up}}^0}$  est présentée sur la figure 5.17. Elle est de taille  $52 \times 52$  pixels. Elle est obtenue à partir d’images de taille  $128 \times 128$ , elles-mêmes obtenues par rééchantillonnage d’images de  $512 \times 512$ . Le fantôme est caché par un masque où la pondération des pixels dans les termes d’attache aux données est rendue très faible. Malheureusement, la solution trouvée par COFFEE utilise cette zone de plusieurs pixels de diamètre comme degré de liberté, ce qui explique peut-être en partie l’aberration haute fréquence. Les *a priori* utilisés sont un écart-type de 20 nm pour l’aberration de phase en amont du coronographe et 5 nm d’écart-type pour l’aberration en aval du coronographe, qui est principalement constituée d’un basculement. L’aberration d’amplitude n’est pas considérée. La phase reconstruite est d’écart-type 28 nm. La mauvaise reconstruction sur les bords correspond à la zone cachée par le diaphragme de Lyot, dont la reconstruction est toujours plus difficile. La structure générale, qui ressemble à un astigmatisme, est celle de l’estimée de la phase de référence,  $\widehat{\phi_{\text{up}}^0}$ ; et on devine une forme de F par-dessus.

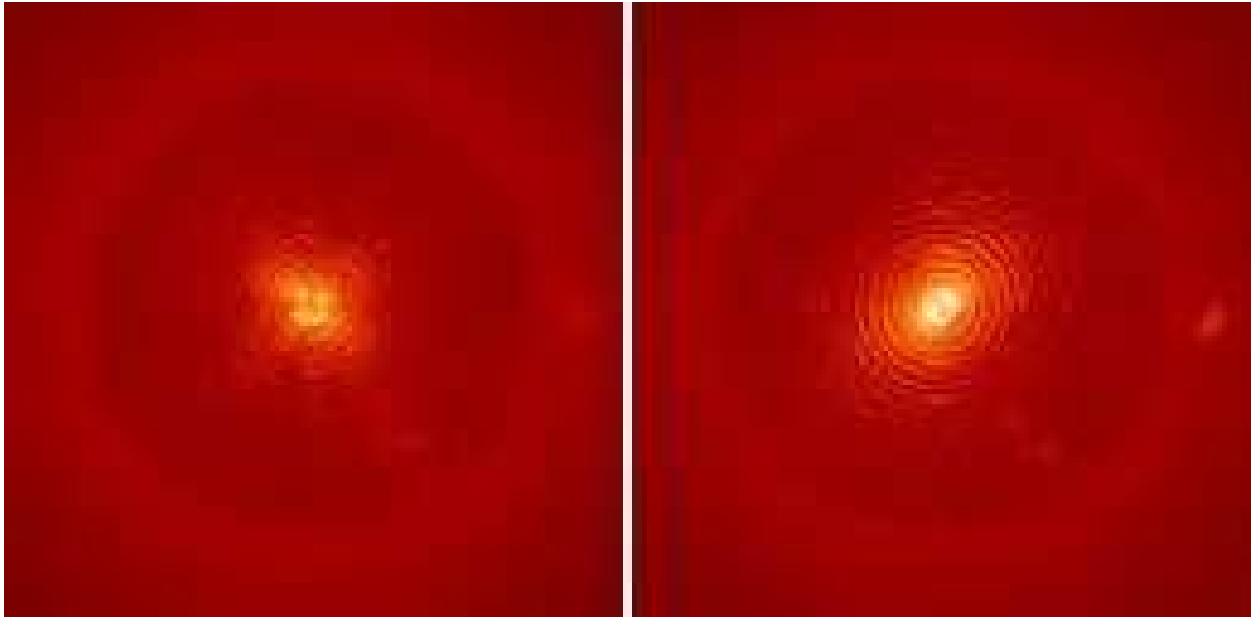


FIGURE 5.16 – Images de synthèse créées par COFFEE qui minimisent le critère  $\mathcal{J}$  pour les données présentées sur la figure 5.15.

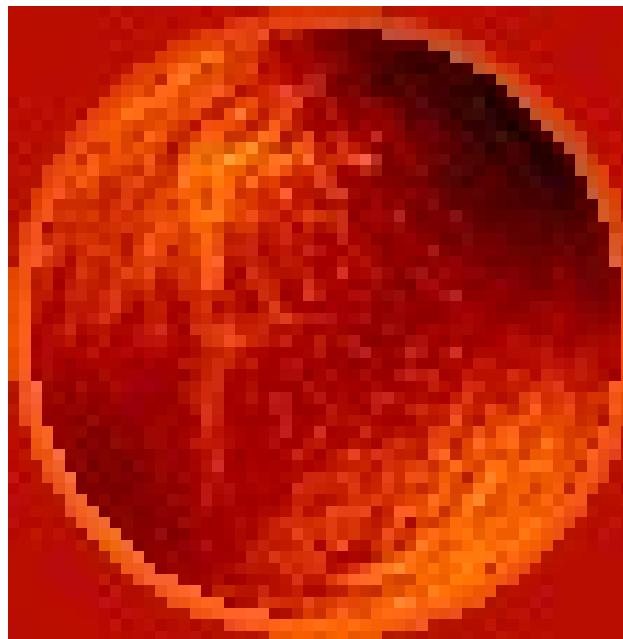


FIGURE 5.17 – Estimée de la phase haute fréquence,  $\widehat{\phi_{\text{up}}^{\text{F}}} + \widehat{\phi_{\text{up}}^{\text{O}}}$ .



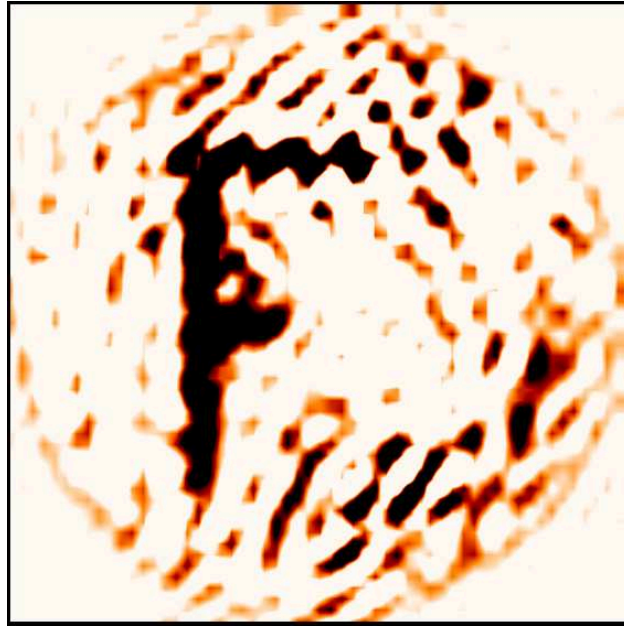


FIGURE 5.18 – Estimée de la consigne,  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^{\text{F}}$ , d'écart-type 13 nm. Couleurs inversées.

### 5.4.3 Reconstruction différentielle

En faisant la différence entre  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^{\text{F}} + \phi_{\text{up}}^0$  et  $\phi_{\text{up}}^0$ , on obtient finalement  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^{\text{F}}$ , qui est présenté sur la figure 5.18. On reconnaît bien la forme de F initialement introduite. Cette phase différentielle a un écart-type de treize nanomètres, et la commande de phase F introduite par le SLM a un écart-type de onze nanomètres. Le fond aléatoire à haute fréquence est d'autant plus élevé qu'il correspond à la somme des fonds de deux estimées, où les sommes de bruits s'ajoutent.

## Conclusion

Cette reconstruction constitue une démonstration expérimentale de la capacité de la diversité de phase coronographique à reconstruire des aberrations de l'ordre de la dizaine de nanomètres à travers un coronographe et une turbulence atmosphérique résiduelle typique de SPHERE. Conjointement avec les études numériques réalisées dans le chapitre 4, elle ouvre la voie à la correction effective des aberrations quasi-statiques de l'instrument SPHERE directement sur le ciel. D'ailleurs, Arthur Vigan et Mamadou N'Diaye ont récemment acquis des données dans le cadre d'une campagne de mesures sur SPHERE. Les données ZELDA et COFFEE prises sur le ciel nous permettront de comparer les deux analyses.

## **Troisième partie**

# **Analyse et contrôle de surface d'onde coronographique pour l'imagerie à très haut contraste**



« My advice to those who wish to learn the art of scientific prophesy is not to rely on abstract reason, but to decipher the secret language of Nature from Nature's documents: the facts of experience. »

Max Born

## Chapitre 6

# Validation expérimentale de la reconstruction conjointe de phase et d'amplitude par diversité de phase coronographique



LES TÉLESCOPES SPATIAUX bénéficient d'une grande stabilité et sont affranchis des effets de la turbulence. On peut donc espérer atteindre de très hauts contrastes. Dans de tels régimes, on ne peut pas se contenter de mesurer et de corriger les défauts de phase : il faut maîtriser conjointement la phase et l'amplitude des aberrations, ce que j'appellerai dans la suite le champ complexe d'aberrations, ou simplement l'aberration complexe. Le formalisme de COFFEE a été étendu à la mesure de champs complexes par [Paul, 2014]. L'article [Herscovici-Schiller *et al.*, 2018b], reproduit dans ce chapitre, présente mes contributions à l'estimation de champ complexe en présence d'un coronographe.

## 6.1 Présentation de l'article

### 6.1.1 Buts de l'étude

Cette étude visait à valider expérimentalement l'extension de la diversité de phase coronographique à la mesure de champs complexes. Cette validation comporte trois points principaux. De plus, l'article qui la présente introduit deux apports méthodologiques.

Le premier point est la validation de la mesure par diversité de phase coronographique d'aberrations d'amplitude maîtrisées.

Le deuxième point est la validation de la mesure conjointe par diversité de phase coronographique d'aberrations de phase et d'amplitude maîtrisées. Un fort enjeu de cette mesure est de vérifier la capacité de la méthode à séparer l'influence de l'aberration de phase de l'influence l'aberration d'amplitude, ce qui n'a rien d'évident *a priori*.

Le troisième point est la comparaison d'une mesure de champ complexe réalisée par diversité de phase coronographique avec la mesure du même champ complexe réalisée par

détection par auto-interférence (*self-coherent camera*, ou SCC). C'est à ma connaissance la première comparaison directe d'analyseurs de surface d'onde post-coronographique.

Cette étude a aussi été la première utilisation de la diversité de phase coronographique pour estimer les aberrations en présence d'un coronographe à quatre quadrants, ce qui a été l'occasion de me rendre compte expérimentalement que le coronographe à quatre quadrants filtre certaines aberrations. J'ai donc développé une prise en compte originale de ce filtrage au moyen d'une régularisation spécialement adaptée. La première annexe de l'article étudie l'adaptation de la méthode à ce type de coronographe.

À l'occasion du traitement des données, je me suis penché sur l'apparition de taches inattendues quand un miroir déformable qui dispose d'un nombre fini d'éléments tente de produire une sinusoïde. J'ai développé une explication de l'origine de ces taches dans une deuxième annexe. Il s'agit d'un effet de discrétisation comparable au repliement, mais fondamentalement différent. Le repliement de spectre est un problème qui peut apparaître quand une fonction continue est discrétisée. Ici, c'est l'inverse qui se produit : des artefacts apparaissent parce que la diffraction de la lumière forme la transformée de Fourier continue d'une fonction constante par morceau, la surface du miroir déformable.

### 6.1.2 Contexte et moyen de l'étude

La validation de l'estimation conjointe de phase et d'amplitude par COFFEE a été réalisée dans le cadre d'une collaboration entre l'ONERA et le laboratoire d'études spatiales et d'instrumentation en astrophysique (LESIA) de l'Observatoire de Meudon ; cette collaboration est soutenue par le CNES. Concrètement, les expériences ont été réalisées sur le banc très haute dynamique version 2 (THD), qui est développé depuis plusieurs années sous la direction de Pierre Baudoz et Raphaël Galicher. Il s'agit d'un banc complexe, équipé entre autres d'un coronographe à quatre quadrants. C'est le banc d'optique qui atteint les plus hauts contrastes (de l'ordre de  $10^8$ ) en Europe.

Le protocole expérimental décrit dans l'article a été mis au point par Laurent Mugnier, Jean-François Sauvage, Raphaël Galicher, Pierre Baudoz et moi-même. J'ai participé à l'acquisition de toutes les données. Selon les jours, Pierre Baudoz ou Raphaël Galicher contrôlait les consignes et les acquisitions du banc THD. Laurent Mugnier a également participé à la réalisation de l'expérience. J'ai réalisé le traitement des données COFFEE. Pierre Baudoz a réalisé le traitement des données SCC.

### 6.1.3 Plan de l'article

La première section de l'article est une introduction.

La deuxième section présente le formalisme de COFFEE complexe.

La troisième section présente les calibrations nécessaires, ainsi que la stratégie générale de mesure. Le principe de l'expérience est de prouver qu'il est possible de reconstruire un champ complexe d'aberration. Pour cela, on veut introduire un champ d'aberrations connu, et le reconstruire. Malheureusement, le banc THD, malgré son excellente qualité, est affecté d'aberrations intrinsèques inconnues, qui s'ajoutent au champ d'aberrations introduit. Pour valider la méthode, nous avons donc fait une mesure différentielle. Elle consiste à mesurer les aberrations intrinsèques du banc, puis à faire une mesure en ayant ajouté un champ d'aberrations connu dominé par l'amplitude, enfin à soustraire la première mesure à la seconde.

Dans la quatrième section, nous avons introduit une aberration d'amplitude. Nous avons vérifié que la mesure différentielle de l'aberration correspond au champ introduit, ce qui valide la méthode. Dans la cinquième section, enfin, nous avons procédé à une mesure différentielle d'un champ qui mêle aberrations de phase et d'amplitude. Nous avons également réalisé la

première intercomparaison (à notre connaissance) entre deux analyseurs de surface d'onde coronographiques, à savoir COFFEE et la SCC (présentés dans le chapitre 1).

La première annexe présente le problème des modes filtrés par le coronographe à quatre quadrants, et introduit une régularisation adaptée.

La deuxième annexe, enfin, étudie l'apparition de taches secondaires due au nombre fini d'actionneurs du miroir déformable.

## **6.2 Experimental validation of joint phase and amplitude wave-front sensing with coronagraphic phase diversity for high-contrast imaging (A&A, 2018)**

Reproduced with permission from *Astronomy & Astrophysics*, Copyright ESO.

# Experimental validation of joint phase and amplitude wave-front sensing with coronagraphic phase diversity for high-contrast imaging

O. Herscovici-Schiller<sup>1</sup>, L. M. Mugnier<sup>1</sup>, P. Baudoz<sup>2</sup>, R. Galicher<sup>2</sup>, J.-F. Sauvage<sup>1,3</sup>, and B. Paul<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> ONERA – The French Aerospace Lab, 92322 Châtillon, France  
 e-mail: [olivier.herscovici@onera.fr](mailto:olivier.herscovici@onera.fr)

<sup>2</sup> LESIA, CNRS, Observatoire de Paris, Université Paris Diderot, Université Pierre et Marie Curie, 5 place Jules Janssen, 92190 Meudon, France

<sup>3</sup> Laboratoire d'Astrophysique de Marseille UMR 7326, Aix-Marseille Université, CNRS, 13388 Marseille, France

Received 8 December 2017 / Accepted 28 February 2018

## ABSTRACT

**Context.** The next generation of space-borne instruments dedicated to the direct detection of exoplanets requires unprecedented levels of wavefront control precision. Coronagraphic wavefront sensing techniques for these instruments must measure both the phase and amplitude of the optical aberrations using the scientific camera as a wavefront sensor.

**Aims.** In this paper, we develop an extension of coronagraphic phase diversity to the estimation of the complex electric field, that is, the joint estimation of phase and amplitude.

**Methods.** We introduced the formalism for complex coronagraphic phase diversity. We have demonstrated experimentally on the Très Haute Dynamique testbed at the Observatoire de Paris that it is possible to reconstruct phase and amplitude aberrations with a subnanometric precision using coronagraphic phase diversity. Finally, we have performed the first comparison between the complex wavefront estimated using coronagraphic phase diversity (which relies on time-modulation of the speckle pattern) and the one reconstructed by the self-coherent camera (which relies on the spatial modulation of the speckle pattern).

**Results.** We demonstrate that coronagraphic phase diversity retrieves complex wavefront with subnanometric precision with a good agreement with the reconstruction performed using the self-coherent camera.

**Conclusions.** This result paves the way to coronagraphic phase diversity as a coronagraphic wave-front sensor candidate for very high contrast space missions.

**Key words.** instrumentation: high angular resolution – instrumentation: adaptive optics – techniques: high angular resolution – techniques: image processing

## 1. Introduction

One main science goal of future large space telescopes such as the Large UV/Optical/Infrared Surveyor (LUVOR) or the Habitable Exoplanet Imaging Mission (HabEx) is exoplanet imaging and characterization. Direct imaging of exo-Earths represents a challenge on the instrumental point a view. A coronagraph (or an instrument that serves the same purpose, such as a starshade) is needed to address the immense contrast between an Earth-like planet and its star: for example, the flux ratio between Earth and Sun is about  $10^{-10}$  in the near infra-red. Besides, any aberration in the optical system causes light leakage in the coronagraph, which in turn generates speckles in the scientific images, thus limiting the detection level. Consequently, optical aberrations must be measured and corrected in order to avoid any false detection or biased characterization. To do so, both phase and amplitude aberrations must be measured and compensated. Moreover, the measurement must be performed from the science image to avoid non-common path aberrations between the wavefront sensor and the science camera. In this article, we describe the extension of COFFEE, the coronagraphic phase diversity, to the estimation of both the phase and the amplitude defects of the

light beam that propagates in a coronagraphic system. In addition, we demonstrate this capacity on experimental high contrast images.

In Sect. 2, we present the formalism of COFFEE, extended to take into account amplitude aberrations in the estimation process. Then, we present the experimental validation of this technique. In Sect. 3, we present the THD2 (Banc Très Haute Dynamique version 2) experimental testbed (see [Baudoz et al. 2017](#)), which reaches very high contrasts and allows for accurate phase and amplitude aberration control. We also explain the protocol of the experiment. In Sect. 4, we present results on the estimation of a wave-front that is dominated by amplitude aberrations. Finally, in Sect. 5, we present the results of the retrieval of a wavefront containing both phase and amplitude aberrations.

## 2. Extension of COFFEE to amplitude estimation: formalism

### 2.1. Model of image formation

In this section, we describe how coronagraphic phase diversity can estimate amplitude aberrations. Phase diversity ([Gonsalves 1982](#); [Mugnier et al. 2006](#)) relies on a model of image formation. We have modeled an image of a point source

\* Baptiste Paul is now with Thales Alenia Space

whose flux is  $\alpha$ , in the presence of a constant background  $\beta$ , taken with a coronagraphic optical system whose response to an on-axis source is  $h_c$ , and a detector whose impulse response is  $h_{\text{det}}$  as

$$\mathbf{I}(x, y) = \alpha \times [h_{\text{det}} \star h_c](x, y) + \beta + n(x, y), \quad (1)$$

where  $n$  is the noise in the image, a subject we return to at the end of this subsection. We note that we consider the possibility that  $\alpha$  and  $\beta$  might change from one image to another.

Let us first detail the response of the optical system,  $h_c$ . We rely on Fourier optics to describe the propagation of light in the system. In order to keep the same orientation for all the planes, we describe propagation from a pupil plane to a focal plane by an inverse Fourier transform, and propagation from a focal plane to a pupil plane by a direct Fourier transform, as in Foo et al. (2005) or Herscovici-Schiller et al. (2017). The relevant parameters of the optical system are the (upstream) entrance pupil  $P_{\text{up}}$ , the (downstream) pupil of the Lyot stop  $P_{\text{do}}$ , and the focal-plane mask of the coronagraph  $\mathcal{M}$ . The parameters that we sought to retrieve are the complex aberration fields including phase and amplitude aberrations. We call  $\psi_{\text{up}}$  the complex aberration field upstream of the coronagraph, and  $\psi_{\text{do}}$  the complex aberration field downstream of the coronagraph.

A natural and usual expression for a complex aberration field of amplitude  $A$  and phase  $\phi$  is  $\psi = Ae^{i\phi}$ . However, in such a form, the amplitude aberration and the phase aberration play extremely asymmetrical roles. We wanted to avoid such an asymmetry because it might cause numeric difficulties while retrieving  $\psi$ . Indeed, in this form, the gradient of the complex aberration field with respect to phase and amplitude are

$$\frac{\partial Ae^{i\phi}}{\partial \phi} = iAe^{i\phi} \text{ and } \frac{\partial Ae^{i\phi}}{\partial A} = e^{i\phi},$$

which are likely not to be of the same order of magnitude, resulting in numerical convergence problems of minimizers. On the contrary, if the complex field is represented by two parameters that play symmetric roles, this difficulty is avoided (Védrenne et al. 2014). Here, we chose to represent the complex fields by introducing the log-amplitude  $\xi = \log(A)$ , resulting in  $\psi = \exp(i\phi + \xi)$ . With these conventions, the coronagraphic intensity distribution for an on-axis source is written

$$h_c[\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}, \xi_{\text{do}}] = \left| \mathcal{F}^{-1} \left\{ P_{\text{do}} e^{i\phi_{\text{do}} + \xi_{\text{do}}} \times \mathcal{F} \left[ \mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1} (P_{\text{up}} e^{i\phi_{\text{up}} + \xi_{\text{up}}}) \right] \right\} \right|^2. \quad (2)$$

Hereafter, we will suppose that  $\xi_{\text{do}} = 0$ , that is to say we suppose that there is no downstream amplitude aberration, or at least that the downstream amplitude is known and taken into account in  $P_{\text{do}}$ .

As for the noise  $n$ , it is the result of two main contributions. The first one source is the detector read-out noise, which is classically modeled as a spatially homogeneous random white Gaussian process for a charge-coupled device detector. The calibration of the detector read-out noise can be performed prior to the experiment. The second contribution is photon noise. It is modeled as a random Poisson process, and can be well-approximated by a nonhomogeneous Gaussian white noise. Since  $n$  is the sum of two Gaussian white noises, it is a nonhomogeneous Gaussian white noise.

## 2.2. COFFEE, a Bayesian maximum a posteriori estimator

COFFEE is an extension of phase diversity described in Paul et al. (2013). It relies on the same maximum a posteriori approach: it retrieves the unknown parameters by fitting an image model to experimental data, using knowledge on the statistics of the noise and a priori information on the unknown parameters.

It requires several images with a known introduced phase difference between them, in order to be able to determine the aberrations of the optical system unambiguously. While the classical phase diversity technique generally uses only two images, at least three images are necessary to retrieve both phase and amplitude aberrations in practice. This can be understood by the fact that more data are needed to reconstruct three maps ( $\phi_{\text{up}}$ ,  $\phi_{\text{do}}$  and  $\xi_{\text{up}}$ ) than two. This has been confirmed by similar works in a different context (Védrenne et al. 2014). Consequently, the experimental data that we take and process will always contain at least three images, differing only by a known phase diversity. Moreover, in the case of coronagraphic phase diversity, the diversity phases must be introduced upstream of the coronagraph.

We denote by  $\mathbf{I}_k$  the image taken with an introduced phase diversity  $\phi_{\text{div},k}$ . The index  $k$  refers to the choice of diversity phase. We have taken the convention that  $k = 0$  always denotes an image with no diversity. We denote by  $\mathbf{I}_k(x, y)$  the pixel of coordinates  $(x, y)$  of the image  $\mathbf{I}_k$ . For example, in the experimental part of this paper from Sects. 3 to 5, we use three different images – the index  $k$  ranges from 0 to 2; and the data are 360×360-pixel images – indexes  $x$  and  $y$  go from 1 to 360.

Considering the form of our image model (Eq. (1)) for each  $\mathbf{I}_k$ , the noiseless image model taken with diversity phase  $\phi_{\text{div},k}$  is

$$\mathbf{M}[\alpha, \beta, \phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}](k, x, y) = \alpha(k) \times \left\{ h_{\text{det}} \star h_c[\phi_{\text{up}} + \phi_{\text{div},k}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}] \right\} (x, y) + \beta(k). \quad (3)$$

Since  $n$  is a Gaussian white noise, the unknown parameters are the ones that minimize the following penalized least-squares criterion (Idier 2008):

$$J(\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}) = \sum_{(k,x,y)} \left| \frac{\mathbf{I}_k(x, y) - \mathbf{M}[\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}](k, x, y)}{\sigma_n(k, x, y)} \right|^2 + \mathcal{R}(\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}). \quad (4)$$

Here,  $\sigma_n$  is the map of standard deviation of the noise  $n$  and  $\mathcal{R}$  is a regularization term.

## 2.3. Regularization

The regularization term,  $\mathcal{R}$ , represents a priori information on the unknowns. These unknowns are numerous:  $\alpha, \beta, \phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}$ , and  $\phi_{\text{do}}$ . Both  $\alpha$  and  $\beta$  are scalars for each image, and there exists an analytic solution for them. The other unknowns are three maps of typically 40×40 elements – 40×40 because we aim to reconstruct aberration maps at a resolution better than the number of actuator on a 40×40 deformable mirror, using images sampled typically at the Shannon-Nyquist limit. There is no analytic solution for this problem. We used the VMLM-B method of Thiébaud (2002) to solve it numerically. Since the problem is not heavily over-determined, with typically 3×40×40+3×2=4806 unknowns versus typically 3×80×80=19200 noisy and partially redundant data points, the stability of the reconstruction can only be obtained by means of regularization.



We assumed that the energy spectrum densities of  $\phi_{\text{up}}$ ,  $\xi_{\text{up}}$  and  $\phi_{\text{do}}$  decrease as  $1/f^2$ , where  $f$  is the norm of the spatial frequency, which is a classic (Church 1988) and realistic assumption (Hugot et al. 2012). Hence,  $\mathcal{R}$  is written

$$\mathcal{R}(\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, \phi_{\text{do}}) = \frac{\|\nabla\phi_{\text{up}}\|^2}{2\sigma_{\nabla\phi_{\text{up}}}^2} + \frac{\|\nabla\xi_{\text{up}}\|^2}{2\sigma_{\nabla\xi_{\text{up}}}^2} + \frac{\|\nabla\phi_{\text{do}}\|^2}{2\sigma_{\nabla\phi_{\text{do}}}^2}. \quad (5)$$

The variances of  $\nabla\phi_{\text{up}}$ ,  $\nabla\xi_{\text{up}}$ , and  $\nabla\phi_{\text{do}}$  are denoted by  $\sigma_{\nabla\phi_{\text{up}}}^2$ ,  $\sigma_{\nabla\xi_{\text{up}}}^2$ , and  $\sigma_{\nabla\phi_{\text{do}}}^2$  respectively, where  $\nabla$  is the gradient with respect to the Cartesian space coordinates in the pupil plane. They are computed analytically from a priori information on the variances of  $\phi_{\text{up}}$ ,  $\xi_{\text{up}}$ , and  $\phi_{\text{do}}$ , as described in Paul et al. (2013).

#### 2.4. Distinctive features of COFFEE

Fundamentally, COFFEE relies on a physical, nonlinear model of image formation. This is its most distinctive feature, since other methods such as speckle nulling (Trauger et al. 2004), the self-coherent camera (Galicher et al. 2008), the electric field conjugation (Riggs et al. 2016) or the wavefront sensing with random DM probes (Pluzhnik et al. 2017) rely on a linear or linearized model of the relationship between the aberrations and the image. This yields specific advantages and disadvantages.

On the one hand, among the advantages of the COFFEE approach is the fact that the quality of the COFFEE reconstruction is not affected by the measured wave-front aberrations not being very small compared to the observation wavelength. COFFEE is therefore not limited to the estimation of small phase aberrations. This point is particularly helpful when initiating the Dark Hole (Malbet et al. 1995) process (with possibly large static aberrations). Moreover, COFFEE does not require updating of a calibration matrix during the Dark Hole process, contrarily to techniques such as electric field conjugation. Other advantages are that COFFEE needs no hardware modification to the coronagraphic system; and COFFEE is in theory not restricted to a monochromatic wavelength, even if computing cost would be higher if a wide-band image were to be modeled.

On the other hand, the main current limitation of COFFEE is that it needs an accurate model of the instrument – essentially in terms of image sampling, characteristics of the coronagraph, pupil geometry and wavelength – in order to make precise estimates. Any model error results in error in the estimates. Also, we note that it currently takes about a minute to obtain a COFFEE estimate. Now that we have detailed the formalism of the method, we move on to its experimental validation.

### 3. Strategy of experimental validation

#### 3.1. The THD2 testbed

We validate the joint phase and amplitude retrieval on the THD2 bench. This very high contrast testbed at LÉSIA (Observatoire de Paris) is described in detail by Baudoz et al. (2017), and represented in Fig. 1. Its very high quality enables one to routinely reach contrasts down to  $2 \times 10^{-8}$ .

For the sake of our experiments; let us mention here that it is equipped with:

- a monochromatic light source of wavelength 783.25 nm that feeds the bench through a single mode fiber, in focal plane 1, see Fig 1;
- a photometer for the precise normalization of the light flux, integrated in the injection system;

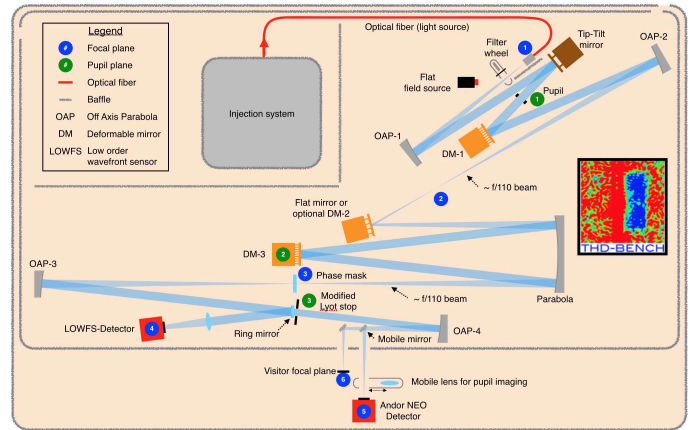


Fig. 1. Schematic representation of the THD2 bench.

- an out-of-pupil deformable mirror, DM–1, hereafter called “amplitude deformable mirror”;
- a pupil-plane deformable mirror, DM–3, hereafter called “phase deformable mirror”;
- a four-quadrant phase mask coronagraph (Rouan et al. 2000), with the focal mask in focal plane 3 and the Lyot stop in pupil plane 3;
- a CMOS camera in focal plane 6, which can also be used for pupil plane imaging thanks to a movable lens.

We note that, although we call DM–1 the “amplitude mirror” for the sake of simplicity, a deformation of this mirror introduces both amplitude and phase for most spatial frequencies.

#### 3.2. Model calibration

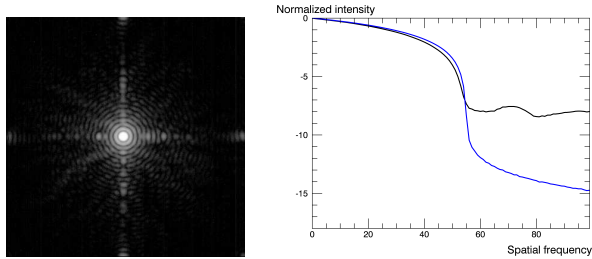
All the parameters of the model must be calibrated precisely. Any calibration error has an impact on the quality of the reconstruction of the aberrations. Here, we detail the calibrations performed on the THD2.

*Calibration of the pixel response.* The pixel transfer function is simply modeled here by a top hat window function, parameterized by the size of the pixel. Calibrating the pixel size corresponds to calibrating the sampling factor of the detector with respect to the size of the diffraction.

Numerically, it determines  $h_{\text{det}}$  in Eq. (3). To determine it, we record a noncoronagraphic image,  $i_{\text{nc}}$ . The corresponding transfer function,  $|\mathcal{F}(i_{\text{nc}})|^2$ , reaches zero at a cut-off frequency  $f_{\text{cut}}$  and is sampled up to a maximum frequency  $f_{\text{Nyquist}}$ . The sampling factor  $s$  is simply the ratio

$$s = 2 \frac{f_{\text{Nyquist}}}{f_{\text{cut}}}. \quad (6)$$

The experimental  $400 \times 400$  image and the corresponding modulation transfer function are displayed in Fig. 2. In our case,  $f_{\text{cut}} = 56 \pm 0.3$  and  $f_{\text{Nyquist}} = 200$ , which yields a sampling factor  $s = 7.14 \pm 0.04$ . The cross shape, with residuals on the axes, is due to the use of a four-quadrant phase mask coronagraph: this noncoronagraphic image has been obtained after the deformable mirrors were flattened using the self-coherent camera (Mazoyer et al. 2013). Since the four-quadrant phase mask is indifferent to aberrations that create speckles located on the axes, the correction cannot be performed on the axes; when the four-quadrant phase mask is removed, the on-axes speckles are no longer filtered.



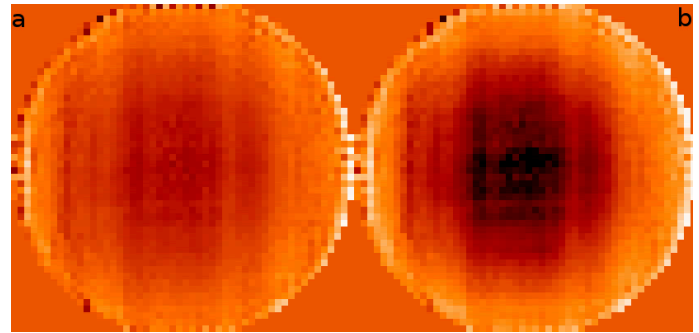
**Fig. 2.** *Left:* noncoronagraphic PSF, in logarithmic scale. *Right:* corresponding MTF (black) and MTF of an Airy pattern with same cut frequency (blue), in logarithmic scale. The  $x$ -axis has been cut at half the Nyquist frequency (200).

**Lyot ratio.** The Lyot ratio is defined as the ratio between the radius of the Lyot stop and the radius of the entrance pupil. In the terms of Eq. (3), it determines the radius of  $P_{do}$  with respect to that of  $P_{up}$ . Here, we used a configuration of the THD2 where the diameter of  $P_{do}$  is 6.5 mm and the diameter of  $P_{up}$  is 8.23 mm.

**Detector noise and bias.** According to the specification of our detector, the standard deviation of its read-out noise is one electron. This is consistent with the value found by averaging the root mean square on the pixels of 6 400 images acquired with the light source switched off (“background frames”). Each time a series of images is taken, a corresponding series of background frames is taken, and the median is subtracted from the science image in order to compensate for the bias of the detector.

**Diversity phases.** For the COFFEE technique, as for any flavor of phase diversity, the diversity phases  $\phi_{div}$  that we introduce must be absolutely calibrated. Any imprecision on the knowledge of  $\phi_{div}$  will have direct repercussions of the same order of magnitude on the reconstructed parameters. The simplest way to introduce  $\phi_{div}$  is to use the phase deformable mirror, DM3. However, until now, the minimization of speckles intensity on the THD2 experiment was only done using the Self-Coherent Camera as a focal plane wave-front sensor in closed loop. So neither the estimated wavefront nor the DM response to voltages (Mazoyer et al. 2014) required absolute calibration. In order to use COFFEE on the THD2 bench, we calibrated the DM3 response to a given set of control voltages the response of this mirror (a 1024-actuator MEMS Boston Micromachine) to a given set of control voltages. We will detail the procedure for the first diversity map,  $\phi_{div,k=1}$ . The principle is the same for  $\phi_{div,k=2}$ ; and  $\phi_{div,k=0}$ , is taken equal to 0 (we use a focused image).

We chose defocus as a diversity because it is the most used one in noncoronagraphic phase diversity. More precisely, the focus shape that can be achieved by a  $32 \times 32$  deformable mirror is quite good, but not a pure defocus. Apart from the amplitude error, there is also a small shape error. As we need to know precisely the diversity phase shape, we first performed a calibration of the latter. In order to calibrate the diversity map  $\phi_{div,k=1}$  using our set-up, the easiest way is to use the noncoronagraphic phase diversity technique itself. The method is quite straightforward. Firstly, we applied a command to the phase deformable mirror that produces  $\phi_{div,k=1}$ , which is the phase that we wanted to calibrate. Secondly, we recorded an image  $i_{calib,0}$ . Thirdly, we mechanically moved the detector  $12.70 \pm 0.02$  mm away from its nominal position at the focus. This action on the position of the detector is optically equivalent to introducing a pure defocus whose amplitude is given by Eq. (12) of Blanc et al. (2003). Fourthly, we acquired a second image  $i_{calib,1}$  at this position, before returning the detector to its original position. Fifthly, we



**Fig. 3.** *Panel a:*  $\phi_{div,(k=1)}$ . *Panel b:*  $\phi_{div,(k=2)}$ .

used  $i_{calib,0}$  and  $i_{calib,1}$  as input data for phase diversity, which estimates the sum of  $\phi_{div,k=1}$  and  $\phi_{up}^0$ , with  $\phi_{up}^0$  the unavoidable static aberration that exists on the bench.

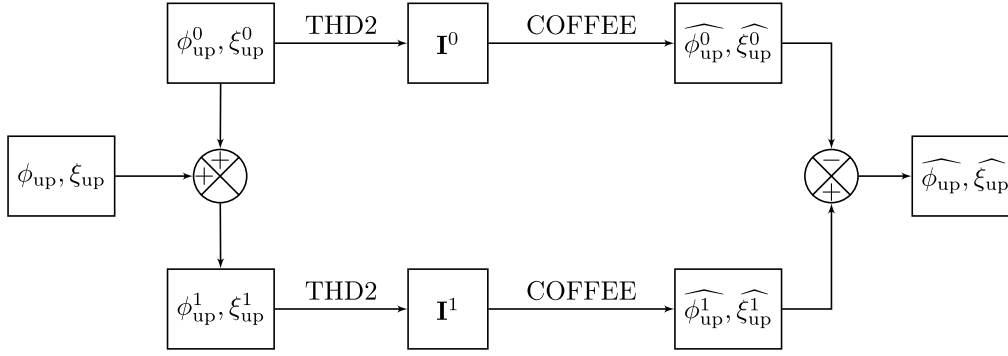
To calibrate  $\phi_{up}^0$ , we repeated the same procedure using  $\phi_{div,k=0} = 0$  instead of  $\phi_{div,k=1}$ . Finally, we obtain (by subtraction)  $\phi_{div,k=1}$ . The same complete procedure yields  $\phi_{div,k=2}$ . Both results are quite different from a defocus; their structure reflects the imperfection of the deformable mirror. A Zernike decomposition of  $\phi_{div,k=1}$  shows that defocus accounts for only about 80% of the total phase variance of  $\phi_{div,k=1}$ , whose root mean square value of  $\phi_{div,k=1}$  is 19 nm. The same applies to  $\phi_{div,k=2}$ , whose root mean square value is 29 nm. Using Eq. (12) of Blanc et al. (2003), the imprecision on these measurements due to the propagation of the error on the displacement of the detector is 0.2 nm.

The model of the experimental set-up is now calibrated. The next step is to look more closely at the regularization.

### 3.3. Regularization strategy for the four-quadrant phase mask coronagraph

A feature of the four-quadrant phase mask coronagraph is that it is insensitive to some particular phase modes. Indeed, let us denote by  $\phi_0$  a symmetric phase such that  $\mathcal{F}(\phi_0)$  be significantly different from zero only on the axes. Then the model of the corresponding image is the same as the one obtained with a perfectly flat input wave-front:  $h_c(\phi_{up} = \phi_0) = h_c(\phi_{up} = 0)$  – see Appendix A for the derivation. Consequently, when analyzing images taken with a four-quadrant phase mask such as the one we used here, COFFEE is insensitive to any linear combination of such modes. From an inverse problem point of view, this means that the forward model is noninjective, which implies that the reconstruction needs to be regularized. This is analogous to a classic problem in adaptive optics with a Shack-Hartmann wavefront sensor: just as the waffle mode is unseen by the Shack-Hartmann wavefront sensor and must be filtered out of the control in order not to saturate the deformable mirror, here the “cross” modes are unseen by the four-quadrant phase mask and must be filtered in order not to saturate the reconstruction of our focal-plane wavefront sensor. Indeed, we have checked that if this problem is not dealt with, the estimates always go to unrealistic root mean square values, and a Fourier analysis of the estimates shows significant values only on the axes. To address this issue, we added another regularization term to the usual one expressed by Eq. (5). This regularization must prevent any term of the form  $\phi_0$  to become dominant in the estimation of  $\phi_{up}$ . We chose the following quadratic, hence convex and differentiable, functional:

$$\mathcal{R}_{\text{FQPM}}(\phi_{up}) = \frac{\eta}{2\sigma_\phi^2} \left\| \chi \times \mathcal{F}^{-1}[\phi_{up}] \right\|^2; \quad (7)$$



**Fig. 4.** Synthetic representation of the validation strategy.

where the hyperparameter  $\eta$  is typically on the order of ten,  $\sigma_\phi$  is the a priori information on the standard deviation of  $\phi_{\text{up}}$ , and  $\chi$  is a weighting function equal to 1 in an area of  $1\lambda/D$  around the axes of the four-quadrant phase mask and zero elsewhere. The gradient of this term is useful for numeric minimization. Its expression is simply

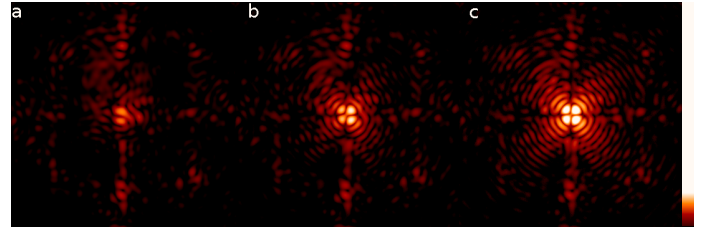
$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{FQPM}}(\phi_{\text{up}})}{\partial \phi_{\text{up}}} = \frac{\eta}{\sigma_\phi^2} \times \mathcal{F} \left\{ \chi^2 \times \mathcal{F}^{-1} [\phi_{\text{up}}] \right\}. \quad (8)$$

### 3.4. Wavefront measurement strategy: differential measurements

A precise characterization of a wavefront sensor can only be done on a bench with a calibrated wavefront. On THD2, one term is unknown: the bench's own amplitude and phase aberrations  $\phi_{\text{up}}^0, \xi_{\text{up}}^0, \phi_{\text{do}}^0$ . Even if these aberrations are extremely small (leading to a  $10^{-8}$  contrast in intensity), they bias our estimation and must be calibrated. We used a classical method of differential measurements to remove the contribution of the bench own aberrations to the result: in order to compare COFFEE reconstructions to known aberrations, we compare differential COFFEE reconstructions to known differential aberrations. More precisely, we perform a COFFEE reconstruction  $\widehat{\phi_{\text{up}}^0}, \widehat{\xi_{\text{up}}^0}$  of the aberrations  $\phi_{\text{up}}^0, \xi_{\text{up}}^0$  on the THD2 in its reference state, indicated by index 0. We then introduced a supplementary upstream aberration of known characteristics  $\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}$ , an perform a COFFEE reconstruction  $\widehat{\phi_{\text{up}}^1}, \widehat{\xi_{\text{up}}^1}$  of this aberration  $\phi_{\text{up}}^1, \xi_{\text{up}}^1, \phi_{\text{do}}^0 = (\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}, 0) + (\phi_{\text{up}}^0, \xi_{\text{up}}^0, \phi_{\text{do}}^0)$ . We computed the difference of the two reconstructions, and finally, we compared this difference with the known introduced aberrations  $\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}$ . This process is presented schematically in Fig. 4.

### 3.5. Measurement of the reference wavefront

Here we describe the operations corresponding to the top horizontal branch of Fig. 4. The estimation of the reference wavefront is done as follows. Reference wavefront controls were imposed on the phase mirror and on the amplitude mirror, generating phase  $\phi_{\text{up}}^0$  and log-amplitude  $\xi_{\text{up}}^0$ . The corresponding data  $\mathbf{I}_{k=0}^0$  is acquired. For the acquisition of the first diversity image  $\mathbf{I}_{k=1}^0$ , a control voltage corresponding to the first diversity (Fig. 3, left) is added to the phase mirror, so the phase becomes  $\phi_{\text{up}}^0 + \phi_{\text{div},k=1}$  and the amplitude is unchanged. In a similar fashion, for the acquisition of the second diversity image  $\mathbf{I}_{k=2}^0$ , a control voltage corresponding to the second diversity (Fig. 3, right) was added to the phase mirror, so the phase becomes



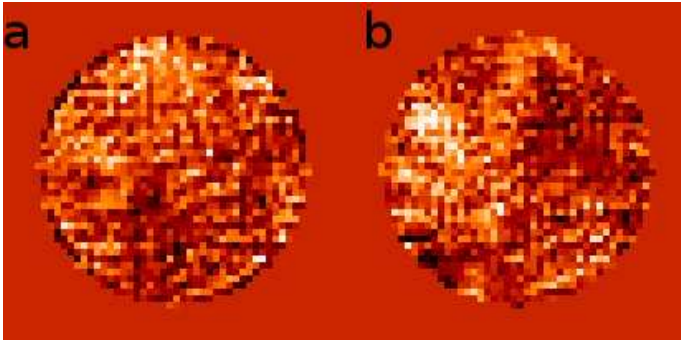
**Fig. 5.** Panel a: focused image  $\mathbf{I}_{k=0}^0$ . Panel b: diversity image  $\mathbf{I}_{k=1}^0$ . Panel c: diversity image  $\mathbf{I}_{k=2}^0$ . The scale is an argument hyperbolic sine, with the same color scale for all the images.

$\phi_{\text{up}}^0 + \phi_{\text{div},k=2}$ . The images  $\mathbf{I}_{k=0}^0, \mathbf{I}_{k=1}^0$  and  $\mathbf{I}_{k=2}^0$  are displayed in Fig. 5.

Using these images, we retrieved the COFFEE estimates of the reference phase  $\widehat{\phi_{\text{up}}^0}$  and the reference log-amplitude  $\widehat{\xi_{\text{up}}^0}$ , which are displayed in Fig. 6. The root mean square values of the reconstructed aberrations are  $\sigma(\widehat{\phi_{\text{up}}^0}) = 3.4$  nm and  $\sigma(\widehat{\xi_{\text{up}}^0}) = 2.9$  nm. The complete set of parameters used for the reconstruction is displayed in Table 1. We note that the reconstruction is very robust, that is to say insensitive to the a priori values of the standard deviations of  $\phi_{\text{up}}, \xi_{\text{up}}$  and  $\phi_{\text{do}}$ . For example, the retrieved phase using the parameters in Table 1 has a correlation of 0.999998 and a relative difference of  $4.7 \times 10^{-5}$  with the retrieved phase using  $\sigma(\phi_{\text{up}}) = 30$  nm,  $\sigma(\xi_{\text{up}}) = 25$  nm and  $\sigma(\phi_{\text{do}}) = 5$  nm. Also, the actual power spectrum density is different from a  $1/f^2$  power law, because the reference state is such that the deformable mirror DM3 partially corrects the phase defects up to its maximum spatial frequency, beyond which it cannot perform any correction.

## 4. Experimental retrieval of a known wavefront dominated by amplitude aberration

In this section, we generate a wavefront that is dominated by amplitude aberration. We do not change the command on the phase mirror, DM3. On the off-pupil amplitude mirror, DM1, we apply a sinusoidal aberration whose frequency  $\nu$  is chosen such that Talbot effect (Zhou & Burge 2010) converts the off-pupil phase map of DM1 into a pure amplitude aberration. Talbot effect or self-imaging appears when observing the Fresnel diffraction of a sinusoidal pattern at fraction or multiple distance of the Talbot length  $z_T = 2/(\nu^2\lambda)$ . As shown in Zhou & Burge (2010), an exact image of a pure sinusoidal phase aberration will appear at distances  $z = nz_T/2$  (with  $n$  an integer). At distances  $z = (2n + 1)z_T/4$ , the field will be converted to pure sinusoidal amplitude aberration. Applying this last equation with  $n = 0$  to the THD2 bench, i.e. a distance



**Fig. 6.** Panel a:  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^0$ . Panel b:  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^0$ .

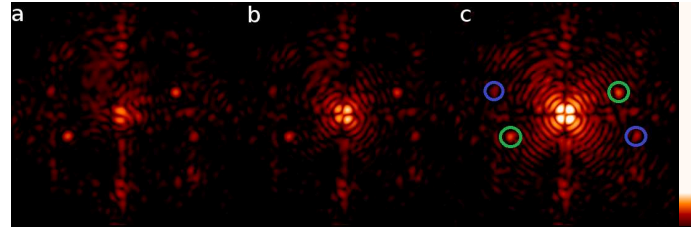
**Table 1.** Parameters of reconstruction for the reference wavefront.

Parameter	Value
Wavelength $\lambda$	783.25 nm
Data set	$\mathbf{I}^0$
Images size	$360 \times 360$ pixels
Sampling factor	7.14
Lyot ratio	0.759
Diversity phases	$\phi_{\text{div},(k=1)}$ and $\phi_{\text{div},(k=2)}$
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=0}^0$	$2.5 \times 10^{-6}$ W
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=1}^0$	$5.2 \times 10^{-7}$ W
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=2}^0$	$1.5 \times 10^{-7}$ W
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=0}^0$	800
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=1}^0$	800
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=2}^0$	900
Read-out noise standard deviation	1 electron
Coronagraph type	4-quadrant phase mask
A priori on $\sigma_{\phi_{\text{up}}^0}$	2 nm
A priori on $\sigma_{\phi_{\text{do}}^0}$	0.5 nm
A priori on $\sigma_{\xi_{\text{up}}^0}$	2 nm

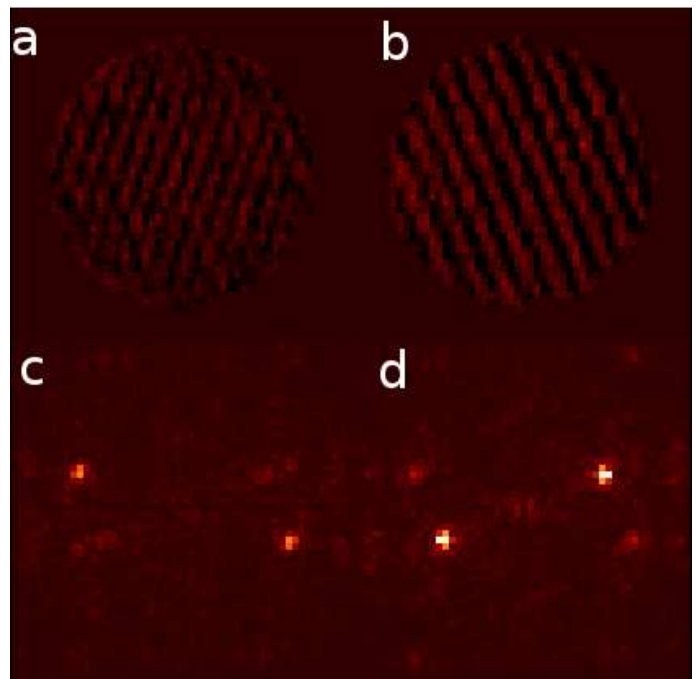
DM1-pupil  $z = 269$  mm and a wavelength 783.25 nm, the first sinusoidal frequency that will be completely converted to amplitude is equal to  $\nu = 1.54 \text{ mm}^{-1}$  (period of 0.65 mm). We applied such a frequency avoiding the four quadrant transition direction by  $22.5^\circ$ .

Taking again the notations of Fig. 4, this means that  $\phi_{\text{up}} = 0$ , and we aim for  $\xi_{\text{up}}(r) = C \sin(2\pi\nu \cdot r)$ .

However, the  $32 \times 32$ -actuator DM1 cannot produce a continuous sinusoid but only an approximate sinusoid. Consequently, instead of generating only a pair of spots, as would be the case if the deformable mirror had an infinite number of actuators, the deformable mirror generates several pairs of spots. In Appendix B, we describe a kind of “dual-aliasing” effect which explains that any continuous field (the electromagnetic field) that encounters a spatially discrete modulation exhibits unexpected resonances that in turn result in these unexpected ghost spots. Figure 7 displays the focused and the two diversity images taken with this amplitude aberrations. On the rightmost image of Fig. 7, the green circles show the main pair of spots (the one that would be generated by a deformable mirror with infinitely many actuators) and the blue ones mark replica spots due to the discrete nature of the deformable mirror. Fresnel propagation for the pair of secondary spots predicts a mixture of phase and amplitude in a pupil plane.



**Fig. 7.** Panel a: focused image  $\mathbf{I}_{k=0}^1$ . Panel b: diversity image  $\mathbf{I}_{k=1}^1$ . Panel c: diversity image  $\mathbf{I}_{k=2}^1$ . The scale is an argument hyperbolic sine. On the rightmost image, the main pair of spots is enhanced by green circles, and the replica spots are enhanced by blue circles. They are clearly visible in all three images.



**Fig. 8.** Panel a: estimated phase. Panel b: estimated log-amplitude. The linear color bar extends from  $-4$  nm to  $+4$  nm. Panel c: fourier transform of the estimated phase. Panel d: fourier transform of the estimated log-amplitude.

The corresponding data set is acquired just like in the previous section, and displayed in Fig. 7. We note the apparition of pairs of bright spots that are absent in Fig. 5. They are the manifestation of the periodic amplitude aberration.

Using these images, we retrieve the COFFEE estimates of the phase  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^1$  and the log-amplitude  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^1$ . We then subtracted the reference phase  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^0$  and the reference log-amplitude  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^0$  and obtain  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^1$  and  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^1$ , which are displayed in Fig. 8, along with their Fourier transforms. The complete set of parameters used for the reconstruction is shown in Table 2.

The reconstruction is visibly dominated by the introduced amplitude sinusoid: the main pair of spots is clearly visible in the log-amplitude reconstruction and does not appear at all in the phase reconstruction. The corresponding secondary pair of spots has both log-amplitude and phase components. This is not surprising: propagation of an off-pupil aberration at a frequency different from the Talbot frequency has no reason to yield only amplitude in a pupil plane. The equivalent root mean square value of the COFFEE-estimated sinusoid is  $\sigma_{\xi_{\text{up}}^1} = 1.5$  nm. The

**Table 2.** Parameters of reconstruction for the wavefront dominated by amplitude aberrations.

Parameter	Value
Wavelength $\lambda$	783.25 nm
Data set	$\mathbf{I}^1$
Images size	$360 \times 360$ pixels
Sampling factor	7.14
Lyot ratio	0.759
Diversity phases	$\phi_{\text{div},(k=1)}$ and $\phi_{\text{div},(k=2)}$
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=0}^1$	$2.5 \times 10^{-6}$ W
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=1}^1$	$5.2 \times 10^{-7}$ W
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=2}^1$	$1.5 \times 10^{-7}$ W
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=0}^1$	1600
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=1}^1$	1100
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=2}^1$	1600
Read-out noise standard deviation	1 electron
Coronagraph type	4-quadrant phase mask
A priori on $\sigma_{\phi_{\text{up}}}^1$	3 nm
A priori on $\sigma_{\phi_{\text{do}}}^1$	0.5 nm
A priori on $\sigma_{\xi_{\text{up}}}^1$	3 nm

control voltage of the introduced aberration was calculated so that its root mean square value would be 1.6 nm.

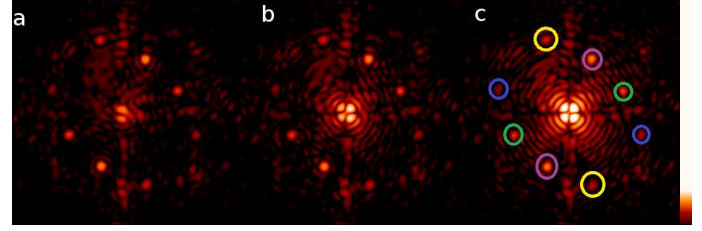
## 5. Experimental retrieval of a known wavefront mixing phase and amplitude aberration

During the experiment described in this section, we kept the same sinusoid on the amplitude mirror DM1. On the phase mirror, DM3, we added a phase sinusoid of frequency  $\mu$ . The corresponding data  $\mathbf{I}_{k=0}^2$  is acquired and displayed in Fig. 9. On the rightmost image of Fig. 9, as in Fig. 7, the green circles show the main pair of spots due to the amplitude mirror, DM1, and the blue ones indicate replica spots of DM1. The purple circles show the main pair of spots due to the phase mirror, DM3, and the yellow one shows replica spots of DM3.

Using these images, we retrieve the COFFEE estimates of the phase  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^2$  and the log-amplitude  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^2$ . We then subtracted the reference phase  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^0$  and the reference log-amplitude  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^0$  and obtain  $\widehat{\phi}_{\text{up}}^1$  and  $\widehat{\xi}_{\text{up}}^1$ .

The complete set of parameters used for the reconstruction is shown in Table 3. We compare our estimation to the self-coherent camera (SCC) measurement that is routinely used on THD2. The SCC uses the stellar light diffracted by the FQPM outside of Lyot stop to create an additional beam (called here reference pupil). As in the Young's experiment, the coherence between the stellar light in this beam and in the Lyot stop generates fringes in the focal plane and spatially encodes the speckles. This spatial modulation allows a direct measurement of the complex amplitude of the electric field in the recorded focal plane (Galicher et al. 2008). As shown in Mazoyer et al. (2013), we are also able to retrieve the field upstream of the coronagraph using the complex field in the focal plane downstream of a phase mask coronagraph.

Using the same images than before  $I_{k=0}^1$ , we estimated the upstream field using Eq. (28) in Mazoyer et al. (2013). In this equation, the field directly measured in the focal plane by the SCC is divided by the coronagraph function  $\mathcal{M}$  and the focal



**Fig. 9.** Panel a: focused image  $\mathbf{I}_{k=0}^2$ . Panel b: diversity image  $\mathbf{I}_{k=1}^2$ . Panel c: diversity image  $\mathbf{I}_{k=2}^2$ . The scale is an argument hyperbolic sine. On the rightmost image, the main pair of amplitude spots is enhanced by green circles, and the corresponding replica spots are enhanced by blue circles. The main pair of phase spots is enhanced by purple circles, and the corresponding replica spots are enhanced by yellow circles. They are clearly visible in all three images.

plane field  $A_R$  of the SCC reference pupil and is normalized by the input source flux. Comparing recorded and simulated images for a given known aberration (here a sinusoid created by the phase deformable mirror) allows the normalization of the phase as a function of the intensity on the camera and the source input flux measured by the photometer. The FQPM mask  $\mathcal{M}$  was assumed to be perfect. The image corresponding to the diffraction of the SCC reference pupil in the focal plane is recorded separately on the camera. An azimuthal average of this image was used to limit the impact of the noise of  $A_R$ . To avoid division by zero, the division was restricted to an area larger than the corrected region ( $30\lambda/D \times 30\lambda/D$ ) and we suppressed the estimation of higher spatial frequencies.

We assumed downstream aberrations are limited to an optical path difference (OPD) between  $A_R$  and the main beam and a downstream tip-tilt. As explained in Sect. 4.5.2 in Mazoyer et al. (2013), we calculated the OPD which minimizes the amplitude on the complex field while introducing only phase aberration with the phase deformable mirror. The downstream tip and tilt are calculated the same way by minimizing the amplitude estimated when introducing only phase aberrations.

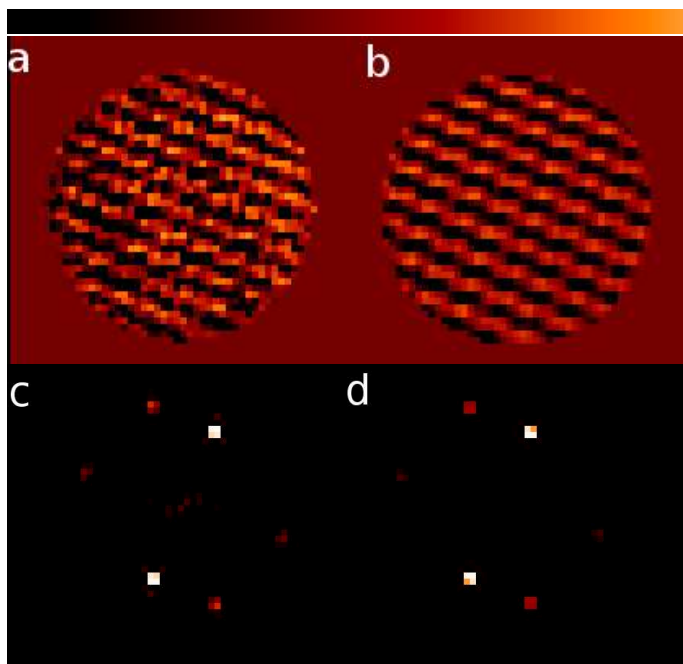
Figure 10 displays the COFFEE and SCC reconstructions of  $\phi_{\text{up}}$  along with their Fourier transforms. The correlation between the COFFEE and the SCC phase estimation is 86%. The root mean square value of the COFFEE phase reconstruction is 3.0 nm versus 2.9 nm for the SCC one. Figure 11 displays the COFFEE and SCC reconstructions of  $\xi_{\text{up}}$  along with their Fourier transforms. The correlation between the COFFEE and the SCC log-amplitude estimation is 89%. The root mean square value of the COFFEE log-amplitude reconstruction is 1.7 nm versus 1.6 nm for the SCC one. Several factors contribute to the discrepancy in the correlations. While the SCC data are taken with a tip-tilt stabilization loop closed, the COFFEE data had to be taken with the tip-tilt loop open. Consequently, there is a tip-tilt phase difference between the SCC and the COFFEE estimate. Another factor is that there is a sub-pixel centering difference between the COFFEE and the SCC estimates. Finally, the COFFEE estimates and the SCC estimates are simply not identical.

The main characteristics of the phase and amplitude aberrations are retrieved. This is best visible by examining the Fourier transforms of the aberrations.

In the Fourier transform, the main pair of spots (circled in green in Fig. 7) generated by the amplitude mirror, DM1, is clearly visible in the log-amplitude reconstruction and does not appear at all in the phase reconstruction. The corresponding secondary spots (circled in blue in Fig. 7) still have both

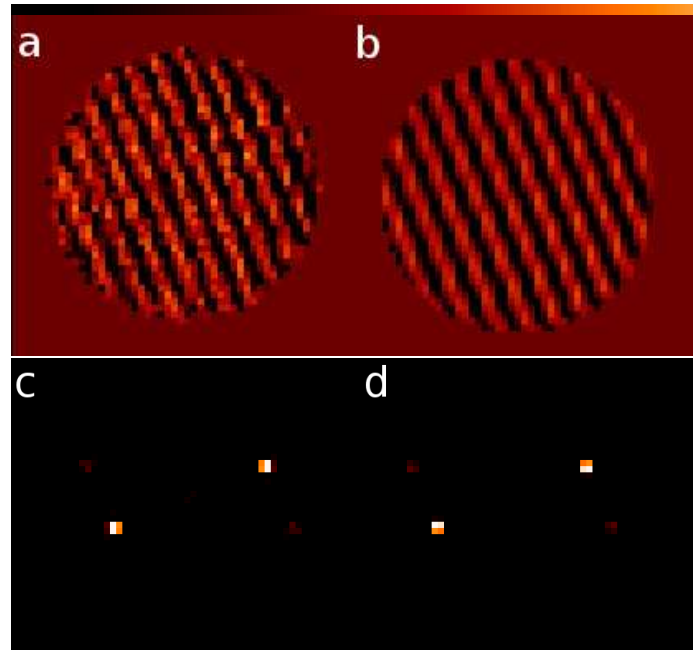
**Table 3.** Parameters of reconstruction for the wavefront mixing phase and amplitude aberration.

Parameter	Value
Wavelength $\lambda$	783.25 nm
Data set	$\mathbf{I}^2$
Images size	$360 \times 360$ pixels
Sampling factor	7.14
Lyot ratio	0.759
Diversity phases	$\phi_{\text{div},(k=1)}$ and $\phi_{\text{div},(k=2)}$
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=0}^2$	$2.5 \times 10^{-6}$ W
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=1}^2$	$5.2 \times 10^{-7}$ W
Light flux on the photometer for $\mathbf{I}_{k=2}^2$	$1.5 \times 10^{-7}$ W
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=0}^2$	1200
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=1}^2$	800
Number of averaged frames for $\mathbf{I}_{k=2}^2$	1000
Read-out noise standard deviation	1 electron
Coronagraph type	4-quadrant phase mask
A priori on $\sigma_{\phi_{\text{up}}}^0$	3 nm
A priori on $\sigma_{\phi_{\text{do}}}^0$	0.5 nm
A priori on $\sigma_{\xi_{\text{up}}}^0$	3 nm


**Fig. 10.** *Panel a:* estimated phase using COFFEE. *Panel b:* estimated phase using the SCC. The linear color bar extends from  $-8$  nm to  $+8$  nm. *Panel c:* fourier transform of the estimated phase using COFFEE. *Panel d:* fourier transform of the estimated phase using the SCC. Linear scale.

log-amplitude and phase components because, as explained in Sect. 4, propagation of an off-pupil aberration at a frequency different from the Talbot frequency has no reason to yield only amplitude in a pupil plane.

The main pair of spots which is generated by the phase mirror, DM3, is very bright and visible in the phase reconstruction, and does not appear in the amplitude reconstruction. The corresponding secondary pair of spots appears only in the

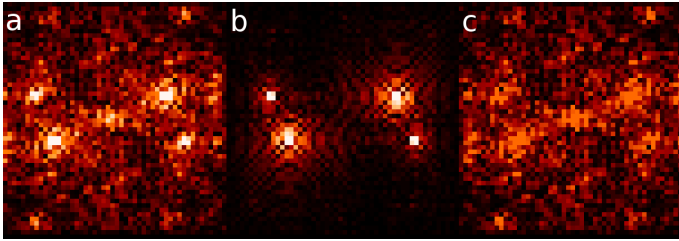

**Fig. 11.** *Panel a:* estimated log-amplitude using COFFEE. *Panel b:* Estimated log-amplitude using the SCC. The linear color bar extends from  $-4$  nm to  $+4$  nm. *Panel c:* Fourier transform of the estimated log-amplitude using COFFEE. *Panel d:* Fourier transform of the estimated log-amplitude using the SCC. Linear scale.

reconstructed phase but not in the reconstructed amplitude. This is expected: since the phase mirror is in a pupil plane, it has influence only on the phase and no influence on the amplitude. These characteristics of the reconstructed wavefront are proof that coronagraphic phase diversity is able to reconstruct both phase and amplitude from coronagraphic focal-plane images.

Figure 12 displays, on a very nonlinear scale, the differences between the COFFEE estimate and the SCC estimate in a focal plane (which are displayed on a linear scale in Fig. 11). The difference between those 1.6 nm RMS estimates amounts to 0.5 nm RMS. Four different contributions might explain this residual difference. Firstly, the two methods use different data set to perform the estimate. COFFEE uses focal and diversity images while the SCC uses fringed images. Secondly, high spatial frequencies are not estimated by the SCC, and some low frequencies might be partially unseen by the SCC. Thirdly, COFFEE may reconstruct spurious aberrations if there is a mismatch between the computer model used in the reconstruction and the actual instrument. Fourthly, despite the regularization, the noise present in the data might induce a residual noise in the COFFEE reconstruction. This could be alleviated at the cost of longer exposures or by introducing a regularization specific to the sinusoidal aberration profile that we used for the sake of the experiment.

## 6. Conclusion

In this paper, we developed an extension of coronagraphic phase diversity to the estimation of the complex electric field, that is, the joint estimation of phase and amplitude. We demonstrate experimentally on the Très Haute Dynamique testbed at Observatoire de Paris that coronagraphic phase diversity is able to reconstruct phase and amplitude aberrations with a sub-nanometric precision. Finally, we performed the first comparison



**Fig. 12.** *Panel a:* COFFEE-estimated log-amplitude (1.7 nm RMS). *Panel b:* SCC-estimated log-amplitude (1.6 nm RMS). *Panel c:* absolute value of the difference (0.5 nm RMS). The scale is an argument hyperbolic sine.

between the complex wavefront estimated using coronagraphic phase diversity (which relies on time-modulation of the speckle pattern) and the one reconstructed by the self-coherent camera (which relies on the spatial modulation of the speckle pattern); and we found a good agreement between the two methods. This paves the way to coronagraphic phase diversity as a coronagraphic wave-front sensor candidate for very high contrast space missions.

The next step of our work will be to use the fine knowledge of aberrations as a ground for practical implementation of the nonlinear dark hole (Paul et al. 2013), which uses a dual formalism of coronagraphic phase diversity in order to minimize the speckle intensity in the focal plane.

*Acknowledgements.* The PhD work of O. Herscovici-Schiller is co-funded by CNES and ONERA. We thank J.-M. Le Duigou (CNES) for his support. This work received funding from the E.U. under FP7 Grant Agreement No. 312430 OPTICON, from the CNRS (Défi Imag'In) and from ONERA in the framework of the VASCO research project. OHS wishes to thank A. Montmerle Bonnefois for a very helpful discussion on the description of geometric aberrations, N. Védrenne for a discussion on some parametrization and numeric instabilities issues, and L. Prengère for a discussion on the domain of validity of linear filtering techniques for optical imaging. We thank the reviewer for constructive

criticism and valuable comments that helped to improve this paper. We thank the language editor, G. Rodgers, for corrections that helped to improve this paper.

## References

- Abe, L., de Souza Jr, A. D., Vakili, F., & Gay, J. 2003, *A&A*, 400, 385
- Baudoz, P., Galicher, R., Patru, F., Dupuis, O., & Thijs, S. 2017, in *AO4ELT 5* [arXiv: 1801.06600]
- Blanc, A., Fusco, T., Hartung, M., Mugnier, L. M., & Rousset, G. 2003, *A&A*, 399, 373
- Church, E. L. 1988, *Appl. Opt.*, 27, 1518
- Foo, G., Palacios, D. M., & Swartzlander, G. A. 2005, *Opt. Lett.*, 30, 3308
- Galicher, R., Baudoz, P., & Rousset, G. 2008, *A&A*, 488, L9
- Gonsalves, R. A. 1982, *Opt. Eng.*, 21, 829
- Herscovici-Schiller, O., Mugnier, L. M., & Sauvage, J.-F. 2017, *MNRAS*, 467, L105
- Hugot, E., Ferrari, M., El Hadi, K., et al. 2012, *A&A*, 538, A139
- Idier, J. 2008, *Bayesian Approach to Inverse Problems*, (ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc)
- Malbet, F., Yu, J., & Shao, M. 1995, *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 107, 386
- Mazoyer, J., Baudoz, P., Galicher, R., Mas, M., & Rousset, G. 2013, *A&A*, 557, A9
- Mazoyer, J., Galicher, R., Baudoz, P., et al. 2014, in *Proc. SPIE*, 9148, 11
- Mugnier, L. M., Blanc, A., & Idier, J. 2006, in *Advances in Imaging and Electron Physics*, ed. P. Hawkes (Elsevier) 141, 1
- Paul, B., Mugnier, L. M., Sauvage, J.-F., Dohlen, K., & Ferrari, M. 2013, *Opt. Exp.*, 21, 31751
- Pluzhnik, E., Sirbu, D., Belikov, R., Bendek, E., & Dudinov, V. N. 2017, in *Techniques and Instrumentation for Detection of Exoplanets VIII*, *Proc. SPIE*, 10400, 24
- Riggs, A. J. E., Kasdin, N. J., & Groff, T. D. 2016, *J. Astron. Telesc. Instrum. Syst.*, 2, 2
- Rouan, D., Riaud, P., Boccaletti, A., Clénet, Y., & Labeyrie, A. 2000, *PASP*, 112, 1479
- Rouan, D., Baudrand, J., Boccaletti, A., et al. 2007, *Comptes Rendus Physique*, 8, 298
- Thiébaud, É. 2002, in *Astronomical Data Analysis II*, eds. J.-L. Starck, & F. D. Murtagh, *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, 4847, 174
- Trauger, J. T., Burrows, C., Gordon, B., et al. 2004, in *Optical, Infrared, and Millimeter Space Telescopes*, *Proc. SPIE*, 5487, 1330
- Védrenne, N., Mugnier, L. M., Michau, V., Velluet, M.-T., & Bierent, R. 2014, *Opt. Exp.*, 22, 4575
- Zhou, P. & Burge, J. H. 2010, *Appl. Opt.*, 49, 5351

### Appendix A: Unseen modes of the four-quadrant phase mask coronagraph

We have seen that a model of the four-quadrant phase mask coronagraph may create numerical difficulties during the reconstruction of aberrations. These troubles call for a specific regularization, such as that proposed in Eq. (7). Let us examine the image of an on-axis source behind a four-quadrant phase mask coronagraph (Rouan et al. 2007), in the spirit of Jean Gay's analysis in Abe et al. (2003). The on-axis image is given by Eq. (3), and here the focal-plane mask of the coronagraph writes  $\mathcal{M}(\alpha) = \text{Sign}(\alpha_x) \times \text{Sign}(\alpha_y)$ . Let us define the two-dimensional Hilbert transform as  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_y[\mathcal{H}_x]$ , where  $\mathcal{H}_x$  and  $\mathcal{H}_y$  are the usual Hilbert transform along the first and second Cartesian coordinates,

$$\mathcal{H}_x[\psi](x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(x')}{x - x'} dx'. \quad (\text{A.1})$$

An equivalent formulation of Eq. (3) is

$$h_c[\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{do}}](\alpha) = \left[ \mathcal{F}^{-1} [P_{\text{do}} \psi_{\text{do}}] \star \left[ \mathcal{M} \mathcal{F}^{-1} (P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}) \right] \right]^2, \quad (\text{A.2})$$

where  $\star$  denotes the convolution product,  $\psi_{\text{up}} = \exp[i\phi_{\text{up}} + \xi_{\text{up}}]$ , and  $\psi_{\text{do}} = \exp[i\phi_{\text{do}} + \xi_{\text{do}}]$ .

We can use the fact that for any function  $\psi$ ,  $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}[\psi]\}(\alpha) = -\mathcal{M}(-\alpha) \mathcal{F}^{-1}[\psi](\alpha)$  and the fact that  $\forall \alpha, \mathcal{M}(-\alpha) = \mathcal{M}(\alpha)$  to transform this expression into

$$h_c[\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{do}}](\alpha) = \left[ \mathcal{F}^{-1} [P_{\text{do}} \psi_{\text{do}}] \star \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{H}(P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}) \right] (\alpha) \right]^2. \quad (\text{A.3})$$

Let us analyze the upstream complex fields  $\psi_{\text{up}}$  such that  $h_{\text{extc}}$  is zero. If  $\mathcal{H}(P_{\text{up}} \psi_{\text{up}})$  is zero where  $P_{\text{do}}$  is not, then  $h_c[\psi_{\text{up}}, \psi_{\text{do}}]$  is zero everywhere. Let us analyze the nullity condition on the Hilbert transform. We note  $(\alpha_x, \alpha_y) = \alpha$  the coordinates of the focal-plane position  $\alpha$  and  $(r_x, r_y) = r$  the coordinates of the pupil-plane position  $r$ .

$$\forall r, \mathcal{H}[P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}](r) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall r, \iint \frac{P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}(r - r')}{r'_x r'_y} dr' = 0 \quad (\text{A.4})$$

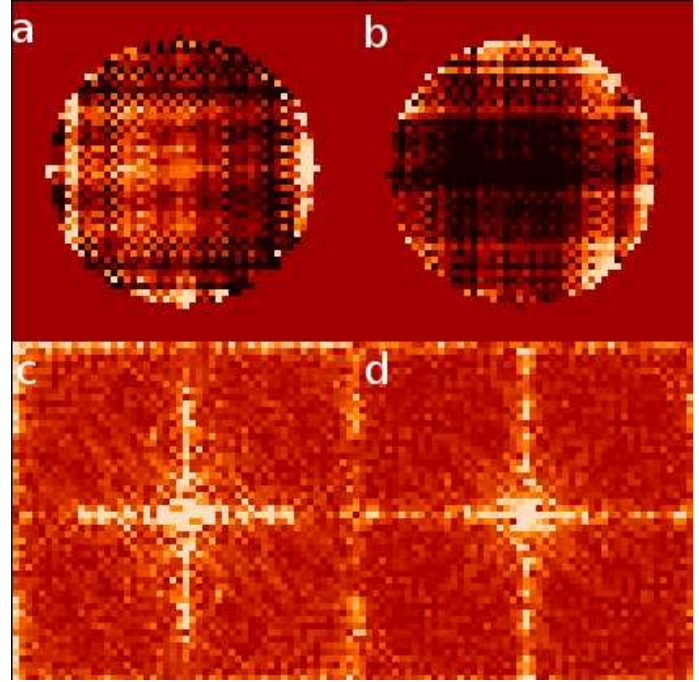
$$\Leftrightarrow \forall r, \iint \frac{(P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}) \star \delta_r(r)}{r'_x r'_y} dr' = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \iint \frac{\mathcal{F}[P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}](\alpha) \times e^{-i2\pi r' \cdot \alpha}}{r'_x r'_y} dr' = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \mathcal{F}[P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}](\alpha) \int \frac{e^{-i2\pi r'_x \alpha_x}}{r'_x} dr'_x \int \frac{e^{-i2\pi r'_y \alpha_y}}{r'_y} dr'_y = 0. \quad (\text{A.7})$$

The right-hand sign of the last equivalence, Eq. (A.7), dictates that

$$\forall \alpha, \alpha_x \neq 0 \wedge \alpha_y \neq 0 \Rightarrow \mathcal{F}[P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}](\alpha) = 0. \quad (\text{A.8})$$



**Fig. A.1.** Effect of the absence of appropriate regularization on a COFFEE reconstruction performed on the same data as in Sect. 5. *Panel a:* estimated phase. *Panel b:* estimated log-amplitude. *Panel c:* fourier transform of the estimated phase. *Panel d:* fourier transform of the log-amplitude.

If  $\alpha_y = 0$  and  $\alpha_x \neq 0$ , that is, if  $\alpha$  lies on the  $x$ -axis, then Eq. (A.7) reduces to

$$\forall \alpha, \alpha_y = 0 \Rightarrow \mathcal{F}[P_{\text{up}} \psi_{\text{up}}](\alpha) \int \frac{e^{-i2\pi r'_x \alpha_x}}{r'_x} dr'_x \int \frac{1}{r'_y} dr'_y = 0. \quad (\text{A.9})$$

And  $\int 1/r'_y dr'_y = 0$ , independently of  $\alpha$ . Of course the same behavior happens if  $\alpha$  belongs to the  $y$ -axis. We conclude that, mathematically, the four-quadrant phase mask coronagraph is insensitive to any upstream aberrations whose Fourier transform is nonzero only on the transitions of the four-quadrant phase mask. This condition that the Fourier transform of the aberration be infinitely thin in the focal plane implies that the aberration is of infinite extension in the pupil plane, which is physically inconsistent. However, as far as numeric computations are concerned, any mode whose Fourier transform is significantly different from zero only on a region of width one pixel around the axes of the four-quadrant phase mask is unseen. The result is a lack of injectivity of the model of image formation, and an adapted regularization is thus necessary. Figure A.1 shows the impact of the absence of regularization on a COFFEE reconstruction. The standard deviation of the estimated phase is 34.0 nm; the standard deviation of the estimated log-amplitude is 34.9 nm. Both these figures are too big by an order of magnitude, and the structures of the Fourier transforms of the estimated phase and log-amplitude are completely overwhelmed by the unseen modes of the four-quadrant phase mask coronagraph. In contrast, the reconstructions shown in Figs. 10 and 11 with the novel regularization of Eq. (7) do not include these modes and has the expected root mean square value.



## Appendix B: Why a Boston-like deformable mirror creates spots outside its correction zone

The experiments that we present in this article rely on the use of focal-plane images obtained by imposing a sinusoid on a segmented deformable mirror. However, as we observe in Fig. 7 or even more clearly in Fig. 8, instead of the expected pair of spots corresponding to a true sinusoid, we observe two pairs of spots (at least). The presence of the supplementary spots is due to the discrete nature of the segmented deformable mirror. In order to understand this phenomenon, we write explicitly the propagation of light from a segmented mirror in a pupil plane to a focal plane. As with the rest of the paper, we work in the framework of Fourier optics. We make the additional assumption that the mirror is square, and that the influence functions of the deformable mirror are perfect squares. Since the electric field in the focal plane in the two-dimensional case is a product of independent one-dimensional solutions, we make most of calculations in one dimension for the sake of clarity.

Let us consider a phase aberration that consists in an imaginary exponential of amplitude  $C$  and of frequency  $\nu$  that is discretized on the  $N$  different independent actuators of a square segmented mirror of side dimension  $D$ . If we denote by  $A(r)$  a discretized approximation of pupil-plane coordinate  $r$  on the mirror, the electric field in the pupil is

$$\mathcal{P}(r) = \exp[iC \sin[2\pi\nu A(r)]] . \quad (\text{B.1})$$

In our case,  $C \ll 1$ . So we can perform a first-order Taylor expansion:

$$\mathcal{P}(r) \approx 1 + iC \sin[2\pi\nu A(r)] . \quad (\text{B.2})$$

The influence of the phase aberration in the pupil plane is, at first order, entirely encoded in  $\sin[2\pi\nu A(r)]$ , so we now compute the corresponding electric field in the focal plane. For the sake of simplicity of the calculation of this electric field, we decompose the sinus as a difference of imaginary exponentials, and calculate the electric field  $\mathcal{E}_{\nu,N}(\alpha)$  corresponding to an imaginary exponential.

$$\mathcal{E}_{\nu,N}(\alpha) = \int_{-D/2}^{D/2} \exp[i2\pi\nu A(r)] \exp[-i2\pi\alpha r/\lambda] dr \quad (\text{B.3})$$

(Fraunhofer propagation)

$$= \sum_{n=-N/2+1/2}^{N/2-1/2} \int_{nD/N-D/(2N)}^{nD/N+D/(2N)} \exp[i2\pi\nu A(r)] \times \exp[-i2\pi\alpha r/\lambda] dr \quad (\text{B.4})$$

(Chasles relation)

$$= \sum_{n=-N/2+1/2}^{N/2-1/2} \int_{nD/N-D/(2N)}^{nD/N+D/(2N)} \exp[i2\pi\nu nD/N] \times \exp[-i2\pi\alpha r/\lambda] dr \quad (\text{B.5})$$

(A is piecewise constant)

$$= \sum_{n=-N/2+1/2}^{N/2-1/2} \exp\left[i2\pi\frac{\nu nD}{N}\right] \frac{\lambda}{-i2\pi\alpha} \times \left\{ \exp\left[-i2\pi\alpha D\frac{n+1/2}{\lambda N}\right] \right. \quad (\text{B.6})$$

$$\left. - \exp\left[-i2\pi\alpha D\frac{n-1/2}{\lambda N}\right] \right\}$$

(Integration over  $r$ )

$$= \sum_{n=-N/2+1/2}^{N/2-1/2} \frac{\lambda}{-i2\pi\alpha} \exp\left[i2\pi n\left(\nu\frac{D}{N} - \frac{\alpha D}{\lambda N}\right)\right] \times \left\{ \exp\left[\frac{-i\pi\alpha D}{\lambda N}\right] - \exp\left[\frac{i\pi\alpha D}{\lambda N}\right] \right\} \quad (\text{B.7})$$

(Factorization)

$$= \frac{D}{N} \text{sinc}\left[\frac{\pi\alpha D}{\lambda N}\right] \times \sum_{n=-N/2+1/2}^{N/2-1/2} \left\{ \exp\left[i2\pi\left(\nu\frac{D}{N} - \frac{\alpha D}{\lambda N}\right)\right] \right\}^n \quad (\text{B.8})$$

(Definitions of sinus and cardinal sinus)

$$= \frac{\exp\left[i\pi\frac{D}{N}(-N+1)\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] - \exp\left[i\pi\frac{D}{N}(N+1)\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]}{1 - \exp\left[i2\pi\frac{D}{N}\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]} \times \frac{D}{N} \text{sinc}\left[\frac{\pi\alpha D}{\lambda N}\right] \quad \text{for } \frac{D}{N}\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \notin \mathbb{Z} \quad (\text{B.9})$$

(Sum of a geometric series)

$$= \frac{D}{N} \text{sinc}\left[\frac{\pi\alpha D}{\lambda N}\right] \times \frac{\exp\left[i\pi D\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] - \exp\left[-i\pi D\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]}{\exp\left[i\pi\frac{D}{N}\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] - \exp\left[-i\pi\frac{D}{N}\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]} \quad (\text{B.10})$$

(Factorization of  $\exp\left[i\pi\frac{D}{N}\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]$ )

$$\mathcal{E}_{\nu,N}(\alpha) = \frac{D}{N} \text{sinc}\left[\pi\frac{\alpha D}{\lambda N}\right] \frac{\sin\left[\pi D\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]}{\sin\left[\pi\frac{D}{N}\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]} \quad (\text{B.11})$$

(Definition of sinus)

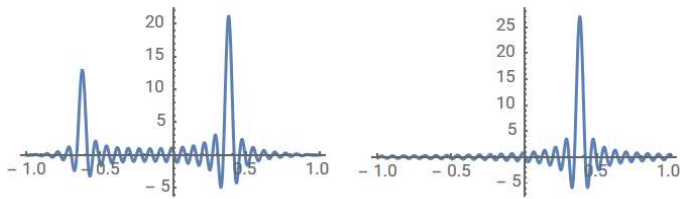
Since a Taylor expansion shows easily that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(x/N)} = N$ , the result expressed by Eq. (B.11) is valid even if  $(\nu - \alpha/\lambda)D/N \in \mathbb{Z}$ , by continuity. Another Taylor expansion, this time for  $N \rightarrow \infty$  shows that

$$\mathcal{E}_{\nu,\infty}(\alpha) = D \text{sinc}\left[\pi D\left(\nu - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] . \quad (\text{B.12})$$

Of course, this result can easily be proven by a direct calculation of the Fraunhofer propagation of the electric field with a continuous sinusoid.

An interesting property of  $\mathcal{E}_{\nu,N}$  is that, for a finite  $N$ , it displays a kind of periodicity different from the usual one of  $\mathcal{E}_{\nu,\infty}$ . Indeed, for any  $\alpha$  such that  $\alpha \neq \mp \frac{\lambda N}{D}$

$$\mathcal{E}_{\nu,N}\left(\alpha \pm \frac{\lambda N}{D}\right) = \frac{D}{N} \text{sinc}\left[\pi\frac{\alpha D}{\lambda N} \pm \pi\right] \frac{\sin\left[\pi D\left(\nu - \frac{\alpha D}{\lambda}\right) \mp \pi N\right]}{\sin\left[\pi\left(\frac{D\nu}{N} - \frac{\alpha D}{\lambda N}\right) \mp \pi\right]} \quad (\text{B.13})$$



**Fig. B.1.** *Left:* 1-dimensional focal plane electric field corresponding to a segmented approximation of a pure phase defect ( $N = 32$ ). *Right:* 1-dimensional focal plane electric field corresponding to a pure phase defect ( $N = \infty$ ). The replica spot due to the approximation is clearly visible on the left figure, one correction zone left of the main spot.

$$\mathcal{E}_{v,N}\left(\alpha \pm \frac{\lambda N}{D}\right) = (-1)^N \frac{\frac{\alpha D}{\lambda N}}{\frac{\alpha D}{\lambda N} \pm 1} \mathcal{E}_{v,N}(\alpha) \quad (\text{B.14})$$

This last result tells us that generating an approximate sinusoid using a segmented mirror will not only generate the expected pair of spots, but also periodic secondary pairs of spots of decreasing amplitude that would not exist if the generated phase were a true – that is, nondiscretized – sinusoid. Since  $\frac{\lambda N}{D}$  is the width of the frequency interval that the segmented mirror can correct, the places where these secondary spots appear in the focal plane are horizontal and vertical translations of the primary spots, with translation displacements that are multiples of the side length of the corrected zone. The closer a primary spot is to the the maximum frequency attainable by the deformable mirror ( $\pm \frac{\lambda N}{2D}$ ), the closer the intensity of the first secondary spots is to the intensity of the primary spots. This effect in dimension one is displayed in Fig. B.1. It is two such secondary spots that are circled in blue in Figs. 7 and 9, and two such secondary spots that are circled in yellow in Fig. 9.



## Chapitre 7

# Optimisation non linéaire du contraste

**P**OUR ESPÉRER PRODUIRE des images d'exoplanètes semblables à la Terre, l'analyse de surface d'onde seule ne suffit pas. Dans ce dernier chapitre, je présente mes travaux qui portent sur le contrôle de surface d'onde post-coronographique. Il s'agit de travaux avant tout expérimentaux, assortis de quelques simulations numériques. La majorité de ces travaux est décrite dans [Herscovici-Schiller *et al.*, 2018a]. Dans un premier temps, je décris brièvement le principe de la méthode d'optimisation non linéaire du contraste. Dans un deuxième temps, j'expose des résultats expérimentaux préliminaires obtenus en l'absence de coronographe sur le banc MITHiC. Dans un troisième temps, je présente la première validation de l'optimisation non linéaire du contraste avec coronographe sur le banc THD. Enfin, dans un quatrième temps, j'explore les limites actuelles de la méthode au moyen de simulations.

## 7.1 La méthode d'optimisation non linéaire du contraste

### 7.1.1 Principe

L'optimisation non linéaire du contraste (*non-linear dark hole*) [Paul *et al.*, 2013a] est une méthode de contrôle de surface d'onde fondée sur l'inversion d'un modèle optique. Le principe est de supposer connues les aberrations optiques de phase et éventuellement d'amplitude d'un système coronographique donné. On cherche à déterminer analytiquement la modification à apporter au front d'onde pour minimiser l'intensité dans une zone donnée du plan focal. Pour cela, on utilise un modèle de l'instrument.

### 7.1.2 Formalisme

La relation 2.6 donne un modèle formation d'image par l'instrument coronographique, dont la réponse impulsionnelle est notée  $h_c$ . On suppose connues les aberrations statiques  $\psi_{\text{up}}$  et  $\psi_{\text{down}}$  dont est affecté l'instrument, par exemple grâce à COFFEE. Si de plus la relation entre le vecteur de tensions  $v$  qui commande le miroir déformable en plan pupille et les déformations  $\phi_v$  du miroir est connue, alors on peut, à longueur d'onde  $\lambda$  donnée, écrire la relation

$$\phi_v = M(v). \quad (7.1)$$

Quand cette relation est supposée linéaire, on la réécrit

$$\phi_v = M v, \quad (7.2)$$

et  $M$  est alors appelé matrice d'influence du miroir. On cherche à maximiser le contraste dans une zone  $\mathcal{Z}$  donnée, c'est-à-dire à rejeter le maximum de lumière stellaire à l'extérieur de cette zone. Celle-ci est appelée *dark zone* ou *dark hole region* [Malbet *et al.*, 1995] en anglais. La méthode d'optimisation non linéaire du contraste consiste à utiliser un modèle numérique de l'instrument pour minimiser l'énergie dans  $\mathcal{Z}$ .

Les tensions de commande à appliquer aux miroir sont décrites par le vecteur

$$\hat{v} = \arg \left\{ \min_v [K(v)] \right\}, \quad (7.3)$$

avec

$$K(v) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}} \left| h_c(\alpha; \phi_{\text{up}} + M v, \xi_{\text{up}}, \psi_{\text{down}}) \right|^2. \quad (7.4)$$

Ici, la fonction d'étalement du point du coronographe,  $h_c$ , est toujours donnée par l'équation 2.6.

Ce critère  $K$  est simplement l'énergie lumineuse totale dans la zone du détecteur où l'on cherche à éteindre la lumière stellaire. Cette expression traduit donc mathématiquement ce que l'on cherche à faire : trouver la forme à appliquer au miroir déformable pour supprimer la lumière d'une zone donnée.

Cette manière d'envisager le problème était déjà présente dans l'article [Malbet *et al.*, 1995], car elle est particulièrement naturelle. Cependant, cet article ne prenait pas en compte la description fine de formation d'image coronographique, contrairement à l'optimisation non linéaire du contraste proposée par [Paul *et al.*, 2013a].

## 7.2 Essais préliminaires sans coronographe : optimisation non linéaire du contraste sans coronographe sur MITHiC

### 7.2.1 Principe du test et rapport avec les déphaseurs apodisants

Le principe de l'optimisation non linéaire du contraste est de trouver une commande du miroir déformable qui éteigne au maximum la lumière stellaire qui passe au travers du coronographe. La méthode peut donc, en théorie, réaliser une extinction de meilleure qualité que celle découlant d'un système sans aberrations ; sauf, bien sûr, dans le cas où l'extinction par le coronographe est totale en l'absence d'aberrations, ce qui est par exemple le cas des coronographes à quatre quadrants [Abe *et al.*, 2003].

Lucie Leboulleux et moi avons réalisé ensemble les premiers essais de validation de l'optimisation non linéaire du contraste sur le banc MITHiC. Ces essais ont eu lieu sans coronographe pour des raisons de simplicité expérimentale. En l'absence de coronographe, il s'agissait donc de moduler la lumière dans un plan pupille pour modifier la forme de la tache de diffraction. Cette action dite de *point spread function shaping* [Peters, 1977] est particulièrement étudiée dans le contexte de l'imagerie à haut contraste sous la forme de déphaseurs apodisants en plan pupille (*apodizing phase plates*) [Kenworthy *et al.*, 2007], qui servent à augmenter le contraste dans une zone donnée sans utiliser de coronographe à pastille focale.

J'ai présenté le banc MITHiC et ses calibrations dans le chapitre 5. Pour mémoire, la figure 7.1 montre une fonction d'étalement du point typique obtenue sur MITHiC. On reconnaît bien une tache d'Airy presque parfaite, qui montre la bonne qualité du banc : l'analyseur de surface d'onde HASO estime l'écart-type des aberrations sur le banc à dix nanomètres. Dans ces conditions, ce ne sont pas les aberrations qui déterminent la répartition d'intensité dans le

plan focal, mais la figure de diffraction elle-même. Le but est donc d'obtenir dans une zone donnée un flux inférieur à celui obtenu par un imageur sans aberrations.

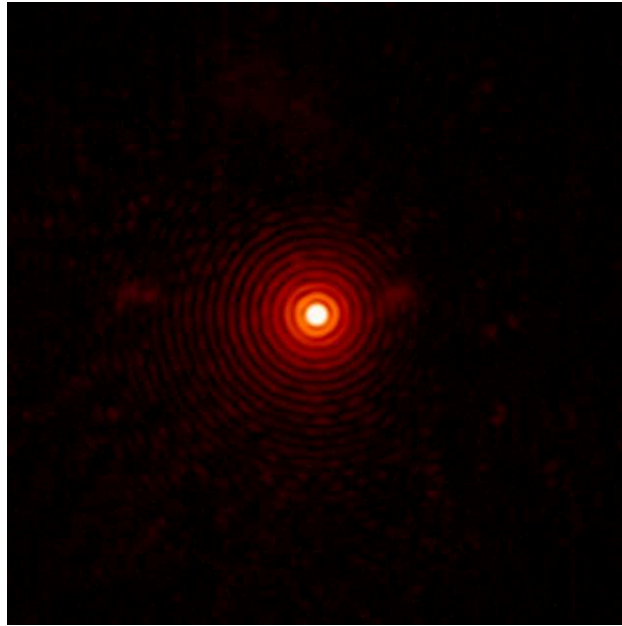


FIGURE 7.1 – Fonction d'étalement du point typique du banc MITHiC, sans coronographe.

### 7.2.2 Résultats expérimentaux

Nous avons utilisé l'algorithme d'optimisation non linéaire du contraste avec pour consigne d'optimiser le contraste dans un demi-anneau de rayon interne  $2\lambda/D$  et de rayon externe  $5\lambda/D$ . Les aberrations du banc, estimées au HASO, sont prises comme paramètres d'entrée pour le programme NLDH (pour *non-linear dark hole*) qui donne les commandes à appliquer pour l'optimisation non linéaire du contraste. La sortie du programme est la consigne à appliquer au modulateur spatial de lumière en plan pupille. Nous avons appliqué cette consigne. L'image obtenue sur le banc est sur la gauche de la figure 7.2; l'image prédite par le programme est sur la droite. Qualitativement, on retrouve bien la forme de la zone de *dark hole* attendue : une demi-couronne située sur la droite de la figure de diffraction. La comparaison avec la figure 7.1 montre que la répartition d'intensité est largement modifiée. Sans surprise, le gain en contraste dans le demi-anneau est meilleur en simulation qu'en réalité. La différence s'explique par des erreurs du modèle numérique. J'étudierai ces erreurs dans la suite.

La figure 7.3 présente les courbes d'intensité moyenne avant et après application de la commande d'optimisation au modulateur spatial de lumière, sous forme de profil circulaire moyen dans le demi-plan focal. On voit bien un gain dans la zone où on a cherché à optimiser le contraste. La courbe 7.4 montre le rapport de l'intensité avant optimisation du contraste à l'intensité après. Le gain en contraste dans la zone d'intérêt, quoique modeste, n'est pas négligeable : 2,3 en moyenne dans le demi-anneau.

Ce résultat, quoique préliminaire, de diminution du flux dans une zone donnée sur une tache d'Airy constitue une première étape de validation de la méthode d'optimisation non linéaire du contraste. Il reste maintenant à répéter la manœuvre avec un coronographe et à réaliser un couplage fin avec un analyseur de surface d'onde. C'est le but de la section suivante.

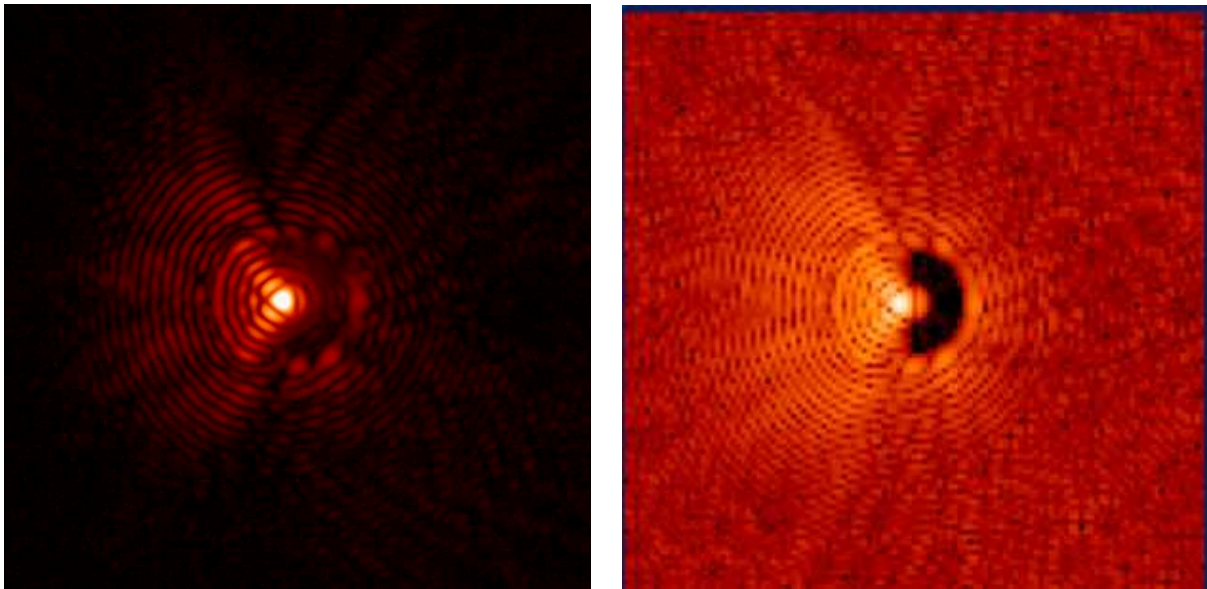


FIGURE 7.2 – À gauche : image expérimentale sur MITHiC après application de la commande d'optimisation du contraste. À droite : image simulée fournie par le programme.

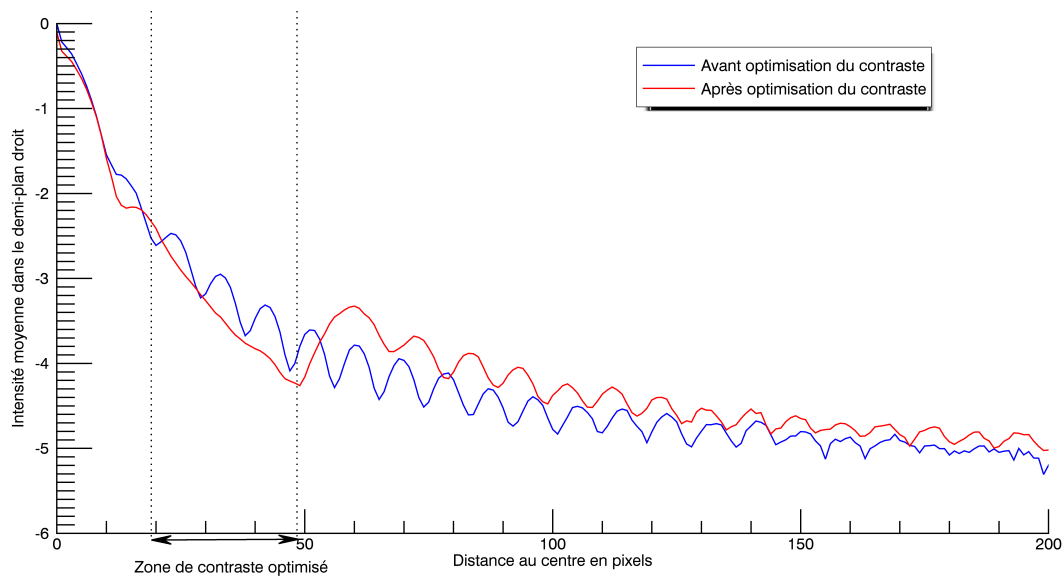


FIGURE 7.3 – Moyenne circulaire de l'intensité sur le demi-plan droit avant (bleu) et après (rouge) optimisation du contraste. Échelle logarithmique à base dix, normalisée au maximum de la tache d'Airy avant optimisation du contraste.

### 7.3 Validation expérimentale de l'optimisation non linéaire du contraste sur le banc THD

Forts de notre expérience de contrôle sur MITHiC et d'analyse sur le THD, nous avons réalisé une validation de l'optimisation non linéaire du contraste en présence de coronographe sur le banc THD. Nous avons commencé dans une configuration où le miroir pupillaire et le

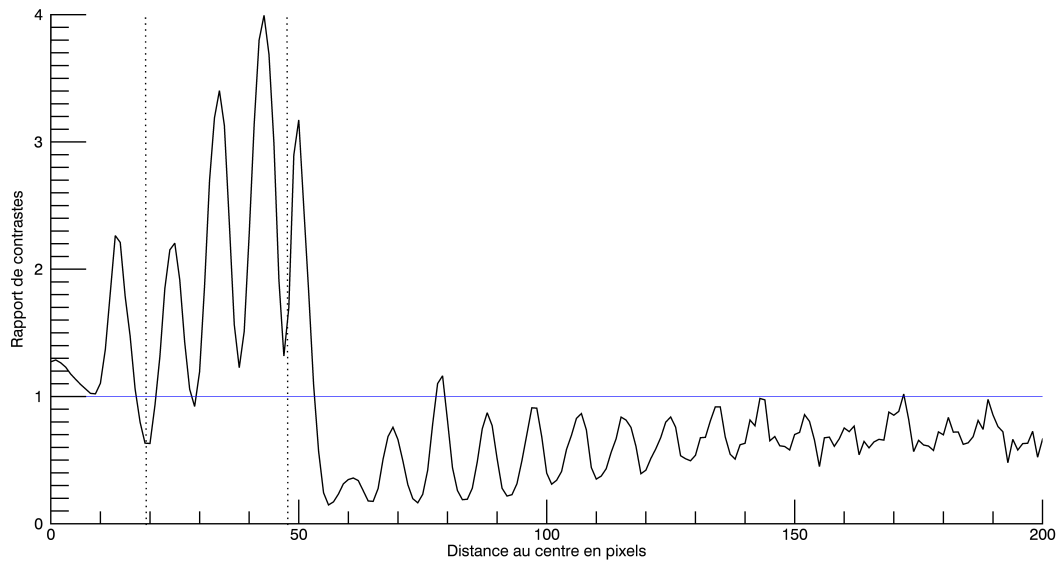


FIGURE 7.4 – Rapport de l’intensité moyenne avant optimisation à l’intensité moyenne après optimisation, en échelle linéaire. Une valeur au-dessus de un indique un gain en contraste dû à l’optimisation du contraste.

miroir hors pupille sont utilisés avec la SCC pour obtenir une région de contraste important ( $4 \cdot 10^{-7}$ ) à l’intérieur de la zone de correction, qui est un carré centré sur l’axe. Le banc THD est donc utilisé dans un mode où le contraste est déjà amélioré mais pas à son meilleur niveau de performance, ce qui devrait laisser de la marge de progression. L’image correspondante est la plus à gauche de la Fig. 7.5. Il reste des résidus diffractifs et un résidu d’aberrations (vraisemblablement de phase et d’amplitude) à corriger, ce qui est accessible même avec le seul miroir pupillaire dans une moitié du plan focal.

À ce stade, une mesure utilisant la SCC est utilisée pour estimer à la fois les aberrations de phase résiduelle et d’amplitude sur le banc. Les estimations de la SCC sont faites dans le plan focal. Nous avons choisi d’utiliser la SCC comme senseur et non COFFEE afin de comparer uniquement les performances des méthodes d’optimisation du contraste et pas celles des analyseurs de surface d’onde. En effet en utilisant COFFEE, nous n’aurions pas su distinguer une différence de performance de mesure (COFFEE versus SCC) d’une différence de performance des méthodes d’optimisation du contraste (*speckle minimization* versus optimisation non linéaire du contraste).

Du fait que l’optimisation non linéaire du contraste a besoin d’estimations de phase et d’amplitude exprimées en plan pupille, les estimations de la SCC sont rétropropagées du plan focal vers ce plan. Ces aberrations sont prises là encore les paramètres d’entrée du programme NLDH qui donne les commandes à appliquer. La sortie du programme est l’ensemble des tensions de commande qui doivent être ajoutées au miroir déformable en plan pupille afin d’optimiser le contraste dans la moitié inférieure du plan focal. L’image résultante est la deuxième à partir de la gauche dans la Fig. 7.5. Un zoom en échelle linéaire est affiché dans la Fig. 7.6.

Cependant, le modèle numérique du banc THD n’est pas parfait. Dans le cadre de la diversité de phase, deux à trois itérations sont généralement nécessaires pour atteindre le minimum [Paul *et al.*, 2014b]. Pour cette raison, et même si ce serait inutile si le modèle numérique était parfait, nous effectuons un total de cinq corrections : nous estimons les aberrations de



phase et d'amplitude courantes ; nous les utilisons comme entrée du programme NLDH et nous appliquons ensuite les nouvelles tensions de contrôle calculées par le programme.

La procédure converge en trois itérations, puis sature sans divergence. Pour plus de clarté, les figures 7.5 et 7.6 n'affichent que l'image avant correction et le résultat des quatre premières itérations de correction – la cinquième itération est indiscernable de la quatrième. La figure 7.7 affiche le contraste dans le *dark hole* en fonction du nombre d'étapes de correction.



FIGURE 7.5 – De gauche à droite : image plan focal avant correction NLDH, après 1 correction, après 2 corrections, après 3 corrections, après 4 corrections. Échelle en arc de sinus hyperbolique, avec affichage volontairement saturé.

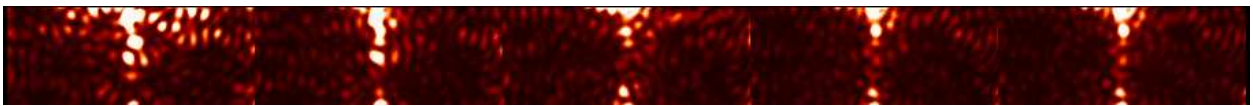


FIGURE 7.6 – De gauche à droite : image plan focal avant correction NLDH, après 1 correction, après 2 corrections, après 3 corrections, après 4 corrections. Échelle linéaire.

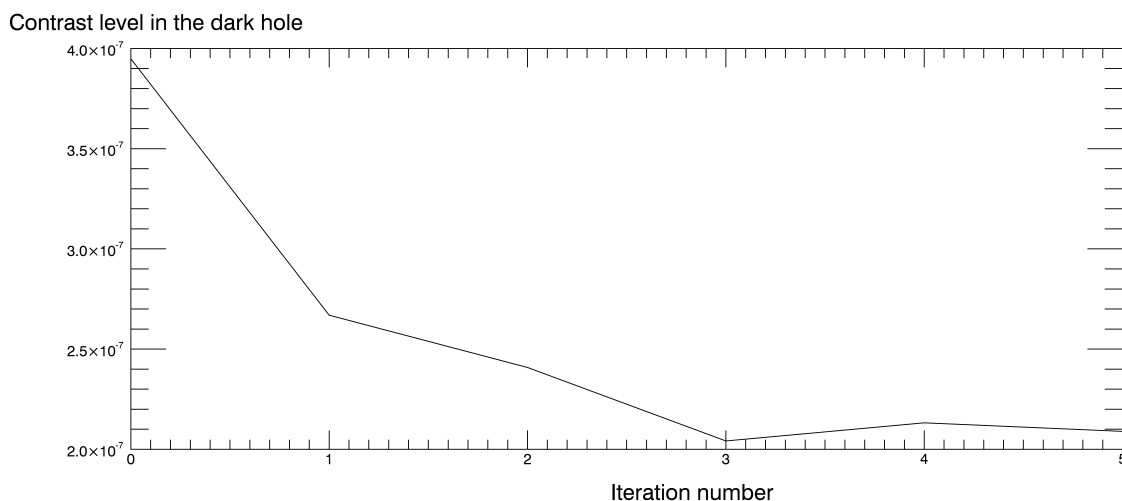


FIGURE 7.7 – Contraste dans le *dark hole* en fonction du nombre d'itérations de correction.

Il y a un effet clair des commandes d'optimisation du contraste en allant de l'itération 0 (l'image dans la situation initiale) à l'itération 3. Le contraste dans le *dark hole* s'améliore à chaque itération, et le gain final est de l'ordre d'un facteur 2 en contraste, qui passe de  $4 \times 10^{-7}$  à  $2 \times 10^{-7}$  dans la moitié du plan focal. L'erreur est principalement localisée sur l'axe,

avec quelques taches faibles hors de l'axe également. Si ce niveau de contraste n'est pas aussi bon que les records atteints par la méthode utilisant la SCC, on peut néanmoins noter sa convergence en trois itérations seulement.

Nous avons identifié deux raisons principales aux limitations rencontrées. Une première limitation est due à un défaut de connaissance des aberrations. Comme le front d'onde estimé par la SCC est obtenu dans le plan focal, il faut le rétropropager vers le plan pupille pour servir d'entrée au code NLDH. Cette rétropropagation numérique est vraisemblablement perfectible. Une autre manière de procéder serait d'utiliser COFFEE comme analyseur de surface d'onde pour l'optimisation non linéaire du contraste. En effet, COFFEE estime directement le champ complexe en plan pupille.

Une deuxième limitation est due à un défaut de connaissance de la matrice d'influence du miroir déformable : la technique d'optimisation non linéaire du contraste est sensible aux erreurs d'étalonnage du miroir déformable. Or le modèle utilisé du miroir déformable fait intervenir deux hypothèses de linéarité (en tension et spatiale), alors que malheureusement le miroir *Boston Micromachines Corporation* du banc THD est, par principe, non linéaire, et que cette non-linéarité n'est qu'imparfaitement corrigée. Le terme même de matrice d'influence est donc à comprendre comme autour d'un jeu de tensions données, et le miroir est imparfaitement étalonné. D'ailleurs, l'équipe du banc THD a rencontré le même problème de calibration du miroir déformable. Une campagne de mesure et de calibration du miroir a été effectuée avec le laboratoire d'astrophysique de Marseille. Les mesures réalisées à cette occasion doivent être dépouillées plus en profondeur pour délivrer un modèle de commande en tension et en amplitude du miroir.

## 7.4 Analyse des performance d'optimisation non linéaire du contraste par simulation numérique

L'optimisation non linéaire du contraste permet de trouver directement les tensions de commande du miroir déformable qui permettent d'améliorer le contraste. Or l'absence d'itérations de la méthode, ainsi que la qualité du contraste obtenu, dépendent de la qualité du modèle numérique de l'instrument.

Comme l'optimisation non linéaire du contraste n'a pour l'instant pas donné les performances attendues, j'explore dans cette section les raisons de l'écart entre performances prévues et performances effectivement obtenues. Cette étude est réalisée au moyen de simulations qui se veulent représentatives des difficultés expérimentales.

### 7.4.1 Simulation dans le cas où tous les paramètres sont parfaitement connus

Je présente un cas de simulation sans différence entre le modèle utilisé pour la simulation et le modèle utilisé par l'algorithme NLDH. Les performances atteintes dans ce cas me serviront de point de référence auquel les autres cas seront comparés. La figure 7.8 présente des résultats de simulation en présence de coronographe. L'instrument simulé se veut représentatif du banc THD. Il est équipé d'un coronographe à quatre quadrants, et fonctionne en lumière monochromatique à  $\lambda = 789$  nm. La matrice d'influence est une matrice synthétique créée par concaténation de la fonction d'influence de chaque actionneur du miroir déformable du banc THD, décrit par [Mazoyer, 2014]. L'aberration de phase en amont du coronographe, d'écart-type total 10 nm, suit une statistique représentative du banc THD lorsque les miroirs déformables minimisent le contraste dans toute leur zone de correction (SCC full dark hole). Il n'y a pas d'aberration d'amplitude. L'aberration dans la zone de correction des miroirs,

c'est à dire la zone d'intérêt, est d'écart-type 1 nm. La zone d'optimisation du contraste est le demi-plan focal inférieur limité à la zone de correction du miroir déformable. La distribution d'intensité avant optimisation du contraste est représentée sur la gauche. Le choix de densité spectrale d'énergie des aberrations explique la présence du carré central, plus sombre que les bords, et dont la frontière marque la limite de la zone de correction du miroir déformable. La distribution d'intensité après optimisation du contraste est représentée sur la droite. Le calcul de cette correction prend environ cinquante secondes sur un ordinateur de bureau équipé d'un processeur cadencé à 2,8 GHz. Ici, pour un seuil de convergence de l'algorithme fixé à  $10^{-3}$ , le contraste dans la zone d'optimisation du contraste est passé de  $2,4 \times 10^{-7}$  à  $1,2 \times 10^{-8}$ , soit un gain d'un facteur 20. La principale source de limitation à ce stade est le nombre de degrés de liberté du miroir déformable. Ce niveau de performance doit être atteint dans le cas où on connaît parfaitement les aberrations de phase et d'amplitude, où on connaît parfaitement le système optique, et le comportement du miroir déformable. Je vais maintenant estimer les performances dans le cas où ces hypothèses ne sont pas vérifiées. Les deux sources d'erreur qui me semblent prépondérantes lors des expériences sur le banc THD sont une connaissance imparfaite des aberrations optiques d'une part et de la matrice d'influence du miroir déformable d'autre part.

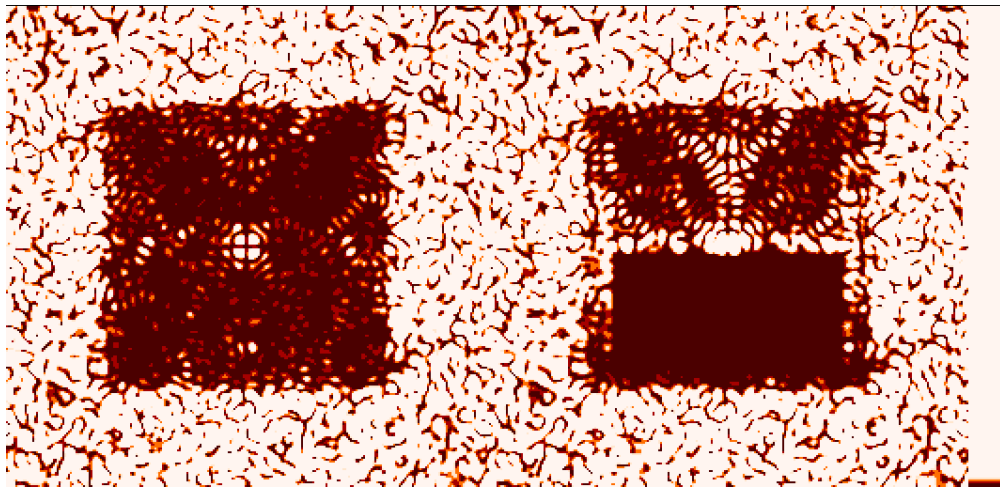


FIGURE 7.8 – À gauche : répartition de l'intensité lumineuse post-coronographique avant correction par NLDH (simulation). À droite : répartition de l'intensité lumineuse post-coronographique après correction par NLDH. Échelle en arc de sinus hyperbolique.

#### 7.4.2 Impact d'une méconnaissance des aberrations optiques

Comme l'optimisation non linéaire du contraste est fondée sur un modèle, tout écart entre les paramètres du modèle et le dispositif qu'il représente rejaillit sur la qualité du contraste. Le premier écart possible est la mesure des aberrations. La figure 7.9 montre le résultat d'une simulation où l'estimation de la phase en amont du coronographe est entachée d'une erreur d'écart-type 1 nm, et dont la statistique est celle de l'aberration de la phase amont vraie, ce qui donne une erreur d'écart-type 0,1 nm dans la zone corrigée.

La figure 7.10 présente un zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.9. La zone de contraste optimisé dans le cas où la phase était parfaitement connue est sur la gauche ; la zone de contraste optimisé dans le cas où la phase n'était qu'imparfaitement connue est sur la droite. L'erreur d'un nanomètre sur l'estimation de la phase engendre une remontée de 17% du contraste moyen dans la zone optimisée, avec un passage de  $1,2 \times 10^{-8}$  à  $1,4 \times 10^{-8}$ .

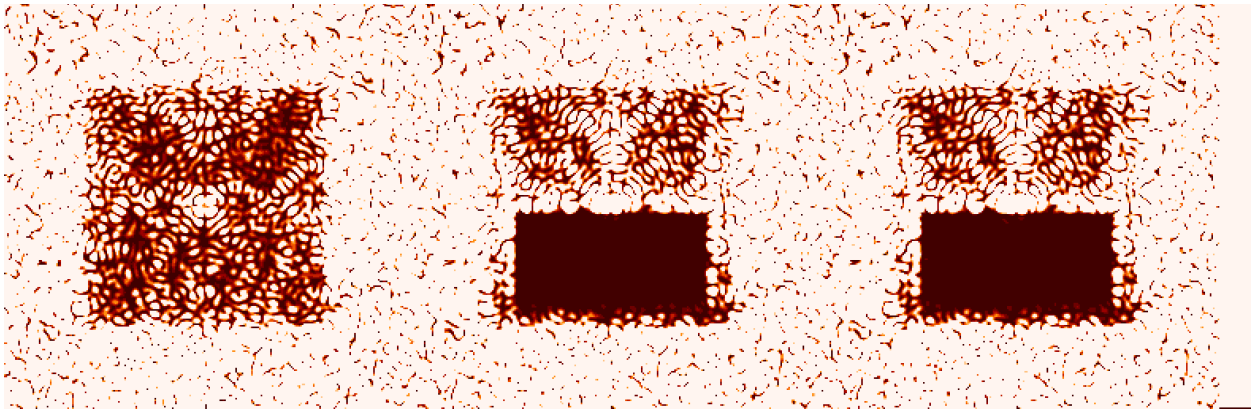


FIGURE 7.9 – À gauche : distribution d'énergie dans le plan du détecteur avant optimisation du contraste (image simulée, contraste de  $2,4 \times 10^{-7}$  dans le *dark hole*). Au milieu : distribution d'énergie après optimisation du contraste à partir d'une phase parfaitement connue (image simulée, contraste de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). À droite : distribution d'énergie après optimisation du contraste à partir d'une phase imparfaitement connue (image simulée, contraste de  $1,4 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). L'échelle est en argument de sinus hyperbolique.

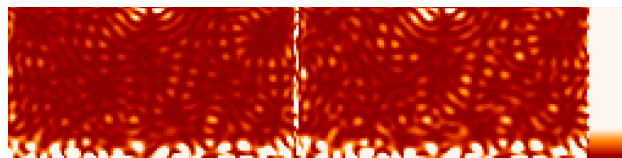


FIGURE 7.10 – Zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.9. À gauche : cas où la phase est parfaitement estimée. À droite : cas où la phase n'est qu'imparfaitement estimée. Échelle linéaire.

### 7.4.3 Simulation dans le cas où la matrice d'influence du miroir déformable est mal connue

La matrice d'influence qui modélise l'action du miroir déformable peut également être mal connue. La figure 7.11 montre le résultat d'une simulation où la réponse des actionneurs du miroir déformable diffère de la matrice d'influence utilisée par le programme d'optimisation. Pour chaque actionneur, la réponse à une tension varie d'une valeur donnée par la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée d'écart-type 0,05. Par contre, j'ai supposé pour cette simulation que la forme de la fonction d'influence de chaque actionneur est parfaitement connue, et qu'elle est la même pour tous les actionneurs. On constate dans ce cas que des tavelures bien visibles contaminent la zone de contraste optimisé. De plus, les défauts d'estimation de phase ne sont pas pris en compte dans ce cas : la phase estimée donnée en entrée du programme d'optimisation de contraste est la phase vraie.

La figure 7.12 présente un zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.11. La zone de contraste optimisé dans le cas où la matrice d'influence était parfaitement connue est sur la gauche ; la zone de contraste optimisé dans le cas où la matrice d'influence n'était qu'imparfaitement connue est sur la droite.

La différence de niveaux de contraste dans ce cas est bien supérieure à la différence dans le cas d'une erreur d'estimation de la phase : le contraste moyen est de  $7,1 \times 10^{-8}$  au lieu de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le cas où la matrice d'interaction est parfaitement connue.

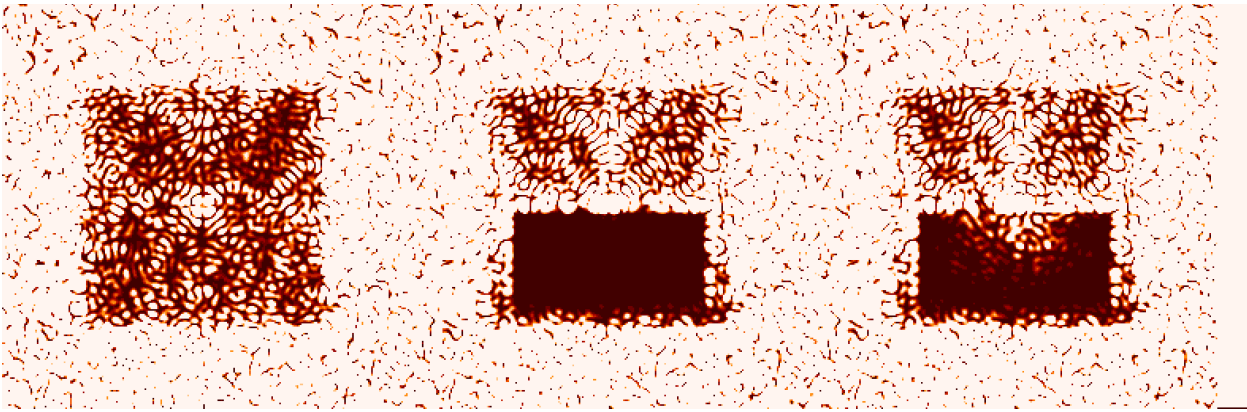


FIGURE 7.11 – À gauche : distribution d'énergie dans le plan du détecteur avant optimisation du contraste (image simulée, contraste de  $2,4 \times 10^{-7}$  dans le *dark hole*). Au milieu : distribution d'énergie après optimisation du contraste en connaissant parfaitement la matrice d'influence (image simulée, contraste de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). À droite : distribution d'énergie après optimisation du contraste en utilisant une matrice d'influence mal connue (image simulée, contraste de  $7,1 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). Échelle en argument de sinus hyperbolique.

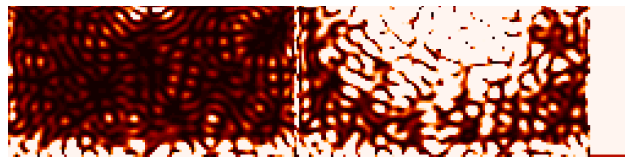


FIGURE 7.12 – Zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.11. À gauche : cas où la matrice d'interaction est parfaitement connue. À droite : cas où la matrice d'interaction n'est qu'imparfaitement connue. L'échelle est linéaire.

#### 7.4.4 Simulation dans le cas où l'estimation des aberrations comporte une erreur et où la matrice d'influence du miroir déformable est mal connue

Cette sous-section présente la manière dont les deux sources de perte de contraste précédentes interagissent. La figure 7.13 montre le résultat d'une simulation où l'estimation de la phase en amont du coronographe est entachée d'une erreur d'écart-type 1 nm et où la réponse en tension du miroir déformable est entachée de la même erreur que dans la sous-section précédente. Des tavelures sont de nouveau nettement visibles dans l'image de droite. La figure 7.12 présente un zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.11. La zone de contraste optimisé dans le cas où la matrice d'influence était parfaitement connue est sur la gauche ; la zone de contraste optimisé dans le cas où la matrice d'influence n'était qu'imparfaitement connue et les aberrations mal estimées est sur la droite.

Dans ce cas de figure, le contraste dans la zone de contraste optimisé est de  $7,2 \times 10^{-8}$ , contre  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le cas sans erreur, sachant qu'il est de  $7,1 \times 10^{-8}$  quand il n'y a pas d'erreur d'estimation de l'aberration de phase mais que la matrice d'influence est imparfaitement connue.

Cette dernière simulation montre que, au moins dans ce cas précis, les effets sur le contraste de l'erreur sur la matrice d'influence et de l'erreur d'estimation de phase semblent se cumuler quadratiquement tout en restant indépendants. À nouveau dans ce cas précis, c'est l'imprécision de la connaissance de la matrice d'influence du miroir déformable qui constitue la

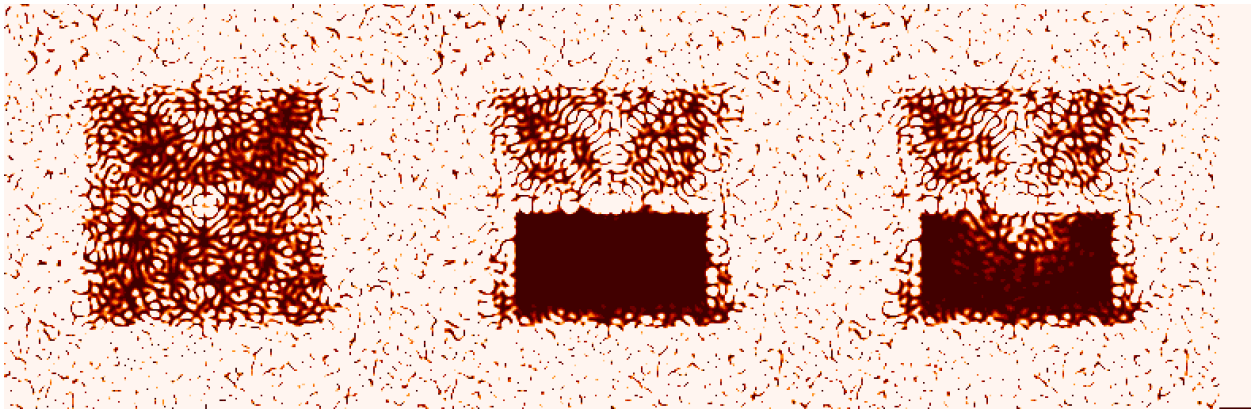


FIGURE 7.13 – À gauche : distribution d'énergie dans le plan du détecteur avant optimisation du contraste (image simulée, contraste de  $2,4 \times 10^{-7}$  dans le *dark hole*). Au milieu : distribution d'énergie après optimisation du contraste en connaissant parfaitement la matrice d'influence et à partir d'une phase parfaitement connue (image simulée, contraste de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). À droite : distribution d'énergie après optimisation du contraste par le code NLDH à partir d'aberrations imparfaitement estimées et en utilisant une matrice d'influence mal connue (image simulée, contraste de  $7,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). L'échelle est la même que sur la figure 7.9.

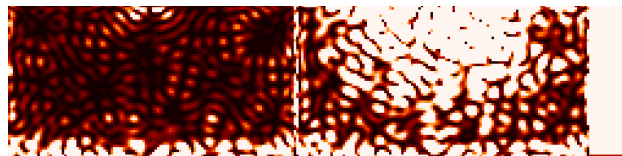


FIGURE 7.14 – Zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.13. À gauche : cas où la matrice d'interaction est parfaitement connue et les aberrations parfaitement estimées. À droite : cas où la matrice d'interaction n'est qu'imparfaitement connue et l'estimation des aberrations comporte une erreur. L'échelle est linéaire.

principale source d'erreurs. En pratique, l'impact de la mauvaise connaissance de la réponse du miroir est peut-être même plus grand encore que ce que suggèrent les simulations, car ces dernières supposent que les actionneurs ont tous la même forme de fonction d'influence, ce qui n'est pas le cas en réalité.

## Conclusion

J'ai réalisé les premières validations expérimentales de la technique d'optimisation non linéaire du contraste. Pour cela, j'ai d'abord participé à une série d'expériences sur le banc MITHiC au laboratoire d'astrophysique de Marseille, où Lucie Leboulleux et moi, aidés par Jean-François Sauvage, Laurent Mugnier, et Arthur Vigan avons pu tester le principe de la méthode en l'absence de coronographe. Dans un deuxième temps, j'ai participé à une série d'expériences sur le banc THD au laboratoire d'études spatiales et d'instrumentation en astrophysique de l'Observatoire de Paris, où Pierre Baudoz, Raphaël Galicher, Laurent Mugnier, Fabien Patru, Jean-François Sauvage et moi avons pu obtenir la première validation expérimentale de la méthode d'optimisation non linéaire du contraste, cette fois-ci en présence d'un coronographe à quatre quadrants. Ces premiers résultats sont modestes en termes de gain en contraste, mais

ils n'en constituent pas moins une démonstration de principe. De plus, les études numériques expliquent les limitations de performance, qui ne semblent pas insurmontables : ces travaux ne sont qu'un début !

---

## Conclusion et perspectives

---

**L**A RECHERCHE D'EXOPLANÈTES est depuis quelques décennies à la portée des instruments astronomiques. Plusieurs méthodes complémentaires sont employées. Parmi elles, l'imagerie directe d'exoplanètes, couplée à des méthodes spectroscopiques, permet la détection et la caractérisation des atmosphères de ces planètes. L'imagerie d'exoplanètes s'appuie sur l'usage de coronographes. Les défauts optiques des instruments coronographiques sont à l'origine de tavelures dans les images. Ces tavelures peuvent cacher une planète. Il faut donc mesurer et corriger les aberrations de ces instruments.

Ma thèse porte sur la mesure de ces aberrations directement dans le plan focal de l'instrument coronographique, ainsi que sur l'optimisation du contraste final. Les méthodes employées sont la diversité de phase coronographique pour l'estimation des aberrations, et l'optimisation non linéaire du contraste pour la correction. Ces deux méthodes ont pour point commun d'être fondées sur l'inversion d'un modèle non-linéaire de formation d'images par l'instrument. Mes travaux ont suivi deux axes. Le premier axe est l'adaptation de la diversité de phase coronographique à la mesure des aberrations de phase qui entachent les instruments au sol, et particulièrement la prise en compte de la turbulence corrigée par optique adaptative. Le deuxième axe est la mesure et la correction d'aberrations dans le cadre de missions spatiales à venir. Dans les régimes de très hautes performances visés par ces missions, il faudra mesurer et corriger activement le champ complexe d'aberrations.

Dans la première partie de ma thèse, j'ai présenté le formalisme de la diversité de phase coronographique de manière unifiée aussi rigoureusement que possible.

Dans la deuxième partie, j'ai étudié le problème de la mesure des aberrations des imageurs coronographiques pendant les observations, directement sur le ciel, par diversité de phase coronographique en présence de turbulence résiduelle post-optique adaptative. Pour cela, j'ai développé dans le chapitre 3 un modèle d'imagerie coronographique en présence de turbulence résiduelle. Ce modèle peut être vu comme une extension à l'imagerie coronographique de la formule classique de Roddier sur l'imagerie en présence de turbulence. Dans le chapitre 4, j'ai réalisé l'inversion de ce modèle afin de l'intégrer dans le programme COFFEE, ce qui a impliqué des travaux à la fois analytiques et algorithmiques. J'ai étudié numériquement les performances attendues par la méthode dans un cas représentatif de mesure d'aberrations de l'instrument SPHERE à partir d'images prises directement sur le ciel. La connaissance de la turbulence résiduelle est un point important de cette méthode. Enfin, dans le chapitre 5 j'ai validé expérimentalement la méthode sur le banc MITHiC dans des conditions représentatives



de SPHERE.

La perspective la plus immédiate qu'ouvrent ces travaux est bien sûr de porter la méthode COFFEE sur l'instrument SPHERE afin de mesurer et de corriger les aberrations de phase de l'instrument. Arthur Vigan et Mamadou N'Diaye ont récemment mené une campagne de mesures avec l'instrument SPHERE afin d'acquérir des mesures COFFEE et des mesures ZELDA sur ciel. Cette série de mesure, en cours de traitement pour COFFEE et déjà présentées en conférence pour ZELDA devraient permettre de mesurer les aberrations de l'instrument sur ciel et *in fine* d'en améliorer les performances.

Par ailleurs, plusieurs améliorations méthodologiques sont envisageables. On pourrait envisager de combiner les images scientifiques aux données mesurées par l'analyseur de surface d'onde de l'optique adaptative pour estimer directement la fonction de structure de phase de la turbulence. On pourrait également combiner COFFEE à des programmes de post-traitement afin de profiter à la fois de diversités temporelles, spectrales et de phase. Cette approche permettrait d'affiner les résultats des post-traitements en estimant conjointement les objets présents dans les images et les aberrations de l'instrument.

Dans la troisième partie de cette thèse, j'ai étudié le problème de l'analyse et de la correction de surface d'onde post-coronographique dans le contexte des très hautes performances attendues de missions spatiales. Dans le chapitre 6, j'ai validé expérimentalement l'estimation de champ complexe d'aberrations par diversité de phase coronographique avec une précision subnanométrique. J'ai également réalisé une première comparaison des reconstructions obtenues par la *self-coherent camera* et par l'algorithme COFFEE. Dans la suite de ces travaux, il serait intéressant d'étudier mathématiquement la forme de diversité optimale à utiliser. Pour cela, on pourrait tenter de trouver la phase de diversité qui minimise la borne de Cramér-Rao de l'estimateur COFFEE. Une difficulté de ce problème est que la solution dépend probablement de la phase à estimer elle-même. Enfin, dans le chapitre 7, j'ai réalisé les premières validations expérimentales d'optimisation non linéaire du contraste. J'ai obtenu une convergence en quelques itérations, et j'ai entamé une exploration des principales limitations de la méthode. Pour obtenir de meilleures performances, il faudra disposer de modèles très finement calibrés des instruments utilisés. En particulier la connaissance des aberrations optiques de l'instrument, qu'elle soit estimées par COFFEE ou par un autre analyseur de surface d'onde, devra être subnanométrique. Par ailleurs la connaissance du miroir déformable est un point crucial, car une simple erreur de quelques pour cents sur les commandes des actionneurs peut interdire une amélioration du contraste au-delà de  $10^{-7}$ . Dans le cadre de la préparation de la future mission spatiale *Wide Field InfraRed Survey Telescope* de la NASA, où les contrastes visés sont de l'ordre de  $10^{-9}$  [Trauger *et al.*, 2016], les méthodes classiques de correction seront trop lentes. Une collaboration entre le Jet Propulsion Laboratory et la communauté française représentée par le Centre national d'études spatiales est actuellement envisagée dans le but de développer la maturité de la technique d'optimisation non linéaire du contraste.

Ma thèse visait à améliorer nos capacités à produire des images d'exoplanètes. J'ai exposé une synthèse du formalisme de la diversité de phase coronographique. J'ai présenté des contributions théoriques sur la modélisation de la formation d'images coronographiques et sur l'inversion de ces modèles. Mes contributions numériques concernent également l'inversion de ces modèles, ainsi que des études sur les performances attendues en pratique. Mes travaux expérimentaux démontrent la faisabilité et les performances de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence résiduelle ou pour l'estimation de champs complexes. Ils démontrent également la faisabilité de l'optimisation non linéaire du contraste.

Puissent ces travaux contribuer à nous faire voir plus loin !

**Annexes :**  
**Calculs et publications**



« Students arrive from school confident that they know very nearly everything, and they leave years later certain that they know practically nothing. Where did the knowledge go in the meantime? Into the university, of course, where it is carefully dried and stored. »

Terry Pratchett

## Annexe A

---

# Publications, présentations et activités hors recherche

---

## A.1 Liste de publications

### A.1.1 Articles de revues à comité de lecture

1. **Olivier Herscovici-Schiller**, Laurent M. Mugnier, Pierre Baudoz, Raphaël Galicher, Jean-François Sauvage, et Baptiste Paul. “Experimental validation of joint phase and amplitude wave-front sensing with coronagraphic phase diversity for high-contrast imaging.” *Astronomy and Astrophysics*, 614 : A142, 2018. doi :10.1051/0004-6361/201732439.
2. **Olivier Herscovici-Schiller**, Laurent M. Mugnier, et Jean-François Sauvage. “An analytic expression for coronagraphic imaging through turbulence. Application to on-sky coronagraphic phase diversity”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters*, 467(1) : L105–L109, 2017. doi :10.1093/mnrasl/slx009.
3. **Olivier Herscovici-Schiller**, Jean-François Sauvage, Laurent M. Mugnier, Kjetil Dohlen et Arthur Vigan “Coronagraphic phase diversity through residual turbulence : performance study and experimental validation”. *Article soumis*.

### A.1.2 Actes de conférences internationales — présentations orales

1. **Olivier Herscovici-Schiller**, Pierre Baudoz, Laurent M. Mugnier, Raphaël Galicher, et Jean-François Sauvage. “Experimental validation of the non-linear dark hole on the THD bench”. Proceedings of the SPIE, 2018. United States. Présenté par Jean-François Sauvage.
2. **Olivier Herscovici-Schiller**, Jean-François Sauvage, Laurent M. Mugnier, Arthur Vigan et Kjetil Dohlen. “Towards on-sky coronagraphic wave-front sensing : Preliminary validation of coronagraphic phase diversity in the presence of residual turbulence”. In *The Fifth Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes conference*. AO4ELT5, 2017. Santa Cruz de Tenerife, Spain.

### A.1.3 Actes de conférences internationales — posters

1. Faustine Cantalloube, **Olivier Herscovici-Schiller**, Marie Ygouf, David Mouillet, et Laurent M. Mugnier. “Processing multispectral high-contrast images for exoplanet detection : Medusae, an inverse problem approach”. In *Astronomical telescopes and instrumentation. Proceedings of the SPIE*, 2018. United States.
2. Faustine Cantalloube, Marie Ygouf, **Olivier Herscovici-Schiller**, Laurent M. Mugnier, David Mouillet et Wolfgang Brandner. “Status of the MEDUSAE post-processing method to detect circumstellar objects in high-contrast multispectral images”. In *The Fifth Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes conference. AO4ELT5*, 2017. Santa Cruz de Tenerife, Spain.
3. **Olivier Herscovici-Schiller**, Laurent M. Mugnier, Pierre Baudoz, Raphaël Galicher, Jean-François Sauvage et Baptiste Paul. “Focal plane complex wavefront sensing with coronagraphic phase diversity on the THD2 bench”. In *The Fifth Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes conference. AO4ELT5*, 2017. Santa Cruz de Tenerife, Spain.
4. **Olivier Herscovici-Schiller**, Laurent M. Mugnier, Jean-François Sauvage, Jean-Michel Le Duigou et Faustine Cantalloube. “Analytical expression of a long exposure coronagraphic point spread function”. In E. Marchetti, L. M. Close et J.-P. Véran, editors, *Space Telescopes and Instrumentation 2016 : Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, pages 99096N–99096N–8. Proceedings of the SPIE, 2016. doi :dx.doi.org/10.1117/12.2234140. Edinburgh, United Kingdom.
5. Laurent M. Mugnier, Jean-François Sauvage, **Olivier Herscovici-Schiller**, Pierre Baudoz, Raphaël Galicher et Jean-Michel Le Duigou. “Coronagraphic wavefront sensing with COFFEE : high spatial-frequency diversity and other news”. In H. A. MacEwen, G. G. Fazio, M. Lystrup, N. Batalha, N. Siegler, and E. C. Tong, editors, *Space Telescopes and Instrumentation 2016 : Optical, Infrared et Millimeter Wave*, volume 9904, pages 99043A–99043A–10. Proceedings of the SPIE, 2016. doi :10.1117/12.2233726. Edinburgh, United Kingdom.

## A.2 Présentations orales sans actes

### A.2.1 Présentations à des spécialistes

1. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Coronagraphic wave-front sensing for exoplanet direct detection : progress on coronagraphic phase diversity.”, 2017. Invited seminar to the Max-Planck-Institut für Astronomie, Heidelberg, Germany.
2. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Experimental validation of online coronagraphic phase diversity & of the non-linear dark hole technique.”, 2017. Atelier sur l’imagerie à très haute dynamique, Marseille, France.
3. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Coronagraphic imaging with turbulence : an analytic expression with application to on-sky coronagraphic phase diversity.”, 2016. Wave-front sensing in the VLT/ELT area, Marseille, France.

### A.2.2 Présentations à un public de scientifiques non spécialistes

1. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Vers la détection d’exoplanètes depuis l’espace : reconstruction conjointe d’aberrations de phase et d’amplitude par diversité de phase coronographique, et optimisation du contraste au plan focal”, 2018. Journées d’imagerie optique non-conventionnelle, Paris, France.

2. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Analyse de surface d’onde coronographique en plan focal pour la détection d’exoplanètes.”, 2017. Journées des doctorants de l’ONERA, Paris, France.
3. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Inverse problems for imaging exoplanets.”, 2017. Summer school on inverse problems and imaging, Bremen, Germany.
4. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Vers la correction d’aberrations nanométriques pendant les observations pour l’imagerie d’exoplanètes.”, 2017. Journées d’imagerie optique non conventionnelle, Paris, France.
5. **Olivier Herscovici-Schiller** et al. “Coronagraphic imaging through turbulence.”, 2016. Conférence Elbereth, Paris, France.

### **A.3 Enseignement**

En première année, j’ai été assistant de travaux dirigés et travaux pratiques d’un module de traitement du signal à l’Université Paris VII – Denis Diderot en troisième année de licence. Le volume horaire des enseignements a été de trente heures. En deuxième année et troisième année, j’ai été responsable d’un module de filtrage de Kalman et commande par retour d’état à l’école d’ingénieurs de l’Université Paris VII – Denis Diderot en première année de master. J’ai assuré les cours, les travaux dirigés, les travaux pratiques et l’examen. Le volume horaire a été de vingt-quatre heures par an.

### **A.4 Tâches d’organisation**

J’ai été membre du comité d’organisation d’Elbereth 2017, la conférence annuelle des doctorants en astronomie et astrophysique d’Île-de-France. J’ai été responsable de l’organisation de la réunion hebdomadaire et du séminaire scientifique de l’unité haute résolution angulaire du département d’optique de l’ONERA pendant un an. J’ai également été chargé de la retransmission du séminaire du groupe d’instrumentation du laboratoire d’astrophysique de Marseille à l’ONERA pendant un an et demi.



*« The miracle of the  
appropriateness of the language  
of mathematics for the  
formulation of the laws of physics  
is a wonderful gift which we  
neither understand nor deserve. »*

---

Eugene Wigner

## *Annexe B*

---

# **Publication : forme analytique de la réponse impulsionnelle d'un télescope coronographique en présence de turbulence (*MNRAS*, 2017)**

---

Mon premier article traite du problème de la description analytique de la réponse impulsionnelle d'un télescope coronographique en présence de turbulence. Les travaux qui ont mené à cette publication sont présentés dans les chapitres 3 et 4. Il s'agit d'une extension de la formule de Roddier d'imagerie en présence de turbulence au cas coronographique, puis de résultats de simulations préliminaires sur la possibilité d'inclure ce modèle dans l'algorithme de diversité de phase coronographique.

This article has been accepted for publication in *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. Copyright 2017 the authors. Published by Oxford University Press on behalf of the Royal Astronomical Society. All rights reserved.





# An analytic expression for coronagraphic imaging through turbulence. Application to on-sky coronagraphic phase diversity

Olivier Herscovici-Schiller,<sup>1</sup>★ Laurent M. Mugnier<sup>1</sup> and Jean-François Sauvage<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ONERA – The French Aerospace Lab, F-92322 Châtillon, France

<sup>2</sup>Aix-Marseille Université, CNRS, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille UMR 7326, F-13388 Marseille, France

Accepted 2017 January 19. Received 2017 January 13; in original form 2016 November 8

## ABSTRACT

The ultimate performance of coronagraphic high-contrast exoplanet imaging systems such as SPHERE or GPI is limited by quasi-static aberrations. These aberrations produce speckles that can be mistaken for planets in the image. In order to design instruments, correct quasi-static aberrations or analyse data, the expression of the point spread function of a coronagraphic instrument in the presence of residual turbulence is most useful. Here, we derive an analytic expression for this point spread function that is an extension to coronagraphic imaging of Roddier's expression for imaging through turbulence. We give a physical interpretation of its structure, we validate it by numerical simulations and we show that it is computationally efficient. Finally, we incorporate this imaging model into a coronagraphic phase diversity method (COFFEE) and validate by simulations that it allows wave-front reconstruction in the presence of residual turbulence. The preliminary results, which give a sub-nanometric precision in the case of a SPHERE-like system, strongly suggest that quasi-static aberrations could be calibrated during observations by this method.

**Key words:** turbulence – instrumentation: adaptive optics – methods: analytical – methods: data analysis – techniques: high angular resolution – techniques: image processing.

## 1 INTRODUCTION

Direct detection of exoplanets is limited by the presence of speckles on scientific images. These speckles are induced by quasi-static aberrations in the optical systems that are not corrected by the adaptive optics loop. For SPHERE on the VLT, the quasi-static aberrations can be calibrated on an internal source thanks to COFFEE (see Paul et al. 2014), an extension of phase diversity (see Gonsalves 1982 for the principle of phase diversity, and Mugnier, Blanc & Idier 2006 for a review) to coronagraphic imaging. However, the quasi-static aberrations evolve during the observations, so it would be useful to calibrate them during the observations in order to reach the ultimate performance of the instrument. Since COFFEE uses a model of the instrument, an analytic expression of the long-exposure point spread function of a coronagraphic instrument in the presence of the residual turbulence of an adaptive optics system is needed.

To the best of our knowledge, no such general analytic expression has been previously published, even though the shape and properties of the coronagraphic point spread function have been explored, e.g. in Perrin et al. (2003) and Soummer et al. (2007b), and an analytic approach has previously been developed in Sauvage et al. (2010).

However, Sauvage et al. (2010) were based on the hypothesis of a perfect coronagraph, which does not exist, and yields unacceptable errors when used for coronagraphic phase diversity, as shown by Paul, Sauvage & Mugnier (2013b).

The purpose of this letter is first to present a general analytic expression for coronagraphic imaging through turbulence – which is an extension to the coronagraphic case of the well-known expression by Roddier (1981) for imaging through turbulence – and secondly to show that it can be integrated into COFFEE to measure quasi-static aberrations with nanometric precision during observations.

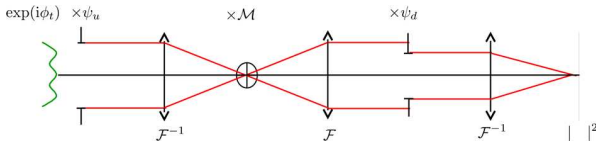
Moreover, the expression that we derive in this letter could be of great use for at least two other applications than wave-front sensing. One is the design, simulation and optimization of coronagraphic systems. The other is the processing of high-contrast images based on an imaging model, as proposed by Ygouf et al. (2013), which is essential for the detection and characterization of exoplanets.

## 2 CLASSICAL IMAGING THROUGH TURBULENCE AND INSTANTANEOUS CORONOGRAPHIC POINT SPREAD FUNCTION

### 2.1 Classical imaging through turbulence

Let us start with a reminder of the non-coronagraphic case of imaging through turbulence. The Fourier transform of equation (4.15) of

\* E-mail: [olivier.herscovici@onera.fr](mailto:olivier.herscovici@onera.fr)



**Figure 1.** Sketch of a telescope equipped with a coronagraph.

the classical text by Roddier (1981) shows that the long-exposure point spread function  $h_{le}$  of a telescope through a (possibly residual) turbulent atmosphere is

$$h_{le} = h_a \star h_s, \quad (1)$$

where  $h_s$  is the point spread function of the optical system (which accounts for quasi-static aberrations),  $\star$  is the convolution operator and  $h_a$  is the so-called atmospheric point spread function, which is the inverse Fourier transform of the atmospheric transfer function  $\tilde{h}_a$ :

$$\tilde{h}_a = \exp\left(-\frac{1}{2}D_\phi\right), \quad (2)$$

$D_\phi$  being the phase structure function of the (possibly residual) atmospheric turbulence.

This expression is appealing because it untangles the influence of the atmospheric turbulence from the influence of the quasi-static aberrations on the global point spread function.

We show below that an analogous formula can be derived for coronagraphic systems.

## 2.2 Instantaneous point spread function of a telescope equipped with a coronagraph

Let us consider an imaging system on a telescope equipped with a coronagraph as described in Fig. 1. We will denote by  $P_u$  the amplitude transmission in a pupil plane before the coronagraph, or ‘upstream pupil’,  $\phi_u$  the phase aberrations in this plane, which will be called ‘upstream aberrations’ hereafter, and  $\psi_u = P_u e^{i\phi_u}$  the complex amplitude in this plane. Similarly, we will denote by  $P_d$  the downstream transmission in a pupil plane after the coronagraph, or ‘downstream pupil’ (also called the Lyot stop plane),  $\phi_d$  the phase aberrations in this plane, which will be called ‘downstream aberrations’ hereafter, and  $\psi_d = P_d e^{i\phi_d}$  the multiplicative term – due to the downstream aberrations – that affects the complex amplitude of the wave that has propagated from the entrance aperture to this plane. For the sake of simplicity, we want to keep the same orientation of the images from one focal plane to the following, and the same pupil image orientation from one pupil plane to another. For this reason, we rotate the axis of the downstream plane by  $180^\circ$  with respect to the upstream plane, and similarly we rotate the orientation of the focal mask plane by  $180^\circ$  with respect to the final focal plane. This axis change is taken into account mathematically by choosing an inverse Fourier transform ( $\mathcal{F}^{-1}$ ) instead of a forward one ( $\mathcal{F}$ ) to model the propagation of light from a pupil to a focal plane.

This convention allows for the image orientation to always remain the same. Of course, our main result (equation 11) is independent of this orientation convention.

Let us denote by  $h_c$  the coronagraphic point spread function of the instrument without turbulence. It writes

$$h_c(\alpha; \psi_u, \psi_d) = |\mathcal{F}^{-1}\{\psi_d \times \mathcal{F}[\mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1}(\psi_u)]\}(\alpha)|^2, \quad (3)$$

where  $\alpha$  is the vector of angular coordinates of a position on the sky, and  $\mathcal{M}$  the coronagraphic focal plane mask. This equation

simply expresses the propagation from successive planes to the next ones and the quadratic detection, illustrated in Fig. 1. For notation simplicity we take  $\lambda = 1$  in the equations, that is to say we use the same coordinate system for the pupil phases and for the transfer functions.

In the presence of turbulence, the instantaneous point spread function of this instrument writes

$$h_{sec}(\alpha, t; \psi_u, \psi_d) = h_c(\alpha; \psi_u \times e^{i\phi_t(t)}, \psi_d). \quad (4)$$

Here,  $h_{sec}(\alpha, t, \psi_u, \psi_d)$  [sec stands for ‘short-exposure coronagraphic’] is the instantaneous point spread function taken at coordinate  $\alpha$  in the detector focal plane at time  $t$  and  $\phi_t(t)$  is the instantaneous residual turbulence phase at time  $t$  if the telescope is ground based and equipped with adaptive optics.

## 3 LONG-EXPOSURE CORONOGRAPHIC POINT SPREAD FUNCTION

In current high-contrast systems such as SPHERE or GPI, the exposure time is large with respect to the typical evolution time of corrected turbulence, so that the signal that is actually recorded by the detector is the long-exposure point spread function, which is an average over time of the short-exposure point spread function:

$$h_{lec}(\alpha; \psi_u, \psi_d) = \langle h_{sec}(\alpha, t; \psi_u, \psi_d) \rangle_t. \quad (5)$$

Here  $h_{lec}$  is the long-exposure coronagraphic point spread function, and  $\langle \cdot \rangle_t$  is the averaging over time. Let us denote by  $f^*$  the complex conjugate of any function  $f$ , and by  $\otimes$  the bi-dimensional correlation product:

$$f \otimes g(r) = \iint f^*(s)g(r+s) ds.$$

In developed form, the long-exposure coronagraphic point spread function writes, thanks to Wiener–Khinchine’s theorem:

$$\begin{aligned} h_{lec}(\alpha; \psi_u, \psi_d) &= \langle \mathcal{F}^{-1}\left(\{\psi_d \times \mathcal{F}[\mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1}(\psi_u e^{i\phi_t(t)})]\} \right. \\ &\quad \left. \otimes \{\psi_d \times \mathcal{F}[\mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1}(\psi_u e^{i\phi_t(t)})]\}(\alpha)\right)_t. \end{aligned} \quad (6)$$

To somewhat simplify calculations, we will consider the optical transfer function instead of the point spread function. Let  $\tilde{h}_{lec} = \mathcal{F}(h_{lec})$  be the Fourier transform of the point spread function. The integral over space commutes with the averaging over time, so

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{lec}(r; \psi_u, \psi_d) &= \langle \{\psi_d \times \mathcal{F}[\mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1}(\psi_u e^{i\phi_t(t)})]\} \\ &\quad \otimes \{\psi_d \times \mathcal{F}[\mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1}(\psi_u e^{i\phi_t(t)})]\}(r) \rangle_t. \end{aligned}$$

In order to express the average over time, we must fully develop this expression. We introduce the pupil-plane variables  $r_1, r_2$  and  $r_3$ , the focal-plane variables  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ . After some manipulations, the fully developed expression reads

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{lec}(r; \psi_u, \psi_d) &= \iint \psi_d^*(r_1)\psi_d(r+r_1) \iiint e^{i2\pi r_1 \alpha_1} \\ &\quad \times e^{-i2\pi(r_1+r)\alpha_2} \mathcal{M}^*(\alpha_1)\mathcal{M}(\alpha_2) \\ &\quad \times \iiint e^{-i2\pi r_2 \alpha_1} e^{i2\pi r_3 \alpha_2} \psi_u^*(r_2)\psi_u(r_3) \\ &\quad \times \langle e^{i[\phi_t(r_3,t) - \phi_t(r_2,t)]} \rangle_t dr_3 dr_2 d\alpha_2 d\alpha_1 dr_1. \end{aligned}$$

Following Roddier (1981), we assume that turbulence is an ergodic stationary process (which is a very reasonable assumption in the case

of residual turbulence after an extreme adaptive optics system), so we write

$$\langle e^{i[\phi_t(r_3,t) - \phi_t(r_2,t)]} \rangle_t = e^{-\frac{1}{2}D_\phi(r_3-r_2)}, \quad (7)$$

where  $D_\phi$  is the turbulent phase structure function, defined by

$$D_\phi(r) = \langle e^{i[\phi_t(r',t) - \phi_t(r+r',t)]} \rangle_t. \quad (8)$$

In order to be able to separate variables  $r_2$  and  $r_3$  in equation (8), we take the inverse Fourier transform of  $e^{-\frac{1}{2}D_\phi}$ . We denote  $\alpha'$  the conjugate variable of  $r_3 - r_2$ , and  $h_a$  is the atmospheric point spread function defined by equation (2). We will come back to the meaning of  $h_a$  in Section 4. We obtain

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{lec}}(r; \psi_u, \psi_d, D_\phi) &= \iint h_a(\alpha'; D_\phi) \iint \psi_d^*(r_1) \iint e^{i2\pi r_1 \cdot \alpha_1} \mathcal{M}^*(\alpha_1) \\ &\times \iint e^{-i2\pi r_2 \cdot \alpha_1} \psi_u^*(r_2) e^{-i2\pi r_2 \cdot \alpha'} dr_2 d\alpha_1 \\ &\times \psi_d(r+r_1) \iint e^{-i2\pi(r+r_1) \cdot \alpha_2} \mathcal{M}(\alpha_2) \\ &\times \iint e^{i2\pi r_3 \cdot \alpha_2} \psi_u(r_3) e^{i2\pi r_3 \cdot \alpha'} dr_3 d\alpha_2 dr_1 d\alpha'. \end{aligned}$$

In a more compact form, using  $\text{Id}$  to denote the identity function, this equation can be written as

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{lec}}(r; \psi_u, \psi_d, D_\phi) &= \iint h_a(\alpha'; D_\phi) \left\{ \psi_d \times \mathcal{F} \left[ \mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1} \left( \psi_u e^{i2\pi \alpha' \cdot \text{Id}} \right) \right] \right\} \\ &\otimes \left\{ \psi_d \times \mathcal{F} \left[ \mathcal{M} \times \mathcal{F}^{-1} \left( \psi_u e^{i2\pi \alpha' \cdot \text{Id}} \right) \right] \right\} (r) d\alpha'. \quad (9) \end{aligned}$$

To obtain the point spread function back from this optical transfer function, we just have to take the inverse Fourier transform, then apply Wiener–Khinchine’s theorem again. Finally, the long-exposure coronagraphic point spread function reads

$$\begin{aligned} h_{\text{lec}}(\alpha; \psi_u, \psi_d, D_\phi) &= \iint h_a(\alpha'; D_\phi) \left| \mathcal{F}^{-1} \left\{ \psi_d \cdot \mathcal{F} \left[ \mathcal{M} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left( \psi_u e^{i2\pi \alpha' \cdot \text{Id}} \right) \right] \right\} (\alpha) \right|^2 d\alpha'. \quad (10) \end{aligned}$$

This expression gives the long-exposure coronagraphic point spread function as a function of three deterministic parameters, namely: upstream aberrations, downstream aberrations and residual turbulence-induced phase structure function.

#### 4 PHYSICAL INTERPRETATION

In order to interpret equation (10) physically, we can re-write it in the more compact following form:

$$\boxed{h_{\text{lec}}(\alpha; \psi_u, \psi_d, D_\phi) = \iint h_a(\alpha'; D_\phi) h_c(\alpha; \psi_u e^{i2\pi \alpha' \cdot \text{Id}}, \psi_d) d\alpha', \quad (11)}$$

where  $h_c(\alpha; \psi_u e^{i2\pi \alpha' \cdot \text{Id}}, \psi_d)$  is the coronagraphic point spread function of the instrument in the absence of turbulence, but with a tilt  $\alpha'$  added to the upstream aberrations, that is to say with the light coming from the star being tilted by an angle  $\alpha'$ .

A physical interpretation of the atmospheric point spread function defined in equation (2) can shed some light on the expression of equation (11). Recall that

$$h_a \triangleq \mathcal{F}^{-1} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} D_\phi \right) \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[ \langle e^{i[\phi_t(r+r',t) - \phi_t(r',t)]} \rangle_t \right].$$

If we note  $\psi_t(r, t) = \exp(i\phi_t(r, t))$ , the contribution to the electric field at position  $r$  and time  $t$  by the atmospheric turbulence, we can re-write  $h_a$  as

$$h_a = \mathcal{F}^{-1} \left[ \langle \psi_t^*(r', t) \psi_t(r+r', t) \rangle_t \right]. \quad (12)$$

Assuming stationariness and ergodicity, we recognize the inverse Fourier transform of the autocorrelation of  $\psi_t$ . Hence, we can identify  $h_a$  as the energy spectral density of the turbulence-induced complex field. In other words,  $h_a(\alpha')$  gives the fraction of the energy of light that is diffracted in each direction  $\alpha'$ .

Finally, equation (11) can be interpreted as an incoherent plane wave decomposition: the long-exposure coronagraphic point spread function  $h_{\text{lec}}$  is a weighted sum of coronagraphic point spread functions  $h_c$ , without any turbulence, but with an upstream tilt  $\alpha'$ . The weight on any of these tilted point spread functions is the fraction of the light energy  $h_a(\alpha')$  that the atmosphere scatters in the direction of the corresponding tilt  $\alpha'$ .

Moreover, the expression of equation (11) separates the turbulent part and the coronagraphic part of the problem:  $h_a$  codes for the characteristics of the turbulent atmosphere, while  $h_c$  codes for the characteristics of the instrument. This separation of the point spread function into an atmospheric point spread function and a point spread function of the instrument is strikingly similar to the one found in the Roddier expression for non-coronagraphic imaging.

## 5 SPECIAL CASES

### 5.1 Non-turbulent point spread function

As a first particular case, let us assume that there is no turbulence, so that  $h_a$  is reduced to a Dirac distribution. Indeed, in the case where there is no turbulence,  $\phi_t$  is a constant, so  $D_\phi = \langle [\phi_t(r') - \phi_t(r+r')]^2 \rangle_{r'} = 0$ . Then, according to equation (2),  $h_a = \delta$ . Hence, by use of equation (11),

$$h_{\text{lec}}(\alpha; \psi_u, \psi_d) = h_c(\alpha; \psi_u, \psi_d), \quad (13)$$

which is precisely the classical expression for a coronagraphic point spread function in the absence of turbulence.

### 5.2 Non-coronagraphic optical transfer function

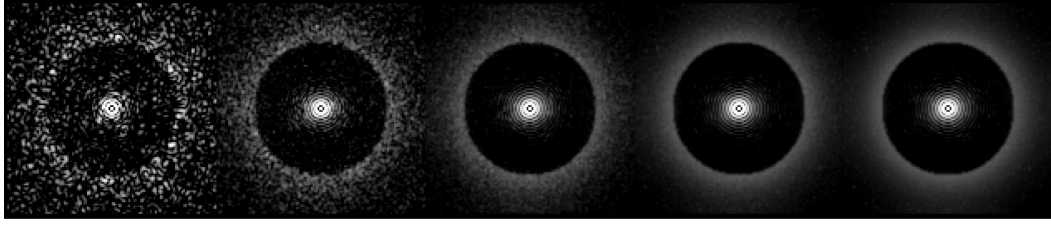
As a second particular case, if we now consider a non-coronagraphic instrument,  $\mathcal{M} = 1$ , so equation (10) reads

$$\begin{aligned} h_{\text{lec}}(\alpha; \psi_u, \psi_d, D_\phi) &= \iint h_a(\alpha'; D_\phi) \left| \mathcal{F}^{-1} \left\{ \psi_d \psi_u e^{i2\pi \alpha' \cdot \text{Id}} \right\} (\alpha) \right|^2 d\alpha' \\ &= h_a(D_\phi) \star \left| \mathcal{F}^{-1} \{ \psi_d \psi_u \} \right|^2 (\alpha), \quad (14) \end{aligned}$$

which is identical to equation (1), with  $h_s = \left| \mathcal{F}^{-1} \{ \psi_d \psi_u \} \right|^2$ , that is to say that the aberration is the sum of the upstream and downstream aberrations. The long-exposure optical transfer function is thus

$$\tilde{h}_{\text{lec}}(r; \psi_u, \psi_d) = \tilde{h}_a(r) \times (\psi_d \psi_u \otimes \psi_d \psi_u)(r), \quad (15)$$

which is the classical formula by Roddier (1981) of the long-exposure transfer function for imaging through turbulence; indeed



**Figure 2.** Point spread functions. From left to right: short exposure, averages of 10, 100 and 1000 exposures, and analytic long exposure calculated with equation (11).

the autocorrelation of  $\psi_d \psi_u$  is the optical transfer function of the instrument due to diffraction and quasi-static aberrations.

### 5.3 Approximation in the case of weak turbulence

Additional insight on equation (11) can be gained by assuming that the residual turbulence phase after the adaptive optics is a small perturbation. It is straightforward to see that

$$\frac{1}{2} D_\phi(r) = \sigma_\phi^2 - A_\phi(r),$$

where  $A_\phi(r) = \langle \phi_t(r') \phi_t(r+r') \rangle_{r'}$  is the autocorrelation of the phase, hence

$$h_a = e^{-\sigma_\phi^2} \mathcal{F}^{-1} [e^{A_\phi}].$$

Then, if the turbulence is small,  $A_\phi$  is small compared to 1, and we can perform a first-order Taylor expansion:

$$h_a(\alpha') \simeq e^{-\sigma_\phi^2} \mathcal{F}^{-1} [1 + A_\phi] (\alpha')$$

$$h_a(\alpha') \simeq e^{-\sigma_\phi^2} \delta(\alpha') + e^{-\sigma_\phi^2} S_\phi(\alpha'),$$

where  $S_\phi$  is the power spectrum density of the turbulent phase  $\phi_t$ , defined as the (inverse) Fourier transform of  $A_\phi$ . Thus, we can express  $h_{lec}$ :

$$\begin{aligned} h_{lec}(\alpha; \psi_u, \psi_d) \\ \simeq e^{-\sigma_\phi^2} \times \left[ h_c(\alpha; \psi_u, \psi_d) + \iint S_\phi(\alpha') h_c(\alpha; \psi_u e^{i2\pi\alpha'}, \psi_d) d\alpha' \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

This means that  $h_{lec}$  is approximately the non-turbulent coronagraphic point spread function, with a corrective additive term that takes into account the power spectrum density of the turbulent phase, all this damped by the coherent energy  $e^{-\sigma_\phi^2}$ .

## 6 NUMERICAL VALIDATION AND EFFICIENCY CONSIDERATIONS

### 6.1 Numerical validation

To validate our point spread function model, we test it against an average of short-exposure point spread functions, each one of them with a different outcome of the residual turbulence-induced phase. Each short-exposure point spread function is computed using a matrix Fourier transform as proposed by Soummer et al. (2007a) in order to perform an accurate computation of the field on the mask focal plane. A few averages of point spread functions are displayed on Fig. 2. They are simulated with a Lyot coronagraph of diameter  $3\lambda/D$ , the residual turbulence of a SPHERE-like adaptive optics and upstream and downstream white noise phase aberrations of variance  $0.1 \text{ rad}^2$ .

Let us define the convergence error as follows. We denote by  $h_{lec}$  the long-exposure point spread function using the analytic formula of equation (11). We denote  $h_{sseN}$  the average of  $N$  short exposures. We define the error as  $\text{err}_N = \max(|h_{sseN} - h_{lec}|/h_{lec})$ , where the division is taken pixel by pixel. We have performed a simulation of the evolution of error versus  $N$ , the number of short exposures. The error tends to zero as  $N^{-1/2}$ , which is consistent with the central limit theorem. The error goes below  $10^{-3}$  just after  $N = 10^7$  short exposures.

### 6.2 Computing cost

The evolution of the convergence error gives us an easy criterion to quantify the comparative computing costs of the long-exposure coronagraphic point spread function and the empirical average of short exposures. Let us take the computing cost of a short-exposure point spread function as the unit computing cost. Then, if we want an error of less than  $10^{-3}$  on the point spread function, approximately  $10^7$  short-exposure point spread functions must be averaged, for a cost of  $10^7$ . The analytic formula for the long-exposure point spread function has a total cost of the number of points on which the phase structure function is known. This implies that, for square images of  $512 \times 512$  pixels, our exact formula is about 38 times less costly to evaluate than an average of short exposures.

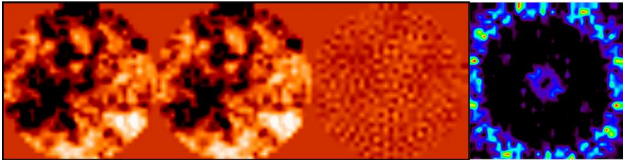
In addition, it should be noted that, since the long exposure is an integral, and thus, in practice, a sum, it is very easy to compute it in parallel on several processors. We made all calculations in parallel on 16 cores.

Finally, it should also be noted that a useful approximation can accelerate the computing of the long-exposure point spread function by a great deal. Indeed, when the tilt  $\alpha'$  is sufficiently greater than the radius of the focal-plane mask of the coronagraph, the point spread function can be well approximated by a shifted non-coronagraphic point spread function that can be computed once and for all, so the sum in equation (11) for the computation of the long-exposure point spread function must actually only be computed on a square of typical width  $8\lambda/D$ . For a Nyquist-rate sampled image, that is only  $16 \times 16$  short-exposure point spread functions, with a maximum relative error of less than  $10^{-3}$  on each pixel for SPHERE-like parameters.

## 7 APPLICATION: ESTIMATION OF QUASI-STATIC ABERRATIONS WITH COFFEE IN THE PRESENCE OF RESIDUAL TURBULENCE

### 7.1 Motivation

In current systems such as SPHERE, quasi-static aberrations are only corrected during day-time. For an upgrade, or for future



**Figure 3.** Left: upstream aberrations that we aim to reconstruct. Centre left: reconstructed aberration. Centre right: difference, magnified a hundred times. Right: modulus of the Fourier transform of the phase estimation error.

high-contrast instruments on extremely large telescopes, it would be useful to correct them during the scientific acquisition. To achieve this, we combine COFFEE (see Paul et al. 2013a, 2014) with the long-exposure phase diversity proposed by Mugnier et al. (2008).

## 7.2 Simulation results

We have incorporated the long-exposure coronagraphic imaging model developed above into the coronagraphic phase diversity method COFFEE. In the following, we perform a preliminary validation of the quasi-static aberration estimation with COFFEE in the presence of residual turbulence by means of simulation. The parameters of the simulations are the following: the phase map size is  $64 \times 64$  pixels, the incoming flux is  $10^9$  photoelectrons, the standard deviation of the readout noise is 1 electron, the (supposedly monochromatic) wavelength is 1589 nm. The phase structure function is typical of the residual turbulence of the extreme adaptive optics system of the SPHERE instrument of the VLT, the coronagraph is a Roddier & Roddier phase mask, and there are no downstream aberrations. The upstream aberration is 50 nm RMS. Fig. 3 shows the true upstream aberrations, the estimated upstream aberrations, and the difference between the upstream aberrations and the estimated ones, magnified a hundred times. The error in this case is much less than 1 nm RMS, which is a very encouraging result. Additionally, the usefulness of this reconstruction is even better than what the estimated error suggests. Indeed, if we examine the Fourier transform of the difference on Fig. 3, we notice that the error is mainly located on the spatial frequencies that are on the border of the array, that is to say, those that are not corrected by the deformable mirror. Quantitatively, the error in the corrected zone accounts for less than 10 per cent of the total estimation error variance.

## 8 CONCLUSION AND PERSPECTIVES

To summarize this work, we have derived an analytic expression to model long-exposure image formation for a coronagraphic telescope through the residual turbulence of an extreme adaptive optics system. This model is general and valid for any coronagraphic mask. It only depends on three deterministic quantities: quasi-static aberrations before and after the coronagraph, and the residual phase

structure function. Its expression shows, quite nicely, that the long-exposure coronagraphic point spread function is the weighted sum of coronagraphic point spread functions without turbulence with a weight distribution given only by the turbulence-induced residual phase structure function. It is computationally effective, allowing a time gain of at least an order of magnitude on standard-sized images. Lastly, we have obtained numerical results that suggest that this long-exposure model can be applied to the on-sky measurement and correction of aberrations in the context of ground-based direct exoplanet detection.

These encouraging results suggest that we carry on working in two directions. On the one hand, we will explore the robustness of the COFFEE estimations to an error on the phase structure function of the residual atmospheric turbulence. On the other hand, we will demonstrate experimentally that COFFEE can estimate aberrations through turbulence, first on a laboratory bench and then on sky.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The PhD work of O. Herscovici-Schiller is co-funded by CNES and ONERA. We thank J.-M. Le Duigou for his support. This work received funding from the E.U. under FP7 Grant Agreement No. 312430 OPTICON, from the CNRS (Défi Imag'In) and from ONERA in the framework of the VASCO research project. We thank Dr Faustine Cantalloube for fruitful discussions. We thank the reviewer for his careful review and constructive comments.

## REFERENCES

- Gonsalves R. A., 1982, *Opt. Eng.*, 21, 829  
Mugnier L. M., Blanc A., Idier J., 2006, in Hawkes P., ed., *Advances in Imaging and Electron Physics*, Vol. 141. Elsevier, Amsterdam, p. 1  
Mugnier L. M., Sauvage J.-F., Fusco T., Cornia A., Dandy S., 2008, *Opt. Express*, 16, 18406  
Paul B., Mugnier L. M., Sauvage J.-F., Dohlen K., Ferrari M., 2013a, *Opt. Express*, 21, 31751  
Paul B., Sauvage J.-F., Mugnier L. M., 2013b, *A&A*, 552, A48  
Paul B. et al., 2014, *A&A*, 572, A32  
Perrin M. D., Sivaramakrishnan A., Makidon R. B., Oppenheimer B. R., Graham J. R., 2003, *ApJ*, 596, 702  
Roddier F., 1981, in Wolf E., ed., *The Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy*, *Progress in Optics* Vol. XIX. Elsevier, Amsterdam, p. 281  
Sauvage J.-F., Mugnier L. M., Rousset G., Fusco T., 2010, *J. Opt. Soc. Am. A*, 27, A157  
Soummer R., Pueyo L., Sivaramakrishnan A., Vanderbei R. J., 2007a, *Opt. Express*, 15, 15935  
Soummer R., Ferrari A., Aime C., Jolissaint L., 2007b, *ApJ*, 669, 642  
Ygouf M., Mugnier L. M., Mouillet D., Fusco T., Beuzit J.-L., 2013, *A&A*, 551, A138

This paper has been typeset from a  $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.

## Annexe C

### Calculs

#### C.1 Preuve que la covariance de la transformée de Fourier d'une aberration stationnaire est diagonale

Cette section démontre un résultat utilisé dans le chapitre 2 pour établir l'expression du terme de régularisation du critère utilisé par la diversité de phase coronographique.

L'aberration  $\phi_{\text{up}}$  est stationnaire. Le calcul qui suit montre que la covariance de sa transformée de Fourier,  $\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}$ , est diagonale. Soient  $a$  et  $b$  deux points entre lesquels on calcule  $\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}$ .

$$\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}(a, b) = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{F}[\phi_{\text{up}}]^*(a) \mathcal{F}[\phi_{\text{up}}](b) \right\} \quad (\text{C.1})$$

$$= \mathbb{E} \left[ \iint \phi_{\text{up}}^*(r_1) e^{2i\pi r_1 a} \, dr_1 \iint \phi_{\text{up}}(r_2) e^{-2i\pi r_2 b} \, dr_2 \right] \quad (\text{C.2})$$

$$= \iiint \mathbb{E}[\phi_{\text{up}}^*(r_1) \phi_{\text{up}}(r_2)] e^{-2i\pi(r_2 b - r_1 a)} \, dr_2 \, dr_1 \quad (\text{C.3})$$

$$\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}(a, b) = \iiint \mathbb{E}[\phi_{\text{up}}^*(r_1) \phi_{\text{up}}(r_1 + \Delta r)] e^{-2i\pi r_1(b-a)} e^{-2i\pi b \Delta r} \, d\Delta r \, dr_1, \quad (\text{C.4})$$

où on a utilisé le changement de variable  $r_2 = r_1 + \Delta r$ . Les aberrations étant stationnaires,  $\mathbb{E}[\phi_{\text{up}}^*(r_1) \phi_{\text{up}}(r_1 + \Delta r)]$  est indépendant de  $r_1$ , on peut le noter  $\Sigma_{\phi_{\text{up}}}(\Delta r)$ . Alors, le calcul précédent se simplifie en

$$\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}(a, b) = \iint e^{-2i\pi r_1(b-a)} \, dr_1 \iint \Sigma_{\phi_{\text{up}}}(\Delta r) e^{-2i\pi b \Delta r} \, d\Delta r \quad (\text{C.5})$$

$$= \mathcal{F}[\Sigma_{\phi_{\text{up}}}] (b) \delta(b-a) \quad (\text{C.6})$$

$$\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}(a, b) = \mathcal{S}_{\phi_{\text{up}}}(b) \delta(b-a), \quad (\text{C.7})$$

où on a noté  $\mathcal{S}_{\phi_{\text{up}}}$  la densité spectrale d'énergie des aberrations. On a donc montré que  $\Sigma_{\mathcal{F}(\phi_{\text{up}})}$  est diagonale.

## C.2 Évaluation de l'espérance d'une différence de phases turbulentes

Cette section démontre un résultat utilisé dans le chapitre 3 pour établir l'équation (3.24). Ce calcul détaille un raisonnement esquissé par [Roddi, 1981], page 293. On modélise le déphasage induit par la turbulence atmosphérique, ou éventuellement la turbulence atmosphérique résiduelle après correction par une optique adaptative, comme un processus stochastique stationnaire ergodique gaussien. En effet, le déphasage du front d'onde résulte de la somme des perturbations élémentaires tout le long du trajet de la lumière à travers l'atmosphère; le théorème central sur la limite permet donc de modéliser le processus comme gaussien. Comme les conditions atmosphériques à l'origine de la turbulence évoluent plus lentement que la turbulence elle-même, on peut considérer ce processus comme stationnaire ergodique, au moins en première approximation. On peut donc identifier moyenne temporelle et espérance.

Le problème est d'évaluer  $\left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t)-\phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t$  en fonction de grandeurs accessibles.

De manière générale, en probabilités, la fonction  $g_\Phi$  définie par

$$g_\Phi(\nu) = \mathbb{E}(e^{i\nu\Phi}) \quad (\text{C.8})$$

est appelée la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $\Phi$ .

On peut reconnaître la grandeur recherchée,  $\left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t)-\phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t$ , comme la valeur à la fréquence unité  $\nu = 1$  de la fonction caractéristique  $g_{\phi_t(r_3)-\phi_t(r_2)}$  de la variable aléatoire  $\phi_t(r_3) - \phi_t(r_2)$ :

$$g_{\phi_t(r_3)-\phi_t(r_2)}(1) = \left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t)-\phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t \quad (\text{C.9})$$

Le problème initial peut donc être ramené au calcul de  $g_{\phi_t(r_3)-\phi_t(r_2)}(1)$ .

Pour faire ce calcul, on sait que la variable aléatoire  $\phi_t(r_3) - \phi_t(r_2)$  est gaussienne de moyenne nulle comme différence de variables aléatoires gaussiennes et de moyennes nulles. Or, de manière générale, la fonction caractéristique  $g$  d'une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  est donnée par

$$g(\nu) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\nu^2}. \quad (\text{C.10})$$

La variance de  $\phi_t(r_3) - \phi_t(r_2)$  est donnée par  $\left\langle |\phi_t(r_3;t) - \phi_t(r_2;t)|^2 \right\rangle_t$ : c'est précisément  $D_{\phi_t}(r_3 - r_2)$  par définition même de  $D_{\phi_t}$ , équation (3.1).

Finalement, ceci montre que  $\left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t)-\phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t$  est précisément  $g(1)$ , avec une variance  $\sigma^2 = D_{\phi_t}(r_3 - r_2)$ . Donc on peut finalement écrire que

$$\left\langle e^{i[\phi_t(r_3;t)-\phi_t(r_2;t)]} \right\rangle_t = g(1) = e^{-\frac{1}{2}D_{\phi_t}(r_3-r_2)}. \quad (\text{C.11})$$

## C.3 Calcul d'une dérivée intervenant dans l'expression du terme de régularisation par rapport à la phase

Cette section démontre un résultat de calcul des variations qui est utilisé dans le chapitre 4 pour établir le gradient du terme de régularisation par rapport à la phase. Soit  $\phi$  une fonction réelle d'une variable réelle notée  $x$ . Soit  $\mathcal{R}$  la fonctionnelle définie par

$$\mathcal{R}[\phi] = \frac{1}{2} \int \left| \frac{d\phi}{dx}(x) \right|^2 dx. \quad (\text{C.12})$$

Le calcul qui suit établit par une méthode élémentaire l'expression de la dérivée de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\phi$ . Soit  $\delta\phi$  une fonction aussi régulière que nécessaire, à décroissance rapide aux

bords du domaine de définition. Alors,

$$\mathcal{R}[\phi + \delta\phi] = \frac{1}{2} \int \left| \frac{d[\phi + \delta\phi]}{dx}(x) \right|^2 dx \quad (\text{C.13})$$

$$\mathcal{R}[\phi + \delta\phi] = \frac{1}{2} \int \left| \frac{d\phi}{dx}(x) \right|^2 dx + \int \frac{d\phi}{dx}(x) \times \frac{d\delta\phi}{dx}(x) dx + \frac{1}{2} \int \left| \frac{d\delta\phi}{dx}(x) \right|^2 dx \quad (\text{C.14})$$

Par définition, la dérivée de  $\mathcal{R}$  est contenue dans la partie linéaire de cette expression :

$$\int \frac{d\mathcal{R}}{d\phi}[\phi](x) \times \delta\phi(x) dx = \int \frac{d\phi}{dx}(x) \times \frac{d\delta\phi}{dx}(x) dx. \quad (\text{C.15})$$

En intégrant par parties l'expression précédente en tenant compte du fait que  $\delta\phi$  s'annule aux bords,

$$\int \frac{d\mathcal{R}}{d\phi}[\phi](x) \times \delta\phi(x) dx = - \int \frac{d^2\phi}{dx^2}(x) \times \delta\phi(x) dx, \quad (\text{C.16})$$

et on a donc finalement

$$\frac{d\mathcal{R}}{d\phi}[\phi] = x \mapsto - \frac{d^2\phi}{dx^2}(x). \quad (\text{C.17})$$





---

# Bibliographie

---

- [Abe *et al.*, 2003] ABE, L., de SOUZA, A. D., VAKILI, F. et GAY, J. (2003). Phase Knife Coronagraph - II - Laboratory results. *Astronomy & Astrophysics*, 400(1):385–392.
- [Archimède, 212] ARCHIMÈDE (212). *L'Arénaire*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- [Benedict *et al.*, 2002] BENEDICT, G. F., MCARTHUR, B. E., FORVEILLE, T., DELFOSSE, X., NELAN, E., BUTLER, R. P., SPIESMAN, W., MARCY, G., B. GOLDMAN, PERRIER, C., JEFFERYS, W. H. et MAYOR, M. (2002). A Mass for the Extrasolar Planet Gliese 876b Determined from Hubble Space Telescope Fine Guidance Sensor 3 Astrometry and High-Precision Radial Velocities. *The Astrophysical Journal Letters*, 581(2):L115.
- [Beuzit *et al.*, 2008] BEUZIT, J.-L., FELDT, M., DOHLEN, K., MOUILLET, D., PUGET, P., WILDI, F., ABE, L., ANTICHI, J., BARUFFOLO, A., BAUDOZ, P., BOCCALETTI, A., CARBILLET, M., CHARTON, J., CLAUDI, R., DOWNING, M., FABRON, C., FEAUTRIER, P., FEDRIGO, E., FUSCO, T., GACH, J.-L., GRATTON, R., HENNING, T., HUBIN, N., JOOS, F., KASPER, M., LANGLOIS, M., LENZEN, R., MOUTOU, C., PAVLOV, A., PETIT, C., PRAGT, J., RABOU, P., RIGAL, E., ROELFSEMA, R., ROUSSET, G., SAISSE, M., SCHMID, H.-M., STADLER, E., THALMANN, C., TURATTO, M., UDRY, S., VAKILI, F. et WATERS, R. (2008). SPHERE : a planet finder instrument for the VLT. *In Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy II*, volume 7014, page 701418. International Society for Optics and Photonics.
- [Blanc, 2002] BLANC, A. (2002). *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apport de la diversité de phase*. Thèse de doctorat, Université Paris XI.
- [Bond *et al.*, 2004] BOND, I. A., UDALSKI, A., JAROSZYŃSKI, M., RATTENBURY, N. J., PACZYŃSKI, B., SOSZYŃSKI, I., WYRZYKOWSKI, L., SZYMAŃSKI, M. K., KUBIAK, M., SZEWCZYK, O., ŻEBRUŃ, K., PIETRZYŃSKI, G., ABE, F., BENNETT, D. P., EGUCHI, S., FURUTA, Y., HEARNshaw, J. B., KAMIYA, K., KILMARTIN, P. M., KURATA, Y., MASUDA, K., MATSUBARA, Y., MURAKI, Y., NODA, S., K. OKAJIMA, SAKO, T., SEKIGUCHI, T., SULLIVAN, D. J., SUMI, T., TRISTRAM, P. J., YANAGISAWA, T., YOCK, P. C. M., THE MOA et OGLE COLLABORATIONS (2004). OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53 : A Planetary Microlensing Event. *The Astrophysical Journal Letters*, 606(2):L155.
- [Bordé et Traub, 2006] BORDÉ, P. J. et TRAUB, W. A. (2006). High-Contrast Imaging from Space : Speckle Nulling in a Low-Aberration Regime. *The Astrophysical Journal*, 638(1):488.

- [Born et Wolf, 1959] BORN, M. et WOLF, E. (1959). *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 7 édition.
- [Borucki *et al.*, 2003] BORUCKI, W. J., KOCH, D., BASRI, G., BROWN, T., CALDWELL, D., DEVORE, E., DUNHAM, E., GAUTIER, T., GEARY, J., GILLILAND, R., GOULD, A., HOWELL, S. et JENKINS, J. (2003). Kepler Mission : a mission to find Earth-size planets in the habitable zone. volume 539, pages 69–81.
- [Borucki *et al.*, 1985] BORUCKI, W. J., SCARGLE, J. D. et HUDSON, H. S. (1985). Detectability of extrasolar planetary transits. *The Astrophysical Journal*, 291:852–854.
- [Brown et Burrows, 1990] BROWN, R. A. et BURROWS, C. J. (1990). On the feasibility of detecting extrasolar planets by reflected starlight using the Hubble Space Telescope. *Icarus*, 87(2):484–497.
- [Broyden, 1970a] BROYDEN, C. G. (1970a). The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1):76–90.
- [Broyden, 1970b] BROYDEN, C. G. (1970b). The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 2. The New Algorithm. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(3):222–231.
- [Bruno, 1584a] BRUNO, G. (1584a). *Le Banquet des Cendres*. Editions de l’Eclat.
- [Bruno, 1584b] BRUNO, G. (1584b). *L’infini, l’univers et les mondes*. Berg International éditeurs, Paris, 7 édition.
- [Cantaloube, 2016] CANTALLOUBE, F. (2016). *Detection and characterization of exoplanets in high contrast images by the inverse problem approach*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes.
- [Cash, 2006] CASH, W. (2006). Detection of Earth-like planets around nearby stars using a petal-shaped occulter. *Nature*, 442(7098):51–53.
- [Cockell *et al.*, 2009] COCKELL, C., LÉGER, A., FRIDLUND, M., HERBST, T., KALTENEGGER, L., ABSIL, O., BEICHMAN, C., BENZ, W., BLANC, M., BRACK, A., CHELLI, A., COLANGELI, L., COTTIN, H., Coudé du FORESTO, F., DANCHI, W., DEFRÈRE, D., HERDER, J.-W. d., EIROA, C., GREAVES, J., HENNING, T., JOHNSTON, K., JONES, H., LABADIE, L., LAMMER, H., LAUNHARDT, R., LAWSON, P., LAY, O., LE DUIGOU, J.-M., LISEAU, R., MALBET, F., MARTIN, S., MAWET, D., MOURARD, D., MOUTOU, C., MUGNIER, L., OLLIVIER, M., PARESCE, F., QUIRRENBACH, A., RABBIA, Y., RAVEN, J., ROTTGERING, H., ROUAN, D., SANTOS, N., SELSIS, F., SERABYN, E., SHIBAI, H., TAMURA, M., THIÉBAUT, É., WESTALL, F. et WHITE, G. (2009). Darwin — A Mission to Detect and Search for Life on Extrasolar Planets. *Astrobiology*, 9(1):1–22.
- [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997a] COHEN-TANNOUDJI, C., DIU, B. et LALOË, F. (1997a). *Mécanique quantique I*. Editions Hermann, Paris.
- [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997b] COHEN-TANNOUDJI, C., DIU, B. et LALOË, F. (1997b). *Mécanique quantique II*. Editions Hermann, Paris.
- [Copernic, 1543] COPERNIC, N. (1543). *De Revolutionibus orbium coelestium / Des révolutions des orbes célestes*. Les Belles Lettres, Paris, 1 édition.
- [Courant et Hilbert, 1953] COURANT, R. et HILBERT, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. Interscience publishers, New York, première édition.
- [de la Cotardière, 2012] de la COTARDIÈRE, P. (2012). *Histoire des sciences : De l’Antiquité à nos jours*. Editions Tallandier, Paris.

- [Delorme *et al.*, 2016] DELORME, J. R., GALICHER, R., BAUDOZ, P., ROUSSET, G., MAZOYER, J. et DUPUIS, O. (2016). Focal plane wavefront sensor achromatization : The multireference self-coherent camera. *Astronomy & Astrophysics*, 588:A136.
- [Fletcher, 1970] FLETCHER, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *The Computer Journal*, 13(3):317–322.
- [Foo *et al.*, 2005] FOO, G., PALACIOS, D. M. et SWARTZLANDER, G. A. (2005). Optical vortex coronagraph. *Optics Letters*, 30(24):3308–3310.
- [Fusco *et al.*, 2006a] FUSCO, T., PETIT, C., ROUSSET, G., SAUVAGE, J.-F., DOHLEN, K., MOUILLET, D., CHARTON, J., BAUDOZ, P., KASPER, M., FEDRIGO, E., RABOU, P., FEAUTRIER, P., DOWNING, M., GIGAN, P., CONAN, J.-M., BEUZIT, J.-L., HUBIN, N., WILDI, F. et PUGET, P. (2006a). Design of the extreme AO system for SPHERE, the planet finder instrument of the VLT. In *Advances in Adaptive Optics II*, volume 6272, page 62720K. International Society for Optics and Photonics.
- [Fusco *et al.*, 2006b] FUSCO, T., ROUSSET, G., SAUVAGE, J.-F., PETIT, C., BEUZIT, J.-L., DOHLEN, K., MOUILLET, D., CHARTON, J., NICOLLE, M., KASPER, M., BAUDOZ, P. et PUGET, P. (2006b). High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the SPHERE instrument. *Optics Express*, 14(17):7515–7534.
- [Galicher *et al.*, 2008] GALICHER, R., BAUDOZ, P. et ROUSSET, G. (2008). Wavefront error correction and Earth-like planet detection by a self-coherent camera in space. *Astronomy & Astrophysics*, 488(1):L9–L12.
- [Galilei, 1610] GALILEI, G. (1610). *Le Messager céleste*. Les Belles Lettres, Paris, 1 édition.
- [Gardner *et al.*, 2006] GARDNER, J. P., MATHER, J. C., CLAMPIN, M., DOYON, R., GREENHOUSE, M. A., HAMMEL, H. B., HUTCHINGS, J. B., JAKOBSEN, P., LILLY, S. J., LONG, K. S., LUNINE, J. I., MCCAUGHREAN, M. J., MOUNTAIN, M., NELLA, J., RIEKE, G. H., RIEKE, M. J., RIX, H.-W., SMITH, E. P., SONNEBORN, G., STIAVELLI, M., STOCKMAN, H. S., WINDHORST, R. A. et WRIGHT, G. S. (2006). The James Webb Space Telescope. *Space Science Reviews*, 123(4):485–606.
- [Give'on *et al.*, 2007] GIVE'ON, A., KERN, B., SHAKLAN, S., MOODY, D. C. et PUEYO, L. (2007). Electric Field Conjugation - A Broadband Wavefront Correction Algorithm For High-contrast Imaging Systems. volume 211, page 135.20.
- [Goldfarb, 1970] GOLDFARB, D. (1970). A family of variable-metric methods derived by variational means. *Mathematics of Computation*, 24(109):23–26.
- [Gonsalves, 1982] GONSALVES, R. A. (1982). Phase Retrieval And Diversity In Adaptive Optics. *Optical Engineering*, 21(5):215829.
- [Goodman, 2017] GOODMAN, J. (2017). *Introduction to Fourier Optics*. W.H.Freeman & Co Ltd, New York, 4th ed. 2017 édition.
- [Guyon, 2017] GUYON, O. (2017). Habitable exoplanets detection : overview of challenges and current state-of-the-art [Invited]. *Optics Express*, 25(23):28825–28837.
- [Guyon *et al.*, 2009] GUYON, O., MATSUO, T. et ANGEL, R. (2009). Coronagraphic Low-Order Wave-Front Sensor : Principle and Application to a Phase-Induced Amplitude Coronagraph. *The Astrophysical Journal*, 693:75–84.
- [Hadamard, 1902] HADAMARD, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bulletin of Princeton University*, 13:1–20.
- [Herschel et Watson, 1781] HERSCHEL, M. et WATSON, D. (1781). Account of a Comet. By Mr. Herschel, F. R. S.; Communicated by Dr. Watson, Jun. of Bath, F. R. S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 71:492–501.

- [Herscovici-Schiller *et al.*, 2018a] HERSCOVICI-SCHILLER, O., MUGNIER, L. M., BAUDOZ, P., GALICHER, R., SAUVAGE, J.-F., PATRU, F., LEBoulLEUX, L., VIGAN, A., DOHLEN, K., FUSCO, T., PUEYO, L., SOUMMER, R. et LE DUIGOU, J.-M. (2018a). Towards the experimental validation of the non-linear dark hole on the THD bench. *In Adaptive Optics Systems VI*, volume 10703, page 1070329. International Society for Optics and Photonics.
- [Herscovici-Schiller *et al.*, 2018b] HERSCOVICI-SCHILLER, O., MUGNIER, L. M., BAUDOZ, P., GALICHER, R., SAUVAGE, J.-F. et PAUL, B. (2018b). Experimental validation of joint phase and amplitude wave-front sensing with coronagraphic phase diversity for high-contrast imaging. *Astronomy & Astrophysics*, 614:A142.
- [Herscovici-Schiller *et al.*, 2017] HERSCOVICI-SCHILLER, O., MUGNIER, L. M. et SAUVAGE, J.-F. (2017). An analytic expression for coronagraphic imaging through turbulence. Application to on-sky coronagraphic phase diversity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 467(1):L105–L109.
- [Hugot *et al.*, 2012] HUGOT, E., FERRARI, M., EL HADI, K., COSTILLE, A., DOHLEN, K., RABOU, P., PUGET, P. et BEUZIT, J. L. (2012). Active optics methods for exoplanet direct imaging - Stress polishing of supersmooth aspherics for VLT-SPHERE planet finder. *Astronomy & Astrophysics*, 538:A139.
- [Idier, 2002] IDIER, J., éditeur (2002). *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*.
- [Jovanovic *et al.*, 2015] JOVANOVIĆ, N., MARTINACHE, F., GUYON, O., CLERGEON, C., SINGH, G., KUDO, T., GARREL, V., NEWMAN, K., DOUGHTY, D., LOZI, J., MALES, J., MINOWA, Y., HAYANO, Y., TAKATO, N., MORINO, J., KUHN, J., SERABYN, E., NORRIS, B., TUTHILL, P., SCHWORER, G., STEWART, P., CLOSE, L., HUBY, E., PERRIN, G., LACOUR, S., GAUCHET, L., VIEVARD, S., MURAKAMI, N., OSHIYAMA, F., BABA, N., MATSUO, T., NISHIKAWA, J., TAMURA, M., LAI, O., MARCHIS, F., DUCHENE, G., KOTANI, T. et WOILLEZ, J. (2015). The Subaru Coronagraphic Extreme Adaptive Optics System : Enabling High-Contrast Imaging on Solar-System Scales. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 127(955):890.
- [Kasdin, 1995] KASDIN, N. J. (1995). Discrete simulation of colored noise and stochastic processes and  $1/f^\alpha$  power law noise generation. *Proceedings of the IEEE*, 83(5):802–827.
- [Kenworthy *et al.*, 2007] KENWORTHY, M. A., CODONA, J. L., HINZ, P. M., ANGEL, J. R. P., HEINZE, A. et SIVANANDAM, S. (2007). First On-Sky High-Contrast Imaging with an Apodizing Phase Plate. *The Astrophysical Journal*, 660(1):762.
- [Kepler, 1609] KEPLER, J. (1609). *Astronomia Nova*. Green Lion Press, new, revised édition.
- [Kervella *et al.*, 2008] KERVELLA, P., de SOUZA, A. D. et BENDJOYA, P. (2008). The close-in companion of the fast rotating Be star Achernar. *Astronomy & Astrophysics*, 484(1):L13–L16.
- [Lagrange *et al.*, 2009] LAGRANGE, A.-M., GRATADOUR, D., CHAUVIN, G., FUSCO, T., EHRENREICH, D., MOUILLET, D., ROUSSET, G., ROUAN, D., ALLARD, F., GENDRON, É., CHARTON, J., MUGNIER, L., RABOU, P., MONTRI, J. et LACOMBE, F. (2009). A probable giant planet imaged in the  $\beta$  Pictoris disk - VLT/NaCo deep L'-band imaging. *Astronomy & Astrophysics*, 493(2):L21–L25.
- [Lagrange, 1772] LAGRANGE, J.-L. (1772). *Essai sur le problème des trois corps*, volume 6 de *Oeuvres de Lagrange publiées par les soins de M. J.-A. Serret et G. Darboux*. Gauthier-Villars, Paris. [ark:/12148/bpt6k229225j](https://doi.org/10.2307/12148/bpt6k229225j).
- [Landau et Lifchitz, 1967] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1967). *Physique Théorique : Mécanique Quantique*. Mir, Moscou.
- [Landau et Lifchitz, 1998a] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1998a). *Physique Théorique : Physique Statistique*. Éditions Mir et Ellipses, Moscou ; Paris, 4ème éd édition.

- [Landau et Lifchitz, 1998b] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. (1998b). *Physique Théorique : Théorie des Champs*. Ellipses Marketing, Moscou ; Paris, 5ème éd édition.
- [Le Verrier, 1845] LE VERRIER, U. (1845). Premier Mémoire sur la théorie d'Uranus. In ARAGO, F., DAMOISEAU, M.-C., STURM, C.-F. et LIOUVILLE, J., éditeurs : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, publiés par MM. les secrétaires perpétuels*, page 1050, Paris. Gauthier-Villars. ark :/12148/bpt6k6449129w.
- [Leboulleux, 2018] LEBoulLEUX, L. (2018). *Optimal wavefront control for high-contrast imaging. Application to cophasing of segmented mirrors (titre provisoire)*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.
- [Leboulleux et al., 2017] LEBoulLEUX, L., EGRON, S., N'DIAYE, M., MAZOYER, J., PUEYO, L., PERIN, M., SAUVAGE, J.-F., CHOQUET, E., FUSCO, T. et SOUMMER, R. (2017). Comparison of wavefront control algorithms and first results on the high-contrast imager for complex aperture telescopes (hicat) testbed. In KARAFOLAS, N., CUGNY, B. et SODNIK, Z., éditeurs : *ICSO 2016*, page 158. SPIE.
- [Léna et al., 2008] LÉNA, P., ROUAN, D., LEBRUN, F., MIGNARD, F. et PELAT, D. (2008). *L'observation en astrophysique*. EDP Sciences, Les Ulis, France ; Paris, 3e édition revue et augmentée édition.
- [Lyot, 1931] LYOT, B. (1931). L'Etude de la Couronne Solaire en Dehors des Eclipses. *L'Astronomie*, 45:248–253.
- [Lyot, 1932] LYOT, B. (1932). Étude de la couronne solaire en dehors des éclipses. Avec 16 figures dans le texte. *Zeitschrift fur Astrophysik*, 5:73.
- [Macintosh et al., 2008] MACINTOSH, B. A., GRAHAM, J. R., PALMER, D. W., DOYON, R., DUNN, J., GAVEL, D. T., LARKIN, J., OPPENHEIMER, B., SADDLEMYER, L., SIVARAMAKRISHNAN, A., WALLACE, J. K., BAUMAN, B., ERICKSON, D. A., MAROIS, C., POYNEER, L. A. et SOUMMER, R. (2008). The Gemini Planet Imager : from science to design to construction. In *Adaptive Optics Systems*, volume 7015, page 701518. International Society for Optics and Photonics.
- [Malbet et al., 1995] MALBET, F., YU, J. W. et SHAO, M. (1995). High-Dynamic-Range Imaging Using a Deformable Mirror for Space Coronagraphy. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 107(710):386.
- [Martinache, 2013] MARTINACHE, F. (2013). The Asymmetric Pupil Fourier Wavefront Sensor. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(926):422.
- [Martinez et al., 2013] MARTINEZ, P., KASPER, M., COSTILLE, A., SAUVAGE, J. F., DOHLEN, K., PUGET, P. et BEUZIT, J. L. (2013). Speckle temporal stability in XAO coronagraphic images - II. Refine model for quasi-static speckle temporal evolution for VLT/SPHERE. *Astronomy & Astrophysics*, 554:A41.
- [Martinez et al., 2012] MARTINEZ, P., LOOSE, C., CARPENTIER, E. A. et KASPER, M. (2012). Speckle temporal stability in XAO coronagraphic images. *Astronomy & Astrophysics*, 541:A136.
- [Mawet et al., 2012] MAWET, D., PUEYO, L., LAWSON, P., MUGNIER, L., TRAUB, W., BOCCALETTI, A., TRAUGER, J. T., GLADYSZ, S., SERABYN, E., MILLI, J., BELIKOV, R., KASPER, M., BAUDOZ, P., MACINTOSH, B., MAROIS, C., OPPENHEIMER, B., BARRETT, H., BEUZIT, J.-L., DEVANEY, N., GIRARD, J., GUYON, O., KRIST, J., MENNESSON, B., MOUILLET, D., MURAKAMI, N., POYNEER, L., SAVRANSKY, D., VÉRINAUD, C. et WALLACE, J. K. (2012). Review of small-angle coronagraphic techniques in the wake of ground-based second-generation adaptive optics systems. volume 8442, page 844204. International Society for Optics and Photonics.

- [Mawet *et al.*, 2010] MAWET, D., SERABYN, E., LIEWER, K., BURRUSS, R., HICKEY, J. et SHEMO, D. (2010). The Vector Vortex Coronagraph : Laboratory Results and First Light at Palomar Observatory. *The Astrophysical Journal*, 709(1):53.
- [Mayor et Queloz, 1995] MAYOR, M. et QUELOZ, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378(6555):355.
- [Mazoyer, 2014] MAZOYER, J. (2014). *Haut contraste pour l'imagerie directe d'exoplanètes et de disques : de la self-coherent camera à l'analyse de données NICI*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII.
- [Mazoyer *et al.*, 2014] MAZOYER, J., BAUDOZ, P., GALICHER, R. et ROUSSET, G. (2014). High-contrast imaging in polychromatic light with the self-coherent camera. *Astronomy & Astrophysics*, 564:L1.
- [Mugnier *et al.*, 2006] MUGNIER, L. M., BLANC, A. et IDIER, J. (2006). Phase Diversity : A Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging. In HAWKES, P., éditeur : *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 141, pages 1–76. Elsevier.
- [N'Diaye *et al.*, 2012] N'DIAYE, M., DOHLEN, K., FUSCO, T., HADI, K. E., SOUMMER, R., CUEVAS, S., ZERRAD, M. et FERRARI, M. (2012). Lab results of the circular phase mask concepts for high-contrast imaging of exoplanets. In *Modern Technologies in Space- and Ground-based Telescopes and Instrumentation II*, volume 8450, page 84500N. International Society for Optics and Photonics.
- [N'Diaye *et al.*, 2013] N'DIAYE, M., DOHLEN, K., FUSCO, T. et PAUL, B. (2013). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a Zernike phase-mask sensor. *Astronomy & Astrophysics*, 555:A94.
- [Newton, 1687] NEWTON, I. (1687). *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Hachette Livre BNF, Londres, 1687 édition.
- [Paul, 2014] PAUL, B. (2014). *Mesure de front d'onde post-coronographique à haute précision pour l'imagerie à haut contraste : application sol et espace*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille.
- [Paul *et al.*, 2013a] PAUL, B., MUGNIER, L. M., SAUVAGE, J.-F., DOHLEN, K. et FERRARI, M. (2013a). High-order myopic coronagraphic phase diversity (COFFEE) for wave-front control in high-contrast imaging systems. *Optics Express*, 21(26):31751–31768.
- [Paul *et al.*, 2014a] PAUL, B., N'DIAYE, M., JOLIVET, A., BEZSHLYAKH, D. et MYTSKANIUK, V. (2014a). Manuel d'utilisation de MITHiC. Rapport technique, LAM, Marseille.
- [Paul *et al.*, 2013b] PAUL, B., SAUVAGE, J.-F. et MUGNIER, L. M. (2013b). Coronagraphic phase diversity : performance study and laboratory demonstration. *Astronomy & Astrophysics*, 552:A48.
- [Paul *et al.*, 2014b] PAUL, B., SAUVAGE, J.-F., MUGNIER, L. M., DOHLEN, K., PETIT, C., FUSCO, T., MOUILLET, D., BEUZIT, J.-L. et FERRARI, M. (2014b). Compensation of high-order quasi-static aberrations on SPHERE with the coronagraphic phase diversity (COFFEE). *Astronomy & Astrophysics*, 572:A32.
- [Perrin *et al.*, 2003] PERRIN, M. D., SIVARAMAKRISHNAN, A., MAKIDON, R. B., OPPENHEIMER, B. R. et GRAHAM, J. R. (2003). The Structure of High Strehl Ratio Point-Spread Functions. *The Astrophysical Journal*, 596(1):702.
- [Peters, 1977] PETERS, P. J. (1977). Aperture Shaping - A Technique For The Control Of The Spatial Distribution Of Diffracted Energy. In *Stray Light Problems in Optical Systems*, volume 0107, pages 63–72. International Society for Optics and Photonics.

- [Photometrics, 2014] PHOTOMETRICS (2014). CoolSNAP(TM) HQ2 Monochrome Datasheet.
- [Platon, 348] PLATON (348). *Platon : Oeuvres complètes*. Flammarion, Paris.
- [Pueyo *et al.*, 2009] PUEYO, L., KAY, J., KASDIN, N. J., GROFF, T., MCELWAIN, M., GIVE'ON, A. et BELIKOV, R. (2009). Optimal dark hole generation via two deformable mirrors with stroke minimization. *Applied Optics*, 48(32):6296–6312.
- [Riggs *et al.*, 2016] RIGGS, A. J. E., KASDIN, N. J. et GROFF, T. D. (2016). Recursive starlight and bias estimation for high-contrast imaging with an extended Kalman filter. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 2(1):011017.
- [Robert, 2007] ROBERT, C. (2007). *The Bayesian Choice : From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2 édition.
- [Roddier, 1981] RODDIER, F. (1981). V The Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy. In WOLF, E., éditeur : *Progress in Optics*, volume 19, pages 281–376. Elsevier.
- [Roddier, 1999] RODDIER, F. (1999). *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. ; New York.
- [Roddier et Roddier, 1997] RODDIER, F. et RODDIER, C. (1997). Stellar Coronagraph with Phase Mask. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109(737):815.
- [Roques et Baudino, 2018] ROQUES, F. et BAUDINO, J.-L. (2018). Les exoplanètes. <http://exoplanetes.esep.pro/>.
- [Rouan *et al.*, 2000] ROUAN, D., RIAUD, P., BOCCALETTI, A., CLÉNET, Y. et LABEYRIE, A. (2000). The Four-Quadrant Phase-Mask Coronagraph. I. Principle. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 112(777):1479.
- [Sabatier, 1985] SABATIER, P. C. (1985). Inverse Problems - an introduction. *Inverse Problems*, 1(1).
- [Sauvage *et al.*, 2010] SAUVAGE, J.-F., FUSCO, T., PETIT, C., MEIMON, S., FEDRIGO, E., VALLES, M. S., KASPER, M., HUBIN, N., BEUZIT, J.-L., CHARTON, J., COSTILLE, A., P, R., MOUILLET, D., BAUDOZ, P., BUEY, T., SEVIN, A., WILDI, F. et DOHLEN, K. (2010). SAXO, the eXtreme Adaptive Optics System of SPHERE : overview and calibration procedure. volume 7736, page 77360E. International Society for Optics and Photonics.
- [Sauvage *et al.*, 2012] SAUVAGE, J.-F., MUGNIER, L., PAUL, B. et VILLECROZE, R. (2012). Coronagraphic phase diversity : a simple focal plane sensor for high-contrast imaging. *Optics Letters*, 37(23):4808–4810.
- [Shanno, 1970] SHANNO, D. F. (1970). Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, 24(111):647–656.
- [Snyder *et al.*, 1995] SNYDER, D. L., HELSTROM, C. W., LANTERMAN, A. D., FAISAL, M. et WHITE, R. L. (1995). Compensation for readout noise in CCD images. *JOSA A*, 12(2):272–283.
- [Soummer *et al.*, 2007] SOUMMER, R., PUEYO, L., SIVARAMAKRISHNAN, A. et VANDERBEI, R. J. (2007). Fast computation of Lyot-style coronagraph propagation. *Optics Express*, 15(24): 15935–15951.
- [Strehl, 1902] STREHL, K. (1902). Über Luftschlieren und Zonenfehler. *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 22:213–217.
- [Thiébaud, 2002] THIÉBAUD, É. (2002). Optimization issues in blind deconvolution algorithms. In *Astronomical Data Analysis II*, volume 4847, pages 174–184. International Society for Optics and Photonics.



- [Trauger *et al.*, 2016] TRAUGER, J., MOODY, D., KRIST, J. et GORDON, B. (2016). Hybrid Lyot coronagraph for WFIRST-AFTA : coronagraph design and performance metrics. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 2:011013.
- [Turnbull *et al.*, 2012] TURNBULL, M. C., GLASSMAN, T., ROBERGE, A., CASH, W., NOECKER, C., LO, A., BRIAN MASON, OAKLEY, P. et BALLY, J. (2012). The Search for Habitable Worlds. 1. The Viability of a Starshade Mission. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 124(915):418.
- [Védrenne *et al.*, 2014] VÉDRENNE, N., MUGNIER, L. M., MICHAU, V., VELLUET, M.-T. et BIERENT, R. (2014). Laser beam complex amplitude measurement by phase diversity. *Optics Express*, 22(4):4575–4589.
- [Vigan *et al.*, 2018] VIGAN, A., N'DIAYE, M., DOHLEN, K., MILLI, J., WAHHAJ, Z., SAUVAGE, J.-E., BEUZIT, J.-L., POURCELOT, R., MOUILLET, D. et ZINS, G. (2018). On-sky compensation of non-common path aberrations with the ZELDA wavefront sensor in VLT/SPHERE. *In Adaptive Optics Systems VI*, volume 10703, page 107035O. International Society for Optics and Photonics.
- [Vigan *et al.*, 2016] VIGAN, A., POSTNIKOVA, M., CAILLAT, A., SAUVAGE, J.-E., DOHLEN, K., EL HADI, K., FUSCO, T., LAMB, M. et N'DIAYE, M. (2016). Characterisation of a turbulent module for the MITHIC high-contrast imaging testbed. *In Adaptive Optics Systems V*, volume 9909, page 99093F. International Society for Optics and Photonics.
- [Ygouf *et al.*, 2013] YGOUF, M., MUGNIER, L. M., MOUILLET, D., FUSCO, T. et BEUZIT, J.-L. (2013). Simultaneous exoplanet detection and instrument aberration retrieval in multispectral coronagraphic imaging. *Astronomy and Astrophysics*, 551:A138.

---

# Table des figures

---

La Nuit étoilée . . . . .	II
1.1 Diagramme masse-demi grand axe des exoplanètes connues. Les exoplanètes détectées par imagerie sont en bleu : on observe qu’il s’agit généralement de planètes lourdes loin de leurs étoiles. Source : [Roques et Baudino, 2018]. . . . .	8
1.2 Schéma de principe d’une optique adaptative. . . . .	10
1.3 Gauche : observation d’une étoile double sans optique adaptative. Droite : observation de la même étoile double par SPHERE/IRDIS en utilisant le système d’optique adaptative SAXO, qui augmente considérablement la résolution angulaire et permet de distinguer le compagnon. Images obtenues sur le très grand télescope de l’observatoire européen austral en observant Achernar ( $\alpha$ Eridani) en bande H. Remerciements T. Fusco et consortium SPHERE. . . . .	11
1.4 Gauche : image simulée en présence de turbulence, sans optique adaptative. Droite : image simulée en présence de turbulence, avec optique adaptative. L’échelle de couleurs est en arc de sinus hyperbolique. . . . .	11
1.5 Gauche : observation d’une étoile double par SPHERE/IRDIS utilisant le système d’optique adaptative SAXO, sans coronographe. Droite : observation de la même étoile double par SPHERE/IRDIS utilisant le système d’optique adaptative SAXO avec coronographe de Lyot, à une échelle de couleur trente fois plus petite que l’image de gauche. Images obtenues sur le très grand télescope de l’observatoire européen austral en observant Achernar ( $\alpha$ Eridani) en bande H. Remerciements T. Fusco et consortium SPHERE. . . . .	12
1.6 Images obtenues par l’instrument SPHERE sur le très grand télescope de l’observatoire européen austral en observant HIP 73 145 en bande H. Remerciements J.-F. Sauvage et consortium SPHERE. . . . .	13
2.1 Schéma optique d’un coronographe . . . . .	21
3.1 De gauche à droite : courte pose, moyenne empirique de 10 courtes poses, moyenne empirique de 100 courtes poses, moyenne empirique de 1 000 courtes poses, et longue pose calculée au moyen de la formule analytique 3.24. L’échelle est en arc de sinus hyperbolique, qui fait ressortir les niveaux les plus faibles. . . . .	41

3.2	Écart quadratique moyen entre la moyenne empirique de courtes poses et la longue pose analytique en fonction du nombre de courtes poses sommées au cours du calcul de la moyenne. . . . .	42
3.3	Qualité de l'approximation de la fonction d'étalement du point coronographique en présence de turbulence en fonction du côté du carré dans lequel l'influence du coronographe est prise en compte. . . . .	44
3.4	De gauche à droite : fonction d'étalement du point calculée sans approximation, fonction d'étalement du point calculée par convolution sauf sur un carré de côté $5,5 \lambda/D$ , et 50 000 fois la valeur absolue de leur différence. L'échelle est en argument de sinus hyperbolique. . . . .	45
4.1	Fonction de structure de phase utilisée pour la reconstructions de la figure 4.3. . . . .	52
4.2	Images utilisées comme données pour la reconstruction présentée sur la figure 4.3. À gauche, l'image focalisée. À droite, l'image de diversité. . . . .	52
4.3	À gauche : phase amont $\phi_{up}$ à reconstruire, utilisée pour la génération des images montrées sur la figure 4.2, et d'écart-type 50 nanomètres. Au centre, estimée $\widehat{\phi}_{up}$ de la phase amont, d'écart-type 50 nanomètres également. À droite, 100 fois leur différence, d'écart-type 0,14 nanomètres. L'échelle est linéaire et commune aux trois images. . . . .	53
4.4	Module de la transformée de Fourier de l'erreur d'estimation. . . . .	53
4.5	Évolution de l'erreur de reconstruction en fonction de l'erreur sur $D_{\phi_t}$ , avec erreur totale séparée en erreur dans la zone de correction du miroir déformable et erreur hors de la zone de correction. . . . .	55
4.6	Écart-type de l'erreur d'estimation de la phase amont en fonction du flux incident en photons. L'estimation est faite avec une erreur de 10% sur la fonction de structure de phase de la turbulence. . . . .	55
4.7	Nombre d'itérations et temps en minutes nécessaires à la convergence en fonction du flux incident en photons. . . . .	56
4.8	À gauche : reconstruction à convergence. Au milieu : reconstruction avec une convergence arrêtée à cent itérations. À droite : dix fois la différence, à la même échelle. Échelle linéaire. . . . .	57
4.9	En haut, de gauche à droite : phase reconstruite par COFFEE en l'absence de planète, pour une planète de flux relatif à l'étoile $10^{-5}$ , pour une planète de flux relatif à l'étoile $10^{-4}$ et pour une planète de flux relatif à l'étoile $10^{-3}$ . En bas sont affichées les différences de la phase reconstruite par rapport à la phase reconstruite en l'absence de planète (affichée en haut à gauche). Échelle linéaire. . . . .	58
4.10	De gauche à droite : structure fréquentielle de l'erreur sur la phase reconstruite pour une planète de flux relatif à l'étoile de $10^{-3}$ , pour une planète de flux relatif à l'étoile $10^{-4}$ et pour une planète de flux relatif à l'étoile $10^{-5}$ . Échelle linéaire. . . . .	58
4.11	À gauche : image focalisée utilisée comme donnée de COFFEE, comprenant une planète placée verticalement sous le centre, au tiers du rayon de la zone corrigée, avec un flux relatif à l'étoile de $10^{-3}$ . Au milieu : image synthétisée à partir de la phase estimée par COFFEE. À droite : différence entre l'image du milieu et l'image synthétisée à partir de la phase vraie : l'impact de la planète est particulièrement visible. . . . .	59
4.12	À gauche : image focalisée utilisée comme donnée de COFFEE, comprenant une planète placée verticalement sous le centre, au tiers du rayon de la zone corrigée, avec un flux relatif à l'étoile de $10^{-5}$ . Au milieu : image synthétisée à partir de la phase estimée par COFFEE. À droite : différence entre l'image du milieu et l'image synthétisée à partir de la phase vraie : il n'y a pas d'impact de la planète, contrairement au cas de la figure 4.11. . . . .	59

5.1	Photographie du banc MITHiC . . . . .	62
5.2	Schéma du banc MITHiC, issu de [Leboulleux, 2018], et reproduit avec l'aimable autorisation de l'autrice. . . . .	62
5.3	Détail de l'écran de phase représentatif des aberrations post-optique adaptative utilisé sur MITHiC. La bande au centre-gauche est la bande HARMONI, non utilisée. La bande au centre-droit est la bande SPHERE. Ces bandes se referment pour constituer un grand anneau. Complètement à droite est une aberrations de bas ordre sur un télescope segmenté, non utilisée, mais qui donne une échelle de l'écran de turbulence. . . . .	63
5.4	À gauche : image obtenue sur MITHiC. À droite : image obtenue sur SPHERE, présentée sur la figure 1.6. Les deux images sont affichées avec une échelle en arc de sinus hyperbolique. . . . .	64
5.5	Stratégie de validation de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence. . . . .	65
5.6	Alignement d'une mire sur le modulateur spatial de lumière avec la pupille d'entrée. En haut à gauche : commande de mire envoyée au modulateur spatial de lumière utilisée pour le centrage grossier de la pupille. En bas à gauche : image de pupille correspondante. En haut à droite : commande de mire envoyée au modulateur spatial de lumière pour le centrage fin au pixel près de la pupille. En bas à droite : image de pupille correspondante. . . . .	66
5.7	Gauche : commande de phase en forme de F du modulateur spatial de lumière. Droite : imagerie de pupille correspondante. . . . .	67
5.8	En haut : aberration vue par le HASO quand une commande de pure défocalisation est appliquée au modulateur spatial de lumière. En bas : projection de cette aberration sur les 32 premiers modes de Zernike. . . . .	67
5.9	Linéarité de la réponse du modulateur spatial de lumière à une commande de défocalisation . . . . .	68
5.10	Gauche : fonction d'étalement du point du banc. On remarque que le fantôme introduit par le cube est déjà très visible. Droite : moyenne circulaire de la fonction de transfert de modulation. . . . .	68
5.11	Fonction d'étalement du point atmosphérique, $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{1}{2}D\phi_t}]$ , correspondant à la bande SPHERE des écrans de phase sur MITHiC. . . . .	69
5.12	Images expérimentales coronographiques focalisée et de diversité (75 nm de défocalisation) de référence utilisées pour la reconstruction. . . . .	70
5.13	Images de synthèse créées par COFFEE qui minimisent le critère $\mathcal{J}$ pour les données présentées sur la figure 5.12. . . . .	71
5.14	Estimée de la phase de référence, $\widehat{\phi}_{up}^0$ . . . . .	71
5.15	Image focalisée et image de diversité (75 nm de défocalisation) engendrées par l'aberration en forme de F et utilisées pour la reconstruction. . . . .	72
5.16	Images de synthèse créées par COFFEE qui minimisent le critère $\mathcal{J}$ pour les données présentées sur la figure 5.15. . . . .	73
5.17	Estimée de la phase haute fréquence, $\widehat{\phi}_{up}^F + \widehat{\phi}_{up}^0$ . . . . .	73
5.18	Estimée de la consigne, $\widehat{\phi}_{up}^F$ , d'écart-type 13 nm. Couleurs inversées. . . . .	74
7.1	Fonction d'étalement du point typique du banc MITHiC, sans coronographe. . . . .	95
7.2	À gauche : image expérimentale sur MITHiC après application de la commande d'optimisation du contraste. À droite : image simulée fournie par le programme. . . . .	96
7.3	Moyenne circulaire de l'intensité sur le demi-plan droit avant (bleu) et après (rouge) optimisation du contraste. Échelle logarithmique à base dix, normalisée au maximum de la tache d'Airy avant optimisation du contraste. . . . .	96

- 7.4 Rapport de l'intensité moyenne avant optimisation à l'intensité moyenne après optimisation, en échelle linéaire. Une valeur au-dessus de un indique un gain en contraste dû à l'optimisation du contraste. . . . . 97
- 7.5 De gauche à droite : image plan focal avant correction NLDH, après 1 correction, après 2 corrections, après 3 corrections, après 4 corrections. Échelle en arc de sinus hyperbolique, avec affichage volontairement saturé. . . . . 98
- 7.6 De gauche à droite : image plan focal avant correction NLDH, après 1 correction, après 2 corrections, après 3 corrections, après 4 corrections. Échelle linéaire. . . . . 98
- 7.7 Contraste dans le *dark hole* en fonction du nombre d'itérations de correction. . . . . 98
- 7.8 À gauche : répartition de l'intensité lumineuse post-coronographique avant correction par NLDH (simulation). À droite : répartition de l'intensité lumineuse post-coronographique après correction par NLDH. Échelle en arc de sinus hyperbolique. 100
- 7.9 À gauche : distribution d'énergie dans le plan du détecteur avant optimisation du contraste (image simulée, contraste de  $2,4 \times 10^{-7}$  dans le *dark hole*). Au milieu : distribution d'énergie après optimisation du contraste à partir d'une phase parfaitement connue (image simulée, contraste de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). À droite : distribution d'énergie après optimisation du contraste à partir d'une phase imparfaitement connue (image simulée, contraste de  $1,4 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). L'échelle est en argument de sinus hyperbolique. . . . . 101
- 7.10 Zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.9. À gauche : cas où la phase est parfaitement estimée. À droite : cas où la phase n'est qu'imparfaitement estimée. Échelle linéaire. . . . . 101
- 7.11 À gauche : distribution d'énergie dans le plan du détecteur avant optimisation du contraste (image simulée, contraste de  $2,4 \times 10^{-7}$  dans le *dark hole*). Au milieu : distribution d'énergie après optimisation du contraste en connaissant parfaitement la matrice d'influence (image simulée, contraste de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). À droite : distribution d'énergie après optimisation du contraste en utilisant une matrice d'influence mal connue (image simulée, contraste de  $7,1 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). Échelle en argument de sinus hyperbolique. . . . . 102
- 7.12 Zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.11. À gauche : cas où la matrice d'interaction est parfaitement connue. À droite : cas où la matrice d'interaction n'est qu'imparfaitement connue. L'échelle est linéaire. . . . . 102
- 7.13 À gauche : distribution d'énergie dans le plan du détecteur avant optimisation du contraste (image simulée, contraste de  $2,4 \times 10^{-7}$  dans le *dark hole*). Au milieu : distribution d'énergie après optimisation du contraste en connaissant parfaitement la matrice d'influence et à partir d'une phase parfaitement connue (image simulée, contraste de  $1,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). À droite : distribution d'énergie après optimisation du contraste par le code NLDH à partir d'aberrations imparfaitement estimées et en utilisant une matrice d'influence mal connue (image simulée, contraste de  $7,2 \times 10^{-8}$  dans le *dark hole*). L'échelle est la même que sur la figure 7.9. 103
- 7.14 Zoom sur la zone de contraste optimisé de la figure 7.13. À gauche : cas où la matrice d'interaction est parfaitement connue et les aberrations parfaitement estimées. À droite : cas où la matrice d'interaction n'est qu'imparfaitement connue et l'estimation des aberrations comporte une erreur. L'échelle est linéaire. . . . . 103

---

# Table des matières

---

<b>Sommaire</b>	<b>V</b>
<b>Remerciements</b>	<b>VII</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Contexte, objectifs et méthodes</b>	<b>3</b>
<b>1 En quête d'autres mondes</b>	<b>5</b>
1.1 Une brève histoire de l'astronomie des planètes . . . . .	5
1.1.1 Les anciens . . . . .	5
1.1.2 Renaissance, modernité, et découverte de notre système stellaire . . . . .	6
1.1.3 Découverte des planètes et des exoplanètes . . . . .	6
1.2 Les principales méthodes de détection d'exoplanètes autour d'étoiles de la séquence principale . . . . .	6
1.3 Limites de l'imagerie d'exoplanètes . . . . .	8
1.3.1 Imagerie à haute résolution angulaire et optique adaptative . . . . .	9
1.3.2 Imagerie à haut contraste et coronagraphie . . . . .	10
1.3.3 La limite ultime : les aberrations quasi-statiques . . . . .	12
1.4 Analyse de surface d'onde en présence de coronographe . . . . .	13
1.4.1 L'analyseur de surface d'onde coronographique de bas ordre . . . . .	14
1.4.2 L'analyseur à contraste de phase ZELDA . . . . .	14
1.4.3 La détection par auto-interférences . . . . .	14
1.4.4 La diversité de phase coronographique . . . . .	14
1.5 Correction et contrôle de surface d'onde post-coronographique . . . . .	15
1.5.1 Conjugaison de phase . . . . .	15
1.5.2 Techniques d'optimisation du contraste . . . . .	15
1.6 Objectifs de cette thèse . . . . .	17
1.6.1 Structure de mes travaux . . . . .	17
1.6.2 Mesures en présence de turbulence pour les télescopes terrestres . . . . .	17
1.6.3 Mesure conjointe de la phase et de l'amplitude du champ complexe, et optimisation du contraste, pour les télescopes spatiaux . . . . .	17

Conclusion . . . . .	18
<b>2 Modélisation de la formation d'images et formalisme de la diversité de phase coronographique</b>	<b>19</b>
2.1 Propagation de la lumière et coronographie . . . . .	19
2.1.1 Propagation du champ électromagnétique et notations . . . . .	19
2.1.2 Réponse impulsionnelle d'un instrument coronographique . . . . .	20
2.1.3 Impact des aberrations en amont et en aval du masque du coronographe	21
2.1.4 Quelques fonctions de transfert coronographiques . . . . .	21
2.2 Détection . . . . .	22
2.2.1 Discrétisation par le détecteur . . . . .	22
2.2.2 Bruits à la détection . . . . .	23
2.3 La diversité de phase coronographique vue comme un problème inverse bayésien	24
2.3.1 Nécessité d'utiliser plusieurs images . . . . .	24
2.3.2 Cadre probabiliste et maximum <i>a posteriori</i> . . . . .	25
2.3.3 Modèle direct et attache aux données . . . . .	26
2.3.4 <i>A priori</i> et régularisation . . . . .	26
2.3.5 Le critère du maximum <i>a posteriori</i> . . . . .	28
Conclusion . . . . .	29
<b>II Diversité de phase coronographique en présence de turbulence</b>	<b>31</b>
<b>3 Un modèle analytique d'imagerie coronographique en présence de turbulence</b>	<b>33</b>
3.1 Imagerie classique en présence de turbulence . . . . .	33
3.2 Image post-coronographique issue d'une longue pose en présence de turbulence	34
3.2.1 La longue pose vue comme une somme de courtes poses . . . . .	34
3.2.2 Calcul de la moyenne temporelle . . . . .	35
3.2.3 Désentrelacement des variables . . . . .	36
3.2.4 Simplifications et formule finale . . . . .	37
3.3 Interprétation physique . . . . .	38
3.3.1 Cas limite : absence de turbulence . . . . .	38
3.3.2 Cas limite : absence de coronographe, et comparaison avec la formule de Roddier . . . . .	38
3.3.3 Interprétation de la réponse impulsionnelle de l'atmosphère . . . . .	39
3.3.4 Interprétation du terme dépendant des aberrations . . . . .	39
3.3.5 Synthèse : la fonction d'étalement du point coronographique en pré- sence de turbulence . . . . .	39
3.4 Mise en œuvre numérique . . . . .	40
3.4.1 De la formulation continue de la loi physique à une approximation discrète finie . . . . .	40
3.4.2 Calcul des termes constitutifs de la formule, $h_a$ et $h_c$ . . . . .	40
3.4.3 Illustration par simulation : convergence de la moyenne empirique vers l'espérance . . . . .	41
3.4.4 Accélération du calcul . . . . .	42
Conclusion . . . . .	45
<b>4 Extension de la diversité de phase coronographique à la mesure en présence de turbulence</b>	<b>47</b>
4.1 Inversion du modèle . . . . .	47
4.1.1 Méthode d'inversion . . . . .	47

4.1.2	Calcul du gradient du terme de régularisation par rapport à la phase . . .	48
4.1.3	Calcul du gradient du terme d'attache aux données par rapport à la phase	49
4.2	Validation numérique de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence . . . . .	51
4.2.1	Simulation . . . . .	51
4.2.2	Étude de la tolérance aux erreurs sur la fonction de structure de phase .	54
4.2.3	Étude de la tolérance au bruit en présence d'une erreur d'estimation de la fonction de structure de phase . . . . .	54
4.2.4	Impact d'une planète sur les performances de COFFEE . . . . .	57
	Conclusion : vers une application sur ciel de COFFEE . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Validation en laboratoire de la diversité de phase coronographique en présence de turbulence</b>	<b>61</b>
5.1	Présentation de l'expérience . . . . .	61
5.1.1	But de l'expérience . . . . .	61
5.1.2	Le banc MITHiC . . . . .	61
5.1.3	Stratégie de mesure . . . . .	64
5.2	Étalonnages . . . . .	65
5.2.1	Alignement et centrage . . . . .	65
5.2.2	Étalonnage des commandes du modulateur spatial de lumière . . . . .	65
5.2.3	Échantillonnage . . . . .	66
5.2.4	Rapport de Lyot . . . . .	69
5.2.5	Bruit de détecteur . . . . .	69
5.2.6	Fonction de structure de phase . . . . .	69
5.3	Mesure de la surface d'onde de référence . . . . .	70
5.3.1	Données . . . . .	70
5.3.2	Reconstruction . . . . .	70
5.4	Mesure d'une phase haute fréquence . . . . .	72
5.4.1	Données . . . . .	72
5.4.2	Reconstruction . . . . .	72
5.4.3	Reconstruction différentielle . . . . .	74
	Conclusion . . . . .	74
<b>III</b>	<b>Analyse et contrôle de surface d'onde coronographique pour l'imagerie à très haut contraste</b>	<b>75</b>
<b>6</b>	<b>Validation expérimentale de la reconstruction conjointe de phase et d'amplitude par diversité de phase coronographique</b>	<b>77</b>
6.1	Présentation de l'article . . . . .	77
6.1.1	Buts de l'étude . . . . .	77
6.1.2	Contexte et moyen de l'étude . . . . .	78
6.1.3	Plan de l'article . . . . .	78
6.2	Experimental validation of joint phase and amplitude wave-front sensing with coronagraphic phase diversity for high-contrast imaging (A&A, 2018) . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Optimisation non linéaire du contraste</b>	<b>93</b>
7.1	La méthode d'optimisation non linéaire du contraste . . . . .	93
7.1.1	Principe . . . . .	93
7.1.2	Formalisme . . . . .	93



7.2	Essais préliminaires sans coronographe : optimisation non linéaire du contraste sans coronographe sur MITHiC . . . . .	94
7.2.1	Principe du test et rapport avec les déphaseurs apodisants . . . . .	94
7.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	95
7.3	Validation expérimentale de l'optimisation non linéaire du contraste sur le banc THD . . . . .	96
7.4	Analyse des performance d'optimisation non linéaire du contraste par simulation numérique . . . . .	99
7.4.1	Simulation dans le cas où tous les paramètres sont parfaitement connus . . . . .	99
7.4.2	Impact d'une méconnaissance des aberrations optiques . . . . .	100
7.4.3	Simulation dans le cas où la matrice d'influence du miroir déformable est mal connue . . . . .	101
7.4.4	Simulation dans le cas où l'estimation des aberrations comporte une erreur et où la matrice d'influence du miroir déformable est mal connue . . . . .	102
	Conclusion . . . . .	103
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>105</b>
	<b>Annexes : Calculs et publications</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Publications, présentations et activités hors recherche</b>	<b>109</b>
A.1	Liste de publications . . . . .	109
A.1.1	Articles de revues à comité de lecture . . . . .	109
A.1.2	Actes de conférences internationales — présentations orales . . . . .	109
A.1.3	Actes de conférences internationales — posters . . . . .	110
A.2	Présentations orales sans actes . . . . .	110
A.2.1	Présentations à des spécialistes . . . . .	110
A.2.2	Présentations à un public de scientifiques non spécialistes . . . . .	110
A.3	Enseignement . . . . .	111
A.4	Tâches d'organisation . . . . .	111
<b>B</b>	<b>Publication : forme analytique de la réponse impulsionnelle d'un télescope coronographique en présence de turbulence (<i>MNRAS</i>, 2017)</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>Calculs</b>	<b>119</b>
C.1	Preuve que la covariance de la transformée de Fourier d'une aberration stationnaire est diagonale . . . . .	119
C.2	Évaluation de l'espérance d'une différence de phases turbulentes . . . . .	120
C.3	Calcul d'une dérivée intervenant dans l'expression du terme de régularisation par rapport à la phase . . . . .	120
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>131</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>135</b>



## Résumé

L'imagerie d'exoplanètes est limitée par deux obstacles intrinsèques : le faible écart angulaire entre planète et étoile, et le très faible flux lumineux en provenance de la planète par rapport à la lumière de l'étoile. Le premier obstacle est surmonté par l'utilisation de très grands télescopes, de la classe des dix mètres de diamètre, et éventuellement depuis le sol de systèmes d'optique adaptative, qui permettent d'atteindre de hautes résolutions angulaires. Le deuxième obstacle est surmonté par l'utilisation de coronographes. Les coronographes sont des instruments conçus pour filtrer la lumière de l'étoile tout en laissant passer la lumière de l'environnement circumstellaire.

Cependant, toute aberration optique en amont du coronographe engendre des fuites de lumière stellaire à travers le coronographe. Ces fuites se traduisent par un fouillis de tavelures dans les images scientifiques, tavelures qui cachent d'éventuelles planètes. Il est donc nécessaire de mesurer et de corriger les aberrations quasi-statiques à l'origine des tavelures. Cette thèse présente des contributions théoriques, numériques et expérimentales à la mesure et à la correction des aberrations des imageurs coronographiques. La première partie décrit le contexte et présente la méthode de la diversité de phase coronographique, un formalisme qui considère l'analyse de surface d'onde post-coronographique comme un problème inverse posé dans un cadre bayésien.

La deuxième partie concerne l'imagerie depuis le sol. Elle présente tout d'abord une expression analytique permettant de modéliser l'imagerie coronographique en présence de turbulence, puis l'extension de la méthode de diversité de phase coronographique à la mesure depuis les télescopes au sol donc en présence de turbulence résiduelle, et enfin une validation en laboratoire de cette méthode étendue.

La troisième partie est consacrée aux futurs imageurs spatiaux à très hauts contrastes pour lesquels il faut corriger non pas seulement la phase mais tout le champ complexe. Elle présente la validation en laboratoire de la mesure d'un champ complexe d'aberrations par diversité de phase coronographique, ainsi que des premiers résultats d'extinction de la lumière en plan focal par une méthode non linéaire, le *non-linear dark hole*.

## Mots clés

Analyse de surface d'onde, coronographe, diversité de phase, imagerie à haut contraste, exoplanète, problèmes inverses, méthodes bayésiennes, haute résolution angulaire, turbulence, traitement du signal, COFFEE, non-linear dark hole.

## Abstract

Exoplanet imaging has two intrinsic limitations, namely the small angular separation between the star and the planet, and the very low light flux from the planet compared to the starlight. The first limitation is overcome by using very large telescopes of the ten-metre diameter class, and, for ground-based telescopes, adaptive optics systems, which allow high angular resolution imaging. The second limitation is overcome by using a coronagraph. Coronagraphs are optical devices which filter the starlight while granting passage to the light coming from the stellar environment.

However, any optical aberration upstream of the coronagraph causes some of the starlight to leak through the coronagraph. This unfiltered starlight in turn causes speckles in the scientific images, and the light of the planets that could be there is lost among the speckles. Consequently, measurement and correction of the quasi-static aberration which generate the speckles are necessary for the exoplanet imagers to achieve their full potential.

This thesis introduces theoretical, numerical, and experimental contributions to the topic of measurement and correction of the aberrations in coronagraphic imagers.

The first part describes the context and introduces coronagraphic phase diversity, which is a Bayesian inverse problem formalism for post-coronagraphic wave-front sensing.

The second part is focused on ground-based imaging. It introduces an analytic expression for coronagraphic imaging through turbulence, the extension of coronagraphic phase diversity to on-sky measurement through residual turbulence, and a laboratory validation of the extended method.

The third part is concerned with future high-contrast space-based imagers, which will require not only phase correction, but a full complex wave-front correction. It presents the laboratory validation of coronagraphic phase diversity as a post-coronagraphic complex wave-front sensor, and first results of active contrast enhancement in the focal plane through the creation of a non-linear dark hole.

## Keywords

Wave-front sensing, coronagraph, phase diversity, high-contrast imaging, exoplanet, inverse problems, Bayesian analysis, high angular resolution, turbulence, signal processing, COFFEE, non-linear dark hole.