



HAL
open science

Modèles spectraux à transferts de flux appliqués à la prédiction de couleurs sur des surfaces imprimées en demi-ton

Serge Mazauric

► **To cite this version:**

Serge Mazauric. Modèles spectraux à transferts de flux appliqués à la prédiction de couleurs sur des surfaces imprimées en demi-ton. Optique / photonique. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSES064 . tel-02017776

HAL Id: tel-02017776

<https://theses.hal.science/tel-02017776>

Submitted on 13 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

réalisée au

LABORATOIRE HUBERT CURIEN

(SAINT-ÉTIENNE)

Ecole Doctorale N°488 : Science, Ingénierie et Santé

Spécialité : Image Vision

Soutenue publiquement le 7 décembre 2016 par :

SERGE MAZAURIC

MODÈLES SPECTRAUX À TRANSFERTS DE FLUX APPLIQUÉS À LA PRÉDICTION DE COULEURS SUR DES SURFACES IMPRIMÉES EN DEMI-TON

Devant le jury composé de :

Roger D. HERSCH, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, **Président**

Christine ANDRAUD, CRC - Muséum National d'Histoire Naturelle, **Rapporteure**

Patrick CALLET, Lab. MICS, Centrale Supélec, **Rapporteur**

Anne BLAYO, Grenoble INP - Pagora, **Examinatrice**

Thierry FOURNEL, Lab. Hubert Curien, **Directeur**

Mathieu HEBERT, Lab. Hubert Curien, **Co-directeur**

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Hubert Curien de Saint-Etienne présidé par Florent Pigeon puis Florence Garellie, je les remercie de leur accueil.

Je suis très reconnaissant à Thierry Fournel, mon directeur de thèse : merci Thierry pour ta bonne humeur, le soin que tu as pris pour que ce travail s'effectue dans les meilleures conditions et surtout pour la confiance (la folie ?) que tu as eue pour accueillir dans ton équipe un jeune vieux doctorant très pris par ailleurs par sa charge d'enseignement.

Mathieu Hébert à encadré ces recherches avec beaucoup de patience et de disponibilité ; son expérience dans le domaine de la couleur en général et les modèles prédictifs en particulier a été très appréciable et son entrain très communicatif. Merci Mathieu pour toutes ces discussions passionnantes au “Moulin joli”, je suis certain qu'il y en aura beaucoup d'autres.

Je remercie les collègues chercheurs et doctorants du laboratoire pour leurs encouragements : Corinne Fournier, Loïc Denis, Raphaël Clerc, Victorien Raulot, Nicolas Verrier, David Nébouy, Juan Martinez, Frédéric Jolivet, Mehdi Daanoune. Un grand merci également aux collègues de CPE Lyon pour leur soutien, je pense en particulier à Jean-Marie Becker grâce à qui j'ai pu rencontrer Mathieu et Thierry et qui m'a fait confiance pour assurer les cours de mathématiques au sein de l'école : merci Jean-Marie pour ta bienveillance et ton approche à la fois originale, intuitive et rigoureuse de l'enseignement des mathématiques.

Les amis m'ont également beaucoup soutenu et même aidé : merci Gilles pour l'abstract, merci Magali et Olivier, me convaincre d'écrire le mémoire en \LaTeX , ce n'était pas gagné (même avec le programme \LyX), merci aussi à Anne et Michel, Sandra et Frédéric, Isabelle et Pierre.

Je remercie mes parents et mes soeurs pour le soutien et les encouragements qu'ils m'ont apportés. Enfin, sans en douter un seul instant, la palme du mérite revient à Marie-Laure, Léo et Tom : merci d'avoir supporté pendant trois ans les humeurs inégales d'un bonhomme qui un jour s'est mis en tête de faire un doctorat à 40 ans bien tassés.

Résumé

La protection des documents fiduciaires et identitaires contre la fraude exige le développement d'outils de contrôle fondés sur des effets visuels sans cesse renouvelés, difficiles à contrefaire (même pour un expert ... de la contrefaçon !). Ce projet de recherche s'inscrit dans cette problématique et vise à apporter des solutions originales via l'impression de supports diffusants d'une part, et le développement de modèles de rendu visuel d'autre part. Les effets visuels recherchés sont des ajustements de couleurs entre les deux faces d'un imprimé lorsque celui-ci est observé par transparence devant une source lumineuse.

Pour obtenir facilement des ajustements de couleurs quelles que soient les couleurs visées, il est capital d'avoir un modèle à disposition, permettant de calculer les quantités d'encre à déposer. Un modèle doit être capable de prédire les facteurs spectraux de réflexion et de transmission du support imprimé en décrivant les phénomènes de diffusion optique présents en pratique dans les couches d'encre et le support.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux imprimés translucides contenant des couleurs en demi-ton des deux côtés de la surface avec pour objectif de prédire le rendu visuel pour diverses configurations d'observation. Pour cela, nous proposons une nouvelle approche basée sur l'utilisation de matrices de transfert de flux pour prédire les facteurs spectraux de réflexion et de transmission des imprimés lorsqu'ils sont éclairés simultanément des deux côtés. En représentant le comportement optique des différents composants d'un imprimé par des matrices de transfert, la description des transferts de flux entre ces composantes s'en trouve simplifiée. Ce cadre mathématique mène à la construction de modèles de prédiction de couleurs imprimées en demi-ton sur des supports diffusants. Nous montrons par ailleurs que certains modèles existants, comme le modèle de Kubelka-Munk ou encore le modèle de Clapper-Yule, peuvent également être formulés en termes de matrices de transfert.

Les résultats obtenus avec les modèles proposés dans ce travail mettent en évidence des qualités de prédiction équivalentes, voire supérieures, à celles qu'on retrouve dans l'état de l'art, tout en proposant une simplification de la formulation mathématique et de la description physique des échanges de flux. Cette simplification fait de ces modèles des outils de calcul qui s'utilisent très facilement, notamment pour la détermination des quantités d'encre à déposer sur les deux faces de l'imprimé afin d'obtenir des ajustements de couleurs.

Mots-clés : impression recto-verso, rendu visuel, couleurs en demi-ton, modèle de prédiction de couleurs, transferts de flux, réflectance et transmittance spectrales, matrice de transfert, ajustement de couleurs, images multi-vues.

Abstract

The protection of banknotes or identity documents against counterfeiting demands the development of control tools based on visual effects that are continuously renewed. These visual effects become thus difficult to counterfeit even by an expert forger ! This research tries to deal with that issue. Its objective is to bring new solutions using on the one side, the printing of diffusing materials, and on the other side the development of visual rendering models that can be observed. The visual effects that are sought-after are the color matching on both sides of a printed document when observed against the light.

To easily obtain a color matching, whatever the colors that are aimed for, it is essential to have a model that helps in calculating the quantity of ink to be left on the document. A model must be used to predict the spectral reflectance and the transmittance factors of the printed document by describing the phenomena of optical diffusion really present in the ink layers and in the document.

We shall focus our interest especially on translucent printed documents that have halftone colors on both sides. Our goal here is to predict the visual rendering in different configurations of observation. To that end, we are offering a new approach based on the use of flux transfer matrices to predict the spectral reflectance and transmittance factors of prints when they are simultaneously lit up on both sides. By representing with transfer matrices the optical behavior of the different components present in a printed document, we see that the description of flux transfer between these elements is thus simplified. This mathematical framework leads to the construction of prediction models of halftone printed colors on diffusing materials. We also show that some existing models, such as the Kubelka-Munk or the Clapper-Yule models, can also be formulated in transfer matrices terms.

The results that we get with the models used in this work make apparent identical prediction quality and in some cases even better ones to the ones found in the state of the art, while offering a simplification of the mathematical formulation and the physical description of the flux transfer. This simplification thus transforms these models into calculation tools that can easily be used especially for the choice of quantities of ink that must be left on both sides of the document in order to obtain color matching.

Key-words : duplex printing, visual rendering, halftone colors, colors prediction model, flux transfer, spectral reflectance and transmittance factors, transfer matrices, color matching, multi-view imaging.

Table des matières

1	Introduction	11
I	Etat de l'art	15
2	Concepts de base de radiométrie et de colorimétrie	17
2.1	Rappels de radiométrie	17
2.2	Rappels de colorimétrie	23
3	Le modèle de Kubelka-Munk	29
3.1	Introduction	29
3.2	Système d'équations différentielles de Kubelka-Munk	30
3.3	Inversion du modèle	32
3.4	Cas d'un milieu infiniment épais	32
3.5	Cas d'un milieu en contact optique avec un fond réfléchissant	33
3.6	Correction de Saunderson	33
3.7	Théorie de Kubelka-Munk pour les milieux non-symétriques	35
4	Modèles de prédiction de couleurs en demi-ton	39
4.1	Surfaces imprimées en demi-ton	39
4.2	Les modèles de surface	41
4.2.1	Le modèle de Neugebauer	41
4.2.2	Le modèle de Yule-Nielsen	42
4.3	Les modèles phénoménologiques à deux flux	45
4.3.1	Le modèle de Clapper-Yule	45
4.3.2	Le modèle de Williams-Clapper	46
4.4	Calibrage	47
II	Théorie de transfert à deux flux revisitée	53
5	Matrices de transfert de flux	55
5.1	Matrices de transfert pour les couches diffusantes	55
5.2	Matrices de transfert pour les interfaces	58
5.3	Cas d'une couche d'encre uniforme sur une feuille de papier	60
5.4	Cas d'un imprimé recto-verso	62
6	Modèle à deux flux généralisé	67
6.1	Version discrète : superposition de n couches non-symétriques identiques	67
6.2	Version continue : modèle de Kubelka-Munk généralisé	70
6.2.1	Modèle continu pour une couche diffusante	70
6.2.2	Méthode de l'exponentielle matricielle	73
6.2.3	Inversion des formules de Kubelka-Munk généralisées	75
6.3	Etude d'un cas pratique et discussion	75

III	Modèles matriciels pour imprimés en demi-ton	83
7	Modèles à couche simple	85
7.1	Modèle DCY	85
7.2	Modèles de structure d'imprimé et conséquences sur la modélisation	89
7.3	Modèle DPRT (« Duplex Primary Reflectance-Transmittance »)	91
8	Modèles à couches effectives subdivisées	99
8.1	Modèle DLRT (« Double Layer Reflectance-Transmittance »)	99
8.2	Modèle de Kubelka-Munk généralisé appliqué aux imprimés en demi-ton	105
8.3	Modèle MPDYN (« Mean-Path-Defined Yule-Nielsen »)	113
8.4	Tableau comparatif des résultats	121
9	Application : impression d'images multi-vues	123
9.1	Images multi-vues	124
9.2	Ajustement des couleurs	124
9.3	Exemples d'images multi-vues	126
10	Conclusion	131
A	Inversion du modèle de Kubelka-Munk	135
B	Superposition de n couches non-symétriques identiques	137
C	Invariance de la quantité $(rr' - tt' + 1)/2\sqrt{rr'}$	140
D	Formules de Kubelka-Munk généralisées	141
E	Formules de Kubelka-Munk généralisées (exponentielle matricielle)	144
F	Inversion des formules de Kubelka-Munk généralisées	147
G	Représentation matricielle des taux de couverture	150
H	Distance entre deux matrices	153
I	Formules de Kubelka-Munk pour imprimés en demi-ton	154
J	Nombre moyen de réflexions internes entre deux couches	161

Chapitre 1

Introduction

Depuis longtemps l'homme est face à une tâche délicate lorsqu'il s'agit de produire des images en couleurs, que ce soit par les techniques les plus anciennes ou par les procédés technologiques les plus modernes. C'est un travail qui demande une bonne connaissance des matériaux et de leurs propriétés optiques (un savoir anciennement empirique et, plus récemment, théorique avec le progrès de la chimie et de la physique), car la coloration d'un support est avant tout un problème d'interaction de la lumière avec la matière.

La production d'images en couleurs ne se réduit donc pas à une simple transposition d'une matière colorée (peinture, encre) sur un support (toile, papier). Au cours du temps, des procédés de coloration ont été inventés, mettant en œuvre des techniques parfois complexes. On peut citer par exemple la technique du divisionnisme théorisée par le peintre Paul Signac (1863-1935) qui consiste à juxtaposer des touches de couleurs pures pour créer, à une certaine distance d'observation, une couleur moyenne. C'est une technique inspirée des premiers travaux scientifiques sur la couleur datant du début du 19^{ème} siècle et qui préfigure le concept de couleurs en demi-ton largement étudié dans ce mémoire.

Les procédés d'impression développés au 20^{ème} siècle sont presque exclusivement basés sur le principe des couleurs en demi-ton, à partir des quatre encres primaires cyan, magenta, jaune et noir (quadrichromie). L'image à reproduire est décomposée en images binaires associées à chacune des encres, avec une micro-texture variable qui permet d'ajuster localement la quantité d'encre (taux de couverture). Cette étape, appelée « séparation des couleurs » est aujourd'hui réalisée de façon automatique par la plupart des systèmes d'impression, grâce à des algorithmes étalonnés en usine. On parle alors de « gestion des couleurs ». Ces algorithmes sont le plus souvent une interpolation de milliers de couleurs mesurées avec un spectro-colorimètre. L'amélioration de leurs performances pour les rendre plus précis et plus rapides constitue un sujet actif de recherche dans lequel s'inscrit ce travail en privilégiant l'usage des modèles optiques de prédiction des couleurs qui décrivent la propagation de la lumière dans les matériaux. Ces modèles deviennent d'autant plus incontournables que la variété des systèmes numériques d'impression comme celle des encres ne cessent de croître pour parvenir à une reproduction spectrale et non plus seulement colorimétrique. La prise en compte de cette problématique est d'autant plus stratégique aujourd'hui dans un marché où la concurrence est mondialisée.

Le rendu des couleurs d'une surface imprimée dépend de nombreux paramètres comme la texture et la couleur du support, la transparence et la viscosité des encres ou encore la trame de demi-ton. Le changement de l'un de ces paramètres peut provoquer un changement significatif de la perception visuelle que l'on a d'une couleur. Pour étalonner un système d'impression, les procédures courantes sont basées sur des méthodes numériques de gestion de couleurs (appelées profils ICC) qui nécessitent d'imprimer et mesurer au spectrophotomètre plusieurs centaines d'échantillons de couleurs : par exemple, le calibrage des presses offset utilise la mire IT8.7/4, éditée par Fogra, qui contient 1617 couleurs. La procédure est bien entendu à réitérer chaque fois que le support, ou une encre, ou la trame de demi-ton est modifié.

On comprend alors l'intérêt de simplifier les méthodes d'étalonnage, c'est-à-dire de réduire le nombre d'échantillons colorés à imprimer et mesurer, notamment en utilisant des méthodes basées sur les modèles optiques : la limitation du nombre d'échantillons est une préoccupation que nous retrouvons dans ce travail. L'autre préoccupation, plus importante encore, est la simplicité des modèles optiques : le modèle doit non seulement permettre de prédire correctement les couleurs obtenues avec des taux de couverture d'encre donnés, mais il doit aussi être facilement inversé pour déterminer les taux de couverture à considérer dans l'étape de séparation des couleurs pour obtenir une couleur cible. Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour origine la recherche de modèles optiques réunissant à la fois précision et performance calculatoire.

Les premières tentatives visant à prédire les couleurs imprimées à partir de taux de couverture remontent à près d'un siècle (modèle de Neugebauer [1]), mais les modèles optiques les plus pertinents datent des années 1950, avec ceux de Yule-Nielsen [2], Clapper-Yule [3], et Williams-Clapper [4] que nous revisitons dans nos travaux. Les modèles de Clapper-Yule et Williams-Clapper, comme celui de Kubelka pour les empilements de couches diffusantes [5] datant de la même époque, sont qualifiés de modèles à deux flux [6]. Associés à la méthode d'estimation de l'étalement des encres par Hersch et Crété [7], ces modèles permettent d'obtenir des prédictions de couleurs avec une précision tout à fait honorable [8] : l'intérêt de l'approche à deux flux est l'obtention de formules analytiques. Le recours à des modèles de diffusion plus avancés comme ceux construits à partir la théorie de transfert radiatif a été écarté car les supports imprimés présentent le plus souvent une structure complexe, hétérogène dans les trois dimensions à cause de la structure multi-couche et des trames de demi-tons.

La problématique initiale de ce travail était de voir si la précision de ces modèles ne pouvait être augmentée en analysant plus finement l'interaction de la lumière et des matériaux d'impression, notamment en ajoutant aux mesures de réflectances spectrales d'échantillons, des mesures de transmittances spectrales. Pour cette raison, les travaux présentés ici s'intéresseront autant à la réflexion qu'à la transmission de la lumière, et tenteront toujours de les considérer simultanément, se distinguant par là même des quelques travaux récents sur la transmittance des supports imprimés [9, 10, 11, 12]. Pour y parvenir, l'utilisation des matrices de transferts de flux, connues pour les couches minces [13, 14, 15, 16] mais introduites que très récemment pour la reproduction des couleurs [17], s'avère très efficace. Elle permet un développement de modèles qui aboutissent à des formules analytiques, facilitant ainsi la mise en valeur des multiples connexions avec les modèles classiques de la littérature. Cependant, compte tenu de la complexité structurelle des imprimés et le nombre de paramètres à considérer, ces formules sont parfois trop lourdes pour être écrites sous forme totalement développée. Par ailleurs, les développements mathématiques conduisent à un certain nombre de démonstrations qui ont été placées en annexe afin de faciliter la lecture de ce mémoire.

Parmi les nombreuses possibilités offertes par l'approche matricielle, plusieurs pistes ont été explorées, suivant notamment les principes *a priori* différents des modèles de Clapper-Yule, Yule-Nielsen, et Kubelka-Munk. Ces pistes mènent à des modèles originaux dont les performances prédictives et les performances calculatoires sont comparables à celles des modèles classiques, mais elles apportent chacune un éclairage nouveau sur ces derniers tout en les étendant au cas des imprimés recto-verso, plus difficiles à appréhender.

Une autre motivation de ce travail, sur le plan applicatif, était de parvenir à réaliser des imprimés affichant plusieurs images selon la manière dont ils sont éclairés et observés. La possibilité de prédire aussi bien la réflectance que la transmittance d'imprimés recto-verso permet ce genre d'effet visuel, qui intéresse de près l'industrie de l'impression sécurisée dans ses recherches de techniques nouvelles, difficiles à contrefaire donc dissuasives, permettant de distinguer facilement un document authentique d'un faux. Les modèles développés, en mode inverse, permettent de déterminer les quantités d'encre à déposer sur les deux faces du papier de façon à afficher les couleurs voulues dans les différentes conditions d'éclairage et d'observation choisies. La réussite de l'effet visuel atteste de la précision du modèle prédictif. Sans l'utilisation d'un modèle, le nombre de combinaisons d'encres à imprimer et

mesurer pour une gestion empirique des couleurs serait prohibitif.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Nous commençons par faire le rappel, dans le chapitre 2, de quelques concepts sur lesquels sont basés le développement et la validation des modèles de prédiction de couleurs : des concepts de radiométrie, pour définir les quantités qui caractérisent une surface colorée (facteur de réflexion et facteur de transmission), et des concepts de colorimétrie, pour définir les outils permettant de quantifier la précision des prédictions (espace et distance colorimétriques). Nous proposons ensuite de faire une présentation synthétique et non-exhaustive des modèles prédictifs classiques utilisés dans le domaine de la reproduction des couleurs. En premier lieu, nous présentons au chapitre 3 le modèle de Kubelka-Munk qui est un modèle à deux flux basé sur la résolution d'un système de deux équations différentielles pour décrire la propagation de la lumière dans un milieu diffusant ; cette approche, utilisée dans le domaine des peintures, des papiers et de façon générale pour les milieux fortement diffusants, n'est pas directement applicable à la prédiction des couleurs en demi-ton. Nous continuons par une présentation des modèles de prédiction de couleurs imprimées en demi-ton sur des surfaces diffusantes. Ainsi, après avoir défini la notion d'impression en trames demi-ton et la notion d'engraissement optique du point d'encre dû à la propagation latérale de la lumière à l'intérieur du support, nous présentons dans le chapitre 4 quelques modèles couramment utilisés dans l'industrie du papier et des encres. Parmi ces modèles, on distingue les modèles de surface, pour lesquels la façon dont est réfléchi et/ou transmise la lumière ne dépend que des quantités d'encre déposées sur l'imprimé, et les modèles phénoménologiques qui font la description des transferts de flux entre les différents éléments qui composent l'imprimé. Une méthode de calibrage des modèles est également présentée dans ce chapitre ; elle permet d'estimer quantitativement l'engraissement mécanique, c'est-à-dire l'étalement des encres lorsqu'elles se déposent sur une surface d'impression.

La contribution théorique de ce travail commence au chapitre 5, où nous présentons la notion de matrice de transfert de flux. Une théorie générale des transferts à deux flux appliquée aux empilements de couches non-symétriques (la lumière se réfléchit différemment des deux côtés de la couche) est présentée dans le chapitre 6. Nous montrons dans ce même chapitre que le cas particulier d'un empilement composé d'une infinité de couches mène à une version du modèle de Kubelka-Munk étendue aux milieux diffusants non-symétriques. Les chapitres 7 et 8 exposent les différentes pistes de modélisation évoquées ci-dessus permettant de prédire simultanément les facteurs de réflexion et de transmission d'imprimés recto-verso. Cinq modèles y sont présentés : le premier est une reformulation du modèle de Clapper-Yule à l'aide des matrices de transfert de flux, le deuxième modèle, construit sur la notion de couple de primaires, se distingue du premier par la façon de décrire les transferts de flux entre les différents éléments de l'imprimé, dans le troisième modèle l'imprimé est subdivisé en deux demi-couches afin de mieux décrire la propagation latérale de la lumière dans l'imprimé, dans la même idée de subdivision de couches, le quatrième modèle décrit chaque demi-couche comme une superposition d'un certain nombre de sous-couches puis, en faisant tendre ce nombre à l'infini, mène à une version du modèle de Kubelka-Munk pour les milieux diffusants non-symétriques, enfin le cinquième et dernier modèle est une alternative au modèle de Yule-Nielsen.

Le chapitre 9 aborde enfin l'application des modèles à la production d'images multi-vues.

Première partie

Etat de l'art

Chapitre 2

Concepts de base de radiométrie et de colorimétrie

Une couleur imprimée sur une surface peut être caractérisée par des grandeurs photométriques liées au taux du flux lumineux réfléchi par la surface et/ou au taux de flux transmis à travers cette dernière : ces taux sont appelés facteur de réflectance et facteur de transmittance de l'imprimé, leurs définitions sont introduites dans la section 2.1. Ce sont des quantités spectrales qu'un modèle de prédiction de couleurs doit être capable de calculer, et qui peuvent être mesurées à l'aide d'un spectrophotomètre. La précision d'un modèle prédictif est définie par les écarts entre les spectres théoriques calculés et les spectres mesurés ; il est possible de quantifier ces écarts à l'aide d'une métrique appelée distance CIELAB ΔE_{94} , définie dans un espace colorimétrique spécifique et présentée dans la section 2.2.

2.1 Rappels de radiométrie

La radiométrie est l'étude du rayonnement émis par une source de lumière, de sa réflexion ou de sa transmission à travers un système optique, et de sa détection. Plus généralement, la radiométrie est la science de la mesure des radiations basée principalement sur des mesures d'énergie. Afin de faire une interprétation correcte des résultats de ces mesures, il est nécessaire de connaître les propriétés de la lumière. Le plus souvent, les phénomènes de diffraction et d'interférence ne sont pas pris en considération : la radiométrie concerne les radiations incohérentes.

Dans le domaine de la reproduction de couleurs, les radiations considérées sont dans le domaine visible du spectre électromagnétique, c'est-à-dire pour des longueurs d'onde comprises entre 400 et 750 nm : on appelle alors photométrie l'étude de la mesure des radiations perceptibles par le système de vision humain. Ce qui signifie que la puissance rayonnée à chaque longueur d'onde est pondérée par une fonction qui modélise la sensibilité de la vision humaine. A partir de la distribution de l'énergie lumineuse dans l'espace, décrite à partir des quantités fondamentales de la radiométrie, on peut définir les propriétés de réflexion et de transmission d'un objet, appelée réflectance et transmittance respectivement. Ces propriétés sont utilisées pour faire l'estimation de l'apparence d'un objet en général ou de la couleur d'une surface colorée en particulier. On pourra consulter les références [18, 19] pour une étude approfondie de la radiométrie.

Concepts géométriques

Le transport de la lumière de la source à un objet puis de l'objet à l'observateur (détecteur) est décrit à l'aide de concepts géométriques appelés angle solide et extension géométrique. On considère une sphère de rayon x et une direction définie par l'angle polaire θ et l'angle azimuthal φ (voir Fig. 2.1). A la surface de cette sphère, on considère une portion infinitésimale d'aire $x^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. L'angle solide infinitésimal est égal au rapport entre l'aire de la surface infinitésimale portée par la sphère et le carré de son rayon, son unité est le stéradian (sr) :

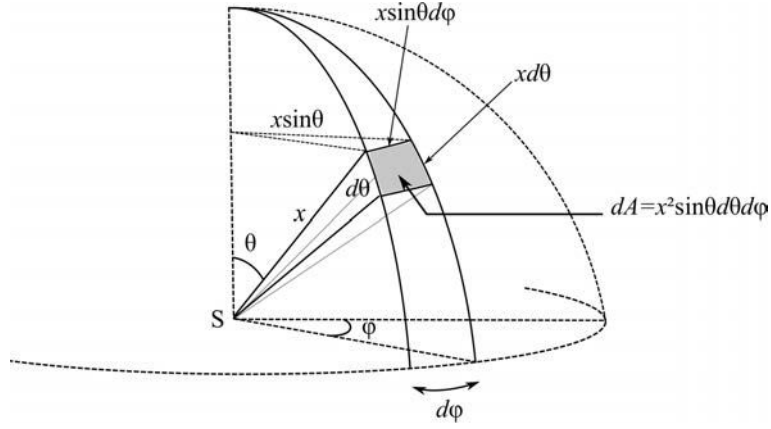


FIGURE 2.1 – Angle solide différentiel dans la direction (θ, φ) .

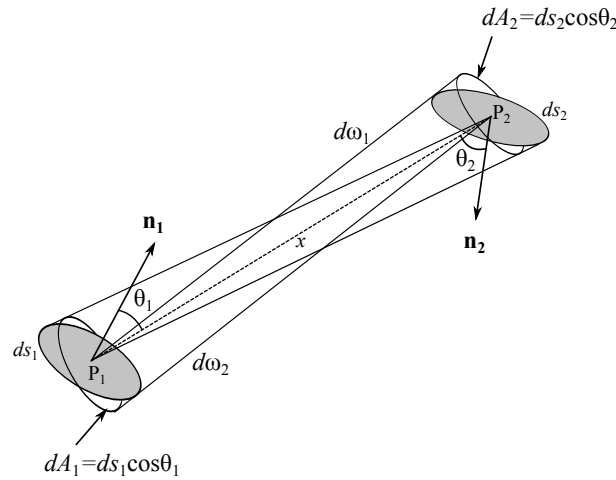


FIGURE 2.2 – Faisceau de lumière entre deux éléments de surface ds_1 et ds_2 .

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

L'*extension géométrique* représente la géométrie d'un faisceau lumineux se propageant entre deux éléments de surface (voir Fig. 2.2), notés ds_1 et ds_2 , séparés par une distance x que l'on suppose suffisamment grande pour considérer que les rayons lumineux arrivant sur la surface ds_2 sont émis par un point unique P_1 de la surface ds_1 , et que tous les rayons émis par ds_1 atteignent un point P_2 de ds_2 . La droite (P_1P_2) donne la direction du rayon lumineux, elle fait un angle θ_1 avec la normale à la surface ds_1 et un angle θ_2 avec la normale à la surface ds_2 . On note dA_2 la surface interceptée par l'angle solide $d\omega_1$ sous-tendu par la surface ds_1 sur la sphère de rayon x centrée en P_1 . On définit de la même façon la surface dA_1 . On a :

$$d\omega_1 = \frac{dA_2}{x^2} = \frac{\cos \theta_2}{x^2} ds_2$$

et

$$d\omega_2 = \frac{dA_1}{x^2} = \frac{\cos \theta_1}{x^2} ds_1$$

L'extension géométrique du faisceau lumineux, exprimée en $\text{m}^2.\text{sr}$, est définie par :

$$d^2G = dA_1 d\omega_1 = dA_2 d\omega_2 = \frac{dA_1 dA_2}{x^2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{x^2} ds_1 ds_2 \quad (2.1)$$

Grandeurs radiométriques

Il existe quatre quantités fondamentales en radiométrie : le flux, l'intensité, la luminance et l'éclairement. Le *flux*, noté Φ , est la puissance lumineuse, c'est l'énergie rayonnée par unité de temps dans toutes les directions, il est exprimé en watts (W). L'*intensité*, notée I , est la densité de flux par unité d'angle solide qui est émise à partir d'un point de l'espace et se propageant dans une direction donnée $d\omega$; l'intensité est exprimée en $\text{W}\cdot\text{sr}^{-1}$:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \quad (2.2)$$

On dit que la source est *isotrope* lorsque l'intensité est indépendante de la direction d'observation (θ, φ) . L'*éclairement*, noté E , est la densité de flux, par unité de surface, en un point donné d'une surface donnée ds ; l'éclairement est exprimé en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$:

$$E = \frac{d\Phi}{ds} \quad (2.3)$$

L'éclairement dépend de la position du point sur la surface. L'*exitance*, notée M , est définie comme l'éclairement mais pour un flux qui émerge d'une surface. La *luminance*, notée L , est le flux incident par unité d'extension géométrique traversant ou émergeant d'un point donné d'une surface donnée dans une direction donnée ; la luminance est exprimée en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$:

$$L = \frac{d^2\Phi}{d^2G} \quad (2.4)$$

La luminance est une quantité radiométrique qui permet alors de tenir compte de la distribution spatiale d'une source étendue. De plus, en faisant intervenir la notion d'extension géométrique dans sa définition, on peut montrer grâce à la formule (2.1) que, si on considère un flux se propageant entre deux éléments de surface, la luminance émise par une surface est égale à la luminance reçue par l'autre : c'est le principe de conservation de la luminance.

On peut également définir la luminance à partir des grandeurs géométriques qui interviennent dans la définition de l'extension géométrique, à savoir un élément de surface ds et un angle solide $d\omega$ orienté d'un angle θ par rapport à la normale de la surface ds . L'extension géométrique s'écrit alors $d^2G = \cos\theta ds d\omega$ et la luminance peut être exprimée de la façon suivante :

$$L(\theta, \varphi) = \frac{d^2\Phi}{\cos\theta ds d\omega} \quad (2.5)$$

On remarque, d'après la formule (2.3), que le rapport $d^2\Phi/ds$ intervenant dans la formule (2.5) correspond à un éclairement élémentaire dE du faisceau lumineux relié à la luminance par :

$$dE(\theta, \varphi) = L(\theta, \varphi) \cos\theta d\omega \quad (2.6)$$

Loi de Lambert

On dit qu'une surface est parfaitement diffusante lorsqu'elle émet ou réfléchit la même luminance dans toutes les directions : d'après la formule (2.6), l'exitance élémentaire émise d'une surface diffusante dans la direction (θ, φ) s'écrit :

$$dM(\theta, \varphi) = L \cos\theta d\omega \quad (2.7)$$

où $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ et L est une constante. Lorsqu'on intègre (2.7) sur tout l'hémisphère, on obtient la relation suivante entre la luminance L et l'exitance M :

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \pi L \quad (2.8)$$

C'est la *loi de Lambert*, qui dit que dans le cas d'une surface parfaitement diffusante, le rapport entre l'exitance et la luminance est égal à π : une telle surface est dite *lambertienne*, on utilise aussi le terme de *réflecteur lambertien*. Un milieu fortement diffusant comme le papier est souvent considéré comme un réflecteur lambertien.

Réflectance et transmittance

Le *facteur de réflexion*, appelé aussi *réflectance* (anglicisme toléré), est le rapport entre le flux réfléchi par un élément de surface ds à travers un angle solide donné ω_r et le flux incident sur ce même élément de surface depuis un angle solide donné ω_i . La réflectance est donc le rapport entre l'exitance et l'éclairement. De la même façon, on définit le *facteur de transmission*, appelé aussi *transmittance*, comme le rapport entre le flux transmis et le flux incident. La réflectance et la transmittance sont des quantités sans dimension, elle peuvent dépendre de la longueur d'onde, de la direction, de la polarisation et de la position sur la surface.

Dans ce travail, nous considérons que les surfaces étudiées ont des propriétés de réflexion et de transmission indépendantes de la position sur une portion de quelques millimètres carrés ; ces surfaces sont dites homogènes. Elles sont éclairées par une *lumière naturelle*, c'est-à-dire incohérente et non-polarisée, dans le domaine visible du spectre électromagnétique ; les quantités radiométriques, et par conséquent la réflectance et la transmittance, sont des quantités spectrales.

La réflectance est différente pour chaque couple d'angles solides (ω_i, ω_r) , et comme il existe plusieurs catégories d'angle solide (directionnel, conique et hémisphérique), il en résulte neuf configurations géométriques différentes pour des mesures de réflectance et de transmittance [20, 21]. La *géométrie de mesure* dépend du spectrophotomètre utilisé pour les vérifications expérimentales des modèles de prédiction de couleurs que nous allons développer dans ce travail. Nous utilisons le spectrophotomètre Color i7 de la société X-rite ; sa sphère intégrante génère une source lambertienne (c'est-à-dire une luminance indépendante de la direction et ceci sur une demi-sphère), et son détecteur capte le flux réfléchi (resp. transmis) par l'échantillon dans une direction qui fait un angle de 8° (resp. 0°) par rapport à la normale de la surface de l'échantillon.

Ces géométries de mesures sont notées sous le format « xy:z » en accord avec les notations recommandées par la CIE (Commission Internationale de l'Eclairage) [46] où x représente la géométrie incidente (« d » pour un rayonnement incident lambertien ou alors un angle en degrés pour un rayonnement directionnel), y est facultatif, il vaut « i » ou « e » selon que la réflexion spéculaire est incluse ou pas dans la mesure, enfin z représente la géométrie d'observation (« d » pour une sphère intégrante ou alors un angle en degrés pour un détecteur qui mesure la lumière dans une direction donnée). Dans ce travail, nous utilisons la géométrie de mesure dite hémisphérique-directionnelle, plus exactement la géométrie di: 8° pour les mesures des réflectances et la géométrie di: 0° pour les mesures des transmittances. Pour ces deux géométries, la réflectance R (resp. la transmittance T) est définie par le rapport entre le flux capté par le détecteur, noté $\Phi_{d,R}$ (resp. $\Phi_{d,T}$) et le flux incident Φ_i sur la surface de l'échantillon, on a alors :

$$R = \frac{\Phi_{d,R}}{\Phi_i} \quad (2.9)$$

et

$$T = \frac{\Phi_{d,T}}{\Phi_i} \quad (2.10)$$

Dans la pratique, le détecteur ne mesure pas la réflectance telle qu'elle est définie par la formule (2.9) car, comme dans la plupart des instruments de mesure, le spectrophotomètre comporte un seul détecteur qui est utilisé pour mesurer le flux réfléchi, le flux incident ne peut donc pas être directement mesuré. Il est mesuré indirectement en utilisant un diffuseur parfaitement blanc capable de réfléchir la lumière incidente sans l'absorber et ceci de façon uniforme sur tout l'hémisphère. Le flux capté par le

détecteur est donc proportionnel au flux incident. Le blanc standard idéal est un échantillon diffusant, parfaitement lambertien et non-absorbant, sa réflectance est égale à 1. Dans la pratique on utilise un support à base de téflon (polytétrafluoroéthylène) connu sous le nom de Spectralon et qui se rapproche le plus d'un diffuseur parfait. L'échantillon étudié et le diffuseur parfait sont éclairés et mesurés avec la même configuration géométrique. Le rapport \hat{R} entre le flux mesuré $\Phi_{d,R}$ pour l'échantillon et le flux mesuré Φ_{ref} pour le diffuseur parfait est appelé facteur de réflectance :

$$\hat{R} = \frac{\Phi_{d,R}}{\Phi_{ref}} \quad (2.11)$$

En toute rigueur, le facteur de réflectance n'est pas égal à la réflectance surtout si l'échantillon étudié est non-lambertien comme par exemple un miroir, ou encore du papier photo brillant, qui peut réfléchir plus de lumière que le diffuseur parfait, induisant un facteur de réflectance supérieur à 1. Toutefois, dans le cas d'un diffuseur lambertien, comme le papier mat sur lequel nous testons les modèles de prédiction de couleur développés dans ce travail, on peut considérer que le facteur de réflectance est une bonne approximation de la réflectance. On définit de la même façon le facteur de transmittance par rapport à l'air qui est un transmetteur parfait et non-absorbant.

Radiométrie spectrale

La source lumineuse qui émet le flux incident possède le plus souvent un spectre d'émission sur un domaine de longueur d'onde plus ou moins large. Il en résulte que les flux mesurés ont également une distribution spectrale ; cette dernière est décrite par le *flux spectrique* Φ_λ défini comme un flux par unité de longueur d'onde et exprimé en $W.m^{-1}$. Un spectrophotomètre mesure le flux spectrique pour des bandes spectrales successives de largeurs identiques. Si les bandes spectrales $\Delta\lambda$ sont petites, on considère que le flux est constant sur la largeur de la bande, le flux spectrique mesuré pour une bande est :

$$\Phi_{\Delta\lambda} = \Phi_\lambda \Delta\lambda$$

Pour une bande spectrale large $[\lambda_1, \lambda_2]$, il faut intégrer le flux sur toute la largeur de la bande, le flux spectrique mesuré est :

$$\Phi_{[\lambda_1, \lambda_2]} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_\lambda d\lambda$$

La réflectance spectrale, à la longueur d'onde λ , est le rapport entre le flux spectrique réfléchi et le flux spectrique incident, tous deux définis sur une même petite bande spectrale $\Delta\lambda$ centrée sur la longueur d'onde λ :

$$R(\lambda) = \frac{\Phi_{\lambda,r} \Delta\lambda}{\Phi_{\lambda,i} \Delta\lambda}$$

De la même façon on définit la transmittance spectrale à l'aide du flux spectrique transmis :

$$T(\lambda) = \frac{\Phi_{\lambda,t} \Delta\lambda}{\Phi_{\lambda,i} \Delta\lambda}$$

Le spectrophotomètre Color i7 a une résolution de 10 nanomètres, il mesure des spectres en réflectance et en transmittance dans un domaine spectral compris entre 360 et 750 nm en mode « UV inclus » et entre 400 et 750 nm en mode « UV exclus ». Dans ce travail, toutes les quantités radiométriques en général, et les réflectances et les transmittances en particulier, sont des quantités spectrales ; ainsi dans la suite de ce document, la dépendance en λ dans les expressions de ces quantités sera donc volontairement omise afin de simplifier les notations.

Sources de lumière et illuminants

Le rendu visuel d'un objet (brillance, couleur, texture) est fortement dépendant de la source de lumière incidente : le spectre de cette dernière doit être non-nul sur toute la bande spectrale et sa puissance doit être adaptée à la sensibilité du capteur. Une puissance trop faible induit des erreurs de mesure significatives dues à un rapport signal à bruit du système de détection trop bas, et une puissance trop élevée peut saturer le capteur. Par ailleurs, lorsque la puissance est adaptée aux mesures, on considère que, pour chaque bande spectrale, le flux réfléchi est proportionnel au flux incident (ceci n'est plus vrai pour des phénomènes optiques qui induisent un changement de longueur d'onde comme dans les milieux fluorescents). Par conséquent, le rapport entre le flux réfléchi et le flux incident est indépendant de la puissance de la source : c'est ce rapport qui définit la réflectance de l'objet. En revanche, la distribution spectrale de la puissance (DSP) de la source peut avoir une grande influence sur la perception visuelle de la couleur de l'objet. En colorimétrie, on appelle *illuminant* la distribution spectrale relative de puissance (DSRP). Nous verrons à la section suivante, que la DSRP est pris en compte dans les calculs des coordonnées trichromatiques des couleurs.

Idéalement, il faudrait un illuminant uniforme sur tout le spectre visible pour faire une mesure de réflectance, mais un tel illuminant n'existe pas, ni dans la nature, ni dans des systèmes d'éclairage artificiels. Une série d'illuminants, appelée série D, proposée par Judd, MacAdam et Wyszecki [22], représente la lumière naturelle du jour : par exemple, l'illuminant D65 pour la lumière du jour, corrélée à une température de couleur de 6504 K (voir Fig. 2.3) ; ce qui signifie que les coordonnées trichromatiques de l'illuminant D65 sont égales à celles d'un corps noir de température 6504 K. Les illuminants de la série D sont utilisés dans l'industrie graphique et l'industrie du papier ; ils sont très difficiles à reproduire de façon artificielle mais il est possible de les déduire mathématiquement à partir d'une combinaison linéaire de trois spectres issus de mesures de la lumière du jour dans le domaine visible. La source lumineuse du spectrophotomètre Color i7 est produite à l'aide d'une lampe au xénon pulsée dont la DSRP est proche de l'illuminant D65.

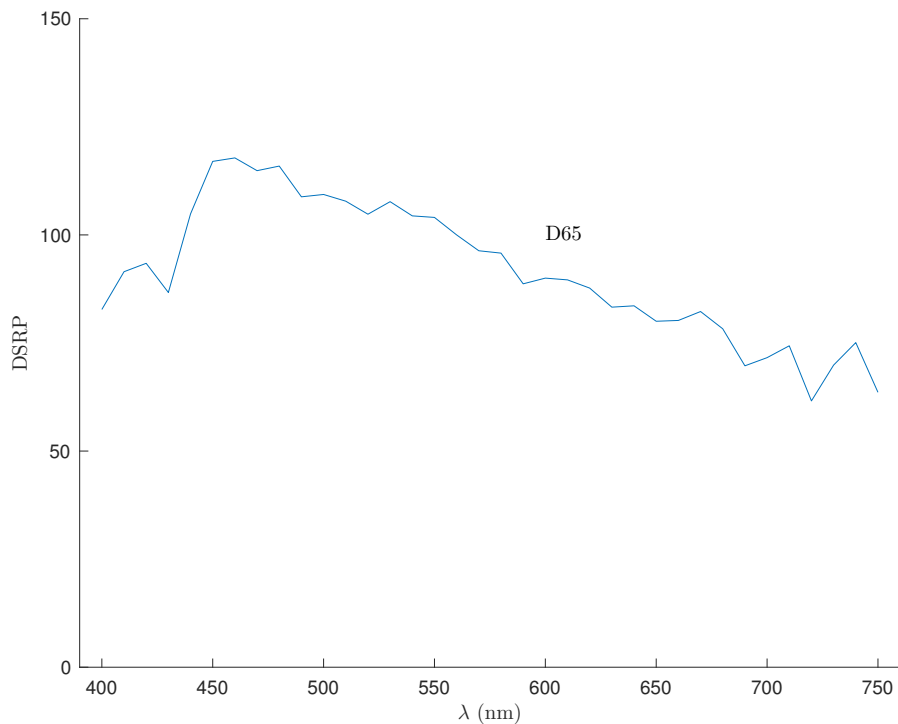


FIGURE 2.3 – *Distribution spectrale relative de la puissance de l'illuminant D65.*

2.2 Rappels de colorimétrie

La science qui étudie la mesure et la caractérisation des couleurs est la *colorimétrie*. Elle est basée sur la théorie trichromatique qui associe à une couleur non plus un spectre mais trois coordonnées dans un espace de couleurs qui est défini de façon à prendre en compte la sensation physiologique de la couleur et en s'appuyant sur le concept d'un observateur de référence. L'intérêt de la colorimétrie est de spécifier numériquement une couleur, ou même la distinction entre deux couleurs, et ceci de la façon la plus objective possible dans des conditions de mesure très strictes.

La perception visuelle de la couleur résulte de l'interprétation que fait le système de vision humaine du *stimulus* qu'il reçoit en provenance de l'objet. Le stimulus dépend des propriétés de réflexion de l'objet et de la distribution spectrale de la source lumineuse : c'est le produit du spectre de réflectance de l'objet par le spectre de l'illuminant. L'interprétation de la couleur se fait au niveau du cortex visuel situé sur le lobe occipital à l'arrière du cerveau, il analyse le signal reçu par la rétine (en réponse du stimulus de l'objet) et transmis au cerveau par le nerf optique. Les cellules photosensibles réceptrices de la lumière sont appelées *cônes* et *bâtonnets*, elles sont situées au fond de l'oeil au niveau de la rétine et transforme la lumière visible en un influx nerveux. Les bâtonnets sont à la fois plus nombreux, plus petits et plus sensibles à l'intensité que les cônes : ils interviennent notamment dans la vision nocturne (*vision scotopique*) lorsque la lumière est trop faible pour activer les cônes. Les cônes sont responsables de la vision diurne (*vision photopique*) et sont associés à la perception de la couleur.

Le système visuel humain ne distingue pas de la même façon toutes les couleurs et son efficacité peut varier significativement pour des couleurs relativement proches : la sensibilité aux écarts de couleur du système de perception visuelle ne peut se décrire facilement de manière linéaire en fonction de la sensibilité des photorécepteurs de l'oeil ; on dit que le système visuel humain a un comportement non-uniforme. Il en résulte des sensations physiologiques particulières comme la non-uniformité de la perception aux écarts de luminance, la non-uniformité de la perception aux écarts de teinte ou encore le métamérisme. Des couleurs sont dites *métamères* lorsqu'elles apparaissent identiques sous un éclairage donné alors que leur spectres sont différents, un changement de la source lumineuse permet alors de différencier les couleurs.

La caractérisation d'une couleur est basée sur un principe expérimental qui consiste à ajuster la sensation visuelle d'une couleur donnée en mélangeant trois couleurs primaires (rouge, vert et bleu). C'est le principe de *synthèse additive* qui permet théoriquement de reproduire « toutes » les couleurs perceptibles par le système visuel humain. En anglais, le terme de « color matching » est utilisé pour désigner l'égalisation d'une couleur en superposant trois couleurs de base. Les *expériences d'égalisation* de couleur consistent pour un observateur à faire la comparaison d'un stimulus visuel monochromatique, noté S_λ , associé à une couleur donnée, avec un stimulus de référence obtenu en mélangeant les stimuli monochromatiques, notés R , G et B , des faisceaux des trois couleurs primaires (voir Fig. 2.4). Un fond achromatique entoure le champ visuel dans lequel sont placés les stimuli. L'égalisation visuelle des deux couleurs se fait en modulant l'intensité des faisceaux des trois couleurs primaires de façon à obtenir S_λ sous la forme d'une combinaison linéaire de R , G et B . Les coefficients de cette combinaison linéaire sont notés \bar{r}_λ , \bar{g}_λ et \bar{b}_λ et sont appelés, en anglais, « color matching functions » :

$$S_\lambda = \bar{r}_\lambda R + \bar{b}_\lambda B + \bar{g}_\lambda G$$

En répétant l'expérience sur de nombreux stimuli du domaine visible, on obtient des courbes de réponses spectrales du système visuel aux trois primaires R , G et B sélectionnées (voir Fig. 2.5). Ces courbes sont appelées *composantes trichromatiques spectrales*, elles sont basées sur les trois primaires monochromatiques de longueurs d'onde 700 nm (R), 546,1 nm (G) et 435,8 nm (B), et ont été obtenues dans des conditions d'observation offrant un champ visuel de 2° pour lequel la vision des couleurs est essentiellement due aux cônes. Elles ont été utilisées par la CIE en 1931 pour normaliser le système de primaires RGB .

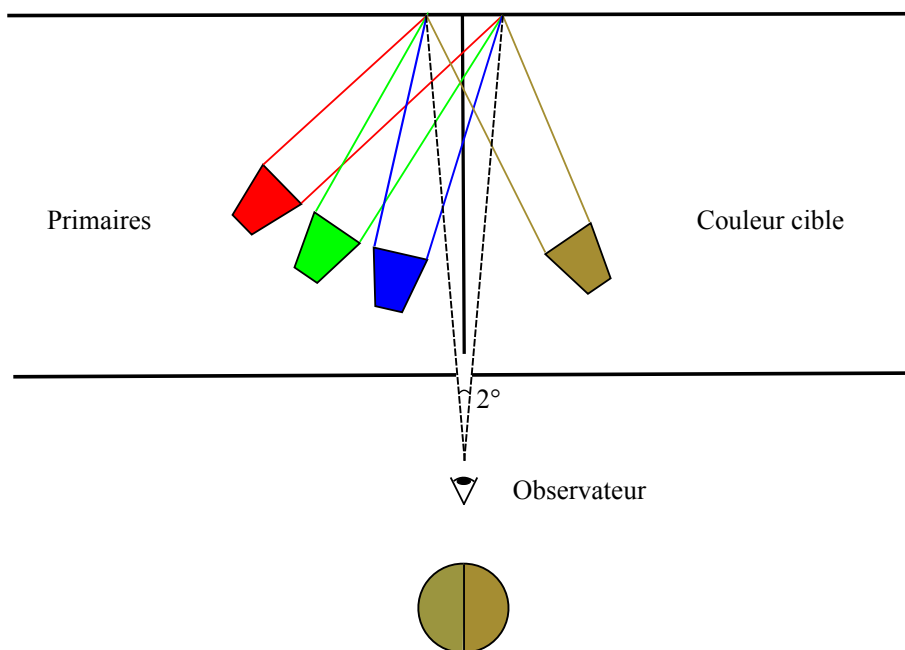


FIGURE 2.4 – *Expérience d'égalisation de couleurs.*

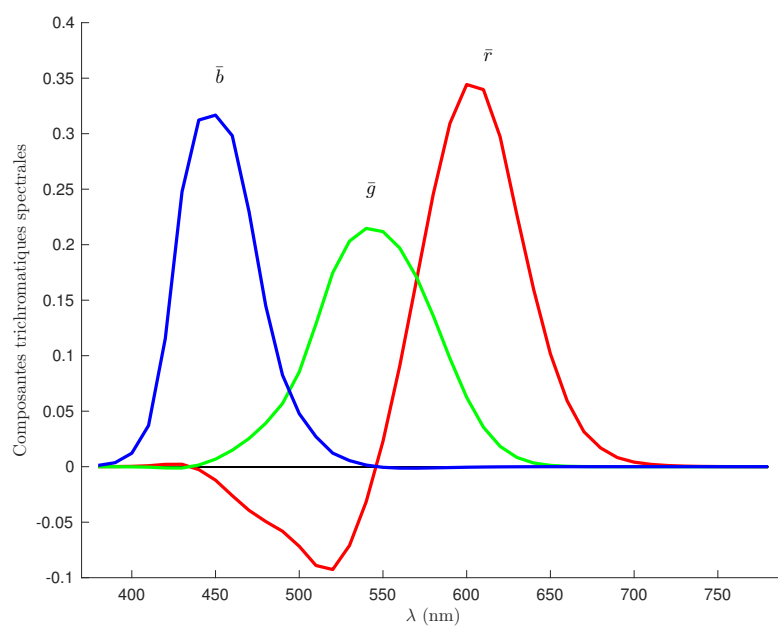


FIGURE 2.5 – *Composantes trichromatiques spectrales.*

On peut alors représenter une couleur par un point dans un espace vectoriel tridimensionnel, appelé *espace trichromatique RGB*, formé à partir de trois vecteurs normés, notés \mathbf{R} , \mathbf{G} et \mathbf{B} , associés aux primaires R , G et B . Une couleur, de stimulus spectral $C(\lambda)$, est associée à un vecteur $\mathbf{C} = (R, G, B)$ dans l'espace trichromatique RGB qui s'écrit :

$$\mathbf{C} = R\mathbf{R} + G\mathbf{G} + B\mathbf{B}$$

avec

$$R = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C(\lambda) \bar{r}(\lambda) \Delta\lambda$$

$$G = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C(\lambda) \bar{g}(\lambda) \Delta\lambda$$

$$B = \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} C(\lambda) \bar{b}(\lambda) \Delta\lambda$$

On observe que la courbe $\bar{r}(\lambda)$ dans la figure 2.5 présente des valeurs négatives. Cela signifie que pour certains stimuli S_{λ_i} l'égalisation n'est possible que si on leur ajoute une certaine quantité de rouge \bar{r}_{λ_i} :

$$S_{\lambda_i} + \bar{r}_{\lambda_i}R = \bar{b}_{\lambda_i}B + \bar{g}_{\lambda_i}B$$

Toute couleur pure (décrite par une unique longueur d'onde) ne peut donc pas être obtenue par un mélange des trois primaires. Dans l'espace trichromatique, de telles couleurs sont situées à l'extérieur du triangle dont les sommets sont définis par les trois primaires.

La CIE propose en 1931 un système de primaires virtuelles, appelé XYZ , pour lequel les composantes trichromatiques spectrales, notées $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ et $\bar{z}(\lambda)$, sont positives sur toute la gamme du spectre visible (voir Fig. 2.6). Ces nouvelles fonctions ont été obtenues par une transformation linéaire du système RGB en imposant que la courbe de $\bar{y}(\lambda)$ corresponde à la courbe de l'*efficacité lumineuse normalisée* en vision photopique. Cette dernière est une fonction, notée $V(\lambda)$, qui représente la sensibilité spectrale moyenne du système visuel humain et permet donc de faire un lien avec la photométrie ; son maximum, correspondant à la longueur d'onde 555 nm, est fixé à 1. Le système de primaires XYZ définit un nouvel espace trichromatique dans lequel les coordonnées trichromatiques d'une couleur X , Y et Z sont indépendantes de la source lumineuse (illuminant) :

$$X = k \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} R(\lambda) I(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta\lambda$$

$$Y = k \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} R(\lambda) I(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda$$

$$Z = k \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} R(\lambda) I(\lambda) \bar{z}(\lambda) \Delta\lambda$$

où $R(\lambda)$ est la réflectance de l'objet coloré, $I(\lambda)$ est la distribution spectrale de l'illuminant et k est une constante de normalisation. Pour déterminer cette constante, on considère que pour un diffuseur parfait ($R(\lambda) = 1$), la valeur de Y est égale à 100, on a alors :

$$Y = 100 = k \sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} I(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda$$

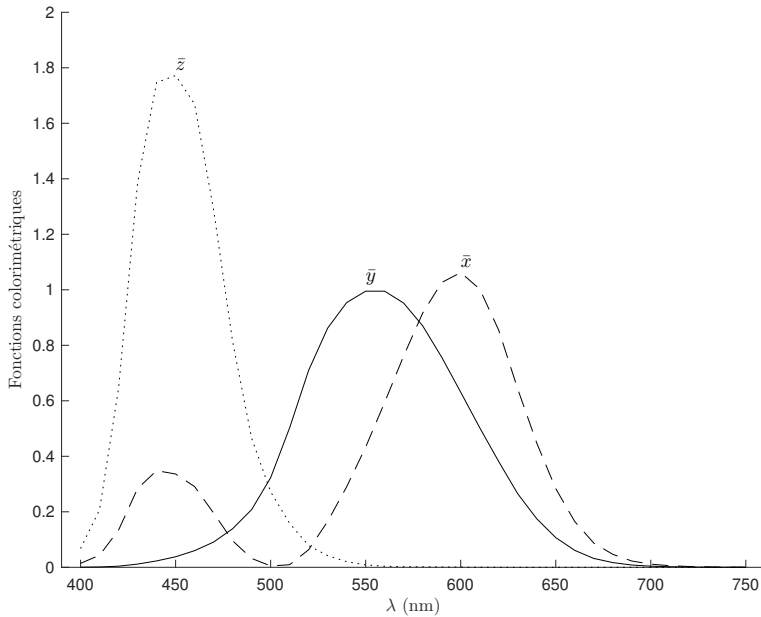


FIGURE 2.6 – Fonctions colorimétriques du système de primaires XYZ de l'observateur de référence CIE 1931 à 2° .

ou encore :

$$k = \frac{100}{\sum_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} I(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda}$$

Au-delà de la caractérisation des couleurs dans un espace trichromatique, l'objectif de la colorimétrie est aussi de fournir des outils pour caractériser la différence entre deux couleurs. Il s'agit alors de définir une métrique dans un espace colorimétrique pour faire une estimation quantitative de la différence entre les sensations visuelles produites par deux couleurs. Mais le système visuel humain présente un comportement non-uniforme pour la perception des écarts de couleurs comme le montrent les travaux de Weber sur les écarts de luminance [23], les travaux de Wrigh et Pitt sur les écarts de teinte [24], ou encore les travaux de MacAdam sur les écarts de chromaticité [25, 26] : ces études montrent qu'on ne peut définir une métrique cartésienne dans l'espace trichromatique XYZ qui puisse correspondre à une distance perceptuelle entre deux couleurs proches.

Pour faire face à cette impossibilité, de nouveaux espaces de couleurs ont été proposés, comme par exemple l'espace CIE $L^*a^*b^*$ défini et normalisé par la CIE en 1976 [27]. L'espace $L^*a^*b^*$ a pour objectif d'uniformiser les sensations colorées dans un diagramme appelé diagramme de chromaticité xyY défini à partir du système XYZ . La figure 2.7 donne une description de cet espace colorimétrique : la composante L^* correspond à l'axe des luminances (on dit aussi *axe des niveaux de gris* ou encore *axe neutre*), la composante a^* correspond à une gamme de couleurs qui va du vert (valeurs négatives) au rouge (valeurs positives) et la composante b^* correspond à une gamme de couleurs qui va du bleu (valeurs négatives) au jaune (valeurs positives). La correspondance, non-linéaire, entre les coordonnées XYZ et les coordonnées $L^*a^*b^*$ d'une couleur est donnée par les formules :

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{1/3} - 16 & \text{si } \frac{Y}{Y_n} > 0,008856 \\ 903,3 \left(\frac{Y}{Y_n}\right) - 16 & \text{si } \frac{Y}{Y_n} < 0,008856 \end{cases}$$

$$a^* = 500 \left[f\left(\frac{X}{X_n}\right) - f\left(\frac{Y}{Y_n}\right) \right]$$

$$b^* = 200 \left[f \left(\frac{X}{X_n} \right) - f \left(\frac{Z}{Z_n} \right) \right]$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{si } x > 0,008856 \\ 7,787x + \frac{16}{116} & \text{si } x < 0,008856 \end{cases}$$

X_n, Y_n, Z_n sont les coordonnées trichromatiques de l'illuminant de référence pour un diffuseur parfait. Une couleur référencée dans l'espace $L^*a^*b^*$ peut également être définie par la luminosité, la *teinte* et la *saturation* ; ces attributs sont définis à partir des coordonnées cylindriques :

- la luminosité, notée L^* , est la composante de la couleur sur l'axe L^* , elle varie de 0 (pour le noir) à 100 (pour le blanc)
- la teinte, notée h^* (« hue »), est l'angle entre le vecteur de base sur l'axe des abscisses a^* et le vecteur défini par la couleur référencée, cet angle est exprimé en degrés et varie entre 0 et 360°
- la saturation, notée C^* (« chroma »), est la distance sur le plan (a^*, b^*) entre le point associé à la couleur référencée et l'axe neutre

La teinte h^* et la saturation C^* sont données en fonction des coordonnées cartésiennes a^* et b^* par les formules :

$$h^* = \arctan \left(\frac{b^*}{a^*} \right)$$

et

$$C^* = \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}$$

On considère maintenant deux couleurs, de coordonnées cartésiennes (L_i^*, a_i^*, b_i^*) et de coordonnées cylindriques (L_i^*, h_i^*, C_i^*) avec $i = 1, 2$; pour quantifier la différence séparant les deux stimuli qui leur sont associés, plusieurs métriques ont été définies. Parmi ces métriques, appelées *écarts colorimétriques*, on retiendra une distance très utilisée dans les arts graphiques et dans l'industrie textile ; elle est notée *distance* ΔE_{94} et elle est définie par [28] :

$$\Delta E_{94} = \sqrt{\left(\frac{L_1^* - L_2^*}{k_L S_L} \right)^2 + \left(\frac{C_1^* - C_2^*}{k_C S_C} \right)^2 + \left(\frac{\Delta H_{ab}^*}{k_H S_H} \right)^2} \quad (2.12)$$

avec

$$\Delta H_{ab}^* = \sqrt{(a_1^* - a_2^*)^2 + (b_1^* - b_2^*)^2 - (C_1^* - C_2^*)^2},$$

$$S_L = 1, \quad S_C = 1 + 0,045\sqrt{C_1^* C_2^*}, \quad S_H = 1 + 0,015\sqrt{C_1^* C_2^*},$$

$$k_L = \begin{cases} 1 & (\text{arts graphiques}) \\ 2 & (\text{textile}) \end{cases}, \quad k_C = 1, \quad k_H = 1$$

On considère en général que deux couleurs séparées par une distance colorimétrique ΔE_{94} inférieure à 1 unité présentent une différence imperceptible par le système visuel humain.

Dans la suite, nous utilisons la distance ΔE_{94} pour déterminer les écarts colorimétriques entre les couleurs prédites par les modèles et les couleurs mesurées par le spectrophotomètre. Cependant, cette distance dépend fortement des conditions d'observation dans lesquelles ont été faites les expériences

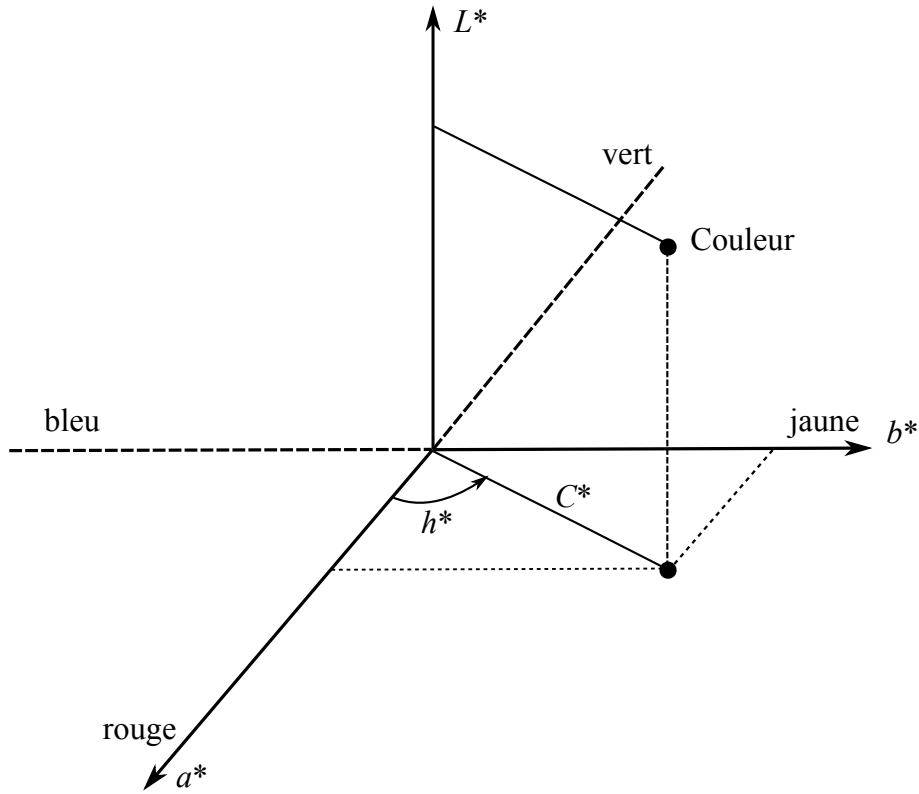


FIGURE 2.7 – Espace colorimétrique $L^*a^*b^*$.

d'égalisation. Ces conditions sont souvent très éloignées des conditions usuelles d'observation des couleurs dans le domaine des arts graphiques ou du textile. De plus, même si l'espace $L^*a^*b^*$ présente une amélioration par rapport à l'espace XYZ en ce qui concerne l'uniformité des différences de couleurs, on ne peut tout de même pas considérer qu'il est un espace colorimétrique uniforme. Par conséquent, la formule (2.12) est à considérer avec beaucoup de précaution, même si elle est couramment utilisée par la communauté scientifique pour valider les modèles prédictifs. Pour cette raison, nous utiliserons également l'*écart quadratique moyen*, noté rms , entre deux stimuli $S_1(\lambda)$ et $S_2(\lambda)$ pour caractériser la différence entre les deux couleurs qui leur sont associées :

$$rms = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\lambda_i \in vis} [S_1(\lambda_i) - S_2(\lambda_i)]^2} \quad (2.13)$$

où *vis* représente la partie visible du spectre électromagnétique et N est le nombre de points considérés sur ce domaine. Dans ce travail, les spectres sont prédits et mesurés entre 400 et 750 nm avec un pas de 10 nm, ce qui fait un total de $N = 36$ points.

Nous proposons les références [29] et [30] pour une étude approfondie de la colorimétrie, et la référence [31] qui est un bon document de synthèse sur lequel s'est appuyée la rédaction de cette section.

Chapitre 3

Le modèle de Kubelka-Munk

Nous proposons dans ce chapitre de présenter le modèle de Kubelka-Munk qui prédit la réflectance spectrale et la transmittance spectrale des milieux diffusants homogènes. Même si ce n'est pas, *a priori*, une théorie applicable aux surfaces qui présentent des hétérogénéités (comme des points d'encre à la surface d'une feuille de papier), il est important de rappeler ce modèle classique dont l'utilisation est très répandue dans l'industrie et dont nous proposons, dans les chapitres suivants, une extension aux milieux diffusants qui présentent une surface hétérogène comme les imprimés en demi-ton.

Après une brève introduction présentée à la section 3.1, le système d'équations différentielles de la théorie de Kubelka-Munk est établi et quelques méthodes de résolution analytique de ce système sont rappelées dans la section 3.2. Dans la section 3.3, les formules de Kubelka-Munk des *facteurs de transfert* (réflectance et transmittance) du milieu sont inversées pour obtenir les *coefficients de Kubelka-Munk* associés à l'absorption et à la diffusion. Les deux sections suivantes traitent les cas particuliers d'un *milieu infiniment épais* (section 3.4) et d'un *milieu en contact optique avec un fond réfléchissant* (section 3.5). Dans la section 3.6 est présentée la *correction de Saunderson* : c'est la correction qu'il faut apporter aux facteurs de transfert pour prendre en compte les réflexions de la lumière à l'interface entre l'air et le milieu. Pour finir, un résumé du chapitre est proposé en mettant en évidence les conditions de validité mais aussi les limites du modèle de Kubelka-Munk.

3.1 Introduction

Le comportement de la lumière dans un milieu diffusant et absorbant peut être décrit par l'*équation de transfert radiatif* (ETR) lorsqu'un modèle électromagnétique n'est pas strictement requis pour rendre compte fidèlement des phénomènes optiques, c'est-à-dire quand les centres diffuseurs sont répartis de façon aléatoire. L'ETR modélise les variations de luminance d'un faisceau lumineux lorsqu'il se propage à travers le milieu. Outre la longueur d'onde, la luminance dépend de la direction du faisceau incident et de la position dans le milieu. L'équation de transfert radiatif est obtenue en considérant la loi de conservation de l'énergie du flux radiatif dans un élément de volume et pour une direction donnée : plus précisément, la variation de la luminance dans une direction donnée est égale aux pertes dues à l'absorption et à la diffusion dans cette direction, auxquelles on ajoute le gain de flux diffusé dans cette même direction à partir de toutes les autres directions. En toute rigueur, cette équation n'est valide que pour des milieux dans lesquels le libre parcours moyen d'un photon dû à la diffusion est très supérieur à la longueur d'onde du rayonnement incident et très supérieur aux dimensions des particules diffusantes. La théorie du transfert radiatif a été conceptualisée par Chandrasekhar [32].

Il existe des situations pour lesquelles les propriétés géométriques et physiques du milieu, ainsi que les conditions d'éclairage, mènent à une expression très simplifiée de l'équation de transfert radiatif qui peut alors être résolue de façon exacte. C'est le cas des milieux fortement diffusants à géométrie plane avec des faces parallèles (*couches diffusantes*) éclairés par un *flux Lambertien* (luminance identique dans toutes les directions de l'hémisphère). Dans un milieu fortement diffusant, le libre parcours moyen de diffusion est très inférieur à l'épaisseur du milieu, ainsi le flux incident perd la mémoire de sa distribution angulaire en pénétrant dans le milieu, et ceci quelle que soit la géométrie d'éclairage ; le flux à l'intérieur du milieu peut alors être considéré comme Lambertien. Les flux lumineux à l'extérieur et à l'intérieur du milieu étant désormais indépendants de la direction de propagation, l'expression de l'équation de transfert radiatif se réduit à un système de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Ce système décrit les variations simultanées du flux ascendant et du flux descendant se propageant à travers le milieu : on parle alors de *modèle à deux flux*, ces flux ne dépendent que de la profondeur dans le milieu (et de la longueur d'onde).

Historiquement, ce modèle a été introduit en 1905 par Schuster [33] qui étudie la propagation de la lumière dans le milieu interstellaire puis amélioré en 1914 par Schwarzschild [34] pour décrire la diffusion et l'absorption de la lumière dans les atmosphères stellaires. Repris en 1931 par Kubelka et Munk [35] qui l'utilisèrent pour prédire la réflectance de peintures, il fut popularisé par l'article en anglais de Kubelka en 1948 [41]. Dans la suite de ce document, nous garderons la référence à Kubelka et Munk (*modèle de Kubelka-Munk*) pour désigner le modèle de transfert radiatif à deux flux dans une couche fortement diffusante. Ce modèle trouve des applications dans les secteurs économiques où l'apparence et la couleur du produit final sont importantes comme dans les industries du textile, du papier, des encres et des peintures.

3.2 Système d'équations différentielles de Kubelka-Munk

Le modèle de Kubelka-Munk est un modèle de transfert radiatif à deux flux qui permet de prédire la réflectance et la transmittance d'une couche absorbante et diffusante homogène éclairée par un rayonnement lambertien. On considère une fine sous-couche d'épaisseur dz et on note i et j les flux lambertiens orientés vers le bas et vers le haut, respectivement (voir Fig.3.1). On suppose que les variations de ces flux sont dues à l'absorption et à la diffusion.

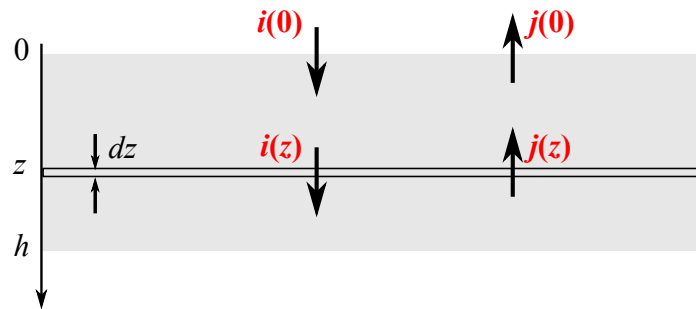


Figure 3.1 – Flux ascendant et descendant à travers une fine sous-couche d'épaisseur dz

On note K et S les *coefficients de Kubelka-Munk* associés respectivement à l'absorption et à la diffusion du milieu par unité de longueur (leur dimension est celle de l'inverse d'une longueur)¹. En pénétrant dans la couche d'épaisseur dz , le flux descendant i diminue de la quantité $(K + S)idz$ due à l'absorption et à la diffusion, et il augmente par ailleurs de la quantité $Sjdz$ due à la perte par rétro-diffusion du flux montant j . Le même raisonnement sur le flux montant j mène au système d'équations différentielles suivant :

1. Les coefficients macroscopiques K et S ne coïncident pas avec les coefficients d'absorption (σ_a) et de diffusion (σ_s) usuellement définis dans le cadre de la théorie du transfert radiatif [36].

$$\begin{cases} \frac{di}{dz} = -(K + S)i + Sj \\ \frac{dj}{dz} = -Si + (K + S)j \end{cases} \quad (3.1)$$

Il existe plusieurs façons de résoudre le système (3.1), comme celle par exemple qui utilisent la transformation de Laplace [37] ou encore la méthode de l'exponentielle matricielle [38]. Ces méthodes mènent aux solutions générales du système d'équations différentielles de Kubelka-Munk qui s'écrivent :

$$i(z) = i(0) \cosh(bSz) + \frac{1}{b} [j(0) - ai(0)] \sinh(bSz) \quad (3.2)$$

et

$$j(z) = j(0) \cosh(bSz) + \frac{1}{b} [aj(0) - i(0)] \sinh(bSz) \quad (3.3)$$

avec

$$a = \frac{K + S}{S} \quad (3.4)$$

et

$$b = \sqrt{a^2 - 1} \quad (3.5)$$

en supposant S non nul.

On considère maintenant que la couche diffusante est éclairée par le dessus seulement avec un flux incident I_0 , les conditions aux bords du système (3.1) s'écrivent alors :

$$i(0) = I_0 \quad (3.6)$$

et

$$j(h) = 0 \quad (3.7)$$

La réflectance et la transmittance du milieu, également appelés *facteurs de transfert*, sont définies par les rapports de flux suivants :

$$\rho = \frac{j(0)}{I_0} \quad (3.8)$$

et

$$\tau = \frac{i(h)}{I_0} \quad (3.9)$$

En reportant (3.2) et (3.3) dans les équations (3.8) et (3.9), et en tenant compte des conditions aux bords, on obtient les expressions des facteurs de transfert de la couche diffusante en fonction de ses propriétés physiques (coefficients d'absorption K et de diffusion S) et géométriques (épaisseur de couche h) :

$$\rho = \frac{\sinh(bSh)}{a \sinh(bSh) + b \cosh(bSh)} \quad (3.10)$$

et

$$\tau = \frac{b}{a \sinh(bSh) + b \cosh(bSh)} \quad (3.11)$$

Toutes les quantités définies précédemment, à savoir les flux radiatifs i et j , les coefficients de Kubelka-Munk K et S , les facteurs de transfert ρ et τ ainsi que a et b , sont des quantités spectrales : elles dépendent de la longueur d'onde λ dans le domaine visible (entre 400 nm et 750 nm).

Il existe encore une autre façon d'obtenir ces derniers résultats : aussi bien dans l'article de Kubelka et Munk de 1931 [35] que dans celui publié en 1948 par Kubelka [41], le système (3.1) n'est pas explicitement résolu. Kubelka et Munk s'intéressent à la réflectance (et à la transmittance) du milieu, et non pas aux flux ; ils introduisent alors la quantité $r(z) = j(z)/i(z)$ et déduisent à partir des équations du système (3.1) l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{dz} = -S(r^2 - 2ar + 1) \quad (3.12)$$

C'est une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 de type « Riccati » ; elle se résout de façon exacte. En ajoutant la condition au bord $r(h) = 0$, on obtient alors la formule (3.10).

La quantité a est définie à partir des propriétés physiques du milieu [voir formule (3.4)], Kubelka montre (cf. référence [41], formule (33) avec une erreur de frappe) que cette quantité peut également être exprimée en fonction des facteurs de transfert ρ et τ :

$$a = \frac{\rho^2 - \tau^2 + 1}{2\rho} \quad (3.13)$$

3.3 Inversion du modèle

Il est possible, après quelques calculs développés dans l'annexe A, d'inverser les équations (3.10) et (3.11) afin d'obtenir les expressions des coefficients de Kubelka-Munk K et S en fonction des facteurs de transfert ρ et τ :

$$Kh = \frac{a-1}{b} \ln \left(\frac{1 - \rho(a-b)}{\tau} \right) \quad (3.14)$$

et

$$Sh = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{1 - \rho(a-b)}{\tau} \right) \quad (3.15)$$

en considérant que a et b sont exprimés à l'aide des relations (3.13) et (3.5) respectivement.

3.4 Cas d'un milieu infiniment épais

On considère le cas particulier d'une couche diffusante dont l'épaisseur est infinie. La réflectance s'écrit par passage à la limite de la formule (3.10) :

$$\rho_\infty = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{a + b \coth(bSh)} = \frac{1}{a+b} = a-b \quad (3.16)$$

On peut également exprimer ρ_∞ en fonction des coefficients de Kubelka-Munk, plus exactement en fonction du rapport K/S :

$$\rho_\infty = 1 + \frac{K}{S} - \sqrt{\left(\frac{K}{S}\right)^2 + 2\frac{K}{S}} \quad (3.17)$$

Le rapport entre K et S peut être exprimé en fonction de ρ_∞ :

$$\frac{K}{S} = \frac{(1 - \rho_\infty)^2}{2\rho_\infty} \quad (3.18)$$

Cette formule est un des résultats le plus importants de la théorie de Kubelka-Munk, elle est très largement utilisée dans l'industrie du papier et du textile.

On considère qu'une couche d'épaisseur h finie se comporte comme un milieu infiniment épais si l'intensité lumineuse émergent de l'autre côté de la couche est nulle ; on parle de *milieux opaques*. On a alors la condition au bord $i(h) = 0$ qui, combinée à l'équation (3.2) et aux conditions aux bords (3.6) et (3.7), donne :

$$\rho = a \sinh(bSh) - b \cosh(bSh) \quad (3.19)$$

3.5 Cas d'un milieu en contact optique avec un fond réfléchissant

Dans certaines situations pratiques, on peut considérer que la couche diffusante est en contact optique avec un fond réfléchissant de réflectance ρ_g (c'est le cas par exemple de la peinture sur un substrat) ; la condition au bord en $z = h$ s'écrit alors :

$$j(h) = \rho_g i(h) \quad (3.20)$$

En reportant les équations (3.6) et (3.20) dans les équations (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\rho = \frac{(1 - a\rho_g) \sinh(bSh) + b\rho_g \cosh(bSh)}{(a - \rho_g) \sinh(bSh) + b \cosh(bSh)} \quad (3.21)$$

et, en considérant que $bSh \neq 0$, l'équation (3.21) se simplifie :

$$\rho = \frac{1 - \rho_g(a - b \coth(bSh))}{a - \rho_g + b \coth(bSh)} \quad (3.22)$$

On remarque que, logiquement, ρ tend vers ρ_g lorsque bSh tend vers 0. La formule (3.22) est appelée *solution hyperbolique* du système d'équations différentielles de Kubelka-Munk. Lorsque le fond est parfaitement noir, on peut reporter $\rho_g = 0$ dans (3.21) et on retrouve alors la formule (3.10). Dans le cas d'une couche diffusante en contact optique avec un fond réfléchissant blanc idéal, la réflectance est obtenue en reportant $\rho_g = 1$ dans (3.21) et on obtient :

$$\rho = \frac{b \cosh(bSh) - (a - 1) \sinh(bSh)}{b \cosh(bSh) + (a - 1) \sinh(bSh)} \quad (3.23)$$

3.6 Correction de Saunderson

La couche diffusante est généralement entourée d'un milieu d'indice de réfraction différent, comme l'air par exemple. Il y a alors des transferts de flux entre le milieu et chacune des deux interfaces qui ne sont pas modélisés par la théorie de Kubelka-Munk. La prise en compte des transferts de flux entre le milieu et les interfaces avec l'air est appelée *correction de Saunderson*. La formule de correction proposée par Saunderson considère une seule interface avec l'air, éclairée à 45° et observée dans la direction normale à la surface [42]. Cette correction peut être étendue à toute autre géométrie d'éclairage et d'observation, et peut être appliquée aux deux interfaces de la couche.

Géométries de mesure	r_s	T_{in}	T_{out}
d :d	r_{01}	t_{01}	t_{10}
di :8°	$R_{01}(8^\circ)$	t_{01}	$T_{01}(8^\circ)/n^2$
de :8°	0	t_{01}	$T_{01}(8^\circ)/n^2$
8° :di	$R_{01}(8^\circ)$	$T_{01}(8^\circ)$	t_{10}
8° :de	0	$T_{01}(8^\circ)$	t_{10}
45° :0°	0	$T_{01}(45^\circ)$	$T_{01}(0^\circ)/n^2$
0° :45°	0	$T_{01}(0^\circ)$	$T_{01}(45^\circ)/n^2$

TABLE 3.1 – Facteurs de transfert d’une interface pour les géométries de mesure usuelles.

On considère un faisceau lumineux arrivant sur la couche diffusante (resp. venant de la couche diffusante) avec un angle θ par rapport à la normale à la surface. Pour une lumière incidente non-polarisée, la réflectance angulaire, notée $R_{01}(\theta)$ [resp. $R_{10}(\theta)$] est donnée par la *formule de Fresnel* [43] :

$$R_{01}(\theta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \cos \theta} \right)^2 \right]$$

où n est l’indice de réfraction du milieu.

La loi de Snell-Descartes permet facilement d’établir que la réflectance angulaire est la même si la lumière vient du milieu dans la direction $\theta' = \arcsin(\sin \theta/n)$; c’est-à-dire : $R_{01}(\theta) = R_{10}(\theta')$. Les transmittances angulaires air-milieu et milieu-air sont $T_{01}(\theta) = 1 - R_{01}(\theta)$ et $T_{10}(\theta') = T_{01}(\theta)$ respectivement. Lorsque la lumière incidente est parfaitement diffuse (lambertienne), la réflectance de l’interface est notée r_{01} et elle est obtenue en intégrant la réflectance angulaire de Fresnel $R_{01}(\theta)$ sur l’hémisphère de la façon suivante [44] :

$$r_{01} = \int_0^{\pi/2} R_{01}(\theta) \sin(2\theta) d\theta$$

Dans ce cas, la transmittance air-milieu est $t_{01} = 1 - r_{01}$, la réflectance du milieu est $r_{10} = 1 - (1 - r_{01})/n^2$ et la transmittance milieu-air est $t_{10} = 1 - r_{10}$ [45].

De façon générale, les facteurs de Fresnel sont dépendants des conditions d’éclairage et d’observation de la surface (voir section 2.1). Dans la suite de ce document, on utilisera les notations suivantes : r_s pour la réflectance de l’interface côté air (on parle de *réflexion externe* ou encore de *réflexion spéculaire*, elle peut être nulle si l’instrument de mesure est en mode « spéculaire exclus »), T_{in} pour la transmittance air-milieu (elle dépend uniquement de la géométrie d’éclairage) et T_{out} pour la transmittance milieu-air (elle dépend uniquement de la géométrie d’observation). Les expressions de r_s , T_{in} et T_{out} sont données dans la table 3.1 pour les géométries de mesure usuelles. On notera r_d la réflectance de l’interface du coté milieu (on parle de réflexion interne ou encore de réflexion lambertienne), elle est indépendante des géométries de mesure :

$$r_d = r_{10} = 1 - \frac{1 - r_{01}}{n^2} \quad (3.24)$$

On note R et T les facteurs de transfert effectifs de la couche diffusante et on note ρ et τ ses facteurs de transfert intrinsèques, c’est-à-dire la réflectance et la transmittance de la couche sans prendre en considération l’interface air-milieu et donnés par les formules du modèle de Kubelka-Munk (3.10) et (3.11). On note I_0 et J_1 les flux incidents qui éclairent la couche diffusante par le dessus et par le dessous respectivement. Les facteurs de transfert intrinsèques sont définis par $\rho = j(0)/i(0)$ et $\tau = j(0)/j(h)$ (comme dans la section 3.2) et les facteurs de transfert effectifs sont définis de façon similaire par $R = J_0/I_0$ et $T = J_0/J_1$.

En ce qui concerne le flux incident provenant de la couche d'air, une partie r_s de ce flux est réfléchiée et une autre partie T_{in} est transmise dans le milieu. De la même façon, pour le flux ascendant $i(0)$ provenant du milieu, une partie r_d est réfléchiée et une partie T_{out} est transmise à l'air [voir Fig. 3.2(a)]. Ces transferts de flux s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} i(0) &= T_{in}I_0 + r_d\rho i(0) \\ J_0 &= r_sI_0 + T_{out}\rho i(0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

On déduit des équations (3.25) la correction de Saunderson sur la réflectance :

$$R = \frac{J_0}{I_0} = r_s + \frac{T_{in}T_{out}\rho}{1 - r_d\rho} \quad (3.26)$$

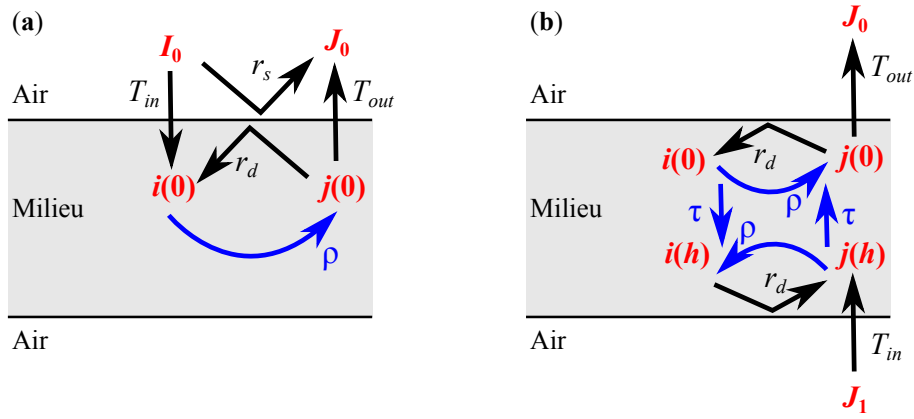


Figure 3.2 – Réflexions et transmissions à l'interface air-milieu lorsque la couche est observée en mode réflexion (a) et en mode transmission (b).

De la même façon les transferts de flux représentés dans la figure 3.2(b) s'écrivent :

$$\begin{aligned} i(0) &= r_d j(0) \\ j(0) &= \rho i(0) + \tau j(h) \\ i(h) &= \rho j(h) + \tau i(0) \\ j(h) &= T_{in}J_1 + r_d i(h) \\ J_0 &= T_{out}j(0) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Et on déduit des équations (3.27) la correction de Saunderson sur la transmittance :

$$T = \frac{J_0}{J_1} = \frac{T_{in}T_{out}\tau}{(1 - r_d\rho)^2 - r_d^2\tau^2} \quad (3.28)$$

3.7 Théorie de Kubelka-Munk pour les milieux non-symétriques

Il est possible d'étendre le formalisme simple de la théorie de Kubelka-Munk au cas des milieux non-symétriques en considérant les coefficients K et S comme des fonctions de la profondeur z dans le milieu. Le système d'équations (3.1) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{di(z)}{dz} = -a(z)S(z)i(z) + S(z)j(z) \\ \frac{dj(z)}{dz} = -S(z)i(z) + a(z)S(z)j(z) \end{cases} \quad (3.29)$$

avec $a(z) = [K(z) + S(z)]/S(z)$ et les conditions aux bords $i(0) = I_0 \neq 0$, $j(h) = 0$. Kubelka [5] considère le cas où K et S sont proportionnels (le rapport K/S est constant), ainsi la quantité a est constante, et montre que :

$$\rho = \frac{\sinh(bP)}{a \sinh(bP) + b \cosh(bP)} \quad (3.30)$$

et

$$\tau = \frac{b}{a \sinh(bP) + b \cosh(bP)} \quad (3.31)$$

avec

$$P = \int_0^h S(z) dz$$

P est appelé « pouvoir de diffusion » de la couche diffusante d'épaisseur h . Mandelis [47] obtient le même résultat en proposant la méthode déjà évoquée dans le cas d'un milieu symétrique (section 3.2) et qui consiste à établir, à partir des équations différentielles du système (3.29), une équation différentielle pour la quantité $r(z) = j(z)/i(z)$,

$$\frac{dr(z)}{dz} = -S(z) \left(r(z)^2 - 2a(z)r(z) + 1 \right) \quad (3.32)$$

à laquelle il faut ajouter la condition aux bords $r(h) = 0$. C'est une équation de Riccati qui n'a pas de solution exacte sauf si le paramètre $a(z)$ est constant, c'est-à-dire si les coefficients K et S sont proportionnels. Même si ni Kubelka ni Mandelis ne le mentionnent explicitement dans leurs articles, les solutions (3.30) et (3.31) sont indépendantes du sens de propagation de la lumière : la réflectance avant, ρ , est égale à la réflectance arrière, ρ' , et la transmittance vers le bas, τ , est égale à la transmittance vers le haut, τ' .

Résumé et discussion

Le modèle de Kubelka-Munk est probablement le modèle le plus simple et le plus connu pour décrire les propriétés optiques (réflectance et transmittance) d'un milieu diffusant à géométrie plane à faces parallèles en fonction de ses caractéristiques phénoménologiques (absorption et diffusion) et géométrique (épaisseur). La théorie de Kubelka-Munk suppose que le flux incident est lambertien et qu'il reste lambertien à l'intérieur du milieu. Cette hypothèse est d'autant plus justifiée que le milieu est très fortement diffusant et très faiblement absorbant. Mais dans certains cas, on observe des écarts importants entre les prédictions du modèle et les observations, notamment lorsque les propriétés optiques du milieu ou les conditions géométriques d'éclairage ne sont pas compatibles avec les hypothèses du modèle.

En particulier, lorsque les effets des composantes absorbantes à l'intérieur d'un milieu diffusant sont importants, la luminance d'un rayon pénétrant dans le milieu avec une incidence oblique n'est pas atténuée de la même façon que celle d'un rayon dont l'incidence est normale par rapport à la surface. Il en résulte que, même si la lumière incidente est lambertienne, elle ne l'est plus à l'intérieur du milieu. Les auteurs qui se sont intéressés au problème (cf. références [48, 49, 50]) mettent en évidence que les mauvaises prédictions du modèle de Kubelka-Munk pour les milieux diffusants dans lesquels l'absorption est importante s'expliquent par la non-linéarité des relations entre les coefficients de Kubelka-Munk K et S d'une part, et les coefficients d'absorption et de diffusion σ_a et σ_s d'autre part qui, contrairement à K et S , sont définis à partir des propriétés intrinsèques du milieu (densité, libres parcours moyens d'absorption et libre parcours moyen de diffusion d'un photon). Par ailleurs, dans certains cas, lorsque la concentration des particules absorbantes (resp. diffusante) augmente, celle des particules diffusantes (resp. absorbantes) restant constante, on observe que les deux coefficients K et S varient ; ces deux paramètres sont donc interdépendants [51].

La théorie de Kubelka-Munk est un cas particulier de la théorie du transfert radiatif, à ce titre elle doit vérifier l'hypothèse selon laquelle la distance moyenne entre les composantes absorbantes et/ou diffusantes est très supérieure à la longueur d'onde de la lumière incidente. C'est le cas des milieux fibreux comme le papier (la distance moyenne entre deux fibres est de l'ordre de 0,1 mm). Mais le modèle fait également l'hypothèse que la diffusion doit être forte et symétrique dans un milieu semi-infini, ce qui n'est pas le cas d'un milieu dont la diffusion et l'absorption varient localement à l'échelle mésoscopique comme les surfaces imprimées en demi-ton. Non seulement la transparence des encres a tendance à favoriser les flux collimatés mais le système {milieu diffusant + points d'encres} ne peut plus être considéré comme uniforme ; le modèle de Kubelka-Munk ne peut donc pas prendre en compte les interactions de la lumière avec les points d'encre sur le papier et par conséquent ne peut prédire la couleur observée. La prédiction de la couleur des surfaces imprimées en demi-ton nécessite de développer des modèles spécifiques dont certains sont présentés au chapitre 4.

Chapitre 4

Modèles de prédiction de couleurs en demi-ton

Les modèles de prédiction de couleurs prennent en compte les interactions entre la lumière, les encres et le support dans le but de prédire la couleur d'une image cible à imprimer avec des quantités d'encre données. L'objectif de ces modèles est de se substituer aux méthodes numériques d'étalonnage longues et coûteuses, fortement implantées dans l'industrie. Dans ce chapitre, après avoir rappelé le concept de couleur en demi-ton à la section 4.1, nous passons en revue les modèles optiques développés depuis plus de 80 ans parmi lesquels on distingue les modèles dits « de surface » (section 4.2) et les modèles dits « phénoménologiques à deux flux » (section 4.3), enfin nous détaillons la méthode qui permet de calibrer ces modèles à partir de mesures effectuées sur un nombre réduit d'échantillons de couleurs (section 4.4).

4.1 Surfaces imprimées en demi-ton

La sensation de couleur perçue par un observateur est due à l'absorption sélective des longueurs d'onde de la lumière réfléchie sur (ou transmise à travers) la surface colorée. Cette absorption est elle-même le résultat de dépôt de matières colorantes, les encres, sur un support plus ou moins diffusant comme le papier. Dans le domaine de l'imprimerie, on appelle trichromie le système de reproduction des couleurs basé sur trois encres. Les trois encres primaires les plus usuelles, donnant la gamme de tons la plus étendue, sont le cyan, le magenta et le jaune, à partir desquelles on obtient, en les superposant, un ensemble de couleurs appelées *primaires de Neugebauer* : blanc (absence d'encre), cyan, magenta, jaune, rouge (magenta & jaune), vert (cyan & jaune), bleu (cyan & magenta) et noir (cyan & magenta & jaune). Une *couleur en demi-ton* est alors une mosaïque de couleurs primaires de Neugebauer qui résulte des recouvrements partiels des points d'encre de couleurs cyan, magenta et jaune (voir Fig. 4.1). Dans la suite, les primaires de Neugebauer seront indexées de 1 à 8 de façon suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8
blanc	cyan	magenta	jaune	rouge	vert	bleu	noir

TABLE 4.1 – *Indexation des primaires de Neugebauer.*

La surface occupée par chaque primaire de Neugebauer rapportée à la surface totale de l'imprimé est appelée *taux de couverture* de la primaire ; ce dernier, noté a_i avec $i = 1, 2, \dots, 8$, peut être déterminé en fonction des taux de couverture des encres primaires cyan (c), magenta (m) et jaune (y) à l'aide des équations de Demichel [52] :

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1 - c)(1 - m)(1 - y) \\
a_2 &= c(1 - m)(1 - y) \\
a_3 &= (1 - c)m(1 - y) \\
a_4 &= (1 - c)(1 - m)y \\
a_5 &= (1 - c)my \\
a_6 &= c(1 - m)y \\
a_7 &= cm(1 - y) \\
a_8 &= cmy
\end{aligned} \tag{4.1}$$

avec

$$\sum_{i=1}^8 a_i = 1$$

Les équations de Demichel ne sont valables en théorie que pour les trames aléatoires, elles sont cependant valables aussi pour les trames périodiques. Chaque encre primaire est déposée sur le support selon une trame orientée avec un angle différent de ceux des trames correspondant aux deux autres encres primaires [53] pour éviter les battements entre les trames (moirés).

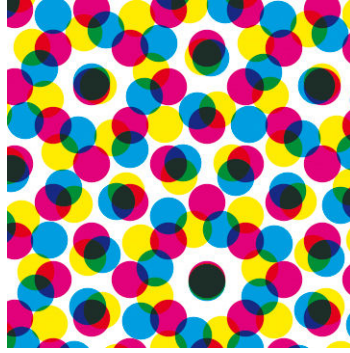


FIGURE 4.1 – *Couleur en demi-ton.*

Lorsque la lumière pénètre par la surface imprimée, ses composantes lumineuses sont d'abord « colorées » par les points d'encre puis, à l'arrière de ces derniers, le support les diffuse et les mélange : au concept de mélange soustractif des couleurs souvent employé, on préfère le concept de *mélange spectral* [54]. A l'échelle mésoscopique, les surfaces imprimées en demi-ton ont des propriétés optiques qui ne sont pas uniformes. D'un point de vue optique, les couleurs en demi-ton sont à cet égard très différentes des peintures modélisées par le modèle de Kubelka-Munk présenté au chapitre 3. Ce dernier n'étant donc pas approprié aux surfaces imprimées en demi-ton, il s'agit de développer des modèles prédictifs spécifiques aux images en demi-ton pour établir la relation entre la couleur perçue de loin et la couleur des primaires considérées individuellement.

De façon générale, un modèle de prédiction de couleurs établit une formule pour la réflectance et/ou la transmittance d'une surface imprimée en demi-ton à partir des réflectances et/ou des transmittances des surfaces imprimées en ton plein (taux de couverture de 100%) dans les huit primaires de Neugebauer. Parmi les modèles de prédiction de couleur, on distingue les *modèles de surface*, qui consiste à combiner les réflectances et/ou transmittances des primaires de Neugebauer mesurées individuellement, et les *modèles phénoménologiques* qui prennent en compte la propagation et l'atténuation de la lumière à l'intérieur du support ainsi que les réflexions multiples entre l'imprimé et les interfaces avec l'air.

4.2 Les modèles de surface

4.2.1 Le modèle de Neugebauer

Le premier (et le plus simple) des modèles de surface est le *modèle de Neugebauer* [1], également appelé *modèle de Murray-Davis* [55], qui suppose que la réflectance spectrale $R(\lambda)$ d'un imprimé en demi-ton est la moyenne des réflectances spectrales $R_k(\lambda)$ des primaires de Neugebauer imprimées en ton plein, pondérée par les taux de couverture a_k de ces dernières :

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^8 a_k R_k(\lambda) \quad (4.2)$$

L'approche de Neugebauer revient à considérer qu'un faisceau lumineux qui pénètre dans l'imprimé par un point d'encre ressort par le même point d'encre [voir Fig. 4.2 (a)] sans tenir compte des éventuelles propagations latérales qui pourrait faire émerger le faisceau par un point d'encre différent ou par une zone du papier non encrée [voir Fig. 4.2 (b)]. Le modèle de Murray-Davis n'est qu'un cas particulier du modèle de Neugebauer appliqué aux couleurs en demi-ton constituées du blanc et d'une autre primaire seulement. La réflectance s'écrit alors simplement :

$$R(\lambda) = (1 - a_k) R_1(\lambda) + a_k R_k(\lambda)$$

Ainsi, si on mesure la réflectance R de l'imprimé en demi-ton, la réflectance du support sans encre R_1 et la réflectance R_k de l'imprimé en ton plein avec la primaire k , on peut en déduire une estimation du taux de couverture de l'encre :

$$a_k = \frac{R - R_1}{R_k - R_1} \quad (4.3)$$

C'est la *formule de Murray-Davis*.

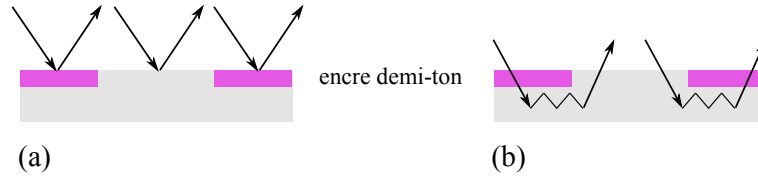


FIGURE 4.2 – (a) La lumière entre et sort au même endroit (point d'encre ou papier non-encré). (b) La lumière entre et sort en des points différents à cause de sa propagation latérale dans le support.

Afin d'évaluer la validité du modèle de Neugebauer, on considère un imprimé en demi-ton, sur papier APCO (papier super-calandré non-fluorescent), de couleur magenta avec un *taux de couverture nominal* (théorique) de 50% ($a_3 = 0,5$). L'imprimé ne contient donc que deux couleurs primaires de Neugebauer : le blanc du papier et le magenta. La figure 4.3 montre la mesure de la réflectance du papier sans encre (R_1), la mesure de la réflectance de l'imprimé en ton plein (R_3), la mesure de la réflectance de l'imprimé en demi-ton (R_{exp}) et la réflectance de l'imprimé en demi-ton (en pointillés) prédite par la formule (4.2) avec $a_3 = 0,5$. On observe que le spectre prédit est très éloigné du spectre mesuré : cette différence peut s'expliquer par le fait que le taux de couverture nominal ne correspond pas à la quantité d'encre déposée au moment de l'impression à cause de l'étalement de l'encre sur le support et qui aurait pour conséquence de sous-évaluer le taux de couverture a_3 . On ajuste alors ce dernier de sorte à minimiser la différence [écart quadratique moyen, voir formule (2.13)] entre le spectre mesuré et le spectre prédit : on obtient alors un taux de couverture, appelé *taux de couverture effectif*, égal à 0,60. Toutefois, les écarts, quadratique moyen et colorimétrique CIELAB ΔE_{94} , entre le spectre mesuré et le spectre théorique restent encore trop importants ($rms = 0,007$ et $\Delta E_{94} = 1,10$)

pour envisager de prédire des couleurs en demi-ton à l'aide du modèle de Neugebauer. Il faut tenir compte de la diffusion de la lumière à l'intérieur du support et des multiples réflexions entre l'interface air-imprimé et le support.

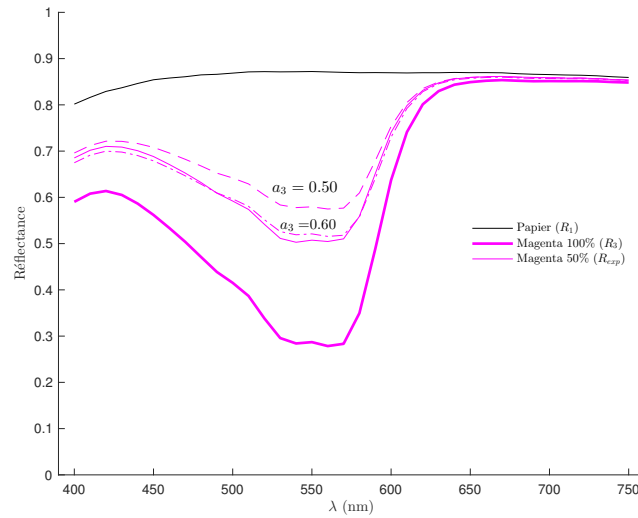


FIGURE 4.3 – Réflectances du papier, de l'imprimé en ton plein magenta et de l'imprimé en demi-ton 50% magenta. Les courbes en trait plein sont des spectres mesurés et les courbes en pointillés sont les spectres prédits par le modèle de Neugebauer pour des taux de couverture magenta de 0,50 et 0,60.

4.2.2 Le modèle de Yule-Nielsen

L'équation (4.2) du modèle de Neugebauer ne permet pas de prédire correctement la réflectance d'un imprimé en demi-ton car le caractère linéaire de cette formule ne prend pas en compte la diffusion de la lumière à l'intérieur du papier qui se propage latéralement d'un point d'encre à un autre, créant ainsi une zone floue colorée à la périphérie des points d'encre (voir Fig. 4.4). Ce phénomène, évoqué pour la première fois en 1951 par Yule et Nielsen [2], est appelé *effet Yule-Nielsen* ou encore *engraissement optique* du point d'encre (« *optical dot gain* ») : il a tendance à augmenter l'absorption de la lumière par les encres et ainsi assombrir les couleurs des imprimés en demi-ton par rapport aux couleurs que l'on observerait si les primaires réfléchissaient la lumière de façon indépendante les unes des autres. L'effet Yule-Nielsen est d'autant plus important que le milieu est diffusant et que la fréquence de trame de demi-ton est élevée (points plus petits et plus rapprochés).

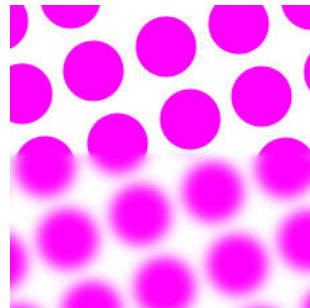


FIGURE 4.4 – Trame d'encre magenta définie à partir d'un taux de couverture nominal donné (partie supérieure) et trame « observée » dont les points d'encre sont entourés d'un halo coloré dû à l'engraissement optique (partie inférieure).

En 1985, Viggiano [56] propose de modéliser l'effet Yule-Nielsen en élevant à la puissance $1/n$ les termes de réflectance dans la formule de Neugebauer (4.2) où n est un paramètre libre ajusté de

sorte à obtenir le meilleur accord entre prédiction et mesure : on obtient alors une formule non-linéaire appelée équation spectrale de Neugebauer corrigée selon Yule-Nielsen (« *Yule-Nielsen-modified Spectral Neugebauer model* ») ou plus simplement *équation de Yule-Nielsen* :

$$R(\lambda) = \left[\sum_{k=1}^8 a_k R_k(\lambda)^{1/n} \right]^n \quad (4.4)$$

On considère à nouveau l'imprimé demi-ton monochrome (50% magenta) utilisé précédemment et on propose de prédire sa couleur en utilisant la formule de Yule-Nielsen (4.4) avec un ajustement du paramètre libre n et du taux de couverture effectif de l'encre magenta a_3 de sorte à minimiser l'écart quadratique moyen entre le spectre prédit et le spectre mesuré. Les valeurs obtenues ($n = 2,6$ et $a_3 = 0,54$) améliorent significativement la correspondance entre le spectre prédit et le spectre mesuré (voir Fig. 4.5) pour lesquels $rms = 0,003$ et $\Delta E_{94} = 0,17$.

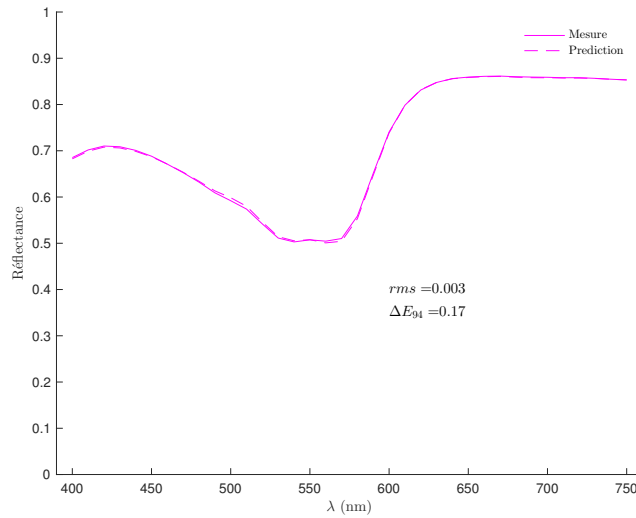


FIGURE 4.5 – Spectres en réflectance mesuré et prédit par le modèle de Yule-Nielsen avec une valeur de n égale à 2,6 et un taux de couverture magenta égal à 0,54.

Le modèle de Yule-Nielsen est à la fois simple et très performant mais l'introduction du paramètre d'ajustement n qui permet de modéliser de façon empirique l'effet Yule-Nielsen ne trouve pas réellement d'interprétation physique. Certains auteurs ont toutefois proposé une justification physique par un calcul des probabilités de transition de flux d'un point d'encre à un autre [57, 58, 59]. On peut aussi interpréter physiquement l'équation de Yule-Nielsen (4.4) à partir de concepts optiques simples de la façon suivante [54] : on considère une surface imprimée en ton plein avec une primaire de Neugebauer k , on suppose alors que la réflexion de la lumière par cette surface est la succession de la réflexion par le support — de réflectance $R_1(\lambda)$ — et de l'atténuation de cette dernière à travers la couche d'encre qui agit alors comme un filtre de transmittance $T_k(\lambda)$. La réflectance de la surface s'écrit alors :

$$R_k(\lambda) = R_1(\lambda) T_k(\lambda) \quad (4.5)$$

L'équation de Yule-Nielsen (4.4) devient :

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) \left[\sum_{k=1}^8 a_k T_k(\lambda)^{1/n} \right]^n \quad (4.6)$$

Si on subdivise la couche d'encre en demi-ton en n sous-couches identiques non-diffusantes, alors la transmittance de chacune d'entre-elles est égale à $\sum_{k=1}^8 a_k T_k(\lambda)^{1/n}$ où le facteur $1/n$ représente

l'épaisseur relative de chaque sous-couche, $T_k(\lambda)$ est la transmittance de la couche colorante dans la primaire k et le terme $T_k(\lambda)^{1/n}$ est celle d'une sous-couche d'épaisseur relative $1/n$. La présence de la puissance n dans l'équation (4.6) signifie que la lumière traverse les n couches d'encre en se mélangeant entre chaque sous-couche (voir Fig. 4.6). Les primaires traversées par la lumière se propageant entre deux sous-couches sont complètement décorréées ; par conséquent, la correction de Yule-Nielsen (4.6) modélise de façon empirique l'engraissement optique par une alternance de transmissions sans diffusion de la lumière à travers les primaires de Neugebauer et d'un mélange complet des composantes lumineuses transmises. La valeur de n représente alors le nombre (potentiellement un nombre réel et pas seulement entier) de mélanges dans la couche d'encre, c'est-à-dire le nombre moyen de transitions effectuées par la lumière entre les primaires de Neugebauer.

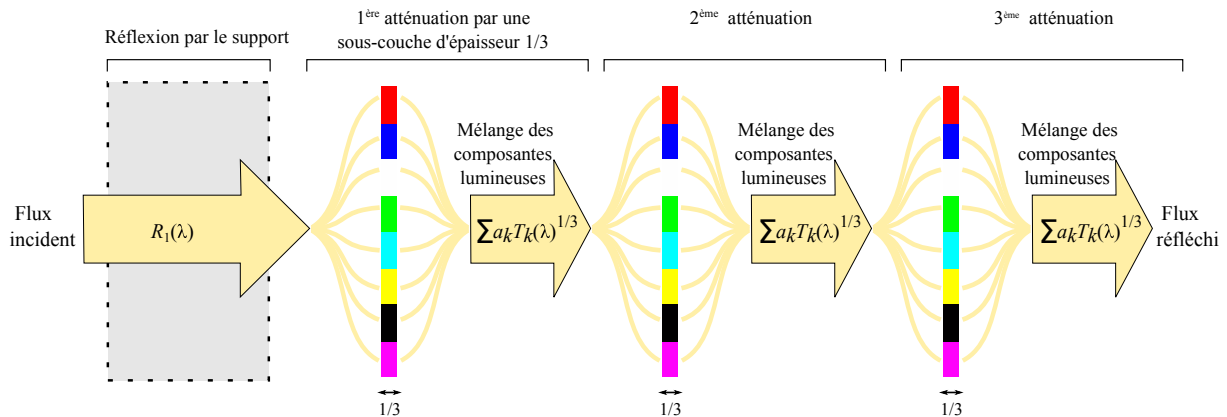


FIGURE 4.6 – *Interprétation physique de l'effet Yule-Nielsen pour $n = 3$.*

En absence de diffusion (par exemple avec des supports très spéculaires), la valeur de n est en théorie égale à (ou très proche de) 1 car il n'est pas nécessaire que les composantes lumineuses se mélangent à l'intérieur de la couche, la lumière n'étant pas diffusée. Cependant, cette valeur est plutôt proche de 2 pour des films transparents [61]. Lorsque la fréquence de trame du demi-ton augmente, on observe une augmentation de la valeur de n [62], cela s'explique par les effets combinés dûs au rapprochement des points d'encre et à la diminution de leur taille. La valeur de n peut également prendre des valeurs négatives lorsque l'encre pénètre plus ou moins profondément dans le papier [63, 64, 65]. De façon générale, la valeur de n augmente avec le pouvoir diffusant du milieu (l'effet Yule-Nielsen est plus important) et peut même tendre asymptotiquement vers l'infini. Dans ce dernier cas, on peut montrer [54] que la réflectance de l'imprimé demi-ton s'écrit :

$$R(\lambda) = \prod_{k=1}^8 R_k^{a_k}(\lambda) \quad (4.7)$$

ou encore, en tenant compte de la notation (4.5) :

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) \prod_{k=1}^8 T_k^{a_k}(\lambda) \quad (4.8)$$

La correction de Yule-Nielsen avec une valeur infinie du paramètre n transforme d'une part l'équation de Neugebauer de forme additive en une équation de forme multiplicative et, d'autre part, les taux de couverture en épaisseur optique. Une valeur infinie de n signifie une infinité de sous-couches d'épaisseurs infinitésimales comparables à un mélange homogène des encres pour lesquelles la loi de Beer-Lambert s'applique. Ce modèle est particulièrement adapté pour les demi-tons imprimés sur des supports très poreux, comme des tissus en coton, dans lesquels les encres pénètrent et s'étalent fortement de sorte que la trame demi-ton disparaît presque totalement.

Appliqué à de nombreux types de support (diffusants ou transparents) et systèmes d'impression, le modèle de Yule-Nielsen donne de bonnes prédictions en réflexion [8]. Une version du modèle de

Yule-Nielsen transposée au facteur de transmission a été proposé [11] tout en gardant les mêmes performances sur des supports imprimés en recto simple mais également en recto-verso.

Les modèles de surface sont basés sur les mesures des réflectances des primaires de Neugebauer utilisées pour le calibrage sans faire d’hypothèse physique sur la façon dont se propage la lumière dans les matériaux et sans tenir compte des transferts de flux entre l’imprimé et les interfaces (correction de Saunderson). Ces modèles ne permettent donc pas de prédire les réflectances pour des géométries d’éclairage et d’observation différentes de celle dans laquelle ont été faites les mesures de calibrage des réflectances. Pour y remédier, il faut utiliser une approche plus phénoménologique pour modéliser la propagation de la lumière, par opposition avec l’approche empirique du modèle de Yule-Nielsen par ajustement du paramètre libre n .

4.3 Les modèles phénoménologiques à deux flux

4.3.1 Le modèle de Clapper-Yule

En 1953, F. R. Clapper et J. A. C. Yule proposent un modèle qui permet de prédire la réflectance spectrale d’un imprimé en demi-ton monochrome (une seule encre) pour des supports diffusants. Le *modèle de Clapper-Yule*, étendu depuis aux couleurs en demi-ton à plusieurs encres, prend en compte les réflexions multiples de la lumière entre le support et l’interface air-imprimé à travers les encres (voir Fig.4.7). Le modèle considère que, en raison de la diffusion du support, la distance de propagation latérale est plus grande que la taille des points d’encre. Par conséquent, les photons traversent la couche demi-ton à plusieurs endroits différents avant de sortir de l’imprimé. Dans le cas général, la réflectance d’un imprimé en demi-ton s’écrit :

$$R = r_s + \frac{T_{in}T_{out}\rho(\sum a_k t_k)^2}{1 - r_d \rho \sum a_k t_k^2} \quad (4.9)$$

où ρ est la réflectance intrinsèque (c’est-à-dire la réflectance du support sans prendre en compte les effets optiques dues aux interfaces), a_k et t_k avec $k = 1, 2, \dots, 8$ sont respectivement le taux de couverture nominal et la transmittance (considérée « sans les interfaces » également) de la primaire k , et enfin r_s , r_d , T_{in} et T_{out} sont les réflectances et les transmittances de l’interface calculées à l’aide des formules de Fresnel pour un indice de réfraction donné et pour des géométries d’éclairage et de mesure données (voir « correction de Saunderson », section 3.6).

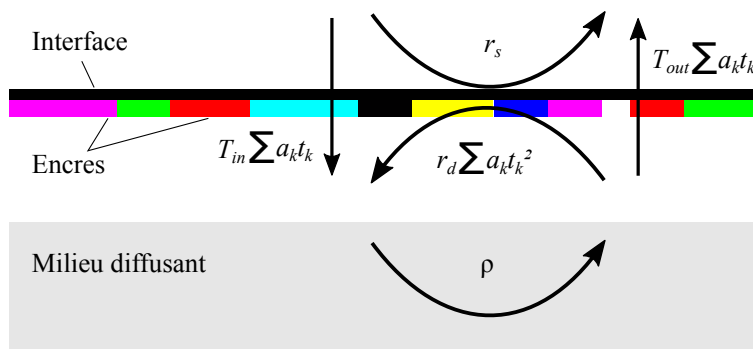


FIGURE 4.7 – Réflexions multiples entre le milieu diffusant et l’interface à travers les encres.

Le terme $T_{in}T_{out}\rho(\sum a_k t_k)$ dans la formule (4.9) signifie qu’une partie T_{in} la lumière incidente est transmise par l’interface, une partie ρ de cette dernière est réfléchié par le support mais aussi atténuée, avec un taux $\sum a_k t_k$, par les encres qui agissent alors comme un filtre, puis, avant de ressortir de l’imprimé, une partie T_{out} de la lumière est transmise par l’interface dans la direction d’observation. Le terme $1/(1 - r_d \rho \sum a_k t_k^2)$ est égal à la limite d’une suite géométrique de raison $r_d \rho \sum a_k t_k^2$, il représente l’atténuation de la lumière après une infinité de réflexions internes entre le support et l’interface à travers

les encres. On entend ici par « réflexion interne » une succession de deux phénomènes de réflexion subis par la lumière : une réflexion par le support (réflectance ρ) et une réflexion par l'interface côté imprimé (réflectance r_d) qui impose à la lumière de traverser deux fois la couche d'encre, d'où le terme en t_k^2 .

Dans la pratique, avant d'utiliser la formule (4.9) pour prédire la réflectance spectrale d'un imprimé en demi-ton, il faut déterminer expérimentalement les paramètres du modèle qui ne peuvent pas être directement calculés, à savoir la réflectance intrinsèque du milieu, ρ , et les transmittances des encres, t_k avec $k = 1, \dots, 8$. Les autres paramètres sont calculés (r_s , r_d , T_{in} et T_{out}) ou alors donnés (a_k , $k = 1, 2, \dots, 8$). Pour cela, on écrit à nouveau l'équation (4.9) pour chaque primaire de Neugebauer k imprimée en ton plein (ainsi $a_k = 1$ et $a_i = 0$ pour $i \neq k$) :

$$R_k = r_s + \frac{T_{in}T_{out}\rho t_k^2}{1 - r_d\rho t_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.10)$$

Mais $k = 1$ représente la primaire associée au blanc, c'est-à-dire l'absence d'encre, la transmittance t_1 est donc égale à 1. L'inversion de la formule (4.10) pour $k = 1$ permet alors d'obtenir l'expression de la réflectance intrinsèque du milieu :

$$\rho = \frac{R_1 - r_s}{T_{in}T_{out} - r_d(R_1 - r_s)} \quad (4.11)$$

où R_1 est la mesure de la réflectance du support non-imprimé.

La réflectance intrinsèque ρ étant désormais connue, on peut déduire, pour toutes les valeurs de k autres que 1, la transmittance des primaires de Neugebauer en inversant la formule (4.10) :

$$t_k = \left(\frac{R_k - r_s}{\rho [T_{in}T_{out} + r_d(R_k - r_e)]} \right)^{1/2}, \quad k = 2, 3, \dots, 8 \quad (4.12)$$

où R_k est la mesure de la réflectance de l'imprimé dans la primaire k en ton plein.

On constate que, contrairement à la formule de Yule-Nielsen (4.4), la formule (4.9) ne comporte pas de paramètre libre pour modéliser empiriquement l'influence de la propagation latérale de la lumière, et donc l'influence de la fréquence de trame. L'avantage du modèle de Clapper-Yule, par rapport aux modèles de surface, est qu'il tient compte non seulement de paramètres physiques liés aux éléments qui composent l'imprimé (papier, encres, interface), mais aussi des conditions géométriques d'éclairage et d'observation. Ainsi, il est possible de prédire la réflectance d'un imprimé pour des géométries différentes de celles utilisées pour calibrer le modèle. Récemment, le modèle de Clapper-Yule a été étendu à la prédiction de la transmittance de surfaces imprimées en demi-ton aussi bien en mode recto-simple qu'en mode recto-verso [9, 10] ainsi que la réflectance et la transmittance d'empilements de films transparents imprimés en demi-ton [61].

4.3.2 Le modèle de Williams-Clapper

Williams et Clapper proposent en 1953 un modèle de prédiction de la réflectance spectrale des photographies [4], constituées d'une feuille de papier diffusante recouverte d'une couche de gélatine photochromique (change de couleur en fonction de l'intensité lumineuse), uniforme et non-diffusante. Le papier et la gélatine sont en contact optique, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'interface entre ces deux composantes. Le système est alors composé de trois éléments : la surface, la gélatine et le papier. La gélatine est caractérisée par son indice de réfraction n et sa transmittance normale t , c'est-à-dire l'atténuation de la lumière traversant la couche de gélatine le long de la direction normale, et le papier est supposé lambertien, de réflectance intrinsèque ρ .

Contrairement au modèle de Clapper-Yule, le modèle de Williams-Clapper tient compte de l'orientation de la lumière incidente pour déterminer la formule de la réflectance spectrale. On considère le cas général d'un flux incident collimaté d'angle θ_0 et d'un angle d'observation θ'_0 . On note $\theta_1 =$

$\arcsin(\sin \theta_0/n)$ l'orientation de la lumière transmise dans la couche de gélatine. On considère également un flux collimaté se propageant de la gélatine vers l'air dans la direction θ'_1 telle que $n_1 \sin \theta'_1 = \sin \theta'_0$. La surface et la gélatine sont décrites dans une unique composante, appelée interface colorée, dont les facteurs de transfert sont :

- la réflectance sur la face supérieure, $R_{01}(\theta_0)$, elle correspond au coefficient de Fresnel de réflexion de l'interface pour un flux incident d'angle θ_0
- la réflectance sur la face inférieure, $R_{10}(\theta_1) t^{2/\cos \theta_1}$ où $R_{10}(\theta_1)$ est le coefficient de Fresnel de réflexion de l'interface pour un flux incident d'angle θ_1 , c'est-à-dire venant de la couche de gélatine
- la transmittance vers le bas, $T_{01}(\theta_0) t^{1/\cos \theta_1}$ où $T_{01}(\theta_0) = 1 - R_{01}(\theta_0)$
- la transmittance vers le haut, $T_{10}(\theta'_1) t^{1/\cos \theta'_1}$ avec $T_{10}(\theta'_1) = T_{01}(\theta'_0)$

La réflectance spectrale est obtenue à partir d'une description des réflexions multiples de la lumière entre le papier et l'interface colorée qui, comme dans le modèle de Clapper-Yule, mène à une série géométrique convergente [67] :

$$R_{WC} = T_{01}(\theta_0) \frac{T_{10}(\theta'_1) \rho t^{1/\cos \theta_1} t^{1/\cos \theta'_1}}{n^2 (1 - \rho r_i)}$$

avec

$$r_i = \int_0^{\pi/2} t^{2/\cos \theta_1} R_{10}(\theta_1) \sin(2\theta_1) d\theta_1$$

On notera que $R_{01}(\theta_0)$, qui est la réflexion spéculaire, n'intervient pas explicitement dans la formule de Williams-Clapper dans le cas d'une géométrie $\theta_0 : \theta'_0$. La formule originale de la réflectance fut proposée par Williams et Clapper pour $n = 1,53$, $\theta_0 = 45^\circ$ et $\theta'_0 = 0$. Le modèle de Williams-Clapper a été étendu à des géométries diffuse-directionnelle par Shore et Spoonhower [66], et plus récemment par Hébert et Emmel [38]; une extension aux imprimés en demi-ton a également été proposée par Hébert et Hersch [10, 68].

4.4 Calibrage

Au moment de l'impression, les encres s'étalent sur le support de façon plus ou moins prononcée selon les propriétés physico-chimiques et mécaniques des matériaux. Ce phénomène d'étalement est appelé *engraissement mécanique* du point d'encre (« *mechanical dot gain* »). Les effets combinés de l'engraissement optique (effet Yule-Nielsen) et de l'engraissement mécanique font que les taux de couverture réels (*taux effectifs*) des primaires sont différents des taux de couverture utilisés au moment de la conception de l'image en demi-ton (*taux nominaux*). Les taux effectifs sont les paramètres d'entrée des modèles mais ils sont difficilement mesurables indépendamment de ces modèles, malgré des tentatives utilisant des méthodes lourdes à mettre en œuvre comme l'analyse d'images microscopiques couplée à un modèle d'engraissement optique [72, 73, 74]. Une alternative à ces méthodes est de faire une estimation des taux effectifs des primaires à l'aide d'une méthode macroscopique qui combine des mesures des facteurs de transfert de 36 échantillons en demi-ton et l'utilisation des modèles eux-mêmes [7]. On propose de présenter dans le détail cette méthode qui sera utilisée par la suite pour tester les modèles présentés au chapitre 7.

Le principe général de la méthode est de construire des *courbes de correction* qui font la correspondance entre les taux nominaux et les taux effectifs des encres cyan, magenta et jaune, en tenant compte du fait que l'étalement d'une encre donnée peut se faire de façon différente sur du papier selon que ce dernier est non-encre ou imprimé en ton plein dans une primaire constituée des deux autres encres. Dans un premier temps, un ensemble de 36 échantillons de couleurs en demi-ton (voir Fig. 4.8) est imprimé sur un côté de la feuille de papier supposée symétrique (les deux faces sont identiques). Ces

échantillons correspondent à toutes les combinaisons possibles d'une encre donnée u de taux nominal a égal à 0, 25, 0, 50 ou 0, 75, et d'une primaire en ton plein v obtenue à l'aide des encres autres que u ; par exemple, pour l'encre cyan, on obtient la liste des 12 couleurs en demi-ton (C–M–J) suivante :

cyan/white	(0, 25 – 0 – 0)	(0, 50 – 0 – 0)	(0, 75 – 0 – 0)
cyan/magenta	(0, 25 – 1 – 0)	(0, 50 – 1 – 0)	(0, 75 – 1 – 0)
cyan/yellow	(0, 25 – 0 – 1)	(0, 50 – 0 – 1)	(0, 75 – 0 – 1)
cyan/red	(0, 25 – 1 – 1)	(0, 50 – 1 – 1)	(0, 75 – 1 – 1)

TABLE 4.2 – Liste des couleurs en demi-ton utilisées pour l'estimation de l'engraisement mécanique de l'encre cyan.

Il y a également 12 échantillons pour le magenta et encore 12 autres pour le jaune.

Chacune de ces couleurs en demi-ton contient deux primaires qui correspondent à des zones où la primaire v est seule et des zones où l'encre u se superpose à la primaire v pour obtenir la primaire $u + v$. On note x le taux de couverture effectif de la primaire $u + v$. On mesure alors la réflectance spectrale $R_{u/v}^{(m)}(\lambda)$ de cette couleur en demi-ton, ou alors sa transmittance spectrale $T_{u/v}^{(m)}(\lambda)$. On note $R_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ et $T_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ la réflectance théorique et la transmittance théorique associées à cette couleur et calculées à l'aide d'un modèle de prédiction de couleurs. Le taux de couverture effectif est la valeur qui minimise l'écart quadratique moyen entre le spectre mesuré et le spectre prédit lorsque le paramètre x varie entre 0 et 1. On obtient alors une valeur $\tilde{a}_{u/v}^{(R)}$ du taux effectif pour un calibrage en réflectance et une autre valeur $\tilde{a}_{u/v}^{(T)}$ pour un calibrage en transmittance :

$$\tilde{a}_{u/v}^{(R)} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \sum_{\lambda \in vis} \left[R_{u/v}^{(m)}(\lambda) - R_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right]^2 \quad (4.13)$$

et

$$\tilde{a}_{u/v}^{(T)} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \sum_{\lambda \in vis} \left[T_{u/v}^{(m)}(\lambda) - T_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right]^2 \quad (4.14)$$

où *vis* signifie la partie visible du spectre lumineux.

Les taux de couverture effectifs peuvent également être obtenus en minimisant la distance colorimétrique CIELAB ΔE_{94} entre les spectres mesurés et les spectres prédits :

$$\tilde{a}_{u/v}^{(R)} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \Delta E_{94} \left(R_{u/v}^{(m)}(\lambda), R_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right) \quad (4.15)$$

et

$$\tilde{a}_{u/v}^{(T)} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \Delta E_{94} \left(T_{u/v}^{(m)}(\lambda), T_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right) \quad (4.16)$$

Le taux de couverture effectifs sont les paramètres d'entrée des modèles prédictifs. En toute rigueur, ils devraient être les mêmes pour prédire des réflectances et des transmittances. Or, on voit bien, d'après les formules (4.13) à (4.16), que l'ensemble des paramètres permettant de prédire des réflectances ne sont pas identiques à ceux permettant de prédire des transmittances. Cependant, si on souhaite travailler avec un ensemble de taux de couverture effectifs commun pour prédire la réflectance et la transmittance d'une couleur en demi-ton, on peut utiliser la moyenne arithmétique des formules (4.13) et (4.14), dans le cas d'une minimisation des écarts quadratiques moyens entre spectres mesurés et spectres prédits, ou alors la moyenne arithmétique des formules (4.15) et (4.16), dans le cas d'une minimisation des écarts colorimétriques :

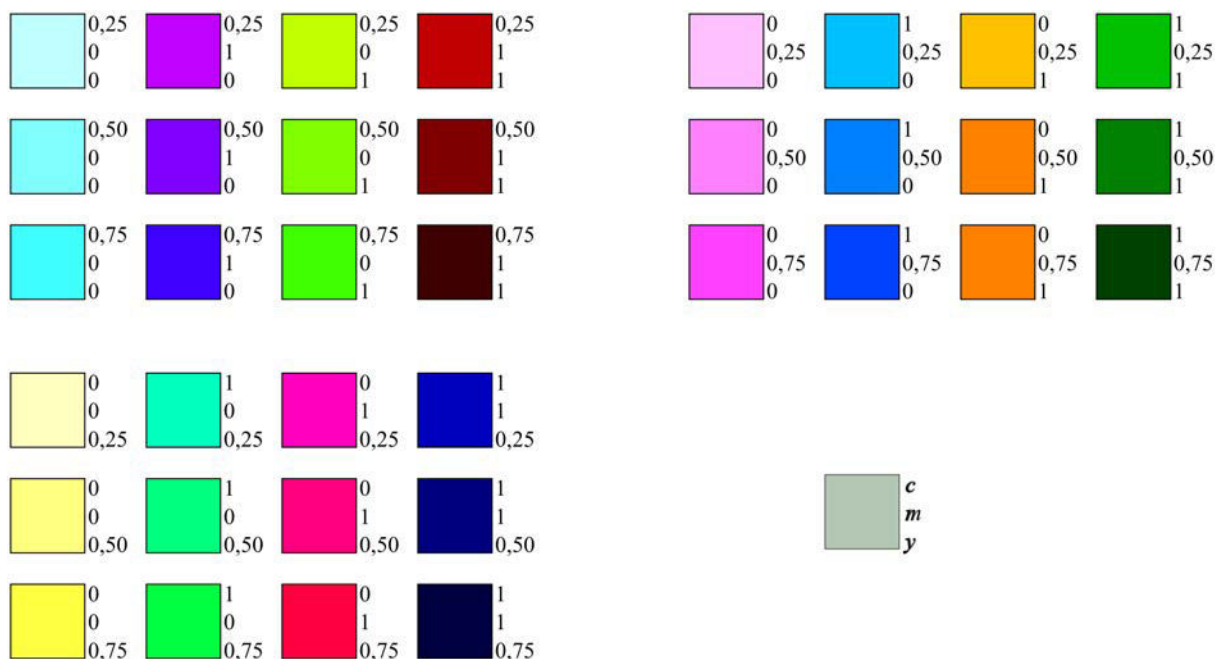


FIGURE 4.8 – *Echantillons de calibration des modèles de prédiction de couleurs en demi-ton.*

$$\tilde{a}_{u/v} = \frac{\tilde{a}_{u/v}^{(R)} + \tilde{a}_{u/v}^{(T)}}{2} \quad (4.17)$$

Quelle que soit la méthode (minimisation de l'écart quadratique ou de l'écart colorimétrique), on obtient les 36 taux de couverture effectifs associés aux 36 échantillons de calibration. Pour chaque couple {encre u , primaire v }, on dispose de trois taux de couverture effectifs correspondant aux trois taux de couverture nominaux 0, 25, 0, 50 et 0, 75. Ainsi, par interpolation linéaire, on obtient une fonction $f_{u/v}$ qui fait la correspondance entre les taux de couverture nominaux et les taux de couverture effectifs; plus précisément, $f_{u/v}(a)$ donne le taux effectif de l'encre u sur la primaire v pour un taux nominal quelconque a . La courbe de cette fonction est appelée *courbe d'engraisement* (« *spreading curves* »). En considérant l'ensemble des 36 échantillons de calibration, on obtient un ensemble de quatre courbes d'engraisement pour chaque encre, soit au total 12 courbes d'engraisement (voir Fig. 4.9), et ceci pour un mode donné (réflectance ou transmittance).

Par conséquent, un modèle qui permet de faire des prédictions de réflectances et de transmittances spectrales d'imprimés en demi-ton peut être calibré de deux façons :

1. *Calibrage double*, c'est-à-dire deux ensembles de 12 courbes d'engraisement : les 12 courbes d'engraisement utilisées pour prédire des réflectances [elles sont construites à l'aide des mesures des réflectances des 36 échantillons de calibration et les taux de couvertures effectifs sont calculés en utilisant la formule (4.13) ou la formule (4.15)], et les 12 courbes d'engraisement utilisées pour prédire des transmittances [elles sont construites à l'aide des mesures des transmittances des 36 échantillons de calibration et les taux de couvertures effectifs sont calculés en utilisant la formule (4.14) ou la formule (4.16)].
2. *Calibrage simple*, c'est-à-dire un ensemble de 12 courbes d'engraisement commun pour prédire les transmittances et les réflectances, les taux de couvertures effectifs sont calculés en utilisant d'abord les formules (4.13) et (4.14) [ou les formules (4.15) et (4.16)] puis en appliquant la formule (4.17).

Dans les deux cas, il est nécessaire de mesurer les réflectances et les transmittances des 36 échantillons de calibration.

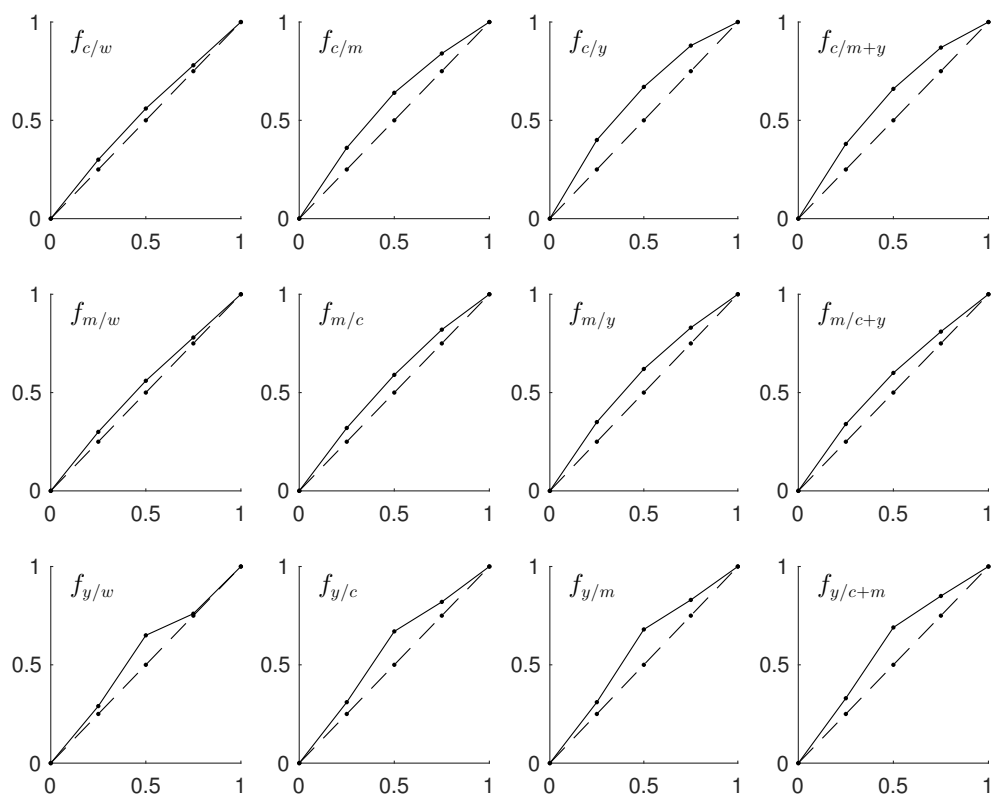


FIGURE 4.9 – Courbes d’engraisement des encres cyan, magenta et jaune en mode réflexion pour une impression jet d’encre sur un papier de bureau ordinaire, obtenues par interpolation linéaire des taux de couverture effectifs calculés par la formule de minimisation (4.15) dans laquelle les spectres théoriques sont prédits par la méthode de Clapper-Yule [formule (4.9)].

Une fois que les courbes d’engraisement en mode réflexion (resp. en mode transmission) ont été obtenues, il est alors possible de prédire la réflectance (resp. la transmittance) spectrale de toute couleur en demi-ton imprimée avec des encres et un papier identiques à ceux utilisés pour établir ces courbes. Plus précisément, si on considère une couleur en demi-ton dont les taux de couverture nominaux des encres cyan, magenta et jaune sont notés c_0 , m_0 et y_0 respectivement, alors ces derniers sont convertis en taux effectif c , m et y en effectuant quelques itérations sur les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 c &= (1 - m)(1 - y)f_{c/w}(c_0) + m(1 - y)f_{c/m}(c_0) + (1 - m)yf_{c/y}(c_0) + myf_{c/m+y}(c_0) \\
 m &= (1 - c)(1 - y)f_{m/w}(m_0) + c(1 - y)f_{m/c}(m_0) + (1 - c)yf_{m/y}(m_0) + cyf_{m/c+y}(m_0) \\
 y &= (1 - c)(1 - m)f_{y/w}(y_0) + c(1 - m)f_{y/c}(y_0) + (1 - c)mf_{y/m}(y_0) + cmf_{y/c+m}(y_0)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Les taux de couverture effectifs des trois encres sont obtenus en calculant la moyenne de leurs quatre courbes d’engraisement, pondérée par les taux de couverture des primaires sur lesquelles ces encres en demi-ton se superposent : par exemple, le poids associé à la courbe d’engraisement de l’encre cyan sur la primaire rouge (c’est-à-dire $f_{c/m+y}$) est égal au taux de couverture de la primaire rouge, c’est-à-dire my . A la première itération, les valeurs initiales à droite des équations (4.18) sont $c = c_0$, $m = m_0$ et $y = y_0$, les valeurs de c , m et y obtenues à gauche sont alors reportées dans la partie droite des équations (4.18) qui donnent de nouvelles valeurs de c , m et y , et ainsi de suite, jusqu’à ce que les valeurs de c , m et y se stabilisent. Ces dernières valeurs sont alors reportées dans les équations de Demichel (4.1) afin d’obtenir les taux de couverture effectifs a_i des huit primaires de Neugebauer.

Résumé

Les modèles de prédiction de couleurs en demi-ton permettent de prédire les spectres de la lumière lorsqu’elle se réfléchit ou passe à travers une surface diffusante sur laquelle est imprimée une image en demi-ton dans le cas d’une impression en mode recto simple, ou alors deux images en demi-ton différentes, l’une imprimée sur un côté l’autre sur le côté opposé de la surface dans le cas d’une impression en mode recto-verso. Les images en demi-ton sont constituées des huit primaires de Neugebauer dont les taux de couverture sont les paramètres d’entrée des modèles.

Ces modèles sont calibrés à partir d’un nombre réduit d’échantillons de couleurs en demi-ton dont les taux de couverture sont spécifiquement choisis afin d’estimer l’engraisement mécanique des encres lorsqu’elles se déposent sur le support. Ce calibrage permet alors de construire des courbes de correction qui convertissent les taux de couverture nominaux de l’image en taux de couverture effectifs. Ces courbes sont différentes selon que l’on souhaite prédire la réflectance ou la transmittance de l’imprimé. Tout changement de papier, d’encre ou de trame nécessite de refaire le calibrage.

Tous les modèles prennent en compte l’engraisement optique mais de façons différentes :

1. Les modèles de surface prédisent des spectres à l’aide de combinaisons simples, linéaires (modèle de Neugebauer) ou pas (modèle de Yule-Nielsen), des spectres mesurés dans l’étape de calibrage (spectres des primaires de Neugebauer en ton plein). Il est alors possible d’estimer l’engraisement optique en ajustant un paramètre n de façon empirique. En revanche, ces modèles n’offrent pas la possibilité de faire varier la géométrie de mesure, ni même les épaisseurs d’encre, ces dernières devant être identiques entre le calibrage et la prédiction.
2. Les modèles phénoménologiques sont plus complexes car ils essaient de décrire l’effet Yule-Nielsen par des transferts de flux entre les différentes couches de l’imprimé, en tenant compte de considérations physiques comme le changement d’indice de réfraction entre l’air et le milieu diffusant, ou encore les géométries d’éclairage et d’observation des spectres : c’est le cas du

modèle de Clapper-Yule qui considère les réflexions multiples de la lumière lorsqu'elle se propage entre l'interface et le support à travers les encres.

Ces modèles sont une alternative aux méthodes de gestion des couleurs utilisées dans l'industrie qui nécessitent d'imprimer des centaines d'échantillons, de mesurer les coordonnées colorimétriques et de les interpoler. Ils sont utiles pour la reproduction spectrale des couleurs, c'est-à-dire pour la prédiction d'une réflectance spectrale précise et non d'une couleur métamère sous un illuminant donné.

Deuxième partie

Théorie de transfert à deux flux revisitée

Chapitre 5

Matrices de transfert de flux

Si le modèle de Yule-Nielsen et le modèle de Clapper-Yule ont depuis longtemps fait preuve de leurs performances, ils n'en présentent pas moins des inconvénients, voire des incohérences. Le modèle de Yule-Nielsen dépend des conditions de mesure des spectres de calibrage et il introduit un paramètre libre dont on ne peut déterminer une valeur à l'avance. Quant au modèle de Clapper-Yule, il modélise séparément le support et les primaires de Neugebauer en supposant que ces dernières agissent comme des filtres caractérisés par une transmittance spectrale ; mais on peut montrer que ces transmittances sont différentes selon qu'elles sont déduites de mesures de réflectances ou de mesures de transmittances des échantillons de calibrages. Dans ce travail, nous proposons des modèles qui tentent de résoudre les problèmes rencontrés dans les modèles de Yule-Nielsen et de Clapper-Yule. Ces modèles sont construits en utilisant la notion de *matrice de transfert* de flux, une approche nouvelle dans le domaine de la reproduction de couleurs que nous présentons en détail dans ce chapitre.

Les matrices de transfert ont été introduites en 1950 par Abeles [75] pour décrire la propagation d'ondes électromagnétiques dans les couches minces. Plus récemment, des travaux sur la propagation de la lumière partiellement incohérente dans des couches minces [13, 14, 15, 16], et des travaux sur la diffusion de la lumière dans des couches épaisses [76], utilisent également le formalisme des matrices de transfert. On propose d'étendre ce formalisme matriciel au cas de la propagation de flux incohérents dans un milieu diffusant et de l'utiliser pour le calcul des facteurs de transfert de milieux stratifiés comme des empilements de couches ou de supports imprimés. Cette approche matricielle consiste à représenter le bilan des flux des deux cotés d'une couche par une matrice de transfert présentée à la section 5.1. On propose à la section 5.2 une première application simple et pratique des matrices de transfert qui permet de retrouver les formules de correction de Saunderson déjà établies au chapitre 3. On montre à la section 5.3 que la couche d'encre imprimée sur une feuille de papier ne peut être modélisée par une matrice de transfert. On explique à la section 5.4 comment la propriété multiplicative des matrices de transfert peut être utilisée pour prédire les facteurs de transfert d'un imprimé en mode recto-verso à partir de ceux de deux imprimés en mode recto-simple.

5.1 Matrices de transfert pour les couches diffusantes

On considère un empilement de couches diffusantes auxquelles on attribue un indice $k = 1, 2, \dots$ de haut en bas dans l'ordre de la superposition (voir Fig. 5.1). Chaque couche est éclairée par un flux descendant i_{k-1} et un flux ascendant j_k , et les flux sortants, descendant et ascendant, sont notés i_k et j_{k-1} respectivement. Ces couches sont supposées toutes différentes et non-symétriques, elles sont donc caractérisées par 4 facteurs de transfert : la réflectance avant, ρ_k , la réflectance arrière, ρ'_k , la transmittance vers le bas, τ_k et la transmittance vers le haut, τ'_k .

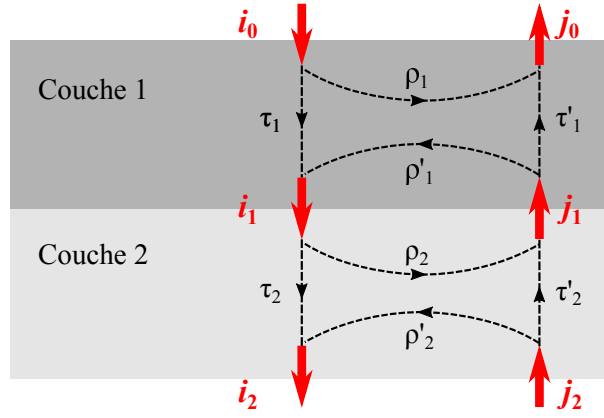


FIGURE 5.1 – Transferts de flux entre couches diffusantes (le sens des flèches ne représente pas la direction de propagation de la lumière).

Le bilan des flux des deux côtés de la couche 1 s'exprime par les relations suivantes :

$$j_0 = \rho_1 i_0 + \tau'_1 j_1 \quad (5.1)$$

$$i_1 = \tau_1 i_0 + \rho'_1 j_1 \quad (5.2)$$

Les deux équations précédentes peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ 1 & -\rho_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho'_1 & 1 \\ \tau'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

soit, pourvu que $\tau_1 \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_1 \\ \rho_1 & \tau_1 \tau'_1 - \rho_1 \rho'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

L'échange de flux entre les deux côtés de la couche diffusante décrit par la formule (5.4) se fait donc par l'intermédiaire d'une matrice dont les coefficients s'expriment en fonction des facteurs de transfert de la couche. Cette matrice est appelée matrice de transfert associée à la couche 1 :

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_1 \\ \rho_1 & \tau_1 \tau'_1 - \rho_1 \rho'_1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

En appliquant la formule (5.4) à la couche 2, le bilan des flux des deux côtés du système représenté par la superposition de la couche 1 et de la couche 2 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{12} \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

La matrice de transfert de la superposition de deux couches est donc égale au produit des matrices de transfert des couches individuelles, et ceci reste vrai quel que soit le nombre de couches :

$$\mathbf{M}_{12\dots k} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_k \quad (5.7)$$

Toute matrice de transfert, d'une couche individuelle ou obtenue à partir du produit des matrices de transfert dans le cas d'un empilement, possède la même structure que celle de la formule (5.5). Ainsi, pour une matrice de transfert donnée quelconque $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$, avec $m_{11} \neq 0$, les facteurs de transfert de la couche qui lui sont associés s'obtiennent à l'aide des formules suivantes :

$$\rho = m_{21}/m_{11} \quad (5.8)$$

$$\tau = 1/m_{11} \quad (5.9)$$

$$\rho' = -m_{12}/m_{11} \quad (5.10)$$

$$\tau' = \det \mathbf{M}/m_{11} = m_{22} - m_{21}m_{12}/m_{11} \quad (5.11)$$

où $\det \mathbf{M}$ désigne le déterminant de la matrice \mathbf{M} . Lorsqu'on applique les formules (5.8) à (5.11) à la matrice de transfert $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ de la pile représentée dans la figure 5.1, on obtient les formules suivantes :

$$\rho = \rho_1 + \frac{\tau_1\tau_1'\rho_2}{1 - \rho_1'\rho_2} \quad (5.12)$$

$$\tau = \frac{\tau_1\tau_2}{1 - \rho_1'\rho_2} \quad (5.13)$$

$$\rho' = \rho_2' + \frac{\tau_2\tau_2'\rho_1'}{1 - \rho_1'\rho_2} \quad (5.14)$$

$$\tau' = \frac{\tau_1'\tau_2'}{1 - \rho_1'\rho_2} \quad (5.15)$$

On retrouve les formules proposées par Kubelka qui, dans son étude des milieux diffusant non-symétriques [5], considère tous les chemins possibles de la lumière suite aux réflexions multiples entre les deux couches et dont le bilan mène à des séries géométriques convergentes. Dans ce même article, Kubelka affirme que dans le cas d'une couche non-symétrique quelconque, de facteurs de transfert R , T , R' et T' , la transmittance est indépendante de la direction de propagation de la lumière, c'est-à-dire que $T = T'$: il utilise le concept de *non polarité de la transmittance*. Si ce n'est pas ce qu'on observe expérimentalement pour des imprimés, on pense que la démonstration de Kubelka contient une erreur. Pour montrer la non polarité de la transmittance, Kubelka affirme que la transmittance d'un empilement de plusieurs couches est identique quelle que soit la direction de propagation du flux ou de façon équivalente que la transmittance de l'empilement des couches dans l'ordre $1, 2, \dots, n$ est égale à la transmittance de l'empilement des couches $n, \dots, 2, 1$, et ceci que les couches diffusantes soient symétriques ou pas (c'est ici que se trouve son erreur). Et pour le prouver, Kubelka détaille les calculs de la transmittance d'un empilement de trois couches symétriques. Il trouve en effet que $T_{123} = T_{321}$ ($= T'_{123}$) : la transmittance vers le bas est bien égale à la transmittance vers le haut. Mais si cette affirmation est vraie pour un empilement de couches symétriques, elle ne l'est plus pour un empilement de couches non-symétriques : pour s'en convaincre, il suffit de considérer un empilement de deux couches non-symétriques et de constater d'après les formules (5.13) et (5.15) que la transmittance n'est pas la même selon que le flux se propage vers le bas ou vers le haut. La non polarité de la transmittance n'est vérifiée que pour les milieux non-symétriques composés d'un empilement de plusieurs couches symétriques différentes. En revanche, un empilement de couches non-symétriques (différentes ou non) est encore une couche non-symétrique mais pour laquelle la non polarité de la transmittance n'est pas vérifiée.

On considère maintenant un empilement infini de couches diffusantes identiques de réflectances ρ et ρ' , et de transmittances τ et τ' . On note ρ_∞ la réflectance de cet empilement. Le fait d'ajouter une couche ne change pas la réflectance de l'empilement puisque le nombre de couches est infini, ainsi d'après (5.12) :

$$\rho_\infty = \rho + \frac{\tau\tau'\rho_\infty}{1 - \rho'\rho_\infty} \quad (5.16)$$

Cette formule peut encore s'écrire sous la forme d'une équation du second degré :

$$\left(\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\rho_\infty\right)^2 - 2a\left(\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}\rho_\infty\right) + 1 = 0 \quad (5.17)$$

avec

$$a = \frac{\rho\rho' - \tau\tau' + 1}{2\sqrt{\rho\rho'}} \quad (5.18)$$

La formule (5.18) est une généralisation du paramètre a introduit dans la théorie de Kubelka-Munk au chapitre 3 [voir formules (3.4) et (3.13)]. La solution inférieure à 1 de l'équation (5.17) est :

$$\rho_\infty = \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}(a - b) \quad (5.19)$$

où $b = \sqrt{a^2 - 1}$. Dans le cas d'un milieu symétrique $\rho = \rho'$ et $\tau = \tau'$, on obtient alors :

$$\rho_\infty = a - b$$

avec

$$a = \frac{\rho^2 - \tau^2 + 1}{2\rho}$$

Ce sont les résultats obtenus à l'aide de la théorie de Kubelka-Munk dans le cas d'un milieu homogène infiniment épais (voir section 3.4).

5.2 Matrices de transfert pour les interfaces

On a vu à la section 3.6 qu'il fallait apporter une correction aux facteurs de transfert intrinsèques ρ et τ d'une couche diffusante symétrique prédits par les formules de Kubelka-Munk afin de tenir compte du changement d'indice de réfraction entre l'air et le milieu ainsi que des géométries d'éclairage et d'observation, et ceci des deux côtés de la couche. Nous avons obtenu les formules (3.26) et (3.28) qu'il est possible d'étendre au cas d'une couche non-symétrique, de facteurs de transfert intrinsèques ρ , ρ' , τ et τ' , en utilisant l'approche des matrices de transfert. En effet, les transferts de flux (voir Fig. 5.2) entre les deux côtés de l'interface supérieure d'une part, et entre les deux côtés de l'interface inférieure d'autre part, peuvent être respectivement modélisés par les matrices de transfert suivantes :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{T_{in}} \begin{pmatrix} 1 & -r_d \\ r_s & T_{out}T_{in} - r_s r_d \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

et

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{T_{out}} \begin{pmatrix} 1 & -r_s \\ r_d & T_{out}T_{in} - r_s r_d \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

où r_s , r_d , T_{in} et T_{out} sont définis dans la section 3.6.

La matrice de transfert de la couche « sans les interfaces » s'écrit :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 1 & -\rho' \\ \rho & \tau\tau' - \rho\rho' \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

On en déduit la matrice de transfert de la couche « avec les interfaces » :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}' = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & -R' \\ R & TT' - RR' \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Les facteurs de transfert R , R' , T et T' sont obtenus en calculant d'abord le produit matriciel (5.23) puis en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice obtenue ; on obtient les formules de correction de Saunderson :

$$R = r_s + \frac{1}{D} T_{in} T_{out} [\rho - r_d (\rho \rho' - \tau \tau')] \quad (5.24)$$

$$T = \frac{1}{D} T_{in} \tau T_{out} \quad (5.25)$$

$$R' = r_s + \frac{1}{D} T_{in} T_{out} [\rho' - r_d (\rho \rho' - \tau \tau')] \quad (5.26)$$

$$T' = \frac{1}{D} T_{in} \tau' T_{out} \quad (5.27)$$

avec $D = (1 - r_d \rho) (1 - r_d \rho') - r_d^2 \tau \tau'$.

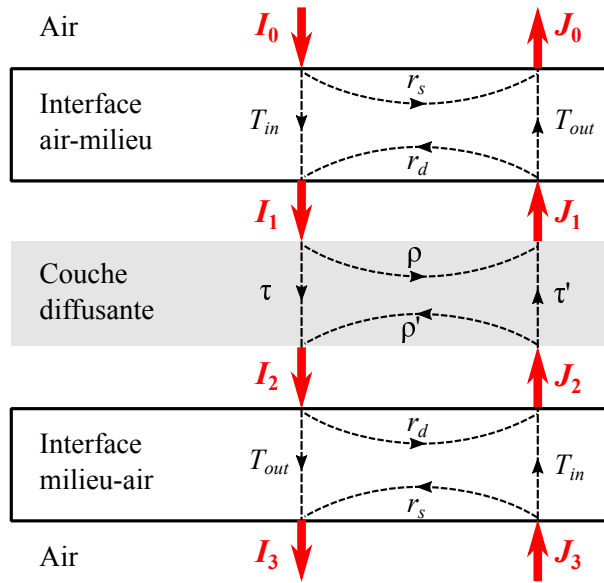


FIGURE 5.2 – Transferts de flux entre un milieu diffusant et ses interfaces avec l'air.

Les formules (5.24) à (5.27) établissent la relation entre les facteurs de transfert de la couche « sans les interfaces » (ρ , ρ' , τ et τ'), et les facteurs de transfert de la couche « avec les interfaces » (R , R' , T et T'). Ces formules sont connues, elles ont été obtenues à l'aide d'une méthode dans laquelle les échanges de flux entre les couches d'un empilement sont décrits par une chaîne de Markov [71]. Dans la pratique, les facteurs de transfert R , R' , T et T' sont mesurés et on souhaite obtenir les facteurs de transfert intrinsèques ρ , ρ' , τ et τ' . On écrit alors la matrice de transfert intrinsèque en inversant la formule (5.23) :

$$\mathbf{M} \equiv \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 1 & -\rho' \\ \rho & \tau \tau' - \rho \rho' \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}'^{-1} \quad (5.28)$$

Puis, pour calculer les facteurs de transfert intrinsèques de la couche, on utilise les formules (5.8) à (5.11) appliquées à la matrice \mathbf{M} ; le développement des calculs mène aux formules de correction de Saunderson inverse :

$$\rho = \frac{1}{\Delta} \{ (R - r_s) [T_{in} T_{out} + r_d (R' - r_s)] - r_d T T' \} \quad (5.29)$$

$$\tau = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} T \quad (5.30)$$

$$\rho' = \frac{1}{\Delta} \{ (R' - r_s) [T_{in}T_{out} + r_d(R - r_s)] - r_d T T' \} \quad (5.31)$$

$$\tau' = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} T' \quad (5.32)$$

avec $\Delta = [T_{in}T_{out} + r_d(R - r_s)] [T_{in}T_{out} + r_d(R' - r_s)] - r_d^2 T T'$.

Etudions le cas d'un milieu symétrique comme le papier APCO : la réflectance avant, R , et la transmittance vers le bas, T , sont les résultats bruts des mesures faites à l'aide d'un spectrophotomètre et on considère que $R' = R$ et $T' = T$, on obtient alors, à l'aide des formules (5.29) et (5.30), les facteurs de transfert intrinsèques ρ et τ [voir Fig. 5.3 (a)]. On observe également que la quantité spectrale $a = (\rho^2 - \tau^2 + 1) / 2\rho$, introduite au chapitre 3, est quasi-constante et égale à 1. On en déduit facilement que la quantité $\rho + \tau$ est elle-aussi quasi-constante et très proche de 1, ce qui signifie que le papier APCO est très peu absorbant. Les facteurs de Kubelka-Munk Kh et Sh [voir Fig. 5.3 (b)] sont déduits des facteurs de transfert intrinsèques ρ et τ à l'aide des formules (3.14) et (3.15). On observe que le coefficient Kh associé à l'absorption est quasi-constant et égal à zéro, en accord avec la remarque précédente.

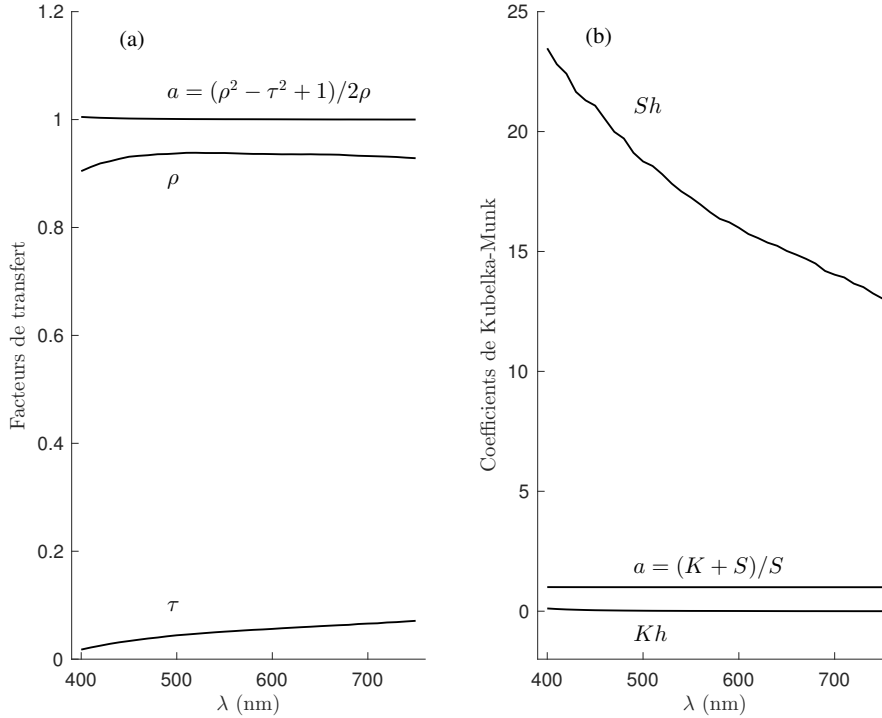


Figure 5.3 – (a) Réflectance (ρ) et transmittance (τ) intrinsèques et (b) coefficients de Kubelka-Munk du papier APCO.

5.3 Cas d'une couche d'encre uniforme sur une feuille de papier

Dans cette section, on cherche à déterminer si on peut associer une matrice de transfert à une couche d'encre uniforme imprimée (en tons pleins) sur une feuille de papier. On modélise cette feuille par une superposition de quatre composantes (voir Fig.5.4), chacune représentée par une matrice de transfert : l'interface air-imprimé (matrice \mathbf{F}), la couche d'encre (matrice \mathbf{E}), le papier (matrice de transfert intrinsèque \mathbf{M}) et l'interface imprimé-air (matrice \mathbf{F}'). On note \mathbf{P}_e la matrice de transfert de l'ensemble :

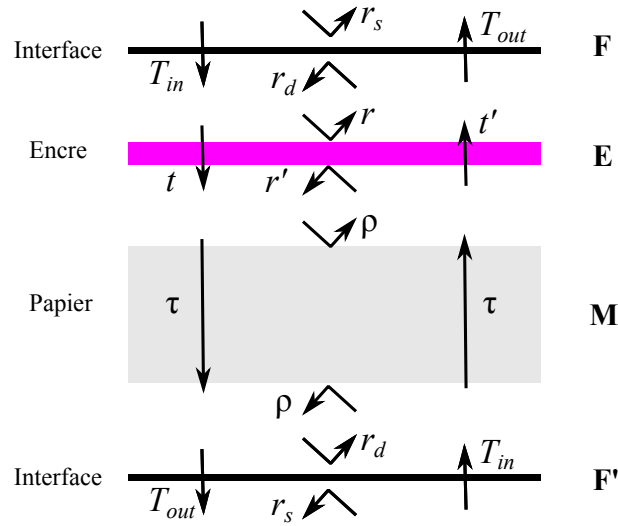


FIGURE 5.4 – Feuille de papier imprimée sur un seul côté, modélisée par une superposition de quatre composantes chacune représentée par une matrice de transfert.

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}' \quad (5.33)$$

Les matrices \mathbf{F} et \mathbf{F}' sont connues : elles correspondent à la correction de Saunderson vue à la section 5.2 et sont respectivement données par les formules (5.20) et (5.21). La matrice de transfert \mathbf{P}_e est construite à partir des mesures des facteurs de transfert R_e , R'_e , T_e et T'_e de l'imprimé. On note \mathbf{P} la matrice de transfert associée au papier non-imprimé, les mesures des facteurs de transfert R et T permettent de construire cette matrice :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}' = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & -R \\ R & T^2 - R^2 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

On en déduit la matrice de transfert intrinsèque du papier :

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}'^{-1} \quad (5.35)$$

A l'aide des formules (5.33) et (5.35), on obtient alors la matrice de transfert associée à l'encre :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_e \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (5.36)$$

On a imprimé, sur un seul côté, une feuille de papier APCO avec de l'encre magenta en ton plein puis on en a mesuré les facteurs de transfert R_e , R'_e , T_e et T'_e avec un spectrophotomètre. Les mesures de la réflectance avant et de la réflectance arrière sont faites en géométrie d:8° et celles de la transmittance vers le bas et de la transmittance vers le haut sont faites en géométrie d:0°. Les mesures des facteurs de transfert R et T du papier APCO non-imprimé ont également été faites dans les mêmes conditions. Par ailleurs, en considérant que l'indice de réfraction effectif du papier est $n = 1,5$, on peut montrer (voir section 3.6) que les valeurs des coefficients intervenant dans les matrices \mathbf{F} et \mathbf{F}' associées aux interfaces avec l'air sont, dans les conditions géométriques d'observation évoquées ci-dessus, $T_{in} = 0,908$, $T_{out} = 0,427$, $r_s = 0,04$ et, indépendamment de la géométrie d'observation, $r_d = 0,596$.

Les facteurs de transfert r , r' , t et t' de la couche d'encre, calculés à l'aide des formules (5.8) à (5.11) appliquées à la matrice de transfert (5.36), sont représentés à la figure 5.5. On observe des résultats incohérents, à savoir des valeurs de réflectance négatives et des valeurs de transmittance supérieures à 1. Ce comportement est également observé pour les six autres primaires de Neugebauer (cyan, jaune, rouge, vert, bleu et noir). L'encre imprimée sur le papier ne peut donc pas être modélisée par une

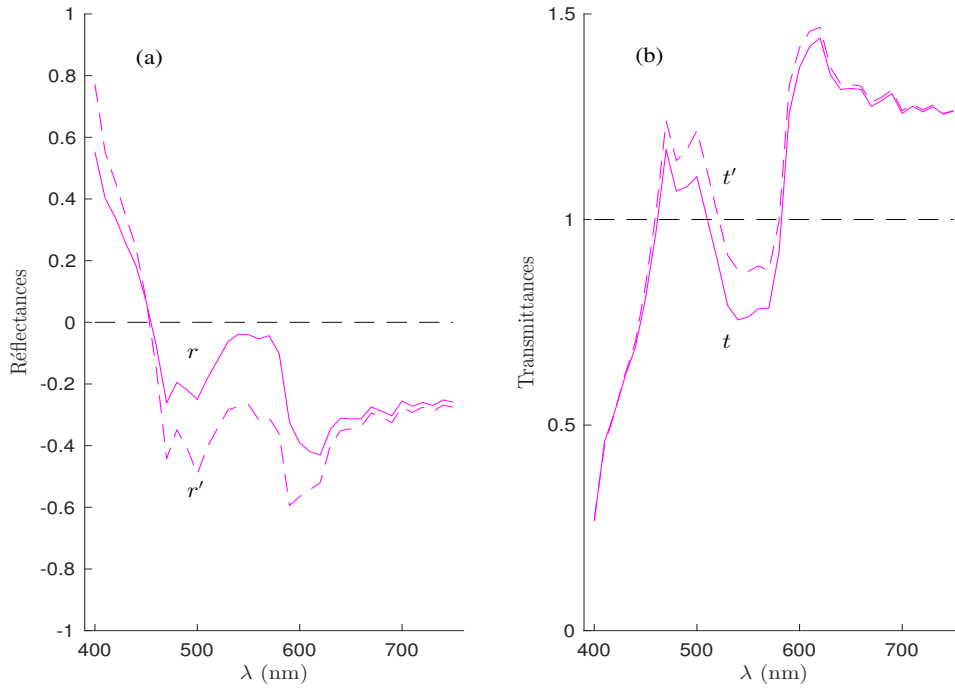


FIGURE 5.5 – Estimation, à l'aide de la formule (5.36), des réflectances (a) et des transmittances (b) de l'encre magenta seule lorsqu'elle est imprimée sur du papier APCO.

matrice de transfert : le papier et l'encre forment une composante diffusante et absorbante à part entière qui ne peut être séparée en deux composantes, l'une pour le papier, l'autre pour l'encre. Ceci reste évidemment valable pour une impression en demi-ton. Cette approche, qui consiste à considérer le papier et l'encre comme une seule composante, est utilisée dans la suite de ce travail pour prédire la couleur des impressions en demi-ton sur papier. Elle se distingue de celle utilisée pour le modèle de Clapper-Yule (voir section 4.3) dans lequel on distingue le papier d'une part, et les encres et l'interface d'autre part, les encres étant considérées comme un filtre qui transmet une partie de la lumière, sans la réfléchir, avant qu'elle ne pénètre ou ne sorte du milieu diffusant.

5.4 Cas d'un imprimé recto-verso

Nous allons voir dans cette section comment il est possible de prédire, à l'aide des matrices de transfert, les réflectances et les transmittances spectrales d'une surface comportant sur chaque côté une primaire de Neugebauer imprimée en ton plein.

On considère dans un premier temps une feuille de papier non-imprimée supposée symétrique [Fig. 5.6 (a)] dont on mesure les facteurs de transfert. On note \mathbf{P}_{11} la matrice de transfert associée à ces mesures (matrice de transfert « avec les interfaces ») et on note \mathbf{M}_{11} la matrice de transfert intrinsèque, c'est-à-dire « sans les interfaces ». D'après (5.28) on a :

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{11} \cdot \mathbf{F}'^{-1} \quad (5.37)$$

où \mathbf{F} et \mathbf{F}' sont les matrices de transfert associées aux interfaces supérieure et inférieure respectivement.

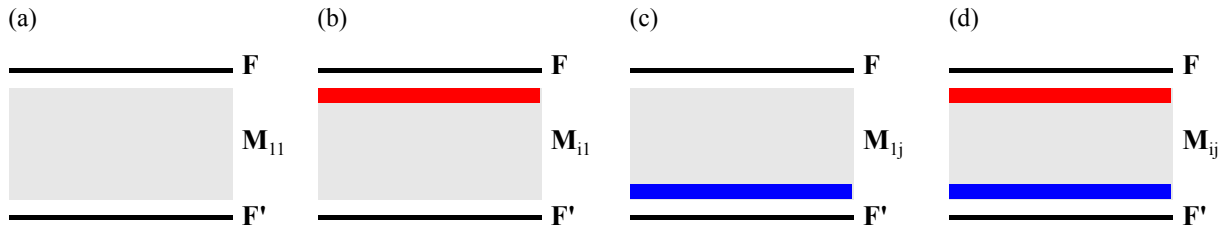


FIGURE 5.6 – Représentation d'une feuille de papier (a) sans encre, avec (b et c) encre imprimée en ton plein sur un seul côté, et (d) imprimée en ton plein des deux côtés.

On considère une deuxième feuille de papier [voir Fig. 5.6 (d)], de même fabrication que la précédente, sur laquelle est imprimée la primaire i sur le côté recto et la primaire j sur le côté verso. On mesure les facteurs de transfert de cet imprimé, ils sont notés $R_{ij}^{(mes)}$, $R'_{ij}{}^{(mes)}$, $T_{ij}^{(mes)}$ et $T'_{ij}{}^{(mes)}$ et la matrice de transfert associée est notée $\mathbf{P}_{ij}^{(mes)}$ (matrice de transfert « avec les interfaces »).

On considère maintenant deux autres feuilles de papier, de même fabrication que les précédentes, imprimées en recto simple : sur la première est imprimée la primaire i [voir Fig. 5.6 (b)] et sur la seconde la primaire j [voir Fig. 5.6 (c)]. On mesure les facteurs de transfert de chacun de ces deux imprimés. On note \mathbf{P}_{i1} (resp. \mathbf{M}_{i1}) la matrice de transfert « avec les interfaces » (resp. « sans les interfaces ») associée à la feuille sur laquelle est imprimée la primaire i et on note \mathbf{P}_{1j} (resp. \mathbf{M}_{1j}) la matrice de transfert « avec les interfaces » (resp. « sans les interfaces ») de la feuille sur laquelle est imprimée la primaire j . On a donc :

$$\mathbf{M}_{i1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{i1} \cdot \mathbf{F}'^{-1}$$

et

$$\mathbf{M}_{1j} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{1j} \cdot \mathbf{F}'^{-1}$$

On suppose que, de façon générale, une feuille de papier d'épaisseur h est équivalente à une superposition de deux demi-couches d'épaisseur $h/2$. En particulier la feuille sur laquelle est imprimée la primaire i peut être vue comme la superposition d'une demi-couche de matrice de transfert $\mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ et d'une demi-couche de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{1/2}$ [voir Fig. 5.7 (b)]. De la même façon, la feuille sur laquelle est imprimée la primaire j peut être vue comme la superposition d'une demi-couche de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{1/2}$ et d'une demi-couche de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}_{1j}$ [voir Fig. 5.7 (c)]. Enfin, la feuille imprimée en recto-verso avec la primaire i sur le recto et la primaire j sur le verso, peut également être considérée comme la superposition de deux demi-couches [voir Fig. 5.7 (d)] : la première a pour matrice de transfert $\mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ (c'est-à-dire, la couche supérieure de la feuille sur laquelle est imprimée la primaire i) et la deuxième a pour matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}_{1j}$ (c'est-à-dire, la couche inférieure de la feuille sur laquelle est imprimée la primaire j).

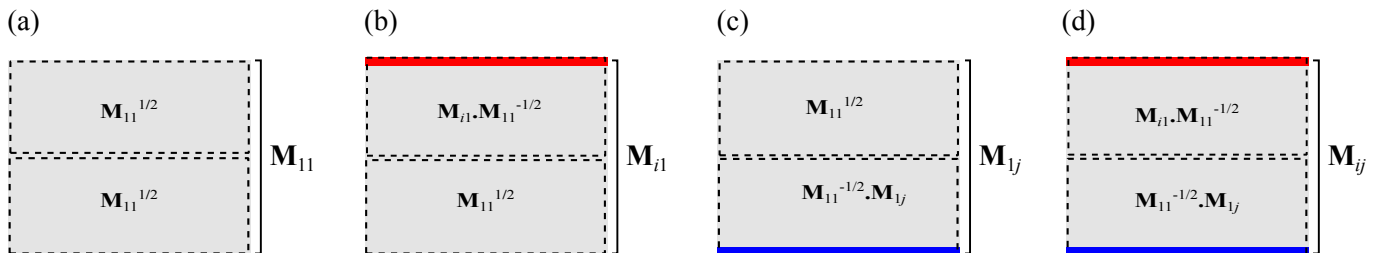


FIGURE 5.7 – Modélisation d'un imprimé recto-verso (d) sans les interfaces à partir de deux imprimés recto-simples (b et c), et de l'imprimé sans encre (a).

La matrice de transfert associée à la feuille imprimée en recto-verso sans les interfaces, s'écrit :

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{1j} \quad (5.38)$$

On applique alors la correction de Saunderson et on obtient la matrice de transfert « avec les interfaces » :

$$\mathbf{P}_{ij}^{(pred)} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{ij} \cdot \mathbf{F}' \quad (5.39)$$

On note $R_{ij}^{(pred)}$, $R'_{ij}^{(pred)}$, $T_{ij}^{(pred)}$ et $T'_{ij}^{(pred)}$ les facteurs de transfert associés à $\mathbf{P}_{ij}^{(pred)}$. Ils sont calculés à l'aide des formules (5.8) à (5.11) appliquées à la matrice obtenue avec la formule (5.39). La figure 5.8 montre les spectres de réflectance et de transmittance, mesurés et prédits, pour une feuille de papier APCO imprimée en tons pleins, rouge sur le côté recto et bleu sur le côté verso. La table 5.1 donne la moyenne des écarts quadratiques moyens (*rms*) et la moyenne des écarts colorimétriques CIELAB ΔE_{94} obtenues pour les 28 échantillons qui constituent toutes les combinaisons possibles d'imprimés recto-verso avec une des 7 couleurs primaires de Neugebauer (cyan, magenta, jaune, rouge, vert, bleu et noir) sur le recto et une des 7 couleurs primaires (potentiellement la même) sur le verso¹ pour une feuille de papier APCO (a) et pour une feuille de papier bureau (b). Les écarts, qu'ils soient quadratiques moyens ou colorimétriques, sont suffisamment petits pour que l'on puisse considérer que la différence de couleur prédite par cette méthode n'est pas perceptible par le système visuel humain.

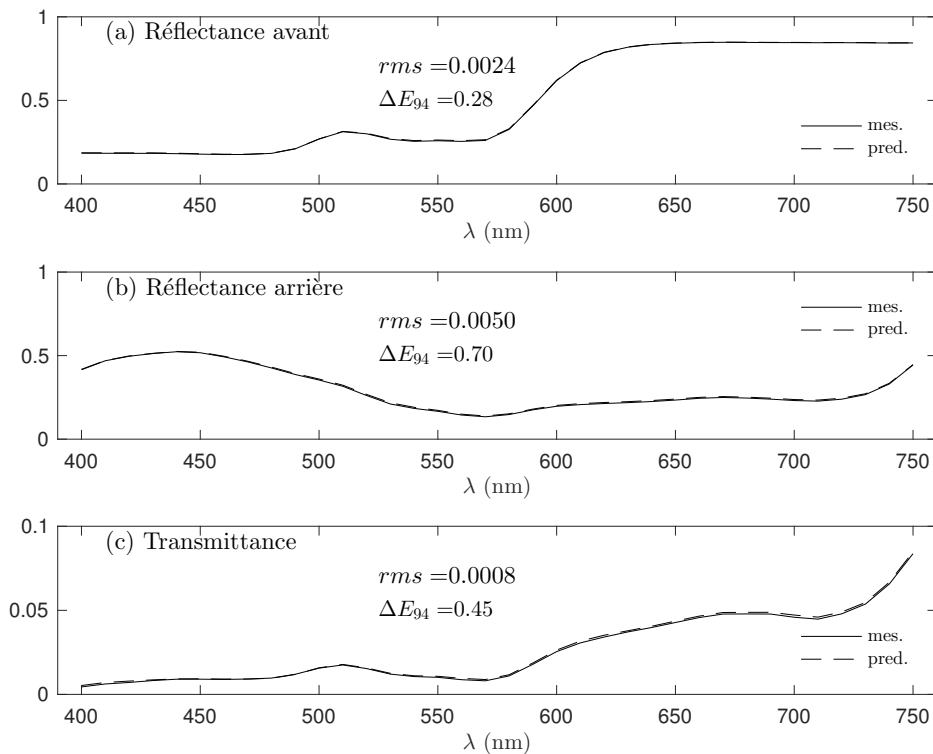


FIGURE 5.8 – Comparaison des facteurs de transfert mesurés et prédits dans le cas d'une feuille de papier APCO imprimée en ton plein dans la primaire rouge sur le recto et dans la primaire bleue sur le verso.

1. 7 échantillons avec la couleur 2 (cyan) sur le recto, 6 échantillons avec la couleur 3 (magenta) sur le recto, etc... (7 + 6 + ... + 1 = 28)

	$rms - \Delta E_{94}$	
	(a)	(b)
Réfectance	0,006 — 0,65	0,006 — 0,48
Transmittance	0,001 — 0,46	0,002 — 0,95

TABLE 5.1 – Valeurs moyennes des écarts quadratiques moyens (rms) et des écarts colorimétriques (ΔE_{94}) entre les spectres mesurés et les spectres théoriques pour les 28 échantillons recto-verso constitués avec les 7 couleurs primaires de Neugebauer imprimés sur du papier APCO (a) et sur du papier bureau (b).

Résumé

L'utilisation des matrices de transfert permet de développer des méthodes simples et efficaces pour décrire les bilans de flux de part et d'autre d'une couche diffusante. Lorsque cette couche peut être décrite comme une superposition de plusieurs composantes, comme dans le cas de la correction de Saunderson, sa matrice de transfert s'obtient alors en multipliant simplement les matrices de transfert de ses composantes. Cette propriété multiplicative des matrices de transfert a permis de mettre en évidence que la couche d'encre imprimée sur une feuille de papier ne pouvait pas être décrite par une matrice de transfert, et que par la suite, les imprimés (ton plein ou demi-ton) seront modélisés par une matrice de transfert unique dont les facteurs de transfert prendront en compte les réflectances et les transmittances globales du système {papier + encre}. C'est encore la propriété multiplicative des matrices de transfert qui a permis de prédire les réflectances et les transmittances spectrales d'un imprimé recto-verso à partir de ceux de deux imprimés recto simples. Dans le chapitre suivant, la relation entre l'approche des matrices de transfert et la théorie de Kubelka-Munk est mise en évidence en étudiant les transferts de flux d'un empilement de composantes non-symétriques identiques.

Chapitre 6

Modèle à deux flux généralisé

Le formalisme des matrices de transfert présenté au chapitre précédent permet d'étendre les modèles à deux flux au-delà des formulaires connus des modèles de Yule-Nielsen ou de Clapper-Yule. Mais avant d'aborder les cas des imprimés en demi-ton, nous présentons dans ce chapitre le *modèle à deux flux généralisé*, dont un cas particulier est le modèle de Kubelka-Munk généralisé, à ce jour inexploité, et qui trouvera dans la problématique des prédictions de couleurs en demi-ton une application originale. Le modèle à deux flux généralisé aborde le problème des empilements de couches identiques, planes et parallèles comme des piles de films non-diffusants ou au contraire de milieux fortement diffusants, en considérant, le cas échéant, les interfaces avec l'air. L'intérêt de ce modèle réside principalement dans le fait que les mesures des réflectances et transmittances d'une seule couche suffisent à prédire les réflectances et les transmittances de l'empilement tout entier. Le formalisme mathématique du modèle à deux flux généralisé est basé sur la notion de matrice de transfert introduite au chapitre 5. Les formules principales, présentées à la section 6.1, expriment les facteurs de transfert d'un empilement de couches identiques en fonction de ceux d'une couche individuelle. Le cas particulier d'un empilement infini de couches diffusantes infiniment fines est étudié à la section 6.2 : on obtient alors un modèle continu appelé *modèle de Kubelka-Munk généralisé* et dont le modèle de Kubelka-Munk présenté au chapitre 3 est un cas particulier.

6.1 Version discrète : superposition de n couches non-symétriques identiques

On considère une composante non-symétrique dont les facteurs de transfert sont notés r, t, r' et t' ; on note \mathbf{M} sa matrice de transfert :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & -r' \\ r & tt' - rr' \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Lorsqu'on superpose n composantes identiques de matrice de transfert \mathbf{M} , on obtient une composante non-symétrique dont la matrice de transfert est :

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^n$$

Par ailleurs, \mathbf{P} a la structure d'une matrice de transfert donc :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & -R' \\ R & TT' - RR' \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

où R, T, R' et T' sont les facteurs de transfert de la composante non-symétrique constituée de l'empilement des n composantes. Ils sont obtenus en appliquant les formules (5.8) à (5.11) dans lesquelles les coefficients m_{ij} ($i = 1, 2$) sont ceux de la matrice \mathbf{M}^n . Après des calculs détaillés dans l'annexe B, on obtient :

$$R = \frac{\sqrt{\frac{r}{r'}} \sinh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right]}{\alpha \sinh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right] + \beta \cosh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right]}, \quad (6.3)$$

$$T = \frac{\beta e^{n \ln \sqrt{\frac{t}{t'}}}}{\alpha \sinh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right] + \beta \cosh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right]}, \quad (6.4)$$

$$R' = R \frac{r'}{r}, \quad (6.5)$$

$$T' = T \left(\frac{t'}{t} \right)^n. \quad (6.6)$$

avec

$$\alpha = \frac{rr' - tt' + 1}{2\sqrt{rr'}}, \quad (6.7)$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad (6.8)$$

et

$$\nu = \frac{1}{t} \left[1 - (\alpha - \beta) \sqrt{rr'} \right]. \quad (6.9)$$

Les quantités définies par les formules (6.7) à (6.9) ne dépendent que des facteurs de transfert d'une composante individuelle. Le paramètre ν est la plus grande des deux valeurs propres de la matrice \mathbf{M} , elle est reliée à l'autre valeur propre μ par la formule :

$$\mu\nu = t'/t$$

Le terme α généralise le terme habituellement noté a dans le modèle de Kubelka-Munk [voir formule (3.13)]. Il est supérieur à 1 si $r \leq r'$ et $t \leq t'$ (ou de façon symétrique si $r' \leq r$ et $t' \leq t$).

Lorsque que le nombre de composantes tend vers l'infini, on montre facilement que la réflectance tend vers la limite :

$$R_\infty = \sqrt{\frac{r}{r'}} \frac{1}{\alpha + \beta} = \sqrt{\frac{r}{r'}} (\alpha - \beta) \quad (6.10)$$

On retrouve alors la formule (5.19) obtenue à la section 5.1 à l'aide de la formule de Kubelka (5.16) appliquée à un empilement d'une infinité de composantes identiques non-symétriques.

Les formules (6.4) à (6.6) restent valides si on considère une couche diffusante non-symétrique, de matrice de transfert \mathbf{P} et de facteurs de transfert R , R' , T et T' , que l'on subdivise en n sous-couches diffusantes non-symétriques de matrice de transfert \mathbf{M} et de facteurs de transfert r , r' , t et t' . On a alors :

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^{1/n}$$

On obtient alors des formules pour les facteurs de transfert d'une sous-couche analogues aux formules (6.3) à (6.6) en remplaçant n par $1/n$:

$$r = \frac{\sqrt{\frac{R}{R'}} \sinh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu \sqrt{\frac{T}{T'}} \right) \right]}{\alpha \sinh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu \sqrt{\frac{T}{T'}} \right) \right] + \beta \cosh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu \sqrt{\frac{T}{T'}} \right) \right]}, \quad (6.11)$$

$$t = \frac{\beta e^{\frac{1}{n} \ln \sqrt{\frac{T}{T'}}}}{\alpha \sinh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu \sqrt{\frac{T}{T'}} \right) \right] + \beta \cosh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu \sqrt{\frac{T}{T'}} \right) \right]}, \quad (6.12)$$

$$r' = r \frac{R'}{R}, \quad (6.13)$$

$$t' = t \left(\frac{T'}{T} \right)^{1/n}. \quad (6.14)$$

avec

$$\alpha = \frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{T} \left[1 - (\alpha - \beta) \sqrt{RR'} \right].$$

De façon générale, on peut même considérer n comme un nombre réel quelconque ; en effet, si on considère des couches de peintures, alors une composante individuelle peut représenter une couche d'épaisseur $10 \mu m$ par exemple, ainsi on a $n = 2,47$ pour une couche d'épaisseur $24,7 \mu m$. On peut donc assimiler n à une épaisseur relative.

On montre dans l'annexe C que le paramètre α reste constant, qu'il soit défini pour une couche individuelle ou pour une superposition de plusieurs couches, c'est-à-dire :

$$\frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}} = \frac{rr' - tt' + 1}{2\sqrt{rr'}} = \alpha \quad (6.15)$$

Rappelons que α est une quantité supérieure à 1, son inverse $\omega = \alpha^{-1}$ est donc inférieur à 1 (comme un facteur de transfert) et, comme α , il est indépendant de l'épaisseur relative du milieu. Cette propriété d'invariance peut être utilisée pour estimer la validité de la théorie des transferts à deux flux appliquée à une superposition de couches [70]. Nous proposons ici d'utiliser la propriété d'invariance du paramètre ω pour vérifier si le papier sur lequel nous imprimons des images en demi-ton est approprié pour que la description de la lumière se propageant à l'intérieur puisse se faire à l'aide de l'approche des matrices de transfert. Pour cela, on mesure dans un premier temps la réflectance R_1 et la transmittance T_1 d'une feuille de papier supposée symétrique, puis dans un second temps, la réflectance R_{12} et la transmittance T_{12} d'un empilement de deux feuilles de papier identiques à la première feuille. Le modèle de transferts à deux flux prévoit que :

$$\omega_1 = \frac{2R_1}{R_1^2 - T_1^2 + 1} = \frac{2R_{12}}{R_{12}^2 - T_{12}^2 + 1} = \omega_{12} \leq 1$$

La figure 6.1 montre l'écart quadratique moyen et l'écart colorimétrique CIELAB ΔE_{94} entre les deux spectres ω_1 et ω_{12} pour le papier APCO et pour un papier de bureau ordinaire. On constate que le papier APCO vérifie avec une bonne précision la propriété de conservation de la quantité ω , il est donc adapté à la théorie des transferts à deux flux et sera par la suite utilisé pour tester les futurs modèles de prédiction de couleurs présentés au chapitre 7. En ce qui concerne le papier de bureau, on constate que non seulement l'écart entre ω_1 et ω_{12} est plus important que pour le papier APCO (surtout dans la partie 430-500 nm) mais aussi que ces quantités sont légèrement supérieures à 1 dans cette même partie du spectre, ce qui est, en toute rigueur, impossible dans le cadre de la théorie des transferts à deux flux. Ce dépassement des valeurs théoriques est dû à la fluorescence du papier qui n'est pas prise en compte dans les bilans de transferts de flux. La fluorescence du papier est elle-même due à l'ajout d'azurants optiques (« *optical brighteners agents* ») lors de sa fabrication afin de le blanchir et compenser ainsi sa teinte légèrement jaunâtre ; ces agents absorbent la lumière à haute énergie dans l'ultraviolet entre 330 et 420 nm, et la ré-émettent à plus basse énergie dans la partie bleue du spectre visible entre 420 et 530 nm [77].

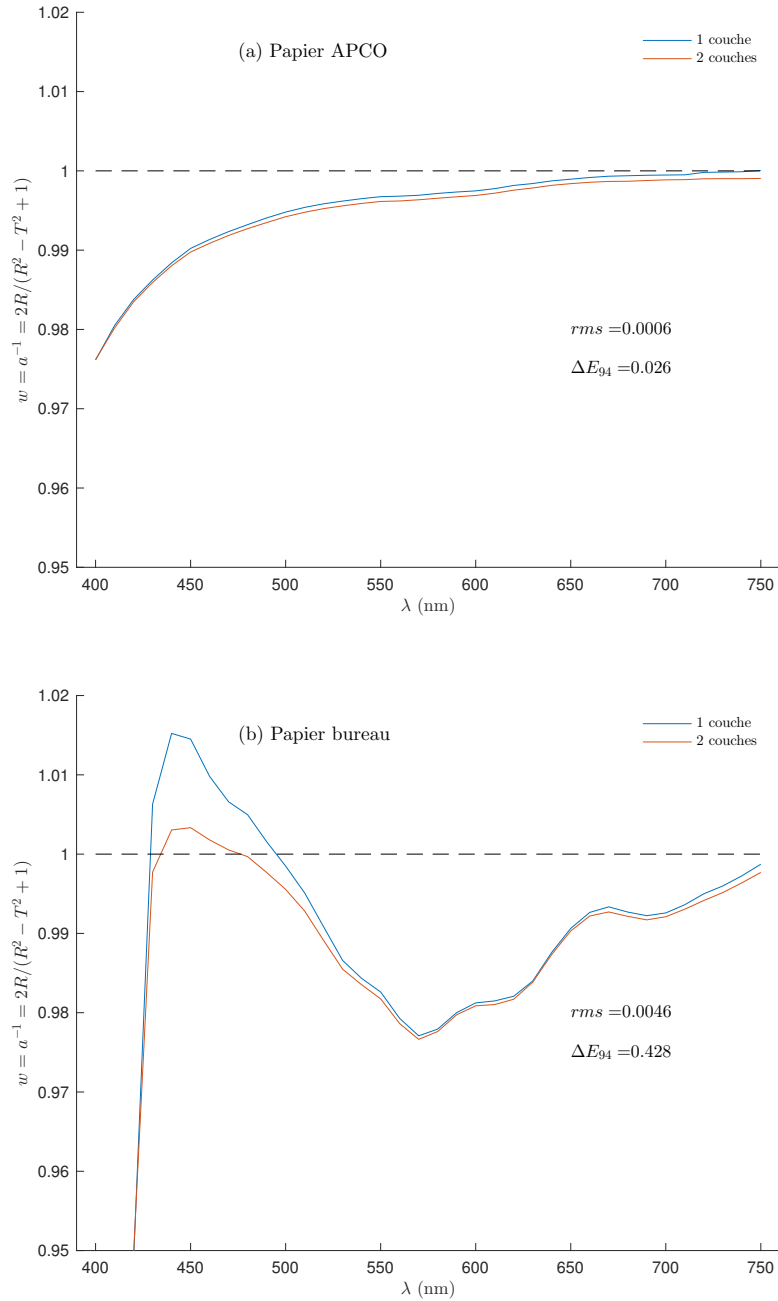


FIGURE 6.1 – Etude de l'invariance de la quantité $\omega = 2R / (R^2 - T^2 + 1)$ pour (a) une feuille de papier APCO et (b) une feuille de papier de bureau ordinaire.

6.2 Version continue : modèle de Kubelka-Munk généralisé

Nous étudions dans cette section le cas particulier du modèle à deux flux généralisé pour une infinité de composantes qui absorbent et diffusent la lumière de façon différente selon le sens de propagation de cette dernière. Nous montrons que les formules obtenues pour les facteurs de transfert de l'empilement sont une généralisation des formules de Kubelka-Munk présentées au chapitre 3.

6.2.1 Modèle continu pour une couche diffusante

Le modèle à deux flux généralisé, développé dans la section précédente, permet de considérer un milieu diffusant dans lequel les couches infinitésimales, toutes identiques, seraient non-symétriques (c'est-à-dire $r \neq r'$ et $t \neq t'$). On pourrait imaginer un milieu diffusant avec des pigments asymétriques

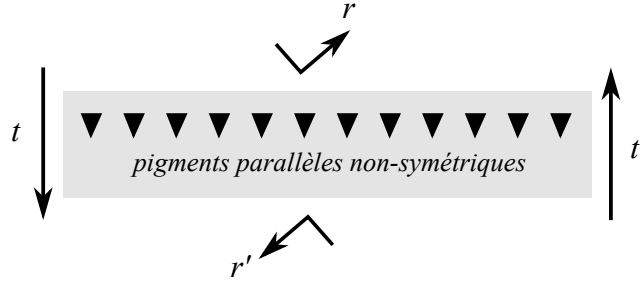


FIGURE 6.2 – Couche absorbant et diffusant la lumière différemment selon le sens de propagation de cette dernière, cette différence étant due à la présence de pigments parallèles non-symétriques.

orientés dans une même direction (voir Fig. 6.2)¹. Cela a pour conséquence de considérer des coefficients d'absorption et de diffusion différents selon que le flux se propage de haut en bas (respectivement notés K et S) ou de bas en haut (K' et S'). On considère alors une couche fortement diffusante non-symétrique d'épaisseur h constituée d'un empilement de n couches infinitésimales d'épaisseur $d = h/n$, chacune représentée par la matrice de transfert (voir Fig. 6.3) :

$$M_{h/n} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & -r' \\ r & tt' - rr' \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

On note i_0 et i_1 les flux entrants et sortants de la couche d'épaisseur d en se propageant de haut en bas, et j_0 et j_1 les flux sortant et entrant de la couche en se propageant de bas en haut. On a :

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = M_{h/n} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

On considère que l'épaisseur d est suffisamment petite pour qu'on puisse supposer que le flux descendant i et le flux ascendant j varient de façon discontinue entre les deux côtés de la couche (c'est le cas par exemple lorsque d est de l'ordre de la taille des particules responsables de l'absorption et de la diffusion), de sorte que les échanges de flux de part et d'autre de la couche sont décrits par des différences entre les flux entrants et les flux sortants et non plus par des équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{i_1 - i_0}{d} = -(K + S) i_0 + S' j_1 \\ \frac{j_1 - j_0}{d} = -S i_0 + (K' + S') j_1 \end{cases} \quad (6.18)$$

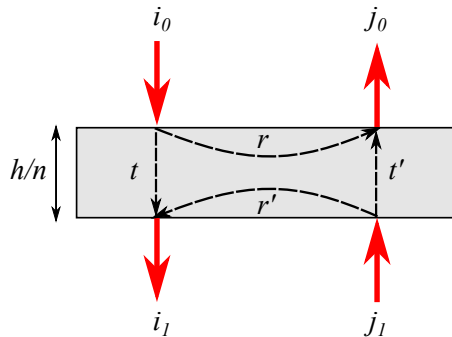


FIGURE 6.3 – Transferts de flux sur une couche élémentaire.

1. C'est le cas des paillettes orientées par des aimants que l'on trouve dans les encres de sécurité fabriquées par la société SICPA pour les billets de banque, mais leur orientation est horizontale alors qu'il faudrait une orientation verticale. Nous n'avons pas réalisé de tels matériaux, le modèle de Kubelka-Munk généralisé que nous proposons ici n'a donc pas été testé pour des milieux asymétriques continus. En revanche, il a été testé pour des milieux discrets asymétriques comme les imprimés en demi-ton.

Ce système peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} i_0 &= \frac{1}{1-(K+S)d} \times i_1 - \frac{S'd}{1-(K+S)d} \times j_1 \\ j_0 &= \frac{Sd}{1-(K+S)d} \times i_1 + \frac{[1-(K+S)d][1-(K'+S')d]-SS'd^2}{1-(K+S)d} \times j_1 \end{cases} \quad (6.19)$$

Ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-(K+S)d} \begin{pmatrix} 1 & -S'd \\ Sd & [1-(K+S)d][1-(K'+S')d]-SS'd^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par identification de cette dernière relation avec les formules (6.17) et (6.16), on obtient les facteurs de transfert d'une couche d'épaisseur $d = h/n$:

$$\begin{aligned} r &= S \frac{h}{n}, \\ t &= 1 - (K + S) \frac{h}{n}, \\ r' &= S' \frac{h}{n}, \\ t' &= 1 - (K' + S') \frac{h}{n} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Le calcul des facteurs de transfert R , R' , T et T' de la couche d'épaisseur h (empilement des n couches élémentaires d'épaisseur h/n) se fait en remplaçant dans les formules (6.4) à (6.6), les facteurs de transfert d'une couche élémentaire r , r' , t et t' par les expressions (6.20) puis en faisant tendre n vers l'infini. On obtient (voir démonstration dans l'annexe D) :

$$R = \frac{\sinh(b\sqrt{SS'}h) \sqrt{S/S'}}{a \sinh(b\sqrt{SS'}h) + b \cosh(b\sqrt{SS'}h)}, \quad (6.21)$$

$$T = \frac{b e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})h}}{a \sinh(b\sqrt{SS'}h) + b \cosh(b\sqrt{SS'}h)}, \quad (6.22)$$

$$R' = R \frac{S'}{S}, \quad (6.23)$$

$$T' = T e^{-2(K'+S'-a\sqrt{SS'})h}. \quad (6.24)$$

avec

$$a = \frac{K + K' + S + S'}{2\sqrt{SS'}} \quad (6.25)$$

et

$$b = \sqrt{a^2 - 1} \quad (6.26)$$

Le paramètre a est exprimé en fonction des coefficients de Kubelka-Munk K , K' , S et S' , mais il est également possible de l'exprimer en fonction des facteurs de transfert R , R' , T et T' (voir démonstration à l'annexe D) :

$$a = \frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}} \quad (6.27)$$

Les formules (6.25) et (6.27) sont une généralisation des formules (3.4) et (3.13) introduites au chapitre 3. Les formules (6.21) à (6.24) sont appelées par la suite *formules de Kubelka-Munk généralisées*. Elles montrent la relation qui existe entre les facteurs de transfert R , R' , T et T' d'une couche et les coefficients de Kubelka-Munk K , K' , S et S' en relation avec les propriétés physique d'absorption et de diffusion du milieu. Dans le cas d'un milieu symétrique, on a $K = K'$ et $S = S'$, et on retrouve alors les formules de la théorie de Kubelka-Munk :

$$R = R' = \frac{\sinh(bSh)}{a \sinh(bSh) + b \cosh(bSh)}, \quad (6.28)$$

$$T = T' = \frac{b}{a \sinh(bSh) + b \cosh(bSh)}, \quad (6.29)$$

avec

$$a = \frac{K + S}{S} = \frac{R^2 - T^2 + 1}{2R}. \quad (6.30)$$

6.2.2 Méthode de l'exponentielle matricielle

Les formules de Kubelka-Munk généralisées (6.22) à (6.24) sont celles qu'on aurait obtenues si on avait résolu le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{di}{dz} = -(K + S)i + S'j \\ \frac{dj}{dz} = -Si + (K' + S')j \end{cases} \quad (6.31)$$

où i et j sont les flux lambertiens orientés vers le bas et vers le haut respectivement. Ce système peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dz}(z) \\ \frac{dj}{dz}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K + S) & S' \\ -S & K' + S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(z) \\ j(z) \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

On introduit les notations suivantes :

$$F(z) = \begin{pmatrix} i(z) \\ j(z) \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(K + S) & S' \\ -S & K' + S' \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Ainsi, le système différentiel (6.31) peut également s'écrire :

$$\frac{dF}{dz}(z) = \mathbf{A}F(z) \quad (6.35)$$

On peut montrer que la solution d'un tel système s'écrit également sous forme matricielle de la façon suivante :

$$F(z) = e^{(z-z_0)\mathbf{A}} F(z_0) \quad (6.36)$$

où $e^{(z-z_0)\mathbf{A}}$ est l'exponentielle matricielle de la matrice $(z - z_0)\mathbf{A}$. On rappelle que l'exponentielle matricielle d'une matrice \mathbf{M} est définie par :

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!}$$

En particulier pour $z = 0$ et $z_0 = h$, on a $F(0) = e^{-h\mathbf{A}}F(h)$, ou encore :

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = e^{-h\mathbf{A}} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

Par ailleurs, si on note R , R' , T et T' les facteurs de transfert de la couche, on a :

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & -R' \\ R & TT' - RR' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

L'identification des formules (6.37) et (6.38) permet de faire le lien entre la matrice (6.34) et la matrice de transfert de la couche :

$$\exp \left[-h \begin{pmatrix} -(K+S) & S' \\ -S & K'+S' \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & -R' \\ R & TT' - RR' \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Le système (6.31) est résolu dans l'annexe E par la méthode de l'exponentielle matricielle déjà utilisée dans le cas d'un milieu symétrique [39], on obtient alors les expressions suivantes :

$$i(z) = \frac{e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})z}}{b} \left\{ \left(\sqrt{\frac{S'}{S}} j(0) - ai(0) \right) \sinh(b\sqrt{SS'}z) + bi(0) \cosh(b\sqrt{SS'}z) \right\} \quad (6.40)$$

et

$$j(z) = \frac{e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})z}}{b} \left\{ \left(aj(0) - \sqrt{\frac{S}{S'}} i(0) \right) \sinh(b\sqrt{SS'}z) + bj(0) \cosh(b\sqrt{SS'}z) \right\} \quad (6.41)$$

Pour trouver les expressions de la réflectance avant, R , et de la transmittance vers le bas, T , on suppose que le flux incident j est nul, c'est-à-dire $j(h) = 0$. Ainsi, d'après (6.41) on a :

$$\left(aj(0) - \sqrt{\frac{S}{S'}} i(0) \right) \sinh(b\sqrt{SS'}h) + bj(0) \cosh(b\sqrt{SS'}h) = 0$$

On en déduit :

$$R = \frac{j(0)}{i(0)} = \frac{\sqrt{\frac{S}{S'}} \sinh(b\sqrt{SS'}h)}{a \sinh(b\sqrt{SS'}h) + b \cosh(b\sqrt{SS'}h)} \quad (6.42)$$

La transmittance vers le bas est définie par $T = i(h)/i(0)$, ainsi d'après (6.40) on a :

$$T = \frac{e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})h}}{b} \left\{ \left(\sqrt{\frac{S'}{S}} \frac{j(0)}{i(0)} - ai \right) \sinh(b\sqrt{SS'}h) + b \cosh(b\sqrt{SS'}h) \right\}$$

En remplaçant $j(0)/i(0)$ par l'expression (6.42), en développant puis en simplifiant les calculs, on obtient :

$$T = \frac{be^{-(K+S-a\sqrt{SS'})h}}{a \sinh(b\sqrt{SS'}h) + b \cosh(b\sqrt{SS'}h)}$$

Les expressions de la réflectance arrière, R' , et de la transmittance vers le haut, T' , s'obtiennent de la même façon en considérant cette fois-ci que le flux incident i est nul, c'est-à-dire $i(0) = 0$, et en posant $R' = i(h) / j(h)$ et $T' = j(0) / j(h)$.

6.2.3 Inversion des formules de Kubelka-Munk généralisées

On a vu à la section 3.3 que dans le cas d'une couche symétrique, le système d'équations (6.28) et (6.29), qui donne les facteurs de transfert en fonction des coefficients de Kubelka-Munk, peut s'inverser : on obtient alors les expressions des coefficients de Kubelka-Munk (3.14) et (3.15) en fonction des facteurs de transfert. Cela est encore possible dans le cas d'une couche non-symétrique, l'inversion des équations (6.22) à (6.24) donnent les *coefficients de Kubelka-Munk généralisés* (voir démonstration à l'annexe F) :

$$Sh = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{R}{R'}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a-b)}{\sqrt{TT'}} \right) \quad (6.43)$$

$$Kh = \frac{1}{b} \left(a - \sqrt{\frac{R}{R'}} \right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a-b)}{\sqrt{TT'}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T}{T'} \right) \quad (6.44)$$

$$S'h = \frac{R'}{R} Sh \quad (6.45)$$

$$K'h = \frac{1}{b} \left(a - \sqrt{\frac{R'}{R}} \right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a-b)}{\sqrt{TT'}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T'}{T} \right) \quad (6.46)$$

en considérant que a et b sont donnés par les relations (6.27) et (6.26) respectivement. Si on suppose que $R' = R$ et $T' = T$, on retrouve bien les formules (3.14) et (3.15) obtenues dans le cas d'un milieu symétrique.

Par ailleurs, on remarque que :

$$(Kh + Sh) - (K'h + S'h) = \ln \left(\frac{T'}{T} \right) \neq 0 \quad (6.47)$$

Le modèle de Kubelka-Munk généralisé prévoit donc que la somme des coefficients de Kubelka-Munk $K + S$ est différente selon que la lumière se propage dans le milieu de haut en bas ou de bas en haut.

6.3 Etude d'un cas pratique et discussion

Les coefficients de Kubelka-Munk généralisés peuvent aussi devenir des coefficients « effectifs » d'une composante macroscopique associée à un milieu non-homogène telle une feuille de papier encrée sur une face. Voyons ce que donne les formules (6.43) à (6.46) dans le cas pratique d'une feuille de papier APCO dont un seul côté est imprimé en ton plein dans la primaire cyan [voir Fig. 6.4 (a)].

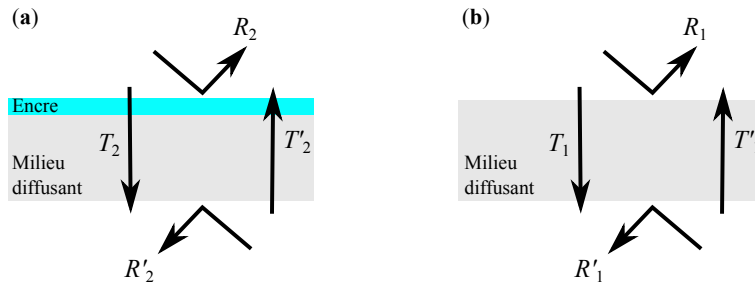


FIGURE 6.4 – Représentation des facteurs de transfert d'une feuille de papier imprimée sur un seul côté avec de l'encre cyan (a) et d'une feuille de papier non-imprimée (b).

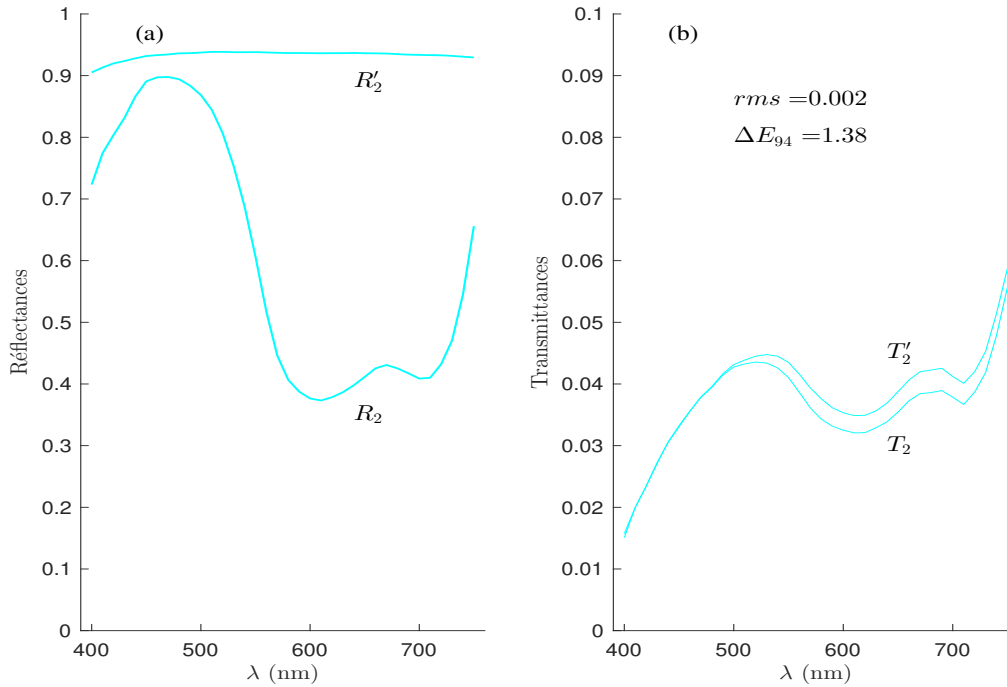


FIGURE 6.5 – Réflectances (a) et transmittances (b) intrinsèques d'une feuille de papier APCO imprimée sur un seul côté en ton plein avec de l'encre cyan. Les valeurs de l'écart quadratique moyen rms et de l'écart colorimétrique ΔE_{94} permettent de quantifier la proximité des deux spectres de transmittance.

On mesure à l'aide d'un spectrophotomètre les réflectances et les transmittances des deux côtés de l'imprimé. La figure 6.5 représente ces spectres après correction de Saunderson inverse (c'est-à-dire après suppression de l'effet optique des interfaces, voir section 5.2). La réflectance du côté encré est inférieure à la réflectance du côté non-encré [$R'_2 > R_2$, voir Fig. 6.5 (a)]. Cela est dû à l'absorption de la lumière par l'encre. Par ailleurs, on observe que la transmittance est très légèrement supérieure lorsque la lumière entre par le côté non-encré ($T'_2 \gtrsim T_2$). D'un point de vue spectral, l'écart entre T_2 et T'_2 est le plus important dans les domaines où l'encre cyan absorbe le moins (entre 550 nm et 750 nm).

Les coefficients de Kubelka-Munk généralisés associés à la diffusion, S_2h et S'_2h [voir Fig. 6.6(a)], sont calculés avec les formules (6.43) et (6.45), et les coefficients de Kubelka-Munk généralisés associés à l'absorption, K_2h et K'_2h [voir Fig. 6.6(b)], sont calculés avec les formules (6.44) et (6.46). On rappelle que ce sont des coefficients effectifs relatifs à la composante non-homogène que constitue le papier et la couche d'encre. On observe que le coefficient de diffusion est plus important lorsque la lumière se propage dans l'imprimé en entrant par le côté non-encré que par le côté encré ($S'_2h > S_2h$). On observe également que le coefficient d'absorption est négatif lorsque la lumière se propage en entrant par le côté non-encré ($K'_2h < 0$) et inférieur, en valeur absolue, au coefficient d'absorption lorsque la lumière se propage en entrant par le côté encré ($|K'_2h| < K_2h$). Ce comportement des coefficients du modèle de Kubelka-Munk généralisé, différents selon que la lumière se propage dans un sens ou dans l'autre, est également observé pour les autres tons pleins monochromes utilisant les 6 autres primaires de Neugebauer, ainsi que sur des imprimés en demi-ton.

On peut expliquer le signe négatif de K'_2 de la façon suivante : d'après ce qu'on observe sur la figure 6.6 (a), la diffusion de la lumière est plus importante lorsqu'elle se propage de bas en haut, c'est-à-dire $S'_2 - S_2 > 0$ et, comme les transmittances sont très proches [voir Fig. 6.5 (b)], on peut supposer, d'après la formule (6.47), que $K'_2 + S'_2 \simeq K_2 + S_2$, ce qui est confirmé par la figure 6.8, ou encore :

$$K'_2 \simeq K_2 - (S'_2 - S_2)$$

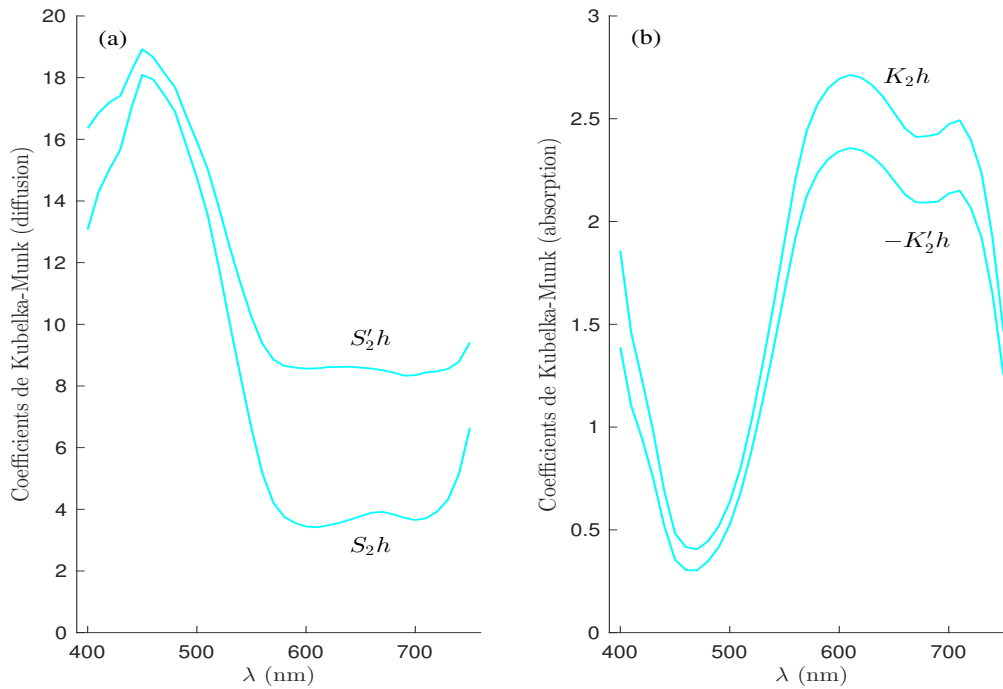


FIGURE 6.6 – Coefficients de Kubelka-Munk associés à la diffusion (a) et à l'absorption (b) d'une feuille de papier APCO imprimée sur un seul côté en ton plein avec de l'encre cyan.

Le coefficient K_2 est positif mais il n'est pas interdit que la différence $S'_2 - S_2$ soit supérieure à K_2 . Dans ce cas, le coefficient K'_2 est négatif. Cela ne signifie pas que l'absorption de la lumière est négative lorsqu'elle se propage dans un sens et positive lorsqu'elle se propage dans l'autre, mais ça remet probablement en question l'interprétation des coefficients K_2 et K'_2 dans le cadre du modèle Kubelka-Munk généralisé.

Il est également intéressant de noter l'influence de l'encre imprimée d'un seul côté de la feuille sur la réflectance du côté opposé (c'est-à-dire non-encre) : si les spectres des réflectances R'_1 et R'_2 sont presque confondus [voir Fig. 6.7 (a)], il n'en est pas de même du coefficient de Kubelka-Munk associé à la diffusion, ce dernier est très différent selon que le côté opposé est encré (S'_2h) ou non [S'_1h , tracé dans la figure 6.7(b)].

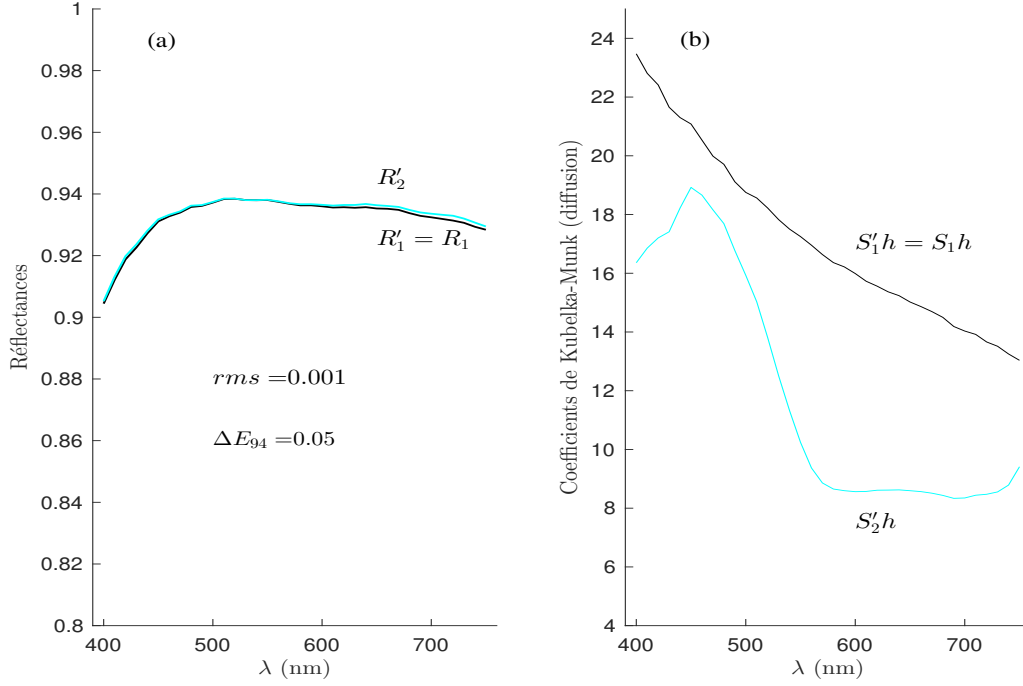


FIGURE 6.7 – (a) Réflectance intrinsèque d'une feuille de papier APCO vierge ($R_1 = R'_1$) et réflectance intrinsèque du côté non-encre d'une feuille de papier APCO imprimée en ton plein avec de l'encre cyan (R'_2). (b) Coefficient de Kubelka-Munk associés à la diffusion pour une feuille de papier APCO vierge (calculé à l'aide de la formule (6.45) avec $R' = R = R_1$ et $T' = T = T_1$) et coefficient associé à la diffusion pour une feuille de papier APCO imprimée sur un seul côté en ton plein dans la primaire cyan lorsque la lumière se propage en entrant du côté non encré (calculé à l'aide de la formule (6.45) avec $R = R_2$ et $R' = R'_2$).

On notera toutefois que, comme dans le cas symétrique, les coefficients $K + S$ et $K' + S'$, sont positifs et très proches (voir Fig. 6.8) : on peut les interpréter comme des coefficients d'atténuation de la lumière due aux effets combinés de l'absorption et de la rétro-diffusion du milieu, encore appelés *coefficients d'extinction*. Cela revient à ré-écrire les équations (6.31) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{di}{dz} = -Ei + S'j \\ \frac{dj}{dz} = -Si + E'j \end{cases} \quad (6.48)$$

où le coefficient d'extinction E (resp. E') est la somme des coefficients K et S (resp. K' et S') selon le modèle à deux flux ou alors une combinaison plus complexe des deux coefficients dans laquelle K (resp. K') n'est pas négatif. Les expressions des facteurs de transfert s'écrivent :

$$R = \frac{\sqrt{S/S'} \sinh(b\sqrt{SS'h})}{a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h})}, \quad (6.49)$$

$$T = \frac{be^{-(E-a\sqrt{SS'})h}}{a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h})}, \quad (6.50)$$

$$R' = R \frac{S'}{S}, \quad (6.51)$$

$$T' = T e^{-2(E'-a\sqrt{SS'})h} \quad (6.52)$$

avec

$$a = \frac{E + E'}{2\sqrt{SS'}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{a^2 - 1} \quad (6.53)$$

On note que les expressions de R et R' n'ont pas changé, seuls T et T' dépendent de E et E' .

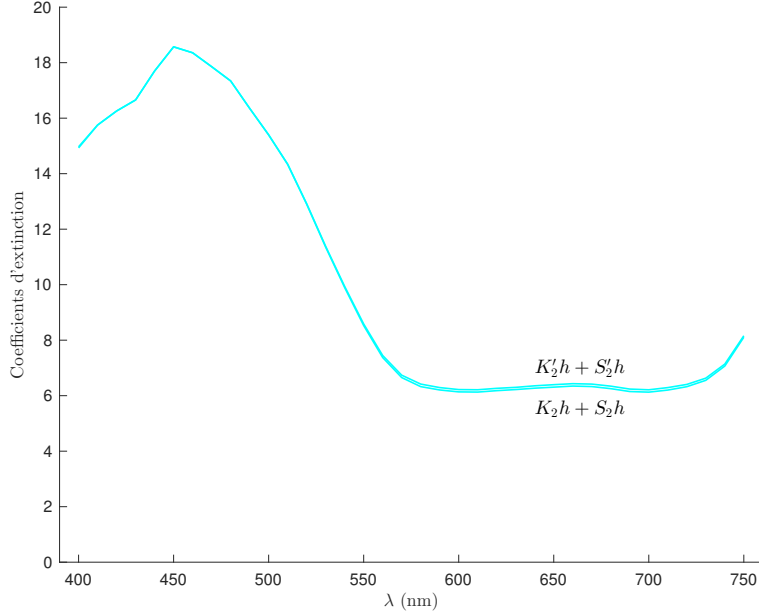


FIGURE 6.8 – Coefficients d'extinction de la lumière lorsqu'elle se propage dans une feuille de papier APCO imprimée sur un seul côté en ton plein avec de l'encre cyan.

Lorsqu'on inverse les formules (6.49) à (6.52), les expressions des coefficients de diffusion et d'extinction s'écrivent :

$$Sh = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{R}{R'}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a - b)}{\sqrt{TT'}} \right) \quad (6.54)$$

$$Eh = \frac{a}{b} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a - b)}{\sqrt{TT'}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T}{T'} \right) \quad (6.55)$$

$$S'h = \frac{R'}{R} Sh \quad (6.56)$$

$$E'h = Eh - \ln \left(\frac{T'}{T} \right) \quad (6.57)$$

On note que les expressions de S et S' n'ont pas changé.

De nombreux auteurs ont discuté des relations entre les coefficients K et S introduits de façon phénoménologique dans le modèle de Kubelka-Munk avec les coefficients d'absorption et de diffusion σ_a et σ_s définis dans la théorie du transfert radiatif à partir des propriétés physiques du milieu. En toute rigueur, si le flux reste lambertien à l'intérieur du milieu alors $K = 2\sigma_a$ et $S = \sigma_s$: le facteur 2 de la première formule s'explique par le fait que le chemin optique d'un faisceau lumineux dans une couche est en moyenne deux fois plus grand que l'épaisseur de la couche [41]. Dans la deuxième formule, ce facteur 2 est compensé par 1/2 car S est défini comme un phénomène de rétrodiffusion sur la demi-sphère contrairement à σ_s qui représente la diffusion du milieu dans tout l'espace. Mudgett et Richards

[49] ont comparé les résultats de la théorie de Kubelka-Munk avec ceux obtenus à l'aide d'un modèle multi-flux dans le cas d'un milieu très diffusant et faiblement absorbant : plus précisément, ils calculent les valeurs de la réflectance d'une couche semi-infinie et celle de la réflectance d'une couche sans fond réfléchissant à l'aide d'un modèle multi-flux, puis à partir des formules (3.17) et (3.10) obtenus à l'aide du modèle de Kubelka-Munk, en déduisent que $K = 2\sigma_a$ et $S = 3\sigma_s/4$ avec une bonne approximation. Le rapport K/S est proportionnel au rapport σ_a/σ_s . La théorie de Kubelka-Munk n'étant en toute rigueur valide que si K/S est constant sur l'épaisseur de la couche, on en déduit que le coefficient d'absorption σ_a et le coefficient de diffusion σ_s doivent également être proportionnels. Cela signifie que si l'absorption augmente sur l'épaisseur alors la diffusion doit également augmenter dans les mêmes proportions, et ceci quel que soit le sens de propagation du flux (de bas en haut ou de haut en bas).

Ce comportement n'est certainement pas celui d'une feuille de papier imprimée : les encres étant plutôt transparentes et faiblement diffusantes, le flux lumineux (lambertien) entrant par le côté encré est d'abord très fortement absorbé par l'encre (donc l'hypothèse d'un milieu faiblement absorbant du modèle de Mudgett et Richards n'est pas vérifiée) alors que la diffusion est presque identique à celle du papier sans encre. Ce déséquilibre entre absorption et diffusion confère à l'encre une tendance à « collimater » un flux diffus, ce qui a pour conséquence la perte de l'isotropie du flux lumineux à l'intérieur de la couche, en contradiction avec les hypothèses de la théorie de Kubelka-Munk. Toutefois, on peut raisonnablement penser que le flux, en se propageant et en diffusant le long de l'épaisseur du papier, redevient lambertien à la sortie de la couche [voir Fig. 6.9 (a)]. Lorsque le flux entre par le côté non encré, il reste lambertien à l'intérieur de la feuille jusqu'au niveau de la surface opposée où l'encre absorbe fortement le flux qui par conséquent perd son caractère lambertien en sortant de la couche [Fig. 6.9 (b)].

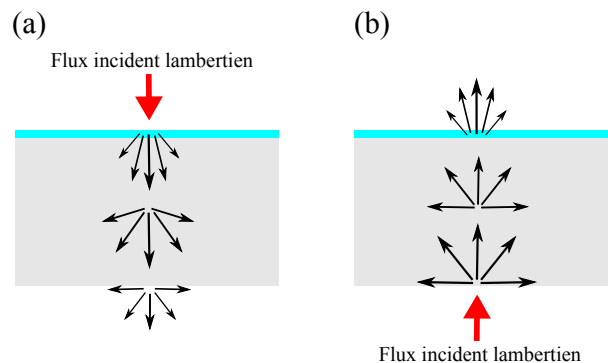


FIGURE 6.9 – Mise en évidence de la différence de propagation de la lumière dans un imprimé selon qu'elle entre par le côté encré (a) ou le côté non-encré (b).

Les configurations pour lesquelles le flux entre par le côté encré ou par le côté non-encré ne sont donc pas strictement symétriques, surtout en terme de diffusion, même si globalement les effets combinés de l'absorption et de la diffusion sur le flux sont sensiblement les mêmes dans les deux sens de propagation [les transmittances vers le bas et vers le haut sont très proches, voir Fig. 6.5 (b)]. Toutefois, dans le cadre d'un modèle à deux flux, les effets dus à l'absorption et de la diffusion ne sont pas additifs, au risque de mesurer des coefficients effectifs K négatifs [voir Fig. 6.6 (b)] : l'extinction du flux dans un sens de propagation donné due à l'absorption et à la diffusion du milieu ne s'écrit pas comme une simple somme des coefficients de Kubelka-Munk K et S .

Ces deux dernières remarques permettent de justifier la présence d'un coefficient S dans les équations de Kubelka-Munk différent selon que la lumière se propage dans un sens ou dans l'autre à l'intérieur du milieu [voir Fig. 6.6 (a)], mais aussi de justifier l'abandon du coefficient K (pour représenter l'absorption seule) et l'introduction d'un coefficient d'extinction E qui représentent l'atténuation du flux due aux effets combinés de l'absorption et de la diffusion du milieu, sensiblement identique dans les deux sens de propagation (voir Fig. 6.8) mais différents en toute rigueur, tout ceci dans le cadre d'un modèle à deux flux (le modèle de Kubelka-Munk généralisé) pour lequel les flux sont tout de même supposés lambertiens.

Résumé

Le modèle à deux flux généralisé décrit les transferts de flux de part et d'autre d'une couche diffusante non-symétrique construite par un empilement de n sous-couches diffusantes identiques et non-symétriques. Les formules des facteurs de transfert de l'empilement prédites par ce modèle ne dépendent alors que des facteurs de transfert d'une seule des composantes diffusantes qui constitue l'empilement. En faisant tendre simultanément le nombre de sous-couches vers l'infini et l'épaisseur de chaque sous-couche vers zéro, on obtient une version étendue du modèle de Kubelka-Munk appliqué à des milieux diffusants pour lesquels les coefficients K et S sont différents selon que la lumière se propage dans un sens ou dans l'autre. Toutefois, si on conserve le caractère additif de l'absorption et de la diffusion dans les équations, on aboutit potentiellement à des coefficients K pouvant prendre des valeurs négatives qu'aucune interprétation physique ne justifie. Pour éviter un tel écueil, on propose un modèle à deux flux qui conserve le coefficient de Kubelka-Munk S associé à la diffusion du milieu, mais qui ne fait plus apparaître explicitement le coefficient de Kubelka-Munk K associé à l'absorption du milieu ; ce dernier est fondu avec S dans un nouveau coefficient E , appelé coefficient d'extinction, dont l'expression analytique en fonction de K et S nous est inconnue. Ce modèle permet d'établir les expressions des facteurs de transfert R , R' , T et T' d'une couche non-symétrique si on connaît les coefficients de Kubelka-Munk généralisés E , E' , S et S' , et inversement, les expressions des coefficients de Kubelka-Munk généralisés en fonction des facteurs de transfert. Nous verrons au chapitre 8 comment ce modèle peut être utilisé pour prédire des couleurs en demi-ton.

Troisième partie

Modèles matriciels pour imprimés en
demi-ton

Chapitre 7

Modèles à couche simple

Dans les deux chapitres précédents, nous avons présenté le concept de matrice de transfert de flux et proposé des méthodes de calcul pour décrire les transferts de flux dans des couches diffusantes, qui ont permis d'établir un modèle générique de transfert à deux flux. Nous proposons dans ce chapitre d'utiliser cette approche pour la prédiction des couleurs en demi-ton imprimées des deux côtés d'une feuille de papier. Pour commencer, nous décrivons les transferts de flux à travers les points d'encre et le support tels que les décrivait Clapper et Yule mais en utilisant cette fois-ci les matrices de transfert : on obtient le modèle DCY (« Duplex Clapper-Yule ») qui est à la fois une extension du modèle classique de Clapper-Yule aux imprimés recto-verso mais aussi une reformulation du modèle en termes matriciels (section 7.1). Après avoir mis en évidence un désaccord entre la théorie et la pratique dans le modèle DCY, nous envisageons une façon différente de modéliser la structure de l'imprimé (section 7.2) qui est à la base de tous les modèles prédictifs présentés dans ce travail. Le premier d'entre-eux, appelé modèle DPRT (« Duplex Primary Reflectance-Transmittance »), prédit les couleurs imprimées en demi-ton et en recto-verso à partir des 64 couples de primaires constitués d'une primaire sur le recto et d'une primaire sur le verso (section 7.3).

7.1 Modèle DCY

Dans leur étude sur les imprimés en demi-ton, Clapper et Yule [3] font l'hypothèse que les encres ne sont pas diffusantes et qu'elles sont distinctes du support. Cette même hypothèse est suivie par Williams et Clapper [4] dans leur travail sur les tirages photographiques argentiques. C'est également en faisant cette hypothèse que le premier modèle de prédiction de la réflectance et la transmittance d'un imprimé en demi-ton et en mode recto-verso fut proposé dans la littérature [9, 10]. Nous allons voir dans cette section comment il est possible de reformuler ce modèle en utilisant les matrices de transfert.

Considérons dans un premier temps une couche uniforme d'une primaire donnée k à laquelle on attribue une transmittance spectrale noté t_k et une réflectance nulle. On suppose que la couche de cette primaire a le même indice de réfraction que le papier : l'interface encre-papier n'a par conséquent aucun effet optique, elle est donc ignorée. La couche d'encre et les interfaces air-encre sont considérées comme étant une seule composante, la composante {interface air-encre + encre}, représentée par un matrice de transfert \mathbf{F}_k . Cette dernière est obtenue en multipliant la matrice de transfert \mathbf{F} représentant l'interface [voir formule (5.20)] et la matrice de transfert représentant la couche d'encre :

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F} \cdot \frac{1}{t_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_k^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{in}t_k} \begin{pmatrix} 1 & -r_d t_k^2 \\ r_s & (T_{in}T_{out} - r_s r_d) t_k^2 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

La matrice de transfert représentant l'imprimé, c'est-à-dire le papier entouré de la composante {interface air-encre + encre} sur le côté recto et de l'interface papier-air sur le côté verso, est donnée par :

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{F} \cdot \frac{1}{t_k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_k^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}' \quad (7.2)$$

où \mathbf{M} est la matrice de transfert intrinsèque du support diffusant [voir formule (5.28)] et \mathbf{F}' est la matrice de transfert associée à l'interface papier-air du côté verso de l'imprimé [voir formule (5.21)].

L'extension de la formule (7.2) aux imprimés en demi-ton composés des primaires de transmittance t_k et de taux de couverture a_k avec $k = 1, 2, \dots, 8$ se fait de la façon suivante. Au niveau du côté (recto), le flux incident I_0 se sépare en 8 flux $I_{0,k}$ se propageant à travers les 8 zones associées aux primaires de Neugebauer. De la même façon, le flux incident J_1 au niveau du côté inférieur (verso) se sépare en 8 flux $J_{1,k}$. La figure 7.1 illustre les transferts de flux à l'intérieur d'un imprimé pour lequel les couleurs en demi-ton sur le côté recto et le côté verso sont composés de deux primaires. Dans le cas général, on peut écrire un système de deux équations similaire au système représenté par les équations (5.1) et (5.2) et introduit à la section 5.1 pour décrire les transferts de flux d'une couche diffusante :

$$J_0 = r_s I_0 + T_{out} \alpha J_1 \quad (7.3)$$

$$I_1 = T_{in} \alpha I_0 + r_d \beta J_1 \quad (7.4)$$

avec

$$\alpha = \sum_{k=1}^8 a_k t_k$$

et

$$\beta = \sum_{k=1}^8 a_k t_k^2.$$

La matrice de transfert représentant la composante {interface + couche en demi-ton} sur le côté recto de l'imprimé s'écrit :

$$\mathbf{F}_H = \frac{1}{T_{in} \alpha} \begin{pmatrix} 1 & -r_d \beta \\ r_s & T_{in} T_{out} \alpha^2 - r_s r_d \beta \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Pour la couleur en demi-ton imprimée sur le côté verso (avec les taux de couverture a'_k), la matrice de transfert représentant la composante {couche en demi-ton + interface} s'écrit :

$$\mathbf{F}'_H = \frac{1}{T_{out} \alpha'} \begin{pmatrix} 1 & -r_s \\ r_d \beta' & T_{in} T_{out} \alpha'^2 - r_s r_d \beta' \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

avec

$$\alpha' = \sum_{k=1}^8 a'_k t_k$$

et

$$\beta' = \sum_{k=1}^8 a'_k t_k^2.$$

Finalement, la matrice de transfert \mathbf{P}_H associée à l'imprimé en demi-ton et en mode recto-verso est le produit des matrices de transfert \mathbf{F}_H , \mathbf{M} et \mathbf{F}'_H données par les formules (7.5), (5.28) et (7.6) respectivement¹ :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{F}_H \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}'_H \quad (7.7)$$

Les réflectances R_H et R'_H et les transmittances T_H et T'_H de l'imprimé, c'est-à-dire les facteurs de transfert associés à la matrice \mathbf{P}_H , sont obtenus à l'aide des formules (5.8) à (5.11) appliquées à la matrice obtenue en développant la partie droite de la formule (7.7) :

$$R_H = r_s + \frac{1}{\Delta} \alpha^2 T_{in} T_{out} [\rho - r_d \beta' (\rho \rho' - \tau \tau')] \quad (7.8)$$

$$T_H = \frac{1}{\Delta} \alpha \alpha' T_{in} T_{out} \tau \quad (7.9)$$

$$R'_H = r_s + \frac{1}{\Delta} \alpha'^2 T_{in} T_{out} [\rho' - r_d \beta (\rho \rho' - \tau \tau')] \quad (7.10)$$

$$T'_H = \frac{1}{\Delta} \alpha \alpha' T_{in} T_{out} \tau' \quad (7.11)$$

avec $\Delta = (1 - \rho \beta r_d)(1 - \rho' \beta' r_d) - \beta \beta' r_d^2 \tau \tau'$.

Le modèle de Clapper-Yule d'origine [3, 67] est un cas particulier de ce modèle puisqu'il ne considère que la réflectance d'une couleur en demi-ton imprimée en mode recto simple et composée de deux primaires seulement, dont l'une a une transmittance t et un taux de couverture a , et l'autre est le blanc (absence d'encre, transmittance 1 et taux de couverture $1 - a$). Le substrat est considéré comme un fond réfléchissant de réflectance ρ_g qui correspond à la composante {papier + interface inférieure} :

$$\rho_g = \rho + \frac{\tau \tau' r_d}{1 - \rho' r_d}$$

La formule de la réflectance de Clapper-Yule peut être déduite de l'expression de R_H donnée par la formule (7.8) avec $\alpha = 1 - a + at$, $\beta = 1 - a + at^2$ et $\alpha' = \beta' = 1$:

$$R_{CY} = r_s + \frac{T_{in} T_{out} \rho_g (1 - a + at)^2}{1 - r_d \rho_g (1 - a + at^2)} \quad (7.12)$$

La formulation complète du modèle de Clapper-Yule à l'aide des matrices de transfert est appelé « Duplex Clapper-Yule model » [69] ou encore *modèle DCY*. Le calibrage de ce modèle nécessite de mesurer les facteurs de transfert intrinsèques du support, les transmittances spectrales des huit primaires de Neugebauer ainsi que leur taux de couverture effectif (voir section 4.4). La matrice de transfert intrinsèque \mathbf{M} représentant le papier sans les interfaces est obtenue en mesurant les facteurs de transfert de la feuille de papier vierge et en utilisant l'équation (5.28). La transmittance de chaque primaire est obtenue de la façon suivante : une couche d'encre de primaire k est imprimée sur une face du papier, ses facteurs de transfert $R_k(\lambda)$, $R'_k(\lambda)$, $T_k(\lambda)$ et $T'_k(\lambda)$ sont mesurés à l'aide d'un spectrophotomètre, et une matrice de transfert est générée pour chaque longueur d'onde :

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{T_k} \begin{pmatrix} 1 & -R'_k \\ R_k & T_k T'_k - R_k R'_k \end{pmatrix}$$

Ainsi, en accord avec la décomposition matricielle de \mathbf{P}_k donnée par la formule (7.2), on a, en théorie :

$$\begin{pmatrix} 1/t_k & 0 \\ 0 & t_k \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{F}'^{-1} \cdot \mathbf{M}^{-1} \quad (7.13)$$

1. On montre dans l'annexe G que les matrices de transfert \mathbf{F}_H et \mathbf{F}'_H peuvent être décomposées en un produit de matrices rectangulaires de sorte que les taux de couverture soient séparées des facteurs de transfert intrinsèques du support et des transmittances des primaires.

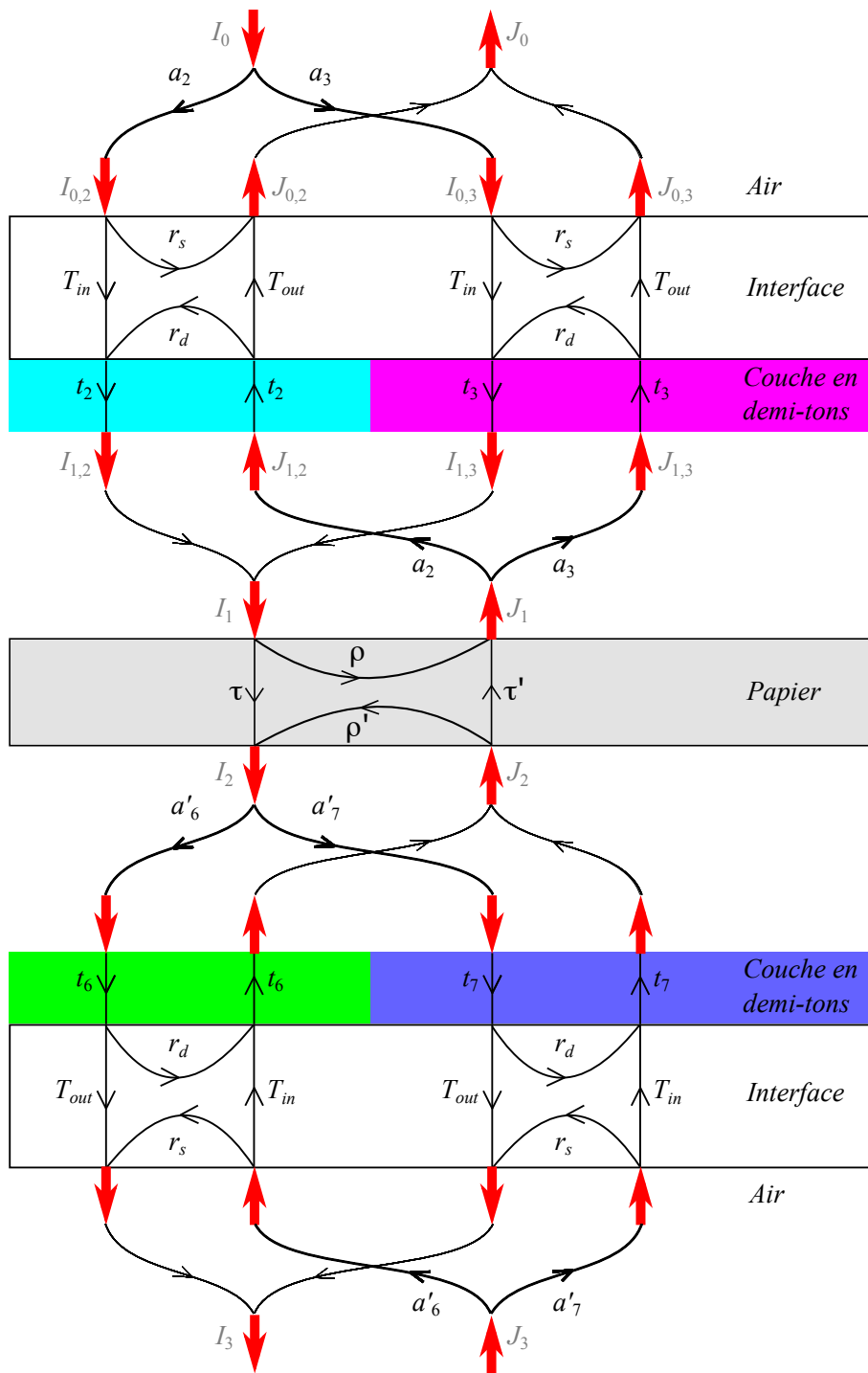


FIGURE 7.1 – Transferts de flux entre la composante {interface + couche supérieure en demi-ton}, le papier et la composante {couche inférieure en demi-ton + interface} dans un imprimé en demi-ton en mode recto-verso où les couleurs en demi-tons sont composées de deux primaires.

Ainsi la transmittance t_k de la primaire k peut être déduite de la matrice diagonale précédente. Cependant, on observe dans la pratique que les matrices obtenues à partir de l'expression se trouvant à droite de la formule (7.13) ne sont pas diagonales : cela signifie que l'hypothèse des encres non-diffusantes n'est probablement pas strictement satisfaite. Une solution serait alors de représenter la couche d'encre dans la primaire k par une matrice de transfert non-diagonale définie non seulement en termes de transmittance intrinsèque t_k mais aussi en terme de réflectance intrinsèque r_k en considérant que la couche est symétrique. Ainsi, à la place de la formule (7.2) nous aurions :

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{F} \cdot \frac{1}{t_k} \begin{pmatrix} 1 & -r_k \\ r_k & t_k^2 - r_k^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}' \quad (7.14)$$

Cependant, les expériences faites aussi bien avec des impressions jet d'encre qu'avec des impressions laser sur du papier de bureau ordinaire ou encore sur du papier APCO montrent que cette méthode est numériquement instable : les valeurs des transmittances t_k et des réflectances r_k obtenues à partir de la formule (7.14) sont aberrantes : elles dépassent souvent 1 et sont parfois même négatives (ces résultats ont déjà été évoqués dans la section 5.3). Par conséquent, on préfère garder l'approche classique dans laquelle la couche d'encre n'est pas diffusante.

7.2 Modèles de structure d'imprimé et conséquences sur la modélisation

Il existe un désaccord entre la théorie et la pratique dans le modèle de Clapper-Yule (déjà évoquée dans [10]) : les transmittances intrinsèques t_k des primaires ne sont pas les mêmes selon qu'elles sont déduites des mesures des réflectances R_k ou des mesures des transmittances T_k . En effet, les expressions théoriques de R_k et T_k s'obtiennent à partir des formules (7.8) et (7.9) respectivement, dans le cas particulier où $\alpha = t_k$, $\beta = t_k^2$ et $\alpha' = \beta' = 1$, c'est-à-dire :

$$R_k = r_s + \frac{t_k^2 T_{in} T_{out} [\rho - r_d (\rho \rho' - \tau \tau')]}{(1 - \rho t_k^2 r_d) (1 - \rho' r_d) - t_k^2 r_d^2 \tau \tau'} \quad (7.15)$$

$$T'_k = \frac{t_k T_{in} T_{out} \tau'}{(1 - \rho t_k^2 r_d) (1 - \rho' r_d) - t_k^2 r_d^2 \tau \tau'} \quad (7.16)$$

Ainsi, lorsqu'on inverse les deux formules précédentes afin d'obtenir la transmittance intrinsèque t_k , on obtient des expressions différentes. L'expression obtenue à partir de la formule (7.15) est

$$t_{k,R} = \sqrt{\frac{(R_k - r_s) (1 - \rho' r_d)}{U [T_{in} T_{out} + (R_k - r_s) r_d]}} \quad (7.17)$$

et celle obtenue à partir de la formule (7.16) est :

$$t_{k,T} = \frac{\sqrt{(T_{in} T_{out} \tau')^2 + 4 T_k'^2 (1 - \rho' r_d) r_d U - T_{in} T_{out} \tau'}}{2 T_k' r_d U} \quad (7.18)$$

avec $U = \rho - r_d (\rho \rho' - \tau \tau')$.

En pratique, les transmittances spectrales des primaires obtenues à partir des formules (7.17) et (7.18) présentent des différences significatives comme le montre la figure 7.2 pour les sept primaires imprimées avec l'imprimante jet d'encre Canon PixmaPro 9500 sur une feuille de papier APCO. Les différences les plus importantes concernent les primaires contenant l'encre jaune (c'est-à-dire jaune, rouge, vert et noir), connue pour être plus diffusante que les autres encres, et parfois légèrement fluorescente.

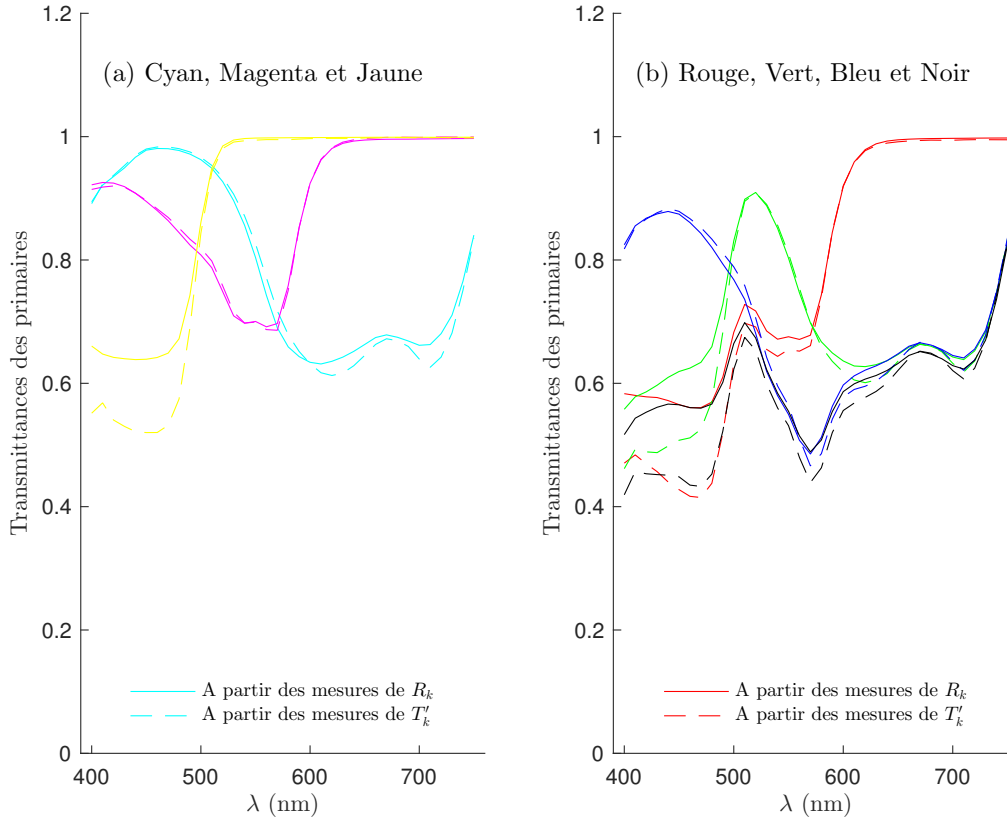


FIGURE 7.2 – *Transmittances spectrales des primaires (a) cyan, magenta et jaune, et (b) rouge, vert, bleu et noir obtenues à partir des réflectances R_k (traits plein) ou à partir des transmittances T'_k (pointillés).*

Le modèle de structure d'imprimé utilisé dans la théorie de Clapper-Yule considère qu'une couche purement absorbante (les encres) est au-dessus d'une couche très diffusante (le papier), mais on sait qu'en pratique les encres se mélangent au papier, et que l'objet qui en résulte possède une structure en trois dimensions très irrégulière. Dans sa version originale, le modèle de Clapper-Yule ne s'intéresse qu'à la réflectance spectrale, par conséquent la transmittance intrinsèque t_k des primaires, donnée par la formule (7.17), est la solution de l'équation (7.15). Mais suite au développement d'une version du modèle étendue à la transmittance spectrale de l'imprimé [9, 10], on montre que t_k est également la solution de l'équation (7.16) donnée par la formule (7.18). On a donc deux équations pour une inconnue, c'est-à-dire deux façons de déterminer la transmittance t_k à partir de mesures. Si le modèle donnait une bonne description de la réalité, on devrait avoir $t_{k,R} = t_{k,T}$, or la figure 7.2 nous prouve le contraire.

Même si le modèle DCY n'est pas adapté à la réalité, on peut éventuellement s'en accommoder surtout s'il donne des prédictions de qualité satisfaisante : dans ce cas, on utilisera la formule (7.17) dans les formules (7.8) et (7.10) pour prédire les réflectances spectrales de l'imprimé, et la formule (7.18) dans les formules (7.9) et (7.11) pour prédire les réflectances spectrales. Toutefois, on notera qu'une inversion du modèle ne donnerait pas, en toute rigueur, une solution unique en ce qui concerne les combinaisons des taux de couverture des trois primaires cyan, magenta, jaune associés à une couleur cible.

L'objectif de ce travail est de proposer des modèles à deux flux basés sur les matrices de transfert. Ces dernières constituent une solution originale qui permet une description facile et simple des transferts

de flux dans l'imprimé. C'est aussi cette simplicité qui motive en partie cette piste de modélisation, notamment pour envisager des extensions des modèles à des milieux faiblement diffusants pour lesquels deux flux ne suffisent plus pour décrire la propagation de la lumière. Il est donc important de construire ces modèles sur de bonnes bases ne contenant aucune incohérence comme celle évoquée ci-dessus au sujet des transmittances des encres, elle-même résultant du choix de la structure de l'imprimé dans le modèle de Clapper-Yule. Nous pourrions alors nous diriger vers des modèles optiques plus raffinés pour prendre en compte les irrégularités de la structure de l'imprimé, mais une telle piste nous mènerait inévitablement vers des problématiques liées de près ou de loin à la résolution de l'équation de transfert radiatif. C'est un choix que nous ne souhaitons pas faire ici car il serait en contradiction avec les objectifs que nous nous sommes fixés, à savoir de proposer des modèles d'utilisation simple, avec si possible des solutions analytiques, facilement inversibles et offrant des performances calculatoires comparables à celles des modèles classiques. Pour garder ces objectifs, une alternative est de proposer une structure d'imprimé simplifiée qui intègre toutes les irrégularités dans une macro-structure globale dans laquelle la distinction entre la couche d'encre et le support n'existe plus. Aucune propriété optique n'est désormais explicitement attribuée aux encres, ainsi le problème des transmittances intrinsèques de ces dernières ne se pose plus. Les modèles prédictifs que nous proposons dans ce travail sont construits sur cette structure simplifiée de l'imprimé ; le premier d'entre-eux, appelé modèle DPRT, est présenté à la section suivante.

7.3 Modèle DPRT (« Duplex Primary Reflectance-Transmittance »)

Contrairement au modèle de Clapper-Yule qui décrit explicitement les propriétés optiques des encres (transmittance intrinsèque et absence de diffusion), on propose dans ce modèle de ne pas séparer les encres du support. Un imprimé en mode recto-verso est alors représenté par une superposition de trois composantes : l'interface supérieure air-imprimé (côté recto), un milieu diffusant effectif constitué du papier et des encres, et l'interface inférieure imprimé-air (côté verso). Nous allons voir comment modéliser un tel système dans le cas d'une feuille de papier non-imprimée, puis dans le cas d'un imprimé recto-verso avec des primaires en ton plein, et enfin dans le cas d'un imprimé recto-verso avec des couleurs en demi-ton.

Transferts de flux

Nous avons vu à la section 5.2 que les interfaces peuvent être représentées par des matrices de transfert notées \mathbf{F} pour l'interface supérieure et \mathbf{F}' pour l'interface inférieure [voir formules (5.20) et (5.21)]. Le support non-imprimé avec et sans les interfaces est représenté par les matrices notées \mathbf{P} et \mathbf{M} respectivement [voir formules (5.23) et (5.28)]. On rappelle la formule qui relie ces quatre matrices de transfert entre-elles et donne l'expression de \mathbf{P} en fonction de \mathbf{F} , \mathbf{F}' et \mathbf{M} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}'$$

On suppose maintenant que le support est imprimé en ton plein dans une primaire i sur le côté recto et dans une primaire j sur le côté verso. On note R_{ij} , R'_{ij} , T_{ij} et T'_{ij} les facteurs de transfert de l'imprimé avec les interfaces. On note ρ_{ij} , ρ'_{ij} , τ_{ij} et τ'_{ij} les facteurs de transfert intrinsèques (« sans les interfaces ») de la primaire (i, j) . On note \mathbf{P}_{ij} et \mathbf{M}_{ij} les matrices de transfert associées à la primaire (i, j) avec et sans les interfaces respectivement, on a alors :

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{1}{T_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -R'_{ij} \\ R_{ij} & T_{ij}T'_{ij} - R_{ij}R'_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{\tau_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_{ij} \\ \rho_{ij} & \tau_{ij}\tau'_{ij} - \rho_{ij}\rho'_{ij} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{ij} \cdot \mathbf{F}' \tag{7.19}$$

En inversant la formule (7.19), on obtient :

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{F}'^{-1} \quad (7.20)$$

Les facteurs de transfert intrinsèques ρ_{ij} , ρ'_{ij} , τ_{ij} et τ'_{ij} sont obtenus à l'aide des formules (5.8) à (5.11) appliquées à la matrice \mathbf{M}_{ij} , ou alors, si on souhaite travailler avec des expressions littérales, on applique les formules de correction de Saunderson inverse (5.29) à (5.32) (voir section 3.6) et on obtient :

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\Delta} \{ (R_{ij} - r_s) [T_{in}T_{out} + r_d (R'_{ij} - r_s)] - r_d T_{ij} T'_{ij} \} \quad (7.21)$$

$$\tau = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} T_{ij} \quad (7.22)$$

$$\rho'_{ij} = \frac{1}{\Delta} \{ (R'_{ij} - r_s) [T_{in}T_{out} + r_d (R_{ij} - r_s)] - r_d T_{ij} T'_{ij} \} \quad (7.23)$$

$$\tau' = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} T'_{ij} \quad (7.24)$$

avec $\Delta = [T_{in}T_{out} - r_d (R_{ij} - r_s)] [T_{in}T_{out} - r_d (R'_{ij} - r_s)] - r_d^2 T_{ij} T'_{ij}$.

Le modèle DPRT propose d'étendre la formule (7.19) aux surfaces non-homogènes comme le sont les surfaces imprimées avec des couleurs en demi-ton. L'aire d'une feuille de papier imprimée en recto simple avec une couleur en demi-ton est subdivisée en huit zones correspondant au huit primaires de Neugebauer auxquelles on attribue les taux de couverture respectifs a_i avec $i = 1, \dots, 8$. Dans le cas d'une impression recto-verso, on considère que la surface du papier est subdivisée en $8 \times 8 = 64$ zones correspondant aux combinaisons des huit primaires de la couleur en demi-ton imprimée sur le côté recto et des huit primaires de la couleur en demi-ton imprimée sur le côté verso. On attribue à ces 64 couples de primaires (« duplex primaires »), les taux de couverture $a_i a'_j$ avec $i = 1, \dots, 8$ et $j = 1, \dots, 8$. Chaque couple de primaires est considéré comme une entité à part entière. La figure 7.3 montre un exemple d'un imprimé recto-verso avec des couleurs en demi-ton constituées de deux primaires, c'est-à-dire quatre couples de primaires.

Dans un imprimé en demi-ton recto-verso, le papier encré sans les interfaces est modélisé comme une juxtaposition des 64 couples de primaires. Le flux se propage dans chaque couple de primaires (i, j) , de facteurs de transfert ρ_{ij} , ρ'_{ij} , τ_{ij} et τ'_{ij} , ceci indépendamment des autres couples de primaires et proportionnellement aux taux de couverture $a_i a'_j$, comme dans le modèle de Neugebauer. La matrice de transfert globale de l'imprimé sans les interfaces s'écrit ² :

$$\mathbf{M}_H = \frac{1}{\tau_H} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_H \\ \rho_H & \tau_H \tau'_H - \rho_H \rho'_H \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

avec, en utilisant le terme ω_{ij} de façon générique à la place de ρ_{ij} , ρ'_{ij} , τ_{ij} et τ'_{ij} :

$$\omega_H = \sum_{i,j} a_i a'_j \omega_{ij} \quad (7.26)$$

Finalement, la matrice de transfert de l'imprimé en demi-ton recto-verso avec les interfaces est donnée par

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{F}' \quad (7.27)$$

2. Comme pour le modèle de Clapper-Yule, on montre dans l'annexe G que la matrice \mathbf{M}_H peut être décomposée en un produit de matrices rectangulaires de sorte que les taux de couverture soient séparées des facteurs de transfert intrinsèques des couples de primaires.

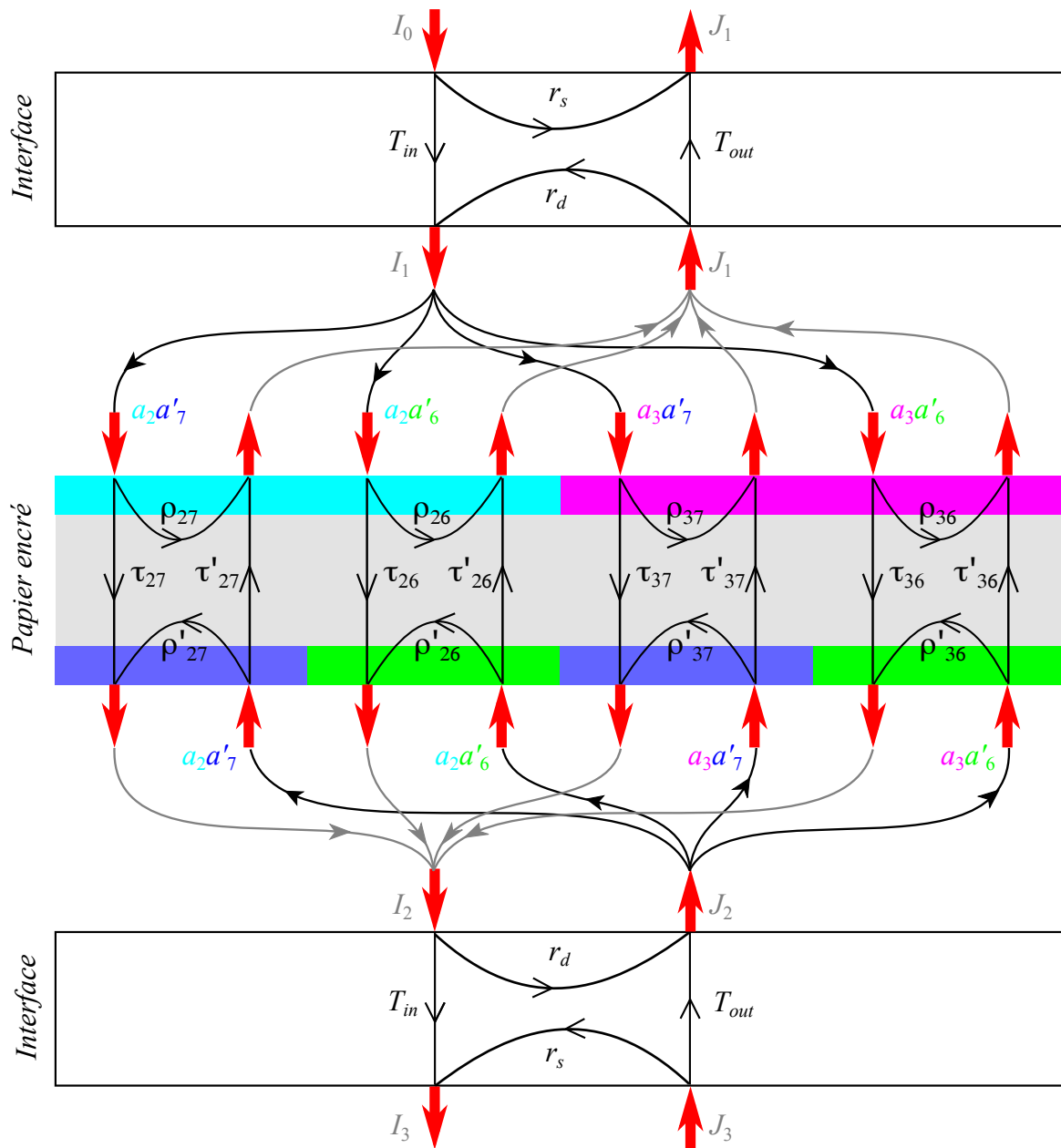


FIGURE 7.3 – Transferts de flux entre l'interface supérieure, le papier encré contenant quatre couples de primaires (combinaisons de deux primaires sur chaque côté) et l'interface inférieure.

et ses facteurs de transfert R_H , R'_H , T_H et T'_H sont obtenus en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice \mathbf{P}_H ou, si l'on veut des expressions littérales, en appliquant les formules de correction de Saunderson (5.24) à (5.27) :

$$R_H = r_s + \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} [\rho_H - r_d (\rho_H \rho'_H - \tau_H \tau'_H)], \quad (7.28)$$

$$T_H = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} \tau_H \quad (7.29)$$

$$R'_H = r_s + \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} [\rho'_H - r_d (\rho_H \rho'_H - \tau_H \tau'_H)], \quad (7.30)$$

$$T'_H = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} \tau'_H \quad (7.31)$$

avec $\Delta = (1 - r_d \rho_H) (1 - r_d \rho'_H) - r_d^2 \tau_H \tau'_H$.

Ces formules ne sont pas équivalentes à celles obtenues par le modèle DCY. En effet, il existe des différences aussi bien dans l'aspect conceptuel que dans l'aspect pratique entre le modèle DPRT et le modèle DCY, notamment en ce qui concerne les propriétés optiques des encres et la façon de modéliser l'engraissement optique. Comme le modèle DCY, le modèle DPRT permet également de prédire des couleurs en demi-ton imprimés en recto-simple en considérant que les taux de couvertures a'_j sur le côté verso sont nuls pour $j = 2, \dots, 8$ et $a'_1 = 1$.

Dans la pratique, le calibrage du modèle DPRT se fait en deux étapes : la première est la détermination des facteurs de transfert des 64 couples de primaires et la seconde est l'estimation de l'engraissement mécanique. Pour obtenir les facteurs de transfert intrinsèques des couples de primaires, il faut imprimer les 64 couples de primaires (i, j) avec $i = 1, \dots, 8$ et $j = 1, \dots, 8$, puis mesurer à l'aide d'un spectrophotomètre les réflectances avant, R_{ij} , et les réflectances arrière, R'_{ij} , puis les transmittances vers le bas, T_{ij} , et les transmittances vers le haut, T'_{ij} . Cela représente 256 mesures à partir desquelles sont créées 64 matrices de transfert \mathbf{P}_{ij} et ceci pour chaque longueur d'onde. La matrice de transfert intrinsèque de chaque couple de primaires est donnée par la formule (7.20). Enfin, en utilisant les formules (5.8) à (5.11), on en déduit les facteurs de transfert intrinsèques ρ_{ij} , ρ'_{ij} , τ_{ij} et τ'_{ij} de chaque couple de primaires. Dans le cas d'un support symétrique (c'est-à-dire $\rho = \rho'$ et $\tau = \tau'$) on a $\rho_{ij} = \rho'_{ji}$ et $\tau_{ij} = \tau'_{ji}$, ce qui réduit le nombre de mesures à 128.

Engraissement mécanique

Faire une estimation de l'engraissement mécanique des encres consiste à établir la correspondance entre les taux de couverture nominaux et les taux de couverture effectifs des primaires d'une couleur en demi-ton à l'aide de courbes de correction (aussi appelées courbes d'engraissement). Les taux de couverture effectifs sont les paramètres d'entrée des modèles prédictifs. On rappelle que ces taux de couvertures effectifs sont au nombre de 36, répartis sur les 12 courbes de correction (voir Fig. 4.8 et 4.9 à la section 4.4). Pour chacune des 3 encres primaires cyan, magenta et jaune, il y a 4 courbes contenant chacune 3 points dont les abscisses sont les taux de couverture nominaux de valeurs 0.25, 0.50 et 0.75 et dont les ordonnées sont les taux de couverture effectifs. On propose d'utiliser deux méthodes différentes pour calibrer les modèles DCY et DPRT : la première méthode, appelée ici « méthode classique », permet d'obtenir deux ensembles de paramètres, l'un pour les prédictions des réflectances, l'autre pour les prédictions des transmittances [voir formules (4.13) à (4.16)], ou encore un ensemble de paramètres commun pour la prédiction des réflectances et des transmittances en faisant la moyenne arithmétique des deux ensembles de paramètres précédents [voir formule (4.17)]; la seconde méthode, appelée ici « méthode matricielle », permet d'obtenir un ensemble de paramètres commun pour la prédiction des réflectances et des transmittances en utilisant une méthode de minimisation basée sur l'approche des matrices de transfert.

Méthode classique : Pour l'estimation de l'engraisement mécanique, nous pouvons suivre la méthode proposée par Hersch *et al.* [7], détaillée dans la section 4.4, qui tient compte du fait que l'étalement d'une encre donnée peut se faire de façon différente selon qu'elle est imprimée sur le papier ou au-dessus d'une autre encre. Plus précisément, cette méthode calcule le taux de couverture effectif d'une encre u à partir des mesures et des prédictions faites sur des couleurs en demi-ton dans lesquelles cette encre est imprimée avec des taux de couverture nominaux de 0.25, 0.50 et 0.75, directement sur le papier ou alors au-dessus d'une primaire v imprimée en ton plein sur le papier.

Pour la prédiction des réflectances spectrales, les taux de couverture effectifs sont estimés en utilisant la formule de minimisation (4.13) [ou éventuellement la formule (4.15)] où $R_{u/v}^{(m)}(\lambda)$ est la réflectance mesurée pour l'encre u superposée à la primaire v et $R_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ est la réflectance prédite par le modèle. De la même façon, on pourra utiliser la formule (4.14) [ou éventuellement la formule (4.16)] si l'on veut prédire des transmittances spectrales. Ainsi, les taux de couverture effectifs, qui sont les paramètres d'entrée des modèles prédictifs, sont différents selon que l'on s'intéresse à la prédiction de la réflectance ou de la transmittance d'un imprimé.

Dans le cas du modèle DCY, $R_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ et $T_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ sont calculées à l'aide des formules (7.8) et (7.9) respectivement, dans le cas particulier d'une couleur composée avec l'encre u en demi-ton au-dessus de la primaire v en ton plein, on a alors $\alpha' = \beta' = 1$ (puisque le côté verso n'est pas imprimé) et on obtient :

$$R_{u/v}^{(x)}(\lambda) = r_e + \frac{(\alpha_{u/v}^{(x)})^2 T_{in} T_{out} [\rho - r_i (\rho \rho' - \tau \tau')]}{(1 - \rho \beta_{u/v}^{(x)} r_i) (1 - \rho' r_i) - \beta_{u/v}^{(x)} r_i^2 \tau \tau'} \quad (7.32)$$

et

$$T_{u/v}^{(x)}(\lambda) = \frac{\alpha_{u/v}^{(x)} T_{in} T_{out} \tau}{(1 - \rho \beta_{u/v}^{(x)} r_i) (1 - \rho' r_i) - \beta_{u/v}^{(x)} r_i^2 \tau \tau'} \quad (7.33)$$

avec

$$\alpha_{u/v}^{(x)} = (1 - x) t_{u+v} + x t_u \quad (7.34)$$

et

$$\beta_{u/v}^{(x)} = (1 - x) t_{u+v}^2 + x t_u^2 \quad (7.35)$$

Les termes t_u et t_{u+v} sont les transmittances de l'encre u et de la primaire $u+v$ respectivement. Le calcul de ces termes se fait à l'aide de la formule (7.17) lorsqu'ils sont utilisés dans la formule (7.32), et à l'aide de la formule (7.18) lorsqu'ils sont utilisés dans la formule (7.33).

Dans le cas du modèle DPRT, $R_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ et $T_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ sont calculées à l'aide des formules (7.28) et (7.29) respectivement, dans le cas particulier d'une couleur composée avec l'encre u en demi-ton au-dessus de la primaire v en ton plein, c'est-à-dire :

$$R_{u/v}^{(x)}(\lambda) = r_e + \frac{T_{in} T_{out} \left[\rho_{u/v}^{(x)} - r_i \left(\rho_{u/v}^{(x)} \rho_{u/v}'^{(x)} - \tau_{u/v}^{(x)} \tau_{u/v}'^{(x)} \right) \right]}{(1 - r_i \rho_{u/v}^{(x)}) (1 - r_i \rho_{u/v}'^{(x)}) - r_i^2 \tau_{u/v}^{(x)} \tau_{u/v}'^{(x)}} \quad (7.36)$$

et

$$T_{u/v}^{(x)}(\lambda) = \frac{T_{in} T_{out} \tau_{u/v}^{(x)}}{(1 - r_i \rho_{u/v}^{(x)}) (1 - r_i \rho_{u/v}'^{(x)}) - r_i^2 \tau_{u/v}^{(x)} \tau_{u/v}'^{(x)}} \quad (7.37)$$

où les facteurs de transfert intrinsèques $\rho_{u/v}^{(x)}$, $\rho'_{u/v}(x)$, $\tau_{u/v}^{(x)}$ et $\tau'_{u/v}(x)$ de la couleur en demi-ton sont donnés par la formule générique suivante où la lettre ω remplace les lettres ρ et τ :

$$\omega_{u/v}^{(x)} = (1 - x)\omega_u + x\omega_{u+v} \quad (7.38)$$

Les termes ω_u et ω_{u+v} sont les facteurs de transfert intrinsèques de la primaire u et de la primaire $u + v$ respectivement ; ils ont été déterminés à l'issue des 256 mesures évoquées précédemment.

Méthode matricielle : Nous proposons une nouvelle méthode qui calcule des taux de couverture effectifs identiques pour prédire aussi bien des réflectances que des transmittances. Elle est également basée sur le fait que l'étalement d'une encre est différent selon qu'elle est imprimée sur le papier ou au-dessus d'une autre encre, mais elle diffère de la méthode classique dans la minimisation qui permet d'obtenir les taux de couverture effectifs. En effet, cette méthode fait intervenir à la fois des mesures en réflectance et des mesures en transmittance et utilise l'approche matricielle : les taux de couverture effectifs sont calculés en minimisant la « distance » entre la matrice de transfert $\mathbf{P}_{u/v}^{(m)}(\lambda)$, créée à partir des facteurs de transfert mesurés pour l'encre u superposée à la primaire v (voir section 4.4), et la matrice de transfert $\mathbf{P}_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ créée à partir des facteurs de transfert prédits par le modèle :

$$\tilde{a}_{u/v} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \left(\prod_{\lambda \in \text{vis}} \left\| \mathbf{P}_{u/v}^{(m)}(\lambda) - \mathbf{P}_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right\|_2 \right) \quad (7.39)$$

avec

$$\mathbf{P}_{u/v}^{(x)}(\lambda) = \frac{1}{T_{u/v}^{(x)}} \begin{pmatrix} 1 & -R'_{u/v}(x) \\ R_{u/v}^{(x)} & T_{u/v}^{(x)} T'_{u/v}(x) - R_{u/v}^{(x)} R'_{u/v}(x) \end{pmatrix}$$

où $R_{u/v}^{(x)}$, $R'_{u/v}(x)$, $T_{u/v}^{(x)}$ et $T'_{u/v}(x)$ sont les facteurs de transfert prédits par les modèles pour un taux de couverture égal à x . La distance $\| \cdot \|_2$ entre les deux matrices est définie dans l'annexe H.

Dans le cas du modèle DCY, $R_{u/v}^{(x)}$ et $T_{u/v}^{(x)}$ sont donnés par les formules (7.32) à (7.33) et les deux autres facteurs de transfert sont donnés par :

$$R'_{u/v}(x)(\lambda) = r_e + \frac{T_{in} T_{out} \left[\rho' - r_i \beta_{u/v}^{(x)} (\rho \rho' - \tau \tau') \right]}{\left(1 - \rho \beta_{u/v}^{(x)} r_i \right) \left(1 - \rho' r_i \right) - \beta_{u/v}^{(x)} r_i^2 \tau \tau'} \quad (7.40)$$

et

$$T'_{u/v}(x)(\lambda) = \frac{\alpha_{u/v}^{(x)} T_{in} T_{out} \tau'}{\left(1 - \rho \beta_{u/v}^{(x)} r_i \right) \left(1 - \rho' r_i \right) - \beta_{u/v}^{(x)} r_i^2 \tau \tau'} \quad (7.41)$$

où $\alpha_{u/v}^{(x)}$ et $\beta_{u/v}^{(x)}$ sont donnés par les formules (7.34) et (7.35) respectivement.

Dans le cas du modèle DPRT, $R_{u/v}^{(x)}$ et $T_{u/v}^{(x)}$ sont donnés par les formules (7.36) à (7.37) et les deux autres facteurs de transfert sont donnés par :

$$R'_{u/v}(x)(\lambda) = r_e + \frac{T_{in} T_{out} \left[\rho'_{u/v}(x) - r_i \left(\rho_{u/v}^{(x)} \rho'_{u/v}(x) - \tau_{u/v}^{(x)} \tau'_{u/v}(x) \right) \right]}{\left(1 - r_i \rho_{u/v}^{(x)} \right) \left(1 - r_i \rho'_{u/v}(x) \right) - r_i^2 \tau_{u/v}^{(x)} \tau'_{u/v}(x)} \quad (7.42)$$

et

$$T'_{u/v}(x)(\lambda) = \frac{T_{in} T_{out} \tau'_{u/v}(x)}{\left(1 - r_i \rho_{u/v}^{(x)} \right) \left(1 - r_i \rho'_{u/v}(x) \right) - r_i^2 \tau_{u/v}^{(x)} \tau'_{u/v}(x)} \quad (7.43)$$

où $\rho_{u/v}^{(x)}$, $\rho'_{u/v}{}^{(x)}$, $\tau_{u/v}^{(x)}$ et $\tau'_{u/v}{}^{(x)}$ sont donnés par la formule générique (7.38).

Vérifications expérimentales

Afin de comparer la précision des prédictions des modèle DPRT et DCY, nous avons imprimé 36 échantillons comportant chacun une couleur en demi-ton de chaque côté. L'impression est faite sur une feuille de papier APCO (symétrique, supercalandrée et non-fluorescente) avec l'imprimante jet d'encre Canon Pixma Pro9500. La linéature est égale à 120 lpi des deux côtés de la feuille. La distance CIELAB ΔE_{94} et l'écart quadratique moyen entre les spectres prédits et les spectres mesurés sont utilisés afin de donner des valeurs quantitatives à la précision des prédictions; ces métriques sont données par les formules (2.12) et (2.13) respectivement. Les facteurs de transfert de chaque échantillon sont mesurés avec le spectrophotomètre X-rite Color i7 avec une géométrie d:8° pour les mesures des réflectances et une géométrie d:0° pour les mesures des transmittances.

Les prédictions ont été faites en utilisant les formules (7.8) à (7.11) pour le modèle DPRT et les formules (7.28) à (7.31) pour le modèle DCY, dans lesquelles les taux de couverture effectifs sont calculés de cinq façons différentes :

- Calibrage double : utilisation des formules de minimisation (4.13) et (4.14) basées sur l'écart quadratique moyen entre spectres prédits et mesurés (option A), puis des formules (4.15) et (4.16) basées sur l'écart colorimétrique CIELAB ΔE_{94} (option B)
- Calibrage simple : utilisation de la formule (4.17) appliquée d'abord aux taux de couverture effectifs calculés avec les formules (4.13) et (4.14) (option C) puis avec les formules (4.15) et (4.16) (option D), et utilisation de la formule (7.39) basée sur la norme matricielle (option E).

La table 7.1 présente les valeurs moyennes des écarts quadratiques moyens et des écarts colorimétriques CIELAB ΔE_{94} obtenues pour les 36 échantillons de test avec le modèle DPRT et le modèle DCY en utilisant les différentes options de minimisation pour l'obtention des taux de couverture effectifs (options A, B pour un calibrage double et options C, D, E pour un calibrage simple). Nous rappelons que les taux de couverture effectifs sont les seuls paramètres d'entrée des modèles et qu'aucun paramètre libre n'est ajusté pour faire les prédictions.

option	modèle DPRT*		modèle DCY*	
	Réflectance	Transmittance	Réflectance	Transmittance
A	0,012 — 0,98 (1,59)	0,002 — 1,02 (1,53)	0,009 — 0,94 (2,11)	0,001 — 1,22 (1,85)
B	0,009 — 0,79 (1,29)	0,002 — 0,89 (1,29)	0,007 — 0,92 (1,87)	0,001 — 1,01 (1,47)
C	0,008 — 0,80 (1,16)	0,002 — 1,03 (1,58)	0,010 — 0,98 (1,78)	0,001 — 1,30 (2,13)
D	0,006 — 0,72 (1,66)	0,002 — 0,88 (1,34)	0,008 — 0,89 (1,55)	0,001 — 1,23 (1,84)
E	0,008 — 0,97 (1,78)	0,002 — 0,97 (1,73)	0,063 — 5,65 (10,87)	0,008 — 3,91 (5,56)

TABLE 7.1 — Résultats des prédictions de couleurs obtenus avec les modèles DPRT et DCY sur 36 échantillons de couleurs en demi-ton et en recto-verso sur une feuille de papier APCO en impression jet d'encre. Les options A et B correspondent à un calibrage double, et les options C, D et E à un calibrage simple. * les 3 nombres correspondent à : moyenne des rms — moyenne des ΔE_{94} (quantile 95).

Avec le modèle DPRT, les prédictions sont bonnes quelle que soit l'option de minimisation utilisée : les écarts quadratiques moyens sont en moyenne de l'ordre de 1% et les écarts colorimétriques sont en moyenne inférieurs à, ou de l'ordre de, l'unité aussi bien pour les réflectances et que pour les transmittances. Pour un calibrage double, les meilleurs résultats sont obtenus en utilisant l'option B basée sur la minimisation des distances ΔE_{94} . Cependant, si on veut prédire les réflectances et les transmittances avec un seul ensemble de paramètres (calibrage simple), il est préférable d'utiliser l'option D, également basée sur la minimisation des distances ΔE_{94} .

Avec le modèle DCY, et si on ne s'intéresse qu'à la distance CIELAB ΔE_{94} , on observe de bonnes prédictions pour la réflectance et des prédictions acceptables pour les transmittances en utilisant les options A, B, C et D mais lorsque l'option E est utilisée, les prédictions sont beaucoup moins précises : cette option de minimisation de calcul des taux de couverture effectifs n'est donc pas appropriée au modèle DCY : cela s'explique par la présence, au sein d'une même matrice, de facteurs de transfert faisant intervenir dans leurs calculs les transmittances intrinsèques des primaires qui sont différentes pour les réflectances et les transmittances [voir formules (7.17) et (7.18)].

Même si les performances du modèle DPRT sont globalement équivalentes à celles du modèle DCY, le nombre trop élevé de mesures nécessaires à son calibrage en font un modèle peu pratique. C'est pourquoi, nous proposons au chapitre suivant une approche un peu différente qui, en s'affranchissant de l'utilisation des couples de primaires mais en préservant les matrices de transfert de flux, mène à des modèles prédictifs dont le calibrage nécessite le même nombre de mesures que le modèle DCY.

Résumé

Nous avons montré dans ce chapitre les possibilités qu'offrent les matrices de transfert pour prédire des couleurs en demi-ton. En utilisant simplement les propriétés de ces matrices présentées dans le chapitre 5, nous avons reformulé le modèle de Clapper-Yule, renommé modèle DCY (« Duplex Clapper-Yule »), et proposé un modèle construit sur la notion de couple de primaires que nous avons appelés modèle DPRT (« Duplex Primary Reflectance-Transmittance »).

Le modèle DPRT se distingue du modèle de Clapper-Yule par la façon de décrire les différents éléments d'un imprimé (encres, support, interfaces) ainsi que les transferts de flux entre ces différents éléments : dans le modèle DPRT, les deux interfaces de part et d'autre de l'imprimé sont représentées individuellement par une matrice de transfert, les encres n'ont pas de représentation propre (aucune propriété physique ne leur est attribuée), elles sont indissociables du support et forment avec ce dernier une couche qui peut être représentée par une matrice de transfert (voir Fig. 7.3). La situation est différente pour le modèle de Clapper-Yule dans lequel les encres sont représentées indépendamment du support, elles sont supposées non-diffusantes et transparentes (transmittance intrinsèques) et sont modélisées conjointement avec l'interface par une matrice de transfert (voir Fig. 7.1).

Nous avons aussi introduit une technique de minimisation pour le calcul des taux de couverture effectifs basée sur la notion de distance entre les matrices de transfert prédites et mesurées. Cependant cette technique ne paraît performante que dans le cadre du modèle DPRT qui par ailleurs, dans sa phase de calibrage hors engraissement mécanique, nécessite un trop grand nombre de mesures pour calculer les facteurs de transfert des couples de primaires, même si les tests effectués avec le modèle DPRT mettent en évidence des performances équivalentes à celles obtenues avec le modèle DCY.

Les modèles DCY et DPRT ainsi que l'étude comparative de leurs performances sont présentés dans un article publié dans le *Journal of the Optical Society of America A* [69].

Chapitre 8

Modèles à couches effectives subdivisées

Les modèles DCY et DPRT présentés dans le chapitre précédent ont chacun un inconvénient : pour le modèle DCY, les transmittances des encres sont différentes selon qu'elles sont calculées à partir de réflectances ou de transmittances et, pour le modèle DPRT, le nombre de mesures de calibrage est trop élevé car il est basé sur la notion de couples de primaires.

Nous proposons dans ce chapitre d'autres façons de modéliser la propagation de la lumière dans les imprimés qui permettent, dans le cas d'un support symétrique, non seulement de contourner le problème des transmittances des encres rencontrée dans le modèle DCY, mais également de s'affranchir des 128 mesures de calibrage du modèle DPRT, tout en conservant l'approche matricielle pour décrire les transferts de flux. Pour cela, nous abandonnons à la fois la propriété de transmittance attribuée aux encres et le concept de couples de primaires, mais nous conservons l'hypothèse, déjà faite pour le modèle DPRT, selon laquelle le support et les encres sont indissociables et forment un milieu diffusant effectif. Nous gardons également le découpage de l'imprimé recto-verso en trois composantes, à savoir, les deux interfaces d'une part, et le milieu diffusant effectif d'autre part. Ces hypothèses nous permettent de construire deux nouveaux modèles : le modèle DLRT (« Double Layer Reflectance-Transmittance ») et le modèle de Kubelka-Munk généralisé appliqué aux imprimés en demi-ton. Le modèle DLRT permet de faire des prédictions à partir des huit primaires de Neugebauer en considérant l'imprimé « sans les interfaces » comme une superposition de deux demi-couches (section 8.1). On généralise le modèle DLRT dans lequel les deux demi-couches de l'imprimé sont elles-mêmes considérées comme une superposition de n sous-couches. Lorsqu'on fait tendre n vers l'infini, on obtient alors une version du modèle de Kubelka-Munk généralisé, déjà présenté dans la section 6.2, adaptée à la prédiction de couleurs en demi-ton (section 8.2).

Pour finir, nous présentons un modèle qui, contrairement aux deux modèles précédents, n'est pas un modèle phénoménologique mais plutôt un modèle de surface qui s'apparente au modèle de Yule-Nielsen, où l'engraissement optique n'est plus modélisé en ajustant un paramètre libre (voir section 4.2) mais en introduisant le nombre de réflexions internes entre deux couches, lui-même calculé à l'aide des matrices de transfert (section 8.3).

8.1 Modèle DLRT (« Double Layer Reflectance-Transmittance »)

On considère une feuille de papier imprimée avec une couleur en demi-ton sur chaque côté. Comme pour le modèle DPRT, l'imprimé est modélisé par trois composantes : les deux interfaces et le milieu diffusant effectif {papier + encres}. On suppose maintenant que ce dernier est séparé en deux composantes, comme si l'imprimé « sans les interfaces » était lui-même la superposition de deux imprimés deux fois plus minces : l'un comportant la couleur de la face supérieure (recto), l'autre comportant la couleur de la face inférieure (verso) [voir Fig. 8.1 (a)]. Chaque composante est représentée par une matrice de transfert. Ce modèle qui, comme le modèle DPRT, prédit simultanément la réflectance et la transmittance grâce à l'utilisation des matrices de transfert, et sépare l'imprimé en deux demi-couches, est appelé *modèle DLRT* (« Double Layer Reflectance-Transmittance »). La technique de séparation en

deux demi-couches a déjà été introduite dans la section 5.4 dans laquelle on montrait que l'approche matricielle permettait de prédire les réflectances et les transmittances spectrales d'une surface comportant sur chaque côté une primaire de Neugebauer imprimée en ton plein. Nous allons voir que cette technique permet de revenir à une phase de calibrage qui nécessite un nombre de mesures égal à celui du modèle DCY. Nous reprenons dans la suite les mêmes notations que celle introduites dans la section 5.4 et en introduisons de nouvelles :

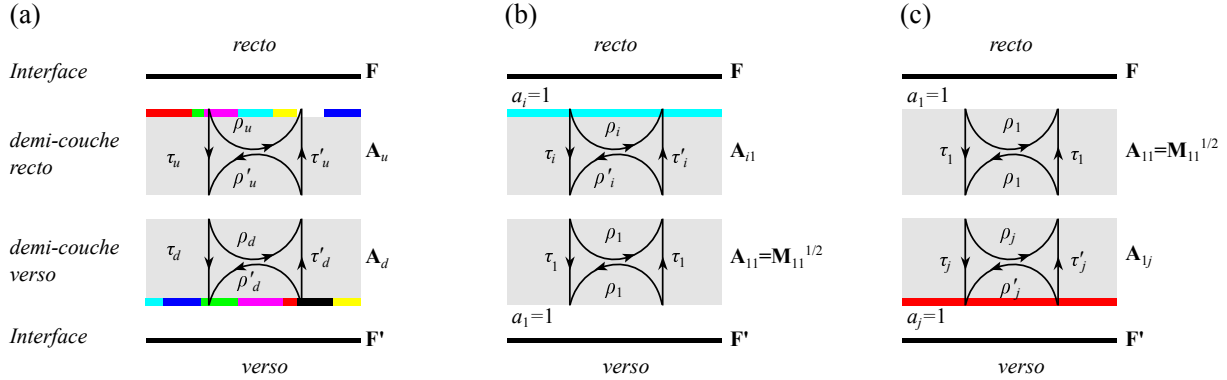


FIGURE 8.1 – Décomposition d'un imprimé en quatre parties dans le cadre du modèle DLRT : les deux interfaces de chaque côté du papier encré, lui-même modélisé par une superposition de deux demi-couches. L'imprimé contient (a) une couleur en demi-ton sur chaque côté, (b) une primaire sur le côté recto et vierge sur le côté verso et (c) vierge sur le côté recto et une primaire sur le côté verso.

\mathbf{F} et \mathbf{F}' sont les matrices de transfert de l'interface supérieure et de l'interface inférieure respectivement [voir formule (5.20) et (5.21)]. \mathbf{P}_{ij} , avec $i = 1, \dots, 8$ et $j = 1, \dots, 8$, est la matrice de transfert « avec les interfaces » associée à la feuille imprimée en recto-verso dans la primaire i en ton plein sur le recto et dans la primaire j en ton plein sur le verso. \mathbf{M}_{ij} est la matrice de transfert de ce même imprimé mais « sans les interfaces » (voir Fig. 5.6 à la section 5.4). La feuille de papier sans encre et sans les interfaces est subdivisée en deux demi-couches identiques de matrice \mathbf{A}_{11} , ce qui revient à écrire que :

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11}^2$$

et que par conséquent une demi-couche sans encre a pour matrice de transfert $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{M}_{11}^{1/2}$.

L'imprimé, sans les interfaces, contenant la primaire i sur le recto et vierge sur le verso a pour matrice de transfert \mathbf{M}_{i1} ; il est subdivisé en deux demi-couches, la demi-couche recto, de matrice de transfert \mathbf{A}_{i1} , et la demi-couche verso, de matrice de transfert \mathbf{A}_{11} [voir Fig. 8.1 (b)]. On a alors :

$$\mathbf{M}_{i1} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{1/2}$$

De la même façon, la matrice de transfert de l'imprimé sans les interfaces vierge sur le recto et contenant la primaire j sur le verso, s'écrit :

$$\mathbf{M}_{1j} = \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{A}_{1j} = \mathbf{M}_{11}^{1/2} \cdot \mathbf{A}_{1j}$$

où \mathbf{A}_{1j} est la matrice de transfert associée à la demi-couche verso [voir Fig. 8.1 (c)].

Les matrices de transfert des deux demi-couches s'écrivent donc :

$$\mathbf{A}_{i1} = \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2} \quad (8.1)$$

et

$$\mathbf{A}_{1j} = \mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}_{1j} \quad (8.2)$$

On note $\tilde{R}_i, \tilde{R}'_i, \tilde{T}_i$ et \tilde{T}'_i les facteurs de transfert de l'imprimé recto simple « avec les interfaces » et la primaire i sur le recto, on a :

$$\mathbf{P}_{i1} = \frac{1}{\tilde{T}_i} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{R}'_i \\ \tilde{R}_i & \tilde{T}_i \tilde{T}'_i - \tilde{R}_i \tilde{R}'_i \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

On note R_i, R'_i, T_i et T'_i les facteurs de transfert de ce même imprimé mais « sans les interfaces », on a :

$$\mathbf{M}_{i1} = \frac{1}{T_i} \begin{pmatrix} 1 & -R'_i \\ R_i & T_i T'_i - R_i R'_i \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

On rappelle la formule reliant les matrices \mathbf{P}_{ij} et \mathbf{M}_{ij} :

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{ij} \cdot \mathbf{F}' \quad (8.5)$$

On note ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i les facteurs de transfert de la demi-couche recto contenant la primaire i , on a :

$$\mathbf{A}_{i1} = \frac{1}{\tau_i} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_i \\ \rho_i & \tau_i \tau'_i - \rho_i \rho'_i \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Les valeurs numériques des facteurs de transfert ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i sont obtenues en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice $\mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ [voir formule (8.1)]; on pourrait aussi écrire leurs expressions littérales, en fonction de R_i, R'_i, T_i et T'_i d'une part, et de R_1, R'_1, T_1 et T'_1 (facteurs de transfert intrinsèque du papier¹) d'autre part, mais elles seraient alors trop longues, trop complexes et sans grand intérêt pour la suite.

Puisque le support est symétrique, les matrices de transfert faisant référence au verso de l'imprimé s'obtiennent à l'aide des facteurs de transfert calculés pour le recto, c'est-à-dire :

$$\mathbf{P}_{1j} = \frac{1}{\tilde{T}'_j} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{R}_j \\ \tilde{R}'_j & \tilde{T}_j \tilde{T}'_j - \tilde{R}_j \tilde{R}'_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{1j} = \frac{1}{T'_j} \begin{pmatrix} 1 & -R_j \\ R'_j & T_j T'_j - R_j R'_j \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}_{1j} = \frac{1}{\tau'_j} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_j \\ \rho'_j & \tau_j \tau'_j - \rho_j \rho'_j \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert \mathbf{M}_{ij} s'obtient alors en multipliant les matrices \mathbf{A}_{i1} et \mathbf{A}_{1j} (voir section 5.4) et en utilisant les formules (8.1) et (8.2) :

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{1j} = \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{1j} \quad (8.7)$$

Finalement, la matrice de transfert de l'imprimé avec les interfaces s'écrit, d'après (8.5) et (8.7) :

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{ij} \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{1j} \cdot \mathbf{F}'$$

ou encore :

$$\mathbf{P}_{ij} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{F}') \cdot (\mathbf{F}'^{-1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_{1j} \cdot \mathbf{F}') = \mathbf{P}_{i1} \cdot \mathbf{P}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{1j} \quad (8.8)$$

Il est donc possible, en théorie, de construire la matrice de transfert d'un imprimé en mode recto-verso — la matrice \mathbf{P}_{ij} — à partir des matrices de transfert d'un imprimé en mode recto simple — les matrices \mathbf{P}_{i1} et \mathbf{P}_{1j} . La construction des matrices \mathbf{P}_{i1} (ou \mathbf{P}_{1j}) ne nécessite que $8 \times 4 = 32$ mesures (8

1. Ces facteurs sont notés ρ, ρ', τ et τ' dans le modèle DPRT.

primaires et 4 facteurs de transfert) au lieu des 128 mesures nécessaires au calibrage du modèle DPRT dans le cas d'un support symétrique. L'objectif du modèle DLRT est d'étendre la formule (8.8) aux imprimés comportant des couleurs en demi-ton.

Notons a_i et a'_i avec $i = 1, \dots, 8$ les taux de couverture des couleurs imprimées sur le recto et sur le verso respectivement. On considère alors que les facteurs de transfert ρ_u, ρ'_u, τ_u et τ'_u de la demi-couche recto de l'imprimé sont données par la formule de Neugebauer :

$$\rho_u = \sum_{i=1}^8 a_i \rho_i, \quad \tau_u = \sum_{i=1}^8 a_i \tau_i, \quad \rho'_u = \sum_{i=1}^8 a_i \rho'_i, \quad \tau'_u = \sum_{i=1}^8 a_i \tau'_i. \quad (8.9)$$

On peut ainsi construire la matrice de transfert correspondante :

$$\mathbf{A}_u = \frac{1}{\tau_u} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_u \\ \rho_u & \tau_u \tau'_u - \rho_u \rho'_u \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

De la même façon, on calcule les facteurs de transfert ρ_d, ρ'_d, τ_d et τ'_d de la demi-couche verso de l'imprimé :

$$\rho_d = \sum_{i=1}^8 a'_i \rho_i, \quad \tau_d = \sum_{i=1}^8 a'_i \tau_i, \quad \rho'_d = \sum_{i=1}^8 a'_i \rho'_i, \quad \tau'_d = \sum_{i=1}^8 a'_i \tau'_i. \quad (8.11)$$

Et on construit la matrice de transfert correspondante :

$$\mathbf{A}_d = \frac{1}{\tau'_d} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_d \\ \rho'_d & \tau_d \tau'_d - \rho_d \rho'_d \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

On en déduit la matrice de transfert de l'imprimé « sans les interfaces » en mode recto-verso avec la couleur de taux de couverture a_i sur le recto et la couleur de taux de couverture a'_i sur le verso :

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{A}_d \quad (8.13)$$

La figure 8.2 montre les transferts de flux pour un imprimé en mode recto-verso avec des couleurs en demi-ton constituées de deux primaires. En appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice \mathbf{M}_H , on obtient les facteurs de transfert ρ_H, ρ'_H, τ_H et τ'_H de l'imprimé « sans les interfaces » :

$$\rho_H = \rho_u + \frac{\tau_u \tau'_u \rho_d}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.14)$$

$$\tau_H = \frac{\tau_u \tau_d}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.15)$$

$$\rho'_H = \rho'_d + \frac{\tau_d \tau'_d \rho_u}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.16)$$

$$\tau'_H = \frac{\tau'_u \tau'_d}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.17)$$

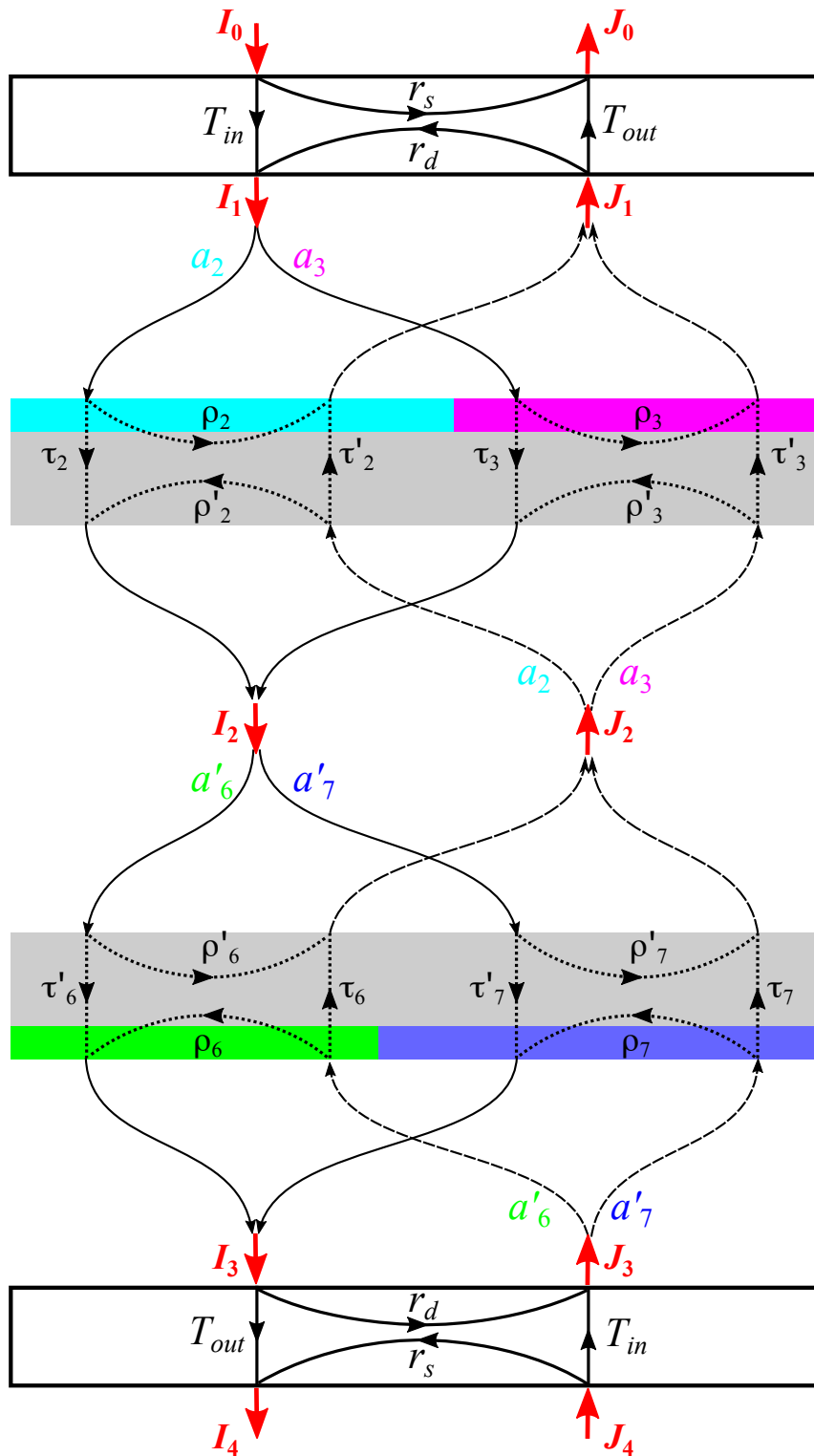


FIGURE 8.2 – Transferts de flux entre l'interface supérieure, la demi-couche recto (avec une couleur en demi-ton composée des primaires cyan et magenta), la demi-couche verso (avec une couleur en demi-ton composée des primaires vert et bleu) et l'interface inférieure.

Finalement, en tenant compte des effets optiques dus aux interfaces, la matrice de transfert de l'imprimé s'écrit² :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{F}' \quad (8.18)$$

On en déduit les facteurs de transfert R_H , R'_H , T_H et T'_H de l'imprimé en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice \mathbf{P}_H . Cela revient, si on souhaite des formules littérales, à appliquer les formules de correction de Saunderson (5.24) à (5.27) :

$$R_H = r_s + \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} [\rho_H - r_d (\rho_H \rho'_H - \tau_H \tau'_H)], \quad (8.19)$$

$$T_H = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} \tau_H \quad (8.20)$$

$$R'_H = r_s + \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} [\rho'_H - r_d (\rho_H \rho'_H - \tau_H \tau'_H)], \quad (8.21)$$

$$T'_H = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} \tau'_H \quad (8.22)$$

avec $\Delta = (1 - r_d \rho_H) (1 - r_d \rho'_H) - r_d^2 \tau_H \tau'_H$.

On rappelle que r_s , r_d , T_{in} et T_{out} sont les facteurs de transfert des interfaces, ils sont définis dans la section 3.6.

Les formules (8.19) à (8.22) sont à première vue identiques à celles obtenus avec le modèle DPRT puisque dans les deux modèles on effectue la correction de Saunderson des deux côtés de l'imprimé. Toutefois, les formules diffèrent par les facteurs de transfert de l'imprimé « sans les interfaces » donnés par les formules (8.14) à (8.17) dans le cas présent et par la formule générique (7.26) dans le cas du modèle DPRT. On pourrait aussi donner les expressions de R_H , R'_H , T_H et T'_H en fonction des différents paramètres du modèles (taux de couverture, facteurs de transfert des primaires ρ_i , ρ'_i , τ_i et τ'_i) mais ils seraient alors d'une écriture trop longue et trop complexe, et surtout dépourvue d'interprétation intuitive simple.

On peut également se passer de formules littérales en se contentant de calculer la matrice \mathbf{P}_H puis en lui appliquant les formules (5.8) à (5.11) pour en déduire les valeurs numériques des facteurs de transfert R_H , R'_H , T_H et T'_H . Nous proposons de détailler les étapes permettant d'obtenir, d'un point de vue pratique, la matrice \mathbf{P}_H :

1. On mesure à l'aide d'un spectrophotomètre les facteurs de transfert \tilde{R}_i , \tilde{R}'_i , \tilde{T}_i et \tilde{T}'_i de l'imprimé contenant la primaire i en ton plein sur un seul côté, et ceci pour chaque primaire $i = 1, \dots, 8$.
2. On construit les matrices de transfert \mathbf{P}_{i1} associées aux imprimés avec les interfaces contenant la primaire i en ton plein sur le verso [voir la formule (8.3)].

2. Pour faire l'analogie avec la formule (8.8) obtenue pour les tons pleins, on peut aussi écrire la formule suivante qui présente peu d'intérêt d'un point de vue pratique :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{P}_u \cdot \mathbf{P}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{P}_d$$

avec

$$\mathbf{P}_u = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_u \cdot \mathbf{F}' \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_d = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_d \cdot \mathbf{F}'$$

où \mathbf{M}_u est la matrice de transfert de l'imprimé en mode recto-simple comportant la couleur en demi-ton de taux de couverture a_i sur le recto et vierge sur le verso, et \mathbf{M}_d est la matrice de transfert de l'imprimé en mode recto-simple, vierge sur le recto et comportant la couleur en demi-ton de taux de couverture a'_i sur le verso. Par analogie avec les formules (8.1) et (8.2), on a :

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{A}_u \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_d = \mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{A}_d$$

3. On en déduit les matrices de transfert \mathbf{M}_{i1} associées aux imprimés sans les interfaces contenant la primaire i en ton plein sur le recto [voir la formule (8.5)], puis les matrices de transfert \mathbf{A}_{i1} associées aux demi-couches contenant les primaires i en ton plein [voir la formule (8.1)] .
4. On obtient les facteurs de transfert ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i des demi-couches contenant les primaires i en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice \mathbf{A}_{i1} obtenue à l'étape précédente.
5. On calcule, à l'aide des formules (8.9), les facteurs de transfert ρ_u, ρ'_u, τ_u et τ'_u de la demi-couche recto (c'est-à-dire celle qui est associée à la couleur en demi-ton de taux de couverture a_i), puis on calcule, à l'aide des formules (8.11), les facteurs de transfert ρ_d, ρ'_d, τ_d et τ'_d de la demi-couche verso (c'est-à-dire celle qui est associée à la couleur en demi-ton de taux de couverture a'_j).
6. On construit les matrices \mathbf{A}_u et \mathbf{A}_d des demi-couches recto et verso respectivement [voir les formules (8.10) et (8.12)].
7. Finalement on obtient la matrice de transfert \mathbf{P}_H par la formule (8.18) associée à l'imprimé, avec les interfaces, contenant la couleur en demi-ton de taux a_i sur le recto, et la couleur en demi-ton de taux a'_j sur le verso.

Nous avons testé le modèle DLRT sur les 36 échantillons de couleurs utilisés pour les tests des modèles DPRT et DCY (voir section 7.3). Nous avons conservé les réflectances et les transmittances spectrales mesurées et nous les avons comparés aux spectres prédits avec le modèle DLRT. Les résultats de ces prédictions sont affichés dans la table 8.1.

option min.	modèle DLRT*	
	Réflectance	Transmittance
A	0,009 — 0,88 (2,04)	0,002 — 0,85 (1,40)
B	0,007 — 0,76 (1,66)	0,002 — 0,75 (1,13)
C	0,007 — 0,81 (1,65)	0,002 — 0,85 (1,45)
D	0,007 — 0,72 (1,40)	0,002 — 0,75 (1,24)
E	0,010 — 1,28 (2,32)	0,002 — 0,94 (1,65)

TABLE 8.1 – Résultats des prédictions de couleurs obtenus avec le modèle DLRT sur 36 échantillons de couleurs en demi-ton et en mode recto-verso sur une feuille de papier APCO en impression jet d'encre. Les options A et B correspondent à un calibrage double, et les options C, D et E à un calibrage simple. * les 3 nombres correspondent à : moyenne des rms — moyenne des ΔE_{94} (quantile 95).

Les résultats obtenus avec le modèle DLRT sont sensiblement meilleurs que ceux obtenus avec le modèle DPRT excepté pour la prédiction des réflectances avec un calibrage simple effectué avec l'option de minimisation E : cette option a tendance à dégrader simultanément les prédictions des réflectances et des transmittances, tout en donnant un écart quadratique et un écart colorimétrique dont les valeurs restent acceptables. Cependant, il est préférable d'utiliser le modèle DLRT qui nécessite beaucoup moins de mesures pour le calibrage des 8 primaires de Neugebauer que le modèle DPRT pour le calibrage des 64 couples de primaires : 32 mesures pour le modèle DLRT et 128 mesures pour le modèle DPRT dans le cas d'un support symétrique.

Nous proposons dans la section suivante de généraliser le modèle DLRT en subdivisant chacune des deux demi-couches de l'imprimé en plusieurs sous-couches et nous établirons le lien qui existe avec le modèle de Kubelka-Munk généralisé (présenté dans la section 6.2) lorsque le nombre de sous-couches tend vers l'infini .

8.2 Modèle de Kubelka-Munk généralisé appliqué aux imprimés en demi-ton

L'idée de décomposer un imprimé en deux demi-couches s'est avérée expérimentalement pertinente et permet de simplifier le calibrage du modèle DPRT. Nous proposons maintenant d'aller plus loin,

toujours dans l'idée de subdivisions des couches, en découpant cette fois chacune des deux demi-couches en n sous-couches. Ceci permet de modéliser de manière plus variée les différentes trajectoires de flux dans l'imprimé, et par là même l'engraissement optique des points d'encre (le paramètre n correspondant au nombre de sous-couches agit un peu comme le paramètre n du modèle de Yule-Nielsen décrit dans le chapitre 4). Par passage à la limite, nous parvenons à un modèle dont le formalisme continu est analogue à celui de Kubelka-Munk et obtenons une version du modèle de Kubelka-Munk généralisé, que nous avons présenté dans la section 6.2, appliquée cette fois-ci aux prédictions de couleurs en demi-ton.

Modèle multi-couches (généralisation du modèle DLRT)

La figure 8.3 (a) reprend les différents éléments de la figure 8.1 présentée dans le modèle DLRT ; elle représente le nouveau découpage d'un imprimé avec une primaire en ton plein d'un côté et vierge de l'autre. On retrouve :

- les interfaces de chaque côté de l'imprimé, dont les matrices de transfert \mathbf{F} et \mathbf{F}' sont données par les formules (5.20) et (5.21)
- la demi-couche de papier sans encre, de matrice $\mathbf{M}_{11}^{1/2}$
- la demi-couche contenant la primaire i , de matrice $\mathbf{A}_{i1} = \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ où \mathbf{M}_{i1} est la matrice de transfert de l'imprimé, « sans les interfaces », avec la primaire i sur le côté recto et vierge sur le côté verso.

On rappelle que \mathbf{M}_{i1} est donnée par la formule $\mathbf{M}_{i1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{i1} \cdot \mathbf{F}'^{-1}$ où \mathbf{P}_{i1} est la matrice de transfert de l'imprimé « avec les interfaces » et on note ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i les facteurs de transfert associés à la matrice \mathbf{A}_{i1} :

$$\mathbf{A}_{i1} = \frac{1}{\tau_i} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_i \\ \rho_i & \tau_i \tau'_i - \rho_i \rho'_i \end{pmatrix}$$

Comme pour le modèle DLRT, les expressions littérales de ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i ne sont pas données, on obtient leurs valeurs numériques en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice $\mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$.

La couche contenant la primaire est à son tour modélisée par un empilement de n sous-couches identiques ; on note r_i, r'_i, t_i et t'_i les facteurs de transfert associés à une sous-couche et \mathbf{B}_{i1} la matrice de transfert correspondante, on a :

$$\mathbf{B}_{i1} = \frac{1}{t_i} \begin{pmatrix} 1 & -r'_i \\ r_i & t_i t'_i - r_i r'_i \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{i1}^{1/n}$$

D'après le modèle à deux flux généralisé, présenté dans le chapitre 6, et à l'aide des formules (6.11) à (6.14), on peut exprimer les facteurs de transfert de chaque sous-couche à partir de ceux de la demi-couche et du nombre n de sous-couches :

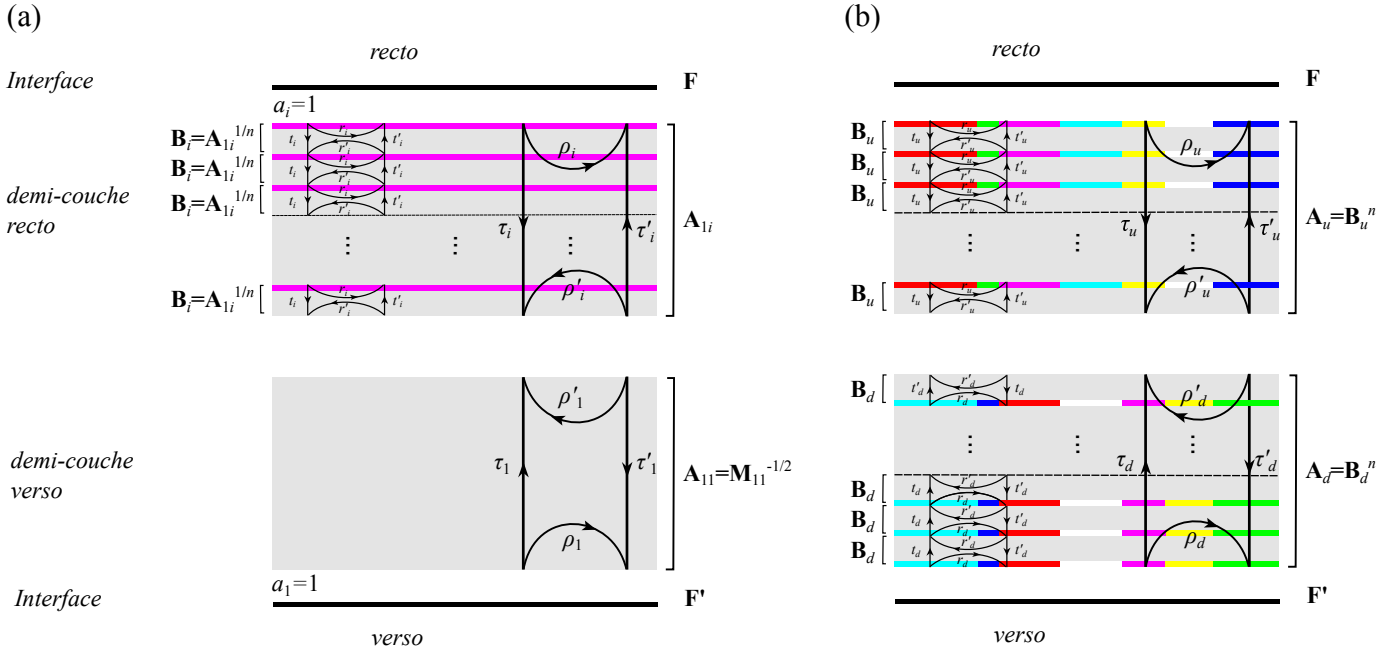


FIGURE 8.3 – Décomposition en quatre parties d'un imprimé dans le cadre du modèle multi-couches : les deux interfaces et le papier séparé en deux demi-couches. (a) Cas d'un imprimé avec une primaire i en ton plein sur le côté recto. (b) Cas d'un imprimé avec une couleur en demi-ton sur chaque côté.

$$r_i = \frac{\sqrt{\frac{\rho_i}{\rho'_i}} \sinh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu_i \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}} \right) \right]}{\alpha_i \sinh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu_i \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}} \right) \right] + \beta_i \cosh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu_i \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}} \right) \right]}, \quad (8.23)$$

$$t_i = \frac{\beta_i e^{\frac{1}{n} \ln \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}}}}{\alpha_i \sinh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu_i \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}} \right) \right] + \beta_i \cosh \left[\frac{1}{n} \ln \left(\nu_i \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}} \right) \right]}, \quad (8.24)$$

$$r'_i = r_i \frac{\rho'_i}{\rho_i}, \quad (8.25)$$

$$t'_i = t_i \left(\frac{\tau'_i}{\tau_i} \right)^{1/n}. \quad (8.26)$$

avec

$$\alpha_i = \frac{\rho_i \rho'_i - \tau_i \tau'_i + 1}{2\sqrt{\rho_i \rho'_i}}, \quad (8.27)$$

$$\beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 - 1}, \quad (8.28)$$

et

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i} \left[1 - (\alpha_i - \beta_i) \sqrt{\rho_i \rho'_i} \right].$$

On considère maintenant un imprimé avec sur le côté recto une couleur en demi-ton de taux de couverture nominaux a_i avec $i = 1, \dots, 8$, et sur le côté verso une couleur en demi-ton de taux de couverture nominaux a'_j avec $j = 1, \dots, 8$. La figure 8.3 (b) montre les différents éléments qui composent l'imprimé. On s'intéresse dans un premier temps à la demi-couche supérieure, elle-même représentée

par une superposition de n sous-couches identiques. On note r_u, r'_u, t_u et t'_u les facteurs de transfert associés à une sous-couche et \mathbf{B}_u la matrice de transfert correspondante. On a :

$$\mathbf{B}_u = \frac{1}{t_u} \begin{pmatrix} 1 & -r'_u \\ r_u & t_u t'_u - r_u r'_u \end{pmatrix}$$

On suppose alors que les facteurs de transfert d'une sous-couche sont données par la formule de Neugebauer :

$$r_u = \sum_{i=1}^8 a_i r_i, \quad t_u = \sum_{i=1}^8 a_i t_i, \quad r'_u = \sum_{i=1}^8 a_i r'_i, \quad t'_u = \sum_{i=1}^8 a_i t'_i. \quad (8.29)$$

On note ρ_u, ρ'_u, τ_u et τ'_u les facteurs de transfert associés à la couche supérieure et \mathbf{A}_u la matrice de transfert correspondante. On a alors :

$$\mathbf{A}_u = \frac{1}{\tau_u} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_u \\ \rho_u & \tau_u \tau'_u - \rho_u \rho'_u \end{pmatrix} = \mathbf{B}_u^n$$

Ainsi, d'après le modèle à deux flux et les formules (6.3) à (6.6) on a :

$$\rho_u = \frac{\sqrt{\frac{r_u}{r'_u}} \sinh \left[n \ln \left(\nu_u \sqrt{\frac{t_u}{t'_u}} \right) \right]}{\alpha_u \sinh \left[n \ln \left(\nu_u \sqrt{\frac{t_u}{t'_u}} \right) \right] + \beta_u \cosh \left[n \ln \left(\nu_u \sqrt{\frac{t_u}{t'_u}} \right) \right]}, \quad (8.30)$$

$$\tau_u = \frac{\beta_u e^{n \ln \sqrt{\frac{t_u}{t'_u}}}}{\alpha_u \sinh \left[n \ln \left(\nu_u \sqrt{\frac{t_u}{t'_u}} \right) \right] + \beta_u \cosh \left[n \ln \left(\nu_u \sqrt{\frac{t_u}{t'_u}} \right) \right]}, \quad (8.31)$$

$$\rho'_u = \rho_u \frac{r'_u}{r_u}, \quad (8.32)$$

$$\tau'_u = \tau_u \left(\frac{t'_u}{t_u} \right)^n. \quad (8.33)$$

avec

$$\alpha_u = \frac{r_u r'_u - t_u t'_u + 1}{2\sqrt{r_u r'_u}}, \quad (8.34)$$

$$\beta_u = \sqrt{\alpha_u^2 - 1}, \quad (8.35)$$

et

$$\nu_u = \frac{1}{t_u} \left[1 - (\alpha_u - \beta_u) \sqrt{r_u r'_u} \right]. \quad (8.36)$$

De la même façon, on calcule les facteurs de transfert ρ_d, ρ'_d, τ_d et τ'_d associés à la demi-couche verso, et on construit la matrice de transfert correspondante \mathbf{A}_d contenant la couleur en demi-ton avec les taux de couverture a'_j . Finalement, on obtient la matrice de transfert de l'imprimé « avec les interfaces » par la formule :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_u \cdot \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{F}' \quad (8.37)$$

On en déduit les facteurs de transfert R_H, R'_H, T_H et T'_H de l'imprimé en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice \mathbf{P}_H . Comme pour le modèle DLRT, les expressions littérales de R_H, R'_H, T_H et T'_H sont trop longues et trop complexes pour être écrites explicitement en fonction des paramètres du modèle (taux de couverture, facteurs de transfert des primaires ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i). On peut tout de même écrire des formules littérales simples qui dépendent indirectement des paramètres du modèle : ce sont les formules (8.19) à (8.22) obtenues pour le modèle DLRT où les facteurs de transfert $\rho_H, \rho'_H,$

τ_H et τ'_H de l'imprimé « sans les interfaces » sont données par les formules (8.14) à (8.17), également utilisées dans le modèle DLRT, mais dans lesquelles les facteurs de transfert de la couche supérieure ρ_u, ρ'_u, τ_u et τ'_u sont donnés par les formules (8.30) à (8.33), des formules similaires existant pour les facteurs de transfert de la couche inférieure ρ_d, ρ'_d, τ_d et τ'_d .

Nous avons testé ce modèle sur les 36 échantillons utilisés pour les tests des modèles DCY, DPRT et DLRT (on rappelle que ce sont des échantillons de couleurs en demi-ton de linéature 120 lpi, imprimés en mode recto-verso sur du papier APCO) en faisant varier la valeur de n entre 1 et 500. Le calcul de l'engraissement mécanique est réalisé pour chaque valeur de n , pour cela nous avons utilisé la méthode de calibrage double et l'option de minimisation basée sur les écarts colorimétriques entre spectres prédits et spectres mesurées [voir formules (4.15) et (4.16)]. La figure 8.4 montre l'évolution de la moyenne des écarts colorimétriques CIELAB ΔE_{94} obtenus sur les 36 échantillons en fonction du nombre de sous-couches n . Les résultats obtenus pour la réflectance montrent des écarts colorimétriques moyens inférieurs à 1 quelle que soit la valeur de n . La courbe est d'abord très irrégulière pour les valeurs de n comprises entre 1 et 100, puis elle se stabilise en décroissant lorsque n augmente pour atteindre la valeur $\Delta E_{94} = 0,68$. Pour la transmittance, on observe que les performances sont optimales lorsque $n = 1$, on est alors dans le cas particulier du modèle DLRT. Puis les performances se dégradent lorsque n augmente jusqu'à une valeur maximale de ΔE_{94} égale à 1,56 unité atteinte pour $n = 4$. Enfin, on observe une amélioration des performances lorsque n continue d'augmenter jusqu'à une stabilisation pour les très grandes valeurs de n avec $\Delta E_{94} = 1,08$. Cette valeur est supérieure à celle obtenue pour $n = 1$ mais reste à peine supérieure à 1. Pour la prédiction des transmittances, le modèle multi-couches paraît plus performant si on considère une seule sous-couche, ce qui revient à utiliser le modèle DLRT, plutôt qu'un très grand nombre de sous-couches. On observe le comportement opposé pour la prédiction des réflectances avec une bonne précision si on considère un très grand nombre de sous-couches. Plus globalement, le modèle paraît plus performant pour prédire des réflectances que pour prédire des transmittances, du moins lorsqu'on utilise l'écart colorimétrique pour caractériser la précision des prédictions.

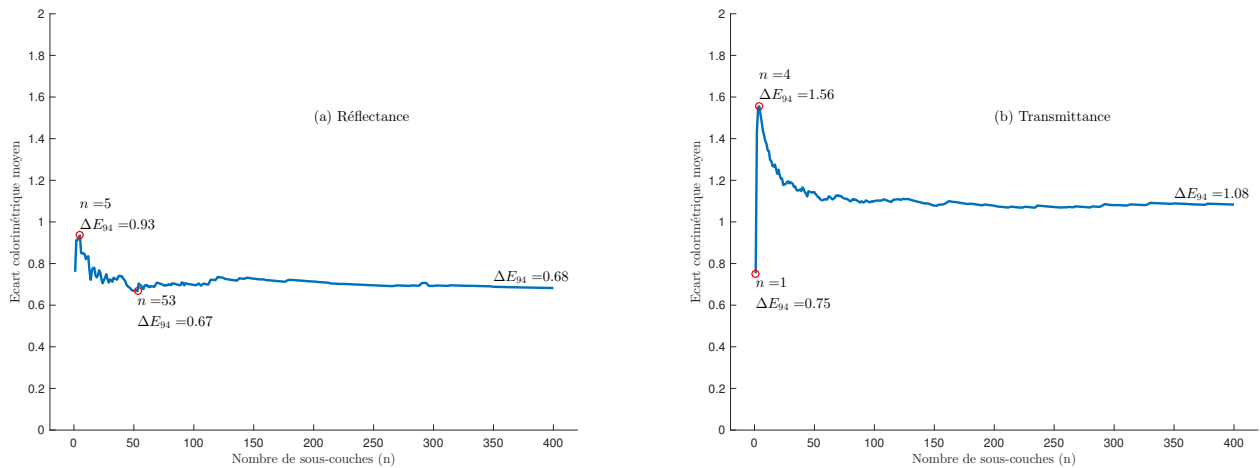


FIGURE 8.4 – Tests du modèle multicouches effectués sur 36 échantillons de couleurs en demi-ton imprimés en recto-verso. Courbe de la moyenne des écarts colorimétriques (a) des réflectances et (b) des transmittances en fonction du nombre n de sous-couches.

La figure 8.5 montrent l'évolution de la moyenne des écarts quadratiques moyens des 36 échantillons : si on considère séparément les prédictions des réflectances et les prédictions des transmittances, on observe le même comportement que celui constaté précédemment pour les courbes de la figure 8.4.

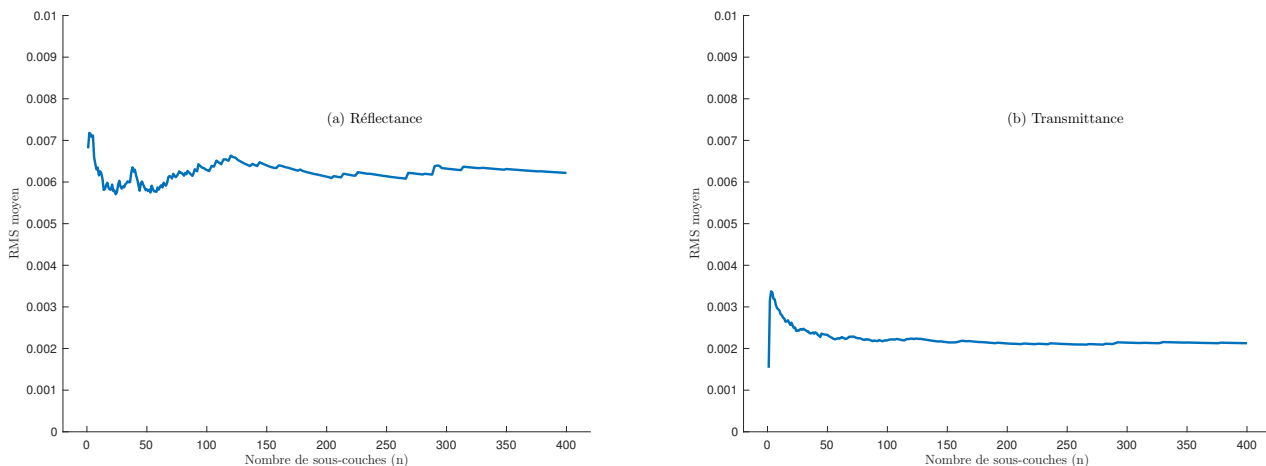


FIGURE 8.5 – Tests du modèle multicouche effectués sur 36 échantillons de couleurs en demi-ton imprimés en recto-verso. Courbe de la moyenne des écarts quadratiques moyens (a) des réflectances et (b) des transmittances en fonction du nombre n de sous-couches.

Le nombre de sous-couches optimal n'étant pas le même pour les prédictions des réflectances et les prédictions des transmittances, on préférera utiliser le modèle DLRT, qui revient à considérer une seule sous-couche pour les deux modes et qui donne de bons résultats aussi bien pour les réflectances ($\Delta E_{94} = 0,76$ et $rms = 0,007$) que pour les transmittance ($\Delta E_{94} = 0,75$ et $rms = 0,002$). Une alternative est de considérer un très grand nombre de sous-couches (plusieurs centaines), identique pour prédire les réflectances et les transmittances : les résultats sont très légèrement améliorés pour la réflectance ($\Delta E_{94} = 0,68$ et $rms = 0,006$) et un peu dégradés pour la transmittance ($\Delta E_{94} = 1,08$ et $rms = 0,002$), tout en restant acceptables.

La différence constatée entre le nombre de sous-couches optimal utilisé pour la réflectance (n_R grand) et celui utilisé pour la transmittance ($n_T = 1$) est d'une interprétation délicate. On peut même se demander si cette différence doit donner lieu à une interprétation physique puisque les prédictions sont plutôt correctes quelle que soit la combinaison utilisée : n_R grand et $n_T = 1$, $n_R = 1$ et $n_T = 1$, $n_R = 1$ et n_T grand ou n_R grand et n_T grand. S'il y avait de gros écarts dans les prédictions selon que l'on utilise l'une ou l'autre de ces combinaisons, alors on pourrait être plus facilement convaincu que le nombre de sous-couches soit un paramètre important du modèle, et que par conséquent, il serait légitime d'essayer de trouver une interprétation physique. Toutefois, s'il fallait en donner une, on pourrait la formuler de la façon suivante :

Le nombre de sous-couches est en relation avec le nombre d'évènements de diffusion que subit la lumière dans l'imprimé avant d'en ressortir : plus il y a de sous-couches, plus grand est le nombre de réflexions possibles à l'intérieur de l'imprimé ; ou encore, si on parle en termes corpusculaires, les photons subissent statistiquement beaucoup plus de chocs lorsque le nombre de sous-couches est grand. Ainsi, dans le cadre du modèle multi-couche que nous venons de présenter, il semblerait que, lorsqu'un photon sort de l'imprimé par la même face que celle par laquelle il est entré, cela se fait — statistiquement — après avoir subi un très grand nombre d'évènements de diffusion. En revanche, lorsqu'un photon ressort par la face opposée, il traverse très facilement l'imprimé sans avoir été très perturbé par des chocs, c'est-à-dire sans avoir été trop diffusé.

Modèle de Kubelka-Munk généralisé appliqué aux imprimés en demi-ton

Au regard des observations faites à l'issue des tests du modèle précédent, il est intéressant de considérer le comportement asymptotique de ce dernier lorsque le paramètre n tend vers l'infini dans les formules (8.30) à (8.33), en notant que ces formules dépendent des facteurs de transfert r_i , r'_i , t_i et

t'_i d'une sous-couche, donnés par les formules (8.23) à (8.26), qui elles-mêmes dépendent du paramètre n . On obtient les formules suivantes, démontrées dans l'annexe I, pour les facteurs de transfert ρ_u , ρ'_u , τ_u et τ'_u de la couche supérieure contenant la couleur en demi-ton de taux de couverture a_i avec $i = 1, \dots, 8$:

$$\rho_u = \frac{\sqrt{s_u/s'_u} \sinh(b_u \sqrt{s_u s'_u})}{a_u \sinh(b_u \sqrt{s_u s'_u}) + b_u \cosh(b_u \sqrt{s_u s'_u})}, \quad (8.38)$$

$$\tau_u = \frac{b_u e^{-(e_u - a_u \sqrt{s_u s'_u})}}{a_u \sinh(b_u \sqrt{s_u s'_u}) + b_u \cosh(b_u \sqrt{s_u s'_u})}, \quad (8.39)$$

$$\rho'_u = \rho_u \frac{s'_u}{s_u}, \quad (8.40)$$

$$\tau'_u = \tau_u e^{-2(e'_u - a_u \sqrt{s_u s'_u})} \quad (8.41)$$

avec

$$a_u = \frac{e_u + e'_u}{2\sqrt{s_u s'_u}} \quad (8.42)$$

$$b_u = \sqrt{a_u^2 - 1} \quad (8.43)$$

$$s_u = \sum_{i=1}^8 a_i s_i, \quad s'_u = \sum_{i=1}^8 a_i s'_i, \quad e_u = \sum_{i=1}^8 a_i e_i, \quad e'_u = \sum_{i=1}^8 a_i e'_i, \quad (8.44)$$

$$s_i = \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho'_i}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\rho_i \rho'_i} (\alpha_i - \beta_i)}{\sqrt{\tau_i \tau'_i}} \right), \quad (8.45)$$

$$e_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\rho_i \rho'_i} (\alpha_i - \beta_i)}{\sqrt{\tau_i \tau'_i}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau'} \right) \quad (8.46)$$

$$s'_i = \frac{\rho'_i}{\rho_i} s_i \quad (8.47)$$

$$e'_i = e_i - \ln \left(\frac{\tau'_i}{\tau_i} \right) \quad (8.48)$$

Les formules (8.38) à (8.41) sont appelées *formules de Kubelka-Munk généralisées appliquées aux imprimés en demi-ton* : à travers ces formules, on retrouve les expressions (6.49) à (6.52) obtenues avec le modèle de Kubelka-Munk généralisé dans la section 6.3 et dans lesquelles les coefficients de Kubelka-Munk généralisés Sh , $S'h$, Eh et $E'h$ sont remplacés par les termes s_u , s'_u , e_u et e'_u respectivement : ce sont les coefficients de Kubelka-Munk généralisés associés à la demi-couche recto contenant les taux de couverture de primaires a_i . On note également que pour chaque primaire i les expressions (8.45) à (8.48) des coefficients s_i , s'_i , e_i et e'_i sont identiques à celles obtenues lors de l'inversion du modèle de Kubelka-Munk généralisé [voir formules (6.54) à (6.57)] dans lesquelles les facteurs de transfert R , R' , T et T' sont remplacés par les facteurs de transfert ρ_i , ρ'_i , τ_i et τ'_i de la couche supérieure contenant la primaire i en ton plein.

Le coefficient s_u (resp. s'_u) est le coefficient de Kubelka-Munk généralisé associé à la diffusion de la lumière par la demi-couche recto lorsque la lumière se propage de haut en bas (resp. de bas en haut) : il est égal à la moyenne, pondérée par les taux de couverture a_i , des coefficients s_i (resp. s'_i), où s_i (resp. s'_i) est le coefficient de Kubelka-Munk généralisé associé à la diffusion de la lumière par la couche supérieure contenant la primaire i lorsque la lumière se propage de haut en bas (resp. de bas en haut). De la même façon, les coefficients e_u et e'_u sont les coefficients Kubelka-Munk généralisés associés à

l'extinction de la lumière par la couche supérieure lorsque la lumière se propage de haut en bas et de bas en haut respectivement ; ce sont les moyennes des coefficients de Kubelka-Munk généralisés e_i et e'_i qui sont associés à l'extinction de la lumière par la demi-couche recto contenant la primaire i lorsque la lumière se propage de haut en bas et de bas en haut respectivement ³.

On obtient des expressions similaires aux formules (8.38) à (8.41) pour la prédiction des facteurs de transfert ρ_d, ρ'_d, τ_d et τ'_d de la demi-couche verso contenant la couleur en demi-ton avec les taux de couverture a'_j et des expressions similaires aux formules (8.44) à (8.48) pour le calcul des coefficients de Kubelka-Munk généralisés s_d, s'_d, e_d et e'_d . On peut alors construire les matrices de transfert \mathbf{A}_u et \mathbf{A}_d associés à la demi-couche recto et à la demi-couche verso respectivement, puis en déduire la matrice de transfert de l'imprimé \mathbf{P}_H à l'aide de la formule (8.37) et en enfin obtenir ses facteurs de transfert R_H, R'_H, T_H et T'_H de l'imprimé en appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice \mathbf{P}_H . Les expressions littérales simplifiées (c'est-à-dire sans dépendance explicite des paramètres du modèle) sont les mêmes que celles obtenues pour le modèle DLRT, nous les écrivons à nouveau ici :

$$R_H = r_s + \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} [\rho_H - r_d (\rho_H \rho'_H - \tau_H \tau'_H)], \quad (8.49)$$

$$T_H = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} \tau_H \quad (8.50)$$

$$R'_H = r_s + \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} [\rho'_H - r_d (\rho_H \rho'_H - \tau_H \tau'_H)], \quad (8.51)$$

$$T'_H = \frac{1}{\Delta} T_{in} T_{out} \tau'_H \quad (8.52)$$

avec $\Delta = (1 - r_d \rho_H)(1 - r_d \rho'_H) - r_d^2 \tau_H \tau'_H$ et :

$$\rho_H = \rho_u + \frac{\tau_u \tau'_u \rho_d}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.53)$$

$$\tau_H = \frac{\tau_u \tau_d}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.54)$$

$$\rho'_H = \rho'_d + \frac{\tau_d \tau'_d \rho'_u}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.55)$$

$$\tau'_H = \frac{\tau'_u \tau'_d}{1 - \rho'_u \rho_d} \quad (8.56)$$

où les facteurs de transfert ρ_u, ρ'_u, τ_u et τ'_u de la demi-couche recto sont donnés par les formules (8.38) à (8.41), les facteurs de transfert ρ_d, ρ'_d, τ_d et τ'_d de la demi-couche verso étant donnés par des formules similaires.

Nous appelons cette méthode de prédiction de couleurs en demi-ton, décrite par l'ensemble des formules (8.38) à (8.48), le *modèle de Kubelka-Munk généralisé appliqué aux imprimés en demi-ton*. Le calibrage de ce modèle se fait de la même façon que celui des modèle DCY et DLRT : il nécessite 8 échantillons imprimés en ton plein dans les primaires de Neugebauer et 36 échantillons de couleurs en demi-ton pour estimer l'engraissement mécanique (voir section 4.4). Nous avons testé ce modèle sur

3. On notera la ressemblance entre les formules (8.44) et la loi de Beer-Lambert-Bouguer [29] concernant les mélanges de colorants dont le coefficient d'absorption $K(\lambda)$ est une combinaison linéaire des coefficients d'absorption $K_i(\lambda)$ des colorants qui constituent le mélange, c'est-à-dire :

$$K(\lambda) = \sum_i c_i K_i(\lambda)$$

où c_i est la concentration relative de chaque colorant. L'analogie avec les couches de couleurs en demi-ton est d'autant plus pertinente que la fréquence de trame de ces dernières est élevée : la juxtaposition des points d'encre mène alors à un mélange pigmentaire uniforme comme dans les mélanges de colorants.

les 36 échantillons utilisés pour les tests des modèles DCY, DPRT et DLRT ; les résultats sont donnés dans la table 8.2.

option min.	modèle de Kubelka-Munk généralisé*	
	Réflectance	Transmittance
A	0,009 — 0,91 (1,68)	0,003 — 1,22 (1,64)
B	0,007 — 0,72 (1,37)	0,002 — 1,08 (1,50)
C	0,004 — 0,84 (1,50)	0,003 — 1,27 (1,87)
D	0,008 — 0,90 (2,10)	0,002 — 1,11 (1,58)
E	0,015 — 1,58 (2,70)	0,002 — 0,99 (1,51)

TABLE 8.2 – Résultats des prédictions de couleurs obtenus avec le modèle de Kubelka-Munk généralisé sur 36 échantillons de couleurs en demi-ton et en mode recto-verso sur une feuille de papier APCO en impression jet d’encre. Les options A et B correspondent à un calibrage double, et les options C, D et E à un calibrage simple. * les 3 nombres correspondent à : moyenne des rms — moyenne des ΔE_{94} (quantile 95).

Les résultats des prédictions des transmittances sont moins bons que ceux obtenus avec le modèle DLRT mais restent toutefois très acceptables : les écarts colorimétriques sont inférieurs à 1,5 unité et les quantile 95 sont inférieurs à 2 unités. En ce qui concerne les prédictions des réflectances, on observe des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle DLRT. On remarque que l’option E permet d’améliorer sensiblement les résultats des prédictions des transmittances (écart colorimétrique inférieur à 1 unité), mais cela se fait au détriment des résultats des prédictions des réflectances (l’écart colorimétrique est supérieur à 1,5 unité alors qu’il est inférieur à 0,9 unité avec les autres options). Globalement, toutes options de minimisation confondues, ce tableau montre que la théorie de Kubelka-Munk, initialement développée pour décrire les transferts de flux dans les milieux diffusants homogènes, peut également être appliquée aux milieux diffusants hétérogènes comme les imprimés en demi-ton.

On trouve dans la littérature d’autres tentatives d’appliquer le formalisme continu de l’approche de Kubelka-Munk aux imprimés en demi-tons qui ont abouti à des modèles prédictifs de réflectances spectrales pour lesquels le modèle de Kubelka-Munk est appliqué dans les points d’encre uniquement [39, 40].

8.3 Modèle MPDYN (« Mean-Path-Defined Yule-Nielsen »)

Cette dernière section théorique s’appuie à nouveau sur la subdivision de l’imprimé en deux demi-couches en développant cette fois-ci une alternative au modèle de Yule-Nielsen présenté au chapitre 4. A l’intérieur d’un milieu diffusant imprimé en demi-ton, la lumière se propage latéralement d’un point d’encre à un autre par de multiples réflexions internes avant de ressortir du milieu : c’est l’effet Yule-Nielsen. Ce phénomène est modélisé de façon empirique par l’introduction dans la formule de Neugebauer d’un paramètre libre n : on obtient alors la formule de Yule-Nielsen (4.4). Ce paramètre n est ajusté de façon à minimiser l’écart quadratique moyen entre les spectres mesurés et les spectres prédits des échantillons de calibrage. On propose dans cette section une modélisation de l’effet Yule-Nielsen basé sur le parcours moyen de la lumière entre deux couches en remplaçant le paramètre libre n par deux termes calculés à partir de la notion de nombre moyen de réflexions internes entre les deux couches. Nous appelons ce modèle, le *modèle de Yule-Nielsen basé sur le parcours moyen*, ou encore en anglais, « Mean-Path-Defined Yule-Nielsen model ».

Nombre moyen de réflexions internes entre deux couches

On considère deux couches diffusantes différentes et non-symétriques de facteurs de transfert ρ_i, ρ'_i, τ_i et τ'_i avec $i = 1, 2$. On a vu au chapitre 5 que les facteurs de transfert de l’empilement de ces deux couches sont donnés par les formules (5.12) à (5.15). Il existe une autre façon d’obtenir ces formules,

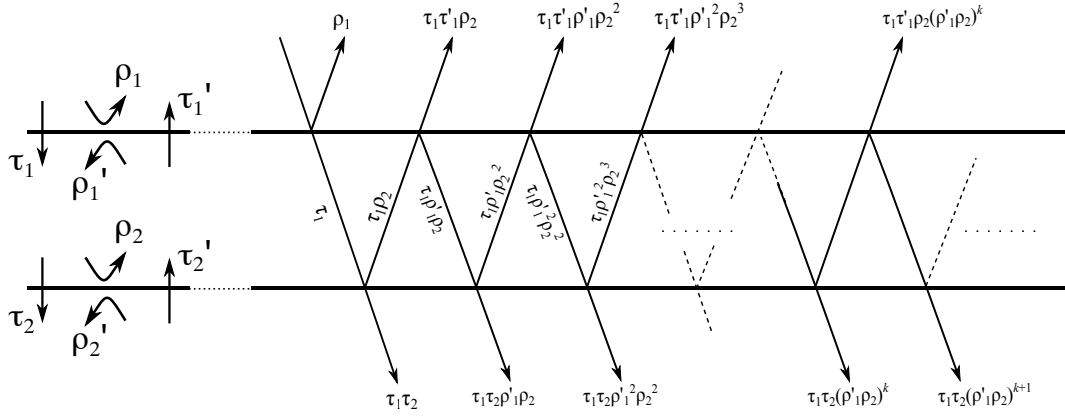


FIGURE 8.6 – Réflexions et transmissions entre deux couches diffusantes non-symétriques.

on la doit à Kubelka qui, dans son étude des milieux diffusants non-symétriques [5], considère tous les chemins possibles de la lumière suite aux réflexions multiples entre les deux couches (voir Fig. 8.6). Le bilan de tous les chemins parcourus par un rayon lumineux mène à des séries géométriques convergentes comme par exemple pour le calcul de la réflectance avant :

$$\rho = \rho_1 + \tau_1 \tau_1' \left(\rho_2 + \rho_1' \rho_2^2 + \rho_1'^2 \rho_2^3 + \dots + \rho_1'^k \rho_2^{k+1} + \dots \right) = \rho_1 + \tau_1 \tau_1' \rho_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\rho_1' \rho_2)^k = \rho_1 + \frac{\tau_1 \tau_1' \rho_2}{1 - \rho_1' \rho_2} \quad (8.57)$$

et de la transmittance vers le bas :

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \left(1 + \rho_1' \rho_2 + \rho_1'^2 \rho_2^2 + \dots + \rho_1'^k \rho_2^k + \dots \right) = \tau_1 \tau_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\rho_1' \rho_2)^k = \frac{\tau_1 \tau_2}{1 - \rho_1' \rho_2} \quad (8.58)$$

On constate qu'avant d'être réfléchi, un rayon lumineux subit un nombre impair de réflexions internes entre les deux couches : k réflexions sur la face intérieure de la couche 1 et $k + 1$ réflexions sur la face supérieure de la couche 2, soit au total $2k + 1$ réflexions internes et une atténuation d'un facteur $\rho_1'^k \rho_2^{k+1}$. On peut alors en déduire le nombre moyen de réflexions internes subies par un rayon lumineux avant de ressortir du milieu (voir la démonstration dans l'annexe J) :

$$n_R = \frac{1 + \rho_1' \rho_2}{1 - \rho_1' \rho_2} \quad (8.59)$$

On en déduit que le nombre moyen de réflexions internes que subit un rayon lumineux avant d'être transmis est :

$$n_T = n_R - 1 = \frac{2\rho_1' \rho_2}{1 - \rho_1' \rho_2} \quad (8.60)$$

Les réflectances ρ_1' et ρ_2 étant des quantités spectrales, il en est de même du nombre moyen de réflexions internes.

Modélisation de l'effet Yule-Nielsen à l'aide des matrices de transfert

On considère que la réflectance R_1 d'une feuille de papier vierge (l'indice 1 fait référence à la primaire blanche, c'est-à-dire à l'absence d'encre) est le résultat d'une succession de n_1 réflexions internes en moyenne. Chacune de ces réflexions contribue à atténuer le flux d'un facteur R_1^{1/n_1} , de sorte que :

$$R_1 = \left(R_1^{1/n_1} \right)^{n_1}$$

De la même façon, la réflectance R_i d'une feuille de papier identique à la précédente imprimée sur une seule face en ton plein dans la primaire $i \neq 1$ est telle que :

$$R_i = \left(R_i^{1/n_i} \right)^{n_i}$$

où n_i est le nombre moyen de réflexions internes que subit la lumière avant de ressortir de l'imprimé.

On considère alors que la réflectance R d'un imprimé en demi-ton dans la primaire i de taux de couverture a_i est le résultat d'une succession de n réflexions internes (en moyenne), chacune de réflectance r , ainsi :

$$R = r^n$$

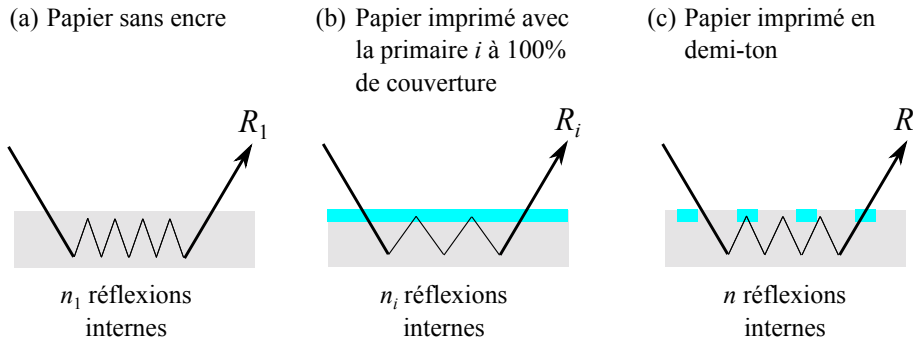


FIGURE 8.7 – *Réflexions internes subies par la lumière avant d'être réfléchi dans le cas d'une feuille de papier vierge (a), imprimée en ton plein (b) et en demi-ton (c).*

On suppose alors que r (resp. n) est la moyenne des réflectances R_1^{1/n_1} et R_i^{1/n_i} (resp. des nombres n_1 et n_i) pondérée par les taux de couverture associés à chaque primaire, $a_1 = 1 - a_i$ pour le blanc et a_i pour la primaire i , c'est-à-dire :

$$r = (1 - a_i) R_1^{1/n_1} + a_i R_i^{1/n_i}$$

et

$$n = (1 - a_i) n_1 + a_i n_i$$

La réflectance du demi-ton s'écrit alors :

$$R = \left[(1 - a_i) R_1^{1/n_1} + a_i R_i^{1/n_i} \right]^{(1 - a_i) n_1 + a_i n_i} \quad (8.61)$$

Le calcul des nombres moyens de réflexions internes n_1 et n_i se fait par la méthode décrite précédemment. Pour le nombre moyen de réflexions internes n_1 dans le papier non-imprimé, on considère que la feuille de papier est une couche diffusante symétrique dont les facteurs de transfert R_1 et T_1 sont mesurés, elle est alors représentée par la matrice de transfert suivante :

$$\mathbf{M}_{11} = \frac{1}{T_1} \begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ R_1 & T_1^2 - R_1^2 \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

On suppose maintenant que la feuille de papier est la superposition de deux demi-couches symétriques identiques, deux fois moins épaisse que la feuille, et dont la matrice de transfert commune \mathbf{A}_{11} est telle que $\mathbf{A}_{11}^2 = \mathbf{M}_{11}$ [voir Fig. 8.8 (a)]. On note ρ_1 et τ_1 les facteurs de transfert associés à la matrice \mathbf{A}_{11} , on a alors :

$$\mathbf{A}_{11} = \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_1 \\ \rho_1 & \tau_1^2 - \rho_1^2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{11}^{1/2}$$

On déduit, à partir de la formule (5.12), la réflectance ρ_1 d'une demi-couche. Ainsi, à partir de la formule (8.59) dans laquelle $\rho'_1 = \rho_2 = \rho_1$, on obtient le nombre moyen de réflexions entre les deux demi-couches identiques symétriques, c'est-à-dire le nombre moyen de réflexions internes dans la feuille de papier vierge :

$$n_1 = \frac{1 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (8.63)$$

Le nombre moyen de réflexions internes n_i dans la feuille imprimée en ton plein dans la primaire i est calculé de la même façon. Les facteurs de transfert de l'imprimé, notés R_i , R'_i , T_i et T'_i , sont mesurés. On peut alors construire la matrice de transfert correspondante :

$$\mathbf{M}_{i1} = \frac{1}{T_i} \begin{pmatrix} 1 & -R'_i \\ R_i & T_i T'_i - R_i R'_i \end{pmatrix}$$

On suppose que l'imprimé est la superposition d'une demi-couche diffusante non-symétrique, de matrice de transfert \mathbf{A}_{i1} , et de la demi-couche diffusante symétrique de matrice de transfert \mathbf{A}_{11} , de sorte que $\mathbf{M}_{i1} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{11}$ [voir Fig. 8.8 (b)]. On note ρ_i , ρ'_i , τ_i et τ'_i les facteurs de transfert associés à \mathbf{A}_{i1} , on a alors :

$$\mathbf{A}_{i1} = \frac{1}{\tau_i} \begin{pmatrix} 1 & -\rho'_i \\ \rho_i & \tau_i \tau'_i - \rho_i \rho'_i \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1}$$

On en déduit les réflectance ρ_i et ρ'_i à l'aide des formules (5.12) et (5.14). Finalement, on obtient le nombre moyen de réflexions internes n_i entre la sous-couche de matrice \mathbf{A}_{i1} et la sous-couche de matrice \mathbf{A}_{11} en appliquant la formule (8.59) en remplaçant ρ'_1 par ρ'_i et ρ_2 par ρ_1 :

$$n_i = \frac{1 + \rho'_i \rho_1}{1 - \rho'_i \rho_1} \quad (8.64)$$

Les réflectances ρ_1 et ρ'_i sont calculées à partir des facteurs de transfert R_i , R'_i , T_i et T'_i mesurés à l'aide d'un spectrophotomètre. Elles dépendent donc de la longueur d'onde : les nombres n_1 et n_i sont donc également des quantités spectrales.



FIGURE 8.8 – Séparation de l'imprimé, sans encre (a) et ton plein (b), en deux demi-couches.

Dans le cas où la lumière est transmise, le nombre moyen de réflexions internes est égal au nombre moyen de réflexions internes dans le cas où la lumière est réfléchi auquel on retranche un (voir Fig. 8.9). On fait alors un raisonnement analogue à celui qui a permis d'obtenir la formule de la réflectance : la transmittance T_j ($j = 1$ dans le cas du papier sans encre ou $j = i$ dans le cas d'un imprimé ton plein dans la primaire i) est le résultat de $n_j - 1$ processus d'atténuation de la lumière de facteur $T_j^{1/(n_j-1)}$ de sorte que :

$$T_j = \left(T_j^{1/(n_j-1)} \right)^{n_j-1}$$

De la même façon, la transmittance T d'un imprimé en demi-ton résulte de n' atténuations successives de la lumière, chacune de facteur t , telles que :

$$T = t^{n'}$$

avec :

$$t = (1 - a_i) T_1^{1/(n_1-1)} + a_i T_i^{1/(n_i-1)}$$

et

$$n' = (1 - a_i) (n_1 - 1) + a_i (n_i - 1)$$

où n_1 et n_i sont donnés par les formules (8.63) et (8.64) respectivement. On obtient alors pour la transmittance une formule similaire à la formule (8.61) :

$$T = \left[(1 - a_i) T_1^{1/(n_1-1)} + a_i T_i^{1/(n_i-1)} \right]^{(1-a_i)n_1 + a_i n_i - 1} \quad (8.65)$$

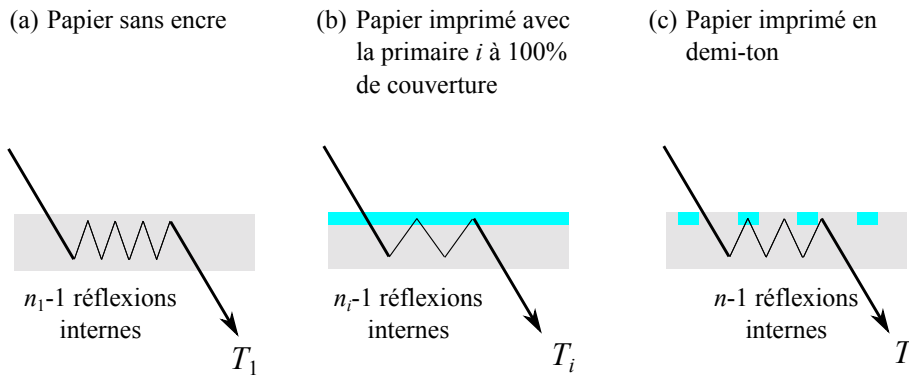


FIGURE 8.9 – Réflexions internes subies par la lumière avant d'être transmise dans le cas d'une feuille de papier vierge (a), imprimée en ton plein (b) et en demi-ton (c) dans la primaire i .

On considère à nouveau l'imprimé en demi-ton monochrome magenta sur papier APCO utilisé dans le chapitre 4 pour illustrer les modèles de Neugebauer et Yule-Nielsen ; le taux de couverture nominal est égal à 50%. La figure 8.10 (a) représente le nombre moyen de réflexions internes subies par la lumière à l'intérieur de support vierge (n_1), de l'imprimé en ton plein (n_3) et de l'imprimé en demi-ton (n). Ce nombre moyen, calculé à l'aide de la formule (8.59), est de l'ordre de 4 : il est fonction de la longueur d'onde mais varie peu selon que le support est imprimé ou pas. La courbe en trait plein, associée au ton plein, est située sous la courbe discontinue, associée au demi-ton : on en déduit que la lumière est d'autant moins réfléchiée que la couche d'encre est absorbante.

A l'aide de la formule (8.61), on calcule la réflectance spectrale de l'imprimé en demi-ton [voir Fig. 8.10 (b)] : le taux de couverture effectif a_3 est alors estimé à 0,51 en utilisant la formule (4.15) pendant l'étape de calibrage du modèle. L'écart quadratique moyen rms et l'écart colorimétrique CIELAB ΔE_{94} entre le spectre prédit et le spectre mesuré sont respectivement égaux à 0,004 et 0,30 (avec le modèle de Yule-Nielsen, ces valeurs sont égales à 0,003 et 0,17 pour une valeur ajustée de $n = 2,6$ et un taux effectif $a_3 = 0,54$). Sur cet exemple, les prédictions sont très bonnes quel que soit le modèle utilisé (dans les deux cas l'écart colorimétrique est très nettement inférieur à 1). Toutefois, on remarquera l'avantage de ce modèle pour lequel les termes n_1 et n_3 sont préalablement calculés, contrairement au paramètre n du modèle de Yule-Nielsen introduit de façon empirique et ajusté de façon à minimiser les écarts entre spectres prédits et spectres mesurés.

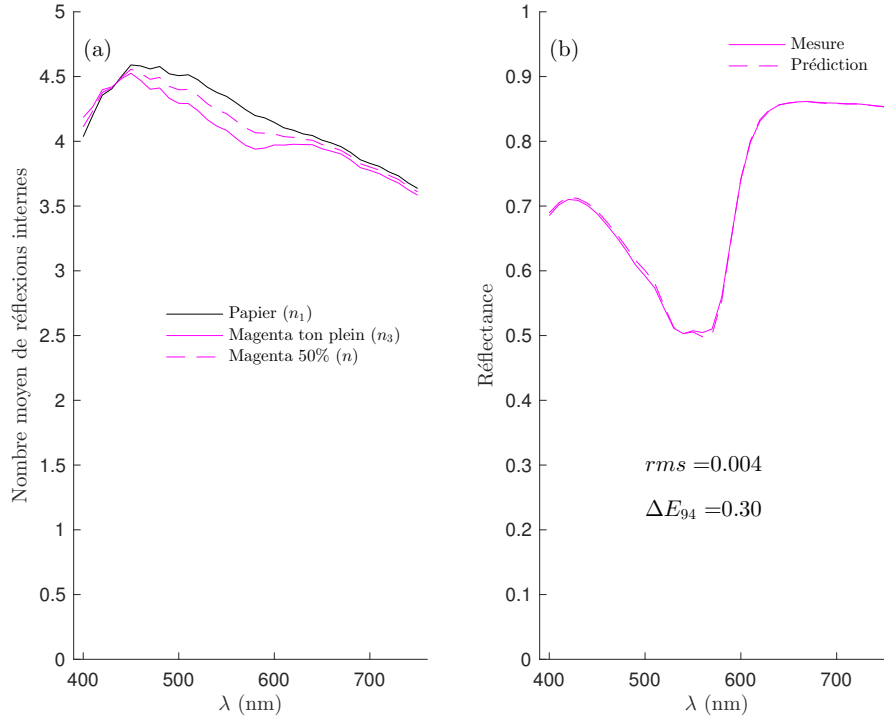


FIGURE 8.10 – (a) *Nombres moyen de réflexions à l'intérieur d'une feuille de papier APCO vierge, imprimée en ton plein et imprimée en demi-ton à 50%.* (b) *Réflectance de l'imprimé en demi-ton à 50% prédite par la formule (8.61) et comparaison avec la réflectance mesurée.*

Ce modèle ne se limite pas aux prédictions de couleurs en demi-ton monochromes : les formules (8.61) et (8.65) se généralisent aux imprimés en demi-ton faisant intervenir les huit primaires de Neugebauer avec des taux de couverture quelconques a_i ; dans ce cas la réflectance avant et la transmittance vers le bas s'écrivent :

$$R = \left[\sum_{i=1}^8 a_i R_i^{1/n_i} \right]^n \quad (8.66)$$

et

$$T = \left[\sum_{i=1}^8 a_i T_i^{1/(n_i-1)} \right]^{n-1} \quad (8.67)$$

où n_i est donné par la formule (8.64) et :

$$n = \sum_{i=1}^8 a_i n_i \quad (8.68)$$

Même si *a priori* la réflectance arrière, R' (c'est-à-dire du côté non-imprimé), et la transmittance vers le haut, T' (très proche de la transmittance vers le bas), n'ont pas grand intérêt dans le cas d'un imprimé en mode recto simple, il existe pour ces dernières des formules similaires à (8.66) et (8.67) :

$$R' = \left[\sum_{i=1}^8 a_i R_i'^{1/n_i} \right]^n \quad (8.69)$$

et

$$T' = \left[\sum_{i=1}^8 a_i T_i'^{1/(n_i-1)} \right]^{n-1} \quad (8.70)$$

où R'_i et T'_i sont respectivement la réflectance arrière et la transmittance vers le haut mesurées sur les 8 échantillons de calibrage imprimés en ton plein dans la primaire de Neugebauer i ; les termes spectraux n_i et n sont donnés par les formules (8.64) et (8.68) respectivement.

Nous avons testé les performances de ce modèle sur 8 échantillons de couleurs en demi-ton différentes, imprimées sur du papier APCO avec une fréquence de trame de 120 lpi. Ces couleurs sont prédites à l'aide des formules (8.66) et (8.67), et l'estimation de l'engraissement mécanique a été établie, pendant la phase de calibrage, à l'aide des formules d'optimisation (4.15) et (4.16) appliquées aux 36 échantillons de calibrage imprimés sur la même feuille de papier que les 8 échantillons de test (voir section 4.4). Les spectres en réflectance et en transmittance des 8 échantillons de test sont mesurés à l'aide du spectrophotomètre Color i7 de la société X-rite. D'un point de vue quantitatif, la précision des prédictions est évaluée (voir Table 8.3) par le calcul de la moyenne des écarts quadratiques moyens et la moyenne des écarts colorimétriques CIELAB ΔE_{94} entre les spectres prédits et les spectres mesurés sur les 8 échantillons de test. Nous donnons également, entre parenthèses, le quantile 95 des écarts colorimétriques (Q95). Les résultats obtenus avec ce modèle sont comparés à ceux obtenus avec le modèle de Yule-Nielsen auquel est associé le paramètre $n = 2, 3$ pour les prédictions des réflectances et $n = 1, 6$ pour les prédictions des transmittances ; ces deux valeurs sont ajustées en utilisant les 36 échantillons de calibrage. On observe de bons résultats pour les deux modèles : les écarts quadratiques moyens sont inférieurs à 1% et les écarts colorimétriques sont inférieurs à 1 unité. On observe des performances équivalentes pour les deux modèles, cependant le modèle de Yule-Nielsen présente l'inconvénient d'avoir à ajuster les deux valeurs du paramètre n avant de pouvoir faire les prédictions des réflectances et des transmittances.

<i>rms — ΔE_{94} (Q95)*</i>			
Modèle MPDYN		Modèle de Yule-Nielsen classique	
Réflectance	Transmittance	Réflectance ($n = 2, 3$)	Transmittance ($n = 1, 6$)
0,006 — 0,68 (1,45)	0,001 — 0,68 (1,42)	0,005 — 0,52 (1,05)	0,005 — 0,75 (1,06)

TABLE 8.3 – *Comparaison des résultats des prédictions de couleurs obtenus avec le modèle MPDYN et le modèle de Yule-Nielsen sur 8 échantillons de couleurs en demi-ton et en mode recto simple sur une feuille de papier APCO en impression jet d'encre.*
* *moyenne des rms — moyenne des ΔE_{94} (quantile 95).*

Cas des couleurs en demi-ton imprimées en recto-verso

Comme pour le modèle de Yule-Nielsen, étendu aux imprimés recto-verso [11], nous proposons une version du modèle MPDYN pour prédire les réflectances et les transmittances spectrales d'un imprimé présentant des couleurs en demi-ton des deux côtés ; on notera A la couleur sur le recto et B celle sur le verso. Dans un premier temps, on suppose que les couleurs A et B sont imprimées en recto simple sur deux feuilles de papier différentes mais de même fabrication [voir Fig. 8.11 (b) et (c)]. On prédit les facteurs de transfert R_A , R'_A , T_A et T'_A de la couleur A grâce à la version recto simple du modèle présentée à la sous-section précédentes [voir formules (8.66) à (8.70)] et on construit la matrice de transfert associée :

$$\mathbf{M}_A = \frac{1}{T_A} \begin{pmatrix} 1 & -R'_A \\ R_A & T_A T'_A - R_A R'_A \end{pmatrix}$$

De la même façon on prédit les facteurs de transfert R_B , R'_B , T_B et T'_B de la couleur B à laquelle on associe la matrice de transfert \mathbf{M}_B :

$$\mathbf{M}_B = \frac{1}{T'_B} \begin{pmatrix} 1 & -R_B \\ R'_B & T_B T'_B - R_B R'_B \end{pmatrix}$$

Les mesures spectrales des facteurs de transfert R_1 et T_1 du support sans encre [voir Fig. 8.11 (a)] permettent de construire la matrice de transfert \mathbf{M}_{11} [voir formule (8.62)]. On considère maintenant que la feuille imprimée en mode recto-simple avec la couleur A sur le recto peut être vue comme une superposition d'une demi-couche supérieure de matrice de transfert $\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ et d'une demi-couche inférieure de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{1/2}$ [voir Fig. 8.11 (b)]. De la même façon, la feuille imprimée en mode recto-simple avec la couleur B sur le verso est une superposition d'une demi-couche supérieure de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{1/2}$ et d'une demi-couche inférieure de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}_B$ [voir Fig. 8.11 (c)]. Par conséquent, la feuille imprimée en mode recto-verso avec la couleur A sur le recto et la couleur B sur le verso est la superposition d'une demi-couche supérieure de matrice de transfert $\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ et d'une demi-couche inférieure de matrice de transfert $\mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}_B$ [voir Fig. 8.11 (d)]. Ainsi, la matrice de transfert \mathbf{M}_{AB} associée à l'imprimé recto-verso est le produit des deux matrices de transfert $\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1/2}$ et $\mathbf{M}_{11}^{-1/2} \cdot \mathbf{M}_B$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{M}_{AB} = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{M}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{M}_B$$

Finalement, les facteurs de transfert R_{AB} , R'_{AB} , T_{AB} et T'_{AB} de l'imprimé recto-verso sont déduits des formules (5.8) à (5.11) appliquées à la matrice \mathbf{M}_{AB} .

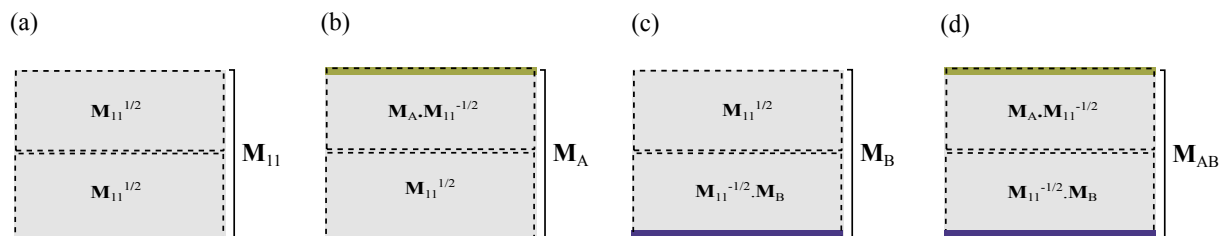


FIGURE 8.11 – Modélisation (d) d'un imprimé recto-verso à partir de (b) et (c) deux imprimés recto simples, et (a) du support sans encre.

La table 8.4 contient les résultats obtenus avec les 36 échantillons imprimés et mesurés en recto-verso sur une feuille de papier APCO et que nous avons déjà utilisés pour tester les modèles précédents. On observe la même tendance que pour les tests réalisés en mode recto simple, à savoir des écarts quadratiques moyens inférieurs à 1% et des écarts colorimétriques ΔE_{94} inférieurs à 1 unité, et ceci aussi bien pour le modèle de Yule-Nielsen que pour le modèle MPDYN.

<i>rms</i> — ΔE_{94} (Q95)*			
Modèle MPDYN		Modèle de Yule-Nielsen	
Réflectance	Transmittance	Réflectance ($n = 2, 3$)	Transmittance ($n = 1, 6$)
0,009 — 0,91 (1,83)	0,002 — 0,95 (1,42)	0,007 — 0,70 (1,36)	0,002 — 0,94 (1,39)

TABLE 8.4 – Comparaison des résultats des prédictions de couleurs obtenus avec le modèle MPDYN et le modèle de Yule-Nielsen sur 36 échantillons de couleurs en demi-ton et en mode recto-verso sur une feuille de papier APCO en impression jet d'encre. * moyenne des *rms* — moyenne des ΔE_{94} (quantile 95).

Le modèle MPDYN, faisant intervenir le nombre moyen de réflexions de la lumière à l'intérieur de l'imprimé pour modéliser l'engraissement optique offre des performances de prédiction de couleurs semblables à celles obtenues avec le modèle de Yule-Nielsen, en présentant l'avantage sur ce dernier de ne pas introduire de paramètre d'ajustement évalué au préalable par minimisation des écarts entre les spectres prédits et mesurés sur un certain nombre d'échantillons.

8.4 Tableau comparatif des résultats

Nous avons testé les modèles présentés dans ce travail (DPRT, DLRT, Kubelka-Munk généralisé et MPDYN) sur des échantillons de couleurs en demi-ton imprimées en recto-verso sur du papier APCO et sur du papier de bureau ordinaire, avec une imprimante jet d'encre (Canon PixmaPro 9500) et une imprimante laser (Xerox Phaser 6500). La table 8.5 présente les résultats obtenus avec un calibrage double pour lequel les taux de couverture effectifs ont été estimés en utilisant l'option de minimisation basée sur la distance CIELAB ΔE_{94} [voir formules (4.15) et (4.16)]. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus avec le modèle de Clapper-Yule (DCY) et le modèle de Yule-Nielsen (YN). Le modèle DPRT, trop long à mettre en œuvre dans sa phase de calibrage, n'a été testé qu'en impression jet d'encre sur papier APCO.

Les échantillons de test imprimés sur papier APCO sont au nombre de 36 en mode jet d'encre et 25 en mode laser. Pour le papier bureau, les tests sont fait sur 64 échantillons en mode jet d'encre et 25 en mode laser. Le tableau donne des écarts colorimétriques CIELAB ΔE_{94} entre les spectres prédits et les spectres mesurés moyennés sur l'ensemble des échantillons de test. On remarque globalement que toutes les valeurs obtenues avec les modèles présentés dans ce travail sont inférieures ou de l'ordre de 1,5 unité. On observe également que, tous modèles confondus, les meilleurs résultats sont obtenus avec le papier APCO en impression jet d'encre. Cela est dû au fait que les caractéristiques du papier APCO (homogénéité, forte diffusion, absence de fluorescence) en font le support le plus approprié aux modèles de transferts à deux flux (voir section 6.1).

Parmi les nouveaux modèles, le modèle DLRT donne globalement les meilleurs résultats (surtout en transmittance), tous supports et tous systèmes d'impression confondus. Cela signifie que, pour du papier APCO et du papier de bureau ordinaire, la séparation de l'imprimé en deux demi-couches est le découpage optimal pour la prédiction simultanée des réflectances et des transmittances spectrales. On observe que le modèle de Kubelka-Munk généralisé, pour lequel chaque demi-couche est elle-même subdivisée en une infinités de sous-couches d'épaisseur infinitésimale, donne des prédictions en réflectance similaires à celles du modèle DLRT et des prédictions en transmittance sensiblement moins précises mais acceptables, confirmant ainsi que l'approche de Kubelka-Munk peut être étendue à la prédiction de couleurs imprimées en demi-ton.

	papier APCO				papier bureau			
	jet d'encre (36 éch.)		laser (25 éch.)		jet d'encre (78 éch.)		laser (25 éch.)	
	R	T	R	T	R	T	R	T
DCY	0,92	1,01	1,52	1,50	1,06	1,58	1,27	2,31
DPRT	0,79	0,89	—	—	—	—	—	—
DLRT	0,76	0,75	1,43	0,87	1,31	1,17	1,39	0,89
KM Gén.	0,72	1,08	1,46	1,61	1,23	1,08	1,36	1,34
YN	0,70	0,94	1,50	1,18	1,10	1,28	1,35	1,38
	($n = 2, 3$)	($n = 1, 6$)	($n = 2, 6$)	($n = 1, 4$)	($n = +\infty$)	($n = +\infty$)	($n = 2, 4$)	($n = 1, 4$)
MPDYN	0,76	0,81	1,47	1,12	1,24	1,70	1,38	1,04

TABLE 8.5 – *Tableau comparatif des résultats obtenus avec les modèles existants (DCY et YN) et les nouveaux modèles (DPRT, DLRT, Kubelka-Munk généralisé et MPDYN) appliqués sur deux supports différents (papier APCO et papier de bureau ordinaire) et pour deux technologies d'impression différentes (jet d'encre et laser). Les valeurs représentent les moyennes des distances CIELAB ΔE_{94} calculées sur le nombre d'échantillons de test.*

Résumé

Afin de proposer une alternative au modèle DPRT qui présente une phase de calibrage trop longue, nous avons présenté dans ce chapitre deux modèles phénoménologiques également construits sur la base des matrices de transfert de flux : le modèle DLRT, dans lequel l'imprimé sans les interfaces est subdivisé en deux demi-couches, et le modèle de Kubelka-Munk généralisé (déjà présenté au chapitre 6, cette fois-ci appliqué aux imprimés en demi-ton) dans lequel les deux demi-couches sont elles-mêmes subdivisées en une infinité de sous-couches identiques. Cette subdivision des couches permet une meilleure modélisation de l'engraissement optique des points d'encre. Ces deux modèles ont en commun avec le modèle DPRT la représentation de la structure globale de l'imprimé, à savoir les deux interfaces d'une part, et une composante contenant le support et les encres d'autre part. Nous avons également introduit un modèle de surface, appelé modèle MPDYN, dont la formulation est proche de celle du modèle de Yule-Nielsen et qui fait intervenir la notion de parcours moyen de la lumière entre deux couches. Ce modèle décrit l'engraissement optique en introduisant dans la formule de Neugebauer deux termes spectraux liés au concept de nombre moyen de réflexions internes entre deux demi-couches. Ces termes, calculés à partir des matrices de transfert des deux demi-couches, ne sont pas des paramètres libres, contrairement au modèle de Yule-Nielsen basé sur l'ajustement d'un unique paramètre afin de minimiser les écarts entre les spectres prédits et les spectres mesurés lors de la phase de calibrage.

En ce qui concerne l'estimation de l'engraissement mécanique, le calibrage des trois modèles peut être effectué par la même méthode que celle déjà utilisée pour les modèles que l'on trouve dans la littérature, et ne nécessite donc qu'un nombre réduit de mesures. Le modèle DLRT semble donner les meilleurs résultats, toutes options de calibrage confondues, et paraît le plus approprié pour faire des prédictions de couleurs en demi-ton sur un support comme le papier APCO, c'est-à-dire, à la fois homogène, symétrique, très diffusant et non-fluorescent. On notera aussi que le modèle de Kubelka-Munk généralisé, moins performant que le modèle DLRT, présente l'intérêt de faire la preuve que la théorie introduite par Kubelka et Munk dans leur article de 1931 pouvait être étendue à des milieux non-symétriques présentant des surfaces non-uniformes en général, et à des imprimés en demi-ton en particulier. Enfin, le modèle MPDYN est un modèle de surface qui prédit les couleurs en demi-ton à l'aide de formules très simples tout en donnant des résultats dont la précision est comparable à celle du modèle DLRT. Il donne également de bons résultats pour prédire des couleurs en impression jet d'encre sur du papier de bureau ordinaire mais également en impression laser aussi bien sur du papier APCO que sur du papier de bureau ordinaire : nous allons voir au chapitre suivant que ces performances sont confirmées par les exemples d'imprimés que nous avons réalisés et qui présentent des effets visuels intéressants difficilement reproductibles sans l'utilisation d'un modèle.

Chapitre 9

Application : impression d'images multi-vues

Un travail de recherche consacré aux modèles de prédiction de couleurs pour imprimés en demi-ton recto-verso se justifie non seulement par la volonté d'affiner la compréhension des phénomènes de propagation de la lumière dans les supports encrés, mais également par le souhait de produire des applications innovantes comme la production d'effets visuels difficilement reproductibles sans avoir recours à un modèle.

La production d'effets visuels par impression sur des supports diffusants peut s'avérer d'un grand intérêt, non seulement dans les arts graphiques pour l'aspect esthétique, mais également dans le domaine de la protection contre la fraude des documents fiduciaires et identitaires. C'est le cas des images multi-vues que nous allons présenter dans ce chapitre, qui affichent deux images différentes selon la position de la source d'éclairage et de l'observateur. Nous allons voir comment un modèle prédictif, dans sa version inversée, permet de calculer les quantités d'encre à déposer sur le recto et le verso pour afficher ces deux images, sans qu'il soit nécessaire de mesurer des milliers de combinaisons de couleurs recto-verso en réflexion et en transmission.

L'industrie de l'impression sécurisée s'intéresse de près aux techniques de production d'images multi-vues comme celles développées par le Laboratoire de Systèmes Périphériques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne où des encres classiques sont combinées avec des encres fluorescentes [78] ou encore avec des encres métalliques [79]. L'imagerie lenticulaire [80], basée sur l'entrelacement de plusieurs images, contribue également à faire connaître le concept d'images multi-vues. A l'inverse de ces techniques, la production d'images multi-vues présentée dans ce travail ne nécessite pas de matériau d'impression (support, encre) ou de source lumineuse d'un type particulier. Au delà de l'impression sécurisée, d'autres applications sont possibles comme des vitrines qui afficheraient deux images différentes selon qu'elles sont éclairées de l'extérieur le jour ou de l'intérieur la nuit, ou encore des QR-codes discrets, qui ne se révéleraient que sous certaines conditions d'observation, pour satisfaire les exigences esthétiques par exemple dans le secteur du luxe (cette problématique est actuellement à l'étude en partenariat avec une étudiante en design du Politecnico de Milan).

Lorsqu'on regarde un imprimé recto-verso par transparence (observation en transmission), les couleurs recto et verso se superposent pour former une nouvelle image dont la couleur dépend de la lumière ambiante (voir Fig. 9.1) : la perception de cette couleur n'est pas la même selon que l'observation se fait dans une pièce obscure en direction d'une source lumineuse directionnelle, dans une pièce éclairée par la lumière du jour, ou encore en extérieur. Par conséquent, l'ajustement des quantités d'encre à déposer sur le recto et le verso pour obtenir une couleur donnée (couleur cible), dépend lui aussi de la lumière ambiante qui est en partie transmise à travers l'imprimé et en partie réfléchi par ce dernier. La détermination de ces quantités d'encre nécessite donc d'utiliser un modèle capable de prédire simultanément la réflectance et la transmittance de l'imprimé, comme le font les modèles présentés dans les chapitres précédents.

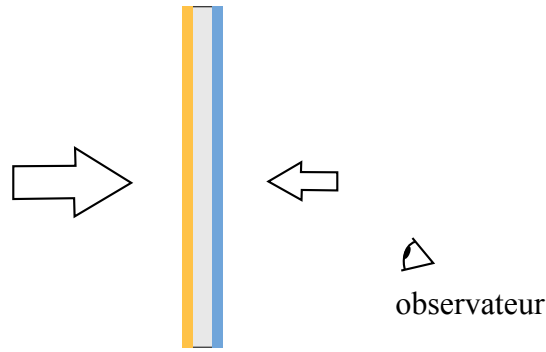


FIGURE 9.1 – Observation en transmission d’un imprimé en recto-verso avec des proportions d’éclairement différentes des deux côtés de l’imprimé.

Nous commençons par une présentation schématique du principe général des images multi-vues sur un cas simple (section 9.1), puis nous continuons par une description détaillée de la méthode d’ajustement des quantités d’encre à l’aide des modèles (section 9.2), enfin nous finissons ce chapitre par la présentation de quelques exemples d’images multi-vues que nous avons obtenues (9.3).

9.1 Images multi-vues

On considère une feuille de papier sur laquelle est imprimé, sur le côté recto, un motif carré avec une couleur dont les taux de couverture c_1 , m_1 et y_1 dans les trois encres primaires cyan, magenta et jaune, sont fixés arbitrairement [voir Fig. 9.2 (a)] : on note cette couleur $\mathbf{a}_1 = (c_1, m_1, y_1)$. Sur le côté opposé, en correspondance avec la couleur \mathbf{a}_1 , on imprime le même motif carré dans une couleur $\mathbf{a}_2 = (c_2, m_2, y_2)$, pour laquelle c_2 , m_2 et y_2 sont également choisis au hasard [voir Fig. 9.2 (b)]. Lorsqu’on observe le côté verso de l’imprimé en transmission, on obtient une couleur appelée « couleur cible » [voir Fig. 9.2 (c)]. Sur le côté recto, on imprime à nouveau un motif carré, adjacent au premier, dans une couleur $\mathbf{a}_3 = (c_3, m_3, y_3)$ pour laquelle les taux c_3 , m_3 et y_3 sont arbitraires [voir Fig. 9.2 (d)]. L’ajustement de couleurs entre les deux côtés de l’imprimé consiste alors à déterminer la couleur $\mathbf{a}_4 = (c_4, m_4, y_4)$ qu’il faut imprimer sur le verso en correspondance de la couleur \mathbf{a}_3 pour que la couleur observée en transmission soit la plus proche possible de la couleur cible [voir Fig. 9.2 (e) et (f)]. Les taux de couverture c_4 , m_4 et y_4 de la couleur \mathbf{a}_4 sont calculés par un modèle prédictif utilisé en mode inverse, c’est-à-dire en calculant les couleurs prédites pour un grand nombre de combinaisons de c , m et y , puis en retenant celle qui correspond à la couleur dont le rendu visuel est le plus proche possible de celui de la couleur cible.

9.2 Ajustement des couleurs

L’observation en transmission suppose qu’une partie de la lumière provenant de l’arrière de l’imprimé, entrant par le côté opposé au côté directement observé, est transmise par l’imprimé, et qu’une partie de la lumière provenant de l’avant se réfléchit sur le côté directement observé. Le côté directement observé est celui contenant la couleur d’ajustement prédite par le modèle, c’est-à-dire ici, le côté verso. On suppose que la distribution spectrale de puissance de la source lumineuse est identique des deux côtés de l’imprimé ; on note $E(\lambda)$ l’éclairement spectrique produit par cette source lumineuse. Cependant, lorsque l’imprimé est observé en transmission, notamment dans une pièce éclairée par la lumière du jour, les proportions d’éclairement ne sont pas les mêmes des deux côtés de l’imprimé : on suppose que l’éclairement sur le verso est égal à $uE(\lambda)$ et que l’éclairement sur le recto est égal à $(1-u)E(\lambda)$ avec $0 \leq u \leq 1$. On note $\mathbf{a} = (c, m, y)$ et $\mathbf{a}' = (c', m', y')$ les taux de couverture des encres du côté recto et du côté verso respectivement. La réflectance spectrale sur le verso est notée $R'(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda)$ et la transmittance spectrale est notée $T(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda)$. Ainsi, lorsqu’on observe en transmission un point de l’imprimé sur le verso, on perçoit la luminance spectrale :

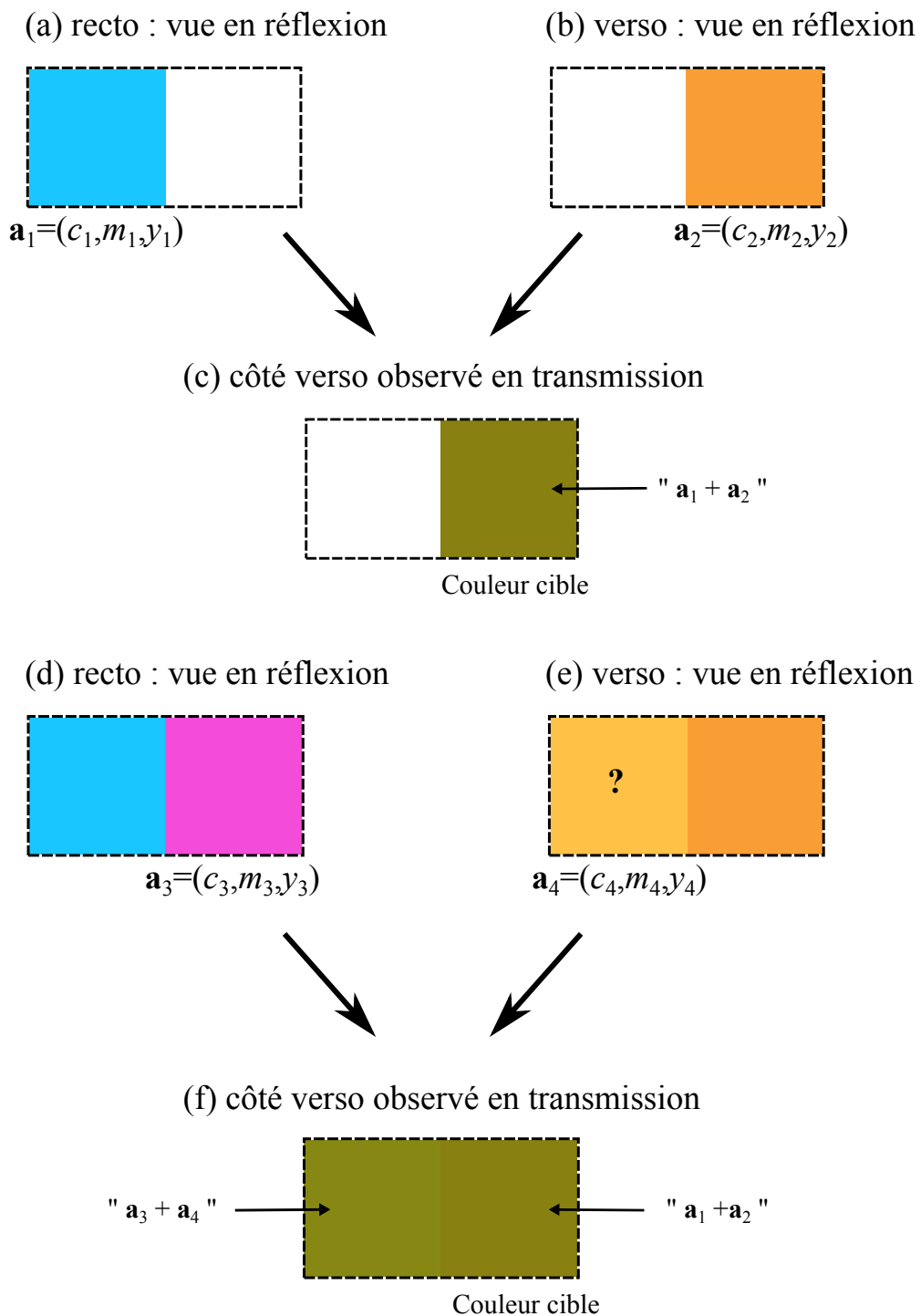


FIGURE 9.2 – Principe général de l'impression d'une image multivues.

$$L'(u, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) = [uR'(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) + (1 - u)T(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda)] \frac{E(\lambda)}{\pi}$$

Dans la pratique, seule la luminance spectrale normalisée, indépendante de l'illuminant $E(\lambda)$, est nécessaire :

$$S'(u, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) = \frac{\pi L'(u, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda)}{E(\lambda)} = uR'(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) + (1 - u)T(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) \quad (9.1)$$

De la même façon, si on observe en transmission un point du côté recto, la luminance normalisée s'écrit :

$$S(u, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) = (1 - u)R(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) + uT(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda) \quad (9.2)$$

où $R(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda)$ est la réflectance sur le côté recto et $T'(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \lambda)$ est la transmittance lorsque la lumière entre par le verso.

Si on reprend les notations de la figure 9.2, l'ajustement de couleurs pour une vue en transmission du côté verso se fait de la façon suivante :

1. on fixe u , le pourcentage de l'éclairement sur le côté de l'imprimé directement observé (ici le côté verso); u est de l'ordre de 10 % dans une pièce éclairée par la lumière du jour, et $u = 0$ dans une pièce obscure.
2. à l'aide d'un modèle de prédiction de couleurs, on calcule la réflectance spectrale $R'(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda)$ de l'imprimé sur le côté verso, et la transmittance spectrale $T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda)$, puis on en déduit, à l'aide de la formule (9.1), la luminance spectrale normalisée pour la couleur cible :

$$S'(u, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda) = uR'(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda) + (1 - u)T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda)$$

3. à l'aide du même modèle, on calcule pour un grand nombre de combinaisons de c , m et y , la réflectance spectrale sur le côté verso, notée $R'(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda)$, et la transmittance spectrale, notée $T(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda)$, avec $\mathbf{a} = (c, m, y)$, on obtient alors :

$$S'(u, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda) = uR'(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda) + (1 - u)T(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda)$$

4. l'ajustement est obtenu pour la couleur $\mathbf{a}_4 = (c_4, m_4, y_4)$ qui minimise la distance CIELAB ΔE_{94} entre la luminance spectrale cible $S'(u, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda)$ et la luminance spectrale ajustée $S'(u, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda)$, c'est-à-dire :

$$a_4 = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \Delta E_{94} [S'(u, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \lambda), S'(u, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}, \lambda)]$$

9.3 Exemples d'images multi-vues

Le premier exemple que nous proposons est une image multi-vues obtenue sur du papier APCO en impression jet d'encre avec l'imprimante Canon Pixma Pro 9500. Une mosaïque de quatre couleurs est imprimée sur le côté recto de l'imprimé [voir Fig. 9.3 (a)] et une mosaïque de quatre autres couleurs est imprimée sur le côté verso [voir Fig. 9.3 (b)]. La figure 9.3 (c) met en évidence l'observation d'une image multi-vues lorsque l'imprimé est éclairé uniquement par l'arrière dans une pièce obscure et lorsque le verso est observé en transmission. Cette image multi-vues révèle deux couleurs cibles, chacune obtenue à partir de quatre couples de couleurs. Les conditions d'éclairage font que la réflectance n'est pas prise en considération dans la phase d'ajustement car le côté recto de l'imprimé, c'est-à-dire le côté directement observé, est dans l'obscurité. Cela revient à considérer que $u = 0$ dans la formule (9.1). L'ajustement, qui se fait donc uniquement sur la transmittance, conduit à des taux de couverture dont les valeurs sont intuitives car chaque encre doit être en quantités sensiblement identiques pour la couleur cible et la couleur ajustée. En d'autres termes, si la couleur cible est « $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ » avec $\mathbf{a}_1 = (c_1, m_1, y_1)$ et $\mathbf{a}_2 = (c_2, m_2, y_2)$, et si la couleur ajustée est « $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ » avec $\mathbf{a}_3 = (c_3, m_3, y_3)$ connue, et $\mathbf{a}_4 = (c_4, m_4, y_4)$ à déterminer, alors on a approximativement :

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= c_3 + c_4 \\
m_1 + m_2 &= m_3 + m_4 \\
y_1 + y_2 &= y_3 + y_4
\end{aligned}$$

De leur côté, les modèles prédictifs donne des résultats très proches (à un ou deux pourcents près) de ceux obtenues avec ces trois équations, qui sont par ailleurs accessibles au premier faussaire venu. Par conséquent, si la production d'images multi-vues en milieu obscur apporte une validation supplémentaire de la performance des modèles prédictifs, elle n'est pas une solution très intéressante pour la production d'effet visuels, notamment dans l'industrie de l'impression sécurisée.

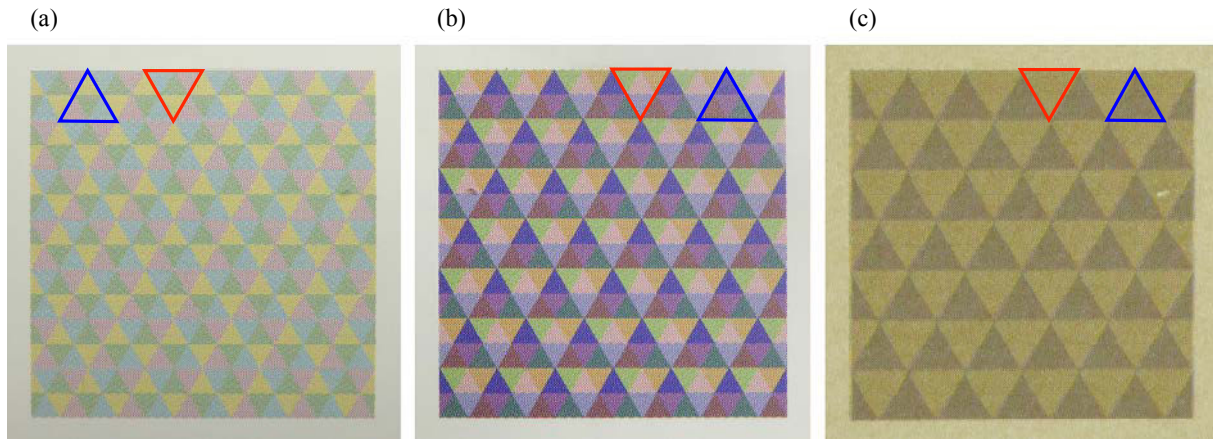


FIGURE 9.3 – *Image multi-vues avec deux couleurs cibles. Observation en réflexion (a) de la face recto, (b) de la face verso et (c) observation en transmission de la face verso. Chacune des deux couleurs cibles est obtenue de quatre façons différentes en ajustant quatre couples de couleur différents : la couleur claire (triangle rouge) est obtenue par ajustement des quatre couleurs à l'intérieur du triangle rouge du côté recto et des quatre couleurs à l'intérieur du triangle rouge du côté verso (idem pour la couleur sombre dans le triangle bleu).*

Le deuxième exemple est une image multi-vues contenant également deux couleurs cibles différentes mais obtenue dans des conditions d'éclairage différentes de celles de l'exemple précédent et imprimée sur du papier de bureau ordinaire avec l'imprimante laser Xerox Phaser 6500. La figure 9.4 (a) montre quatre couleurs arbitraires imprimées sur le recto observé en réflexion. La figure 9.4 (b) montre le verso observé en réflexion : les deux couleurs sur la partie gauche sont arbitraires et les deux autres ont été prédites de sorte que le verso de l'imprimé, observé en transmission dans une pièce éclairée par la lumière du jour (10 % d'éclairage sur le côté verso et 90% sur le côté recto), ne révèle plus que deux couleurs différentes [voir Fig. 9.4]. Contrairement à l'exemple précédent, les taux de couverture obtenus à l'aide d'un modèle prédictif à l'issue de la phase d'ajustement ne sont pas intuitifs, et ne pourraient être déterminés de façon empirique qu'après des milliers de tests.

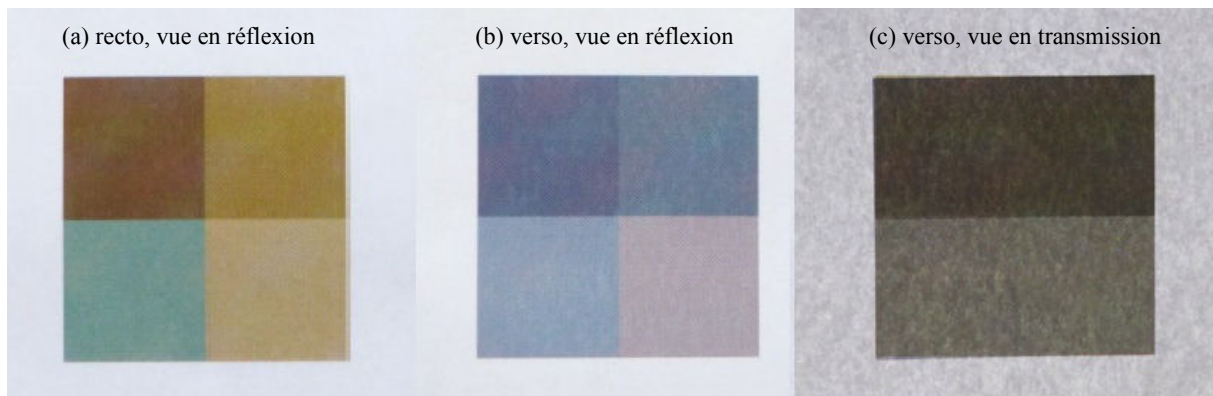


FIGURE 9.4 – *Image multi-vues avec deux couleurs cibles. Observation en réflexion (a) de la face recto, (b) de la face verso et (c) observation en transmission de la face verso.*

Pour finir, nous présentons le cas des images multi-vues obtenues par superposition de deux imprimés en recto-simple (ou de façon équivalente par pliage d'un seul imprimé en recto-verso [voir Fig. 9.2], et l'ajustement des couleurs se fait également en utilisant la formule (9.1) dans laquelle T et R' sont respectivement la transmittance et la réflectance de la superposition des deux imprimés recto simple. Dans la pratique, on utilise un modèle prédictif pour calculer les réflectances spectrales, avant et arrière, et les transmittances spectrales, vers le haut et vers le bas, des deux imprimés en recto simple, puis à l'aide des formules de superposition (5.13) et (5.14), on en déduit T et R' . La figure 9.5 montre une image en recto-verso composée de la superposition de deux images en recto simple. L'ajustement de couleur a été calculé de façon à considérer des proportions d'éclairement de 10 % sur le côté verso et 90 % sur le côté recto. Quand les conditions d'éclairement sont sensiblement modifiées (ici par l'ombre d'une main derrière l'imprimé), alors l'effet visuel disparaît localement et les deux images imprimées sur le côté verso sont visibles simultanément. La bonne qualité de l'effet visuel est assurée par la performance du modèle utilisé pour calculer les quantités d'encre. Ces images ont été conçues avec Photoshop puis imprimées sur papier de bureau ordinaire avec l'imprimante laser Xerox Phaser 6500 par Nicolas Dalloz, étudiant en deuxième année de cycle ingénieur à l'Institut d'Optique Graduate School.

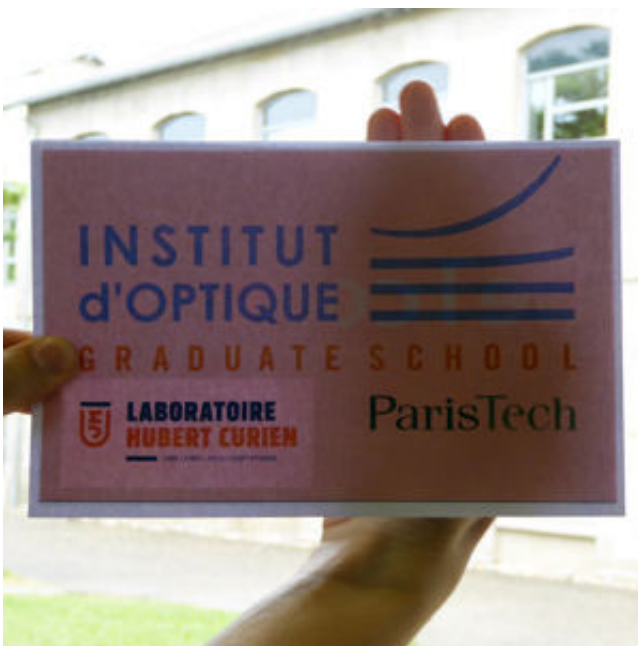
(a)



(b)



(c)



(d)



FIGURE 9.5 – Images multi-vues réalisée par superposition de deux imprimés en recto-simple. (a) côté recto et (b) côté verso observés dans les conditions d'éclairage désirées; (c) côté verso avec une ombre derrière modifiant les conditions d'éclairage; (d) côté verso vu en réflexion pure.

Résumé

Nous avons montré que les modèles de prédiction de couleurs constituent une méthode originale et d'utilisation simple pour la production d'images multi-vues sur des imprimés recto-verso, incluant le cas où les deux côtés de l'imprimé sont simultanément éclairés. Les modèles sont utilisés en mode inversé afin de calculer les quantités d'encre qui permettent d'ajuster les couleurs de part et d'autre de l'imprimé afin d'obtenir l'effet visuel dans les conditions d'éclairage voulues. Nous avons obtenus des résultats intéressants où l'effet visuel est très bien reproduit avec des imprimés en recto-verso constitué d'une feuille unique mais également d'une superposition de deux feuilles imprimées en recto-simple, confirmant ainsi la bonne précision des modèles développés dans ce travail.

Chapitre 10

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire s'intéressent à la prédiction des couleurs imprimées en demi-ton et en recto-verso sur des supports diffusants. Après avoir fait un tour d'horizon des modèles classiques de la littérature qui représentent l'imprimé comme une couche purement absorbante (les encres) au dessus d'une couche très diffusante (le papier), nous avons rappelé que cette représentation structurelle de l'imprimé induisait parfois un désaccord entre la théorie et les mesures, notamment pour le modèle de Clapper-Yule en ce qui concerne les transmittances intrinsèques des encres, différentes selon qu'elles sont déterminées à partir des mesures des réflectances ou des transmittances des primaires. Pour remédier à cela, nous avons proposé une structure simplifiée de l'imprimé qui intègre toutes ses irrégularités considérées alors globalement dans une macro-structure dans laquelle les encres et le support sont indissociables. Cette macro-structure peut ensuite être subdivisée en sous-couches pour moduler la manière dont les flux « colorés » par les points d'encre se mélangent à mesure qu'ils se propagent dans le support diffusant. Nous avons également proposé une alternative dans la façon de décrire la propagation de la lumière dans l'imprimé en introduisant les matrices de transfert de flux pour prédire simultanément les réflectances et les transmittances spectrales. Ces changements, à la fois de la structure de l'imprimé et du cadre mathématique pour décrire les transferts de flux, mènent à des modèles prédictifs dont la précision est similaire, voire supérieure, à celle des modèles préexistants. Cette performance est confirmée lorsque ces modèles sont utilisés, en mode inversé, pour calculer les quantités d'encre à déposer des deux côtés de l'imprimé afin de produire des zones perçues comme ayant la même couleur dans des images multi-vues.

Les modèles disponibles aujourd'hui sont restreints aux imprimés dont les matériaux (papier, encres, éventuellement couche de protection) sont très peu, ou au contraire très fortement diffusants. Par chance, ce sont des types de matériau les plus souvent utilisés en imprimerie. Les encres colorées sont conçues de manière à diffuser la lumière le moins possible afin d'optimiser leur pouvoir absorbant et de garantir une gamme de couleurs reproductibles étendue. Les encres blanches utilisées pour opacifier des supports transparents d'emballage sont au contraire fortement diffusantes pour obtenir une bonne opacité du support et permettre d'imprimer par-dessus des images en couleur. Concernant les supports, les papiers, cartons et polymères opaques sont généralement très diffusants, alors que les films polymères transparents ne le sont pas du tout. Par conséquent, ni les imprimeurs, ni les équipes de recherche spécialisées dans le rendu des surfaces imprimées, ne se sont pas vraiment intéressés aux imprimés translucides, ou semi-diffusants, présentant un pouvoir diffusant intermédiaire. Il est d'ailleurs fort probable que ces imprimés translucides soient peu utilisés justement parce qu'ils ne bénéficient d'aucune méthode valable pour la gestion des couleurs : ni les modèles mathématiques d'interpolation, ni les modèles prédictifs disponibles à ce jour ne permettent de prédire correctement leurs réflectances ou transmittances spectrales. Les modèles proposés ici, même s'ils n'ont pas véritablement été testés avec des matériaux translucides, ont peu de chances d'être beaucoup plus précis compte tenu des limitations connues de la théorie à deux-flux [71].

La propagation de la lumière dans les matériaux semi-diffusants a été abondamment étudiée depuis la création par Chandrasekhar du modèle de transfert radiatif [32], dans le cas de couches uniformes. Mais aucune des méthodes de transfert radiatif proposées à ce jour ne laisse entrevoir une transposition de complexité raisonnable pour les imprimés en demi-ton, qui, eux, ne sont pas uniformes dans les directions perpendiculaires à celle de propagation du rayonnement. Les solutions pour aborder les imprimés en demi-ton translucides sont à chercher du côté des modèles de transfert radiatifs simplifiés tels le modèle à 4-flux [87, 88, 89, 90, 91] qui décrit la diffusion lumineuse à travers la propagation de flux collimatés et parfaitement diffus, ou le modèle à N flux qui décrit la propagation à différents angles [49]. Nous savons déjà, à travers les travaux auxquels nous avons contribué dans le cas de couches uniformes, que le formalisme matriciel présenté dans ce mémoire pour deux flux peut s'étendre à 4 flux en considérant des matrices de transfert 4×4 tout en maintenant des équations similaires [81, 82]. Il reste à tester cette méthode sur des imprimés en demi-ton, avec les différentes approches que nous avons exposées concernant la description de leur structure (support encre vu comme une seule couche effective, éventuellement subdivisée en plusieurs sous-couches). Les bons résultats que nous avons obtenus jusqu'ici avec deux flux sont la preuve que l'approche matricielle constitue une piste intéressante et prometteuse pour aborder, avec un nombre de flux plus élevé, le cas des imprimés translucides. D'un point de vue applicatif, la translucidité reste une possibilité inexploitée dans les arts graphiques, qui peut intéresser en premier lieu le domaine de l'impression sécurisée : on imagine en effet que des effets visuels très difficiles à reproduire puisse être ainsi conçus.

Un autre phénomène physique qui mériterait d'être considéré dans les modèles est la fluorescence. Un certain nombre d'auteurs s'y sont intéressés, qu'il s'agisse de la fluorescence dans le support (à cause des azurants optiques) ou dans les encres. Parmi ces travaux, on trouve une extension du modèle de Kubelka-Munk aux milieux fluorescents [83, 84] mais aussi des modèles prédictifs pour des imprimés avec support fluorescent et encres non-fluorescentes [77] et pour des imprimés avec support non-fluorescent et encres fluorescentes [85, 86]. Les bases théoriques de ces travaux sont celles que l'on rencontre dans les théories de Kubelka-Munk, de Clapper-Yule et de Yule-Nielsen. Or, grâce à l'approche des matrices de transfert, nous avons montré à travers les modèles développés dans ce travail qu'il existe un lien entre les principes *a priori* différents rencontrés dans ces théories. Pour cette raison, nous pensons qu'une extension aux encres et/ou aux supports fluorescents d'un modèle de prédiction de couleurs basé sur les matrices de transfert de flux doit être possible.

Notons pour finir que le concept d'images multi-vues basé sur des ajustements de couleur, et la réalisation de telles images reste un travail fastidieux, et empirique. La difficulté pour le graphiste est que les images numériques à transférer sur le recto et le verso, et celles que l'on souhaite afficher dans les différents modes d'observation, ne sont pas les mêmes. Ceci entraîne une gymnastique d'esprit assez acrobatique, d'autant plus difficile que certaines combinaisons de couleurs à afficher dans les différents modes ne sont pas réalisables (c'est le cas par exemple si un mode exige que le recto soit noir et un autre mode exige qu'il soit jaune). La réalisation d'images multi-vues n'est donc pas seulement une question de développement informatique pour concevoir des logiciels graphiques adaptés à ce type d'images : elle nécessite au préalable un travail théorique en sciences de l'image que nous prévoyons d'ores et déjà de mener.

Liste des publications

Travaux parus :

1. **Mazauric, S.**, Hébert, M., Simonot, L., Fournel, T. (2014), Two-flux matrix model for predicting the reflectance and the transmittance of duplex halftone prints, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 2775-2788.
2. Hébert, M., Nébouy, D., **Mazauric, S.** (2015), Color and spectral mining in printed surfaces, *LNCS 9016 Computational Color Imaging Workshop*, 3-15.
3. Hébert, M., **Mazauric, S.**, Simonot, L. (2015), Assessing the capacity of two-flux models to predict the spectral properties of layered materials, *IS&T Electronic Imaging Symposium, Measuring, modeling, reproduction materials appearance*, San Francisco, USA, 14-18 February 2015.
4. Hébert, M., **Mazauric, S.**, Fournel, T. (2015), Spectral mixing approach for modeling the coloration of surfaces, *Workshop on Information Optics*, Kyoto, Japan, 1-5 June 2015.
5. **Mazauric, S.**, Hébert, M., Fournel, T. (2015), Model-based design of recto-verso prints displaying different images according to the illuminated face, *23rd Color and Imaging Conference, Color Science and Engineering Systems, Technologies, and Applications*, Darmstadt, Germany, 19-23 October 2015.
6. Simonot, L., Hersch, R. D., Hébert, M., **Mazauric, S.** (2016), Multilayer four-flux matrix model accounting for directional-diffuse light transfers, *Applied Optics* **55**, 27-37.

Travaux acceptés pour publication :

1. Dalloz, N., **Mazauric, S.**, Hébert, M., Fournel, T. (2017), How to design a recto-verso print displaying different images in various everyday-life lighting conditions, *IS&T Electronic Imaging Symposium, Material appearance*, San Francisco, USA, 30 January – 3 February 2017.
2. Simonot, L., Hébert, M., **Mazauric, S.**, Hersch, R.D. (2017), Assessing the proper color of translucent materials by an extended two-flux model from measurements based on an integrating sphere, *IS&T Electronic Imaging Symposium, Material appearance*, San Francisco, USA, 30 January – 3 February 2017.

Annexes

Annexe A

Inversion du modèle de Kubelka-Munk

Dans le chapitre 3, nous avons écrit les formules d'inversion qui donnent les expressions des coefficients de Kubelka-Munk K et S en fonction des facteurs de transfert ρ et τ d'une couche diffusante. Nous proposons ici d'en faire la démonstration.

D'après les formules (3.14) et (3.15) on a :

$$\sinh(bSh) = \frac{b\rho}{\tau}$$

Donc, en utilisant la relation :

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

On obtient l'expression suivante :

$$Sh = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{b\rho}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{b\rho}{\tau}\right)^2 + 1}\right)$$

On développe d'abord l'expression $(b\rho/\tau)^2 + 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{b\rho}{\tau}\right)^2 + 1 &= \frac{b^2\rho^2 + \tau^2}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2} \times (a^2\rho^2 - \rho^2 + \tau^2) = \frac{1}{\tau^2} \times \left[\left(\frac{\rho^2 - \tau^2 + 1}{2\rho}\right)^2 \rho^2 - \rho^2 + \tau^2\right] \\ &= \frac{1}{\tau^2} \times \left[\frac{\rho^4 + \tau^4 + 1 + 2\rho^2 - 2\tau^2 - 2\rho^2\tau^2 - 4\rho^2 + 4\tau^2}{4}\right] = \frac{1}{4\tau^2} \times (\rho^2 - \tau^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

En remarquant que la quantité $\rho^2 - \tau^2 - 1$ est négative, on en déduit que :

$$\frac{b\rho}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{b\rho}{\tau}\right)^2 + 1} = \frac{b\rho}{\tau} - \frac{\rho^2 - \tau^2 - 1}{2\tau} = \frac{2b\rho - (\rho^2 + \tau^2 + 1) + 2}{2\tau} = \frac{2b\rho - 2a\rho + 2}{2\tau} = \frac{1 - \rho(a - b)}{\tau}$$

Finalement, on obtient l'expression :

$$Sh = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{1 - \rho(a - b)}{\tau}\right)$$

Pour obtenir l'expression de Kh on utilise la relation $a = (K + S)/S$ ou encore $K = (a - 1)S$, ainsi :

$$Kh = \frac{a - 1}{b} \ln \left(\frac{1 - \rho(a - b)}{\tau} \right)$$

Annexe B

Superposition de n couches non-symétriques identiques

Le calcul des facteurs de transfert d'une superposition de n couches non-symétriques identiques passe par la diagonalisation de la matrice de transfert \mathbf{M} d'une couche individuelle (voir section 6.1). Nous avons présenté les expressions de ces facteurs sous une forme faisant intervenir les fonctions hyperboliques \cosh et \sinh . Nous proposons de montrer en détail comment ces expressions sont obtenues.

On note μ et ν les valeurs propres de \mathbf{M} , elles sont solutions du système :

$$\begin{cases} \mu\nu = \det \mathbf{M} = \frac{t'}{t} \\ \mu + \nu = \text{tr} \mathbf{M} = \frac{tt' - rr' + 1}{t} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $\text{tr} \mathbf{M}$ désigne la trace de la matrice \mathbf{M} , c'est-à-dire la somme des termes de la diagonale principale.

La résolution de ce système est équivalente à la résolution de l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - \text{tr} \mathbf{M} X + \det \mathbf{M} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Le discriminant de l'équation (B.2) s'écrit :

$$\Delta = (\text{tr} \mathbf{M})^2 - 4 \det \mathbf{M} = \frac{1}{t^2} [(tt' - rr' + 1)^2 - 4tt'] = \frac{1}{t^2} [(rr' - tt' + 1)^2 - 4rr'] = \frac{4rr'}{t^2} \left[\left(\frac{rr' - tt' + 1}{2\sqrt{rr'}} \right)^2 - 1 \right]$$

On introduit les notations suivantes :

$$\alpha = \frac{rr' - tt' + 1}{2\sqrt{rr'}} \quad (\text{B.3})$$

et

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (\text{B.4})$$

Les solutions de l'équation (B.2) s'écrivent alors :

$$\mu = \frac{1}{t} \left[1 - \sqrt{rr'} (\alpha + \beta) \right] \quad (\text{B.5})$$

et

$$\nu = \frac{1}{t} \left[1 - \sqrt{rr'} (\alpha - \beta) \right] \quad (\text{B.6})$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres μ et ν sont respectivement $(r', 1 - \mu t)^T$ et $(r', 1 - \nu t)^T$. On peut donc décomposer la matrice de transfert de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} r' & r' \\ 1 - \mu t & 1 - \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & r' \\ 1 - \mu t & 1 - \nu t \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r't(\mu - \nu)} \begin{pmatrix} r' & r' \\ 1 - \mu t & 1 - \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \nu t & -r' \\ -(1 - \mu t) & r' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on met facilement en évidence les relations suivantes :

$$t(\mu - \nu) = 2\beta\sqrt{rr'} \quad (\text{B.7})$$

$$1 - \mu t = \sqrt{rr'}(\alpha + \beta) \quad (\text{B.8})$$

$$1 - \nu t = \sqrt{rr'}(\alpha - \beta) \quad (\text{B.9})$$

En tenant compte des relations (B.7) à (B.9), la décomposition de \mathbf{M} s'écrit :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha + \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta - \alpha & \sqrt{r'/r} \\ \alpha + \beta & -\sqrt{r'/r} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La puissance $n^{\text{ème}}$ de \mathbf{M} s'obtient en élevant les valeurs propres μ et ν à la puissance n :

$$\mathbf{M}^n = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha + \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^n & 0 \\ 0 & \nu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta - \alpha & \sqrt{r'/r} \\ \alpha + \beta & -\sqrt{r'/r} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

En développant les calculs on obtient :

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\beta} \begin{pmatrix} \nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta) & -(\mu^n - \nu^n)\sqrt{r'/r} \\ (\mu^n - \nu^n)\sqrt{r'/r} & \mu^n(\alpha + \beta) - \nu^n(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

On applique les formules (5.8) à (5.11) à la matrice (B.12) et on obtient :

$$T = \frac{1}{m_{11}} = \frac{2\beta}{\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)} \quad (\text{B.13})$$

$$R = \frac{m_{21}}{m_{11}} = \frac{(\nu^n - \mu^n)\sqrt{r'/r}}{\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)} \quad (\text{B.14})$$

$$R' = -\frac{m_{12}}{m_{11}} = \frac{(\nu^n - \mu^n)\sqrt{r'/r}}{\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)} = R\sqrt{\frac{r'}{r}} \quad (\text{B.15})$$

$$T' = \frac{\det \mathbf{M}^n}{m_{11}} = \frac{2\beta(t'/t)^n}{\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)} = T\left(\frac{t'}{t}\right)^n \quad (\text{B.16})$$

Les valeurs propres sont reliées par la formule $\mu\nu = t'/t$ [voir formule (B.1)], ainsi en posant $\tau = \sqrt{t/t'}$ on a :

$$\frac{\nu}{\mu} = (\nu\tau)^2$$

Donc :

$$\nu^n - \mu^n = \mu^n \left[\left(\frac{\nu}{\mu} \right)^n - 1 \right] = \mu^n \left[e^{2n \ln(\nu\tau)} - 1 \right] = \mu^n e^{n \ln(\nu\tau)} \left[e^{n \ln(\nu\tau)} - e^{-n \ln(\nu\tau)} \right] = 2e^{-n \ln \tau} \sinh(n \ln(\nu\tau)) \quad (\text{B.17})$$

De la même façon :

$$\nu^n + \mu^n = 2e^{-n \ln \tau} \cosh(n \ln(\nu\tau))$$

On en déduit :

$$\nu^n (\alpha + \beta) - \mu^n (\alpha - \beta) = \alpha (\nu^n - \mu^n) + \beta (\nu^n + \mu^n) = 2e^{-n \ln \tau} [\alpha \sinh(n \ln(\nu\tau)) + \beta \cosh(n \ln(\nu\tau))] \quad (\text{B.18})$$

En reportant (B.17) et (B.18) dans les formules (B.13) à (B.16), on obtient les formules :

$$R = \frac{\sqrt{\frac{r}{r'}} \sinh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right]}{\alpha \sinh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right] + \beta \cosh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right]}, \quad (\text{B.19})$$

$$T = \frac{\beta e^{n \ln \sqrt{\frac{t}{t'}}}}{\alpha \sinh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right] + \beta \cosh \left[n \ln \left(\nu \sqrt{\frac{t}{t'}} \right) \right]}, \quad (\text{B.20})$$

$$R' = R \frac{r'}{r}, \quad (\text{B.21})$$

$$T' = T \left(\frac{t'}{t} \right)^n. \quad (\text{B.22})$$

Annexe C

Invariance de la quantité $(rr' - tt' + 1)/2\sqrt{rr'}$

On considère une couche diffusante non-symétrique, de facteurs de transfert R , R' , T et T' , qui est un empilement de plusieurs couches diffusantes non-symétriques identiques, chacune de facteurs de transfert r , r' , t et t' . On montre dans cette annexe que :

$$\frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}} = \frac{rr' - tt' + 1}{2\sqrt{rr'}}$$

Pour simplifier les calculs, on cherchera plutôt à montrer que $2\alpha\sqrt{RR'} - 1 = RR' - TT'$ où α est la quantité définie par $\alpha = (rr' - tt' + 1)/2\sqrt{rr'}$. D'après (B.15) et (B.14) on a :

$$2\alpha\sqrt{RR'} - 1 = 2\alpha R \sqrt{\frac{r}{r'}} - 1 = \frac{2\alpha(\mu^n - \nu^n)}{\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)} - 1 = \frac{\nu^n(\alpha - \beta) - \mu^n(\alpha + \beta)}{\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)}$$

En multipliant les deux membres du quotient précédent par $\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)$ et en tenant compte de la relation $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ on obtient :

$$2\alpha\sqrt{RR'} - 1 = \frac{\nu^{2n} + \mu^{2n} - 2(\mu\nu)^n(\alpha^2 + \beta^2)}{[\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)]^2} = \frac{\nu^{2n} + \mu^{2n} - 2(\mu\nu)^n(1 + 2\beta^2)}{[\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)]^2} = \frac{(\nu^n - \mu^n)^2 - 4\beta^2(\mu\nu)^n}{[\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)]^2}$$

Finalement, puisque le produit des valeurs propres est égal au déterminant de la matrice de transfert, à savoir t'/t , on obtient :

$$2\alpha\sqrt{RR'} - 1 = \frac{(\nu^n - \mu^n)^2}{[\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)]^2} - \frac{4\beta^2(t'/t)^n}{[\nu^n(\alpha + \beta) - \mu^n(\alpha - \beta)]^2} = RR' - TT'$$

Annexe D

Formules de Kubelka-Munk généralisées

On souhaite montrer que les formules du modèle à deux flux généralisé (6.4) à (6.6) établies dans la section 6.1 tendent vers les formules (6.22) à (6.24) lorsqu'on remplace les facteurs de transfert r , r' , t et t' d'une couche individuelle par ceux d'une couche d'épaisseur h/n , donnés par les formules (6.20), et lorsqu'on fait tendre n vers l'infini. Pour simplifier les calculs, on décide de partir des formules (B.13) à (B.16) établies à l'annexe B à partir des valeurs propres de la matrice de transfert (6.16). Pour rappel, on écrit à nouveau les formules (B.13) à (B.16) d'une façon un peu différente :

$$T_n = \frac{2\beta_{h/n}}{\alpha_{h/n} (\nu_{h/n}^n - \mu_{h/n}^n) + \beta_{h/n} (\nu_{h/n}^n + \mu_{h/n}^n)} \quad (\text{D.1})$$

$$R_n = \frac{(\nu_{h/n}^n - \mu_{h/n}^n) \sqrt{r/r'}}{\alpha_{h/n} (\nu_{h/n}^n - \mu_{h/n}^n) + \beta_{h/n} (\nu_{h/n}^n + \mu_{h/n}^n)} \quad (\text{D.2})$$

$$R'_n = R_n \sqrt{\frac{r'}{r}} \quad (\text{D.3})$$

$$T'_n = T_n \left(\frac{t'}{t}\right)^n \quad (\text{D.4})$$

où $\alpha_{h/n}$, $\beta_{h/n}$, $\mu_{h/n}$ et $\nu_{h/n}$ sont obtenus en reportant les expressions (6.20) dans les formules (B.3) , (B.4), (B.5) et (B.6). On obtient après quelques calculs :

$$\alpha_{h/n} = \frac{rr' - tt' + 1}{2\sqrt{rr'}} = \frac{K + K' + S + S'}{2\sqrt{SS'}} - \frac{h}{n} \times \frac{KK' + KS' + K'S}{2\sqrt{SS'}}, \quad (\text{D.5})$$

$$\beta_{h/n} = \sqrt{\alpha_{h/n}^2 - 1}, \quad (\text{D.6})$$

$$\mu_{h/n} = \frac{1 - \frac{h}{n}\sqrt{SS'}(\alpha_{h/n} + \beta_{h/n})}{1 - \frac{h}{n}(K + S)} \quad (\text{D.7})$$

et

$$\nu_{h/n} = \frac{1 - \frac{h}{n}\sqrt{SS'}(\alpha_{h/n} - \beta_{h/n})}{1 - \frac{h}{n}(K + S)}. \quad (\text{D.8})$$

On fait tendre n vers l'infini dans (D.5) et (D.6) :

$$a \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{h/n} = \frac{K + K' + S + S'}{2\sqrt{SS'}}$$

et

$$b \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{h/n} = \sqrt{a^2 - 1}.$$

Les quantités $\mu_{h/n}$ et $\nu_{h/n}$ sont les valeurs propres de la matrice de transfert (6.16), en les élevant à la puissance n et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{h/n}^n = \frac{e^{-\sqrt{SS'}(a+b)h}}{e^{-(K+S)h}}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{h/n}^n = \frac{e^{-\sqrt{SS'}(a-b)h}}{e^{-(K+S)h}}$$

Ces deux dernières formules ont été obtenues en utilisant le résultat suivant concernant la fonction exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x} \quad (\text{D.9})$$

avec

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\nu_{h/n}^n - \mu_{h/n}^n\right) = \frac{e^{-a\sqrt{SS'}h} \left(e^{b\sqrt{SS'}h} - e^{-b\sqrt{SS'}h}\right)}{e^{-(K+S)h}} = 2e^{(K+S-a\sqrt{SS'})h} \sinh\left(b\sqrt{SS'}h\right) \quad (\text{D.10})$$

De la même façon :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\nu_{h/n}^n + \mu_{h/n}^n\right) = 2e^{(K+S-a\sqrt{SS'})h} \cosh\left(b\sqrt{SS'}h\right) \quad (\text{D.11})$$

Par ailleurs, en utilisant (D.9), on montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t'}{t}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{h}{n}(K' + S')}{1 - \frac{h}{n}(K + S)}\right)^n = \frac{e^{-(K'+S')h}}{e^{-(K+S)h}} = e^{-2(K'+S'-a\sqrt{SS'})h} \quad (\text{D.12})$$

Finalement, à l'aide de (D.10), (D.11) et (D.12), on obtient les expressions asymptotiques des formules (D.1) à (D.4) :

$$T \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{be^{-(K+S-a\sqrt{SS'})h}}{a \sinh\left(b\sqrt{SS'}h\right) + b \cosh\left(b\sqrt{SS'}h\right)},$$

$$R \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{\sinh\left(b\sqrt{SS'}h\right) \sqrt{S/S'}}{a \sinh\left(b\sqrt{SS'}h\right) + b \cosh\left(b\sqrt{SS'}h\right)},$$

$$R' \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} R'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n \times \frac{r'}{r} = R \frac{S'}{S}$$

$$T' \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t'}{t}\right)^n = T e^{-2(K'+S'-a\sqrt{SS'})h}$$

Montrons à présent la formule (6.27) :

$$\begin{aligned}
\frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}} &= \left[R^2 \frac{S'}{S} - T^2 e^{-2(K'+S'-a\sqrt{SS'})} + 1 \right] \times \frac{1}{2R\sqrt{\frac{S'}{S}}} \\
&= \left[\frac{\sinh^2(b\sqrt{SS'h}) - b^2}{\left[a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h}) \right]^2} + 1 \right] \times \frac{a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h})}{2 \sinh(b\sqrt{SS'h})} \\
&= \frac{\sinh^2(b\sqrt{SS'h}) - b^2 + \left[a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h}) \right]^2}{2 \sinh(b\sqrt{SS'h}) \left[a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h}) \right]}
\end{aligned}$$

En développant le numérateur puis en tenant compte des relations $b^2 = a^2 - 1$ et

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$

on obtient :

$$\frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}} = \frac{2a^2 \sinh^2(b\sqrt{SS'h}) + 2ab \sinh(b\sqrt{SS'h}) \cosh(b\sqrt{SS'h})}{2 \sinh(b\sqrt{SS'h}) \left[a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h}) \right]}$$

Pour finir, en factorisant $2a \sinh(b\sqrt{SS'h})$ au numérateur, on obtient :

$$\frac{RR' - TT' + 1}{2\sqrt{RR'}} = a$$

Annexe E

Formules de Kubelka-Munk généralisées (exponentielle matricielle)

Les expressions des facteurs de transfert (6.22) à (6.24) d'une couche diffusante non-symétrique peuvent être obtenues en résolvant le système différentiel (6.35) où la matrice \mathbf{A} est définie par (6.34). Les valeurs propres de \mathbf{A} , notées μ et ν , sont solutions du système :

$$\begin{cases} \mu\nu = \det \mathbf{A} = SS' - (K + S)(K' + S') \\ \mu + \nu = \text{tr} \mathbf{A} = (K' + S') - (K + S) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

où $\text{tr} \mathbf{A}$ désigne la trace de la matrice \mathbf{A} , c'est-à-dire la somme des termes de la diagonale principale. La résolution de ce système est équivalente à la résolution de l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - \text{tr} \mathbf{A} X + \det \mathbf{A} = 0 \quad (\text{E.2})$$

Le discriminant de (E.2) s'écrit :

$$\Delta = (\text{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A} = 4SS' \left[\left(\frac{K + S + K' + S'}{2\sqrt{SS'}} \right)^2 - 1 \right]$$

On introduit les notations suivantes :

$$a = \frac{K + S + K' + S'}{2\sqrt{SS'}} \quad (\text{E.3})$$

et

$$b = \sqrt{a^2 - 1} \quad (\text{E.4})$$

Le discriminant s'écrit alors simplement $\Delta = 4SS'b^2$ et les solutions de l'équation (E.2) sont :

$$\mu = \sqrt{SS'}(a - b) - (K + S) \quad (\text{E.5})$$

et

$$\nu = \sqrt{SS'}(a + b) - (K + S) \quad (\text{E.6})$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres μ et ν sont respectivement $(K' + S' - \mu, S)^T$ et $(K' + S' - \nu, S)^T$. On peut donc décomposer la matrice \mathbf{A} de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} K' + S' - \mu & K' + S' - \nu \\ S & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K' + S' - \mu & K' + S' - \nu \\ S & S \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{S(\nu - \mu)} \begin{pmatrix} K' + S' - \mu & K' + S' - \nu \\ S & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & -(K' + S' - \nu) \\ -S & K' + S' - \mu \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par ailleurs, on met facilement en évidence les relations suivantes :

$$\nu - \mu = 2b\sqrt{SS'} \quad (\text{E.7})$$

$$K' + S' - \mu = \sqrt{SS'}(a + b) \quad (\text{E.8})$$

$$K' + S' - \nu = \sqrt{SS'}(a - b) \quad (\text{E.9})$$

En tenant compte des relations (E.7) à (E.9), la décomposition de \mathbf{A} s'écrit :

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{S/S'}}{2b} \begin{pmatrix} \sqrt{S'/S}(a + b) & \sqrt{S'/S}(a - b) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{S'/S}(a - b) \\ -1 & \sqrt{S'/S}(a + b) \end{pmatrix} \quad (\text{E.10})$$

La décomposition de l'exponentielle matricielle $e^{-h\mathbf{A}}$ intervenant dans l'écriture de la solution formelle (6.37) du système (6.35) s'écrit alors :

$$e^{-h\mathbf{A}} = \frac{\sqrt{S/S'}}{2b} \begin{pmatrix} \sqrt{S'/S}(a + b) & \sqrt{S'/S}(a - b) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-h\mu} & 0 \\ 0 & e^{-h\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{S'/S}(a - b) \\ -1 & \sqrt{S'/S}(a + b) \end{pmatrix} \quad (\text{E.11})$$

On développe le produit matriciel précédent et on obtient :

$$e^{-h\mathbf{A}} = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} (a + b)e^{-h\mu} - (a - b)e^{-h\nu} & -\sqrt{S'/S}(e^{-h\mu} - e^{-h\nu}) \\ \sqrt{S'/S}(e^{-h\mu} - e^{-h\nu}) & -[(a - b)e^{-h\mu} - (a + b)e^{-h\nu}] \end{pmatrix} \quad (\text{E.12})$$

En tenant compte de la relation (E.7) entre les valeurs propres μ et ν , et de la relation

$$b\sqrt{SS'} - \nu = K + S - a\sqrt{SS'}$$

déduite de (E.6), on obtient :

$$e^{-h\mathbf{A}} = \frac{e^{(K+S-a\sqrt{SS'})h}}{b} \begin{pmatrix} a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h}) & -\sqrt{S'/S} \sinh(b\sqrt{SS'h}) \\ \sqrt{S'/S} \sinh(b\sqrt{SS'h}) & -a \sinh(b\sqrt{SS'h}) + b \cosh(b\sqrt{SS'h}) \end{pmatrix} \quad (\text{E.13})$$

D'après (6.39), la structure de la matrice $e^{-h\mathbf{A}}$ est celle d'une matrice de transfert. En appliquant les formules (5.8) à (5.11) à la matrice (E.13) on en déduit les facteurs de transfert (6.22) à (6.24). On remarquera que ces facteurs de transfert ont été établis sans calculer explicitement les flux solutions $(i(z), j(z))^T$ du système différentiel (6.32). Les expressions de ces solutions sont obtenues en remplaçant dans (6.36) z_0 par 0 :

$$\begin{pmatrix} i(z) \\ j(z) \end{pmatrix} = e^{z\mathbf{A}} \begin{pmatrix} i(0) \\ j(0) \end{pmatrix} \quad (\text{E.14})$$

La matrice $e^{z\mathbf{A}}$ s'obtient en remplaçant $-h$ par z dans (E.13) :

$$e^{z\mathbf{A}} = \frac{e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})z}}{b} \begin{pmatrix} -a \sinh(b\sqrt{SS'}z) + b \cosh(b\sqrt{SS'}z) & \sqrt{S'/S} \sinh(b\sqrt{SS'}z) \\ -\sqrt{S/S'} \sinh(b\sqrt{SS'}z) & a \sinh(b\sqrt{SS'}z) + b \cosh(b\sqrt{SS'}z) \end{pmatrix} \quad (\text{E.15})$$

Finalement, en reportant (E.15) dans (E.14) et en développant les calculs, on obtient les solutions du système d'équations différentielles du modèle de Kubelka-Munk généralisé :

$$i(z) = \frac{e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})z}}{b} \left\{ \left(\sqrt{\frac{S'}{S}} j(0) - ai(0) \right) \sinh(b\sqrt{SS'}z) + bi(0) \cosh(b\sqrt{SS'}z) \right\} \quad (\text{E.16})$$

et

$$j(z) = \frac{e^{-(K+S-a\sqrt{SS'})z}}{b} \left\{ \left(aj(0) - \sqrt{\frac{S}{S'}} i(0) \right) \sinh(b\sqrt{SS'}z) + bj(0) \cosh(b\sqrt{SS'}z) \right\} \quad (\text{E.17})$$

Annexe F

Inversion des formules de Kubelka-Munk généralisées

Nous avons écrit dans le chapitre 6 les formules (6.43) à (6.44) qui donnent les expressions des coefficients de Kubelka-Munk K , K' , S et S' en fonction des facteurs de transfert R , R' , T et T' d'une couche diffusante non-symétrique. Nous proposons ici d'en faire une démonstration détaillée.

D'après (6.24) on a :

$$(K' + S') h = a\sqrt{SS'}h - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T'}{T} \right) \quad (\text{F.1})$$

On vérifie facilement que la formule (6.24) peut également s'écrire :

$$T = T' e^{-2(K+S-a\sqrt{SS'})h} \quad (\text{F.2})$$

On en déduit que :

$$(K + S) h = a\sqrt{SS'}h - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T}{T'} \right) \quad (\text{F.3})$$

Par ailleurs, en utilisant la formule (6.23), on montre que :

$$\sqrt{SS'} = S\sqrt{\frac{R'}{R}} = S'\sqrt{\frac{R}{R'}} \quad (\text{F.4})$$

En reportant (F.4) dans (F.1) et (F.3) on obtient :

$$Kh = Sh \left(a\sqrt{\frac{R'}{R}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T}{T'} \right) \quad (\text{F.5})$$

et

$$K'h = S'h \left(a\sqrt{\frac{R}{R'}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T'}{T} \right) \quad (\text{F.6})$$

Pour le calcul des coefficients S et S' , on revient aux formules (6.22) et (6.21) et on en calcule le quotient :

$$\frac{R}{T} = \frac{\sinh \left(b\sqrt{SS'}h \right) \sqrt{S/S'}}{be^{-(K+S-a\sqrt{SS'})h}}$$

En tenant compte de (F.2) et de $S/S' = R/R'$, on obtient :

$$\sinh\left(b\sqrt{SS'}h\right) = b\sqrt{\frac{RR'}{TT'}}$$

On rappelle que :

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

On a alors :

$$b\sqrt{SS'}h = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad (\text{F.7})$$

avec $x = b\sqrt{RR'/TT'}$.

Montrons que :

$$x^2 + 1 = (RR' - TT' - 1)^2 / 4TT'$$

On a :

$$x^2 + 1 = \frac{b^2RR' + TT'}{TT'} = \frac{1}{TT'} \times (a^2RR' - RR' + TT')$$

On remplace a par $(RR' - TT' + 1)/2\sqrt{RR'}$, ce qui permet d'écrire :

$$x^2 + 1 = \frac{1}{4TT'} \times \left((RR' - TT' + 1)^2 - 4RR' + 4TT'\right) = \frac{(RR' - TT' - 1)^2}{4TT'}$$

En remarquant que $RR' - TT' - 1 < 0$, on obtient :

$$\sqrt{x^2 + 1} = -\frac{RR' - TT' - 1}{2\sqrt{TT'}}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{2b\sqrt{RR'} - (RR' - TT' - 1)}{2\sqrt{TT'}} = \frac{2b\sqrt{RR'} - (RR' - TT' + 1) + 2}{2\sqrt{TT'}} \\ &= \frac{2b\sqrt{RR'} - 2a\sqrt{RR'} + 2}{2\sqrt{TT'}} = \frac{1 - \sqrt{RR'}(a - b)}{\sqrt{TT'}} \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

On reporte (F.8) dans (F.7), on prend en compte les formules (F.4) et on obtient :

$$Sh = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{R'}{R}} \ln\left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a - b)}{\sqrt{TT'}}\right) \quad (\text{F.9})$$

et

$$S'h = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{R}{R'}} \ln\left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a - b)}{\sqrt{TT'}}\right) \quad (\text{F.10})$$

Les coefficients K et K' s'obtiennent en reportant (F.9) dans (F.5) et (F.10) dans (F.6) :

$$Kh = \frac{1}{b} \left(a - \sqrt{\frac{R}{R'}} \right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a-b)}{\sqrt{TT'}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T}{T'} \right)$$

et

$$K'h = \frac{1}{b} \left(a - \sqrt{\frac{R'}{R}} \right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{RR'}(a-b)}{\sqrt{TT'}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T'}{T} \right)$$

Annexe G

Représentation matricielle des taux de couverture

Nous montrons ici que dans les modèles à transferts de flux DCY et DPRT les taux de couverture peuvent être exprimés à l'intérieur de matrices rectangulaires.

Modèle DCY

Ecrivons à nouveau les équations de transferts de flux pour la composante {interface supérieure + couche en demi-ton} [voir formules (7.3) et (7.4), ainsi que la figure 7.1] :

$$J_0 = r_s I_0 + T_{out} \alpha J_1 \quad (\text{G.1})$$

$$I_1 = T_{in} \alpha I_0 + r_d \beta J_1 \quad (\text{G.2})$$

avec $\alpha = \sum_{k=1}^8 a_k t_k$ et $\beta = \sum_{k=1}^8 a_k t_k^2$.

On définit les vecteurs lignes suivants :

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_8),$$

$$\mathbf{r} = r_s (1, \dots, 1),$$

$$\mathbf{t} = T_{in} (t_1, \dots, t_8),$$

$$\mathbf{t}' = T_{out} (t_1, \dots, t_8),$$

$$\mathbf{r}' = r_d (t_1^2, \dots, t_8^2),$$

$$\mathbf{I}_0 = (I_{01}, \dots, I_{08}),$$

$$\mathbf{J}_1 = (J_{11}, \dots, J_{18}).$$

Les équations (G.1) et (G.2) peuvent alors s'écrire :

$$J_0 = \mathbf{r} \mathbf{a}^T I_0 + \mathbf{t}' \mathbf{a}^T J_1$$

$$I_1 = \mathbf{t} \mathbf{a}^T I_0 + \mathbf{r}' \mathbf{a}^T J_1$$

En remarquant que $\mathbf{r} \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \mathbf{r}^T$ et que $\mathbf{t} \mathbf{a}^T = \mathbf{a} \mathbf{t}^T$, on peut alors écrire le système précédent de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{in}\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{a}^T & \mathbf{a}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{t}'\mathbf{a}^T \\ 1 & -\mathbf{r}'\mathbf{a}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ J_1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert \mathbf{F}_H définie par la formule (7.5), peut s'écrire comme un produit de matrices de dimension 2×9 et 9×2 :

$$\mathbf{F}_H = \frac{1}{T_{in}\alpha} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{t}^T & \mathbf{r}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{t}' \\ 1 & \mathbf{r}' \end{pmatrix} \mathbf{A}^T$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{18} \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on peut écrire la matrice de transfert \mathbf{F}'_H de la composante {couche en demi-ton + interface inférieure} définie par la formule (7.6) en introduisant le vecteur ligne $\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_8)$ contenant les taux de couverture de la couleur imprimée sur le côté verso ; on obtient :

$$\mathbf{F}'_H = \frac{1}{T_{out}\alpha'} \mathbf{A}' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{t}^T & \mathbf{r}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{t}' \\ 1 & \mathbf{r}' \end{pmatrix} \mathbf{A}'^T$$

avec

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{18} \\ 0 & \mathbf{a}' \end{pmatrix}.$$

Modèle DPRT

D'après la figure (7.3), les transferts de flux de la composante {couche demi-ton recto + papier + couche demi-ton verso} sont décrits par les équations suivantes :

$$J_1 = \left(\sum_{i,j} a_i a'_j \rho_{ij} \right) I_1 + \left(\sum_{i,j} a_i a'_j \tau'_{ij} \right) J_2 \quad (\text{G.3})$$

$$I_2 = \left(\sum_{i,j} a_i a'_j \tau_{ij} \right) I_1 + \left(\sum_{i,j} a_i a'_j \rho'_{ij} \right) J_2 \quad (\text{G.4})$$

On définit les vecteurs ligne 1×8

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_8),$$

$$\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_8),$$

$$\mathbf{z} = (0, \dots, 0).$$

et les matrice 8×8

$$\boldsymbol{\rho} = \{\rho_{ij}\},$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \{\rho'_{ij}\},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{ij}\},$$

$$\boldsymbol{\tau}' = \{\tau'_{ij}\}.$$

On peut alors écrire les équations (G.3) et (G.4) de la façon suivante :

$$J_1 = (\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}\mathbf{a}'^T) I_1 + (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}'\mathbf{a}'^T) J_2$$

$$I_2 = (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}'^T) I_1 + (\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}'\mathbf{a}'^T) J_2$$

Ce système d'équations peut également s'écrire :

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ J_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_H \begin{pmatrix} I_1 \\ J_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}'\mathbf{a}'^T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}'^T & \mathbf{a}\boldsymbol{\rho}\mathbf{a}'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}'\mathbf{a}'^T \\ 1 & -\mathbf{a}\boldsymbol{\rho}'\mathbf{a}'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ J_1 \end{pmatrix}$$

où M_H est la matrice de transfert de l'imprimé « sans les interfaces ». Cette dernière peut aussi se décomposer de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_H = \frac{1}{\tau_H} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{8,8} & \mathbf{1}_{8,8} \\ \boldsymbol{\tau} & \boldsymbol{\rho} \end{pmatrix} \mathbf{A}'^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{8,8} & \boldsymbol{\tau}' \\ \mathbf{1}_{8,8} & -\boldsymbol{\rho}' \end{pmatrix} \mathbf{A}'^T$$

où $\mathbf{0}_{8,8}$ et $\mathbf{1}_{8,8}$ sont les matrices ne contenant que des « 0 » et des « 1 » respectivement, et :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z} & \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}' & \mathbf{z} \\ \mathbf{z} & \mathbf{a}' \end{bmatrix}.$$

Annexe H

Distance entre deux matrices

Nous détaillons ici une méthode qui permet d'estimer la différence entre deux matrices en utilisant le concept de norme matricielle. La norme usuelle d'une matrice \mathbf{M} est définie à partir du *rayon spectral* de la matrice de Gram $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$:

$$\|\mathbf{M}\|_2 = \sqrt{\delta(\mathbf{M}^T\mathbf{M})},$$

où $\delta(\mathbf{X})$ désigne le rayon spectral de la matrice \mathbf{X} , c'est-à-dire la plus grande valeur propre en valeur absolue. Le terme « spectral », qui fait référence à l'ensemble des valeurs propres de la matrice, ne doit pas être confondu avec la longueur d'onde de la lumière.

Le taux de couverture effectif $\tilde{a}_{u/v}$ de l'encre u au-dessus de la primaire v est ajusté de la façon suivante :

$$\tilde{a}_{u/v} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{\lambda \in \text{vis}} \left\| \mathbf{P}_{u/v}^{(m)}(\lambda) - \mathbf{P}_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right\|_2^{1/\eta} \right) \quad (\text{H.1})$$

où « vis » désigne le spectre visible de la lumière, η est un nombre réel, $\mathbf{P}_{u/v}^{(m)}(\lambda)$ est la matrice créée à partir des réflectances et de transmittances spectrales mesurées pour l'encre u au-dessus de la primaire v , et $\mathbf{P}_{u/v}^{(x)}(\lambda)$ est la matrice créée à partir des réflectances et de transmittances spectrales prédites avec un taux de couverture égal à x .

Dans la pratique, on observe que l'accord entre les spectres prédits et mesurés est meilleur pour des valeurs de η élevées. On peut donc directement considérer la formule suivante, qui est la version asymptotique de la formule (H.1) lorsque η tend vers l'infini :

$$\tilde{a}_{u/v} = \underset{0 \leq x \leq 1}{\operatorname{argmin}} \left(\prod_{\lambda \in \text{vis}} \left\| \mathbf{P}_{u/v}^{(m)}(\lambda) - \mathbf{P}_{u/v}^{(x)}(\lambda) \right\|_2 \right) \quad (\text{H.2})$$

Annexe I

Formules de Kubelka-Munk pour imprimés en demi-ton

Ecrivons les formules (8.30) à (8.36) qui donnent les facteurs de transfert d'une demi-couche (supérieure ou inférieure ; voir Fig. 8.3) en introduisant la notation $x = 1/n$ (on rappelle que chacune des deux demi-couches est elle-même considérée comme une superposition de n sous-couches d' « épaisseur » x) :

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{\frac{r(x)}{r'(x)}} \sinh \left[\frac{1}{x} \ln(\gamma(x)) \right]}{\alpha(x) \sinh \left[\frac{1}{x} \ln(\gamma(x)) \right] + \beta(x) \cosh \left[\frac{1}{x} \ln(\gamma(x)) \right]}, \quad (\text{I.1})$$

$$\tau(x) = \frac{\beta(x) e^{\frac{1}{x} \ln \sqrt{t(x)/t'(x)}}}{\alpha(x) \sinh \left[\frac{1}{x} \ln(\gamma(x)) \right] + \beta(x) \cosh \left[\frac{1}{x} \ln(\gamma(x)) \right]}, \quad (\text{I.2})$$

$$\rho'(x) = \rho(x) \frac{r'(x)}{r(x)}, \quad (\text{I.3})$$

$$\tau'(x) = \tau(x) \left(\frac{t'(x)}{t(x)} \right)^{1/x} = \tau(x) e^{\frac{1}{x} \ln(t'(x)/t(x))}. \quad (\text{I.4})$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{r(x)r'(x) - t(x)t'(x) + 1}{2\sqrt{r(x)r'(x)}}, \quad (\text{I.5})$$

$$\beta(x) = \sqrt{\alpha(x)^2 - 1} \quad (\text{I.6})$$

et

$$\gamma(x) = \frac{1 - [\alpha(x) - \beta(x)] \sqrt{r(x)r'(x)}}{\sqrt{t(x)t'(x)}}. \quad (\text{I.7})$$

On rappelle les formules qui donnent les facteurs de transfert d'une unique sous-couche dans la couleur en demi-ton de taux de couverture a_i :

$$r(x) = \sum_{i=1}^8 a_i r_i(x), \quad t(x) = \sum_{i=1}^8 a_i t_i(x), \quad r'(x) = \sum_{i=1}^8 a_i r'_i(x), \quad t'(x) = \sum_{i=1}^8 a_i t'_i(x). \quad (\text{I.8})$$

où r_i, r'_i, t_i et t'_i sont les facteurs de transfert d'une unique sous-couche dans la primaire i . Ces facteurs de transfert sont donnés par les formules (8.23) à (8.26) que nous écrivons à nouveau ici :

$$r_i(x) = \frac{\sqrt{\frac{\rho_i}{\rho'_i}} \sinh(x \ln \gamma_i)}{\alpha_i \sinh(x \ln \gamma_i) + \beta_i \cosh(x \ln \gamma_i)}, \quad (\text{I.9})$$

$$t_i(x) = \frac{\beta_i e^{x \ln \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau'_i}}}}{\alpha_i \sinh(x \ln \gamma_i) + \beta_i \cosh(x \ln \gamma_i)}, \quad (\text{I.10})$$

$$r'_i(x) = r_i(x) \frac{\rho'_i}{\rho_i}, \quad (\text{I.11})$$

$$t'_i(x) = t_i(x) \left(\frac{\tau'_i}{\tau_i} \right)^x = t_i(x) e^{x \ln(\tau'_i/\tau_i)}. \quad (\text{I.12})$$

avec

$$\alpha_i = \frac{\rho_i \rho'_i - \tau_i \tau'_i + 1}{2\sqrt{\rho_i \rho'_i}}, \quad (\text{I.13})$$

$$\beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 - 1} \quad (\text{I.14})$$

et

$$\gamma_i = \frac{1 - (\alpha_i - \beta_i) \sqrt{\rho_i \rho'_i}}{\sqrt{\tau_i \tau'_i}}. \quad (\text{I.15})$$

On rappelle que ρ_i , ρ'_i , τ_i et τ'_i sont les facteurs de transfert d'une demi-couche. On considère x comme une variable continue : il s'agit maintenant de calculer la limite des formules (I.1) à (I.4) lorsque x tend vers 0, sachant que ces formules contiennent des termes — r , r' , t , t' , α — qui eux-mêmes dépendent de x . La démonstration, un peu longue, est découpée en 6 étapes :

Etape 1

D'après les formules (I.8) à (I.12), on a :

$$r(0) = r'(0) = 0 \quad (\text{I.16})$$

et

$$t(0) = t'(0) = 1. \quad (\text{I.17})$$

On montre facilement en dérivant la formules (I.9) que :

$$\frac{dr_i}{dx}(0) = \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho'_i}} \ln \gamma_i \quad (\text{I.18})$$

Ainsi d'après (I.11) :

$$\frac{dr'_i}{dx}(0) = \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho'_i}{\rho_i}} \ln \gamma_i \quad (\text{I.19})$$

On en déduit que :

$$\frac{dr}{dx}(0) = \sum_i \frac{a_i}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho'_i}} \ln \gamma_i \quad (\text{I.20})$$

et

$$\frac{dr'}{dx}(0) = \sum_i \frac{a_i}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho'_i}{\rho_i}} \ln \gamma_i \quad (\text{I.21})$$

De même, en dérivant la formule (I.10) on obtient :

$$\frac{dt_i}{dx}(0) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau'_i} \right) - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i \quad (\text{I.22})$$

et, d'après (I.12) :

$$\frac{dt'_i}{dx}(0) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau'_i} \right) - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i \quad (\text{I.23})$$

On en déduit que :

$$\frac{dt}{dx}(0) = \frac{1}{2} \sum_i a_i \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau'_i} \right) - \sum_i a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i \quad (\text{I.24})$$

et

$$\frac{dt'}{dx}(0) = -\frac{1}{2} \sum_i a_i \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau'_i} \right) - \sum_i a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i \quad (\text{I.25})$$

On introduit les notations suivantes :

$$f(x) = r(x) r'(x), \quad (\text{I.26})$$

$$g(x) = t(x) t'(x) \quad (\text{I.27})$$

et

$$h(x) = \sqrt{f(x)} \quad (\text{I.28})$$

On a alors :

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1, \quad h(0) = 0 \quad (\text{I.29})$$

Etape 2 : Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x)$

On pose :

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) \quad (\text{I.30})$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \left(h(x) - \frac{g(x) - 1}{h(x)} \right) = \frac{1}{2} \left(h(x) - \frac{g(x) - 1}{x} \times \frac{x}{h(x)} \right) = \frac{1}{2} \left(h(x) - \frac{g(x) - g(0)}{\frac{h(x) - h(0)}{x}} \right) \quad (\text{I.31})$$

Ainsi :

$$a = -\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{dg}{dx}(0)}{\frac{dh}{dx}(0)} \right) \quad (\text{I.32})$$

Calcul de $\frac{dg}{dx}(0)$:

$$\frac{dg}{dx}(0) = \frac{dt}{dx}(0) t'(0) + t(0) \frac{dt'}{dx}(0) = -2 \sum_i a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i \quad (\text{I.33})$$

Calcul de $\frac{dh}{dx}(0)$:

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{\frac{dr}{dx}(x) r'(x) + r(x) \frac{dr'}{dx}(x)}{2\sqrt{r(x) r'(x)}} = \frac{1}{2} \frac{N(x)}{h(x)} \quad (\text{I.34})$$

Mais on est en présence d'une forme indéterminée car $\lim N(x) = \lim h(x) = 0$. On obtient à l'aide des formules (I.20) et (I.21) les relations suivantes :

$$N(x) = a_1^2 \frac{\rho_1'^2}{\rho_1^2} r_1(x) \frac{dr_1}{dx}(x) [Z(x) Y(x) + X(x) W(x)] \quad (\text{I.35})$$

et

$$h(x) = a_1 \frac{\rho_1'}{\rho_1} r_1(x) \sqrt{X(x) Y(x)} \quad (\text{I.36})$$

avec

$$X(x) = 1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i r_i(x)}{a_1 r_1(x)}, \quad (\text{I.37})$$

$$Y(x) = 1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i \frac{\rho_1}{\rho_i} r_i(x)}{a_1 \frac{\rho_i}{\rho_1} r_1(x)}, \quad (\text{I.38})$$

$$Z(x) = 1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i \frac{dr_i}{dx}(x)}{a_1 \frac{dr_1}{dx}(x)}, \quad (\text{I.39})$$

$$W(x) = 1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i \frac{\rho_1}{\rho_i} \frac{dr_i}{dx}(x)}{a_1 \frac{\rho_i}{\rho_1} \frac{dr_1}{dx}(x)}. \quad (\text{I.40})$$

Mais d'après $\cosh x \sim 1$ et $\sinh x \sim x$ pour $x \sim 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_i(x)}{r_1(x)} = \frac{\sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_1}} \beta_i \ln \gamma_i}{\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_i}} \beta_i \ln \gamma_1} \quad (\text{I.41})$$

Puis on déduit de la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{dr_i}{dx}(x)}{\frac{dr_1}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_i(x)}{r_1(x)} = \frac{\sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_1}} \beta_i \ln \gamma_i}{\rho_1 \beta_i \ln \gamma_1} \quad (\text{I.42})$$

Les limites des formules (I.37) à (I.40) s'écrivent alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} X(x) = \lim_{x \rightarrow 0} Z(x) = 1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_1}} \beta_i \ln \gamma_i}{a_1 \rho_1 \beta_i \ln \gamma_1} \equiv \tilde{X} \quad (\text{I.43})$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} W(x) = 1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i \rho_1 \beta_i \ln \gamma_i}{a_1 \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_1}} \beta_i \ln \gamma_1} \equiv \tilde{Y} \quad (\text{I.44})$$

En reportant les formules (I.37) à (I.40) dans les formules (I.35) et (I.36), puis en passant à la limite, on obtient :

$$\frac{dh}{dx}(0) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{h(x)} = \frac{a_1 \ln \gamma_1}{\beta_1} \sqrt{\tilde{X}\tilde{Y}} = \left(\sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_i'}} \ln \gamma_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i'}{\rho_i}} \ln \gamma_i \right)^{1/2} \quad (\text{I.45})$$

Finalement, on déduit de (I.33) et (I.45) que :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^8 a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i}{\left(\sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_i'}} \ln \gamma_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i'}{\rho_i}} \ln \gamma_i \right)^{1/2}} \quad (\text{I.46})$$

On note :

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = \sqrt{a^2 - 1} \quad (\text{I.47})$$

Etape 3 : calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{r(x)/r'(x)}$

$$\frac{r(x)}{r'(x)} = \rho_1^2 \frac{1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i r_i(x)}{a_1 r_1(x)}}{1 + \sum_{i=2}^8 \frac{a_i \rho_i^2 r_i(x)}{a_1 \rho_i^2 r_1(x)}}$$

Donc, d'après (I.41) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{r(x)}{r'(x)}} = \rho_1 \frac{\left(1 + \sum_{i=2}^8 \frac{\frac{a_i}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_i'}} \ln \gamma_i}{\frac{a_1}{\beta_1} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1'}} \ln \gamma_1} \right)^{1/2}}{\left(1 + \sum_{i=2}^8 \frac{\frac{a_i}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_i'}} \ln \gamma_i}{\frac{a_1}{\beta_1} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1'}} \ln \gamma_1} \right)^{1/2}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^8 \frac{a_i}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_i'}} \ln \gamma_i \right)^{1/2}}{\left(\sum_{i=1}^8 \frac{a_i}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i'}{\rho_i}} \ln \gamma_i \right)^{1/2}}$$

Etape 4 : calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\sqrt{t(x)/t'(x)} \right) / x$

On pose $k(x) = \sqrt{t(x)/t'(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(k(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(k(x)) - \ln(k(0))}{x - 0} = \left[\frac{d}{dx} (\ln(k(x))) \right]_{x=0}$$

Calcul de $d(\ln(k(x)))/dx$:

$$\frac{d}{dx} (\ln(k(x))) = \frac{1}{k(x)} \times \frac{dk}{dx}(x) = \frac{1}{k(x)} \times \frac{\frac{dt}{dx}(x) t'(x) - t(x) \frac{dt'}{dx}(x)}{t'(x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{t(x)}{t'(x)}}}$$

En passant à la limite et en utilisant les formules (I.16) et (I.17), on obtient :

$$\left[\frac{d}{dx} (\ln[k(x)]) \right]_{x=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx}(0) - \frac{dt'}{dx}(0) \right)$$

Puis, à l'aide des formules (I.24) et (I.25) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sqrt{t(x)/t'(x)} \right)}{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 a_i \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau_i'} \right) \quad (\text{I.48})$$

Etape 5 : calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\gamma(x)) / x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\gamma(x))}{x} = \left[\frac{d}{dx} (\ln(\gamma(x))) \right]_{x=0}$$

mais $\gamma(0) = 1$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\gamma(x))}{x} = \frac{d\gamma}{dx}(0)$$

Calcul de $d(\gamma(x)) / dx$

On rappelle que :

$$\gamma(x) = \frac{1 - [\alpha(x) - \beta(x)] \sqrt{r(x)r'(x)}}{\sqrt{t(x)t'(x)}} = \frac{1 - [\alpha(x) - \beta(x)] \sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$$

avec

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - g(x) + 1}{2\sqrt{f(x)}}$$

On a alors :

$$\frac{d\gamma}{dx}(x) = \frac{-\frac{d}{dx}([\alpha(x) - \beta(x)] \sqrt{f(x)}) \times \sqrt{g(x)} - (1 - [\alpha(x) - \beta(x)] h(x)) \times \frac{\frac{dg}{dx}(x)}{2\sqrt{g(x)}}}{g(x)}$$

D'après (I.29) et (I.33) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - [\alpha(x) - \beta(x)] h(x)) \times \frac{\frac{dg}{dx}(x)}{2\sqrt{g(x)}} \right] = - \sum_i a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i$$

Par ailleurs :

$$[\alpha(x) - \beta(x)] \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} [f(x) - g(x) + 1] \left[1 - (1 - \alpha(x)^{-2})^{1/2} \right]$$

Après quelques calculs on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} ([\alpha(x) - \beta(x)] \sqrt{f(x)}) = [1 - \sqrt{1 - a^{-2}}] \sum_{i=1}^8 a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i$$

Finalement :

$$\frac{d\gamma}{dx}(0) = \frac{b}{a} \sum_{i=1}^8 a_i \frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i$$

En tenant compte de (I.46), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\gamma(x))}{x} = b \left(\sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_i'}} \ln \gamma_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i'}{\rho_i}} \ln \gamma_i \right)^{1/2}$$

Etape 6 : fin de la démonstration

On définit les quantités suivantes :

$$s = \sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho'_i}} \ln \gamma_i, \quad (\text{I.49})$$

$$s' = \sum_{i=1}^8 a_i \frac{1}{\beta_i} \sqrt{\frac{\rho'_i}{\rho_i}} \ln \gamma_i, \quad (\text{I.50})$$

$$e = \sum_{i=1}^8 a_i \left[\frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_i}{\tau'_i} \right) \right], \quad (\text{I.51})$$

$$e' = \sum_{i=1}^8 a_i \left[\frac{\alpha_i}{\beta_i} \ln \gamma_i - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau'_i}{\tau_i} \right) \right]. \quad (\text{I.52})$$

Finalement, on obtient, en tenant compte de ces dernières notations :

$$\rho \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \rho(x) = \frac{\sqrt{\frac{s}{s'}} \sinh(b\sqrt{ss'})}{a \sinh(b\sqrt{ss'}) + b \cosh(b\sqrt{ss'})},$$

$$\tau \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = \frac{b e^{-(e-a\sqrt{ss'})}}{a \sinh(b\sqrt{ss'}) + b \cosh(b\sqrt{ss'})},$$

$$\rho' \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \rho'(x) = \rho \frac{s'}{s},$$

$$\tau' \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \tau'(x) = \tau e^{-2(e'-a\sqrt{ss'})}.$$

avec

$$a = \frac{e + e'}{2\sqrt{ss'}}$$

et

$$b = \sqrt{a^2 - 1}.$$

Annexe J

Nombre moyen de réflexions internes entre deux couches

On considère la variable aléatoire X égale au nombre de réflexions internes entre les deux couches que subit un rayon lumineux avant d'être réfléchi. X prend les valeurs $2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et la probabilité d'avoir $2k+1$ réflexions internes est :

$$P(X = 2k + 1) = \frac{\rho_1'^k \rho_2^{k+1}}{\rho_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\rho_1' \rho_2)^k} = (1 - \rho_1' \rho_2) \rho_1'^k \rho_2^k \quad (\text{J.1})$$

On notant $p = 1 - \rho_1' \rho_2$ on obtient :

$$P(X = 2k + 1) = p (1 - p)^k \quad (\text{J.2})$$

Le nombre moyen de réflexions internes est alors égal à l'espérance mathématique de X , c'est-à-dire la moyenne des nombres impairs $2k+1$ pondérée par la probabilité $p(1-p)^k$:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1) p (1 - p)^k = p \left(2(1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - p)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k \right) \quad (\text{J.3})$$

La deuxième somme dans la formule (J.3) est la série géométrique de raison $q = 1 - p$. Sa limite est $1/(1 - q) = 1/p$. La première somme est la dérivée première de la série géométrique de raison $q = 1 - p$, elle converge vers la dérivée de la série géométrique, à savoir $1/(1 - q)^2 = 1/p^2$. On a donc :

$$n = p \left(2(1 - p) \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right) = \frac{2 - p}{p} = \frac{1 + \rho_1' \rho_2}{1 - \rho_1' \rho_2}$$

Bibliographie

- [1] Neugebauer, H. E. J. (1937), Die theoretischen Grundlagen des Mehrfarbendruks, *Zeitschrift fuer wissenschaftliche Photographie* **36**, 36-73. Translated into english : The theoretical basis of multi-colour letterpress printing, *Color Res. App.* **30**, 322-331 (2005).
- [2] Yule, J.A.C., Nielsen, W.J. (1951), The penetration of light into paper and its effect on halftone reproduction, *Proc. TAGA* **3**, 65-76.
- [3] Clapper, F. R., Yule, J. A. C. (1953), The effect of multiple internal reflections on the densities of halftones prints on paper, *J. Opt. Soc. Am.* **43**, 600-603.
- [4] Williams, F. C., Clapper, F. R. (1953), Multiple internal reflections in photographic color prints, *J. Opt. Soc. Am.* **43**, 595-597.
- [5] Kubelka, P. (1954), New Contribution to the Optics of Intensely Light-Scattering Material, Part II : nonhomogeneous layers, *J. Opt. Soc. Am.* **44**, 330-335.
- [6] Hébert, M., Hersch, R.D., Becker, J.-M. (2007), Compositional reflectance and transmittance model for multilayer specimens, *J. Opt. Soc. Am.* **24**, 2628-2644.
- [7] Hersch, R. D., Crété, F. (2005), Improving the Yule-Nielsen modified spectral Neugebauer model by dot surface coverages depending on the ink superposition conditions, *Proc SPIE* **5667**, 434-445.
- [8] Hébert, M., Hersch, R. D. (2014), Review of spectral reflectance prediction models for halftone prints : calibration, prediction and performance, *Color Res. Appl.*, paper 21907.
- [9] Hébert, M., Hersch, R.D. (2006), Reflectance and transmittance model for recto-verso halftone prints, *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 2415-2432.
- [10] Hébert, M., Hersch, R.D. (2009), Reflectance and transmittance model for recto-verso halftone prints : spectral predictions with multi-ink halftones, *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 356-364.
- [11] Hébert, M., Hersch, R. D. (2011), Yule-Nielsen based recto-verso color halftone transmittance prediction model, *J. Opt. Soc. Am. A* **50**, 519-525.
- [12] Hébert, M., Machizaud, J. (2012), Spectral reflectance and transmittance of stacks of nonscattering films printed with halftone colors, *J. Opt. Soc. Am. A* **29**, 2498-2508.
- [13] Centurioni, E. (2005), Generalized matrix method for calculation of internal light energy flux in mixed coherent and incoherent multilayers, *Applied Optics* **44**, 7532-7539.
- [14] Troparevsky, M.C. , Sabau, A.S., Lupini, A.R., Zhang, Z. (2010), Transfer-matrix formalism for the calculation of optical response in multilayer systems : from coherent to incoherent interference, *Opt. Express* **18**, 24715- 24721 (2010).
- [15] Mitsas, C.L., Siapkias, D.I. (1995), Generalized matrix method for analysis of coherent and incoherent reflectance and transmittance of multilayer structures with rough surfaces, interfaces, and finite substrates, *Applied Optics* **34**, 1678-1683.
- [16] Katsidis, C.C., Siapkias, D.I. (2002), General Transfer-Matrix Method for Optical Multilayer Systems with Coherent, Partially Coherent, and Incoherent Interference, *Applied Optics* **41**, 3978-3987.
- [17] Hébert, M., Becker, J.-M. (2008), Correspondance between continuous and discrete 2-flux models for reflectance and transmittance of diffusing layers, *J. Opt. A* **10**, 035006.
- [18] Zalewski, E.F. (1995), Radiometry and Photometry. *Handbook of Optics Volume II - Devices, measurements and properties (2nd edition)* ; Mass M (ed). McGraw-Hill, New-York.

- [19] Lépine, T, Meyzonnette, J.L. (1999), Bases de radiométrie optique, Cepadues.
- [20] Judd, D.B., Deane, B. (1967), Terms, definitions, and symbols in reflectometry. *Journal of the Optical Society of America* **57**, 445–452.
- [21] Nicodemus, F.E., Richmond, J.C., Hsia, J.J., Ginsberg, I.W., Limperis, T. (1977), Geometrical considerations and nomenclature for reflectance, NBS Monograph 160, *National Bureau of Standards*, Washington, DC, p. 52.
- [22] Judd, D.B., MacAdam, D.L., Wyszecki, G. (1964), Spectral Distribution of Typical Daylight as a Function of Correlated Color Temperature. *Journal of the Optical Society of America* **54**, 1031-1040.
- [23] Hurvich, L.M., Jameson, D. (1966), The perception of brightness and darkness. *Experimental Psychology*. Allyn and Bacon, 1st edition.
- [24] Wright, W.D., Pitt, F.H. (1934), Hue discrimination in normal colour vision. *Proc. Phys. Soc.* **46**, 459-468.
- [25] Brown, W.R.J., MacAdam, D.L. (1949), Visual sensitivities to combined chromaticity and luminance differences. *Journal of the Optical Society of America* **39**, 808-834.
- [26] Wright, W.D. (1941), The sensitivity of the eye to small colour differences. *Proc. Phys. Soc.* **53**, 93-112.
- [27] CIE, *Colorimetry*, CIE Publication No. 15.2, Central Bureau of the CIE, Vienna, 1986, 6.
- [28] CIE, *Industrial Color Difference Evaluation*, CIE Publication No. 116–1995, Central Bureau of the CIE, Vienna, 1995.
- [29] Wyszecki, G., Stiles, W.S. (1982), Color Science : Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae. *John Wiley & sons, 2nd edition*.
- [30] Sharma, G. (2003), *Color Imaging Handbook*, CRC Press.
- [31] Trémeau, A. (2005), Eléments de base de la colorimétrie, *Ecole d'hiver sur l'image numérique couleur (EHINC)*, Lille, janvier 2005. GDR ISIS, GFINC.
- [32] Chandrasekhar, S. (1960), *Radiative Transfer*, Dover, New-York.
- [33] Schuster, A. (1905), Radiation through a foggy atmosphere. *The Astrophysical Journal* **21**,1-22.
- [34] Schwarzschild, K. (1914), Über diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre, *Sitz. ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1183.
- [35] Kubelka, P., Munk, F. (1931), Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche, *Zeitschrift für technische Physik* **12**, 593-601.
- [36] Kortüm, G. (1969), *Reflectance Spectroscopy, Principles, Methods, Applications* ; Springer-Verlag, Berlin.
- [37] Hébert, M., Hersch, R.D., Emmel, P. (2015), Fundamentals of optics and radiometry for color reproduction, in *Handbook of Digital Imaging*, Vol. 2, Ed. Mickael Kriss, Wiley, Chapter 23, pp. 1021-1077.
- [38] Hébert, M., Emmel, P. (2015), Two-flux and multiframe matrix models for colored surfaces, in *Handbook of Digital Imaging*, Vol. 2, Ed. Mickael Kriss, Wiley, Chapter 31, pp. 1233-1277.
- [39] Emmel, P. (1998), Modèles de prédiction couleur appliqués à l'impression jet d'encre. PhD Thesis No. 1857, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland.
- [40] Mourad, S. (2003), Color predicting model for electrophotographic prints on common office paper. PhD thesis No. 2708, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland.
- [41] Kubelka, P. (1948), New Contribution to the Optics of Intensely Light-Scattering Material . Part I, *Journal Of The Optical Society of America*, **38**, 448-457.
- [42] Saunderson, J. L. (1942), Calculation of the color pigmented plastics, *J. Opt. Soc. Am.* **32**, 727-736.
- [43] Born, M. and Wolf, F., *Principle of Optics*, 7th ed. (Pergamon, 1999).
- [44] Judd, D. B. (1942), Fresnel Reflection of diffusely incident light, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **29**, 329-332.

- [45] Hébert, M., Hersch, R.D. (2006), A reflectance and transmittance model for recto-verso halftone prints, *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 1952–1967.
- [46] CIE, Colorimetry ; CIE Technical Report 15, 3rd Ed., 2004.
- [47] Mandelis, A., Grossman, J.-P. (1992), Perturbation theoretical approach to the generalized Kubelka-Munk problem in nonhomogeneous optical media, *Applied Spectroscopy* **46**, 737-745.
- [48] Vargas, W. E, Niklasson G.A. (1997), Applicability conditions of the Kubelka-Munk theory. *Applied Optics* **36**, 5580-5586.
- [49] Mudgett, P. S., Richards, L. W. (1971), Multiple scattering calculations for technology, *Applied Optics* **10**, 1485-1502.
- [50] Nobbs, J. H. (1985), Kubelka-Munk theory and the prediction of reflectance, *Review of Progress in Coloration and Related Topics* **15**, 66-75.
- [51] Rousselle, F., Hébert, M. (2010) Predicting the reflectance of paper dyed with ink mixtures by describing light scattering as a function of ink absorbance, *J. Imaging Science and Technology* **54**, 050501-8.
- [52] Demichel, M. E. (1924) *Procédés* **26**, 17-21.
- [53] Amidror, I., Hersch, R.D. (2000), Neugebauer and Demichel : Dependence and independence in n-screen superpositions for color printing, *Color Research and Application* **25**, 267-277.
- [54] Hébert, M., Nébouy, D., Mazaauric, S. (2015), Color and spectral mixing in printed surfaces, *LNCS 9016 Computational Color Imaging Workshop*, 3-15.
- [55] Murray, A. (1936), Monochrome reproduction in photoengraving, *J. Franklin Inst.* **221**, 721-744.
- [56] Viggiano, J.A.S. (1985), The color of halftone tints, *Proc. TAGA*, 647-661.
- [57] Arney, J.S. (1997), A probability description of the Yule-Nielsen effect. I : Tone reproduction and image quality in the graphic arts, *J. Im. Sci. Technol.* **41**, 633-636.
- [58] Arney, J.S. (1999), A probability description of the Yule-Nielsen effect. II : The impact of halftone geometry, *Recent Progress in Digital Halftoning II*, 456-461.
- [59] Rogers, G. (1998), Optical dot gain : lateral scattering probabilities, *J. Imaging Sci. Technol.* **42**, 495-500.
- [60] Ruckdeschel, F.R., Hauser O.G. (1978), Yule-Nielsen effect in printing : a physical analysis, *Appl. Opt.* **17**, 3376-3383.
- [61] Machizaud, J., Hébert M. (2012), Spectral reflectance and transmittance prediction model for stacked of transparency and paper both printed with halftone colors. *J. Opt. Soc. Am. A* **29**, 1537-1548.
- [62] Hébert, M., Hersch R.D. (2010), Analysing halftoning dot blurring by extended spectral prediction models, *J. Opt. Soc. Am. A* **27**, 6-12.
- [63] Lewandowski, A., Ludl, M., Byrne, G., Dorffner G. (2006), Applying the Yule-Nielsen equation with negative n, *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1827-1834.
- [64] Viggiano, J.A.S. (2006), Physical significance of negative Yule-Nielsen n-value, *Proc. ICIS International Congress of Imaging Science*, 607-610.
- [65] Viggiano, J.A.S. (2010), Ink penetration, isomorphic colorant mixing and negative values of Yule-Nielsen n, *Proc. IS&T 18th Color and Imaging Conference*, 285-290.
- [66] Shore, J. D., Spoonhower, J. P. (2001), Reflection density in photographic color prints : generalizations of the Williams-Clapper transform, *J. Imaging Sci. Technol.* **45**, 484-488.
- [67] Hébert, M., Hersch, R. D. (2004), Classical print reflection models : a radiometric approach, *J. Imaging Sci. Technol.* **48**, 363-374.
- [68] Hersch, R. D., Hébert, M. (2015), Base models for color halftone reproduction in the *Handbook of Digital Imaging*, edited by M. Kriss. John Wiley & Sons, Ltd : Chichester, UK, Chapter 27, pp. 1079-1132.

- [69] Mazauric, S., Hébert, M., Simonot, L., Fournel, T. (2014), Two-flux matrix model for predicting the reflectance and the transmittance of duplex halftone prints, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 2775-2788.
- [70] Hébert, M., Mazauric, S., Simonot, L. (2015), Assessing the capacity of two-flux models to predict the spectral properties of layered materials, IS&T Electronic Imaging Symposium, Measuring, modeling, reproduction materials appearance (San Francisco, USA, 14-18 February 2015).
- [71] Hébert, M., Hersch, R. D. and Becker J.-M. (2007), Compositional reflectance and transmittance model for multilayer specimens, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 2628-2644.
- [72] Ukishima, M. (2010), Prediction and evaluation of color halftone print quality based on microscopic measurement, Ph. D. dissertation, University of Eastern Finland.
- [73] Rahaman, G. M. A., Norberg, O., Edström, P. (2014), Microscale halftone color image analysis : perspective of spectral color prediction modeling. *Proc. SPIE 9015*, Paper 901506.
- [74] Nyström, D. (2009), High Resolution Analysis of Halftone Prints : A Colorimetric and Multispectral Study, PhD dissertation, Linköping University, Sweden.
- [75] Abelès, F. (1950), La théorie générale des couches minces, *J. Phys. Radium* **11**, 307-309.
- [76] A. Wolf, A., Terheiden, B., Brendel, R. (2008) "Light scattering and diffuse light propagation in sintered porous silicon," *J. Appl. Phys.* **104**, Paper 033106.
- [77] Hersch, R. D. (2014), Spectral Neugebauer-based color halftone prediction model accounting for paper fluorescence, *Applied Optics*, **53**, 5380-5390.
- [78] Rossier, R., Hersch, R.D. (2011), Hiding patterns with daylight fluorescent inks, *Proc. IS&T 19th Color and Imaging Conference*, 223–228.
- [79] Hersch, R.D., Collaud, F., Emmel, P. (2003), Reproducing color images with embedded metallic patterns, *ACM Trans. Graph.* **22** (SIGGRAPH'03), 427–436.
- [80] Baar, T., Shahpaski, M., Ortiz Segovia, M.V. (2014), Image ghosting reduction in lenticular relief prints, *Proc. SPIE 9018*, paper 90180N.
- [81] Simonot, L., Hersch, R. D., Hébert, M., Mazauric, S. (2016), Multilayer four-flux matrix model accounting for directional-diffuse light transfers, *J. Opt. Soc. Am. A* **55**, 27-37.
- [82] Simonot, L., Hébert, M., Mazauric, S., Hersch, R.D. (2017), Assessing the proper color of translucent materials by an extended two-flux model from measurements based on an integrating sphere, *IS&T Electronic Imaging Symposium, Material appearance*, San Francisco, USA, 30 January – 3 February 2017.
- [83] Shakespeare, T., Shakespeare, J. (2002), A fluorescent extension of the Kubelka-Munk model, *Color Research and Application* **28**, 4-14.
- [84] Simonot, L., Thoury, M., Delaney, J. (2011), Extension of the Kubelka-Munk theory for fluorescent turbid media to a nonopaque layer on a background, *J. Opt. Soc. Am.* **28**, 1349-1357.
- [85] Emmel, P, Hersch, R.D. (1998), Spectral prediction model for a transparent fluorescent ink on paper, *Proceeding of the IS&T/SID 6th Color Imaging Conference : Color Science, Systems, and Applications*, Scottsdale, Arizona, USA, pp. 116-122.
- [86] Rogers, G. L. (2000), Spectral model of a fluorescent ink halftone, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1975-1981.
- [87] B. Maheu, J.N. Le Toulouzan, G. Gouesbet (1984), Four-flux models to solve the scattering transfer equation in terms of Lorenz-Mie parameters, *Appl. Opt.* **23**, 3353-3362.
- [88] B. Maheu, G. Gouesbet (1986), Four-flux models to solve the scattering transfer equation. Special cases, *Appl. Opt.* **25**, 1122-1228.
- [89] B. Maheu, J.P. Briton, G. Gouesbet (1989), Four-flux model and a Monte Carlo code : comparisons between two simple and complementary tools for multiple scattering calculations, *Appl. Opt.* **28**, 22-24.
- [90] C. Rozé, T. Girasole, G. Gréhan, G. Gouesbet, B. Maheu (2001), Average crossing parameter and forward scattering ratio values in four-flux model for multiple scattering media, *Opt. Commun.* **194**, 251-263.

- [91] C. Rozé, T. Girasole, A.G. Tafforin (2001), Multilayer four-flux model of scattering, emitting and absorbing media, *Atmospheric Environment* **35**, 5125-5130.

Index

A

ajustement des couleurs, 124
angle solide, 17

B

bâtonnets, 23

C

calibrage, 47
calibrage double, 49
calibrage simple, 49
CIE, 20
coefficients de Kubelka-Munk, 30, 32
coefficients de Kubelka-Munk généralisés, 75
coefficients d'extinction, 78
colorimétrie, 23
composantes trichromatiques spectrales, 23
cônes, 23
correction de Saunderson, 33
couples de primaires, 92
courbe d'engraissement, 49
courbes de correction, 47

D

D65, 22
DSRP, 22

E

écart quadratique moyen, 28
écarts colorimétriques, 27
éclairage, 19
effet Yule-Nielsen, 42
efficacité lumineuse normalisée, 25
engraissement mécanique, 47
engraissement optique, 42
équation de Yule-Nielsen, 43
espace CIE $L^*a^*b^*$, 26
espace trichromatique, 25
exitance, 19
expériences d'égalisation, 23
extension géométrique, 18

F

facteur de réflectance, 21
facteur de réflexion, 20
facteur de transmission, 20
facteur de transmittance, 21

facteurs de transfert, 31
facteurs de transfert intrinsèques, 34
flux, 19
flux spectrique, 21
formule de Fresnel, 34
formule de Murray-Davis, 41
formules de Kubelka-Munk généralisées, 73

G

géométrie de mesure, 20

I

illuminant, 22
images multi-vues, 123
intensité, 19

L

loi de Lambert, 20
luminance, 19

M

matrice de transfert, 55
mélange spectral, 40
métamères, 23
méthode de l'exponentielle matricielle, 31, 73
modèle à deux flux, 30
modèle à deux flux généralisé, 67
modèle DCY, 87
modèle de Clapper-Yule, 45
modèle de Kubelka-Munk, 30
modèle de Kubelka-Munk généralisé, 70
modèle de Murray-Davis, 41
modèle de Neugebauer, 41
modèle de Williams-Clapper, 46
modèle DLRT, 99
modèles de surface, 40
modèles phénoménologiques, 40

P

papier APCO, 41
photométrie, 17
primaires de Neugebauer, 39

R

radiométrie, 17
réflectance, 20
réflectance spectrale, 21

réflecteur lambertien, 20
réflexion externe, 34
réflexion spéculaire, 34

S

solution hyperbolique, 33
stimulus, 23
synthèse additive, 23
système de primaires RGB, 23
système de primaires XYZ, 25

T

taux de couverture, 39
taux de couverture effectif, 41
taux de couverture nominal, 41
transmittance, 20
transmittance spectrale, 21
trichromie, 39

V

vision photopique, 23
vision scotopique, 23