



Homogénéisation de composites élastiques périodiques à fort contraste : Conception de métamatériaux de second gradient

Houssam Abdoul Anziz

► To cite this version:

Houssam Abdoul Anziz. Homogénéisation de composites élastiques périodiques à fort contraste : Conception de métamatériaux de second gradient. Mathématiques [math]. Université de Toulon, 2018. Français. NNT : 2018TOUL0003 . tel-02023850

HAL Id: tel-02023850

<https://theses.hal.science/tel-02023850>

Submitted on 30 Jun 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE MER ET SCIENCES (ED 548)

Institut de Mathématiques de Toulon

Homogénéisation de composites élastiques périodiques à fort contraste.

Conception de métamatériaux de second gradient

Thèse présentée par

Houssam ABDOUL ANZIZ

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Toulon

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Soutenue le 10 décembre 2018 devant le jury composé de :

Mme MADEO Angela

Mme RAOULT Annie

M. BOUCHITTÉ Guy

M. AUFRAY Nicolas

M. SEPPECHER Pierre

M. BELLIS Cédric

Professeure, INSA Lyon

Professeure émérite, Université Paris Descartes/CNRS

Professeur, Université de Toulon

Maître de conférences HDR, UPEM

Professeur, Université de Toulon

Chargé de recherche, LMA, CNRS

Rapporteuse

Rapporteuse

Président

Examineur

Directeur de thèse

Co-encadrant

Remerciements

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation et à l'aboutissement de ce travail de thèse.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Pierre Seppecher, pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant d'encadrer cette thèse. J'ai pu apprécier sa rigueur scientifique, ses brillantes intuitions et sa grande disponibilité malgré ses nombreuses charges. Qu'il soit aussi remercié pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués. Je voudrais lui témoigner ici toute ma gratitude pour ses grandes qualités humaines.

Je tiens également à remercier mon co-encadrant de thèse, Cédric Bellis, pour son implication dans mon travail, sa disponibilité, ses nombreux conseils, ses relectures méticuleuses sur chacun des chapitres et ses commentaires judicieux qui ont guidé ce travail jusqu'au bout.

Je remercie Angela Madeo et Annie Raoult pour l'honneur qu'elles m'ont fait d'avoir accepté d'être rapportrices de cette thèse et pour leurs remarques intéressantes qui ont permis à améliorer la qualité de mon manuscrit.

Je remercie également Nicolas Auffray et Guy Bouchitté pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être examinateurs et pour l'honneur qu'ils m'ont fait de participer au jury.

Je remercie la Région PACA pour son financement sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bien.

J'adresse mes remerciements à Cédric Galusinski, Frédéric Lebon et Francesco dell'Isola pour leur participation à mon comité de suivi de thèse.

Je souhaiterais remercier tous les membres du laboratoire IMATH, et tout particulièrement Jean-Jacques Alibert pour les nombreuses et intéressantes discussions mathématiques que nous avons eues, Guy Bouchitté pour m'avoir fourni de nombreuses références bibliographiques, Gloria Faccanoni pour ses nombreuses aides en $\text{\LaTeX}$, Sofiane Meradji pour ses nombreuses aides en informatique.

Des remerciements particuliers s'adressent à Christelle Boyer pour sa gentillesse et l'efficacité avec laquelle elle a pu gérer tous les détails administratifs de chacun des mes déplacements à l'étranger.

Je souhaiterais aussi remercier tous les membres du laboratoire LMA pour l'accueil et les conditions de travail qui m'ont été offertes.

Mes sincères remerciements vont à Sabine Sellier pour les longues heures passées à fabriquer nos échantillons et à Frédéric Mazerolle pour avoir réalisé les expériences mécaniques. Sans leur aide, le chapitre 6 de ce manuscrit n'aurait pas eu lieu.

Je remercie Lukas Jakabcin pour s'être rendu disponible lors de mes répétitions avant la soutenance et pour les discussions intéressantes que nous avons eues.

Je remercie les employés du Service des Relations Internationales pour l'aide administrative qu'ils m'ont apportée et leur soutien tout au long de ces trois années de thèse.

Mes remerciements vont à Elisabeth Murisasco, directrice de l'école doctorale Mer et Sciences, à son assistante Patricia Casanova et à Stéphanie Moutou pour leur efficacité administrative.

J'adresse mes remerciements à Jean-Marc Prévot pour m'avoir appris les commandes de base de Linux et pour ses nombreuses aides en informatique.

Je ne peux pas oublier de remercier tous mes enseignants de l'Université des Comores et ceux de l'Université de Toulon, pour leurs encouragements.

Pendant ces trois années de thèse a régné dans la salle des doctorants une ambiance chaleureuse, où il était agréable de travailler. Un grand merci à Jalal Lakhlili, David Maltese, Thomas Altazin, Tran Duc Minh Phan, Ahmed Mtiraoui, Camille Mazoyer, Hadjer Mousaoui, Mohamed Ali Debyaoui, Asma Chaouch, Nicolas Gartner, Jean-Baptiste Clément, Matheus Laranjeira Moreira, Yssouf Fangan Dosso, Hoang Anh Pham et Ornella Tortorici, pour les moments de joie passés ensemble.

Je voudrais remercier Houzali Sidi, Koussoiyi Ali, Abou Moussa Dieng, Hamza Abdou Soimadou, Ali Mohamed Ali, Moustoifa Rafiou, pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à ma famille et à ma belle-famille pour leur soutien et leurs encouragements constants.

Enfin, un immense merci à mon épouse Asdjadi Abdou, pour son soutien indéfectible, sa grande patience et ses encouragements constants.

À mon fils Anassi Abdoul-Anziz

À la mémoire des mes grands-parents maternels : Anassi Ousseni et Roukia Houmadi

Table des matières

1. Introduction	1
1.1. Contexte et motivations	1
1.2. Structure de la thèse	4
1.3. Méthodes d'homogénéisation périodique	6
1.3.1. Méthode des développements asymptotiques	7
1.3.2. Convergence à deux échelles	8
1.3.3. Méthode d'éclatement périodique	12
1.3.4. G -convergence	13
1.3.5. H -convergence	16
1.3.6. Γ -convergence	17
1.3.7. Mosco-convergence	22
1.4. Exemple pédagogique : le problème d'homogénéisation standard	22
1.4.1. Par la méthode des développements asymptotiques	23
1.4.2. Par la G -convergence	27
1.4.3. Par la Γ -convergence et convergence à deux échelles	31
1.4.4. Par la méthode d'éclatement périodique	34
1.5. Conclusion	35
2. Structures considérées	36
2.1. Périodicité	36
2.2. Description d'un réseau périodique	38
2.3. Hypothèse sur le réseau : connectivité	41
2.4. Graphe périodique élargi	43
2.5. Structures basées un graphe périodique élargi	44
2.6. Résultats connus sur ce type de structures	44
3. Problèmes de réduction totale ND-0D, avec $N = 2$ ou 3	46
3.1. Convergence	47
3.2. Le problème de réduction 2D-0D	48
3.2.1. L'énergie élastique bidimensionnelle - dualité	48
3.2.2. Conditions aux limites	48
3.2.3. Énoncé du résultat principal	49
3.2.4. Estimations pour un rectangle mince	49
3.2.5. Preuve du résultat principal	58
3.3. Le problème de réduction 3D-0D	61
3.3.1. L'énergie élastique tridimensionnelle	61
3.3.2. Réduction à un problème discret	61
3.3.3. Estimations pour un cylindre mince	63
3.3.4. Preuve du théorème 3.10	73

3.4. Conclusion	75
4. Homogénéisation de réseaux périodiques avec interactions élastiques	76
4.1. Réseaux bidimensionnels	76
4.1.1. Géométrie et interactions mécaniques	76
4.1.2. Résultat d'homogénéisation	77
4.1.3. Compacité des suites d'énergie bornée	79
4.1.4. Résultat de convergence à deux échelles	85
4.1.5. Preuve du résultat d'homogénéisation	87
4.2. Réseaux tridimensionnels	90
4.2.1. Géométrie et interactions mécaniques	90
4.2.2. Résultat d'homogénéisation	90
4.3. Calcul explicite de l'énergie homogénéisée	94
4.4. Conclusion	95
5. Milieux continus généralisés et de second gradient obtenus par homogénéisation de réseaux périodiques	96
5.1. Algorithme pour le calcul explicite de l'énergie homogénéisée	97
5.1.1. Description de l'algorithme	97
5.1.2. Mise en œuvre de l'algorithme	102
5.2. Exemples de milieux effectifs	102
5.2.1. Poutres	103
5.2.1.1. Poutre Warren 2D	103
5.2.1.2. Poutre périodique carrée	103
5.2.1.3. Poutre pantographique	104
5.2.1.4. Poutre Warren 3D	105
5.2.2. Membranes	106
5.2.2.1. Réseau triangulaire régulier	106
5.2.2.2. Grille carrée	107
5.2.2.3. Grille carrée sans contraintes	108
5.2.2.4. Structure en nid d'abeilles	108
5.2.2.5. Membrane "couple-stress"	109
5.2.2.6. Membrane pantographique	110
5.2.2.7. Modèle de Cosserat	111
5.2.2.8. Modèle combinant des effets de second gradient et de Cosserat	112
5.2.3. Plaques	113
5.2.3.1. Plaque de Kirchhoff-Love	113
5.2.3.2. Plaque de Mindlin-Reissner	113
5.2.3.3. Plaque de Mindlin-Reissner généralisée	114
5.2.3.4. Plaque de type origami	115
5.2.3.5. Plaque de type origami renforcée	116
5.2.4. Matériaux	116
5.2.4.1. Réseau cubique	116
5.2.4.2. Pantographes tissés	117
5.3. Conclusion	118

6. Étude expérimentale de matériaux architecturés basés sur des structures pantographiques	119
6.1. Designs des éprouvettes	119
6.2. Description des essais	121
6.3. Dispositif matériel	122
6.3.1. Machine de fabrication additive	122
6.3.1.1. Caractéristiques	122
6.3.1.2. Fonctionnement	123
6.3.2. Matériaux utilisés pour l'impression 3D	123
6.3.3. Machine d'essais	124
6.3.4. Propriétés des matériaux	124
6.4. Solution macroscopique théorique	125
6.4.1. Équation d'équilibre	125
6.4.2. Solutions analytiques du problème homogénéisé	125
6.4.3. Détermination de la longueur intrinsèque	127
6.5. Simulation numérique des essais et validation des modèles homogénéisés . . .	127
6.6. Résultats expérimentaux	133
6.7. Conclusion	137
7. Homogénéisation de réseaux périodiques conduisant à des modèles de second gradient couplant les termes de premier et de second gradient	138
7.1. Description de la géométrie	138
7.2. Interactions mécaniques	139
7.3. Résultat d'homogénéisation	140
7.3.1. Relative compacité des suites d'énergie bornée	142
7.3.2. Résultat de convergence à deux échelles	143
7.3.3. Preuve du résultat d'homogénéisation	146
7.4. Calcul explicite de l'énergie homogénéisée	148
7.4.1. Problèmes de cellule	148
7.4.2. Exemple : structure pantographique dissymétrique	148
7.5. Conclusion	150
A. Espaces de Sobolev	153
A.1. Espace $H^1(\Omega)$	154
A.2. Espace $H_0^1(\Omega)$	156
B. Inégalités utiles	157
B.1. Inégalités de Poincaré	157
B.2. Inégalités de Korn	157
C. Énergie élastique d'une poutre bidimensionnelle	159
D. Énergie élastique en contraintes	160

Liste des notations

Nous rassemblons ici les principales notations utilisées dans ce document.

Ensembles

∂E	frontière ou bord d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^N$
$ E $	mesure de Lebesgue de E
$\overline{E}$	adhérence de E

Vecteurs et matrices

v^t, A^t	transposée du vecteur v , de la matrice A
$v^\perp$	vecteur orthogonal à v
$u \cdot v$	produit scalaire de u et v
$A \cdot B$	produit scalaire de A et B , i.e., $A \cdot B := \text{tr}(A^t B)$
$M : N$	produit doublement contracté de deux tenseurs
$A \cdot v$	produit de la matrice A par le vecteur v
$u \wedge v$	produit vectoriel de u et v
$u \otimes v$	produit tensoriel de u et v

Opérateurs

tr	trace d'une matrice ou d'un tenseur
$\ *\ $	norme de $*$
$\nabla*$	gradient de $*$
$\text{div}*$	divergence de $*$
$\text{rot}*$	rotationnel de $*$
$\int_E f$	valeur moyenne de f sur E , i.e., $\int_E f := \frac{1}{ E } \int_E f(x) \, dx$.

Élasticité

u	champ de déplacement
∇u	gradient du déplacement : matrice carrée d'ordre N Ses composantes sont $(\nabla u)_{ij} := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, N$.
$e(u)$	partie symétrique du gradient de u , i.e., $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ Ses composantes sont notées $e_{ij}(u) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.
$\nabla^a u$	gradient antisymétrique de u , i.e., $\nabla^a u = \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^t)$
$\nabla \nabla u$	second gradient du déplacement : tenseur d'ordre 3 Ses composantes sont $(\nabla \nabla u)_{ijk} := \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$.

1. Introduction

Sommaire

1.1. Contexte et motivations	1
1.2. Structure de la thèse	4
1.3. Méthodes d'homogénéisation périodique	6
1.3.1. Méthode des développements asymptotiques	7
1.3.2. Convergence à deux échelles	8
1.3.3. Méthode d'éclatement périodique	12
1.3.4. G -convergence	13
1.3.5. H -convergence	16
1.3.6. Γ -convergence	17
1.3.7. Mosco-convergence	22
1.4. Exemple pédagogique : le problème d'homogénéisation standard	22
1.4.1. Par la méthode des développements asymptotiques	23
1.4.2. Par la G -convergence	27
1.4.3. Par la Γ -convergence et convergence à deux échelles	31
1.4.4. Par la méthode d'éclatement périodique	34
1.5. Conclusion	35

1.1. Contexte et motivations

Les matériaux composites sont des matériaux constitués de l'assemblage d'au moins deux matériaux appelés *constituants* ou *phases*, possédant des propriétés physiques différentes. La description de leur comportement macroscopique (ou effectif) est complexe parce qu'il n'est pas possible de prendre en compte une à une les hétérogénéités présentes à l'échelle microscopique. La taille caractéristique des hétérogénéités est représentée par un petit paramètre $\varepsilon > 0$. Pour décrire les propriétés macroscopiques d'un matériau composite, on fait appel aux méthodes d'homogénéisation.

Dans cette thèse, nous travaillons dans le cadre de l'élasticité linéaire et nous nous intéressons aux matériaux composites élastiques périodiques. Les propriétés effectives de tels matériaux sont connues : elles sont déterminées à partir des propriétés locales d'une période [19, 14].

Pour étudier l'homogénéisation d'un composite élastique périodique, on peut utiliser soit l'approche basée sur les équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant l'équilibre du matériau soit l'approche basée sur la formulation énergétique. Les équations qui gouvernent l'équilibre d'un composite élastique périodique s'écrivent sous la forme :

$$\operatorname{div} \sigma_\varepsilon + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad + \text{ des conditions aux limites,} \quad (1.1)$$

avec $\sigma_\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) : e(u_\varepsilon)$, où Ω est le domaine occupé par le matériau, u_ε est le champ de déplacement, $e(u_\varepsilon)$ est la partie symétrique du gradient de u_ε et $A_\varepsilon := A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est le tenseur de rigidité du matériau. L'approche de l'homogénéisation basée sur les EDP consiste à déterminer si la suite de solutions u_ε de (1.1) converge (dans un sens approprié) vers une limite u solution d'un problème du type :

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ avec } \sigma = A : e(u), \quad (1.2)$$

appelé problème homogénéisé. Dans cette approche, on suppose le plus souvent que le problème homogénéisé est de même type que le problème de départ. Quant à l'approche énergétique, elle consiste à étudier la limite (dans un sens convenable) de l'énergie élastique du matériau qui est une fonctionnelle de la forme :

$$E_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u\right) dx, \quad (1.3)$$

où W_ε est la densité d'énergie qui est supposée être une fonction quadratique positive de ∇u , dépendant périodiquement de la position.

Nous privilégions dans cette thèse l'approche énergétique pour les raisons suivantes :

- l'analyse des propriétés du modèle (choix des espaces fonctionnels où rechercher les solutions, existence et ou unicité de ces solutions, etc.) semble facile grâce aux méthodes directes du calcul des variations ;
- l'homogénéisation des fonctionnelles d'énergie ne présuppose pas la nature de la fonctionnelle limite : on peut obtenir une fonctionnelle limite de nature complètement différente de celle de la fonctionnelle de départ (ce que nous verrons par exemple au chapitre 4 de cette thèse).

Lorsque le matériau composite est isotrope et possède deux constituants, ses propriétés sont décrites par une densité d'énergie de la forme :

$$W_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u\right) := \mu_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \|e(u)\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) [\operatorname{tr}(e(u))]^2,$$

où $e(u)$ est la partie symétrique du gradient de u , μ_ε et λ_ε sont les paramètres de Lamé avec

$$\mu_\varepsilon(y) := \mu_{1\varepsilon}(y) \mathbb{1}_{Z^\varepsilon}(y) + \mu_{2\varepsilon}(y) \mathbb{1}_{\Omega \setminus Z^\varepsilon}(y), \quad \lambda_\varepsilon(y) := \lambda_{1\varepsilon}(y) \mathbb{1}_{Z^\varepsilon}(y) + \lambda_{2\varepsilon}(y) \mathbb{1}_{\Omega \setminus Z^\varepsilon}(y),$$

où Z^ε est la partie occupée par l'un des constituants. Le rapport $\mu_{1\varepsilon}/\mu_{2\varepsilon}$ s'appelle le *contraste* du matériau composite. Lorsque la densité d'énergie ne dépend pas de ε , on dit que le matériau est à faible contraste. En effet, dans ce cas, le contraste s'écrit μ_1/μ_2 , où μ_1 et μ_2 sont deux constantes strictement positives. Cela signifie que les propriétés des deux constituants ne sont pas très différentes.

L'homogénéisation des matériaux composites à faible contraste est bien connu [19, 89, 59]. Elle consiste à prendre en compte le fait que la taille ℓ de la cellule périodique est beaucoup plus petite par rapport à la taille caractéristique L du matériau considéré et à passer à la limite lorsque le rapport $\varepsilon := \ell/L$ tend vers 0. Cette approche, appelée *homogénéisation asymptotique*, a été largement utilisée pour étudier notamment des problèmes de conduction, d'élasticité et d'électromagnétisme dans les cas statique et dynamique [77, 8, 70]. Lorsque la densité d'énergie du matériau est une fonctionnelle convexe, ce qui est le cas en élasticité

linéaire, la densité d'énergie homogénéisée est caractérisée explicitement par le problème de minimisation suivant (appelé souvent problème de cellule)

$$W^{hom}(\nabla u) := \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y W(y, \nabla u + \nabla v(y)) \, dy; \, v \, Y\text{-périodique} \right\}, \quad (1.4)$$

où Y désigne la cellule périodique.

Dans le cas du fort contraste, i.e., lorsque les propriétés des constituants sont dans des rapports d'échelles très différents [34] (par exemple, lorsqu'il y a des trous [93, Chapitre 16]), la situation est complètement différente. En effet, la formule (1.4) ne peut pas s'appliquer directement puisque, outre le paramètre ε , d'autres petits paramètres sont présents. Le comportement homogénéisé dépend fortement de la façon dont on fait tendre ces petits paramètres vers zéro. Les premiers travaux sur l'homogénéisation des composites à fort contraste concernaient des problèmes de conduction [93, 60] où des effets non locaux sont obtenus.

Récemment, dans le contexte de l'élasticité linéaire, Camar-Eddine et Seppecher [29] ont montré, en utilisant la méthode de Mosco-convergence, que toute fonctionnelle quadratique positive, semi-continue inférieurement et objective (i.e. qui s'annule sur l'espace des mouvements rigides) peut être obtenue comme limite d'une suite de fonctionnelles de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire une suite de fonctionnelles du type (1.3). Ce résultat montre en particulier que l'homogénéisation des matériaux élastiques hétérogènes à fort contraste peut conduire à des matériaux dont les propriétés effectives sont totalement différentes de celles des constituants des matériaux de départ. On peut par exemple obtenir des matériaux possédant des propriétés que l'on ne retrouve dans aucun matériau naturel. De tels matériaux sont connus sous le nom de *métamatériaux* ou *matériaux architecturés*. Des exemples de tels matériaux sont les matériaux possédant un coefficient de Poisson négatif, appelés *matériaux auxétiques* [57].

En considérant des matériaux élastiques périodiques renforcés par des fibres de grande rigidité, Seppecher et Pideri [80], Bellieud et Bouchitté [18], Bellieud [17] ont montré que l'homogénéisation des composites à fort contraste peut conduire à des matériaux dont l'énergie élastique dépend du premier et du second gradient du déplacement. De tels matériaux sont appelés *matériaux de second gradient*. Les modèles homogénéisés obtenus dans ces articles entrent dans le cadre des modèles "couple-stress" [95, 96, 72, 71, 23]. En effet, la dépendance de l'énergie homogénéisée par rapport au second gradient du déplacement se limite à la dépendance par rapport au gradient de la partie antisymétrique de ∇u seulement. Nous préférons appeler matériaux de second gradient « incomplets » ces modèles qui rentrent dans le cadre "couple-stress".

Les matériaux de second gradient possèdent des propriétés que l'on ne trouve pas dans les matériaux habituels [73, 47, 41, 15, 50]. Ces matériaux n'entrent pas dans le cadre de la théorie de Cauchy puisque les interactions mécaniques internes ne peuvent pas être décrites par un tenseur de contrainte de Cauchy [45, 44, 42, 40]. Les modèles de second gradient sont parmi les modèles de milieux continus généralisés les plus utilisés dans la littérature. Ils sont utilisés pour régulariser des problèmes de singularité aux interfaces qui peuvent apparaître dans les milieux poreux, en fracture, en endommagement, en plasticité, etc. [97, 4, 83, 5, 90, 101, 69]. Récemment, des résultats expérimentaux [66, 15, 50] ont montré que les effets de second gradient sont difficiles à mesurer expérimentalement et aussi à interpréter rigoureusement d'un point de vue microscopique.

On peut constater qu'un grand nombre de modèles de second gradient sont obtenus de façon phénoménologique ou en utilisant des méthodes heuristiques d'homogénéisation [51, 22]. Malgré la vaste littérature sur le sujet, il y a très peu de résultats mathématiques [7, 91, 6] conduisant à des matériaux de second gradient dits *complets*, c'est-à-dire, des matériaux dont l'énergie effective peut dépendre de toutes les composantes du second gradient du déplacement. De tels matériaux n'entrent pas dans le cadre des modèles "couple-stress". À notre connaissance, des énergies effectives du type

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx, \quad (1.5)$$

où u_1 et x_1 sont respectivement les (premières) composantes de u et x dans la même direction, n'ont été obtenues jusqu'à présent que par homogénéisation de systèmes discrets basés sur des structures pantographiques [91]. Les matériaux de second gradient dont l'énergie effective s'écrit sous la forme (1.5) sont intéressants. En effet, la présence de termes du type $(\partial^2 u_1 / \partial x_1^2)^2$ dans l'énergie effective montre que lorsque l'on impose une dilatation sur une partie du matériau, cette dilatation se propagera dans tout le matériau.

L'homogénéisation de structures à fort contraste conduisant à des matériaux de second gradient n'a pu être traitée jusqu'à présent qu'à travers l'étude de quelques structures particulières : des structures périodiques renforcées par des fibres de grande rigidité. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la conception de nouveaux matériaux périodiques à fort contraste dont l'homogénéisation peut conduire à des matériaux de second gradient. En se basant sur des outils mathématiques d'homogénéisation, nous établissons une formule générale qui permet de relier les propriétés macroscopiques d'un matériau composite au design au niveau microscopique de sa structure interne. Les travaux de recherche menés dans cette thèse sont issus d'une collaboration entre le laboratoire Institut de Mathématiques de Toulon et le Laboratoire de Mécanique et Acoustique de Marseille.

1.2. Structure de la thèse

Ce manuscrit de thèse est organisé en 7 chapitres de la manière suivante :

Le chapitre 1 est constitué de cette introduction et de deux sections consacrées à une revue des méthodes les plus utilisées en homogénéisation périodique. Nous mettons en évidence les liens qui existent entre ces différentes méthodes à travers le problème d'homogénéisation standard, c'est-à-dire, le problème d'homogénéisation associé au problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_{\varepsilon} \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $A(y)$ est une matrice symétrique définie pour $y \in Y :=]0, 1[^n$, Y -périodique, coercive et bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ telles que

$$\alpha \|\xi\|^2 \leq A(y) \xi \cdot \xi \leq \beta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Dans le chapitre 2, nous présentons les types de structures qui font l'objet de notre étude. Il s'agit de structures élastiques périodiques cylindriques, constituées d'un arrangement périodique de parois minces soudées (voir figure 1.1). L'intérêt de ces types de structures réside

dans la facilité de leur fabrication par impression 3D et la possibilité de les modéliser en déformations planes comme des structures bidimensionnelles. Pour simplifier l'étude de leur comportement asymptotique, nous les modélisons comme des structures basées sur un *graphe périodique élargi*.

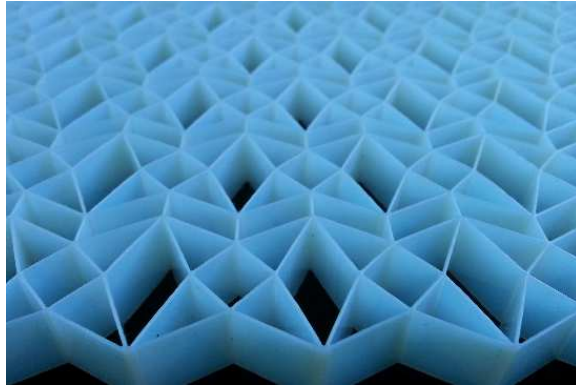


FIGURE 1.1. – Prototype des structures étudiées

Dans le chapitre 3, nous considérons des structures périodiques bi- et tridimensionnelles constituées d'un matériau élastique linéaire isotrope de grande rigidité. Nous modélisons ces structures comme des structures basées sur un graphe périodique élargi. Nous montrons que lorsque l'épaisseur du graphe tend vers zéro, on peut réduire l'étude des structures considérées à l'étude d'un système discret correspondant à des réseaux périodiques de nœuds reliés par des interactions élastiques de type extension-flexion en dimension 2 et du type extension-flexion-torsion en dimension 3.

Le chapitre 4 est consacré à l'homogénéisation de réseaux périodiques avec interactions élastiques tels qu'obtenus au chapitre 3. En supposant que les positions des nœuds dans la cellule périodique de taille unité ne dépendent pas de ε , nous montrons en utilisant les outils de Gamma-convergence que l'homogénéisation de tels réseaux peut conduire à des matériaux de second gradient, c'est-à-dire, des matériaux dont l'énergie élastique dépend du premier et du second gradient du déplacement au lieu de dépendre du premier gradient du déplacement seulement. Nous établissons une formule générale d'homogénéisation donnée sous la forme d'un problème de minimisation (Théorème 4.2). Ces résultats ont fait l'objet de l'article [1]. À notre connaissance, cette étude est le premier résultat mathématique d'homogénéisation dans lequel l'énergie homogénéisée peut dépendre de toutes les composantes du second gradient du déplacement.

Dans le chapitre 5, nous décrivons de façon détaillée l'algorithme qui permet de calculer explicitement l'énergie homogénéisée obtenue au chapitre 4. Nous explorons de nombreux exemples de modèles effectifs pouvant être obtenus en appliquant nos résultats. Nous obtenons des modèles correspondant à des milieux de second gradient. Nous retrouvons aussi la plupart des modèles classiques largement utilisés en mécanique comme les poutres d'Euler ou de Timoshenko, les milieux de Cosserat, les plaques de Kirchhoff-Love ou de Mindlin-Reissner. Ces résultats ont fait l'objet de l'article [2].

Le chapitre 6 est consacré à une étude expérimentale des matériaux architecturés fabriqués par impression 3D. La géométrie de ces matériaux est basée sur des structures pantographiques. Cette étude vise à vérifier la faisabilité pratique des matériaux de second gradient.

Le chapitre 7 répond à la problématique du couplage entre les termes de premier et de second gradient. Dans le chapitre 4, nous avons supposé que les positions des nœuds étaient fixés dans une cellule périodique de taille ε . En remettant en cause cette hypothèse, nous montrons que l'homogénéisation de réseaux périodiques avec interactions élastiques peut conduire à des modèles de second gradient où les termes de premier et de second gradient sont couplés.

1.3. Méthodes d'homogénéisation périodique

La littérature sur l'homogénéisation périodique est vaste. Nous citons entre autres [14, 19, 33, 34, 59, 89, 70]. Dans cette section, nous présentons les méthodes d'homogénéisation périodique les plus utilisées dans la littérature qui sont la méthode des développements asymptotiques, la convergence à deux échelles, l'éclatement périodique, la G -convergence, la H -convergence, la Γ -convergence et la Mosco-convergence. Nous allons mettre en évidence les liens qui existent entre ces méthodes.

Nous classons ces méthodes en deux catégories. La première catégorie regroupe les méthodes qui servent à étudier la convergence des suites de solutions ou des suites de déplacements admissibles (convergence à deux échelles et éclatement périodique) et la deuxième catégorie regroupe les méthodes qui servent à étudier la convergence des problèmes d'équations aux dérivées partielles ou des fonctionnelles (G -convergence, H -convergence, Γ -convergence et Mosco-convergence).

Pour des raisons de simplicité, nous choisissons de décrire ces méthodes d'homogénéisation à travers le problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.6)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $A(y)$ est une matrice symétrique définie pour $y \in Y :=]0,1[^n$, Y -périodique, coercive et bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ telles que

$$\alpha \|\xi\|^2 \leq A(y)\xi \cdot \xi \leq \beta \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Définition 1.1. On dit qu'une fonction $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème (1.6) si elle vérifie

$$\int_{\Omega} A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.8)$$

L'identité (1.8) s'appelle la formulation faible du problème (1.6).

Le problème (1.6) est l'équation d'Euler-Lagrange associé au problème de minimisation suivant :

$$\inf_{v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)} J_\varepsilon(v_\varepsilon), \quad \text{avec } J_\varepsilon(v_\varepsilon) := \int_{\Omega} A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \, dx - \langle f, v_\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Lemme 1.2 (voir [33]). *Sous l'hypothèse (1.7), le problème (1.6) admet une unique solution $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ qui satisfait*

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (1.9)$$

En introduisant l'opérateur $\mathbf{A}_\varepsilon: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\mathbf{A}_\varepsilon u := -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u \right),$$

on peut réécrire le problème (1.6) sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\varepsilon u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.10)$$

On suppose que la suite u_ε de solutions de (1.10) converge (dans un certain sens) vers une limite u lorsque ε tend vers 0. Homogénéiser le problème (1.10) revient à chercher un opérateur $\mathcal{A}$ tel que u soit la solution du problème

$$\mathcal{A}u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.11)$$

avec les conditions aux limites convenables. Le problème (1.11) s'appelle le *problème homogénéisé* et le passage de (1.10) à (1.11) s'appelle le *processus d'homogénéisation*. Pour trouver la forme explicite du problème homogénéisé ou de l'opérateur homogénéisé $\mathcal{A}$, on utilise le plus souvent la méthode des développements asymptotiques [19, 89, 14] que nous décrivons ci-dessous.

1.3.1. Méthode des développements asymptotiques

La méthode des développements asymptotiques consiste à proposer un ansatz pour la solution u_ε du problème (1.6) sous forme d'un développement en série de puissances de ε du type

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots, \quad (1.12)$$

où les $u_i(x, y)$ sont des fonctions Y -périodiques en $y := \frac{x}{\varepsilon}$. Les variables x et y supposées indépendantes (séparation d'échelles) sont appelées respectivement *variable lente* et *variable rapide*.

L'équation (1.6) fait intervenir des opérateurs différentiels qui vont agir sur les variables x et y . Pour différencier ces opérateurs, on notera $\operatorname{div}_x, \nabla_x$ (respectivement $\operatorname{div}_y, \nabla_y$) les opérateurs divergence et gradient par rapport à x (respectivement par rapport à y). Lorsque l'on applique l'opérateur gradient à des fonctions du type $\Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, on obtient

$$\nabla \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \nabla_x \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1.13)$$

En utilisant (1.13), on obtient que

$$\mathbf{A}_\varepsilon \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = [(\varepsilon^{-2} \mathbf{A}_0 + \varepsilon^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \Phi]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.14)$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0\Phi &:= -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y\Phi), \\ \mathbf{A}_1\Phi &:= -\operatorname{div}_x(A(y)\nabla_y\Phi) - \operatorname{div}_y(A(y)\nabla_x\Phi), \\ \mathbf{A}_2\Phi &:= -\operatorname{div}_x(A(y)\nabla_x\Phi).\end{aligned}$$

Par conséquent, le problème (1.10) devient

$$\begin{cases} (\varepsilon^{-2}\mathbf{A}_0 + \varepsilon^{-1}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.15)$$

En substituant (1.12) dans (1.15), on obtient

$$\varepsilon^{-2}\mathbf{A}_0u_0 + \varepsilon^{-1}(\mathbf{A}_0u_1 + \mathbf{A}_1u_0) + (\mathbf{A}_0u_2 + \mathbf{A}_1u_1 + \mathbf{A}_2u_0) + O(\varepsilon) = f. \quad (1.16)$$

En identifiant les termes de même ordre en ε dans l'équation ci-dessus, on obtient les équations en cascade suivantes :

$$\text{A l'ordre } \varepsilon^{-2} : \quad \mathbf{A}_0u_0 = 0, \quad (1.17)$$

$$\text{A l'ordre } \varepsilon^{-1} : \quad \mathbf{A}_0u_1 + \mathbf{A}_1u_0 = 0, \quad (1.18)$$

$$\text{A l'ordre } \varepsilon^0 : \quad \mathbf{A}_0u_2 + \mathbf{A}_1u_1 + \mathbf{A}_2u_0 = f. \quad (1.19)$$

Cette identification n'est pas justifiée ici mais doit l'être a posteriori. On obtiendra la forme explicite du problème homogénéisé en résolvant les équations (1.17), (1.18), (1.19). La résolution de ces équations constitue l'objet de la sous-section 1.4.1.

1.3.2. Convergence à deux échelles

La convergence à deux échelles est une notion de convergence introduite par Nguetseng [76] et développée par Allaire [8]. Cette convergence est particulièrement bien adaptée aux problèmes issus de l'homogénéisation périodique [103, 21]. Elle permet aussi de justifier rigoureusement des résultats obtenus en utilisant la méthode des développements asymptotiques (voir section 1.4).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $Y :=]0,1[^n$ le cube unité de $\mathbb{R}^n$. On note $C_\#(Y)$ l'espace des fonctions Y -périodiques différentiables sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.3. On dit qu'une suite de fonctions u_ε de $L^2(\Omega)$ **converge à deux échelles** vers $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ si, pour toute fonction $\psi(x,y) \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u(x,y) \psi(x,y) dx dy. \quad (1.20)$$

On dit que u est la **limite à deux échelles** de u_ε , et on écrit $u_\varepsilon \rightharpoonup u$.

Remarque 1.4. Si on travaille sur un parallélépipède $Y := \prod_{i=1}^n]0, \ell_i[$ au lieu du cube unité, on doit multiplier le second membre de (1.20) par $1/|Y|$.

Nous énonçons les principales propriétés de la convergence à deux échelles. Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans [8, 76, 102, 30].

Théorème 1.5. *La limite à deux échelles est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une suite u_ε dans $L^2(\Omega)$ converge à deux échelles vers deux limites différentes u et v dans $L^2(\Omega \times Y)$. Alors, pour toute fonction test $\psi \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y v(x, y) \psi(x, y) dx dy.$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} \int_Y (u(x, y) - v(x, y)) \psi(x, y) dx dy = 0, \forall \psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_\#^\infty(Y)).$$

Ce qui implique que $u(x, y) = v(x, y)$ pour presque tout $(x, y) \in \Omega \times Y$, puisque $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ est dense dans $L^2(\Omega \times Y)$. $\square$

On a le théorème de compacité suivant.

Théorème 1.6 ([8], Théorème 1.2). *Pour toute suite u_ε bornée dans $L^2(\Omega)$, il existe une fonction u dans $L^2(\Omega \times Y)$ telle que, à une sous-suite près, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$.*

Le résultat suivant montre que la norme L^2 est semi-continue inférieurement par rapport à la convergence à deux échelles.

Proposition 1.7. *Soit u_ε une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$. Alors, on a*

$$\|u\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il y a un lien étroit entre la convergence à deux échelles et la convergence faible classique. Ce lien est donné par la proposition suivante.

Proposition 1.8 ([8], Proposition 1.6). *Soit u_ε une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$. Alors, on a*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0(x) := \int_Y u(x, y) dy \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (1.21)$$

De plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.22)$$

Dans la proposition 1.8, l'assertion (1.21) signifie que si une suite u_ε converge à deux échelles vers u , alors elle converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers la moyenne de u sur Y . Quant à l'assertion (1.22), elle signifie que la limite à deux échelles d'une suite u_ε contient plus d'informations que la limite faible de cette suite. En particulier, la limite à deux échelles peut capturer les oscillations de la suite u_ε à une échelle donnée, comme le montre l'exemple suivant. Prenons la suite de fonctions u_ε définie par $u_\varepsilon(x) := x \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$. On peut montrer que $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ dans $L^2([-1, 1])$ et que $u_\varepsilon \rightharpoonup u(x, y) := x \sin(2\pi y)$ dans $L^2([-1, 1] \times [0, 1])$.

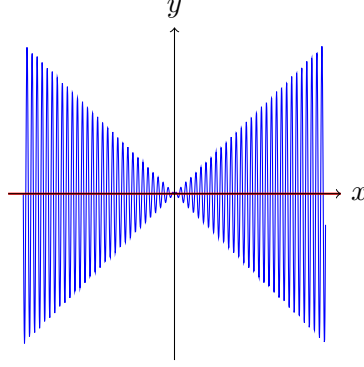


FIGURE 1.2. – La suite u_ε avec $\varepsilon = \frac{1}{30}$ (en bleu) et sa limite faible $u_0 = 0$ (en rouge).

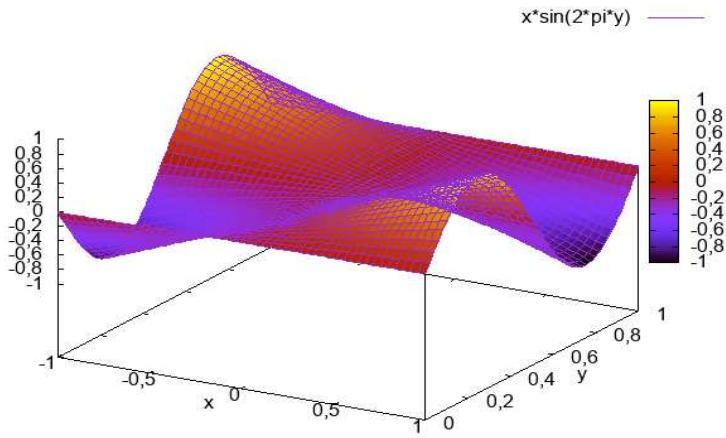


FIGURE 1.3. – La limite à double échelle $u(x, y) = x \sin(2\pi y)$.

Proposition 1.9. Soit $\phi(x, y)$ une fonction appartenant à $L^1(\Omega; C_\#(Y))$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\phi(x, x/\varepsilon)$ est une fonction mesurable sur Ω telle que

$$\left\| \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\phi(x, y)\|_{L^1(\Omega; C_\#(Y))} := \int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\phi(x, y)| \, dx \quad (1.23)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx = \int_{\Omega} \int_Y \phi(x, y) \, dx \, dy. \quad (1.24)$$

Proposition 1.10. Soit $\phi(x, y)$ une fonction appartenant à $L^2(\Omega; C_\#(Y))$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\phi(x, x/\varepsilon)$ est une fonction mesurable sur Ω ; de plus, on a

$$\left\| \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi(x, y)\|_{L^2(\Omega; C_\#(Y))} := \left(\int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |\phi(x, y)|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (1.25)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right)^2 \, dx = \int_{\Omega} \int_Y (\phi(x, y))^2 \, dx \, dy. \quad (1.26)$$

Proposition 1.11. Soit $u(x,y)$ une fonction régulière définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$, Y -périodique en y . Alors, si elle existe, la limite à deux échelles $\tilde{u}$ de $u_\varepsilon(x) := u\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ est égale à la limite L^2 faible de u , c'est-à-dire, $\tilde{u}(x) = \int_Z u(x,z) \, dz$.

Démonstration. Soit $v(x,y,z)$ une fonction régulière qui est Y -périodique en y et Z -périodique en z . D'après la proposition 1.9, on sait que

$$v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}\right) \rightharpoonup \int_Y \int_Z v(x,y,z) \, dy \, dz \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Ceci implique que pour toute fonction régulière $u(x,y)$ Y -périodique,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z u(x,z) \psi(x,y) \, dx \, dy \, dz.$$

On en déduit que la limite à deux échelles de u_ε est $\tilde{u}(x) := \int_Z u(x,z) \, dz$. □

Dans tout ce qui suit, on désignera par $H_\#^1(Y)$ l'espace des fonctions de $H^1(Y)$ qui sont Y -périodiques.

Proposition 1.12. Soit u_ε une suite bornée dans $H^1(\Omega)$. Alors, il existe $u_0(x) \in H^1(\Omega)$ et $u_1(x,y) \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$ telles que, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0(x) \quad \text{et} \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y).$$

Proposition 1.13. Soit u_ε une suite dans $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Alors, il existe $u(x,y) \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y))$ telle que, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u(x,y) \quad \text{et} \quad \varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y u(x,y).$$

Proposition 1.14. Soit $\alpha \in (0,1)$ et u_ε une suite dans $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad \varepsilon^\alpha \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Alors, il existe $u_0(x) \in L^2(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0(x)$.

Proposition 1.15. Soit u_ε une suite bornée dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{div} u_\varepsilon = 0$. Alors, u_ε converge à deux échelles vers $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\operatorname{div}_y u(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \int_Y \operatorname{div}_x u(x,y) \, dy = 0.$$

Proposition 1.16 (voir [102], p. 983). Si $u_\varepsilon \rightharpoonup u(x,y)$, alors pour tout $A \in L_\#^\infty(Y)$, on a

$$A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon \rightharpoonup A(y) u(x,y).$$

1.3.3. Méthode d'éclatement périodique

Dans [31], Cioranescu, Damlamian et Griso ont introduit la méthode d'éclatement périodique. Cette méthode est une approche alternative à la convergence à deux échelles. Les principales propriétés de cette méthode et leurs démonstrations se trouvent dans [32].

On considère un ouvert Ω et un parallélépipède Y dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Soit $t_1, \dots, t_n$ des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe des entiers uniques $k_1, \dots, k_n$ tels que $z - \sum_{i=1}^N k_i t_i$ est un élément de Y . Par analogie avec les notations utilisées dans la décomposition d'un réel (en partie entière et partie fractionnaire), on définit

$$\{z\}_Y := z - [z]_Y \in Y \quad \text{avec} \quad [z]_Y := \sum_{i=1}^N k_i t_i \in \mathbb{Z}^n.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a la décomposition suivante :

$$x = \varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y.$$

Définition 1.17. Soit u une fonction dans $L^2(\Omega)$ (prolongée par zéro en dehors de Ω). On définit l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times Y)$ par

$$\mathcal{T}_\varepsilon(u)(x, y) := u \left(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon y \right), \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in Y. \quad (1.27)$$

Nous énonçons quelques propriétés de cet opérateur d'éclatement.

Proposition 1.18. i) $\mathcal{T}_\varepsilon$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega \times Y)$.

ii) $\forall u, v \in L^2(\Omega)$, on a $\mathcal{T}_\varepsilon(uv) = \mathcal{T}_\varepsilon(u)\mathcal{T}_\varepsilon(v)$.

iii) $\forall u \in L^1(\Omega)$, on a $\int_\Omega u \, dx = \int_\Omega \int_Y \mathcal{T}_\varepsilon(u) \, dx \, dy$.

iv) $\forall x \in \Omega, \forall u \in L^2(\Omega)$, on a $\mathcal{T}_\varepsilon(u) \left(x, \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}_Y \right) = u(x)$.

v) $\forall u \in L^2(\Omega)$, on a $\|\mathcal{T}_\varepsilon(u)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

vi) $\forall u \in L^2_\#(Y)$, on a $\mathcal{T}_\varepsilon \left(u \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) (x, y) = u(y)$.

La propriété (iii) ci-dessus est l'une des propriétés intéressantes de l'opérateur d'éclatement. Elle signifie que l'opérateur d'éclatement permet de transformer l'intégrale d'une fonction sur Ω en une intégrale sur $\Omega \times Y$.

Proposition 1.19. Soit u_ε une suite dans $L^2(\Omega)$ et $u \in L^2(\Omega)$. On a les assertions suivantes :

i) $\mathcal{T}_\varepsilon(u) \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$.

ii) Si $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$, alors $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega \times Y)$.

iii) Si $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$, alors $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega \times Y)$.

iv) Si u_ε est bornée et s'il existe $\hat{u} \in L^2(\Omega \times Y)$ telle que $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup \hat{u}$ dans $L^2(\Omega \times Y)$, alors

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \int_Y \hat{u}(\cdot, y) \, dy \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

v) Si $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega \times Y)$ et $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega \times Y)}$, alors $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega \times Y)$.

Proposition 1.20. Soit u_ε une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} \int_Y \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \mathcal{T}_\varepsilon(v) \, dx \, dy. \quad (1.28)$$

Proposition 1.21. On a les propriétés suivantes :

- i) $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\nabla_y(\mathcal{T}_\varepsilon(u)) = \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x u)$.
- ii) Soit u_ε une suite dans $H^1(\Omega)$ telle que $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ et $\varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C$. Alors, il existe une fonction $\tilde{u} \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y))$ telle que, à une sous-suite près,

$$\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_y \tilde{u} \text{ dans } L^2(\Omega \times Y).$$

- iii) Soit u_ε une suite qui converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega)$. Alors, il existe une fonction $\hat{u} \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ telle que, à une sous-suite près,

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla u + \nabla_y \hat{u} \text{ dans } L^2(\Omega \times Y).$$

Le résultat suivant montre le lien qui existe entre la convergence à deux échelles et la méthode de l'éclatement périodique. Il montre que la convergence à deux échelles de la suite u_ε vers u est équivalente à la convergence faible de la « suite éclatée » $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon)$ vers u .

Proposition 1.22. Soit u_ε une suite bornée de $L^2(\Omega)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega \times Y)$;
- (ii) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$.

1.3.4. G -convergence

La notion de G -convergence est introduite par Spagnolo [92]. La lettre G vient du nom Green, parce que la G -convergence correspond à la convergence de fonctions de Green. Pour plus de détails, voir par exemple [25].

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et α, β deux constantes telles que $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. On note $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques. On introduit l'ensemble $\mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ défini par

$$\mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega) := \left\{ A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{S}_n) \mid \alpha \|\xi\|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq \beta \|\xi\|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ et p.p. } x \in \Omega \right\}.$$

Définition 1.23. Soit (A_ε) une suite dans $\mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$. On dit que A_ε G -converge vers $A^* \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$, et on note $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solution u_ε du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.29)$$

vérifie $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, $A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^* \nabla u$ dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, où u est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.30)$$

Le tenseur A^* est appelé la G -limite de la suite A_ε .

Nous énonçons les propriétés fondamentales de la G -convergence. Pour les démonstrations des résultats, nous référons à [30, 39, 59, 92].

Proposition 1.24. 1) La G -limite est unique.

2) La G -limite est indépendante des conditions aux limites.

3) Si $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ et $A_\varepsilon \rightarrow A$ dans $L^2(\Omega)$, alors $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A$.

4) Soit $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ telles que $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$ et $B_\varepsilon \xrightarrow{G} B^*$. Soit $\omega \subset \Omega$ tel que $A_\varepsilon = B_\varepsilon$ dans ω . Alors $A^* = B^*$ sur ω .

5) Si $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, alors $A_\varepsilon^t \xrightarrow{G} (A^*)^t$.

6) Si $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, alors $A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \rightarrow A^* \nabla u \cdot \nabla u$ au sens des distributions dans Ω .

7) Si $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, alors $A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^* \nabla u$ dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

8) La G -limite A^* satisfait l'inégalité de Voigt-Reuss :

$$\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} \right)^{-1} \leq A^* \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon,$$

où les limites sont prises au sens de la convergence faible de $L^2(\Omega)$.

On a le théorème de compacité suivant.

Théorème 1.25 (Compacité). L'ensemble $\mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ est compact au sens de la G -convergence, i.e. de toute suite $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui G -converge vers $A^* \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$.

Remarque 1.26. Le Théorème 1.25 prouve l'existence d'une G -limite A^* pour une sous-suite de la suite $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ mais ne fournit aucune formule explicite pour A^* . Néanmoins, dans le cas où $A_\varepsilon(x)$ est de la forme $A_\varepsilon(x) := A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, avec $A \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \mathbb{R}^n)$ Y -périodique, on peut trouver une formule explicite pour la G -limite à partir des solutions des problèmes dits problèmes de cellule [19].

Remarque 1.27. Si une suite A_ε dans $\mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ converge fortement dans $L^\infty(\Omega; \mathbb{S}_n)$ vers une limite A , alors A_ε G -converge aussi vers cette limite A . Mais, la réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple suivant (en dimension $n = 1$). Soit $\Omega =]0, 1[$ et f dans $L^2(\Omega)$. On définit A_ε par

$$A_\varepsilon(x) := \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \beta & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

avec $0 < \alpha \leq \beta$. Soit u_ε la solution de

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(A_\varepsilon(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

D'après le lemme 1.2, on a $\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Alors, à une sous-suite près, on a $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On pose $\eta_\varepsilon := A_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$. Alors, on a $\|\eta_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ et $-\frac{d\eta_\varepsilon}{dx} = f$ dans Ω . On en déduit que la suite η_ε est bornée dans $H^1(\Omega)$. Il existe donc une fonction $\eta_0 \in L^2(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près, $\eta_\varepsilon \rightarrow \eta_0$ dans $L^2(\Omega)$. Puisque $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$, alors $\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{A_\varepsilon(x)} \leq \frac{1}{\alpha}$ p.p. $x \in \Omega$, et à une sous-suite près,

$$A_\varepsilon^{-1} := \frac{1}{A_\varepsilon} \xrightarrow{*} \frac{1}{A^*} \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible-},$$

avec $A^* = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ (moyenne harmonique de α et β).

D'autre part, on a $A_\varepsilon \xrightarrow{*} B := \frac{\alpha + \beta}{2}$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible-*. En passant à la limite au sens des distributions dans l'équation $\frac{1}{A_\varepsilon} \eta_\varepsilon = \frac{du_\varepsilon}{dx}$, on obtient $\frac{1}{A^*} \eta_0 = \frac{du_0}{dx}$ ou encore $\eta_0 = A^* \frac{du_0}{dx}$. Or, $-\frac{d\eta_0}{dx} = f$ et $A^* \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$, on déduit que u_0 est la solution du problème

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(A^* \frac{du_0}{dx} \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Autrement dit, A^* est la G -limite de A_ε .

Cet exemple montre que la G -limite A^* de A_ε est différente de la limite $L^\infty(\Omega)$ faible-* B de A_ε . Il montre aussi que A^* est l'inverse de la limite $L^\infty(\Omega)$ faible-* de la suite A_ε^{-1} (ce résultat n'est vrai qu'en dimension 1).

Proposition 1.28 ([59], Théorème 5.2). *Soit $(A_\varepsilon) \subset \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ telle $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$. Si $v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ vérifie*

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } H^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(A_\varepsilon(z + \nabla v_\varepsilon)) = g, \quad (1.31)$$

où $z \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-1}(\Omega)$, alors on a

$$A_\varepsilon(z + \nabla v_\varepsilon) \rightharpoonup A^*(z + \nabla v) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } -\operatorname{div}(A^*(z + \nabla v)) = g.$$

Proposition 1.29. *Soit $A_\varepsilon \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$ telle que $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$. Alors*

1) *pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u \, dx; \quad (1.32)$$

2) *pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour toute suite $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que $v_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \, dx \geq \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u \, dx. \quad (1.33)$$

Démonstration. 1) La formulation faible de (1.29) s'écrit : trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \nabla \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier pour $f = A^* \nabla u \in L^2(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.34)$$

D'après la définition de la G -convergence, on a $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, d'après le théorème de Rellich, $\nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, en utilisant (1.34) avec $\varphi = u_{\varepsilon}$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx = \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

2) Soit $v_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ telle que $v_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque A_{ε} est symétrique, la solution de (1.34) est aussi la solution du problème de minimisation

$$\inf_{w \in H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A_{\varepsilon} \nabla w \cdot \nabla w - A^* \nabla u \cdot \nabla w \right) \, dx.$$

Alors, pour tout $v_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla v_{\varepsilon} \, dx - \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla v_{\varepsilon} \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx - \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla v_{\varepsilon} \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx - \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx + \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla v_{\varepsilon} \, dx.$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les deux membres de cette inégalité, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A_{\varepsilon} \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla v_{\varepsilon} \, dx \geq \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u \, dx. \quad \square$$

1.3.5. H -convergence

La H -convergence est une notion de convergence introduite par Murat et Tartar [75]. C'est une généralisation de la G -convergence pour les opérateurs linéaires non nécessairement symétriques.

Pour $\alpha \leq \beta < \infty$, on note $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ l'ensemble des matrices $A \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{M}_n)$ vérifiant la condition (1.7).

Définition 1.30. Soit $(A_{\varepsilon}) \subset \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$. On dit que A_{ε} H -converge vers $A^* \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, et on note $A_{\varepsilon} \xrightarrow{H} A^*$, si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solution u_{ε} de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon}) = f \text{ dans } \Omega, \\ u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

vérifie

$$u_{\varepsilon} \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } A_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup A^* \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n),$$

où u est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

La H -convergence possède des propriétés analogues à celles de la G -convergence. Nous en citons quelques-unes ici. Pour plus de détails, voir [39, 9].

Théorème 1.31 (Compacité). *Pour toute suite $A_\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, il existe $A^* \in \mathcal{M}(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega)$ telle que, à une sous-suite près, $A_\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$.*

Proposition 1.32. 1) *La H -limite est unique.*

2) *La H -limite est indépendante des conditions aux limites.*

3) *Soit $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ deux suites dans $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ qui satisfont $A_\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$, $B_\varepsilon \xrightarrow{H} B^*$ et $A_\varepsilon = B_\varepsilon$ sur un ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Alors, $A^* = B^*$ sur ω .*

4) *Si $A_\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$, alors $A_\varepsilon^t \xrightarrow{H} (A^*)^t$.*

1.3.6. Γ -convergence

La Γ -convergence, introduite par De Giorgi [38], est une notion de convergence pour des suites de fonctionnelles. C'est l'outil le mieux adapté pour étudier le comportement asymptotique d'une famille de problèmes de minimisation dépendant d'un paramètre. Plus généralement, la Γ -convergence permet de répondre à la question suivante : étant donnée une suite de problèmes de minimisation associés à des fonctionnelles E_ε , quelle topologie mettre sur les fonctionnelles pour que la convergence de E_ε vers E assure la convergence des minima (ou minimiseurs) de E_ε vers les minima (ou minimiseurs) de E ?

Dans cette section, nous rappelons la définition et énonçons les propriétés principales de la Γ -convergence dans un espace métrique. Pour plus de détails et pour les démonstrations des résultats énoncés ci-dessous, nous référons aux ouvrages de Braides [24] et de Dal Maso [35].

Définition 1.33. *Soit (X, d) un espace métrique et $E_\varepsilon : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctionnelles. On dit que E_ε $\Gamma(d)$ -converge vers $E : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *(inégalité de la Γ -limite inférieure) Pour tout $u \in X$ et pour toute suite u_ε qui converge vers u dans X ,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq E(u); \quad (1.35)$$

(ii) *(inégalité de la Γ -limite supérieure) Pour tout $u \in X$, il existe une suite u_ε qui converge vers u dans X telle que*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E(u). \quad (1.36)$$

La fonctionnelle E est appelée la $\Gamma(d)$ -limite de E_ε , et on écrit $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma(d)} E$ ou $E = \Gamma(d)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon$. Si aucune confusion n'est à craindre sur la distance d , on dira simplement que E est

la Γ -limite de E_ε , et on écrira $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$ ou $E = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon$.

Pour des exemples de calcul de Γ -limite, nous renvoyons le lecteur à [24, 35, 40].

Remarque 1.34. 1) On a la même définition pour une suite de fonctionnelles E_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- 2) Les inégalités (1.35) et (1.36) déterminent la Γ -limite de façon unique.
- 3) L'inégalité de la Γ -limite inférieure signifie que E est une borne inférieure pour la suite E_ε dans le sens où $E(u) \leq E_\varepsilon(u_\varepsilon) + o(1)$ dès que $u_\varepsilon \rightarrow u$. Lorsque cette inégalité est satisfaite, on peut remplacer l'inégalité de la Γ -limite supérieure par la condition suivante :

(ii)' il existe une suite u_ε telle que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) = E(u)$.

Toute suite vérifiant (ii)' s'appelle une **suite approximante**.

Remarque 1.35. Du point de vue mécanique, si l'on regarde E_ε comme une suite d'énergies élastiques et E comme l'énergie limite correspondante, alors le point (i) signifie que pour un champ de déplacement u donné, l'énergie élastique associée à tout champ de déplacement u_ε convergeant vers u est plus grande que l'énergie limite calculée en u . Quant au point (ii), il permet tout simplement d'assurer que l'inégalité (1.35) est optimale.

Remarque 1.36. La Γ -limite dépend du choix de la convergence sur X (voir par exemple [28, p. 14]). En particulier, si l'on munit X de deux distances d et d' et l'on suppose que la convergence sur (X, d) implique la convergence sur (X, d') , alors la $\Gamma(d)$ -limite sera plus grande que la $\Gamma(d')$ -limite. Cependant, il s'avère que la Γ -limite ne dépend pas du choix de la convergence dès lors que cette dernière est bien choisie pour assurer un résultat de relative compacité pour toute suite u_ε vérifiant $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M < +\infty$ (voir sous-section 1.4.3).

Dans beaucoup d'applications dans cette thèse, nous prendrons pour X l'un des espaces de Hilbert suivants : $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ ou $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$.

Remarque 1.37. Il n'existe pas de recette magique pour déterminer la Γ -limite d'une suite de fonctionnelles donnée. Ainsi, pour établir un résultat de Γ -convergence, il faut utiliser la stratégie suivante :

1. Choisir la convergence $u_\varepsilon \rightarrow u$ de façon à assurer la relative compacité de toute suite u_ε vérifiant $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$;
2. Conjecturer la Γ -limite E , par exemple en utilisant un développement asymptotique ;
3. Montrer l'inégalité de la Γ -limite inférieure et l'inégalité de la Γ -limite supérieure.

Pour montrer l'inégalité de la Γ -limite inférieure, il suffit de ne considérer que des suites telles que $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$, sinon l'inégalité est triviale, et pour montrer l'inégalité de la Γ -limite supérieure, il suffit de ne considérer que des fonctions u telles que $E(u) \leq M$.

Les deux résultats suivants sont des conséquences immédiates de la définition 1.33 (voir [24, p. 23]).

Proposition 1.38. *La Γ -limite est une fonctionnelle semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.) sur X , c'est-à-dire, si E_ε Γ -converge vers E , alors $E(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon)$ pour toute suite u_ε qui converge vers u dans X .*

Proposition 1.39. *Soit $F_\varepsilon: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctionnelles. On suppose que F_ε Γ -converge vers F . Alors, pour toute fonctionnelle $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport à la topologie associée à d , la suite $(F_\varepsilon + G)$ Γ -converge vers $F + G$.*

Remarque 1.40. La propriété énoncée dans la proposition 1.39 s'appelle la stabilité de la Γ -convergence par rapport aux perturbations continues. Elle est très utile dans de nombreuses situations pratiques. En effet, au lieu d'étudier la Γ -limite de la somme $E_\varepsilon := F_\varepsilon + G$ où G est continue, elle permet de ne se focaliser que sur la suite F_ε , puis de rajouter G au résultat final. Mais, on ne pourra pas l'appliquer lorsque la fonctionnelle continue dépend de ε , car la Γ -convergence n'est pas additive. En effet, en général, on a

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F_\varepsilon + G_\varepsilon) \neq \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon + \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon.$$

Proposition 1.41. Si $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$ et si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = F$ (convergence simple), alors $E \leq F$.

Proposition 1.42. Si $E_\varepsilon = E$ pour tout $\varepsilon > 0$ (suite constante), alors $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} \overline{E}$, où $\overline{E}$ est l'enveloppe semi-continue inférieure (ou la relaxée) de E , c'est-à-dire la fonctionnelle définie pour tout $u \in X$ par

$$\overline{E}(u) := \inf \{ \liminf E(u_\varepsilon) : u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } X \}.$$

La proposition ci-dessus montre que la convergence simple ou la convergence uniforme n'implique pas la Γ -convergence.

Proposition 1.43 (Propriétés de fermeture).

- (i) La Γ -limite d'une suite de fonctionnelles convexes est aussi une fonctionnelle convexe.
- (ii) La Γ -limite d'une suite de formes quadratiques est aussi une forme quadratique.

Théorème 1.44. Si X est un espace métrique séparable (i.e. contient un sous-ensemble dénombrable dense), la Γ -convergence est séquentiellement compacte, ce qui signifie que, de toute suite de fonctionnelles E_ε définies sur X et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut extraire une sous-suite qui Γ -converge.

Proposition 1.45. Une suite E_ε Γ -converge vers E si et seulement si toute sous-suite E_{ε_k} Γ -converge vers E .

Théorème 1.46 (Convergence des minimiseurs). Soit $E_\varepsilon, E: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctionnelles. Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (a) $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$;
 - (b) $E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v_\varepsilon \in X} E_\varepsilon(v_\varepsilon)$;
 - (c) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X ,
- alors, on a $E(u) = \inf_{v \in X} E(v)$.

Démonstration. Soit $v \in X$ fixé. D'après (a), il existe une suite v_ε dans X telle que $v_\varepsilon \rightarrow v$ et

$$E(v) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(v_\varepsilon).$$

En utilisant (b), on obtient

$$E(v) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon),$$

L'hypothèse (c) et l'inégalité de la Γ -limite inférieure donnent

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq E(u).$$

Par conséquent, on a $E(u) = \inf_{v \in X} E(v)$. □

Définition 1.47. Soit X un espace métrique. On dit qu'une fonctionnelle $E: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *équi-coercive* si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un compact K_α de X tel que

$$\{u \in X; E(u) \leq \alpha\} \subset K_\alpha.$$

Proposition 1.48. Soit E_ε une suite de fonctionnelles qui Γ -converge vers E . Si E_ε est équi-coercive pour tout $\varepsilon > 0$, alors E atteint son minimum sur X , et on a

$$\min_{u \in X} E(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in X} E_\varepsilon(u).$$

Cette proposition montre que la propriété d'équi-coercivité permet d'assurer que toute suite de minima de E_ε converge vers un minimum de E .

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 1.46 et de la proposition 1.48.

Proposition 1.49. Soit E_ε une suite de fonctionnelles telle que $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$. Soit u_ε une suite relativement compacte telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(u_\varepsilon) - \inf_X E_\varepsilon) = 0$. Alors, toute valeur d'adhérence $\bar{u}$ de u_ε vérifie $E(\bar{u}) = \min_{v \in X} E(v)$. De plus, on a

$$E(\bar{u}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Nous examinons à présent le lien qui existe entre la Γ -convergence et la G -convergence. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.50. Soit $F_\varepsilon, F: H_0^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ les fonctionnelles définies par :

$$F_\varepsilon(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_\varepsilon(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

Si $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, alors $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Supposons que $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$.

(i) Montrons l'inégalité de la Γ -limite supérieure. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ et soit $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = -\operatorname{div}(A^* \nabla u). \quad (1.37)$$

D'après les propriétés de la G -convergence (voir sous-section 1.3.4), on a $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, et par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) u_\varepsilon \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) u_\varepsilon \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(A^* \nabla u) u \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u \, dx. \end{aligned}$$

On a donc exhibé une suite $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et qui satisfait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u).$$

- (ii) Montrons l'inégalité de la Γ -limite inférieure. Soit $w_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que $w_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$. On sait que la solution u_ε de (1.37) est aussi solution du problème de minimisation

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ F_\varepsilon(v) - \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right\}.$$

Donc, en particulier, on a

$$F_\varepsilon(w_\varepsilon) - \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla w_\varepsilon \, dx \geq F_\varepsilon(u_\varepsilon) - \int_{\Omega} A^* \nabla u \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx.$$

En passant à la limite inférieure dans les deux membres de cette inégalité, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(w_\varepsilon) \geq F(u).$$

Ce qui montre F_ε Γ -converge vers F . □

Remarque 1.51. Dans certaines situations, pour définir la Γ -limite (qui n'existe pas toujours), on doit passer par deux notions intermédiaires : la Γ -limite inférieure et la Γ -limite supérieure. Ces deux notions sont définies comme suit.

Définition 1.52. Soit $E_\varepsilon : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une famille de fonctionnelles et $u \in X$. On définit la Γ -limite inférieure de E_ε au point u par

$$E^-(u) := \Gamma\text{-}\liminf E_\varepsilon(u) := \inf \left\{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) : u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } X \right\} \quad (1.38)$$

et la Γ -limite supérieure de E_ε au point u par

$$E^+(u) := \Gamma\text{-}\limsup E_\varepsilon(u) := \inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) : u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } X \right\}. \quad (1.39)$$

Proposition 1.53 ([24], Proposition 1.28). Les fonctionnelles E^- et E^+ sont semi-continues inférieurement sur X .

Proposition 1.54. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon$;
- (ii) $E(u) = E^-(u) = E^+(u)$ pour tout $u \in X$;
- (iii) E satisfait l'inégalité de la Γ -limite inférieure, et pour tout $\eta > 0$, il existe une suite u_ε qui converge vers u dans X telle que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E(u) + \eta; \quad (1.40)$$

- (iv) E satisfait l'inégalité de la Γ -limite inférieure et la condition (1.40) est satisfaite sur un sous-ensemble dense D de X .

1.3.7. Mosco-convergence

La Mosco-convergence est une notion de convergence de fonctionnelles convexes introduite par Mosco [74]. Dans cette section, nous rappelons la définition de la Mosco-convergence et quelques-unes de ses propriétés.

Définition 1.55. Soit X un espace de Banach réflexif et soit $E_\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une suite de fonctionnelles convexes propres et semi-continue inférieurement. On dit que E_ε **Mosco-converge** vers $E : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe propre et semi-continue inférieurement, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (M1) (inégalité de la Mosco-limite inférieure) Pour tout $u \in X$ et pour toute suite u_ε telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans X ,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq E(u);$$

- (M2) (inégalité de la Mosco-limite supérieure) Pour tout $u \in X$, il existe une suite u_ε telle que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X ,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E(u).$$

La fonctionnelle E est appelée la Mosco-limite de E_ε , et on écrit $E_\varepsilon \xrightarrow{M} E$.

Proposition 1.56. La Mosco-limite d'une suite de fonctionnelles quadratiques est une fonctionnelle quadratique.

Remarque 1.57. La Mosco-convergence est équivalente à la " Γ -limite inférieure faible et Γ -limite supérieure forte" convergence.

1.4. Exemple pédagogique : le problème d'homogénéisation standard

Dans cette section, nous allons appliquer les méthodes d'homogénéisation que nous venons de décrire pour homogénéiser notre problème modèle :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.41)$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{M}_{\#}^s(\alpha, \beta, \mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{M}_{\#}^s(\alpha, \beta, \mathbb{R}^n)$ désigne ici l'ensemble des matrices $A(y) \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \mathbb{R}^n)$ qui sont Y -périodiques.

L'objet de cette section est de démontrer le résultat d'homogénéisation suivant.

Théorème 1.58. *Soit u_ε la suite de solutions du problème (1.41). Alors, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, où u est la solution du problème homogénéisé*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^{\text{hom}} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.42)$$

la matrice homogénéisée A^{hom} étant donnée par le problème de minimisation

$$A^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \inf_{v \in H_{\#}^1(Y)} \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y v) \cdot (\xi + \nabla_y v) \, dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.43)$$

avec $H_{\#}^1(Y) := \{w \in H^1(Y), w \text{ } Y\text{-périodique}\}$.

La démonstration de ce théorème peut se trouver dans les livres [19, 59, 30] où l'on a utilisé séparément les méthodes d'homogénéisation que nous venons de décrire. Nous allons simplifier cette démonstration en combinant certaines méthodes parmi celles présentées à la section 1.3.

1.4.1. Par la méthode des développements asymptotiques

Nous utilisons la méthode des développements asymptotiques pour obtenir une expression explicite du problème homogénéisé correspondant au problème (1.41). Nous reprenons l'ansatz pour la solution u_ε , c'est-à-dire,

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (1.44)$$

où les $u_i(x, y)$ sont des fonctions Y -périodiques en y . Nous rappelons les problèmes auxiliaires obtenus à la sous-section 1.3.1 :

$$(\mathbf{A}_0 u_0)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.45)$$

$$(\mathbf{A}_0 u_1 + \mathbf{A}_1 u_0)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.46)$$

$$(\mathbf{A}_0 u_2 + \mathbf{A}_1 u_1 + \mathbf{A}_2 u_0)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = f \text{ dans } \Omega. \quad (1.47)$$

Dans ces équations, x joue le rôle d'un paramètre. Les inconnues u_0 , u_1 et u_2 seront déterminées à l'aide des problèmes aux limites périodiques suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0 & \text{dans } Y, \\ y \mapsto u_0(x, y) & Y\text{-périodique;} \end{cases} \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y) \nabla_y u_1(x, y)) = \operatorname{div}_x(A(y) \nabla_y u_0(x, y)) + \operatorname{div}_y(A(y) \nabla_x u_0(x, y)) & \text{dans } Y, \\ y \mapsto u_1(x, y) & Y\text{-périodique;} \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u_2) = \operatorname{div}_y(A(y)\nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x(A(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) + f(x) & \text{dans } Y, \\ y \mapsto u_2(x,y) & Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (1.50)$$

Pour résoudre les problèmes (1.48), (1.49) et (1.50), nous aurons besoin du résultat d'existence et d'unicité suivant appelé *alternative* ou *lemme de Fredholm* (voir [9, Lemme 1.3.21] ou [39, Lemme 3.2]).

Lemme 1.59. *Soit $g \in (H_{\#}^1(Y))'$. Alors, le problème*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y v) = g & \text{dans } Y, \\ y \mapsto v(y) & Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (1.51)$$

admet une unique solution $v \in H_{\#}^1(Y)$ si et seulement si

$$\langle g, 1 \rangle = 0, \quad (1.52)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $(H_{\#}^1(Y))'$ et $H_{\#}^1(Y)$.

1) Étude du problème (1.48).

D'après la formule de Green et la périodicité de u_0 par rapport à y , la formulation faible du problème (1.48) s'écrit : trouver $u_0(x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y)$ telle que

$$\int_Y A(y)\nabla_y u_0(x,y) \cdot \nabla_y \varphi(y) \, dy = 0, \quad \forall \varphi \in H_{\#}^1(Y). \quad (1.53)$$

D'après le lemme 1.59, le problème (1.53) admet une unique solution $u_0(x, \cdot)$, à une constante additive près. En prenant $\varphi = u_0$ dans (1.53) et en utilisant la condition (1.7), on obtient que $\nabla_y u_0(x,y) = 0$. Ce qui implique que u_0 ne dépend pas de y , autrement dit, il existe une fonction $u(x)$ dépendant seulement de x , telle que

$$u_0(x,y) \equiv u(x). \quad (1.54)$$

2) Étude du problème (1.49).

Puisque $\nabla_y u_0 = 0$, le problème (1.49) devient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u_1(x,y)) = \operatorname{div}_y(A(y)\nabla u(x)) & \text{dans } Y, \\ y \mapsto u_1(x,y) & Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (1.55)$$

Notons $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et introduisons $w(y) := (w_1(y), \dots, w_n(y)) \in \mathbb{R}^n$, où chaque w_i est solution du problème suivant appelé *problème de cellule* :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)(e_i + \nabla_y w_i(y))) = 0 & \text{dans } Y, \\ y \mapsto w_i(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (1.56)$$

dont la formulation faible est

$$\int_Y A(y)\nabla_y w_i(y) \cdot \nabla_y \varphi(y) \, dy = - \int_Y A(y)e_i \cdot \nabla_y \varphi(y) \, dy, \quad \forall \varphi \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}. \quad (1.57)$$

Il est facile de vérifier que la fonctionnelle $L: H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L(\varphi) := - \int_Y A(y) e_i \cdot \nabla_y \varphi(y) \, dy$$

est linéaire continue. Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (1.57) admet une unique solution $w_i \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. Par linéarité, la solution u_1 du problème (1.55) s'écrit sous la forme :

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i(y) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x). \quad (1.58)$$

En fait, u_1 est définie à l'addition d'une fonction de x près, mais il n'est pas nécessaire d'ajouter cette constante d'intégration ici. En effet, dans ce qui suit, seul $\nabla_y u_1(x, y)$ jouera un rôle.

3) Étude du problème (1.50).

Le problème (1.50) s'écrit :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u_2(x, y)) &= \operatorname{div}_y(A(y)\nabla_x u_1(x, y)) \\ &+ \operatorname{div}_x(A(y)(\nabla_y u_1(x, y) + \nabla u)) + f(x). \end{aligned} \quad (1.59)$$

C'est une équation posée sur Y d'inconnue u_2 . La fonction $u_2(x, y)$ étant Y -périodique en y , on a

$$\int_Y \operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u_2(x, y)) \, dy = \int_{\partial Y} [A(y)\nabla_y u_2(x, y)] \cdot n \, ds = 0,$$

où n est la normale unitaire extérieure à ∂Y . Donc, d'après le lemme 1.59, le problème (1.59) admet une unique solution (à une constante additive près) si et seulement si la condition de compatibilité suivante

$$\int_Y [\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_x u_1(x, y)) + \operatorname{div}_x(A(y)(\nabla u + \nabla_y u_1(x, y))) + f(x)] \, dy = 0 \quad (1.60)$$

est satisfaite. Le premier terme de (1.60) s'annule en vertu du théorème de la divergence et de la périodicité de $u_1(x, y)$. Par conséquent, l'équation (1.60) se réduit à

$$-\operatorname{div}_x \left(\int_Y A(y)(\nabla u + \nabla_y u_1(x, y)) \, dy \right) = \int_Y f(x) \, dy = f(x). \quad (1.61)$$

En utilisant la relation (1.58), on obtient

$$\nabla_y u_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \nabla_y w_i(y) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x),$$

et l'équation (1.61) devient

$$-\operatorname{div}_x \left(\int_Y A(y) \left(\nabla u(x) + \sum_{i=1}^n \nabla_y w_i(y) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \, dy \right) = f(x).$$

Cette dernière équation peut se réécrire sous la forme

$$-\operatorname{div}_x(A^{hom}\nabla u(x)) = f(x), \quad (1.62)$$

où A^{hom} est donné par

$$A^{hom}\xi := \int_Y A(y) \left(\xi + \sum_{i=1}^n \xi_i \nabla_y w_i(y) \right) dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.63)$$

On peut aussi caractériser A^{hom} par ses coefficients qui sont donnés par :

$$A_{ij}^{hom} = \int_Y \left(A_{ij}(y) + \sum_{k=1}^n A_{ik}(y) \frac{\partial w_j}{\partial y_k}(y) \right) dy, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.64)$$

En prenant $\varphi = w_j$ dans (1.57), on obtient

$$\int_Y A(y) (e_i + \nabla_y w_i(y)) \cdot \nabla_y w_j(y) dy = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (1.65)$$

En utilisant cette équation, on obtient une autre expression de A_{ij}^{hom} :

$$\begin{aligned} A_{ij}^{hom} &= \int_Y \left(A_{ij}(y) + \sum_{k=1}^n A_{ik}(y) \frac{\partial w_j}{\partial y_k}(y) \right) dy \\ &= \int_Y (A(y) e_j \cdot e_i + A(y) \nabla_y w_j(y) \cdot e_i) dy \\ &= \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot e_i dy \\ &= \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j(y)) \cdot (e_i + \nabla_y w_i(y)) dy. \end{aligned}$$

Puisque $A(y)$ est symétrique, on déduit que $A_{ij}^{hom} = A_{ji}^{hom}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. La matrice A^{hom} est donc symétrique. On définit la forme quadratique qui lui est associée par

$$A^{hom}\xi \cdot \xi := \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y w_\xi(y)) \cdot (\xi + \nabla_y w_\xi(y)) dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.66)$$

où w_ξ est la solution (à une constante additive près) du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y[A(y)(\xi + \nabla_y w_\xi(y))] = 0 \text{ dans } Y, \\ w_\xi \in H_{\#}^1(Y). \end{cases} \quad (1.67)$$

On remarque que (1.67) n'est rien d'autre que l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation

$$\inf_{v \in H_{\#}^1(Y)} \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y v) \cdot (\xi + \nabla_y v) dy.$$

Autrement dit, w_ξ coïncide avec la solution du problème de minimisation (1.43). Par unicité de la solution du problème (1.43), on obtient que

$$A^{hom} \xi \cdot \xi = \inf_{v \in H_{\#}^1(Y)} \int_Y A(y)(\xi + \nabla_y v) \cdot (\xi + \nabla_y v) \, dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Il reste maintenant à trouver la condition aux limites satisfaite par u_0 . Puisqu'on traite ici le cas de la condition aux limites de Dirichlet $u_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$, l'ansatz (1.44) donne (formellement) à l'ordre ε^0 :

$$u_0(x, y) = u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Ainsi, le problème homogénéisé s'écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^{hom} \nabla u(x)) = f \text{ dans } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.68)$$

Commentaires

Nous avons présenté la méthode des développements asymptotiques pour construire le problème homogénéisé correspondant au problème (1.6). Bien que cette méthode fonctionne dans des cas plus généraux que celui que nous traitons ici et qu'elle conduise à des résultats corrects, elle ne peut pas constituer une preuve d'homogénéisation pour les raisons suivantes :

- (1) elle ne fournit pas d'argument pour justifier rigoureusement l'ansatz postulé ;
- (2) il est techniquement difficile de préciser les conditions aux limites du problème homogénéisé lorsque u_ε est donnée sous la forme (1.44).

Pour justifier rigoureusement les résultats obtenus de façon heuristique par la méthode des développements asymptotiques, nous allons appliquer les autres méthodes d'homogénéisation. C'est l'objet des sous-sections suivantes.

1.4.2. Par la G -convergence

Nous commençons par énoncer les deux résultats suivants.

Lemme 1.60 ([39], Lemme A.1.16). *Toute fonction $f \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ se prolonge par périodicité en un élément de $H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Lemme 1.61 ([39], Lemme A.1.17). *Soit $g \in L^2(Y)$ tel que $\int_Y g \cdot \nabla v = 0$, pour tout $v \in H_{\#}^1(Y)$. Alors, g se prolonge par périodicité en un élément de $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, encore noté g , tel que*

$$-\operatorname{div}(g) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Puisque $A_\varepsilon(x) := A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, Y)$, alors d'après le théorème 1.25, il existe $A^* \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, Y)$ telle que $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$. Donc, démontrer le théorème 1.58 revient à montrer que $A^* = A^{hom}$, où A^{hom} est la matrice définie par (1.43).

- (1) Montrons d'abord que $\eta_\varepsilon := A\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^{hom} \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$. D'après le lemme 1.2, la suite u_ε des solutions de (1.41) satisfait

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Alors, il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, nous avons

$$\|\eta_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \left\| A\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Par conséquent, il existe $\eta \in L^2(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup \eta \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Nous réécrivons la formulation faible du problème (1.41) qui est

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.69)$$

sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \eta_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans cette dernière égalité, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \eta \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.70)$$

Nous en déduisons que

$$-\operatorname{div}(\eta) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (1.71)$$

Pour finir la preuve, il reste à montrer que $\eta = A^{hom} \nabla u$. Soit $w_i \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ la solution du problème de cellule

$$-\operatorname{div}_y(A(y)(\nabla_y w_i(y) + e_i)) = 0 \text{ dans } Y. \quad (1.72)$$

D'après le lemme 1.60, w_i se prolonge en un élément de $H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, que nous notons encore w_i . Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, nous considérons la suite de fonctions z_j^ε définie par

$$z_j^\varepsilon(x) = x_j + \varepsilon w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.73)$$

Nous avons immédiatement :

$$\begin{cases} z_j^\varepsilon \rightarrow x_j & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \nabla z_j^\varepsilon \rightharpoonup e_j & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (1.74)$$

En appliquant le lemme 1.61 à $g(y) := A(y)(e_j + \nabla w_j(y))$, nous trouvons que z_j^ε satisfait l'équation

$$-\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon(x)\right) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.75)$$

En multipliant (1.75) par $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω , nous obtenons

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = 0. \quad (1.76)$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. En prenant successivement $v = \varphi z_j^\varepsilon$ dans (1.69) et $v = \varphi u_\varepsilon$ dans (1.76), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot ((\nabla \varphi) z_j^\varepsilon) \, dx + \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot ((\nabla z_j^\varepsilon) \varphi) \, dx = \langle f, \varphi z_j^\varepsilon \rangle, \quad (1.77)$$

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon \cdot ((\nabla \varphi) u_\varepsilon) \, dx + \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon \cdot ((\nabla u_\varepsilon) \varphi) \, dx = 0. \quad (1.78)$$

Puisque A est symétrique, alors nous avons l'identité

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon \cdot ((\nabla u_\varepsilon) \varphi) \, dx = \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot ((\nabla z_j^\varepsilon) \varphi) \, dx.$$

En soustrayant (1.78) de (1.77), nous obtenons

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot ((\nabla \varphi) z_j^\varepsilon) \, dx - \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon \cdot ((\nabla \varphi) u_\varepsilon) \, dx = \langle f, \varphi z_j^\varepsilon \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.79)$$

Nous pouvons passer à la limite dans (1.79) sans aucun problème puisque $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \eta$ dans $L^2(\Omega)$ et $(\nabla \varphi) z_j^\varepsilon \rightarrow (\nabla \varphi) x_j$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous avons :

$$\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon\right)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial z_j^\varepsilon(x)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial w_j}{\partial y_k}\right) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Donc,

$$\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla z_j^\varepsilon\right)_i \rightharpoonup \int_Y \left(A_{ij}(y) + \sum_{k=1}^n A_{ik}(y) \frac{\partial w_j(y)}{\partial y_k}\right) dy = A_{ij}^{hom} \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.80)$$

Par ailleurs, nous avons $(\nabla \varphi) u_\varepsilon \rightarrow (\nabla \varphi) u$ dans $L^2(\Omega)$. Or, $z_j^\varepsilon \rightharpoonup x_j$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) x_j - \sum_{i=1}^n A_{ij}^{hom} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) u \right) dx = \langle f, \varphi x_j \rangle. \quad (1.81)$$

D'après (1.70) avec $v = \varphi x_j$, l'équation (1.81) devient

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\eta_i x_j - A_{ij}^{hom} u) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi x_j) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ce qui implique que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\int_{\Omega} \left(\eta_j - \sum_{i=1}^n A_{ij}^{hom} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nous en déduisons que

$$\eta_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}^{hom} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n A_{ji}^{hom} \frac{\partial u}{\partial x_i} = (A^{hom} \nabla u)_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \text{ p.p. dans } \Omega,$$

c'est-à-dire $\eta = A^{hom} \nabla u$. Ainsi, $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de (1.42). Par unicité de la G -limite, les convergences

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

$$A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^{hom} \nabla u \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

ont lieu pour la suite u_ε entière et non pas seulement pour des sous-suites.

(2) Montrons enfin que $\alpha \|\xi\|^2 \leq A^{hom} \xi \cdot \xi \leq \beta \|\xi\|^2$.

i) Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Nous définissons

$$v_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^n \xi_j z_j^\varepsilon(x), \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n,$$

où les $z_j^\varepsilon(x)$ sont les fonctions définies par (1.73). D'après (1.74) et (1.80), nous avons

$$\begin{cases} v_\varepsilon \rightarrow \sum_{j=1}^n \xi_j x_j = \xi \cdot x & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \nabla v_\varepsilon \rightharpoonup \xi & \text{dans } L^2(\Omega), \\ (A_\varepsilon \nabla v_\varepsilon)_i \rightharpoonup (A^{hom} \xi)_i & \text{dans } L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.82)$$

De plus, d'après (1.75), nous avons

$$-\operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.83)$$

Montrons que $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \rightharpoonup A^{hom} \xi \cdot \xi$, c'est-à-dire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \right) \varphi \, dx = \int_{\Omega} (A^{hom} \xi \cdot \xi) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.84)$$

En utilisant (1.83), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \right) \varphi \, dx &= - \int_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \right) v_\varepsilon \, dx - \left\langle \operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \right), \varphi v_\varepsilon \right\rangle \\ &= - \int_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \right) v_\varepsilon \, dx. \end{aligned}$$

D'après (1.82), nous avons

$$- \int_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \right) v_\varepsilon \, dx \rightarrow - \int_{\Omega} (A^{hom} \xi \cdot \nabla \varphi) (\xi \cdot x) \, dx = \int_{\Omega} (A^{hom} \xi \cdot \xi) \varphi \, dx,$$

nous en déduisons donc (1.84).

Par ailleurs, l'inégalité $\alpha \|\xi\|^2 \leq A\xi \cdot \xi$ implique que

$$\alpha \int_{\Omega} \|\nabla v_{\varepsilon}\|^2 \varphi \, dx \leq \int_{\Omega} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v_{\varepsilon} \cdot \nabla v_{\varepsilon} \right) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (1.85)$$

Par conséquent, en utilisant (1.84) et la semi-continuité inférieure de la norme sur $L^2(\Omega)$, on obtient par passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (1.85) :

$$\alpha \int_{\Omega} \|\xi\|^2 \varphi \, dx \leq \int_{\Omega} (A^{hom} \xi \cdot \xi) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \varphi \geq 0. \quad (1.86)$$

Ce qui implique que $\alpha \|\xi\|^2 \leq A^{hom} \xi \cdot \xi$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

ii) Montrons la deuxième inégalité. Nous avons

$$\begin{aligned} A^{hom} \xi \cdot \xi &= \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y w) \cdot (\xi + \nabla_y w) \, dy \\ &= \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y w) \cdot \xi \, dy + \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y w) \cdot \nabla_y w \, dy \\ &= \int_Y A(y) \xi \cdot \xi \, dy + \int_Y A(y) \nabla_y w \cdot \xi \, dy + \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y w) \cdot \nabla_y w \, dy. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_Y A(y) (\xi + \nabla_y w) \cdot \nabla_y w \, dy = 0 \implies \int_Y A(y) \nabla_y w \cdot \xi \, dy = - \int_Y A(y) \nabla_y w \cdot \nabla_y w \, dy,$$

donc

$$A^{hom} \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) \xi \cdot \xi \, dy - \int_Y A(y) \nabla_y w \cdot \nabla_y w \, dy \leq \int_Y A(y) \xi \cdot \xi \, dy \leq \beta \|\xi\|^2.$$

En rassemblant tous ces résultats, nous concluons que $A^* = A^{hom} \in \mathcal{M}_s(\alpha, \beta, \Omega)$.

1.4.3. Par la Γ -convergence et convergence à deux échelles

Puisque la matrice A est symétrique, notre problème modèle

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_{\varepsilon} \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est équivalent au problème variationnel suivant : trouver $u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle

$$J_{\varepsilon}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \langle f, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

En vertu de la propriété de stabilité de la Γ -convergence par rapport aux perturbations continues, nous nous concentrons uniquement sur l'énergie interne

$$E_{\varepsilon}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

Nous avons donc à démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.62. Soit E_ε la suite de fonctionnelles définie par :

$$E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u \cdot \nabla u \, dx & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.87)$$

Alors, E_ε Γ -converge pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$ vers la fonctionnelle E^{hom} définie par

$$E^{hom}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^{hom} \nabla u \cdot \nabla u \, dx & \text{si } u \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.88)$$

où A^{hom} est la matrice homogénéisée définie par (1.43).

Démonstration. (i) On montre d'abord un résultat de relative compacité pour toute suite $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$, avec $0 < M < \infty$. On introduit l'ensemble

$$V := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid E_\varepsilon(v) \leq M\}.$$

Soit $u_\varepsilon \in V$. Alors, d'après la condition de coercivité (1.7) et l'inégalité de Poincaré (B.1), on a

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 &:= \int_{\Omega} (|u_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon|^2) \, dx \leq (1 + C_P) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \\ &\leq \frac{2(1 + C_P)}{\alpha} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ &\leq \frac{2M(1 + C_P)}{\alpha}, \end{aligned}$$

où C_P est la constante de Poincaré. Par conséquent, on a

$$V \subset K := \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2M(1 + C_P)}{\alpha}} \right\}.$$

D'après le théorème de Rellich (Théorème A.24), l'ensemble K est compact dans $L^2(\Omega)$, autrement dit, l'ensemble V est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

- (ii) Inégalité de la Γ -limite inférieure : Soit u_ε une suite dans $H_0^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Si $E_\varepsilon(u_\varepsilon) = +\infty$, alors le résultat est trivial. On suppose alors que $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$. D'après (i), il existe une constante C indépendante de ε telle que $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$. Alors, d'après les propriétés de la convergence à deux échelles (voir théorème 1.13), il existe une fonction $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$ telle que, à une sous-suite près, $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$. Pour tout $\varphi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\nabla u_\varepsilon - \varphi) \cdot (\nabla u_\varepsilon - \varphi) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \varphi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi \cdot \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varphi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$,

$$E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_{\varepsilon} \cdot \varphi \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi \cdot \varphi \, dx. \quad (1.89)$$

En passant à la limite inférieure dans cette inégalité et en utilisant les propriétés de la convergence à deux échelles, on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot \varphi \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_Y A(y) \varphi \cdot \varphi \, dx \, dy.$$

D'autre part, l'espace $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ étant dense dans $L^2(\Omega \times Y)$, l'inégalité (1.89) est aussi vraie pour une suite de fonctions régulières $\varphi_{\varepsilon}(x, y)$ Y -périodiques en y convergent vers $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$ dans $L^2(\Omega \times Y)$. En prenant une telle suite, on obtient par passage à la limite inférieure dans (1.89) :

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla u + \nabla_y u_1) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla u + \nabla_y u_1) \, dy \right] \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\inf_{v \in H_{\#}^1(Y)} \left\{ \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y v) \cdot (\nabla u + \nabla_y v) \, dy \right\} \right] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^{hom} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = E^{hom}(u). \end{aligned}$$

- (iii) Inégalité de la Γ -limite supérieure : Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Par un argument de densité, on peut supposer que $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Soit $u_1(y) \in C_{\#}^{\infty}(Y)$ une solution du problème de minimisation

$$\inf_{v \in H_{\#}^1(Y)} \left\{ \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y v) \cdot (\nabla u + \nabla_y v) \, dy \right\}.$$

L'existence de u_1 est assurée par la coercivité et la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle

$$v \mapsto \int_Y A(y) (\xi + \nabla_y v) \cdot (\xi + \nabla_y v) \, dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $u_{\varepsilon}(x) := u(x) + \varepsilon u_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. On a $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $C_0^{\infty}(\Omega)$. En outre, on a

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla u_{\varepsilon} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x/\varepsilon)) \cdot (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x/\varepsilon)) \, dx. \end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto j(y) := A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla u + \nabla_y u_1)$ étant Y -périodique, la suite de fonctions j_{ε} définie par $j_{\varepsilon}(x) := j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $\int_Y j(y) \, dy$. Par

conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot (\nabla u + \nabla_y u_1) \, dy \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\inf_{v \in H_{\#}^1(Y)} \left\{ \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y v) \cdot (\nabla u + \nabla_y v) \, dy \right\} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^{hom} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = E^{hom}(u).
\end{aligned}$$

On conclut la preuve du théorème par un argument de densité. $\square$

1.4.4. Par la méthode d'éclatement périodique

Nous partons de la formulation faible du problème (1.41) qui s'écrit : trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.90)$$

D'après le lemme 1.2, la solution u_ε du problème (1.90) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Elle converge donc faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite $u \in H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de Rellich, on a $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$. D'après les propriétés de l'éclatement périodique (voir sous-section 1.3.3), on a

$$\mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(\Omega; H^1(Y)), \quad (1.91)$$

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla u + \nabla_y u_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y), \quad \text{avec } u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)). \quad (1.92)$$

En appliquant la formule d'intégration suivante

$$\int_{\Omega} \int_Y \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Omega} \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega)$$

à l'équation (1.90), on obtient

$$\int_{\Omega} \int_Y \mathcal{T}_\varepsilon\left(A\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right)(x, y) \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v) \, dx \, dy = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \int_Y A(y) \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v) \, dx \, dy = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.93)$$

En utilisant (1.92) et la proposition 1.21, on obtient par passage à la limite dans (1.93) :

$$\int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \nabla v \, dx \, dy = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.94)$$

Soit $v_\varepsilon(x) := \varepsilon \phi(x) \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ pour tout $x \in \Omega$, où $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\psi \in H_{\#}^1(Y)$. Alors, on a $v_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x v_\varepsilon) \rightarrow \phi(x) \nabla_y \psi(y)$ uniformément sur $\Omega \times Y$. En prenant $v = v_\varepsilon$ dans (1.90), puis en passant à la limite dans (1.93), on obtient

$$\int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla u + \nabla_y u_1) \phi(x) \nabla_y \psi(y) \, dx \, dy = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall \psi \in H_{\#}^1(Y).$$

Par densité de $C_0^\infty(\Omega) \otimes H_\#^1(Y)$ dans $L^2(\Omega; H_\#^1(Y))$, on déduit que

$$\int_{\Omega} \int_Y A(y)(\nabla u + \nabla_y u_1) \nabla_y \varphi \, dx \, dy = 0, \forall \varphi \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y)). \quad (1.95)$$

Cette dernière équation implique que u_1 dépend linéairement de ∇u . Il existe donc une fonction $w(y) = (w_1(y), \dots, w_n(y))$ Y -périodique telle que

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} w_k(y). \quad (1.96)$$

D'après (1.94), (1.95) et (1.96), on déduit que le couple (u, u_1) est l'unique solution du système

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \left(\int_Y A(y)(\nabla u + \nabla_y u_1) \right) = f & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}_y (A(y)(\nabla u + \nabla_y u_1)) = 0 & \text{dans } \Omega \times Y. \end{cases} \quad (1.97)$$

Nous utilisons le résultat [8, Théorème 2.3] qui montre que le système (1.97) est équivalent à

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u(x)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec

$$A_{ij}^* = \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y w_i(y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(y)) \, dy,$$

où w_i , $i = 1, \dots, n$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y)(e_i + \nabla_y w_i(y))) = 0 & \text{dans } Y, \\ w_i(y) \text{ } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Nous retrouvons le problème de cellule et le problème homogénéisé obtenus à la sous-section 1.4.1.

Commentaires : Nous ne démontrons pas ici le théorème 1.58 par les méthodes de H -convergence et de Mosco-convergence, la raison étant que dans l'exemple considéré, ces deux méthodes sont respectivement équivalentes à la G -convergence et à la Γ -convergence.

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref aperçu des méthodes d'homogénéisation périodiques les plus utilisées dans la littérature. A travers le problème d'homogénéisation standard, nous avons mis en évidence les liens qui existent entre ces différentes méthodes. Nous avons en particulier montré que ces méthodes sont complémentaires. Dans la suite, la stratégie que nous adopterons pour démontrer un résultat d'homogénéisation est de combiner la méthode de la convergence à deux échelles (ou une variante) et la Γ -convergence : nous utiliserons la convergence à deux échelles pour étudier la convergence de suites de minimiseurs et la Γ -convergence pour étudier la convergence de fonctionnelles.

2. Structures considérées

Sommaire

2.1. Périodicité	36
2.2. Description d'un réseau périodique	38
2.3. Hypothèse sur le réseau : connectivité	41
2.4. Graphe périodique élargi	43
2.5. Structures basées un graphe périodique élargi	44
2.6. Résultats connus sur ce type de structures	44

Ce chapitre est consacré à la présentation des structures qui sont étudiées dans ce manuscrit.

2.1. Périodicité

Nous introduisons une notion qui permet de classer les structures périodiques en fonction du nombre de vecteurs de périodicité. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2$ ou 3), on parlera de périodicité 1D, 2D, 3D lorsqu'une *cellule de référence* est répétée selon un, deux, trois vecteurs, respectivement. Pour fixer les idées, donnons quelques exemples.

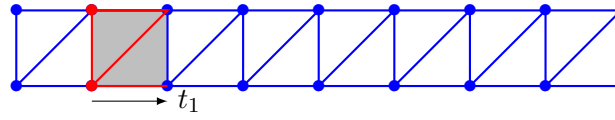


FIGURE 2.1. – Structure 2D avec une périodicité 1D

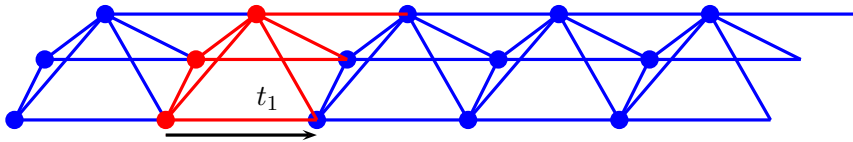


FIGURE 2.2. – Structure 3D avec une périodicité 1D

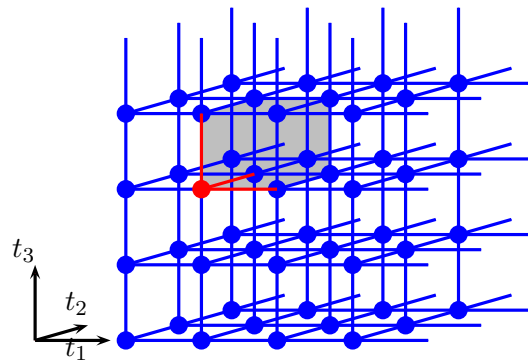


FIGURE 2.3. – Structure 3D avec une périodicité 3D

2.2. Description d'un réseau périodique

Pour des raisons de simplicité, on s'intéresse à un domaine parallélépipédique Ω formé d'un grand nombre de cellules identiques à εY , où ε est la taille caractéristique des cellules et Y une cellule de référence dans laquelle la géométrie de la structure est décrite.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, on appelle *réseau périodique* tout réseau constitué par :

- une cellule de référence Y contenant un nombre fini K de nœuds ;
- une famille de m vecteurs de périodicité linéairement indépendants t_α , $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ avec $1 \leq m \leq 3$.

On utilise $I := (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}^m$ pour référencer (ou repérer) les différentes cellules du réseau et $s \in \{1, \dots, K\}$ pour référencer les différents nœuds de chaque cellule. Les positions dans $\mathbb{R}^N$ des nœuds du réseau sont notées y_s , où $s = 1, \dots, K$ est le numéro associé au nœud dans la cellule de référence.

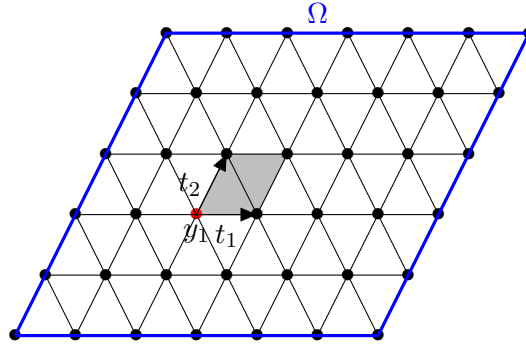


FIGURE 2.4. – Exemple d'un réseau périodique bidimensionnel – cellule de référence en gris avec un seul nœud (i.e. $K = 1$).

Dans tout réseau périodique, la position d'un nœud peut être donnée en fonction de la position du nœud correspondant dans la cellule de référence et des vecteurs de périodicité. En supposant que ε^{-1} est un entier naturel, on introduit les nœuds

$$y_{I,s}^\varepsilon := \varepsilon(y_s + i_1 t_1 + \dots + i_m t_m) \quad \text{avec } I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}^m, \quad (2.1)$$

où (y_s) est une famille de K vecteurs.

On utilise $y_I^\varepsilon := \varepsilon(i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3)$ comme point de référence de la cellule I . Sans perte de généralité, on peut supposer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ engendré par les vecteurs t_α coïncide avec l'espace engendré par les m premiers vecteurs de la base canonique $(e_1, \dots, e_N)$ de l'espace $\mathbb{R}^N$.

Pour une cellule I fixée, le nombre de cellules voisines (ou adjacentes) est égal à $3^m - 1$. On voit bien sur la figure 2.5 (lorsque $m = 2$) qu'une cellule I a $8 = 3^2 - 1$ cellules voisines.

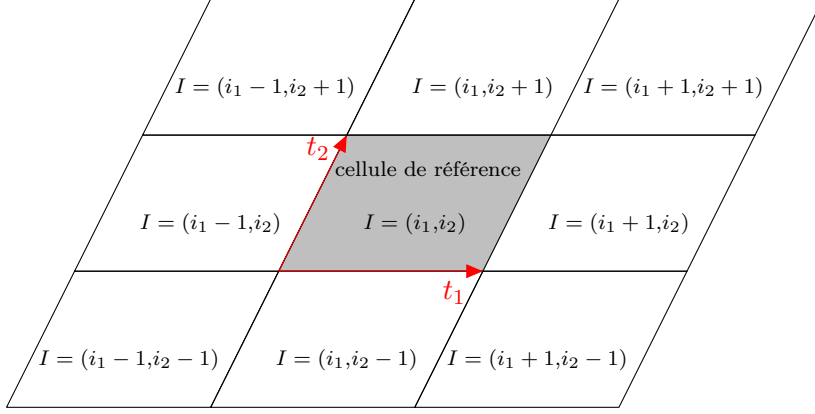
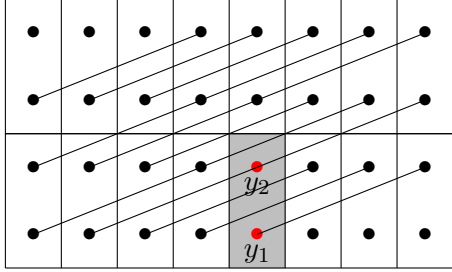
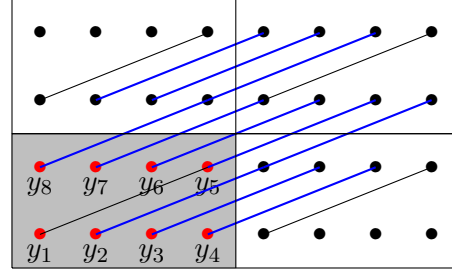


FIGURE 2.5. – Une cellule I et ses cellules voisines

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'une cellule I est en interaction seulement avec ses cellules voisines. En effet, on peut toujours choisir une cellule prototype assez grande pour que cette hypothèse soit vérifiée, comme illustré à la figure 2.6.



(a) Interactions à longue portée : 16 cellules



(b) Interactions entre cellules voisines (lignes bleues) : 4 cellules

FIGURE 2.6. – Deux points de vue pour décrire un même réseau périodique : 1) avec une "petite cellule" et des interactions à longue portée (figure (a)) ; 2) avec une cellule assez grande pour respecter l'hypothèse (figure (b)). C'est le deuxième point de vue que nous adoptons.

En raison de la périodicité, nous considérerons seulement la moitié des cellules voisines. En comptant la cellule I elle-même, les cellules voisines sont les cellules de la forme $I + p$, où p appartient à un ensemble $\mathcal{P}$ de cardinal $n := (3^m + 1)/2$. Lorsque $m = 1, 2, 3$, on choisit respectivement :

$$\mathcal{P} := \{0, 1\}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{P} := \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1)\}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{P} := \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1), (1, 0, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, -1, -1)\}. \quad (2.4)$$

Dans tous les cas, respectant l'ordre donné ci-dessus, on identifie l'ensemble $\mathcal{P}$ avec $\{1, \dots, n\}$, et pour tout $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{P}$, on note $\mathbf{p} := p_1 t_1 + \dots + p_m t_m$ le vecteur correspondant de sorte que $y_{I+p, s}^\varepsilon = y_{I, s}^\varepsilon + \varepsilon \mathbf{p}$. Pour chaque paire de nœuds distincts $(y_{I, s}^\varepsilon, y_{I+p, s'}^\varepsilon)$, on

caractérise l'arête correspondante $[y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon]$ par la longueur normalisée :

$$\ell_{p,s,s'} := \varepsilon^{-1} \|y_{I+p,s'}^\varepsilon - y_{I,s}^\varepsilon\| \quad (2.5)$$

et le vecteur unitaire $\tau_{p,s,s'}$, orienté de $y_{I,s}^\varepsilon$ vers $y_{I+p,s'}^\varepsilon$:

$$\tau_{p,s,s'} := \frac{y_{I+p,s'}^\varepsilon - y_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon \ell_{p,s,s'}}. \quad (2.6)$$

Une autre façon de caractériser les arêtes est de définir les *matrices d'interaction* A^p . En notant $a_{p,s,s'}$ les coefficients de ces matrices d'interaction, on dira qu'une arête connecte les nœuds (I,s) et $(I+p,s')$ si et seulement si $a_{p,s,s'} \neq 0$, et on posera $a_{p,s,s'} = 0$ si les nœuds (I,s) et $(I+p,s')$ ne sont pas connectés (voir figure 2.7). On introduit l'ensemble $\mathcal{A}$ des multi-indices correspondant à toutes les arêtes du réseau :

$$\mathcal{A} := \{(p,s,s') \mid p \in \mathcal{P}, 1 \leq s \leq K, 1 \leq s' \leq K, a_{p,s,s'} \neq 0\}.$$

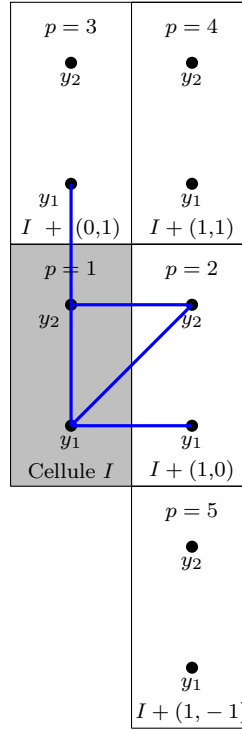


FIGURE 2.7. – Interactions entre une cellule et ses voisines : ici $K = 2$ et $m = 2$.

Dans l'exemple de la figure 2.7, il y a cinq interactions non nulles, représentées par les lignes bleues :

- Une interaction interne (i.e. $p = 1 \equiv (0,0)$) entre les nœuds y_1 et y_2 ($a_{1,1,2} \neq 0$) ;
- Trois interactions avec la cellule de droite (i.e. $p = 2 \equiv (1,0)$) entre le nœud y_1 de la cellule I et les nœuds y_1 et y_2 de la cellule $I + (1,0)$, entre le nœud y_2 de la cellule I et le nœud y_2 de la cellule $I + (1,0)$ ($a_{2,1,1} \neq 0$, $a_{2,1,2} \neq 0$ et $a_{2,2,2} \neq 0$) ;
- Une dernière interaction avec la cellule de dessus (i.e. $p = 3 \equiv (0,1)$) entre le nœud y_2 de la cellule I et le nœud y_1 de la cellule $I + (0,1)$ ($a_{3,2,1} \neq 0$).

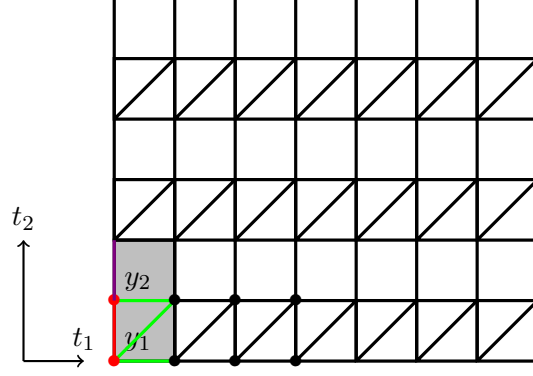


FIGURE 2.8. – Réseau correspondant à la figure 2.7

Il n'y a pas d'interactions entre la cellule I et les cellules voisines $I + (1,1)$ et $I + (1, -1)$, mais de telles interactions auraient pu être considérées. Les interactions avec les cellules de gauche ou de dessous existent aussi, mais il n'est pas nécessaire de les fixer en raison de la périodicité.

Les matrices d'interaction sont : $A^{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(1,0)} = \begin{pmatrix} a_{2,1,1} & a_{2,1,2} \\ 0 & a_{2,2,2} \end{pmatrix}$, $A^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{3,2,1} & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(1,1)} = A^{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.1. Par convention, un nœud ne peut pas interagir avec lui-même et on ne compte pas deux fois une même interaction. C'est pourquoi, la diagonale de la matrice d'interaction interne $A^{(0,0)}$ est nulle et que les autres matrices (pleines) ne sont pas symétriques. En fait, seul le coefficient $a_{1,1,2}$ a une signification dans la matrice $A^{(0,0)}$, tandis que tous les coefficients ont une signification dans les autres matrices. Dans l'exemple ci-dessus, on compte au total 17 valeurs d'interaction. On peut d'ailleurs vérifier que le nombre total des valeurs d'interaction est égal à $\frac{(3^m K - 1)K}{2}$, où on rappelle que m est le nombre de vecteurs de périodicité et K est le nombre de nœuds dans la cellule de référence.

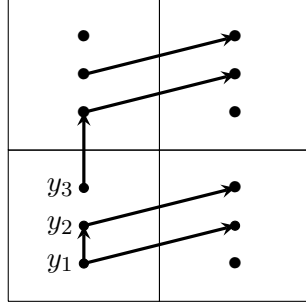
2.3. Hypothèse sur le réseau : connectivité

Nous supposons que les arêtes connectent tous les nœuds du réseau. On dit dans ce cas que le réseau est **connecté**. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par : pour tous $p \in \mathcal{P}$ et $(s, s') \in \{1, \dots, K\}^2$, il existe un chemin fini dans le réseau joignant le nœud $y_{I,s}^\varepsilon$ au nœud $y_{I+p,s'}^\varepsilon$, c'est-à-dire, une suite finie $(s_1, \dots, s_{r+1})$ dans $\{1, \dots, K\}$, $(p_1, \dots, p_r)$ dans

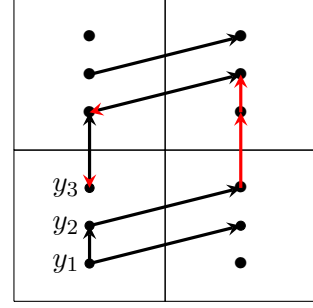
$\mathcal{P}$, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ dans $\{-1, 1\}$ telle que $s_1 = s$, $s_{r+1} = s'$, $\sum_{i=1}^r \epsilon_i p_i = p$ et

$$\begin{cases} \epsilon_i > 0 \implies (p_i, s_i, s_{i+1}) \in \mathcal{A}, \\ \epsilon_i < 0 \implies (p_i, s_{i+1}, s_i) \in \mathcal{A}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Remarque 2.2. Les « relations » (2.7) indiquent le sens du chemin pour passer du nœud $y_{I,s}^\varepsilon$ au nœud $y_{I+p,s'}^\varepsilon$. Une illustration est donnée à la figure 2.9.



(a) Sens habituel



(b) Le chemin pour relier le nœud y_1 au nœud y_3

FIGURE 2.9. – Un exemple de chemin dans un réseau.

Sur la figure 2.9, le chemin décrit à gauche ne permet pas de passer directement du nœud y_1 au nœud y_3 . Pour joindre ces deux nœuds, il faut utiliser le chemin décrit à droite, qui correspond à $[(1,1,2), +1]$, $[(2,2,3), +1]$, $[(3,3,1), +1]$, $[(1,1,2), +1]$, $[(2,1,2), -1]$, $[(3,3,1), -1]$.

Remarque 2.3. Notons que pour des nœuds $y_{I,s}^\varepsilon$ et $y_{I+p,s'}^\varepsilon$ qui sont à l'intérieur de Ω , le chemin les reliant est indépendant de I . Mais, pour des nœuds qui sont à la frontière de Ω , il peut être nécessaire de modifier le chemin. Pour éviter cela, nous supposons qu'il existe toujours une famille finie de chemins dans laquelle il existe un chemin (au moins) qui convient.

Nous donnons ici quelques exemples de réseaux non connectés et de réseaux connectés.

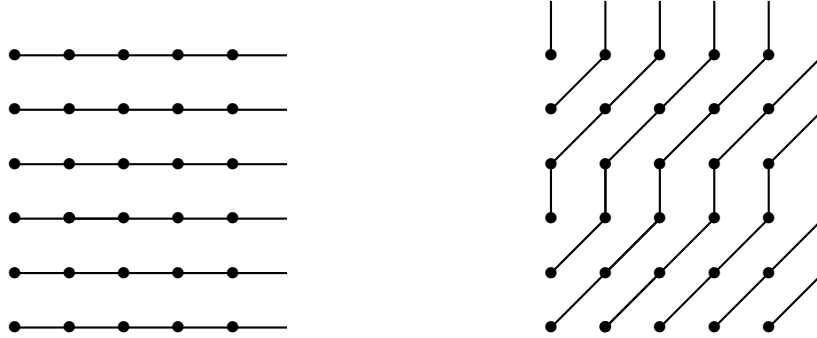


FIGURE 2.10. – Réseaux non connectés

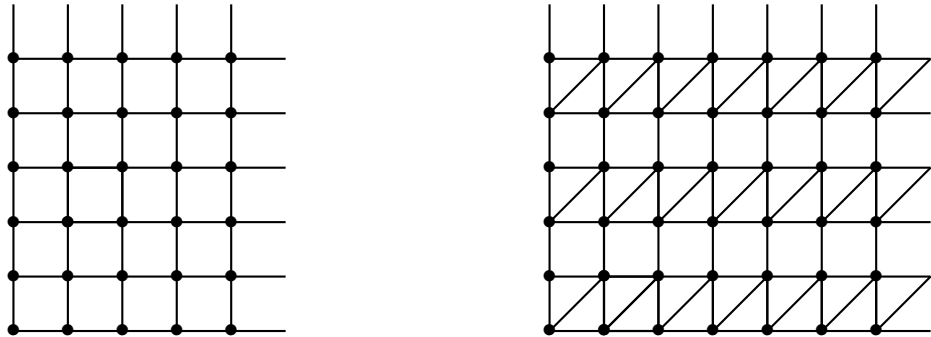


FIGURE 2.11. – Réseaux connectés

Remarque 2.4. Même si le problème de connectivité semble clair lorsque l'on considère les figures 2.11 et 2.10, il n'est pas si facile de vérifier mathématiquement si une structure quelconque est connectée ou non : des algorithmes algébriques pour vérifier la connectivité sont donnés par Babuška et Sauter dans [13]. Dans toute la suite, nous nous limiterons à décrire des structures connectées.

Pour concevoir des structures périodiques bi- et tridimensionnelles, la notion simple de réseau périodique telle qu'elle est introduite à la section 2.2 n'est pas suffisante. On a besoin d'élargir le réseau, c'est-à-dire d'introduire un paramètre d'épaisseur h .

2.4. Graphe périodique élargi

On note $\mathcal{I}^\varepsilon$ l'ensemble des indices des cellules qui sont à l'intérieur de Ω :

$$\mathcal{I}^\varepsilon := \{I \in \mathbb{Z}^m \mid y_I^\varepsilon \in \Omega\}, \quad (2.8)$$

$\overset{\circ}{G}^\varepsilon$ l'ensemble des nœuds des cellules incluses dans le domaine Ω et G^ε l'union des arêtes reliant les nœuds du graphe :

$$\overset{\circ}{G}^\varepsilon := \bigcup_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \bigcup_{s=1}^K \{y_{I,s}^\varepsilon\}, \quad G^\varepsilon := \bigcup_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \bigcup_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} [y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon]. \quad (2.9)$$

Remarque 2.5. Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{I}^\varepsilon$, noté N^ε , est de l'ordre de ε^{-m} . En effet, le volume de Ω est égal au volume d'une cellule élémentaire εY multiplié par le nombre de cellules N^ε . Puisque $|\varepsilon Y| = \varepsilon^m |\det(t_1, \dots, t_m)|$, alors $|\Omega| = N^\varepsilon \varepsilon^m |\det(t_1, \dots, t_m)|$, et donc

$$N^\varepsilon = \frac{|\Omega|}{\varepsilon^m |\det(t_1, \dots, t_m)|}. \quad (2.10)$$

Nous introduisons ici une notation que nous utiliserons dans les chapitres qui viennent. La valeur moyenne d'une quantité φ_I définie sur $\mathcal{I}^\varepsilon$ sera notée par $\sum_I \varphi_I$, i.e.,

$$\sum_I \varphi_I := \frac{1}{N^\varepsilon} \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \varphi_I \sim \varepsilon^m \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \varphi_I. \quad (2.11)$$

On appelle *graphe élargi* d'épaisseur h , l'ensemble $\left\{x \in \Omega \mid d(x, G^\varepsilon) < \frac{h}{2}\right\}$, où d désigne la distance euclidienne.

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où $h = \beta \varepsilon^2$. Le graphe élargi sera donc

$$\Omega^\varepsilon := \left\{x \in \Omega \mid d(x, G^\varepsilon) < \frac{\beta \varepsilon^2}{2}\right\}. \quad (2.12)$$

Les « barres » $\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ du graphe élargi sont définies par :

$$\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon := \left\{x \in \Omega \mid d(x, [y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon]) < \frac{\beta \varepsilon^2}{2}\right\}. \quad (2.13)$$

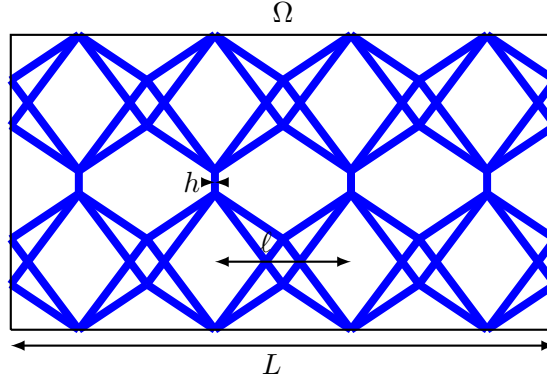


FIGURE 2.12. – Exemple de graphe périodique élargi

2.5. Structures basées un graphe périodique élargi

La notion de graphe périodique élargi permet de modéliser plus facilement les structures périodiques (voir par exemple figure 2.13).

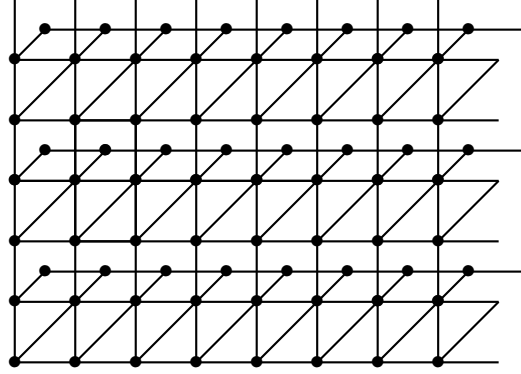


FIGURE 2.13. – Exemple d'une structure basée sur un graphe périodique

Définition 2.6. *On dira qu'une structure basée sur un graphe périodique est **connectée** si le graphe correspondant est connecté.*

2.6. Résultats connus sur ce type de structures

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude du comportement macroscopique des structures minces périodiques. Nous nous contenterons de citer quelques-uns : [21, 104, 79, 67, 56, 61].

Dans [21], Bouchitté et Fragalà ont étudié le comportement asymptotique de structures périodiques constituées de barres d'épaisseur δ . Ils ont identifié chaque structure périodique avec une mesure positive μ_δ sur $\mathbb{R}^n$. Ils ont montré qu'une condition d'existence de la fonctionnelle homogénéisée est que la suite de mesures μ_δ converge faiblement vers une mesure qui vérifie une propriété dite de connectivité. Ils ont ensuite montré que l'énergie élastique initiale Γ -converge vers une énergie de l'élasticité classique (i.e. de premier gradient).

Dans [67], Martinsson et Babuška ont étudié l'homogénéisation de matériaux avec des microstructures périodiques en « treillis ». Ils ont fait l'analyse des équations régissant l'équilibre de ces matériaux en utilisant la transformée de Fourier discrète. Ils ont montré que lorsque la taille de la microstructure tend vers zéro, le modèle homogénéisé est soit un modèle d'élasticité classique soit un modèle de Cosserat.

Dans [61], Le Dret et Raoult ont modélisé le graphène comme un réseau hexagonal formé par des barres élastiques. En utilisant la Γ -convergence, ils ont caractérisé le comportement macroscopique du graphène en grandes déformations. Ils ont obtenu un modèle effectif classique.

Dans [79], Pastukhova a étudié des structures constituées de plaques d'épaisseur h qui est fonction de la taille ε de la période. Elle a montré que lorsque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h}{\varepsilon} = \theta > 0$, l'équation homogénéisée est une EDP d'ordre 4 par rapport au déplacement « transverse », autrement dit elle a obtenu un modèle effectif de type second gradient.

Dans [56], Gonella et Ruzzene ont étudié les propriétés effectives des réseaux périodiques bidimensionnels dans le cas dynamique. En appliquant une technique de troncature, ils ont négligé les termes d'ordre en $O(\varepsilon^3)$, où ε est la taille de la période et ont obtenu des équations de l'élasticité classique.

Dans [104], Zhikov et Pastukhova ont étudié dans le cadre de l'élasticité l'homogénéisation de structures périodiques dépendant de deux paramètres géométriques h et ε , où h désigne l'épaisseur des structures et ε la taille de la période. Ils ont montré en utilisant la convergence à deux échelles, que lorsque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(\varepsilon)}{\varepsilon} = \theta > 0$, le modèle homogénéisé est non classique : l'équation homogénéisée est une équation différentielle ordinaire d'ordre 4.

L'approche que nous adopterons pour étudier ce type de structures sera basée sur une combinaison de la méthode de la convergence à deux échelles avec la Γ -convergence.

3. Problèmes de réduction totale ND-0D, avec $N = 2$ ou 3

Sommaire

3.1. Convergence	47
3.2. Le problème de réduction 2D-0D	48
3.2.1. L'énergie élastique bidimensionnelle - dualité	48
3.2.2. Conditions aux limites	48
3.2.3. Énoncé du résultat principal	49
3.2.4. Estimations pour un rectangle mince	49
3.2.5. Preuve du résultat principal	58
3.3. Le problème de réduction 3D-0D	61
3.3.1. L'énergie élastique tridimensionnelle	61
3.3.2. Réduction à un problème discret	61
3.3.3. Estimations pour un cylindre mince	63
3.3.4. Preuve du théorème 3.10	73
3.4. Conclusion	75

Nous considérons des structures élastiques basées sur un graphe périodique élargi d'épaisseur h tel que nous venons de le décrire à la section 2.4. L'extérieur de ce graphe périodique est vide. Ces structures sont constituées d'un matériau élastique linéaire isotrope homogène. On peut les caractériser par trois longueurs d'ordres de grandeur différents qui sont la taille ℓ de la période, la taille caractéristique L du domaine Ω occupé par le graphe élargi et l'épaisseur h des barres du graphe. Nous supposons que ℓ est petit devant L et que h est petit devant ℓ . Nous introduisons les deux petits paramètres $\varepsilon := \frac{\ell}{L} \ll 1$ et $\delta := \frac{h}{\ell} \ll 1$. La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ correspond à l'homogénéisation et la limite $\delta \rightarrow 0$ correspond à une réduction de dimension. Les deux limites ($\varepsilon \rightarrow 0$ avec $\delta > 0$ fixé et $\delta \rightarrow 0$ avec $\varepsilon > 0$ fixé) ne commutent pas [27]. Dans ce chapitre, nous étudions le cas où les paramètres ε et δ tendent simultanément vers zéro (concomitance entre homogénéisation et réduction de dimension). Nous supposons que $\delta = \beta\varepsilon$ avec $0 < \beta < \infty$, ce qui équivaut à $h = \ell\beta\varepsilon$. En fait, c'est le cas critique puisque les autres cas $\delta \ll \varepsilon$ et $\delta \gg \varepsilon$ peuvent se déduire de nos résultats en faisant tendre ultérieurement β vers zéro ou l'infini.

Nous spécifions les ordres de grandeur des coefficients de rigidité du matériau constituant les barres du graphe élargi. Nous tenons à préciser que faire une hypothèse sur la rigidité élastique équivaut à faire une hypothèse sur l'ordre de grandeur des forces extérieures appliquées. Puisque le volume des structures tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro, il est clair que l'on a besoin d'une forte rigidité du matériau si l'on veut que les structures résistent à des forces d'ordre 1.

En utilisant les outils de Γ -convergence, nous montrons deux résultats principaux. Dans la section 3.2, nous montrons que lorsque les coefficients de Lamé du matériau sont de l'ordre de ε^{-3} , l'étude des structures bidimensionnelles peut se réduire à l'étude de systèmes discrets correspondant à des réseaux périodiques de nœuds reliés par des interactions élastiques de type extension-flexion. Dans la section 3.3, nous montrons que lorsque les coefficients de Lamé sont de l'ordre de ε^{-4} , l'étude des structures tridimensionnelles peut se réduire à l'étude de systèmes discrets correspondant à des réseaux périodiques de nœuds reliés par des interactions de type extension-flexion-torsion.

3.1. Convergence

Pour des raisons de simplicité, on suppose que $|\Omega| = 1$. Nos hypothèses sur les ordres de grandeur se résument à $L = 1$, $\ell = \varepsilon$ et $h = \beta\varepsilon^2$. On notera alors Ω^ε le graphe périodique élargi.

Dans les sections suivantes, on aura à étudier le comportement des suites u^ε définies sur différents domaines dépendant de ε . On doit donc préciser ce que signifie la phrase « u^ε converge vers u ». Pour cela, on introduit l'opérateur de discrétisation $\pi_\varepsilon: L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{V}_\varepsilon$ où $\mathcal{V}_\varepsilon$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{I}^\varepsilon \times \{1, \dots, K\}$, qui à tout champ $u \in L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^N)$ associe la famille des valeurs moyennes $(\bar{u})_{I,s} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ définie par

$$\bar{u}_{I,s} := \int_{B_{I,s}^\varepsilon} u(x) \, dx, \quad (3.1)$$

$$\text{où } B_{I,s}^\varepsilon := \left\{ x \mid d(x, y_{I,s}^\varepsilon) < \frac{\beta\varepsilon^2}{2} \right\}.$$

Définition 3.1. Soit $(Z_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$ une suite de familles de vecteurs. On dit que (Z^ε) converge vers une fonction mesurable z , et on écrit $Z^\varepsilon \rightharpoonup z$, lorsque la convergence faible-* suivante

$$\sum_I Z_I^\varepsilon \delta_{y_I^\varepsilon} \xrightarrow{*} z(x) \, dx \quad (3.2)$$

a eu lieu lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, où δ_y désigne la mesure de Dirac au point y .

Définition 3.2. On dit qu'une suite de fonctions $(u^\varepsilon) \subset L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^N)$ converge vers u lorsque, pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$, $(\bar{u}^\varepsilon)_{I,s} \rightharpoonup u$ au sens de la définition 3.1.

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion à craindre, on écrira simplement $u^\varepsilon \rightharpoonup u$.

Nous énonçons ci-dessous quelques propriétés de cette notion de convergence.

Remarque 3.3. La convergence (3.2) signifie que pour toute fonction $\varphi \in C^0(\Omega)$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I Z_I^\varepsilon \varphi(y_I^\varepsilon) = \int_\Omega z(x) \varphi(x) \, dx. \quad (3.3)$$

Lorsqu'elle est appliquée à des suites (Z^ε) vérifiant $\sum_I \|Z_I^\varepsilon\|^2 \leq C$, cette convergence assure

l'existence d'une fonction $z \in L^2(\Omega)$ telle que à une sous-suite près, $Z^\varepsilon \rightharpoonup z$ (voir [30, Lemme 10.1]). En vertu de (3.3), on peut remplacer dans (3.2) la mesure de Dirac $\delta_{y_I^\varepsilon}$ par $\delta_{y_{I,s}^\varepsilon}$ ou par $\delta_{y_{I+p,s}^\varepsilon}$. En effet, pour toute fonction continue φ , on a $\varphi(y_{I+p,s'}^\varepsilon) - \varphi(y_{I,s}^\varepsilon) = o(1)$.

Remarque 3.4. La convergence des mesures (3.2), lorsqu'elle a lieu pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$, est à rapprocher avec la convergence à deux échelles telle que définie par Nguetseng [76] et Allaire [8]. Ici, la variable discrète s joue le rôle de la variable rapide. Dans ce cas, pour toute fonction convexe s.c.i. Φ , on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \frac{1}{K} \sum_{s=1}^K \Phi(Z_{I,s}^\varepsilon) \geq \int_{\Omega} \Phi(z(x)) \, dx \quad (3.4)$$

(voir [20, Lemme 3.1]).

3.2. Le problème de réduction 2D-0D

3.2.1. L'énergie élastique bidimensionnelle - dualité

L'énergie élastique $\mathcal{E}_\varepsilon$ est définie pour tout champ de déplacement $u \in L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^2)$ par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) := \begin{cases} \frac{1}{\beta\varepsilon^3} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\mu_0 \|e(u)\|^2 + \frac{\lambda_0}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx & \text{si } u \in H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\mu := \frac{\mu_0}{\beta\varepsilon^3}$ et $\lambda := \frac{\lambda_0}{\beta\varepsilon^3}$ sont les coefficients de Lamé, avec $\mu_0 > 0$ et $\lambda_0 + \mu_0 > 0$. À ces coefficients de Lamé, on associe le module d'Young Y et le coefficient de Poisson ν définis par :

$$Y = \frac{Y_0}{\beta\varepsilon^3} \quad \text{où} \quad Y_0 := \frac{4\mu_0(\mu_0 + \lambda_0)}{2\mu_0 + \lambda_0},$$

$$\nu := \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} = \nu_0 := \frac{\lambda_0}{2\mu_0 + \lambda_0}.$$

On a les relations inverses :

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu Y}{1 - \nu^2}.$$

L'énergie duale (ou complémentaire) est définie pour tout champ tensoriel symétrique $\sigma \in L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^{2 \times 2})$, par

$$\mathcal{E}_\varepsilon^c(\sigma) := \beta\varepsilon^3 \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{4\mu_0} \|\sigma\|^2 - \frac{\lambda_0}{8\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) dx.$$

Remarque 3.5. Ce problème bidimensionnel peut être interprété comme un problème lié à des structures tridimensionnelles cylindriques en déformations planes (voir section 3.3).

3.2.2. Conditions aux limites

Nous supposons que les forces extérieures sont appliquées seulement aux nœuds du graphe. Nous considérons des conditions aux limites de bord libre, ce qui signifie que nous n'imposons aucune condition sur les déplacements des nœuds.

3.2.3. Énoncé du résultat principal

Le déplacement à l'équilibre des structures considérées résulte de la minimisation de l'énergie élastique $\mathcal{E}_\varepsilon$ définie par (3.5). En utilisant les outils de Γ -convergence, nous montrons que les minimiseurs de l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon$ convergent vers les minimiseurs d'une énergie discrète combinant des effets d'extension et de flexion. Plus précisément, nous montrons que la Γ -limite de la suite d'énergies $\mathcal{E}_\varepsilon$ est identique à celle de la suite d'énergies discrètes $(E_\varepsilon + F_\varepsilon)$ représentant l'énergie élastique d'un réseau de nœuds reliés par des interactions élastiques, où $E_\varepsilon(U)$ est l'énergie d'extension définie par

$$E_\varepsilon(U) := \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left(\frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 \quad (3.6)$$

et $F_\varepsilon(U, \theta)$ est l'énergie de flexion définie par

$$F_\varepsilon(U, \theta) := \varepsilon^2 \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'} \beta^2}{6} \left[3 \left(\theta_{I+p,s'} + \theta_{I,s} - \frac{2}{\ell_{p,s,s'}} \frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp \right)^2 + (\theta_{I+p,s'} - \theta_{I,s})^2 \right], \quad (3.7)$$

où $U_{I,s}$ et $\theta_{I,s}$ sont respectivement le champ de déplacement et la rotation associés à chaque nœud (I,s) et $a_{p,s,s'} := \frac{2Y_0}{\ell_{p,s,s'}}$.

Ce résultat s'énonce comme suit.

Théorème 3.6. *Pour toute fonction mesurable u , on a :*

- (i) $\inf_{u^\varepsilon} \{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon); u^\varepsilon \rightharpoonup u \} \geq \inf_{U^\varepsilon, \theta^\varepsilon} \{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(U^\varepsilon) + F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)); U^\varepsilon \rightharpoonup u \},$
- (ii) $\inf_{u^\varepsilon} \{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon); u^\varepsilon \rightharpoonup u \} \leq \inf_{U^\varepsilon, \theta^\varepsilon} \{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(U^\varepsilon) + F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)); U^\varepsilon \rightharpoonup u \},$

où $\mathcal{E}_\varepsilon$, E_ε et F_ε sont respectivement les fonctionnelles définies par (3.5), (3.6) et (3.7).

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de certains résultats auxiliaires concernant le comportement asymptotique d'un rectangle élastique mince puisque les arêtes du graphe élargi Ω^ε sont des rectangles élancés. Ces derniers résultats peuvent être trouvés dans la littérature en utilisant des développements asymptotiques formels. Mais, ces développements asymptotiques ne permettent pas de prendre en compte des termes d'ordre de grandeur différents. Afin de prendre en compte les différents ordres de grandeur, nous démontrons ces résultats en utilisant des estimations d'énergie, c'est-à-dire des encadrements. Nous allons ensuite estimer l'énergie élastique des structures considérées, rectangle par rectangle.

3.2.4. Estimations pour un rectangle mince

L'objectif de cette sous-section est de montrer que chaque rectangle mince se comporte asymptotiquement comme une barre élastique travaillant en extension et en flexion dont l'énergie élastique est décrite en annexe (voir Annexe C).

Soit (e_1, e_2) la base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On considère le rectangle $\omega := [-\ell/2, \ell/2] \times [-h, h]$, avec $h < \frac{\ell}{4}$. A toute fonction $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$, on associe les quantités

$$U(x_1) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u(x_1, x_2) \, dx_2, \quad \theta(x_1) := -\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h u_1(x_1, x_2) x_2 \, dx_2,$$

$$v(x_1) := \frac{3}{4h^3} \int_{-h}^h (u_2(x_1, x_2) - U_2(x_1))(h^2 - x_2^2) \, dx_2,$$

et

$$W := \frac{1}{\pi h^2} \int_{B(0,h)} u(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2, \quad \phi := \frac{1}{\pi h^2} \int_{B(0,h)} \frac{\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1}{2}(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2.$$

Les quantités $U(x_1)$ et $\theta(x_1)$ sont respectivement le déplacement moyen et la rotation moyenne de la section rectangulaire. Les quantités W et ϕ sont respectivement le déplacement moyen et la rotation moyenne des extrémités de la section. La quantité $v(x_1)$ est une expression technique qu'on peut interpréter comme la "distorsion" de la section.

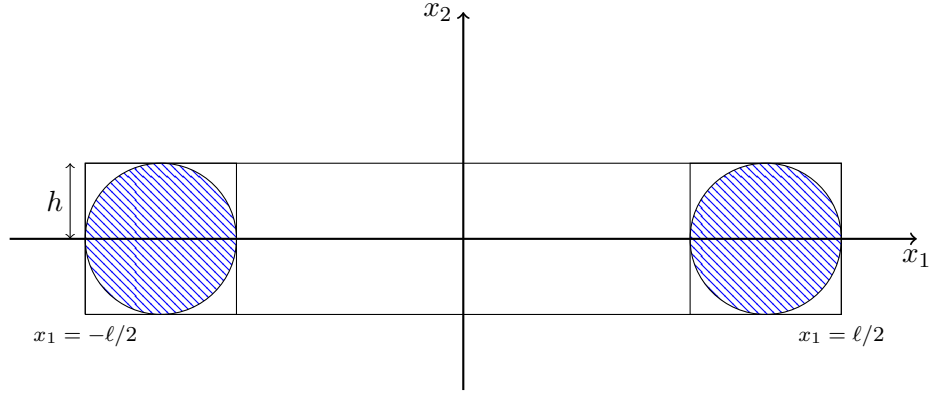


FIGURE 3.1. – La géométrie du rectangle.

Nous montrons dans le lemme suivant que les déplacements et rotations de la section rectangulaire sont proches des déplacements et rotations aux extrémités.

Lemme 3.7. *Il existe une constante C indépendante de h , telle que, pour tout $u \in H^1(B(0,h); \mathbb{R}^2)$, on a*

$$\|U(0) - W\|^2 \leq C \int_{B(0,h)} \|e(u)\|^2 \, dx, \quad \|\theta(0) - \phi\|^2 \leq \frac{C}{h^2} \int_{B(0,h)} \|e(u)\|^2 \, dx,$$

$$\|v(0)\|^2 \leq C \int_{B(0,h)} \|e(u)\|^2 \, dx.$$

Démonstration. Par un changement d'échelle, on se ramène au cas où $h = 1$. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $u^n \in H^1(B(0,1); \mathbb{R}^2)$ telle que $\int_{B(0,1)} \|e(u^n)\|^2 \, dx$

tend vers 0 et que l'une au moins des quantités $\|U^n(0) - W^n\|^2$, $\|\theta^n(0) - \phi^n\|^2$, $\|v^n(0)\|^2$ ne tend pas vers 0. La fonction $\tilde{u}^n := u^n - W^n - \phi^n(-x_2, x_1)$ vérifie :

$$\frac{1}{\pi} \int_{B(0,1)} \tilde{u}^n(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{B(0,1)} \frac{\partial_1 \tilde{u}_2^n - \partial_2 \tilde{u}_1^n}{2}(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = 0.$$

En outre, $\int_{B(0,1)} \|e(\tilde{u}^n)\|^2 \, dx = \int_{B(0,1)} \|e(u^n)\|^2 \, dx \rightarrow 0$. Alors, d'après l'inégalité de Korn (B.6) qui est valide sur l'espace

$$\mathcal{R}_0 := \left\{ w = (w_1, w_2) \in H^1(B(0,1); \mathbb{R}^2) \text{ t.q. } \int_{B(0,1)} w = 0, \int_{B(0,1)} \frac{\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1}{2} = 0 \right\},$$

$\tilde{u}^n$ converge fortement vers 0 dans $H^1(B(0,1); \mathbb{R}^2)$. La continuité de l'opérateur trace assure que $\tilde{u}^n$ tend vers 0 dans $H^{1/2}(\{0\} \times [-1,1]; \mathbb{R}^2)$ et donc dans $L^2(\{0\} \times [-1,1]; \mathbb{R}^2)$. Ceci entraîne que les quantités

$$U^n(0) - W^n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{u}^n(0, x_2) \, dx_2,$$

$$v^n(0) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \left(\tilde{u}_2^n(0, x_2) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{u}_2^n(0, y_2) \, dy_2 \right) (1 - x_2^2) \, dx_2$$

et

$$\theta^n(0) - \phi^n = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 \tilde{u}_1^n(0, x_2) x_2 \, dx_2$$

tendent toutes vers 0, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses. $\square$

Soit deux réels k et k' tels que

$$0 \leq k < 1 < k' < \frac{\ell}{2h}. \quad (3.8)$$

En estimant l'énergie élastique rectangle par rectangle, on risque de la surestimer au voisinage $B(y_{I,s}^\varepsilon, k'h)$ d'un nœud $y_{I,s}^\varepsilon$. Pour éviter cette difficulté, il nous faudra diviser les coefficients de Lamé (μ, λ) au voisinage d'un nœud par le nombre maximal de rectangles qui s'y joignent. Cette procédure sera mise en place à la sous-section 3.2.5.

Sur le rectangle ω , on considère les fonctions constantes par morceaux $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ définies par :

$$(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})(x_1, x_2) := \begin{cases} (\mu, \lambda) & \text{si } |x_1| < \ell/2 - k'h, \\ (k\mu, k\lambda) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note (U^-, θ^-, v^-) et (U^+, θ^+, v^+) les valeurs respectives de (U, θ, v) en $x_1 = -\frac{\ell}{2}$ et $x_1 = +\frac{\ell}{2}$.

Les deux lemmes suivants donnent une estimation de l'énergie élastique d'un rectangle mince. Nous établissons une borne inférieure et une borne supérieure de l'énergie élastique d'un rectangle en fonction des déplacements et rotations de ses extrémités.

Lemme 3.8 (Borne inférieure de l'énergie). *Il existe une constante C dépendant uniquement de k et k' , telle que, pour tout $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$,*

$$\int_{\omega} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx \geq \frac{Yh}{\ell} \left(1 - C \frac{h}{\ell} \right) \left[(U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} \left(3(\theta^+ + \theta^- - 2 \frac{U_2^+ - U_2^-}{\ell})^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2 \right) - \frac{h}{\ell} (v^+ - v^-)^2 \right]. \quad (3.9)$$

En mécanique, pour obtenir des bornes sur l'énergie *primale*, il est habituel de passer à l'énergie *duale* en choisissant un champ de contraintes σ *statiquement admissible*, c'est-à-dire vérifiant $\text{div } \sigma = 0$ sur ω et $\sigma \cdot n = 0$ sur les deux grands côtés du rectangle ω , où n est la normale unitaire extérieure. Nous allons donc démontrer l'inégalité (3.9) en utilisant l'approche duale.

Démonstration. Quitte à ajouter un mouvement rigide à u , on peut se ramener au cas où $U_1^+ = -U_1^-$ et $U_2^+ = U_2^- = 0$. Pour tout champ symétrique $\sigma \in L^2(\omega)$, on a (Annexe D) :

$$\int_{\omega} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) \geq - \int_{\omega} \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{8\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) + \int_{\omega} \sigma : e(u). \quad (3.10)$$

On considère le champ σ défini par

$$\sigma = \begin{pmatrix} a + 2b(x_1 + c)x_2 & b(h^2 - x_2^2) \\ b(h^2 - x_2^2) & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a := \frac{2Y}{\ell} U_1^+$, $b := -\frac{3Y}{\ell^2} (\theta^+ + \theta^-)$ et $c := \frac{\ell}{6} \frac{\theta^+ - \theta^-}{\theta^+ + \theta^-}$.

Il est facile de vérifier que ce champ σ est à divergence nulle, i.e.,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0.$$

On pose $\tilde{Y} := \frac{4\tilde{\mu}(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}{2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}}$ (qui prend les valeurs Y et kY). En utilisant les relations

$$\frac{1}{4\tilde{\mu}} - \frac{\tilde{\lambda}}{8\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} = \frac{1}{2\tilde{Y}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\tilde{\mu}} = \frac{1 + \nu}{\tilde{Y}},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{8\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 &= \frac{1}{2\tilde{Y}} ((1 + \nu) \|\sigma\|^2 - \nu (\text{tr}(\sigma))^2) \\ &= \frac{1}{2\tilde{Y}} ((a + 2b(x_1 + c)x_2)^2 + 2b^2(1 + \nu)(h^2 - x_2^2)^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\omega} \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{8\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) dx = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{1}{2\tilde{Y}} \left(2ha^2 + \frac{8h^3b^2}{3} (x_1 + c)^2 + \frac{32h^5}{15} (1 + \nu)b^2 \right) dx_1.$$

D'une part, on a

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{1}{\widetilde{Y}(x_1)} dx_1 = \frac{1}{Y}(\ell - 2k'h) + \frac{2k'h}{kY} = \frac{\ell}{Y} \left(1 + 2\frac{k'h}{k\ell} - \frac{2k'h}{\ell}\right) \leq \frac{\ell}{Y} \left(1 + 2\frac{k'h}{k\ell}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{(x_1 + c)^2}{\widetilde{Y}(x_1)} dx_1 &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{(x_1 + c)^2}{Y} dx_1 + \int_{-\ell/2}^{-\ell/2+k'h} \left(\frac{1}{kY} - \frac{1}{Y}\right)(x_1 + c)^2 dx_1 \\ &\quad + \int_{\ell/2-k'h}^{\ell/2} \left(\frac{1}{kY} - \frac{1}{Y}\right)(x_1 + c)^2 dx_1 \\ &\leq \frac{1}{Y} \left(\frac{\ell^3}{12} + \ell c^2\right) + \frac{2k'h}{kY} \left(\frac{\ell^2}{4} + c^2\right) \\ &\leq \frac{\ell^3}{Y} \left[\frac{1}{36} \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right) + \frac{k'h}{3k\ell} \left(\frac{3}{2} + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right)\right] \\ &\leq \frac{\ell^3}{Y} \left(\frac{1}{36} + \frac{k'h}{3k\ell}\right) \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right) \\ &\leq \frac{\ell^3}{36Y} \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{8\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) dx \\ &\leq \frac{ha^2\ell}{Y} \left(1 + 2\frac{k'h}{k\ell}\right) + \frac{4h^3b^2}{3} \left[\frac{\ell^3}{36Y} \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right) \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) + \frac{4h^2\ell}{5Y} (1 + \nu) \left(1 + 2\frac{k'h}{k\ell}\right) \right] \\ &\leq \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) \left[\frac{ha^2\ell}{Y} + \frac{4h^3b^2}{3} \left(\frac{\ell^3}{36Y} \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right) + \frac{6h^2\ell}{5Y} \right) \right] \quad (\text{car } -1 < \nu < 1/2) \\ &\leq \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) \left[\frac{ha^2\ell}{Y} + \frac{4h^3b^2}{3} \frac{\ell^3}{36Y} \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2 + \frac{6 \times 36}{5} \frac{h^2}{\ell^2}\right) \right] \\ &\leq \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) \frac{h\ell}{Y} \left[a^2 + b^2 \frac{h^2\ell^2}{27} \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2 + \frac{216}{5} \frac{h^2}{\ell^2}\right) \right] \\ &\leq \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) \frac{h\ell}{Y} \left[a^2 + b^2 \frac{h^2\ell^2}{27} \left(3 + \left(\frac{6c}{\ell}\right)^2\right) \left(1 + 44\frac{h^2}{\ell^2}\right) \right] \\ &\leq \left(1 + 12\frac{k'h}{k\ell}\right) \left(1 + 44\frac{h^2}{\ell^2}\right) \frac{Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right] \\ &\leq \left(1 + 36\frac{k'h}{k\ell}\right) \frac{Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right]. \end{aligned}$$

On a donc établi l'estimation :

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{8\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) dx \\ &\leq \left(1 + 36\frac{k'h}{k\ell}\right) \frac{Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Puisque le champ σ est à divergence nulle, alors d'après la formule de Green, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} \sigma : e(u) &= \int_{\partial\omega} (\sigma \cdot n) \cdot u \\
&= \int_{-h}^h \left[\left(\sigma \left(\frac{\ell}{2}, x_2 \right) \cdot e_1 \right) \cdot u \left(\frac{\ell}{2}, x_2 \right) - \left(\sigma \left(-\frac{\ell}{2}, x_2 \right) \cdot e_1 \right) \cdot u \left(-\frac{\ell}{2}, x_2 \right) \right] dx_2 \\
&= \int_{-h}^h \left[\left(a + 2b \left(\frac{\ell}{2} + c \right) x_2 \right) u_1 \left(\frac{\ell}{2}, x_2 \right) + b(h^2 - x_2^2) \left(u_2 \left(\frac{\ell}{2}, x_2 \right) - u_2 \left(-\frac{\ell}{2}, x_2 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(a + 2b \left(-\frac{\ell}{2} + c \right) x_2 \right) u_1 \left(-\frac{\ell}{2}, x_2 \right) \right] dx_2 \\
&= 2ha(2U_1^+) - \frac{2h^3b\ell}{3}(\theta^+ + \theta^-) - \frac{4h^3bc}{3}(\theta^+ - \theta^-) + \frac{4h^3b}{3}(v^+ - v^-) \\
&= \frac{2Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{2h^2}{\ell} (v^+ - v^-)(\theta^+ + \theta^-) \right] \\
&\geq \frac{2Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{h^2}{\ell} \left(\frac{1}{h} (v^+ - v^-)^2 + h(\theta^+ + \theta^-)^2 \right) \right] \\
&\geq \frac{2Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} \left(1 - \frac{h}{\ell} \right) (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{h}{\ell} (v^+ - v^-)^2 \right] \\
&\geq \left(1 - \frac{h}{\ell} \right) \frac{2Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{h}{\ell} (v^+ - v^-)^2 \right].
\end{aligned}$$

La première inégalité est obtenue en utilisant l'inégalité de Young : $xy \leq \frac{x^2}{2\delta} + \frac{\delta y^2}{2}$, $\forall \delta > 0$, avec $x := v^+ - v^-$, $y := \theta^+ + \theta^-$ et $\delta := h$. On a donc établi l'inégalité :

$$\int_{\omega} \sigma : e(u) \geq \left(1 - \frac{h}{\ell} \right) \frac{2Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{h}{\ell} (v^+ - v^-)^2 \right]. \quad (3.12)$$

En utilisant (3.10) et les inégalités (3.11) et (3.12), on obtient que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx \\
&\geq - \left(1 + 36 \frac{k'}{k} \frac{h}{\ell} \right) \frac{Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right] \\
&\quad + \left(1 - \frac{h}{\ell} \right) \frac{2Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{h}{\ell} (v^+ - v^-)^2 \right] \\
&\geq \left(1 - \left(2 + 36 \frac{k'}{k} \right) \frac{h}{\ell} \right) \frac{Yh}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) - \frac{h}{\ell} (v^+ - v^-)^2 \right],
\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité (3.9) avec $C = 2 + 36 \frac{k'}{k}$. $\square$

Lemme 3.9 (Borne supérieure de l'énergie). *Il existe une constante C dépendant uniquement de k , k' et ν telle que, pour tous U^+ , U^- dans $\mathbb{R}^2$ et θ^+ , θ^- dans $\mathbb{R}$, il existe $u \in H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$ vérifiant*

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} U^- + \theta^-(-x_2, x_1) & \text{si } x_1 < -\ell/2 + k'h, \\ U^+ + \theta^+(-x_2, x_1) & \text{si } x_1 > \ell/2 - k'h \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx \\ & \leq \frac{Yh}{\ell} \left(1 + C \frac{h}{\ell} \right) \left[(U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} \left(3(\theta^+ + \theta^- - 2 \frac{U_2^+ - U_2^-}{\ell})^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Démonstration. Quitte à ajouter un mouvement rigide à u , on peut se ramener au cas où $U_1^+ = -U_1^-$ et $U_2^+ - \theta^+ k'h = U_2^- + \theta^- k'h = 0$. Dans ce cas, l'inégalité à démontrer est

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx \\ & \leq \frac{Yh}{2\ell} \left(1 + C \frac{h}{\ell} \right) \left[(2U_1^+)^2 + \frac{h^2}{3} (3\gamma^2(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

où $\gamma := 1 - \frac{2k'h}{\ell} = \frac{\ell - 2k'h}{\ell}$. On introduit la fonction φ , affine et continue par morceaux, définie par

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \ell/2 - 2k'h, \\ 0 & \text{si } |x| > \ell/2 - k'h. \end{cases}$$

On définit ensuite $u = (u_1, u_2)$ en posant

$$u(x_1, x_2) := \begin{cases} U^- + \theta^-(-x_2, x_1 + \ell/2) & \text{si } x_1 < -\ell/2 + k'h, \\ U^+ + \theta^+(-x_2, x_1 - \ell/2) & \text{si } x_1 > \ell/2 - k'h, \end{cases}$$

et pour $|x_1| < \frac{\ell}{2} - k'h$,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &:= (U_1^+ - U_1^-) \frac{x_1}{\gamma\ell} - \frac{1}{4\ell^2} \left(\frac{12x_1^2}{\gamma^2} (\theta^+ + \theta^-) + \frac{4\ell x_1}{\gamma} (\theta^+ - \theta^-) - \ell^2 (\theta^+ + \theta^-) \right) x_2, \\ u_2(x_1, x_2) &:= \frac{\gamma}{8\ell^2} \left(\frac{2x_1}{\gamma} (\theta^+ + \theta^-) + \ell (\theta^+ - \theta^-) \right) \left(\frac{4x_1^2}{\gamma^2} - \ell^2 \right) \\ &\quad - \frac{\gamma\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-)x_2 - \left(\frac{6x_1}{\gamma} (\theta^+ + \theta^-) + \ell(\theta^+ - \theta^-) \right) \frac{x_2^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Dans ce champ de déplacement u , la fonction φ est introduite pour tenir compte de l'effet Poisson, c'est-à-dire le rétrécissement si $\nu > 0$ ou l'élargissement si $\nu < 0$.

Il est facile de montrer que u appartient à $H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$. En effet, u est de classe C^1 par morceaux sur ω , car ses composantes sont des fonctions polynomiales. D'après la proposition A.8, il suffit de montrer que u (ou sa trace) est continue sur ω . Étudions la continuité de u en $x_1 = -\ell/2 + k'h$ et $x_1 = \ell/2 - k'h$.

1) **Continuité de u en $x_1 = -\ell/2 + k'h$.**

- A gauche du point $x_1 = -\ell/2 + k'h$, on a :

$$\begin{aligned} u_1(-\ell/2 + k'h, x_2) &= u_1(-\gamma\ell/2, x_2) = U_1^- - \theta^- x_2, \\ u_2(-\ell/2 + k'h, x_2) &= u_2(-\gamma\ell/2, x_2) = U_2^- + \theta^- k'h = 0. \end{aligned}$$

- A droite du point $x_1 = -\ell/2 + k'h$, on a :

$$\begin{aligned}
u_1(-\ell/2 + k'h, x_2) &= u_1(-\gamma\ell/2, x_2) \\
&= -\frac{1}{2}(U_1^+ - U_1^-) - \frac{1}{4\ell^2}(3\ell^2(\theta^+ + \theta^-) - 2\ell^2(\theta^+ - \theta^-) - \ell^2(\theta^+ + \theta^-))x_2 \\
&= U_1^- - \theta^- x_2, \\
u_2(-\ell/2 + k'h, x_2) &= u_2(-\gamma\ell/2, x_2) = 0.
\end{aligned}$$

On donc la continuité de u en $x_1 = \ell/2 + k'h$.

2) **Continuité de u en $x_1 = \ell/2 - k'h$.**

- A gauche du point $x_1 = \ell/2 - k'h$, on a :

$$\begin{aligned}
u_1(\ell/2 - k'h, x_2) &= u_1(\gamma\ell/2, x_2) \\
&= \frac{1}{2}(U_1^+ - U_1^-) - \frac{1}{4\ell^2}(3\ell^2(\theta^+ + \theta^-) + 2\ell^2(\theta^+ - \theta^-) - \ell^2(\theta^+ + \theta^-))x_2 \\
&= U_1^+ - \theta^+ x_2, \\
u_2(\ell/2 - k'h, x_2) &= u_2(\gamma\ell/2, x_2) = 0.
\end{aligned}$$

- A droite du point $x_1 = \ell/2 - k'h$, on a :

$$\begin{aligned}
u_1(\ell/2 - k'h, x_2) &= u_1(\gamma\ell/2, x_2) = U_1^+ - \theta^+ x_2, \\
u_2(\ell/2 - k'h, x_2) &= u_2(\gamma\ell/2, x_2) = U_2^+ - \theta^- k'h = 0.
\end{aligned}$$

On a donc la continuité de u en $x_1 = \ell/2 - k'h$. On en déduit la continuité de la fonction u sur ω .

Estimons maintenant l'énergie élastique associée à ce champ de déplacement u . On calcule les coefficients du tenseur des déformations $e(u)$:

$$\begin{aligned}
e_{11}(u) &= \frac{1}{\gamma\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta^+ + \theta^-) + \ell(\theta^+ - \theta^-) \right) x_2 \right), \\
e_{22}(u) &= -\frac{\gamma\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta^+ + \theta^-) + \ell(\theta^+ - \theta^-) \right) x_2 \right), \\
2e_{12}(u) &= -\frac{\gamma\nu\varphi'(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-)x_2 - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta^+ + \theta^-) + \ell(\theta^+ - \theta^-) \right) \frac{x_2^2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{3\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} (\theta^+ + \theta^-) x_2^2.
\end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\mu((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2) + \frac{\lambda}{2} (e_{11}(u) + e_{22}(u))^2 &= \frac{1}{\gamma^2\ell^4} \left(\mu(1 + \gamma^4\nu^2\varphi^2(x_1)) + \frac{\lambda}{2}(1 - \gamma^2\nu\varphi(x_1))^2 \right) \\
&\quad \times \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta^+ + \theta^-) + \ell(\theta^+ - \theta^-) \right) x_2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Puisque $\mu(1 + \gamma^4 \nu^2 \varphi^2(x_1)) \leq \mu(1 + \nu^2) = \frac{Y}{2} \frac{1 + \nu^2}{1 + \nu}$ et

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} (1 - \gamma^2 \nu \varphi(x_1))^2 &= \frac{Y}{2} \frac{\nu}{1 - \nu^2} (1 - \nu + \nu(1 - \gamma^2 \varphi(x_1))^2) \\ &\leq \frac{Y}{2} \left(\frac{\nu(1 - \nu)}{1 + \nu} + \frac{2(1 - \gamma^2 \varphi(x_1))}{(1 - \nu)^2} \right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\mu((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2) + \frac{\lambda}{2} (e_{11}(u) + e_{22}(u))^2 \\ &\leq \frac{1}{\gamma^2 \ell^4} \frac{Y}{2} \left(1 + \frac{2(1 - \gamma^2 \varphi(x_1))}{(1 - \nu)^2} \right) \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) - \left(\frac{6x_1}{\gamma} (\theta^+ + \theta^-) + \ell(\theta^+ - \theta^-) \right) x_2 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'intégrale du second membre de (3.15) sur $[-\ell/2 + 2k'h, \ell/2 - 2k'h] \times [-h, h]$ est majorée par l'intégrale sur $[-\frac{\gamma\ell}{2}, \frac{\gamma\ell}{2}] \times [-h, h]$ du même terme avec $\varphi = 1$, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma^2 \ell^4} \frac{Y}{2} \left(1 + \frac{2(1 - \gamma^2)}{(1 - \nu)^2} \right) \left(2h\gamma\ell^3 (U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{2h^3\gamma\ell^3}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right) \\ &\leq \frac{Yh}{\gamma\ell} \left(1 + \frac{8k'}{(1 - \nu)^2} \frac{h}{\ell} \right) \left((U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right) \\ &\leq \frac{Yh}{\ell} \left(1 + \left(2k' + \frac{8k' + 4k'^2}{(1 - \nu)^2} \right) \frac{h}{\ell} \right) \left((U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right). \end{aligned}$$

Lorsque $-\frac{\ell}{2} + k'h < x_1 < -\frac{\ell}{2} + 2k'h$, l'intégrale du second membre de (3.15) est majorée par

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma^2 \ell^4} \frac{Y}{2} \left(1 + \frac{8k'}{(1 - \nu)^2} \frac{h}{\ell} \right) \times 2k'h^2 \left(\ell|U_1^+ - U_1^-| + (3\ell|\theta^+ + \theta^-| + \ell|\theta^+ - \theta^-|)h \right)^2 \\ &\leq \frac{Yh}{\ell} \frac{3k'h}{\ell} \left(1 + \frac{8k'}{(1 - \nu)^2} \frac{h}{\ell} \right) \left((U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right) \\ &\leq \frac{Yh}{\ell} \left(3k' + \frac{6k'^2}{(1 - \nu)^2} \right) \frac{h}{\ell} \left((U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} (3(\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right). \end{aligned}$$

On obtient la même inégalité lorsque $\frac{\ell}{2} - 2k'h < x_1 < \frac{\ell}{2} - k'h$.

D'autre part, pour tout $-\frac{\ell}{2} + k'h = -\frac{\gamma\ell}{2} < x_1 < \frac{\ell}{2} - k'h = \frac{\gamma\ell}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} |2e_{12}(u)|^2 &\leq 4 \left(\frac{\gamma^2 \nu^2}{\ell^2} \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + (9|\theta^+ + \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2) \frac{h^2}{4} \right) |\varphi'(x_1)|^2 h^2 + \frac{9\nu^2 h^4}{\ell^4} |\theta^+ + \theta^-|^2 \right) \\ &\leq 4 \frac{\nu^2 h^2}{\ell^2} \left(\gamma^2 \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + (9|\theta^+ + \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2) \frac{h^2}{4} \right) |\varphi'(x_1)|^2 + \frac{9h^2}{\ell^2} |\theta^+ - \theta^-|^2 \right). \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale de $2\mu(e_{12}(u))^2$ peut être majorée par

$$\begin{aligned}
& 2\mu \frac{\nu^2 h^2}{\ell^2} \left(\gamma^2 \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + (9|\theta^+ + \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2) \frac{h^2}{4} \right) \frac{2\gamma\ell}{hk'^2} + \frac{18\gamma h^3}{\ell} |\theta^+ + \theta^-|^2 \right) \\
& \leq 8\mu \frac{\nu^2 h^2}{\ell^2 k'} \left(\gamma^2 \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + (9|\theta^+ - \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2) \frac{h^2}{4} \right) + \frac{18k'\gamma h^3}{4\ell} |\theta^+ + \theta^-|^2 \right) \\
& \leq 8\mu \frac{\nu^2 h^2}{\ell^2 k'} \left(\gamma^2 \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + \left(\left(9 + \frac{18k'\gamma h}{\ell} \right) |\theta^+ + \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2 \right) \frac{h^2}{4} \right) \right) \\
& \leq \frac{Yh}{\ell} \frac{\nu^2}{1+\nu} \frac{4h}{k'\ell} \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + (18|\theta^+ + \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2) \frac{h^2}{4} \right) \\
& \leq \frac{Yh}{\ell} \frac{\nu^2}{1+\nu} \frac{6h}{k'\ell} \left(|U_1^+ - U_1^-|^2 + (18|\theta^+ + \theta^-|^2 + |\theta^+ - \theta^-|^2) \frac{h^2}{3} \right) \\
& \leq \frac{Yh}{\ell} \frac{\nu^2}{1+\nu} \frac{108h}{k'\ell} \left((U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{h^2}{3} ((\theta^+ + \theta^-)^2 + (\theta^+ - \theta^-)^2) \right).
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.14) est donc obtenue avec $C := 8k' \left(1 + \frac{1+2k'}{(1-\nu)^2} \right) + \frac{\nu^2}{1+\nu} \frac{108}{k'}$. $\square$

3.2.5. Preuve du résultat principal

Nous pouvons désormais démontrer le théorème 3.6.

Démonstration. On remarque que le nombre d'arêtes se joignant en un nœud $y_{I,s}^\varepsilon$ est borné par $9K^1$. On pose $k = (9K)^{-1}$. Il existe alors une borne inférieure uniforme $\theta_m > 0$ pour les angles entre ces différentes arêtes. Pour éviter de compter plusieurs fois l'énergie au voisinage d'un nœud $y_{I,s}^\varepsilon$, on choisit un rayon $k'h$ avec $k' := (\sin(\theta_m/2))^{-1}$ de sorte que les rectangles partageant le nœud $y_{I,s}^\varepsilon$ ne s'intersectent pas en dehors du disque $D(y_{I,s}^\varepsilon, k'h)$ (voir Figure 3.2).

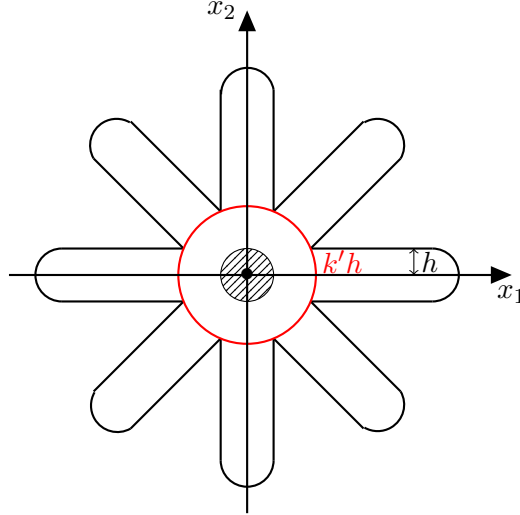


FIGURE 3.2. – Intersections des rectangles au voisinage d'une jonction

1. C'est le nombre maximal d'arêtes qui partagent le même nœud.

On considère sur Ω^ε les fonctions $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ définies par

$$(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})(x) := \begin{cases} (\mu_0, \lambda_0) & \text{si } d(x, \mathring{G}^\varepsilon) > k' \beta \varepsilon^2, \\ (k\mu_0, k\lambda_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit u^ε une suite de champs de déplacement d'énergie bornée (i.e. $\mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq M$) convergeant vers une fonction u dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. La définition de l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon$ implique que u^ε appartient à $H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^2)$. En outre, l'inégalité

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{\beta \varepsilon^3} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\mu_0 \|e(u^\varepsilon)\|^2 + \frac{\lambda_0}{2} [\text{tr}(e(u^\varepsilon))]^2 \right) dx \leq M$$

implique que $\int_{\Omega^\varepsilon} \|e(u^\varepsilon)\|^2 dx < C \varepsilon^3$ avec $C := \frac{M\beta}{\min(\mu_0, \mu_0 + \lambda_0)}$. Le choix de k et k' (3.8) nous permet de scinder l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon)$, et on obtient :

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) \geq \frac{1}{\beta \varepsilon^3} \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \int_{S_{I,p,s,s'}^\varepsilon} \left(\tilde{\mu} \|e(u^\varepsilon)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u^\varepsilon))]^2 \right) dx,$$

où $S_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ désigne le rectangle de ligne moyenne $[y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon]$ et d'épaisseur $2\beta \varepsilon^2$. En appliquant le lemme 3.8 à chaque terme de la somme ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) \geq & \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(1 - \frac{C\beta}{\ell_m} \varepsilon \right) \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} \left[((U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \right. \\ & - \frac{\beta \varepsilon}{2\ell_{p,s,s'}} (v_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - v_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-})^2 + \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{3} \left(3 \left(\varepsilon (\theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} + \theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{(U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}) \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp}{\ell_{p,s,s'}} \right)^2 + (\varepsilon (\theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - \theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}))^2 \right) \Big], \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+}$, $U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}$, $v_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+}$, $v_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}$, $\theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+}$, $\theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}$ désignent les quantités associées à u^ε sur le rectangle $S_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ comme dans le lemme 3.8 et $\ell_m := \min\{\ell_{p,s,s'}; (p,s,s') \in \mathcal{A}\}$.

D'autre part, le lemme 3.7 assure que, pour tout (p,s,s') , les quantités

$$\begin{aligned} & \sum_I \|U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-} - \bar{u}_{I,s}^\varepsilon\|^2, \quad \sum_I \|U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - \bar{u}_{I+p,s}^\varepsilon\|^2, \quad \sum_I |v_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}|^2, \quad \sum_I |v_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+}|^2, \\ & \sum_I |\varepsilon(\theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-} - \phi_{I,s}^\varepsilon)|^2 \quad \text{et} \quad \sum_I |\varepsilon(\theta_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - \phi_{I+p,s}^\varepsilon)|^2 \end{aligned}$$

sont toutes majorées par $\sum_I \int_{B_{I,s}^\varepsilon} \|e(u^\varepsilon)\|^2$ et donc par $C\varepsilon^3$ (ici, $\phi_{I,s}^\varepsilon$ est la quantité associée à u^ε sur le disque $B_{I,s}^\varepsilon$ comme dans le lemme 3.7). Il est clair que ces majorations restent vraies lorsque l'on somme sur $(p,s,s') \in \mathcal{A}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} ((\bar{u}_{I+p,s}^\varepsilon - \bar{u}_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} ((U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En vertu de l'inégalité (3.16), le premier terme du membre de droite de (3.17) est majoré par $C\varepsilon$, où C est une constante indépendante de ε . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} ((\bar{u}_{I+p,s'}^\varepsilon - \bar{u}_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \\ & \leq \left(\sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} ((U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon+} - U_{I,p,s,s'}^{\varepsilon-}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \right) + C\varepsilon^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

En traitant tous les termes dans (3.16) de la même façon, on aboutit à

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) & \geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} \left[((\bar{u}_{I+p,s'}^\varepsilon - \bar{u}_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 + \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{3} \left(3 \left(\varepsilon (\phi_{I+p,s'}^\varepsilon + \phi_{I,s}^\varepsilon) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - 2 \frac{(\bar{u}_{I+p,s'}^\varepsilon - \bar{u}_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp}{\ell_{p,s,s'}} \right)^2 + (\varepsilon (\phi_{I+p,s'}^\varepsilon - \phi_{I,s}^\varepsilon))^2 \right) \right] - C\sqrt{\varepsilon} \\ & \geq E_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon) + F_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon) - C\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le passage à la limite inférieure dans cette dernière inégalité donne

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) & \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon) + F_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon)) \\ & \geq \inf_{(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)} \{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(U^\varepsilon) + F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)); U^\varepsilon \rightharpoonup u \}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ce qui démontre le point (i) puisque l'inégalité (3.18) est vraie pour toute suite (u^ε) d'énergie bornée convergeant vers u .

Soit u une fonction mesurable à valeurs vectorielles et $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une suite d'énergie bornée (i.e. $E_\varepsilon(U^\varepsilon) + F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq M$) telle que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$. Sur chaque rectangle $S_{I,p,s,s'}^\varepsilon$, le lemme 3.9 donne une fonction $u_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ de classe C^1 par morceaux, vérifiant

$$u_{I,p,s,s'}^\varepsilon(x_1, x_2) = \begin{cases} U_{I,s}^\varepsilon + \theta_{I,s}^\varepsilon(-x_2, x_1) & \text{sur } B_{I,s}^\varepsilon, \\ U_{I+p,s'}^\varepsilon + \theta_{I+p,s'}^\varepsilon(-x_2, x_1) & \text{sur } B_{I+p,s'}^\varepsilon, \end{cases}$$

et telle que

$$\begin{aligned} & \int_{S_{I,p,s,s'}^\varepsilon} \left(\mu \|e(u_{I,p,s,s'}^\varepsilon)\|^2 + \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(e(u_{I,p,s,s'}^\varepsilon))]^2 \right) dx \leq \frac{a_{p,s,s'}}{2\varepsilon^2} \left(1 + \frac{C\beta\varepsilon}{\ell_{p,s,s'}} \right) \left[((U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{3} \left(3 \left(\varepsilon \theta_{I+p,s'}^\varepsilon + \varepsilon \theta_{I,s}^\varepsilon - \frac{2}{\ell_{p,s,s'}} (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp \right)^2 + (\varepsilon \theta_{I+p,s'}^\varepsilon - \varepsilon \theta_{I,s}^\varepsilon)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

On définit u^ε sur Ω^ε en posant $u^\varepsilon(x) := u_{I,p,s,s'}^\varepsilon(x)$ si $x \in S_{I,p,s,s'}^\varepsilon$. Nos hypothèses sur la géométrie du réseau et la définition de k' rendent cette définition cohérente sur les jonctions des différents rectangles. Par définition, on a $\bar{u}^\varepsilon = U^\varepsilon$, et donc $u^\varepsilon \rightharpoonup u$. En sommant l'inégalité précédente sur les $(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}$, on obtient

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq \left(1 + \frac{C\beta}{\ell_m} \varepsilon \right) (E_\varepsilon(U^\varepsilon) + F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)).$$

En passant à la limite supérieure dans cette inégalité, on obtient

$$\inf_{u^\varepsilon \rightarrow u} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_\varepsilon(U^\varepsilon) + F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)). \quad (3.19)$$

Ce qui démontre le point (ii) puisque l'inégalité (3.19) est vraie pour toute suite (θ^ε) et pour toute suite (U^ε) convergeant vers u . $\square$

3.3. Le problème de réduction 3D-0D

3.3.1. L'énergie élastique tridimensionnelle

Pour tout champ de déplacement $u \in L^2(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3)$, on définit l'énergie élastique $\mathcal{E}^\varepsilon$ par

$$\mathcal{E}^\varepsilon(u) := \begin{cases} \frac{1}{\beta\varepsilon^4} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\mu_0 \|e(u)\|^2 + \frac{\lambda_0}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx & \text{si } u \in H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.20)$$

où $\mu := \frac{\mu_0}{\beta\varepsilon^4}$ et $\lambda := \frac{\lambda_0}{\beta\varepsilon^4}$ sont les coefficients de Lamé, avec $\mu_0 > 0$ et $2\mu_0 + 3\lambda_0 > 0$. À ces coefficients de Lamé, on associe le module d'Young

$$Y = \frac{Y_0}{\beta\varepsilon^4}, \quad \text{où } Y_0 := \frac{\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + \mu_0}$$

et le coefficient de Poisson

$$\nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu_0 := \frac{\lambda_0}{2(\lambda_0 + \mu_0)}.$$

On a les relations inverses :

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu Y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

3.3.2. Réduction à un problème discret

L'objectif de cette sous-section est de montrer que l'étude des structures tridimensionnelles considérées peut se réduire à l'étude d'un système discret correspondant à un réseau de nœuds reliés par des interactions élastiques de type extension-flexion-torsion. Avant d'énoncer le résultat principal, nous expliquons d'abord les différents types d'interactions.

Interactions en extension. Ces interactions sont déterminées par $14K^2$ coefficients positifs $a_{p,s,s'}$. L'énergie d'extension s'écrit

$$E^\varepsilon(U) := \varepsilon^{-2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} (\rho U)_{I,p,s,s'}^2, \quad (3.21)$$

où

$$a_{p,s,s'} := \frac{\pi \beta Y_0}{\ell_{p,s,s'}} \quad (3.22)$$

et $(\rho_U)_{I,p,s,s'}$ est la quantité définie par

$$(\rho_U)_{I,p,s,s'} := \frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \quad (3.23)$$

qu'on interprète comme l'élongation de la barre d'extrémités (I,s) et $(I+p,s')$.

Interactions en flexion/torsion. On attache à chaque nœud (I,s) de la structure un mouvement rigide : outre le déplacement $U_{I,s}$, chaque nœud est doté d'un vecteur rotation $\theta_{I,s}$. On introduit le vecteur $(\alpha_U)_{I,p,s,s'}$ défini par

$$(\alpha_U)_{I,p,s,s'} := \tau_{p,s,s'} \wedge \frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon \ell_{p,s,s'}} \quad (3.24)$$

qu'on interprète comme la rotation de la barre dont les extrémités sont les nœuds (I,s) et $(I+p,s')$. Puisque que les interactions mécaniques doivent être objectives³, alors l'interaction en flexion/torsion entre les nœuds (I,s) et $(I+p,s')$ doit être une fonction quadratique positive des deux vecteurs $\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}$ et $\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}$. On peut représenter cette fonction quadratique par une matrice 6×6 positive⁴. Ainsi, les interactions en flexion/torsion sont déterminées par $42K^2$ matrices positives B, C et D dont les éléments $B_{p,s,s'}$, $C_{p,s,s'}$ et $D_{p,s,s'}$ sont eux-mêmes des matrices 3×3 . L'énergie de flexion/torsion s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(U, \theta) := \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} & \left[(\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \cdot \frac{B_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \right. \\ & + (\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \\ & \left. + (\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \cdot \frac{D_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

où

$$B_{p,s,s'} = D_{p,s,s'} = a_{p,s,s'}(f(\text{Id} - \tau_{p,s,s'} \otimes \tau_{p,s,s'}) + t\tau_{p,s,s'} \otimes \tau_{p,s,s'}), \quad (3.26)$$

$$2C_{p,s,s'} = a_{p,s,s'}(f(\text{Id} - \tau_{p,s,s'} \otimes \tau_{p,s,s'}) - 2t\tau_{p,s,s'} \otimes \tau_{p,s,s'}), \quad (3.27)$$

avec

$$f := \beta^2, \quad t := \frac{\beta^2}{4(1+\nu)}. \quad (3.28)$$

L'énergie élastique totale du réseau est donnée par la somme $E^\varepsilon(U) + F^\varepsilon(U, \theta)$.

Nous montrons dans le théorème suivant que la Γ -limite de la suite des énergies élastiques tridimensionnelles (3.20) est identique à la Γ -limite de la suite des énergies discrètes $(E^\varepsilon + F^\varepsilon)$, où E^ε et F^ε sont les énergies définies respectivement par (3.21) et (3.25).

2. En petites déformations, les rotations sont représentées par des matrices antisymétriques qui peuvent être aussi identifiées avec des vecteurs.

3. Ici, l'objectivité signifie l'invariance par ajout d'une valeur constante Φ au champ $\theta_{I,s}$ et d'un champ $\Phi \wedge y_{I,s}^\varepsilon$ au champ de déplacement $U_{I,s}$.

4. Le principe d'objectivité [52, p. 73] entraîne que le rang de cette matrice ne peut pas être supérieur à 5.

Théorème 3.10. *Pour toute fonction mesurable u , on a :*

$$(i) \inf_{u^\varepsilon} \{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon); u^\varepsilon \rightharpoonup u \} \geq \inf_{U^\varepsilon, \theta^\varepsilon} \{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)); U^\varepsilon \rightharpoonup u \},$$

$$(ii) \inf_{u^\varepsilon} \{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon); u^\varepsilon \rightharpoonup u \} \leq \inf_{U^\varepsilon, \theta^\varepsilon} \{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)); U^\varepsilon \rightharpoonup u \},$$

où $\mathcal{E}^\varepsilon$, E^ε et F^ε sont respectivement les fonctionnelles définies par (3.20), (3.21) et (3.25).

3.3.3. Estimations pour un cylindre mince

Soit (e_1, e_2, e_3) la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On considère le cylindre $\mathcal{C}$ de longueur ℓ , à section circulaire de rayon r avec $r < \frac{\ell}{4}$, i.e., $\mathcal{C} := [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \times D(0, r)$ avec

$$D(0, r) := \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + x_3^2 < r^2\}.$$

On note $S(x_1)$ la section transversale du cylindre $\mathcal{C}$ par rapport à $x_1 \in [-\ell/2, \ell/2]$, i.e.,

$$S(x_1) := \{x_1\} \times D(0, r)$$

et on désigne par $S^- := S(-\ell/2)$ et $S^+ := S(\ell/2)$ les deux sections extrêmes du cylindre.

A toute fonction $u \in H^1(\mathcal{C}; \mathbb{R}^3)$ on associe les quantités :

$$U(x_1) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{S(x_1)} u(x_1, x_2, x_3) \, dx_2 \, dx_3, \quad (3.29)$$

$$\theta(x_1) := \frac{4}{\pi r^4} \int_{S(x_1)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_3 u_2(x) - x_2 u_3(x)) \\ -x_3 u_1(x) \\ x_2 u_1(x) \end{pmatrix} \, dx_2 \, dx_3, \quad (3.30)$$

$$W := \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0, r)} u(x) \, dx, \quad \phi := \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0, r)} \frac{1}{2} \operatorname{rot}(u) \, dx. \quad (3.31)$$

Lemme 3.11. *Il existe une constante C indépendante de r telle que, pour tout $u \in H^1(B(0, r); \mathbb{R}^3)$,*

$$\|U(0) - W\|^2 \leq C \int_{B(0, r)} \|e(u)\|^2 \, dx, \quad \|\theta(0) - \phi\|^2 \leq \frac{C}{r^2} \int_{B(0, r)} \|e(u)\|^2 \, dx.$$

Démonstration. Par un changement d'échelle, on se ramène au cas où $r = 1$. Supposons que les inégalités annoncées sont fausses. Alors, il existe une suite u^n telle que $\int_{B(0, 1)} e(u^n) \, dx$ tend vers 0 et que l'une au moins des quantités $\|U^n(0) - W^n\|^2$, $\|\theta^n(0) - \phi^n\|^2$ ne tend pas vers 0. La fonction $\tilde{u}^n := u^n - W^n - \phi^n \wedge x$ vérifie :

$$\frac{1}{\pi} \int_{B(0, 1)} \tilde{u}^n \, dx = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{B(0, 1)} \frac{1}{2} \operatorname{rot}(\tilde{u}^n) \, dx = 0.$$

De plus, $\int_{B(0, 1)} \|e(\tilde{u}^n)\|^2 \, dx = \int_{B(0, 1)} \|e(u^n)\|^2 \, dx \rightarrow 0$. D'après l'inégalité de Korn (B.6) qui est valide sur l'espace

$$\mathcal{R}_1 := \left\{ w = (w_1, w_2, w_3) \in H^1(B(0, 1); \mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \oint_{B(0, 1)} w = 0, \oint_{B(0, 1)} \frac{1}{2} \operatorname{rot}(w) = 0 \right\},$$

$\tilde{u}^n$ converge fortement vers 0 dans $H^1(B(0,1);\mathbb{R}^3)$. La continuité de l'opérateur trace assure que $\tilde{u}^n$ tend vers 0 dans $H^{1/2}(S(0);\mathbb{R}^3)$ et donc dans $L^2(S(0);\mathbb{R}^3)$. Ceci implique que les quantités

$$U^n(0) - W^n = \int_{S(0)} \tilde{u}^n(0, x_2, x_3) \, dx_2 \, dx_3$$

et

$$\theta^n(0) - \phi^n = \frac{4}{\pi} \int_{S(0)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_3 \tilde{u}_2^n(0, x_2, x_3) - x_2 \tilde{u}_3^n(0, x_2, x_3)) \\ -x_3 \tilde{u}_1^n(0, x_2, x_3) \\ x_2 \tilde{u}_1^n(0, x_2, x_3) \end{pmatrix} \, dx_2 \, dx_3$$

tendent vers 0. Ce qui conduit à une contradiction. $\square$

Soit deux réels k et k' tels que

$$0 \leq k < 1 < k' < \frac{\ell}{2r}. \quad (3.32)$$

Sur le cylindre $\mathcal{C}$, on considère les fonctions constantes par morceaux $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})$ définies par

$$(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} (\mu, \lambda) & \text{si } |x_1| < \ell/2 - k'r, \\ (k\mu, k\lambda) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.33)$$

On note (U^-, θ^-) et (U^+, θ^+) les valeurs respectives de (U, θ) en $x_1 = -\ell/2$ et $x_1 = \ell/2$.

Lemme 3.12. *Il existe une constante C qui dépend uniquement de k , k' et ν , telle que, pour tout $u \in H^1(\mathcal{C}; \mathbb{R}^3)$, on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) \, dx &\geq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \left(1 - C \frac{r}{\ell} \right) \left[(U_1^+ - U_1^-)^2 \right. \\ &\quad + \frac{r^2}{4} \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^- - 2 \frac{U_2^+ - U_2^-}{\ell})^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 \right) \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{4} \left(3(\theta_2^+ + \theta_2^- - 2 \frac{U_3^+ - U_3^-}{\ell})^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) + \frac{r^2}{4 + 4\nu} (\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Démonstration. Quitte à ajouter un mouvement rigide à u , on peut se ramener au cas où $U_1^- = -U_1^+$, $\theta_1^- = -\theta_1^+$, $U_2^- = U_2^+ = U_3^- = U_3^+ = 0$. Dans ce cas, l'inégalité à démontrer est

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) \, dx \geq \frac{Y\pi r^2}{\ell} \left(1 - C \frac{r}{\ell} \right) X,$$

avec

$$X := (2U_1^+)^2 + \frac{r^2}{4} \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 + 3(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) + \frac{r^2}{4 + 4\nu} (2\theta_1^+)^2. \quad (3.35)$$

Pour tout champ symétrique $\sigma \in L^2(\mathcal{C})$, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) \geq - \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) + \int_{\mathcal{C}} \sigma : e(u).$$

On choisit le champ σ défini par

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_0 + (b_0 + b_1 x_1)x_2 + (c_0 + c_1 x_1)x_3, \\ \sigma_{12} &= -\frac{A}{2}x_3 - c_1 x_2 x_3 + b_1 x_3^2, \\ \sigma_{13} &= \frac{A}{2}x_2 - b_1 x_2 x_3 + c_1 x_2^2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{2Y}{\ell}U_1^+, \quad b_0 := \frac{Y}{\ell}(\theta_3^+ - \theta_3^-), \quad b_1 := \frac{6Y}{\ell^2}(\theta_3^+ + \theta_3^-), \\ c_0 &:= -\frac{Y}{\ell}(\theta_2^+ - \theta_2^-), \quad c_1 := -\frac{6Y}{\ell^2}(\theta_2^+ + \theta_2^-), \quad A := -\frac{2Y}{(1+\nu)\ell}\theta_1^+. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $\operatorname{div} \sigma = 0$. En posant $\tilde{Y}(x) := \tilde{\mu}(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})/(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})$ (qui prend les valeurs Y et kY), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\tilde{\mu}}\|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}(\operatorname{tr}(\sigma))^2 &= \frac{1}{2\tilde{Y}}((1+\nu)\|\sigma\|^2 - \nu(\operatorname{tr}(\sigma))^2) \\ &= \frac{1}{2\tilde{Y}}(\sigma_{11}^2 + (2+2\nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $(x_2, x_3) \in D(0, r)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_C \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}}\|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}(\operatorname{tr}(\sigma))^2 \right) dx \\ &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{1}{2\tilde{Y}} \left[\pi r^2 a_0^2 + \frac{\pi r^4}{4} \left((b_0 + b_1 x_1)^2 + (c_0 + c_1 x_1)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi r^4}{4}(1+\nu)A^2 + \frac{\pi r^6}{3}(1+\nu)(b_1^2 + c_1^2) \right] dx_1. \end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{1}{\tilde{Y}(x_1)} dx_1 &= \frac{1}{Y}(\ell - 2k'r) + \frac{2k'r}{kY} \leq \frac{\ell}{Y} \left(1 + 2\frac{k'r}{k\ell} \right), \\ \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{(b_0 + b_1 x_1)^2}{\tilde{Y}(x_1)} dx_1 &\leq \frac{Y}{\ell} \left(1 + 12\frac{k'r}{k\ell} \right) \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 \right), \\ \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{(c_0 + c_1 x_1)^2}{\tilde{Y}(x_1)} dx_1 &\leq \frac{Y}{\ell} \left(1 + 12\frac{k'r}{k\ell} \right) \left(3(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& \int_C \left(\frac{1}{4\tilde{\mu}} \|\sigma\|^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})} (\text{tr}(\sigma))^2 \right) dx \\
& \leq \left(1 + 12 \frac{k' r}{k \ell} \right) \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{r^2}{4} \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 + 3(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{r^2}{4 + 4\nu} (2\theta_1^+)^2 + \frac{12(1 + \nu)r^4}{\ell^2} \left((\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 \right) \right] \\
& \leq \left(1 + 12 \frac{k' r}{k \ell} \right) \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \left(X + \frac{12(1 + \nu)r^4}{\ell^2} \left(\frac{4}{3r^2} X + \frac{4}{3r^2} X \right) \right) \\
& \leq \left(1 + 12 \frac{k' r}{k \ell} \right) \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \left(1 + 8(1 + \nu) \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 \right) X \\
& \leq \left(1 + \left(2 + 2\nu + 18 \frac{k'}{k} \right) \frac{r}{\ell} \right) \frac{Y \pi r^2}{2\ell} X.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\text{div } \sigma = 0$, alors d'après la formule de Green, on a

$$\int_C \sigma : e(u) = \int_{\partial C} (\sigma \cdot n) \cdot u,$$

avec $\partial C = S_L \cup S^+ \cup S^-$ et n la normale unitaire extérieure à ∂C , où S_L est la surface latérale du cylindre. On a :

$$n = \begin{cases} \frac{x_2}{r} e_2 + \frac{x_3}{r} e_3 & \text{sur } S_L, \\ e_1 & \text{sur } S^+, \\ -e_1 & \text{sur } S^-. \end{cases}$$

On a $\sigma \cdot n = 0$ sur la surface latérale et $\sigma \cdot e_1 = (\sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13})^t$. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_C \sigma : e(u) &= \int_{S^+} (\sigma \cdot e_1) \cdot u - \int_{S^-} (\sigma \cdot e_1) \cdot u \\
&= \int_{S^+} (\sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3) - \int_{S^-} (\sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \int_{S^+} (\sigma_{11} u_1 + \sigma_{12} u_2 + \sigma_{13} u_3) \\
&= \int_{S^+} \left[\left(a_0 + (b_0 + b_1 \frac{\ell}{2}) x_2 + (c_0 + c_1 \frac{\ell}{2}) x_3 \right) u_1 + \left(-\frac{A}{2} x_3 - c_1 x_2 x_3 + b_1 x_3^2 \right) u_2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{A}{2} x_2 - b_1 x_2 x_3 + c_1 x_2^2 \right) u_3 \right] dx_2 \ dx_3 \\
&= a_0 \pi r^2 U_1^+ + \left(b_0 + b_1 \frac{\ell}{2} \right) \frac{\pi r^4}{4} \theta_3^+ - \left(c_0 + c_1 \frac{\ell}{2} \right) \frac{\pi r^4}{4} \theta_2^+ - A \frac{\pi r^4}{4} \theta_1^+ \\
& \quad + \int_{S^+} (b_1 x_3 - c_1 x_2) (x_3 u_2 - x_2 u_3) \ dx_2 \ dx_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{S^-} (\sigma_{11}u_1 + \sigma_{12}u_2 + \sigma_{13}u_3) \\
&= \int_{S^-} \left[\left(a_0 + (b_0 - b_1 \frac{\ell}{2})x_2 - (c_0 - c_1 \frac{\ell}{2})x_3 \right) u_1 + \left(-\frac{A}{2}x_3 - c_1x_2x_3 + b_1x_3^2 \right) u_2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{A}{2}x_2 - b_1x_2x_3 + c_1x_2^2 \right) u_3 \right] dx_2 dx_3 \\
&= a_0\pi r^2 U_1^- + \left(b_0 - b_1 \frac{\ell}{2} \right) \frac{\pi r^4}{4} \theta_3^- - \left(c_0 - c_1 \frac{\ell}{2} \right) \frac{\pi r^4}{4} \theta_2^- - A \frac{\pi r^4}{4} \theta_1^- \\
&\quad + \int_{S^+} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_C \sigma : e(u) &= a_0\pi r^2 (U_1^+ - U_1^-) + \frac{\pi r^4}{4} \left(b_0(\theta_3^+ - \theta_3^-) + b_1 \frac{\ell}{2} (\theta_3^+ + \theta_3^-) - c_0(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right. \\
&\quad \left. - c_1 \frac{\ell}{2} (\theta_2^+ + \theta_2^-) - A(\theta_1^+ - \theta_1^-) \right) + \int_{S^+} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3 \\
&\quad - \int_{S^-} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3 \\
&= \frac{Y\pi r^2}{\ell} \left[(2U_1^+)^2 + \frac{r^2}{4} \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 + 3(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{r^2}{4+4\nu} (2\theta_1^+) \right] + \int_{S^+} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3 \\
&\quad - \int_{S^-} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3 \\
&= \frac{Y\pi r^2}{\ell} X + \int_{S^+} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3 \\
&\quad - \int_{S^-} (b_1x_3 - c_1x_2)(x_3u_2 - x_2u_3) dx_2 dx_3
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S^+ \cup S^-} c_1x_2(x_3u_2 - x_2u_3) dx' \right| &\leq |c_1| r \frac{\pi r^4}{2} |\theta_1^+ - \theta_1^-| \\
&\leq \frac{3Y\pi r^5}{\ell^2} |(\theta_1^+ - \theta_1^-)(\theta_2^+ + \theta_2^-)| \\
&\leq \frac{3Y\pi r^5}{2\ell^2} \left((\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 + (\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 \right) \\
&\leq \frac{3Y\pi r^5}{2\ell^2} \left(\frac{4+4\nu}{r^2} X + \frac{4}{3r^2} X \right) \\
&\leq \frac{Y\pi r^3}{\ell^2} (8+6\nu) X
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S^+ \cup S^-} b_1 x_3 (x_3 u_2 - x_2 u_3) \, dx' \right| &\leq |b_1| r \frac{\pi r^4}{2} |\theta_1^+ - \theta_1^-| \\
&\leq \frac{3Y\pi r^5}{\ell^2} |(\theta_1^+ - \theta_1^-)(\theta_3^+ + \theta_3^-)| \\
&\leq \frac{3Y\pi r^5}{2\ell^2} \left((\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 + (\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 \right) \\
&\leq \frac{Y\pi r^3}{\ell^2} (8 + 6\nu) X,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma : e(u) \geq \frac{Y\pi r^2}{\ell} \left(1 - (16 + 12\nu) \frac{r}{\ell} \right) X.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) &\geq \frac{Y\pi r^2}{\ell} \left(1 - \frac{1}{2} - \left(16 + 12\nu + 1 + \nu + 9\frac{k'}{k} \right) \frac{r}{\ell} \right) X \\
&\geq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \left(1 - C \frac{r}{\ell} \right) X,
\end{aligned}$$

avec $C := \frac{17}{2} + \frac{13}{2}\nu + \frac{9}{2}\frac{k'}{k}$. Ce qui termine la preuve du lemme 3.12. $\square$

Lemme 3.13. *Il existe une constante C qui dépend uniquement de k , k' et ν , telle que, pour tous U^+ , U^- , θ^+ et θ^- dans $\mathbb{R}^3$, il existe $u \in H^1(\mathcal{C}; \mathbb{R}^3)$ vérifiant*

$$u(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} U^- + \theta^- \wedge x & \text{si } x_1 < -\ell/2 + k'r, \\ U^+ + \theta^+ \wedge x & \text{si } x_1 > \ell/2 - k'r, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|(e(u))\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx &\leq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \left(1 + C \frac{r}{\ell} \right) \left[(U_1^+ - U_1^-)^2 \right. \\
&\quad + \frac{r^2}{4} \left(3 \left(\theta_3^+ + \theta_3^- - 2 \frac{U_2^+ - U_2^-}{\ell} \right)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{r^2}{4} \left(3 \left(\theta_2^+ + \theta_2^- - 2 \frac{U_3^+ - U_3^-}{\ell} \right)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) + \frac{r^2}{4 + 4\nu} (\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Démonstration. Quitte à ajouter un mouvement rigide, on peut se ramener au cas où

$$U_1^+ = -U_1^-, \theta_1^+ = -\theta_1^-, U_2^+ = U_2^- = U_3^+ = U_3^- = 0. \tag{3.37}$$

Dans ce cas, l'inégalité à démontrer est

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|(e(u))\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx \leq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \left(1 + C \frac{r}{\ell} \right) X,$$

où X est l'expression définie par (3.35).

On introduit la fonction continue et affine par morceaux φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \ell/2 - 2k'r, \\ 0 & \text{si } |x| > \ell/2 - k'r. \end{cases}$$

On pose maintenant $\gamma := 1 - 2\frac{k'r}{\ell}$ et on définit u en posant

$$u(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} U^- + \theta^- \wedge (x_1 + \ell/2, x_2, x_3) & \text{si } x_1 < -\ell/2 + k'r, \\ U^+ + \theta^+ \wedge (x_1 - \ell/2, x_2, x_3) & \text{si } x_1 > \ell/2 - k'r, \end{cases}$$

et pour $|x_1| < \ell/2 - k'r$,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &:= (U_1^+ - U_1^-) \frac{x_1}{\gamma\ell} + \frac{1}{4\ell^2} \left(\frac{12x_1^2}{\gamma^2} (\theta_3^+ + \theta_3^-) + \frac{4\ell x_1}{\gamma} (\theta_3^+ - \theta_3^-) - \ell^2 (\theta_3^+ + \theta_3^-) \right) x_2 \\ &\quad - \frac{1}{4\ell^2} \left(\frac{12x_1^2}{\gamma^2} (\theta_2^+ + \theta_2^-) + \frac{4\ell x_1}{\gamma} (\theta_2^+ - \theta_2^-) - \ell^2 (\theta_2^+ + \theta_2^-) \right) x_3, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &:= -\frac{\gamma}{8\ell^2} \left(\frac{2x_1}{\gamma} (\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell (\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) \left(\frac{4x_1^2}{\gamma^2} - \ell^2 \right) \\ &\quad - \frac{\gamma\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-)x_2 + \left(\frac{6x_1}{\gamma} (\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\frac{6x_1}{\gamma} (\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_2 x_3 + \frac{\theta_1^+ - \theta_1^-}{\ell} x_1 x_3, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &:= \frac{\gamma}{8\ell^2} \left(\frac{2x_1}{\gamma} (\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) \left(\frac{4x_1^2}{\gamma^2} - \ell^2 \right) \\ &\quad - \frac{\gamma\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-)x_3 + \left(\frac{6x_1}{\gamma} (\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma\nu\varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\frac{6x_1}{\gamma} (\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2 x_3 - \frac{\theta_1^+ - \theta_1^-}{\ell} x_1 x_2. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que la fonction u appartient à $H^1(\mathcal{C}; \mathbb{R}^3)$ et satisfait les conditions (3.37) (on utilise les définitions (3.29) et (3.30) pour vérifier ces conditions).

Nous allons estimer l'énergie de déformation associée au champ de déplacement u . Les composantes du tenseur des déformations $e(u)$ sont :

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{\gamma \ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2 - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_3 \right), \\
e_{22} &= -\frac{\gamma \nu \varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_3 \right), \\
e_{33} &= -\frac{\gamma \nu \varphi(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_3 \right), \\
2e_{12} &= \frac{3\nu \varphi(x_1)}{\ell^2} \left((\theta_3^+ + \theta_3^-)(x_3^2 - x_2^2) + 2(\theta_2^+ + \theta_2^-)x_2x_3 \right) + \frac{\theta_1^+ - \theta_1^-}{\ell} x_3 \\
&\quad - \frac{\gamma \nu \varphi'(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-)x_2 + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{\gamma \nu \varphi'(x_1)}{\ell^2} \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_2x_3, \\
2e_{13} &= -\frac{3\nu \varphi(x_1)}{\ell^2} \left((\theta_2^+ + \theta_2^-)(x_2^2 + x_3^2) + 2(\theta_3^+ + \theta_3^-)x_2x_3 \right) - \frac{\theta_1^+ - \theta_1^-}{\ell} x_2 \\
&\quad - \frac{\gamma \nu \varphi'(x_1)}{\ell^2} \left(\ell(U_1^+ - U_1^-)x_3 + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\gamma \nu \varphi'(x_1)}{\ell^2} \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2x_3, \\
e_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \frac{\lambda}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 &= \frac{1}{\gamma^2 \ell^4} \left(\mu(1 + 2\gamma^4 \nu^2 \varphi^2(x_1)) + \frac{\lambda}{2}(1 - 2\gamma^2 \nu \varphi(x_1))^2 \right) \\
&\quad \times \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2 - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_3 \right)^2.
\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \mu(1 + 2\gamma^4 \nu^2 \varphi^2(x_1)) \leq \mu(1 + 2\nu^2) = \frac{Y}{2} \frac{1 + 2\nu^2}{1 + \nu} \text{ et}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}(1 - 2\gamma^2 \nu \varphi(x_1))^2 &= \frac{Y}{2} \frac{\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} (1 - 2\nu + 2\nu(1 - \gamma^2 \varphi(x_1)))^2 \\
&\leq \frac{Y}{2} \left(\frac{\nu(1 - 2\nu)}{1 + \nu} + \frac{4\nu^2(1 - \nu)(1 - \gamma^2 \varphi(x_1))}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \right),
\end{aligned}$$

donc

$$\mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \frac{\lambda}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 \leq \frac{1}{\gamma^2 \ell^4} \frac{Y}{2} \left(1 + \frac{4\nu^2(1-\nu)(1-\gamma^2\varphi(x_1))}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\ \times \left(\ell(U_1^+ - U_1^-) + \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_3^+ + \theta_3^-) + \ell(\theta_3^+ - \theta_3^-) \right) x_2 - \left(\frac{6x_1}{\gamma}(\theta_2^+ + \theta_2^-) + \ell(\theta_2^+ - \theta_2^-) \right) x_3 \right)^2$$

L'intégrale du second membre sur $[-\frac{\ell}{2} + 2k'r, \frac{\ell}{2} - 2k'r] \times D(0, r)$ est majorée par l'intégrale sur $[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \times D(0, r)$ du même terme, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{\gamma^2 \ell^4} \frac{Y}{2} \left(1 + \frac{4\nu^2(1-\nu)(1-\gamma^2)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \left(\pi r^2 \ell^3 (U_1^+ - U_1^-)^2 + \ell^3 \frac{\pi r^4}{4} \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 3(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) \right) \\ \leq \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + \frac{16\nu^2(1-\nu)k'}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{r}{\ell} \right) \left((U_1^+ - U_1^-)^2 + \frac{r^2}{4} \left(3(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + (\theta_3^+ - \theta_3^-)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 3(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + (\theta_2^+ - \theta_2^-)^2 \right) \right).$$

L'intégrale de $2\mu(e_{12}^2 + e_{13}^2)$ sur $[-\frac{\ell}{2} + 2k'r, \frac{\ell}{2} - 2k'r] \times D(0, r)$ est majorée par

$$2\mu \left(\frac{\gamma \pi r^4}{8\ell} (\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 + \frac{3\gamma \nu^2 \pi r^6}{4\ell^3} (\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + \frac{3\gamma \nu^2 \pi r^6}{4\ell^3} (\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 \right) \\ \leq \frac{Y \pi r^2 \gamma}{2\ell(1+\nu)} \left(\frac{r^2}{4} (\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 + \frac{3\nu^2 r^4}{2\ell^2} (\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + \frac{3\nu^2 r^4}{2\ell^2} (\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 \right) \\ \leq \frac{Y \pi r^2 \gamma}{2\ell} \frac{r^2}{4+4\nu} (\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 + \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \frac{3\nu^2 r^4 \gamma}{2\ell^2(1+\nu)} \frac{8X}{3r^2} \\ \leq \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \frac{r^2}{4+4\nu} (\theta_1^+ - \theta_1^-)^2 + \frac{Y \pi r^2}{2\ell} \frac{\nu^2}{1+\nu} \frac{r}{\ell} X.$$

Pour estimer l'énergie lorsque x_1 appartient à $[-\ell/2 + k'r, -\ell/2 + 2k'r] \cup [\ell/2 - 2k'r, \ell/2 - k'r]$, on utilise l'inégalité suivante :

$$\mu \|e(u)\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}(e(u)))^2 \leq \left(\mu + \frac{3\lambda}{2} \right) \|e(u)\|^2 = \frac{Y}{2(1-2\nu)} \|e(u)\|^2.$$

On a :

$$e_{11}^2 \leq \frac{10}{\gamma^2 \ell^4} \left[\ell^2 (U_1^+ - U_1^-)^2 + \left(\frac{36\ell^2}{\gamma^2} (\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + \ell^2 (\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 \right) r^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{36\ell^2}{\gamma^2} (\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + \ell^2 (\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 \right) r^2 \right] \\ \leq \frac{10}{\gamma^2 \ell^2} \left(X + 2 \left(\frac{36}{\gamma^2} + 4 \right) X \right) \\ \leq \frac{10}{\gamma^2 \ell^2} \left(9 + \frac{96}{\gamma^2} \right) X.$$

De manière analogue, on trouve que les quantités e_{22}^2 et e_{33}^2 sont toutes les deux majorées par

$$\frac{10\gamma^2\nu^2(\varphi(x_1))^2}{\ell^2}\left(9 + \frac{96}{\gamma^2}\right)X \leq \frac{1020\nu^2}{\ell^2}X.$$

On a :

$$\begin{aligned} (2e_{12})^2 &\leq \frac{90\nu^2}{\ell^4}\left(2(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2r^4 + 4(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2r^4\right) + 10\frac{(\theta_1^+ - \theta_1^-)^2}{\ell^2}r^2 \\ &\quad + \frac{10\gamma^2\nu^2}{(k'r)^2\ell^4}\left(\ell^2(U_1^+ - U_1^-)^2r^2 + \left(\frac{36\ell^2}{\gamma^2}(\theta_3^+ + \theta_3^-)^2 + \ell^2(\theta_3^+ - \theta_3^-)^2\right)\frac{r^4}{2}\right) \\ &\quad + \frac{10\gamma^2\nu^2}{(k'r)^2\ell^4}\left(\frac{36\ell^2}{\gamma^2}(\theta_2^+ + \theta_2^-)^2 + \ell^2(\theta_2^+ - \theta_2^-)^2\right)r^4 \\ &\leq \frac{90\nu^2}{\ell^4}\left(\frac{8r^2}{3\gamma^2}X + 16r^2X\right) + \frac{40 + 40\nu}{\ell^2}X + \frac{10\gamma^2\nu^2}{k'^2\ell^2}\left(X + \frac{24}{\gamma^2}X + 2X + \frac{8}{3\gamma^2}X + 4X\right) \\ &\leq \left(90\nu^2\left(1 + \frac{1}{6\gamma^2}\right) + 40 + 40\nu + \frac{390\nu^2}{k'^2}\right)\frac{X}{\ell^2}. \end{aligned}$$

On obtient la même majoration pour $(2e_{13})^2$.

En intégrant sur $[-\ell/2 + k'r, -\ell/2 + 2k'r] \times D(0, r)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{-\ell/2+k'r}^{-\ell/2+2k'r} \int_{D(0,r)} \left(\mu\|e(u)\|^2 + \frac{\lambda}{2}[\text{tr}(e(u))]^2\right) dx \\ &\leq k'r \frac{Y\pi r^2}{2(1-2\nu)} \left(\frac{10}{\gamma^2}\left(9 + \frac{96}{\gamma^2}\right) + 2040\nu^2 + 90\nu^2\left(1 + \frac{1}{6\gamma^2}\right) + 40 + 40\nu + \frac{390\nu^2}{k'^2}\right) \frac{X}{\ell^2} \\ &\leq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \frac{r}{\ell} X \frac{k'}{1-2\nu} \left((10 + 5k')(105 + 48k') + 2130\nu^2 + 15 + \frac{15}{2}k' + 40 + 40\nu + \frac{390\nu^2}{k'^2}\right) \\ &\leq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \frac{r}{\ell} X \frac{k'}{1-2\nu} \left(1095 + \frac{2025}{2}k' + 240k'^2 + 40\nu + 2130\nu^2 + \frac{390\nu^2}{k'^2}\right). \end{aligned}$$

On obtient la même majoration lorsque l'on intègre sur $[\ell/2 - 2k'r, \ell/2 - k'r] \times D(0, r)$.

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_C \left(\tilde{\nu}\|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2}[\text{tr}(e(u))]^2\right) dx &\leq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} X \left(1 + \left(\frac{\nu^2}{1+\nu} + \frac{(2 + 16\nu^2(1-\nu))k' + 8\nu^2(1-\nu)k'^2}{(1-2\nu)(1+\nu)}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \frac{2k'}{1-2\nu} \left(1095 + \frac{2025k'}{2} + 240k'^2 + 40\nu + 2130\nu^2 + \frac{390\nu^2}{k'^2}\right)\right) \frac{r}{\ell}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité (3.36) avec

$$\begin{aligned} C &:= \frac{\nu^2}{1+\nu} + \frac{(2 + 16\nu^2(1-\nu))k' + 8\nu^2(1-\nu)k'^2}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ &\quad + \frac{2k'}{1-2\nu} \left(1095 + \frac{2025k'}{2} + 240k'^2 + 40\nu + 2130\nu^2 + \frac{390\nu^2}{k'^2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

Pour résumer, nous avons montré qu'il existe une constante C dépendant uniquement de k , k' et ν , telle que

$$\boxed{\frac{Y\pi r^2}{2\ell} \left(1 - C\frac{r}{\ell}\right) Z \leq \int_{\mathcal{C}} \left(\tilde{\mu} \|e(u)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \right) dx \leq \frac{Y\pi r^2}{2\ell} \left(1 + C\frac{r}{\ell}\right) Z}$$

avec

$$Z := ((U^+ - U^-) \cdot e_1)^2 + r^2 \left((\theta^- - \alpha_U) \cdot \mathbf{B} \cdot (\theta^+ - \alpha_U) + (\theta^- - \alpha_U) \cdot \mathbf{C} \cdot (\theta^+ - \alpha_U) + (\theta^+ - \alpha_U) \cdot \mathbf{D} \cdot (\theta^+ - \alpha_U) \right),$$

où $\alpha_U := e_1 \wedge \frac{U^+ - U^-}{\ell}$, $\mathbf{B} = \mathbf{D} = (\text{Id} - e_1 \otimes e_1) + \frac{1}{4 + 4\nu} e_1 \otimes e_1$ et $\mathbf{C} = (\text{Id} - e_1 \otimes e_1) - \frac{1}{2 + 2\nu} e_1 \otimes e_1$.

3.3.4. Preuve du théorème 3.10

Nous démontrons maintenant le résultat principal de cette section qui est le théorème 3.10.

Démonstration. On remarque que le nombre d'arêtes se joignant en un nœud $y_{I,s}^\varepsilon$ est borné par $27K$. On pose $k = (27K)^{-1}$. Il existe alors une borne inférieure uniforme $\theta_m > 0$ pour les angles entre ces différentes arêtes. Pour éviter de compter plusieurs fois l'énergie au voisinage d'un nœud $y_{I,s}^\varepsilon$, on choisit un rayon $k'r$ avec $k' := (\sin(\theta_m/2))^{-1}$ de sorte que les cylindres partageant le nœud $y_{I,s}^\varepsilon$ ne s'intersectent pas en dehors de la boule $B(y_{I,s}^\varepsilon, k'r)$.

Soit u^ε une suite de champs de déplacement d'énergie bornée (i.e. $\mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq M$) convergeant vers une fonction u dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$. L'inégalité

$$\mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{\beta\varepsilon^4} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\mu_0 \|e(u^\varepsilon)\|^2 + \frac{\lambda_0}{2} [\text{tr}(e(u^\varepsilon))]^2 \right) dx \leq M$$

implique que u^ε appartient à $H^1(\Omega^\varepsilon; \mathbb{R}^3)$ et que $\int_{\Omega^\varepsilon} \|e(u^\varepsilon)\|^2 dx \leq C\varepsilon^4$ avec

$$C := \frac{M\beta}{\min(\mu_0, \mu_0 + \frac{2}{3}\lambda_0)}.$$

Le choix (3.32) de k et k' et la définition (3.33) de $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ nous permettent de scinder l'énergie, et on obtient :

$$\mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \int_{\mathcal{C}_{I,p,s,s'}^\varepsilon} \left(\tilde{\mu} \|e(u^\varepsilon)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u^\varepsilon))]^2 \right) dx,$$

où $\mathcal{C}_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ est le cylindre d'axe $[y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon]$ et de rayon $\beta\varepsilon^2$. En appliquant le lemme 3.12 à chaque terme de la somme ci-dessus et en rappelant que $a_{p,s,s'}$ est défini par (3.22), on

obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) &\geq \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - C \frac{\beta\varepsilon}{\ell_m}\right) \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} \left[\left((U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 \right. \\
&\quad + \beta^2 \varepsilon^4 \left((\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot B_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right. \\
&\quad + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \\
&\quad \left. \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot D_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,p,s,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(1 - C \frac{\beta\varepsilon}{\ell_m}\right) \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} a_{p,s,s'} \left[\left(\frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 \right. \\
&\quad + \beta^2 \varepsilon^2 \left((\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot B_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right. \\
&\quad + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \\
&\quad \left. \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot D_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,p,s,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right) \right] \\
&\geq \left(1 - C \frac{\beta\varepsilon}{\ell_m}\right) (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)), \tag{3.38}
\end{aligned}$$

où $U_{I,s}^\varepsilon$, $U_{I+p,s'}^\varepsilon$, $\theta_{I,s}^\varepsilon$, $\theta_{I+p,s'}^\varepsilon$ sont les quantités associées à u^ε sur le cylindre $\mathcal{C}_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ comme dans le lemme 3.12, $(\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon := \frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon \ell_{p,s,s'}} \wedge \tau_{p,s,s'}$ et $\ell_m := \min\{\ell_{p,s,s'}; (p,s,s') \in \mathcal{A}\}$.

Le passage à la limite inférieure dans l'inégalité (3.38) donne

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)) \\
&\geq \inf_{(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)} \{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)); U^\varepsilon \rightharpoonup u \}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le point (i) puisque l'inégalité (3.39) est vraie pour toute suite u^ε d'énergie bornée convergeant vers u .

Soit u une fonction mesurable à valeurs vectorielles et $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une suite d'énergie bornée telle que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$. Sur chaque cylindre $\mathcal{C}_{I,p,s,s'}^\varepsilon$, le lemme 3.13 donne une fonction $u_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ de classe C^1 par morceaux, satisfaisant

$$u_{I,p,s,s'}^\varepsilon(x) = \begin{cases} U_{I,s}^\varepsilon + \theta_{I,s}^\varepsilon \wedge x & \text{sur } B_{I,s}^\varepsilon, \\ U_{I+p,s'}^\varepsilon + \theta_{I+p,s'}^\varepsilon \wedge x & \text{sur } B_{I+p,s'}^\varepsilon, \end{cases}$$

et telle que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_{I,p,s,s'}^\varepsilon} \left(\tilde{\mu} \|e(u_{I,p,s,s'}^\varepsilon)\|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} [\text{tr}(e(u_{I,p,s,s'}^\varepsilon))]^2 \right) dx &\leq \frac{a_{p,s,s'}}{2\varepsilon} \left(1 + C \frac{\beta\varepsilon}{\ell_{p,s,s'}}\right) \left[\left((U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 \right. \\
&\quad + \beta^2 \varepsilon^4 \left((\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot B_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right. \\
&\quad + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \\
&\quad \left. \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot D_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,p,s,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right) \right].
\end{aligned}$$

On définit u^ε sur Ω^ε en posant $u^\varepsilon(x) := u_{I,p,s,s'}^\varepsilon(x)$ si $x \in \mathcal{C}_{I,p,s,s'}^\varepsilon$. Par définition, on a $\bar{u}^\varepsilon = U^\varepsilon$, et donc $u^\varepsilon \rightharpoonup u$. En sommant l'inégalité précédente sur les $(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \left(1 + \frac{C\beta\varepsilon}{\ell_{p,s,s'}} \right) a_{p,s,s'} \left[((U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \right. \\
&\quad + \beta^2 \varepsilon^4 \left((\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot B_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right. \\
&\quad + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,p,s,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \\
&\quad \left. \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot D_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right) \right] \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left(1 + \frac{C\beta\varepsilon}{\ell_{p,s,s'}} \right) a_{p,s,s'} \left[\left(\frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 \right. \\
&\quad + \beta^2 \varepsilon^2 \left((\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot B_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \right. \\
&\quad + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \\
&\quad \left. \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}^\varepsilon) \cdot D_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_U)_{I+p,s'}^\varepsilon) \right) \right] \\
&\leq \left(1 + \frac{C\beta\varepsilon}{\ell_m} \right) (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)).
\end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure dans cette inégalité, on obtient

$$\inf_{u^\varepsilon \rightarrow u} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (E^\varepsilon(U^\varepsilon) + F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)). \quad (3.40)$$

Ce qui démontre le point (ii) puisque l'inégalité (3.40) est vraie pour toute suite (θ^ε) et pour toute suite (U^ε) convergeant vers u . $\square$

3.4. Conclusion

Nous avons déterminé le comportement asymptotique des structures bi- et tridimensionnelles basées sur un graphe périodique élargi. Sous certaines hypothèses spécifiques sur les coefficients de Lamé du matériau constituant les barres du graphe, nous avons montré qu'on peut réduire l'étude de structures considérées à l'étude de réseaux périodiques de nœuds reliés par des interactions élastiques du type extension-flexion en dimension 2 et du type extension-flexion-torsion en dimension 3, lorsque la taille ε de la période et l'épaisseur h des barres du graphe tendent simultanément vers zéro. Nous avons justifié nos résultats de réduction de dimension en utilisant des estimations d'énergie et les outils de Γ -convergence. Ces résultats nous permettront de simplifier l'étude de nos structures sans résoudre les problèmes variationnels 2D et 3D continus, comme nous le verrons au chapitre suivant.

4. Homogénéisation de réseaux périodiques avec interactions élastiques

Sommaire

4.1. Réseaux bidimensionnels	76
4.1.1. Géométrie et interactions mécaniques	76
4.1.2. Résultat d'homogénéisation	77
4.1.3. Compacité des suites d'énergie bornée	79
4.1.4. Résultat de convergence à deux échelles	85
4.1.5. Preuve du résultat d'homogénéisation	87
4.2. Réseaux tridimensionnels	90
4.2.1. Géométrie et interactions mécaniques	90
4.2.2. Résultat d'homogénéisation	90
4.3. Calcul explicite de l'énergie homogénéisée	94
4.4. Conclusion	95

Dans ce chapitre, nous considérons des systèmes discrets correspondant à des réseaux périodiques de nœuds reliés par des interactions élastiques tels qu'obtenus au chapitre 3. Nous étudions le comportement homogénéisé de ces systèmes discrets en utilisant les outils de Γ -convergence. Nous allons montrer que l'homogénéisation de tels réseaux peut conduire à des modèles de second gradient. Nous montrerons que les effets de second gradient peuvent apparaître au cours du processus d'homogénéisation et non pas comme des corrections du modèle homogénéisé.

4.1. Réseaux bidimensionnels

4.1.1. Géométrie et interactions mécaniques

Soit t_1, t_2 deux vecteurs de périodicité linéairement indépendants dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Dans le parallélogramme $\Omega := \{x_1 t_1 + x_2 t_2 \mid (x_1, x_2) \in [0; 1]^2\}$, nous considérons le réseau périodique de nœuds formé par les points

$$y_{I,s}^\varepsilon := \varepsilon(y_s + i_1 t_1 + i_2 t_2) \text{ avec } I := (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } s \in \{1, \dots, K\}, \quad (4.1)$$

en supposant que ε^{-1} est un entier naturel. Nous utilisons $y_I^\varepsilon := \varepsilon(i_1 t_1 + i_2 t_2)$ comme point de référence de la cellule I . Nous introduisons l'ensemble $\mathcal{I}^\varepsilon$ des indices des cellules du réseau :

$$\mathcal{I}^\varepsilon := \{(i_1, i_2) \in (0, \varepsilon^{-1})^2\}.$$

Les énergies d'extension et de flexion s'écrivent (voir sous-section 3.2.3) :

$$E_\varepsilon(U) := \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left(\frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2, \quad (4.2)$$

$$F_\varepsilon(U, \theta) := \varepsilon^2 \sum_{(I,p,s,s') \in \mathcal{I}^\varepsilon \times \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'} \beta^2}{6} \left[3 \left(\theta_{I+p,s'} + \theta_{I,s} - \frac{2}{\ell_{p,s,s'}} \frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp \right)^2 + (\theta_{I+p,s'} - \theta_{I,s})^2 \right]. \quad (4.3)$$

L'énergie élastique totale du réseau est la somme de ces deux énergies :

$$\mathcal{E}_\varepsilon(U, \theta) := E_\varepsilon(U) + F_\varepsilon(U, \theta). \quad (4.4)$$

Notre objectif est de déterminer l'énergie homogénéisée correspondant à l'énergie discrète $\mathcal{E}_\varepsilon$ en utilisant la Γ -convergence.

4.1.2. Résultat d'homogénéisation

Dans cette section, nous déterminons la Γ -limite $\mathcal{E}$ de la suite d'énergies $\mathcal{E}_\varepsilon$ définies par (4.4). Nous considérons des conditions aux limites de frontière libre. Dans ce cas, l'équilibre de la structure ne peut être atteinte que lorsque les forces externes appliquées sont équilibrées. La solution d'un problème d'équilibre est définie à un mouvement rigide global près. Pour assurer l'unicité de la solution, nous supposons que

$$\sum_I U_{I,1} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_I \theta_{I,1} = 0. \quad (4.5)$$

Dans l'hypothèse (4.5), le choix du nœud 1 est arbitraire. Une valeur moyenne des déplacements de tous les nœuds aurait pu être choisie (comme par exemple dans [1]).

Nous allons étudier le comportement d'une suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ d'énergie bornée, c'est-à-dire vérifiant $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$ où C est une constante indépendante de ε .

Nous introduisons le déplacement moyen défini par

$$m_I^\varepsilon := \frac{1}{K} \sum_{s=1}^K U_{I,s}^\varepsilon \quad (4.6)$$

et les quantités définies par :

$$v_{I,s}^\varepsilon := \varepsilon^{-1} (U_{I,s}^\varepsilon - m_I^\varepsilon), \quad \chi_{I,p}^\varepsilon := \varepsilon^{-1} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon). \quad (4.7)$$

La quantité $v_{I,s}^\varepsilon$ est la différence entre le déplacement $U_{I,s}^\varepsilon$ et le déplacement moyen m_I^ε .

Nous introduisons aussi la quantité définie par

$$\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon := \begin{cases} \varepsilon^{-2} (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'} & \text{si } (p,s,s') \in \mathcal{A}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.8)$$

qu'on interprète comme l'élongation de la « barre » $[y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon]$ mise à l'échelle ε .

En utilisant les définitions ci-dessus, on obtient

$$\varepsilon^{-1}(U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) = v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon.$$

On peut donc réécrire les énergies $E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ et $F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ sous les formes suivantes :

$$\bar{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon) := \varepsilon^{-2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon, \theta^\varepsilon) := \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'} \beta^2}{6} & \left[3 \left(\theta_{I+p,s'}^\varepsilon + \theta_{I,s}^\varepsilon - 2(\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'} \right)^2 \right. \\ & \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - \theta_{I,s}^\varepsilon)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec $(\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'} := \frac{\tau_{p,s,s'}^\perp}{\ell_{p,s,s'}} \cdot (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon)$.

Introduisons les analogues continus¹ de $\bar{E}_\varepsilon$ et $\bar{F}_\varepsilon$. Pour toutes fonctions θ , v et η définies respectivement sur $\Omega \times \{1, \dots, K\}$, $\Omega \times \{1, \dots, K\}$ et $\Omega \times \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}$, de carré intégrable par rapport à leur première variable et à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$, nous posons :

$$\bar{E}(v, \eta) := \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_{p,s,s'}(v, \eta)(x) \, dx, \quad (4.11)$$

avec

$$\mathcal{E}_{p,s,s'}(v, \eta) := \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{s'} - v_s + \eta_{p,s'}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 \quad (4.12)$$

et

$$\bar{F}(v, \eta, \theta) := \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta, \theta)(x) \, dx, \quad (4.13)$$

avec

$$\mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta, \theta) := \frac{a_{p,s,s'} \beta^2}{6} \left(3 \left(\theta_{s'} + \theta_s - 2(\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'} \right)^2 + (\theta_{s'} - \theta_s)^2 \right), \quad (4.14)$$

où $(\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'} := \frac{\tau_{p,s,s'}^\perp}{\ell_{p,s,s'}} \cdot (v_{s'} - v_s + \eta_{p,s'})$.

Nous étendons ces fonctionnelles $\bar{E}$ et $\bar{F}$ aux distributions en posant $\bar{E} = +\infty$ et $\bar{F} = +\infty$ lorsque les intégrandes ne sont pas de carré intégrable.

Pour toutes fonctions u dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et v dans $L^2(\mathbb{R}^2 \times \{1, \dots, K\})$, nous posons au sens des distributions, pour tout $(p,s) \in \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}$,

$$(\eta_u)_{p,s} := \nabla u \cdot \mathbf{p}, \quad (4.15)$$

$$(\xi_{u,v})_{p,s} := \nabla v_s \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}. \quad (4.16)$$

1. Le lecteur qui désire comprendre les notations introduites et avoir un aperçu formel de la fonctionnelle limite peut commencer par le développement asymptotique formel donné à la section 7.3 du chapitre 7.

Remarque 4.1. Notons que le tenseur $(\eta_u)_{p,s}$ est uniforme en s . Nous l'avons introduit avec l'indice s , car nous voulons réutiliser la fonctionnelle $\bar{E}$ définie précédemment avec $(w, \xi_{u,v})$ comme arguments au lieu d'introduire une nouvelle fonctionnelle. Comme les tenseurs η_u et $\xi_{u,v}$ occupent la même place en tant qu'arguments, ils doivent être de même ordre.

Le résultat principal de cette section est le résultat d'homogénéisation suivant.

Théorème 4.2. *La suite $(\mathcal{E}_\varepsilon)$ définie par (4.4) Γ -converge vers la fonctionnelle $\mathcal{E}$ définie par*

$$\mathcal{E}(u) := \inf_{w,v,\theta} \left\{ \bar{E}(w, \xi_{u,v}) + \bar{F}(v, \eta_u, \theta); \bar{E}(v, \eta_u) = 0, \int_{\Omega} \theta_1(x) \, dx = 0 \right\} \quad (4.17)$$

si $\int_{\Omega} u(x) \, dx = 0$ et $\mathcal{E}(u) = +\infty$ sinon, où $\bar{E}$ et $\bar{F}$ sont les fonctionnelles définies par (4.11) et (4.13), η_u et $\xi_{u,v}$ sont les quantités définies par (4.15) et (4.16). Ici, l'infimum est pris sur toutes les distributions (w, v, θ) . Plus précisément, on a :

- (i) (**Compacité**) Pour toute suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ d'énergie bornée (i.e. $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$), il existe des fonctions mesurables u et θ telles que, à une sous-suite près, $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ et $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta$;
- (ii) (**Inégalité de la Γ -limite inférieure**) Pour toute suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ telle que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ et $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta$, nous avons

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \geq \mathcal{E}(u);$$

- (iii) (**Inégalité de la Γ -limite supérieure**) Pour toute fonction u telle que $\mathcal{E}(u) < +\infty$, il existe une suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ telle que

$$U^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ et } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq \mathcal{E}(u),$$

où la convergence $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ est comprise au sens de la définition 3.2.

Remarque 4.3. La contrainte $\bar{E}(v, \eta_u) = 0$ dans le théorème 4.2 est équivalente à l'équation

$$(v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0 \quad (4.18)$$

au sens des distributions, pour tout $(p, s, s') \in \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}^2$.

La propriété de stabilité de la Γ -convergence et notre choix de convergence nous permettent de traiter des problèmes d'équilibre avec un champ continu f de forces extérieures. En effet, le potentiel externe $-\langle f, U^\varepsilon \rangle := - \sum_I f(y_{I,s}^\varepsilon) \cdot U_{I,s}^\varepsilon$ induit par un tel champ f correspond à une perturbation continue de l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon$ par rapport à la convergence considérée. Ainsi, l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) - \langle f, U^\varepsilon \rangle$ Γ -converge vers $\mathcal{E}(u) - \int_{\Omega} f(x) \cdot u(x) \, dx$.

Les sous-sections suivantes sont consacrées à la démonstration du théorème 4.2.

4.1.3. Compacité des suites d'énergie bornée

Dans cette sous-section, nous démontrons le point (i) du théorème 4.2, c'est-à-dire, la relative compacité des suites $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ d'énergie bornée. Nous démontrons aussi la relative compacité des suites associées m^ε , v^ε , χ^ε et $\omega_{p,s,s'}^\varepsilon$ définies respectivement par (4.6), (4.7) et (4.8). Ce résultat de compacité est nécessaire pour assurer que toute suite de minima de $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ converge vers un minimum de $\mathcal{E}(u)$. Sa démonstration est basée sur l'hypothèse de connectivité et une version discrète de l'inégalité de Korn (Lemme 4.4).

Lemme 4.4 (Version discrète 2D de l'inégalité de Korn). *Il existe une constante positive C dépendant seulement de Ω , telle que, pour toutes suites de familles $(U_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$, $(\theta_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$ satisfaisant, pour tout $p \in \mathcal{P}$,*

$$\sum_I U_I^\varepsilon = 0, \quad \sum_I \theta_I^\varepsilon = 0, \quad \sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} - \theta_I^\varepsilon p^\perp \right\|^2 < 1, \quad (4.19)$$

on a

$$\sum_I (\theta_I^\varepsilon)^2 < C, \quad \sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|^2 < C \quad \text{et} \quad \sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2 < C. \quad (4.20)$$

La preuve de ce lemme est essentiellement basée sur l'inégalité de Korn standard appliquée à une interpolation affine des déplacements des nœuds.

Démonstration. Ici, C est une constante dépendant seulement de Ω , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre.

On divise d'abord Ω en ε^{-2} parallélogrammes $\Omega_I^\varepsilon := y_I^\varepsilon + \varepsilon\Omega$. On divise ensuite chaque parallélogramme Ω_I^ε en deux triangles en considérant les deux différents couples (p_α, p_β) de directions distinctes dans $\{t_1, t_2\}$ et les triangles associés de sommets $(y_I^\varepsilon, y_{I+p_\alpha}^\varepsilon, y_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon)$.

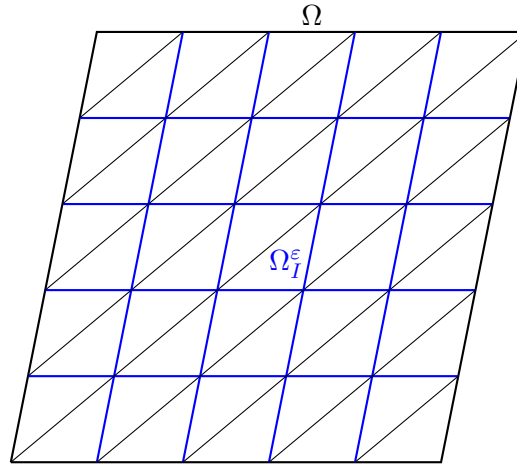


FIGURE 4.1. – Décomposition du domaine Ω

Sur chaque triangle, on définit l'interpolation affine $\mathcal{U}^\varepsilon$ de U^ε en posant, pour tout $0 \leq y \leq x \leq 1$,

$$\mathcal{U}^\varepsilon(y_I^\varepsilon + \varepsilon(xp_\alpha + yp_\beta)) := (1-x)U_I^\varepsilon + (x-y)U_{I+p_\alpha}^\varepsilon + yU_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{U}^\varepsilon$ appartient à $H^1(\Omega)$. Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C \sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2. \quad (4.21)$$

En effet, par un changement de variables, on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \varepsilon^2 |\det(t_1, t_2)| \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 |\mathcal{U}^\varepsilon(y_I^\varepsilon + \varepsilon(xp_\alpha + yp_\beta))|^2 dx dy \\
&= \varepsilon^2 |\det(t_1, t_2)| \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \left[\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \left((1-x)U_I^\varepsilon + (x-y)U_{I+p_\alpha}^\varepsilon + yU_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon \right)^2 dx dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y \left((1-y)U_I^\varepsilon + (y-x)U_{I+p_\beta}^\varepsilon + xU_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon \right)^2 dx dy \right] \\
&= \frac{\varepsilon^2}{12} |\det(t_1, t_2)| \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \left[\left((U_I^\varepsilon)^2 + (U_{I+p_\alpha}^\varepsilon)^2 + (U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon)^2 + U_I^\varepsilon \cdot U_{I+p_\alpha}^\varepsilon \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + U_I^\varepsilon \cdot U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon + U_{I+p_\alpha}^\varepsilon \cdot U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon \right) \right. \\
&\quad \left. + \left((U_I^\varepsilon)^2 + (U_{I+p_\beta}^\varepsilon)^2 + (U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon)^2 + U_I^\varepsilon \cdot U_{I+p_\beta}^\varepsilon \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + U_I^\varepsilon \cdot U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon + U_{I+p_\beta}^\varepsilon \cdot U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon \right) \right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc \geq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$ qui est vraie pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \frac{\varepsilon^2}{12} |\det(t_1, t_2)| \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \left[(U_I^\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}(U_{I+p_\alpha}^\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}(U_{I+p_\beta}^\varepsilon)^2 + (U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon)^2 \right] \\
&\geq \frac{\varepsilon^2}{12} |\det(t_1, t_2)| \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \|U_I^\varepsilon\|^2 \\
&\geq \frac{|\det(t_1, t_2)|}{12} \sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité (4.21) avec $C := \frac{|\det(t_1, t_2)|}{12}$.

Sur le triangle $(y_I^\varepsilon, y_{I+p_\alpha}^\varepsilon, y_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon)$, on a

$$\varepsilon \nabla \mathcal{U}^\varepsilon = (U_{I+p_\alpha}^\varepsilon - U_I^\varepsilon) \otimes p_\alpha^* + (U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon - U_{I+p_\alpha}^\varepsilon) \otimes p_\beta^*, \quad (4.22)$$

où (p_α^*, p_β^*) est la base duale de (p_α, p_β) . Donc,

$$\begin{aligned}
\varepsilon e(\mathcal{U}^\varepsilon)|(p_\alpha \otimes p_\alpha) &= (U_{I+p_\alpha}^\varepsilon - U_I^\varepsilon - \varepsilon \theta_I^\varepsilon p_\alpha^\perp) \cdot p_\alpha, \\
\varepsilon e(\mathcal{U}^\varepsilon)|(p_\beta \otimes p_\beta) &= (U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon - U_{I+p_\alpha}^\varepsilon - \varepsilon \theta_I^\varepsilon p_\beta^\perp) \cdot p_\beta, \\
\varepsilon e(\mathcal{U}^\varepsilon)|(p_\alpha \otimes p_\beta + p_\beta \otimes p_\alpha) &= (U_{I+p_\alpha}^\varepsilon - U_I^\varepsilon - \varepsilon \theta_I^\varepsilon p_\alpha^\perp) \cdot p_\beta + (U_{I+p_\alpha+p_\beta}^\varepsilon - U_{I+p_\alpha}^\varepsilon - \varepsilon \theta_I^\varepsilon p_\beta^\perp) \cdot p_\alpha,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité $p_\alpha^\perp \cdot p_\beta + p_\beta^\perp \cdot p_\alpha = 0$. Il est clair que $p_\alpha \otimes p_\alpha, p_\beta \otimes p_\beta, (p_\alpha \otimes p_\beta + p_\beta \otimes p_\alpha)$ forment une base de l'espace des matrices symétriques d'ordre 2. En utilisant (4.19) et en sommant sur tous les triangles, on obtient que $\|e(\mathcal{U}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$. On peut alors utiliser l'inégalité de Korn (B.6) sur Ω : il existe une constante C dépendant seulement de Ω et un

mouvement rigide global $R^\varepsilon(y) := a^\varepsilon + B^\varepsilon \cdot y$ (où a^ε est un vecteur constant et B^ε une matrice antisymétrique) tels que $\|\mathcal{U}^\varepsilon - R^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C$. En particulier, on a

$$\|\nabla \mathcal{U}^\varepsilon - B^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (4.23)$$

D'après (4.22) et (4.23), on obtient pour toute direction p_α , l'inégalité

$$\sum_I \left\| \frac{U_{I+p,1}^\varepsilon - U_{I,1}^\varepsilon}{\varepsilon} - B^\varepsilon \cdot p_\alpha \right\|^2 \leq C. \quad (4.24)$$

D'après (4.35) et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\sum_I \|B^\varepsilon \cdot p_\alpha - \theta_I^\varepsilon p_\alpha^\perp\|^2 \leq C. \quad (4.25)$$

En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto \|x\|^2$, il vient

$$\left\| B^\varepsilon \cdot p_\alpha - \sum_I \theta_I^\varepsilon p_\alpha^\perp \right\|^2 \leq C.$$

Puisque $\sum_I \theta_I^\varepsilon = 0$, on obtient $\|B^\varepsilon \cdot p_\alpha\|^2 \leq C$. En revenant à (4.25), on déduit l'inégalité $\sum_I \|\theta_I^\varepsilon p_\alpha^\perp\|^2 \leq C$, qui est vraie pour toute direction p_α . On en déduit que

$$\sum_I (\theta_I^\varepsilon)^2 \leq C. \quad (4.26)$$

Puisque l'on a aussi $\|B^\varepsilon\|^2 \leq C$, alors en utilisant l'inégalité triangulaire et (4.24), on obtient

$$\sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|^2 \leq C. \quad (4.27)$$

Il est clair que $\mathcal{U}^\varepsilon - R^\varepsilon$ est l'interpolation affine de $U_I^\varepsilon - R^\varepsilon \cdot y_I^\varepsilon$ et on peut donc appliquer l'inégalité (4.21) à ces fonctions. Elle donne $C \sum_I \|U_I^\varepsilon - R^\varepsilon \cdot y_I^\varepsilon\|^2 \leq \|\mathcal{U}^\varepsilon - R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$, et par

conséquent, on a $\sum_I \|U_I^\varepsilon - R^\varepsilon \cdot y_I^\varepsilon\|^2 \leq C$. En utilisant de nouveau la convexité de la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ et l'hypothèse $\sum_I U_I^\varepsilon = 0$, on obtient $\left\| R^\varepsilon \cdot \left(\sum_I y_I^\varepsilon \right) \right\|^2 \leq C$. On en déduit que $\|R^\varepsilon\|^2 \leq C$, et par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2 \leq C. \quad (4.28)$$

On conclut la preuve du lemme en collectant (4.26), (4.27) et (4.28). $\square$

Lemme 4.5 (Compacité). Soit $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une suite satisfaisant

$$\sum_I U_{I,1}^\varepsilon = 0, \quad \sum_I \theta_{I,1}^\varepsilon = 0 \quad (4.29)$$

et d'énergie bornée (i.e. $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$). Alors, les suites $\left(\sum_I \|U_{I,s}^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I (\theta_{I,s}^\varepsilon)^2\right)$, $\left(\sum_I \|m_I^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I \|v_{I,s}^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I \|\chi_{I,p}^\varepsilon\|^2\right)$ et $\left(\sum_I (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2\right)$ sont bornées.

Démonstration. Ici, C est une constante dépendant seulement de Ω , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre. L'inégalité $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$ implique que $E_\varepsilon(U^\varepsilon) \leq C$ et $F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$. L'inégalité $E_\varepsilon(U^\varepsilon) \leq C$ donne directement

$$\sum_I (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2 = \varepsilon^{-2} \sum_I \left(\frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 \leq C. \quad (4.30)$$

L'inégalité $F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$ implique que pour tout $(p, s, s') \in \mathcal{A}$,

$$\sum_I (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - \theta_{I,s}^\varepsilon)^2 \leq C \quad (4.31)$$

et

$$\sum_I \left(\frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon \ell_{p,s,s'}} \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp - \theta_{I,s}^\varepsilon \right)^2 \leq C. \quad (4.32)$$

On prend maintenant (p, s, s') dans $\mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}^2$. D'après l'hypothèse de connectivité (voir section 2.3), il existe un chemin $(s_i, p_i, \varepsilon_i)_{i=1}^r$ connectant les nœuds (I, s) et $(I + p, s')$. On

pose $\tilde{p}_j := \sum_{i=1}^{j-1} \varepsilon_i p_i$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\sum_I (\theta_{I+\tilde{p}_j, s_j}^\varepsilon - \theta_{I,s}^\varepsilon)^2 \leq C,$$

par conséquent,

$$\sum_I \left(\varepsilon_j \frac{U_{I+\tilde{p}_{j+1}, s_{j+1}}^\varepsilon - U_{I+\tilde{p}_j, s_j}^\varepsilon}{\varepsilon \ell_{p_j, s_j, s_{j+1}}} \cdot \tau_{p_j, s_j, s_{j+1}}^\perp - \theta_{I,s}^\varepsilon \right)^2 \leq C. \quad (4.33)$$

On pose $\tilde{U}_{I,s,J,s'}^\varepsilon := U_{J,s'}^\varepsilon - \theta_{I,s}^\varepsilon (y_{J,s'}^\varepsilon - y_{I,s}^\varepsilon)^\perp$. Alors, on a :

$$\tilde{U}_{I,s,J+p,s''}^\varepsilon - \tilde{U}_{I,s,J,s'}^\varepsilon = U_{J+p,s''}^\varepsilon - U_{J,s'}^\varepsilon - \varepsilon \ell_{p,s',s''} \theta_{I,s}^\varepsilon \tau_{p,s',s''}^\perp.$$

L'inégalité (4.33) donne

$$\sum_I \left(\frac{\tilde{U}_{I,s,I+\tilde{p}_{j+1}, s_{j+1}}^\varepsilon - \tilde{U}_{I,s,I+\tilde{p}_j, s_j}^\varepsilon}{\varepsilon \ell_{p_j, s_j, s_{j+1}}} \cdot \tau_{p_j, s_j, s_{j+1}}^\perp \right)^2 \leq C.$$

Puisque (4.30) implique aussi

$$\varepsilon^{-2} \sum_I \left((\tilde{U}_{I,s,I+\tilde{p}_{j+1},s_{j+1}}^\varepsilon - \tilde{U}_{I,s,I+\tilde{p}_j,s_j}^\varepsilon) \cdot \tau_{p_j,s_j,s_{j+1}} \right)^2 \leq C,$$

on obtient

$$\varepsilon^{-2} \sum_I \left\| \tilde{U}_{I,s,I+\tilde{p}_{j+1},s_{j+1}}^\varepsilon - \tilde{U}_{I,s,I+\tilde{p}_j,s_j}^\varepsilon \right\|^2 \leq C.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\varepsilon^{-2} \sum_I \left\| \tilde{U}_{I,s,I+p,s'}^\varepsilon - \tilde{U}_{I,s,I,s}^\varepsilon \right\|^2 \leq C$$

ou encore

$$\varepsilon^{-2} \sum_I \left\| U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon - \theta_{I,s}^\varepsilon (y_{I+p,s'}^\varepsilon - y_{I,s}^\varepsilon)^\perp \right\|^2 \leq C. \quad (4.34)$$

On se focalise temporairement sur le cas particulier où $s = s' = 1$, qui donne

$$\sum_I \left\| \frac{U_{I+p,1}^\varepsilon - U_{I,1}^\varepsilon}{\varepsilon} - \theta_{I,1}^\varepsilon \mathbf{p}^\perp \right\|^2 \leq C. \quad (4.35)$$

En appliquant le lemme 4.4, on obtient $\sum_I \|\theta_{I,1}^\varepsilon\|^2 \leq C$. En vertu de (4.31), cette inégalité s'étend pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$:

$$\sum_I \|\theta_{I,s}^\varepsilon\|^2 \leq C. \quad (4.36)$$

En utilisant l'inégalité (4.34), on obtient, pour tout $(p, s, s') \in \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}^2$,

$$\varepsilon^{-2} \sum_I \|U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon\|^2 \leq C. \quad (4.37)$$

Puisque le lemme 4.4 donne aussi $\sum_I \|U_{I,1}^\varepsilon\|^2 \leq C$, on obtient pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$, en choisissant $p = 0$ et $s' = 1$,

$$\sum_I \|U_{I,s}^\varepsilon\|^2 \leq C. \quad (4.38)$$

En prenant la valeur moyenne par rapport à s dans (4.38) et dans (4.37) (avec $p = 0$), on obtient respectivement

$$\sum_I \|m_I^\varepsilon\| \leq C, \quad \sum_I \|v_{I,s}^\varepsilon\|^2 \leq C, \quad (4.39)$$

et en prenant la valeur moyenne par rapport à s et s' dans (4.37), on obtient

$$\sum_I \|\chi_{I,p}^\varepsilon\|^2 \leq C. \quad (4.40)$$

On conclut la preuve du lemme en collectant (4.30), (4.36), (4.38), (4.39) et (4.40). $\square$

4.1.4. Résultat de convergence à deux échelles

Les estimations établies dans le lemme 4.5 impliquent que pour toute suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ d'énergie bornée, il existe des fonctions θ , u , v , χ_p et $\omega_{p,s,s'}$ dans $L^2(\Omega)$ telles que, pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$ et à des sous-suites près, on a

$$\theta_s^\varepsilon \rightharpoonup \theta_s, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad v_s^\varepsilon \rightharpoonup v_s, \quad \chi_p^\varepsilon \rightharpoonup \chi_p \quad \text{et} \quad \omega_{p,s,s'}^\varepsilon \rightharpoonup \omega_{p,s,s'}. \quad (4.41)$$

Dans le lemme suivant, nous établissons certaines propriétés de ces différentes limites et les relations qui existent entre elles. Nous suivons la méthode utilisée par Allaire dans [8] pour établir les propriétés des limites à deux échelles.

Lemme 4.6. *Soit $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une suite telle que $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$. Alors, on a*

$$U_s^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \int_\Omega u(x) \, dx = 0, \quad \int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0, \quad \sum_{s=1}^K v_s = 0 \quad \text{et} \quad \chi_p = \nabla u \cdot \mathbf{p}. \quad (4.42)$$

De plus, il existe des champs w_s et λ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ tels que, pour tout $(p, s, s') \in \mathcal{A}$,

$$\omega_{p,s,s'} = \left(w_{s'} - w_s + \nabla(v_{s'} + \lambda) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'}. \quad (4.43)$$

Démonstration. (i) La convergence $v_s^\varepsilon \rightharpoonup v_s$ implique que $(U_s^\varepsilon - m^\varepsilon) \rightharpoonup 0$, donc pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$, $U_s^\varepsilon \rightharpoonup u$. En passant à la limite dans l'hypothèse $\sum_I U_{I,1}^\varepsilon = 0$, on

obtient $\int_\Omega u(x) \, dx = 0$. De même, en passant à la limite dans l'hypothèse $\sum_I \theta_{I,1}^\varepsilon = 0$,

on obtient $\int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0$.

(ii) Le fait que $\sum_{s=1}^K v_{I,s}^\varepsilon = 0$ implique clairement que $\sum_{s=1}^K v_s(x) = 0$.

(iii) Pour tout champ test régulier φ à support compact dans Ω , on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \chi_p(x) \cdot \varphi(x) \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \varepsilon^{-1} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon) \cdot \varphi(y_I^\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I m_I^\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} (\varphi(y_{I-p}^\varepsilon) - \varphi(y_I^\varepsilon)) \quad (\text{changement d'indice}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I m_I^\varepsilon \cdot (-\nabla \varphi(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + O(\varepsilon)) \\ &= - \int_\Omega u(x) \cdot (\nabla \varphi(x) \cdot \mathbf{p}) \, dx = \int_\Omega (\nabla u(x) \cdot \mathbf{p}) \cdot \varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

On déduit que $\chi_p = \nabla u \cdot \mathbf{p}$.

(iv) Pour caractériser la limite $\omega_{p,s,s'}$, on introduit l'ensemble $\mathcal{D}_A$ de familles de distributions dans $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$\mathcal{D}_A := \left\{ \psi_{p,s,s'} = (w_{s'} - w_s + \nabla \lambda \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'}; (p, s, s') \in \mathcal{A}, w_s \in L^2(\mathbb{R}^2), \lambda \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Son orthogonal $\mathcal{D}_A^\perp$ est l'ensemble des familles $(\phi_{p,s,s'})_{(p,s,s') \in \mathcal{A}}$ de fonctions dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ telles que, pour tout $\psi_{p,s,s'} \in \mathcal{D}_A$, $\sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \langle \psi_{p,s,s'}, \phi_{p,s,s'} \rangle = 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne

le crochet de dualité. On remarque que pour tout $\phi \in \mathcal{D}_A^\perp$, on a

$$\sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\nabla \phi_{p,s,s'} \cdot \mathbf{p}) \tau_{p,s,s'} = 0, \quad (4.44)$$

et pour tout $(w_s) \in (L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2))^K$,

$$\sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} ((w_{s'} - w_s) \cdot \tau_{p,s,s'}) \phi_{p,s,s'} = 0. \quad (4.45)$$

On étend ϕ en posant $\phi_{p,s,s'} = 0$ lorsque $(p,s,s') \notin \mathcal{A}$. On peut donc réécrire la dernière équation sous la forme

$$\sum_{(p,s,s')} (\tau_{p,s,s'} \phi_{p,s,s'} - \tau_{p,s',s} \phi_{p,s',s}) = 0. \quad (4.46)$$

D'une part, on a

$$\int_{\Omega} \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \omega_{p,s,s'}(x) \phi_{p,s,s'}(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'})$$

D'autre part, en utilisant des fonctions $\phi_{p,s,s'}$ vérifiant (4.44) et (4.46), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}) \\ &= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

En utilisant (4.45), le premier terme dans (4.47) donne :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} v_{I,s'}^\varepsilon \cdot (\varepsilon^{-1} (\phi_{p,s,s'}(y_{I-p}^\varepsilon) - \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon)) \tau_{p,s,s'}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} v_{I,s'}^\varepsilon \cdot ((-\nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p}) \tau_{p,s,s'} + O(\varepsilon)) \\ &= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left\langle v_{s'}(x), ((-\nabla \phi_{p,s,s'}(x) \cdot \mathbf{p}) \tau_{p,s,s'}) \right\rangle \\ &= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left\langle \nabla v_{s'}(x) \cdot \mathbf{p}, (\phi_{p,s,s'}(x) \tau_{p,s,s'}) \right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant (4.44), le deuxième terme dans (4.47) donne :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} m_I^\varepsilon \cdot \left[(\phi_{p,s,s'}(y_{I-p}^\varepsilon) - \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon)) \tau_{p,s,s'} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} m_I^\varepsilon \cdot \left[\left(-\varepsilon^{-1} \nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \tau_{p,s,s'} \right] + O(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} m_I^\varepsilon \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \tau_{p,s,s'} \right] + O(\varepsilon) \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left\langle u(x), \left(\frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_{p,s,s'}(x) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \tau_{p,s,s'} \right\rangle \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left\langle \frac{1}{2} \nabla \nabla u(x) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, (\phi_{p,s,s'}(x) \tau_{p,s,s'}) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Les résultats précédents montrent que

$$\left\langle \omega_{p,s,s'} - (\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}), \phi_{p,s,s'} \right\rangle = 0,$$

pour tout $\phi_{p,s,s'} \in \mathcal{D}_A^\perp$ à support compact dans Ω . Autrement dit, la distribution

$$\omega_{p,s,s'} - \left(\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'}$$

est orthogonale à toutes les fonctions dans $\mathcal{D}_A^\perp$ à support compact dans Ω . Ces fonctions étant denses dans $\mathcal{D}_A^\perp$, il existe des champs w_s et λ dans $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tels que, pour tout $(p,s,s') \in \mathcal{A}$, on a

$$\omega_{p,s,s'} - \left(\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'} = (w_{s'} - w_s + \nabla \lambda \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'}$$

ou encore

$$\omega_{p,s,s'} = \left(w_{s'} - w_s + \nabla(v_{s'} + \lambda) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'}. \quad \square$$

4.1.5. Preuve du résultat d'homogénéisation

- (i) **(Inégalité de la Γ -limite inférieure)** : Soit $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une suite telle que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ et $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta$. Si $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$. D'après le lemme 4.6, on sait que les contraintes $\int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0$ et $\int_\Omega u(x) \, dx = 0$ sont satisfaites. D'après le même lemme, on sait que $v_s^\varepsilon \rightharpoonup v_s$ et $\chi_p^\varepsilon \rightharpoonup \eta_u$. Puisque l'énergie $E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ est bornée, $\varepsilon^2 E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. D'après la remarque 3.4, on a

$$0 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 E_\varepsilon(U^\varepsilon)) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \bar{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon)) \geq \bar{E}(v, \eta_u),$$

ce qui donne la contrainte $\bar{E}(v, \eta_u) = 0$. On réécrit l'énergie $E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ sous la forme

$$E_\varepsilon(U^\varepsilon) = \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2.$$

L'énergie élastique totale s'écrit donc

$$\begin{aligned} \bar{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon) + \bar{F}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon, \theta^\varepsilon) &= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left[(\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2 + \frac{\beta^2}{3} \left(3(\theta_{I+p,s'}^\varepsilon + \theta_{I,s}^\varepsilon \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{\ell_{p,s,s'}} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\perp)^2 + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - \theta_{I,s}^\varepsilon)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

En utilisant (4.41), (4.42), (4.43) et les remarques 3.3 et 3.4, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\bar{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon) + \bar{F}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon, \theta^\varepsilon)) &\geq \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left[\frac{a_{p,s,s'}}{2} (\omega_{p,s,s'}(x))^2 + \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta_u, \theta)(x) \right] dx \\ &\geq \inf_{w, v, \theta} \left\{ \bar{E}(w, \xi_{u,v+\lambda}) + \bar{F}(v, \eta_u, \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

On obtient l'inégalité de la Γ -limite inférieure en remarquant que

$$\bar{F}(v - \lambda, \eta_u, \theta) = \bar{F}(v, \eta_u, \theta) \quad \text{et} \quad \bar{E}(v + \lambda, \eta_u) = \bar{E}(v, \eta_u) = 0.$$

- (ii) **(Inégalité de la Γ -limite supérieure)** : On considère une fonction u dans $L^2(\Omega)$ telle que $\mathcal{E}(u) < +\infty$. Par un argument de densité, on peut supposer que u appartient à $C^\infty(\Omega)$. Puisque les fonctionnelles $\bar{E}$ et $\bar{F}$ sont coercives et semi-continues inférieurement, on peut introduire les champs v , w , θ appartenant à $C^\infty(\Omega)$ tels que $\mathcal{E}(u) = \bar{E}(w, \xi_{u,v}) + \bar{F}(v, \eta_u, \theta)$, $\bar{E}(v, \eta_u) = 0$, $\int_\Omega u(x) dx = 0$ et $\int_\Omega \theta_1(x) dx = 0$. On a déjà remarqué (voir remarque 4.3) que la contrainte $\bar{E}(v, \eta_u) = 0$ est équivalente à l'équation

$$(v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0, \quad \forall (p,s,s') \in \mathcal{A}. \quad (4.50)$$

On en déduit que

$$(\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} - \nabla v_s \cdot \mathbf{p} + \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0. \quad (4.51)$$

Comme les fonctions u , v_1 , w_1 , θ_1 appartiennent à $C^\infty(\Omega)$ et vérifient $\int_\Omega u(x) dx = 0$ et $\int_\Omega \theta_1(x) dx = 0$, alors on a

$$M^\varepsilon := \sum_I (u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon v_1(y_I^\varepsilon) + \varepsilon^2 w_1(y_I^\varepsilon)) = O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad t^\varepsilon := \sum_I \theta_1(y_I^\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

On définit U^ε et θ^ε en posant

$$U_{I,s}^\varepsilon := u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon v_s(y_I^\varepsilon) + \varepsilon^2 w_s(y_I^\varepsilon) - M^\varepsilon \quad \text{et} \quad \theta_{I,s}^\varepsilon := \theta_s(y_I^\varepsilon) - t^\varepsilon. \quad (4.52)$$

Il est clair que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ et $\theta_s^\varepsilon \rightharpoonup \theta_s$. De plus, les vecteurs M^ε et t^ε sont définis de telle sorte que $\sum_I U_{I,1}^\varepsilon = \sum_I \theta_{I,1}^\varepsilon = 0$. On a

$$U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon = u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon (v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) + \varepsilon^2 (w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon))$$

et

$$\begin{aligned}\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon &= \varepsilon^{-2} \tau_{p,s,s'} \cdot (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \\ &= \tau_{p,s,s'} \cdot \left[\varepsilon^{-2} (u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon)) + w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{-1} (v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_{I+p}^\varepsilon)) + \varepsilon^{-1} (v_s(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) \right].\end{aligned}$$

En utilisant (4.50) et (4.51), on obtient

$$\begin{aligned}\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon &= \tau_{p,s,s'} \cdot \left[\varepsilon^{-1} \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^{-1} \nabla u(y_{I+p}^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \nabla v_s(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \right] + O(\varepsilon) \\ &= \tau_{p,s,s'} \cdot \left(-\frac{1}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \nabla v_s(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) \right) + O(\varepsilon) \\ &= \tau_{p,s,s'} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \nabla v_{s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) \right) + O(\varepsilon) \\ &= \tau_{p,s,s'} \cdot (w_{s'}(y_I^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) + (\xi_{u,v})_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon)) + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(U^\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2 \\ &= \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left((w_{s'}(x) - w_s(x) + (\xi_{u,v})_{p,s,s'}(x)) \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2 dx \\ &= \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_{p,s,s'}(w, \xi_{u,v}) dx = \bar{E}(w, \xi_{u,v}).\end{aligned}\tag{4.53}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} \tau_{p,s,s'}^\perp \cdot (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) &= \tau_{p,s,s'}^\perp \cdot \left(\varepsilon^{-1} (u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon)) + v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) \right) + O(\varepsilon) \\ &= \tau_{p,s,s'}^\perp \cdot \left(\nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + v_{s'}(y_I^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) \right) + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta_u, \theta)(x) dx = \bar{F}(v, \eta_u, \theta).\tag{4.54}$$

D'après les résultats (4.53) et (4.54), on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = \bar{E}(w, \xi_{u,v}) + \bar{F}(v, \eta_u, \theta)$$

sous la contrainte que $\bar{E}(v, \eta_u) = 0$. Cela montre que la suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ définie par (4.52) est une suite approximante pour u , i.e., $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = \mathcal{E}(u)$. $\square$

4.2. Réseaux tridimensionnels

L'objectif de cette section est d'étendre les résultats de la section 4.1 en dimension 3. Les réseaux tridimensionnels peuvent être utilisés pour simuler des matériaux tridimensionnels. L'homogénéisation de ces réseaux tridimensionnels suit les mêmes étapes que celle des réseaux bidimensionnels. La seule différence est qu'en dimension 3, on doit prendre en compte la torsion des barres.

4.2.1. Géométrie et interactions mécaniques

Dans le parallélépipède $\Omega := \{x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 : (x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3\}$ où t_1, t_2, t_3 sont trois vecteurs linéairement indépendants dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, nous considérons un réseau périodique tridimensionnel de nœuds formé par les points

$$y_{I,s}^\varepsilon := \varepsilon(y_s + i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3) \text{ avec } I := (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{Z}^3, \quad (4.55)$$

où l'on a supposé que ε^{-1} est un entier naturel. Nous utilisons $y_I^\varepsilon := \varepsilon(i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3)$ comme nœud de référence de la cellule I . L'ensemble des indices des cellules du réseau est défini par

$$\mathcal{I}^\varepsilon := \{(i_1, i_2, i_3) \in (0, \varepsilon^{-1})^3\}.$$

A toutes fonctions à valeurs vectorielles U et θ définies sur $\mathcal{I}^\varepsilon \times \{1, \dots, K\}$, nous associons les énergies obtenues à la sous-section 3.3.2, c'est-à-dire :

$$E^\varepsilon(U) := \varepsilon^{-2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left(\frac{U_{I+p,s'} - U_{I,s}}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'} \right)^2, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(U, \theta) := & \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left[(\theta_{I,s} - (\alpha U)_{I,p,s,s'}) \cdot B_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I,s} - (\alpha U)_{I,p,s,s'}) \right. \\ & + (\theta_{I,s} - (\alpha U)_{I,p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'} - (\alpha U)_{I,p,s,s'}) \\ & \left. + (\theta_{I+p,s'} - (\alpha U)_{I,p,s,s'}) \cdot D_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'} - (\alpha U)_{I,p,s,s'}) \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

L'énergie élastique totale des réseaux tridimensionnels est donc

$$\mathcal{E}^\varepsilon(U, \theta) := E^\varepsilon(U) + F^\varepsilon(U, \theta). \quad (4.58)$$

4.2.2. Résultat d'homogénéisation

Dans cette section, nous déterminons la Γ -limite $\mathcal{E}$ des fonctionnelles $\mathcal{E}^\varepsilon$ définies par (4.58).

A toute suite U^ε , nous associons la famille de vecteurs $m_I^\varepsilon, v_{I,s}^\varepsilon$ et $\chi_{I,p}^\varepsilon$ définies par (4.6), (4.7) et la famille de réels $\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ définie par (4.8). En utilisant ces définitions, nous pouvons réécrire les énergies $E^\varepsilon(U^\varepsilon)$ et $F^\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ sous les formes suivantes :

$$\tilde{E}^\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon) := \varepsilon^{-2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'})^2, \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon, \theta^\varepsilon) := & \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left[(\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'}) \cdot \frac{B_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'}) \right. \\ & + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'}) \\ & \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'}) \cdot \frac{D_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'}) \right], \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec $(\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{p,s,s'} := \frac{\tau_{p,s,s'}}{\ell_{p,s,s'}} \wedge (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon)$.

Introduisons maintenant les analogues continus de $\bar{E}_\varepsilon$ et $\bar{F}_\varepsilon$. Pour toutes fonctions à valeurs vectorielles (v, θ) définies sur $\Omega \times \{1, \dots, K\}$ et η définie sur $\Omega \times \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}$, de carré intégrable par rapport à leurs premières variables, nous posons

$$\tilde{E}(v, \eta) := \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_{p,s,s'}(v, \eta)(x) \, dx, \quad (4.61)$$

avec

$$\mathcal{E}_{p,s,s'}(v, \eta) := \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{s'} - v_s + \eta_{p,s'}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2, \quad (4.62)$$

et

$$\tilde{F}(v, \eta, \theta) := \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta, \theta)(x) \, dx, \quad (4.63)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta, \theta) := & (\theta_s - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \cdot \frac{B_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_s - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \\ & + (\theta_s - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{s'} - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \\ & + (\theta_{s'} - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \cdot \frac{D_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{s'} - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \end{aligned} \quad (4.64)$$

et $(\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'} := \frac{\tau_{p,s,s'}}{\ell_{p,s,s'}} \wedge (v_{s'} - v_s + \eta_{p,s'})$.

Nous étendons les définitions de $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ aux distributions en posant $\tilde{E} = +\infty$ et $\tilde{F} = +\infty$ lorsque les intégrandes ne sont pas de carré intégrable. Pour toutes fonctions u et v respectivement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, \dots, K\})$, nous posons au sens des distributions, pour tout $(p, s) \in \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}$,

$$(\eta_u)_{p,s} := \nabla u \cdot \mathbf{p}, \quad (4.65)$$

$$(\xi_{u,v})_{p,s} := \nabla v_s \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}. \quad (4.66)$$

Nous avons le théorème d'homogénéisation suivant.

Théorème 4.7. *La suite d'énergies $\mathcal{E}^\varepsilon$ définie par (4.58) Γ -converge vers la fonctionnelle définie par*

$$\mathcal{E}(u) := \inf_{w,v,\theta} \left\{ \tilde{E}(w, \xi_{u,v}) + \tilde{F}(v, \eta_u, \theta); \tilde{E}(v, \eta_u) = 0, \int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0 \right\} \quad (4.67)$$

si $\int_\Omega u(x) \, dx = 0$ et $\mathcal{E}(u) := +\infty$ sinon. Ici, l'infimum est pris sur toutes les distributions (v, w, θ) , $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ sont les fonctionnelles définies dans (4.61) et (4.63) et η_u , $\xi_{u,v}$ sont les quantités définies par (4.65) et (4.66).

Nous ne donnons pas la démonstration du théorème 4.7, car c'est la même que celle du théorème 4.2 à quelques modifications près : dans la procédure d'homogénéisation, il faut remplacer $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$ et $\tau_{p,s,s'}^\perp \cdot (*)$ par $\tau_{p,s,s'} \wedge (*)$, où $(*)$ désigne n'importe quelle expression. De plus, les énoncés des résultats de compacité, de convergence à deux échelles et les démonstrations de la Γ -limite inférieure et de la Γ -limite supérieure restent inchangées. La seule chose qui change, c'est la démonstration de la version discrète 3D de l'inégalité de Korn. Nous la donnons pour le bien du lecteur.

Lemme 4.8 (Version discrète 3D de l'inégalité de Korn). *Il existe une constante positive C dépendant seulement de Ω telle que, pour toutes suites de familles $(U_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$, $(\theta_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$ satisfaisant, pour tout $p \in \mathcal{P}$,*

$$\sum_I U_I^\varepsilon = 0, \quad \sum_I \theta_I^\varepsilon = 0, \quad \sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} - \theta_I^\varepsilon \wedge p \right\|^2 < 1, \quad (4.68)$$

on a

$$\sum_I \|\theta_I^\varepsilon\|^2 < C, \quad \sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|^2 < C \quad \text{et} \quad \sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2 < C. \quad (4.69)$$

Démonstration. Ici, C est une constante dépendant seulement de Ω , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre.

On divise d'abord Ω en ε^{-3} parallélépipèdes $\Omega_I^\varepsilon := y_I^\varepsilon + \varepsilon\Omega$. On divise ensuite chaque parallélépipède Ω_I^ε en six tétraèdres en considérant les six différents couples (p_i, p_j, p_k) de directions distinctes dans $\{t_1, t_2, t_3\}$ et les tétraèdres associés de sommets $(y_I^\varepsilon, y_{I+p_i}^\varepsilon, y_{I+p_i+p_j}^\varepsilon, y_{I+p_i+p_j+p_k}^\varepsilon)$. Sur chaque tétraèdre, on définit l'interpolation affine $\mathcal{U}^\varepsilon$ de U^ε en posant pour tout $0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$,

$$\mathcal{U}^\varepsilon(y_I^\varepsilon + \varepsilon(xp_i + yp_j + zp_k)) := (1-x)U_I^\varepsilon + (x-y)U_{I+p_i}^\varepsilon + (y-z)U_{I+p_i+p_j}^\varepsilon + zU_{I+p_i+p_j+p_k}^\varepsilon.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{U}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$. Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \varepsilon^3 |\det(t_1, t_2, t_3)| \sum_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |\mathcal{U}^\varepsilon(y_I^\varepsilon + \varepsilon(xp_i + yp_j + zp_k))|^2 dx dy dz \\ &\geq C \sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Sur le tétraèdre $(y_I^\varepsilon, y_{I+p_i}^\varepsilon, y_{I+p_i+p_j}^\varepsilon)$, on a

$$\varepsilon \nabla \mathcal{U}^\varepsilon = (U_{I+p_i}^\varepsilon - U_I^\varepsilon) \otimes p_i^* + (U_{I+p_i+p_j}^\varepsilon - U_{I+p_i}^\varepsilon) \otimes p_j^* + (U_{I+p_i+p_j+p_k}^\varepsilon - U_{I+p_i+p_j}^\varepsilon) \otimes p_k^*, \quad (4.71)$$

où (p_i^*, p_j^*, p_k^*) est la base duale de (p_i, p_j, p_k) . Donc,

$$\begin{aligned}
\epsilon e(\mathcal{U}^\epsilon)(p_i \otimes p_i) &= (U_{I+p_i}^\epsilon - U_I^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_i) \cdot p_i, \\
\epsilon e(\mathcal{U}^\epsilon)(p_j \otimes p_j) &= (U_{I+p_i+p_j}^\epsilon - U_I^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_j) \cdot p_j, \\
\epsilon e(\mathcal{U}^\epsilon)(p_k \otimes p_k) &= (U_{I+p_i+p_j+p_k}^\epsilon - U_{I+p_i+p_j}^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_k) \cdot p_k, \\
\epsilon e(\mathcal{U}^\epsilon)(p_i \otimes p_j + p_j \otimes p_i) &= (U_{I+p_i}^\epsilon - U_I^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_i) \cdot p_j + (U_{I+p_i+p_j}^\epsilon - U_I^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_j) \cdot p_i, \\
\epsilon e(\mathcal{U}^\epsilon)(p_i \otimes p_k + p_k \otimes p_i) &= (U_{I+p_i}^\epsilon - U_I^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_i) \cdot p_k \\
&\quad + (U_{I+p_i+p_j+p_k}^\epsilon - U_{I+p_i+p_j}^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_k) \cdot p_i, \\
\epsilon e(\mathcal{U}^\epsilon)(p_j \otimes p_k + p_k \otimes p_j) &= (U_{I+p_i+p_j}^\epsilon - U_{I+p_i}^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_j) \cdot p_k \\
&\quad + (U_{I+p_i+p_j+p_k}^\epsilon - U_{I+p_i+p_j}^\epsilon - \epsilon \theta_I^\epsilon \wedge p_k) \cdot p_j,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité $(\theta_I^\epsilon \wedge p) \cdot p + (\theta_I^\epsilon \wedge q) \cdot p = 0$ avec $p, q \in \{p_i, p_j, p_k\}$. Il est clair que $p_i \otimes p_i, p_j \otimes p_j, p_k \otimes p_k, (p_i \otimes p_j + p_j \otimes p_i), (p_i \otimes p_k + p_k \otimes p_i), (p_j \otimes p_k + p_k \otimes p_j)$ forment une base de l'espace des matrices symétriques d'ordre 3. En utilisant (4.68) et en sommant sur tous les parallélépipèdes, on obtient que $\|e(\mathcal{U}^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$. On peut alors utiliser l'inégalité de Korn (B.6) sur Ω : il existe une constante C dépendant seulement de Ω et un mouvement rigide global $R^\epsilon(y) := a^\epsilon + B^\epsilon \cdot y$ (où a^ϵ est un vecteur constant et B^ϵ une matrice antisymétrique) tels que $\|\mathcal{U}^\epsilon - R^\epsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C$. En particulier,

$$\|\nabla \mathcal{U}^\epsilon - B^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (4.72)$$

D'après (4.71) et (4.72), on obtient pour toute direction p_i , l'inégalité

$$\sum_I \left\| \frac{U_{I+p,1}^\epsilon - U_{I,1}^\epsilon}{\epsilon} - B^\epsilon \cdot p_i \right\|^2 \leq C. \quad (4.73)$$

D'après (4.68) et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\sum_I \|B^\epsilon \cdot p_i - \theta_I^\epsilon \wedge p_i\|^2 \leq C. \quad (4.74)$$

En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto \|x\|^2$, on obtient

$$\left\| B^\epsilon \cdot p_i - \sum_I \theta_I^\epsilon \wedge p_i \right\|^2 \leq \sum_I \|B^\epsilon \cdot p_i - \theta_I^\epsilon \wedge p_i\|^2 \leq C.$$

Puisque $\sum_I \theta_I^\epsilon = 0$, on a $\|B^\epsilon \cdot p_i\|^2 \leq C$. En revenant à (4.74), on obtient

$$\sum_I \|\theta_I^\epsilon \wedge p_i\|^2 \leq C.$$

Ces inégalités étant vraies pour toute direction p_i , on déduit que

$$\sum_I \|\theta_I^\epsilon\|^2 \leq C \quad \text{et} \quad \|B^\epsilon\|^2 \leq C. \quad (4.75)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et (4.73), on obtient

$$\sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|^2 \leq C. \quad (4.76)$$

D'autre part, il est clair que $U^\varepsilon - R^\varepsilon$ est l'interpolation affine de $U_I^\varepsilon - R^\varepsilon \cdot y_I^\varepsilon$ et on peut appliquer l'inégalité (4.70) à ces fonctions. Cette inégalité donne $C \sum_I \|U_I^\varepsilon - R^\varepsilon \cdot y_I^\varepsilon\|^2 \leq \|U^\varepsilon - R^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$, et par conséquent, $\sum_I \|U_I^\varepsilon - R^\varepsilon \cdot y_I^\varepsilon\|^2 \leq C$. En utilisant de nouveau la convexité de la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ et l'hypothèse $\sum_I U_I^\varepsilon = 0$, on obtient $\left\| R^\varepsilon \cdot \left(\sum_I y_I^\varepsilon \right) \right\|^2 \leq C$ et donc $\|R^\varepsilon\|^2 \leq C$. D'où,

$$\sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2 \leq C. \quad (4.77)$$

On conclut la preuve du lemme en rassemblant (4.75), (4.76) et (4.77). $\square$

4.3. Calcul explicite de l'énergie homogénéisée

Dans l'énergie limite que nous avons obtenue, c'est-à-dire,

$$\mathcal{E}(u) := \inf_{w,v,\theta} \left\{ \bar{E}(w, \xi_{u,v}) + \bar{F}(v, \eta_u, \theta); \bar{E}(v, \eta_u) = 0, \int_{\Omega} \theta_1(x) \, dx = 0 \right\},$$

on doit calculer le minimum par rapport aux trois variables cinématiques v , w et θ . Les minima par rapport à w et θ peuvent être calculés localement via des « problèmes de cellule ». Les solutions respectives dépendent linéairement de $\xi_{u,v}$ et de (v, η_u) . La contrainte $\bar{E}(v, \eta_u) = 0$ se calcule aisément et donne v sous la forme

$$v = L \cdot \eta_u + \tilde{v}, \quad (4.78)$$

où L est un opérateur linéaire et $\tilde{v}$ est un champ dans $L^2(\Omega)$ à valeurs dans le noyau de l'énergie $\bar{E}$. A travers la définition (4.15) de η_u et la définition (4.16) de $\xi_{u,v}$, on voit directement que $\bar{F}(v, \eta_u, \theta)$ et $\bar{E}(w, \xi_{u,v})$ dépendent respectivement de ∇u et de $\nabla \nabla u$. On peut donc écrire

$$\boxed{\mathcal{E}(u) = \inf_{\tilde{v} \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} Q(\nabla u, \nabla \nabla u, \tilde{v}, \nabla \tilde{v}),} \quad (4.79)$$

où Q est une forme quadratique positive.

A priori, cet infimum par rapport à $\tilde{v}$ ne peut pas être calculé localement à cause de la présence de $\nabla \tilde{v}$ dans l'intégrande. Ainsi, le modèle homogénéisé que l'on obtient est à la fois un modèle de milieu continu généralisé et un modèle de second gradient [48, 40]. Nous interprétons la variable cinématique $\tilde{v}$ comme un *micro-ajustement*. Dans certains cas que nous verrons au chapitre suivant, on peut calculer localement l'infimum par rapport à ce micro-ajustement. Dans ces cas, l'énergie homogénéisée $\mathcal{E}(u)$ devient une fonction quadratique de ∇u et $\nabla \nabla u$ seulement.

4.4. Conclusion

Nous avons établi une formule d'homogénéisation qui permet de caractériser le comportement homogénéisé des réseaux périodiques avec interactions élastiques. Nos résultats montrent que l'homogénéisation de ces réseaux peut conduire à des modèles de second gradient avec éventuellement une variable de micro-ajustement. Ils diffèrent des résultats obtenus en supposant d'abord que les champs discrets définis sur les réseaux sont les traces des champs macroscopiques puis en les substituant par un développement de Taylor dans l'énergie (voir par exemple l'équation (4.46) dans [78]). Ce type d'approximation peut conduire dans certains cas à une surestimation de l'énergie.

Nos résultats montrent aussi que les termes de second gradient ne viennent pas de l'énergie de flexion, mais seulement de l'énergie d'extension. On peut facilement s'en convaincre en prenant $\beta = 0$, c'est-à-dire en négligeant la rigidité en flexion. Nous signalons que dans ce cas, la compacité des suites d'énergie bornée n'est pas assurée. Donc, pour pouvoir appliquer notre résultat d'homogénéisation dans cette situation, il faut ajouter un *potentiel de confinement*, c'est-à-dire une énergie supplémentaire due à un système de forces extérieures qui permet d'assurer la compacité. Par exemple, l'énergie due à un système de ressort de rap-

pel $\frac{k}{2} \sum_{i=1}^n (u_i^\varepsilon)^2$ est un potentiel de confinement pour notre résultat d'homogénéisation, mais ce n'est pas une perturbation continue pour le résultat de Γ -convergence (par rapport à la convergence considérée). Néanmoins, notre résultat d'homogénéisation continuera à marcher, moyennant une modification mineure de la démonstration.

Il faut noter que la formule d'homogénéisation obtenue dans ce chapitre n'est pas assez explicite pour être appliquée directement à tout type de réseau périodique. Nous donnerons dans le chapitre suivant l'algorithme détaillé qui rend explicite l'énergie homogénéisée obtenue dans ce chapitre.

5. Milieux continus généralisés et de second gradient obtenus par homogénéisation de réseaux périodiques

Sommaire

5.1. Algorithme pour le calcul explicite de l'énergie homogénéisée	97
5.1.1. Description de l'algorithme	97
5.1.2. Mise en œuvre de l'algorithme	102
5.2. Exemples de milieux effectifs	102
5.2.1. Poutres	103
5.2.2. Membranes	106
5.2.3. Plaques	113
5.2.4. Matériaux	116
5.3. Conclusion	118

Nous avons montré au chapitre 4 que l'homogénéisation de réseaux périodiques avec interactions élastiques peut conduire à des milieux de second gradient. Nous rappelons l'énergie homogénéisée obtenue :

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{w,v,\theta} \{ \tilde{E}(w, \xi_{u,v}) + \tilde{F}(v, \eta_u, \theta); \tilde{E}(v, \eta_u) = 0 \}$$

où

$$\eta_u := \nabla u \cdot \mathbf{p} \quad \text{et} \quad \xi_{u,v} := \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \nabla v \cdot \mathbf{p},$$

$$\tilde{E}(v, \eta) := \int_{\Omega} \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_{p,s,s'}(v, \eta)(x) \, dx,$$

avec

$$\mathcal{E}_{p,s,s'}(v, \eta) := \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{s'} - v_s + \eta_{p,s'}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2,$$

$$\tilde{F}(v, \eta, \theta) := \int_{\Omega} \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta, \theta)(x) \, dx,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta, \theta) &:= (\theta_s - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \cdot \frac{B_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_s - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \\ &\quad + (\theta_s - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{s'} - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \\ &\quad + (\theta_{s'} - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}) \cdot \frac{D_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{s'} - (\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'}), \end{aligned}$$

où $(\alpha_{v,\eta})_{p,s,s'} := \frac{\tau_{p,s,s'}}{\ell_{p,s,s'}} \wedge (v_{s'} - v_s + \eta_{p,s'})$ et les matrices $B_{p,s,s'}$, $C_{p,s,s'}$ et $D_{p,s,s'}$ sont définies par (3.26)-(3.27).

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord de façon détaillée l'algorithme qui permet de calculer explicitement cette énergie homogénéisée. Nous explorons ensuite de nombreux exemples de modèles effectifs pouvant être obtenus. Nous décrivons des exemples de réseaux périodiques dont l'homogénéisation conduit à des modèles effectifs de poutres, membranes, plaques, mais aussi à des matériaux 3D. Nous retrouvons la plupart des modèles classiques largement utilisés en mécanique comme les poutres d'Euler ou de Timoshenko, les modèles de Cosserat ou micromorphes, les plaques de Kirchhoff-Love ou de Mindlin-Reissner. Nous obtenons également des modèles combinant les effets de second gradient et ceux de Cosserat.

5.1. Algorithme pour le calcul explicite de l'énergie homogénéisée

Nous rappelons que dans les calculs qui ont mené à notre résultat d'homogénéisation (Théorème 4.2 ou Théorème 4.7), nous avons supposé que la cellule de référence Y était de taille 1. Pour décrire une structure périodique avec une cellule de référence qui n'est pas de taille 1, il faut diviser toutes les quantités géométriques par $|Y|^{1/m}$ (m étant le nombre de vecteurs de périodicité) avant d'utiliser l'algorithme que nous allons décrire.

Nous rappelons aussi que les énergies $\tilde{E}(v,\eta)$ et $\tilde{F}(v,\eta,\theta)$ sont des formes quadratiques positives de leurs variables respectives. Dans ces formes quadratiques, les variables v et θ sont *a priori* des matrices $v_{s,i}$ et $\theta_{s,i}$ de dimension $K \times 3$, avec $s \in \{1, \dots, K\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, tandis que la variable η est un tenseur $\eta_{p,s,i}$ de dimension $n \times K \times 3$, avec $p \in \mathcal{P}$. Sans changer la notation, nous identifions respectivement les variables v , θ et η avec des vecteurs $v_{(s,i)}$, $\theta_{(s,i)}$ de taille $3K$ et $\eta_{(p,s,i)}$ de taille $3nK$. De même, nous identifions les quantités $(\nabla u)_{i,\gamma}$ et $(\nabla \nabla u)_{i,\gamma,\gamma'}$ avec des vecteurs $(\nabla u)_{(i,\gamma)}$ de taille $3m$ et $(\nabla \nabla u)_{(i,\gamma,\gamma')}$ de taille $3m^2$.

5.1.1. Description de l'algorithme

Étape 1 : Réécriture des énergies d'extension et de flexion sous forme canonique.

Cette première étape est un simple processus d'assemblage. En développant les formes quadratiques $\tilde{E}(v,\eta)$ et $\tilde{F}(v,\eta,\theta)$, on peut les réécrire sous la forme canonique (ou tensorielle) :

$$\begin{aligned}\tilde{E}(v,\eta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^t \cdot \mathbf{A} \cdot v + \eta^t \cdot \mathbf{B} \cdot \eta + 2v^t \cdot \mathbf{C} \cdot \eta, \\ \tilde{F}(v,\eta,\theta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^t \cdot \mathbf{D} \cdot v + \eta^t \cdot \mathbf{E} \cdot \eta + \theta^t \cdot \mathbf{F} \cdot \theta + 2v^t \cdot \mathbf{G} \cdot \eta + 2\theta^t \cdot \mathbf{H} \cdot v + 2\theta^t \cdot \mathbf{J} \cdot \eta,\end{aligned}$$

où les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{J}$ sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{(s,i),(r,j)} := - \sum_{p \in \mathcal{P}} (\tilde{a}_{p,s,r,i,j} + \tilde{a}_{p,r,s,i,j}) \text{ si } r \neq s, \\ \mathbf{A}_{(s,i),(s,j)} := - \sum_{r \neq s} \mathbf{A}_{(s,i),(r,j)}, \\ \mathbf{B}_{(p,s,i),(q,r,j)} := 0 \text{ si } (q,r) \neq (p,s), \\ \mathbf{B}_{(p,s,i),(p,s,j)} := \sum_r \tilde{a}_{p,r,s,i,j}, \\ \mathbf{C}_{(s,i),(p,r,j)} := -\tilde{a}_{p,s,r,i,j} \text{ si } r \neq s, \\ \mathbf{C}_{(s,i),(p,s,j)} := - \sum_{r \neq s} \mathbf{C}_{(s,i),(p,r,j)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{(s,i),(r,j)} := - \sum_{p \in \mathcal{P}} (\tilde{b}_{p,s,r,i,j} + \tilde{b}_{p,r,s,i,j}) \text{ si } r \neq s, \\ \mathbf{D}_{(s,i),(s,j)} := - \sum_{r \neq s} \mathbf{D}_{(s,i),(r,j)}, \\ \mathbf{E}_{(p,s,i),(q,r,j)} := 0 \text{ si } (q,r) \neq (p,s), \\ \mathbf{E}_{(p,s,i),(p,s,j)} := \sum_r \tilde{b}_{p,r,s,i,j}, \\ \mathbf{G}_{(s,i),(p,r,j)} := -\tilde{b}_{p,s,r,i,j} \text{ si } r \neq s, \\ \mathbf{G}_{(s,i),(p,s,j)} := - \sum_{r \neq s} \mathbf{G}_{(s,i),(p,r,j)}, \\ \mathbf{F}_{(s,i),(r,j)} := 2 \sum_{p \in \mathcal{P}} c_{p,s,r,i,j} \text{ si } r \neq s, \\ \mathbf{F}_{(s,i),(s,j)} := \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(2c_{p,s,s,i,j} + \sum_r (b_{p,s,r,i,j} + d_{p,r,s,i,j}) \right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{(s,i),(r,j)} := - \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k,l} \frac{1}{\ell_{p,s,r}} \epsilon_{jlk} \left((b+c)_{p,s,r,l,i} + (d+c)_{p,r,s,l,i} \right) \tau_{p,s,r,k} \text{ si } (q,r) \neq (p,s), \\ \mathbf{H}_{(s,i),(s,j)} := - \sum_{r \neq s} \mathbf{H}_{(s,i),(r,j)}, \\ \mathbf{J}_{(s,i),(p,r,j)} := \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k,l} \frac{1}{\ell_{p,s,r}} \epsilon_{jlk} (b+c)_{p,s,r,l,i} \tau_{p,s,r,k} \text{ si } r \neq s, \\ \mathbf{J}_{(s,i),(p,s,j)} := \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k,l} \frac{1}{\ell_{p,s,s}} \epsilon_{jlk} \left((b+c)_{p,s,s,l,i} + \sum_{r \neq s} (d+c)_{p,r,s,l,i} \right) \tau_{p,s,r,k}, \end{cases}$$

avec

$$\tilde{a}_{p,s,r,i,j} := a_{p,s,r} \tau_{p,s,r,i} \tau_{p,s,r,j},$$

et

$$\tilde{b}_{p,s,r,i,j} := \sum_{k,k',l,l'} \frac{1}{\ell_{p,s,r}^2} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jk'l'} (b+2c+d)_{p,s,r,k,k'} \tau_{p,s,r,l} \tau_{p,s,r,l'},$$

où ϵ est le symbole de Lévi-Civita défini par

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) = (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étape 2 : Calcul de la contrainte.

En utilisant les formes canoniques ci-dessus, il est facile de calculer le minimum de $\tilde{E}(v, \eta_u)$ par rapport à la variable v . Lorsque ce minimum est atteint, le vecteur v satisfait les équations d'Euler-Lagrange :

$$\mathbf{A} \cdot v + \mathbf{C} \cdot \eta_u = 0.$$

Une solution possible¹ est donnée par le vecteur $\bar{v} := -\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{C} \cdot \eta_u$, où $\mathbf{A}^+$ désigne la matrice pseudo-inverse de $\mathbf{A}$. Donc, la valeur minimale de l'énergie $\tilde{E}(v, \eta_u)$ est $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \eta_u^t \cdot \mathbf{X} \cdot \eta_u$, où

$$\mathbf{X} := \mathbf{B} - \mathbf{C}^t \cdot \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{C}. \quad (5.1)$$

Le minimum de $\tilde{E}(w, \xi_{u,v})$ par rapport à w se calcule de la même manière. La valeur minimale de l'énergie est $\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\xi_{u,v})^t \cdot \mathbf{X} \cdot \xi_{u,v}$.

Nous introduisons l'opérateur linéaire $\mathbf{L}$ en posant, pour tous $p \in \mathcal{P}$, $s \in \{1, \dots, K\}$, $1 \leq i, j \leq 3$ et $1 \leq \gamma \leq n$,

$$\mathbf{L}_{(p,s,i),(j,\gamma)} := \delta_{ij}(\mathbf{p} \cdot t_{\gamma}), \quad (5.2)$$

où δ est le symbole de Kronecker (i.e., $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon). Cet opérateur nous permet d'écrire η_u en fonction de ∇u :

$$\eta_u = \mathbf{L} \cdot \nabla u. \quad (5.3)$$

Posons $\mathbf{Q} := \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}$ et $\mathbf{K} := -\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}$. Alors, la contrainte $\tilde{E}(v, \eta_u) = 0$ donne :

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla u = 0, \quad (5.4)$$

$$v = \mathbf{K} \cdot \nabla u + \tilde{v}, \text{ avec } \tilde{v} \in \text{Ker}(\mathbf{A}). \quad (5.5)$$

Remarque 5.1. Nous remarquons que cette matrice $\mathbf{Q}$ aurait été la matrice de rigidité homogénéisée des structures étudiées au chapitre 4 si nous avions supposé des interactions moins rigides. Les structures homogénéisées seraient donc des milieux de premier gradient. Autrement dit, $\mathbf{Q}$ est la matrice de rigidité de premier gradient ou de premier ordre. Nous retrouvons des résultats obtenus récemment par Martinsson et Babuška [68].

Puisque nous nous sommes intéressés à des structures constituées d'un matériau très rigide, nous devons nous focaliser uniquement sur le noyau de l'opérateur $\mathbf{Q}$. En fait, le noyau de $\mathbf{Q}$ est l'espace des déplacements possibles avec une énergie nulle. Notons que le fait que les interactions mécaniques doivent être objectives implique que $\text{Ker}(\mathbf{Q})$ contient au moins des matrices antisymétriques². Mais, dans certains cas, $\text{Ker}(\mathbf{Q})$ peut contenir d'autres éléments autres que des matrices antisymétriques.

1. Les propriétés du pseudo-inverse de Moore-Penrose impliquent que ce vecteur $\bar{v}$ appartient à l'orthogonal de $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et satisfait donc $\sum_k v_k = 0$.

2. En disant qu'une matrice M de dimension $3 \times m$ est antisymétrique, nous voulons dire que pour tous $1 \leq \gamma, \gamma' \leq m$, $M_{\gamma, \gamma'} + M_{\gamma', \gamma} = 0$.

Nous introduisons maintenant une base orthonormale $(W^\xi)_{\xi=1}^d$ de $\text{Ker}(\mathbf{Q})$ avec $m(5-m)/2 \leq d \leq 3m$. La matrice $\mathbf{P}_{(i,\gamma),(j,\gamma')} := \sum_{\xi} W_{(i,\gamma)}^\xi W_{(j,\gamma')}^\xi$ représente alors la projection orthogonale sur $\text{Ker}(\mathbf{Q})$. Par conséquent, la contrainte (5.4) devient

$$\nabla u = \mathbf{P} \cdot \nabla u. \quad (5.6)$$

Par ailleurs, pour représenter le vecteur $\tilde{v}$, nous introduisons une base $(V^\xi)_{\xi=1}^{\tilde{d}}$ de $\text{Ker}(\mathbf{A})$, avec $3 \leq \tilde{d} \leq 3K$. Nous posons $\tilde{v} = \sum_{\xi=1}^{\tilde{d}} b_\xi(x) V^\xi$, c'est-à-dire, $\tilde{v} = \mathbf{V} \cdot b$ avec

$$\mathbf{V}_{(s,i),\xi} := \mathbf{V}_{(s,i)}^\xi.$$

Remarque 5.2. La variable cinématique b introduite à cette étape représente le degré de liberté interne $\tilde{v}$. Cette variable pourra jouer un rôle important dans la suite. En effet, à cause du fort contraste et pour les géométries particulières que nous avons considérées, l'ensemble sur lequel est défini $\tilde{v}$ peut être enrichi et la valeur de $\tilde{v}$ (donc de b) pourra avoir une influence importante sur l'énergie homogénéisée, comme nous le verrons à la section 5.2.

Étape 3 : Calcul de la partie extensionnelle de l'énergie.

D'après la contrainte (5.4), nous avons $(\nabla v)_{s,i,\gamma} = \sum_{j,\gamma'} (\mathbf{K}_{(s,i),(j,\gamma')} (\nabla \nabla u)_{j,\gamma',\gamma}) + (\nabla \tilde{v})_{s,i,\gamma}$.

En utilisant (5.6) et en exprimant $\tilde{v}$ dans la base (V^ξ) , nous pouvons réécrire $\xi_{u,v}$ sous la forme :

$$\xi_{u,v} = \mathbf{M} \cdot \nabla \nabla u + \mathbf{N} \cdot \nabla b,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{(p,s,i),(j,\gamma,\gamma')} &= \sum_{\zeta} \sum_k (\mathbf{K}_{(s,i),(k,\zeta)} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_\zeta \delta_{i,k}) \mathbf{P}_{(k,\zeta),(j,\gamma)} \mathbf{P}_{\gamma'}, \\ \mathbf{N}_{(p,s,i),(\xi,\gamma)} &= V_{(s,i)}^\xi \mathbf{P}_{\gamma}. \end{aligned}$$

Alors, l'énergie d'extension $\inf_w \tilde{E}(w, \xi_{u,v}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\xi_{u,v})^t \cdot \mathbf{X} \cdot \xi_{u,v}$ devient

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \nabla u)^t \cdot \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla \nabla u + (\nabla b)^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \cdot \nabla b + 2(\nabla \nabla u)^t \cdot \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \cdot \nabla b.$$

Nous préférons réécrire cette énergie comme la somme de deux termes positifs :

$$\inf_w \tilde{E}(w, \xi_{u,v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \nabla u)^t \cdot \mathcal{R} \cdot \nabla \nabla u + (\nabla b + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u)^t \cdot \mathcal{S} \cdot (\nabla b + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u), \quad (5.7)$$

où

$$\mathcal{S} := \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{N}, \quad \mathcal{T} := \mathbf{S}^+ \cdot \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} := \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathcal{T}.$$

Étape 4 : Calcul de la partie flexionnelle de l'énergie.

Nous pouvons aisément calculer le minimum de $\tilde{F}(v, \eta_u, \theta)$ par rapport à θ . Lorsque ce minimum est atteint, le vecteur θ satisfait le système d'équations algébriques suivant

$$\mathbf{F} \cdot \theta + \mathbf{H} \cdot v + \mathbf{J} \cdot \eta_u = 0,$$

dont une solution est donnée par $\bar{\theta} := -\mathbf{F}^+ \cdot (\mathbf{H} \cdot v + \mathbf{J} \cdot \eta_u)$. La valeur minimale est donc

$$\begin{aligned} \inf_{\theta} \tilde{F}(v, \eta_u, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[v^t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{H}) \cdot v + \eta_u^t \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{J}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{J}) \cdot \eta_u \right. \\ \left. + 2v^t \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{J}) \cdot \eta_u \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (5.6), nous remplaçons η_u par $\mathbf{L} \cdot \nabla u = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \nabla u$ et v par $\mathbf{K} \cdot \mathbf{P} \cdot \nabla u + \mathbf{V} \cdot b$, ce qui nous donne :

$$\inf_{\theta} \tilde{F}(v, \eta_u, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^t \cdot \mathbf{S} \cdot b + (\nabla u)^t \cdot \mathbf{Z} \cdot \nabla u + 2b^t \cdot \mathbf{Y} \cdot \nabla u,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &:= \mathbf{V}^t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{V}, \\ \mathbf{Z} &:= \mathbf{P}^t \cdot (\mathbf{K}^t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K} + \mathbf{L}^t \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{J}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{J}) \cdot \mathbf{L} \\ &\quad + \mathbf{K}^t \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{J}) \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^t \cdot (\mathbf{G}^t - \mathbf{J}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{P}, \\ \mathbf{Y} &:= \mathbf{V}^t \cdot ((\mathbf{D} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{K} + (\mathbf{G} - \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{J}) \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Nous réécrivons l'énergie ci-dessus comme la somme de deux termes positifs :

$$\inf_{\theta} \tilde{F}(v, \eta_u, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^t \cdot \mathbf{R} \cdot \nabla u + (b + \mathbf{T} \cdot \nabla u)^t \cdot \mathbf{S} \cdot (b + \mathbf{T} \cdot \nabla u), \quad (5.8)$$

avec

$$\mathbf{T} := \mathbf{S}^+ \cdot \mathbf{Y} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} := \mathbf{Z} - \mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{T}.$$

En collectant les résultats (5.7) et (5.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) = \inf_b \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(\nabla \nabla u)^t \cdot \mathcal{R} \cdot \nabla \nabla u + (\nabla b + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u)^t \cdot \mathcal{S} \cdot (\nabla b + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u) \right. \\ \left. + (\nabla u)^t \cdot \mathbf{R} \cdot \nabla u + (b + \mathbf{T} \cdot \nabla u)^t \cdot \mathbf{S} \cdot (b + \mathbf{T} \cdot \nabla u) \right]. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Dans cette expression, l'intégrande apparaît comme une forme quadratique dépendant du premier et du second gradient du déplacement macroscopique u , de la variable cinématique supplémentaire b que nous appelons *micro-ajustement* et de son gradient ∇b . *A priori*, l'infimum par rapport à la variable b dans l'expression de $\mathcal{E}(u)$ ne peut pas être calculé localement. Les équations d'équilibre sont un système linéaire d'équations différentielles partielles couplant u et b . Ce système sera complètement déterminé lorsque l'on fixe les matrices $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$: les équations d'équilibre correspondant respectivement à la minimisation de $\mathcal{E}$ par rapport à u et b sont

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\mathcal{R} \cdot \nabla \nabla u + \mathcal{S} \cdot (\nabla b + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u))) - \operatorname{div}(\mathbf{R} \cdot \nabla u + \mathbf{S} \cdot (b + \mathbf{T} \cdot \nabla u)) = 0, \\ - \operatorname{div}(\mathcal{S} \cdot (\nabla b + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u)) + \mathbf{S} \cdot (b + \mathbf{T} \cdot \nabla u) = 0 \end{aligned}$$

avec les conditions au bord convenables.

Le modèle effectif obtenu est à la fois un modèle de second gradient et un milieu continu généralisé.

Étape 5 : Si possible, élimination de la variable supplémentaire.

Il est parfois possible d'éliminer la variable b dans (5.9), comme nous le verrons dans quelques exemples à la section 5.2. C'est le cas lorsque pour tout champ u , il existe un champ $\bar{b}$ tel que

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla \bar{b} + \mathcal{T} \cdot \nabla \nabla u) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S} \cdot (\bar{b} + \mathbf{T} \cdot \nabla u) = 0. \quad (5.10)$$

Cette opération serait difficile à effectuer si l'on n'avait pas considéré des conditions aux limites de bord libre. Il est clair que le champ $\bar{b}$ vérifiant (5.10) minimise l'énergie $\mathcal{E}(u)$. Si les équations (5.10) sont satisfaites, alors l'énergie homogénéisée se réduit à

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \nabla u)^t \cdot \mathcal{R} \cdot \nabla \nabla u + (\nabla u)^t \cdot \mathbf{R} \cdot \nabla u \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathbf{Q} \cdot \nabla u = 0. \quad (5.11)$$

Il ne faut pas croire que les cas où le micro-ajustement ne peut pas s'éliminer ne sont pas pertinents, bien au contraire. D'ailleurs, nous verrons dans les exemples donnés à la section 5.2 que nous retrouvons plusieurs modèles de milieux continus généralisés largement utilisés en mécanique.

5.1.2. Mise en œuvre de l'algorithme

La mise en œuvre de l'algorithme décrit ci-dessus est aisée, car les matrices qui entrent en jeu sont des matrices de petites dimensions. On peut utiliser des logiciels comme Octave ou MATLAB pour obtenir des résultats numériques ou comme Maxima pour obtenir des résultats analytiques. Avant d'utiliser l'algorithme ci-dessus, on doit vérifier la connectivité des structures et vérifier à la main l'existence ou la non-existence d'une solution pour les équations (5.10). Si les équations (5.10) admettent une solution, alors le modèle homogénéisé est un modèle de second gradient dont l'énergie est donnée par (5.11). Dans le cas contraire, le modèle homogénéisé est un modèle de milieu continu généralisé dont l'énergie est donnée par (5.9). Nous verrons ces différents cas dans les exemples qui viennent.

5.2. Exemples de milieux effectifs

Dans cette section, nous allons appliquer la procédure décrite à la section précédente à différents réseaux périodiques bi et tridimensionnels. Pour fixer les idées, nous choisissons toujours $a_{p,s,r} = 1$ lorsque deux nœuds sont reliés par une interaction (i.e. lorsque $a_{p,s,r} \neq 0$). Cette hypothèse signifie que les sections des barres sont différentes lorsque leurs longueurs le sont. Nous choisissons toujours aussi $f = 1$ (et dans le cas 3D, $t = \frac{1}{4}$). Nous classons les exemples que nous allons considérer en fonction de la dimension $m = 1, 2, 3$ de l'espace sur lequel sera définie l'énergie homogénéisée. Cela nous permettra d'obtenir des modèles effectifs de poutres, de membranes ou de plaques, ou des matériaux tridimensionnels. Dans le cas $m = 1$ ou 2, nous considérons successivement des réseaux périodiques bi et tridimensionnels. Nous écrivons l'énergie homogénéisée en fonction des composantes $e_{ij}(u)$ du tenseur des

déformations $e(u)$ et des composantes $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$ du second gradient du déplacement $\nabla \nabla u$. Il est possible de réécrire les résultats en fonction du gradient de la déformation $\nabla(e(u))$.

5.2.1. Poutres

Pour des raisons de simplicité, nous commençons par considérer des structures dans $\mathbb{R}^2$ avec un seul vecteur de périodicité ($m = 1$).

5.2.1.1. Poutre Warren 2D

Nous considérons la géométrie (voir figure 5.1) : $\Omega = (0,1)$, $K = 2$, $y_1 = (0,0)$, $y_2 = (0,1)$, $t_1 = (1,0)$, $a_{1,1,2} = a_{2,1,1} = a_{2,2,2} = a_{2,1,2} = 1$; toutes les autres composantes $a_{p,s,s'}$ sont nulles. Pour cette structure, la contrainte (5.6) donne $e_{11}(u) = 0$: la poutre est inextensible. Une solution possible pour les équations (5.10) est $b = 0$. On obtient l'énergie homogénéisée donnée par

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \lambda \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1,$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Cette énergie correspond à un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli inextensible.

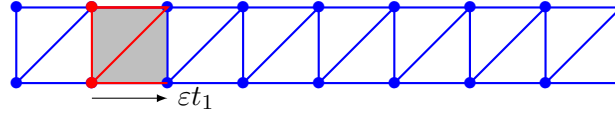


FIGURE 5.1. – Poutre Warren 2D

5.2.1.2. Poutre périodique carrée

La géométrie est similaire à celle de l'exemple précédent (voir figure 5.2), mais nous supprimons les barres diagonales en posant $a_{2,1,2} = 0$.

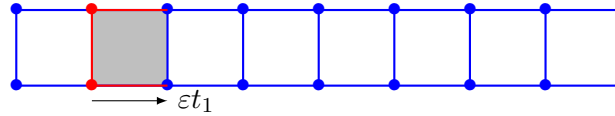


FIGURE 5.2. – Poutre périodique carrée

La contrainte (5.6) donne encore $e_{11}(u) = 0$. En revanche, l'énergie homogénéisée obtenue ici est différente de celle obtenue précédemment. Elle est donnée par :

$$\mathcal{E}(u) = \inf_b \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left(-b_1 + b_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx_1.$$

En posant $\varphi := b_1 - b_2$ et $\psi := b_1 + b_2$, on obtient

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{(\varphi, \psi)} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \varphi \right)^2 \right] dx_1.$$

L'infimum par rapport à ψ peut se calculer localement : la solution est $\psi = 0$. Par contre, l'infimum par rapport à φ ne peut pas se calculer localement. L'énergie homogénéisée devient donc

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\varphi} \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \xi \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \varphi \right)^2 \right) dx_1,$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\xi = 2$.

Cette énergie correspond à un modèle de poutre de Timoshenko inextensible. Il est connu que ce modèle est non local (en u seulement). La partie qui reste du micro-ajustement coïncide avec la variable de Timoshenko qui s'interprète généralement comme la « rotation » de la section de la poutre.

5.2.1.3. Poutre pantographique

Les structures basées sur un pantographe ont été les premières structures utilisées pour donner une interprétation microscopique d'un phénomène spécifique aux modèles de second gradient complet, appelé *propagation de dilatation*. Ces structures sont étudiées dans la littérature en utilisant des techniques heuristiques d'homogénéisation [91, 85, 65], des outils de la Γ -convergence [7, 6], des simulations numériques [54, 98] et des essais mécaniques [43, 99].

Nous considérons une poutre 2D avec une cellule constituée de six nœuds : $y_1 = \frac{1}{6}e_2$, $y_2 = -\frac{1}{6}e_2$, $y_3 = \frac{1}{6}e_1$, $y_4 = \frac{1}{6}(3e_1 + 2e_2)$, $y_5 = \frac{1}{6}(3e_1 - 2e_2)$ et $y_6 = \frac{5}{6}e_1$. Un vecteur de périodicité est $t_1 = e_1$. Les seules composantes non nulles des matrices A^1 et A^2 sont :

$$\begin{aligned} a_{1,1,3} = a_{1,1,4} = a_{1,2,3} = a_{1,2,5} = a_{1,3,4} = a_{1,3,5} = a_{1,4,6} = a_{1,5,6} &= 1, \\ a_{2,4,1} = a_{2,5,2} = a_{2,6,1} = a_{2,6,2} &= 1. \end{aligned}$$

Nous notons P_{e_1, e_2} cette poutre (figure 5.3) qui se situe le long de la ligne (O, e_1) et qui appartient au plan (e_1, e_2) .

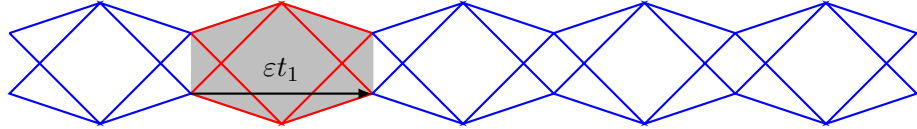


FIGURE 5.3. – Poutre pantographique P_{e_1, e_2}

La condition (5.6) ne donne ici aucune contrainte. Une solution possible pour la condition (5.10) est $b = (1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \wedge (\frac{\partial u_3}{\partial x_1})$. L'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\lambda \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + \zeta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx_1, \quad (5.12)$$

avec $\lambda = \frac{1}{23}$, $\mu = \frac{2}{63}$ et $\zeta = 324$. Nous retrouvons les résultats obtenus par Seppecher, Alibert et dell'Isola [91], Alibert et Della Corte [6]. Les propriétés intéressantes de cette structure pantographique sont étudiées dans [91]. Sa particularité repose sur le fait qu'une dilatation imposée sur une partie de la poutre aura tendance à se propager sur toute la poutre. Ce phénomène de propagation est dû au terme $\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2$, mais il est amorti par

le terme $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2$. Cette compétition confère au modèle une longueur intrinsèque qui vaut $\sqrt{\lambda/\zeta}$.

Expliquons ce phénomène d'amortissement. Supposons que $u_1 = u_1(x_1)$, $u_2 = u_3 = 0$ et fixons les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0) = 1, \text{ libre en } x_1 = 1.$$

Dans ce cas, l'énergie homogénéisée devient

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\lambda(u_1''(x))^2 + \zeta(u_1'(x))^2] dx_1.$$

L'équation d'équilibre est déterminée par $\delta\mathcal{E}(u) = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 (\lambda u_1'' \delta u_1'' + \zeta u_1' \delta u_1') = 0$$

ou encore

$$\int_0^1 (-\lambda u_1''' + \zeta u_1') \delta u_1' = 0.$$

Cela implique que

$$u_1'''(x_1) = \frac{\zeta}{\lambda} u_1'(x_1) \iff v''(x_1) = \frac{\zeta}{\lambda} v(x_1), \text{ avec } v := u_1'.$$

On en déduit que $v(x_1) = \exp(-\sqrt{\zeta/\lambda} x_1)$. On a un taux d'amortissement qui vaut $\sqrt{\zeta/\lambda}$.

5.2.1.4. Poutre Warren 3D

Dans les exemples précédents, nous n'avons traité que des poutres 2D. Nous donnons ici un exemple d'une poutre 3D de type Warren qui conduira (par homogénéisation) à une poutre d'Euler-Bernoulli. La géométrie (voir figure 5.4) est : $\Omega = (0,1)$, $K = 3$, $y_1 = (0,0, -\frac{1}{2})$, $y_2 = (0,0,\frac{1}{2})$, $y_3 = (\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$, $t_1 = (1,0)$, $a_{1,1,2} = a_{1,1,3} = a_{1,2,3} = a_{2,1,1} = a_{2,2,2} = a_{2,3,3} = a_{2,3,1} = a_{2,3,2} = 1$; toutes les autres composantes des matrices A^1 et A^2 sont nulles.

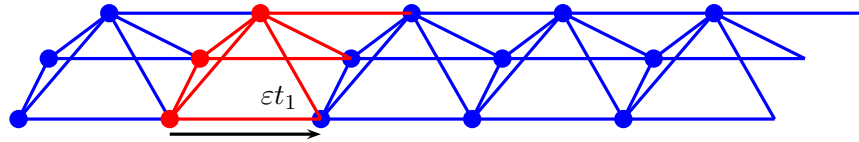


FIGURE 5.4. – Poutre Warren 3D

La condition (5.6) donne $e_{11}(u) = 0$: la poutre est inextensible. Une solution possible pour le micro-ajustement est $b = 0$. L'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\lambda \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + \zeta \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right)^2 \right) dx_1,$$

avec $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\zeta = \frac{1}{2}$. Elle correspond à une poutre d'Euler-Bernoulli non dégénérée. Le fait que les raideurs en flexion dans les deux directions transverses e_2 et e_3 sont découplées est dû à la symétrie de la structure.

5.2.2. Membranes

5.2.2.1. Réseau triangulaire régulier

Le réseau triangulaire régulier (figure 5.5) est déterminé par une cellule Y constituée d'un seul nœud ($K = 1$), deux vecteurs $t_1 = (1,0)$ et $t_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ pour traduire la cellule, cinq matrices A^p de taille 1×1 définissant les interactions entre le nœud de la cellule Y_I et celui des cellules voisines Y_{I+p} . Ces matrices sont données par $A^1 = [0]$, $A^2 = [1]$, $A^3 = [1]$, $A^4 = [1]$ et $A^5 = [0]$.

La contrainte $\mathbf{Q} \cdot \nabla u = 0$ porte uniquement sur $e(u)$ et elle donne :

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11}(u) \\ e_{22}(u) \\ e_{12}(u) \end{pmatrix} = 0.$$

Remarque 5.3. On aurait pu trouver facilement la contrainte ci-dessus en remarquant que s'il n'y a qu'un nœud par cellule, la contrainte $(v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0$ donne directement $(\nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0$. Cette dernière équation donne une contrainte qui porte uniquement sur $e(u)$. On retrouvera cette situation dans le cas de la grille carrée (voir paragraphe 5.2.2.2) et du réseau cubique (voir paragraphe 5.2.4.1).

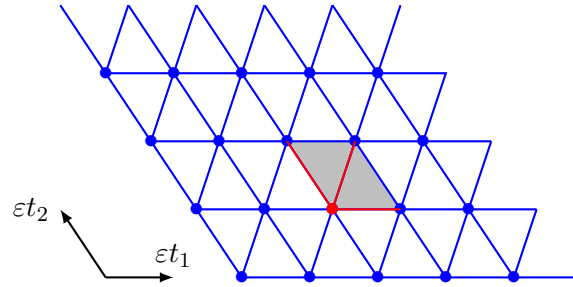


FIGURE 5.5. – Le réseau triangulaire régulier

Le modèle homogénéisé obtenu correspond à matériau 2D isotrope dont les coefficients de Lamé sont $\mu = \lambda = \frac{\sqrt{3}}{4}$ et le coefficient de Poisson est $\nu = \frac{1}{3}$. Notre résultat concorde avec le résultat obtenu récemment par Martinsson et Babuška [68].

Nous avons déjà remarqué le fait que la matrice $\mathbf{Q}$ correspond à la matrice homogénéisée qui aurait été obtenue si l'on avait supposé un ordre de grandeur plus faible pour les interactions mécaniques. Puisque la matrice ci-dessus est non dégénérée et que $\mathcal{E} = 0$ pour les mouvements rigides, on n'a donc pas besoin de calculs supplémentaires pour l'énergie. On obtient le même résultat pour de nombreuses structures, comme par exemple, le réseau kagomé (ou trihexagonal) étudié par Leung et Guest dans [64] (figure 5.6).

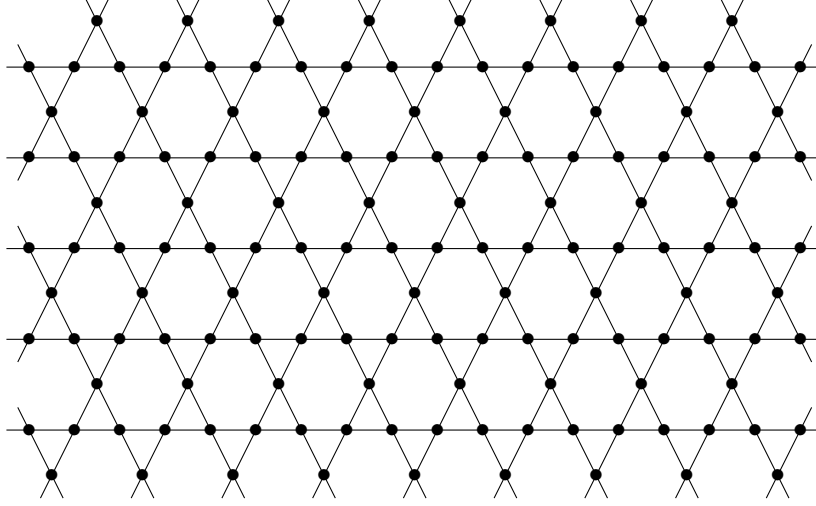


FIGURE 5.6. – Réseau kagomé étudié par Leung et Guest

A partir de maintenant, nous nous focaliserons sur des structures possédant plus de degrés de mobilité.

5.2.2.2. Grille carrée

La géométrie du treillis carré régulier (figure 5.7) est déterminée par une cellule constituée d'un seul nœud ($K = 1$), deux vecteurs $t_1 = (1,0)$ et $t_2 = (0,1)$ pour translater la cellule, et cinq matrices A^p de taille 1×1 définissant les interactions entre le nœud $y_{I,1}^\varepsilon$ et ses voisins $y_{I+p,1}^\varepsilon$ données par $A^1 = [0]$, $A^2 = [1]$, $A^3 = [1]$, $A^4 = [0]$ et $A^5 = [0]$.

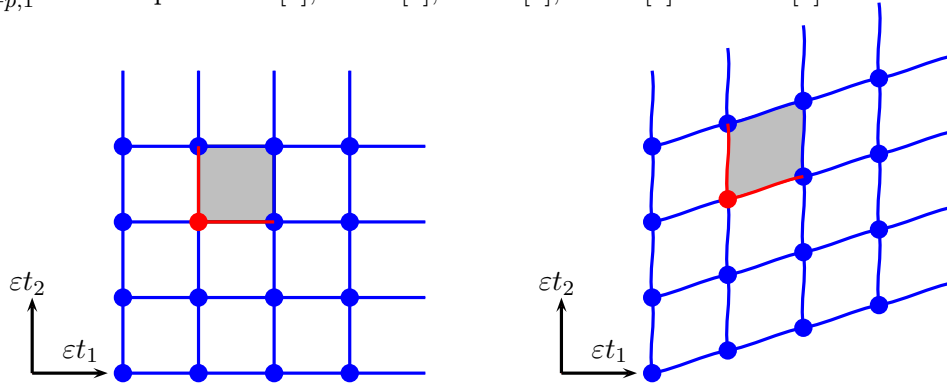


FIGURE 5.7. – Le réseau carré régulier et sa déformation admissible

La contrainte (5.6) donne $e_{11}(u) = e_{22}(u) = 0$: la structure est inextensible dans les directions e_1 et e_2 , et seulement le cisaillement est possible. Le micro-ajustement $b = 0$ est optimal. L'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda (e_{12}(u))^2 \, dx_1 \, dx_2,$$

avec $\lambda = 6$. Le modèle homogénéisé est un matériau élastique classique i.e. de premier gradient), contrairement à son analogue 1D, c'est-à-dire la poutre périodique carrée (voir sous-section 5.2.1).

5.2.2.3. Grille carrée sans contraintes

Presque tous les exemples précédents présentent un comportement homogénéisé avec certaines contraintes comme par exemple l'inextensibilité. Cet exemple vise à montrer qu'il est possible d'éviter ces contraintes. Dans l'exemple de la grille carrée, nous remplaçons les interactions directes par des zigzags (voir figure 5.8). Nous considérons une cellule constituée de trois nœuds $y_1 = (0,0)$, $y_2 = (0.5,0.3)$, $y_3 = (0.3,0.5)$. Toutes les composantes des cinq matrices d'interactions A^p de taille 3×3 sont nulles sauf $a_{1,1,2} = a_{1,1,3} = a_{2,2,1} = a_{3,3,1} = 1$.

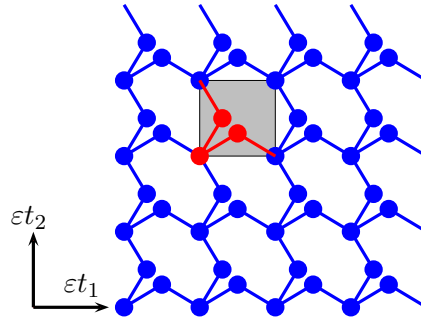


FIGURE 5.8. – Une structure carrée avec une énergie limite sans contrainte

La contrainte (5.6) disparaît et l'énergie homogénéisée s'écrit

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda(e_{11}(u))^2 + \lambda(e_{22}(u))^2 + \zeta(e_{12}(u))^2] \, dx_1 \, dx_2,$$

avec $\lambda = \frac{50}{3}$ et $\zeta = 3$.

Dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité, nous ne chercherons pas à éviter toutes les contraintes.

5.2.2.4. Structure en nid d'abeilles

La structure en nid d'abeilles (figure 5.9) est définie par une cellule Y constituée de deux nœuds ($K = 2$), deux vecteurs $t_1 = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $t_2 = (0, \sqrt{3})$ pour translater la cellule, cinq matrices A^p de taille 2×2 définissant les interactions entre les nœuds de la cellule Y_I et ceux des cellules voisines Y_{I+p} . Toutes les composantes des matrices A^p sont nulles, sauf $a_{1,1,2} = a_{2,1,2} = a_{3,2,1} = 1$.

La contrainte (5.6) donne $e_{11}(u) + e_{22}(u) = 0$: la structure est incompressible. Le micro-ajustement peut être calculé localement et l'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda \|e(u)\|^2 \, dx_1 \, dx_2,$$

avec $\lambda = 9$. Cette structure homogénéisée est un matériau bidimensionnel élastique classique.

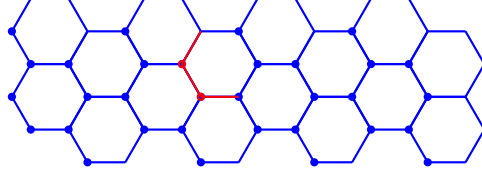


FIGURE 5.9. – La structure en nid d'abeilles

Plusieurs chercheurs [53, 46, 37, 36] ont étudié la structure en nids d'abeilles. Notre résultat est en accord avec ceux obtenus par ces auteurs, bien que les hypothèses soient différentes. En effet, dans les travaux cités, les raideurs en extension et en flexion étaient supposées de même ordre de grandeur. Par contre, notre résultat diffère des résultats obtenus par Raoult, Caillerie et Mourad [86], Le Dret et Raoult [61]. En effet, ces auteurs ont pris une raideur en extension de même ordre de grandeur que la nôtre et ont pris en compte la non-linéarité géométrique de la structure.

5.2.2.5. Membrane "couple-stress"

Nous ajoutons une barre diagonale dans une cellule carrée sur deux dans l'exemple 5.2.2.2 (voir figure 5.10). Le nouveau réseau est alors défini par une cellule Y constituée de deux nœuds ($K = 2$) : $y_1 = (0,0)$, $y_2 = (0,1)$, deux vecteurs de périodicité $t_1 = (1,0)$, $t_2 = (0,2)$ et cinq matrices A^p de dimension 2×2 . Les seules composantes non nulles de ces matrices sont $a_{1,1,2} = a_{2,1,1} = a_{2,2,2} = a_{2,1,2} = a_{3,2,1} = 1$.

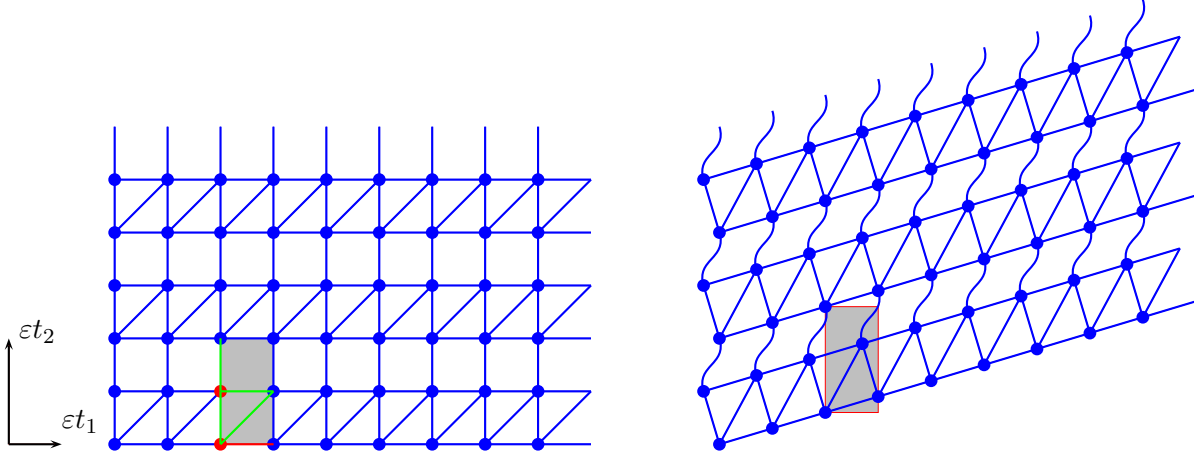


FIGURE 5.10. – Une structure en couches et sa déformation admissible

Cette structure lorsqu'elle est homogénéisée est soumise aux contraintes $e_{11}(u) = e_{22}(u) = 0$. Un micro-ajustement optimal peut être obtenu et l'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + \zeta (e_{12}(u))^2 \right) dx_1 dx_2,$$

avec $\lambda = \frac{1}{8}$ et $\zeta = \frac{192}{5}$. Du point de vue mécanique, les sous-structures horizontales se comportent comme des poutres en flexion et leur résistance à la flexion est responsable du

terme de second gradient dans l'énergie homogénéisée. Le modèle homogénéisé obtenu entre dans le cadre des modèles "couple-stress", c'est-à-dire que son énergie dépend du gradient de la partie antisymétrique de ∇u . En effet, en raison de la contrainte $e_{11}(u) = 0$, l'énergie homogénéisée peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right)^2 + \zeta (e_{12}(u))^2 \right) dx_1 dx_2.$$

Par ailleurs, on peut aussi la réécrire sous la forme

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(4\lambda \left(\frac{\partial e_{12}(u)}{\partial x_1} \right)^2 + \zeta (e_{12}(u))^2 \right) dx_1 dx_2.$$

Ainsi, le modèle homogénéisé est doté de la longueur interne $\sqrt{4\lambda/\zeta}$.

5.2.2.6. Membrane pantographique

Cette structure est constituée par un réseau connecté de structures pantographiques tout à fait similaires à celles étudiées au paragraphe 5.2.1.3. Elle est définie par une cellule Y constituée de six nœuds ($K = 6$) : $y_1 = (0,1)$, $y_2 = (0, -1)$, $y_3 = (1,0)$, $y_4 = (2,2)$, $y_5 = (2, -2)$, $y_6 = (3,0)$, deux vecteurs de périodicité $t_1 = (4,0)$, $t_2 = (-2,4)$ et cinq matrices A^p de dimension 6×6 définissant les interactions mécaniques. Les seules composantes non nulles de ces matrices sont

$$\begin{aligned} a_{1,1,3} = a_{1,1,4} = a_{1,2,3} = a_{1,2,5} = a_{1,3,4} = a_{1,3,5} = a_{1,4,6} = a_{1,5,6} &= 1, \\ a_{2,4,1} = a_{2,5,2} = a_{2,6,1} = a_{2,6,2} = a_{3,1,5} = a_{4,4,2} &= 1. \end{aligned}$$

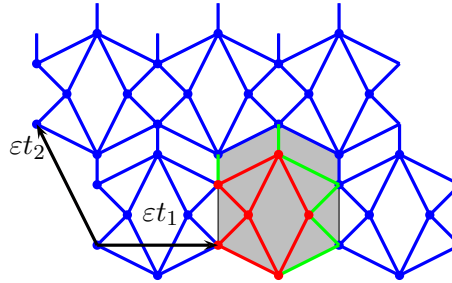


FIGURE 5.11. – La membrane pantographique

La contrainte (5.6) donne $e_{22}(u) = 0$. Les déformations admissibles sont le cisaillement et la dilatation horizontale. En effet, comme le montre la figure 5.12, ces déplacements macroscopiques peuvent être réalisés sans allonger aucune barre.

Un micro-ajustement satisfaisant (5.10) peut être obtenu et l'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\zeta (e_{11}(u))^2 + \sigma (e_{12}(u))^2 + \mu \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \kappa \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2, \quad (5.13)$$

avec $\lambda = \frac{484}{131}$, $\kappa = \frac{13}{44}$, $\mu = \frac{3}{44}$, $\sigma = 288$ et $\zeta = 144$.

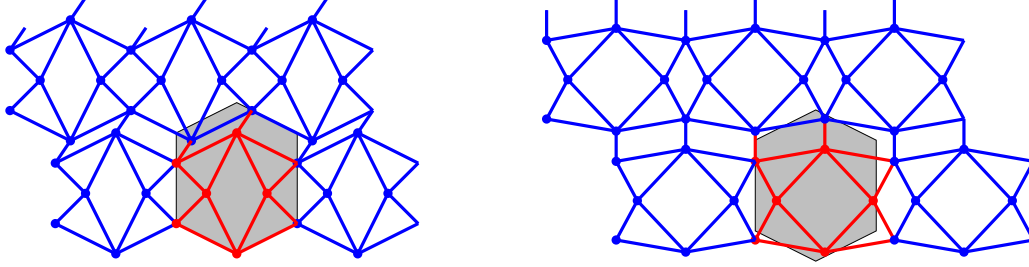


FIGURE 5.12. – Les deux déformations admissibles de la membrane pantographique (la flexion des barres n'est pas représentée ici) : à gauche le cisaillement, à droite la dilatation horizontale.

Cette structure a été étudiée dans [1, 2]. C'est le prototype des modèles de second gradient complets. En effet, elle ne rentre pas dans le cadre des modèles "couple-stress" à cause du terme $\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right)^2$ dans l'expression de l'énergie homogénéisée. Le comportement d'un modèle similaire a été décrit en détail dans [91]. En raison de la forte anisotropie de la structure, il est difficile de distinguer les différentes longueurs intrinsèques contenues dans le modèle.

Des structures basées sur des mécanismes pantographiques ont été largement étudiées théoriquement [82], mais aussi du point de vue numérique [100, 58] et expérimental [81].

On peut remarquer que dans l'énergie homogénéisée (5.13), les termes de premier et de second gradient sont découplés. Cela est en accord avec les résultats de Auffray, Bouchet et Bréchet [12], de Poncelet et al. [84]. En effet, ces chercheurs ont montré que certaines classes de symétrie de la microstructure induisent une absence de couplage entre les termes de premier et de second gradient. Ces classes de symétries sont détaillées dans le chapitre II-3 de la thèse de Auffray [11]. Parmi ces symétries, il y a la centrosymétrie et c'est cette symétrie qu'on observe dans la membrane pantographique.

5.2.2.7. Modèle de Cosserat

Nous considérons le réseau décrit dans la figure 5.13. C'est une structure plane dans laquelle nous avons autorisé des interactions croisées. Il faut noter que dans le cas des interactions croisées, le passage du continu vers le discret n'est pas conforme.

La cellule périodique du réseau est constituée de deux nœuds : $y_1 = (0,0)$ et $y_2 = (1/2, 1/2)$; les vecteurs de périodicité sont $t_1 = (1,0)$ et $t_2 = (0,1)$. Toutes les composantes des cinq matrices A^p de dimension 2×2 sont nulles, sauf $a_{1,1,2} = a_{2,1,1} = a_{2,2,2} = a_{3,1,1} = 1$.

La contrainte (5.6) donne encore $e_{11}(u) = e_{22}(u) = 0$: le cisaillement est une déformation admissible. L'énergie homogénéisée est de la forme

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\varphi} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\zeta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \left(\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right)^2 + \kappa (e_{12}(u))^2 \right] dx_1 dx_2$$

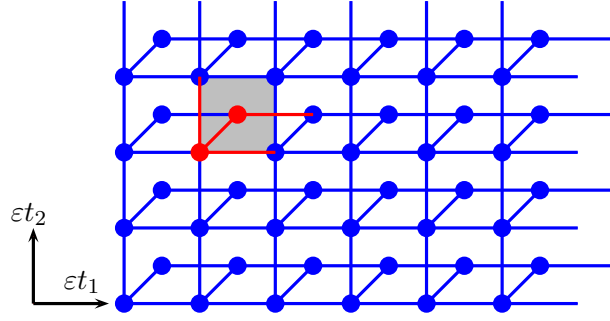


FIGURE 5.13. – Une structure plane conduisant à un modèle de Cosserat

avec $\zeta = \frac{800}{729}$, $\gamma = \frac{1600}{333}$ et $\kappa = \frac{56}{9}$. La variable supplémentaire φ joue le rôle d'une variable de Cosserat. En considérant la figure 5.13, on peut comprendre que la rotation des barres $[y_{I,1}^\varepsilon, y_{I,2}^\varepsilon]$ tend à être uniforme et qu'elle est couplée avec le déplacement global puisque les barres sont soudées à chaque nœud.

5.2.2.8. Modèle combinant des effets de second gradient et de Cosserat

Nous combinons ici les structures de la figure 5.10 et celles de la figure 5.13 (voir figure 5.14). La nouvelle cellule périodique est donc constituée de trois nœuds : $y_1 = (0,0)$, $y_2 = (0,1)$ et $y_3 = (1/2, 3/2)$. Les vecteurs de périodicité sont $t_1 = (1,0)$, $t_2 = (0,2)$. Les composantes non nulles des cinq matrices d'interaction A^p de dimension 3×3 sont :

$$a_{1,1,2} = a_{1,2,3} = a_{2,1,1} = a_{2,1,2} = a_{2,3,3} = a_{3,2,1} = 1.$$

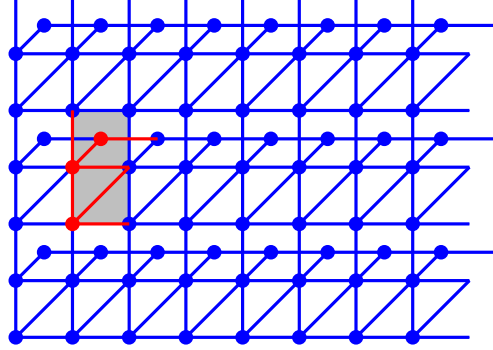


FIGURE 5.14. – Une structure plane conduisant à la fois à des effets de second gradient et de Cosserat

La contrainte (5.6) est toujours $e_{11}(u) = e_{22}(u) = 0$. Le cisaillement est une déformation admissible. L'énergie homogénéisée est de la forme

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\varphi} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + \zeta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \gamma \left(\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right)^2 + \kappa (e_{12}(u))^2 \right] dx_1 dx_2$$

avec $\lambda = \frac{1}{8}$, $\zeta = \frac{800}{729}$, $\gamma = \frac{1600}{333}$ et $\kappa = \frac{56}{9}$. Ce modèle combine les effets de second gradient et ceux de Cosserat.

5.2.3. Plaques

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des structures planes qui sont complètement dégénérées par rapport au déplacement transverse. Nous considérons maintenant des structures avec une épaisseur non nulle.

5.2.3.1. Plaque de Kirchhoff-Love

Le réseau considéré est constitué de deux réseaux triangulaires réguliers superposés (figure 5.15). Il est défini par une cellule Y constitué de deux nœuds ($K = 2$) : $y_1 = (0,0,0)$, $y_2 = (0,0,1)$; les vecteurs de périodicité $t_1 = (1,0,0)$, $t_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$; cinq matrices A^p 2×2 . Les seules composantes non nulles de ces matrices sont $a_{1,1,2} = a_{2,1,1} = a_{2,2,2} = a_{2,1,2} = a_{2,2,1} = a_{3,1,1} = a_{3,2,2} = a_{3,1,2} = a_{3,2,1} = a_{4,1,1} = a_{4,1,2} = a_{4,2,1} = a_{4,2,2} = 1$.

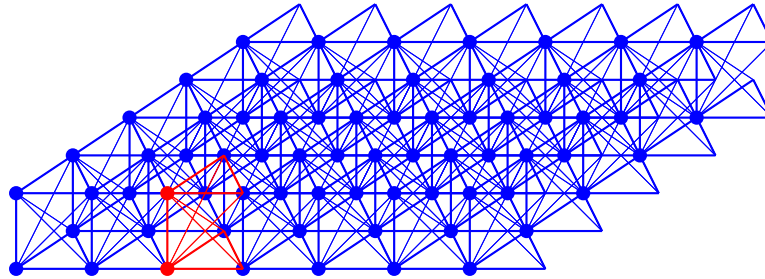


FIGURE 5.15. – Une plaque de Kirchhoff-Love

Le modèle homogénéisé est soumis aux contraintes $e_{11}(u) = e_{22}(u) = e_{12}(u) = 0$ (il est indéformable en tant que membrane). Le micro-ajustement $b = 0$ est optimal et l'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \|\nabla \nabla u_3\|^2 + \zeta (\Delta u_3)^2 \right) dx_1 dx_2$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\zeta = \frac{1}{4}$. Ce modèle correspond à une plaque de Kirchhoff-Love en flexion, isotrope et inextensible.

5.2.3.2. Plaque de Mindlin-Reissner

Nous considérons la même géométrie que dans l'exemple précédent, mais nous supprimons toutes les diagonales joignant les nœuds inférieurs aux nœuds supérieurs (voir figure 5.16). Pour cela, il suffit de poser $a_{2,1,2} = a_{2,2,1} = a_{3,1,2} = a_{3,2,1} = a_{4,1,2} = a_{4,2,1} = 1$.

La contrainte d'inextensibilité $e_{11}(u) = e_{22}(u) = e_{12}(u) = 0$ est encore obtenue, mais le micro-ajustement b ne peut pas être éliminé complètement. L'énergie homogénéisée contient deux variables cinématiques supplémentaires qu'on peut écrire $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Elle est donnée par

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\varphi} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \|\nabla u_3 - \varphi\|^2 + \zeta \|e(\varphi)\|^2 \right) dx_1 dx_2$$

avec $\lambda = \frac{9}{4}$ et $\zeta = \frac{1}{2}$. Ce modèle correspond à une plaque de Mindlin-Reissner isotrope [87, 88]. Dans la théorie de Mindlin-Reissner, la variable φ s'interprète généralement comme la rotation de la « fibre » qui est différente de la rotation de la « surface moyenne ».

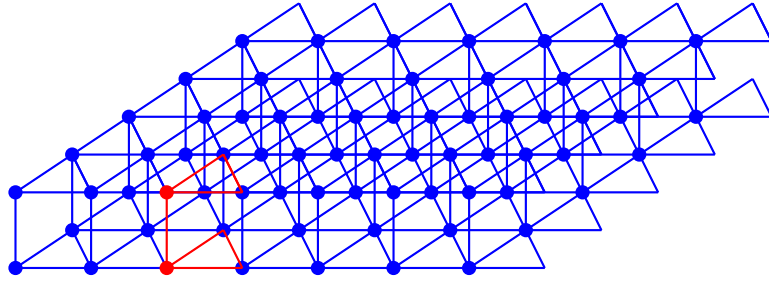


FIGURE 5.16. – Une plaque de Mindlin-Reissner

5.2.3.3. Plaque de Mindlin-Reissner généralisée

Nous ne sommes pas limités à la variable cinématique supplémentaire introduite dans l'exemple précédent : nous considérons trois réseaux triangulaires superposés au lieu de deux (voir figure 5.17). Le nouveau réseau est défini par une cellule Y constituée de trois nœuds : $y_1 = (0,0,0)$, $y_2 = (0,0,1)$, $y_3 = (0,0,-2)$. Les vecteurs de périodicité sont $t_1 = (1,0,0)$, $t_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$. Les seules composantes non nulles des matrices A^p sont $a_{1,1,2} = a_{1,1,3} = a_{2,1,1} = a_{2,2,2} = a_{2,3,3} = a_{3,1,1} = a_{3,2,2} = a_{3,3,3} = a_{4,1,1} = a_{4,2,2} = a_{4,3,3} = 1$.

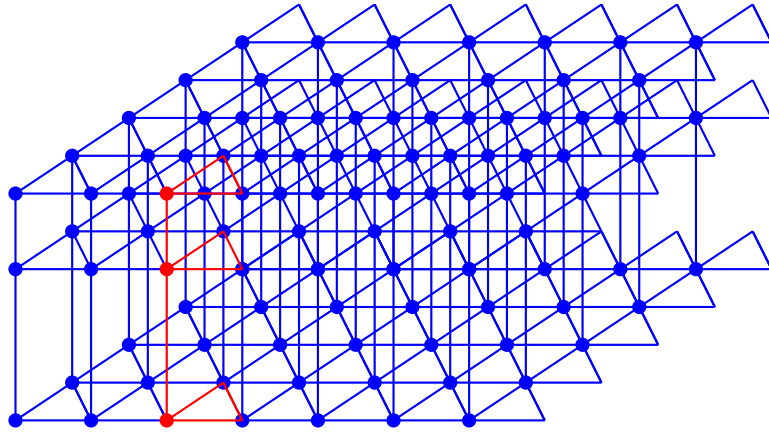


FIGURE 5.17. – Une plaque de Mindlin-Reissner généralisée

A la différence de la plaque de Mindlin-Reissner ci-dessus, nous obtenons ici un modèle avec deux vecteurs "rotations" φ et ψ . L'énergie homogénéisée est de la forme

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\varphi, \psi} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \|\nabla u_3 - \varphi\|^2 + \zeta \|\nabla u_3 - \psi\|^2 + Q(\varphi, \psi, \nabla \varphi, \nabla \psi) \right) dx_1 dx_2$$

où Q est une forme quadratique positive. Il ne nous paraît pas utile de donner les valeurs exactes de λ et ζ ainsi que l'expression de Q .

Si l'on avait considéré plusieurs couches, on obtiendrait des modèles avec plus de deux variables cinématiques supplémentaires qui correspondent à des plaques de Mindlin-Reissner généralisées, telles que décrites récemment par Lebée et Sab dans [63].

Une autre façon de généraliser les modèles de Reissner est de combiner les structures décrites sur les figures 5.17 et 5.13 afin de combiner l'effet de Cosserat dans le plan obtenu au paragraphe 5.2.2.7 et l'effet de Reissner. On aurait un modèle similaire à celui de Reissner, mais avec une variable φ qui serait à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, comme décrit par Altenbach et Eremeyev [10].

5.2.3.4. Plaque de type origami

Nous considérons un réseau constitué de quatre nœuds : $y_1 = (0,0,0)$, $y_2 = (1,0,1)$, $y_3 = (-1,1,0)$, $y_4 = (0,1,1)$, les vecteurs de périodicité sont $t_1 = (2,0,0)$ et $t_2 = (0,2,0)$; les coefficients non nuls des matrices d'interaction sont $a_{1,1,2} = a_{1,1,3} = a_{1,2,3} = a_{1,2,4} = a_{1,3,4} = a_{2,2,1} = a_{2,2,3} = a_{2,4,1} = a_{2,4,3} = a_{3,3,1} = a_{3,3,2} = a_{3,4,2} = a_{4,4,1} = a_{5,2,3} = 1$.

Ce réseau simule un pli de Miura qui s'avère avoir des propriétés mécaniques non conventionnelles [62] : les nœuds correspondent aux coins du pli, tandis que les interactions correspondent aux arêtes et aux diagonales des faces (voir figure 5.18).

La cinématique de ce type de plaque est similaire à celle des plaques articulées avec des barres rigides et avec des articulations rotules.

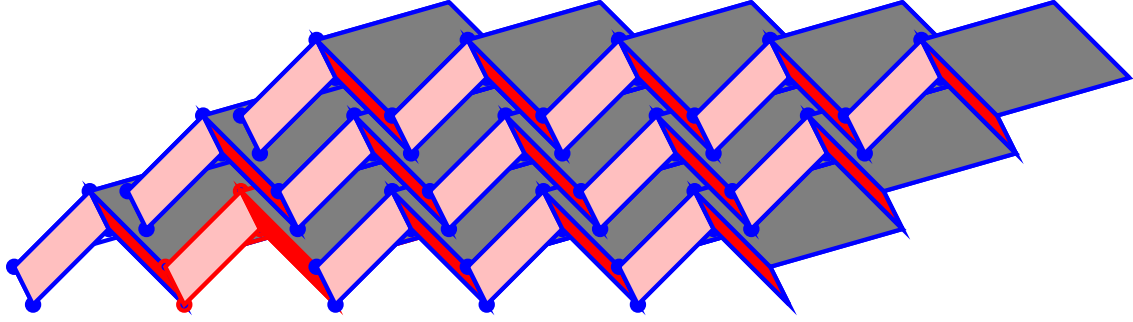


FIGURE 5.18. – Plaque de type origami

La contrainte (5.6) donne $e_{12}(u) = 0$ et $e_{11}(u) = e_{22}(u)$. Le micro-ajustement $b = 0$ est optimal et l'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda (\Delta u_3)^2 + \zeta (e_{11}(u) + e_{22}(u))^2 \right) dx_1 dx_2$$

avec $\lambda = \frac{1}{64}$ et $\zeta = \frac{61}{9}$. En ce qui concerne les déplacements membranaires, la seule déformation admissible est une dilatation isotrope. La structure homogénéisée ne présente pas d'effets de second gradient et elle est dégénérée par rapport aux déplacements transverses. En effet, une courbure avec une énergie élastique nulle est possible à condition que la courbure totale soit nulle (ce phénomène est visible lorsque l'on manipule ce type de plis). Du point de vue mathématique, la compacité n'est pas assurée. On ne peut donc appliquer notre résultat d'homogénéisation que lorsqu'il y a un *potentiel de confinement*, comme nous l'avons fait remarquer dans la conclusion du chapitre précédent.

5.2.3.5. Plaque de type origami renforcée

Dans l'exemple précédent, les faces de la structure sont très faciles à plier car elles sont constituées par un parallélogramme avec une seule diagonale. Nous renforçons chacune d'elles en ajoutant un nœud hors plan et en reliant ce dernier aux quatre coins de la face. Nous ajoutons les nœuds $y_5 = (0,0,1)$, $y_6 = (1,0,0)$, $y_7 = (-1,1,1)$, $y_8 = (0,1,0)$ et les interactions $a_{1,1,5} = a_{1,2,5} = a_{1,2,6} = a_{1,3,5} = a_{1,3,7} = a_{1,3,8} = a_{1,4,5} = a_{1,4,6} = a_{2,4,7} = a_{2,6,1} = a_{2,6,3} = a_{3,7,1} = a_{3,8,1} = a_{3,8,2} = a_{5,2,7} = 1$. La contrainte reste inchangée, mais l'énergie homogénéisée $\mathcal{E}(u)$ devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \left((\Delta u_3)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right)^2 + \zeta (e_{11}(u) + e_{22}(u))^2 \right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{1}{64}$, $\mu = \frac{1}{192}$ et $\zeta \approx 14,06$. La plaque homogénéisée obtenue est non dégénérée, car on contrôle le déplacement transverse. Concernant le déplacement membranaire (u_1, u_2) , le tenseur des déformations prend la forme d'une dilatation isotrope $e(u) = k(x_1, x_2) \text{Id}$. On remarque que les conditions de compatibilité [94, pp. 208-209] induisent des contraintes sur les dérivées secondes de k . La partie de l'énergie correspondant au déplacement membranaire (u_1, u_2) est

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\lambda \left(\left(\frac{\partial k}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial x_2} \right)^2 \right) + 4\zeta k^2 \right) dx_1 dx_2.$$

La structure homogénéisée est donc dotée de la longueur intrinsèque $\sqrt{\lambda/\zeta}$.

5.2.4. Matériaux

Il est difficile de dessiner et de décrire clairement des réseaux périodiques avec une périodicité tridimensionnelle. En effet, le nombre de nœuds et d'arêtes augmente considérablement. Nous nous limitons à étudier le réseau cubique régulier et le réseau obtenu en remplaçant chaque « fibre » de ce réseau cubique par une structure pantographique comme décrit à la sous-section 5.2.1.3.

5.2.4.1. Réseau cubique

Nous étendons l'exemple 5.2.2.2 en dimension 3 en considérant un réseau périodique (voir figure 5.19) constitué d'un seul nœud ($K = 1$); trois vecteurs $t_1 = (1,0,0)$, $t_2 = (0,1,0)$, $t_3 = (0,0,1)$ pour translater la cellule; quatorze matrices A^p de dimension 1×1 définissant les interactions entre le nœud $y_{I,1}^\varepsilon$ et ses voisins $y_{I+p,1}^\varepsilon$. Ces matrices sont données par $A^1 = [0]$, $A^2 = [1]$, $A^3 = [1]$, $A^4 = [1]$ et $A^p = [0]$ pour $p > 4$.

La contrainte (5.6) donne $e_{11}(u) = e_{22}(u) = e_{33}(u) = 0$. La structure est donc inextensible dans les directions e_1 , e_2 et e_3 . Seul le cisaillement est possible. Le micro-ajustement $b = 0$ est optimal et l'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda \|e(u)\|^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

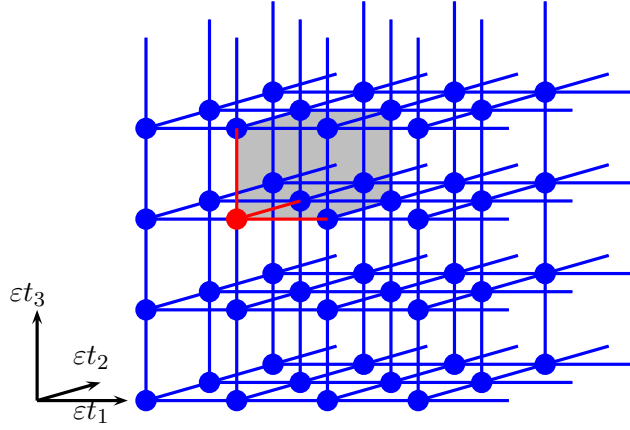


FIGURE 5.19. – Le réseau cubique régulier

avec $\lambda = 3$. Cette structure est un matériau élastique classique.

5.2.4.2. Pantographes tissés

Nous pouvons voir que la structure de la sous-sous-section 5.2.4.1 est constituée par trois familles de fibres parallèles. Nous remplaçons maintenant les fibres dans la direction e_1 par des poutres pantographiques notées P_{e_1,e_3} et celles dans la direction e_2 ou e_3 par des poutres pantographiques notées respectivement P_{e_2,e_1} et P_{e_3,e_2} (comme sur la figure 5.3). Les poutres P_{e_1,e_3} , P_{e_2,e_1} et P_{e_3,e_2} partagent le même nœud y_3 . La nouvelle structure est constituée d'une cellule contenant 16 nœuds avec 24 arêtes internes et 12 arêtes reliant cette cellule aux cellules voisines (voir figure 5.20).

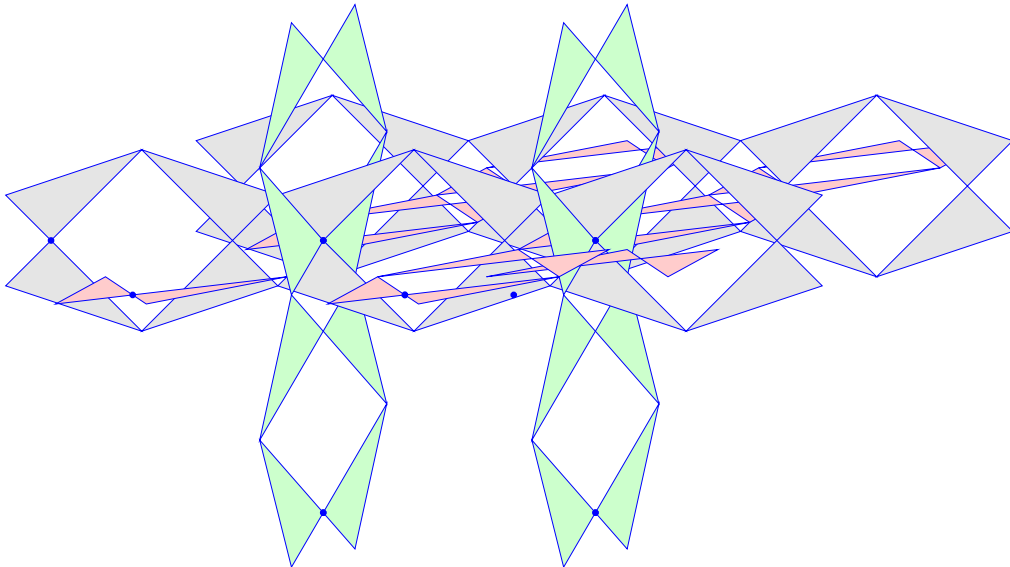


FIGURE 5.20. – Pantographes tissés

Le matériau effectif résultant de l'homogénéisation de cette structure n'est soumis à aucune contrainte. Le micro-ajustement $b = 0$ est optimal. L'énergie homogénéisée est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} & \left[\lambda \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right)^2 \right) + \mu \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right)^2 \right) \right. \\ & + \xi ((e_{12}(u))^2 + (e_{13}(u))^2 + (e_{23}(u))^2) \\ & \left. + \zeta ((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 + (e_{33}(u))^2) \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{2}{23}$, $\mu = \frac{2}{63}$, $\zeta = 324$ et $\xi \approx 3,91$. Nous obtenons ici un matériau tridimensionnel de second gradient complet.

5.3. Conclusion

Nous avons présenté un algorithme qui permet de déterminer l'énergie homogénéisée des structures basées sur un graphe périodique élargi. Cet algorithme s'avère très pratique ou flexible dans le sens où il peut être appliqué facilement pour déterminer le comportement homogénéisé de nombreuses structures plus complexes que celles que nous avons étudiées dans ce chapitre. Il permet d'ailleurs de concevoir des matériaux de second gradient et de tester différentes structures en prenant en compte à la fois la dimension de l'espace physique et la dimension de périodicité, comme c'est montré à la sous-section 5.2.1.

On peut constater que dans toutes les énergies homogénéisées obtenues dans ce chapitre, les termes de premier et de second gradient ne sont pas couplés. Cette absence de couplage est due au fait que les positions des nœuds étaient supposées fixes dans la cellule périodique de taille unité. Nous montrerons au chapitre 7 que si l'on remet en cause cette hypothèse, on peut obtenir des modèles de second gradient couplant les termes de premier et de second gradient.

6. Étude expérimentale de matériaux architecturés basés sur des structures pantographiques

Sommaire

6.1. Designs des éprouvettes	119
6.2. Description des essais	121
6.3. Dispositif matériel	122
6.3.1. Machine de fabrication additive	122
6.3.2. Matériaux utilisés pour l'impression 3D	123
6.3.3. Machine d'essais	124
6.3.4. Propriétés des matériaux	124
6.4. Solution macroscopique théorique	125
6.4.1. Équation d'équilibre	125
6.4.2. Solutions analytiques du problème homogénéisé	125
6.4.3. Détermination de la longueur intrinsèque	127
6.5. Simulation numérique des essais et validation des modèles homogénéisés	127
6.6. Résultats expérimentaux	133
6.7. Conclusion	137

Dans ce chapitre, nous présentons une étude expérimentale pour étudier la faisabilité de matériaux de second gradient, c'est-à-dire des matériaux qui résistent aux variations de déformation. La géométrie des matériaux architecturés que nous considérons est basée sur des structures pantographiques. Nous avons en effet montré au chapitre 5 que l'énergie effective de ces structures est une énergie de second gradient. Nous comparons les résultats théoriques avec les résultats expérimentaux.

6.1. Designs des éprouvettes

Nous avons considéré des structures conçues de telle manière à ce que leur coefficient de Poisson effectif soit nul. Le fait que le coefficient de Poisson soit nul nous permettra d'éviter lors des essais de traction le rétrécissement de l'éprouvette dans la direction perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. Les structures constituant les éprouvettes sont cylindriques¹(voir figure 6.1). L'intérêt principal de ces structures cylindriques réside dans la facilité de leur fabrication par impression 3D et la possibilité de les modéliser en

1. Les éprouvettes sont cylindriques au sens où les domaines sont de la forme $\omega \times (0, h)$ avec ω un domaine de $\mathbb{R}^2$.

déformations planes comme des structures bidimensionnelles. Les éprouvettes fabriquées et testées sont représentées à la figure 6.2.

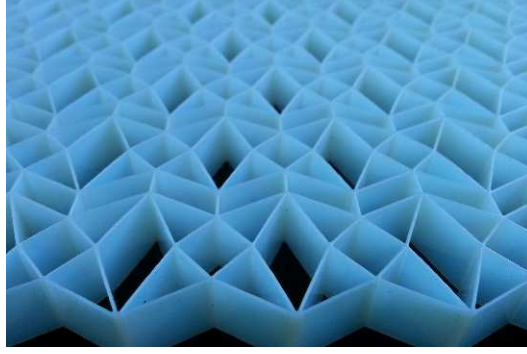
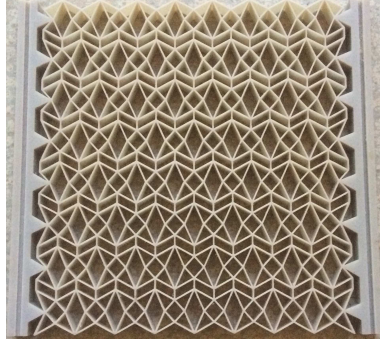
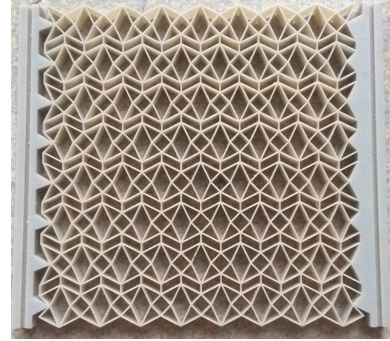


FIGURE 6.1. – Structure pantographique



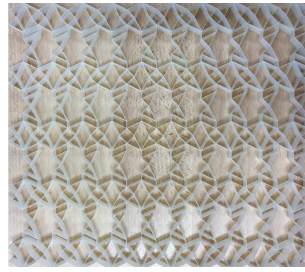
(a) Structure A



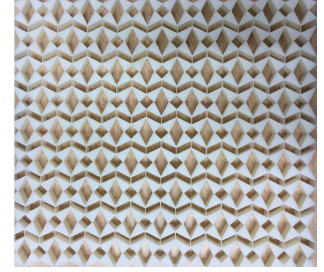
(b) Structure B



(c) Structure C



(d) Structure D



(e) Structure E

FIGURE 6.2. – Structures pantographiques fabriquées par impression 3D

Les structures A, B et C correspondent au même réseau. La structure D est obtenue à partir de la structure C en éliminant un certain nombre de parois. Quant à la structure E, elle est obtenue à partir de la structure C en renforçant les triangles par du matériau. En d'autres termes, toutes les structures présentées ci-dessous ont la même morphologie.

Il faut remarquer que la structure C est celle qui est étudiée théoriquement au paragraphe 5.2.2.6 du chapitre précédent.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous les paramètres géométriques des éprouvettes qui sont la taille ℓ de la période, l'épaisseur h des parois, la longueur L et la hauteur H .

Structures	Paramètres géométriques
Structure A	$\ell = 24 \text{ mm}, h = 1,2 \text{ mm}, L = 180 \text{ mm}, H = 164 \text{ mm}$
Structure B	$\ell = 24 \text{ mm}, h = 1,2 \text{ mm}, L = 180 \text{ mm}, H = 164 \text{ mm}$
Structure C	$\ell = 24 \text{ mm}, h = 0,6 \text{ mm}, L = 240 \text{ mm}, H = 216 \text{ mm}$
Structure D	$\ell = 24 \text{ mm}, h = 0,6 \text{ mm}, L = 240 \text{ mm}, H = 216 \text{ mm}$
Structure E	$\ell = 24 \text{ mm}, h = 0,6 \text{ mm}, L = 240 \text{ mm}, H = 216 \text{ mm}$

6.2. Description des essais

Grâce aux designs choisis, le coefficient de Poisson effectif étant nul, le déplacement macroscopique est unidirectionnel et fonction de x_1 seulement. Dorénavant, on va considérer que u est une fonction réelle d'une seule variable : $u = u(x)$. D'après les résultats du paragraphe 5.2.2.6, l'énergie macroscopique de l'éprouvette déformée s'écrit

$$\mathcal{E}(u) = \frac{k}{2} \int_0^L [(u'(x))^2 + \ell_{\text{int}}^2 (u''(x))^2] dx.$$

Nous appliquons différents types de conditions aux limites aux éprouvettes décrites à la section précédente en fixant le déplacement de certains nœuds (condition de Dirichlet classique) et soit i) en l'absence de *doubles forces*, c'est-à-dire d'un système de forces microscopiques qui tendent à forcer la déformation des cellules sur le bord, soit ii) en bloquant suffisamment de nœuds des cellules du bord pour bloquer l'extension de ces cellules. Ce faisant, nous imposons au niveau macroscopique la condition de "Dirichlet fort" : $u(0) = u'(0) = 0$.

Dans une série ① d'expériences réalisée sur la structure A, nous effectuons un essai de traction avec conditions de Dirichlet simples de chaque côté, ce qui se traduit au niveau macroscopique par $u(0) = 0, u(L) = u_0$.

Dans la série ② d'expériences réalisée sur la structure B, nous effectuons un essai de traction sur la structure E avec conditions de Dirichlet forte d'un côté $x = 0$ et simple de l'autre $x = L$.

Dans la série ③ d'expériences réalisée sur la structure "monobarre" (figure 6.3) et les structures C, D et E (voir figure 6.2), on fixe les nœuds centraux imposant ainsi la condition $u = 0$ sur la ligne centrale. On impose un déplacement sur les nœuds de droite sans appliquer de doubles forces, ce qui se traduit du point de vue macroscopique par $u(L) = u_0$ et $u''(L) = 0$. L'extrémité droite est entièrement libre.

En fait, les éprouvettes sont déjà conçues de telle manière à tenir compte des actions extérieures qu'on veut imposer, c'est pourquoi on a décrit directement les conditions aux limites sur les éprouvettes qui y sont adaptées.

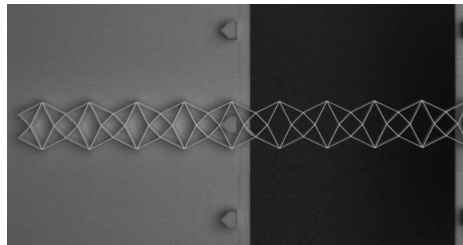


FIGURE 6.3. – Structure "monobarre"

Ce troisième essai est d'un grand intérêt. En effet, cette expérience, qui n'utilise pas de conditions aux limites « exotiques », doit mettre en évidence le phénomène de *propagation de dilatation* tel qu'il est expliqué au paragraphe 5.2.1.3.

6.3. Dispositif matériel

6.3.1. Machine de fabrication additive

La fabrication additive (ou impression 3D) est un procédé d'assemblage de matériaux, couche par couche, utilisé pour fabriquer des objets à partir de données de modèles 3D. Le logiciel utilisé pour créer les modèles 3D des éprouvettes est GMSH et le format de fichier transmis à la machine d'impression 3D est de type STL.

Les éprouvettes sont fabriquées en utilisant la plateforme MAQ 3D de fabrication additive de l'Université de Toulon. L'imprimante utilisée est Objet Connex 350 (voir figure 6.4).



FIGURE 6.4. – Imprimante Objet Connex 350.

Cette imprimante permet d'obtenir des pièces de dimension allant jusqu'à $342 \times 342 \times 200$ mm. Elle permet aussi de fabriquer de produits assemblés complexes, de surfaces lisses ou mates de très bonne finition et des parois fines de 0,6 mm minimum. La résolution est de 16 microns.

6.3.1.1. Caractéristiques

- Format du plateau : $350 \times 350 \times 200$ mm ;
- Format net de fabrication : $342 \times 342 \times 200$ mm ;
- Épaisseur de couche : couches horizontales jusqu'à 16 microns ;
- Épaisseur minimale : 0,6 mm ;
- Résolution d'impression : axe X : 600 ppp ; axe Y : 600 ppp ; axe Z : 1600 ppp ;
- Formats de fichiers : fichier STL, OBJDF et SLC ;

- Taille et poids de la machine : $1420 \times 1120 \times 1130$ mm, 500 kg ;
- Têtes d'impression : 8 unités, 92 buses par tête, 4 têtes pour le support, 4 pour la matière.

6.3.1.2. Fonctionnement

Le bloc d'impression est composé de 8 têtes (chacune ayant 92 buses) : 4 têtes pour le support et 4 pour la matière (voir figure 6.5).

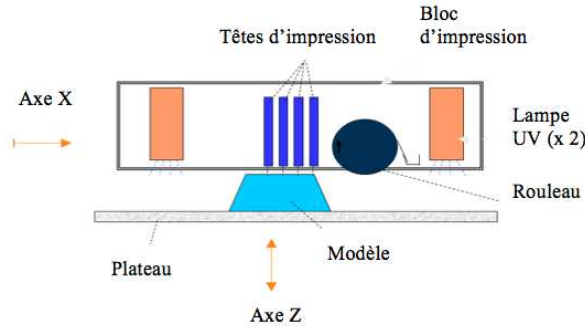


FIGURE 6.5. – Schéma du bloc d'impression

La tête d'impression dépose un jet de matière qui est écrasé par un rouleau en inox qui renvoie l'excédent dans une poubelle et les lampes UV polymérisent la couche.

La pièce fabriquée sera posée sur une couche de support qui permettra de maintenir les couches d'impression de la pièce. Ce support sera enlevé à la main, puis par jet d'eau sous pression.

6.3.2. Matériaux utilisés pour l'impression 3D

Les matériaux utilisés pour fabriquer les éprouvettes sont des plastiques ABS **VeroWhitePlus RGD835** (matériau rigide et opaque) et **TangoBlackPlus FLX980** (matériau de type caoutchouc). En fait, nous n'avons pas testé l'éprouvette fabriquée à partir du matériau de type caoutchouc car elle était trop souple. Nous donnons dans les tableaux ci-dessous leurs caractéristiques principales.

VeroWhitePlus RGD835

	ASTM	Units	Metric
Tensile strength	D-638-03	MPa	50-65
Elongation at break	D-638-05	%	10-25
Modulus of elasticity	D-638-04	MPa	2000-3000
Flexural strength	D-790-03	MPa	75-110
Flexural modulus	D-790-04	MPa	2200-3200

TangoBlackPlus FLX980

	ASTM	Units	Metric
Tensile strength	D-412	MPa	0.8-1.5
Elongation at break	D-412	%	170-220
Compressive set	D-395	%	4-5

6.3.3. Machine d'essais

Les expériences mécaniques ont été réalisées à la halle d'essais du LMA. La machine utilisée pour les essais est une machine hydraulique MTS 322 dont les caractéristiques sont :

- Force en traction/compression : 100 kN ;
- Déplacement du vérin : ± 80 mm ;
- Maximum en fatigue : ± 5 mm.

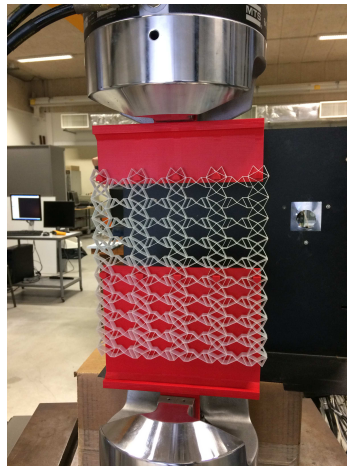


FIGURE 6.6. – Machine d'essai hydraulique MTS 322.

Au cours de l'essai de traction, on enregistre le déplacement de l'éprouvette à l'aide d'une caméra de 5 Mégapixels **PCO Edge**, la force de traction étant enregistrée par la machine MTS 322. Les données expérimentales (i.e. images) sont traitées en repérant de manière manuelle la position des nœuds grâce au logiciel GIMP.

6.3.4. Propriétés des matériaux

On a réalisé un essai de traction sur une éprouvette de longueur initiale $L_i = 241,27$ mm. Après l'essai, on a une longueur finale $L_f = 242,60$ mm, c'est-à-dire, une élongation de 1,33 mm. On a constaté que l'éprouvette n'a retrouvé sa longueur initiale qu'après 55 minutes. On peut donc conclure que les matériaux constituant les éprouvettes sont visco-élastiques. Comme notre étude théorique est faite dans le cadre de l'élasticité, il nous faut minimiser les effets visqueux en effectuant un essai suffisamment lent (15 min de montée en charge).

6.4. Solution macroscopique théorique

Nous considérons que chaque paire de nœuds liés du « réseau » est reliée par une barre unidimensionnelle suffisamment élancée, travaillant en extension et en flexion. Comme le coefficient de Poisson est nul, considérant le champ de déplacement, sa composante perpendiculaire à la direction de la sollicitation est nulle. La solution est donc uniaxiale. D'après les résultats obtenus au paragraphe 5.2.2.6 (équation (5.13)), l'énergie élastique de la structure s'écrit sous la forme

$$\mathcal{E}(u) = \frac{k}{2} \int_0^L [(u'(x))^2 + \ell_{\text{int}}^2 (u''(x))^2] dx, \quad (6.1)$$

où L est la longueur de la structure. Le paramètre ℓ_{int} apparaît comme une longueur intrinsèque du matériau effectif.

6.4.1. Équation d'équilibre

Nous déterminons l'équation d'équilibre en utilisant le principe variationnel : l'équation d'équilibre résulte de la minimisation de l'énergie élastique (6.1). La formulation variationnelle associée à ce problème de minimisation s'écrit : pour tout champ admissible v ,

$$\int_0^L (u'(x)v'(x) + \ell_{\text{int}}^2 u''(x)v''(x)) dx = 0.$$

En intégrant par parties, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \int_0^L (u'(x) - \ell_{\text{int}}^2 u'''(x))v'(x) dx + \ell_{\text{int}}^2 u''(L)v''(L) - \ell_{\text{int}}^2 u''(0)v'(0) &= 0 \\ \int_0^L (-u''(x) + \ell_{\text{int}}^2 u^{(4)}(x))v(x) dx + (u'(L) - \ell_{\text{int}}^2 u'''(L))v(L) + \ell_{\text{int}}^2 u''(L)v'(L) \\ - (u'(0) - \ell_{\text{int}}^2 u'''(0))v(0) + \ell_{\text{int}}^2 u''(0)v'(0) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient sur $(0, L)$ l'équation d'équilibre suivante

$$-u'' + \ell_{\text{int}}^2 u^{(4)} = 0 \quad (6.2)$$

dont la solution générale s'écrit sous la forme

$$u(x) = c_1 e^{x/\ell_{\text{int}}} + c_2 e^{-x/\ell_{\text{int}}} + c_3 x + c_4, \quad (6.3)$$

où c_1 , c_2 , c_3 et c_4 sont des constantes d'intégration qui doivent être déterminées à l'aide des conditions aux limites.

6.4.2. Solutions analytiques du problème homogénéisé

- 1) Dans la série ① d'expériences, la solution est évidente : $u(x) = \frac{u_0}{L}x$.
- 2) Dans la série ② d'expériences, les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(L) = u_0, \quad \ell_{\text{int}}^2 u''(L) = 0.$$

donnent le système suivant :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 & = 0 \\ c_1 - c_2 + \ell_{\text{int}} c_3 & = 0 \\ c_1 e^\alpha + c_2 e^{-\alpha} + c_3 L + c_4 & = u_0 \\ c_1 e^\alpha + c_2 e^{-\alpha} & = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé $\alpha := L/\ell_{\text{int}}$. On obtient :

$$c_1 = -\frac{u_0 e^{-\alpha}}{D}, \quad c_2 = \frac{u_0 e^\alpha}{D}, \quad c_3 = \frac{u_0 (e^\alpha + e^{-\alpha})}{\ell_{\text{int}} D}, \quad c_4 = \frac{u_0 (e^{-\alpha} - e^\alpha)}{D},$$

avec

$$D := \alpha(e^\alpha + e^{-\alpha}) + (e^{-\alpha} - e^\alpha).$$

La solution s'écrit donc

$$u(x) = \frac{u_0}{D} \left(-e^\alpha (e^{x/\ell_{\text{int}}} - 1) + e^\alpha (e^{-x/\ell_{\text{int}}} - 1) + \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{\ell_{\text{int}}} x \right). \quad (6.4)$$

- 3) Dans la série ③ d'expériences, en considérant le domaine Ω de la forme $\Omega = [-l, L]$ où l et L deux réels strictement positifs, la solution générale s'écrit sous la forme :

$$u(x) = \begin{cases} a_1 e^{x/\ell_{\text{int}}} + b_1 e^{-x/\ell_{\text{int}}} + c_1 x + d_1 & \text{si } x < 0, \\ a_2 e^{x/\ell_{\text{int}}} + b_2 e^{-x/\ell_{\text{int}}} + c_2 x + d_2 & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Les conditions aux limites

$$\ell_{\text{int}}^2 u''(-l) = 0, \quad u'(-l) - \ell_{\text{int}}^2 u'''(-l) = 0, \quad u(0^-) = 0, \quad u(0^+) = 0,$$

$$u'(0^-) = u'(0^+), \quad (\ell_{\text{int}}^2 u'')(0^-) = (\ell_{\text{int}}^2 u'')(0^+), \quad u(L) = u_0, \quad \ell_{\text{int}} u''(L) = 0$$

donnent le système suivant

$$\begin{cases} a_1 e^{-\alpha} + b_1 e^\alpha & = 0 \\ c_1 & = 0 \\ a_1 + b_1 + d_1 & = 0 \\ a_2 + b_2 + d_2 & = 0 \\ a_1 - b_1 + \ell_{\text{int}} c_1 & = a_2 - b_2 + \ell_{\text{int}} c_2 \\ a_1 + b_1 & = a_2 + b_2 \\ a_2 e^\beta + b_2 e^{-\beta} + c_2 L + d_2 & = u_0 \\ a_2 e^\beta + b_2 e^{-\beta} & = 0, \end{cases}$$

où l'on a maintenant posé $\alpha := \frac{l}{\ell_{\text{int}}}$ et $\beta := \frac{L}{\ell_{\text{int}}}$. On obtient :

$$a_1 = \frac{e^{2\alpha}(1 - e^{2\beta})u_0 \ell_{\text{int}}}{D}, \quad b_1 = -\frac{(1 - e^{2\beta})u_0 \ell_{\text{int}}}{D}, \quad d_1 = d_2 = \frac{(1 - e^{2\alpha})(1 - e^{2\beta})u_0 \ell_{\text{int}}}{D},$$

$$a_2 = -\frac{(1 - e^{2\alpha})\ell_{\text{int}}u_0}{D}, \quad b_2 = \frac{e^{2\beta}(1 - e^{2\alpha})\ell_{\text{int}}u_0}{D}, \quad c_2 = \frac{2(1 - e^{2\alpha+2\beta})u_0}{D},$$

où

$$D = 2L(1 - e^{2\alpha+2\beta}) + \ell_{\text{int}}(1 - e^{2\alpha})(1 - e^{2\beta}).$$

La solution s'écrit donc :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{u_0(1 - e^{2\beta})\ell_{\text{int}}}{D} (e^{2\alpha}(e^{x/\ell_{\text{int}}} - 1) - (e^{-x/\ell_{\text{int}}} - 1)) & \text{si } x < 0, \\ \frac{u_0}{D} ((e^{2\alpha} - 1)\ell_{\text{int}}((e^{x/\ell_{\text{int}}} - 1) - e^{2\beta}(e^{-x/\ell_{\text{int}}} - 1)) + 2(1 - e^{2\alpha+2\beta})x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

6.4.3. Détermination de la longueur intrinsèque

La longueur intrinsèque a été obtenue au paragraphe 5.2.2.6 en supposant $f = 1$ et $L = 1$. On sait que la partie de l'énergie dépendant du premier gradient est proportionnelle à f , alors que la partie de l'énergie dépendant du second gradient n'en dépend pas. La longueur intrinsèque est donc proportionnelle à $\sqrt{f}$. Il est facile de réécrire l'énergie de flexion (3.7) sous la forme (3.25) en remplaçant (3.28) par $f = \frac{4}{3}\beta^2$ et $t = 0$. Donc, la longueur intrinsèque est

$$\ell_{\text{int}} = \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{44}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{16\sqrt{11}\beta}$$

exprimée dans une unité de longueur telle que $L = 1$. De plus, $\beta = \frac{h}{\varepsilon^2 L} = \frac{hL}{\ell^2} = \frac{hL}{|Y^\varepsilon|}$, où $|Y^\varepsilon|$ est la taille de la cellule périodique. Finalement, on a

$$\ell_{\text{int}} = \frac{1}{16\sqrt{11}} \frac{|Y^\varepsilon|}{h}.$$

Cela donne pour les structures A, B, C, D et E :

Structures	Taille de la période et épaisseur	Longueur intrinsèque
Structure A	$ Y^\varepsilon = 576 \text{ mm}^2, h = 1,2 \text{ mm}$	$\ell_{\text{int}} = 9,04 \text{ mm}$
Structure B	$ Y^\varepsilon = 576 \text{ mm}^2, h = 1,2 \text{ mm}$	$\ell_{\text{int}} = 9,04 \text{ mm}$
Structure C	$ Y^\varepsilon = 576 \text{ mm}^2, h = 0,6 \text{ mm}$	$\ell_{\text{int}} = 18,09 \text{ mm}$
Structure D	$ Y^\varepsilon = 576 \text{ mm}^2, h = 0,6 \text{ mm}$	$\ell_{\text{int}} = 18,09 \text{ mm}$
Structure E	$ Y^\varepsilon = 576 \text{ mm}^2, h = 0,6 \text{ mm}$	$\ell_{\text{int}} = 18,09 \text{ mm}$

6.5. Simulation numérique des essais et validation des modèles homogénéisés

Nous faisons une simulation numérique pour valider le modèle théorique. Cette simulation est basée sur une étude globale directe sans homogénéisation de l'énergie microscopique $E_\varepsilon + F_\varepsilon$ de l'éprouvette donnée par (4.4). L'éprouvette que nous avons considérée pour faire la simulation numérique est celle correspondant à la structure C (voir figure 6.2). Nous déterminons les déplacements des nœuds de cette éprouvette en fonction de leurs positions initiales via une simulation numérique. Nous faisons varier l'épaisseur h des barres de telle

manière que la longueur intrinsèque ℓ_{int} ne varie pas. Nous faisons aussi varier le nombre de cellules n_x et n_y dans les deux directions x et y , où x correspond à la direction de traction et y à la direction perpendiculaire. On remarque que l'énergie $E_\varepsilon + F_\varepsilon$ est une forme quadratique convexe de U et θ . Sa minimisation est un problème linéaire qu'on résout en utilisant le logiciel Octave.

Résultats de la simulation numérique

La figure 6.7 représente la configuration au repos de la structure pantographique et sa configuration déformée lorsque l'on applique des conditions de Dirichlet simples de chaque côté. Les paramètres sont $h = 0,6$ mm, $n_x = 8$ et $n_y = 4$.

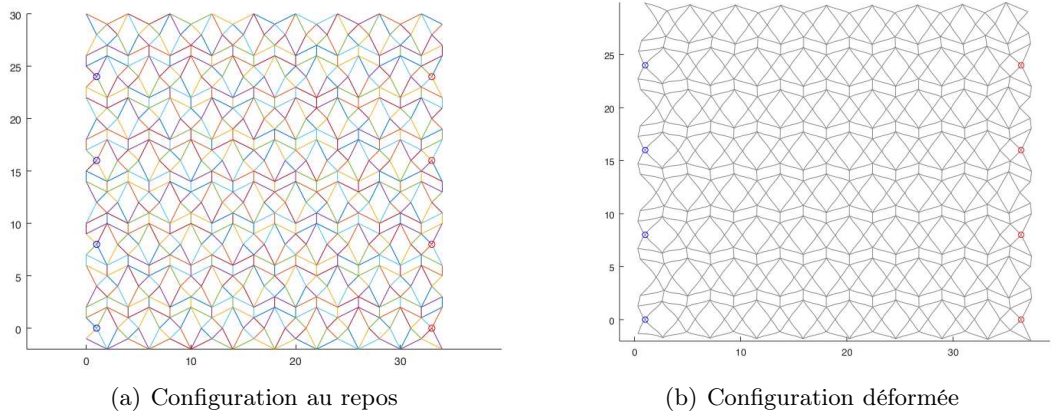
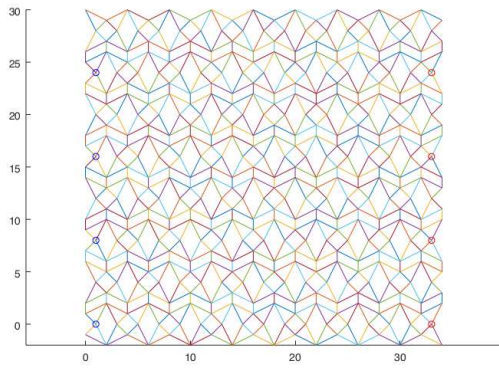


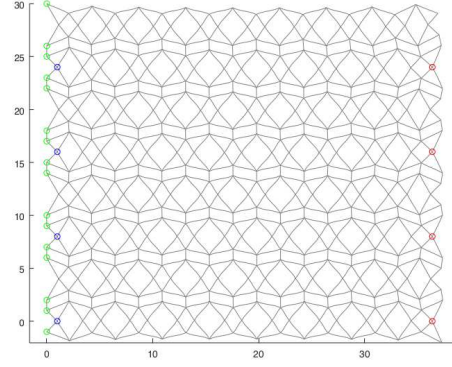
FIGURE 6.7. – Configurations initiale et déformée de l'éprouvette avec des conditions de Dirichlet simples de chaque côté.

On constate sur la figure 6.7 comme prévu que la déformation est sensiblement uniforme.

La figure 6.8 représente la configuration au repos de la structure pantographique et sa configuration déformée lorsque l'on applique une condition de Dirichlet forte à gauche et une condition de Dirichlet simple à droite, toujours avec $h = 0,6$ mm, $n_x = 8$ et $n_y = 4$.



(a) Configuration au repos



(b) Configuration déformée

FIGURE 6.8. – Configurations initiale et déformée de la structure avec une condition de Dirichlet forte à gauche et une condition de Dirichlet simple à droite.

On peut constater sur la figure 6.8 que la déformation est plus importante pour les cellules de droite.

Sur les figures 6.9, 6.10, 6.11 et 6.12, nous traçons les déplacements de tous les nœuds en fonction de leurs positions initiales et les comparons aux solutions analytiques du problème macroscopique correspondantes. Sur les figures 6.9 et 6.11 où $n_x = 8$, on remarque une dispersion importante sur les déplacements des nœuds. Par contre, sur les figures 6.10 et 6.12 où $n_x = 60$, on remarque que les pantographes se déplacent comme prévu. Cela met en évidence l'influence du nombre de cellules dans la direction de traction sur le comportement de la structure.

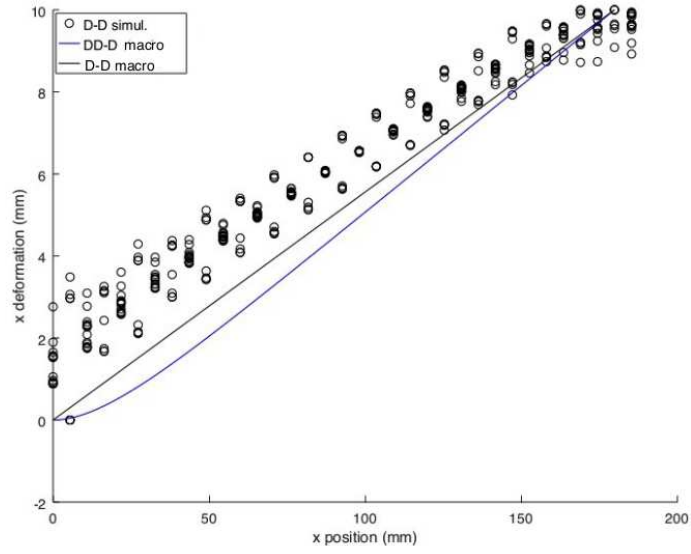


FIGURE 6.9. – Déplacements des nœuds en fonction de leurs positions initiales avec $h = 0,6$ mm, $n_x = 8$, $n_y = 4$. Dans la légende, D-D signifie Dirichlet simple de chaque côté et DD-D signifie Dirichlet fort à gauche et Dirichlet simple à droite.

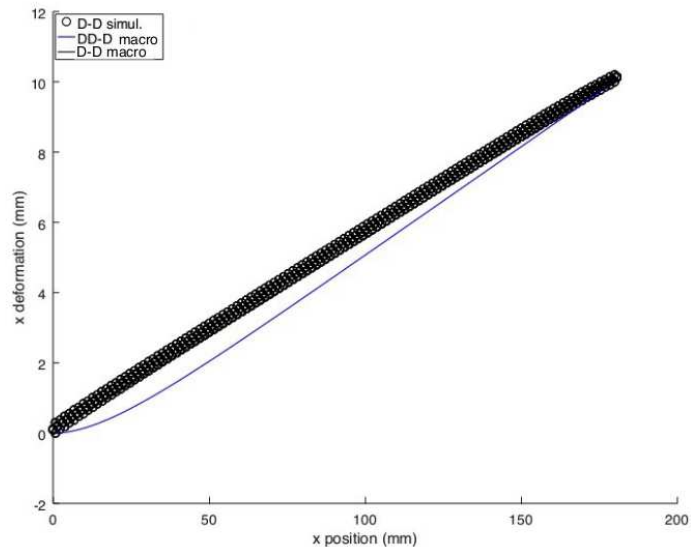


FIGURE 6.10. – Déplacements des nœuds en fonction de leurs positions initiales avec $n_x = 60$, $n_y = 4$.

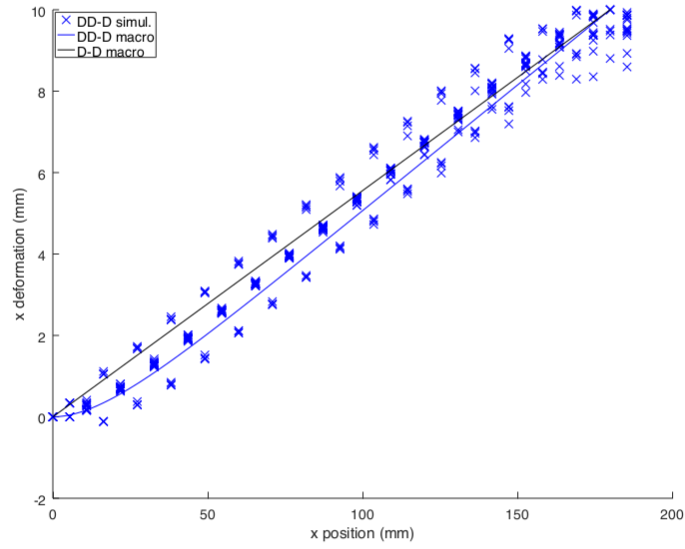


FIGURE 6.11. – Déplacements des nœuds en fonction de leurs positions initiales avec $h = 0,6$ mm, $n_x = 8$, $n_y = 4$.

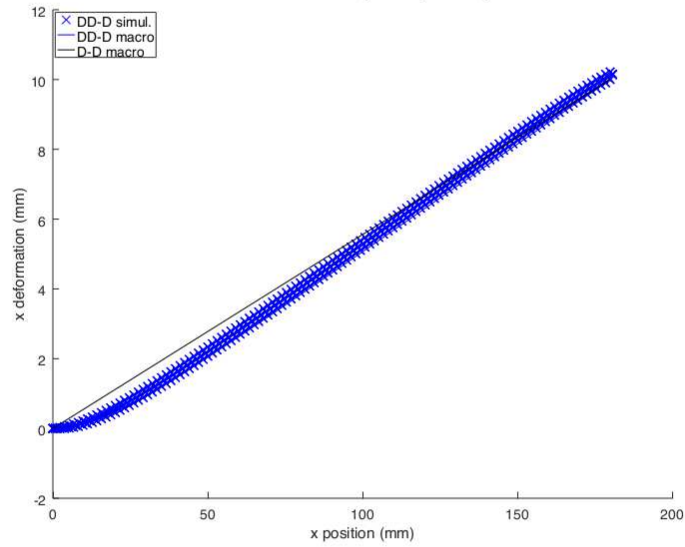


FIGURE 6.12. – Déplacements des nœuds en fonction de leurs positions initiales avec $h = 0,6$ mm, $n_x = 60$, $n_y = 4$.

La figure 6.13 montre le graphe à l'échelle logarithmique en fonction de n_x de l'erreur maximale entre la solution numérique u^{num} et la solution théorique u^{macro} , c'est-à-dire la quantité $\max_i |u_i^{\text{num}} - u(x_i)|$, le maximum étant pris sur tous les nœuds i de la structure. On constate que la pente de la droite représentant le logarithme de l'erreur maximale est égale à -1 . Donc, l'erreur maximale est inversement proportionnelle à n_x . En termes de la taille ℓ de la période, cela signifie que cette erreur maximale est typiquement de l'ordre de ℓ . On ne peut pas faire mieux, car assez généralement en homogénéisation, on s'attend à un comportement asymptotique de u^ℓ du type $u(x) + \ell v(x/\ell)$, où ℓ est la taille de la cellule périodique, u^ℓ est la solution microscopique et u est la solution macroscopique.

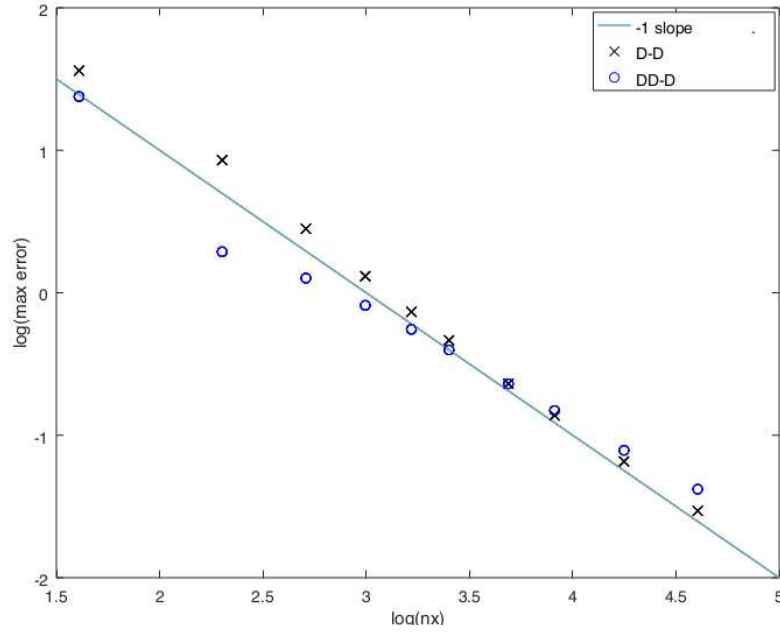


FIGURE 6.13. – Graphe à l'échelle logarithmique de l'erreur maximale en fonction de n_x .

Les résultats précédents montrent que le processus d'homogénéisation y compris dans les termes de second gradient obtenus donne une description correcte des déplacements de la structure même lorsque le nombre de cellules n'est pas très grand. On peut remarquer qu'il est d'autant meilleur que le nombre de cellules est grand en effectuant des simulations avec un nombre plus grand de cellules (nombre que l'on peut pas atteindre avec les outils d'impression 3D dont nous disposons (voir figure 6.14)).

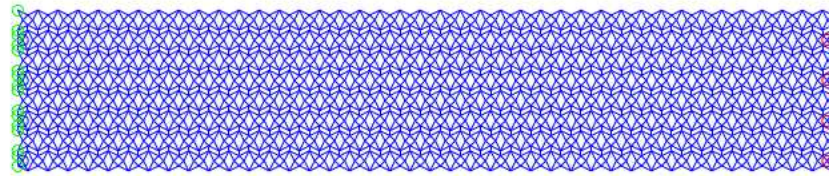


FIGURE 6.14. – Un grand nombre de cellules qu'on ne peut pas atteindre : $n_x = 40$, $n_y = 4$

6.6. Résultats expérimentaux

Nous montrons les résultats expérimentaux obtenus en réalisant les trois séries d'expériences décrites à la section 6.2 et les comparons aux résultats théoriques.

La série ① d'expériences est réalisée en considérant la structure A (voir figure 6.2). Pour ces structures, on a : $h = 1,2$ mm, $\ell = 24$ mm et $\ell_{int} = 26,18$ mm. La figure 6.15 montre les déplacements des nœuds de cette structure en fonction de leurs positions initiales.

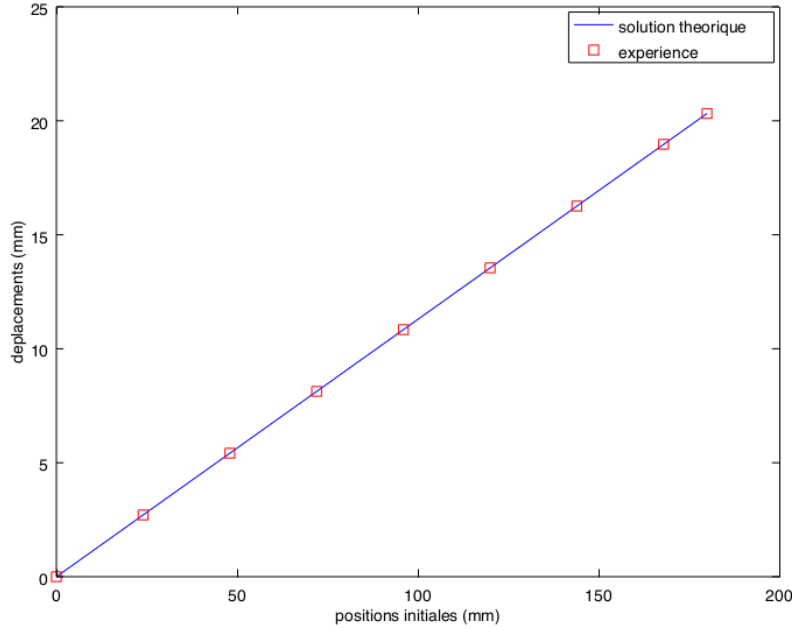


FIGURE 6.15. – Déplacements des noeuds de la structure A.

Sur la figure 6.15, on peut remarquer que la structure A présente un comportement linéaire. Il n'y a donc pas d'effets de second gradient présents dans cette structure.

La série ② d'expériences est réalisée en considérant la structure B. La figure 6.16 montre les déplacements des nœuds de cette structure en fonction de leurs positions initiales.

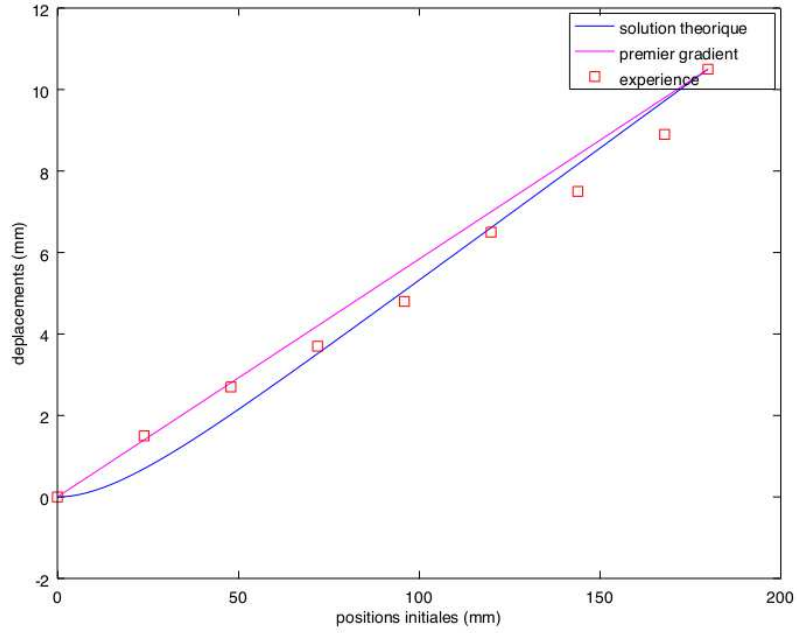


FIGURE 6.16. – Déplacements des noeuds de la structure B.

On remarque sur la figure 6.16 une erreur entre les données expérimentales et la solution théorique. Ce phénomène s'explique par le fait que la longueur intrinsèque de cette structure est plus petite que la taille ℓ de la cellule périodique.

La série ③ d'expériences est réalisée en considérant les structures "monobarre", C, D et E. Ces quatre structures ont les mêmes paramètres géométriques : $h = 0,6$ mm, $\ell = 24$ mm, $L = 180$ mm. La longueur intrinsèque est $\ell_{\text{int}} = 26,18$ mm.

Les figures 6.17, 6.18, 6.19 et 6.20 montrent respectivement les déplacements des nœuds des structures "monobarre", C, D et E en fonction de leurs positions initiales. Sur ces figures, la position $x = 0$ correspond au centre de l'éprouvette. Sur les essais de traction correspondant respectivement aux figures 6.17, 6.19 et 6.20, le déplacement maximal imposé est $u_{\text{max}} = 22,58$ mm, $u_{\text{max}} = 9,2$ mm, $u_{\text{max}} = 10,8$ mm, $u_{\text{max}} = 19,4$ mm, respectivement.

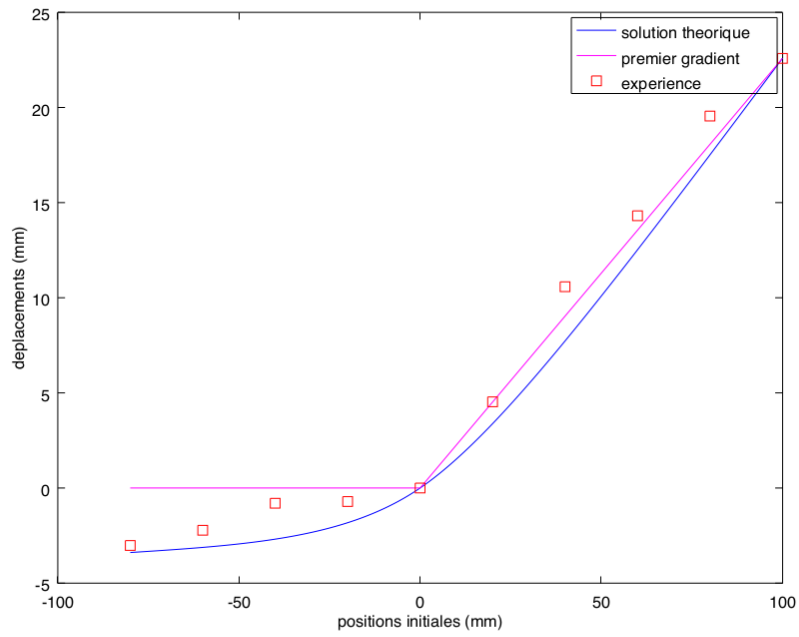


FIGURE 6.17. – Déplacements des noeuds de la structure "monobarre".

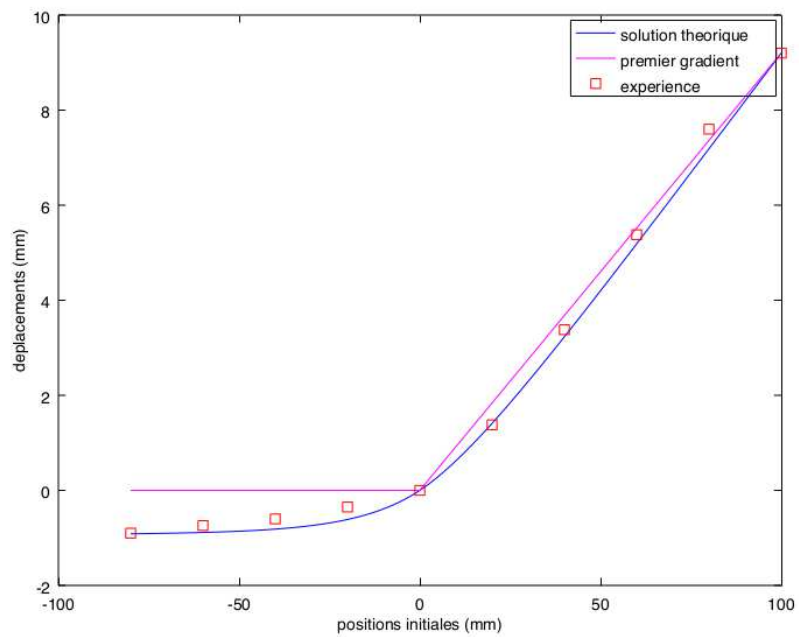


FIGURE 6.18. – Déplacements des noeuds de la structure C.

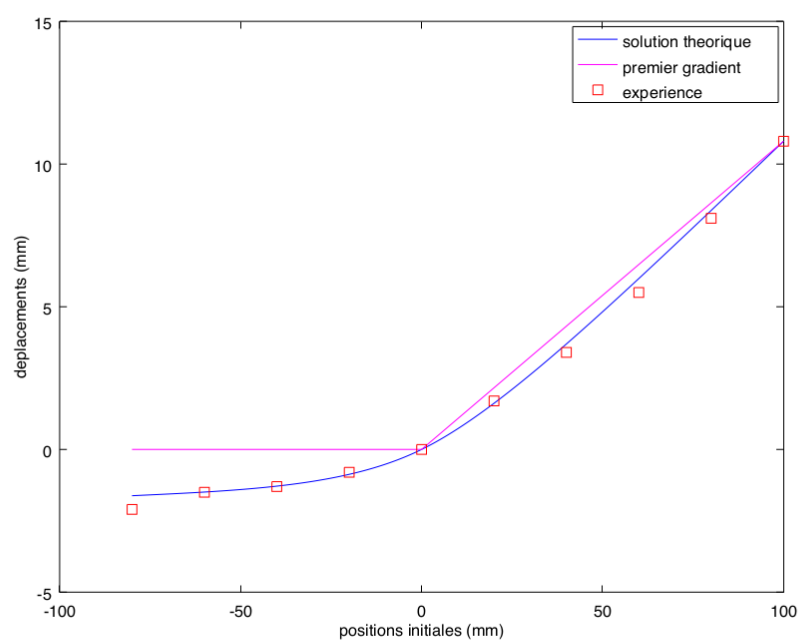


FIGURE 6.19. – Déplacements des noeuds de la structure D.

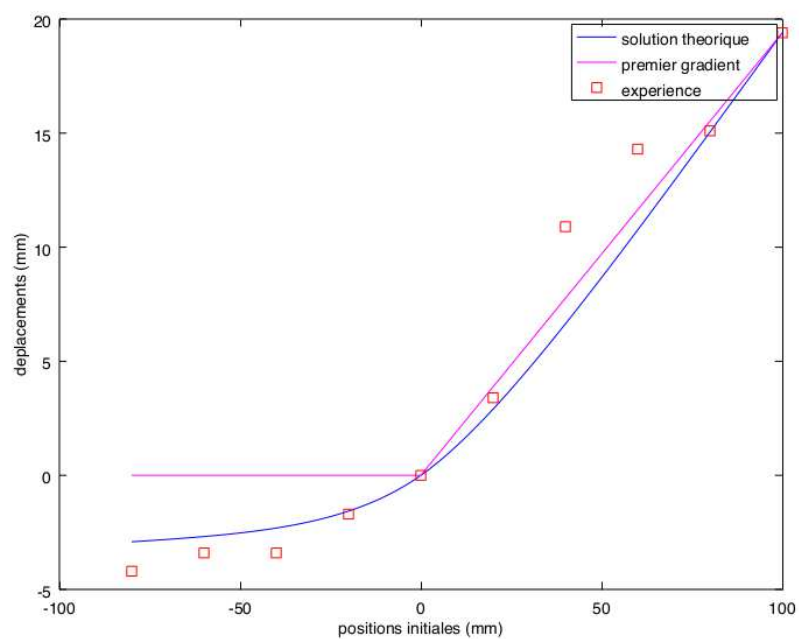


FIGURE 6.20. – Déplacements des noeuds de la structure E.

On remarque sur les figures 6.18 et 6.19 que les courbes théoriques ajustent bien les données expérimentales : il y a un bon accord entre les résultats prédits théoriquement et les résultats expérimentaux.

6.7. Conclusion

Nous avons analysé expérimentalement le comportement macroscopique des matériaux architecturés basés sur des structures pantographiques en faisant des essais de traction. Nous avons comparé les résultats expérimentaux avec une simulation numérique sans homogénéisation et les résultats théoriques obtenus au paragraphe 5.2.2.6. Les résultats de la simulation numérique ont mis en évidence les déformations admissibles des structures pantographiques en fonction des conditions aux limites. De plus, ces résultats ont montré que lorsque le nombre de cellules dans la direction de traction augmente, l'écart entre le déplacement numérique et le déplacement théorique diminue. Quant aux résultats expérimentaux, ils semblent être en bon accord avec les résultats théoriques. En effet, avec très peu de mesures sur les déplacements (10 valeurs), nous avons constaté que la courbe théorique correspondant au modèle de second gradient ajustait très bien les données expérimentales. D'après les résultats observés sur les figures 6.18 et 6.19, il semble que quelques-unes parmi les structures pantographiques testées présentent à la fois des effets de premier et de second gradient au niveau macroscopique.

7. Homogénéisation de réseaux périodiques conduisant à des modèles de second gradient couplant les termes de premier et de second gradient

Sommaire

7.1. Description de la géométrie	138
7.2. Interactions mécaniques	139
7.3. Résultat d'homogénéisation	140
7.3.1. Relative compacité des suites d'énergie bornée	142
7.3.2. Résultat de convergence à deux échelles	143
7.3.3. Preuve du résultat d'homogénéisation	146
7.4. Calcul explicite de l'énergie homogénéisée	148
7.4.1. Problèmes de cellule	148
7.4.2. Exemple : structure pantographique dissymétrique	148
7.5. Conclusion	150

Dans le chapitre 5, nous avons obtenu des énergies homogénéisées de second gradient où les termes de premier et de second gradient sont découplés. Cette absence de couplage était due au fait que les positions des nœuds étaient indépendantes de ε dans la cellule unité. Nous montrons dans ce chapitre que si on remet en cause cette hypothèse, on peut obtenir des modèles de second gradient couplant les termes de premier et de second gradient.

7.1. Description de la géométrie

Nous utilisons autant que possible les notations de la sous-section 4.2.1.

Dans le parallélépipède $\Omega := \{x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 : (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3\}$ où t_1, t_2, t_3 sont trois vecteurs linéairement indépendants dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, nous considérons un réseau périodique formé par les nœuds

$$y_{I,s}^\varepsilon := \varepsilon(y_s + \varepsilon z_s + i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3) \text{ avec } (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{Z}^3, \quad (7.1)$$

où (y_s) et (z_s) sont deux familles de K vecteurs.

Remarque 7.1. Notons que le paramètre ε joue ici un rôle double :

1) il mesure le rapport entre la taille de la cellule périodique et celle du domaine Ω ;

- 2) d'après la formule (7.1), il mesure la vitesse de convergence des positions $y_s + \varepsilon z_s$ des nœuds dans une cellule élémentaire εY vers leur position limite y_s . On peut interpréter z_s comme une « perturbation » de y_s comme c'est illustré sur la figure 7.1.

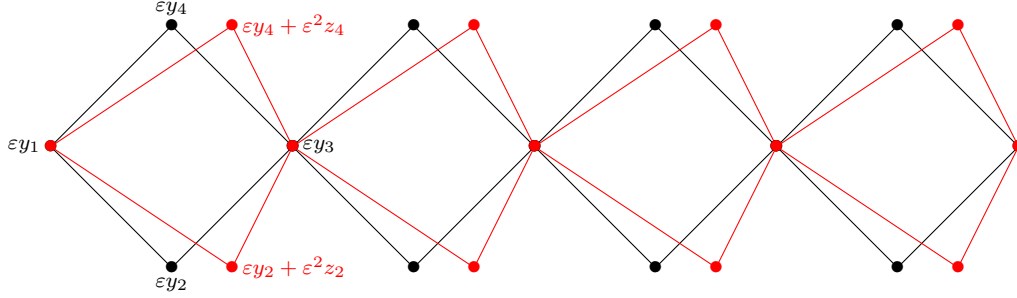


FIGURE 7.1. – Perturbation de y_s en $y_s + \varepsilon z_s$

On introduit $y_I^\varepsilon := \varepsilon(i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3)$ comme point de référence de la cellule I et

$$\mathcal{I}^\varepsilon := \{(i_1, i_2, i_3) \in (0, \varepsilon^{-1})^3\},$$

l'ensemble des indices des cellules de la structure.

Pour chaque paire de nœuds distincts $(y_{I,s}^\varepsilon, y_{I+p,s'}^\varepsilon)$, on introduit le vecteur normalisé et le vecteur unitaire correspondants :

$$\ell_{p,s,s'}^\varepsilon := \varepsilon^{-1} \|y_{I+p,s'}^\varepsilon - y_{I,s}^\varepsilon\|, \quad \tau_{p,s,s'}^\varepsilon := \frac{y_{I+p,s'}^\varepsilon - y_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon \ell_{p,s,s'}^\varepsilon}.$$

En utilisant (7.1), on obtient l'expression

$$\tau_{p,s,s'}^\varepsilon = \frac{y_{s'} - y_s + \mathbf{p} + \varepsilon(z_{s'} - z_s)}{\|y_{s'} - y_s + \mathbf{p} + \varepsilon(z_{s'} - z_s)\|}$$

pour laquelle on peut utiliser un développement de Taylor en ε pour obtenir :

$$\tau_{p,s,s'}^\varepsilon = \tau_{p,s,s'} + \varepsilon \rho_{p,s,s'} + \varepsilon^2 \varpi_{p,s,s'}^\varepsilon, \quad (7.2)$$

avec $\|\varpi_{p,s,s'}^\varepsilon\| \leq C$ (C étant une constante indépendante de ε) et

$$\rho_{p,s,s'} := \frac{1}{\ell_{p,s,s'}} (\text{Id} - \tau_{p,s,s'} \otimes \tau_{p,s,s'}) \cdot (z_{s'} - z_s)$$

où $\ell_{p,s,s'} := \|y_{s'} - y_s + \mathbf{p}\|$ et $\tau_{p,s,s'} := \frac{1}{\ell_{p,s,s'}} (y_{s'} - y_s + \mathbf{p})$.

7.2. Interactions mécaniques

La cinématique des réseaux considérés dans ce chapitre est la même que celle des réseaux considérés dans le chapitre 4. Cette cinématique est décrite à la sous-section 4.2.1.

Les énergies d'extension et de flexion/torsion sont les formes quadratiques définies respectivement par (voir sous-section 4.2.1) :

$$E_\varepsilon(U) := \varepsilon^{-2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} (\rho_U)_{I,p,s,s'}^2, \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(U, \theta) := \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} & \left[(\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \cdot \frac{B_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \right. \\ & + (\theta_{I,s} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \\ & \left. + (\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \cdot \frac{D_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I+p,s'} - (\alpha_U)_{I,p,s,s'}) \right]. \quad (7.4) \end{aligned}$$

Ici, $(\rho_U)_{I,p,s,s'}$ et $(\alpha_U)_{I,p,s,s'}$ sont les quantités définies respectivement dans (3.23) et (3.24) où il faut changer $\tau_{p,s,s'}$ en $\tau_{p,s,s'}^\varepsilon$.

L'énergie élastique totale est donnée par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(U, \theta) := E_\varepsilon(U) + F_\varepsilon(U, \theta). \quad (7.5)$$

7.3. Résultat d'homogénéisation

Nous déterminons dans cette section la Γ -limite $\mathcal{E}$ la suite de fonctionnelles $\mathcal{E}_\varepsilon$ définie par (7.5). Nous considérons les mêmes conditions aux limites que celles de la sous-section 4.1.2 et associons à la suite U^ε les familles de vecteurs $m_{I,p,s,s'}^\varepsilon$, $v_{I,s}^\varepsilon$, $\chi_{I,p}^\varepsilon$ définies par (4.6)-(4.7) et la famille de réels $\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon$ définie par (4.8). En utilisant ces définitions, nous pouvons réécrire les énergies $E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ et $F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ sous les formes suivantes :

$$\tilde{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left((v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \right)^2, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} & \left[(\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'}) \cdot \frac{B_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'}) \right. \\ & + (\theta_{I,s}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'}) \cdot C_{p,s,s'} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'}) \\ & \left. + (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'}) \cdot \frac{D_{p,s,s'}}{2} \cdot (\theta_{I+p,s'}^\varepsilon - (\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'}) \right], \quad (7.7) \end{aligned}$$

avec $(\alpha_{v,\chi}^\varepsilon)_{I,p,s,s'} := \frac{\tau_{p,s,s'}^\varepsilon}{\ell_{p,s,s'}^\varepsilon} \wedge (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \chi_{I,p}^\varepsilon)$.

Nous nous intéressons uniquement aux situations dans lesquelles l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est bornée. Afin de trouver l'expression de l'énergie effective correspondant à l'énergie discrète $\mathcal{E}_\varepsilon$ définie par (7.5), nous effectuons des développements asymptotiques des variables cinématiques. Supposons qu'il existe des fonctions (u, v_s, w_s, θ_s) (pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$) de classe C^∞ , telles que

$$\begin{aligned} U_{I,s}^\varepsilon &:= u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon v_s(y_I^\varepsilon) + \varepsilon^2 w_s(y_I^\varepsilon) + o(\varepsilon^2), \\ \theta_{I,s}^\varepsilon &:= \theta_s(y_I^\varepsilon) + o(1). \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon = \varepsilon \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \varepsilon(v_{s'}(y_I^\varepsilon) + \varepsilon \nabla v_{s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} - v_s(y_I^\varepsilon)) \\ + \varepsilon^2(w_{s'}(y_I^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon)) + o(\varepsilon^2),$$

donc

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\varepsilon &= \varepsilon^{-1}(U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'} + (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \rho_{p,s,s'} \\ &\quad + \varepsilon(U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \varpi_{p,s,s'}^\varepsilon \\ &= (v_{s'}(y_I^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) + \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} \\ &\quad + \varepsilon(w_{s'}(y_I^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) + \nabla v_{s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} \\ &\quad + \varepsilon(v_{s'}(y_I^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) + \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p}) \cdot \rho_{p,s,s'} + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 E_\varepsilon(U^\varepsilon) &= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left(\frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \right)^2 \\ &= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{s'}(y_I^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) + \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 + o(1) \\ &= \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} ((v_{s'}(x) - v_s(x) + \nabla u(x) \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'})^2 dx + o(1). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Puisque l'énergie $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est bornée, alors $\varepsilon^2 E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ tend vers zéro. Cela implique que, pour tout $(p,s,s') \in \mathcal{A}$,

$$(v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0. \quad (7.9)$$

De cette équation, on déduit que

$$(\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} - \nabla v_s \cdot \mathbf{p} + \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0. \quad (7.10)$$

En utilisant (7.9), on obtient que pour tout $(p,s,s') \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}(U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\varepsilon &= (w_{s'}(y_I^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) + \nabla v_{s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} \\ &\quad + (v_{s'}(y_I^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) + \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p}) \cdot \rho_{p,s,s'} + o(1), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(U^\varepsilon) &= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left(\frac{U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \right)^2 \\ &= \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} \left((w_{s'}(x) - w_s(x) + \nabla v_{s'}(x) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u(x) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} \right. \\ &\quad \left. + (v_{s'}(x) - v_s(x) + \nabla u(x) \cdot \mathbf{p}) \cdot \rho_{p,s,s'} \right)^2 dx + o(1). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Nous pouvons maintenant introduire les analogues continus des fonctionnelles $\tilde{E}_\varepsilon$ et $\tilde{F}_\varepsilon$. Pour toutes fonctions à valeurs vectorielles (w, v, θ) définies sur $\Omega \times \{1, \dots, K\}$ et (ξ, η) définies sur $\Omega \times \mathcal{P} \times \{1, \dots, K\}$, de carré intégrable par rapport à leurs premières variables, nous posons :

$$\tilde{E}(w, \xi, v, \eta) := \int_{\Omega} \sum_{(p, s, s') \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_{p, s, s'}(w, \xi, v, \eta)(x) \, dx, \quad (7.12)$$

avec

$$\mathcal{E}_{p, s, s'}(w, \xi, v, \eta) := \frac{a_{p, s, s'}}{2} \left((w_{s'} - w_s + \xi_{p, s'}) \cdot \tau_{p, s, s'} + (v_{s'} - v_s + \eta_{p, s'}) \cdot \rho_{p, s, s'} \right)^2, \quad (7.13)$$

et

$$\tilde{F}(v, \eta, \theta) := \int_{\Omega} \sum_{(p, s, s') \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_{p, s, s'}(v, \eta, \theta)(x) \, dx, \quad (7.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{p, s, s'}(v, \eta, \theta) &:= (\theta_s - (\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'}) \cdot \frac{B_{p, s, s'}}{2} \cdot (\theta_s - (\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'}) \\ &\quad + (\theta_s - (\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'}) \cdot C_{p, s, s'} \cdot (\theta_{s'} - (\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'}) \\ &\quad + (\theta_{s'} - (\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'}) \cdot \frac{D_{p, s, s'}}{2} \cdot (\theta_{s'} - (\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'}), \end{aligned} \quad (7.15)$$

avec $(\alpha_{v, \eta})_{p, s, s'} := \frac{\tau_{p, s, s'}}{\ell_{p, s, s'}} (v_{s'} - v_s + \eta_{p, s'})$.

Nous avons le résultat d'homogénéisation suivant.

Théorème 7.2. *La suite $\mathcal{E}_\varepsilon$ définie par (7.5) Γ -converge au sens du théorème 4.2 vers la fonctionnelle $\mathcal{E}$ définie par :*

$$\mathcal{E}(u) := \inf_{w, v, \theta} \left\{ \tilde{E}(w, \xi_{u, v}, v, \eta_u) + \tilde{F}(v, \eta_u, \theta); \tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0, \int_{\Omega} \theta_1(x) \, dx = 0 \right\} \quad (7.16)$$

si $\int_{\Omega} u(x) \, dx = 0$ et $\mathcal{E}(u) = +\infty$ sinon, où l'infimum est pris sur toutes les distributions (w, v, θ) . Nous rappelons que η_u et $\xi_{u, v}$ sont les quantités définies dans (4.65) et (4.66).

7.3.1. Relative compacité des suites d'énergie bornée

Nous avons les mêmes résultats de la sous-section 4.1.3 en remplaçant $\tau_{p, s, s'}$ par $\tau_{p, s, s'}^\varepsilon$. Nous les énonçons ci-dessous.

Lemme 7.3. *Il existe une constante positive C dépendant seulement de Ω telle que, pour toute suite de familles $(U_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$, $(\theta_I^\varepsilon)_{I \in \mathcal{I}^\varepsilon}$ satisfaisant, pour tout $p \in \mathcal{P}$,*

$$\sum_I U_I^\varepsilon = 0, \quad \sum_I \theta_I^\varepsilon = 0 \quad \sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} - \theta_I^\varepsilon \wedge \mathbf{p} \right\|^2 < 1, \quad (7.17)$$

on a

$$\sum_I \|\theta_I^\varepsilon\|^2 < C, \quad \sum_I \left\| \frac{U_{I+p}^\varepsilon - U_I^\varepsilon}{\varepsilon} \right\|^2 < C \quad \text{et} \quad \sum_I \|U_I^\varepsilon\|^2 < C. \quad (7.18)$$

Lemme 7.4. Soit $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ satisfaisant (4.5) et telle que $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$, où C est une constante indépendante de ε . Alors, les suites $\left(\sum_I \|U_{I,s}^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I \|\theta_{I,s}^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I \|m_I^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I \|v_{I,s}^\varepsilon\|^2\right)$, $\left(\sum_I \|\chi_{I,p}^\varepsilon\|^2\right)$ et $\left(\sum_I (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2\right)$ sont bornées.

7.3.2. Résultat de convergence à deux échelles

Une conséquence du lemme 7.4 est qu'il existe des fonctions θ , u , v , χ_p et $\omega_{p,s,s'}$ telles que, pour tout $s \in \{1, \dots, K\}$ et à une sous-suite près, on a

$$\theta_s^\varepsilon \rightharpoonup \theta_s, \quad m^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad v_s^\varepsilon \rightharpoonup v_s, \quad \chi_p^\varepsilon \rightharpoonup \chi_p \quad \text{et} \quad \omega_{p,s,s'}^\varepsilon \rightharpoonup \omega_{p,s,s'}. \quad (7.19)$$

Nous établissons dans le lemme suivant quelques propriétés de ces limites.

Lemme 7.5. Soit une suite $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ telle que $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$. Alors, on a

$$U_s^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \int_\Omega u(x) \, dx = 0, \quad \int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0, \quad \sum_{s=1}^K v_s = 0 \quad \text{et} \quad \chi_p = \nabla u \cdot \mathbf{p}. \quad (7.20)$$

En outre, il existe des champs w_s et λ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ tels que, pour tout $(p, s, s') \in \mathcal{A}$,

$$\omega_{p,s,s'} = \left(w_{s'} - w_s + \nabla(v_{s'} + \lambda) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'} + (v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \rho_{p,s,s'}. \quad (7.21)$$

Démonstration. Pour caractériser la limite $\omega_{p,s,s'}$, nous introduisons l'ensemble $\mathcal{D}_A$ de familles de distributions dans $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$\mathcal{D}_A := \left\{ \psi_{p,s,s'} = (w_{s'} - w_s + \nabla \lambda \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'}; (p, s, s') \in \mathcal{A}, w_s \in L^2(\mathbb{R}^3), \lambda \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Nous avons déjà remarqué dans (4.44) et (4.45) que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}_A^\perp$,

$$\sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\nabla \phi_{p,s,s'} \cdot \mathbf{p}) \tau_{p,s,s'} = 0, \quad (7.22)$$

et pour tout $(w_s) \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)^K$,

$$\sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} ((w_{s'} - w_s) \cdot \tau_{p,s,s'}) \phi_{p,s,s'} = 0. \quad (7.23)$$

Nous étendons ϕ en posant $\phi_{p,s,s'} = 0$ lorsque $(p, s, s') \notin \mathcal{A}$. Alors, nous pouvons réécrire l'équation (7.23) comme

$$\sum_{(p,s,s')} (\tau_{p,s,s'} \phi_{p,s,s'} - \tau_{p,s',s} \phi_{p,s',s}) = 0. \quad (7.24)$$

D'une part, nous avons

$$\int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \omega_{p,s,s'}(x) \phi_{p,s,s'}(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon).$$

D'autre part, en utilisant des fonctions $\phi_{p,s,s'}$ satisfaisant (7.22) et (7.24), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon) \\
&= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon) \\
&= \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon) \\
&+ \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \rho_{p,s,s'}) \\
&+ \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \varpi_{p,s,s'}^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Puisque la quantité $\varpi_{p,s,s'}^\varepsilon$ est bornée et que $v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)$ tend vers $v_{s'}(x) - v_s(x) + \nabla u(x) \cdot \mathbf{p}$ lorsque ε tend vers zéro, le troisième terme dans la dernière somme tend vers zéro.

Nous estimons maintenant séparément les deux termes restants. Pour ce faire, nous prenons seulement des fonctions $\phi_{p,s,s'}$ à support compact dans Ω . D'après la remarque 3.3, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \rho_{p,s,s'}) \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \langle v_{s'}(x) - v_s(x) + \nabla u(x) \cdot \mathbf{p}, (\phi_{p,s,s'}(x) \rho_{p,s,s'}) \rangle.
\end{aligned}$$

En utilisant (7.23), le premier terme devient

$$\begin{aligned}
& \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon) \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} (\varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s'}^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} (v_{I,s'}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon)) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon) \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-1} (v_{I+p,s'}^\varepsilon - v_{I,s'}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon) + \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Nous estimons le premier terme dans la somme ci-dessous par

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-1} (v_{I+p}^\varepsilon - v_{I,s}^\varepsilon) \cdot (\phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'}) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} v_{I,s'}^\varepsilon \cdot (\varepsilon^{-1} (\phi_{p,s,s'}(y_{I-p}^\varepsilon) - \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon)) \tau_{p,s,s'}) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} v_{I,s'}^\varepsilon \cdot [(-\nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p}) \tau_{p,s,s'}] + O(\varepsilon) \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \langle v_{s'}(x), ((-\nabla \phi_{p,s,s'}(x) \cdot \mathbf{p}) \tau_{p,s,s'}) \rangle \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \langle \nabla v_{s'}(x) \cdot \mathbf{p}, (\phi_{p,s,s'}(x) \tau_{p,s,s'}) \rangle.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, utilisant (7.23), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} (m_{I+p}^\varepsilon - m_I^\varepsilon) \cdot \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \tau_{p,s,s'} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \varepsilon^{-2} m_I^\varepsilon \cdot [(\phi_{p,s,s'}(y_{I-p}^\varepsilon) - \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon)) \tau_{p,s,s'}] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} m_I^\varepsilon \cdot \left[\left(-\varepsilon^{-1} \nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \tau_{p,s,s'} \right] + O(\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} m_I^\varepsilon \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_{p,s,s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \tau_{p,s,s'} \right] + O(\varepsilon) \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left\langle u(x), \left(\left(\frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_{p,s,s'}(x) \cdot \mathbf{p} \right) \tau_{p,s,s'} \right) \right\rangle \\
&= \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left\langle \frac{1}{2} \nabla \nabla u(x) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, (\phi_{p,s,s'}(x) \tau_{p,s,s'}) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Tous les résultats précédents montrent que la distribution

$$\omega_{p,s,s'} - \left(\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'} - (v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \rho_{p,s,s'}$$

est orthogonale à toutes les fonctions régulières dans $\mathcal{D}_A^\perp$ à support compact dans Ω . Puisque ces fonctions sont denses dans $\mathcal{D}_A^\perp$, alors il existe des champs w_s et λ dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tel que, pour tout $(p,s,s') \in \mathcal{A}$,

$$\omega_{p,s,s'} = \left(w_{s'} - w_s + \nabla(v_{s'} + \lambda) \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \tau_{p,s,s'} + (v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \rho_{p,s,s'}.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

7.3.3. Preuve du résultat d'homogénéisation

- (i) **(Inégalité de la Γ -limite inférieure)** : Soit $(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une suite telle que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ et $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \theta$. Si $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = +\infty$, alors il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que $\mathcal{E}_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \leq C$. D'après le lemme 7.5, on sait que les contraintes $\int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0$ et $\int_\Omega u(x) \, dx = 0$ sont satisfaites. D'après le même lemme, on a $v_s^\varepsilon \rightharpoonup v_s$ et $\chi_p^\varepsilon \rightharpoonup \eta_u$. Comme $E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ est borné, alors $\varepsilon^2 E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ tend vers 0. Par conséquent, on a

$$0 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 E_\varepsilon(U^\varepsilon)) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \tilde{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon)) \geq \tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0),$$

d'où la contrainte $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0$.

La définition (4.8) nous permet de réécrire $E_\varepsilon(U^\varepsilon)$ sous la forme $\sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2$.

Par suite, en utilisant (7.19), (7.20), (7.21), les remarques 3.3 et 3.4, on obtient

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{E}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon) + \tilde{F}_\varepsilon(v^\varepsilon, \chi^\varepsilon, \theta^\varepsilon)) \\ & \geq \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \left[\frac{a_{p,s,s'}}{2} (\omega_{p,s,s'}(x))^2 + \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta_u, \theta)(x) \right] \, dx \\ & \geq \inf_{w,v,\theta} \left\{ \tilde{E}(w, \xi_{u,v+\lambda}, v, \eta_u) + \tilde{F}(v, \eta_u, \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

On obtient l'inégalité voulue en remarquant que

$$\tilde{F}(v - \lambda, \eta_u, \theta) = \tilde{F}(v, \eta_u, \theta) \text{ et } \tilde{E}(v + \lambda, \eta_u, 0, 0) = \tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0.$$

- (ii) **(Inégalité de la Γ -limite supérieure)** : Par un argument de densité, on considère une fonction $u \in C^\infty$ telle que $\mathcal{E}(u) \leq C < +\infty$. En vertu de la coercivité et de la semi-continuité inférieure des fonctionnelles $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$, on peut introduire des champs (v, w, θ) appartenant à $C^\infty(\Omega)$ tels que $\mathcal{E}(u) = \tilde{E}(w, \xi_{u,v}, v, \eta_u) + \tilde{F}(v, \eta_u, \theta)$, $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0$, $\int_\Omega u(x) \, dx = 0$ et $\int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0$. La contrainte $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0$ implique que, pour tout $(p, s, s') \in \mathcal{A}$,

$$(v_{s'} - v_s + \nabla u \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0, \quad (7.26)$$

et on déduit que

$$(\nabla v_{s'} \cdot \mathbf{p} - \nabla v_s \cdot \mathbf{p} + \nabla \nabla u \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \cdot \tau_{p,s,s'} = 0. \quad (7.27)$$

Puisque les fonctions u, v_1, w_1, θ_1 sont dans $C^\infty(\Omega)$ et satisfont $\int_\Omega u(x) \, dx = 0$, $\int_\Omega \theta_1(x) \, dx = 0$, alors les quantités

$$M^\varepsilon := \sum_I u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon v_1(y_I^\varepsilon) + \varepsilon^2 w_1(y_I^\varepsilon) \text{ et } t^\varepsilon := \sum_I \theta_1(y_I^\varepsilon)$$

sont des $O(\varepsilon)$.

On définit U^ε et θ^ε en posant

$$U_{I,s}^\varepsilon := u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon v_s(y_I^\varepsilon) + \varepsilon^2 w_s(y_I^\varepsilon) - M^\varepsilon \quad \text{et} \quad \theta_{I,s}^\varepsilon := \theta_s(y_I^\varepsilon) - t^\varepsilon. \quad (7.28)$$

Il est clair que $U^\varepsilon \rightharpoonup u$ et $\theta_s^\varepsilon \rightharpoonup \theta_s$. De plus, comme les vecteurs M^ε et θ^ε sont définis de telle sorte que $\sum_I U_{I,1}^\varepsilon = \sum_I \theta_{I,1}^\varepsilon = 0$, alors

$$U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon = u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon) + \varepsilon(v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) + \varepsilon^2(w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon)).$$

En utilisant (7.2), on obtient

$$\begin{aligned} \omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon &= \varepsilon^{-2}(U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) \cdot \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \\ &= \left(\varepsilon^{-2}(u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon)) + \varepsilon^{-1}(v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{-1}(v_s(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) + (w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon)) \right) \cdot \tau_{p,s,s'} \\ &\quad + \left(\varepsilon^{-1}(u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon)) + (v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) + \varepsilon(w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon)) \right) \cdot \rho_{p,s,s'} \\ &\quad + \left((u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon)) + \varepsilon(v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) + \varepsilon^2(w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon)) \right) \cdot \varpi_{p,s,s'}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Il est clair que le troisième terme dans la somme ci-dessus tend vers zéro puisque $\|\varpi_{p,s,s'}^\varepsilon\| \leq C$. Alors, en utilisant (7.26) et (7.27), on obtient

$$\begin{aligned} \omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon &= \left(\frac{1}{2} \nabla \nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \nabla v_{s'}(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + (w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon)) \right) \cdot \tau_{p,s,s'} \\ &\quad + \left(\nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + (v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon)) \right) \cdot \rho_{p,s,s'} + O(\varepsilon) \\ &= \left((\xi_{u,v})_{p,s'}(y_I^\varepsilon) + w_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - w_s(y_I^\varepsilon) \right) \cdot \tau_{p,s,s'} \\ &\quad + \left((\eta_u)_{p,s'}(y_I^\varepsilon) + v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) \right) \cdot \rho_{p,s,s'} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Par conséquent, en rappelant la définition (7.13), on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(U^\varepsilon) &= \lim_\varepsilon \sum_I \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \frac{a_{p,s,s'}}{2} (\omega_{I,p,s,s'}^\varepsilon)^2 \\ &= \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_{p,s,s'}(w, \xi_{u,v}, \eta_u)(x) \, dx = \tilde{E}(w, \xi_{u,v}, \eta_u). \end{aligned} \quad (7.29)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \wedge (U_{I+p,s'}^\varepsilon - U_{I,s}^\varepsilon) &= \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \wedge \left(\varepsilon^{-1}(u(y_{I+p}^\varepsilon) - u(y_I^\varepsilon)) + v_{s'}(y_{I+p}^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) \right) + O(\varepsilon) \\ &= \tau_{p,s,s'}^\varepsilon \wedge \left(\nabla u(y_I^\varepsilon) \cdot \mathbf{p} + v_{s'}(y_I^\varepsilon) - v_s(y_I^\varepsilon) \right) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(U^\varepsilon, \theta^\varepsilon) = \int_\Omega \sum_{(p,s,s') \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_{p,s,s'}(v, \eta_u, \theta)(x) \, dx = \tilde{F}(v, \eta_u, \theta). \quad (7.30)$$

L'inégalité de la Γ -limite supérieure est obtenue en rassemblant (7.29) et (7.30).

7.4. Calcul explicite de l'énergie homogénéisée

7.4.1. Problèmes de cellule

Dans l'énergie homogénéisée que nous avons obtenue, c'est-à-dire,

$$\mathcal{E}(u) := \inf_{w,v,\theta} \left\{ \tilde{E}(w, \xi_{u,v}, v, \eta_u) + \tilde{F}(v, \eta_u, 0, 0); \tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0 \right\},$$

on doit calculer le minimum par rapport aux variables v , w , θ . Puisque aucune dérivée de w n'apparaît dans l'expression de $\tilde{E}(w, \xi_{u,v}, v, \eta_u)$, le minimum par rapport à cette variable peut se calculer localement. Il en est de même pour θ . Par contre, le minimum par rapport à la variable v ne peut pas se calculer localement puisque dans la définition de $\xi_{u,v}$, il y a le gradient de v . La contrainte $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0$ entraîne que v minimise $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0)$ et par conséquent, il existe un opérateur linéaire L tel que $v = L \cdot \nabla u + \lambda$ où λ est un champ à valeurs dans le noyau de $\tilde{E}$. Une conséquence immédiate de ce dernier résultat est que la contrainte $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0$ conduit à la contrainte suivante sur u :

$$\tilde{E}(L \cdot \nabla u, \eta_u, 0, 0) = 0.$$

On peut donc remplacer w , θ et v par les solutions de ces problèmes de cellule. La définition de η_u et la dépendance de $\xi_{u,v}$ vis-à-vis de ∇v implique que l'énergie homogénéisée est une fonction quadratique de ∇u , $\nabla \nabla u$, λ et $\nabla \lambda$:

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{\lambda \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} Q(\nabla u, \nabla \nabla u, \lambda, \nabla \lambda),$$

où Q est une forme quadratique positive.

A priori, l'infimum par rapport à λ ne peut pas être calculé localement à cause de la présence de son gradient dans l'expression de $\mathcal{E}(u)$.

Nous avons déjà vu au chapitre 5 que l'homogénéisation de réseaux périodiques avec interactions élastiques peut conduire à des modèles effectifs avec une variable cinématique supplémentaire (par exemple, les modèles de Cosserat, Timoshenko et Reissner). Nous avons donné dans ce même chapitre l'algorithme général qui permet de calculer explicitement l'énergie homogénéisée $\mathcal{E}(u)$ pour le cas particulier où $z_s = 0$. Nous ne ré-détaillons pas cet algorithme dans le cas général considéré ici car la procédure est similaire. Seule la partie de l'algorithme qui explicite la forme canonique de l'énergie limite d'extension $\tilde{E}$ doit être changée. En effet, l'énergie limite d'extension obtenue dans ce chapitre est différente de celle obtenue dans le chapitre 4.

7.4.2. Exemple : structure pantographique dissymétrique

Pour comprendre comment les termes de premier et de second gradient peuvent être couplés dans l'énergie homogénéisée, nous choisissons un exemple où l'infimum par rapport à la variable λ peut être calculé localement. La structure que nous considérons est constituée d'une cellule de référence Y contenant six nœuds : $y_1 = (0, 1, 0)$, $y_2 = (0, -1, 0)$, $y_3 = (1, 0, 0)$, $y_4 = (2, 2, 0)$, $y_5 = (2, -2, 0)$, $y_6 = (3, 0, 0)$. Les coefficients des matrices d'interaction sont nuls sauf

$$a_{1,1,3} = a_{1,1,4} = a_{1,2,3} = a_{1,2,5} = a_{1,3,4} = a_{1,3,5} = a_{1,4,6} = a_{1,5,6} = 1,$$

$$a_{2,4,1} = a_{2,5,2} = a_{2,6,1} = a_{2,6,2} = a_{3,1,5} = a_{4,4,2} = 1.$$

La périodisation de la cellule Y selon le vecteur $t_1 = 4e_1$ donne la structure pantographique qui est étudiée dans le cas $z_s = 0$ au chapitre 5 (voir équation (4.55)). Nous avons montré que l'énergie homogénéisée est une énergie de second gradient. Ici, nous modifions cette structure en fixant

$$z_4 = z_5 = \alpha e_1 \text{ et } z_1 = z_2 = z_3 = z_6 = 0, \text{ avec } \alpha > 0.$$

On obtient une nouvelle structure pantographique qui est légèrement dissymétrique comme illustré sur la figure 7.2).

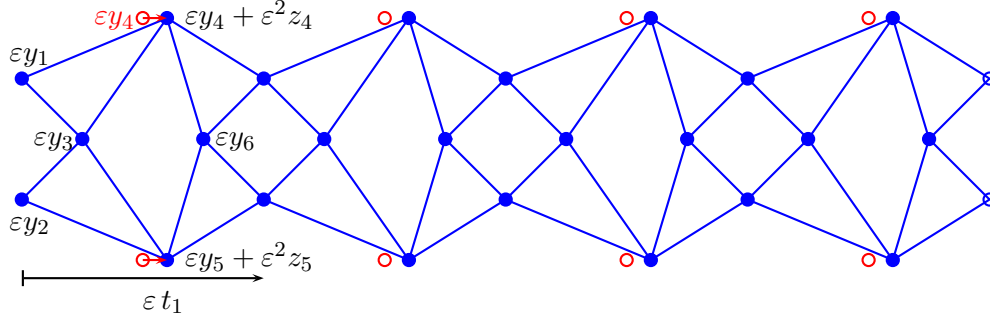


FIGURE 7.2. – Poutre pantographique légèrement dissymétrique

Pour obtenir une structure tridimensionnelle, nous rajoutons deux vecteurs de périodicité $t_2 = -2e_1 + 4e_2$ et $t_3 = e_3$ et connectons le nœud y_3 de la poutre pantographique P_{e_1, e_2} avec le nœud y_3 de la poutre pantographique P_{e_1, e_3} en supposant que $a_{6,3,3} = 1$. Nous obtenons la structure représentée sur la figure 7.3.

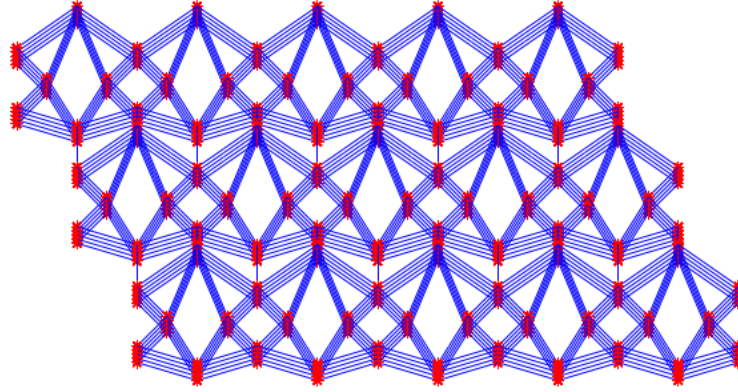


FIGURE 7.3. – Structure pantographique 3D dissymétrique

La contrainte $\tilde{E}(v, \eta_u, 0, 0) = 0$ donne $e_{22}(u) = e_{33}(u) = 0$. L'énergie homogénéisée est

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\zeta(e_{11}(u))^2 + \sigma(e_{12}(u))^2 + \mu \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 2\alpha \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \kappa \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 \right) \right] dx_1 dx_2,$$

avec $\zeta = 144$, $\sigma = 288$, $\mu = \frac{3}{88}$, $\gamma = \frac{484}{131}$, $\kappa = \frac{13}{44}$.

Cette énergie ressemble beaucoup à l'énergie obtenue au paragraphe 5.2.2.6. Mais, la nouveauté ici c'est le couplage entre les termes de premier et de second gradient. Par ailleurs, on remarque que si l'on fait tendre α vers 0, on retrouve l'énergie homogénéisée de la structure pantographique étudiée au paragraphe 5.2.2.6.

7.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'homogénéisation de réseaux périodiques dans le cas où les positions des nœuds dans la cellule périodique de taille unité dépendent de ε . Nous avons obtenu une formule d'homogénéisation dans laquelle les termes de premier et de second gradient sont couplés. Nous avons exhibé une structure particulière qui est la structure pantographique dissymétrique, mettant en évidence un tel couplage. A notre connaissance, cette étude est le premier résultat mathématique où un modèle de second gradient couplant les termes de premier et de second gradient est obtenu par homogénéisation.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à l'obtention de métamatériaux de second gradient par homogénéisation de matériaux composites élastiques périodiques à fort contraste. Nous avons considéré des structures élastiques périodiques qui se modélisent comme des structures basées sur un graphe périodique élargi. Nous avons montré que l'étude de ces structures peut se réduire à l'étude de modèles discrets de réseaux périodiques de nœuds reliés par des interactions élastiques (chapitre 3).

Dans le chapitre 4, nous avons montré que l'homogénéisation des réseaux périodiques obtenus au chapitre 3 peut conduire à des modèles de milieux continus généralisés et de second gradient. Nous avons établi une formule générale d'homogénéisation donnée sous forme d'un problème de minimisation qui permet de relier les propriétés macroscopiques des structures étudiées à partir de la connaissance de leur design. Cette formule est un outil pour concevoir des matériaux de second gradient.

Dans le chapitre 5, nous avons décrit de façon détaillée l'algorithme qui rend explicite la formule homogénéisée obtenue au chapitre 4. En appliquant notre résultat d'homogénéisation à des structures pantographiques, nous avons obtenu des modèles homogénéisés de second gradient où les termes de premier et de second gradient sont découplés. Nous avons constaté que cette absence de couplage était due au fait que nous avons supposé que les positions des nœuds dans la cellule périodique de taille unité ne dépendaient pas de ε . En remettant en cause cette hypothèse au chapitre 7, nous avons obtenu des modèles de second gradient couplant les termes de premier et de second gradient.

Dans le chapitre 6, nous avons réalisé une étude expérimentale pour étudier la faisabilité des matériaux de second gradient. La géométrie des matériaux étudiés était basée sur des structures pantographiques. Les résultats expérimentaux sont en accord avec les résultats théoriques obtenus au chapitre 5.

Perspectives

Les résultats obtenus dans ce travail ouvrent de nombreuses et diverses perspectives.

Perspectives théoriques

Nous avons montré un résultat général d'homogénéisation qui s'applique à une importante classe de structures périodiques : les structures basées sur un graphe périodique. Mais, nos hypothèses étaient faites seulement dans le cadre de l'élasticité linéaire. Une perspective immédiate est d'étendre ce résultat dans le cadre de l'élasticité non linéaire. Jusqu'à présent, les modèles de second gradient non linéaires sont obtenus dans la littérature de façon heuristique [16, 43]. Ce résultat pourra s'établir en suivant la même démarche que celle adoptée dans ce

travail. En plus, il permettra de prendre en compte dans le processus d'homogénéisation les non-linéarités qui apparaissent dans les microstructures.

Perspective numérique

Dans l'algorithme qui rend explicite la formule d'homogénéisation au chapitre 5, il reste deux points à implémenter ou à automatiser : la connectivité des structures et l'existence ou la non-existence des problèmes de "localisation" de premier et de second gradient. Il serait intéressant d'automatiser ces deux points dans le code qui calcule l'énergie homogénéisée obtenue dans ce travail.

Perspectives expérimentales

Nous avons essayé au chapitre 6 d'obtenir des preuves expérimentales des effets de second gradient pour les matériaux architecturés basés sur des structures pantographiques. Nous avons trouvé quelques résultats encourageants. Il serait intéressant dans un travail futur de chercher à optimiser les éprouvettes afin de maximiser les effets de second gradient.

Problème ouvert

La Γ -fermeture pour la classe des structures basées sur un graphe périodique est un problème ouvert.

A. Espaces de Sobolev

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Les résultats énoncés dans cette annexe peuvent se trouver dans [3, 55, 26, 30].

On note $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω et de carré intégrable au sens de Lebesgue. Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Remarque A.1. 1) Pour une fonction à valeurs vectorielles $u = (u_1, \dots, u_n) \in (L^2(\Omega))^n$, on note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Pour une fonction à valeurs matricielles $u = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, on note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|u_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note $C_c^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .

Théorème A.2. *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, ce qui signifie que pour tout $u \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Le résultat suivant est une conséquence du théorème A.2.

Proposition A.3. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} u(x)\phi(x) \, dx = 0,$$

alors $u = 0$ presque partout dans Ω .

Définition A.4. Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que u est dérivable au sens de faible s'il existe une fonction $v = (v_1, \dots, v_n) \in (L^2(\Omega))^n$ telle que, pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \, dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \phi(x) \, dx.$$

Chaque fonction v_i est appelée la i -ème dérivée partielle faible de u et la fonction v est appelée le gradient faible de u . On notera $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $v = \nabla u$.

Proposition A.5. Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\left| \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors u est dérivable au sens faible.

A.1. Espace $H^1(\Omega)$

Définition A.6. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de u au sens de la définition A.4.

Proposition A.7. Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) \, dx \quad (\text{A.1})$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition A.8. Toute fonction continue sur Ω , C^1 par morceaux et à support dans $\overline{\Omega}$, appartient à $H^1(\Omega)$.

Définition A.9. Soit $u \in (L^2(\Omega))^n$. On dit que u admet une divergence au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $\sigma \in L^2(\Omega)$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \nabla \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} \sigma(x) \phi(x) \, dx.$$

La fonction σ est appelée la divergence faible de u , et on note $\sigma = \operatorname{div}(u)$.

Proposition A.10. Soit $u \in (L^2(\Omega))^n$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\left| \int_{\Omega} u(x) \cdot \nabla \phi(x) \, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors u admet une divergence au sens faible.

Beaucoup de propriétés des espaces de Sobolev sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ nécessitent une certaine régularité du bord $\partial\Omega$.

Définition A.11. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On dit que la frontière $\partial\Omega$ de Ω est **lipschitzienne** (respectivement de classe C^m pour un certain $m > 0$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et un système de coordonnées orthogonal noté $y = (y', y_n)$ où $y' := (y_1, \dots, y_{n-1})$, tels que :

i) V est un pavé dans ce système de coordonnées, i.e.,

$$V = \{y = (y', y_n) \mid \forall 1 \leq j \leq n, -a_j < y_j < a_j\}.$$

ii) Il existe une application φ lipschitzienne (respectivement de classe C^m) définie sur

$$V' := \{y' \mid \forall 1 \leq j \leq n-1, -a_j < y_j < a_j\}$$

et vérifiant :

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2}, \forall y' \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y \in V \mid y_n < \varphi(y')\}, \quad \partial\Omega \cap V = \{y \in V \mid y_n = \varphi(y')\}.$$

Remarque A.12. La définition ci-dessus signifie que dans un voisinage de chacun de ses points, $\partial\Omega$ est le graphe d'une application lipschitzienne et que Ω se situe d'un seul côté de sa frontière. Par abus de langage, on dira qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzien (respectivement de classe C^m) si sa frontière est lipschitzienne (respectivement de classe C^m).

Proposition A.13. Tout ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzien.

Théorème A.14. Si Ω est un ouvert borné lipschitzien ou de classe C^1 , alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Proposition A.15. Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Il existe un opérateur de prolongement

$$P: H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$$

linéaire continu tel que, pour tout $u \in H^1(\Omega)$, la restriction de Pu à Ω s'identifie à u .

Théorème A.16 (de trace). Soit Ω un ouvert borné lipschitzien. Alors, l'application

$$\gamma_0: C_c^\infty(\overline{\Omega}) \ni u \mapsto u|_{\partial\Omega}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0 . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque A.17. Grâce à ce théorème de trace, on peut parler d'une valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$. La fonction $\gamma_0(u)$ est appelée la **trace** de u sur $\partial\Omega$.

Définition A.18. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ lipschitzien. On définit $H^{1/2}(\partial\Omega)$ comme l'image de l'application γ_0 définie par le théorème A.16, c'est-à-dire, $H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$.

A.2. Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition A.19. On définit l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Remarque A.20. D'après la définition de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$, on peut voir $H_0^1(\Omega)$ comme le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué de fonctions qui s'annulent sur $\partial\Omega$.

Proposition A.21. Muni du produit scalaire (A.1), l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition A.22. On définit $H^{-1}(\Omega)$ comme le dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues sur $H_0^1(\Omega)$.

Théorème A.23 (de De Rham). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que $\langle f, \phi \rangle = 0$ pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ à divergence nulle. Alors, il existe $u \in L^2(\Omega)$ telle que $f = \nabla u$. En outre, si Ω est connexe, alors la fonction u est unique à une constante additive près.

Pour la démonstration de ce théorème, voir [55, Lemme 2.1].

Théorème A.24 (Rellich). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $u_n \in H_0^1(\Omega)$ une suite bornée dans $H^1(\Omega)$. Alors, il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } \nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Remarque A.25. Le théorème de Rellich est valide pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ à condition que l'ouvert Ω soit « suffisamment régulier », par exemple lorsque Ω est lipschitzien ou de classe C^1 .

B. Inégalités utiles

Définition B.1. On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est **borné dans une direction** s'il existe un vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^n$ et une constante $a > 0$ tels que

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot \xi \in [-a; a]\}.$$

B.1. Inégalités de Poincaré

Une inégalité de type Poincaré est une inégalité qui permet de majorer la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de son gradient. Il existe dans la littérature de nombreuses variantes d'inégalités de type Poincaré.

Théorème B.2 (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (ou borné dans une direction). Alors, il existe une constante $C_P > 0$ dite constante de Poincaré, qui dépend de Ω , telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{B.1})$$

Remarque B.3. Une conséquence remarquable de l'inégalité de Poincaré (B.1) est que la semi-norme

$$u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème B.4 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une constante positive C qui dépend uniquement de Ω telle que

$$\left\| u - \fint_{\Omega} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.2})$$

B.2. Inégalités de Korn

Théorème B.5 (La première inégalité de Korn). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n). \quad (\text{B.3})$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [30, Théorème 3.1].

Théorème B.6 (La deuxième inégalité de Korn). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ lipschitzien. Il existe une constante $C_K > 0$ dite constante de Korn, dépendant de Ω , telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_K \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad \forall u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n). \quad (\text{B.4})$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [30, Théorème 3.2].

Définition B.7 (Mouvement rigide). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des *mouvements rigides* sur Ω est défini par :

$$\mathcal{R} := \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n); e(v) = 0\}.$$

On montre que tout élément de $\mathcal{R}$ peut s'écrire sous la forme $v(x) = a + M \cdot x$, où $a \in \mathbb{R}^n$ et M est une matrice antisymétrique $n \times n$. Par ailleurs, on a la décomposition suivante :

$$H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) = \mathcal{R} \oplus \widehat{W}, \quad (\text{B.5})$$

où

$$\widehat{W} := \left\{ w \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n); \oint_{\Omega} w = 0 \text{ et } \oint_{\Omega} \nabla^a w = 0 \right\}.$$

En effet, pour $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ donnée, on peut prendre $v \in \mathcal{R}$ sous la forme :

$$v(x) = a + M \cdot (x - \bar{x}), \text{ avec } a = \oint_{\Omega} u \text{ et } M = \oint_{\Omega} \nabla^a u,$$

$\bar{x}$ étant le centre de masse de Ω . Il est clair que la fonction $w := u - v$ appartient à $\widehat{W}$. Par définition de $\widehat{W}$, on voit bien que $\mathcal{R} \cap \widehat{W} = \{0\}$.

Théorème B.8 ([77], Théorème 2.5). Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ lipschitzien et soit V un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ tel que $V \cap \mathcal{R} = \{0\}$ (i.e. V ne contient pas de mouvement rigide non nul). Alors, il existe une constante $K_1 = K_1(\Omega, V)$ telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in V. \quad (\text{B.6})$$

Remarque B.9. Dans le théorème B.8, on peut prendre pour V l'un des espaces suivants :

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \langle v, r \rangle_{H^1(\Omega)} = 0, \forall r \in \mathcal{R}\},$$

ou

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \langle v, r \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \forall r \in \mathcal{R}\}.$$

Théorème B.10. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ lipschitzien. Alors, il existe une constante positive $K_2 = K_2(\Omega)$ telle que

$$\left\| \nabla u - \oint_{\Omega} \nabla^a u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_2 \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n). \quad (\text{B.7})$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [49].

Corollaire B.11. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ lipschitzien. Pour tout champ $u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que $\oint_{\Omega} \nabla^a u = 0$, il existe une constante K_3 telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_3 \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{B.8})$$

C. Énergie élastique d'une poutre bidimensionnelle

On considère une poutre élastique de longueur ℓ (centrée à l'origine), chargée uniquement en ses extrémités notés A et B . Chaque extrémité a deux degrés de liberté en translation notés par (u, v) et un degré de liberté en rotation noté par θ , où u est le déplacement axial et v est le déplacement transverse. Dans le cadre des petites déformations, l'énergie élastique de la poutre s'écrit :

$$E = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left[\frac{K_1}{2} (u'(x))^2 + \frac{K_2}{2} (v''(x))^2 \right] dx,$$

où K_1 et K_2 sont respectivement la raideur à l'extension et la raideur à la flexion.

Les conditions aux limites sont :

$$u(-\ell/2) = u_A, \quad u(\ell/2) = u_B, \quad (C.1)$$

$$v(-\ell/2) = v_A, \quad v(\ell/2) = v_B, \quad v'(-\ell/2) = \theta_A, \quad v'(\ell/2) = \theta_B. \quad (C.2)$$

Le déplacement à l'équilibre de la barre résulte de la minimisation de l'énergie de déformation E . Les équations d'équilibre sont $u'' = 0$ et $v^{(4)} = 0$. On a donc

$$u(x) = \alpha x + \beta \quad \text{et} \quad v(x) = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Les conditions (C.1) donnent $\alpha = \frac{u_B - u_A}{\ell}$ et $\beta = \frac{u_B + u_A}{2}$. Donc,

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{K_1}{2} (u'(x))^2 dx = \frac{K_1}{2\ell} (u_B - u_A)^2.$$

Les conditions (C.2) donnent $a = \frac{v_B + v_A}{2} - \frac{\ell(\theta_B - \theta_A)}{8}$, $b = \frac{3(v_B - v_A)}{2\ell} - \frac{\theta_B + \theta_A}{4}$, $c = \frac{\theta_B - \theta_A}{2\ell}$ et $d = \frac{1}{\ell^2} \left(\theta_B + \theta_A - 2\frac{v_B - v_A}{\ell} \right)$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{K_2}{2} (v''(x))^2 dx &= \frac{K_2}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (2c + 6dx)^2 dx = \frac{K_2}{2} (3d^2 \ell^3 + 4c^2 \ell) \\ &= \frac{K_2}{2\ell} \left(3 \left(\theta_B + \theta_A - 2\frac{v_B - v_A}{\ell} \right)^2 + (\theta_B - \theta_A)^2 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'énergie de la poutre devient

$$E = \frac{1}{2\ell} \left[K_1 (u_B - u_A)^2 + K_2 \left(3 \left(\theta_B + \theta_A - 2\frac{v_B - v_A}{\ell} \right)^2 + (\theta_B - \theta_A)^2 \right) \right].$$

D. Énergie élastique en contraintes

L'énergie d'un matériau élastique linéaire isotrope s'écrit :

$$E(u) = \int_{\Omega} W(e(u)) \, dx$$

où Ω est le domaine occupé par le matériau et W est la densité d'énergie élastique définie par :

$$W(e(u)) := \mu \|e(u)\|^2 + \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(e(u))]^2.$$

On note $e^d(u)$ la partie déviatorique de $e(u)$, i.e.

$$e^d(u) := e(u) - \frac{\text{tr}(e(u))}{N} \text{Id}.$$

On a :

$$\begin{aligned} W(e(u)) &= \mu \left\| e^d(u) + \frac{1}{N} \text{tr}(e(u)) \text{Id} \right\|^2 + \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(e(u))]^2 \\ &= \mu \|e^d(u)\|^2 + \frac{N\lambda + 2\mu}{2N} [\text{tr}(e(u))]^2. \end{aligned}$$

La forme conjuguée de $W(e(u))$ par rapport à $e(u)$ est appelée la densité d'énergie complémentaire. Elle est définie pour tout tenseur symétrique σ par

$$W^*(\sigma) := \sup_{e(u)} \{ \sigma : e(u) - W(e(u)) \}. \quad (\text{D.1})$$

L'énergie associée à W^* est appelée l'énergie complémentaire.

D'après l'identité

$$\sigma : e(u) = \sigma^d : e^d(u) + \frac{1}{N} \text{tr}(\sigma) \text{tr}(e(u)), \quad (\text{D.2})$$

on obtient

$$\begin{aligned} W^*(\sigma) &= \sup_{e(u)} \left\{ \sigma^d : e^d(u) - \mu \|e^d(u)\|^2 + \frac{1}{N} \text{tr}(\sigma) \text{tr}(e(u)) - \frac{N\lambda + 2\mu}{2N} [\text{tr}(e(u))]^2 \right\} \\ &= \sup_{e(u)} \{ \sigma^d : e^d(u) - \mu \|e^d(u)\|^2 \} + \sup_{e(u)} \left\{ \frac{1}{N} \text{tr}(\sigma) \text{tr}(e(u)) - \frac{N\lambda + 2\mu}{2N} [\text{tr}(e(u))]^2 \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant (D.2), on trouve que

$$\sup_{e(u)} \{ \sigma^d : e^d(u) - \mu \|e^d(u)\|^2 \} = \frac{1}{4\mu} \|\sigma^d\|^2 = \frac{1}{4\mu} \|\sigma\|^2 - \frac{1}{4\mu N} (\text{tr}(\sigma))^2$$

et

$$\sup_{e(u)} \left\{ \frac{1}{N} \operatorname{tr}(\sigma) \operatorname{tr}(e(u)) - \frac{N\lambda + 2\mu}{2N} \operatorname{tr}^2(e(u)) \right\} = \frac{1}{2N(N\lambda + 2\mu)} (\operatorname{tr}(\sigma))^2.$$

Ainsi,

$$\boxed{W^*(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \|\sigma\|^2 - \frac{\lambda}{4\mu(N\lambda + 2\mu)} (\operatorname{tr}(\sigma))^2.}$$

On peut réécrire cette expression sous la forme :

$$W^*(\sigma) = \frac{1 + \nu}{2Y} \|\sigma\|^2 - \frac{\nu}{2Y} (\operatorname{tr}(\sigma))^2,$$

avec $\nu := \frac{\lambda}{2\mu + (N-1)\lambda}$ (le coefficient de Poisson) et $Y := \frac{2\mu(N\lambda + 2\mu)}{2\mu + (N-1)\lambda}$ (le module d'Young).

Une conséquence directe de (D.1) est l'inégalité suivante :

$$W(e(u)) + W^*(\sigma) - \sigma : e(u) \geq 0.$$

En intégrant cette inégalité sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\mu \|e(u)\|^2 + \frac{\lambda}{2} [\operatorname{tr}(e(u))]^2 \right) dx &\geq - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4\mu} \|\sigma\|^2 - \frac{\lambda}{4\mu(N\lambda + 2\mu)} (\operatorname{tr}(\sigma))^2 \right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sigma : e(u) dx. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Bibliographie

- [1] H. Abdoul-Anziz and P. Seppecher. Homogenization of periodic graph-based elastic structures. *Journal de l'Ecole polytechnique–Mathématiques*, 5 :259–288, 2018.
- [2] H. Abdoul-Anziz and P. Seppecher. Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices. *MEMOCS*, 6(3) :213–250, 2018.
- [3] R. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [4] E. C. Aifantis. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science*, 30(10) :1279–1299, 1992.
- [5] E. C. Aifantis. Strain gradient interpretation of size effects. *International Journal of Fracture*, 95(1) :299–314, 1999.
- [6] J.-J. Alibert and A. Della Corte. Second-gradient continua as homogenized limit of pantographic microstructured plates : a rigorous proof. *Z. Angew. Math. Phys.*, 66(5) :2855–2870, 2015.
- [7] J.-J. Alibert, P. Seppecher, and F. dell’Isola. Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 8(1) :51–73, 2003.
- [8] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [9] G. Allaire. *Shape Optimization by the Homogenization Method*, volume 146. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [10] H. Altenbach and V. A. Eremeyev. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM J. Appl. Math. Mech./Z. Angew. Math. Mech.*, 89(4) :242–256, 2009.
- [11] N. Auffray. *Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2008.
- [12] N. Auffray, R. Bouchet, and Y. Brechet. Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 46(2) :440–454, 2009.
- [13] I. Babuška and S. Sauter. Algebraic algorithms for the analysis of mechanical trusses. *Mathematics of Computation*, 73(248) :1601–1622, 2004.
- [14] N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko. *Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media. Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*, volume 36. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [15] G. Barbagallo, A. Madeo, I. Azehaf, I. Giorgio, F. Morestin, and P. Boisse. Bias extension test on an unbalanced woven composite reinforcement : Experiments and modeling via a second-gradient continuum approach. *Journal of Composite Materials*, 51(2) :153–170, 2017.

- [16] S. Bardenhagen and N. Triantafyllidis. Derivation of higher order gradient continuum theories in 2, 3-D non-linear elasticity from periodic lattice models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(1) :111–139, 1994.
- [17] M. Bellieud. Homogenization of stratified elastic media with high contrast. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 49(4) :2615–2665, 2017.
- [18] M. Bellieud and G. Bouchitté. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers. *Asymptotic Analysis*, 32(2) :153–183, 2002.
- [19] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolau. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [20] G. Bouchitté, G. Buttazzo, and I. Fragalà. Mean curvature of a measure and related variational problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 25(1-2) :179–196, 1997.
- [21] G. Bouchitté and I. Fragalà. Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 32(6) :1198–1226, 2001.
- [22] C. Boutin, F. dell’Isola, I. Giorgio, and L. Placidi. Linear pantographic sheets : Asymptotic micro-macro models identification. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 5(2) :127–162, 2017.
- [23] F. Bouyge, I. Jasiuk, and M. Ostoj-Starzewski. A micromechanically based couple-stress model of an elastic two-phase composite. *International journal of solids and structures*, 38(10-13) :1721–1735, 2001.
- [24] A. Braides. *Gamma-convergence for Beginners*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [25] A. Braides and A. Defranceschi. *Homogenization of multiple integrals*. Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [26] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*. Dunod, 2005.
- [27] D. Caillerie and J. C. Nedelec. Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 6(1) :159–191, 1984.
- [28] M. Camar-Eddine. *Fermeture des fonctionnelles de diffusion et de l’élasticité linéaire pour la topologie de la Mosco-convergence*. PhD thesis, Université de Toulon et du Var, 2002.
- [29] M. Camar-Eddine and P. Seppecher. Determination of the closure of the set of elasticity functionals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 170(3) :211–245, 2003.
- [30] G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, and A. S. Shamaev. *Homogenization : Methods and Applications*. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2007.
- [31] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 335(1) :99–104, 2002.
- [32] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. The periodic unfolding method in homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 40(4) :1585–1620, 2008.
- [33] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*. Oxford University Press, 1999.
- [34] D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin. *Homogenization of reticulated structures*. Springer-Verlag New York, 1999.

- [35] G. Dal Maso. *An Introduction to Γ -Convergence*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- [36] C. Davini. Homogenization of linearly elastic honeycombs. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 18(1) :3–23, 2013.
- [37] C. Davini and O. Federica. A homogenized model for honeycomb cellular materials. *Journal of Elasticity*, 104(1-2) :205–226, 2011.
- [38] E. De Giorgi. Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell’area. *Rend. Mat.*, 6(8) :277–294, 1975.
- [39] A. Defranceschi. An introduction to homogenization and G -convergence. *Lecture Notes, School of Homogenization, ICTP, Trieste*, 1993.
- [40] G. Del Piero, S. Forest, and P. Seppecher. *Mécanique des milieux continus généralisés*. Mécanique Théorique, 2017.
- [41] F. dell’Isola, U. Andreaus, and L. Placidi. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics : An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20(8) :887–928, 2014.
- [42] F. dell’Isola, A. Della Corte, and I. Giorgio. Higher-gradient continua : The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(4) :852–872, 2017.
- [43] F. dell’Isola, I. Giorgio, M. Pawlikowski, and N. L. Rizzi. Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices : Heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. *Proceedings of the Royal Society. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2185), 2016.
- [44] F. dell’Isola, A. Madeo, and P. Seppecher. Cauchy tetrahedron argument applied to higher contact interactions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 219(3) :1305–1341, 2016.
- [45] F. dell’Isola, P. Seppecher, and A. Della Corte. The postulations à la D’Alembert and à la Cauchy for higher gradient continuum theories are equivalent : a review of existing results. *Proc. R. Soc. A*, 471(2183) :20150415, 2015.
- [46] F. Dos Reis and J. Ganghoffer. Discrete homogenization of architected materials : Implementation of the method in a simulation tool for the systematic prediction of their effective elastic properties. *Tech. Mech.*, 30(1-3) :85–109, 2010.
- [47] A. C. Eringen. *Microcontinuum field theories II : Fluent media*, volume 2. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [48] S. Forest. Homogenization methods and mechanics of generalized continua - Part 2. *Theoretical and Applied Mechanics*, 28-29 :113–143, 2002.
- [49] K. O. Friedrichs. On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn’s inequality. *Annals of Mathematics*, 48(2) :441–471, 1947.
- [50] Gabriele, A. Madeo, F. Morestin, and P. Boisse. Modelling the deep drawing of a 3D woven fabric with a second gradient model. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016.
- [51] B. Gambin and E. Kröner. Higher-order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media. *Physica status solidi (b)*, 151(2) :513–519, 1989.

- [52] P. Germain. *Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1 : Théorie Générale*. Masson et Cie, 1973.
- [53] L. J. Gibson and M. F. Ashby. *Cellular Solids : Structure and Properties*. Cambridge University Press, 1999.
- [54] I. Giorgio. Numerical identification procedure between a micro-Cauchy model and a macro-second gradient model for planar pantographic structures. *Z. Angew. Math. Phys.*, 67(4) :95, 2016.
- [55] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.
- [56] S. Gonella and M. Ruzzene. Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 45(10) :2897–2915, 2008.
- [57] J. N. Grima, A. Alderson, and K. E. Evans. Negative Poisson’s ratios from rotating rectangles. *Computational Methods in Science and Technology*, 10(2) :137–145, 2004.
- [58] P. Harrison. Modelling the forming mechanics of engineering fabrics using a mutually constrained pantographic beam and membrane mesh. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 81 :145–157, 2016.
- [59] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [60] E. Y. Khruslov. Homogenized models of composite media. In *Composite media and homogenization theory*, pages 159–182. Springer, 1991.
- [61] H. Le Dret and A. Raoult. Homogenization of hexagonal lattices. *Networks and Heterogeneous Media*, 8(2) :541–572, 2013.
- [62] A. Lebéé and K. Sab. Homogenization of thick periodic plates : Application of the bending-gradient plate theory to a folded core sandwich panel. *International Journal of Solids and Structures*, 49(19-20) :2778–2792, 2012.
- [63] A. Lebéé and K. Sab. On the generalization of Reissner plate theory to laminated plates, part I : Theory. *Journal of Elasticity*, 126(1) :39–66, 2017.
- [64] A. Leung and S. Guest. Single member actuation of kagome lattice structures. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2(2) :303–317, 2007.
- [65] A. Madeo, A. Della Corte, I. Giorgio, and D. Scerrato. Modeling and designing micro-and nano-structured metamaterials : Towards the application of exotic behaviors. *Math. Mech. Solids*, 22(4) :873–884, 2017.
- [66] A. Madeo, M. Ferretti, F. dell’Isola, and P. Boisse. Thick fibrous composite reinforcements behave as special second-gradient materials : three-point bending of 3D interlocks. *Z. Angew. Math. Phys.*, 66(4) :2041–2060, 2015.
- [67] P.-G. Martinsson and I. Babuška. Homogenization of materials with periodic truss or frame micro-structures. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(5) :805–832, 2007.
- [68] P.-G. Martinsson and I. Babuška. Mechanics of materials with periodic truss or frame micro-structures. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 185(2) :201–234, 2007.

- [69] M. Mazière and S. Forest. Strain gradient plasticity modeling and finite element simulation of Lüders band formation and propagation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27(1-2) :83–104, 2015.
- [70] G. W. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, 2002.
- [71] R. Mindlin and H. Tiersten. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1) :415–448, 1962.
- [72] R. D. Mindlin. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental mechanics*, 3(6) :756–757, 1963.
- [73] R. D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Structures*, 1 :417–418, 1965.
- [74] U. Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Mathematics*, 3(4) :510–585, 1969.
- [75] F. Murat and L. Tartar. H -convergence. In Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials, L. Cherkaev and R. Kohn ed. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhäuser, Boston, pages 21–43, 1998.
- [76] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(3) :608–623, 1989.
- [77] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, and G. A. Yosifian. *Mathematical problems in elasticity and homogenization*. North-Holland, 1992.
- [78] M. Ostoja-Starzewski. Lattice models in micromechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 55(1) :35–60, 2002.
- [79] S. Pastukhova. Homogenization of problems of elasticity theory on periodic box and rod frames of critical thickness. *Journal of Mathematical Sciences*, 130(5) :4954–5004, 2005.
- [80] C. Pideri and P. Seppecher. A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 9(5) :241–257, 1997.
- [81] L. Placidi, U. Andreaus, and I. Giorgio. Identification of two-dimensional pantographic structure via a linear D4 orthotropic second gradient elastic model. *Journal of Engineering Mathematics*, 103(1) :1–21, 2017.
- [82] L. Placidi, E. Barchiesi, E. Turco, and N. L. Rizzi. A review on 2D models for the description of pantographic fabrics. *Z. Angew. Math. Phys.*, 67(5) :121, 2016.
- [83] C. Polizzotto and G. Borino. A thermodynamics-based formulation of gradient-dependent plasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17(5) :741–761, 1998.
- [84] M. Poncelet, N. Auffray, C. Jailin, A. Somera, and C. Morel. Experimental strain gradient evidence in non-central symmetric lattice. In *EUROMECH-Colloquium 579 on Generalized and microstructured continua*, 2016.
- [85] Y. Rahali, I. Giorgio, J. Ganghoffer, and F. dell’Isola. Homogenization à la Piola produces second gradient continuum models for linear pantographic lattices. *International Journal of Engineering Science*, 97 :148–172, 2015.
- [86] A. Raoult, D. Caillerie, and A. Mourad. Elastic lattices : equilibrium, invariant laws and homogenization. *Ann. Univ. Ferrara*, 54(2) :297–318, 2008.

- [87] E. Reissner. Reflections on the theory of elastic plates. *Applied Mechanics Reviews*, 38(11) :1453–1464, 1985.
- [88] K. Sab and A. Lebé. *Homogenization of heterogeneous thin and thick plates*. Wiley-ISTE, 2015.
- [89] E. Sanchez-Palencia. *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [90] G. Sciarra, F. dell’Isola, and O. Coussy. Second gradient poromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44(20) :6607–6629, 2007.
- [91] P. Seppecher, J.-J. Alibert, and F. dell’Isola. Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions. *J. Phys. Conf. Series*, 319(1), 2011.
- [92] S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.*, 22(4) :571–597, 1968.
- [93] L. Tartar. Nonlocal effects induced by homogenization. In *Partial differential equations and the calculus of variations*, pages 925–938. Springer, 1989.
- [94] R. Temam and A. Miranville. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2005.
- [95] R. A. Toupin. Elastic materials with couple stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11 :385–414, 1962.
- [96] R. A. Toupin. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2) :85–112, 1964.
- [97] N. Triantafyllidis and E. C. Aifantis. A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16(3) :225–237, 1986.
- [98] E. Turco, F. dell’Isola, A. Cazzani, and N. L. Rizzi. Hencky-type discrete model for pantographic structures : numerical comparison with second gradient continuum models. *Z. Angew. Math. Phys.*, 67(4) :85, 2016.
- [99] E. Turco, M. Golaszewski, A. Cazzani, and N. L. Rizzi. Large deformations induced in planar pantographic sheets by loads applied on fibers : experimental validation of a discrete lagrangian model. *Mech. Res. Commun.*, 76 :51–56, 2016.
- [100] E. Turco, M. Golaszewski, I. Giorgio, and F. D’Annibale. Pantographic lattices with non-orthogonal fibres : experiments and their numerical simulations. *Composites Part B : Engineering*, 118 :1–14, 2017.
- [101] Y. Yang and A. Misra. Micromechanics based second gradient continuum theory for shear band modeling in cohesive granular materials following damage elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 49(18) :2500–2514, 2012.
- [102] V. V. Zhikov. On an extension of the method of two-scale convergence and its applications. *Sbornik : Mathematics*, 191(7) :973–1014, 2000.
- [103] V. V. Zhikov. Homogenization of elasticity problems on singular structures. *Izvestiya : Mathematics*, 66(2) :299–365, 2002.
- [104] V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova. Homogenization for elasticity problems on periodic networks of critical thickness. *Izvestiya : Mathematics*, 66(2) :697, 2003.

Résumé

Ces dernières décennies ont vu un renouveau d'intérêt pour les matériaux composites élastiques qui s'avèrent très utiles dans la conception de structures. Pour comprendre le comportement macroscopique de ces matériaux, on fait appel aux méthodes d'homogénéisation. Dans cette thèse, nous nous intéressons à étudier rigoureusement le comportement macroscopique des matériaux composites élastiques périodiques présentant des hétérogénéités à fort contraste dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans un premier temps, nous étudions l'homogénéisation de structures périodiques constituées d'un matériau élastique linéaire isotrope homogène de grande rigidité. Sous certaines hypothèses sur la géométrie des structures considérées, nous montrons que leur étude peut se réduire à l'étude de systèmes discrets correspondant à des réseaux périodiques de nœuds reliés entre eux par des interactions élastiques. Ensuite, en prenant en compte les différents ordres de grandeur des raideurs en extension, en flexion et en torsion, nous montrons que l'homogénéisation des structures considérées peut conduire à des matériaux de « second gradient », c'est-à-dire, des matériaux dont l'énergie élastique homogénéisée dépend des composantes du premier gradient et du second gradient du champ de déplacement. Dans un deuxième temps, nous réalisons des essais de traction sur des structures pantographiques pour étudier la faisabilité des matériaux de second gradient.

Mots clés : Homogénéisation, composites, second gradient.

Abstract

Recent decades have seen renewed interest in elastic composite materials that are proving to be very useful in structural design. To understand the macroscopic behavior of these materials, we use homogenization methods. In this thesis, we are interested in rigorously studying the macroscopic behavior of periodic elastic composite materials with high contrast heterogeneities in the framework of linear elasticity. Firstly, we study the homogenization of periodic structures made of a homogeneous isotropic linear elastic material with high rigidity. Under certain hypotheses on the geometry of the considered structures, we show that their study can be reduced to the study of discrete systems corresponding to frame lattices. Then, taking into account the different orders of magnitude of extensional, flexural and torsional stiffnesses, we show that the homogenization of the considered structures can lead to second gradient materials, that is, materials whose homogenized elastic energy depend on the components of the first gradient and the second gradient of the displacement field. In a second step, we carry out tensile tests on pantographic structures to study the feasibility of second gradient materials.

Keywords : Homogenization, composites, second gradient.