HAL
open science

Le problème mathématique des trois corps, abordé simultanément sous l'angle de la recherche théorique et celui de la diffusion auprès de publics variés

Marie Lhuissier

▶ **To cite this version:**

Marie Lhuissier. Le problème mathématique des trois corps, abordé simultanément sous l'angle de la recherche théorique et celui de la diffusion auprès de publics variés. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSEN077 . tel-02025349

HAL Id: tel-02025349

https://theses.hal.science/tel-02025349v1

Submitted on 19 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro national de thèse : 2018LYSEN077

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée par
l'École Normale Supérieure de Lyon

École doctorale n° 512
École doctorale en informatique et mathématiques de Lyon

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 21 novembre 2018, par

Marie Lhuissier

Le problème mathématique des trois corps, abordé simultanément sous l'angle de la recherche théorique et celui de la diffusion auprès de publics variés

Après avis de : Patrice Le Calvez, Pr. à l'Université Pierre et Marie Curie
Tadashi Tokieda, Pr. à Stanford University

Devant le jury composé de :

Marie-Claude Arnaud,	Pr. à l'Université d'Avignon,	*examinatrice*
Michèle Artigue,	Pr. à l'Université Paris Diderot,	*examinatrice*
Étienne Ghys,	DR à l'ENS de Lyon,	*directeur de thèse*
Patrice Le Calvez,	Pr. à l'Université Pierre et Marie Curie,	*rapporteur*
Christian Mercat,	Pr. à l'Université Claude Bernard,	*co-directeur de thèse*
Cédric Villani,	Pr. à l'Université Claude Bernard,	*examinateur*

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Étienne Ghys. Cette thèse doit tout à son énergie et sa générosité, à son enthousiasme communicatif, à sa patience et sa bienveillance, ainsi qu'à la liberté qu'il m'a incitée à prendre. Ce fut une grande joie et un honneur de travailler à ses côtés.

Merci à Christian Mercat de m'avoir accompagnée et encouragée dans tous mes projets de diffusion – et leur analyse !

J'aimerais exprimer ma reconnaissance à Patrice Le Calvez pour sa relecture attentive et ses remarques constructives, ainsi qu'à Tadashi Tokieda, non seulement pour nos trop brèves rencontres, qui restent pour moi une source d'inspiration, mais aussi pour avoir accepté de relire ma thèse. Je suis honorée d'avoir de tels lecteurs.

Je suis très heureuse que viennent compléter ce jury : Marie-Claude Arnaud, qui a guidé mes tout premiers pas dans la recherche lors d'un stage de M1 ; Cédric Villani, qui est bien sûr une référence en termes de diffusion des mathématiques ; Michèle Artigue, dont le regard de didacticienne des mathématiques est précieux. Merci à eux.

Cette thèse n'existerait pas sans le soutien financier du Labex, que je remercie profondément. J'en profite pour saluer l'équipe de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, qui a soutenu inconditionnellement tous mes projets de diffusion. Merci à Jean-Baptiste, à Jérôme, à Carine, à Séverine, à Régis, à Natacha et à Nathalie. Merci aussi à Olivier Druet d'avoir suivi de près mes contes mathématiques, et pour ses nombreux coups de pouce.

J'ai eu beaucoup de chance de pouvoir travailler avec Bruno Sévennec. Mais plus encore que pour son immense savoir mathématique, ses compétences en programmation et sa disponibilité à toute épreuve, je voudrais le remercier pour tout ce que nous avons partagé d'extra-mathématique : pour le chocolat, pour les jeux de mots, pour les pique-niques au toboggan. Pour sa sensibilité.

Un immense merci à ma fratrie de thèse, Valentin Seigneur et Olga Paris-Romaskevich, pour tous nos projets en commun, pour notre travail en équipe. Pour le Labo Junior, pour Alicia, pour le séminaire de la détente. Pour tout ce que nous avons essayé, inventé, organisé, créé, finalisé. Et puis aussi, merci à Valentin pour son humour discret et sa présence sûre, à Olga pour ses idées folles et inspirantes, et toute sa tendresse.

Trois petits génies mathématiques ont allumé trois petites étincelles, qui m'ont permis de continuer encore un peu sur le dur chemin de la thèse. Merci à François Sauvageot, à Chloé Chateau et à Antoine Chambert-Loir.

Merci à toute ma famille mathématique. À l'UMPA, qui m'a accueillie pendant ces quatre années. À Magalie, Virginia, Farah et Micaël, grâce à qui la vie au labo est plus facile et plus souriante. À David, pour son aide. À Pierre, pour son soutien – mathématique, mais pas que. À Grégory, pour les chants partagés – petites respirations joyeuses. À Alejandro, à Léo, à Matthieu, un peu pour les maths et beaucoup pour les lectures, la musique, les discussions. Un merci particulier à Christopher, petit frère lumineux, attentif et généreux.

Les mots me manquent pour remercier Vincent, qui sait bien pour quoi.

Je me serais sentie bien seule sans Marie – l'Autre – qui m'a précédée, éclairée et réconfortée dans la double découverte des réalités de la thèse et de la maternité. Je la remercie pour son soutien indéfectible, son rire à toute épreuve, la chaleur de sa maison.

Merci à tous mes proches, qui m'ont soutenue, m'ont changé les idées, m'ont encouragée, m'ont entourée : Nicolas, Sabine, François, Céline, Papa, Léna, Sylvain, Maman, Claire, Ségolène, Sébastien, Mamoune.

À Miguel, qui a été présent à chaque instant pour m'aider à tracer ce chemin.

À Chloé, pour la joie et l'émerveillement sans cesse renouvelés.

Table des matières

Introduction générale **vii**

I Expériences de diffusion autour du thème de la mécanique céleste **1**

1 Les outils de la diffusion des mathématiques **3**
1.1 Qu'est-ce que la diffusion ? . . . 3
1.2 Les outils de la diffusion . . . 6
1.3 Les réticences . . . 7
1.4 Les émotions (1) : gérer les émotions . . . 9
1.5 Les émotions (2) : susciter volontairement des émotions . . . 11
1.6 Les formats . . . 13
1.7 Un poème en prose pour finir . . . 14

2 Contes mathématiques **17**
2.1 Présentation . . . 17
2.2 Analyse a priori . . . 20
2.2.1 Avantages liés au format. . . . 20
2.2.2 Utilisation des émotions. . . . 21
2.3 Réception . . . 22
2.3.1 Les 6-10 ans . . . 23
2.3.2 Les 4-5 ans . . . 25
2.3.3 Les collégiens . . . 27
2.3.4 Les lycéens . . . 31
2.4 Perspectives . . . 33

3 Exposition virtuelle sur la mécanique céleste **35**
3.1 Présentation . . . 36
3.1.1 Structure de l'exposition . . . 36
3.1.2 Contenu de l'exposition . . . 37
3.1.3 Caractéristiques de mise en forme . . . 37
3.2 Analyse a priori . . . 38
3.2.1 Contraintes de structure . . . 39
3.2.2 Contraintes de technicité mathématique . . . 39
3.3 Réception . . . 40
3.3.1 Observations : échantillon et méthodologie . . . 40
3.3.2 Analyse d'observations . . . 40

3.4 Conclusions et perspectives . . . 45

II Problème à trois corps et enlacement **51**

4 Le problème à trois corps restreint, plan, circulaire **53**
4.1 Définition et équations . . . 53
4.1.1 Problème à trois corps *restreint* : de quoi s'agit-il ? . . . 53
4.1.2 Le problème à deux corps . . . 55
4.1.3 Quantité conservée . . . 56
4.1.4 Formulation hamiltonienne . . . 57
4.2 Topologie du problème . . . 58
4.2.1 Les niveaux d'énergie. . . . 58
4.2.2 Détermination des points de Lagrange. . . . 59
4.3 En-dessous du premier point de Lagrange . . . 61
4.3.1 Régularisation de Levi-Civita . . . 62
4.3.2 Sections de Birkhoff dans le problème à deux corps tournant . . . 63
4.3.3 Perspectives . . . 67

5 Enlacements dans $\mathbb{S}^3$ **71**
5.1 Enlacement géométrique . . . 71
5.1.1 Enlacement dans $\mathbb{R}^3$ . . . 73
5.1.2 Enlacement dans $\mathbb{S}^3$ . . . 76
5.2 Enlacement et dynamique . . . 79
5.2.1 Enlacement asymptotique . . . 79
5.2.2 Mesures invariantes . . . 79
5.2.3 Enlacement de mesures invariantes . . . 80
5.2.4 Forme de Gauss . . . 80
5.2.5 Flots lévogyres . . . 81
5.3 Flot hamiltonien dans un potentiel central . . . 82

6 Calcul numérique d'enlacements **89**
6.1 Une formule pour calculer l'enlacement . . . 90
6.1.1 Enlacement dans une variété d'homologie non nulle . . . 90
6.1.2 Plongements dans $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{R}^3$ . . . 91
6.1.3 Calcul effectif de l'enlacement . . . 93
6.1.4 Une deuxième formule . . . 96
6.2 Programmation en Matlab . . . 96
6.2.1 Description du programme . . . 96
6.2.2 Commentaires sur la pertinence des résultats . . . 99
6.2.3 Affichage de trajectoires . . . 99
6.2.4 Résultats numériques . . . 100

7 Suspensions **109**
7.1 Suspension d'un difféomorphisme de $\mathbb{D}^2$ . . . 109
7.1.1 Suspension de $\widetilde{\psi}$ . . . 110
7.1.2 D'un feuilletage à un flot $\mathscr{C}^1$ . . . 112
7.1.3 Unicité de la suspension . . . 114
7.2 Difféomorphismes tournants . . . 115

7.2.1 Application d'enroulement 115
7.2.2 Difféomorphismes fortement tournants 117
7.2.3 Difféomorphismes faiblement tournants 119
7.3 Enroulement versus enlacement 125
7.3.1 Suspensions lévogyres 125
7.3.2 Application au problème à trois corps 127

Conclusion **133**

Annexes **135**

Lune **137**

Liens invisibles **147**

A Illustrations du conte *Lune* par des enfants de 8 ans **155**

B Illustrations du conte *Lune* par des enfants de 5 ans **163**

C Les questionnaires remplis par les collégiens – un exemple **171**

D Retours des collégiens **173**

E Retours des lycéens sur la *soirée contes* **175**

F Visites de l'exposition virtuelle **179**

G Organigramme du programme **199**

H Code du programme **201**

I Résultats numériques du calcul d'enlacement **225**

Introduction

Cette thèse contient deux parties distinctes, reliées par le thème de l'étude géométrique du problème à trois corps. La première partie présente deux projets de diffusion « grand public » : une exposition virtuelle autour de la mécanique céleste et du problème à trois corps, et un duo de contes mathématiques pour enfants, l'un sur la forme de la lune, et l'autre sur l'enlacement de courbes fermées. La deuxième partie est consacrée à l'étude – théorique et numérique – de l'enlacement des trajectoires de quelques systèmes dynamiques sur la sphère $\mathbb{S}^3$, et en particulier de certaines instances du problème à trois corps.

Il est vrai que cet ensemble est peu académique, du moins au vu des standards actuels. Sans doute cela justifie-t-il que l'on prenne quelques lignes pour, avant d'en présenter plus précisément le contenu, donner une cohérence à cette thèse et proposer une manière de la comprendre comme un tout. Reprenons tout d'abord quelques mots à Laszló Lovász [39] :

> Une structure plus grande n'est jamais une version simplement agrandie d'une plus petite. Chez les animaux plus grands et plus complexes, une fraction de plus en plus grande de l'organisme est dédiée à l'« ensemble » : au transport d'éléments et à la coordination des fonctions des différentes parties. Dans les sociétés plus larges et plus complexes, une fraction de plus en plus grande des ressources est dédiée à des activités non-productives comme le transport, le traitement de l'information, l'éducation ou le divertissement. Nous devons comprendre et accepter qu'une part de plus en plus large de notre activité mathématique sera dédiée à la communication [a].

Cette thèse esquisse la possibilité d'une communauté mathématique qui reconnaisse en son sein des membres qui consacreraient une large part de leur activité à la diffusion. Alors que les spécialisations se font de plus en plus pointues, les mathématiques ont besoin de plus de communication, à tous les niveaux : entre les mathématiciens de différents domaines, avec les autres disciplines, avec les médiateurs et les journalistes scientifiques, avec le « grand public », adulte et enfant...

Un jour, peut-être, il y aura dans tous les laboratoires de mathématiques beaucoup de chercheurs qui s'investiront dans la diffusion. Ils œuvreront à une meilleure communication scientifique au sein du labo ; ils participeront à la formation des étudiants ; ils auront une activité de recherche mathématique « classique », en collaboration ou non. Et ils auront des projets de diffusion, en partenariat avec des artistes, avec d'autres disciplines, avec des journalistes, etc. Ils créeront les petits frères des films Dimensions et Chaos, des séries vidéos Tadashi's Toys, des Imprécis mathématiques, des congrès Filles et maths, des expositions Magimatique, des sites Images des Mathématiques et Analysis Situs...

a. A larger structure is never just a scaled-up version of the smaller. In larger and more complex animals an increasingly large fraction of the body is devoted to "overhead" : the transportation of material and the coordination of the function of various parts. In larger and more complex societies an increasingly large fraction of the resources is devoted to non-productive activities like transportation, information processing, education or recreation. We have to realize and accept that a larger and larger part of our mathematical activity will be devoted to communication.

Ils inventeront d'autres projets dont la forme n'existe pas encore, et ces projets bénéficieront de la même liberté, du même soutien et de la même reconnaissance que leurs projets de recherche.

Un jour, peut-être, tous ceux qui pensent leur activité de mathématiciens comme plus large que la démonstration de théorèmes, ceux qui apprennent et transmettent et réfléchissent et discutent et démontrent et racontent et enseignent et mettent en scène, ceux qui font toutes ces choses sans les distinguer les unes des autres, ceux qui ont besoin de toutes ces choses pour être en mouvement et être en équilibre, un jour peut-être, ceux-là verront toutes les facettes de leur activité de mathématiciens reconnues officiellement par leurs laboratoires et par l'ensemble de la communauté mathématique, au même titre les unes que les autres.

Un jour, peut-être, il y aura beaucoup de thèses dans le même esprit que celle-ci, à l'issue desquelles leurs auteurs seront recrutés *comme mathématiciens*, afin d'œuvrer à une meilleure communication des mathématiques. Elles seront probablement mieux construites, elles répondront à des questions plus précises, leurs auteurs sauront mieux où elles vont.

En attendant, celle-ci existe. Elle raconte une exploration sur « Comment parler de la recherche mathématique, quoi dire et à qui le dire ? » – exploration non pas effectuée après des années de travaux mathématiques et assise sur une solide culture mathématique, mais concomitante à la découverte d'un domaine, et nourrie en temps réel par une activité de recherche mathématique.

Que contient cette thèse ?

La première partie présente une approche de la diffusion qui cherche à s'éloigner des formats habituels de la conférence ou de l'atelier de résolution de problème, afin de toucher différents types de publics. Après avoir proposé un point de vue sur la diffusion mathématique et énoncé nos problématiques, nous présentons les deux projets originaux sus-cités, dont nous effectuons une analyse a priori, ainsi qu'une étude des observations recueillies lors de différentes expérimentations auprès de publics variés.

Chapitre 1 : Les outils de la diffusion des mathématiques. Quiconque s'est déjà essayé à la diffusion le sait : les standards des mathématiciens – d'exactitude, de rigueur, d'exhaustivité – ne peuvent pas être entièrement suivis lorsqu'on cherche vraiment à s'adresser à un public non-mathématicien, et leurs formats de prédilection – l'article, la conférence, l'atelier de résolution de problèmes – ne sont pas toujours adéquats. Autrement dit, les outils nécessaires à la diffusion des mathématique dépassent le cadre des mathématiques telles qu'elles sont généralement pratiquées par les professionnels. Après avoir posé section 1.1 une définition de la diffusion des mathématiques et de ses objectifs, on aborde section 1.2 cette question des outils, en présentant les deux qui seront discutés dans la suite, et que les projets décrits aux chapitres suivants tentent d'utiliser : les émotions d'une part – émotions positives à susciter, émotions négatives à gérer – et les formats d'autre part – formats inhabituels en mathématiques, empruntés au théâtre, à la danse, au jeu, etc. Avant de discuter ces deux points plus en détail, on traite section 1.3 la question des réticences de la communauté mathématique à se saisir de ces deux outils, que ce soit par manque d'habitude ou de formation, par peur de faillir aux standards de « sérieux » qui régissent la communauté, ou à cause des difficultés d'évaluation.

En quoi les émotions sont-elles un outil de la diffusion des mathématiques, et comment les utiliser ? La première étape est de comprendre que beaucoup de gens ont un rapport très émotionnel – pas forcément facile – aux mathématiques, et qu'oublier tout ce qui se joue d'émotionnel lorsqu'une telle personne est mise au contact d'un objet mathématique risque de conduire à des résultats inverses de ceux souhaités. Ce point est abordé section 1.4, où l'on s'attache, à partir d'une expérience personnelle, à montrer qu'au-delà d'une simple prise de conscience, il est important que les mathématiciens

qui pratiquent la diffusion aient conscience de leurs motivations, de leurs désirs et de leurs peurs, et de la manière dont ceux-ci peuvent influencer les émotions de leurs interlocuteurs. Dans un deuxième temps, il peut être intéressant de susciter certaines émotions ou sentiments particuliers chez les personnes à qui l'on s'adresse, tels que du plaisir, de l'émerveillement, de l'attirance, de l'estime de soi ou un sentiment d'inclusion. La section 1.5 détaille ce point, et indique à l'aide de nombreux exemples des manières dont ces sentiments peuvent être provoqués.

S'il semble clair que les mathématiques gagnent à être présentes dans les medias et dans d'autres domaines de la culture – tels que l'art, le jeu, etc. –, et donc qu'il est nécessaire de transmettre les mathématiques sous des formes et des formats qui ne sont pas habituels pour les mathématiciens, il n'est pas évident pour ces derniers de trouver leur place dans la conception de tels objets : est-ce leur rôle de participer à la conception de tels objets ? De les créer eux-mêmes ? La section 1.6 esquisse quelques réponses à cette question difficile.

Enfin la section 1.7 invite le lecteur dans une parabole sur l'activité mathématique et le rôle de la diffusion.

Chapitre 2 : Contes mathématiques. Un public auquel s'intéresse la diffusion des mathématiques est celui des enfants. Il est difficile pour un mathématicien de s'adresser à de jeunes enfants et de partager avec eux sa vision des mathématiques, difficultés liées à la fois à la complexité des notions qu'il souhaite aborder, et au manque de réceptivité que peuvent manifester des enfants aux formats – comme la conférence – qui lui sont familiers. Si le jeu constitue un canal favorable très exploité, il existe un autre medium particulièrement adapté, bien que peu investi par les mathématiciens : celui des histoires. En plus d'être faciles d'accès pour tous et d'ancrer les sujets abordés dans une réalité compréhensible par l'enfant, les histoires présentent l'intérêt de s'adresser aux émotions, et de pouvoir ainsi jouer efficacement sur les conceptions que les enfants se font des mathématiques, d'eux-mêmes et de leurs aptitudes aux mathématiques. Afin d'explorer cette piste et toutes ces potentialités, six *contes mathématiques* ont été créés, qui définissent un format original, comprenant une histoire, mais aussi une proposition de manipulation ou de conception, et des pistes d'approfondissement des notions mathématiques abordées. La section 2.1 détaille ce format et présente deux des contes, dont les thèmes sont directement liés au sujet mathématique de cette thèse.

Ces contes utilisent clairement les outils décrits au chapitre 1 : leur format est étranger aux mathématiques, et ils s'adressent, aussi bien qu'à leur intellect, aux émotions du public. Nous détaillons dans une analyse a priori effectuée à la section 2.2 l'utilisation précise qui est faite de ces deux outils, des avantages que cela devrait conférer aux contes et des réactions escomptées.

La section 2.3 décrit les différentes expérimentations qui ont été menées auprès de différents publics, allant de la maternelle au lycée, et analyse les réactions observées.

Ces réactions étant dans leur ensemble très encourageantes, elles ouvrent de nombreuses perspectives quant à l'utilisation de contes mathématiques, aussi bien à l'école que dans des lieux de culture généralistes – comme les musées, les bibliothèques, les festivals – ou dans un cadre familial. On décrit ces perspectives section 2.4, en insistant sur les possibilités de transmission horizontale à destination des parents ou des enseignants.

Chapitre 3 : Exposition virtuelle sur la mécanique céleste. Si on veut que les mathématiques trouvent leur place dans des lieux de culture généralistes, il faut pouvoir s'adresser aux publics habituels de ces lieux. Dans le cas par exemple d'un musée (pas spécifiquement scientifique), la partie adulte du public est globalement constituée de personnes curieuses et cultivées, qui aiment lire et apprendre, mais n'ont a priori pas d'aisance ni d'appétence particulière pour les mathématiques. Il n'est pas évident de s'adresser à un tel public, qui présente la spécificité d'être intellectuellement

exigeant, mais peu disposé à s'intéresser à des questions mathématiques. L'exposition virtuelle *Les mathématiques du ciel*, créée en commun avec Olga Romaskevich et Valentin Seigneur en collaboration avec le musée des Confluences de Lyon, tente de s'adresser à un tel public. La section 3.1 présente cette exposition virtuelle – qui a été primée « Coup de cœur du jury » du prix D'Alembert 2018 par la Société Mathématique de France – en détaillant sa structure, son contenu et ses caractéristiques de mise en forme.

La conception du site répond à certaines problématiques liées au public visé et identifiées en amont, qui rejoignent les problématiques abordées au chapitre 1 : quelle forme donner à l'exposition et quelles informations y faire figurer pour que l'ensemble rencontre la sensibilité du public, ses goûts, ses attentes ? Cette analyse a priori de l'exposition virtuelle fait l'objet de la section 3.2.

Les réactions spontanées qu'occasionne une première visite de l'exposition virtuelle ont été observées chez une dizaine de personnes ; elles sont décrites, synthétisées et analysées dans la section 3.3. Bien que cet échantillon soit trop petit pour être représentatif, la liberté qu'avaient ces personnes à la fois dans leur visite de l'exposition – qui est vaste et très diverse – et dans leurs retours, qui n'étaient pas des réponses à des questions mais des réactions spontanées, offre aux observations effectuées une richesse qui donne à réfléchir et ouvre des perspectives ; tout ceci est détaillé à la section 3.4.

La seconde partie de cette thèse s'inscrit dans la lignée des travaux d'Étienne Ghys sur l'enlacement des systèmes dynamiques sur la sphère $\mathbb{S}^3$. Dans [23], Ghys définit, en s'appuyant sur les travaux de Vladimir Arnold [4], la notion d'enlacement asymptotique de mesures invariantes par l'action d'un flot sur une sphère d'homologie. Puis il introduit le concept de *flot lévogyre*.

Définition 0.0.1. Un flot φ^t sur $\mathbb{S}^3$ est dit *lévogyre* si tous les couples de mesures φ-invariantes s'enlacent positivement par φ.

On renvoie quelques lignes plus bas – à la présentation du chapitre 5 – pour une explication détaillée de cette définition. Le théorème principal, qui motive l'introduction de ce concept, est le suivant :

Théorème (Ghys, [24])**.** *Soit φ^t un flot lévogyre sur la sphère $\mathbb{S}^3$. Alors toute famille finie d'orbites périodiques borde une section de Birkhoff.*

La notion de section de Birkhoff remonte à Poincaré et à son étude du problème à trois corps restreint ([48], [49]). On en rappelle la définition ici.

Définition 0.0.2. Étant donné un flot lisse sur une variété de dimension 3, une *section de Birkhoff* du flot est une surface bordée par une famille d'orbites périodiques, et qui intersecte transversalement toutes les autres orbites.

L'immense intérêt d'une telle surface, lorsqu'elle existe, est qu'elle permet via l'application de premier retour de réduire la dynamique continue de dimension 3 en une dynamique discrète de dimension 2. Depuis les travaux de Poincaré et Birkhoff [8], de nombreux mathématiciens se sont intéressés à l'existence de telles surfaces de section, notamment dans le cas du problème à trois corps restreint. On trouvera dans l'article d'Umberto Hryniewicz et de Pedro Salomão [33] un excellent survol du domaine.

La question initiale abordée dans cette thèse est la suivante : le problème à trois corps est-il lévogyre ? Justifions rapidement le sens de cette question. Dans le problème à trois corps restreint, plan, circulaire, deux corps massifs soumis à la gravitation tournent sur des cercles, et un troisième, de masse négligeable, évolue sur un plan, attiré par les deux autres ; si l'énergie du système ne dépasse pas une certaine valeur, ceci décrit après régularisation des collisions un flot sur la sphère $\mathbb{S}^3$, dont on peut calculer l'enlacement. Cette question est en fait une conjecture, énoncée par Étienne Ghys :

Conjecture 0.0.3. *Le problème à trois corps restreint, circulaire et plan de rapport de masse μ est lévogyre en-dessous du premier point de Lagrange.*

Si cette conjecture était démontrée, cela fournirait à l'aide du théorème énoncé une démonstration de l'existence de sections de Birkhoff (ou une autre démonstration plus simple, dans les cas où l'existence de sections de Birkhoff est déjà démontrée).

La question initiale reste ouverte, mais nous apportons d'une part une « vérification » numérique de la conjecture, en calculant l'enlacement d'un grand nombre de trajectoires et, d'autre part, une méthode théorique qui, à l'aide de l'étude des difféomorphismes du disque et du concept de *difféomorphismes tournants*, permet de décider si un champ est lévogyre lorsqu'on dispose d'une section de Birkhoff qui est un disque. Un exemple de tels difféomorphismes tournants est donné par les *applications déviant la verticale*, ou *twists*, dont nous rappelons la définition ici, dans le cas du disque.

Définition 0.0.4. Soit $\psi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{D}^2)$ admettant un point fixe x_0 dans l'intérieur du disque. En considérant tous les segments joignant x_0 au bord du disque, on peut paramétrer le disque par (r, θ) de sorte que $x_0 = \{r = 0\}$, et écrire ψ sous la forme

$$\psi(r, \theta) = (R((r, \theta), \Theta(r, \theta))).$$

On dit que ψ *dévie la verticale* si, pour tout θ, la fonction $r \mapsto \Theta(r, \theta)$ est strictement monotone.

Les twists forment un exemple particulièrement intéressant, puisqu'ils ont été découverts par Poincaré précisément comme sections du problème à trois corps restreint. Dans un dernier temps, nous appliquons cette méthode évoquée ci-dessus au cas dégénéré du problème à trois corps où l'un des deux corps massifs disparaît.

Chapitre 4 : Le problème à trois corps restreint, plan, circulaire. Le problème à trois corps restreint, plan, circulaire, que nous avons très brièvement décrit ci-dessus, est l'un des plus anciens systèmes dynamiques étudiés. Après choix adéquat du repère tournant et des unités de mesures, il s'écrit comme un système hamiltonien sur $\mathbb{R}^4$, dont le hamiltonien est donné par la fonction

$$H(q, p) = (p_x^2 + p_y^2) + 2(p_x y - x p_y) + 2\left(\frac{1-\mu}{|q+\mu|} + \frac{\mu}{|q-1+\mu|}\right),$$

où $q = (x, y)$ et $p = (p_x, p_y)$ sont respectivement la position et le moment du corps de masse négligeable, et où le paramètre μ décrit le rapport entre les deux masses prépondérantes. Après avoir détaillé section 4.1 la mise en équations du système et discuté l'existence d'une intégrale du mouvement – alors même que le système n'est pas newtonien, du fait de la présence de forces sans réaction – nous décrivons section 4.2 les niveaux d'énergie du système d'un point de vue topologique, avec les points de Lagrange et les différentes configurations des régions de Hill. Enfin, dans la section 4.3 nous nous intéressons de plus près aux niveaux d'énergie situés en-deçà de la première valeur critique. Grâce à la régularisation des collisions de Levi-Civita, ces niveaux d'énergie s'étendent en une variété difféomorphe à $\mathbb{R}P^3$, qui porte un flot doublement revêtu par un flot sur $\mathbb{S}^3$. Ce sont donc ces configurations uniquement qui vont nous intéresser pour le calcul de l'enlacement. On se penche alors sur le cas $\mu = 0$, pour lequel on dispose de sections de Birkhoff explicites et de leurs applications de premier retour. Dans l'optique d'appliquer à ce problème les outils développés au chapitre 7, on préfère à la traditionnelle section en anneau une section en disque, et on étudie la manière dont l'application de premier retour « fait tourner » les points du disque. Pour ce faire, on exploite l'intégrabilité du système dans le cas $\mu = 0$, et on calcule le nombre de rotation de l'application de premier retour restreinte à un grand nombre de cercles invariants.

Chapitre 5 : Enlacements dans $\mathbb{S}^3$. La notion d'enlacement est d'abord définie pour deux courbes fermées disjointes dans une 3-variété d'homologie nulle – par exemple $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$ – comme le nombre algébrique d'intersections entre la première courbe et une surface bordée par la seconde. Si cette définition n'est pas très constructive, on dispose dans $\mathbb{R}^3$ d'outils pratiques pour calculer l'enlacement de deux courbes disjointes k et l. Une première manière, combinatoire, consiste à projeter les deux courbes sur un plan, et à compter les intersections signées des deux courbes projetées $\overline{k}$ et $\overline{l}$:

$$\mathrm{Enl}(k,l) = \sum_{\overline{k}=\overline{l}\ ;\ k_z>l_z} \mathbb{1}\left(\begin{array}{c} \overline{l} \quad \overline{k} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}\right) - \mathbb{1}\left(\begin{array}{c} \overline{k} \quad \overline{l} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}\right).$$

Une seconde manière, due à Gauss, consiste à calculer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{Enl}(k,l) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|l(t)-k(s)\|^3} \det\left(l(t)-k(s), \frac{dk}{ds}(s), \frac{dl}{dt}(t)\right) dsdt.$$

Dans la section 5.1, on présente tout cela en détail. Puis on propose, à l'aide des théories de l'homologie et de la cohomologie respectivement, un cadre théorique pour mieux comprendre ces deux méthodes de calcul : la première méthode se lit comme une application $H_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \mathrm{diag}) \to \mathbb{Z}$ qui à un tore $k \times l$ (qui est a fortiori un 2-cycle dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \mathrm{diag}$) associe son intersection avec la 4-variété

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\ ;\ x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 > y_3\};$$

la seconde se lit comme l'intégration sur $k \times l$ d'une forme bi-différentielle bi-graduée fermée $\alpha \in \Omega^{(1,1)}(M \times M - \mathrm{diag})$, qu'on appelle *forme de Gauss*. On tente enfin de transposer ce cadre théorique à la compréhension de l'enlacement sur la sphère $\mathbb{S}^3$. Ceci n'est pas possible tel quel, car les objets sans bord qu'on recherche – une 4-variété sans bord et ne bordant pas, une 2-forme fermée et non exacte – n'existent pas dans $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag}$. En travaillant avec des objets à bord, mais dont on contrôle soigneusement le bord, on adapte à la sphère $\mathbb{S}^3$ les définitions énoncées dans $\mathbb{R}^3$.

La section 5.2 présente l'enlacement du point de vue de la dynamique. Comme défini par Vladimir Arnold dans [4], l'*enlacement asymptotique* de deux trajectoires d'un flot sur la sphère $\mathbb{S}^3$ est obtenu comme limite en $T \to +\infty$ du procédé suivant : on referme les trajectoires au bout d'un temps T à l'aide d'une famille de courbes mesurables fixées préalablement, et reliant deux points arbitraires, puis on divise l'enlacement des deux courbes fermées obtenues – qui, génériquement, sont disjointes – par T^2. Étant données deux mesures μ et ν invariantes par le flot, l'enlacement asymptotique des trajectoires issues de x et y est bien défini pour μ presque tout x et ν presque tout y, ce qui permet, comme le fait Étienne Ghys dans [24], d'introduire la notion d'enlacement de mesures invariantes. Ceci permet alors de poser la définition de *flot lévogyre* esquissée plus haut, et d'énoncer les théorèmes relatifs à cette notion – qui motivent notre étude du problème à trois corps.

Enfin, dans la section 5.3, on étudie un système dynamique très simple, mais qui se rapproche du problème qui nous intéresse de par sa nature hamiltonienne. Il s'agit du mouvement plan dans un potentiel central convexe, dont on prouve par des arguments visuels le caractère lévogyre. Plusieurs sections de Birkhoff explicites étant connues pour ce système, on s'interroge sur la possibilité d'utiliser les dynamiques de premier retour sur ces surfaces pour produire une autre démonstration du fait que le flot dont elles proviennent est lévogyre. Cette interrogation mène tout naturellement aux développements effectués chapitre 7.

Chapitre 6 : Calculs numériques d'enlacements. Comme expliqué plus haut, les flots dont on voudrait calculer l'enlacement sont des flots sur des variétés difféomorphes à $\mathbb{S}^3$, obtenus comme pré-images par la régularisation de Levi-Civita du flot du problème à trois corps restreint, plan, circulaire, sur des niveaux d'énergie en-deçà de la première valeur critique. La difficulté à laquelle on se heurte rapidement lorsqu'on cherche à effectuer ces calculs est qu'on ne dispose pas d'une équation explicite de ces 3-variétés. En effet, la seule équation explicite dont on dispose correspond au cas $\mu = 0$, et c'est la théorie de Morse qui nous assure de l'invariance topologique de l'espace de phase du système tant qu'on ne dépasse pas la première valeur critique. Ainsi, si la régularisation de Levi-Civita nous fournit, pour chaque énergie inférieure à la première valeur critique, un plongement du niveau d'énergie correspondant dans $\mathbb{R}P^3$ – où l'enlacement de deux courbes est défini comme la moitié de l'enlacement de leurs relevés à $\mathbb{S}^3$ – ce plongement ne nous permet pas de calcul effectif. Une manière de contourner ce problème consiste à construire un plongement de ces niveaux d'énergie dans $\mathbb{R}^3$, et à vérifier que l'enlacement ainsi défini correspond bien à notre première définition. Ceci n'est pas immédiat, car l'enlacement des courbes sur une variété plongée dans $\mathbb{R}^3$ (ou une sphère d'homologie) dépend du plongement choisi. Tout ceci occupe la première partie de la section 6.1, dont la seconde partie est consacrée à expliciter une formule pour calculer l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$ (le plongement n'étant pas formulé dans les coordonnées cartésiennes, les méthodes habituelles ne sont pas optimales). Cette formule a été adaptée à partir d'une idée de Pierre Dehornoy. Enfin, on propose un second plongement dans $\mathbb{R}^3$, qui est théoriquement moins intéressant parce que plus étranger à la dynamique, mais qui a le mérite de permettre un affichage de trajectoires tridimensionnelles.

La section 6.2 décrit le programme implémenté en Matlab, en collaboration avec Bruno Sévennec, qui comprend le choix aléatoire – selon la mesure de Liouville – des conditions initiales, la simulation des trajectoires et le calcul de l'enlacement de celles-ci. Après avoir commenté la pertinence des résultats – vu les inévitables imperfections du programme, qui ne peut gérer que des quantités finies – nous présentons ces résultats, où l'on voit en particulier que tous les enlacements calculés numériquement sont strictement positifs. Un flot étant lévogyre si et seulement si l'enlacement asymptotique de tous ses couples d'orbites est strictement positif, ces résultats numériques corroborent la conjecture 0.0.3.

Chapitre 7 : Suspensions. Lorsqu'un flot sur $\mathbb{S}^3$ admet une section de Birkhoff en disque, peut-on déterminer à la seule vue de l'application de premier retour sur ce disque si le flot est lévogyre ou non ?

Pour que cela soit possible, il faudrait qu'à un difféomorphisme du disque ψ corresponde un unique flot – à conjugaison près, d'une régularité telle que cette conjugaison préserve l'enlacement – admettant une section de Birkhoff en disque sur laquelle l'application de premier retour soit précisément ψ. Ceci n'est pas vrai ; il faut ajouter à ψ la donnée d'une isotopie $\psi_t : \mathrm{id} \rightsquigarrow \psi$ ou, ce qui revient au même, la donnée d'un élément $\widetilde{\psi}$ du revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$ au-dessus de ψ. On peut alors suspendre $\widetilde{\psi}$ en un feuilletage qui, après un reparamétrage du temps adéquat, donne le flot voulu. Cette construction est essentiellement unique ; nous en détaillons à la section 7.1 différentes versions, et discutons des conditions sur $\widetilde{\psi}$ qui garantissent d'obtenir après suspension un flot $\mathscr{C}^1$.

On définit ensuite, à la section 7.2, l'*enroulement asymptotique* par l'isotopie ψ_t de deux orbites de ψ, qui décrit la manière dont deux points tournent l'un par rapport à l'autre, en moyenne, lorsqu'ils sont promenés par ψ_t. On définit alors, de manière analogue au cas des flots, l'enroulement par $\widetilde{\psi}$ de deux mesures ψ-invariantes μ et ν : comme l'enroulement asymptotique des orbites issues de x et y, où x et y sont deux points génériques pour μ et ν respectivement. On pose ensuite deux notions qui décrivent la manière dont un difféomorphisme du disque voit ses mesures invariantes s'enlacer. Un difféomorphisme est *fortement tournant* si l'enroulement asymptotique de tous ses couples d'orbites est strictement positif. Cette condition a deux équivalents, qui sont énoncés au théorème 7.2.3.

Un difféomorphisme est *faiblement tournant* si l'enroulement de tous ses couples de mesures invariantes est strictement positif. Cette condition a un équivalent, que nous énonçons au théorème 7.2.7. Un contre-exemple permet de s'assurer que ces deux notions sont bien distinctes, et qu'il existe des difféomorphismes qui sont faiblement tournants, mais pas fortement.

C'est cette deuxième notion, celle de difféomorphisme faiblement tournant, qui constitue le pendant 2-dimensionnel discret de la notion de flot lévogyre, comme le montre la section 7.3. Après avoir défini la notion de suspension lévogyre, on montre qu'un difféomorphisme $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant si et seulement si le feuilletage auquel il donne naissance par suspension est lévogyre. Ceci nous permet d'énoncer le théorème principal du chapitre, que nous reproduisons ici ;

Théorème. *Soit ϕ^t un flot continûment différentiable sur $\mathbb{S}^3$, admettant une section de Birkhoff Σ difféomorphe à un disque. Soit ψ l'application de premier retour sur Σ, et $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$ le relevé de ψ donné par le flot. Alors ϕ^t est lévogyre si et seulement si $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant.*

Dans le cas particulier du problème à trois corps avec $\mu = 0$, les calculs numériques effectués au chapitre 4 indiquent que l'application de premier retour sur le disque présente certaines caractéristiques qui en font un difféomorphisme faiblement tournant, ce qui impliquerait que le problème à trois corps est lévogyre pour $\mu = 0$. La condition d'être lévogyre étant ouverte, cela impliquerait que le système reste lévogyre pour μ assez petit.

Première partie

Expériences de diffusion autour du thème de la mécanique céleste

Chapitre 1

Les outils de la diffusion des mathématiques

L'objectif des prochains paragraphes est de présenter quelques réflexions sur la communication bien particulière qu'est la diffusion des mathématiques, en s'interrogeant sur les outils avec lesquels pourraient ou devraient travailler ceux et celles qui y participent. Il y a bien sûr tous les outils pédagogiques ou didactiques permettant d'expliquer un concept, de simplifier une idée, de baliser un raisonnement. Il y a aussi des outils qui ne relèvent pas des mathématiques, mais peuvent être utiles à la diffusion des mathématiques, à condition de les adapter aux problématiques spécifiques qu'elle rencontre. Parmi ces possibles outils : ceux qui façonnent les émotions qui sous-tendent – et conditionnent ! – la communication avec le public, et ceux qui visent à incorporer les mathématiques à des œuvres d'une autre nature, qui ont leur propre format et leurs propres standards. Si les émotions commencent a être étudiées par les didacticiens des mathématiques pour leur rôle dans l'apprentissage des mathématiques – on pourra consulter les travaux de Markkus Hannula, par exemple [28], ou l'ouvrage [25] qui propose un aperçu des recherches sur le sujet – elles sont encore peu intégrées de façon consciente à la pratique des diffuseurs. Nous allons décrire certains de ces outils, les avantages qu'auraient les mathématiciens à les utiliser, et la manière dont ils pourraient le faire.

Ces réflexions ne sont pas issues d'une étude théorique, mais d'un ensemble d'expériences personnelles concrètes et variées autour de la diffusion des mathématiques, menées tout au long de ces quatre années de thèse avec une volonté d'interroger les pratiques existantes et d'en explorer de nouvelles. Leur valeur est celle d'un point de vue, dont j'espère qu'il puisse éclairer ceux qui s'interrogent sur la diffusion des mathématiques et motiver des études plus systématiques.

Parmi tous les termes qui s'offrent à nous – *diffusion*, *divulgation*, *médiation*, *popularisation*, *vulgarisation* – nous choisissons le terme de *diffusion*, qui connote moins que *vulgarisation*, *popularisation* ou *divulgation* l'idée d'une transmission verticale. Le terme de *médiation* est intéressant, mais le dérivé *médiateur* désigne une profession assez spécifique, à laquelle nous ne voulons pas nous restreindre. Nous emploierons également les dérivés certes inhabituels mais néanmoins naturels *diffuser*, *diffuseur*, *diffuseuse*.

1.1 Qu'est-ce que la diffusion ?

On appellera diffusion des mathématiques une communication entre, d'une part, un ou plusieurs mathématiciens et, d'autre part, un public, ayant pour objet des éléments de compréhension des mathématiques ou de ressentis liés aux mathématiques, et qui soit motivée par un ou plusieurs objectifs

parmi ceux énumérés ci-dessous. En nous inspirant de la définition des mathématiques et des mathématiciens donnée par William Thurston dans son article *On proof and progress in mathematics*, nous dirons que les mathématiciens sont les personnes qui œuvrent à une meilleure compréhension humaine des mathématiques. Cette définition volontairement large comprend bien sûr les chercheurs, mais aussi les enseignants, les médiateurs, et les personnes qui ne sont pas mathématiciennes de profession mais de par les activités qu'elles réalisent.

Pour ne pas enfermer la diffusion dans des considérations a priori sur les formes qu'elle peut prendre, nous allons la définir par les objectifs auxquels elle répond. Les trois objectifs choisis sont des variations concrètes autour d'un même idéal d'une société où chacun comprenne et puisse apprécier la science. D'autres variations pourraient sans doute s'y ajouter, mais prenons cette liste comme point de départ.

1. **Que les gens sachent ce que font les mathématiciens et, plus généralement, les scientifiques.** Cet objectif est celui qui nous vient le plus naturellement à l'esprit ; c'est d'ailleurs la définition de la diffusion des mathématiques que choisissent Geoffrey Howson, Jean-Pierre Kahane et Henry Pollak dans leur article *The popularization of mathematics* [32], et dont voici une traduction libre :

   > La diffusion des sciences comprend tous les efforts qui sont faits, ou pourraient être faits, en vue de combler le fossé entre les avancées scientifiques et la connaissance qu'en a le public, exceptés ceux qui relèvent du système scolaire ou de l'éducation supérieure [a].

2. Pour exprimer l'objectif suivant, nous emprunterons la formulation qu'en donne Étienne Ghys dans son article *The internet and the popularization of mathematics* [23] : **Que les gens considèrent les mathématiques comme une activité utile et respectable, voire comme une possibilité pour eux, ou pour leurs enfants.**

   > D'une certaine manière, l'objectif principal de la diffusion n'est pas nécessairement de transmettre un contenu mathématique spécifique, mais de convaincre le public que les maths/la science pourraient être une réelle possibilité pour eux, ou pour leurs enfants, ou au moins qu'il s'agit d'une activité respectable, utile à la société dans son ensemble [b].

3. **Que les gens puissent s'approprier les mathématiques comme une activité culturelle qu'ils puissent apprécier à leur manière.** Là encore, citons ce même article d'Étienne Ghys :

   > Nous devons expliquer pourquoi il est important pour « l'homme de la rue » d'avoir quelque goût aux mathématiques (et à la science en général), de la même manière qu'il est, par exemple, important d'apprécier l'art. Un tel goût n'est pas nécessairement lié à « l'utilité » des mathématiques, disons pour l'économie ou les sciences de l'ingénieur, et ne nécessite pas une compréhension profonde des détails techniques. On devrait montrer clairement que les mathématiques peuvent être intéressantes et amusantes pour chacun, de même que la littérature peut être appréciée à différents niveaux [c].

a. The popularization of science involves all efforts made, or which might be made, to bridge the gap between scientific advances and public knowledge and information, apart from those who take part within school systems and higher education.

b. Somehow, the most important goal of popularization is not necessarily to convey a specific mathematical content, but to convince the audience that maths/science could be a real option for themselves, or for their kids, or at least to show that it is a respectable activity, useful for society at large.

c. We have to explain that it is important for the "man on the street" to have some taste for mathematics (or science in general) in a similar way as, for instance, it is important to enjoy the arts. Such a taste is not necessarily related to the "usefulness" of mathematics, say for economics or engineering sciences, and does not require a deep understanding of technical details. One should make clear that mathematics can be fun and interesting to everybody, in the same way as literature can be enjoyed at many levels.

Ces trois objectifs permettent immédiatement de définir (mais non pas d'évaluer !) ce qu'est une expérience de diffusion réussie : c'est une expérience qui a permis de progresser sur au moins un de ces aspects.

Enfin, nous distinguerons la diffusion de l'enseignement ou de la collaboration professionnelle, en la plaçant sous le signe d'une certaine gratuité : le public n'attend pas des informations précises dont il aurait besoin dans son parcours scolaire, académique ou professionnel ; le mathématicien n'attend pas une évolution ou des progrès précis de la part du public, qu'il pourrait évaluer. Cette restriction exclut la collaboration professionnelle entre mathématiciens, mais aussi entre les mathématiques et les autres sciences. Ce choix est discutable ; en effet il est intéressant de se demander comment expliquer des mathématiques à des médecins, des sociologues, etc. Mais une telle collaboration est assez proche de l'enseignement supérieur en cela qu'elle peut se contenter des outils purement mathématiques et pédagogiques évoqués plus haut, et ne nécessite pas les outils spécifiques dont nous parlerons ici. En contrepartie, cette condition de gratuité exprimée comme telle autorise à envisager la diffusion mathématique dans le cadre scolaire, ce qui est une idée potentiellement féconde : les mathématiques gagneraient probablement à exister aussi à l'école sous forme de « lectures plaisir », de projets créatifs ou de jeux dissociés de toute nécessité d'apprentissage, de toute évaluation, et même de tout programme. Je développerai ce point plus en détails dans un chapitre ultérieur, lorsque j'exposerai mes travaux sur les contes mathématiques.

Avant de discuter de la manière de les atteindre, une remarque sur ces trois objectifs. Ils sont tous orientés vers le public, mais chacun d'eux a un dual, orienté vers les mathématiciens et mettant en jeu les mêmes ressorts. Ces trois objectifs duaux apparaissent, sous une forme analogue, en première réponse à la question *Why popularization ?* de l'article d'Étienne Ghys.

1′. **Mieux comprendre ses propres connaissances en les expliquant clairement.** En effet, l'exigence de clarté qu'implique une explication à un public non spécialiste oblige à une meilleure compréhension. Pour reprendre les mots de David Hilbert [31] :

> Une théorie mathématique ne peut être considérée complète que lorsque vous l'avez rendue assez claire pour pouvoir l'expliquer à l'homme de la rue. Car ce qui est clair et facile à comprendre nous attire et ce qui est compliqué nous repousse [d].

2′. **Obtenir une reconnaissance de son activité professionnelle comme d'une activité utile et respectable.** En effet, il y a parfois un décalage important entre la manière dont la plupart des mathématiciens voient leur métier et son utilité, et l'image que leur en renvoient parfois les gens qu'ils croisent : « Ah bon, il y a encore des choses à découvrir en mathématiques, on n'a pas déjà tout découvert depuis les Grecs anciens ? »

3′. **Enrichir sa vision du monde et sa pratique des mathématiques en profitant de ce que peuvent apporter les autres domaines de l'activité humaine**. Par exemple, les sciences expérimentales fournissent aux mathématiciens une manière de comprendre le monde, les sciences humaines apportent des problèmes mathématiques pertinents, l'art offre aux mathématiciens un autre regard sur leur domaine, et leur donne également du matériel pour communiquer, etc.

d. Ein alter französischer Mathematiker hat gesagt : Eine mathematische Theorie ist nicht eher als vollkommen anzusehen, als bis du sie so klar gemacht hast, daß du sie dem ersten Manne erklären könntest, den du auf der Straße triffst. Diese Klarheit und leichte Faßlichkeit, wie sie hier so drastisch für eine mathematische Theorie verlangt wird, möchte ich viel mehr von einem mathematischen Problem fordern, wenn dasselbe vollkommen sein soll ; denn das Klare und leicht Faßliche zieht uns an, das Ver- wickelte schreckt uns ab.

1.2 Les outils de la diffusion

Tout le monde s'accorde sur l'idée que, pour diffuser, il faut savoir expliquer, baliser, trouver les bons exemples, les bonnes images pour que le message soit clair et compréhensible. Tous ces savoir-faire constituent des outils très importants, et bien documentés – notamment par la didactique mais aussi par les nombreuses expériences et retours d'expériences de tous ceux qui y ont réfléchi et les ont mis en œuvre. Je n'ajouterai rien sur le sujet.

Si l'importance de ces outils est indiscutable, leur maîtrise ne suffit pas à garantir une expérience de diffusion réussie. Il est assez évident que les trois objectifs énoncés plus haut mettent en jeu des émotions, tendent à faire sortir les mathématiques de leurs formats habituels (la conférence, le cours, l'atelier de résolution de problèmes), et qu'il est illusoire d'espérer atteindre n'importe lequel de ces objectifs sans utiliser ces deux outils[e] que sont : les émotions[f] et les formats étrangers aux mathématiques. Avant d'examiner cela un peu plus en détail, nous souhaiterions ouvrir ici une petite parenthèse pour signaler d'autres approches de la diffusion des mathématiques qui s'intéressent également aux éléments non-mathématiques qui la constituent. Ici, nous parlerons principalement d'émotions et d'adaptation à d'autres formats – notamment artistiques – et n'aborderons pas, par exemple, l'approche « citoyenne » qu'on retrouve dans la plupart des travaux de François Sauvageot ou dans les Cafés de la statistique, approche qui invite chacun à se saisir des outils que proposent les mathématiques pour penser des questions de société. Ce texte n'est pas non plus une réflexion politique sur la diffusion scientifique, mais nous invitons le lecteur à consulter le manifeste (non spécifique aux mathématiques) porté en 2010 par le collectif Révoluscience [52], dont l'objectif est de « remettre en permanence en discussion les principes, parfois implicites, qui fondent la communication et la médiation scientifiques : comprendre les implications de ces principes et des discours portés, pour pouvoir ensuite choisir ». Fermons maintenant la parenthèse, et revenons au rôle nécessaire des émotions ou des formats étrangers aux mathématiques dans chacun des trois objectifs.

Le troisième objectif, qui est de mettre en lien les mathématiques avec le reste de la culture, nécessite assez clairement de travailler avec des matériaux non-mathématiques, d'utiliser des langages et des standards propres au cinéma, à la littérature, au jeu, au débat citoyen, ou à un des mille autres champs de l'activité humaine.

Passons au deuxième objectif : faire que les gens considèrent la science comme une activité utile et un choix d'orientation possible pour eux-mêmes. La meilleure manière d'atteindre cet objectif est de susciter du désir, ou au moins un sentiment d'inclusion, d'appartenance. Ceci nécessite évidemment de manipuler, consciemment ou non, un langage émotionnel.

Enfin, et même si ce n'est pas apparent de prime abord, le premier objectif n'est lui non plus pas dénué de toute composante émotionnelle. Il est unanimement reconnu que la diffusion des mathématiques se heurte souvent à des blocages de la part du public qui sont de l'ordre émotionnel, et qui sont, pour beaucoup, issus du vécu scolaire. Pour citer encore une fois Jean-Pierre Kahane, Geoffrey Howson et Henry Pollak :

> Pour beaucoup de personnes, la relation aux mathématiques est régie par ce qui leur est arrivé à l'école. Les conséquences émotionnelles sont souvent considérables : de l'amour, de l'intérêt, de l'aversion, de la haine et, trop souvent, de la peur. (...) Étant donnée l'importance de la relation affective que les individus entretiennent avec les mathématiques, pouvons-nous convenir qu'un des objectifs de la diffusion doit être de créer une association mentale avec les mathématiques qui soit positive, chaque fois que la situation s'y prête[g] ?

e. Nous utilisons dans ce texte le terme « outil » dans son acception figurée, qui ne suppose pas une fabrication humaine : *Moyen ; ce qui permet d'obtenir un résultat, d'agir sur quelque chose.*

f. Nous adopterons une acception très large du terme « émotion », qui comprend les sentiments.

g. Many people's relationship to mathematics is governed by what happened to them in school. The affective consequences

Ainsi, mêmes ceux qui ne s'intéresseraient qu'à ce premier objectif et souhaiteraient se concentrer exclusivement sur les mathématiques ne peuvent pas faire l'économie d'une compréhension minimale de quelques réalités émotionnelles, de la part du public, mais aussi les concernant, eux. Pour ne donner que quelques exemples dont nous reparlerons plus bas : comment s'adresser à des gens qui ont peur, si on ne prend pas en compte cette peur ? Comment être en phase avec son public, si on est soi-même préoccupé par la peur ne pas paraître assez intelligent ?

En conclusion, participer à la diffusion mathématique, c'est certes expliquer simplement et clairement des idées mathématiques, par exemple lors d'une conférence, transmettre un savoir-faire, par exemple au moyen d'un atelier de fabrication d'un objet mathématique, ou proposer une expérience de la recherche, comme le fait par exemple Math.en.Jeans. Mais c'est aussi, nécessairement, susciter des émotions, et trouver d'autres langages pour parler des mathématiques.

1.3 Les réticences

La reconnaissance du rôle de l'émotion dans la diffusion et de l'intérêt d'adapter des contenus mathématiques à d'autres standards que ceux des mathématiques se heurte à un certain nombre de réticences au sein de la communauté mathématique, que nous tenterons d'identifier.

Le manque d'habitude et de formation. Il n'est pas dans les habitudes des mathématiciens de communiquer (et même considérer ?) leurs émotions dans le cadre de leur profession, d'où un manque d'aisance et un sentiment d'incongruité lorsqu'il s'agit de le faire, qui provoquent des réticences bien compréhensibles. Et lorsque le blocage ne se situe pas au niveau de l'envie ou de la pudeur, force est de constater que les mathématiciens ne sont pas équipés pour analyser les dynamiques émotionnelles qui sous-tendent leurs relations avec différents publics, ni pour les objectiver, ou les intégrer dans une quelconque méthodologie de la diffusion des mathématiques, et peut-être ne se sentent-ils pas la légitimité pour le faire. De même, travailler avec d'autres formats, faisant appel à d'autres types de sensibilités – par exemple, la sensibilité artistique – pour transmettre des mathématiques est a priori hors de leur domaine de compétence. Heureusement, ils ne sont pas seuls : ils peuvent profiter des travaux des sociologues, des psychologues, des neurologues, collaborer avec des professionnels de la communication, des artistes, et toutes les autres professions disposant des savoir-faire qui leur manquent. Mais ils ne peuvent pas se retirer complètement de ces chantiers : leur présence et leur contribution est nécessaire.

« C'est pas des maths, c'est pas sérieux. » Une deuxième réticence, et probablement la plus grande, provient de la rigidité des standards qui façonnent notre vision de ce que sont les mathématiques, de comment on les pratique et de comment on en parle. En particulier, la place de choix qu'occupe dans ces standards la fameuse *excellence* tend à valoriser la complexité, la difficulté, la technicité des problèmes abordés, au détriment d'autres manières de pratiquer et de présenter les mathématiques qui seraient profitables à la diffusion des mathématiques – et sans doute aussi à la recherche mathématique, mais ça, c'est un autre débat !

La communauté mathématique ne rejette pas la diffusion dans son ensemble ; ses standards sont par exemple généralement en accord avec le premier des objectifs énoncés plus haut, qui sert même souvent de définition à la diffusion : faire de la diffusion, c'est expliquer ce qu'on fait, permettre au plus grand nombre d'accéder aux connaissances et à la compréhension qui sont les nôtres. Mais

were often considerable : love, interest, dislike, hatred and, all too often, fear. (...) Given the importance of the affective relation of individuals with mathematics, can we agree that one purpose of popularization must be to create a favorable mental association with mathematics whenever and wherever it might arise ?

avec une définition aussi restreinte, on obtient une approche très technique de la diffusion, pour un résultat très vertical : nous vous transmettons nos connaissances, vous apprenez de nous. De même, une émotion évidente et assez bien acceptée est le plaisir : les mathématiciens ressentent du plaisir à faire ou apprendre des maths, et il est admis, et même valorisé, de transmettre, partager, faire ressentir ce plaisir. C'est bien, mais c'est limité, d'une part parce que l'activité mathématique peut apporter d'autres choses que du plaisir, et d'autre part parce que certaines personnes ne peuvent pas avoir accès à ce plaisir, notamment à cause de blocages, de préjugés sur leur propre capacité à faire des mathématiques qui les excluent d'emblée de l'activité mathématique et du plaisir qu'elle procure.

Le mathématicien qui s'intéresse à la diffusion se trouve confronté à un dilemme : d'un côté il voit bien que ses pratiques ne lui permettent pas toujours d'atteindre ses objectifs, et qu'il doit radicalement changer son type de discours – à la fois sur la forme et le contenu – pour pouvoir s'adresser à toute une partie de la société, mais d'un autre côté il a du mal à accepter ce qui sort des standards de sa communauté, et tend à rejeter les approches de la diffusion qui prennent beaucoup de liberté vis-à-vis des formes ou du contenu mathématique[h], en y objectant un récurrent « ce n'est pas des maths, ce n'est pas sérieux ». D'ailleurs, ce rejet est probablement plus souvent intériorisé sous forme d'auto-censure qu'exprimé contre le travail d'un autre.

Cette réticence est puissante, contre-productive et difficile à contrer autrement qu'en prenant individuellement sa liberté, au prix peut-être d'une certaine perte de reconnaissance de la part de la communauté.

Au sujet des standards de la communauté mathématique, nous ne résistons pas à l'envie de citer un extrait de la très tonifiante thèse de Piper Harron, thèse hautement non-standard dans laquelle elle défend le droit, notamment pour des personnes issues comme elle de minorités peu représentées dans le monde académique, de faire des mathématiques librement, sans discrimination et sans oppression de la part d'une culture et de standards dominés principalement par des hommes blancs cisgenres. Ces revendications ne sont pas notre propos ici, mais sa réflexion sur les standards qui structurent les mathématiques et la liberté qu'on peut, pourrait, devrait, doit parfois prendre vis-à-vis de ces standards résonne avec les questions qui nous occupent actuellement.

> Q : Ce que tu fais est bizarre ; tu le sais, n'est-ce pas ?
>
> R : C'est non-standard.
>
> Q : C'est plus que non-standard. C'est bizarre. Certains diraient inutile, risqué, et peut-être même auto-destructeur.
>
> R : D'accord...
>
> Q : Je veux dire, est-ce que tu as demandé un quelconque avis avant de te lancer là-dedans ? Et si tu échoues ? Et si tu échoues justement parce que tu as fait le choix complètement inutile d'être bizarre ?
>
> R : Écoute, ce n'est pas un choix. Ça serait peut-être mieux si c'en était un, je ne sais pas ; j'ai vraiment essayé à plusieurs reprises de faire les choses comme il faut. J'écrivais, tu sais, des définitions et des lemmes et des théorèmes et des preuves, en pensant que je faisais des vraies maths. Mais si je laissais reposer ça plus d'un jour, en y revenant je trouvais ça complètement incompréhensible. Et quand je regarde les maths que j'ai écrites il y a plusieurs années, c'est tellement clair que ce n'est qu'un tissu de mensonges et d'absurdités que ça me met en colère. Ça me met en colère de voir mon nom imprimé en tant qu'auteur de toute cette m..., même si elle a l'air mathématiquement correcte. Le roi était nu, et ça l'était aussi[i].

h. Pour ne donner qu'un exemple, les *contes mathématiques* que j'écris et raconte contiennent beaucoup d'histoire et très peu de mathématiques ; on me demande parfois si c'est encore des maths.

i. **Q : What you're doing is weird ; you know that, right ?**

Le problème de l'évaluation : une réticence institutionnelle. Pour que la communauté mathématique puisse reconnaître formellement et encourager institutionnellement la diffusion comme une de ses activités, il faudrait qu'elle puisse évaluer le travail de diffusion de ses membres. Or, nous manquons d'outils pour évaluer des expériences de diffusion qui mettent en jeu des émotions, ou des formats étrangers aux mathématiques, et peut-être n'en existe-t-il pas. En effet, l'objet à évaluer peut être très évanescent : lorsque l'objectif affiché est de modifier la perception que les gens ont des mathématiques, d'eux-mêmes et de leurs propres capacités à faire des mathématiques, évaluer l'expérience reviendrait à savoir détecter une telle modification – qui, souvent, s'étale dans le temps, nourrie par de multiples expériences... De plus, il semble raisonnable de refuser de questionner les gens – des deux côtés – sur leurs émotions, qui sont de l'ordre de l'intime. Quant aux expériences de diffusion faites d'un tissu principalement non mathématique, qu'a à dire la communauté mathématique dessus ? Ce n'est pas clair.

Probablement, la solution réside dans l'habitude et l'acquisition d'expérience : à force d'avoir pratiqué la diffusion sous des formes diverses et variées et d'avoir observé les effets de cette pratique, les mathématiciens apprendront à reconnaître intuitivement les qualités d'un objet de diffusion, et feront émerger un consensus – peut-être implicite et partiellement inconscient – sur ce qu'est en pratique une expérience de diffusion réussie. Actuellement la communauté mathématique n'en est pas là, puisqu'elle peine encore à s'accorder sur l'importance et l'intérêt même de la diffusion, et qu'il faudra encore à l'ensemble de ses membres apprendre à se décentrer de leur propre point de vue – ce qui est essentiel, en effet ce qui plaît à un mathématicien n'est en général pas ce qui plaît au public visé – pour pouvoir porter un jugement pertinent sur une expérience de diffusion donnée. Le danger de mettre en place trop tôt des outils d'évaluation est d'imposer des contraintes a priori, des contraintes de forme sur ce que devrait être un objet de diffusion, et de se priver ainsi de la possibilité de créer des nouvelles formes et d'expérimenter de nouveaux langages.

1.4 Les émotions (1) : gérer les émotions

Même lorsqu'on ne souhaite pas susciter ou partager des émotions spécifiques, pour pouvoir communiquer efficacement et que ce qu'on dit ne soit pas entendu à rebours de ce qu'on souhaite, il est préférable d'avoir une idée de l'état émotionnel dans lequel on se trouve, de celui dans lequel son interlocuteur est susceptible de se trouver, et de la charge émotionnelle qui pèse sur la relation.

Les émotions du public. Les émotions qui habitent les personnes du public sont différentes d'un public à un autre, variées au sein d'un même public, et souvent on ne les connaît pas. Cependant, à force de discuter avec « l'homme de la rue », on finit par identifier quelques émotions qui apparaissent de façon récurrente : la curiosité, la bienveillance, l'ouverture ; le désir d'apprendre et de comprendre ; le désir de se sentir respecté dans son intelligence ; la méfiance, la défiance ; le sentiment d'exclusion, d'inadéquation, d'échec.

A : It's not normal.

Q : It's more than not normal. It's weird. Some would say unnecessary, risky, maybe even self-destructive.

A : Sure...

Q : I mean, did you ask anyone's advice before you started ? What if you fail ? What if you fail specifically because you made the totally unnecessary choice to be weird ?

A : Look, it's not a choice. Maybe it would be better if it were, I don't know, but I did try on several occasions to do things the right way. I'd think I was writing down, you know, definitions and lemmas and theorems and proofs, that I was doing real math. But if I set it down for more than a day, when I came back to it, I'd find it wholly incomprehensible. And when I look at math that I wrote years ago, it is so clearly full of lies and nonsense that it makes me angry. It makes me actually angry to see my name printed as the author of complete and utter [...] no matter how mathematically proper it looks. The emperor was naked, and so is this.

Nous ne discuterons pas ces émotions plus en détail dans ce paragraphe[j], puisque le diffuseur-mathématicien qui souhaiterait garder un discours neutre et objectif renonce à les modifier ou les accentuer. La meilleure manière pour lui d'aborder les choses est d'avoir conscience de ces réalités émotionnelles, et d'utiliser ses propres émotions pour trouver une posture juste.

Les émotions du diffuseur. « Quelles sont mes motivations émotionnelles pour participer à la diffusion, quelles sont les émotions qui m'animent ? » C'est une question à laquelle chacun doit répondre pour soi, et dont la réponse peut varier selon la situation. Je peux néanmoins apporter quelques réponses personnelles, en faisant le pari qu'elles pourront résonner chez d'autres. Voici donc les émotions qui, successivement ou conjointement, m'animent ou m'ont animée dans des situations de diffusion, ainsi que quelques-unes de leur conséquences concrètes, positives ou négatives.

Une première émotion qui motive à participer à la diffusion des mathématiques est le *désir d'être en lien*, au-delà de sa communauté de mathématiciens. Le désir de sentir que notre activité professionnelle ne nous isole pas, mais qu'elle nous inscrit pleinement dans le monde, et qu'elle peut participer à la manière dont nous nous relions aux autres. Une conséquence positive de ce désir d'être en lien : il permet d'être entièrement présent au public, de toute sa personne. Une conséquence négative : il entraîne de l'agacement vis-à-vis des gens qui s'approprient « n'importe comment » les connaissances qu'on essaie de transmettre, parce qu'ils ne nous permettent pas de nous sentir en lien.

Une deuxième émotion, pas complètement disjointe de la première mais tout de même différente, est le *désir de se sentir utile*. La fameuse question « Mais ça sert à quoi, les maths ? » peut être ressentie comme une mise en cause permanente. Est-ce que ce que nous faisons a un intérêt, une utilité ? On veut croire que la diffusion des mathématiques est utile, nécessaire même, et alors c'est gratifiant d'y participer. Une conséquence positive de ce désir d'être utile : il pousse à ne pas systématiquement considérer les choses depuis son propre point de vue, mais à s'interroger sur ce que les gens à qui on parle considèrent comme utile, ce dont ils ont besoin, ce qui pourrait leur manquer. Deux conséquences négatives : le possible glissement insidieux vers une posture de « missionnaire chargé de l'éducation des masses populaires », avec la condescendance que cela induirait ; l'agacement vis-à-vis des gens qui ne comprennent pas ce qu'on dit, et par là semblent rendre nos efforts inutiles.

Une troisième émotion, plus difficile à admettre peut-être, est le *plaisir d'être admiré*, regardé, le bien-être provoqué par le fait de retrouver cette place d'élève brillant et impressionnant que beaucoup d'entre nous ont connue pendant l'enfance et l'adolescence, et qui a certainement contribué à notre image de soi. Une conséquence positive de cette sensation plaisante : elle donne confiance en soi et permet de s'exprimer plus librement, avec moins de peur. Une conséquence négative : elle peut conduire à rechercher une relation où on domine ostensiblement l'autre.

Enfin, une quatrième émotion conditionne la manière dont on aborde la diffusion des mathématiques : c'est *la peur d'être mal jugé par la communauté mathématique*, le sentiment de sortir de ses rangs, la peur de la trahir, de n'être pas conforme à ses standards. Une conséquence positive de cette peur : en nous imposant des standards acceptés par d'autres mathématiciens, elle fournit un garde-fou, une certaine forme de garantie de sérieux et de rigueur. Deux conséquences négatives : on ne parle finalement pas pour son public, mais pour le collègue assis au dernier rang ; on s'interdit d'inventer de nouvelles formes de discours, qui seraient mieux adaptées à son public.

J'espère que cette étude de cas mettra en évidence la nécessité de clarifier pour soi-même ses émotions. Il ne s'agit pas de porter un jugement dessus, mais d'identifier les avantages qu'elles procurent et surtout les risques qu'elles font prendre, afin d'éviter les expériences décevantes.

Plus largement, le fait de s'interroger sur ses propres attentes et motivations concernant la diffusion permet aussi de clarifier sa position, et de la tenir de manière plus juste et plus assumée, donc

j. Nous les aborderons plus en détail à la section suivante.

plus efficace : suis-je là pour divertir, instruire, partager, faire passer un message ?

Trouver sa posture. En rassemblant toutes ces émotions et leurs possibles conséquences – celles qu'on veut exploiter et celles dont on se méfie – on peut se faire une feuille de route, un ensemble de propositions à se répéter à soi-même pour tenir la ligne qu'on s'est choisie. Voici la mienne, modulable selon le public et ce que j'anticipe ou devine de sa sensibilité.

> Je fais de mon mieux pour maintenir le lien avec toi. C'est ce qui m'importe, plus que de produire une prestation nickel. Et tant pis pour le jugement de mes collègues, et tant pis pour mon envie de montrer tout ce dont je suis capable.
>
> Je respecte ton intelligence, je n'essaie pas de l'évaluer mentalement en utilisant les standards des mathématiques.
>
> Je respecte ton intelligence, je simplifie ma pensée pour pouvoir la partager avec toi, sans la rendre simpliste. Je te parle de choses que je pense pertinentes, intéressantes, éclairantes.
>
> Je ne me prends pas au sérieux ; je renonce à un potentiel statut de détentrice-du-savoir, je m'autorise à rire, à dire des bêtises.
>
> Je ne suis pas ton professeur, tu n'es pas mon élève. Je ne suis pas là pour t'instruire ou t'éduquer.
>
> Tu es libre de faire ce que tu veux de ce que je te donne ; je n'ai pas de propriété intellectuelle sur mes connaissances, tu les transformes et les intègres comme tu le souhaites à ton paysage mental.

Les situations où cette réflexion sur les émotions n'a visiblement pas été menée, ou pas assimilée, sont très visibles ; quand au contraire il y a cet équilibre émotionnel dû à une bonne reconnaissance des émotions, il ne se remarque pas : la communication se passe agréablement, sans heurt, et l'expérience est généralement vécue comme positive, sans qu'on sache vraiment pourquoi. Les exemples d'expériences réussies de ce point de vue sont assez difficiles à exhiber, parce que très discrets ; nous n'en donnerons donc pas.

1.5 Les émotions (2) : susciter volontairement des émotions

Admettons maintenant que le diffuseur-mathématicien s'intéresse au fait de susciter des émotions chez son public. Quelles pourraient être ces émotions ? Nous en proposons ici quelques-unes (qui font écho aux émotions fréquemment représentées parmi le public que nous avons énumérées précédemment), en donnant à chaque fois des exemples parmi les expériences de diffusion existantes. Il va sans dire que ce décryptage émotionnel d'expériences menées par d'autres n'engage pas leurs auteurs ; c'en est une lecture personnelle et subjective.

— Du *plaisir* – et pas seulement le plaisir intellectuel que procure la compréhension d'une idée complexe. Le medium désigné pour cela est le jeu, qu'il soit virtuel[k] ou réel. C'est l'approche sur laquelle Plaisir Maths base ses animations et interventions dans les écoles et les médiathèques. Cette approche a été théorisée par Nicolas Pelay, son fondateur, dans sa thèse [45]. En dehors du jeu, on peut aussi provoquer du plaisir par les sens, et notamment la vue, à l'aide de belles images. Les articles de Patrick Popescu-Pampu publiés sur *Images des mathématiques* en fournissent un bon exemple, [50, 51].

k. Les concepteurs de jeux vidéos ont par exemple très bien intégré la notion d'apprentissage skinnerien, où le joueur effectue à fréquence élevée des actions qui provoquent l'apparition ou la disparition immédiate de stimulus positifs ou négatifs qui constituent pour le cerveau des récompenses ou des punitions.

— De l'*émerveillement* pour les mathématiques, indépendamment de toute compréhension mathématique détaillée. On peut provoquer un tel émerveillement à l'aide de la beauté visuelle de certaines images ou de certains objets mathématiques, comme le fait Simon Beck avec ses immenses dessins sur neige [7]. On peut faire appel au sens du merveilleux, par exemple avec la magie, comme c'est le cas dans l'exposition Magimatique [6] ou, plus généralement, en exploitant le côté magique que peuvent avoir certains phénomènes liés aux mathématiques, comme aime le faire Tadashi Tokieda avec ses jouets mathématiques, [59]. On peut proposer une promenade, une visite ou un tour de montagnes russes, où le public n'a plus qu'à se laisser porter par ses perceptions. Deux exemples très différents de cette approche : le film *Dimensions* de Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez [2], où les objets mathématiques tournent, s'articulent et se déploient lentement à l'écran ; les vidéos Youtube de Vi Hart et leur tourbillon grisant de dessins, de découpages, de créations folles et d'idées étonnantes [29].

— De l'*attirance* pour la figure de mathématicien ou mathématicienne qu'on représente, et qui peut constituer un premier pas facile vers une vision positive des mathématiques. On peut pour cela prendre soin, dans le cas d'une rencontre face à face avec le public, de l'image qu'on renvoie : dynamique, décontractée, excentrique, heureuse... Dans le cas d'une communication indirecte, on peut se présenter, donner accès à son univers, parler de ses goûts, de son quotidien, de ses habitudes, comme le fait Cédric Villani dans son roman *Théorème vivant* [60] qui provoque, entre autres réactions[l], cette attirance.

— Un sentiment d'*inclusion* (par opposition au sentiment d'exclusion que ressentent un grand nombre de personnes dès qu'il s'agit de mathématiques). Cela peut passer par le fait de proposer aux personnes du public des figures auxquelles elles peuvent s'identifier ; c'est en partie ce sur quoi reposent les journées *Filles et maths : une équation lumineuse* organisées pour des collégiennes, des lycéennes et des étudiantes en classe préparatoire par les associations femmes&mathématiques et Animath [18]. Ce sentiment d'inclusion peut aussi être induit en proposant au public de participer, que ce soit lors d'une intervention, comme le fait François Sauvageot dans ses *One Math Show* [54], dans une exposition, par exemple celles du Momath, dans un jeu vidéo ou tout autre objet virtuel, comme la *Parable of Polygons* de Vi Hart [30], ou dans des ateliers comme ceux du dispositif MathαLyon [40]. Enfin, ce sentiment d'inclusion peut être amené par la présence d'éléments familiers auxquels le public peut immédiatement se rattacher : des exemples de la vie quotidienne, des questions qu'il s'est déjà posées, etc.

— De l'*estime de soi*, en particulier pour des gens qui pensent être nuls en maths, n'être pas assez intelligents pour les mathématiques, pour qui l'expérience des mathématiques est un échec personnel. C'est sensible et délicat lorsqu'on s'adresse à un public avec très peu de bagage mathématique, mais cela peut être fait en réussissant un discours qui puisse être facilement compris, et dans le même temps ne soit pas simpliste ou naïf, mais s'adresse réellement à l'intelligence des gens en respectant leur appétit de réflexions éclairantes, d'informations intéressantes et de réponses pertinentes.

De manière tout aussi subtile, on peut favoriser cette estime de soi en intégrant à son discours les questions ou réactions qu'on présume être celles de son public, ce qui peut l'aider à se sentir à sa place, à reconnaître ses difficultés comme normales et ses questions comme légitimes.

l. On pourra, pour se donner une idée des différentes réactions à ce livre, parcourir la centaine de commentaires que des internautes ont laissés sur Amazon.

1.6 Les formats

Le dernier point que nous aborderons ici, et qui semble crucial pour le troisième objectif (que les gens puissent s'approprier les mathématiques comme une activité culturelle qu'ils puissent apprécier à leur manière) est la possibilité de laisser de côté les formats qui semblent les plus propices à pratiquer les mathématiques ou transmettre efficacement des idées mathématiques, et d'utiliser d'autres formats, par exemple empruntés à différents domaines artistiques : au cinéma, à la littérature, aux arts plastiques, à la bande dessinée, etc., à des domaines de la communication comme le journalisme ou la publicité, ou à d'autres domaines encore. De tels exemples d'objets non-mathématiques qui font intervenir des mathématiques sont nombreux. En voici quelques-uns très connus : le film *Cube* réalisé par Vincenzo Natali [44], où les protagonistes sont enfermés dans une sorte d'immense Rubik's Cube piégé et dont la disposition des pièges repose sur les nombres premiers ; les deux premiers romans de *La Trilogie des Fourmis* de Bernard Weber, au cours desquels on peut lire une énigme géométrique faisant intervenir la notion de passage à la dimension supérieure [62], et une autre autour de la suite audiophonique de Conway [61] ; certains tableaux de Salvador Dalí, comme *Queue d'aronde* [13], qui illustre l'une des singularités classifiées par la théorie des catastrophes, ou encore *Crucifixion (Corpus hypercubus)* [12], qui figure un homme crucifié à un patron tridimensionnel d'un hypercube ; la série *Futurama* créée par Matt Groening et développée par David X. Cohen (créateurs des Simpsons) [26], qui comporte une grande quantité de références aux mathématiques — le blogueur mathématique ElJj s'est amusé à toutes les débusquer [17]. ; la bande-dessinée *Le Chat* de Philippe Geluck [22] qui compte aussi beaucoup de références mathématiques – elles sont référencées dans l'album *La mathématique du Chat de Philippe Geluck* du mathématicien Daniel Justens [34]. La liste pourrait s'allonger encore longtemps ; arrêtons-nous là.

Beaucoup penseront que ce n'est pas le rôle des mathématiciens de se lancer dans la littérature ou le cinéma – ils n'en auraient pas les compétences – et qu'ils ont plus important à faire, par exemple expliquer des idées complexes qu'ils sont seuls à comprendre clairement. Mais alors, de qui cet aspect de la diffusion est-il le rôle ? Si, pour répondre à cette question, on regarde parmi les différents exemples quels profils ont leurs créateurs, on voit apparaître plusieurs cas de figure.

1. Des personnes qui ont eu une formation mathématique et se sont réorientés ensuite vers d'autres domaines. C'est le cas de l'artiste plasticien Pierre Gallais, ancien élève de l'école Centrale de Lyon, qui « met en scène poétiquement les mathématiques » au travers de sculptures, dessins et installations ; c'est le cas de la compagnie Terraquée, qui propose des pièces de théâtre mathématiques [56, 57], et dont l'un des membres fondateurs, François Perrin, a obtenu un M2 en mathématiques, a passé l'agrégation et a commencé une thèse en histoire des mathématiques ; c'est le cas de *L'Île logique*, compagnie qui allie mathématiques et clown [38], fondée par Cédric Aubouy, qui a un DEA de logique ; c'est le cas aussi de la série *Futurama* évoquée plus haut, qui compte dans ses scénaristes Ken Keeler, diplômé en mathématiques appliquées de Harvard et Jeff Westbrook, diplômé en informatique à Princeton.

2. Une personne ou une équipe qui fait appel aux conseils d'un mathématicien pour construire ou consolider la partie mathématique de son projet. C'est ce qui s'est passé pour le film *Cube*, dans le générique duquel le mathématicien David W. Pravica apparaît en tant que « consultant mathématique » ; c'est aussi ainsi qu'a procédé Laurent Deschamps, conteur-musicien, qui s'est adressé au mathématicien François Sauvageot pour la création de son spectacle *Au bout du conte* [16].

3. Une personne qui apprend les mathématiques afin de pouvoir les intégrer à son discours, à sa pratique artistique, comme le fait Sylvie Pic dont les tableaux sont manifestement inspirés de la topologie [46].

4. Une personne qui met en forme les idées expliquées par un mathématicien, lui servant ainsi d'intermédiaire avec le public. On retrouve souvent ce cas de figure dans le journalisme, mais on peut aussi le retrouver dans les arts, par exemple avec l'expérience menée par le collectif Playground, qui a organisé en partenariat avec le MSRI à Berkeley des rencontres à deux entre écrivains et mathématiciens autour d'un thème mathématique donné, le premier écrivant ensuite une pièce de théâtre inspirée par sa discussion avec le second [47].
5. Des mathématiciens qui sont capables et ont envie de s'essayer à d'autre formes d'expression, comme Denis Guedj, enseignant-chercheur et auteur du roman *Le théorème du perroquet* [27], ou encore comme le groupe de doctorants qui a écrit la comédie musicale *La tournée de Pi* [11] – qui a été interprétée par des musiciens et des acteurs professionnels.

De toutes les situations identifiées, aucune ne nous paraît a priori préférable à d'autres, mais il est frappant de constater que toutes, sauf peut-être la troisième, demandent la participation active de mathématiciens. Si l'on veut que ce genre d'objets *culturels* figurant des mathématiques existent, il faut reconnaître et accepter que les mathématiciens ont un rôle à jouer dans leur création et valoriser ce rôle, même s'il aboutit nécessairement à un résultat contenant peu de mathématiques – lorsqu'on renonce au langage qui, précisément, permet d'exprimer les idées mathématiques, on ne peut pas espérer transmettre beaucoup plus qu'une esquisse d'idée, ou une image semée dans le paysage mental des gens. Car si ce rôle semble être un gâchis au vu de l'immense partie du savoir et des compétences des mathématiciens qu'il laisse inutilisés, il prend tout son sens lorsqu'on considère tout le recul qu'il nécessite.

Nous dirons encore deux mots. Le premier, pour insister encore une fois sur l'intérêt et l'importance de tels objets culturels, même si leur contenu mathématique est faible. Ces objets permettent de parler à d'autres personnes, qui ne sont pas disposées à prêter leur esprit à l'activité mathématique, et de leur transmettre un petit peu l'idée que les mathématiques font également partie de la culture qui est la leur. Cela permet de familiariser les gens avec des objets ou des idées mathématiques – et, pour paraphraser une célèbre citation de Von Neumann, la compréhension d'une idée mathématique passe d'abord par la familiarisation avec cette idée. Plus généralement, cela permet de créer du lien, des échanges avec d'autres pans de l'activité humaine et de casser les barrières qui segmentent et enferment les mathématiques dans des petites cases nommées technicité, austérité, formalisme, calcul, abstraction, élitisme.

Et le deuxième mot, pour faire l'apologie de la liberté et de l'épanouissement personnel des mathématiciens, au-delà de toute considération de rentabilité. Expérimenter d'autres formes de création et d'expression, explorer des paysages que le reste de son activité professionnelle n'invite pas à explorer, c'est aussi une manière de ne pas se laisser enfermer, de ne pas s'enfermer soi-même, d'être plus pleinement soi.

1.7 Un poème en prose pour finir

** ∼ Usages des diamants ∼ **

Les diamantaires taillent la pierre, facette par facette, arête par arête, avec une minutie sans borne, et offrent au monde ces joyaux nus qui, si on y plonge son regard, semblent réfléchir et démultiplier la lumière, à l'infini. L'un pratique la taille brillant, l'autre la taille en rose, celle-ci aime les diamants, celui-ci préfère les topazes et les saphirs, mais tous connaissent jusqu'au plus profond d'eux-mêmes l'émotion qui étreint à la vue de la pierre brute dont on est seul à deviner la beauté et qu'il va falloir révéler ; tous connaissent l'euphorie de l'instant où la forme parfaite s'impose à eux comme une

évidence, et la patience infinie que demande la taille. Tous savent retracer cela en un coup d'œil, à la vue d'une pierre qu'un autre a taillée. Tous connaissent intimement la beauté des pierres.

Diamantaires un peu désemparés lorsque, portant au monde leurs pierres pour en faire admirer l'éclat, ils rencontrent rires ou haussements de sourcils. « Pourquoi perdre son temps avec des matériaux si durs ? Le verre soufflé, c'est aussi joli ! » Ils aimeraient dire comment la complexité des jeux de lumière dans le diamant fait écho à la complexité de la pensée. Ils aimeraient dire tout ce que ces efforts inouïs dirigés vers cette petite chose réfractaire et intransigeante à l'extérieur d'eux-mêmes leur a appris sur eux, sur ce que c'est qu'être au monde. Ils aimeraient dire le doux délassement qu'offre la contemplation des pierres. Ils aimeraient dire tout cela, mais ils n'ont pas le langage. Leurs yeux savent deviner la taille parfaite et leurs mains la réaliser, leur être tout entier vibre, résonne et chante à ces activités, mais ils n'ont pas de mots.

Certains ont ouvert les portes de leurs ateliers, pour que les passants puissent les regarder travailler et observer les métamorphoses de la pierre. D'autres se sont inventés joailliers, et ont serti leurs diamants et leurs émeraudes sur des bagues ou des pendants, afin que qui veut puisse les porter. Et tous font semblant de ne pas entendre ceux qui, aveugles au doux chatoiement des pierres, continuent de se moquer de leurs techniques archaïques, de l'inutilité de leur travail et de l'acharnement démesuré qu'ils y déploient.

Je me sens comme une costumière au milieu des diamantaires. J'aime leurs pierres et la manière qu'elles ont de jouer avec la lumière ; souvent je leur en chipe une pour la coller sur un feston ou la glisser dans une tresse. Je me demande si j'ai ma place parmi eux. Certes, mon âme aussi se nourrit de la subtile beauté des pierres qui chatoient en silence, leurs mille feux donnés sans un bruit à quiconque voudra bien s'arrêter pour les contempler. Certes, j'honore leur travail à ma manière : mes costumes sont incrustés de gemmes, brodés de camées, ornés de corindons, qui capturent la lumière et la renvoient en reflets chatoyants. Mais je ne suis pas vraiment des leurs ; jamais je ne m'abîme des jours durant dans la contemplation d'un diamant, et jamais je ne pourrai voir ce qu'ils voient. Je ne peux pas travailler sans relâche comme ils le font ; sans cesse le monde m'appelle à lui, avec ses fêtes et ses caresses, ses voyages et ses folies. Parfois je me dis que je ternis leurs diamants en les perdant dans des plis et des replis de tissu. D'autres fois je me dis que je ne devrais pas me mettre entre eux et le monde, qu'ils devraient eux-mêmes aller dans les rues glisser leurs joyaux dans les mains et les cheveux des passants, et murmurer le nom de la pierre en réponse au sourire surpris qu'ils recevront. D'autres fois encore, je me dis qu'après tout, le miroitement bouleversant des pierres et le flamboiement fantasque des costumes de scène se méritent bien l'un l'autre, et que c'est tout ce qui compte. D'autres fois enfin, je ne me dis rien, et une petite fille ou un vieil homme sort de la foule et demande c'est joli, cette chose qui brille sur le costume d'Arlequin, c'est quoi ? Je comprends que cette petite fille n'a jamais vu de pierre taillée, que ce vieil homme n'a jamais porté ni offert de diamant. Alors je souris.

Chapitre 2

Contes mathématiques

Lorsqu'on veut mener des actions de diffusion à l'intention des enfants, et particulièrement des jeunes enfants, les formats « classiques » comme la conférence ou les ateliers de résolution de problèmes ne sont pas toujours bien adaptés. Parmi les activités auxquelles les enfants, même très jeunes, sont généralement réceptifs, figurent en bonne place les jeux, les histoires, les loisirs créatifs [a]. Il semble donc intéressant d'explorer l'utilisation de ces activités dans le cadre de la diffusion des mathématiques. On observe actuellement une grande réflexion et un certain nombre d'expérimentations autour du rôle du jeu dans l'apprentissage et dans le développement d'un intérêt pour un sujet donné, et ceci s'applique notamment aux mathématiques. À ce sujet, on pourra par exemple consulter la thèse de Nicolas Pelay [45]. S'il est indubitable que ce rôle est important et que le jeu est un médium intéressant et porteur, on peut tout de même se demander si les histoires et les loisirs créatifs ne pourraient pas constituer, dans une optique de diffusion des mathématiques à destination des enfants, des activités complémentaires au jeu, permettant de s'adresser autrement aux enfants et de faire appel chez eux à d'autres motivations, émotions et fonctions cognitives.

J'ai tenté de répondre à cette question en ce qui concerne les histoires principalement et, dans une moindre mesure, les loisirs créatifs, tout au long d'une expérimentation menée sur trois ans, comprenant l'écriture de six contes, l'édition de l'un d'eux en collaboration avec une illustratrice, la réalisation de neuf interventions en milieu scolaire [b], et la tenue d'une douzaine de séances de conte dans des lieux publics [c]. Ce texte présente et analyse ces *contes mathématiques*, ainsi que leur réception par différents publics et les perspectives qu'ils ouvrent.

2.1 Présentation

Définissons tout d'abord ce qu'on appellera dans toute la suite *contes mathématiques*. Ce sont des histoires courtes, dans lesquelles un ou plusieurs personnages se retrouvent confrontés à des problématiques mettant en jeu un objet mathématique concret ; chaque histoire peut se poursuivre par la création manuelle ou la manipulation de l'objet mathématique qu'elle présente ; les idées mathématiques que ces histoires abordent sont à la fois riches et fondamentales, et peuvent ainsi donner lieu à des développements ultérieurs plus poussés. En ce sens, chaque conte est pensé comme une porte d'entrée, accessible à tous, vers un objet mathématique et une notion sous-jacente, plus abstraite. Dans un premier temps, l'histoire permet de développer un intérêt et un certain émerveillement envers l'objet

a. On regroupera sous ce terme un peu large les arts plastiques et la fabrication artisanale d'objets.

b. On considérera un milieu scolaire élargi, pas forcément dans l'enceinte de l'école, mais où les élèves sont accompagnés par leurs enseignants – c'est le cas par exemple d'un congrès MATh.en.JEANS ou d'un voyage scolaire.

c. Dans des bibliothèques municipales, à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, dans un café associatif.

mathématique ; dans un deuxième temps, l'atelier offre la possibilité d'une meilleure appropriation de l'objet. Certains enfants expriment à ce moment l'envie d'en savoir plus sur la notion mathématique sous-jacente, et sont alors disposés à s'investir dans une activité mathématique proprement dite, par exemple à écouter une explication ou se lancer dans une réflexion. Détaillons chacun de ces points.
L'histoire. Chaque conte est écrit avec l'exigence d'une trame dramatique solide et de personnages forts, ce qui en fait une histoire avant tout : bien que les mathématiques y jouent un rôle important, on peut suivre et apprécier l'histoire même si on ignore les notions mathématiques présentées.
L'objet. Les objets mathématiques intervenant dans les histoires sont « concrets », dans le sens qu'ils peuvent être dessinés, réalisés, reproduits. Dans un premier temps, cela permet durant le conte de donner à admirer l'objet mathématique. Dans un second temps, cela permet de faire suivre le conte par une activité de manipulation ou de réalisation de l'objet mathématique. Ce second temps constitue simultanément une étape supplémentaire dans l'appropriation de la notion mathématique pour ceux qu'elle intéresse, et une activité intéressante et gratifiante pour ceux que la notion mathématique n'intéresse pas.
La notion mathématique sous-jacente. Le parti pris dans la création des contes est de ne pas se restreindre aux mathématiques du programme scolaire, mais de s'autoriser d'autres notions, éventuellement complexes, faisant partie de la culture des mathématiciens d'aujourd'hui.

Le tableau suivant présente, pour chacun des six contes écrits jusqu'à maintenant, les objets mis en scène, les ateliers associés, et des exemples de notions mathématiques que ces objets permettent d'introduire.

conte	**objet**	**atelier**	**notion**
Lune	ombres sur une boule	modélisation, à l'aide d'une boule blanche et d'une lumière puissante, du mouvement de la lune ; observation des phases	section apparente, modélisation, détermination de reliefs à partir d'ombres
Liens invisibles	anneaux borroméens	dessins et confection d'anneaux borroméens, reproduction d'un tour de magie	enlacement de courbes fermées
La Faiseuse de neige	courbe de Von Koch	création d'un flocon de neige fractal par découpage, dans un hexagone de papier plié en six, de courbes de Von Koch	fractales, infini
La clef magique	flexagones	confection d'hexaflexagones à 3 et 6 faces	transformations, groupes de symétries
Conte tout droit	enveloppes de droites	dessin au fil (réalisation de figures géométriques courbes – par exemple des astroïdes – avec des fils tendus ou des lignes droites)	approximation, passage à la limite
Mais que suis-je donc ?	nœuds	dessins de nœuds à partir des graphes associés	théorie des nœuds, encodage d'informations complexes

Certains de ces ateliers sont relativement classiques, d'autres sont inspirés de démarches plus originales mais ayant fait leurs preuves (l'atelier sur les dessins de nœuds est dû à Christian Mercat [42], celui sur les anneaux borroméens est inspiré d'une vidéo de Tadashi Tokieda [58]). L'idée majeure qui est développée ici consiste à les présenter comme la continuation d'une histoire.

Anticipant d'éventuelles remarques sur la complexité des notions mathématiques, rappelons ici que l'enjeu n'est pas didactique mais culturel, et que notre objectif final n'est pas l'apprentissage et la maîtrise des notions mathématiques, mais un contact avec la culture mathématique. Les contes et les ateliers sont pensés pour être un premier contact avec ces notions mathématiques, et un support pour un temps de recherche, une explication ou un exposé mathématique subséquents.

Deux exemples. Dans la suite de la discussion, je restreindrai le corpus à deux de ces six contes, qui relèvent directement de mon domaine de recherche : *Lune* et *Liens invisibles*.

Lune met en scène Lou, une petite fille qui veut savoir ce qu'est la lune, et notamment pourquoi elle change de forme. Elle interroge son entourage et reçoit des réponses d'ordre symbolique ou mythologique qui ne la satisfont pas : elle veut savoir, et surtout comprendre, ce qu'est vraiment la lune. De rencontre en rencontre, elle finit par se rendre compte qu'elle doit trouver elle-même ses réponses, en observant et en réfléchissant. Le dernier personnage qu'elle rencontre est un « vieil homme qui observe et qui réfléchit » et qui, au lieu de lui répondre, lui donne les moyens de trouver elle-même les réponses à ses questions. Cette dernière partie est assez détaillée pour que le lecteur puisse suivre le cheminement intellectuel de la petite fille, visualiser les observations qu'elle effectue et comprendre les déductions qu'elle tire de ces observations. Ces observations et déductions sont les suivantes : la lune est une boule – et non un trou ou un disque – parce que c'est la seule forme qui est ronde quel que soit l'endroit depuis lequel on la voit ; la lune a toujours la forme d'un disque moins un croissant ; en faisant tourner sur elle-même une boule à moitié blanche et à moitié noire, on observe toutes les formes que prend la lune ; en faisant tourner une boule blanche autour de soi dans le faisceau d'une lampe, on reproduit toutes les formes que prend la lune ; dans cette modélisation la lampe représente le soleil, la boule la lune, et la personne au centre, la terre.

L'atelier proposé à la suite de ce conte consiste à reproduire dans l'obscurité, à l'aide d'une lampe puissante et d'une boule blanche, la manipulation permettant d'observer les phases de la lune. Ce conte a été illustré par Elis Tamula, illustratrice estonienne, et édité [d]. Le livre dispose également d'un site compagnon, où on trouve le manuscrit et des compléments – mathématiques et non-mathématiques – sur les éléments de l'histoire.

Liens invisibles met en scène Lou, Johann et Elena, trois enfants solitaires qui peinent à se faire des amis. Sous l'impulsion de leur institutrice, ils apprennent à se servir de lunettes bien particulières qui permettent de voir la structure sous-jacente des choses, et notamment les liens entre les gens. Aidés de ces lunettes, ils observent que chaque personne a, partant de sa poitrine, une boucle de fil fin et brillant, et que deux personnes qui ont à un moment partagé une relation forte ont leurs boucles qui s'enlacent. Les trois enfants comprennent aussi la structure et les caractéristiques de leurs propres boucles. Finalement, rapprochés par leurs tentatives de décrypter ensemble la complexité des liens interpersonnels, ils finissent par s'apercevoir que leurs trois boucles se sont enlacées en un entrelacs borroméen. Les idées ou concepts mathématiques présents dans le conte sont : les nœuds, les entrelacs, le nombre d'enlacement qui peut être nul, un ou multiple [e], l'invariance du nombre d'enlacement par déformation continue, la variation du nombre d'enlacement lorsque les deux courbes se croisent, les cercles enlacés de la fibration de Hopf, dont chaque paire s'enlace exactement une fois, et les anneaux borroméens.

d. Nous avons choisi l'auto-édition, ce qui nous permet de proposer une version numérique libre et gratuite du livre.
e. Le fait que le nombre d'enlacement est une quantité algébrique – qui donc peut être négative – n'est pas abordé.

L'atelier proposé à la suite de ce conte concerne des anneaux borroméens, et consiste à reproduire avec des rubans un nœud borroméen, d'une manière assez spectaculaire qu'on peut présenter comme un tour de magie[f]. Le conte a été partiellement illustré, par Elis Tamula et moi-même ; ici aussi, un site compagnon permet de creuser les mathématiques du conte.

Ces deux contes se trouvent à la fin du chapitre, en annexe.

2.2 Analyse a priori

Avant de présenter la manière dont ils ont été reçus, nous proposons une analyse a priori de ces contes, de leurs avantages et leurs potentialités. Nous nous concentrerons sur les deux aspects qui nous intéressent plus particulièrement ici, à savoir le format – étranger aux mathématiques – et l'utilisation des émotions.

2.2.1 Avantages liés au format.

Les *contes mathématiques*, de par leur format même – une histoire, qui peut être contée sous forme théâtrale, et est pensée pour être suivie d'un atelier de fabrication ou de manipulation – présentent un certains nombre d'avantages, dont nous esquissons une première liste ici.

— Le fait que l'élément central soit une histoire est un atout important, les histoires étant un élément d'accroche extrêmement puissant qui permet de capter très facilement l'attention.

— Le genre littéraire du conte, en particulier, est spécialement intéressant : d'une part, son recours important au symbolique permet d'y introduire facilement des objets mathématiques – par exemple, les liens entre les personnes deviennent des courbes fermées qui s'enlacent ; d'autre part, il est un outil privilégié de la construction de l'image de soi. En effet, en tant que récit intemporel et détaché de tout lieu précis, faisant intervenir des personnages archétypaux et un contenu hautement symbolique, le conte propose aux enfants et aux plus grands des situations auxquelles ils peuvent facilement s'identifier, des mots et des images à placer sur leur propre image de soi.

— L'histoire contient par essence autre chose que des idées mathématiques : des personnages, leurs traits de personnalité, les situations politiques, économiques, psychologiques ou relationnelles dans lesquels ils se trouvent, etc. Ceci laisse de la place pour aborder des thèmes et questionnements non-mathématiques, mais liés à l'activité mathématique ou, plus généralement, scientifique. Par exemple, le conte *Lune* aborde les différents rapports à la connaissance et la place qu'y occupe la science. En effet, les parents de Lou comprennent le monde par des symboles et des éléments d'ordre mythologique ; pour le lièvre, entièrement dévoué à sa survie et à celle de sa famille, la connaissance est un luxe superflu ; la chouette représente l'érudition ; le renard a une compréhension intuitive et non formalisée du monde ; le vieil homme, enfin, représente l'idée d'un savoir transmissible construit conjointement par l'observation, l'expérimentation, la réflexion et la formalisation. Chaque manière d'appréhender la connaissance constitue un choix, que chacun est libre de faire pour soi. Deuxième exemple : le conte *Liens invisibles* aborde l'idée que l'abstraction et la formalisation mathématiques, symbolisées par les étranges lunettes, sont des activités parfois douloureuses, face auxquelles nous ne sommes pas tous égaux, mais qui peuvent apporter à chacun des clefs de compréhension de soi et du monde. Un dernier exemple : les deux contes font intervenir en majorité des personnages féminins, ce qui donne à voir les mathématiques comme une activité qui n'est pas faite exclusivement pour les garçons, mais

f. Atelier inspiré de la vidéo de Tadashi Tokieda [58].

vers laquelle les filles peuvent se tourner naturellement et spontanément. *Lune*, en particulier, aborde un peu plus frontalement la question des attributs féminins et masculins avec l'idée, remise en question au cours du conte, que la lune, douce et courbée, serait pour les filles, tandis que les garçons auraient le soleil pour leur apporter force et courage. Encore un mot à ce sujet : le besoin de remédier à la sur-représentation au sein des mathématiques des hommes, des blancs, et des personnes issues de milieux socio-culturels élevés est un objectif récurrent des actions de diffusion. Or, un outil important pour sensibiliser les enfants et les jeunes gens au fait que les mathématiques sont aussi une activité pour eux ou elles est la présence de modèles. Malheureusement, la rareté objective dans les mathématiques actuelles et passées de femmes, de noirs, etc. fait que ces modèles sont difficiles à fournir. Si, bien sûr, la fiction ne peut pas se substituer à la réalité, elle détient quand même l'avantage qu'on peut y faire figurer sans contrainte tous les personnages qu'on souhaite.

— Un avantage qui découle de tous ceux cités précédemment : la présence de différents niveaux de lecture. En effet, avec leur trame narrative simple et leurs personnages archétypaux, les contes sont accessibles aux jeunes enfants – à partir de 5 ans pour *Lune*, et plutôt 7 ans pour *Liens invisibles* – tandis que les thématiques plus complexes présentes en filigrane pourront interpeller les plus grands, voire les adultes. De même, le contenu mathématique est donné à voir aux plus petits sous la forme d'un objet tangible, tandis que les plus grands accéderont aux concepts que ces objets illustrent.

— En lui proposant un conte – à lire, à écouter ou à regarder – on n'exige pas du lecteur ou spectateur qu'il produise une activité mathématique. Il peut bien sûr le faire par une réflexion autour des concepts mathématiques présentés, mais il peut aussi se laisser porter : aucune participation formelle ne lui est demandée, et l'histoire garde un sens et un contenu si on fait abstraction des mathématiques qui y figurent. Cette absence de sollicitation peut être très intéressante lorsqu'on s'adresse à des personnes – notamment des adultes, parents ou professeurs des écoles – qui se sentent « bloquées » par une sensation d'échec ou d'incapacité vis-à-vis des mathématiques. Elle s'étend à l'atelier qui, bien qu'il aboutisse à la confection d'un objet mathématique, ne demande que de suivre des instructions explicites de réalisation.

— Enfin, un dernier avantage de ce format est son adaptabilité. Chaque conte peut en effet être présenté sous forme de spectacle, être inséré dans une conférence, être adapté en une activité pédagogique, être assorti ou non d'une activité de création manuelle, être suivi ou non d'un exposé mathématique – qui peut être de niveau variable, etc. Ceci en fait un outil dont chacun – parent, enseignant, mathématicien, artiste – peut s'emparer à sa manière, en fonction de ses envies, de ses compétences et du cadre dont il dispose.

2.2.2 Utilisation des émotions.

Le fait qu'il y ait une histoire, des personnages et une vraie problématique constitue une mise en tension, qui provoque chez le lecteur toutes sortes d'émotions liées à l'histoire – qui peuvent être exacerbées si l'histoire n'est pas lue, mais racontée, ou jouée. Deux exemples de passages qui portent une charge émotionnelle importante : dans *Lune*, le moment où Lou, ayant quitté ses parents sans les prévenir, se retrouve perdue la nuit dans la forêt ; dans *Liens invisibles*, le moment où Elena émet l'hypothèse que sa boucle est nouée depuis la mort de son papa. Ces émotions, même si elles sont déconnectées des mathématiques elles-mêmes, n'en constituent pas moins un élément extrêmement intéressant : pour véhiculer l'idée que les mathématiques ne sont pas un domaine complètement étranger aux émotions, pour renforcer l'implication du lecteur ou spectateur, pour pérenniser l'assimilation d'informations nouvelles.

Au-delà de ces émotions induites par l'histoire, les contes sont tous pensés en vue d'induire ou de favoriser deux émotions particulières vis-à-vis des mathématiques, qui sont le *sentiment d'inclusion*[g], et l'*émerveillement*.

Trois aspects du conte favorisent un sentiment d'inclusion. Le premier est la forme accueillante du conte, le fait qu'il soit ouvert et accessible à tous, qu'il ne comporte aucune technicité et exige peu d'effort intellectuel – il propose la possibilité d'un effort intellectuel, mais ne l'exige pas : on peut choisir de se laisser porter par l'histoire. Le deuxième aspect, qu'on a évoqué brièvement plus haut, est la présence de personnages auxquels s'identifier, et en particulier le fait que les personnages principaux soient des enfants, et que leurs quêtes soient très universelles – besoin de comprendre (*Lune*), besoin de se lier (*Liens invisibles*) et, dans les autres contes, besoin d'intimité (*La clef magique*), recherche de perfection (*La faiseuse de neige*), besoin de liberté (*Conte tout droit*), etc. Le troisième aspect concerne la manière dont la recherche mathématique est articulée avec le reste de l'histoire. Elle n'est jamais donnée a priori, sans motivation ou comme un but en soi : à l'intérieur de l'histoire, la recherche mathématique n'apparaît jamais qu'après une question ou une problématique personnelle du héros, en réponse à laquelle elle s'impose naturellement. Par exemple, dans le conte *Liens invisibles*, les enfants ressentent la nécessité de comprendre ce qui les empêche de se relier aux autres, ce qui les amène à s'intéresser à la structure de l'enlacement entre deux boucles. Cette articulation permet de donner à voir l'activité mathématique comme reliée à des questionnements partagés par tous.

L'autre émotion que ces contes visent à provoquer est l'émerveillement, qui peut naître de trois sources distinctes. La première est donnée par l'atmosphère globale, le cadre du conte où, dans la pénombre, un conteur ou une conteuse raconte une histoire un peu magique. La deuxième est donnée par l'objet mathématique, visible et concret – tous les objets présents dans les contes sont choisis pour leur beauté ou leur aspect intriguant. Les anneaux borroméens de *Liens invisibles*, par exemple, provoquent des réactions d'émerveillement tout-à-fait audibles[h].

Enfin, plus proche de ce que les mathématiciens essaient généralement de transmettre lorsqu'ils réalisent un projet de diffusion : l'émerveillement intellectuel pour une idée mathématique. En effet, l'idée mathématique sous-jacente à l'objet tangible présenté dans le conte ou au cheminement du personnage constitue une troisième source d'émerveillement possible, notamment parce qu'elle est nouvelle, différente des notions abordées dans les programmes scolaires, et esquissée de manière à la faire sentir intuitivement et à laisser beaucoup de place à la réflexion et la découverte personnelles. Encore une fois, les anneaux borroméens du conte *Liens invisibles* fournissent des exemples de telles idées mathématiques susceptibles de provoquer l'émerveillement : l'idée qu'on peut être lié trois à trois sans être liés deux à deux ; l'idée qu'on peut disposer trois boucles de manière à ce que la première soit au-dessus de la seconde, qui soit au-dessus de la troisième, elle-même au-dessus de la première.

2.3 Réception

La question de savoir si les contes trouvent bien leur public, si les objectifs en vue desquels ils sont conçus sont bien atteints et, en particulier, si les avantages identifiés dans l'analyse a priori se concrétisent bien en une expérience positive demandera une expérimentation conséquente et systématique. J'ai fait le choix, en première analyse, de préférer à l'étude en profondeur d'une configuration donnée l'expérimentation d'une large palette de formats, dans des cadres variés et à destination de publics

g. Par sentiment d'inclusion, on entendra l'inverse d'un sentiment d'exclusion : c'est-à-dire le sentiment qu'on s'adresse à moi, d'une manière adaptée à mes intérêts et capacités, et le sentiment d'être relié – ou du moins de pouvoir être relié – à l'activité mathématique, que ce soit par mes capacités à comprendre et faire des mathématiques, ou par la proximité de mes goûts et centres d'intérêt avec les mathématiques.

h. tout comme les hexaflexagones, ou les dessins de courbes parfaitement courbes qui ne sont pourtant faits qu'avec des lignes droites.

divers. Ceci nous donne, à défaut de résultats stables et fiables, une idée générale des perspectives ouvertes par ces contes. Voici le détail de ces expérimentations.

2.3.1 Les 6-10 ans

Le conte *Lune* a fait l'objet d'une intervention dans deux classes de CE2[i]. Il a également fait partie, de même que trois autres contes qui ne sont pas présentés ici, d'une série de douze séances de conte à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, pour les enfants à partir de de 6 ans et leurs parents.

Intervention en classe — déroulement. L'intervention a eu lieu avec les deux classes de CE2 réunies, soit quarante-huit enfants âgés d'environ neuf ans. Elle a commencé par le conte lui-même, raconté devant le groupe entier. Puis elle s'est poursuivie par une discussion visant à identifier si les enfants avaient perçu, et comment, la présence de mathématiques dans le conte. Enfin, elle s'est terminée par deux ateliers sur lesquels les enfants se sont relayés, l'un proposant à chaque enfant de reproduire la manipulation du conte, et l'autre invitant les enfants à illustrer librement le conte et à répondre aux deux questions suivantes :

> Comment décrirais-tu la personnalité de Lou, le personnage principal de l'histoire ?
> Est-ce que tu lui ressembles ? Si oui, en quoi ? Si non, pourquoi ?

Intervention en classe — observations. Sur les deux premiers temps de l'intervention, les observations sont plutôt qualitatives et subjectives. Durant le conte, l'écoute a été très bonne ; pendant la discussion, les élèves ont été dans leur ensemble plutôt participatifs. À la question « est-ce qu'il y avait des mathématiques dans ce conte ? », quelques-uns ont répondu que non, parce que les mathématiques c'était du calcul et qu'il n'y avait pas de nombres dans le conte, d'autres ont répondu que si, parce que les mathématiques c'était aussi de la géométrie et qu'il y avait dans le conte des formes et des questions sur les formes. Le troisième temps de l'intervention a laissé des traces écrites individuelles, qu'on peut synthétiser comme suit.

En réponse à la question concernant la personnalité de l'héroïne de l'histoire, sur les quarante-huit élèves présents :

— vingt-neuf ont décrit l'héroïne de l'histoire comme étant « curieuse », et huit comme étant « interrogative », « se posant beaucoup de questions » ou « cherchant à savoir » ;

— douze l'ont décrite comme « courageuse[j] », un l'a qualifiée d'« intrépide », ;

— sept l'ont décrite comme « déterminée », « entêtée », « têtue », « ne renonçant pas » ou « n'abandonnant pas », « tenant à ses questions » ou « ne pouvant pas se séparer de ses idées » ;

— trois l'ont décrite comme « intelligente[k] » ;

— trois l'ont décrite comme « énervante », « bavarde » ou « pas patiente » ;

— trois ont décrit, parfois très en détail, la manière dont ils imaginaient son apparence physique.

En réponse à la question concernant leur ressemblance avec l'héroïne, sur les quarante-huit élèves présents :

— trente-cinq disent lui ressembler ou avoir des points de ressemblance avec elle ; la curiosité constitue un élément de ressemblance pour vingt-sept d'entre eux, le courage pour cinq d'entre eux, et la détermination pour quatre ;

i. Il s'agit des deux classes de CE2 de l'école St-Charles-de-Serin, à Lyon
j. C'est ainsi que, dans l'histoire, le renard qualifie la petite fille.
k. C'est ainsi que, dans l'histoire, le vieil homme qualifie la petite fille.

— douze déclarent ne pas lui ressembler ; cinq par manque de curiosité, un par manque de détermination, deux parce qu'ils sont des garçons, une parce que l'apparence physique qu'elle imagine être celle de l'héroïne ne lui correspond pas, trois ne disent pas pourquoi ;

— un ne sait pas.

Les quarante-six illustrations libres du conte qui ont été réalisées[l] sont riches en informations. Dans leur globalité, elles sont centrées sur la petite fille, sur ses questions et sur la lune. La famille de l'héroïne est représentée sur quatre d'entre elles seulement, les animaux qu'elle rencontre pendant sa quête, sur neuf d'entre elles, et le vieil homme sur six. À l'inverse, dix-huit dessins contiennent des points d'interrogation ou des questions[m], trente-six présentent l'héroïne, et quarante-et-un comportent une représentation de la lune. Parmi les élèves ayant représenté la lune, il est intéressant de noter que vingt-sept adoptent une représentation géométrique simple de la lune, soit sous forme d'un disque sombre ou clair, soit sous forme d'un croissant – généralement très courbé. Parmi les lunes rondes, neuf présentent des cratères – élément qui ne figure pas dans le conte (voir par exemple le dessin reproduit figure A.5). À l'inverse, onze élèves choisissent la représentation proposée par le conte, à savoir un disque dont une partie est blanche et l'autre noire. La représentation choisie est presque toujours celle en disque mi-blanc, mi-noir. Parmi eux, un combine cette représentation avec la présence de cratères (voir figure A.6) , un dresse un tableau des phases de la lune – dont les dessins sont géométriquement erronés (voir figure A.4), et deux l'intègrent à une scène réaliste, c'est-à-dire en tant que lune de taille raisonnable dans le ciel. Ces deux dernières représentations se trouvent aussi n'être pas en disque mi-blanc, mi-noir, mais laisser apparaître un croissant. Une de ces deux représentations est juste, l'autre est erronée (voir figures A.2 et A.3). Enfin, sept élèves représentent les sphères avec lesquelles l'héroïne fait ses expériences. Là aussi, la représentation choisie est toujours celle en disque mi-blanc, mi-noir. Il est frappant de noter que dans les trois dessins contenant simultanément une lune dans le ciel et des sphères dans les mains de la petite fille, les sphères sont dessinées avec justesse, mais la lune est figurée de manière minimaliste (voir par exemple le remarquable dessin de la figure A.1). On pourra également s'intéresser au dessin de la figure A.7 : ce dessin dénote un bon sens de la perspective, qui n'est absolument pas appliqué à la lune. En résumé, on observe dans dix-neuf dessins la présence d'éléments mathématiques du conte. Le temps de la consolidation n'étant pas encore venu, les élèves peinent à incorporer ces éléments tout nouveaux dans leurs représentations antérieures – la lune comme astre du ciel présentant des cratères. Un des dessins ose tout de même une représentation géométriquement non triviale de la lune qui se révèle parfaitement juste (voir figure A.2).

Séances de conte à la MMI. Ces séances étaient ouvertes à tous, libres d'accès, et indiquées « à partir de 6 ans ». Y assistaient chaque fois une vingtaine d'enfants de 3 à 12 ans, accompagnés de leurs parents. Les premières 20-30 minutes étaient consacrées au spectacle que constitue une séance de conte, et l'heure suivante aux ateliers de fabrication ou de manipulation. Il n'y a pas eu d'observation systématique sur ces séances de conte. Quelques observations qualitatives générales cependant : malgré la présence d'enfants très jeunes – à partir de 3 ans – l'attention durant le conte est toujours très soutenue. Tout au long et à la fin de l'atelier, l'enthousiasme général est manifeste, très souvent verbalisé par les parents. Certaines familles sont même revenues voir le *même* conte et refaire le *même* atelier. Lorsqu'il s'agit du conte *Lune*, tous les enfants se montrent intéressés par la manipulation à reproduire. Pour les autres contes, qui se poursuivent par la fabrication d'un objet mathématique, on observe un bel investissement des enfants et des parents pour réaliser ensemble l'objet. Il est particulièrement gratifiant d'observer parfois l'enfant comprendre le premier, et expliquer au parent.

l. Deux élèves n'ont rien dessiné.

m. Cette importante représentation de points d'interrogation peut être partiellement induite par le fait qu'une partie de la discussion a porté sur le titre qu'il faudrait donner au conte, et que le titre *Les mystères de la lune*, proposé par les élèves, a remporté l'adhésion du groupe.

Conclusions. Comme prévu, les enfants de 6-10 ans réagissent bien aux contes, ainsi qu'aux propositions de réalisations manuelles qui leur succèdent. Ceci n'est pas étonnant, vu qu'il s'agit d'un format auquel ils sont habitués – bien que pour des contenus généralement non-scientifiques – et qu'ils identifient comme étant adapté à leur âge. Il est plus délicat de déterminer s'ils peuvent ou non être significativement ou durablement influencés par les *contes mathématiques*, et comment. En effet, les 6-10 ans sont encore jeunes pour analyser et verbaliser leurs ressentis et changements de perception de façon autonome. Il faudrait donc mettre en place une étude plus approfondie pour mesurer l'impact des *contes mathématiques* sur l'apprentissage, et sur la perception que les enfants ont des mathématiques, de la figure de mathématicien, de leur propre aptitude à faire des mathématiques.

Une conclusion s'impose tout de même clairement à moi à l'issue des douze séances de conte à la MMI, auxquelles ont participé des dizaines d'enfants accompagnés de leurs parents ou grands-parents : le fait que l'expérience soit vécue en famille augmente sensiblement l'impact qu'elle a sur les enfants, et ce pour plusieurs raisons. D'abord, l'enthousiasme du parent – qui, d'une part apprécie les différents niveaux de lecture de l'histoire et, d'autre part, revoit souvent son jugement sur les mathématiques[n] – amplifie celui de l'enfant. Ensuite, l'objet à réaliser étant généralement inconnu pour le parent aussi bien que pour l'enfant, on sort de la configuration où le parent encadre et donne les consignes, et tous se retrouvent à partager une même activité, presque d'égal à égal – souvent ils confectionnent chacun leur objet, côte à côte. Enfin, la présence d'un parent aide à pérenniser un peu l'expérience. En effet, le parent peut évoquer le souvenir de la séance, et le réactiver en parlant avec l'enfant. De plus, le parent peut aider l'enfant à reproduire l'objet à la maison, soit parce qu'il a mieux compris ou mémorisé les étapes de fabrication, soit parce qu'il sait où chercher l'information.

En ce qui concerne les interventions en milieu scolaire, l'impact sera probablement d'autant plus important qu'on aura donné de l'importance à l'intervention, soit en accentuant le côté spectaculaire (avec décors, musique, lumières, etc.), soit en l'inscrivant dans une séquence pédagogique plus longue et plus riche, dont elle ne serait qu'un des éléments.

En un mot, il semble que les 6-10 ans soient réceptifs aux *contes mathématiques*, mais que ces derniers soient assez complexes pour justifier un accompagnement de l'enfant par des adultes, qui l'aideraient à la fois à lire et comprendre les différents messages du conte, et à inscrire son impact dans la durée.

2.3.2 Les 4-5 ans

Sur l'invitation d'une enseignante de maternelle qui avait assisté à une séance de conte à la MMI, j'ai effectué deux interventions dans deux classes de grande section de maternelle, soit devant des enfants de 4-5 ans, à qui j'ai raconté *Lune*. Si cette tranche d'âge est inférieure à celle pour laquelle le conte a été pensé et écrit, c'était l'occasion de tester si les petits de cet âge-là sont réceptifs au conte scientifique – plus long, plus complexe et plus abstrait que les histoires qu'on trouve habituellement dans les albums jeunesse. En particulier, il s'agissait d'observer

— s'ils sont intéressés,

— s'ils parviennent à suivre l'histoire,

— ce qu'ils en comprennent et en retirent, notamment parmi les différents messages que j'ai tenté d'y véhiculer : des connaissances géométriques sur la lune, l'idée qu'il est possible pour un enfant – et plus particulièrement pour une petite fille – d'être scientifique, un aperçu de la nature de la démarche scientifique : questionnement, conjectures, modélisation, interprétation des résultats, etc.

n. Parmi les commentaires récurrents des parents : « J'ai toujours été nul·le en mathématiques, mais là j'adore ! » ; « Si on m'avait présenté les mathématiques comme ça à l'école, j'aurais sûrement été moins réfractaire ».

Le cadre. Les interventions ont eu lieu sur deux matinées. Elles ont été préparées pendant le mois précédent par les deux enseignants, par des lectures d'histoires (non scientifiques) sur la lune, des observations et des dessins de la lune, et des ateliers sur la rotation de la terre autour d'elle-même et autour du soleil. L'intervention a commencé par une séance de conte en classe entière, pour une durée d'environ une demi-heure, puis s'est poursuivie par la mise en place de trois ateliers, sur lesquels les enfants, divisés en trois groupes, sont venus à tour de rôle, à raison d'une petite demi-heure par atelier. Le premier atelier, animé par l'enseignant·e, consistait à reproduire les manipulations effectuées pendant le conte, en prenant le temps de bien observer et de décrire ce que l'on voyait. Au deuxième atelier, animé par une ATSEM[o], les enfants illustraient un passage de leur choix de l'histoire. J'animais le troisième atelier, dans lequel je discutais de l'histoire avec les enfants .

Observations. Pendant le conte, les enfants sont parfaitement silencieux. Certains maintiennent leur concentration tout au long du conte, d'autres décrochent par moments et raccrochent plus tard, une petite minorité est visiblement ailleurs.

Pendant l'atelier « discussion », la première observation flagrante est qu'il est très compliqué de faire s'exprimer des enfants de cet âge de manière libre sur ce qu'ils ont ressenti, compris, aimé : ils manquent à la fois de vocabulaire et de capacité de synthèse. Je choisis donc de mener la discussion avec des questions très précises, ce qui induit évidemment des biais. Ce qui ressort de cette discussion est l'importance qu'ils donnent aux éléments familiers : le personnage de la petite fille, sa famille, les animaux. Le vieil homme, de même que toute la fin de l'histoire – qui présente la démarche scientifique permettant à l'héroïne de répondre à ses questions – sont très largement ignorés, malgré le fait qu'ils occupent une place centrale dans l'histoire. Par ailleurs, si les enfants semblent pouvoir se remémorer précisément différents moments de l'histoire, presque aucun n'est capable de retracer l'histoire dans ses grandes lignes. Enfin, ils semblent clairement s'identifier à l'héroïne, qu'ils décrivent unanimement comme étant âgée de 5 ans (alors que son comportement, ses réflexions et ses décisions ressemblent plus à ceux d'un enfant de 10-12 ans).

Les dessins corroborent ces observations. Si l'héroïne est bien présente sur quarante-six des cinquante-sept dessins, seuls six font figurer le vieil homme ; sur deux d'entre eux seulement on voit les objets, donnés par le vieil homme, avec lesquels l'héroïne modélise la lune (voir les dessins B.6 et B.7 dans l'annexe B). À l'inverse, beaucoup de dessins font intervenir les éléments familiers que sont : la montagne (vingt-quatre dessins), les animaux (vingt-quatre dessins), la maison (dix-huit dessins), des membres de la famille de la petite fille (dix dessins). La lune est globalement très présente. Sur les quarante-six élèves qui l'ont dessinée, trente-trois la représentent sous forme d'un disque sombre ou clair, ou d'un croissant, six dessinent une lune ronde avec des cratères, et dix-sept choisissent la représentation proposée par le conte, à savoir un disque dont une partie est blanche et l'autre noire. Cela représente une proportion importante des élèves (plus importante que pour les CE2 – plus âgés de trois ans), mais cela s'explique en partie par le fait qu'ils ont préparé le conte en observant et en dessinant la lune pendant un mois avant mon intervention. Parmi ces dix-sept dessins, aucun n'est vraiment juste. Si certains sont assez clairement erronés pour dénoter une mauvaise compréhension géométrique (voir par exemple les dessins B.4 et B.5 de l'annexe B), la plupart sont simplement très imprécis : la compréhension géométrique semble assez bonne, mais les enfants ne sont pas en capacité de tracer des cercles ronds (voir par exemple les dessins B.1, B.2 et B.3 de l'annexe B). Il est intéressant de remarquer que, contrairement aux élèves de CE2 , ils ne privilégient pas la représentation, plus simple, en un disque mi-blanc, mi-noir – seuls cinq d'entre eux font ce choix.

o. Agent territorial spécialisé des écoles maternelles.

Conclusions. Mes conclusions sur cette expérience sont très contrastées. D'un côté, la difficulté qu'ont les enfants de 4-5 ans à comprendre globalement une histoire complexe laisse à penser que les *contes mathématiques* ne sont pas adaptés à leur âge, et que les connaissances ou informations qu'ils contiennent sont trop compliquées pour eux. Cela dit, on peut imaginer au moins deux manières de compenser cette difficulté : dans un cadre scolaire, en inscrivant le conte dans une séquence pédagogique plus large, comme l'ont fait les deux enseignants des classes où je suis intervenue ; dans un cadre non scolaire, par la répétition – par exemple, à l'aide d'un livre qui serait lu régulièrement.

D'un autre côté, les enfants étant assez étonnants par leur capacité à passer outre aux éléments qu'ils ne saisissent pas et à maintenir leur attention éveillée aussi longtemps que subsistent des éléments qu'ils saisissent, on peut se dire que cela n'est pas grave s'ils ne comprennent pas bien, et que les images que les contes posent dans leurs esprits contribuent à construire leur compréhension du monde.

Enfin, l'observation montrant que les jeunes enfants sont principalement intéressés par les personnages, leurs émotions et les relations qu'ils créent entre eux, on peut penser les *contes mathématiques* comme œuvrant aux objectifs suivants : influencer la perception que les enfants ont d'eux-mêmes, les amener à se penser comme curieux, scientifiques, enclins à se poser des questions, à chercher des réponses, à réfléchir, aptes à résoudre des problèmes. En particulier, il est possible que, dès ce jeune âge, on puisse avoir à l'aide des contes une influence sur la construction des stéréotypes liés à l'activité mathématique / scientifique, notamment grâce au fait que les jeunes enfants sont facilement disposés à s'identifier aux personnages des histoires. Je reproduis à ce propos le commentaire limpide de Nour, 6 ans, qui a écouté *Lune* lors d'une séance de conte à la MMI.

> *Mon personnage préféré est Lou car c'est une petite fille comme moi. Elle a peut-être 6 ans.*

2.3.3 Les collégiens

Une expérience un peu différente a été menée auprès de collégiens, qui consistait à inclure un conte à l'intérieur d'une conférence mathématique d'une durée d'une heure, et à le prendre comme base pour construire l'ensemble de l'exposé. L'objectif de cette expérience était, d'une part, de tester la réaction de jeunes adolescents face aux contes – dont on pourrait craindre que l'aspect enfantin leur soit rebutant – et, d'autre part, d'interroger les possibles articulations entre contes et conférences.

Le cadre. Il s'agissait de la conférence de clôture d'un congrès MATh.en.JEANS, qui rassemblait à Lyon quelques centaines d'élèves du secondaire ayant participé pendant l'année à un club MATh.en.JEANS, accompagnés de leurs enseignants. L'exposé a eu lieu devant environ 130 collégiens et une vingtaine d'adultes (professeurs, chercheurs, parents d'élèves), et avait pour thème l'enlacement des courbes fermées. Il s'est décomposé comme suit :

1. introduction et motivation du sujet ;
2. lecture du conte *Liens invisibles*, avec projection simultanée des illustrations (durée : 20 min) ;
3. tour de magie avec les entrelacs borroméens (repris d'une vidéo de Tadashi Tokieda, voir [58]) ;
4. définition mathématique de l'enlacement ;
5. expérience « avec les mains » : les deux orientations de l'espace, ou le sens de vissage ;
6. conclusion.

Pour collecter des retours d'une manière qui soit vécue comme légère et motivante par les élèves, un questionnaire (nommé *feuille de checkpoint*) a été distribué, qui proposait tout au long de l'exposé

de faire des paris sur les réponses aux questions, de reproduire des dessins et d'exprimer des opinions personnelles. Un exemple de questionnaire rempli est présenté dans l'annexe C. À l'aide de ces questionnaires, on sait précisément comment se distribuent les élèves, par classe et par genre.

	6ème	5ème	4ème	3ème	total
filles	12	26	37	5	80
garçons	6	16	18	11	51
genre non binaire*		1		1	2
total	18	43	55	17	133

(*) Deux élèves, qu'on dira de genre *non binaire*, ont coché simultanément les cases « fille » et « garçon »

Les observations. Quelques observations globales avant d'analyser les questionnaires. L'attention générale a été très soutenue pendant la conférence, des applaudissements spontanés se sont déclenchés plusieurs fois au cours de l'exposé (à la fin du conte et du tour de magie), la participation pendant la reproduction mimée du vissage a été très bonne. À la fin de l'exposé, l'enthousiasme général était palpable, ce qui est d'autant plus frappant que les conditions n'étaient a priori pas entièrement favorables à l'écoute et à la concentration : il s'agissait en effet du dernier exposé d'un congrès de plusieurs jours, durant lequel des adolescents qui n'en ont pas l'habitude ont assisté à un grand nombre d'exposés mathématiques.

Passons au questionnaire. Son objectif principal est d'identifier si les collégiens se sont sentis touchés ou au contraire rebutés par le conte ; si le conte a participé ou non à capter et retenir l'attention, et à faire de l'exposé une expérience positive pour les élèves. Dans une moindre mesure, il interroge aussi le rôle du conte dans l'activité mathématique des élèves (intérêt, questionnement, réflexion, apprentissage, etc.).

La première question à laquelle nous nous intéresserons en détail est celle qui invite à donner son avis sur le conte. Plus précisément, il s'agit de la question suivante, à choix multiples.

> *D'après toi, ce conte : est intéressant / est émouvant / est ennuyeux / aide à comprendre des idées mathématiques / est trop compliqué / donne envie d'en savoir plus / n'a rien à faire dans une conférence de mathématiques / autre : ...*

Le conte est très souvent décrit comme intéressant, émouvant, et donnant envie d'en savoir plus (par, respectivement, 80%, 43% et 54% des élèves). Il est instructif de mettre en parallèle cette dernière donnée avec les 17% qui décrivent le conte comme aidant à comprendre des idées mathématiques, ce qui tend à confirmer que le conte joue bien le rôle que nous lui avons attribué a priori, qui n'est pas tant de transmettre du contenu mathématique, que d'attirer l'attention et de donner envie de s'intéresser à des concepts mathématiques. À l'inverse, 12% ont décrit le conte comme ennuyeux et 5% comme trop compliqué. Enfin, 13% ont décrit le conte comme n'ayant rien à faire dans une conférence de mathématiques. En observant plus en détail les questionnaires, on se rend compte que cette dernière appréciation n'est pas forcément négative : parmi les 17 élèves qui l'ont émise, 9 ont simultanément décrit le conte comme donnant envie d'en savoir plus et/ou aidant à comprendre des idées mathématiques – ce qui, pour moi, implique que le conte a tout à faire dans une conférence de mathématiques ! Ce que cela semble signifier est simplement que le conte bouscule l'image qu'ils se font des mathématiques et de ce qu'une conférence de mathématiques devrait être ; ce n'est pas forcément une mauvaise chose...

La deuxième question à laquelle on s'intéresse est celle qui invite les élèves à identifier les éléments de l'exposé qu'ils ont préférés, et à expliquer leur réponse. La question posée est la suivante, également à choix multiples.

> *Qu'as-tu préféré dans l'exposé : le conte / le tour de magie / la définition de l'enlacement / le vissage / la feuille de checkpoint / autre : ...*
> *Pourquoi ?*

Ce qui nous intéresse le plus est bien sûr de savoir si les élèves font figurer le conte parmi leurs éléments préférés. C'est effectivement le cas, pour 70% d'entre eux. L'autre élément qui a globalement été très apprécié est le tour le magie, par 57% des élèves. Les trois autres éléments ont été appréciés dans une plus faible proportion – respectivement 20%, 14% et 21%. Même si ce n'est pas le propos ici, remarquons au passage que, si la « feuille de checkpoint » a été conçue dans l'unique but de récolter les réactions des élèves, elle a été appréciée en tant que telle et de manière non négligeable par les élèves, pour la participation à laquelle elle les invitait. Il est intéressant de remarquer que ces réponses sont assez marquées par le genre des élèves : 82% des filles ont placé le conte parmi leurs éléments préférés, contre seulement 49% des garçons. À l'inverse, les garçons ont plus largement apprécié le tour de magie que les filles (à 72% pour eux, 49% pour elles).

En considérant les réponses à ces deux questions, on estimera l'impact du conte sur chaque élève comme :

— positif si l'élève a utilisé des qualificatifs positifs pour décrire le conte, et a inclus le conte parmi ses éléments préférés ;

— neutre si l'élève n'a pas indiqué le conte parmi ses éléments préférés ;

— négatif si l'élève n'a pas indiqué le conte parmi ses éléments préférés, et a utilisé des qualificatifs négatifs pour le décrire.

L'évaluation est positive dans 70% des cas, neutre dans 20% des cas et négative dans 10% des cas. Une distribution plus précise est donnée par les tableaux suivants.

	% des élèves de 6e	% des élèves de 5e	% des élèves de 4e	% des élèves de 3e
☹	11	9	9	12
○	17	12	24	35
☺	72	79	67	53

	% des filles	% des garçons
☹	6	16
○	10	37
☺	84	47

Là encore, il y a des différences notables selon les catégories. Si les plus jeunes ont semblé être légèrement plus réceptifs au conte – ou bien sont-ils tout simplement plus enthousiastes en général ? – la différence est flagrante selon le genre : 84% des filles ont signifié avoir particulièrement apprécié le conte, contre seulement 47% des garçons. C'est encore plus frappant quand on observe le détail des questionnaires, et les appréciations libres laissées par les élèves. Sur les cent-trente-trois élèves, trente-deux ont laissé un commentaire engagé [p] et positif sur le conte ou la globalité de la conférence. Sur ces trente-deux commentaires, vingt-neuf sont écrits par des filles. Certains de ces commentaires, particulièrement significatifs, sont reproduits ci-dessous.

p. C'est-à-dire, contenant plus que des éléments déjà présents dans les questions précédentes ou des phrases-types du genre « très bien » ou « j'ai bien aimé ».

J'ai préféré le conte et le tour de magie, car ça change des maths classiques qu'on a l'habitude d'étudier.

— *garçon, 3e*

Émouvant. J'ai pas tout compris mais c'était super intéressant.

— *fille, 4e*

Le sujet est sympa et je trouve que c'est courageux de faire ce genre d'exposé !

— *fille, 4e*

J'ai préféré le conte car ça a permis de comprendre et c'était sympa. Pour la feuille, c'est bien on donne notre avis. Et les explications super.

— *fille, 4e*

J'ai préféré le conte, le tour de magie et la feuille de checkpoint. Il y a plus de communication et d'animation, on participe plus et on regarde plus de trucs animés qui captivent. J'ai bien aimé ;)

— *fille, 4e*

J'ai préféré le conte, car c'est une manière cool et originale d'introduire un problème mathématique.

— *fille, 4e*

C'est très bien expliqué et c'est intéressant de parler des maths autrement :) C'est génial.

— *fille, 6e*

Conclusions. La conclusion est double ; elle a trait à l'utilisation du conte à l'intérieur d'une conférence de mathématiques, ainsi qu'à la pertinence du conte lorsqu'on s'adresse à des collégiens.

L'idée de construire une conférence de mathématiques autour d'un conte qui en constituerait un des fils directeurs semble très prometteuse. En témoignent d'une part les retours des collégiens qui qualifient massivement le conte comme donnant envie d'en savoir plus sur le sujet et, d'autre part, l'enthousiasme de leurs professeurs de mathématiques ayant assisté à la conférence, dont plusieurs ont manifesté le souhait de réitérer l'expérience dans leur établissement.

En ce qui concerne l'adéquation du format « conte » avec le public « collégiens », je suis agréablement surprise. Certes, conformément à ce qu'on pouvait craindre, le conte semble rebuter un certain nombre de collégiens – qui, probablement, l'identifient comme trop enfantin pour eux. Mais ceux-ci ne représentent au final qu'une minorité relativement restreinte. Les autres ayant favorablement réagi au conte, et même parfois avec enthousiasme, il serait intéressant de renouveler l'expérience. En particulier, cette première expérience semble indiquer trois impacts positifs qu'auraient les contes sur les collégiens. En premier lieu, les contes permettraient de s'adresser plus spécifiquement aux filles, avec un type de discours auquel elles sont peut-être particulièrement sensibles. En second lieu, ils

participeraient à créer une ambiance d'« animation » – dont les adolescents sont demandeurs, avec changements réguliers de format, de rythme, de ton, de style, de support, etc. En troisième lieu, le conte, par la communication particulière qu'il établit entre celui qui raconte et ceux qui écoutent, permettrait d'instaurer une relation plus personnelle et plus émotionnelle entre l'orateur et les jeunes, ce qui favoriserait l'échange. Il serait intéressant de confirmer ces premières observations par d'autres expériences et, le cas échéant, de déterminer si ces réactions sont spécifiques aux collégiens, ou si elles sont partagées par d'autres types de publics.

2.3.4 Les lycéens

Toujours dans l'idée que les contes pourraient constituer une approche des mathématiques qui serait intéressante pour les plus grands également, je les ai testés sur des lycéens. Leurs réactions ont été très positives et très instructives. Avant de les présenter en détail, voyons le cadre dans lequel cette expérimentation a eu lieu.

Le cadre. À la demande de leur professeure de mathématiques, j'ai proposé à une classe de seconde générale en voyage scolaire à Lyon[q] une *soirée contes*, sur la terrasse de leur auberge de jeunesse. C'était un soir après le repas, la soirée figurait dans leur programme comme une « soirée surprise », nous avions illuminé la terrasse de bougies. Je tenais donc tout particulièrement à ce que cette soirée se passe dans une ambiance chaleureuse et détendue, hors toute pression d'enseignement, d'apprentissage ou d'évaluation. J'y ai conté deux histoires : *Liens invisibles* et *Conte tout droit*[r], qui ont été suivis d'une petite discussion, notamment sur la nature mathématique du conte *Liens invisibles*. Contrairement aux autres expérimentations, il n'y a pas eu de phase de manipulation ou de confection d'objet, ni d'exposé mathématique pour expliciter les notions abordées dans les contes.

Les observations. Les lycéens ont rempli en début de soirée un bref questionnaire qui comprenait les questions suivantes :

> Tu es : un garçon / une fille.
>
> De ton point de vue, les maths : c'est facile / c'est intéressant / c'est difficile / je ne suis pas fait·e pour ça / c'est ennuyeux / j'aime /je me sens à l'aise avec / je n'aime pas / autre : ...

À la fin de la soirée, ils ont répondu par écrit aux questions suivantes :

> Qu'as-tu pensé de cette *soirée contes* ? Comment t'es-tu senti·e ?

L'objectif était de comparer leur ressenti durant cette soirée à leur ressenti général concernant les mathématiques – dont on peut raisonnablement supposer qu'il concerne globalement les mathématiques enseignées à l'école – que ce soit en termes de conception des mathématiques ou d'état émotionnel. L'ensemble des réponses se trouve dans l'annexe E. Le fait que les retours ont été unanimement positifs en dit probablement autant sur le fait que l'ambiance a été bonne et les échanges chaleureux, que sur les contes en eux-mêmes. En revanche, les termes dans lesquels les adolescents évoquent la soirée est riche d'informations. Sur les trente-quatre élèves présents :

— onze utilisent des termes relatifs au bien-être pour décrire leur état : « calme », « relaxant », « apaisé », « reposant », « doux », « chaud au cœur » ;

— sept disent avoir été « fascinés », « hypnotisés », « envoûtés », « captivés » ou « happés » ;

q. Il s'agissait d'une classe de seconde générale du lycée Clémenceau, à Nantes.

r. Ce conte présente les enveloppes de droites, en racontant l'histoire de deux enfants qui se rebellent contre une dictature où, pour que les habitants « marchent droit et pensent droit », on avait interdit toute autre forme que la ligne droite.

— deux se décrivent comme « concentrés » ou « à l'écoute » ;

— trois expriment un sentiment d'identification aux héros de l'un ou l'autre conte ;

— dix-huit qualifient les contes ou la soirée d'« intéressants » ou comme « faisant appel à leur intelligence », disent avoir « appris » ou « compris » des choses ;

— six décrivent les contes ou leurs illustrations comme « beaux », « superbes », « magnifiques » ou « profonds » ;

— quatre disent avoir « découvert les mathématiques d'une autre manière », « différemment », « sous une autre forme », avoir « découvert un côté des maths qu'ils ne connaissaient pas » ;

Ces observations sont récapitulées dans le tableau ci-dessous, classées selon les informations individuelles disponibles (genre et rapport aux mathématiques). Pour classer l'information – complexe, puisque donnée par un ensemble de qualificatifs – concernant le rapport aux mathématiques, on a hiérarchisé les qualificatifs, du plus signifiant au moins signifiant en terme de sentiment d'inclusion / d'exclusion et de sentiment positif / négatif[s].

	bien-être	fascination	concentration	identification	intérêt	beauté	perception
Je ne suis pas fait·e pour ça (4F, 2G, 1NB$^{(*)}$)		3			3		1
J'aime (10F, 9G, 2NB)	7	4	1	3	11	5	3
Je me sens à l'aise avec (2F)	1				1	1	
C'est intéressant (2G)	2		1		2		
C'est ennuyeux (2G)	1				1		
Total	11	7	2	3	18	6	4

$^{(*)}$ Trois élèves, qu'on dira de genre *non binaire*, ont coché simultanément les cases « fille » et « garçon ».

Le classement par genre et rapport aux mathématiques des ressentis liés à la soirée n'est pas particulièrement signifiant. Cela peut être dû à la petitesse de l'échantillon. On remarquera tout de même que les ressentis déclarés par rapport aux mathématiques sont très majoritairement positifs (vingt-cinq sur trente-quatre). En lisant les commentaires en détail, on remarquera également que les filles ont en général exprimé leur ressenti de manière plus détaillée et plus précise que les garçons.

Par ailleurs, cinq adolescents ont spontanément décrit les contes comme « enfantins » ou la soirée comme « leur rappelant leur enfance » ; parmi eux, trois apprécient cet aspect, deux le regrettent. Deux autres rapportent avoir mal compris les questions d'enlacement dans le conte *Liens invisibles*. Enfin, les professeurs présents ont remarqué dans leur classe une belle écoute et une attention profonde, notamment de la part de certains élèves en difficulté – académique ou relationnelle – vis-à-vis de l'école. Ils ont même observé chez deux d'entre eux un changement émotionnel immédiat lors de la soirée.

Conclusions. Contrairement à ce qu'on pourrait craindre, les adolescents d'une quinzaine d'années ne semblent pas rejeter les contes comme trop enfantins et inadaptés à leur âge. Au contraire, ils se

s. Chaque élève est classé dans une et une seule case représentant le rapport aux maths, selon le premier qualificatif adopté dans la liste proposée, ordonnée a posteriori comme suit : [je ne suis pas fait·e pour ça ; j'aime ; je n'aime pas ; je me sens à l'aise avec ; c'est intéressant ; c'est ennuyeux ; c'est facile ; c'est difficile]. Par contre, pour chaque individu, tous les retours sur la soirée sont pris en compte – par exemple, une même personne peut simultanément déclarer une sensation de bien-être et un sentiment de beauté.

montrent réceptifs à l'atmosphère de douceur et de relaxation que les contes proposent, et apprécient de se faire raconter les mathématiques sous forme d'histoire. Les contes sont donc un bon outil pour associer chez eux les mathématiques à un sentiment de beauté ou de bien-être, et leur faire vivre une expérience agréable liée aux mathématiques – et ce quel que soit le rapport qu'ils entretiennent avec elles. Pour que cette expérience soit significative et qu'elle soit effectivement comprise comme étant liée aux mathématiques, il est probablement nécessaire de discuter et d'approfondir l'aspect mathématique des contes, ou bien juste après le conte, ou bien plus tard, en classe ou sous une autre forme.

Une question qui reste sans réponse pour le moment est celle de la pertinence des contes mathématiques en tant qu'approche – pour des lycéens – d'une notion mathématique, en vue de son étude ultérieure. On peut soupçonner que l'histoire constitue une bonne manière de mémoriser les objets, et que présenter les objets ou concepts mathématiques à étudier au sein d'une histoire permet ensuite d'y faire appel plus facilement, mais qu'on gagnerait à écrire des histoires spécifiquement adaptées aux adolescents, qui puissent constituer pour eux une réelle source d'intérêt.

2.4 Perspectives

Les *contes mathématiques* ayant reçu un accueil favorable de la part d'un public bien plus large que celui envisagé au départ, ils ouvrent beaucoup de perspectives. Décrivons-en deux, qui nous semblent particulièrement intéressantes.

La première consiste à approfondir l'aspect artistique et scénique des *contes mathématiques* en tant qu'objet culturel porté par des conteurs ou des comédiens. Cela implique de travailler les décors, la mise en scène, la mise en lumière, le jeu d'acteur, etc., et de créer une ambiance théâtrale autour des contes. Ce faisant, on constituerait un objet à la croisée de l'art et de la science et destiné aux enfants, ce dont les programmateurs culturels – dans les bibliothèques, les festivals, les musées, etc. – sont demandeurs. Du point de vue de l'expérience vécue par le public, cela permettrait d'amplifier le sentiment d'émerveillement qu'on cherche à susciter, et de présenter les mathématiques d'une manière foncièrement différente de ce qu'on rencontre habituellement, notamment en milieu scolaire. Les efforts qui ont été faits dans cette direction au fur et à mesure de la tenue des séances de conte ont rencontré beaucoup de réactions très positives, ce qui confirme qu'ils répondent à une vraie sensibilité du public, voire à une vraie demande.

La deuxième perspective concerne les synergies entre activités périscolaires et scolaires, c'est-à-dire la mise en contact d'activités « non-scolaires » avec une pratique scolaire – à savoir assujettie à un programme et répondant à des objectifs d'apprentissage précis, à évaluer – dans le but d'enrichir et de compléter l'enseignement. Dans notre cas, cette mise en contact pourrait se faire de deux manières : soit sous la forme d'une intervention en milieu scolaire de type « spectacle de contes mathématiques », que l'enseignant pourrait à sa guise articuler avec son projet pédagogique, soit sous la forme d'une activité proposée et encadrée par l'enseignant lui-même, comprenant la lecture du conte – qui devra alors exister au format « livre » – et, si l'enseignant le désire, l'atelier de conception de l'objet. Cette deuxième configuration, dans le cas de l'école primaire, nous intéresse particulièrement car, si elle nécessite une autonomie de l'enseignant éventuellement difficile à atteindre[t], elle permet un plus grand rayon d'action et implique une véritable sensibilisation des enseignants à l'idée que les mathématiques sont une discipline vivante et belle. Par certains aspects, les *contes mathématiques* semblent particulièrement bien adaptés à cette transmission horizontale en direction des enseignants du primaire. Ceux-ci, en effet, sont extrêmement familiers avec les formats « histoires » et « ateliers

t. Nous émettons cette réserve suite à l'observation qu'une très large majorité de professeurs des écoles a une formation littéraire et non scientifique, et un goût pas forcément très prononcé pour les mathématiques.

de création manuelle » ; ainsi les *contes mathématiques* leur permettraient de proposer des activités originales de découvertes mathématiques, tout en restant dans une zone où ils se sentent à l'aise. Le point qui peut éventuellement poser problème est celui du contenu mathématique proprement dit : il est possible que les enseignants se sentent refroidis par leur éventuel manque de recul vis-à-vis des notions mathématiques esquissées dans les contes, soit parce qu'ils ne se sentiraient alors pas assez compétents pour présenter les contes eux-mêmes, soit parce qu'ils auraient du mal à identifier les notions mathématiques sous-jacentes, et donc à justifier en quoi les contes sont mathématiques. Pour remédier à cela, une piste que j'ai le projet d'explorer est la création, pour chacun des contes, d'un ensemble de ressources à destination des enseignants. Ces ressources contiendraient bien sûr des instructions précises pour la fabrication de l'objet ainsi que des explications de texte permettant de replacer chaque histoire dans un contexte mathématique, mais elles comprendraient également une introduction légère et accessible – sous la forme de vidéos ou sous un autre format – à la notion mathématique esquissée dans le conte, pour ceux dont la curiosité aurait été piquée, ou qui désireraient aller plus loin. La spécificité des ces vidéos – ou autres – est qu'elles ne seraient pas conçues dans l'unique but de permettre une meilleure mise en place d'un atelier « contes mathématiques » par l'enseignant dans sa classe, mais qu'elles constitueraient un objet de diffusion mathématique à part entière à destination des enseignants. Le pari est que, si l'on arrive à toucher un enseignant en lui faisant découvrir des idées nouvelles qui l'intéressent, et qu'on lui propose des outils pour transmettre à son tour ces idées à ses élèves, il le fera, et que cette forme de diffusion est particulièrement féconde et satisfaisante. Tout ceci n'est encore qu'à l'état d'hypothèses ; il serait souhaitable, quand ces dispositifs commenceront à être mis en place, qu'ils soient suivis par une étude didactique, afin d'évaluer si les attentes que nous venons d'exprimer se réalisent. On pourra consulter l'article de Michèle Artigue [5] au sujet de l'évaluation d'un point de vue didactique de telles synergies entre activité périscolaires et scolaires. Une remarque pour terminer : l'ensemble des ressources décrites ci-dessus, créées à destination des enseignants, pourraient également être consultées par des parents, avec un bénéfice similaire : celui de sensibiliser et intéresser l'adulte, et de lui donner les moyens de proposer lui-même à l'enfant une expérience originale des mathématiques.

Chapitre 3

Exposition virtuelle sur la mécanique céleste

Si l'on considère qu'un des objectifs de la diffusion mathématique est de permettre aux gens de s'approprier les mathématiques comme une activité culturelle qu'ils puissent apprécier à leur manière [a], alors l'un des enjeux est d'assurer la présence d'éléments de mathématiques dans les « lieux » de culture généralistes (les bibliothèques, les musées, les émissions de télévision ou de radio, etc.) et, en particulier, de faire en sorte que ces éléments de mathématiques soient bien perçus et bien reçus par les visiteurs habituels de ces lieux.

En se concentrant sur la partie adulte de ce public, on peut reformuler cet enjeu de la manière suivante :

> *Comment transmettre des mathématiques à des adultes cultivés et curieux, qui aiment lire et apprendre, mais n'ont pas d'aisance ni d'appétence particulière pour les mathématiques ?*

Ce public, qu'on appellera par la suite « public de musée », présente la contrainte spécifique d'être à la fois intellectuellement exigeant, et peu disposé à s'intéresser à des questions ou problèmes mathématiques abstraits ou techniques. Pour s'adresser à ces personnes, et leur parler de mathématiques tout en tenant compte de leur bagage culturel et en respectant leurs centres d'intérêt, un format profitable est l'exposition. En effet, une exposition peut contenir une information riche, à l'articulation complexe, tout en laissant à ses visiteurs beaucoup de liberté : liberté d'aller à leur rythme, la liberté d'aller là où ils veulent et de ne prendre que ce qui les intéresse.

Avec Olga Romaskevich et Valentin Seigneur, nous avons conçu et réalisé une exposition virtuelle, c'est-à-dire un site internet structuré comme une exposition à parcourir librement, pour présenter la mécanique céleste, avec le problème à trois corps comme fil conducteur. Elle s'intitule *Les mathématiques du ciel* [b] ; voici comment nous la présentons sur la page d'accueil :

> *Nous avons envie de vous proposer une promenade dans notre domaine de recherche, son histoire, ses grandes idées. Il s'agit de la mécanique céleste : les mathématiques qui permettent de comprendre et d'expliquer le mouvement des astres.*

Ce chapitre étudie cette exposition en tant que format conçu en réponse à la problématique présentée ci-dessus. Dans un premier temps, nous présenterons sa structure et son contenu, et détaillerons la manière dont elle a été élaborée, les objectifs auxquels nous avons tenté de répondre et les choix

a. Voir le chapitre 1 page 4 pour une définition des enjeux de la diffusion mathématique.
b. L'exposition peut être consultée à l'adresse suivante : `ciel.mmi-lyon.fr`.

que nous avons effectués pour ce faire. Puis nous décrirons la manière dont elle a été reçue, perçue, et ce qu'elle nous apprend sur les attentes et les comportements du public visé.

3.1 Présentation

L'exposition virtuelle *Les mathématiques du ciel* a été réalisée dans le cadre d'un Laboratoire Junior financé par l'ENS de Lyon, co-financé par la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, et dont l'équipe était constituée de Valentin Seigneur, Olga Romaskevich et moi-même. Nous avons porté l'intégralité du projet, dont j'ai assuré la coordination, et qui a été primé « Coup de cœur du jury » du prix D'Alembert 2018 par la Société Mathématique de France.

Historique et conception. La création de notre Laboratoire Junior répondait à un appel à projets en partenariat avec le musée des Confluences. L'idée de cet appel à projet était de contribuer à créer des liens scientifiques entre le musée des Confluences et l'École Normale Supérieure. L'appel à projets indiquait plusieurs pistes de collaboration, parmi lesquelles celle-ci :

> L'exposition comme lieu d'expression de la recherche. Le musée peut, en fonction du sujet de recherche, consacrer une exposition au sujet traité en confiant à l'étudiant le commissariat scientifique ainsi que la rédaction de la publication qui l'accompagne.

C'est sur cette piste que nous avons conçu la première version de notre projet, une exposition non-virtuelle dans les murs du musée des Confluences. Après plusieurs mois de discussions, l'équipe chargée de la programmation scientifique du musée nous a réorientés vers un format d'exposition virtuelle, mieux adaptée à nos moyens – notamment financiers. Avec Valentin Seigneur et Olga Romaskevich, nous avons conçu en deux ans l'ensemble de l'exposition, en faisant appel à l'illustratrice Lison Bernet, et à Bertrand Paris (Tadaa) pour la conception du site internet. L'inauguration officielle de l'exposition virtuelle a eu lieu le 25 avril 2018 à la MMI, à Lyon.

3.1.1 Structure de l'exposition

L'exposition comporte deux grandes parties. L'une d'elle s'intitule *Deux astres en tête à tête*; on y aborde les découvertes de Kepler et de Newton et la notion de modèle simplifié, avec les exemples du problème à deux corps et du problème à trois corps. L'autre partie, *Dynamique chaotique*, évoque le chaos et sa présence dans les modèles mathématiques du mouvement des astres, ainsi que l'idée d'une étude qualitative des systèmes dynamiques. Chacune de ces deux parties contient neuf sous-parties. Avec environ de 10 000 mots de texte écrit, une heure de vidéos, 25 minutes d'extraits audio, 27 simulations de trajectoires, un quizz, un diaporama et de nombreuses images, on estime à plus de trois heures le temps qu'il faut pour visiter l'intégralité de l'exposition virtuelle.

Chaque sous-partie correspond à une page où est développée la thématique évoquée dans le titre. Chaque page contient du texte, une illustration, et quelques éléments visuels ou audio. À gauche se trouve le menu, qui permet d'accéder à l'ensemble de l'exposition. En bas de page, on trouve des flèches qui permettent de continuer le parcours, des suggestions pour poursuivre dans la même thématique en-dehors du parcours, et des notes, références et propositions d'approfondissement. Voir la figure 3.2 en fin de chapitre, pour un exemple de sous-partie.

L'exposition peut être parcourue librement, ou suivant un parcours proposé. À l'entrée de l'exposition virtuelle se trouve un portail qui permet de choisir l'une des deux grandes parties. On arrive alors sur un grand dessin sur lequel figurent les titres des neuf sous-parties, associés à des éléments de l'image. L'un d'entre eux, plus gros, indique le début du parcours proposé. Voir la figure 3.1 en fin de chapitre.

Enfin, la page *Besoin de guides ?* explique comment s'orienter dans l'exposition virtuelle, et la page *Qui sommes nous ?* contient des informations sur les personnes qui ont contribué à la création de l'exposition.

3.1.2 Contenu de l'exposition

Contenu mathématique. L'exposition virtuelle *Les mathématiques du ciel* a pour fil rouge la modélisation mathématique du système solaire, et le problème à trois corps. Si l'on suit le parcours proposé, on découvre d'abord, dans la partie *Deux astres en tête à tête*, la notion de modèle simplifié, avec le problème à deux corps, puis les lois de Kepler et la définition de l'ellipse. Viennent ensuite la force gravitationnelle et les équations de Newton, puis le problème à trois corps comme modèle amélioré, et les chorégraphies, qui en sont des solutions théoriques très particulières. On arrive ensuite dans la partie *Dynamique chaotique*, où on découvre la notion de chaos et le fait que le problème à trois corps est chaotique, puis l'idée que le caractère chaotique d'un système dépend de l'échelle – spatiale et temporelle – à laquelle on se place. Sont ensuite présentées les deux grandes caractéristiques des systèmes chaotiques, à savoir la dépendance sensible aux conditions initiales et la diversité des trajectoires (la présence, simultanément, de nombreuses trajectoires périodiques ou récurrentes, et de trajectoires qui ne semblent présenter aucune régularité). Enfin, on rencontre l'idée d'une étude qualitative des systèmes dynamiques et d'une approche géométrique plus que calculatoire, et la visite se termine avec l'un des outils de l'étude qualitative du problème à trois corps : les sections de Birkhoff.

Contenu extra-mathématique. Le contenu de cette exposition virtuelle ne se limite pas aux mathématiques. Tout au long de l'exposition, on trouve :

— des éléments biographiques (par exemple au sujet d'Isaac Newton, de Johannes Kepler, d'Henri Poincaré, d'Edward Lorenz, de Camille Flammarion) ;

— des éléments artistiques : extraits littéraires, reproduction d'œuvres d'art, titres de films, etc.

— des données factuelles sur le système solaire et des exemples concrets permettant d'appréhender les idées mathématiques par le biais d'expériences de la vie courante ;

— des idées méta-mathématiques (par exemple : ce que c'est que faire des mathématiques, le rôle de l'intuition, de la modélisation ou de la formalisation dans les mathématiques, etc.), notamment avec les commentaires de deux petits personnages présents à chaque page ;

— des interviews ou textes de chercheurs actuels – Jessica Massetti, Étienne Ghys et Alain Chenciner – qui livrent leur vision des mathématiques.

On pourra se reporter au tableau de fin de chapitre pour une présentation de l'ensemble du contenu, mathématique et extra-mathématique, ordonnée comme dans le parcours proposé.

3.1.3 Caractéristiques de mise en forme

Afin de rendre l'exposition attirante et agréable à visiter [c], nous avons fait certains choix de mise en forme.

Esthétique. Le premier concerne l'esthétique du site, que nous avons confiée à des professionnels. L'exposition virtuelle est richement illustrée, dans un style évoquant la bande dessinée, par Lison Bernet, spécialisée dans l'illustration scientifique. Outre les trois grandes illustrations qui ouvrent

c. Ces choix répondent également à des contraintes plus particulières concernant le public visé, que nous présentons dans la section suivante.

l'exposition, on trouve une illustration originale à chaque sous-partie (sauf sur les pages consacrées à Kepler, Newton et Poincaré).

La conception graphique a été assurée Bertrand Paris, du collectif Tadaa, qui a créé sous Wordpress un site aux standards visuels actuels du web.

Diversité des supports. Un second choix qui a façonné l'exposition virtuelle est celui de proposer un grand nombre de supports différents, ce qui permet à l'exposition d'être adaptée à des personnes ayant des rapports très différents au texte, à l'image, à la vidéo, au son. Ainsi, la structure globale de l'exposition est supportée par des textes que nous avons écrits, et chaque page contient une illustration originale, ainsi que deux à cinq éléments parmi les suivants, que nous avons en grande partie créés, ou que nous présentons avec l'autorisation de leurs auteurs :

— enregistrements audio ;

— vidéos de différents types (interview, film d'animation, timelapse de dessins, vidéo de captures d'écran...) ;

— quizz ;

— reproductions d'œuvres d'art ;

— citations de personnes célèbres et extraits littéraires ;

— diaporamas ;

— simulations numériques de trajectoires, comprenant une interface avec l'utilisateur.

3.2 Analyse a priori

Avec cette exposition, notre objectif de diffusion était triple : exposer un bel aperçu de l'histoire de la mécanique céleste et de ses grandes questions, actuelles et passées ; donner à voir quelques grands principes de l'activité mathématique ; présenter les mathématiques comme une activité culturelle, en lien avec les autres domaines de la culture que sont l'histoire, les sciences, la philosophie, l'art, etc. Le public « visiteurs du musée des Confluences » étant ciblé et le choix du format « exposition virtuelle » étant fait, nous avons tenté d'anticiper les difficultés qui pourraient se présenter. Voici celles que nous avons identifiées :

— une éventuelle difficulté pour les visiteurs à suivre linéairement des suites longues et complexes d'explications, une tendance au zapping, qui résulterait à la fois des habitudes de navigation sur Internet et d'un comportement « loisir » qui pousserait à rechercher le plaisir et éviter l'effort ;

— une grande diversité au sein du public, aussi bien en ce qui concerne les centres d'intérêts et les attentes, que le bagage culturel ou les comportements (tendance à suivre le parcours ou à papillonner, à lire en détail ou à survoler, etc.) ;

— un éventuel rejet de tout formalisme mathématique (dû à des appréhensions ou des blocages), un possible sentiment d'échec ou d'insécurité en présence de formules ou de termes mathématiques.

Ces objectifs et ces difficultés sont partiellement contradictoires, ce qui nous a amenés à penser l'exposition comme devant satisfaire deux couples de contraintes opposées. Le premier couple de contraintes concerne la structure de l'exposition et l'agencement de l'information, le second la technicité des idées mathématiques présentées. Détaillons ces contraintes, et les solutions que nous leur avons opposées.

3.2.1 Contraintes de structure

D'une part, nos objectifs nécessitaient d'inclure dans l'exposition un contenu informatif important, complexe et multiforme, avec plusieurs fils directeurs et différents niveaux de lecture. D'autre part, s'adapter aux différents comportements et centres d'intérêt des visiteurs impliquait de renoncer à imposer un ordre de visite, et donc de renoncer à penser la visite de l'exposition en termes d'accumulation linéaire de connaissances – malgré le fait que ça pourrait être la manière la plus efficace pour le visiteur d'enregistrer toute l'information présentée.

Pour répondre à cette double contrainte, nous avons fait le choix de découper l'exposition en un grand nombre d'éléments auto-contenus qui peuvent être parcourus indépendamment les uns des autres, et qui contiennent des informations de types différents : biographique, mathématique, méta-mathématique... Nous avons également créé un parcours, qui propose un ordre logique pour une visite particulièrement fluide [d]. Ainsi, si le fait de suivre le parcours proposé favorise une vision globale et synthétique du contenu de l'exposition, le visiteur a tout de même la possibilité de se promener au gré de ses envies, avec l'assurance de n'être jamais confronté à des termes non définis ou à des explications dont il lui manquerait le début.

Si cette disposition a le clair avantage de laisser beaucoup de liberté aux visiteurs et de permettre à l'exposition d'être adaptée au plus grand nombre, elle présente également le risque que l'articulation logique de l'ensemble de l'exposition soit insaisissable et que les visiteurs se perdent dans l'exposition, aient du mal à lier entre eux les différents éléments et à avoir une vision globale et synthétique de ce qu'ils ont vu. Par exemple, il est à peu près clair qu'à l'issue d'une visite, même complète et attentive, un visiteur ne connaissant pas déjà le sujet serait incapable de dresser le tableau présenté en fin de chapitre. Ce n'est pas grave, dans le sens où le but de l'exposition n'est pas qu'on acquière à l'issue de sa visite une connaissance solide en mécanique céleste ou en étude des systèmes dynamiques, mais cela pose tout de même les questions suivantes.

> *Les visiteurs parviennent-ils à se repérer dans l'exposition et à articuler les informations reçues ? Profitent-ils de la liberté et de l'autonomie qui leur est laissée ? Est-ce que ça leur plaît ? Qu'est-ce que ça leur apporte ?*

Par ailleurs, il n'est pas évident que les visiteurs réagissent positivement à la grande quantité d'informations et à leur diversité : certains pourraient être découragés d'emblée par la taille de l'exposition, ou importunés par la présence d'éléments qui ne les intéressent pas, d'où les questions suivantes.

> *Comment les visiteurs réagissent-ils à la diversité des types d'information ? Est-ce que la taille de l'exposition, la densité de contenus ou la présence d'informations qui ne les intéressent pas les dérange ?*

3.2.2 Contraintes de technicité mathématique

L'un de nos enjeux principaux lors de la conception de l'exposition était qu'aucune personne ne se sente exclue par une trop grande technicité ou une trop grande complexité du contenu. Ceci nous a amenés à bannir presque entièrement les formules mathématiques – et à expliquer abondamment celles qui restent – ainsi que tout jargon mathématique, ou presque. Pourtant, nous avions comme objectif de transmettre notre vision de notre domaine de recherche mathématique, et donc certaines notions mathématiques complexes. Nous avons donc choisi, plutôt que de les énoncer rigoureusement, de les expliquer brièvement avec des dessins et des analogies, d'en brosser à grands traits les idées principales. Les questions qui se posent alors naturellement sont les suivantes.

d. Voir le tableau en fin de chapitre pour une présentation du contenu ordonnée conformément au parcours proposé.

Les éventuelles appréhensions liées aux mathématiques ont-elles été apaisées ? Quels ont été les facteurs déterminants ?

Les visiteurs ont-ils appris ou compris des idées mathématiques ?

Enfin, cette absence quasi-totale de formalisme mathématique au sein de l'exposition pose la question de l'identification de l'exposition comme mathématique par le public.

Les visiteurs identifient-ils l'exposition comme mathématique ? La perspective de visiter une « exposition mathématique » éveille-t-elle des attentes particulières ? Si oui, ces attentes sont-elles satisfaites ?

3.3 Réception

Vu la diversité du public auquel nous nous intéressons, il faudrait pour répondre de manière satisfaisante aux questions posées observer un grand nombre de visiteurs. Jusqu'ici, nos observations sont assez restreintes, mais donnent déjà des premières indications intéressantes.

3.3.1 Observations : échantillon et méthodologie

Dix personnes ont été interrogées, dont aucune n'a de lien professionnel avec les mathématiques, et qui ont toutes visité au moins une exposition au cours de la dernière année. Elles ont été observées durant leur première visite de l'exposition virtuelle. Elles avaient accepté en amont de prendre un peu de temps (entre trente minutes et deux heures, dépendant de leurs réactions au cours de l'expérience) pour effectuer cette visite sous mon regard. Pour minimiser le risque que leurs propos soient induits ou influencés par mes questions, j'ai volontairement réduit au maximum le nombre de questions. Avant de commencer la visite, ces personnes ont répondu à quelques questions visant à déterminer leur rapport aux mathématiques et au format « exposition virtuelle », à évaluer la probabilité qu'elles visitent spontanément cette exposition virtuelle, et à leur faire exprimer leurs attentes a priori. Puis elles ont reçu la consigne de visiter l'exposition librement, comme elles le feraient si je n'étais pas là, en s'arrêtant quand elles le souhaiteraient, mais en commentant et en expliquant autant que possible toutes leurs réactions (intérêt, frustration, plaisir, ennui, etc) et tous leurs choix (se diriger vers une partie particulière du site, ignorer certains contenus, arrêter une vidéo avant la fin, etc). J'ai assisté à chaque visite aux côtés du visiteur, observant son comportement et ses réactions, notant au fur et à mesure les commentaires émis. Enfin, les dix personnes ont répondu à quelques dernières questions visant à évaluer globalement leur visite.

Ce faible guidage dans l'observation, s'il permet une grande richesse dans les retours obtenus, entraîne nécessairement une interprétation non négligeable des résultats en vue de leur organisation. De plus, les visites étant libres et l'exposition trop grande pour être visitée en une fois – surtout en comptant le temps que demandent commentaires et explications – chaque partie de l'exposition n'a été visitée que par peu de personnes, ce qui rend à la fois difficile de tirer des conclusion concernant tel ou tel aspect de l'exposition, et de comparer les visites entre elles.

Chaque visite a été synthétisée en un compte-rendu qui en reprend les points les plus significatifs. Ces comptes-rendus de visites sont consultables dans l'annexe F ; dans la suite nous rassemblons et organisons le contenu de ces comptes-rendus en réponses aux questions posées a priori.

3.3.2 Analyse d'observations

Rappelons les cinq groupes de questions que l'analyse a priori de l'exposition nous a conduits à formuler, auxquels nous rajouterons un sixième groupe.

[**structure**] *Les visiteurs parviennent-ils à se repérer dans l'exposition et à articuler les informations reçues ? Profitent-ils de la liberté et de l'autonomie qui leur est laissée ; est-ce que ça leur plaît ; qu'est-ce que ça leur apporte ?*

[**quantité et diversité**] *Comment les visiteurs réagissent-ils à la diversité des types d'information ? Est-ce que la taille de l'exposition, la densité de contenus ou la présence d'informations qui ne les intéresse pas les dérangent ?*

[**appréhensions**] *Les éventuelles appréhensions liées aux mathématiques ont-elles été apaisées ? Quels ont été les facteurs déterminants ?*

[**transmission d'idées mathématiques**] *Les visiteurs ont-ils appris ou compris des idées mathématiques ?*

[**attentes vis à vis des mathématiques**] *Les visiteurs identifient-ils l'exposition comme mathématique ? La perspective de visiter une « exposition mathématique » éveille-t-elle des attentes particulières ? Si oui, ces attentes sont-elles satisfaites ?*

[**accroche**] *L'exposition attire-t-elle le public pour laquelle elle est pensée ? Les personnes qui entament la visite restent-elles pour une durée conséquente ?*

Structure. Sur les dix personnes observées, six ont effectué la visite dans l'ordre, en suivant le parcours proposé ; les quatre autres se dirigeaient au gré de leurs envies vers les pages dont le titre les attiraient. Parmi celles qui ont suivi le parcours, deux personnes se sont plaintes de devoir avancer à l'aveugle, sans savoir exactement où elles étaient par rapport au reste de l'exposition. L'une d'elles aurait voulu que la structure de l'exposition soit apparente à l'entrée, et la structure de chaque page apparente au premier coup d'œil, afin de pouvoir plus facilement articuler et hiérarchiser les informations. Pour cette personne, il ne s'agissait pas tant de s'orienter dans l'exposition, puisqu'elle tenait à suivre le parcours proposé, que de s'organiser mentalement. L'autre aurait aimé avoir plus d'éléments qui lui permette de s'orienter dans l'exposition de manière autonome. Afin de pouvoir lire moins de textes et se concentrer sur les autres média sans perdre d'éléments importants à la compréhension, elle aurait souhaité que soient différenciés les textes de présentation générale, faciles à lire et nécessaires à la compréhension, des textes d'approfondissement, plus pointus mais facultatifs. Elle aurait également préféré des titres qui indiquent plus clairement le contenu de chaque page, afin de pouvoir choisir son parcours en connaissance de cause. Enfin, elle a regretté l'absence d'un guide qui l'aurait aidée à se repérer dans l'exposition et à hiérarchiser les informations. Deux autres personnes ayant visité l'exposition dans l'ordre ont explicitement trouvé agréable de se laisser guider, et de ne rien avoir eu à *faire*, ce qui aurait été source de stress. Il est intéressant de remarquer que ce sont deux personnes qui ont déclaré en amont avoir des appréhensions vis-à-vis des mathématiques. Par ailleurs, chacune des six personnes s'est autorisée à passer outre aux éléments ou aux pages qui ne l'intéressaient pas : l'un sautait les pages de biographies, un autre survolait les textes pour aller plus rapidement aux contenus multimédia, un autre au contraire ignorait les vidéos pour se concentrer sur le texte, etc.

Les quatre visiteurs qui ne suivaient pas le parcours proposé se dirigeaient vers les titres qui les attiraient. Parmi eux, trois ont manifesté une sorte de gourmandise à l'idée de ce qu'ils allaient découvrir : « et maintenant j'ai envie de quelque chose de moins sérieux ; tiens je vais aller là, ça va me plaire ». Cette liberté leur a permis à la fois d'être plus actifs dans leur visite et d'accéder rapidement à ce qui les intéressait plus, mais elle a également eu un aspect négatif : anticipant ce qu'ils allaient trouver, trois d'entre eux ont explicitement dit avoir été déçus à un moment de leur visite par un contenu non conforme à ce qu'ils avaient imaginé et espéré. Ainsi, si des titres particulièrement accrocheurs et prometteurs fonctionnent bien pour mettre en mouvement le visiteur, c'est un outil à double tranchant, qui peut engendrer au final plus de frustration que de satisfaction.

Quantité et diversité. L'un des points remarquables de notre exposition est la diversité des sujets abordés, autour d'un large thème commun. Une première remarque est qu'aucun de ces sujets ou approches n'est superflu, puisque chacun a été désigné par une partie des visiteurs comme un des éléments les plus intéressants de l'exposition.

— *Les éléments biographiques.* Quatre personnes se sont montrées particulièrement attirées par les biographies et/ou les ont désignées parmi leurs éléments préférés de l'exposition. Deux personnes les ont systématiquement sautées, par absence d'intérêt ou les qualifiant de bonus pour ceux qui voudraient approfondir.

— *Les considérations sur la nature de l'activité mathématique.* Trois personnes les ont appréciées, dont deux qui les ont désignées parmi leurs éléments préférés de l'exposition. Une personne s'est montrée agacée par ces considérations, qu'elle a ressenties comme des tentatives de l'impressionner au lieu de la laisser découvrir par elle-même les mathématiques en question.

— *Les idées mathématiques expliquées dans les grandes lignes.* Deux personnes ont affirmé avoir été intéressées par ces éléments.

— *Les considérations philosophiques abordées d'un point de vue mathématique.* Quatre personnes les ont désignées parmi leurs éléments préférés de l'exposition.

— *Les résultats mathématiques détaillés.* Trois personnes s'y sont montrées sensibles, dont deux qui les ont désignées parmi leurs éléments préférés de l'exposition.

— *Les éléments artistiques : extraits littéraires, titres de films...* Une personne s'est montrée particulièrement intéressée par ces éléments, deux personnes se sont montrées suspicieuses, avec la peur que cela ne prenne la place des mathématiques qu'elles attendaient.

— *Les évocations de la recherche actuelle.* Deux personnes se sont montrées intéressées par ces éléments.

— *Les données factuelles sur le système solaire.* Trois personnes ont jugé ces informations particulièrement intéressantes ; une personne a manifesté une absence totale d'intérêt.

— *Les exemples concrets, éventuellement issus de la vie quotidienne.* Trois personnes ont particulièrement bien réagi à ces éléments.

Si on ajoute à cela le fait que tous ont déclaré n'avoir pas été importunés par la présence d'éléments qui ne les intéressaient pas et qu'ils pouvaient librement ignorer, la conclusion semble être : plus il y a d'informations différentes, mieux c'est. Un bémol cependant : la taille apparente de l'exposition, c'est-à-dire la quantité d'informations qu'on devine y figurer lorsqu'on commence la visite, a eu des effets opposés chez les uns et les autres. Une personne a été enthousiasmée par l'ensemble des titres et par toutes les propositions d'approfondissement, trois autres se sont senties un peu oppressées et ont rapidement commencé à sauter des contenus parce qu'il y avait « beaucoup à faire ».

Appréhensions. Sur les dix personnes observées, quatre ont déclaré avoir des appréhensions vis-à-vis des mathématiques. Il est intéressant de remarquer que, si les personnes ayant une certaine familiarité avec les raisonnements mathématiques sont globalement celles qui sont libres d'appréhensions, il y a des exceptions, dans les deux sens. Ces quatre personnes ont semblé se rassurer au cours de leur visite ; voici les éléments qui ont eu une influence sur leur assurance.

— L'esthétique visuelle, notamment à l'entrée de l'exposition. Trois personnes ont explicitement dit dès l'entrée de l'exposition être rassurées par les images, qui semblaient leur promettre une exposition à leur niveau. Plus généralement, beaucoup ont interprété les éléments visuels au-delà de leur simple valeur esthétique : comme indiquant un public cible (amateurs de bandes dessinées, adolescents), comme promettant une certaine approche (poétique, ludique, portée

sur l'imaginaire), ou comme garantissant que tout le contenu était original, et donc pensé pour être accessible.

— La présence d'éléments familiers. Pour l'un, des éléments mathématiques vus au lycée, pour l'autre, des contes, films ou autre éléments artistiques, pour d'autres encore, des notions dont ils avait déjà entendu parler (le chaos, l'effet papillon...), ou des questions proches de questionnements personnels (sur l'intuition, la complexité, le déterminisme...)

— Les interviews d'Étienne Ghys. Une observation assez frappante : parmi les neuf visiteurs qui ont visionné au moins une des ses interviews, tous ceux qui n'avaient pas d'appréhension y ont réagi négativement, avec le reproche principal qu'elles sont trop lentes et trop longues pour la quantité d'information, et tous ceux qui avaient des appréhensions y ont réagi positivement, se disant mis en confiance par ces vidéos. Les éléments participant à cette mise en confiance sont : le rythme, tranquille ; les questions écrites qui découpent l'interview, qui correspondent naturellement au cheminement intellectuel du visiteur ; le fait que le discours ne soit pas simpliste, ce qui donne au visiteur l'impression qu'on respecte son intelligence. En effet, plusieurs personnes ont explicitement déclaré se sentir intelligentes en regardant ces vidéos.

— L'évocation des difficultés, des doutes, des approximations et des erreurs des mathématiciens. Quatre personnes se sont dites touchées par de tels éléments, qui venaient remettre en question leur vision des mathématiciens comme de purs esprits, des gens sur un piédestal, qui ne se trompent jamais.

— Dans une moindre mesure, la présence des petits personnages et de leurs commentaires (une phrase par page). Quatre personnes les ont ressentis comme des guides qui permettent de se sentir en terrain connu. Une d'entre elles s'est dite rassurée et aidée par ces personnages qui synthétisent les informations et aident à s'assurer qu'on a bien compris.

— Pour la plupart des personnes ayant dit ne pas être à l'aise avec les mathématiques, la présence de formules mathématiques ou de termes non définis a été une source de stress, et ce même lorsque ces éléments n'étaient pas nécessaires à la compréhension[e]. Elles ont immédiatement eu l'impression de ne pas être à la hauteur, ou de devoir fournir un certain type d'effort. L'une d'entre elles a émis la remarque intéressante qu'elle n'avait pas l'habitude d'être confrontée à des choses qu'elle ne comprenait pas.

Dans l'ensemble, l'exposition virtuelle est une réussite sur ce point. Tous les visiteurs n'ont pas été enthousiasmés, mais aucun n'a quitté l'exposition en se sentant mis en échec.

Transmission d'idées mathématiques. Ce point est difficile à évaluer vue la méthodologie d'observation adoptée, qui ne faisait intervenir aucune évaluation de connaissance. Tout de même, la question « Que retenez-vous, que retirez-vous de votre visite ? » a été posée en fin de visite. La majeure partie des réponses à cette questions ne concerne pas son contenu mais sa forme : le fait qu'elle était accueillante, accessible, agréable à visiter... Peut-être cela signifie-t-il que la transmission de l'information n'a pas été effectuée de manière optimale. Remarquons que ceci serait une conséquence logique des choix que nous avons faits, visant à privilégier le bien-être des visiteurs, au détriment éventuel de la transmission de l'information.

Malgré tout, dans leur réponse à cette question, six ont spontanément déclaré avoir appris des choses ; trois ont cité des contenus mathématiques (les équations de Newton, les lois de Kepler, les caractéristiques des systèmes chaotiques), une a dit avoir découvert des ponts entre les mathématiques

e. Nous avons parfois fait le choix d'inclure des éléments plus pointus, pour permettre différents niveaux de lecture. Un néophyte peut les ignorer sans que sa compréhension en soit altérée, un visiteur plus averti peut y trouver les précisions nécessaires à son niveau de compréhension.

et des questionnements qui lui étaient familiers, et une autre a dit avoir mieux compris la nature de l'activité mathématique.

Une observation récurrente au cours des visites : toutes les personnes interrogées, y compris celles qui étaient à l'aise avec les mathématiques et/ou avaient suivi une formation scientifique, ont exprimé une préférence pour les approches concrètes, comme les données factuelles concernant le système solaire, les exemples issus du quotidien, etc. Il y avait peu d'éléments pour observer cela[f], mais il semblerait que la beauté formelle d'une idée mathématique sans lien avec la réalité ait peu de chances d'intéresser ou d'émouvoir un public non passionné par les mathématiques.

Attentes vis-à-vis des mathématiques. Tous les visiteurs observés ont dit avant de commencer la visite vouloir apprendre et comprendre des choses, sur le ciel et/ou sur les mathématiques. Personne n'était là pour s'amuser, et tous auraient été déçus si l'exposition, même jolie ou ludique, n'avait pas présenté de contenu scientifique. La plupart ont reconnu qu'ils ne seraient probablement jamais arrivés naturellement sur cette exposition mais tous, à l'idée de visiter cette exposition, ont conçu des attentes liées à l'apprentissage et à la compréhension. Dans les faits, la majorité des visiteurs se sont montrés exigeants envers eux-mêmes, disposés à se concentrer, à revenir sur des points difficiles et à adopter un comportement actif dans le traitement des informations. Détaillons un peu attentes et réactions.

— Deux personnes n'avaient pas particulièrement d'attente sur le contenu mathématique, mais voulaient simplement apprendre quelque chose qui les intéresse.

— Deux personnes attendaient de cette exposition présentée comme mathématique qu'on y parle de mathématiques, et pas trop d'autre chose. Elles ont été agacées lorsque des éléments non-mathématiques prenaient le pas sur le contenu mathématique.

— Trois personnes ont eu des réactions ambigües vis-à-vis du contenu mathématique, manifestement liées à un enjeu personnel important vis-à-vis des mathématiques. Elles ont exprimé le désir de retrouver le plaisir du jeu et de la compréhension mathématique qu'elles avaient pu ressentir à certains moments de leur scolarité, avec peut-être une envie de (se) prouver qu'elles étaient capables de faire des mathématiques, mais ont rapidement paniqué en voyant des formules ou des mots techniques et se sont senties « pas à la hauteur », alors même que la compréhension de ces formules n'était pas nécessaire au reste de la visite. L'une d'entre elles a paradoxalement regretté qu'il n'y ait pas plus de formules, ce qui aurait pu lui permettre de reconnaître dans l'exposition ses mathématiques de lycée et de se réconcilier avec elles.

Accroche. Différents degrés d'investissement ont été observés, les visites allant d'une demi-heure à plusieurs heures. Il est important de noter que les conditions de visite étaient très particulières : les visiteurs avaient accepté de consacrer quelques heures à cette expérience, planifiée en amont. Si on omet l'influence du relationnel dans leur investissement[g], il semble qu'ils aient abordé la visite de la même manière qu'on aborde une visite d'exposition dans un musée : en la planifiant à l'avance et en étant disposés à y consacrer un temps non négligeable. Presque tous ont reconnu que la visite de cette exposition virtuelle sur les mathématiques et la manière dont ils s'y sont investis est très éloignée de leurs comportements habituels sur internet : certains n'ont pas l'habitude de naviguer sur internet, d'autres n'accordent généralement pas plus de quelques minutes à des contenus qui ne les intéressent pas directement, à moins d'être rapidement accrochés. Pour preuve, presque tous ont

f. Contrairement à d'autres domaines des mathématiques, la mécanique céleste se prête bien à une approche concrète. Nous avons néanmoins consacré une page aux chorégraphies du problème à N corps, qui sont des solutions théoriques sans existence réelle, et nous en avons profité pour évoquer cet aspect « gratuit »des mathématiques.

g. Tous ont accepté de me rendre service, avec l'envie manifeste de s'intéresser à moi et à mon travail.

reconnu que, dans des conditions normales, ils auraient quitté l'exposition assez rapidement en se promettant de revenir, pour finalement ne jamais le faire. Un des facteurs aggravants concernant cette constatation négative est l'absence d'accroche en début d'exposition. Parmi les six visiteurs qui ont suivi le parcours proposé, quatre ont trouvé que l'exposition commençait lentement, que le contenu stimulant (le quizz, les simulations, les idées frappantes) n'était pas mis en valeur en début de parcours ou de pages. Par ailleurs, six des dix visiteurs ont eu des « coups de cœur » pour certains éléments de l'exposition qui les ont particulièrement marqués, mais aucun de ces coups de cœur n'est advenu durant le premier quart d'heure de visite.

3.4 Conclusions et perspectives

Si cette exposition virtuelle est loin d'être sans défaut, elle constitue néanmoins un très bon outil pour analyser et comprendre un peu mieux les attentes et réactions du public visé. Voici les points les plus frappants qui sont ressortis de cette expérience, et qui mériteraient d'être approfondis.

Le point principal, qui se généralise au-delà du format de l'exposition virtuelle, concerne la question du contenu mathématique, question sensible et délicate. Les observations confirment que les visiteurs peuvent facilement se sentir mis en échec par un contenu trop compliqué ou exclus par des considérations trop abstraites. Mais si l'on rend le contenu suffisamment simple pour s'assurer de ne mettre personne en difficulté, on prend alors le risque de donner aux visiteurs l'impression qu'on déconsidère leur intelligence par un contenu simpliste. En particulier, les visiteurs observés ont tous exprimé, à leur manière, le besoin de sentir qu'on s'adresse à leur intelligence, et qu'on la respecte. Plus encore que cela, un contenu mathématiquement trop pauvre risque d'engendrer de la déception. En effet, tous les visiteurs observés ont conçu des attentes fortes à la perspective de visiter une exposition *mathématique* qui leur soit accessible, leur présente un contenu qu'ils jugeront intéressant et leur permettant de mieux comprendre les mathématiques, voire de prendre leur revanche sur d'éventuels échecs passés liés aux mathématiques. Cette exigence intellectuelle est très encourageante : elle tend à indiquer qu'on *peut* parler de mathématiques à un public qui n'est pas acquis a priori, que les gens aiment apprendre, qu'ils apprécient qu'on s'adresse à leur intelligence et que, s'ils se sentent assez en confiance, ils sont disposés à prêter leur esprit aux mathématiques, malgré leurs appréhensions ou leurs difficultés passées. Lors de la conception de l'exposition, nous avons sous-estimé cette envie d'apprendre, et avons probablement trop caché les mathématiques, en les « diluant » plus que nécessaire dans des considérations d'ordre physique, philosophique, etc. Toutefois, la transmission d'idées mathématiques ne peut pas se faire dans n'importe quelles conditions ; les réactions des visiteurs observés lors de leur visite de l'exposition désignent deux conditions qui semblent nécessaires. La première, déjà mentionnée, est que l'information soit compréhensible, sans technicité excessive. Malgré nos efforts pour bannir au maximum formules et jargon mathématiques, les termes techniques qui subsistaient ont rebuté certains visiteurs, même lorsque leur compréhension n'était pas nécessaire au bon déroulement de la visite. Une des personnes observées a émis une remarque qui mérite d'être répétée ici : si les mathématiciens ont l'habitude d'être quotidiennement confrontés à des idées complexes qu'ils ne comprennent pas immédiatement, ce n'est pas nécessairement le cas des personnes à qui ils s'adressent. Beaucoup ont perdu l'habitude de lire ou écouter des informations qu'elles ne comprennent pas, et ne savent peut-être plus gérer le fait de ne pas comprendre ; les mathématiciens qui s'intéressent à la diffusion doivent tenir compte de cette réalité. La seconde condition qui se dégage est que le public n'ait pas l'impression qu'on lui impose des connaissances dont il n'a que faire, dans un langage qui n'est pas le sien. Les retours positifs les plus récurrents concernant l'exposition ont trait à son accessibilité, au fait que l'esthétique et la mise en forme donnent l'impression au visiteur qu'on s'adresse réellement à lui, que l'exposition a bien été pensée pour lui. Soulignons à ce propos

que la portée de l'esthétique visuelle va bien au-delà de ce que nous avions imaginé. Notre motivation était purement esthétique ; nous avons découvert a posteriori l'impact que l'esthétique visuelle peut avoir sur le sentiment de sécurité. Par ailleurs, les visiteurs observés ont particulièrement apprécié, chacun à sa manière, les aspects « concrets » des mathématiques présentées, c'est-à-dire les liens proposés avec des sujets d'intérêt personnel pour eux – questions existentielles sur le chaos et le déterminisme, fonctionnement du système solaire, liens entre phénomènes astronomiques et calendriers, influences réciproques de la mécanique céleste et des arts, etc. À l'inverse, plusieurs ont manifesté de l'agacement lorsqu'ils ne voyaient pas l'intérêt des notions mathématiques présentées – par exemple les chorégraphies, qui illustraient précisément le caractère parfois totalement abstrait et gratuit des mathématiques. Enfin, il y a eu globalement une grande exigence de motivation des idées présentées. Plusieurs personnes ont explicitement critiqué l'ordre dans lequel étaient présentées les choses, regrettant qu'on leur impose des explications sur des objets qui ne les intéressaient pas et sur lesquels ils ne s'étaient jamais interrogés, alors même que des exemples jolis ou intrigants ou des activités ludiques mettant en jeu ces objets étaient présents plus loin dans l'exposition.

Un second point intéressant concerne le format de l'exposition virtuelle et des comportements auxquels il est associé. Nous avons imité la structure d'une exposition non-virtuelle, en sous-estimant les différences dans la manière d'aborder une exposition selon qu'il s'agisse d'une salle de musée ou d'un site internet qu'on visite depuis chez soi. En particulier, si nous avons bien identifié préalablement l'intérêt de présenter des contenus courts et variés, afin de permettre une visite plus libre et plus rythmée, nous avons conçu l'exposition en présupposant que ses visiteurs y resteraient pour une durée conséquente. Ça a bien été le cas des visites observées, à cause du cadre particulier dans lequel elles ont été effectuées et du fait qu'elles aient été planifiées en amont – à l'instar d'une visite de musée. Cette particularité a eu l'avantage de permettre l'évaluation de la satisfaction des visiteurs lors de visites longues, mais n'est pas du tout représentative du comportement spontané du public visé. De l'aveu même des personnes observées, il est peu probable qu'elles aient spontanément consacré un temps aussi considérable à l'exposition, principalement parce que ce n'est pas ainsi qu'elles ont l'habitude d'appréhender du contenu web. Tout ceci donne à penser qu'un cadre particulier est nécessaire à ce que l'exposition « trouve son public ». Un tel cadre pourrait être fourni par un musée, qui proposerait dans ses murs une visite de l'exposition virtuelle, ou par des enseignants qui utiliseraient l'exposition comme support pédagogique. Nous citons ces deux pistes parce qu'elles constituent des projets concrets, qui vont être mis en place dans les prochains mois.

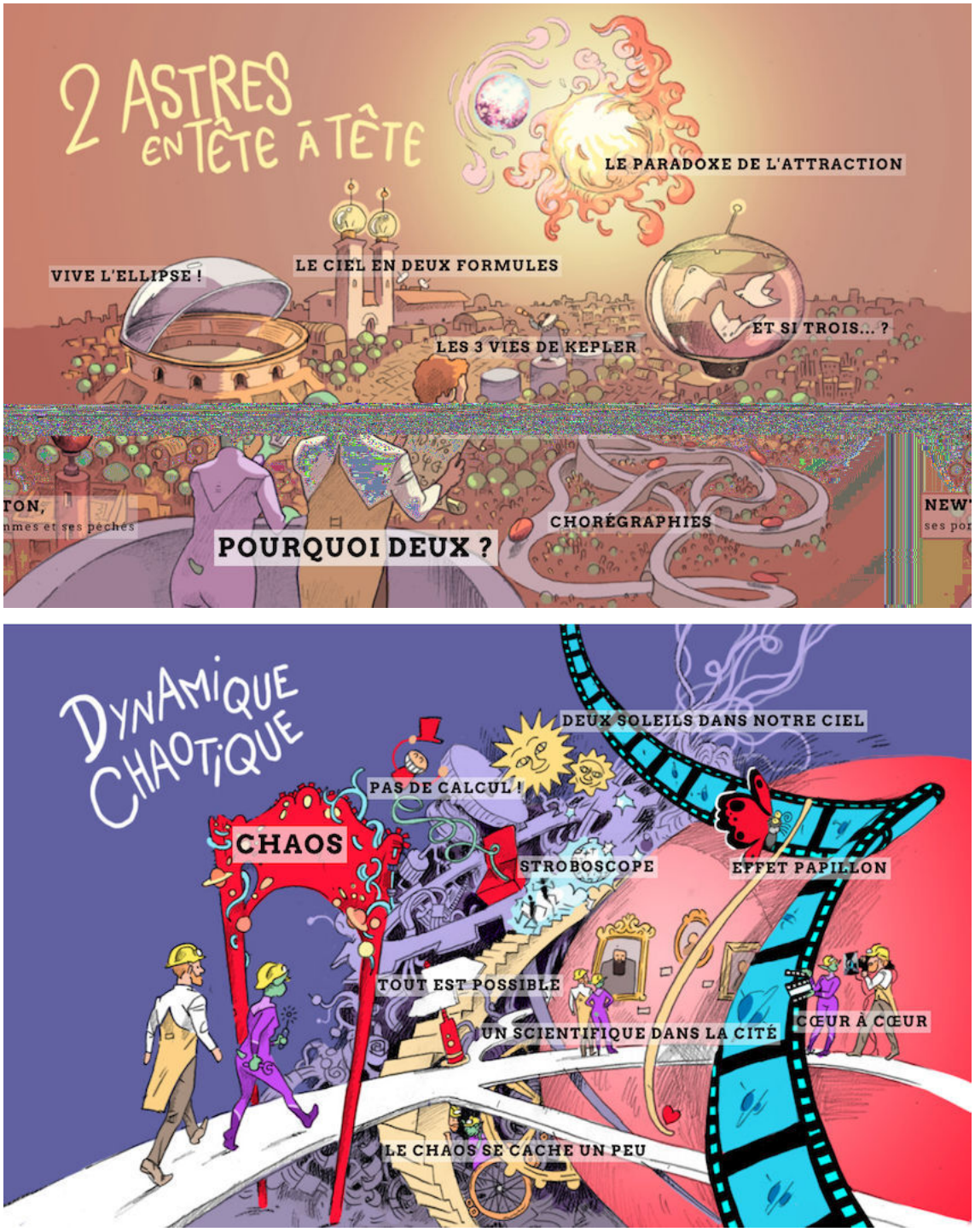


FIGURE 3.1 – Les pages d'entrée des deux parties. Tous les titres sont cliquables.

FIGURE 3.2 – La page *Les trois lois de Kepler* contient un paragraphe évoquant le lien entre les mathématiques et la science. On trouve également sur cette page un extrait audio des *Somnambules* d'Arthur Koestler, narrant la découverte par Kepler de sa seconde loi. Un diaporama énonce et explique les trois lois de Kepler, et les illustre par des données réelles issues de notre système solaire. Enfin, l'image de bas de page est une photographie d'une œuvre d'art inspirée de la deuxième loi de Kepler.

Contenu de l'exposition

Partie : *Deux astres en tête à tête*				
sous-partie	**concepts mathématiques**	**idées métamathématiques**	**éléments biographiques**	**autres**
Pourquoi deux ?	présentation du système solaire comme système dynamique, présentation du modèle simplifié donné par le problème à deux corps	simplification des problèmes : approximation, ou étude de « bébé-modèles »		photos astronomiques en musique
Les trois lois de Kepler	énoncé des trois lois, explications	la physique mathématique lie quantitativement des grandeurs de natures différentes	genèse de la découverte des lois par Kepler	œuvre d'art représentant la loi des aires
Vive l'ellipse !	différentes définitions de l'ellipse			l'*ellipse* en littérature
Les trois vies de Kepler	le modèle mathématique de Kepler (harmonie des sphères)		biographie et personnalité de Johannes Kepler	œuvres d'art représentant l'harmonie des sphères
Paradoxe de l'attraction	présentation qualitative de la force gravitationnelle	le rôle de l'intuition dans les mathématiques		la compréhension du mouvement des astres à travers les cultures
Le ciel en deux formules	la loi de la gravitation universelle et le principe fondamental de la dynamique : présentation et explication des formules	l'importance des formules en mathématiques	le rôle de Newton et d'autres scientifiques dans la naissance de la science moderne	
Newton, ses pommes et ses péchés			biographie et personnalité d'Isaac Newton	
Et si trois ?	présentation du problème à trois corps, exemples de trajectoires montrant sa complexité	importance du problème à trois corps dans le domaine des systèmes dynamiques		
Chorégraphies	présentation des chorégraphies, trajectoires périodiques particulières du problème à N corps	la recherche mathématique ne s'intéresse pas seulement à ce qui est utile, mais aussi à ce qui est beau ou étonnant	la recherche mathématique vue d'un point de vu personnel, par Alain Chenciner	

Partie : *Dynamique chaotique*				
sous partie	**concepts mathématiques**	**idées métamathématiques**	**éléments biographiques**	**autres**
Chaos	définition du chaos	difficulté de définir mathématiquement certains concepts		le chaos dans la mythologie et dans le langage courant
Le chaos se cache un peu	le caractère chaotique d'un système dépend de l'échelle à laquelle on l'observe			les futurs possibles du système solaire
Effet papillon	notion de dépendance sensible aux conditions initiales, exemples dans le problème à trois corps			
Tout est possible !	diversité des types de trajectoires dans les système chaotique, exemples dans le cas du problème à trois corps	distinction entre existence mathématique et existence physique d'un phénomène	histoire de l'erreur de Poincaré concernant les intersections homoclines	
Deux soleils dans notre ciel	établissement des calendriers à partir de la régularité des phénomènes astronomiques		éléments de biographiques sur Camille Flammarion	rêveries littéraires autour d'un ciel à plusieurs soleils ; systèmes à étoile double dans l'univers
Cœur à cœur			chaos, déterminisme et libre-arbitre chez l'homme : point de vue personnel d'Étienne Ghys	liens entre mathématiques, philosophie et art ; films et chansons en rapport avec la mécanique céleste
Pas de calcul !	présentation de l'étude qualitative des systèmes dynamiques, exemples en mécanique céleste	les mathématiques ne se restreignent pas au calcul		
Un scientifique dans la cité	objets mathématiques de l'œuvre de Poincaré	éléments de philosophie des sciences : le rôle de l'intuition selon Poincaré	biographie et personnalité d'Henri Poincaré	rôle des scientifiques dans la société et politique
Stroboscope	présentation des sections de Birkhoff, exemple d'application de premier retour dans le cas du problème à trois corps	l'étude mathématique d'un phénomène consiste souvent à interpréter correctement des données partielles		

Deuxième partie

Problème à trois corps et enlacement

Chapitre 4

Le problème à trois corps restreint, plan, circulaire

Dans sa version restreinte, plane et circulaire, le problème à trois corps s'écrit comme un flot dans $\mathbb{R}^4$ qui possède une intégrale du mouvement. Chaque niveau régulier de cette intégrale première est donc une variété de dimension 3 qui porte un flot. Si l'énergie est assez basse, le niveau d'énergie est une sphère, et on peut y calculer l'enlacement des orbites. Le but de ce chapitre est de présenter cette version du problème à trois corps, et les caractéristiques topologiques du système qui nous seront utiles pour en étudier l'enlacement. Pour une présentation plus générale et exhaustive du problème à trois corps, on pourra consulter le texte d'Alain Chenciner [9]. Nous nous concentrerons plus particulièrement sur la version « dégénérée » du système, où une des deux masses disparaît, et nous mettrons en évidence les caractéristiques de ce système qui permettront, à l'aide des outils développés au chapitre 7, une esquisse de démonstration de son caractère lévogyre. La motivation sous-jacente est de proposer une autre manière, à l'aide du théorème 5.2.6, de démontrer l'existence de sections de Birkhoff. D'autres approches pour étudier les sections de Birkhoff existent ; l'article de Umberto Hryniewicz et Pedro Salomão [33] présente un survol assez complet du domaine.

4.1 Définition et équations

4.1.1 Problème à trois corps *restreint* : de quoi s'agit-il ?

D'un problème virtuel, d'une version simplifiée du système newtonien formé par trois corps s'attirant les uns les autres sous l'effet de la gravitation. Les équations de ce système newtonien sont, en notant Q_1, Q_2, Q_3 les positions des trois corps et m_1, m_3, m_3 leurs masses,

$$\begin{aligned} m_i \ddot{Q}_i &= \sum_{j \neq i} F_{j/i} \\ &= G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|Q_i - Q_j|^3} (Q_j - Q_i), \end{aligned}$$

où $F_{j/i}$ désigne la force exercée par le corps (Q_j, m_j) sur le corps (Q_i, m_i). Comme pour tout mouvement régi par un potentiel, ces équations sont de la forme

$$m\ddot{Q} = -\operatorname{grad}(U), \quad Q = (Q_1, Q_2, Q_3),$$

où U est ici le potentiel newtonien

$$U = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|Q_i - Q_j|}.$$

Lorsque m_3 est très petite par rapport aux deux autres masses, les forces qu'elle exerce sur m_1 et m_2 n'ont pratiquement aucune influence sur leurs trajectoires ; à l'inverse, les forces exercées sur elle par m_2 et m_3 influent grandement sur sa trajectoire. Si, pour décrire plus simplement le système, on choisit d'ignorer les premières forces mais de garder les secondes, on obtient un système qui est l'union d'un problème à deux corps et d'un bout de problème à trois corps, où les deux corps plus massifs suivent les trajectoires d'un problème à deux corps et le corps plus léger une trajectoire décrite par l'équation ci-dessous :

$$\ddot{Q} = G \left(\frac{m_1}{|Q_1 - Q|^3}(Q_1 - Q) + \frac{m_2}{|Q_2 - Q|^3}(Q_2 - Q) \right).$$

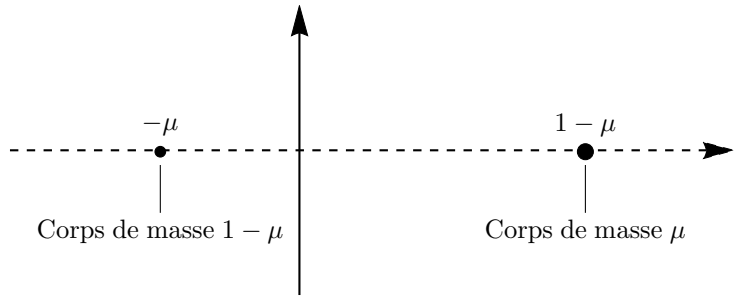
On appelle ce système le *problème à trois corps restreint* ; les deux corps massifs s'appellent les *primaires*. Ce système n'est pas newtonien, puisqu'il contrevient à la troisième loi de Newton :

> « L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires. »

Il est néanmoins agréable à étudier, parce qu'il admet quand même une intégrale première – qui n'est pas l'énergie à laquelle on pense spontanément, mais nous y reviendrons – tout en étant de dimension trois fois moins grande que le système de départ. Pour qu'il soit encore plus agréable à étudier, on suppose que les ellipses sur lesquelles tournent les deux corps massifs sont en fait des cercles. Enfin, par souci de lisibilité, on considère des unités de mesure normalisées de sorte que la somme des masses des primaires, la distance qui les sépare et leur vitesse angulaire de rotation soient égales à 1, ainsi que la constante de gravitation. Cette normalisation des unités de mesure n'a pas pour seule conséquence de rendre les équations plus lisibles ; elle permet de repérer par un seul paramètre $\mu \in [0, 1]$ l'ensemble des problèmes à trois corps restreints circulaires, chacun étant entièrement décrit par l'équation suivante :

$$\ddot{Q}(t) = \frac{1-\mu}{|-\mu e^{it} - Q(t)|^3}(-\mu e^{it} - Q(t)) + \frac{\mu}{|(1-\mu)e^{it} - Q(t)|^3}((1-\mu)e^{it} - Q(t)). \tag{4.1}$$

Ce paramètre μ s'interprète à la fois comme la répartition de la masse totale entre les deux primaires (c'est-à-dire que $m_1 = 1 - \mu$ et $m_2 = \mu$), et comme la position du centre de gravité du système par rapport aux primaires (c'est-à-dire que $|Q_1| = \mu$ et $|Q_2| = (1 - \mu)$).



L'hypothèse de circularité permet, en faisant tourner le référentiel, de fixer les primaires et de rendre ainsi les équations indépendantes du temps. Dans le repère tournant, c'est-à-dire dans les

coordonnées[a] $q = e^{-it}Q$, l'équation (4.1) devient :

$$\ddot{q} = q - 2i\dot{q} - \frac{1-\mu}{|q+\mu|^3}\,(q+\mu) - \frac{\mu}{|q-1+\mu|^3}(q-1+\mu), \tag{4.2}$$

dans laquelle on retrouve bien évidemment le potentiel newtonien

$$U(q) = -\frac{1-\mu}{|q+\mu|} - \frac{\mu}{|q-1+\mu|}.$$

Comme nous le verrons ci-après, le cas extrême $\mu = 0$ où une des deux primaires disparaît se trouve être le problème newtonien à deux corps. Tout étant compris et explicité pour ce système limite, il nous fournira bien des pistes pour l'étude du problème plus complexe $\mu > 0$. Dans toute la suite on se limitera au problème plan, où le troisième corps se meut dans le même plan que les deux autres. Le système est entièrement déterminé par l'équation (4.2), qui décrit alors un champ de vecteurs sur $(\mathbb{R}^4, (q, \dot{q}))$ privé de deux plans : les plans $\{q = -\mu\}$ et $\{q = 1-\mu\}$ au-dessus des deux primaires.

L'hypothèse d'un système plan est une simplification importante ; pourtant le « petit » système auquel elle nous ramène n'est pas si simple. En effet il est chaotique – il contient des fers à cheval de Smale, voir par exemple [35] à ce sujet – et on comprend très mal sa dynamique. Il a été longuement étudié par Poincaré et Birkhoff, notamment via l'application de premier retour et les sections de Birkhoff, que nous présenterons plus bas, et continue d'être étudié actuellement par ceux qui utilisent ces outils.

4.1.2 Le problème à deux corps

Dans le repère fixe. Le cas où une primaire est de masse nulle *est* le problème à deux corps, et en particulier il est newtonien. Pour le voir, comparons les équations. Dans le problème à deux corps classique, le centre de gravité peut être supposé fixe, donc les trajectoires des deux corps sont entièrement décrites par la différence de leurs positions, qu'on notera $Q = Q_2 - Q_1$. On remplace ainsi deux équations du second ordre, qui sont les équations de Newton

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_1 &= \frac{m_1}{|Q_2 - Q_1|^3}\,(Q_2 - Q_1)\\ \ddot{Q}_2 &= \frac{m_2}{|Q_2 - Q_1|^3}\,(Q_1 - Q_2),\end{aligned}$$

par une seule équation :

$$\ddot{Q} = \frac{-m_1 - m_2}{|Q|^3}\,Q.$$

Pour $m_1 + m_2 = 1$, cette dernière équation est précisément l'équation (4.1) : l'équation dans le repère fixe du « problème à deux corps restreint », c'est-à-dire du problème à trois corps restreint avec $\mu = 0$.

Ainsi, le cas $\mu = 0$ est bien compris : c'est un système complètement intégrable dont toutes les trajectoires bornées sont des ellipses, et qui admet comme intégrales premières l'énergie et le moment cinétique, dont les expressions dans le repère fixe sont, en notant $Q = (X, Y)$,

$$E = \frac{1}{2}|\dot{Q}|^2 - \frac{1}{|Q|} \quad ; \quad M = Q \wedge \dot{Q} = X\dot{Y} - \dot{X}Y.$$

Dans le repère tournant. Cela n'a intrinsèquement pas de sens de regarder le système à deux corps dans un repère tournant, mais ça nous rapproche du problème $\mu > 0$ auquel on cherchera à

a. On s'autorisera à passer librement de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire de $q = x + iy$ à $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

étendre les observations et résultats qu'on a dans le cas $\mu = 0$. Dans les coordonnées $q = e^{-it}Q$, l'équation du mouvement devient

$$\ddot{q} = q - 2i\dot{q} - \frac{1}{|q|^3}\, q,$$

l'énergie,

$$E = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + \frac{1}{2}|q|^2 + (x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{1}{|q|}$$

et le moment cinétique,

$$M = x^2 + y^2 + x\dot{y} - \dot{x}y.$$

4.1.3 Quantité conservée

Bien qu'il ne soit pas newtonien, le problème à trois corps restreint admet une intégrale première, c'est-à-dire une quantité conservée le long des trajectoires. Détaillons d'abord l'existence de cette intégrale première, appelée intégrale de Jacobi, puis discutons son interprétation physique.

L'intégrale de Jacobi. Dans un système newtonien régi par un potentiel, l'équation

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x)$$

implique immédiatement que la dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à l'opposé de la dérivée temporelle du potentiel :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}\,U(x),$$

et donc que la quantité $\frac{1}{2}\,\dot{x}^2 + U$ est conservée.

Dans notre cas, nous n'avons pas la première équation, mais nous avons néanmoins une équation semblable à la seconde. Pour voir cela, plaçons-nous dans le repère tournant, et concentrons-nous sur les équations en oubliant le problème d'où on est arrivé par changement de repère (en particulier, on appellera énergie cinétique la quantité $\frac{1}{2}\,\dot{q}^2$, et non la quantité $\frac{1}{2}\,\dot{Q}^2$ exprimée dans les coordonnées $q, \dot{q}$). Dans les coordonnées x, y, l'équation (4.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} - U_x(x,y) \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - U_y(x,y). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Lorsqu'on calcule la dérivée temporelle de l'énergie cinétique, on voit s'annuler les termes en $\dot{x}, \dot{y}$. On peut formuler cela en disant que la force de Coriolis est orthogonale au mouvement, donc ne participe pas à la variation de l'énergie cinétique. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right) &= \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \\ &= \dot{x}(x - U_x) + \dot{y}(y - U_y) \\ &= -\frac{d}{dt}\left(U - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, même si $\ddot{q}$ n'est pas la dérivée d'un potentiel – il dépend de $\dot{q}$ – la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système, elle, peut être vue comme l'opposé de la dérivée temporelle du *potentiel fictif*

V défini comme suit :

$$\begin{aligned} V(q) &= -\frac{1}{2}|q|^2 + U(q) \\ &= -\frac{1}{2}|q|^2 - \frac{1-\mu}{|q+\mu|} - \frac{\mu}{|q-1+\mu|}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas newtonien, la quantité

$$\begin{aligned} &\text{énergie cinétique} + \text{ énergie potentielle} \\ &= \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + V(q) \end{aligned}$$

reste donc constante au cours du temps le long des trajectoires. On appelle *intégrale de Jacobi* le double de cette quantité :

$$J = |\dot{q}|^2 - |q|^2 - 2\left(\frac{1-\mu}{|q+\mu|} + \frac{\mu}{|q-1+\mu|}\right).$$

Intégrale de Jacobi versus énergie. Dans un système conservatif, la quantité conservée ne dépend pas du repère dans lequel on se place ; seule son expression change. On pourrait être tenté de croire qu'en exprimant J dans les coordonnées du repère fixe, on verrait apparaître le double de l'« énergie classique » $2E = \dot{Q}^2 + 2U(Q)$. Il n'en est rien : cette quantité E n'est pas conservée par le système si $\mu \neq 0$, et l'expression de J dans le repère fixe est différente. Si on considère la quantité M qui, dans le repère fixe, s'écrit $X\dot{Y} - \dot{X}Y$ (et qui, dans le cas $\mu = 0$, correspond au moment cinétique de la particule), on a $J = 2E - 2M$. On pourra se reporter au tableau de fin de chapitre pour l'expression de toutes ces quantités dans les différents systèmes de coordonnées.

La conséquence de cette observation est que notre intuition physique de ce qu'est l'énergie ne nous est pas d'une grande aide dans le cas présent. Par exemple, dans le niveau très négatif $\{J = -1/\varepsilon^2\}$ avec $\varepsilon > 0$ très petit, on trouve certes des trajectoires qui restent très proches d'une des deux primaires, mais aussi des trajectoires aussi éloignées qu'on veut des deux primaires. Le cas $\mu = 0$ est très éclairant pour comprendre ce qui se passe. Comme c'est un système newtonien régi par un potentiel central, l'énergie classique $E = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + U(Q)$ y est conservée, ainsi que le moment cinétique $M = X\dot{Y} - \dot{X}Y$. Comme c'est aussi un cas particulier de problème à trois corps restreint, l'intégrale de Jacobi J est également conservée ; elle s'écrit comme combinaison linéaire des deux premières quantités : $J = 2E - 2M$. En particulier, il faut faire attention à ne pas confondre les niveaux d'énergie $\{E = \text{cste}\}$ qui sont faciles à étudier dans le repère fixe, et les niveaux d'énergie $\{J = \text{cste}\}$ qui sont faciles à étudier dans le repère tournant : les flots qu'ils portent respectivement ne sont a priori pas conjugués.

4.1.4 Formulation hamiltonienne

Dans un système de coordonnées bien choisi, l'intégrale de Jacobi peut se voir comme un hamiltonien $H(q,p)$, et les équations du mouvement comme les équations de Hamilton associées

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

On vérifie sans mal que les coordonnées (q, p) avec $p = \dot{q} + iq$ conviennent. En effet, l'intégrale de Jacobi s'y écrit

$$\begin{aligned} H(q,p) &= (p_x^2 + p_y^2) + 2(p_x y - x p_y) + 2U(x,y) \\ &= (p_x^2 + p_y^2) + 2(p_x y - x p_y) - 2\left(\frac{1-\mu}{|q+\mu|} + \frac{\mu}{|q-1+\mu|}\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

et on reconnaît les équations du mouvement (4.3) dans les équations de Hamilton

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x$$

$$\dot{p}_x = -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - U_x(x,y)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - U_y(x,y).$$

4.2 Topologie du problème

À partir de maintenant, sauf mention explicite du contraire, on appellera *énergie* l'intégrale de Jacobi J – ou encore le hamiltonien H – qui est la somme de l'*énergie cinétique* $|\dot{q}|^2 = |p - iq|^2$ et de l'*énergie potentielle* $2V(q)$, qu'on notera désormais $V(q)$ pour plus de simplicité :

$$\begin{aligned} J &= |\dot{q}|^2 - |q|^2 + 2\left(-\frac{1-\mu}{|q+\mu|} - \frac{\mu}{|q-(1-\mu)|}\right) \\ &= |\dot{q}|^2 + V, \end{aligned}$$

4.2.1 Les niveaux d'énergie.

L'énergie étant constante au cours du mouvement, on peut considérer les trajectoires d'énergie e donnée, qui vivent dans le niveau d'énergie $\{H = e\}$. Lorsque ce niveau est régulier, c'est une variété de dimension 3, non compacte à cause des points de collision où la vitesse devient infinie. Sa projection dans l'espace des positions s'appelle la *région de Hill* d'énergie e, c'est l'ensemble des points du plan où il est possible de se trouver avec une énergie e. C'est exactement l'ensemble des points du plan où l'énergie potentielle est inférieure à e ; c'est la projection d'un sous-niveau du graphe du potentiel V représenté figure 4.1.

La topologie des régions de Hill varie lorsqu'on passe une valeur critique $e \in \{e_1, e_2, e_3, e_{4,5}\}$ du potentiel V. Ces valeurs critiques sont atteintes en les *points de Lagrange*, qui sont au nombre de cinq. Les trois premiers, L_1, L_2 et L_3, de plus basse énergie, sont alignés avec les deux primaires ; les deux derniers, de même énergie, forment avec les primaires deux triangles équilatéraux. On peut voir sur la figure 4.2 les régions de Hill pour les cinq intervalles d'énergie potentielle séparés par des points critiques.

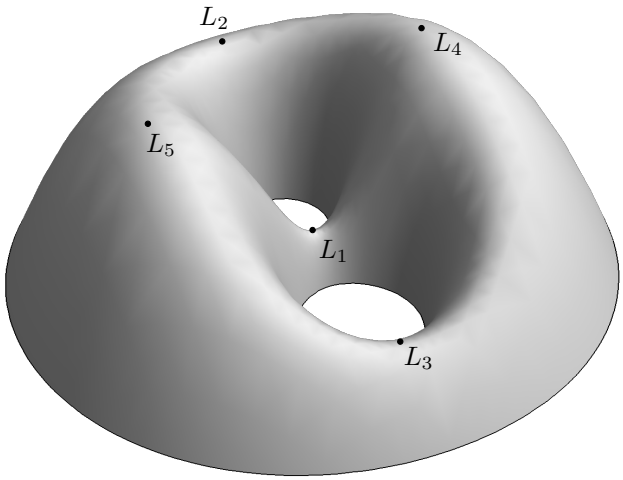


FIGURE 4.1 – Graphe du potentiel fictif V.

4.2.2 Détermination des points de Lagrange.

Le calcul des positions de L_4 et L_5 est assez aisé : on effectue le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (r_1, r_2)$, où r_1 et r_2 sont les distances aux deux primaires. Pour $y \neq 0$ c'est un difféomorphisme – au moins localement – et la résolution de

$$\frac{\partial V}{\partial r_1} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial r_2} = 0$$

nous donne $r_1 = r_2 = 1$. Autrement dit, chacun des points L_1 et L_2 forme avec les deux primaires un triangle équilatéral . La localisation des trois points colinéaires est plus compliquée : elle demande la résolution d'une équation de degré 5. Comme on sait que les points d'équilibre restants sont sur l'axe des x (on a résolu l'équation $dV = 0$ hors de cet axe), on peut néanmoins avoir une idée approximative de leurs positions en considérant le graphe de $V(x, 0)$.

Revenons aux niveaux d'énergie situés au-dessus de ces régions de Hill. Le niveau d'énergie e peut être vu comme un fibré en cercles au-dessus de la région de Hill correspondante, où on écrase les fibres au bord. En effet, pour chaque point dans la région de Hill d'énergie e, le module de la vitesse est fixé :

$$|\dot{q}|^2 = e - V(q),$$

et on a un cercle de vitesses possibles. Au bord de la région, la vitesse est nulle et ce cercle s'écrase en un point. En-dessous du premier point de Lagrange, les régions de Hill ont trois composantes connexes : deux sont topologiquement des disques épointés autour des deux primaires, et la troisième le complémentaire d'un disque. Les niveaux d'énergie correspondants ont donc trois composantes connexes, qui sont chacune homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ privé d'une droite (ou encore, à $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{R}P^3$ privés d'un grand cercle). Les points critiques de l'énergie sont les couples $(q, \dot{q})$ où q est un point de Lagrange et $\dot{q} = 0$. À chaque passage d'une valeur critique, on observe un changement de topologie des niveaux d'énergie ; pour les trois premières valeurs, ce changement correspond à une somme connexe.

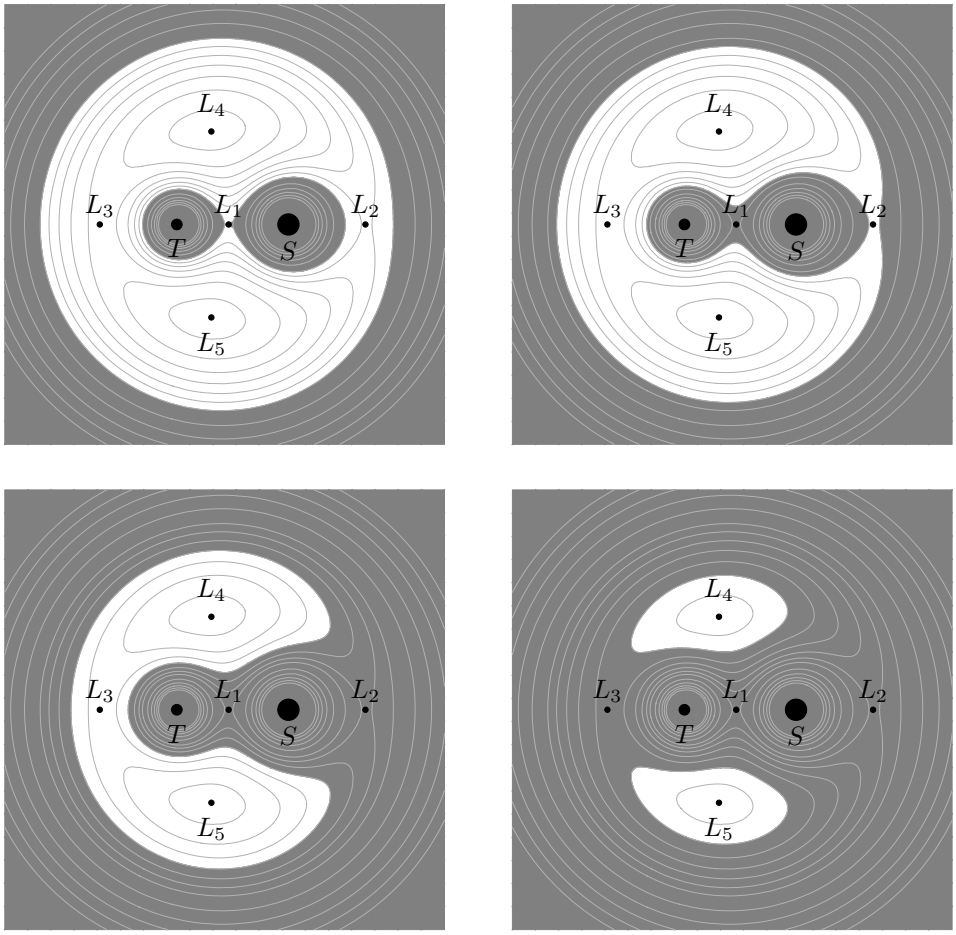


FIGURE 4.2 – En gris, les régions de Hill pour des énergies appartenant aux intervalles $]-\infty, e_1[$, $]e_1, e_2[$, $]e_2, e_3[$ et $]e_3, e_{4,5}[$, respectivement.

Le cas $\mu = 0$. Dans le cas où $\mu = 0$, c'est-à-dire où l'une des primaires disparaît, on se retrouve dans le cas décrit section 4.1.2 du problème à deux corps vu dans un repère tournant. Les équations du mouvement sont données par le hamiltonien

$$H(q,p) = |p - iq|^2 + V(q),$$

avec $V(q) = -|q|^2 - \frac{2}{|q|}$. À la place des cinq points de Lagrange, il y a un cercle de points critiques $|q| = 1$, où l'énergie potentielle est égale à -3. En-dessous de cette valeur, le niveau d'énergie a deux composantes connexes, qui se projettent sur la région de Hill représentée figure 4.3.

Il existe pour chaque $r > 0$ une orbite circulaire prograde et une orbite circulaire rétrograde de rayon r, d'équation $q(t) = re^{i(\omega-1)t}$, avec $\omega = \pm 1/\sqrt{r^3}$. L'énergie des orbites circulaires prograde et rétrograde de rayon r est égale, respectivement, à $E^+(r) = -\frac{1}{r} - 2\sqrt{r}$ et $E^-(r) = -\frac{1}{r} + 2\sqrt{r}$. Ainsi, pour $H < -3$, la composante bornée du niveau d'énergie contient une orbite circulaire prograde et une rétrograde, alors que la composante non bornée contient une orbite circulaire prograde seulement. Se reporter à la figure 4.4.

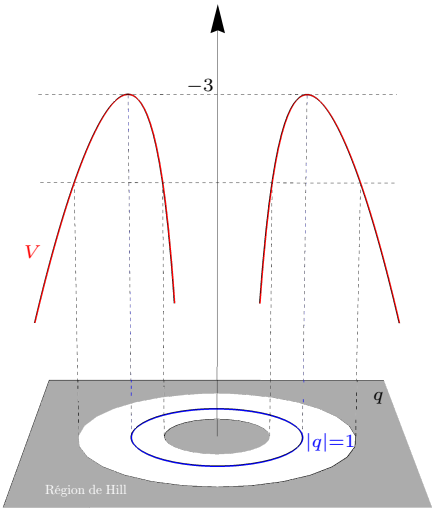


FIGURE 4.3 – Lorsque $\mu = 0$, le potentiel fictif est une fonction centrale $V(|q|)$, dont le graphe est représenté en rouge au-dessus du plan des postitions. En gris, une région de Hill ; en bleu, le cercle de points critiques, d'énergie -3.

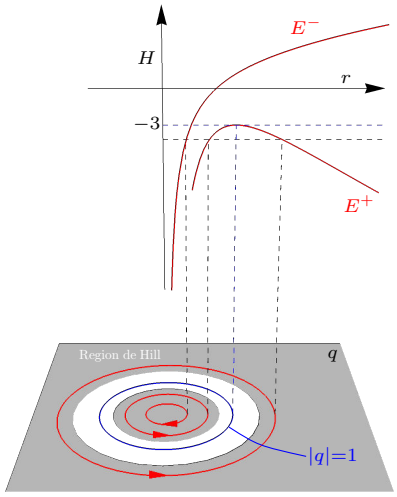


FIGURE 4.4 – Graphe des énergies des orbites circulaires prograde et rétrogrades en fonction de rayon, et orbites circulaires présentes dans un niveau d'énergie donnée inférieure à -3.

4.3 En-dessous du premier point de Lagrange

Revenons à $\mu > 0$, et considérons un niveau d'énergie $\{H = -1/\varepsilon^2\}$, pour une valeur de l'énergie $-1/\varepsilon^2$ inférieure à e_1, la première valeur critique. Ce niveau d'énergie admet trois composantes connexes, dont une, qu'on notera C_ε, se projette en position sur une région entourant la primaire de masse $(1-\mu)$, située en $-\mu$. On s'intéressera dans toute la suite au flot sur la 3-variété C_ε.

4.3.1 Régularisation de Levi-Civita

Depuis Levi-Civita, on sait régulariser les collisions de sorte à obtenir, pour chaque valeur de l'énergie $-1/\varepsilon^2$ en dessous de e_1, un flot sur $\mathbb{S}^3$. Cela se fait à l'aide du revêtement à deux feuillets

$$\begin{aligned}\Phi :\ \mathbb{C}^2 \setminus \{z=0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{q=0\}\\ (z,w) &\longmapsto (q,p) = \left(2z^2, \frac{w}{\varepsilon \bar{z}}\right).\end{aligned}$$

On remarque que Φ préserve la forme symplectique standard – à homothétie près :

$$dz \wedge d\bar{w} + d\bar{z} \wedge dw = \frac{4}{\varepsilon}\,(dq \wedge d\bar{p} + d\bar{q} \wedge dp).$$

La transformation Φ revêt C_ε par une variété difféomorphe à $\mathbb{S}^3$ moins un grand cercle, dont C_ε est le quotient par antipodie. Sur cette variété, elle définit un champ qui, après reparamétrage du temps, se prolonge à $\mathbb{S}^3$ tout entière. Ainsi, Φ régularise le champ sur C_ε en un champ sur $\mathbb{R}P^3$. Pour regarder les détails, plaçons-nous dans un premier temps dans le cas $\mu = 0$. La transformation Φ étant canonique à homothétie près, le champ hamiltonien X_H se relève par Φ en un champ de vecteurs $X_{\widetilde{K}}$ également hamiltonien, où

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(z,w) &= H\left(2z^2, \frac{w}{\varepsilon\bar{z}}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2|z|^2}\left((1+2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w}))|z|^2 + |w|^2 - \varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

En restriction à l'hypersurface $\{\widetilde{K}=0\}$ privée de la courbe fermée $\{z=0\}$, le champ $X_{\widetilde{K}}$ est donné par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{\partial \widetilde{K}}{\partial \bar{w}} = \frac{w - 2i\varepsilon|z|^2 z}{\varepsilon^2|z|^2}\\ \dot{w} &= -\frac{\partial \widetilde{K}}{\partial \bar{z}} = -\frac{(1+2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w}))z - 2i\varepsilon|z|^2 w}{\varepsilon^2|z|^2},\end{aligned}$$

car les termes restant s'annulent. Ce champ de vecteurs n'est certes pas prolongeable en $\{z=0\}$, mais il est le produit d'un champ prolongeable en 0 et d'une fonction qui a un pôle en 0. On est donc naturellement amené à poser

$$K(z,w) = \varepsilon^2|z|^2\widetilde{K}(z,w),$$

ce qui s'interprète comme un reparamétrage du temps $d\tau/dt = \varepsilon^2|z|^2$, permettant que la vitesse reste finie près du grand cercle $\{z=0\}$. Le champ hamiltonien X_K ainsi obtenu est clairement prolongeable à $\{z=0\}$:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{\partial K}{\partial \bar{w}} = w - 2i\varepsilon|z|^2 z\\ \dot{w} &= -\frac{\partial K}{\partial \bar{z}} = -(1+2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w}))z - 2i\varepsilon|z|^2 w.\end{aligned}$$

L'image par Φ de la restriction à $K^{-1}(0) \setminus \{z=0\}$ de ce flot est précisément, après le changement de temps $dt = 2|x|d\tau$, le flot sur C_ε du problème à deux corps dans un repère tournant. Enfin, l'hypersurface $K=0$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$ – le changement de coordonnées opéré plus bas, dans les équations 4.6, fournit un difféomorphisme explicite.

Le cas $\mu > 0$ est similaire, sauf que les formules sont un peu plus compliquées : la transformation Φ assortie du changement du temps $d\tau/dt = \varepsilon^2|z|^2$ définit sur $\mathbb{C}^2$ tout entier le hamiltonien

$$K(z,w) = f^2(z,w)|z|^2 + |w|^2 - (1-\mu)\varepsilon^2 - \mu\varepsilon^2 g(z), \tag{4.5}$$

où

$$f^2(z,w) = 1 + 2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w}) \quad ; \quad g(z) = 2|z|^2\left(\frac{1}{|2z^2+1|} - 1 + z^2 + \bar{z}^2\right),$$

et le niveau d'énergie $K = 0$ est difféomorphe à une sphère $\mathbb{S}^3$.

Récapitulons tout ce qu'on vient de dire, en renvoyant au cours d'Alain Chenciner [10] pour plus de détails.

Le flot sur la composante connexe C_ε du niveau d'énergie $-1/\varepsilon^2$ en-dessous de la première valeur critique, s'écrit comme le quotient par antipodie d'un flot sur la sphère $\mathbb{S}^3$ privée d'un grand cercle ; flot qui, après reparamétrage temporel, se prolonge à $\mathbb{S}^3$ tout entière.

L'équation 4.5 définit donc à la fois une variété $K^{-1}(0)$, et un flot hamiltonien sur cette variété. Le développement à l'ordre 2 en l'origine de ce hamiltonien donne l'oscillateur harmonique

$$K_0 = -(1-\mu)\varepsilon^2 + |z|^2 + |w|^2,$$

dont la restriction à la sphère $K_0^{-1}(0) = \{|z|^2 + |w|^2 = (1-\mu)\varepsilon^2\}$ est précisément le flot de Hopf, lévogyre. Pour ε assez petit, la composante connexe C_ε du niveau d'énergie reste proche du cercle $z = 0$. La troncature ci-dessus a donc un sens, et le flot considéré sur le niveau $K^{-1}(0)$ est proche d'un flot lévogyre. Si l'on souhaite s'intéresser à l'ordre supérieur dans le développement limité de K autour de l'origine, cela nous ramène au cas bien connu $\mu = 0$.

4.3.2 Sections de Birkhoff dans le problème à deux corps tournant

Dans le cas $\mu = 0$, l'équation 4.5 définit un système complètement intégrable : sur le niveau $K = 0$, les trajectoires évoluent sur les variétés $f^2 = \text{cste}$, qui s'envoient par Φ sur les niveaux du moment cinétique. Ces variétés sont des tores, sauf pour deux valeurs critiques où elles dégénèrent en deux cercles d'équation $w = \pm ifz$. Ces deux cercles sont les ensembles sur lesquels les hypersurfaces $K = \text{cste}$ et $f^2 = \text{cste}$ ne sont plus transverses, mais tangentes. Ils s'envoient par Φ sur les deux orbites circulaires – prograde et rétrograde – décrites page 60. On est donc naturellement amené à se placer dans les coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= w + ifz \\ \xi_2 &= \bar{w} + if\bar{z}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

dans lesquelles la variété $K = 0$ devient la 3-sphère $\{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 2\varepsilon^2\}$, et les deux orbites circulaires ont pour équation $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, respectivement. Les équations de la dynamique, elles, deviennent

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= i\left(f - \frac{\varepsilon}{f^2}\left(\varepsilon^2 - \Re(\xi_1\xi_2)\right)\right)\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= i\left(f + \frac{\varepsilon}{f^2}\left(\varepsilon^2 - \Re(\xi_1\xi_2)\right)\right)\xi_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

où l'expression de f en fonction de ξ_1, ξ_2 est donnée comme la plus grande solution de

$$f^2 = 1 - \frac{\varepsilon}{f}\left(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2\right).$$

Ces coordonnées sont particulièrement intéressantes pour la formulation du théorème suivant, que nous attribuerons à Poincaré, premier à découvrir des surfaces de section dans le problème à trois corps restreint ([48], [49]), et dont une démonstration se trouve dans l'article de Martin Kummer et Richard C. Churchill [37].

Théorème 4.3.1 (Poincaré)**.** *L'anneau* $\{\operatorname{Arg}\xi_1 + \operatorname{Arg}\xi_2 = 0 \mod 2\pi\}$ *est une section de Birkhoff pour le flot régularisé sur* $K^{-1}(0)$*, bordée par les orbites périodiques* $\xi_1 = 0$*,* $\xi_2 = 0$*. L'application de premier retour y est un twist intégrable.*

On pourra se reporter si besoin à la définition 0.0.4 d'un twist.

La section de Birkhoff en disque et son application de premier retour. Bien qu'il soit plus agréable de travailler avec cette section en anneau, où les deux orbites circulaires jouent un rôle symétrique et où l'application de premier retour est un twist standard, nous nous intéresserons maintenant à la section de Birkhoff donnée par le disque $\{\operatorname{Arg}\xi_1 = 0\}$. Notre objectif est d'obtenir suffisamment d'informations sur l'application de premier retour pour pouvoir montrer – au chapitre 7 – qu'elle définit un difféomorphisme faiblement tournant du disque, ce qui impliquera grâce au théorème 7.3.3 que le flot régularisé du problème à deux corps dans un repère tournant est lévogyre.

Le système d'équations 4.7 s'intègre explicitement en

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= r_1 e^{i\alpha_1(t)}\\ \xi_2(t) &= r_2 e^{i\alpha_2(t)},\end{aligned}$$

où α_1 et α_2, solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot\alpha_1 &= f - \frac{\varepsilon}{f^2}(\varepsilon^2 - r_1 r_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2))\\ \dot\alpha_2 &= f + \frac{\varepsilon}{f^2}(\varepsilon^2 - r_1 r_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2)),\end{aligned}$$

s'intègrent explicitement, après changement de temps $t \leftarrow f dt$, en

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \alpha_1^0 + t - \frac{\varepsilon}{f^3}\left(\varepsilon^2 t - \frac{r_1 r_2}{2}\left(\sin(2t+\alpha_1^0+\alpha_2^0) - \sin(\alpha_1^0+\alpha_2^0)\right)\right)\\ \alpha_2(t) &= \alpha_2^0 + t + \frac{\varepsilon}{f^3}\left(\varepsilon^2 t - \frac{r_1 r_2}{2}\left(\sin(2t+\alpha_1^0+\alpha_2^0) - \sin(\alpha_1^0+\alpha_2^0)\right)\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ces équations explicites permettent d'étudier l'application de premier retour. La question qui vient naturellement est de savoir si cette application dévie la verticale. On rappelle que le système est complètement intégrable ; les quantités $|\xi_1|$, $|\xi_2|$ sont conservées au cours du mouvement. En paramétrant le disque $\{\operatorname{Arg}\xi_1 = 0\}$ par les coordonnées polaires (r_2, α_2), ceci revient à déterminer si, pour tout angle initial α_2^0 fixé, l'application

$$r_2 \mapsto \alpha_2(t(r_2))$$

est strictement monotone – avec $t(r_2)$ le temps de premier retour du point (r_2, α_2^0). Comme

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + 2t,$$

il suffit en fait d'étudier la croissance de la fonction $r_2 \mapsto t(r_2)$. À l'aide de la méthode de Newton et des équations explicites de α_1, α_2, on résout l'équation $\alpha_1 = 2\pi$, avec $\alpha_1^0 = 0$ et différentes valeurs de α_2^0. Le résultat, présenté figure 4.5, présente un léger défaut de monotonie, qui est également visible sur l'image de l'application de premier retour présentée figure 4.6. Ainsi, contrairement à ce à quoi on pouvait s'attendre, l'application de premier retour sur le disque ne dévie pas la verticale.

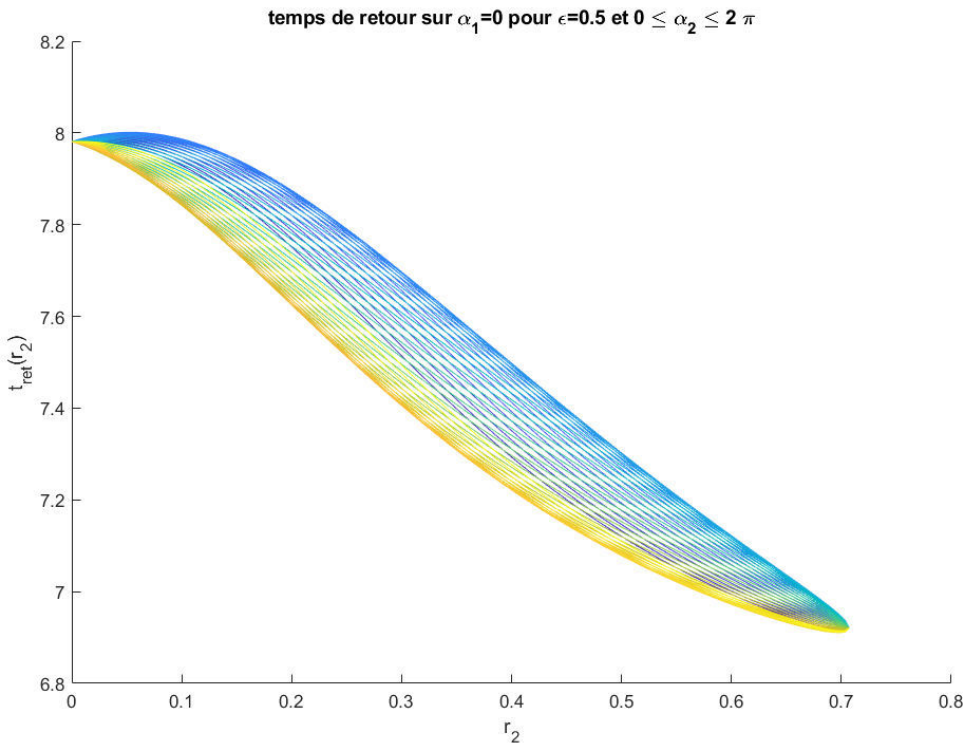


FIGURE 4.5 – Famille de graphes paramétrée par α_2^0, indiquant le temps de premier retour sur le disque $\{\alpha_1 = 0\}$ en fonction du rayon r_2. On observe un défaut de monotonie près du bord et près du point fixe $r_2 = 0$.

Tentons donc, en deuxième approche, de déterminer la manière dont l'application de premier retour ψ fait tourner chaque orbite sur son cercle invariant, en calculant les nombres de rotation. Une méthode pour le faire lorsque le difféomorphisme est une rotation est, étant donné un cercle et un point x quelconque sur ce cercle, de calculer la suite q_n des temps de retour proche associés à x, c'est-à-dire tels que $\psi^{q_n}(x)$ est plus proche de x qu'aucun des $\psi^m(x)$, avec $m < q_n$. Le nombre de rotation de ψ restreinte au cercle est alors donné par la fraction continue

$$\rho_x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}},$$

où la suite a_n est définie à partir de q_n par l'expression

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}.$$

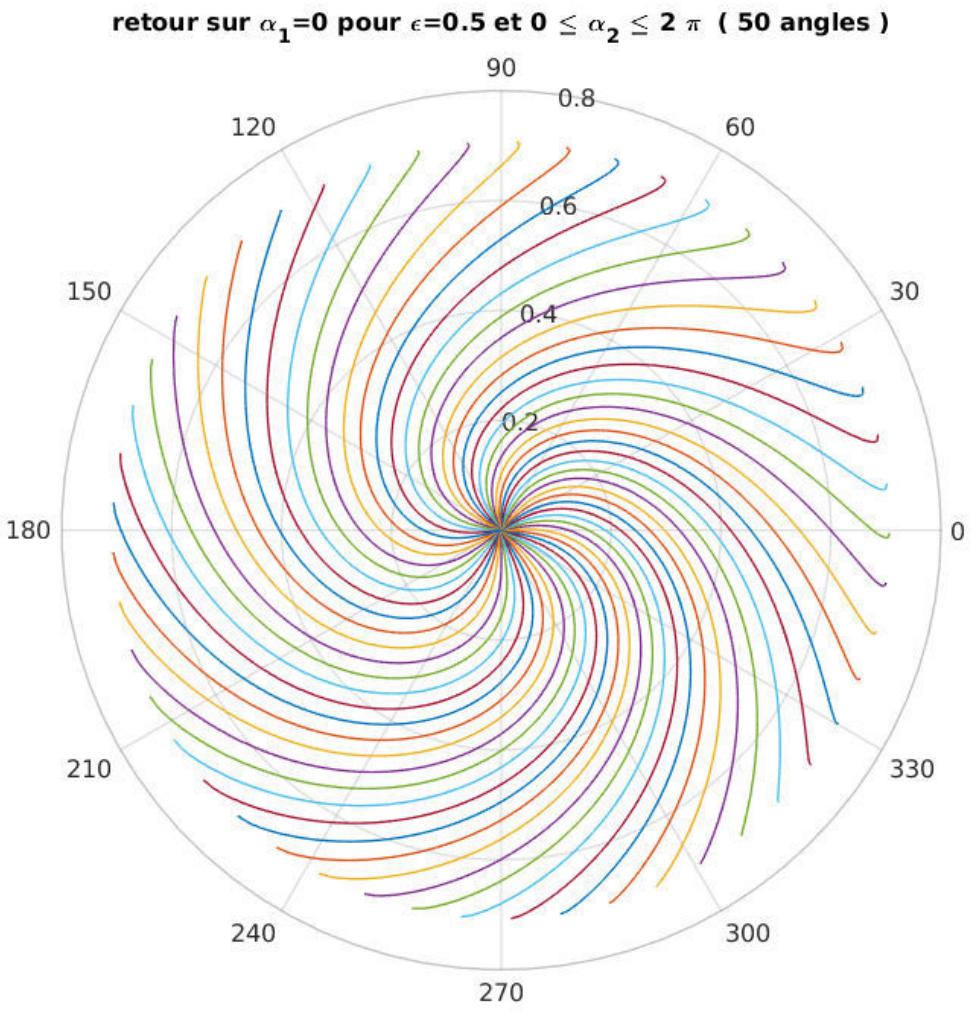


FIGURE 4.6 – Image des verticales $\{\alpha_2^0 = \text{cste}\}$ par l'application de premier retour sur le disque $\{\alpha_1 = 0\}$. La déviation n'est pas tout à fait monotone ; l'application de premier retour n'est pas un twist.

On trouvera dans le livre de John Milnor [43] une description détaillée de cette méthode et, dans le livre de Welington de Melo et Sebastian van Strien [41], une adaptation de cette méthode au cas général des difféomorphismes du cercle. Nous avons utilisé successivement ces deux méthodes pour calculer, pour une dizaine de niveaux d'énergie représentatifs – c'est-à-dire régulièrement distribués sur un intervalle au-delà duquel on n'observe rien de significativement différent – les nombres de rotation de l'application de premier retour sur environ 200 cercles invariants. Les deux méthodes donnent sensiblement les mêmes résultats. Un calcul numérique effectué avec environ 10^5 itérations de l'application de premier retour nous donne une valeur des nombres de rotation, avec une précision de 10^{-6}. Les résultats de ce calcul sont présentés figure 4.7. Pour chaque niveau d'énergie testé, la courbe correspondante décroît strictement avec r_2, c'est-à-dire lorsqu'on s'approche du bord du disque de section.

Nous renvoyons au chapitre 7 pour l'application de ces observations à une esquisse de démonstration du caractère lévogyre des flots sur les niveaux d'énergie du problème dégénéré $\mu = 0$.

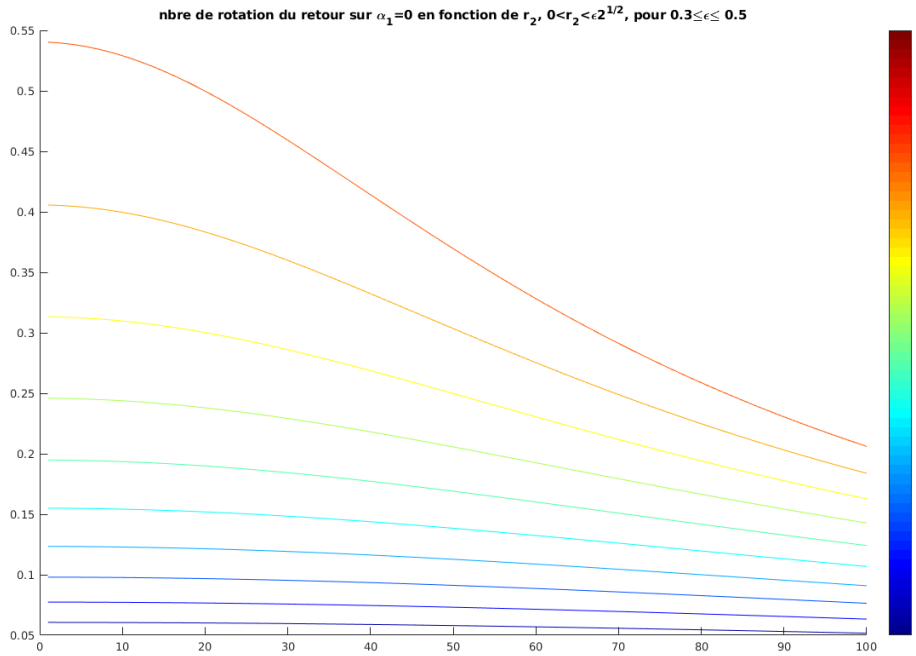


FIGURE 4.7 – Famille de graphes paramétrée par l'énergie, indiquant le nombre de rotation en fonction du rayon r_2. Toutes les courbes sont strictement décroissantes.

4.3.3 Perspectives

Si, comme les simulations numériques effectuées semblent l'indiquer, l'application de premier retour sur la section en disque présentée ci-dessus était un difféomorphisme intégrable dont tous les nombres de rotation sont positifs, alors l'étude des sections en disque menée au chapitre 7 impliquerait que ce difféomorphisme soit *faiblement tournant*, et donc que le problème à trois corps restreint, circulaire, plan, lorsqu'il dégénère au cas $\mu = 0$ – et devient alors un problème à deux corps dans un repère tournant – soit lévogyre. Le cas $\mu > 0$ assez petit étant une petite perturbation de ce système

dégénéré, il serait également lévogyre – comme remarqué page 81, la condition d'être lévogyre est ouverte dans la topologie $\mathscr{C}^1$. Plus précisément, pour $\mu > 0$ assez petit, l'orbite circulaire subsiste en une orbite périodique, qui borde une surface de Birkhoff en disque sur laquelle l'application de premier retour serait une petite perturbation d'un difféomorphisme intégrable faiblement tournant. Nous renvoyons encore une fois à [37] et [10] pour les détails de ces assertions dans le cas d'une surface de section en anneau.

De nombreuses études continuent d'être menées autour du problème à trois corps restreint, plan, circulaire, notamment en-dessous du premier point de Lagrange. Citons en particulier les travaux de Peter Albers, Joel W. Fish, Urs Frauenfelder, Helmut Hofer et Otto Van Koert [1], qui montrent l'existence de surfaces de section sur tous les niveaux d'énergie en-dessous du premier point de Lagrange, pour peu que μ soit assez petit. Cependant, à notre connaissance, aucune n'aborde le problème sous l'angle de l'enlacement des trajectoires.

Interrogeant la pertinence de l'étude de l'enlacement des orbites pour des instances du problème plus éloignées du cas $\mu = 0$ – mais toujours pour des énergies inférieures à la première valeur critique – nous nous orientons dans le chapitre 6 vers une exploration numérique du système.

Quelques quantités exprimées dans les différents systèmes de coordonnées

	position dans le repère fixe	vitesse dans le repère fixe	position dans le repère tournant	vitesse dans le repère tournant
$(Q, \dot{Q})$	Q	$\dot{Q}$	$e^{-it}Q$	$-ie^{-it}Q + e^{-it}\dot{Q}$
$(X, Y, \dot{X}, \dot{Y})$	$X + iY$	$\dot{X} + i\dot{Y}$		
$(q, \dot{q})$	$e^{it}q$	$ie^{it}q + e^{it}\dot{q}$	q	$\dot{q}$
$(x, y, \dot{x}, \dot{y})$			$x + iy$	$\dot{x} + i\dot{y}$
(q, p)			q	$p - iq$
(x, y, p_x, p_y)			$x + iy$	$(p_x + y) + i(p_y - x)$

	énergie potentielle U	moment cinétique M	intégrale de Jacobi J
$(Q, \dot{Q})$	$-\frac{1-\mu}{\lvert Q-\mu e^{it}\rvert} - \frac{\mu}{\lvert Q-(1-\mu)e^{it}\rvert}$	$\frac{1}{2i}(\overline{Q}\dot{Q} - Q\overline{\dot{Q}})$	$\lvert\dot{Q}\rvert^2 + i(\overline{Q}\dot{Q} - Q\overline{\dot{Q}}) + 2U$
$(X, Y, \dot{X}, \dot{Y})$		$X\dot{Y} - Y\dot{X}$	$(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - 2(X\dot{Y} - Y\dot{X}) + 2U$
$(q, \dot{q})$	$-\frac{1-\mu}{\lvert q-\mu\rvert} - \frac{\mu}{\lvert q-(1-\mu)\rvert}$	$\lvert q\rvert^2 + \frac{1}{2i}(\overline{q}\dot{q} - q\overline{\dot{q}})$	$\lvert\dot{q}\rvert^2 - \lvert q\rvert^2 + 2U.$
$(x, y, \dot{x}, \dot{y})$		$x^2 + y^2 + x\dot{y} - y\dot{x}$	$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (x^2 + y^2) + 2U$
(q, p)	$-\frac{1-\mu}{\lvert q-\mu\rvert} - \frac{\mu}{\lvert q-(1-\mu)\rvert}$	$\frac{1}{2i}(\overline{q}p - q\overline{p})$	$\lvert p\rvert^2 + i(\overline{q}p - q\overline{p}) + 2U$
(x, y, p_x, p_y)		$xp_y - yp_x$	$(p_x^2 + p_y^2) - 2(xp_y - yp_x) + 2U$

	énergie classique E
$(Q, \dot{Q})$	$\frac{1}{2}\lvert\dot{Q}\rvert^2 + U$
$(X, Y, \dot{X}, \dot{Y})$	$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + U$
$(q, \dot{q})$	$\frac{1}{2}\lvert\dot{q}\rvert^2 + \frac{1}{2}\lvert q\rvert^2 + \frac{1}{2i}(\overline{q}\dot{q} - q\overline{\dot{q}}) + U$
$(x, y, \dot{x}, \dot{y})$	$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + U$
(q, p)	
(x, y, p_x, p_y)	

Chapitre 5

Enlacements dans $\mathbb{S}^3$

Ce chapitre présente la plupart des outils théoriques dont on aura besoin pour étudier le problème à trois corps du point de vue de l'enlacement.

Nous commencerons par rappeler ce qu'est le nombre d'enlacement de deux courbes fermées et comment il se calcule en pratique dans $\mathbb{R}^3$, puis nous proposerons d'autres éclairages pour le comprendre sur $\mathbb{S}^3$.

Nous survolerons ensuite rapidement les liens entre enlacement et systèmes dynamiques sur $\mathbb{S}^3$, avec les notions d'enlacement de mesures invariantes et de flots lévogyres, introduites par Étienne Ghys dans [24].

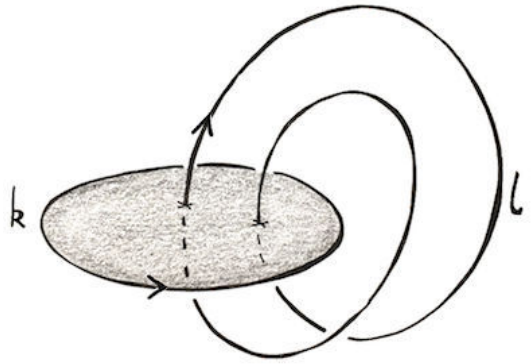
Enfin, nous proposerons une étude d'un système hamiltonien plus simple que celui des trois corps : le mouvement dans un potentiel central convexe, et nous montrerons le caractère lévogyre de ce système.

5.1 Enlacement géométrique

Dans une variété orientée de dimension 3, on peut toujours définir le nombre d'enlacement de deux courbes fermées orientées disjointes k et l, pour peu qu'elles bordent une surface chacune. Dans toute la suite, nous nous placerons sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$, où toutes les courbes fermées bordent.

Définition 5.1.1. Soit Σ une surface orientée bordée par k. Le *nombre d'enlacement* de k et l est le nombre (algébrique) d'intersections entre Σ et l :

$$\mathrm{Enl}(k, l) = \Sigma \cap l.$$



On remarquera que cette définition ne dépend pas du choix de Σ bordé par k. En effet, si Σ' est une deuxième surface bordée par k, alors $\Sigma - \Sigma'$ est une surface sans bord, c'est-à-dire un 2-cycle. Or, comme l borde elle-même une surface, elle est homologiquement nulle, donc d'intersection nulle avec n'importe quel cycle :

$$\Sigma \cap l - \Sigma' \cap l = (\Sigma - \Sigma') \cap l = 0.$$

On peut étendre par bilinéarité l'enlacement aux couples d'entrelacs disjoints. Cela n'est pas évident au vu de la définition, mais l'application obtenue est symétrique : si Σ_1 et Σ_2 sont deux surfaces à bord, alors

$$\partial\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2.$$

Si cette définition est conceptuellement claire, elle n'est pas très pratique pour les calculs effectifs. Heureusement, sur $\mathbb{R}^3$, il existe au moins deux manières constructives de calculer l'enlacement de courbes : soit en comptant des intersections signées, soit en intégrant une forme différentielle explicite. Nous tenterons d'interpréter ces deux approches dans un cadre plus large, qui pourra être adapté au calcul d'enlacements dans $\mathbb{S}^3$. Tout d'abord, donnons une caractérisation de l'enlacement.

Proposition 5.1.2. *Une forme bilinéaire symétrique α sur les couples d'entrelacs disjoints de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$ calcule l'enlacement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) Si $k \times l$ et $k' \times l$ sont homologues dans le complémentaire de la diagonale $M \times M - \mathrm{diag}$, alors $\alpha(k, l) = \alpha(k', l)$.

(2) Pour (k, l) deux petits cercles comme sur la figure 5.1, on a $\alpha(k, l) = 1$.

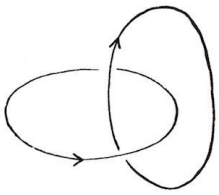
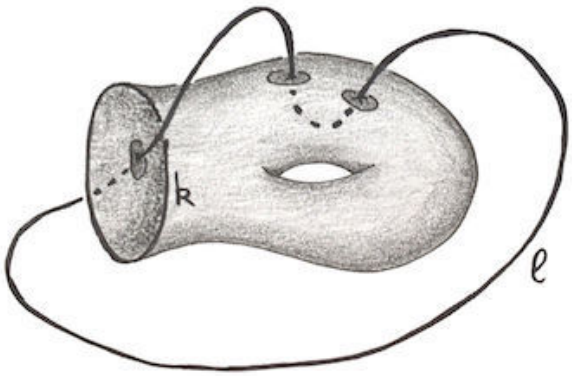


FIGURE 5.1 – Deux petits cercles orientés qui s'enlacent une fois.

Démonstration. Considérons Σ bordée par k. Génériquement, et quitte à modifier un peu la surface Σ ou la courbe l, on peut supposer que l intersecte Σ transversalement en un nombre fini de points. Autour de chaque point d'intersection entre Σ et l, on trace un petit cercle sur Σ, de même orientation que celle du petit disque qu'il borde. En ôtant à Σ tous ces petits disques, on obtient une surface Σ' bordée par $k - k'$, où k' est la somme de tous les petits cercles. Ainsi, $k \times l - k' \times l$ est le bord de $\Sigma' \times l$, et comme Σ' et l ne s'intersectent pas, en supposant satisfaite la condition *(1)* on obtient $\alpha(k, l) = \alpha(k', l)$.



Appliquons le même procédé en remplaçant k et l par l et k', respectivement. On obtient une nouvelle chaîne l' telle que $\alpha(k,l) = \alpha(k',l')$, et $k' \cup l'$ est constitué de paires de petits cercles comme sur la figure 1. Ainsi, en supposant satisfaite la condition *(2)*, on peut calculer $\alpha(k,l)$ comme somme sur ces paires de cercles de $+1$ ou -1, selon l'orientation des cercles. Le nombre de telles paires de cercles est le nombre de cercles formant k', c'est-à-dire le nombre d'intersections entre l et Σ (compté géométriquement, pas algébriquement). Si l'on se convainc que le signe de l'enlacement de deux petits cercles correspond au signe de l'intersection dont ils proviennent, on a établi l'égalité $\alpha(k,l) = \mathrm{Enl}(k,l)$.

□

5.1.1 Enlacement dans $\mathbb{R}^3$

Soient $k(t), l(t)$ deux courbes paramétrées, fermées et disjointes dans $\mathbb{R}^3$, dont on notera k et l les images respectives.

Une formule combinatoire. Une première manière de calculer $\mathrm{Enl}(k,l)$ est de projeter k et l en deux courbes $\overline{k}$ et $\overline{l}$ sur le plan des (x,y). Génériquement, et quitte à déformer un peu les courbes, on peut supposer que les points d'intersections des deux courbes planes obtenues sont en nombre fini, et qu'au-dessus de chacun d'eux se trouve un seul couple de points. On compte alors les intersections planes correspondant aux points où k est au-dessus de l, positivement ou négativement selon que le croisement est direct ou non.

$$\mathrm{Enl}(k,l) = \sum_{\overline{k}=\overline{l}\ ;\ k_z > l_z} \mathbb{1}\left(\overline{l} \nwarrow \quad \nearrow \overline{k}\right) - \mathbb{1}\left(\overline{k} \nwarrow \quad \nearrow \overline{l}\right).$$

Une formule intégrale. Une deuxième manière de calculer l'enlacement de k et l est donnée par la formule suivante, établie par Gauss :

$$\mathrm{Enl}(k,l) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|l(t)-k(s)\|^3} \det\left(l(t)-k(s), \frac{dk}{ds}(s), \frac{dl}{dt}(t)\right) dsdt. \tag{5.1}$$

Il va s'agir dans la suite de démontrer que ces deux formules calculent bien l'enlacement tel qu'on l'a défini précédemment, et de les placer dans un cadre théorique adéquat qui permette de comprendre

quels en sont les équivalents dans $\mathbb{S}^3$.

Cadre théorique pour la formule combinatoire : l'homologie. Les croisements comptés dans la formule combinatoire peuvent être vus comme les intersections dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ d'un tore avec un 4-cycle. Considérons la variété

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \; ; \; x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 > y_3\}.$$

Son bord dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est la diagonale diag, donc C est un cycle dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \text{diag}$. De même, pour deux entrelacs disjoints k et l, le tore $k \times l$ est un cycle dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \text{diag}$. On peut définir l'intersection de cycles

$$\alpha(k, l) = (k \times l) \cap C$$

qui correspond exactement à la formule combinatoire donnée plus haut. Pour montrer que cette intersection correspond bien à l'enlacement, vérifions la condition *(1)* de la caractérisation donnée dans la proposition 5.1.2. Si $k \times l$ est homologue à $k' \times l'$, alors $k' \times l' = k \times l + \partial A$ pour une certaine 3-chaîne A, et donc

$$\alpha(k', l') = (k \times l) \cap C + \partial A \cap C = (k \times l) \cap C,$$

car l'intersection d'un bord et d'un cycle est toujours nulle, ce qui revient à dire que α passe à l'homologie. Le fait que la condition *(2)* soit vérifiée est visuellement clair. Ainsi, la formule combinatoire calcule bien l'enlacement, et s'exprime comme la donnée d'une application $H_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \text{diag}) \to \mathbb{Z}$.

Cadre théorique pour la formule intégrale : la cohomologie. De même que la formule combinatoire correspond à une forme bilinéaire sur le second groupe d'homologie du complémentaire de la diagonale, la formule intégrale correspond à une forme bilinéaire sur son second groupe de cohomologie : on peut réécrire cette formule comme l'intégrale sur un tore $k \times l$ d'une 2-forme fermée sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \text{diag}$. Pour voir cela, définissons $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - \text{diag} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ par

$$(x, y) \mapsto \frac{x - y}{||x - y||}.$$

Soit ω un représentant de la classe fondamentale de $H^2(\mathbb{S}^2)$, c'est-à-dire une forme d'aire sur $\mathbb{S}^2$ telle que $\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 1$, et soit $\Omega = f^*\omega$ son tiré en arrière par f. On peut maintenant définir

$$\alpha'(k, l) = \int_{k \times l} \Omega.$$

On pourra remarquer que c'est aussi le degré de f restreinte au tore $k \times l$. Comme Ω est fermée, α' vérifie automatiquement la condition *(1)*. Pour la condition *(2)*, il faut se convaincre que, pour des petits cercles k et l comme sur la figure 1, la restriction de f au tore $k \times l$ est de degré 1, ce qui est géométriquement assez clair (voir la figure 5.2).

Définition 5.1.3. Soit M une sphère d'homologie de dimension 3. Une forme bidifférentielle bigraduée $\alpha \in \Omega^{(1,1)}(M \times M - \text{diag})$ est appelée *forme de Gauss* sur M si pour tout couple (k, l) de courbes fermées disjointes,

$$\int_{k \times l} \alpha = \text{Enl}(k, l).$$

Outre la forme de Gauss originelle – figurant dans l'équation 5.1 – établie par Gauss pour calculer l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$, il existe d'autres formes de Gauss explicites. Dennis De Turck et Herman Gluck en donnent une pour la sphère $\mathbb{S}^3$ dans leur article [14].

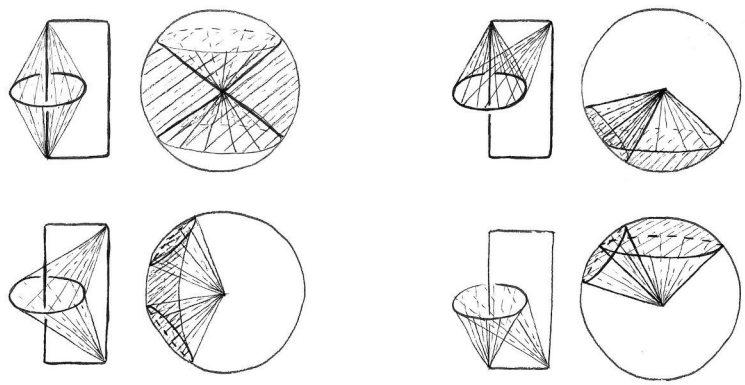


FIGURE 5.2 – En quatre étapes : parcours du tore à gauche, points de la sphère $\mathbb{S}^2$ correspondants à droite.

Ce qui précède montre que Ω est une forme de Gauss sur $\mathbb{R}^3$.

Remarque 5.1.4. Le fait que Enl soit une forme d'enlacement ne dépend que de f, et du fait que ω est un représentant de la classe fondamentale de $H^2(\mathbb{S}^2)$. Ainsi, tout autre représentant ω' définit une forme de Gauss $\Omega' = f^*\omega'$. Pour la forme d'aire standard ω_0, un calcul explicite nous donne la formule intégrale de Gauss.

Remarque 5.1.5. La forme de Gauss standard Ω_0 a ceci de particulier qu'elle est invariante par l'action des isométries de $\mathbb{R}^3$. En effet, pour $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, il existe $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^2)$ tel que $f \circ \phi = \psi \circ f$, et ω_0 est invariante par l'action des isométries de $\mathbb{S}^2$.

Un cadre théorique commun.

Définition 5.1.6. Un *n-courant de De Rham* est une forme linéaire sur les n-formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. On peut y penser comme la généralisation d'un lieu d'intégration d'une n-forme. On note $\mathscr{D}_n(M)$ l'espace des n-courants sur M ; il est muni de la topologie faible[a] :

$$T_n \to T \in \mathscr{D}_n \quad \text{si} \quad \forall \alpha \in \Lambda^n(M), T_n \cdot \alpha \to T \cdot \alpha \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On peut voir une 2-forme α sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ comme un 4-courant, qui associe à $\beta \in \Lambda^4(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ le nombre

$$\alpha \cdot \beta = \int \alpha \wedge \beta.$$

Dans le cas d'une forme de Gauss Ω, la diagonale ne fait pas partie du domaine de définition, mais c'est un lieu de pôles d'ordre 2, ce qui permet tout de même de définir l'intégrale ci-dessus. Comme 4-courant de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, Ω a pour bord la diagonale ou un multiple de la diagonale.

On peut également voir la 4-chaîne C (de même que n'importe quelle variété à bord de dimension 4) comme un 4-courant sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, qui associe à $\alpha \in \Lambda^4(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ le nombre

$$C \cdot \alpha = \int_C \alpha.$$

a. Il s'agit plus précisément de la topologie faible-$*$, ce qui est la même chose dans le cas des espaces réflexifs. Nous nous permettrons donc l'abus de langage.

Son bord, comme on l'a déjà remarqué, est la diagonale.

C'est en termes de courants que peut se formaliser l'idée intuitive selon laquelle la « forme d'aire limite » ω_x, où toute la masse est concentrée au pôle nord x, induit une « forme de Gauss limite » Ω_x qui concentre la masse sur la 4-chaîne C définie précédemment, et donc que Ω_x et C sont « le même objet ». Soit ω_n une suite de formes d'aire sur $\mathbb{S}^2$, d'aire totale 1, à support convergeant vers le singleton $\{x\}$, et Ω_n la suite de leurs tirés en arrière par f. Le support des Ω_n, pour n assez grand, est un voisinage tubulaire de C qui tend vers C. La suite Ω_n converge, au sens des courants, vers un 4-courant Ω_x. Il est clair que les 4-courants Ω_x et C sont égaux.

5.1.2 Enlacement dans $\mathbb{S}^3$

Ayant une vision plus claire des objets qui permettent de définir l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$, nous allons tenter de définir de la même manière l'enlacement dans $\mathbb{S}^3$. Nous allons très rapidement nous heurter, dans le cadre de l'homologie aussi bien que dans celui de la cohomologie, aux difficultés suivantes.

Homologie : Comme $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$, il n'existe pas dans $H_4(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag})$ de cycles qui ne soient pas des bords, ce qui annule la possibilité de définir l'enlacement comme l'intersection d'un tore avec un 4-cycle C. On pourrait remplacer le 4-cycle par une 4-chaîne, mais on ne serait alors plus assuré de l'invariance par homologie (la condition *(1)* de la proposition 5.1.2).

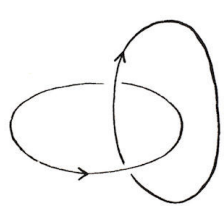
Cohomologie : On voudrait définir une 2-forme fermée Ω sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag}$ en posant $\Omega = f^*\omega$, où ω serait une 2-forme d'aire sur une variété de dimension 2 (si possible $\mathbb{S}^2$), et f une application adéquate de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag}$ dans cette variété. Or, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$, et se rétracte donc par déformation sur $\mathbb{S}^3$. En particulier, il a même cohomologie que $\mathbb{S}^3$, et son H^2 est nul. Toute 2-forme $f^*\omega$ comme décrite ci-dessus est donc cohomologue à 0 ; l'évaluer sur un tore (sans bord !) $k \times l$ ne risque pas de nous donner une quelconque information.

Il va nous falloir raffiner un peu nos exigences, et chercher des objets aux propriétés moins fortes. Puisqu'on n'a aucun espoir de construire des objets sans bord, on va essayer de comprendre quelles sont les propriétés qui doivent être vérifiées par le bord, et de le contrôler. En examinant la démonstration de la proposition, on se rend compte que les propriétés réellement utilisées sont plus faibles que celles énoncées dans la condition *(1)*. En particulier ce qui nous permet de remplacer la proposition 5.1.2 par :

Proposition 5.1.7. *Une forme bilinéaire α sur les couples d'entrelacs disjoints de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$ calcule l'enlacement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1') Si $k \times l - k' \times l$ est le bord d'une 3-chaîne de la forme $\Sigma \times l$ dans $M \times M - \mathrm{diag}$, alors $\alpha(k,l) = \alpha(k',l)$.

(2) Pour (k,l) deux petits cercles comme sur la figure ci-dessous, on a $\alpha(k,l) = 1$.



Enlacement sur $\mathbb{S}^3$, homologie. Imitant ce dont on dispose sur $\mathbb{R}^3$, on cherche une 4-chaîne C sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ dont l'intersection avec les tores $k \times l$ donne l'enlacement. Pour que $k \times l \mapsto (k \times l) \cap C$ vérifie la condition *(1')*, de type

$$\partial(\Sigma \times l) \cap C = 0, \tag{5.2}$$

demander que C soit sans bord est trop fort. En effet, l'équation (5.2) se réécrit

$$(\Sigma \times l) \cap \partial C = 0,$$

et il suffit pour qu'elle soit vérifiée que le bord de C soit une somme d'éléments verticaux et horizontaux – c'est-à-dire qui s'annulent par l'une des deux projections horizontale et verticale.

Voyons cela un peu plus en détail. Fixons un point p dans $\mathbb{S}^3$, et v un vecteur de $T_p\mathbb{S}^3$. Considérons alors tous les cercles de $\mathbb{S}^3$ tangents à v en p. Cet ensemble de cercles partitionne $\mathbb{S}^3 \setminus \{p\}$, et on peut tous les orienter simultanément. Ceci est clair si on considère la projection stéréographique par rapport à p : les cercles deviennent alors l'ensemble de toutes les droites parallèles à une droite donnée. Posons maintenant

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \ ; \ x, y, p \in \text{grand cercle et } (x, y, p) \text{ en ordre cyclique}\}.$$

Le bord de C dans $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ est $V + H + \text{diag}$, où $H = \mathbb{S}^3 \times \{p\}$ est la composante horizontale au-dessus de p, et $V = \{p\} \times \mathbb{S}^3$ la composante verticale au-dessus de p. Posons enfin

$$\text{Enl}(k, l) = (k \times l) \cap C.$$

La condition *(1')* est vérifiée : si $k \times l - k' \times l$ borde une 3-chaîne de la forme $\Sigma \times l$ dans $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \text{diag}$, alors

$$\begin{aligned}(k \times l - k' \times l) \cap C &= (\Sigma \times l) \cap \partial C \\ &= (\Sigma \times l) \cap (V + H) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, il n'est pas difficile de voir que la condition *(2)* l'est également. En considérant la projection stéréographique par rapport à p, on obtient une partition de $\mathbb{R}^3$ par des droites. Si on considère un petit cercle k, et un petit voisinage de k dans l'union des droites passant par k, on obtient un petit anneau d'âme k. La moitié de l'anneau située d'un des côtés de k est constituée des points y tels qu'il existe $x \in k$ proche de y vérifiant : (x, y, p) est en ordre cyclique. Il est clair qu'un petit cercle l tel que (k, l) sont comme dans la figure 5.3 intersecte une unique fois ce demi-anneau. Ainsi, en choisissant la bonne orientation des cercles, on obtient $\text{Enl}(k, l) = 1$.

Enlacement sur $\mathbb{S}^3$, cohomologie. On cherche une 2-forme Ω sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \text{diag}$, telle que l'application $k \times l \mapsto \int_{k \times l} \Omega$ vérifie la condition *(1')* – qui s'écrit

$$\int_{\partial(\Sigma \times l)} \Omega = 0,$$

ou encore

$$\int_{\Sigma \times l} d\Omega = 0.$$

Pour que cette condition soit vérifiée, demander que Ω soit fermée est trop fort ; il suffit que sa différentielle s'annule sur les éléments mixtes auxquels on s'intéresse, qui sont tous de type $\Sigma \times l$. Plus précisément, soit ω_0 la 3-forme fondamentale de $\mathbb{S}^3$, et ω_V, ω_H ses tirés en arrière par les projections verticale et horizontale. Les 3-formes ω_V et ω_H sont dites de type $(0, 3)$ et $(3, 0)$ respectivement, en particulier elles sont nulles sur les éléments mixtes du type $\Sigma \times l$.

Notre objectif est donc de construire Ω qui satisfasse la condition *(2)* et dont la différentielle soit

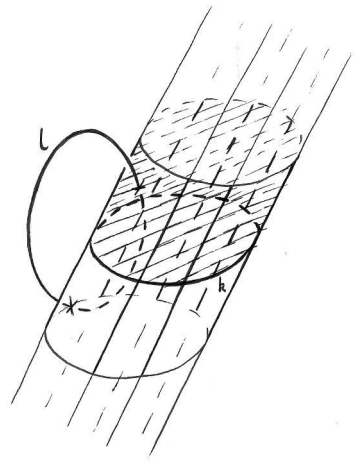


FIGURE 5.3 – En hachuré, le demi-anneau s'appuyant sur k, et intersectant l une fois.

de type $(0,3)+(3,0)$, c'est-à-dire soit une combinaison linéaire de ω_V et ω_H. On va commencer par construire Ω près de la diagonale satisfaisant la condition *(2)* – qui est une condition portant sur le voisinage de la diagonale – puis on l'étendra à $(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3-\text{diag})$ en contrôlant son bord, de manière à ce qu'elle satisfasse *(1)*. Considérons l'ouvert $U = V - \text{diag}$, où V est un voisinage de la diagonale. Un tel ouvert est difféomorphe au produit de $\mathbb{S}^3$ par la boule épointée de dimension 3, et on peut définir

$$f : (x,g) \mapsto \frac{g}{||g||},$$

qui tire en arrière une forme fondamentale ω de $\mathbb{S}^2$ en une 2-forme fermée $f^*\omega$ sur U. On peut étendre $f^*\omega$ en une 2-forme Ω définie sur $(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3-\text{diag})$ tout entier en la multipliant par une fonction plateau. La 3-forme $d\Omega$ n'est pas définie sur la diagonale, mais comme elle est nulle au voisinage de la diagonale, elle se prolonge en une 3-forme *fermée* (mais non exacte) sur $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$. Or, $H^3(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est engendré par ω_H et ω_V, donc il existe une 2-forme sur $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$, qu'on notera A, et telle que $dA + d\Omega$ est une combinaison linéaire de ω_H et ω_V. Posons $\widetilde{\Omega} = A + \Omega$. C'est une 2-forme sur $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3 - \text{diag}$ qui vérifie la condition *(1')*, car sa différentielle est de type $(0,3)+(3,0)$. Vérifions qu'elle satisfait également la condition *(2)*. Soient k, l comme dans la figure 1 ; en particulier $k\times l$ est dans un petit voisinage de diag. Par construction, Ω calcule l'enlacement de k et l. Au voisinage de diag, Ω est fermée, i.e. $d\Omega$ est nulle, donc dA est de type $(0,3)+(3,0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{k\times l}\widetilde{\Omega} &= \int_{k\times l}\Omega + \int_{k\times l}A\\ &= \int_{k\times l}\Omega + \int_{\Sigma\times l}dA\\ &= 1+0.\end{aligned}$$

On a montré que $\widetilde{\Omega}$ est une forme de Gauss sur $\mathbb{S}^3$.

5.2 Enlacement et dynamique

5.2.1 Enlacement asymptotique

Dans [4], Vladimir Arnold définit l'enlacement asymptotique de deux orbites d'un flot de $\mathbb{S}^3$, pour un flot non singulier φ^t de classe $\mathscr{C}^1$ qui préserve une forme de volume vol. Pour ce faire, il munit $\mathbb{S}^3$ d'une métrique riemannienne auxiliaire, ce qui lui permet, pour toute paire de points de $\mathbb{S}^3$, de choisir une géodésique de longueur minimale reliant un point à à l'autre. Puis il considère, pour chaque point x et chaque temps T, la courbe fermée $k(x,T)$ obtenue en suivant l'orbite issue de x pendant le temps T et en refermant par la géodésique joignant $\varphi^T(x)$ à x. Pour une métrique riemannienne générique, pour presque tout couple (x,y) et presque tous $T_1, T_2 > 0$, les courbes $k(x,T_1)$ et $k(y,T_2)$ sont des courbes plongées disjointes, et leur enlacement $\mathrm{Enl}(k(x,T_1), k(y,T_2))$ est bien défini. Arnold montre que, presque partout, la limite

$$A_\varphi(x,y) = \lim_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2}\,\mathrm{Enl}(k(x,T_1), k(y,T_2))$$

existe, ne dépend pas de la métrique choisie, et est intégrable par rapport à la mesure vol $\times$ vol, qu'on notera $dxdy$.

Définition 5.2.1 (Arnold)**.** On appelle cette limite l'*enlacement asymptotique* par φ^t des orbites issues de x et y. En intégrant cette quantité, on définit l'*invariant d'Arnold* associé au flot :

$$\mathscr{A}(\varphi^t) = \iint_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3} A_\varphi(x,y)dxdy.$$

Étienne Ghys et Jean-Marc Gambaudo généralisent dans [21] l'invariant d'Arnold pour des flots ne préservant pas nécessairement le volume. Cet invariant d'Arnold généralisé est défini relativement à une mesure de probabilité invariante μ, en remarquant que la limite $A_\varphi(x,y)$ existe pour $\mu\times\mu$ presque tout couple (x,y), comme l'intégrale

$$\mathscr{A}_\mu(\varphi^t) = \iint_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3} A_\varphi(x,y)d\mu(x)d\mu(y),$$

autrement dit comme la moyenne pour $\mu\times\mu$ de l'enlacement asymptotique.

5.2.2 Mesures invariantes

Tout d'abord, rappelons que toute orbite périodique k du flot peut être assimilée à une mesure de probabilité invariante μ_k – qui concentre le poids sur l'orbite périodique k.

Soient $k(t)$ et $l(t)$ deux orbites périodiques distinctes de périodes respectives T_1, T_2, et μ, ν les mesures invariantes associées. Par définition, $\mu\times\nu$ presque sûrement, deux points x, y de $\mathbb{S}^3$ sont situés sur k et l, respectivement, et donc leur enlacement asymptotique est égal à la constante $\frac{1}{T_1T_2}\,\mathrm{Enl}(k,l)$. En intégrant, on obtient

$$\mathrm{Enl}(k,l) = T_1T_2 \iint A_\varphi(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Cette formulation de l'enlacement de k et l en terme des mesures μ et ν amène naturellement l'idée de généraliser l'enlacement des couples d'orbites périodiques aux couples de mesures invariantes. C'est ce que fait Étienne Ghys dans [24].

Avant de présenter cette généralisation, un petit point sur les mesures invariantes. On rappelle qu'une mesure μ sur $\mathbb{S}^3$ est *invariante* par le flot φ^t si, pour toute partie mesurable A de $\mathbb{S}^3$ et pour

tout t, on a

$$\mu(A) = \mu(\varphi^t(A)). \tag{5.3}$$

On notera $\mathscr{M}$ l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{S}^3$, et $\mathscr{M}(\varphi)$ le sous-espace des mesures invariantes par φ^t. En interprétant $\mathscr{M}$ comme le dual de l'espace des fonctions continues, on peut reformuler la propriété d'invariance de μ ainsi : pour toute fonction f continue sur $\mathbb{S}^3$ et tout réel t,

$$\int_{\mathbb{S}^3} f d\mu = \int_{\mathbb{S}^3} f \circ \varphi^t d\mu.$$

Cette dualité munit l'espace $\mathscr{M}$ de la topologie faible :

$$\mu_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \forall f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{S}^3), \quad \int f d\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

Parmi les mesures invariantes figurent les mesures *ergodiques*, qui donnent une mesure 0 ou 1 aux parties de $\mathbb{S}^3$ invariantes par le flot. Les mesures ergodiques sont les briques élémentaires de $\mathscr{M}(\varphi)$, celles qui ne peuvent pas s'écrire comme barycentre de deux mesures invariantes. L'ensemble des mesures de probabilité invariantes est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses mesures ergodiques.

5.2.3 Enlacement de mesures invariantes

Soient μ, ν deux mesures ergodiques de $\mathscr{M}(\varphi)$. Si elles ne coïncident pas en une même orbite périodique, alors la limite $A_\psi(x, y)$ est définie pour $\mu \times \nu$ presque tous les couples (x, y), et ne dépend pas de x et y. On la note $\mathrm{Enl}(\mu, \nu)$, l'enlacement des mesures invariantes μ et ν.

Pour définir l'auto-enlacement d'une orbite périodique μ, on choisit un point x sur l'orbite périodique, et une suite convergeant vers x de points x_n situés sur différentes orbites. Alors la limite

$$\lim_{n\to+\infty} A(x, x_n)$$

est bien définie et ne dépend que de μ : on la note $\mathrm{Enl}(\mu, \mu)$, l'auto-enlacement de la mesure μ. De manière équivalente, on peut définir l'auto-enlacement de μ en éclatant l'orbite périodique. On obtient alors un tore plongé dans $\mathbb{S}^3$, muni du flot induit par la différentielle de φ. L'auto-enlacement de μ est égal à l'enlacement asymptotique de deux trajectoires quelconques sur ce tore, voir l'annexe page 128 pour les détails.

Définition 5.2.2. L'application Enl définie sur les couples de mesures ergodiques s'étend en une forme bilinéaire continue sur $\mathscr{M}(\varphi) \times \mathscr{M}(\varphi)$, grâce à la décomposition ergodique des mesures. Le réel $\mathrm{Enl}(\mu, \nu)$ est appelé l'*enlacement* des mesures invariantes μ et ν.

Remarque 5.2.3. Contrairement à l'enlacement géométrique de courbes fermées, l'enlacement de mesures invariantes par un flot dépend du paramétrage temporel des orbites. Si on reparamètre le temps de manière à parcourir les orbites s fois plus rapidement, la forme d'enlacement est multipliée par s^2. En particulier, dans le cas de deux orbites périodiques, l'enlacement géométrique des courbes et l'enlacement des mesures associées diffèrent d'un facteur T_1T_2, où T_1 et T_2 sont les périodes respectives des deux orbites périodiques.

5.2.4 Forme de Gauss

On rappelle, comme énoncé dans la section 5.1.2, qu'une forme de Gauss sur $\mathbb{S}^3$ est une (1,1)-forme sur $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 - \mathrm{diag})$ qui, lorsqu'on l'intègre sur un tore $k \times l$, donne l'enlacement géométrique

$\mathrm{Enl}(k,l)$, et qui s'étend en un $(1,1)$-courant sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. En particulier, si Ω est une forme de Gauss, alors l'enlacement asymptotique de x et y – lorsqu'il est défini – vérifie

$$A_\varphi(x,y) = \lim_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \Omega_{(\varphi^s(x),\varphi^t(y))}\left(\frac{d}{ds}\varphi^s(x), \frac{d}{dt}\varphi^t(y)\right) dsdt.$$

Ainsi, l'enlacement de mesures invariantes peut s'exprimer uniquement à l'aide d'une forme de Gauss.

5.2.5 Flots lévogyres

Définition 5.2.4. Un flot φ^t sur $\mathbb{S}^3$ est dit *lévogyre* si tous les couples de mesures φ-invariantes s'enlacent positivement par φ.

Il existe différentes caractérisations des flots lévogyres, toutes équivalentes entre elles.

Théorème 5.2.5 (Ghys, [24])**.** *Soit X un champ de vecteurs non singulier sur la sphère $\mathbb{S}^3$, engendrant un flot X^t. Soit Ω une forme de Gauss. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *La forme bilinéaire* Enl *est positive sur l'ensemble convexe $\mathscr{M}(X)$.*
- *Il existe $\alpha > 0$ et $T > 0$ tels que, pour toute paire de points p_1, p_2 situés sur des orbites distinctes, on ait*
$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \Omega_{X^{t_1}(p_1),X^{t_2}(p_2)}(X_{X^{t_1}(p_1)}, X_{X^{t_2}(p_2)})dt_1dt_2 > \alpha.$$
- *Il existe une forme de Gauss $\overline{\Omega}$ telle que, pour un certain$\alpha > 0$ et pour toute paire de points distincts p_1, p_2, on ait*
$$\overline{\Omega}_{(p_1,p_2)}(X_{p_1}, X_{p_2}) > \frac{\alpha}{|p_1 - p_2|^2}.$$

La troisième caractérisation des flots lévogyres permet en particulier de montrer que l'ensemble des flots lévogyres est ouvert dans la topologie $\mathscr{C}^1$, et donc qu'une petite perturbation d'un flot lévogyre reste lévogyre.

La motivation principale pour la définition du concept de flot lévogyre est qu'il donne une condition suffisante d'existence de sections de Birkhoff. On rappelle qu'une section de Birkhoff Σ pour un flot tri-dimensionnel est une surface bordée par une famille finie d'orbites périodiques, et qui intersecte transversalement toutes les autres orbites du flot un nombre infini de fois. L'intérêt d'une telle surface, lorsqu'elle existe, est qu'elle permet de réduire la dynamique en une dynamique discrète, bi-dimensionnelle, via l'application de premier retour $\Sigma \to \Sigma$. Un premier exemple de flot admettant des sections de Birkhoff est donné par la fibration de Hopf, pour laquelle n'importe quelle famille finie d'orbites périodiques borde une section de Birkhoff. Ce flot est donné sur la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ par

$$\varphi^t(z_1,z_2) = (z_1e^{2i\pi t}, z_2e^{2i\pi t}).$$

Les trajectoires, toutes périodiques, sont les grands cercles $C_w\{\frac{z_1}{z_2} = w\}$, où $w \in \widehat{\mathbb{C}}$. Soit $(C_{w_i})_{i\in I}$ une famille finie de tels grands cercles, alors la surface

$$(z_1,z_2)\ ;\ \mathrm{Arg}\prod_{i\in I}(z_1 - z_2w_i) = 0$$

est une surface de section bordée par les $(C_{w_i})_{i\in I}$.

D'autre flots plus complexes admettent des sections de Birkhoff. C'est le cas par exemple des flots d'Anosov transitifs en dimension 3, comme l'a démontré David Fried en 1983 [20]. Cette large famille

comprend en particulier les flots géodésiques sur des surfaces à courbure négative. Le lien entre flots lévogyres et flots admettant des sections de Birkhoff est donné par le théorème suivant.

Théorème 5.2.6 (Ghys, [24])**.** *Soit X un flot lévogyre sur la sphère $\mathbb{S}^3$. Alors toute famille finie d'orbites périodiques borde une section de Birkhoff.*

L'application de ce théorème au flot de Lorenz permet d'obtenir une démonstration élégante du fait que toutes les orbites périodiques du flot de Lorenz sont des noeuds fibrés de $\mathbb{S}^3$ (voir [24]). D'autre exemples sont donnés par les surfaces-orbifold de type $(2, q, \text{infini})$ ou $(2, 3, 4g + 2)$, dont le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent est lévogyre. Ces flots sont étudiés par Pierre Dehornoy dans [15].

5.3 Flot hamiltonien dans un potentiel central

Un exemple de flot lévogyre plus simple que celui du système à trois corps est donné par le mouvement d'une particule soumise à un potentiel central convexe dans le plan. Un potentiel central est une fonction réelle U sur le plan qui ne dépend que du rayon r. On passera librement de la coordonnée complexe q aux coordonnées cartésiennes (x, y) ou angulaires (r, ϕ), telles que $q = re^{i\phi} = x + iy$. On sait depuis Newton que le mouvement d'une particule dans ce champ est donné par l'équation

$$\ddot{q} = -\operatorname{grad} U.$$

On sait également qu'il y a conservation de l'énergie $E = 1/2|\dot{q}|^2 + U(r)$, ainsi que du moment cinétique $M = q \wedge \dot{q}$, qui s'écrit en coordonnées polaires $M = r^2\dot{\phi}$. Pour une trajectoire donnée, le moment cinétique M est constant, et le rayon r vérifie l'équation

$$\ddot{r} = -\operatorname{grad}\left(U(r) + \frac{M^2}{2r^2}\right),$$

qui est l'équation du mouvement unidimensionnel issu du potentiel

$$V_M(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Ainsi, une partie de l'étude du mouvement se ramène à une famille de systèmes dynamiques de dimension 1. De plus, l'énergie E coïncide avec l'énergie correspondant à ce système unidimensionnel :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\,|\dot{q}|^2 + U \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + V_M. \end{aligned}$$

Pour le détail de tous ces faits, on pourra consulter le livre de Vladimir Arnold [3].

Cas d'une cuvette convexe Si U est suffisamment sage (par exemple continu, coercif et convexe), pour toute valeur de l'énergie la région de Hill[b] est un disque et le niveau d'énergie correspondant une sphère $\mathbb{S}^3$ (pour chaque point de la région de Hill il y a un cercle de vitesses, qui s'écrase au bord de la région). Fixons pour toute la suite une valeur E pour l'énergie, et plaçons-nous dans le niveau

b. Comme définie page 58, la région de Hill d'énergie e est la projection du niveau d'énergie $\{E = e\}$ dans le plan des positions – autrement dit, c'est le domaine $\{U \leq e\}$.

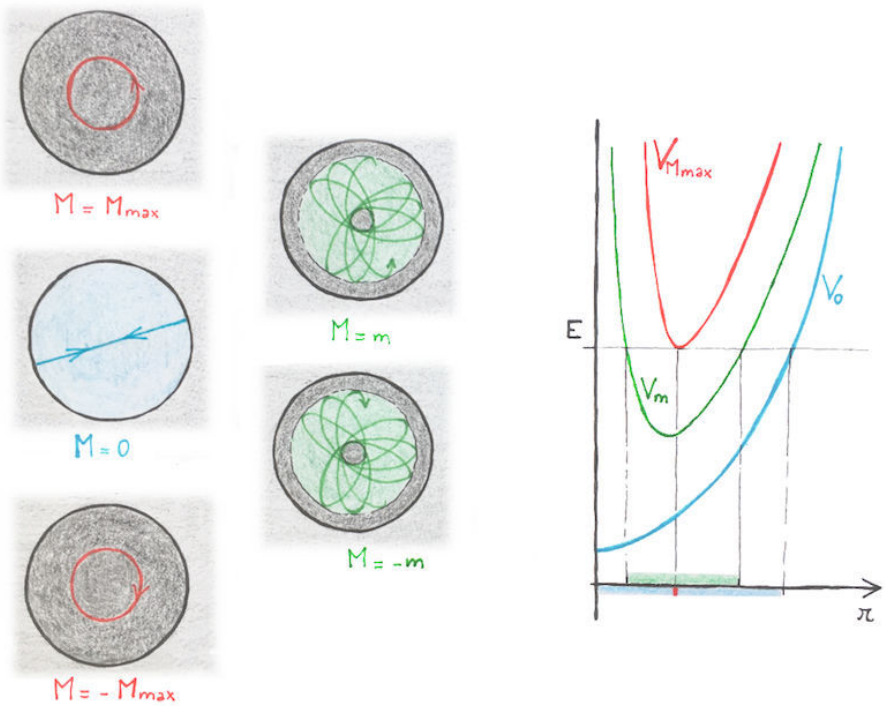


FIGURE 5.4 – Trajectoires de moments cinétiques différents, et potentiels V_M associés.

d'énergie correspondant, homéomorphe à $\mathbb{S}^3$. Énonçons maintenant le théorème à la démonstration duquel sera consacré le reste du chapitre.

Théorème 5.3.1. *La restriction à chaque niveau d'énergie du flot est lévogyre.*

On a une famille de potentiels V_M paramétrée par $M \in [-M_{\max}, M_{\max}]$, où $M_{\max}$ est le moment cinétique maximal pour lequel $\{V_M \leq E\}$ est non vide. Pour chaque valeur fixée M du moment cinétique, les trajectoires de moment cinétique M voient leur rayon r osciller suivant le potentiel V_M. Si M est nul, la particule fait des allers-retours d'un bord à l'autre de la région de Hill, en suivant un segment. Si M est non nul, r oscille dans un intervalle $[r_{\min}, r_{\max}]$; la particule tourne dans l'anneau $\{r \in [r_{\min}, r_{\max}]\}$, dans le sens direct ou indirect selon que M est positif ou négatif. Si M est extrémal, la particule suit une orbite circulaire, dans le sens direct ou indirect selon que $M = M_{\max}$ ou $-M_{\max}$. On pourra voir les différentes trajectoires et les potentiels associés sur la figure 5.4.

Les lieux des moments cinétiques (c'est-à-dire les points de $\mathbb{S}^3$ de moment cinétique donné M) sont des tores[c], sauf pour $M_{\max}$ et $-M_{\max}$ où ce sont des tores dégénérés, c'est-à-dire des cercles. Le regroupement des trajectoires de même moment cinétique nous donne une partition de $\mathbb{S}^3$ en tores emboîtés, isomorphe à celle donnée par la fibration de Hopf (voir la figure 5.5). Sur chaque tore, les trajectoires s'enroulent.

Voyons maintenant comment s'enlacent deux trajectoires quelconques dans ce niveau d'énergie. Pour ce faire, on plonge notre niveau d'énergie privé d'un point dans $\mathbb{R}^3$, et on calcule l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$. Le plongement choisi est décrit figure 5.6.

c. Le théorème d'Arnold-Liouville ne s'applique pas dans notre cas, parce que les intégrales premières E et M sont linéairement dépendantes en tous les points $\dot{r} = 0$ (il en apparaît sur chaque trajectoire !), mais il n'est pas difficile de voir les tores à l'oeil nu.

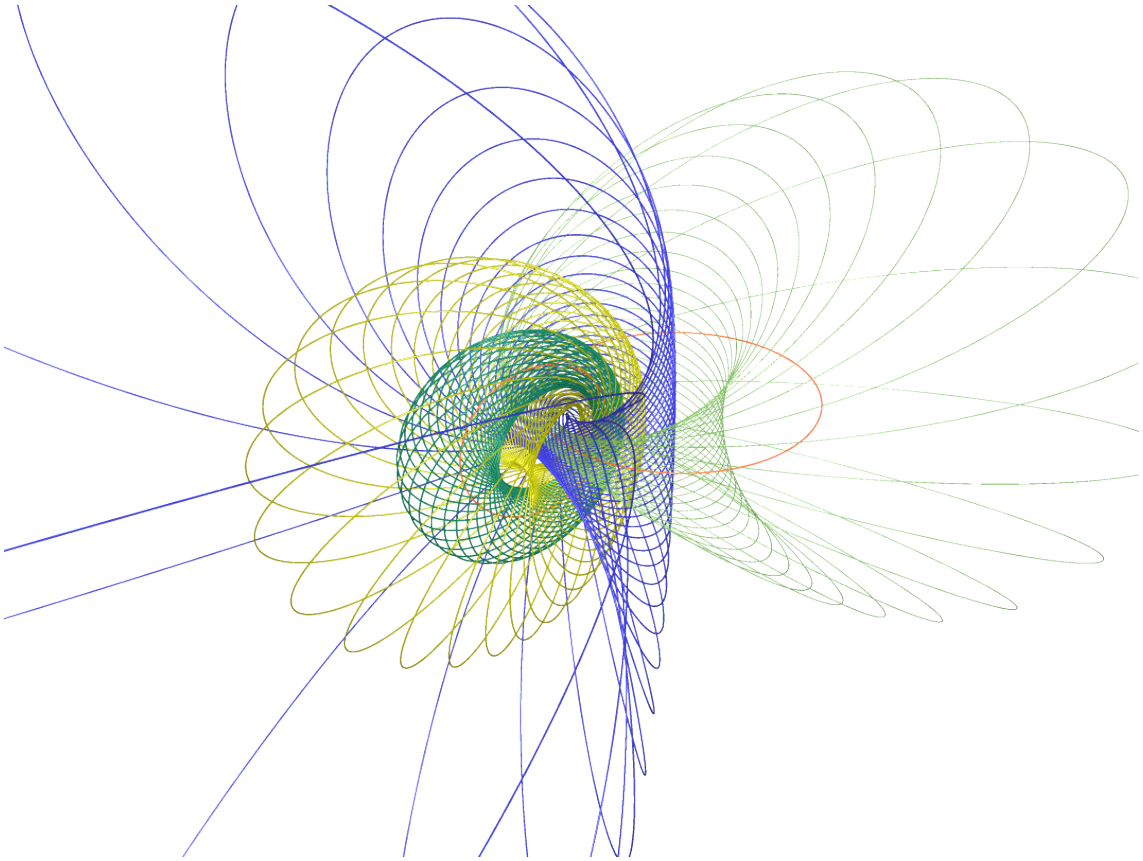


FIGURE 5.5 – Décomposition de $\mathbb{S}^3$ en tores ; vue dans $\mathbb{R}^3$ par projection stéréographique. En rouge, les deux orbites circulaires. En bleu, le tore de moment cinétique nul, qui sépare les tores de moment cinétique positif et ceux de moment cinétique négatif. Image tirée de *Dimensions*, d'Étienne Ghys, Jos Leys et Aurélien Alvarez.

Les deux trajectoires circulaires vivent sur le tore $\{r = r_0\}$ [d] et s'y enlacent positivement une fois ; on pourra s'en assurer grâce à la figure 5.7. Nommons Γ^+ et Γ^- les deux courbes orientées simples correspondant à ces deux trajectoires.

À chaque trajectoire γ du flot, on associe les nombres a_γ et b_γ, qui sont l'enlacement asymptotique de la trajectoire avec les courbes orientées simples Γ^- et Γ^+, respectivement. Une autre manière, peut-être plus parlante, de définir a_γ et b_γ est la suivante. Notons M_γ le moment cinétique de la trajectoire γ, et déformons γ sur une courbe $\overline{\gamma}^+$ vivant sur le support de la courbe Γ^+, par une isotopie $(\phi^t)_{0\leq t\leq 1}$ telle que $\phi^t(\gamma)$ vit dans le tore plein ouvert $\{M > M_\gamma\}$ pour tout $t > 0$. On peut alors lire a_γ comme le nombre moyen de fois que la courbe orientée Γ^+ est parcourue par la trajectoire déformée $\overline{\gamma}^+$, par unité de temps. De même, b_γ est le nombre moyen de fois que la courbe orientée Γ^- est parcourue, par unité de temps, par la trajectoire déformée $\overline{\gamma}^-$, où la déformation est une isotopie qui, pour $0 < t \leq 1$, reste dans le tore plein ouvert $\{M \leq M_\gamma\}$ et termine sur son âme, le cercle $\{M = -M_{\max}\}$.

Proposition 5.3.2. *Si deux trajectoires γ et ζ sont de moments cinétiques $M_\gamma \geq M_\zeta$, leur enlacement asymptotique est donné par la formule suivante :*

$$\mathrm{Enl}(\gamma, \zeta) = a_\gamma b_\zeta.$$

d. Ce n'est pas un tore invariant !

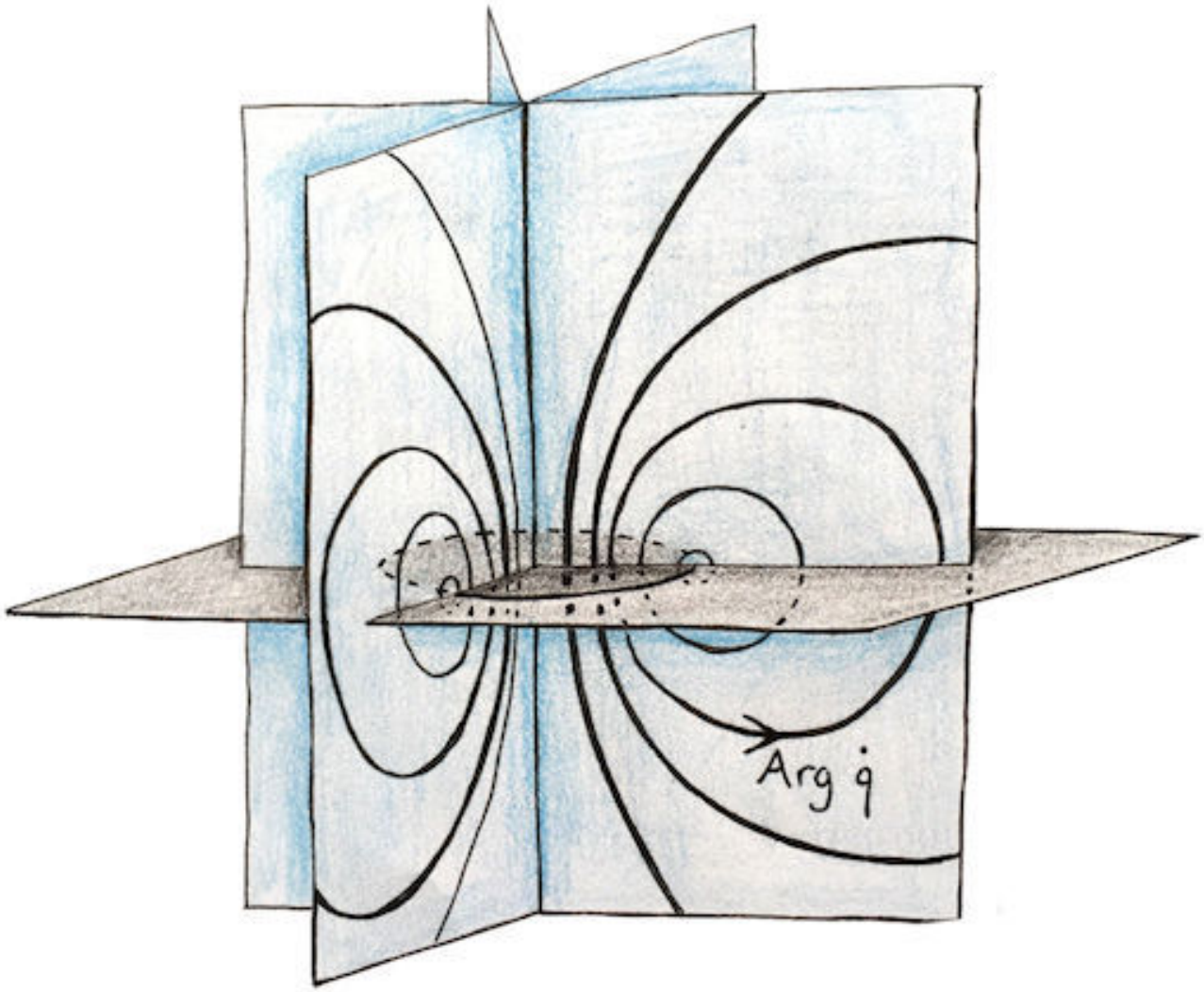


FIGURE 5.6 – Plongement du niveau d'énergie dans $\mathbb{R}^3$. On considère dans le plan $\{z = 0\}$ la « région de Hill » $\{U(x, y) \leq E\}$, et les demi-plans radiaux autour de l'axe Oz, qu'on partitionne en cercles de sorte que chaque cercle intersecte une et une seule fois la « région de Hill ». Puis on paramètre chaque cercle par $\operatorname{Arg} \dot{q} = \theta \in \mathbb{S}^1$ tel que $\theta = 0$ soit situé sur la « région de Hill ». L'orientation des cercles est indiquée sur la figure.

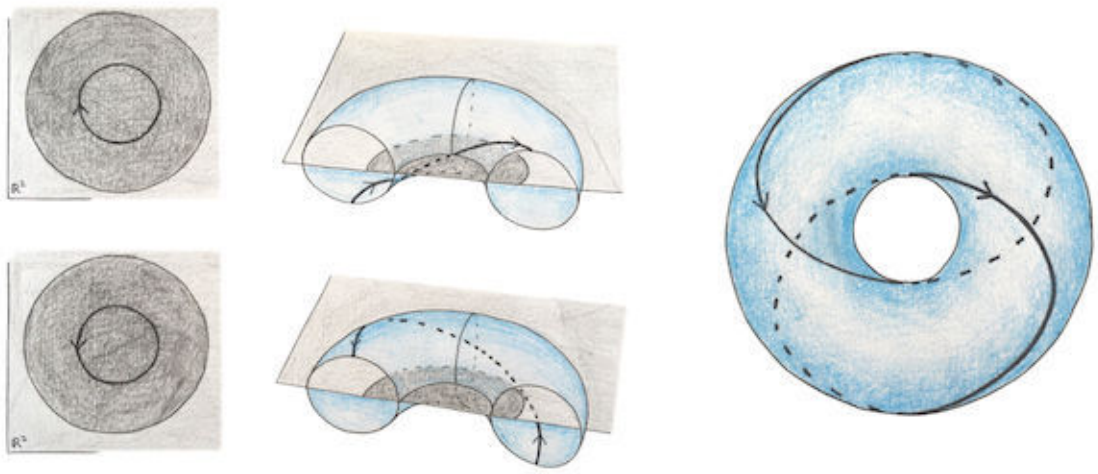


FIGURE 5.7 – Enlacement des deux orbites circulaires. À gauche, la représentation dans le plan des deux orbites circulaires. Au milieu, la représentation dans $\mathbb{R}^3$, sur le tore $\{r = r_0\}$, des demi-orbites. À droite ce même tore, vu de dessus, avec les deux orbites. L'enlacement des deux orbites est de $+1$.

En effet, en déformant simultanément γ sur $\overline{\gamma}^+$ et ζ sur $\overline{\zeta}^-$ par les isotopies décrites ci-dessus, on ne modifie pas l'enlacement puisque les courbes restent disjointes. Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{Enl}(\overline{\gamma}^+, \overline{\zeta}^-) &= \mathrm{Enl}(a_\gamma\, \Gamma^+, b_\zeta\, \Gamma^-)\\ &= a_\gamma b_\zeta.\end{aligned}$$

Reste maintenant à montrer que, pour toutes les trajectoires, les nombres a_γ et b_γ sont strictement positifs. Avant tout, on remarquera que ces nombres ne dépendent que du moment cinétique de γ. En effet deux trajectoires de même moment cinétique sont les mêmes à rotation près, et comme les courbes Γ^+ et Γ^- sont invariantes par rotation, a_γ et b_γ le sont également. Considérons maintenant tous les cas possible.

— Si le moment cinétique est strictement positif, la trajectoire est directe et il est clair que $a_\gamma > 0$. Pour déterminer b_γ, on s'intéresse au signe de l'enroulemement de γ sur son tore invariant ; Expliquons ce que nous entendons par-là. Les trajectoires Γ^+ et Γ^- induisent sur chaque tore de moment cinétique fixé un parallèle et un méridien munis d'une orientation. On dira qu'une portion de courbe « s'enroule positivement » sur son tore en un point donné si les composantes parallèle et méridienne de la différentielle en ce point sont de même signe. Considérons donc la trajectoire γ au point où elle atteint le bord extérieur de l'anneau dans lequel elle est confinée, avec une vitesse $\dot{q}$ d'argument nul. En ce point, l'image – dessinée figure 5.8 – est claire, et on voit que γ s'enroule « positivement » sur son tore invariant. Si on veut bien croire que tout se passe comme si le théorème d'Arnold-Liouville s'appliquait, et qu'en particulier la dynamique sur chaque tore invariant est une dynamique quasi-périodique donnée par une vitesse angulaire constante, alors en chacun de ses points la trajectoire γ s'enroule positivement sur son tore, et donc $b_\gamma > 0$.

— Symétriquement, sur les tores $M < 0$, on a $a > 0$ et $b > 0$.

— Enfin, sur le tore $\{M = 0\}$, en considérant la trajectoire particulière vérifiant $\dot{q} = 0$ ou π, on voit (sur la figure 5.9) que $a = b = 1$.

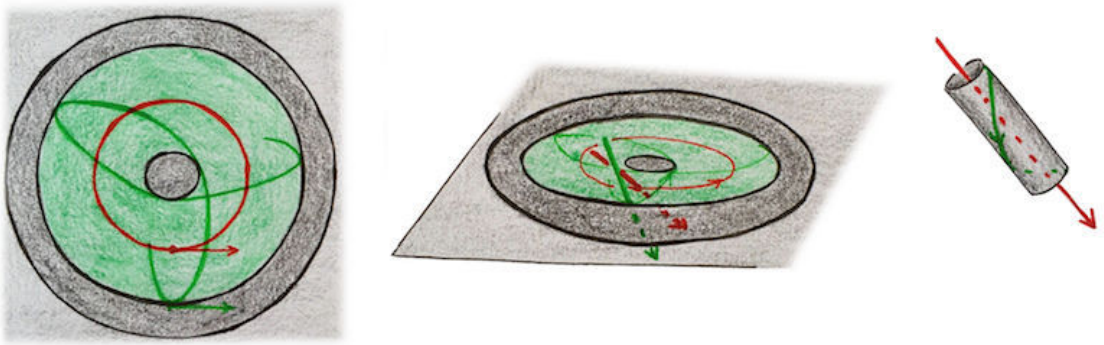


FIGURE 5.8 – Enroulement positif d'un morceau de trajectoire sur son tore invariant. À gauche, on voit qu'aux points $\operatorname{Arg} \dot{q} = 0$, le vecteur vitesse tourne plus lentement sur la trajectoire non circulaire. Au milieu, ces deux morceaux de trajectoires, plongés dans $\mathbb{R}^3$. À droite, les mêmes, avec le tore invariant.

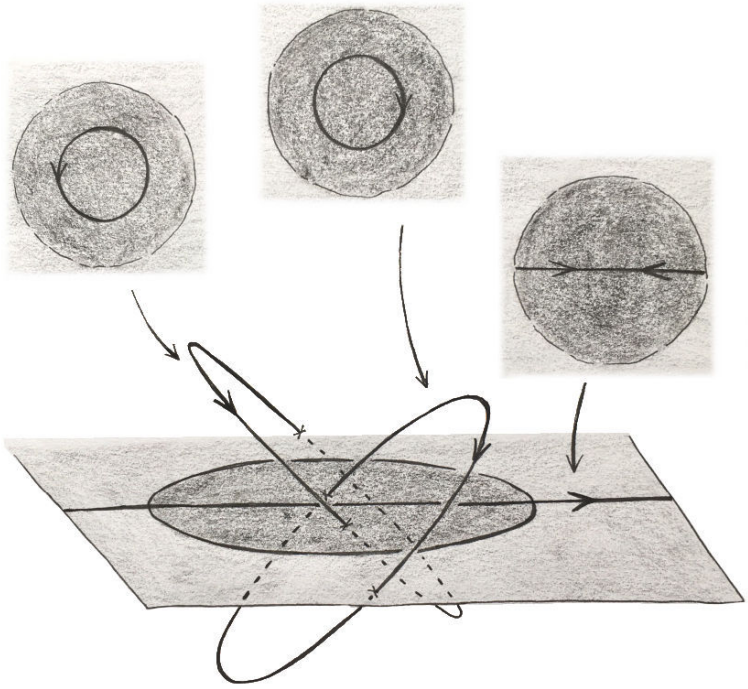


FIGURE 5.9 – Une trajectoire de moment cinétique nul, et les deux trajectoires circulaires. L'enlacement de la trajectoire de moment cinétique nul avec chacune des courbes orientées simples correspondant aux orbites circulaires est $+1$.

Ainsi, tous les couples d'orbites distinctes ont un enlacement asymptotique borné inférieurement par un réel strictement positif, ce qui implique que le système étudié est lévogyre.

Si l'on cherche une preuve qui soit moins visuelle et plus « écrite », une autre approche possible est suggérée par l'existence d'une section de Birkhoff. En effet, pour chaque énergie fixée, le disque $\{(q, \dot{q})\ ;\ \Im(q) = 0, \Im(\dot{q}) \geq 0\}$ est une section de Birkhoff bordée par la trajectoire horizontale de moment cinétique nul. Peut-on lire dans la dynamique de l'application de premier retour sur cette surface le caractère lévogyre du flot ? Cette question a constitué une motivation aux notions développées au chapitre 7. On laissera le lecteur s'assurer que les outils présentés au chapitre 7 permettent bien une autre démonstration du caractère lévogyre du flot.

Chapitre 6

Calcul numérique d'enlacements

Ce chapitre est dédié à l'exploration numérique de l'enlacement dans le problème à trois corps restreint, plan, circulaire, pour différents rapports de masses et différentes énergies. Il présente un travail effectué en collaboration avec Bruno Sévennec, à partir d'une idée de Pierre Dehornoy – qu'il en soit remercié.

Rappelons que le problème à trois corps restreint, circulaire et plan est entièrement décrit, dans le repère tournant, par l'équation suivante :

$$\ddot{q} = q - 2i\dot{q} - \frac{1-\mu}{|q+\mu|^3}\,(q+\mu) - \frac{\mu}{|q-1+\mu|^3}(q-1+\mu), \tag{6.1}$$

où $q \in \mathbb{R}^2$ est la position du petit corps (de masse négligeable) dans le plan, et μ la distribution de masses entre les deux primaires [a]. Rappelons aussi que ce système est hamiltonien, que la quantité conservée est l'énergie

$$\begin{aligned} J &= |\dot{q}|^2 - |q|^2 + 2\left(-\frac{1-\mu}{|q+\mu|} - \frac{\mu}{|q-(1-\mu)|}\right) \\ &= |\dot{q}|^2 + 2V, \end{aligned}$$

et qu'en-dessous de la première valeur critique de l'énergie, les composantes connexes bornées des niveaux d'énergie sont difféomorphes, après régularisation des collisions, à $\mathbb{R}P^3$. On s'intéressera dans toute la suite au flot dans la composante bornée contenant la primaire de masse $1-\mu$. Comme cela sera démontré à la fin du chapitre 7, pour des valeurs assez petites de J et μ, le flot sur cette composante connexe est lévogyre.

Afin d'explorer numériquement le domaine des couples (rapport des masses, énergie) pour lesquels le flot reste lévogyre, nous avons calculé numériquement l'enlacement deux à deux d'orbites du flot, pour différentes valeurs de μ et sur des niveaux d'énergie en-dessous du premier point de Lagrange. La suite présente, dans l'ordre : la description détaillée de la formule utilisée pour calculer numériquement l'enlacement, le programme Matlab, quelques commentaires sur la pertinence de résultats, et les résultats.

a. L'une, de masse $1-\mu$, se trouve en position $(0,-\mu)$ et l'autre, de masse μ, en position $(0,1-\mu)$. Voir page 53 pour la présentation du problème à trois corps restreint.

6.1 Une formule pour calculer l'enlacement

Soient $\gamma = (q, \dot{q})$ et $\gamma' = (q', \dot{q}')$ deux trajectoires fermées[b] génériques – ce terme sera précisé plus bas – dans la composante connexe autour du corps de masse $(1-\mu)$. Leur enlacement est donné par la formule

$$\begin{aligned}\mathrm{Enl}(\gamma,\gamma') = & -\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}_t=0} \eta(q_t)\,\mathrm{Ind}_{q_t}(q') \quad -\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}'_t=0} \eta(q'_t)\,\mathrm{Ind}_{q'_t}(q) \\ & + \sum_{q_t=q'_t,\ (\theta_t,\theta'_t,0)=1} \mathbb{1}\{(\dot{q}_t,\dot{q}'_t) \text{ directe}\} - \mathbb{1}\{(\dot{q}_t,\dot{q}'_t) \text{ indirecte}\} \\ & + \frac{1}{2}\ \mathrm{ind}_{-\mu}(q).\,\mathrm{ind}_{-\mu}(q'), \end{aligned} \tag{6.2}$$

dont les termes sont explicités plus bas. Cette formule s'obtient en plongeant le niveau d'énergie – avant régularisation, donc non compact – dans $\mathbb{R}^3$, et en y calculant l'enlacement. Comme le niveau d'énergie est d'homologie non nulle, l'enlacement ainsi obtenu dépend du plongement choisi, d'où la présence du dernier terme, qui est un terme correctif.

Plus précisément, il y a plusieurs manières de plonger le niveau d'énergie dans des 3-variétés d'homologie nulle – ou d'homologie rationnelle nulle. L'une d'entre elles est donnée par la régularisation de Levi-Civita, qui induit un plongement dans une variété difféomorphe à $\mathbb{R}P^3$. C'est ce plongement qui donne le flot qu'on suspecte être lévogyre, donc dont on voudrait calculer l'enlacement. Mais l'absence de formule explicite pour cette variété projective rend le calcul effectif de l'enlacement compliqué ; on préfère donc un autre plongement, dans $\mathbb{R}^3$ cette fois-ci. L'enlacement y est facile à calculer, mais il faut ajouter des termes correctifs pour qu'il corresponde à l'enlacement dans $\mathbb{R}P^3$.

6.1.1 Enlacement dans une variété d'homologie non nulle

À cause des collisions, la composante C_ε du niveau d'énergie $\{J = -1/\varepsilon^2\}$ est d'homologie non nulle ; plus précisément, elle est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, d'homologie $\mathbb{Z}$. L'enlacement de deux lacets étant défini comme le nombre d'intersections du premier avec une surface bordée par le second, cela n'a a priori pas de sens de parler de l'enlacement de deux lacets qui ne bordent pas. Dans notre cas, cette impossibilité concerne toutes les trajectoires qui tournent autour de la primaire. Une manière de définir quand même l'enlacement, c'est en plongeant C_ε dans une variété où l'enlacement est défini, par exemple $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{R}P^3$. L'application qu'on obtient dépend du plongement choisi, mais elle vérifie toujours les propriétés suivantes :

1. elle est bilinéaire et symétrique sur les couples de cycles disjoints ;
2. elle correspond, si l'orientation est préservée, à l'enlacement classique là où celui-ci est défini (c'est-à-dire dès qu'un des deux lacets borde) ;
3. elle est invariante par homotopie dans $C_\varepsilon \times C_\varepsilon - \mathrm{diag}$, c'est-à-dire quand les deux lacets se déforment sans se croiser.

De plus, on sait comment se comporte une telle application par homotopie dans $C_\varepsilon \times C_\varepsilon$ tout entier : quand on croise la diagonale, c'est-à-dire quand un brin passe au-dessus de l'autre, elle saute de plus ou moins 1, et le signe du saut ne dépend pas du plongement. En effet, il ne dépend que de la configuration locale du croisement (et non des lacets dans leur globalité) ; or tout croisement peut être

b. L'enlacement asymptotique défini par Arnold se calcule en refermant les trajectoires par un segment au bout d'un temps T qu'on fait tendre vers l'infini.

réalisé avec des lacets homotopiquement nuls, pour lesquels le saut lors du croisement est déterminé (cf le point 2).

Ainsi, deux plongements directs de C_ε dans des sphères d'homologie (éventuellement rationnelle) orientées induisent des applications d'enlacement qui sont égales si elles coïncident sur un couple de générateurs de l'homotopie.

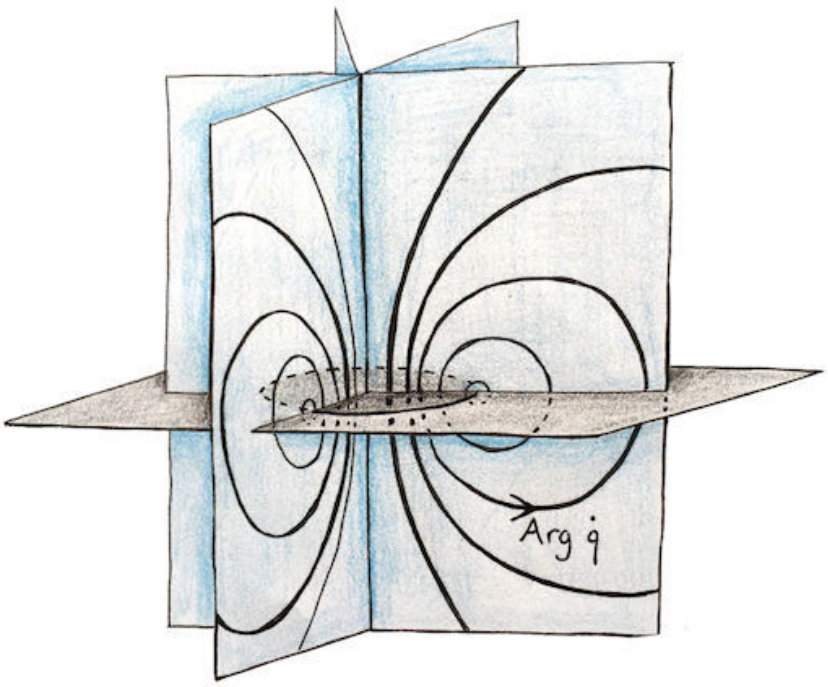
6.1.2 Plongements dans $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{R}^3$

Dans notre cas, le plongement naturel est le plongement de C_ε dans la variété difféomorphe à $\mathbb{R}P^3$ donné par la régularisation de Levi-Civita, qui nous donne pour μ assez proche de 0 un flot lévogyre sur $\mathbb{S}^3$. Nommons Enl_1 l'application d'enlacement correspondant à ce plongement :

$$\mathrm{Enl}_1(\gamma, \zeta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Enl}_{\mathbb{S}^3}(\Phi^{-1}(\gamma), \Phi^{-1}(\zeta)),$$

où $\Phi : \mathbb{S}^3 \to C_\varepsilon$ est l'application de Levi-Civita [c].

Pour calculer explicitement l'enlacement, on plongera la variété C_ε dans $\mathbb{R}^3$, et on vérifiera que l'application d'enlacement obtenue coïncide bien avec Enl_1. Rappelons qu'un élément de C_ε est un couple $(q, \dot{q})$ où q est dans la région de Hill $\{V(q) < -1/\varepsilon^2\}$ et où la norme de $\dot{q}$ est fixée par q. On peut alors voir C_ε comme un fibré en cercles au-dessus d'un disque épointé où on écrase les fibres au bord [d]. Cette manière de considérer la variété C_ε invite à la plonger dans $\mathbb{R}^3$ comme décrit dans la figure 5.6, qu'on reproduit ci-dessous.



c. Le facteur $\frac{1}{2}$ provient du fait que Φ est un revêtement double. En effet, pour une paire de lacets qui bordent dans C_ε, les lacets correspondants dans $\mathbb{S}^3$ auront un enlacement double : au-dessus de chaque point d'intersection dans C_ε, il y a deux points d'intersection dans $\mathbb{S}^3$.

d. Le disque épointé est la région de Hill $\{V(q) \leq -1/\varepsilon^2\}$ (ou plus exactement la composante connexe dans laquelle on se trouve) ; pour chaque point dans la région le module de la vitesse est fixé, on a donc un cercle de vitesses possibles, sauf au bord où la vitesse est nulle.

Nommons ψ ce plongement, et considérons l'application d'enlacement Enl_2 définie à l'aide de ψ comme suit :

$$\mathrm{Enl}_2(\gamma,\zeta) = \mathrm{Enl}_{\mathbb{R}^3}(\psi(\gamma),\psi(\zeta)) + \frac{1}{2}\,[\gamma].[\zeta],$$

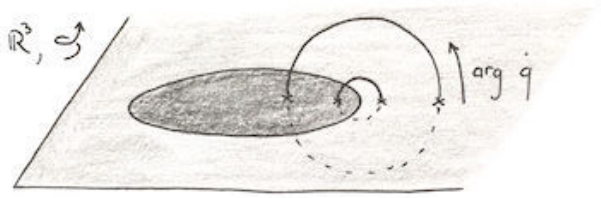
où $[\gamma]$ est la classe d'homologie dans C_ε de γ.

Coïncidence des deux applications d'enlacement. Il y a deux points à vérifier pour s'assurer que les deux applications d'enlacement Enl_1 et Enl_2 coïncident bien : d'abord, qu'elles préservent toutes les deux l'orientation, et donc qu'elles coïncident sur les couples de petits lacets de Hopf qui bordent ; ensuite, qu'elles sont égales sur un couple de générateurs de l'homologie. On remarquera qu'il suffit de le vérifier dans le cas $\mu = 0$. Commençons par l'orientation.

— *Orientation de C_ε.* On considère l'orientation de $\mathbb{R}^4$ donnée par la structure symplectique, c'est-à-dire telle que (q_1,p_1,q_2,p_2) soit un système de coordonnées direct. On définit ensuite une base directe de C_ε comme une base $\mathbf{e}$ telle que $(\nabla H,\mathbf{e})$ soit une base directe de $\mathbb{R}^4$. On rappelle que

$$\nabla H(q_1,p_1,q_2,p_2) = \left(-p_2 - \frac{q_1}{|q|^3}\ ,\ q_2+p_1\ ,\ p_1 - \frac{q_2}{|q|^3}\ ,\ -q_1+p_2\right).$$

— *Plongement dans $\mathbb{R}^3$.* Considérons maintenant l'image de C_ε par son plongement dans $\mathbb{R}^3$. Dans un voisinage de l'ensemble $\{\dot q_2 = 0, \dot q_1 > 0\}$ – c'est-à-dire, de la « région de Hill » sur le plan $\{z=0\}$ – une base directe est donnée par les coordonnées $(q_1,q_2,-\dot q_2)$.



Ainsi, le plongement est direct : en effet, en se rappelant que $\dot q_2 = p_2 - q_1$, on voit que les coordonnées $(\nabla H, q_1, q_2, -\dot q_2)$ définissent une base directe si $(q_1,\nabla H,q_2,p_2)$ forme un système de coordonnées direct. Ceci est vérifié car

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 + q_2 = \dot q_1 > 0.$$

— *Plongement dans $\mathbb{S}^3$.* La régularisation de Levi-Civita $\Phi : \mathbb{S}^3 \to C_\varepsilon$ est une transformation symplectique qui envoie la forme symplectique ω sur $\Phi^*\omega = \frac{4}{\varepsilon}(dz\wedge dw)$, donc Φ est directe lorsqu'on munit $\mathbb{S}^3$ de l'orientation induite par la structure symplectique, c'est-à-dire telle que (z_1,w_1,z_2,w_2) soit un système de coordonnées direct de $\mathbb{R}^4$. Enfin, le dernier changement de coordonnées qu'on applique dans $\mathbb{S}^3$ afin de simplifier les équations est une transformation indirecte. En effet, il s'agit de la transformation

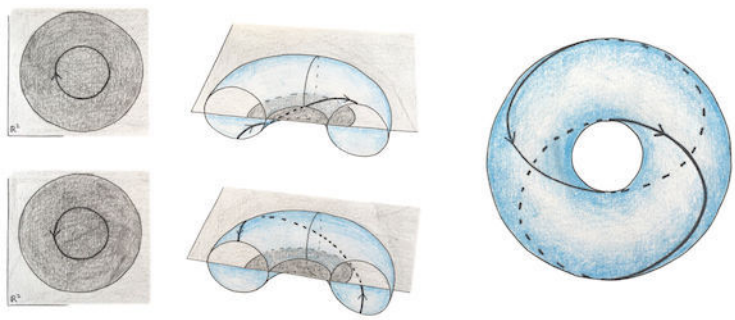
$$\begin{aligned}\xi_1 &= w + iz\\ \xi_2 &= w - iz,\end{aligned}$$

qui est $\mathbb{C}$-linéaire dans les coordonnées $(\xi_1,\bar\xi_2)$. Pour obtenir un plongement direct de C_ε dans $\mathbb{S}^3$, (ξ_1,ξ_2), il faut donc munir $\mathbb{S}^3$ de l'orientation complexe [e].

e. L'orientation complexe de $\mathbb{S}^3$, (z_1,z_2) correspond à l'orientation sur $\mathbb{R}^4$ qui rend direct le système de coordonnées $(\mathrm{Re}\,z_1, \mathrm{Im}\,z_1, \mathrm{Re}\,z_2, \mathrm{Im}\,z_2)$.

On a donc nos deux plongements directs. Maintenant, vérifions que l'enlacement de deux générateurs de l'homologie est bien défini. On se place dans le cas $\mu = 0$, c'est-à-dire dans le problème à deux corps vu dans un repère tournant, et on considère les deux orbites circulaires de la composante connexe d'un niveau d'énergie en-dessous de la première valeur critique.

— Dans $\mathbb{R}^3$, l'image des deux orbites circulaires du niveau d'énergie (l'une prograde, l'autre rétrograde) s'enlacent positivement une fois, comme on l'a vu au chapitre présente à l'aide de la figure 5.7, que nous reproduisons ici.



Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Enl}_2(\gamma,\zeta) &= \mathrm{Enl}_{\mathbb{R}^3}(\psi(\gamma),\psi(\zeta)) + \frac{1}{2}\,[\gamma].[\zeta] \\ &= 1 - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

— Dans $\mathbb{S}^3$ muni des coordonnées ξ_1, ξ_2 définies plus haut, les équations des orbites circulaires s'écrivent :

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= r_1 e^{i\alpha_1(t)} \quad ; \quad \xi_2 = 0 \\ \xi_1 = 0 \quad &; \quad \xi_2(t) = r_2 e^{i\alpha_2(t)},\end{aligned}$$

où α_1, α_2 sont, pour ε assez petit, des fonctions croissantes. Ainsi les orbites circulaires correspondent à des grands cercles de $\mathbb{S}^3$ parcourus de sorte qu'ils s'enlacent positivement, et on a

$$\mathrm{Enl}_1(\gamma,\zeta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Enl}_{\mathbb{S}^3}(\Phi^{-1}(\gamma),\Phi^{-1}(\zeta)) = \frac{1}{2}.$$

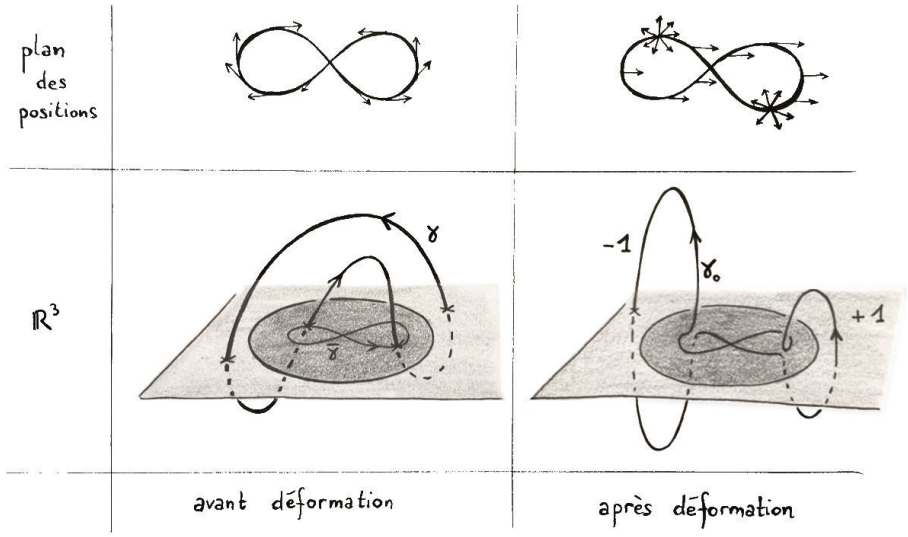
Ainsi, il y a coïncidence des applications d'enlacement Enl_1 et Enl_2.

6.1.3 Calcul effectif de l'enlacement

Reste à calculer explicitement l'enlacement Enl_2 de deux trajectoires $(q, \dot{q})$ et $(q', \dot{q}')$ refermées par un segment. On supposera dans toute la suite que les trajectoires ne s'intersectent pas en un point où l'argument de la vitesse s'annule pour l'une ou l'autre des trajectoires, ce qui est génériquement vrai. Pour le terme $\mathrm{Enl}_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit de l'enlacement standard dans $\mathbb{R}^3$ des courbes $(q, \theta = \operatorname{Arg} \dot{q})$ définies à partir des trajectoires $(q, \dot{q})$ (cf figure 5.6, reproduite page 91). Les formules habituelles pour calculer l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$ utilisent les coordonnées cartésiennes ; notre but est d'exprimer l'enlacement

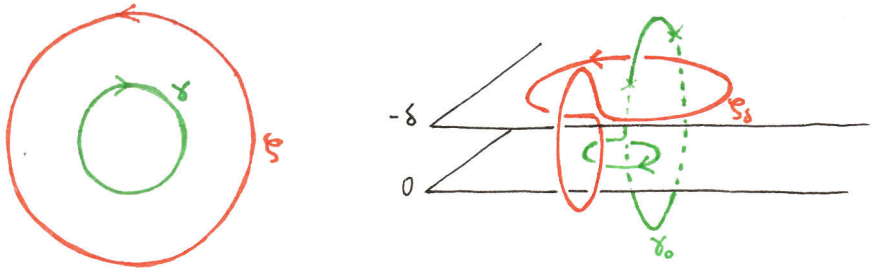
dans les coordonnées (q, θ). Pour cela, on se ramène par déformation à des courbes particulières, dont l'enlacement est très simple à calculer.

Soit $\gamma = (q, \theta) = (q, \operatorname{Arg} \dot{q})$ une courbe dans $\mathbb{R}^3$, et $\overline{\gamma} = (q, 0)$ sa projection dans la région de Hill. On peut promener chaque point (q_t, θ_t) dans le sens trigonométrique le long de sa fibre jusqu'à $(q_t, 0)$; cela donne une déformation continue, sauf en les points qui sont déjà de la forme $(q_t, 0)$, c'est-à-dire les points de la trajectoire où la vitesse pointe vers l'est. Pour rendre la déformation continue en ces points, il faut rajouter une fibre orientée positivement ou négativement selon que la trajectoire tourne localement vers la gauche ou vers la droite, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Cela nous donne une courbe γ_0, qui est l'union de $\overline{\gamma}$ et de fibres signées. On déforme de même une deuxième courbe $\zeta = (q', \theta')$ en ζ_δ, qui est l'union de la projection de ζ sur la région de Hill translatée verticalement d'une hauteur δ – où δ est un réel positif arbitrairement petit – et d'une fibre signée pour chaque point $\operatorname{Arg} \dot{q}'_t = -\delta$. L'enlacement de γ et ζ se décompose en deux termes : l'enlacement de γ_0 et de ζ_δ, et les modifications de l'enlacement qui se produisent au cours de la déformation chaque fois que les courbes s'intersectent.

Le premier terme est très simple : on sait que les parties projetées ne s'enlacent pas, et que deux fibres disjointes ne s'enlacent pas non plus. Or, les courbes que nous serons amenés à considérer sont des trajectoires, leurs fibres sont donc deux à deux disjointes. Il suffit donc de calculer l'enlacement de chaque fibre avec la projection de l'autre courbe. Commençons par calculer, pour chaque fibre de γ_0, son enlacement avec la projection $\overline{\zeta}$. Cela revient à multiplier le signe $\eta(q_t)$ de la fibre au-dessus d'un point q_t par l'opposé de l'indice de q' par rapport à q_t. Voir la figure ci-dessous pour se convaincre des signes. Par hypothèse, les courbes q et q' ne s'intersectent pas en un point $q_t = q'_t$ où $\operatorname{Arg} \dot{q}_t = 0$, donc q_t n'est pas sur la courbe q', et l'indice $\operatorname{Ind}_{q_t} q'$ est bien défini.



On ajoute symétriquement l'enlacement des fibres de ζ_δ avec $\overline{\gamma}$, ce qui nous donne le premier terme :

$$-\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}_t=0}\eta(q_t)\operatorname{Ind}_{q_t}(q')-\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}'_t=-\delta}\eta(q'_t)\operatorname{Ind}_{q'_t}(q),$$

où $\operatorname{Ind}_{q_t}(q')$ est l'indice de la courbe q' par rapport au point q_t. Comme δ est arbitrairement petit, ce terme est égal à

$$-\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}_t=0}\eta(q_t)\operatorname{Ind}_{q_t}(q')-\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}'_t=0}\eta(q'_t)\operatorname{Ind}_{q'_t}(q).$$

Pour le second terme de $\operatorname{Enl}_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit de compter toutes les intersections qui ont lieu pendant la déformation, et de déterminer pour chacune d'elles si elle modifie l'enlacement de $+1$ ou de -1. Lors de la déformation de γ en γ_0, le point (q_t,θ_t) rencontre ζ en se promenant sur sa fibre si ζ passe par cette fibre en un angle θ'_t tel que $(0,\theta_t,\theta'_t)$ soient dans l'ordre trigonométrique. On compte alors un croisement positif si l'intersection de q et q' est directe comme dans la figure 6.1, et un croisement négatif sinon.

FIGURE 6.1 – L'enlacement de γ et ζ est le nombre d'intersections signées entre ζ et une surface bordée par γ. Quand les courbes projetées s'intersectent en un croisement direct, et que ζ est « après » γ sur la fibre, la déformation de γ le long des fibres fait disparaître une intersection positive ou apparaître une intersection négative. Dans tous les cas elle diminue de un le nombre l'enlacement des deux courbes ; on compte donc une intersection positive.

La déformation de ζ ne modifie pas l'enlacement : chaque point de ζ se déplace le long de la fibre jusqu'à $-\delta$, elle ne rencontre donc pas γ_0 qui vit dans la section $\theta=0$, sauf en les points où $q_t=q'_t$ et $-\delta<\theta'_t<0$, qu'on peut supprimer en diminuant δ. Finalement, en notant $(0,\alpha,\beta)=1$ si les trois angles sont en ordre trigonométrique et 0 sinon, on a la formule suivante pour l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$ de deux courbes γ et ζ :

$$\begin{aligned}\operatorname{Enl}_{\mathbb{R}^3}(\gamma,\zeta)=&-\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}_t=0}\eta(q_t)\operatorname{Ind}_{q_t}(q')-\sum_{\operatorname{Arg}\dot{q}'_t=0}\eta(q'_t)\operatorname{Ind}_{q'_t}(q)\\&+\sum_{q_t=q'_t,\ (\theta_t,\theta'_t,0)=1}\mathbb{1}\{(\dot{q}_t,\dot{q}'_t)\text{ directe}\}-\mathbb{1}\{(\dot{q}_t,\dot{q}'_t)\text{ indirecte}\}.\end{aligned}$$

Enfin, pour le terme correctif de Enl_2, il suffit de remarquer que la classe d'homologie de la courbe $(q,\dot{q})$ n'est autre que l'indice par rapport à $-\mu$ de la courbe q. En mettant tout cela bout à bout, on obtient la formule suivante pour l'enlacement de deux trajectoires $(q,\dot{q})$ et $(q',\dot{q}')$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Enl}_2 = &- \sum_{\mathrm{Arg}\,\dot q_t=0} \eta(q_t)\,\mathrm{Ind}_{q_t}(q') \quad - \sum_{\mathrm{Arg}\,\dot q'_t=0} \eta(q'_t)\,\mathrm{Ind}_{q'_t}(q) \\ &+ \sum_{q_t=q'_t,\ (\theta_t,\theta'_t,0)=1} \mathbb{1}\{(\dot q_t,\dot q'_t)\text{ directe}\} - \mathbb{1}\{(\dot q_t,\dot q'_t)\text{ indirecte}\} \\ &+ \frac{1}{2}\ \mathrm{ind}_{-\mu}(q).\,\mathrm{ind}_{-\mu}(q').\end{aligned}$$

6.1.4 Une deuxième formule

Afin de visualiser les orbites du flot, on peut déformer le plongement dans $\mathbb{R}^3$ privé d'une droite – décrit ci-dessus – en un plongement dans un tore solide de $\mathbb{R}^3$. Cette déformation envoie les cercles du plan $\{\mathrm{Arg}(q) = c\}$ sur des cercles de rayon $r \in [0, \pi/4]$ emboîtés les uns dans les autres, jusqu'à q_c le point d'argument c du bord de la région de Hill. Le plongement obtenu s'écrit aisément dans les coordonnées $(q, \dot q)$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}\times\mathbb{R} \\ &(q,\dot q) \mapsto \left(\frac{q}{|q|}\left(1 - \frac{\arctan|\dot q|}{2}\ \cos(\mathrm{Arg}\,\dot q)\right), -\frac{\arctan|\dot q|}{2}\ \sin(\mathrm{Arg}\,\dot q)\right).\end{aligned}$$

Cette déformation préserve l'enlacement ; on a donc une deuxième manière de calculer Enl_2, par la méthode « classique » dans $\mathbb{R}^3$: en projetant les courbes selon la coordonnée z et en comptant, à chaque fois que la première courbe passe au-dessus de la seconde, $+1$ si le croisement est direct et -1 sinon.

Notons tout de même que, si cette méthode a le mérite d'être simple et visuelle, elle n'a rien à voir avec la dynamique. En particulier, contrairement à la méthode précédente où la projection se fait, le long des cercles $\{q = \text{cste}\}$, sur les véritables trajectoires dans le plan des positions, ici rien ne nous assure que la projection des trajectoires est bien une immersion dans le plan, ni que les croisements sont transverses. Nous choisirons donc pour la suite la première formule, mais nous utiliserons le plongement décrit ci-dessus pour l'affichage des trajectoires.

6.2 Programmation en Matlab

6.2.1 Description du programme

Décrivons maintenant le programme Matlab implémenté pour calculer l'enlacement des trajectoires à l'aide de la première formule. Ce programme prend en entrée une valeur de μ et une valeur $j = e_1 - \delta$ de l'énergie, donnée par son écart $\delta > 0$ à la première valeur critique de l'énergie. Puis il tire au hasard N couples (position, vitesse) de conditions initiales dans le niveau d'énergie $\{J = j\}$, et intègre numériquement les trajectoires correspondantes pendant un temps T. Il referme ensuite chaque trajectoire par un segment, et calcule l'enlacement de chaque couple d'orbites selon une des deux formules présentées ci-dessus. Une fonction auxiliaire permet également d'afficher les trajectoires. Détaillons chacune de ces étapes.

Préparatifs. Étant donnée la valeur de μ, le programme calcule les positions des cinq points de Lagrange du problème et les énergies correspondantes. Pour L_1, L_2 et L_3, on utilise la méthode de Newton, tandis que L_4 et L_5 sont connus comme formant avec les primaires deux triangles équilaté-

raux. Enfin, il trace le bord $\{V = j\}$ de la région de Hill $\{V \leq j\}$. Pour ce faire, il trouve à l'aide de la méthode de Newton un point sur chaque composante connexe, et intègre à partir de ce point le champ de vecteurs bidimensionnel $\operatorname{grad} V^{\perp}$.

Choix aléatoire de trajectoires. Les trajectoires sont lancées à partir de positions et de vitesses tirées au hasard pour la mesure uniforme. En notant C_j la composante connexe de la région de Hill contenant la primaire de masse $1 - \mu$, on définit cette mesure uniforme comme suit : pour la position, la mesure uniforme sur C_j et, pour l'argument de la vitesse[f], la mesure uniforme sur le cercle. Cette mesure uniforme est exactement la mesure dite de Liouville, c'est-à-dire la mesure invariante canonique induite sur le niveau d'énergie par la forme symplectique et le hamiltonien. Voir les détails de ce point en annexe. En pratique, pour le tirage des positions, le programme détermine un rectangle contenant la composante C_j et n'intersectant pas les autres, tire un point au hasard dans ce rectangle et le garde si l'énergie potentielle correspondante est inférieure à j.

Choix du temps d'intégration. Dans un niveau d'énergie très négative, les trajectoires tournent plus rapidement autour de la primaire, et voient leurs projections en position s'enlacer beaucoup plus. Ainsi, l'unité de temps « naturelle » – celle que mettent en moyenne les trajectoires pour effectuer une révolution autour de la primaire – varie selon le niveau d'énergie. De même, la taille des calculs à effectuer – qui dépend principalement du nombre d'intersections des trajectoires projetées sur le plan des positions – devient trop importante pour des énergies très négatives et un temps d'intégration fixé. Afin que le temps d'intégration soit adapté au niveau d'énergie choisi, on détermine le taux d'enlacement moyen par unité de temps dans le niveau d'énergie, c'est-à-dire précisément l'invariant d'Arnold du champ dans le niveau d'énergie considéré. Cet invariant s'exprime ainsi :

$$\tau = \frac{1}{\pi A(C_j)^2} \int_{C_j} (U(q) - j) dq,$$

où C_j est, rappelons-le, la composante connexe de la région de Hill qui nous intéresse, et $A(C_j)$ son aire. Enfin, on choisit le temps de simulation comme un grand multiple de l'unité de temps $1/\sqrt{\tau}$. Dans notre cas, et pour des raisons de capacité machine, nous avons choisi ce multiple égal à 500, ce qui nous indique que les nombres d'enlacement qui seront effectivement calculés seront de l'ordre de 250000 :

$$T = 50 \left\lceil \frac{10}{\sqrt{\tau}} \right\rceil.$$

Simulations de trajectoires. Nous avons choisi pour le calcul des trajectoires la fonction Matlab `ode113`, qui est une méthode d'intégration adaptative permettant une grande précision de calcul. Elle prend en arguments optionnels la tolérance absolue maximale et la tolérance relative maximale, et optimise ensuite son pas, variable, pour respecter ces exigences. Ces tolérances ont été fixées à 10^{-10}. On calcule les trajectoires sur le temps T. Il arrive que les trajectoires passent trop près de la primaire, et que le programme s'arrête en cours de simulation, ou que les variations d'énergie deviennent non négligeables. Pour éviter cela, on stoppe la simulation lorsque la trajectoire passe très près de la primaire (à une distance de 10^{-7} – l'unité de distance est l'écartement des deux primaires). Dans ce cas, la trajectoire, plus courte, est tout de même conservée pour l'éventuel calcul de son enlacement avec les autres trajectoires.

f. On rappelle que, pour chaque point de sa région de Hill, il y a dans un niveau d'énergie un cercle de vitesses – le module de la vitesse étant déterminé par la position.

Vérification de la conservation de l'énergie. Pour chaque trajectoire simulée, on calcule l'énergie en chacun de ses points, et la différence avec l'énergie initiale. On s'assure ainsi que la variation de l'énergie reste négligeable – d'un ordre de grandeur variant entre 10^{-3} et 10^{-8}.

Fermeture. Comme défini par Arnold [4], l'enlacement asymptotique se calcule comme limite en $t \to +\infty$ de l'enlacement des courbes obtenues en refermant les trajectoires suivies pendant un temps t par un système de courbes ayant de bonnes propriétés. Dans les données présentées ici, on a refermé les trajectoires par un segment reliant les positions initiale et finale, et un arc de cercle reliant les vitesses initiale et finale. On pourrait raffiner la fermeture en trouvant – à l'aide de la fonction Matlab `peakfinder` – le dernier point de la trajectoire qui minimise localement la distance au premier point et tronquer la trajectoire à partir de ce point. Ce raffinement est proposé dans la fonction `fermjoli`.

Enlacement. L'enlacement est calculé successivement pour chacune des $\frac{N(N-1)}{2}$ paires de trajectoires. La formule donnant l'enlacement de deux trajectoires comprend quatre termes. Pour le calcul des deux premiers, il s'agit de repérer les points où l'argument de la vitesse s'annule, ce qu'on fait en relevant pour chaque trajectoire tous les indices k tels que les déterminations de $Arg(\dot{q}_k)$ et $Arg(\dot{q}_{k+1})$ dans $]-\pi, \pi]$, notées respectivement a_k et a_{k+1}, vérifient

$$\begin{aligned} a_k a_{k+1} &< 0 \\ |a_k - a_{k+1}| &< \pi. \end{aligned}$$

Puis on multiplie pour chacun de ces points q_k le signe de la fibre[g] – donné par le signe de $\mathrm{Arg}(\dot{q}_{k+1})$ – par l'indice par rapport à q_k de l'autre courbe. Comme les trajectoires avec lesquelles on travaille sont polygonales, l'indice d'une courbe fermée q par rapport à un point z est donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Arg}\left(\frac{q_{i+1} - z}{q_i - z}\right).$$

Le troisième terme fait intervenir les points d'intersection des deux courbes des positions dans le plan. Relever tous ces points est de loin la partie la plus lourde du calcul, quadratique en la longueur des trajectoires. Nous utilisons pour ce faire une méthode développée par Douglas Schwarz, améliorée par James Ashton [55]. Les points d'intersection ainsi trouvés ne sont comptés que si les angles $(\theta, \theta', 0)$ sont en ordre trigonométrique, où θ et θ' sont les arguments des vitesses $\dot{q}$ et $\dot{q}'$ au point d'intersection. Ceci est vérifié grâce au booléen

$$[\theta < \theta') \wedge (\theta' < 0)] \vee [(\theta' < 0) \wedge (0 < \theta)] \vee [(0 < \theta) \wedge (\theta < \theta')].$$

Si les trois angles sont en ordre trigonométrique, on compte l'intersection positivement ou négativement selon que le croisement est direct ou indirect, orientation qui est donnée par le signe de $\sin(\theta' - \theta)$. Enfin, le quatrième terme est donné par le produit des indices des courbes par rapport à la primaire. Les indices sont calculés comme expliqué précédemment. Les signes des enlacements sont affichés au fur et à mesure de leur calcul, puis les résultats sont affichés en une matrice triangulaire supérieure $N \times N$.

Affichage des trajectoires. L'interface utilisateur `visu` permet d'afficher les trajectoires en position, ainsi que les trajectoires en position et vitesse à l'aide du plongement décrit section 6.1.4, ce qui permet de visualiser le flot et la manière dont les trajectoires s'enlacent.

g. On rappelle que le signe d'une fibre est défini section 6.1, paragraphe **Calcul effectif de l'enlacement**.

6.2.2 Commentaires sur la pertinence des résultats

Les erreurs d'intégration. La fonction Matlab `ode113` prend en arguments optionnels la tolérance absolue et la tolérance relative, que nous avons toutes les deux fixées à 10^{-9} et 10^{-10}, respectivement. Cette valeur a été choisie de manière à satisfaire la faible variation en énergie présentée ci-dessous et éviter l'accumulation d'erreurs d'arrondi due au trop grand nombre de pas intermédiaires. Les erreurs d'intégration sont assez petites pour ne pas influer sur le signe des enlacements calculés. Ceci a été vérifié en modifiant la tolérance – pour un même ensemble de conditions initiales – et en vérifiant que l'enlacement des trajectoires ainsi calculées différait peu.

La conservation de l'énergie. On calcule pour chaque trajectoire la variation maximale d'énergie au cours du temps. On observe en général une variation de l'ordre d'un cent millième de la valeur de l'énergie, ce qui induit des variations en position ou vitesse de l'ordre d'un cent millième de l'unité courante, et n'influe pas sur le calcul de l'enlacement. Il arrive qu'on constate des écarts d'énergie plus grands, de l'ordre du millième, pour des trajectoires passant très près de la primaire.

Le temps d'intégration. Pour obtenir l'enlacement asymptotique de deux trajectoires, il faudrait faire tendre le temps d'intégration T vers l'infini. Pour des raisons de capacité machine, nous avons choisi un temps T dépendant du niveau d'énergie, de l'ordre de 500 fois l'unité de temps $1/\sqrt{\tau}$, où τ est le taux d'enlacement du niveau d'énergie. Les nombres d'enlacement calculés en pratique sont de l'ordre de 250000. Des temps d'intégration plus longs ont été testés pour quelques couples de trajectoires (jusqu'à $T = 10000$) sans modification significative du nombre d'enlacement par unité de temps au carré.

La généricité des trajectoires. Les trajectoires testées sont certes en nombre fini, mais comme elles sont tirées au hasard pour la mesure de Liouville, on peut espérer qu'elles couvrent tous les comportements génériques – pour toutes les mesures invariantes apparaissant dans la décomposition ergodique de la mesure de Liouville. Petit bémol : les trajectoires passant très près de la primaire sont interrompues ; cela représente environ 8% des trajectoires (7% des trajectoires s'arrêtent avant la moitié du temps imparti ; $3,5\%$ s'arrêtent avant un dixième du temps imparti) [h]. Pour éviter ce problème, il faudrait calculer l'enlacement directement dans le flot régularisé, ce qui nécessiterait d'avoir une équation explicite de la variété (difféomorphe à $\mathbb{S}^3$) sur laquelle évolue ce flot régularisé. Ceci constitue une piste d'amélioration de cette expérience numérique.

6.2.3 Affichage de trajectoires

Les images des figures 6.2, 6.3 et 6.4 permettent de visualiser les trajectoires du problème à trois corps restreint, plan, circulaire, à la fois dans le plan des positions et en trois dimensions, à l'aide du plongement décrit section 6.1.4.

Remarque 6.2.1. Les trajectoires affichées correspondent à des mesures invariantes bien distinctes – en particulier, elles ne sont pas denses et occupent bien différents endroits de l'espace, ce qui contribue à la valeur de l'expérience numérique.

Remarque 6.2.2. Les trajectoires semblent rester sur des tores invariants, comme si le système était intégrable. En regardant de plus près, on peut néanmoins trouver des indices de non-intégrabilité. La figure 6.5 présente la dynamique calculée numériquement sur la transversale (pas globale, ni bordée par une orbite périodique) $\{q \in \mathbb{R}, q < -\mu, \operatorname{Arg} \dot{q} \in [0, \pi]\}$, sur laquelle l'application de premier

h. Proportion calculée sur un total de 6803 trajectoires, pour des paramètres (μ, δ) différents.

retour présente des petits îlots elliptiques et des zones qui semblent être chaotiques. Le système semble tout de même conserver un grand nombre de tores invariants même pour des énergies proches de la première valeur critique, c'est-à-dire pour des instances du problème à trois corps très éloignées du problème intégrable, bien au-delà du domaine d'application du théorème KAM.

6.2.4 Résultats numériques

Les enlacements calculés pour différentes valeurs de μ balayant l'intervalle $[0, 1]$ et pour différentes valeurs de $J = e_1 - \delta$ en-dessous de la première valeur critique e_1 (celle du premier point de Lagrange) sont *tous positifs*. Les données numériques sont regroupées sous forme de tableau dans l'annexe I, ainsi que dans les graphiques ci-dessous. Pour chaque choix de paramètres, on a calculé l'enlacement deux à deux de $N = 20$ à 40 trajectoires tirées au hasard et lancées pendant un temps T variant de 300 à 1000 selon le niveau d'énergie.

Rappelons le théorème 5.2.5, qui dit en particulier que pour qu'un flot soit lévogyre, il faut et il suffit que l'enlacement asymptotique de tous ses couples d'orbites soit strictement positif. Ainsi, les résultats numériques obtenus semblent indiquer que tous les couples de mesures invariantes qui apparaissent dans la décomposition ergodique de la mesure de Liouville s'enlacent positivement, ce qui corrobore la conjecture suivante.

Conjecture 6.2.3. *Pour toutes les valeurs de $\mu \in [0, 1]$, le problème à trois corps restreint, circulaire et plan de rapport de masse μ est lévogyre en-dessous du premier point de Lagrange.*

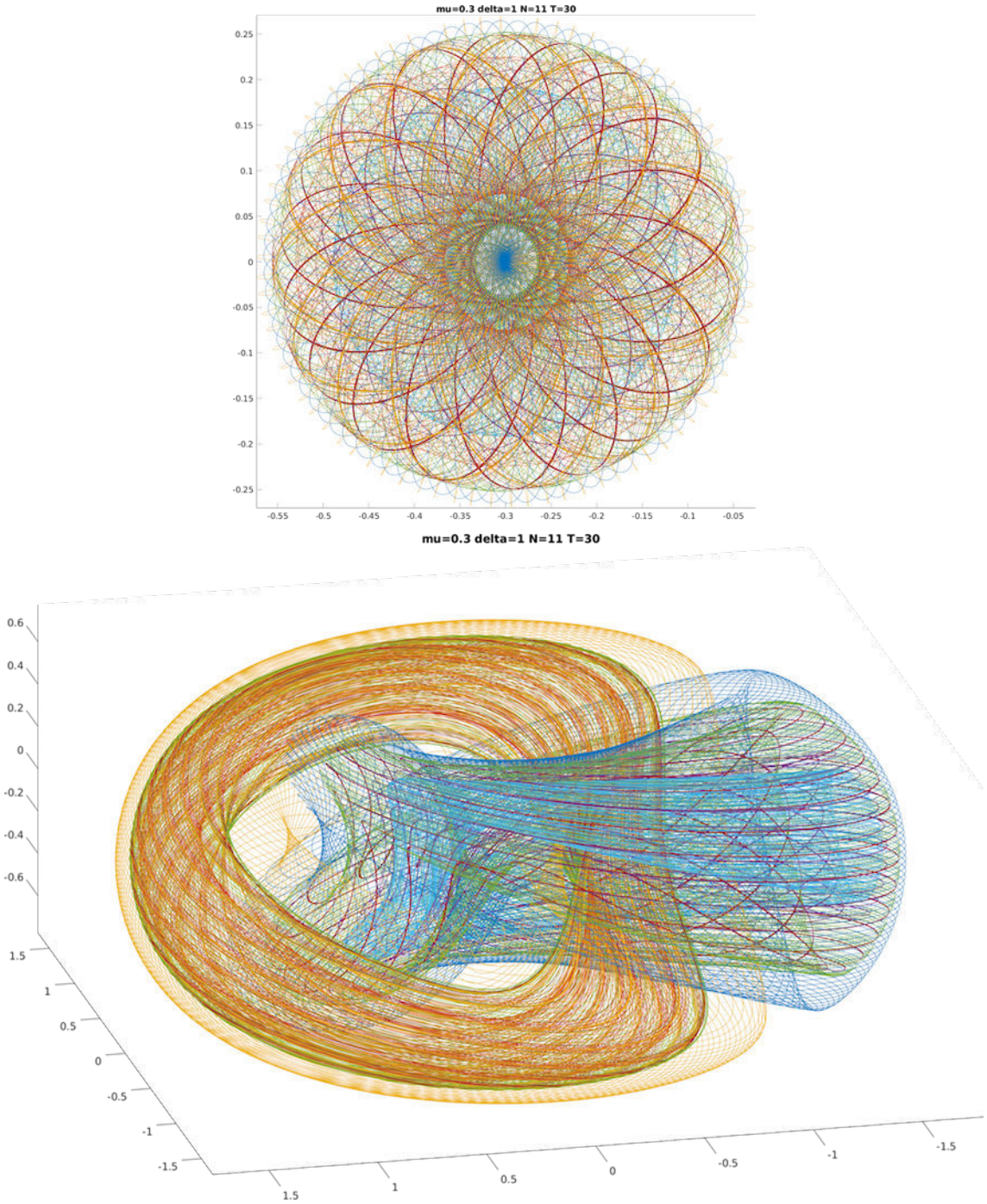
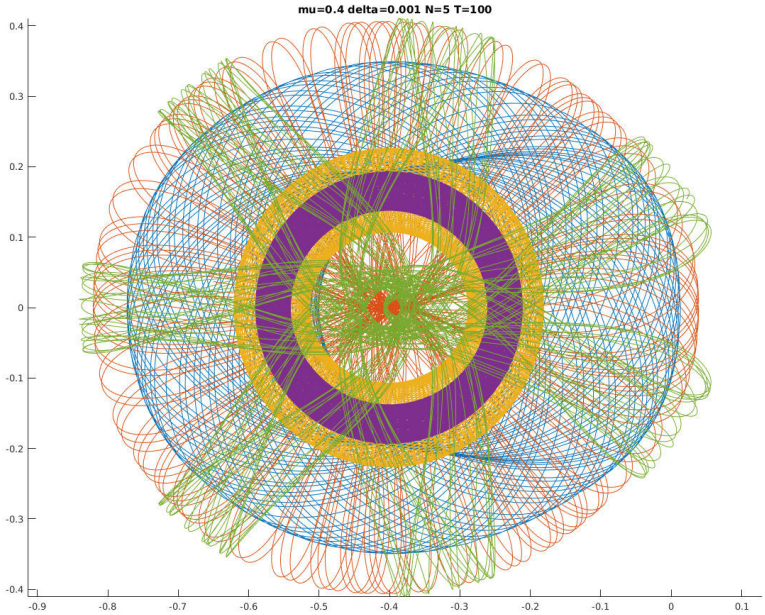


FIGURE 6.2 – Vingt trajectoires pendant un temps $T = 300$, pour les paramètres $\mu = 0.3, \delta = 1$.



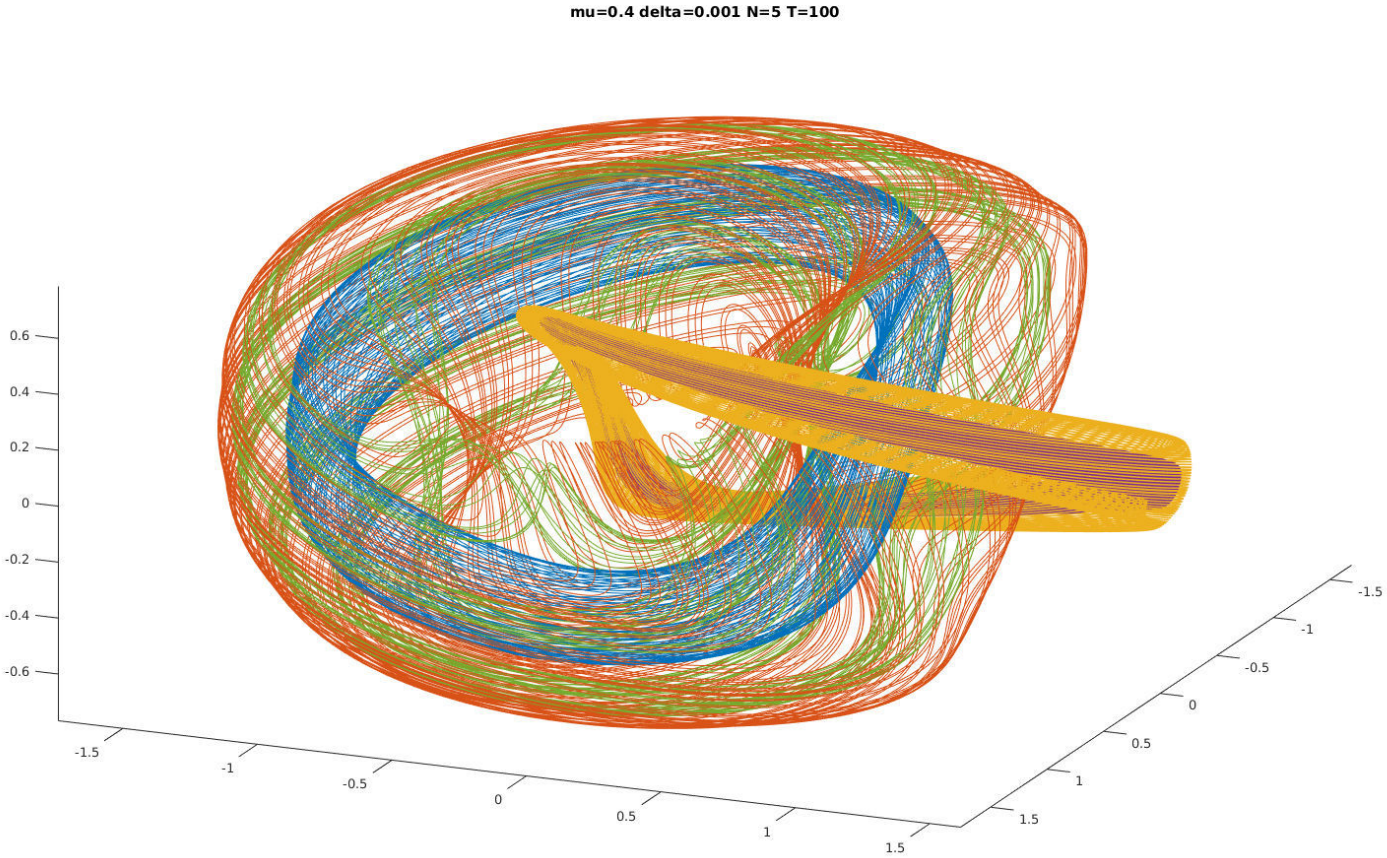


FIGURE 6.3 – Cinq trajectoires pendant un temps $T = 100$, pour les paramètres $\mu = 0.4, \delta : 0.001$.

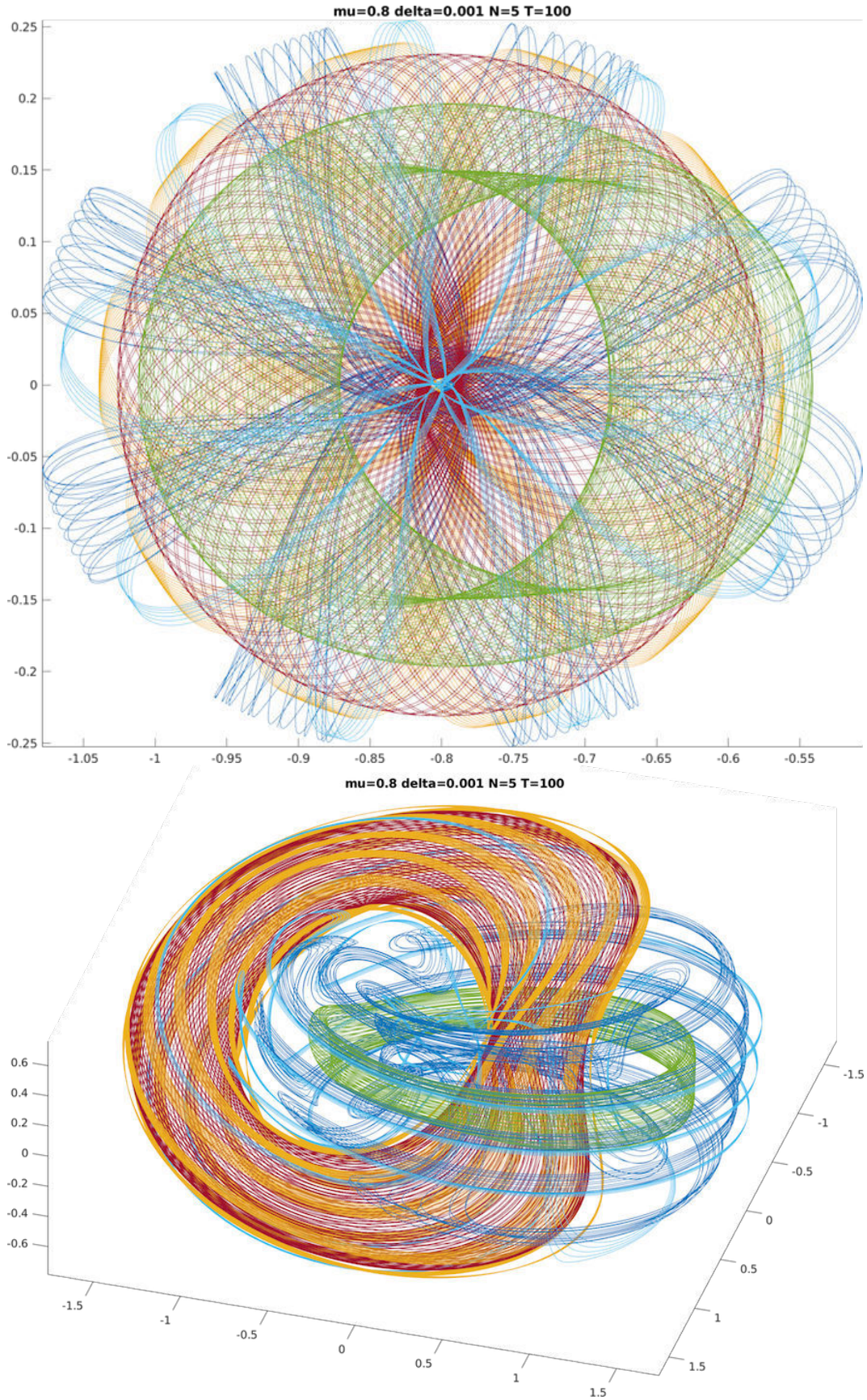


FIGURE 6.4 – Dix trajectoires pendant un temps $T = 500$, pour les paramètres $\mu = 0.8, \delta : 0.001$.

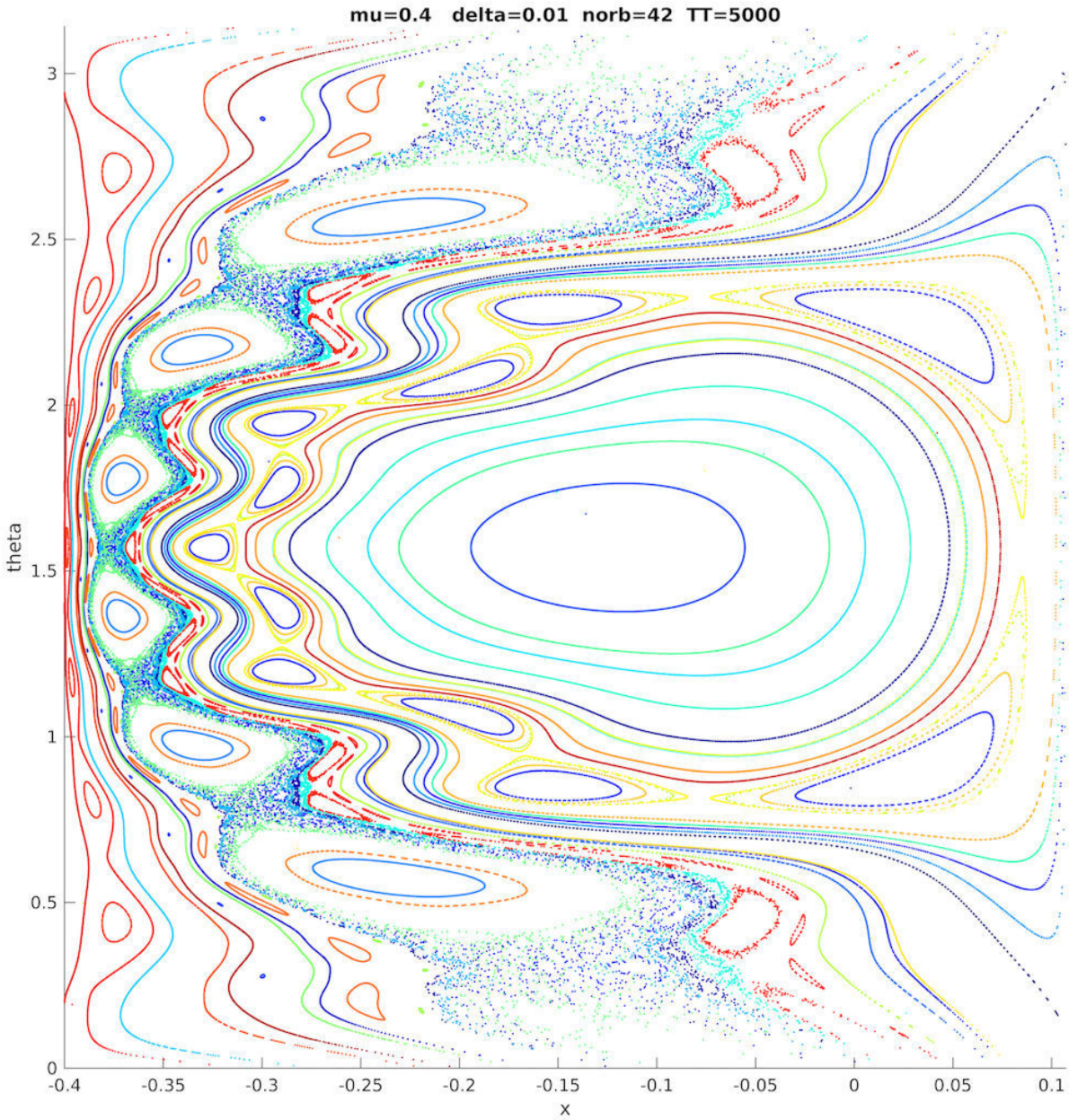


FIGURE 6.5 – Intersections de 42 orbites avec la section {position : à droite de la primaire, vitesse : vers le haut}. Paramètres : $\mu = 0.4, \delta = 0.01$; temps d'intégration : $T = 5000$.

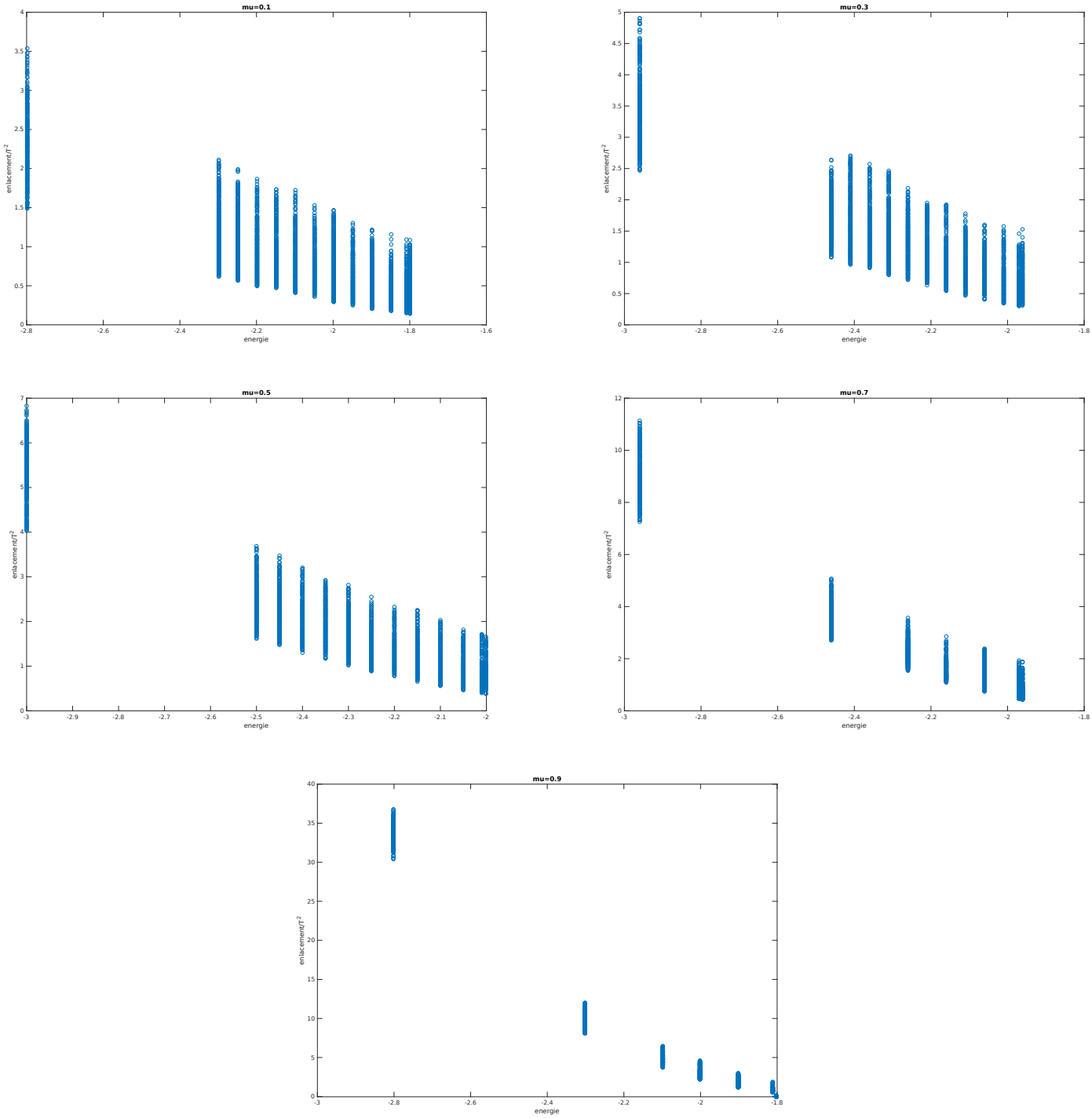


FIGURE 6.6 – Valeurs de l'enlacement par unité de temps au carré, pour toutes les simulations effectuées avec $\mu = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

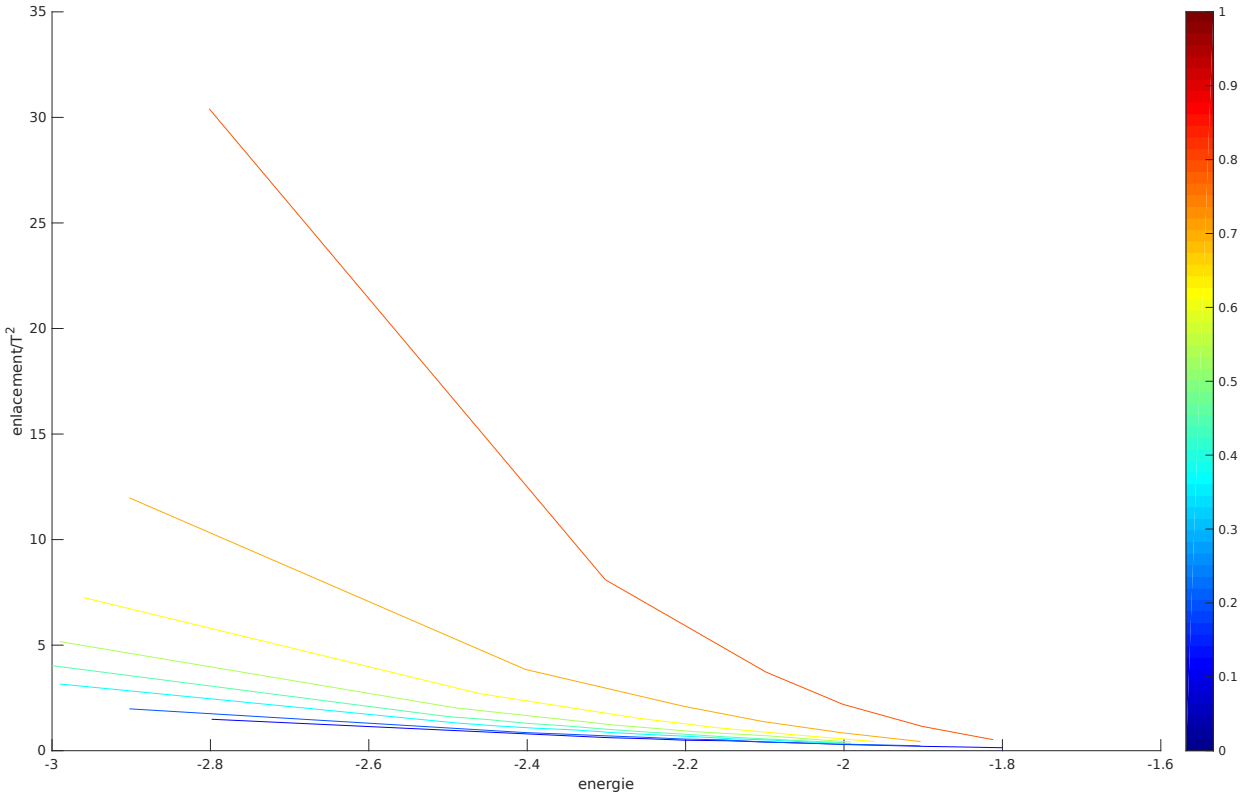


FIGURE 6.7 – Minima des enlacements calculés pour différents $\mu \in]0,1[$ (μ représenté par l'échelle colorimétrique).

Annexe : mesure de Liouville et taux d'enlacement sur une hypersurface

Mesure de Liouville. Montrons que la mesure de Liouville d'un niveau d'énergie se projette sur la région de Hill en une mesure uniforme. Ce fait est une généralisation du théorème d'Archimède, selon lequel l'aire de la portion de sphère de dimension 2 comprise entre deux parallèles ne dépend que de la différence de hauteur entre ces deux parallèles ; autrement dit la mesure d'aire sur la sphère se projette sur l'axe vertical en une mesure uniforme. Dans notre cas, on a sur $\mathbb{C}^2$ un hamiltonien H de la forme

$$H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q).$$

En notant μ_H la mesure de Liouville sur le niveau $\{H = c\}$ et $\overline{\mu}$ sa mesure image par la projection sur la région de Hill, on a, pour $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(A) &= \mu_H\{q \in A, H = c\} \\
&= \frac{d}{dc}(\mu_H\{q \in A, H < c\}) \\
&= \frac{d}{dc}\int_{\{V<c\}\cap A}\int \mathbb{1}\left\{|p| < \sqrt{2(c - V(q))}\right\} dpdq \\
&= \frac{d}{dc}\int_{\{V<c\}\cap A} 2\pi(c - V(q))dq \\
&= \int_{\{V<c\}\cap A} 2\pi dq.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{\mu}$ est, à un facteur 2π près, la mesure de Lebesgue sur la région de Hill. Comme le hamiltonien ne dépend que de la norme de p, les niveaux d'énergie sont invariants par rotation de p, et donc la mesure induite sur chaque cercle $\{q = cste\}$ est uniforme. On remarquera que cette décomposition de la mesure de Liouville en mesures uniformes n'a plus lieu pour p de dimension 3 et plus.

Chapitre 7

Suspensions

Lorsqu'un flot sur $\mathbb{S}^3$ admet une section de Birkhoff – c'est-à-dire une surface qui intersecte transversalement toutes les orbites du flot et est bordée par une famille d'orbites périodiques – on peut reconstituer une bonne partie de sa dynamique grâce à la seule donnée de l'application de premier retour sur cette surface. Nous nous intéressons ici à l'enlacement des orbites périodiques – et, plus généralement, des mesures invariantes – et à la manière dont il se traduit dans la dynamique discrète du premier retour. Nous nous limiterons aux flots de classe $\mathscr{C}^1$ admettant un disque comme section de Birkhoff, et expliquerons dans un premier temps comment reconstruire un tel flot comme suspension de son application de premier retour, que l'on assortira d'une isotopie à l'identité. Puis nous nous concentrerons sur les difféomorphismes du disque, et définirons l'*enroulement* de mesures invariantes pour un difféomorphisme ψ, ainsi que la notion de difféomorphisme *fortement tournant* et *faiblement tournant*. Nous invitons le lecteur à consulter l'article d'Anna Florio [19], qui propose une étude sur ce sujet avec une approche différente. Enfin, nous montrerons que, dans le cas des flots qui nous intéressent, il y a correspondance entre difféomorphismes faiblement tournants et flots lévogyres, et appliquerons ces résultats à l'étude du problème à trois corps dans le cas dégénéré où une des deux primaires disparaît.

7.1 Suspension d'un difféomorphisme de $\mathbb{D}^2$

Soit ψ un difféomorphisme direct du disque orienté $\mathbb{D}^2$. L'objectif est de suspendre ψ, pour obtenir un flot sur $\mathbb{S}^3$ admettant une section de Birkhoff en disque sur laquelle l'application de premier retour soit précisément ψ.

Première remarque. On s'aperçoit rapidement que la donnée d'un difféomorphisme du disque est insuffisante pour définir un flot, en ce sens que deux flots différents (et même, une infinité de flots différents) peuvent avoir une section de Birkhoff en disque sur laquelle l'application de premier retour est la même.

Un tel exemple est donné par les flots k-Hopf : définis sur la sphère unité de $\mathbb{C}^2$, ils admettent tous la même décomposition en tores invariants $\{|\frac{z_1}{z_2}| = cste\}$, mais les trajectoires sur chacun des tores non dégénérés sont des noeuds $(1, k)$. Explicitement, ces flots sont définis sur $\mathbb{S}^3$ par

$$\varphi^t(z_1, z_2) = (z_1 e^{2i\pi kt}, z_2 e^{2i\pi t}).$$

Pour tous ces flots, l'enlacement est différent, puisque les orbites du flot k-Hopf sont toutes pério-

diques et que, mise à part l'orbite $\{z_1 = 0\}$, elles s'enlacent deux à deux exactement k fois. Pourtant, ces flots admettent tous comme section de Birkhoff le disque $\{\mathrm{Arg}(z_2) = 0\}$, sur lequel l'application de premier retour est l'identité.

Comme on le verra ci-dessous, pour suspendre de manière univoque le difféomorphisme ψ on a besoin de la donnée, à homotopie près, d'une isotopie $\psi_t : \mathrm{id} \rightsquigarrow \psi$ ou, ce qui revient au même, d'un élément $\widetilde{\psi}$ de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$, le revêtement universel de $\mathrm{Diff}(\mathbb{D}^2)$. Comme l'espace des difféomorphismes de $\mathbb{D}^2$ qui sont l'identité près du bord est simplement connexe, le noyau de l'extension

$$\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{D}^2)$$

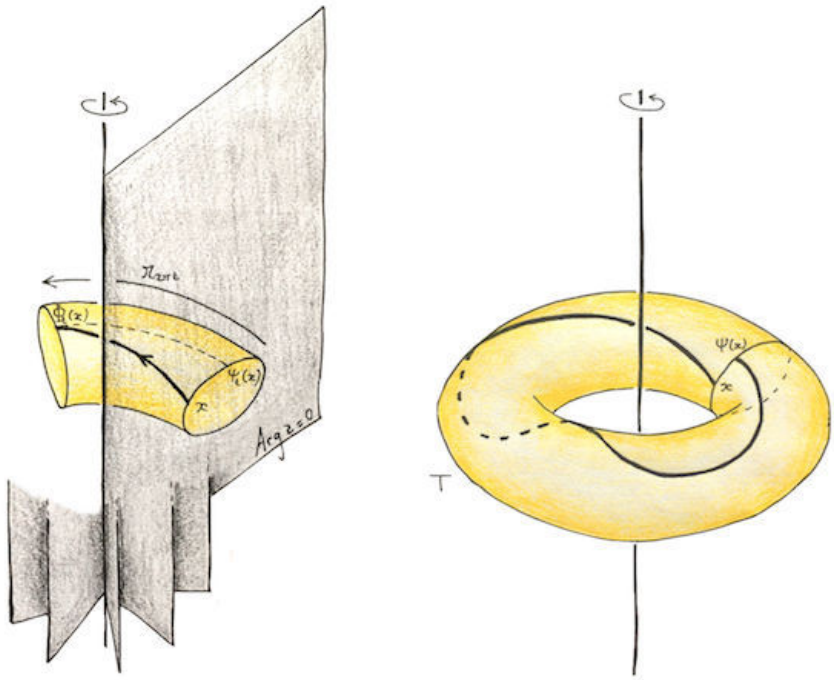
est $\mathbb{Z}$, ce qui revient à dire que deux isotopies $\psi_t, \psi'_t : \mathrm{id} \rightsquigarrow \psi$ diffèrent d'un entier, entier auquel on pourra penser comme au nombre de tours qu'effectue un point du bord lors de l'isotopie $\mathrm{id} \rightsquigarrow \mathrm{id}$ qui pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ vaut ψ_{2t} et pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ vaut $\psi'_{2(1-t)}$.

7.1.1 Suspension de $\widetilde{\psi}$

Première construction. Soit $\psi_t : \mathrm{id} \rightsquigarrow \psi$ une isotopie qui relève ψ en $\widetilde{\psi}$ et qui promène les points du bord sans jamais les faire stationner. On va « déployer » ψ_t le long d'un tore de révolution, comme suit. On considère dans la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ un tore solide de révolution autour du grand cercle $\{z_1 = 0\}$, tore qu'on notera T. Sur le domaine $(x \in \{\mathrm{Arg}\, z_1 = 0\}, t \in [0, 1[)$, on définit l'application

$$\Phi^t(x) = r_{2\pi t}(\psi_t x),$$

où r_α est la rotation d'angle α autour du grand cercle $\{z_1 = 0\}$. Cette application s'étend de manière unique à $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, si on choisit bien l'isotopie ψ_t – par exemple, de sorte qu'elle soit égale à ψ_0 et à ψ_1 sur des intervalles $[0, \varepsilon[$ et $]1 - \varepsilon, 1]$, respectivement – alors l'extension à $t \in \mathbb{R}$ de $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ définit un flot Φ^t sur T.



Dans un deuxième temps, on identifie entre eux les points d'un même cercle $\Gamma_x = \{r_\alpha x\}$, ce qui écrase le bord de T en un cercle. La variété ainsi construite est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$, et est munie d'un feuilletage orienté de dimension 1. Le disque $\{\operatorname{Arg} z_1 = 0\}$ est une section de Birkhoff pour ce feuilletage, sur laquelle l'application de premier retour est ψ.

Cette construction ne dépend pas du choix de l'isotopie ψ_t relevant ψ en $\widetilde{\psi}$. En effet, deux telles isotopies sont homotopes entre elles, par une homotopie qu'on peut supposer $\mathscr{C}^1$. En particulier, il existe un difféomorphisme de T qui envoie les feuilletages l'un sur l'autre. Après écrasement du bord de T, on obtient un homéomorphisme de S^3 qui envoie feuilletage sur feuilletage, et est un difféomorphisme sur le complémentaire du grand cercle $\{z_1 = 0\}$. On dira que ces feuilletages sont *quasi-différentiablement équivalents*.

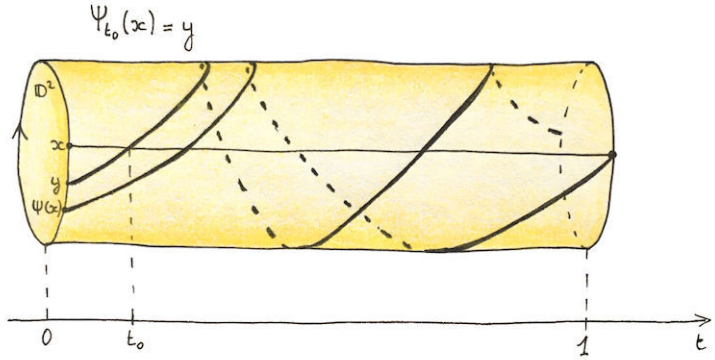
Définition 7.1.1. Pour $\widetilde{\psi}$ un élément de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$, on appellera *suspension* de $\widetilde{\psi}$, notée $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$, le feuilletage sur $\mathbb{S}^3$ obtenu selon la construction ci-dessus, défini à équivalence quasi-différentiable près.

Par simple connexité de l'espace des difféomorphismes de $\mathbb{D}^2$ qui sont l'identité près du bord, il suffit en fait, pour déterminer une isotopie ψ_t à homotopie près, de la déterminer sur le bord. Autrement dit, si la construction ci-dessus a le mérite d'être concrète, elle est aussi gourmande en information : elle nécessite en effet la donnée d'une isotopie du disque tout entier, ce qui est plus d'information que nécessaire. Ceci suggère une deuxième construction.

Deuxième construction. Considérons le cylindre de l'application ψ, c'est-à-dire la variété

$$M = \left(\mathbb{D}^2 \times [0,1] \big/ (\psi(x), 0) \sim (x, 1) \right),$$

que nous munirons du champ de vecteurs continu $\frac{d}{dt}$. La donnée d'une isotopie ψ_t qui relève ψ en $\widetilde{\psi}$ et n'est jamais constante sur ∂D^2 munit le bord de M d'un feuilletage par des courbes fermées. Ce feuilletage est indexé par le cercle $\partial\mathbb{D}^2$, chaque courbe c_x joignant $(\psi(x), 0)$ à $(x, 1)$ transversalement à $\frac{d}{dt}$ en intersectant chaque cercle $\partial\mathbb{D}^2 \times \{t\}$ en un unique point. Il est explicitement donné par : $c_x(t) = (\psi_t^{-1}x, t)$, de sorte que, lorsqu'on identifie les points d'une même courbe c_x, la dynamique donnée par le champ $\frac{d}{dt}$ devient la dynamique de l'isotopie.



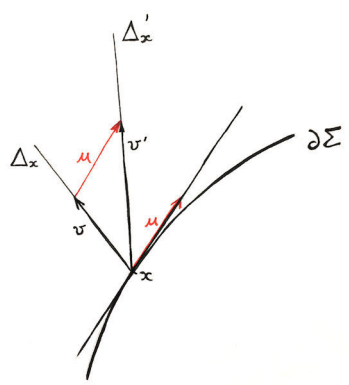
En écrasant ainsi le bord de M sur un cercle par identification des points d'une même courbe, on obtient le feuilletage orienté $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$.

7.1.2 D'un feuilletage à un flot $\mathscr{C}^1$

Structure de flot. Dans le cas général, ce feuilletage n'est pas canoniquement muni d'un paramétrage temporel qui en ferait un flot différentiable ; le problème se trouve évidemment sur l'orbite périodique. On ne peut pas toujours choisir l'isotopie ψ_t de sorte que sa restriction au bord soit en fait un flot. Pour une telle isotopie, la famille $(c_x)_x$ serait invariante par translation horizontale ; un tel choix n'est possible que dans le cas où ψ_∂ est conjugué à une rotation. En effet, si la suspension construite comme ci-dessus est un flot, l'application de premier retour ψ est précisément le temps 1 du flot, y compris sur le bord. Or, à reparamétrage du temps près, le temps 1 d'un flot régulier sur une orbite périodique est une rotation. On ne reconstruit donc pas par ce procédé tous les flots qui qui admettent une section de Birkhoff en disque. Si, par exemple, l'application de premier retour ψ admet sur le bord un ensemble fini de points fixes – voir la figure 7.2 pour un exemple – il faudra, pour reconstruire ce flot comme suspension d'un $\widetilde{\psi}$ au-dessus de ψ, effectuer sur le feuilletage obtenu un reparamétrage global du temps.

Régularité – éclatement d'un flot. Pour identifier quelles propriétés partagent les difféomorphismes $\widetilde{\psi}$ pouvant se suspendre en un feuilletage $\mathscr{C}^1$, faisons l'opération inverse en partant d'un flot sur $\mathbb{S}^3$. Soit donc ϕ^t continûment différentiable sur $\mathbb{S}^3$, admettant une section de Birkhoff Σ difféomorphe à un disque. On peut sans perte de généralité supposer que Σ est le disque $\{\operatorname{Arg} z_1 = 0\}$. Éclatons l'orbite périodique $\gamma = \{z_1 = 0\}$ en remplaçant chaque point x de γ par le cercle Γ_x des demi-droites partant de x et « orthogonales » à $\partial\Sigma$, c'est-à-dire définies modulo la droite portant le champ :

$$\Delta_x \sim \Delta'_x \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, v \in \Delta_x, v' \in \Delta'_x, u \in T_x\partial\Sigma : v' = v + u.$$

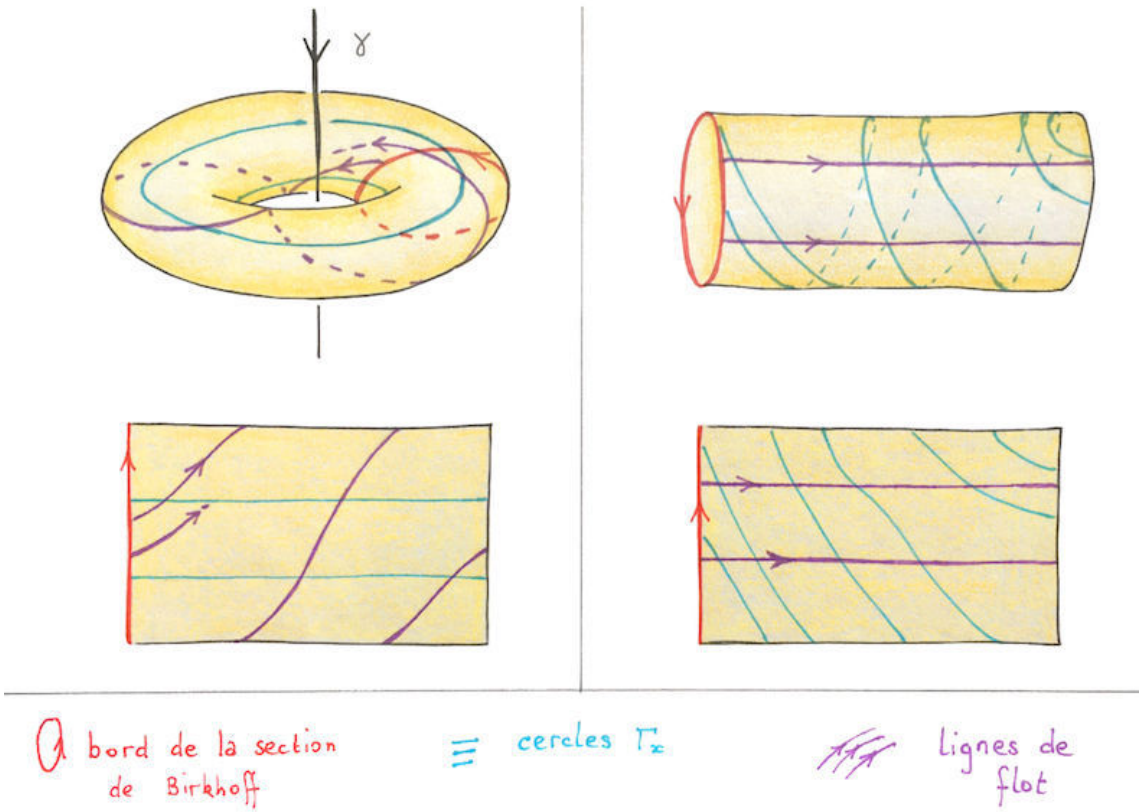


On obtient ainsi un flot Φ^t sur un tore solide de révolution T : le bord du tore solide est précisément l'éclaté de l'orbite périodique, et le flot sur ce bord est donné par la différentielle de ϕ^t, qui passe au quotient. On se réfèrera à l'annexe en fin du chapitre pour une description explicite de l'éclatement. Le bord du tore est donc muni simultanément

— d'une famille de cercles $(\Gamma_x)_{x\in\gamma}$;

— de la courbe fermée $\partial\Sigma$ donnée par la section Σ (avec les notations qui définissent l'éclatement dans l'annexe, $\partial\Sigma = \partial T \cap \{\operatorname{Arg} z_1 = 0\}$) ;

— du flot Φ^t_∂, pour lequel $\partial\Sigma$ ainsi que chaque cercle Γ_x sont des sections globales transverses.



On reconnaît tous les éléments de la construction de la suspension $\mathscr{S}_{\tilde{\psi}}$. En particulier, cette interprétation de l'écrasement de ∂T comme l'opération inverse de l'éclatement d'une orbite périodique indique des conditions nécessaires sur ψ_∂ pour que le feuilletage $\mathscr{S}_{\tilde{\psi}}$ soit continûment différentiable. Lorsqu'on éclate une orbite périodique d'un flot $\mathscr{C}^1$, la régularité du flot avant éclatement se traduit dans le fait que, sur le tore formé par l'orbite éclatée, Φ^t est projectif – car donné par une différentielle. Un cercle Γ_x est en effet muni de la structure projective double de $\mathbb{R}P^1_2$; les applications

$$\begin{aligned} \Gamma_x &\longrightarrow \Gamma_{\phi^t x} \\ \Delta &\longmapsto \Phi^t(\Delta) \end{aligned}$$

sont des transformations projectives. Par ailleurs, le flot définit une application développante du revêtement universel de $\partial\Sigma$ vers le revêtement universel de n'importe quel Γ_x, c'est-à-dire $\widetilde{\mathbb{R}P^1_2}$, ce qui munit la section $\partial\Sigma$ d'une structure projective. Voir la figure 7.1.2 pour une illustration du phénomène.

Cette structure est éventuellement exotique, par exemple si l'application par laquelle on quotiente $\widetilde{\mathbb{R}P^1_2}$ pour obtenir $\partial\Sigma$ est une rotation irrationnelle, ou une transformation hyperbolique (voir la figure 7.2 pour des exemples). On pourra se reporter à l'article [36] de Nicholaas Kuiper pour la classification des structures projectives sur le cercle. Pour cette structure projective sur $\partial\Sigma$, l'application de premier retour ψ_∂ est également projective. Ainsi, pour donner lieu à un feuilletage de régularité $\mathscr{C}^1$, ψ ne peut pas être quelconque ; il doit nécessairement être projectif sur le bord, pour une certaine structure projective sur $\partial\mathbb{D}^2$. Il serait intéressant de déterminer si cette condition est suffisante à ce que la suspension soit $\mathscr{C}^1$.

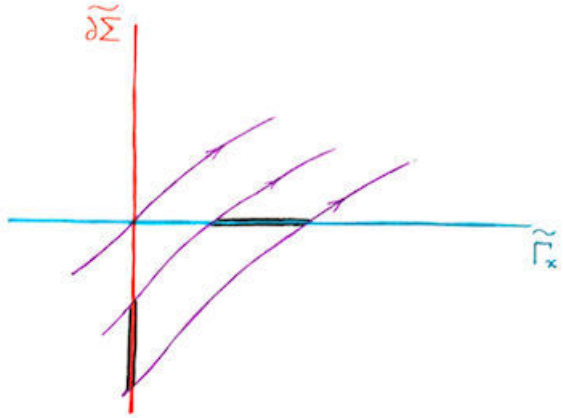


FIGURE 7.1 – Le tore ∂T déplié, et son flot. Le flot tire en arrière la structure projective de $\widetilde{\Gamma_x}$ sur $\widetilde{\partial\Sigma}$.

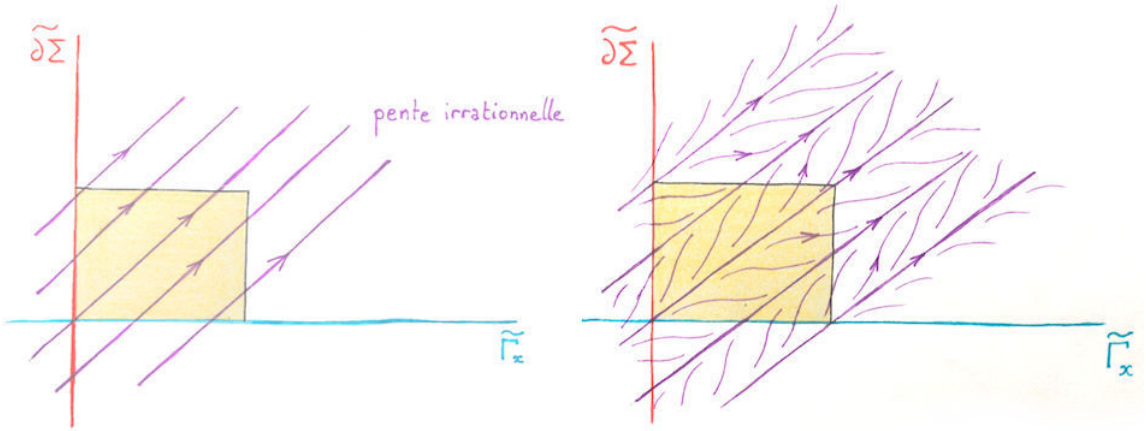


FIGURE 7.2 – À gauche, l'application de premier retour restreinte au bord est une rotation d'angle irrationnel. À droite, c'est un difféomorphisme hyperbolique à deux points fixes.

7.1.3 Unicité de la suspension

On rappelle qu'on nomme ϕ^t un flot continûment différentiable sur $\mathbb{S}^3$, admettant une section de Birkhoff Σ difféomorphe à un disque. Soit ϕ l'application de premier retour. L'enjeu de ce paragraphe est de s'assurer que la suspension de ϕ – ou plutôt, du bon relevé de ϕ – permet bien de retrouver le flot initial.

Tout d'abord, définissons ce qu'est « le bon relevé ». Une manière naturelle de le définir – on pourrait dire quasi-tautologique au vu de la construction d'une suspension – est d'éclater l'orbite $\partial\Sigma$, et de considérer dans le tore solide ainsi obtenu la structure de fibration en disques transverses au flot au-dessus du cercle. Cette structure s'envoie par un difféomorphisme sur le tore de révolution T muni de sa fibration en disques $\{\mathrm{Arg}(z_1) = t\}_t$, et les rotations autour du grand cercle $\{z_1 = 0\}$ permettent de replier le flot sur T en une isotopie de $\mathbb{D}^2$. C'est le relevé $\widetilde{\phi}$ correspondant à cette isotopie qu'on

suspendra.

En mettant bout à bout tout ce qui précède, on obtient le théorème suivant, qui assure que l'on peut bien reconstruire le flot ϕ^t en suspendant son application de premier retour.

Théorème 7.1.2. *Le flot ϕ^t et le feuilletage orienté $\mathscr{S}_{\widetilde{\phi}}$ sont quasi-différentiablement équivalents.*

7.2 Difféomorphismes tournants

On se donne pour toute la section un difféomorphisme direct ψ du disque orienté, de classe $\mathscr{C}^1$, et un relevé $\widetilde{\psi}$ de ψ auquel, rappelons-le, on pourra penser comme à la donnée, à homotopie près, d'une isotopie $\psi_t : \mathrm{id} \rightsquigarrow \psi$. On s'intéresse à la manière dont l'isotopie ψ_t étendue à $\mathbb{R}$ fait tourner les couples de points l'un autour de l'autre, avec l'idée de caractériser les isotopies qui font tourner chaque couple de points positivement pour un temps assez long.

7.2.1 Application d'enroulement

Enroulement en temps 1. Reprenons, en l'adaptant au cas d'un difféomorphisme qui n'est pas l'identité près du bord, la définition posée par Jean-Marc Gambaudo et Étienne Ghys dans [21].

> Pour x et y deux points du disque, on peut considérer le vecteur non nul v_t joignant $\psi_t(x)$ à $\psi_t(y)$. Lorsque t varie de 0 à 1, ce vecteur v_t tourne d'un angle (compté en tours) que nous noterons $\mathrm{Ang}_{\widetilde{\psi}}(x, y)$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathrm{Ang}(x, y)$. Comme la notation le suggère, ce nombre réel est indépendant de l'isotopie choisie dans la classe d'homotopie correspondant à $\widetilde{\psi}$. En effet, si deux isotopies ψ_t^0 et ψ_t^1 peuvent être jointes par un chemin d'isotopies ψ_t^s, l'angle dont tourne le vecteur correspondant v_t^s lorsque t varie de 0 a 1 est indépendant de s : il est continu en s et, d'autre part, sa réduction modulo $\mathbb{Z}$ n'est autre que l'angle dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entre $v_0 = v_0^s$ et $v_1 = v_1^s$. La fonction Ang est définie et continue sur le complémentaire de la diagonale dans $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$. Il est facile de construire des exemples (de relevés) d'homéomorphismes $\widetilde{h}$ tels que $\mathrm{Ang}_{\widetilde{h}}$ n'est pas bornée. Cependant, nous allons voir que, pour $\widetilde{\psi}$ de classe $\mathscr{C}^1$, Ang est une fonction bornée. Soit en effet $\mathscr{K}$ l'éclaté de diag dans $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$; en termes plus concrets, $\mathscr{K}$ est le compact formé des triplets (x, y, Δ) où x et y sont des points de $\mathbb{D}^2$ et Δ une demi-droite du plan partant de x et contenant y. Bien sûr, si x et y sont distincts, ils déterminent Δ de sorte que $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 - \mathrm{diag}$ se plonge naturellement dans $\mathscr{K}$ comme un ouvert dense. Nous affirmons que, comme $\widetilde{\psi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction Ang se prolonge à $\mathscr{K}$ en une fonction continue et, en particulier, Ang est bornée. Il s'agit en fait d'étendre la définition de Ang aux triplets du type (x, x, Δ). Nous définissons $\mathrm{Ang}(x, x, \Delta)$ comme la variation de l'angle des demi-droites $d_x\psi_t(\Delta)$, images de Δ par la différentielle $d_x\psi_t$, lorsque t varie de 0 à 1. Par linéarité de la différentielle, on a $\mathrm{Ang}(x, x, \Delta) = \mathrm{Ang}(x, x, -\Delta)$, ce qui permet de définir $\mathrm{Ang}(x, x, \cdot)$ sur le bord du disque. Le nombre ainsi obtenu ne dépend pas du choix de l'isotopie ψ_t correspondant à $\widetilde{\psi}$, et ceci définit bien l'extension continue souhaitée de Ang à $\mathscr{K}$.

Remarque. Cette extension n'ayant aucune raison d'être constante sur les cercles $\mathscr{C}_x = \{(x, x, \Delta)\}$, Ang n'admet en général pas de prolongement continu à la diagonale.

La fonction Ang étant continue sur $\mathscr{K}$, c'est sur cet espace qu'on va se placer pour travailler. On considèrera donc le difféomorphisme $\widehat{\psi}$ qui étend $\psi \times \psi$ à $\mathscr{K}$ tout entier, en envoyant le triplet (x, x, Δ) sur $(\psi.x,\ \psi.x,\ d_x\psi.\Delta)$. Ce difféomorphisme est naturellement muni d'une isotopie à l'identité $\widehat{\psi}_t$, définie sur la diagonale éclatée par

$$(x, x, \Delta) \mapsto (\psi_t x,\ \psi_t x,\ d_x\psi_t\Delta).$$

Enroulement asymptotique. La fonction Ang donne l'enroulement en temps 1 de deux points ; pour étudier la dynamique du point de vue des mesures invariantes, on cherche à définir une fonction $\widetilde{\mathrm{Ang}}$ qui donnerait l'enroulement asymptotique de deux points. Pour tout entier n, l'isotopie $\widetilde{\psi}$ itérée n fois nous donne un relevé $\widetilde{\psi}^n$ au-dessus de ψ^n, qui vérifie

$$\mathrm{Ang}_{\widetilde{\psi}^n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Ang}_{\widetilde{\psi}} \circ \widehat{\psi}^k,$$

Autrement dit, la fonction $\mathrm{Ang}_{\widetilde{\psi}^n}$ décrit la manière dont tourne la demi-droite Δ lorsque t varie de 0 à n, pour l'isotopie ψ_t prolongée à $\mathbb{R}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous la noterons plus simplement Ang_n. Pour un triplet (x, x, Δ), cette quantité dépend du choix de Δ ; cependant, choisir une autre demi-droite partant de x amène à changer la variation totale de l'angle d'au plus une unité, et donc $\mathrm{Ang}_n(x, x, \Delta)$ d'une quantité qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. En particulier, la quantité

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{Ang}_n(x, x, \Delta)$$

ne dépend pas du choix de la demi-droite Δ.

Ce qu'on aurait envie de définir comme l'enroulement asymptotique de deux points – ou l'auto-enroulement asymptotique d'un point – serait la limite en $n \to \infty$ des Ang_n. Cette limite n'existe pas toujours ; cependant, par le théorème ergodique de Birkhoff, elle existe λ-presque partout, pour toute mesure λ sur $\mathscr{K}$ qui soit $\widehat{\psi}$-invariante. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 7.2.1. Soit x, y deux points de $\mathbb{D}^2$. On note $\widetilde{\mathrm{Ang}}(x, y)$ la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $\mathrm{Ang}_n(x, y, \Delta)$ – limite qui ne dépend alors pas de Δ :

$$\widetilde{\mathrm{Ang}}(x, y) = \lim_n \mathrm{Ang}_n(x, y, \Delta).$$

Les mesures $\widehat{\psi}$-invariantes sur $\mathscr{K}$ comprenant les couples de mesures $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\psi)$ tels que $\mu \times \nu$ ne charge pas la diagonale, la fonction $\widetilde{\mathrm{Ang}}$ est définie $\mu \times \nu$ presque partout pour un tel couple, et la seconde partie du théorème ergodique nous signale qu'alors,

$$\int \widetilde{\mathrm{Ang}}\ d\mu d\nu = \int \mathrm{Ang}\ d\mu d\nu.$$

Par ailleurs, on reconnaît dans la restriction de Ang_n à la diagonale la quantité qui permet de définir l'invariant de Ruelle, et qui vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 7.2.2 (Ruelle [53])**.** *Soit μ une mesure de probabilité invariante par ψ. Alors :*

- *pour μ-presque tout point x dans $\mathbb{D}^2$, la quantité $\mathrm{Ang}_n(x, x, \Delta)$ converge quand n tend vers $\pm\infty$ vers une limite $\widetilde{\mathrm{Ang}}(x, x)$, qu'on appellera l'*auto-enroulement asymptotique *de x ;*
- *la fonction $\widetilde{\mathrm{Ang}}(x, x) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable.*

Par ailleurs, l'invariant de Ruelle $\mathscr{R}_\mu(\psi)$ – que nous n'utiliserons pas tel quel ici mais dont nous rappelons la définition – est l'intégrale $\int_{\mathbb{D}^2} \widetilde{\mathrm{Ang}}(x, x)\ d\mu(x)$.

7.2.2 Difféomorphismes fortement tournants

Nous sommes maintenant prêts à caractériser les difféomorphismes qui « font tourner tous les couples de points positivement ».

Théorème 7.2.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour toute mesure invariante* $\lambda \in \mathscr{M}(\widehat{\psi})$ *sur* $\mathscr{K}$*, l'intégrale* $\int \mathrm{Ang}\ d\lambda$ *est strictement positive.*
2. *Pour tout* $(x, y, \Delta) \in \mathscr{K}$*,* $\liminf_n \mathrm{Ang}_n(x, y, \Delta) > 0$*.*
3. *Il existe une application* A *cohomologue à* Ang *et strictement positive.*

Rappel. On dit que les deux fonctions réelles continues $\mathrm{Ang}, A : \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ sont *cohomologues* si il existe $h : \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ continue telle que $A = \mathrm{Ang} + h \circ \widehat{\psi} - h$.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème plus général :

Théorème 7.2.4. *Soit* ϕ *un homéomorphisme de* X *compact, et* $f : X \to \mathbb{R}$ *continue. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour toute mesure de probabilité invariante* $\mu \in \mathscr{M}(\phi)$*, l'intégrale* $\int f d\mu$ *est strictement positive.*
2. *Pour tout* $x \in X$*,* $\liminf \frac{1}{n}(f(x) + \cdots + f(\phi^{n-1}x)) > 0$*.*
3. *Il existe* f' *cohomologue à* f *telle que* $f' > 0$*.*

Démonstration. L'implication $[3 \Rightarrow 1]$ est immédiate dès qu'on remarque que, si f et f' sont cohomologues, alors

$$\int f' d\mu = \int f d\mu.$$

Montrons l'implication $[2 \Rightarrow 1]$. Soit μ ergodique. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, pour μ presque tout $x \in X$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \phi^k(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

Fixons un tel x. Alors

$$\liminf \frac{1}{n} \left(f(x) + \cdots + f(\phi^{n_1}x)\right) > 0 \Longrightarrow \int f d\mu > 0.$$

Procédons par contraposition pour montrer $[1 \Rightarrow 2]$, en supposant qu'il existe $x \in X$ et une suite d'entiers $(n_k)_k$ tels que

$$\lim \frac{1}{n_k}(f(x) + \cdots + f(\phi^{n_k - 1}x)) \leq 0.$$

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la mesure de probabilité

$$\mu_x^n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\phi^k(x)}.$$

Comme l'ensemble des mesures de probabilités sur X est compact – pour la topologie de la convergence faible – la suite $\mu_x^{n_k}$ admet une valeur d'adhérence μ, qui est invariante par ϕ. Quitte à extraire une seconde fois, supposons que μ est une limite. Ainsi, on a

$$\frac{1}{n_k}(f(x) + \cdots + f(\phi^{n_k - 1}x)) = \int f d\mu_x^{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu \leq 0.$$

Enfin, montrons que $[1 + 2 \Rightarrow 3]$. On remarque que $f_2 = \frac{1}{2}(f + f \circ \phi)$ est cohomologue à f (prendre $h = \frac{1}{2} f$). De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n = \frac{1}{n} \left(f + f \circ \phi + \cdots + f \circ \phi^{n-1}\right)$$

est cohomologue à f (prendre $h = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} f \circ \phi^{k-1}$). Supposons, par l'absurde, que les assertions 1 et 2 soient vérifiées, mais que f_n ne soit strictement positive pour aucun entier n, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de points de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(x_n) \leq 0.$$

Considérons alors la suite de mesures de probabilité de terme général

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\phi^k(x_n)},$$

et μ sa limite – qui existe toujours, à extraction de sous-suite près. Alors μ est invariante, et

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \lim_{n \to +\infty} \int f d\mu_n \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(f(x_n) + \cdots + f(\phi^{n-1} x_n) \right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'assertion 1 et termine la preuve. □

Définition 7.2.5. Un difféomorphisme $\widetilde{\psi}$ de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$ est dit *fortement tournant* si l'extension associée $\widehat{\psi}$ vérifie les trois conditions équivalentes du théorème 7.2.3.

On reconnaît dans la seconde condition l'idée que, pour tout couple de points, l'enroulement asymptotique est positif.

La troisième exprime l'idée que, si la forme différentielle dont l'intégrale détermine l'enroulement (la variation infinitésimale de Ang) est d'intégrale positive pour un temps assez long, alors elle peut être remplacée par une forme différentielle dont l'intégrale détermine également l'enroulement (à un facteur près, la variation infinitésimale de $\mathrm{Ang} + \mathrm{Ang} \circ \widehat{\psi} + \mathrm{Ang} \circ \widehat{\psi}^2 + \cdots$) , mais qui est localement positive. Dans notre cas, localement signifie : en moyenne sur une unité de temps, mais – conjecture – on pourrait trouver une forme telle qu'il existe une isotopie le long de laquelle elle soit partout positive.

La première, enfin, porte sur les mesures sur $\mathscr{K}$ invariantes par l'action de $\widehat{\psi}$. Pour que cette condition soit vérifiée, il suffit qu'elle le soit sur l'ensemble des mesures ergodiques, dont $\mathscr{M}(\widehat{\psi})$ est la fermeture de l'enveloppe convexe. Or, si λ est une mesure ergodique pour $\widehat{\psi}$, ou bien elle ne charge pas la diagonale, ou bien elle ne charge que la diagonale (qui est une partie $\widehat{\psi}$-invariante de $\mathscr{K}$). Dans le premier cas, λ peut être vue comme un couplage de deux mesures μ et ν définies sur $\mathbb{D}^2$, ergodiques pour ψ, et qui ne coïncident pas en une même orbite périodique. Dans le second cas, l'intégrale de Ang contre λ est égale à l'intégrale de $\widetilde{\mathrm{Ang}}$ contre la projection sur $\mathbb{D}^2$ de λ. Ainsi, la première assertion se reformule ainsi :

1. pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}(\psi)$ ergodique, $\int \widetilde{\mathrm{Ang}}(x, x)\, d\mu(x) > 0$;
2. pour tout couple de mesures $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\psi)$ ergodiques dont le produit ne charge pas la diagonale, et pour tout couplage λ de μ et ν,

$$\int \mathrm{Ang}(x, y)\, d\lambda(x, y) > 0.$$

Un exemple. Un exemple de difféomorphisme fortement tournant est donné par des difféomorphismes intégrables du disque, qui dévient la verticale. Un tel difféomorphisme ϕ fixe le centre et feuillette le disque par des cercles invariants, sur lesquels le nombre de rotation varie continûment de

manière strictement monotone. Considérons alors une verticale V joignant le centre à un point x du bord du disque. L'image de cette verticale par ϕ est une autre courbe qui joint le centre au bord du disque, et qui indique un relevé préféré de ϕ : le relevé qui fait tourner x dans le sens de la déviation de la verticale, et le fait tourner d'un angle total égal à celui dont tourne un point qui se déplace le long de $\phi(V)$, allant du centre au bord. La restriction de ϕ au cercle invariant C_r de rayon $r > 0$ est donc munie, via le relevé $\widetilde{\psi}_{|C_r}$, d'un nombre de translation $\omega(r)$. La fonction $r \mapsto \omega(r)$ définie sur $]0, 1]$ est strictement positive et strictement croissante – ou strictement négative et strictement décroissante, ce qui revient au même. On a alors :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad |x| \leq |y| \ \Rightarrow \ \widetilde{\mathrm{Ang}}(x, y) = \omega(|y|) > 0.$$

Pour que $\widetilde{\phi}$ soit fortement tournant, il suffit que l'auto-enroulement asymptotique du centre soit strictement positif, ce qui est le cas si $\omega(r)$ ne tend pas vers 0 en $r \to 0$.

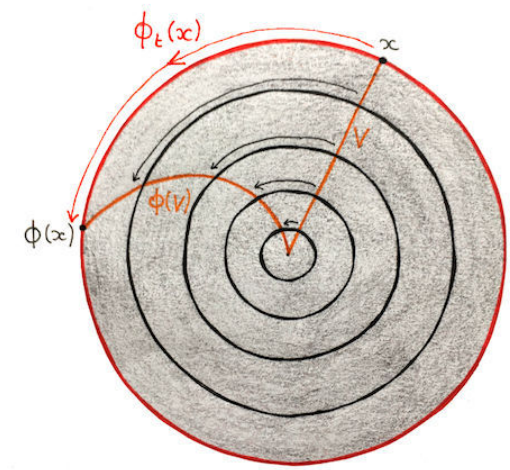


FIGURE 7.3 – Un twist, une verticale et son image, un point du bord et sa promenade via l'isotopie canoniquement associée au twist.

7.2.3 Difféomorphismes faiblement tournants

On cherche une correspondance, via la suspension, entre flots lévogyres et difféomorphismes tournants. Or, la condition de lévogyricité d'un flot ne porte pas sur tous les *couplages* de mesures invariantes, mais sur tous les *produits* de mesures invariantes ; c'est une condition analogue qui va nous intéresser dans le cas des difféomorphismes. Vérifions d'abord que cette distinction en est bien une, avec le contre-exemple d'un difféomorphisme qui voit s'enlacer positivement tous les produits de mesures invariantes, mais pas tous les couplages.

Un contre exemple. Le point caractéristique de ce difféomorphisme $\widetilde{\psi}$ sera d'avoir deux orbites périodiques de même période – disons, $\{x_1, x_2\}$ et $\{y_1, y_2\}$, de période 2 – telles que $\mathrm{Ang}(x_i, y_j)$ soit nul si $i = j$, et strictement positif sinon. Pour les mesures invariantes μ_x, μ_y correspondantes, on aura $\int \mathrm{Ang}\ d\mu_x d\mu_y > 0$, mais $\int \mathrm{Ang}\ d\lambda = 0$ pour le couplage $\lambda = \frac{1}{2}(\delta_{(x_1,y_1)} + \delta_{(x_2,y_2)})$.

Étendons cette dynamique sur quatre points en un difféomorphisme du disque tout entier muni

d'une isotopie, faiblement tournant mais pas fortement tournant. Ces deux dernières conditions portent sur l'ensemble des mesures invariantes ; pour les rendre plus faciles à vérifier nous allons réduire au strict minimum l'ensemble des mesures invariantes, par exemple en introduisant une partie « champ de gradient » qui fasse converger tout l'intérieur du disque, à trois points près, vers les quatre points qui nous intéressent. Soit donc $\phi_{t,1}$ l'isotopie du champ de gradient défini par le graphe au-dessus de $\mathbb{D}^2$ présenté figure 7.4 en haut à gauche. Soit ensuite ϕ_2 rotation d'un demi-tour sur un anneau $\{r \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\}$ comprenant les quatre points puits de ϕ_1, étendue au disque tout entier de manière « twist » (voir la figure 7.4 en haut à droite), et munie de son isotopie naturelle[a] $\phi_{t,2}$. Soit enfin $\phi_{t,3}$ qui fait tourner d'un demi-tour, dans l'autre sens que $\phi_{t,2}$, les points de deux petits disques contenant les deux couples de points – voir figure 7.4 en bas à gauche. Enfin, on considèrera une dernière isotopie $\phi_{t,4}$, qui fait tourner sept tout petits disques autour des quatre points $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ et des trois points selles, et dont le rôle est de faire tourner la différentielle sur les orbites périodiques, condition nécessaire à l'obtention d'un difféomorphisme faiblement tournant (voir la figure 7.4 en bas à droite). En composant ces quatre isotopies, on obtient un difféomorphisme $\widetilde{\phi}$ qui n'admet que six mesures invariantes[b] : le bord, les trois points selles du champ de gradient et les deux orbites périodiques $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$.

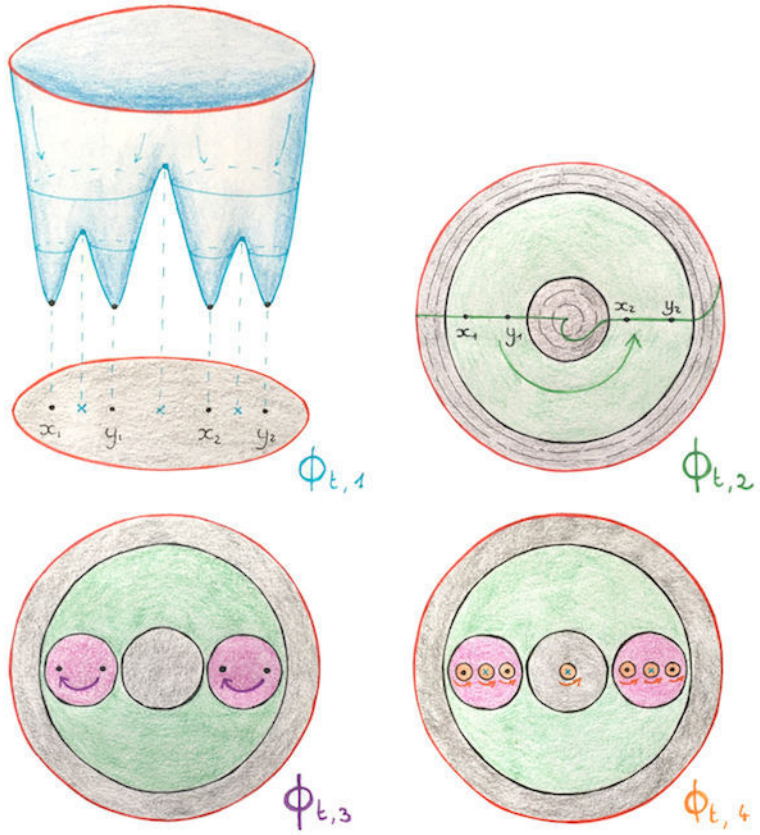


FIGURE 7.4 – Détail des quatre composantes de l'isotopie.

Le difféomorphisme $\widetilde{\phi}$ n'est pas fortement tournant, pourtant il voit s'enrouler positivement toutes les orbites qui sont génériques pour une certaine mesure invariante. Ce difféomorphisme sera dit

a. L'isotopie canoniquement associée à un twist est décrite page 119.
b. On fera bien attention de faire coïncider les points selles de ϕ_1 avec les centres des rotations.

faiblement tournant, comme nous le présentons ci-dessous.

Difféomorphismes faiblement tournants. Soient μ et ν deux mesures de probabilité invariantes. Au lieu d'intégrer la fonction Ang sur tous les couplages de ces deux mesures, on souhaite définir l'enroulement par $\widetilde{\psi}$ de μ et ν comme la moyenne des enroulements asymptotiques de tous les couples de points qu'elles portent, c'est-à-dire comme l'intégrale

$$\int \mathrm{Ang}_{\widetilde{\psi}}(x,y)\ d\mu(x)d\nu(y).$$

On suppose dans un premier temps que $\mu \times \nu$ ne charge pas la diagonale. Alors l'intégrale ci-dessus est bien définie ; on l'appelle l'*enroulement* par $\widetilde{\psi}$ des mesures μ et ν, noté $\mathrm{Enr}_{\widetilde{\psi}}(\mu,\nu)$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathrm{Enr}(\mu,\nu)$. Si $\mu \times \nu$ charge la diagonale, l'intégrale ci-dessus n'est pas bien définie ; mais comme remarqué précédemment, la fonction $\widetilde{\mathrm{Ang}}$, elle, est définie $\mu \times \nu$ presque partout, et son intégrale contre $\mu \times \nu$ est égale à $\mathrm{Enr}(\mu,\nu)$ lorsque ce dernier terme est défini. Cette remarque nous permet d'étendre Enr en une forme bilinéaire symétrique continue sur $\mathscr{M}(\psi)$, comme suit.

Définition 7.2.6. Soient μ et ν deux mesures de probabilité invariantes sous l'action de ψ. L'*enroulement* de μ et ν est donné par l'intégrale

$$\begin{aligned}\mathrm{Enr}(\mu,\nu) &= \int \widetilde{\mathrm{Ang}}(x,y)d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2-\mathrm{diag}} \mathrm{Ang}(x,y)d\mu(x)d\nu(y) + \int_{\mathbb{D}^2} \widetilde{\mathrm{Ang}}(x,x)d(\mu\times\nu)(x,x).\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mu = \nu$ est une orbite n-périodique, le second terme est égal à

$$\frac{1}{n}\,\mathscr{R}_\mu(\psi),$$

où $\mathscr{R}_\mu(\psi)$ est l'invariant de Ruelle associé à μ. On peut écrire plus précisément l'auto-enroulement de l'orbite périodique $\mu = \{x, \psi(x), \cdots, \psi^{N-1}(x)\}$ comme

$$\mathrm{Enr}(\mu,\mu) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j=0}^{N-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^j x) + \frac{1}{N}\widetilde{\mathrm{Ang}}(x,x). \tag{7.1}$$

Remarque . Si μ et ν sont deux mesures concentrées sur le bord du cercle, leur enroulement est précisément le nombre de translation de $\widetilde{\psi}_\partial$ – dont nous rappelons la définition :

$$\omega(\widetilde{\psi}_\partial) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{\psi}_\partial^n(x)}{n},$$

où $\widetilde{\psi}_\partial$ est interprété comme un relevé à $\mathbb{R}$ du difféomorphisme ψ_∂. Ce nombre est indépendant de x, et est modifié d'un entier lorsque qu'on remplace $\widetilde{\psi}$ par un autre relevé de ψ.

Théorème 7.2.7. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La forme bilinéaire* Enr *est strictement positive sur* $\mathscr{M}(\psi)$.
2. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{D}^2$ *qui n'appartiennent pas à une même orbite,*

$$\liminf_n \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^j y) > 0,$$

et pour tout $(x, x, \Delta) \in \mathscr{K}$ *tel que* x *est un point périodique de* ψ*,*

$$\liminf_n \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i\neq j=0}^{n-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^j x) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^i x, d_x\psi^i \Delta)\right) > 0.$$

Définition 7.2.8. Un difféomorphisme $\widetilde{\psi}$ de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$ qui vérifie les assertions du théorème est dit *faiblement tournant.*

Démonstration. Supposons d'abord l'assertion 2 vérifiée. Comme $\mathscr{M}(\psi)$ est la fermeture de l'enveloppe convexe des mesures ergodiques, il suffit de prouver que l'enroulement est strictement positif sur tous les couples de mesures ergodiques. Si μ et ν sont deux mesures ergodiques dont le produit ne charge pas la diagonale, la mesure $\mu \times \nu$ sur $(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 - \mathrm{diag})$ est ψ-invariante sous l'action de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et ergodique. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, il existe un couple (x, y) tel que

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^j y) = \int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2-\mathrm{diag}} \mathrm{Ang}\ d\mu d\nu.$$

La stricte positivité du terme de gauche entraîne celle du terme de droite, qu'on reconnaît comme étant précisément l'enroulement de μ et ν. Si, au contraire, $\mu = \nu = \{z, \psi(z), \cdots, \psi^{N-1}z\}$ est une orbite périodique, alors pour toute demi-droite Δ partant de z, on a, d'après le théorème 7.2.2 et l'expression de l'auto-enroulement de μ donnée par l'équation (7.1), l'égalité

$$\mathrm{Enr}(\mu, \mu) = \lim_n \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i\neq j=0}^{n-1} \mathrm{Ang}(\psi^i z, \psi^j z) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ang}(\psi^i z, \psi^i z, d_z\psi^i \Delta)\right).$$

Par hypothèse sur le terme de droite, $\mathrm{Enr}(\mu, \mu)$ est donc strictement positif.

Procédons maintenant par contraposition pour montrer $[1 \Rightarrow 2]$, en supposant que la seconde assertion ne soit pas vérifiée. La première possibilité est qu'il existe x un point d'une orbite périodique, Δ une demi-droite partant de x, et une suite d'entiers n_k tels que pour tout k,

$$\frac{1}{n_k^2}\left(\sum_{i\neq j=0}^{n_k-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^j y) + \sum_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x, \psi^i x, d_x\psi^i \Delta)\right) \leq 0.$$

Appelons μ la mesure ergodique correspondant à l'orbite de x. Comme on vient de le voir, la quantité ci-dessus tend en $k \to \infty$ vers $\mathrm{Enr}(\mu, \mu)$, et donc

$$\mathrm{Enr}(\mu, \mu) \leq 0,$$

ce qui contredit la première assertion. La seconde possibilité est qu'il existe deux points x_1, x_2 n'appartenant pas à la même orbite, et une suite d'entiers $(n_k)_k$ tels que

$$\forall k, \quad \frac{1}{n_k^2}\sum_{i,j=0}^{n_k-1} \mathrm{Ang}(\psi^i x_1, \psi^j x_2) \leq 0.$$

Pour $i = 1, 2$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mu_i^n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\psi^k(x_i)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on a convergence faible des mesures $\mu_1^{n_k}$ et $\mu_2^{n_k}$ vers deux mesures μ_1 et μ_2. On aimerait en conclure, comme dans la démonstration du théorème 7.2.4, que

$$\int \text{Ang } d\mu_1^{n_k} d\mu_2^{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int \text{Ang } d\mu_1 d\mu_2.$$

Malheureusement, même lorsque l'intégrale de droite est bien définie, la convergence n'est pas immédiate, car Ang n'est pas une fonction continue de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$. Il nous faut donc travailler sur $\mathscr{K}$, où Ang est continue. Comme x_1 et x_2 appartiennent à deux orbites distinctes, les mesures $\mu_1^{n_k} \times \mu_2^{n_k}$ ne chargent pas la diagonale ; elles peuvent ainsi être considérées comme des mesures sur $\mathscr{K}$, qu'on notera $\widehat{\mu}^{n_k}$. Cette suite de mesure converge, – quitte à extraire une sous-suite – vers une mesure limite $\widehat{\mu}$ sur$\mathscr{K}$. Comme Ang est continue sur $\mathscr{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\int \text{Ang } d\widehat{\mu} &= \lim_k \int_{\mathscr{K}} \text{Ang } d\widehat{\mu}^{n_k} \\
&= \lim_k \int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2-\text{diag}} \text{Ang } d\mu_1^{n_k} d\mu_2^{n_k} \\
&= \lim_k \left(\frac{1}{n_k^2} \sum_{i,j=0}^{n_k-1} \text{Ang}(\psi^i x_1, \psi^j x_2) \right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à montrer que $\int \text{Ang } d\widehat{\mu} = \text{Enr}(\mu_1, \mu_2)$. On distinguera deux cas de figure. Si les deux mesures limites μ_1 et μ_2 sont telles que leur produit ne charge pas la diagonale, alors $\mu_1 \times \mu_2$ peut être considérée comme une mesure sur $\mathscr{K}$, et on a $\widehat{\mu} = \mu_1 \times \mu_2$. En effet, pour toute fonction continue sur $\mathscr{K}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{K}} f \, d\widehat{\mu}^{n_k} &= \int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2-\text{diag}} f \, d\mu_1^{n_k} d\mu_2^{n_k} \\
&= \frac{1}{n_k^2} \sum_{i,j=0}^{n_k-1} f(\psi^i x_1, \psi^j x_2) \\
&= \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \left(\frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\psi^i x_1, \psi^j x_2) \right).
\end{aligned}$$

Comme $f(\,\text{-}\,, \psi^j x_2)$ est continue et que $\mu_1^{n_k}$ converge faiblement vers μ_1, la quantité entre parenthèses converge vers $\int_{\mathbb{D}^2} f(u, \psi^j x_2) d\mu_1(u)$. Comme $\int_{\mathbb{D}^2} f(u, \,\text{-}\,) d\mu_1(u)$ est continue et que $\mu_2^{n_k}$ converge faiblement vers μ_2, le terme de droite converge vers

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}^2} \left(\int_{\mathbb{D}^2} f(u,v) d\mu_1(u) \right) d\mu_2(v) &= \int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2-\text{diag}} f \, d\mu_1 d\mu_2 \\
&= \int_{\mathscr{K}} f \, d\mu_1 d\mu_2.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le terme de gauche converge vers $\int f d\widehat{\mu}$, d'où l'égalité $\widehat{\mu} = \mu_1 \times \mu_2$ sur $\mathscr{K}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Enr}(\mu_1, \mu_2) &= \int_{\mathscr{K}} \mathrm{Ang}\ d\mu_1 d\mu_2 \\ &= \int_{\mathscr{K}} \mathrm{Ang}\ d\widehat{\mu} \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Si, au contraire, μ_1 et μ_2 chargent des orbites périodiques communes, alors la restriction de $\mu_1 \times \mu_2$ à la diagonale est une somme au plus dénombrable de masses ponctuelles :

$$(\mu_1 \times \mu_2)_{|\,\mathrm{diag}} = \sum a_i \delta_{(z_i, z_i)}.$$

Sans surprise, la restriction de $\widehat{\mu}$ à la diagonale éclatée charge précisément les cercles $\mathscr{C}_{z_i} = \{(z_i, z_i, \Delta)\}$, chacun avec le poids a_i. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une famille de fonctions continues (f_k) qui converge vers le dirac δ_0, et, pour chaque point z du disque, les fonctions $\phi_{z,k}$ définies sur $\mathscr{K}$ par :

$$\phi_{z,k}(x, y, \Delta) = f_k(\|(x, y) - (z, z)\|),$$

qui tendent vers la fonction indicatrice de $\mathscr{C}_z$. Comme ces fonctions sont constantes sur les cercles $\mathscr{C}_z$, elles se projettent en des fonctions continues $\phi_{z,k}$ sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$, qui tendent vers le dirac $\delta_{(z,z)}$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{D}^2$ et tout entier k,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{K}} \phi_{z,k}\ d\widehat{\mu} &= \lim_n \int_{\mathscr{K}} \phi_{z,k}\ d\widehat{\mu}^{n_k} \\ &= \lim_n \int_{\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2} \phi_{z,k}\ d\mu_1^{n_k} d\mu_2^{n_k} \\ &= \int_{\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2} \phi_{z,k}\ d\mu_1 d\mu_2.\end{aligned}$$

Le terme de gauche converge en $k \to \infty$ vers $\widehat{\mu}(\mathscr{C}_z)$, et celui de droite vers $(\mu_1 \times \mu_2)\{z, z\}$. Ainsi $\widehat{\mu}(\mathscr{C}_z)$ vaut a_i si $z = z_i$, et 0 sinon. Par ailleurs, la mesure $\widehat{\mu}$ est invariante par la transformation $\widehat{\psi}$ définie, on le rappelle, comme l'extension continue de $\psi \times \psi$ à $\mathscr{K}$ tout entier, envoyant le triplet (x, x, Δ) sur $(\psi x, \psi x, d_x \psi \Delta)$. En effet, les mesures $\widehat{\mu}^{n_k}$ sont quasi-invariantes par $\widehat{\psi}$. Plus précisément,

$$\widehat{\psi}_* \widehat{\mu}^{n_k} - \widehat{\mu}^{n_k} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour la norme en variation totale. Le passage à la limite faible nous donne l'invariance par $\widehat{\psi}$ de $\widehat{\mu}$. Par le théorème ergodique de Birkhoff on a donc

$$\int_{\mathrm{diag}(\mathscr{K})} \mathrm{Ang}\ d\widehat{\mu} = \int_{\mathrm{diag}(\mathscr{K})} \widetilde{\mathrm{Ang}}\ d\widehat{\mu}.$$

Mais comme $\widetilde{\mathrm{Ang}}$ est constante sur les cercles $\mathscr{C}_z$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{diag}(\mathscr{K})} \widetilde{\mathrm{Ang}}\ d\widehat{\mu} &= \sum a_i \widetilde{\mathrm{Ang}}(z_i, z_i) \\ &= \int_{\mathrm{diag}(\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2)} \widetilde{\mathrm{Ang}}\ d\mu_1 d\mu_2.\end{aligned}$$

Sur le complémentaire de la diagonale, le même genre d'argument que précédemment montre que $\widehat{\mu} = \mu_1 \times \mu_2$, et donc

$$\int_{\mathscr{K}-\mathrm{diag}} \mathrm{Ang}\ d\widehat{\mu} = \int_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{D}^2-\mathrm{diag}} \mathrm{Ang}\ d\mu_1 d\mu_2.$$

En additionnant les deux contributions, on obtient

$$\int_{\mathscr{K}} \mathrm{Ang}\ d\widehat{\mu} = \mathrm{Enr}(\mu_1, \mu_2),$$

ce qui conclut la preuve.

□

Comme le montre le contre-exemple présenté plus haut, les deux notions ne sont pas équivalentes. Évidemment, fortement tournant implique faiblement tournant, mais l'inverse n'est pas vrai. C'est cette deuxième notion qui va nous permettre de lire dans l'application de premier retour le caractère lévogyre d'un flot admettant une section de Birkhoff en disque.

7.3 Enroulement versus enlacement

L'enroulement des orbites par un difféomorphisme $\widetilde{\psi}$ est étroitement lié à l'enlacement des feuilles de sa suspension.

7.3.1 Suspensions lévogyres

Un feuilletage admet toujours un paramétrage temporel qui le munisse d'une structure de flot de même régularité (on peut par exemple se donner une métrique riemannienne et prendre le paramétrage donné par la longueur des courbes). L'enlacement asymptotique de deux orbites d'un flot dépend du paramétrage temporel, donc l'application d'enlacement Enl, forme bilinéaire sur les mesures invariantes, aussi. Cependant, le fait que cette forme bilinéaire soit strictement positive, c'est-à-dire que le flot soit lévogyre, est stable par reparamétrage du temps [c].

Définition 7.3.1. Un feuilletage orienté de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ est dit *lévogyre* si tout flot ϕ^t qui lui est compatible est lévogyre.

On a vu section 7.1.2 que la suspension d'un difféomorphisme ne donne pas forcément lieu à un feuilletage $\mathscr{C}^1$. Mais ce défaut éventuel de différentiabilité ne concerne que la reliure – c'est-à-dire le bord de la section de Birkhoff. Dans tous les cas, le feuilletage obtenu est continu partout et différentiable dans le complémentaire de la reliure ; on peut donc définir l'enlacement pour tout flot de même régularité qui lui est compatible. En particulier, on peut toujours déterminer si la suspension d'un difféomorphisme $\widetilde{\psi}$ est lévogyre ou non, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant.

c. C'est clair lorsqu'on prend pour définition d'un flot lévogyre l'assertion 2 du théorème 5.2.5.

Théorème 7.3.2. *Soit $\widetilde{\psi}$ un élément de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$, et $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$ sa suspension. Alors $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$ est lévogyre si et seulement si $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant.*

Démonstration. En suivant la première construction de $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$, on obtient avant écrasement un tore solide de révolution dans $\mathbb{S}^3$, noté T, muni d'un flot Φ^t de classe $\mathscr{C}^1$. Montrons dans un premier temps que Φ^t est lévogyre si et seulement si $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant. Par le théorème 5.2.5, le flot Φ^t est lévogyre si et seulement si, pour tout couple de points (x, y) de $\mathbb{S}^3$,

$$\liminf_n \frac{1}{n^2} \operatorname{Enl}(k(x,n), k(y,n)) > 0,$$

où $k(x, T)$ est la courbe fermée obtenue en suivant l'orbite issue de x pendant le temps T et en refermant par la géodésique joignant $\Phi^T(x)$ à x. Une des manières de calculer $\operatorname{Enl}(k(x,n), k(y,n))$ est de fixer un point p de $\mathbb{S}^3$, de considérer tous les grands cercles passant par p, tous orientés de la même manière, et de compter – positivement ou négativement, selon l'orientation du croisement – les couples de points (x', y') tels que $x' \in k(x,n)$, $y' \in k(y,n)$, et tels que (p, x', y') appartienne à un même grand cercle, avec orientation directe[d]. Quitte à travailler dans $\mathbb{R}^3$ après projection stéréographique partant du point p, cela revient à calculer « classiquement » l'enlacement en comptant – positivement ou négativement, selon l'orientation du croisement – le nombre de fois où l'une des portions d'orbites se trouve au-dessus de l'autre. Parce qu'on est restreint à un tore de révolution autour de l'axe vertical, il s'agit en fait de compter le nombre de couples (x', y') appartenant à la même feuille $r_t(\Sigma_0)$, et tels que l'un soit au-dessus de l'autre. Par ailleurs, les effets de bord devenant négligeables en temps long, il est équivalent de restreindre ce comptage aux portions d'orbites, en oubliant les segments qui referment. Pour expliciter le signe du comptage, on notera $V_{x,t}$ la projection sur le plan horizontal du vecteur $\frac{d\psi}{dt}(x,t)$, et ε_A valant plus ou moins 1 selon que l'assertion A est vérifiée ou non. Prenons maintenant un couple de points (x, y) de $\mathbb{D}^2$, qu'on considèrera également comme un couple de points de $T \cap \{Arg z_1 = 0\}$. S'ils n'appartiennent pas à la même orbite, alors

$$\begin{aligned}
&\liminf_n \frac{1}{n^2} \operatorname{Enl}(k(x,n), k(y,n)) \\
&= \liminf_n \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{1}_{\{(t_1,t_2)\in[0,n]^2 \ ; \ \Phi^{t_1}x \text{ au-dessus de } \Phi^{t_2}y\}} \ \varepsilon_{\{(V_{x,t_1}, V_{y,t_2}) \text{ direct}\}} \\
&= \liminf_n \frac{1}{n^2} \sum \mathbb{1}_{\left\{(i+t,j+t)\in[0,n]^2 \ ; \ \operatorname{Arg}(\psi_{i+t}x - \psi_{j+t}y) = \frac{\pi}{2}\right\}} \ \varepsilon_{\left\{\frac{d}{dt}\operatorname{Arg}(\psi_{i+t}x - \psi_{j+t}y) > 0\right\}} \\
&= \liminf_n \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} \operatorname{Ang}(\psi^i x, \psi^j y).
\end{aligned}$$

S'ils appartiennent à une même orbite périodique γ, alors en éclatant γ comme détaillé dans l'annexe de fin de chapitre, on calcule son auto-enlacement en comptant d'une part les couples de points de γ qui sont l'un au-dessus de l'autre et, d'autre part, $v \in N_x\gamma$ étant fixé, les vecteurs $d_x\Phi^t(v)$ dont le projeté sur le fibré unitaire normal à γ est vertical. Sans surprise, cette somme de ± 1 est égale à

$$\liminf_n \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i\neq j=0}^{n-1} \operatorname{Ang}(\psi^i x, \psi^j y) + \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ang}(\psi^i x, \psi^i x, d_x\psi^i \Delta) \right).$$

Ainsi, Φ^t est lévogyre si et seulement si $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant.

Montrons maintenant que Φ^t est lévogyre si et seulement si le feuilletage $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$ l'est – on rappelle qu'on passe du premier au deuxième par écrasement de ∂T sur une courbe fermée. Il suffit pour cela

d. Pour plus de détails sur cette manière de calculer l'enlacement dans $\mathbb{S}^3$, nous renvoyons au chapitre 5, page 76.

de montrer que, pour un flot admettant une orbite périodique, en éclatant l'orbite périodique comme détaillé à la fin du chapitre, on ne modifie pas l'enlacement. C'est l'objet de la proposition 7.3.6. Cela étant admis, on conclut en remarquant que, si on munit le feuilletage $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$ d'un paramétrage temporel qui en fait un flot et si on éclate l'orbite périodique, alors on obtient un flot sur le tore solide T qui ne diffère de Φ^t que par un reparamétrage du temps. En particulier, si l'un est lévogyre l'autre l'est également. □

Nous sommes maintenant prêts à déterminer le caractère lévogyre d'un flot sur $\mathbb{S}^3$ admettant une section de Birkhoff en disque, avec la simple donnée de son application de premier retour et du relevé associé.

Théorème 7.3.3. *Soit ϕ^t un flot continûment différentiable sur $\mathbb{S}^3$, admettant une section de Birkhoff Σ difféomorphe à un disque. Soit ψ l'application de premier retour sur Σ, et $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{D}^2)$ le relevé de ψ donné par le flot*[e]*. Alors ϕ^t est lévogyre si et seulement si $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, $\widetilde{\psi}$ est faiblement tournant si et seulement si $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$ est lévogyre. Or, d'après le théorème 7.1.2, le flot ϕ^t et la suspension $\mathscr{S}_{\widetilde{\psi}}$ sont topologiquement équivalents, et l'homéomorphisme qui envoie orbite orientée sur orbite orientée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le complémentaire de l'orbite périodique. En particulier, cet homéomorphisme préserve le signe de la forme d'enlacement, et donc le caractère lévogyre. □

Cette correspondance entre flots et difféomorphismes permet de lire les théorèmes 7.2.7 et 7.2.3 comme des analogues discrets du théorème 5.2.5 présenté au chapitre 5, que nous rappelons ici.

Théorème 7.3.4 (Ghys, [24])**.** *Soit X un champ de vecteurs non singulier sur la sphère $\mathbb{S}^3$, engendrant un flot X^t. Soit Ω une forme de Gauss. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *X est lévogyre, i.e. la forme bilinéaire* Enl *est positive sur l'ensemble convexe $\mathscr{M}(X)$.*
- *Il existe $T > 0$ tel que, pour toute paire de points p_1, p_2 situés sur des orbites distinctes, l'intégrale $\int_0^T \int_0^T \Omega_{X^{t_1}(p_1), X^{t_2}(p_2)}(X_{X^{t_1}(p_1)}, X_{X^{t_2}(p_2)}) dt_1 dt_2$ est positive.*
- *Il existe une forme de Gauss $\overline{\Omega}$ ponctuellement positive sur X, c'est-à-dire telle que, pour toute paire de points distincts p_1, p_2, on ait $\overline{\Omega}_{(p_1,p_2)}(X_{p_1}, X_{p_2}) > 0$.*

7.3.2 Application au problème à trois corps

Le problème à trois corps restreint, plan et circulaire, dans sa version dégénérée $\mu = 0$, admet sur chaque niveau d'énergie une surface de Birkhoff en disque, sur laquelle l'application de premier retour ψ est un difféomorphisme intégrable. Chacun de ces disques est donc feuilleté par des cercles invariants. Les calculs numériques effectués à section 4.3.2 du chapitre 4 tendent à établir le fait suivant.

Conjecture 7.3.5. *Le nombre de rotation de l'application ψ restreinte à chacun des cercles invariant décroît strictement à mesure qu'on s'approche du bord.*

Par ailleurs, le bord du disque de section est parcouru positivement (on peut le vérifier à l'aide de l'équation 4.8). Ainsi, le relevé de ψ qui reconstitue par suspension le flot qui nous intéresse préserve lui aussi les cercles invariants, et admet sur chacun d'eux un nombre de translation positif ; autrement dit il fait asymptotiquement tourner chaque point dans le sens direct sur son cercle invariant. Ceci implique que l'application de premier retour est un difféomorphisme fortement tournant du disque : en effet l'enroulement asymptotique de deux points est précisément le nombre de translation du

e. Voir page **??** pour la manière de choisir canoniquement, à partir du flot ϕ^t, un relevé de ψ.

difféomorphisme restreint au cercle extérieur (ou au cercle auquel appartiennent les deux points, le cas échéant). Par le théorème 7.3.3, le cas $\mu = 0$ du problème à trois corps est donc lévogyre.

Remarque. Pour s'affranchir de l'étude malaisée du premier retour sur le disque – qui comporte actuellement une conjecture corroborée par des calculs numériques, mais pas démontrée – il faudrait travailler avec la section de Birkhoff en anneau, sur laquelle les formules sont plus simples. Cela nécessite de généraliser au cas de l'anneau la construction de la suspension d'un difféomorphisme, le notion de difféomorphisme tournant et la correspondance entre enroulement et enlacement. Nous ne voyons a priori pas d'obstacle à une telle généralisation.

Annexe : Éclatement de l'orbite périodique

Soit ϕ^t un flot continûment différentiable sur $\mathbb{S}^3$, admettant une section de Birkhoff Σ difféomorphe à un disque. On peut sans perte de généralité supposer que Σ est le disque $\{\operatorname{Arg} z_1 = 0\}$, bordé par l'orbite périodique $\partial\Sigma = \{z_1 = 0\}$.

Éclatement de $\partial\Sigma$. Écrivons $\mathbb{S}^3$ comme union – non disjointe – des deux tores solides $T_1 = \{|z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\}$ et $T_2 = \{|z_2|^2 \leq \frac{1}{2}\}$. Le tore T_1 est paramétré par $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ comme suit :

$$(w, \alpha) \mapsto \left(\frac{w}{\sqrt{2}} \, , \, \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{2}} \, e^{i\alpha} \right),$$

tandis que le tore T_2 est paramétré par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ comme suit :

$$(\beta, z) \mapsto \left(\sqrt{1 - \frac{|z|^2}{2}} \, e^{i\beta} \, , \, \frac{z}{\sqrt{2}} \right).$$

Ainsi, $\mathbb{S}^3$ est difféomorphe à la variété abstraite

$$(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \sqcup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2) \big/ (e^{i\beta}, \alpha) \sim (\beta, e^{i\alpha}).$$

Cette description de $\mathbb{S}^3$ nous permet aisément d'éclater $\partial\Sigma$ grâce aux coordonnées polaires sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. On nommera $\mathscr{E}$ cet éclatement, qui envoie le tore solide abstrait

$$T_0 = ([0,1] \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \sqcup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2) \big/ (1, \beta, \alpha) \sim (\beta, e^{i\alpha})$$

sur $\mathbb{S}^3$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathscr{E} \quad : \quad (r, \theta, \alpha) \in ([0,1] \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) &\mapsto \left(\frac{r}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \, , \, \sqrt{1 - \frac{r^2}{2}} \, e^{i\alpha} \right) \\ (\beta, z) \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2) &\mapsto \left(\sqrt{1 - \frac{|z|^2}{2}} \, e^{i\beta} \, , \, \frac{z}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on plonge T_0 dans $\mathbb{S}^3$ comme tore de révolution – et même : comme le tore de révolution T_2 – en envoyant le premier terme de l'union sur la partie annulaire $\{\frac{1}{4} \leq |z_2|^2 \leq \frac{1}{2}\}$, et le deuxième terme sur la partie tubulaire $\{0 \leq |z_2|^2 \leq \frac{1}{4}\}$, par le plongement $\mathscr{P}$ défini comme suit :

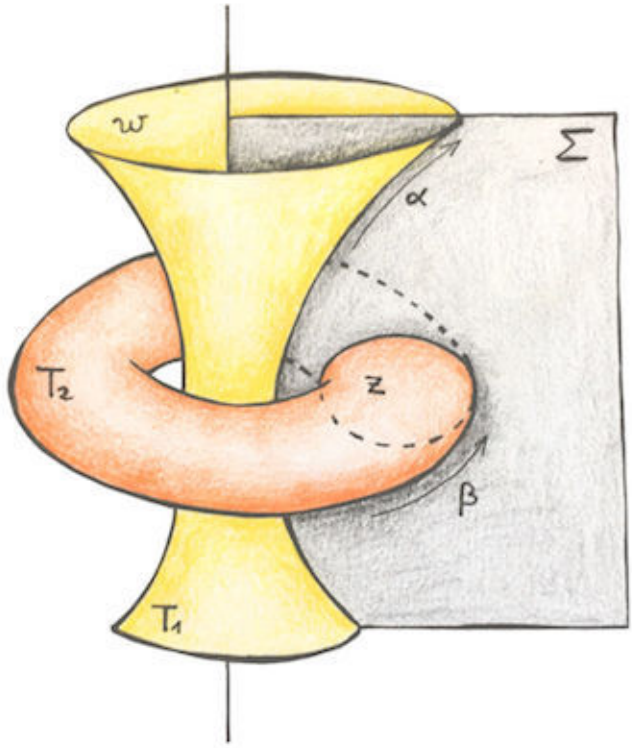
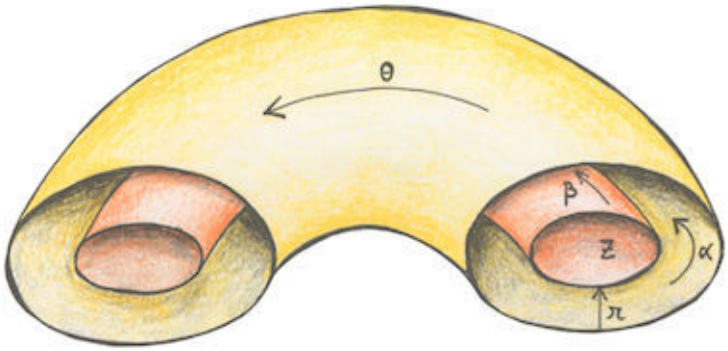


FIGURE 7.5 – Les tores T_1 et T_2 et leurs paramétrages respectifs, avant identification de leurs bords.

$$\mathscr{P} \quad : \quad (r,\theta,\alpha) \in ([0,1]\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1) \mapsto \left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{r^2}{4}}\, e^{i\theta}\ ,\ \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{r^2}{4}}\, e^{i\alpha}\right)$$
$$(\beta,z) \in (\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2) \mapsto \left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{|z|^2}{4}}\, e^{i\beta}\ ,\ \frac{z}{2}\right).$$



On vérifie sans problème que les applications $\mathscr{E}$ et $\mathscr{P}$ sont compatibles avec le recollement qui définit

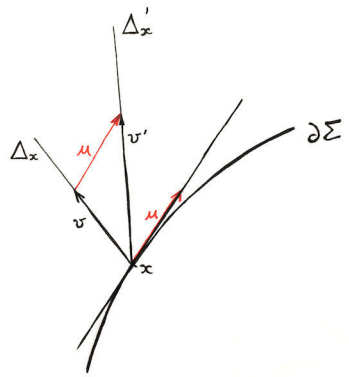
T_0. On considèrera désormais, pour éclater le flot, l'application

$$E = \mathscr{E} \circ \mathscr{P}^{-1} : T_2 \to \mathbb{S}^3.$$

Le tiré en arrière $(E^*\phi)^t$ munit $\mathring{T}_2$ d'un flot qui se prolonge au bord à l'aide de la différentielle de ϕ^t. Voyons ce dernier point plus en détail.

Prolongement au bord. L'idée est d'interpréter le bord du tore solide T_0 comme l'ensemble $\mathscr{T}$ des demi-droites « orthogonales » à $\partial\Sigma$, c'est-à-dire définies modulo la droite portant le champ :

$$\Delta_x \sim \Delta'_x \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, v \in \Delta_x, v' \in \Delta'_x, u \in T_x\partial\Sigma : v' = v + u.$$



Sur cet espace quotient agit le flot

$$(t, \Delta_x) \mapsto \overline{d_x\psi^t(\Delta_x)}.$$

Cette identification $\partial T_0 \simeq \mathscr{T}$ se fait comme suit : au triplet $(0, \theta, \alpha)$ du bord de T_0, on associe la demi-droite partant de $x = (e^{i\alpha}, 0)$ portée par le vecteur $v = (0, e^{i\theta})$.

Ainsi, en composant avec le plongement $\mathscr{P}$, on obtient un flot sur le tore de révolution T_2, qu'on nommera Φ^t.

Conservation de l'enlacement. L'éclatement E ne modifie pas l'enlacement ; cette assertion est l'objet de la proposition ci-dessous.

Proposition 7.3.6. *Soient x^0, y^0 deux points de T_2 qui ne sont pas sur une même orbite, et $x, y \in \mathbb{S}^3$ leurs images respectives par E. On notera $A(x, y)$ l'enlacement asymptotique des orbites de ϕ^t issues de x et y, et $A^0(x^0, y^0)$ l'enlacement asymptotique des orbites de Φ^t issues de x^0 et y^0. On se trouve alors dans l'un des deux cas suivants :*

1. *au moins un des deux points est dans l'intérieur de T_2, auquel cas $A^0(x^0, y^0) = A(x, y)$;*
2. *les deux points sont sur le bord de T_2, auquel cas $A^0(x^0, y^0)$ est l'auto-enlacement de l'orbite périodique.*

Démonstration. Le cas où x^0 et y^0 se trouvent dans l'intérieur du tore solide se traite en remarquant que $E_{|\mathring{T}_2}$ est un difféomorphisme $\mathring{T}_2 \to \mathbb{S}^3 \setminus \{z_1 = 0\}$ qui est différentiablement isotope à l'identité – disons par l'isotopie

$$E_s : (\sqrt{1 - r^2}\, e^{i\beta}, re^{i\alpha}) \mapsto \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{1+s}} e^{i\beta}, \frac{r}{\sqrt{1+s}}\, e^{i\alpha}\right).$$

En particulier, l'enlacement est conservé.

Si l'un des deux points – disons x^0 – est sur le bord, la déformation décrite ci-dessus recolle toutes les trajectoires du bord sur l'orbite périodique, et donc $A^0(x^0, y^0) = A(x, y)$.

Enfin, si les deux points sont sur le bord, on considère $(x_n^0)_n$ une suite de points appartenant à des orbites toutes distinctes, et qui tend vers x^0. Alors

$$\begin{aligned} A^0(x^0, y^0) &= \lim_n A^0(x_n^0, y^0) \\ &= \lim_n A(x_n, y). \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est précisément l'auto-enlacement de l'orbite périodique issue de x, telle que définie au chapitre 5, définition 5.2.2.

□

Conclusion

Le fait même que cette thèse existe est le signe d'une certaine reconnaissance institutionnelle de la diffusion des mathématiques comme d'une des activités des mathématiciens. Cette reconnaissance n'existe que grâce à tous ceux qui, depuis des années, ont usé de leur liberté pour s'investir dans la diffusion des mathématiques et travailler à sa reconnaissance, notamment institutionnelle. Merci à eux. Ils élargissent et ouvrent le champ mathématique. Ils permettent à d'autres sensibilités de trouver leur place et de s'exprimer. Ils ouvrent la porte à d'autres personnes, et à d'autres manières de faire.

Une grande distance a été parcourue, une grande distance reste à parcourir. Il est encore difficile pour des doctorants et des jeunes chercheurs de trouver une place dans la communauté mathématique, lorsqu'une large part de leur activité est dédiée à la diffusion.

Je clos donc cette thèse en exprimant un espoir – que de plus en plus de doctorants et de jeunes chercheurs découvrent malgré tout le plaisir de la diffusion, le plaisir de trouver des langages et d'inventer des formes pour partager ce qu'ils voient de beau dans les mathématiques. Qu'ils gardent la confiance que c'est comme ça qu'ils envisagent les maths, que c'est comme ça qu'ils veulent faire des maths. Qu'ils s'en donnent le droit et la possibilité, sans renoncer à leur activité de recherche. Parce que c'est intéressant, c'est motivant, c'est épanouissant, c'est gratifiant, c'est important. Qu'ils soient accompagnés et reconnus par la communauté.

Caminante son tus huellas
el camino y nada más ;
caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
Al andar se hace camino
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.

*****

Voyageur, ce sont tes traces
qui font le chemin, et rien d'autre ;
voyageur, il n'y a pas de chemin,
le chemin se fait en marchant.
En marchant on fait le chemin
et quand on regarde en arrière
on voit le sentier que jamais
on n'empruntera à nouveau.

— Antonio Machado

Annexes

Lune

Tom et Lou sont enfants de bergers. Quand l'herbe se fait rare dans la vallée, Tom, Lou et leurs deux parents quittent leur maison et montent sur la montagne où il y a de l'herbe fraîche pour leurs moutons. Mais la nuit, sur la montagne, le loup rôde, à la recherche de moutons à croquer. Alors chaque nuit, chacun son tour, les parents de Tom et Lou restent dehors avec le troupeau, pour surveiller et protéger les moutons. Et souvent Tom et Lou, qui aiment bien la nuit et son scintillement d'étoiles, restent dehors aussi. Ils s'allongent dans l'herbe douce et regardent le ciel. Ils imaginent que les étoiles dans le ciel forment des dessins, et que ces dessins racontent des histoires. Et ils inventent les histoires que racontent les étoiles.

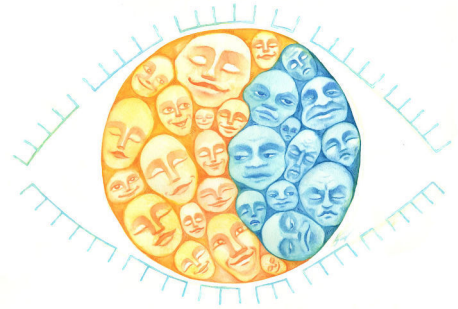
Une nuit, alors que la lune est toute ronde, toute blanche et brillante dans le ciel, Lou demande à Tom :
— Dis, Tom, c'est quoi la lune ?
Et Tom répond :
— Ben, la lune, c'est la lune.
— Oui mais c'est quoi ?
— C'est un fromage de brebis tout frais pour les ours du ciel. Quand ils ont faim ils en croquent un bout et c'est pour ça qu'elle disparaît petit à petit.
Lou sait très bien qu'il n'y a pas de fromage dans le ciel.
— Tom, sérieusement, c'est quoi ?
— Je ne sais pas... on n'a qu'à demander à Maman.

Les deux enfants vont rejoindre leur mère qui chantonne, assise contre un arbre.
— Dis Maman, c'est quoi la lune ?
— Ben, la lune, c'est la lune.
— Oui mais c'est quoi ?
— C'est le symbole de la féminité, petite Lou. Quand elle est pleine, comme ce soir, elle est là pour toutes les jeunes femmes, claires et brillantes, qui commencent leurs vies. Quand elle est en croissant, elle est là pour toutes les femmes, douces et courbées, qui élèvent des enfants et soignent des animaux. Et quand elle s'éteint, elle est toujours là. Elle est là pour toutes les vieilles femmes, légères et vacillantes, qui vont bientôt partir et ont besoin d'un guide pour ce voyage.

— Et moi ?
— Toi, petit Tom, tu as le soleil, pour te donner de la force et du courage.
— Ah oui, trop bien !
— Allez dormir maintenant les enfants, demain il faudra se lever tôt pour rejoindre le versant d'en face.

Pendant que son frère dort à ses côtés, Lou essaie de démêler les sentiments à l'intérieur d'elle. D'un côté, elle aime bien l'idée que la lune, toute blanche et brillante dans le ciel, veille sur elle, sur sa mère et sur sa grand-mère. D'un autre côté, elle trouve ça injuste que les garçons aient tout le soleil. Elle est sûre que les filles aussi ont besoin de force et de courage. Et puis surtout, elle a l'impression de n'avoir pas eu la réponse à sa question. Elle marmonne :
— La lune, ce n'est pas un symbole, c'est une vraie chose. C'est quoi ? D'où est-ce qu'elle vient ? Où est-ce qu'elle va ?
Et elle s'endort en marmonnant ses questions.

Le lendemain soir, à la nuit tombée, les deux enfants vont rejoindre leur père qui compte les moutons, assis contre un arbre.
— Dis Papa, c'est quoi la lune ?
— Ben, la lune, c'est la lune.
— Oui mais c'est quoi ?
— C'est l'œil du dieu de la paix, qui regarde le monde, et qui s'éteint ou s'allume selon que les hommes se disputent ou se réconcilient.
— Ça veut dire que les jours où je me dispute avec Tom, la lune disparaît un peu ?
— Non, c'est juste un symbole, pour nous rappeler que malgré nos colères, il faut toujours essayer de maintenir l'ordre et la paix. Et maintenant les enfants, allez dormir, demain il faudra se lever tôt pour la première tonte de l'été.



Pendant que son frère dort à côté d'elle, Lou réfléchit à ce qu'a dit son père. D'un côté, elle voudrait bien croire qu'il y a un dieu qui surveille les hommes et qui empêche la guerre de dévorer le monde. Mais d'un autre côté, elle ne trouve pas que la lune ressemble beaucoup à un œil. Et puis d'ailleurs, son père a dit que c'était un symbole. Un symbole d'œil ? Elle marmonne :

— La lune, ce n'est pas un symbole, c'est une vraie chose. C'est quoi ? D'où est-ce qu'elle vient ? Où est-ce qu'elle va ? Elle est grande comment ? Elle est loin comment ?
Et elle s'endort en marmonnant ses questions.

Le lendemain soir, dès la tombée de la nuit, Lou va s'allonger dans l'herbe pour contempler la lune, toute blanche et brillante dans le ciel étoilé. Tom vient s'allonger près d'elle.
— Dis Lou, on joue à trouver le bateau du capitaine et le château de la sorcière dans le ciel ?
— Non, je réfléchis.
— Tu réfléchis à quoi ?
— C'est quoi la lune ?
— Arrête ! On a déjà demandé à Maman et à Papa, on sait !
— Elle vient d'où ? Elle va où ? Elle est grande comment ? Elle est loin comment ?
— Mais on n'a pas besoin de savoir tout ça ! On joue ?
— Moi je veux savoir.
— Pourquoi ?
Lou ne répond pas. Elle ne sait pas quoi répondre. Elle ne sait pas pourquoi c'est important, de savoir et de comprendre. Mais elle veut savoir et elle veut comprendre. Tom s'impatiente :
— Puisque tu ne réponds pas, je m'en vais. Tu n'es pas drôle, je vais jouer tout seul.
Lou regarde son frère s'éloigner en boudant. Elle aimerait bien retourner poser ses questions à ses parents, mais ils ont l'air préoccupés. Les sourcils froncés, ils discutent à voix basse. Si un mouton est malade, ils n'auront sûrement pas envie de parler de la lune.

Alors, Lou se lève et s'en va. Elle tourne le dos à son frère qui boude et à ses parents qui discutent, elle traverse le troupeau de moutons qui la laisse passer sans un bêlement, et elle quitte le campement.

Elle marche droit devant elle, sur un petit sentier que la lune baigne de lumière opaline. La lune est face à elle, elle marche vers la lune. Elle marmonne :
— Si tu étais un symbole, tu ne ferais pas de la vraie lumière qui me permet de voir le chemin. Tu es quoi ? D'où est-ce que tu viens, où est-ce que tu vas ? Tu es loin comment ? Tu es grande comment ? Tu es un trou ? Tu es un disque ? Tu es une boule ? Pourquoi tu changes de forme tout le temps ? Tu es vivante ?
— Hé ! Fais attention petite !
Lou sursaute. À ses pieds il y a un lièvre qui la regarde, assis sur ses pattes de derrière.
— Tu as failli me rentrer dedans !
— Pardon...

— Tu es bien petite pour te promener toute seule la nuit. Tu es perdue ?
— Non, je réfléchis.
— On a besoin de se promener la nuit dans la montagne pour réfléchir ? Tu réfléchis à quoi ?
— C'est quoi la lune ?
— Ben, la lune c'est la lune.
— Oui mais c'est quoi ?
— Je n'en sais rien. Je n'ai pas le temps de réfléchir à ce genre de choses, je dois tout le temps courir pour échapper aux loups et aux renards, chercher de la nourriture pour ma famille, et trouver des abris sûrs pour nous protéger. Je n'ai pas le temps de réfléchir à ce genre de choses. Tu devrais demander à une chouette, elles connaissent beaucoup de choses les chouettes, elles savent sûrement ce qu'est la lune.
Et le lièvre, d'un bond, disparaît dans les fourrés.

Lou reste seule, un peu désemparée. Peut-être qu'il a raison, le lièvre : elle ne devrait pas se promener seule la nuit. Elle risque de se perdre et ses parents vont s'inquiéter. Pour se rassurer, elle se parle à voix haute :
— Si je suis le même chemin tout le temps, je ne vais pas me perdre, j'aurai juste à faire demi-tour. Je vais rentrer bientôt, personne n'aura remarqué mon absence. De toute façon ils sont trop occupés.
Et elle reprend sa marche, les yeux levés vers les arbres, à la recherche d'une chouette. Le sentier pénètre dans les sous-bois, et Lou le suit jusqu'à ce qu'elle voie, sur sa droite, des yeux ronds et jaunes qui luisent dans les feuillages. Alors elle quitte le sentier et se dirige vers les yeux jaunes. Au moment où elle distingue clairement une chouette, la chouette s'envole et va se poser sur une branche plus loin. Lou se rapproche. La chouette s'éloigne. Petit à petit, guidée par la lueur de plus en plus faible des yeux de la chouette, Lou s'enfonce dans les sous-bois.

Quand les arbres au-dessus de sa tête finissent de cacher tout à fait la lune, elle appelle :
— Chouette ! Attends, ne t'en va pas...
— Houhouuu !
— Ne t'en va pas, j'ai une question à te poser.
La chouette s'immobilise, les yeux grand ouverts dans l'obscurité.

— Pose ta question.
— C'est quoi la lune ?
— Ben, la lune, c'est la lune.
— Oui mais c'est quoi ?
— C'est trop loin pour que je sache. Moi, je connais le nom de tous les animaux de cette montagne,

l'âge de tous les arbres et les vertus de toutes les plantes. Mais la lune, c'est trop loin. Un jour, quand j'étais jeune, j'ai essayé de voler jusqu'à la lune. J'ai volé très longtemps, je suis allée plus haut qu'aucune chouette avant moi. J'ai volé jusqu'à l'endroit où les oiseaux ne peuvent plus respirer, et la lune était toujours aussi loin. J'ai failli mourir ; la lune c'est trop loin. Tu devrais demander au renard argenté, le monde a peu de mystères pour son regard vif et clair. Il saura peut-être.
Et la chouette, d'un battement d'ailes, disparaît dans les feuillages.

Lou reste seule, complètement perdue. Il fait très sombre, il n'y a plus de chemin. Elle sait qu'il est temps de rentrer, qu'elle s'est absentée longtemps et que ses parents doivent s'inquiéter, mais elle ne se rappelle plus par où elle est venue. Partout autour d'elle, des arbres qui se ressemblent tous. Elle voudrait se mettre à courir, mais dans quelle direction ? Elle appelle la chouette, en vain. Elle est seule et perdue ; elle ne rentrera pas cette nuit. Elle pense à ses parents qui doivent s'inquiéter terriblement, elle pense à son petit frère qui ne va pas réussir à s'endormir, elle pense à la nuit qu'elle va passer, toute seule dans ce bois sombre. À bout de forces, elle s'assied par terre et se met à pleurer, la tête dans les genoux.

C'est alors qu'elle entend une voix douce tout près d'elle.
— Bonsoir, petite fille.
Elle lève son visage et aperçoit des yeux gris clair, et une forme qu'elle devine être celle d'un renard, avec le bout pointu des oreilles, l'extrémité des pattes et la queue touffue qui captent le presque rien de lumière et le renvoient dans un léger scintillement d'argent.
— Qu'est-ce qui t'amène aussi profond dans la nuit ?
— Je suis perdue, je ne sais pas comment sortir du bois et retrouver mes parents, j'ai peur.
— Tu es sûre que c'est ça qui t'a amenée ici ?
— Non, c'est la chouette, j'ai suivi une chouette.
— C'est intéressant, de suivre une chouette. Les chouettes ont longuement survolé la montagne, elles connaissent beaucoup de choses.
— Celle-là ne connaissait pas la réponse à ma question.
— Quelle est ta question, petite fille ?
— C'est quoi la lune ?
— Drôle de question... La lune, c'est la lune, qu'y a-t-il à en savoir de plus ?
— D'où est-ce qu'elle vient ? Où est-ce qu'elle va ? Elle est grande comment ? Elle est loin comment ? C'est un trou ? C'est un disque ? C'est une boule ? Pourquoi elle change de forme tout le temps ? Elle est vivante ?

— Non, elle n'est pas vivante.
— Comment tu le sais ?

— Tout ce qui est vivant est un peu imprévisible, un peu mystérieux, un peu fou. Depuis aussi loin qu'on peut se souvenir, la lune croît, s'arrondit, décroît, disparaît, et recommence, sans un retard ni une variation. Son mouvement est aussi prévisible que celui d'une pierre qu'on lance. Tout ce qui vit se transforme, vieillit et meurt ; la lune est immuable comme une pierre.
— C'est une pierre alors ?
— Je ne sais pas. Je n'ai pas de réponse à tes autres questions, petite fille. Je sais écouter la respiration des arbres, je devine le désir des animaux, je sais lire la peur des insectes, je ressens l'angoisse des hommes. Je comprends ce qui est vivant, ce qui lutte et brille et veut. Je ne comprends pas la lune.
— Alors personne ne sait ?
— Je connais un vieil homme qui pose beaucoup de questions, comme toi. Comme personne ne pouvait répondre à ses questions, il a décidé de chercher les réponses tout seul, en observant et en réfléchissant. Dans la montagne, tous croient qu'il est un peu fou, mais moi je sais qu'il en connaît plus sur le monde que nous tous réunis.
— Il habite loin d'ici ?
— Si nous nous mettons en chemin maintenant, nous arriverons à sa cabane avant le lever du jour. Mais si tu préfères, je peux aussi te ramener vers tes parents.
Lou pense à ses parents qui doivent s'inquiéter terriblement, elle pense à son petit frère qui n'arrive sûrement pas à dormir. Elle a envie de retourner auprès d'eux, mais elle sait que si elle rentre sans réponses, ses questions ne vont pas disparaître. Elle sait que chaque nuit, elle scrutera le ciel avec ses questions toujours intactes et le regret de ne pas avoir rencontré le vieil homme qui observe et qui réfléchit. Alors Lou décide :
— S'il te plait, emmène-moi chez le vieil homme qui observe et qui réfléchit.
— Tu es courageuse, petite fille. Suis-moi.

Et Lou suit le renard argenté qui se fraye un passage entre les arbres. À la sortie du bois, posée sur une branche, la chouette les regarde de ses yeux ronds et jaunes.
— Houhouuu... Vous êtes sûrs que vous marchez dans la bonne direction ? De l'autre côté du bois il y a des bergers qui cherchent une petite fille.
Lou sent son cœur qui se pince, et quelque chose en elle qui la supplie de faire demi-tour. Mais elle répond :
— Nous marchons dans la bonne direction. S'il te plaît, chouette, peux-tu voler vers mes parents et leur dire que je vais bien, que je suis partie chercher ce qu'est la lune, et que je reviendrai bientôt ?

La chouette cligne des yeux et s'envole ; Lou la regarde s'élever au-dessus de sa tête et disparaître derrière les arbres. Et elle se remet en marche, suivant les pas du renard argenté qui se fraye un passage entre les rochers.

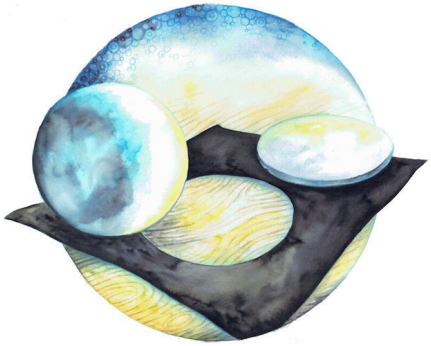
Ils marchent longtemps à travers les pierres, les herbes hautes, les buissons et les ruisseaux, doucement éclairés par la lumière de la lune. Quand la lune se couche derrière l'horizon, Lou aperçoit au loin une petite cabane.
— Tu es forte, petite fille. C'est ici que je te laisse.
Et le renard argenté, d'un glissement furtif, disparaît dans les rochers. Lou reste seule, exténuée. Elle s'avance jusqu'à la cabane, et s'arrête devant la porte. Il fait encore nuit et tout est silencieux. Comme elle n'ose pas frapper, elle s'allonge devant la cabane, sur la mousse, et s'endort.

Quand elle se réveille, elle est allongée dans un lit, au milieu d'une pièce remplie d'objets étranges. Il y a des ardoises recouvertes d'inscriptions à la craie et de dessins, des ficelles et des bâtons de toutes tailles, des miroirs et des morceaux de verre de toutes formes, des cubes, des boules et des objets géométriques de toutes sortes, des ressorts, des sabliers, et beaucoup d'autres objets que Lou ne reconnaît pas.

Elle se lève et sort de la cabane. Juste à l'endroit où elle s'est endormie, un vieil homme est assis, qui la regarde.

— Comment t'appelles-tu ?
— Je m'appelle Lou.
— Que cherches-tu ?
— C'est quoi la lune ?
— Que veux-tu savoir sur la lune ?
— D'où est-ce qu'elle vient ? Où est-ce qu'elle va ? Elle est grande comment ? Elle est loin comment ? C'est un trou ? C'est un disque ? C'est une boule ? Pourquoi elle change de forme tout le temps ? C'est de la pierre ? Du verre ? Du feu ?

L'homme disparaît dans sa cabane, et revient avec une petite boule blanche, un petit disque blanc, et un morceau de carton noir dans lequel est découpé un trou tout rond.



— On va s'occuper d'une question à la fois. Tu me diras ce soir si tu penses que c'est une boule, un disque ou un trou. Et il lui donne les trois objets. Puis, il se rassied et retourne dans ses pensées. Jusqu'au soir, Lou ne quitte pas la boule, le disque et le carton troué. Elle les regarde de près, de loin, les retourne, les lance, se demande lequel des trois ressemble le plus à une petite lune.

Quand la nuit tombe et que la lune se lève, Lou la fixe attentivement. Elle est toujours toute blanche et toute brillante, mais elle n'est plus ronde : il lui manque un petit croissant. Soudain, Lou se rend compte que la lune a toujours la même forme : un rond parfait auquel il manque un morceau plus ou moins gros.

Elle reprend le petit disque et l'incline un peu devant ses yeux. Ça ne ressemble pas à la lune, c'est ovale ! Puis elle attrape le bout de carton et le tend, incliné, devant ses yeux. Ça ne ressemble pas à la lune, c'est ovale ! Enfin, elle saisit la boule et la tient devant ses yeux en la tournant et en la bougeant un peu. C'est toujours un rond parfait, comme une lune à laquelle il ne manquerait pas de morceau. Alors qu'elle contemple, côte à côte, la lune et la petite boule qu'elle tient à bout de bras, elle entend la voix du vieil homme, juste derrière elle.

— La soupe est prête et le pain est chaud, Lou. Tu viens ?

À table, elle lui explique pourquoi elle pense que la lune est une boule : parce que c'est la seule forme qui est toujours ronde, quel que soit l'endroit depuis lequel on l'observe.

— Et la lune, elle est toujours ronde ?

— Non, mais elle n'est jamais ovale. C'est toujours un rond moins un morceau, parfois grand, parfois petit.

— Je crois que tu as raison.

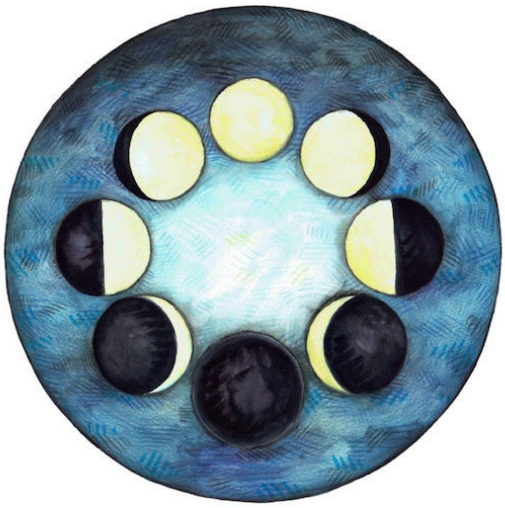
Avant d'aller dormir, Lou sort une dernière fois, pour dire bonne nuit à la lune.

— Bonne nuit, Lune. J'aimerais bien croire que tu m'entends et que tu veilles sur moi, mais je crois que tu es une boule. Et demain, peut-être, je saurai pourquoi il te manque des morceaux.

Le lendemain, Lou se lève très tôt, avant le soleil et avant le vieil homme. Elle sort de la cabane avec la petite boule dans la main. Elle observe la boule et réfléchit et observe la boule et réfléchit. Ce qu'il faudrait, pour que la boule ressemble à une petite lune, c'est peindre en noir le morceau manquant... Elle rentre en courant vers la cabane. Le vieil homme est assis devant la porte.

— Bonjour Lou. Que veux-tu ?

— Je voudrais peindre une partie de la boule en noir.



Le vieil homme disparaît dans sa cabane, et revient avec un petit pot de cirage noir. Parce que c'est plus facile, Lou peint la moitié de la boule en noir, comme quand la lune est à moitié pleine. Et alors, miracle ! Quel que soit l'endroit depuis lequel Lou observe la boule, la partie blanche a toujours une forme de lune : parfois pleine, parfois à demi pleine, parfois en croissant. Lou fait tourner lentement la boule sur elle-même et contemple la partie blanche qui prend toutes les formes que prend la lune nuit après nuit.

Jusqu'au soir, contente, Lou joue avec sa boule, explore les trésors étranges de la cabane en faisant bien attention à ne rien casser, et rêve à tout ce qu'elle pourrait comprendre en vivant ici. Quand la lune se lève, toute blanche et brillante, elle sort et s'assied devant la cabane, à côté du vieil homme.

— Mais pourquoi la lune est-elle à moitié blanche, à moitié noire ?

Le vieil homme disparaît dans sa cabane, et revient avec une lampe et une petite boule blanche. Il allume la lampe et la place sur le rebord de la fenêtre, puis il donne la petite boule blanche à Lou.

— Tiens-la à bout de bras devant toi, un peu au-dessus de ta tête, et tourne.

Lou tend son bras un peu au-dessus de sa tête. La partie éclairée de la boule est toute blanche, et l'autre partie toute sombre. Et à mesure que Lou se met à tourner, la partie éclairée prend toutes les formes que prend la lune nuit après nuit.

— Dis-moi Lou, que représente la lampe, à ton avis ?
— Le soleil.
— Et toi ?
— Moi je suis la terre.
— Tu es intelligente, petite. Tu vas repartir demain, je suis heureux de t'avoir rencontrée.
— Mais on n'a pas fini de répondre à mes questions !
— Tu pourrais rester ici des mois sans avoir fini de répondre à tes questions. Tes parents t'attendent, tu pourras continuer à observer et à réfléchir auprès d'eux. J'espère que tu n'auras jamais fini de répondre à tes questions, Lou. Et le vieil homme, d'un pas tranquille, disparaît dans sa cabane.

Le lendemain matin, Lou se lève tôt pour reprendre la route. Elle marche seule dans la montagne, en suivant le chemin que le vieil homme lui a indiqué. Elle pense à ses parents qui vont sûrement être un peu fâchés qu'elle soit partie si longtemps sans rien dire, mais qui seront peut-être aussi un peu fiers d'elle. Après tout, elle a trouvé presque toute seule des réponses à ses questions, en observant et en réfléchissant ! Dans une poche, elle a la petite boule blanche, et dans l'autre, la petite boule mi-noire, mi-blanche. Elle glisse ses mains dans ses poches pour s'assurer qu'elles sont toutes les deux là et trouve, surprise, un petit papier. Dessus, une inscription mystérieuse :

Peut-être que les éclipses de lune t'aideront à trouver combien la lune est loin ?

Lou sourit.

Liens invisibles

Lou n'avait pas d'amis. Pourtant elle aurait bien voulu. Elle essayait de se faire des amis : elle participait souvent aux jeux des autres enfants, elle souriait beaucoup, elle était toujours d'accord pour donner un coup de main. Les autres enfants l'aimaient bien, mais elle n'avait pas de véritable ami. Un ami, une amie, vous savez, cette personne à qui on peut raconter ses secrets, cette personne qui vient toujours nous voir quand elle a un problème, cette personne qu'on prend dans ses bras quand on est joyeux et quand on est triste, cette personne qu'on aime pour toute la vie. Lou regardait les enfants autour d'elle ; certains s'aimaient très fort, mais aucun ne l'aimait très fort, elle. Elle ne comprenait pas pourquoi. Est-ce qu'elle était bête, ou méchante ? Est-ce qu'elle s'y prenait mal ? Personne ne nous explique jamais comment on se fait des amis... Dans son école, il y avait deux autres enfants qui jouaient toujours seuls. Ils s'appelaient Johann et Elena, et ils ne semblaient pas non plus avoir d'amis. Plusieurs fois, Lou était allée voir Johann, mais Johann n'avait pas envie de jouer, il préférait les livres. Plusieurs fois, Lou était allée voir Elena, mais Elena souriait sans rien dire, sans répondre. Lou était un peu malheureuse. Quand elle n'avait pas la force de jouer et de rire avec les autres enfants en essayant de s'en faire des amis, elle restait dans la salle de classe pendant la récréation. Parfois, Elena ou Johann restait aussi, mais dans leur coin, sans parler.

Un jour qu'ils se retrouvaient tous les trois dans la salle de classe à l'heure de la récréation, Johann lisant, Elena se racontant des histoires à elle-même à voix basse et Lou regardant par la fenêtre les enfants qui jouaient dans la cour, la maîtresse apparut dans l'encadrure de la porte.

— Alors, les enfants, pas d'humeur à jouer à chat ?

Johann et Elena hochèrent la tête sans sortir de leurs histoires, et Lou regarda la maîtresse en pensant que si, elle aurait bien aimé être avec les autres dehors à jouer à chat... La maîtresse entra dans la classe.

— Vous voulez voir quelque chose d'incroyable ?

Elena s'interrompit, Johann leva la tête, et Lou répondit :

— Oui !

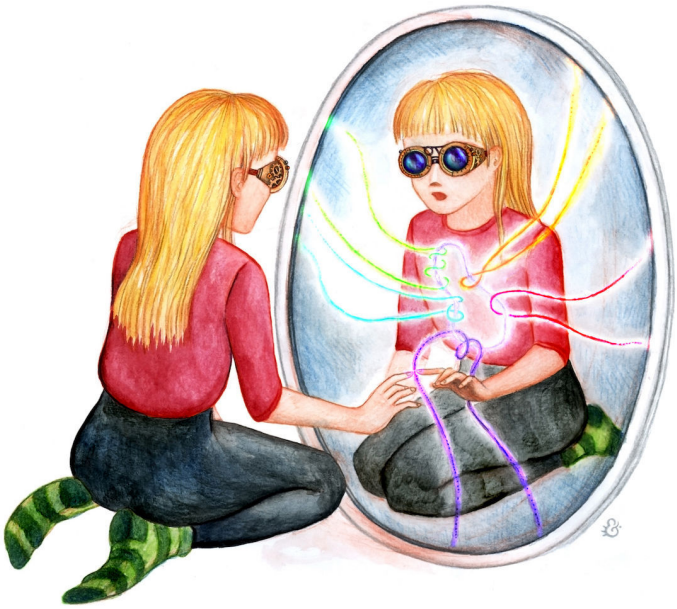
La maîtresse se dirigea vers la bibliothèque du fond et attrapa quelque chose sur la dernière étagère.

— Ça, c'est mon objet préféré dans tout l'univers !

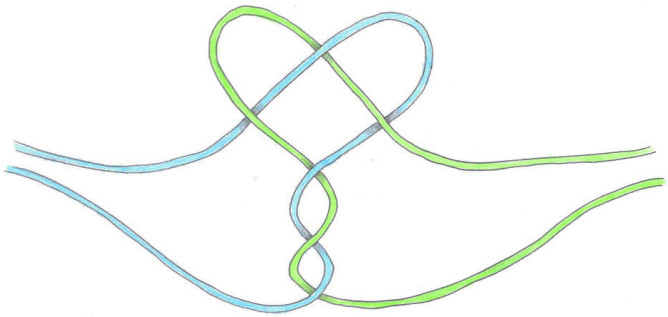
Elle tenait dans les mains quelque chose qui ressemblait à des lunettes. Mais des lunettes très étranges – Lou n'avait jamais rien vu de semblable – avec, à la place des verres, des petits cylindres qui semblaient abriter une mécanique complexe. Lou les mit sur son nez et les retira aussitôt. Wow ! Elles distordaient tellement sa vue que ça lui faisait mal ! Puis Johann les essaya à son tour, et les retira

aussitôt en fronçant les sourcils. Enfin, Elena les enfila et regarda longuement autour d'elle.
— Waouh...
— Quoi ? Qu'est-ce que tu vois ? demanda Lou.
— Euh... Je sais pas comme expliquer... répondit Elena.
— Il faut que tu apprennes toi-même à voir avec, Lou, intervint la maîtresse.
— Mais ça fait mal aux yeux ! protesta Lou.
— Au début, un petit peu. Mais à force, tes yeux vont s'habituer. Tu verras, ça en vaut la peine !
— Moi je vois des choses avec, dit Elena, mais je ne comprends pas ce que c'est. C'est quoi ?
— Peut-être que Lou et Johann pourront t'aider à comprendre quand ils y verront plus clair ? répondit la maîtresse.
Les trois enfants se mirent d'accord pour que Johann et Lou prennent les lunettes à tour de rôle pour s'entraîner à voir avec, jusqu'à ce qu'ils y arrivent tous les trois.

Au bout d'une semaine, Johann s'était habitué aux lunettes, mais Lou ne les supportait toujours pas. Tous les soirs, elle les essaya. Chaque soir, elle tenait un peu plus que la veille, quelques secondes de plus. Et puis un soir, enfin, elle mit les lunettes sur son nez et s'aperçut qu'elles ne la gênaient plus. Elle alla alors se regarder dans la glace. La première chose qu'elle vit fut, à l'intérieur de sa poitrine, une grande boucle en fil argenté, très fin. Dans cette boucle passaient quelques autre fils brillants, chacun d'une couleur différente. Chacun des ces fils était un morceau d'une grande boucle qu'elle ne voyait pas entièrement.



Deux de ces fils, un bleu turquoise et un vert émeraude, passaient plusieurs fois dans la boucle argentée. Elle suivit ces deux fils hors de sa chambre, puis le long de l'escalier, jusque dans la cuisine. Ses deux parents étaient là. Dans la poitrine de sa mère, il y avait la boucle vert émeraude qui s'enlaçait tant avec sa boucle argentée à elle, et dans la poitrine de son père, la boucle bleu turquoise. Et les deux boucles étaient reliées l'une à l'autre en un enchevêtrement complexe et harmonieux.



Lou enleva les lunettes. Tout était normal, ses parents discutaient entre eux, et elle ne voyait pas l'intérieur de leurs poitrines. Elle remit les lunettes ; à nouveau elle vit les fils brillants qui partaient de leurs poitrines à tous les trois et les reliaient les uns aux autres.

Le lendemain, les trois enfants passèrent toute leur récréation à regarder à tour de rôle à travers les lunettes. Dans la cour chaque enfant avait, dans la poitrine, une longue boucle faite d'un fil brillant, fin et coloré, et certaines de ces boucles étaient enlacées entre elles. Elena, Johann et Lou commencèrent à discuter.

— Il y a beaucoup trop de fils, on n'y comprend rien...

— Mais non, regarde, il y a exactement une boucle par personne, et chacune a une couleur différente.

— Il y a aussi des fils qui n'appartiennent à personne.

— Si, c'est juste qu'ils appartiennent à quelqu'un qui n'est pas là. Par exemple, cette boucle verte, c'est celle de ma maman.

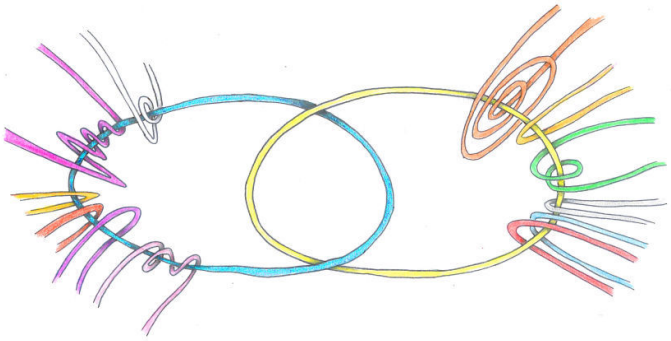
— Mais elle est pas là ta maman, pourquoi on voit sa boucle ?

— Ben, parce qu'elle passe dans la mienne...

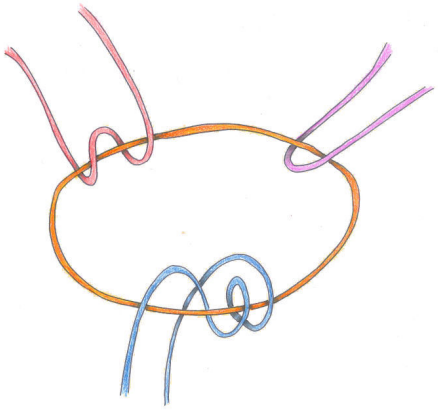
— Qui est-ce qui décide que deux boucles sont liées ?

— Je crois que c'est quand deux personnes s'aiment, leurs boucles se lient. Tiens, on va vérifier. Ils sont où Telian et Lilas ? Ils s'aiment trop, je suis sûre que leurs boucles sont attachées.

— Ils jouent là-bas. Tu as raison, leurs boucles sont attachées !

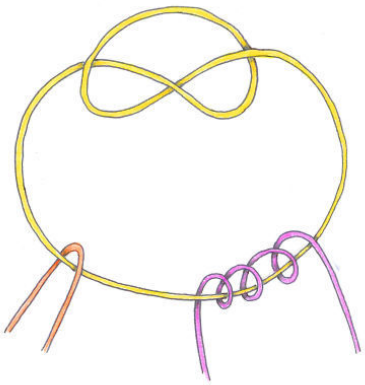


— Et quand on s'aime super fort, les boucles se traversent plusieurs fois. Tiens, regarde, ce fil bleu autour de ta boucle, je suis sûre qu'il est à ta maman ou à ton papa.

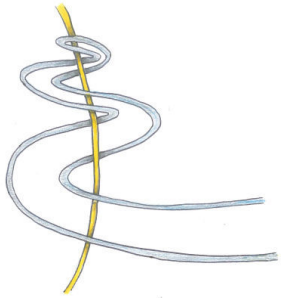


La boucle de Johann, couleur cuivre, était traversée par peu de fils ; seulement trois. Mais l'un d'entre eux, un fil bleu marine, s'entortillait beaucoup autour du fil cuivré de Johann.
Johann resta un moment silencieux.
— Non, il n'est pas à ma maman ou à mon papa. Il est à un enfant de mon ancienne école, qui m'a beaucoup fait mal.
— C'est pas quelqu'un que tu aimes ?
— Non.
Johann ne disait plus rien ; il regardait par terre. Lou ne savait pas quoi faire pour l'aider. Elle essaya de le faire rire pour lui changer les idées, en faisant quelques grimaces. Elena intervint :
— Laisse-le, Lou.

Un peu plus tard, alors qu'elle portait les lunettes, Lou remarqua – elle ne l'avait pas vu avant – que la boucle d'Elena, dorée, s'enlaçait avec elle-même.

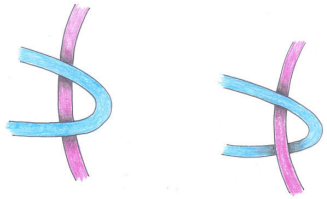


— Oh ! Elena, t'as vu ta boucle ? Elle fait un nœud !
— Oui, je sais.
— Pourquoi ? Qu'est-ce qui t'arrive ? T'es née comme ça ?
— Je sais pas.
Johann dit :
— Mon papa aussi il a un nœud. Et tous mes grand-parents. Mais je croyais qu'on attrapait des nœuds avec l'âge, je savais pas que les enfants pouvaient en avoir...
Elena murmura :
— Peut-être que j'ai un nœud depuis que mon papa est mort ?
En voyant les yeux d'Elena se remplir de larmes, Lou la prit vite dans ses bras et la serra fort contre elle. Puis elle dit :
— Et moi alors, qu'est-ce qu'elle a, ma boucle ? Pourquoi j'ai pas d'amis ?
Johann répondit :
— Elle fait des choses bizarres, ta boucle. Quand tu faisais un câlin à Elena ta boucle s'est enroulée autour de la sienne.
Elena ajouta :
— Oui, ça a fait ça aussi quand tu essayais de consoler Johann. On avait l'impression que vos boucles étaient très enlacées, mais là elle le sont plus du tout.

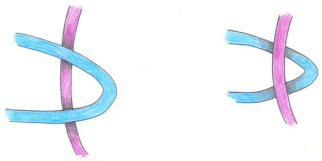


Lou réfléchit.
— Peut-être que ma boucle se désenlace tout le temps ?
Johann fronça les sourcils.
— Je n'ai pas l'impression que ça soit si facile, de se désenlacer... Je me demande si ta boucle s'enlace vraiment.
— Ben c'est toi qui as dit qu'elle s'enroulait beaucoup !
Elena intervint :
— On pourrait aller demander à la maîtresse ; sûrement elle comprend, elle.

Un instant plus tard, les trois enfants déboulaient dans la salle de classe, où la maîtresse corrigeait des cahiers.
— Tiens, mais qui voilà ? ! Alors, ces lunettes, elles vous plaisent ?
— On a une question : Lou sa boucle elle s'enroule tout le temps autour des brins des autres, mais elle reste jamais accrochée, pourquoi ?
— Ah, ça... c'est un peu mystérieux, la manière dont les enlacements se créent. Il faut, à un moment, que les deux brins se traversent l'un l'autre, se croisent, comme si en un point ils ne formaient qu'un. On peut enrouler sa boucle autant qu'on veut autour de celle de quelqu'un qui nous plait, mais tant qu'il n'y a pas de croisement il n'y a pas d'enlacement.



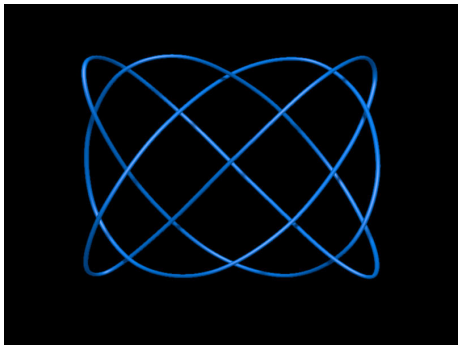
— Mais peut-être que ma boucle s'accroche et se décroche tout le temps ?
— Non, on ne peut jamais défaire un enlacement.
— Même quand on arrête de voir la personne ?
— Même quand on arrête de voir la personne.
— Même quand la personne meurt ?
— Si. Quand la personne meurt, sa boucle disparaît. Mais alors chaque boucle qui était enlacée avec s'enlace elle-même, toute seule. On pense que c'est un manière de garder la mémoire du lien.
— Et comment on fait pour croiser les brins ?
— Je ne sais pas. Je crois que ça se fait tout seul. Mais on ne peut pas le décider, et quand ça ne se fait pas, on ne peut pas le forcer. Quand un croisement a lieu avec une boucle qui n'est pas prête à s'enlacer, c'est un fait un croisement bizarre, un croisement double qui n'enlace pas...



Les trois enfants se taisaient. La maîtresse continua :
— Vous devriez regarder là-dedans, il y a plein de choses qui pourraient vous intéresser.

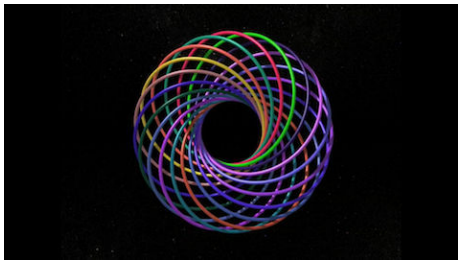
Elle attrapa sur la bibliothèque un vieux livre et le donna à Lou. Lou déchiffra à voix haute :
— *Enlacements remarquables.* Ça parle de quoi ?
— Vous verrez bien.

Dans le livre, Lou, Elena et Johann trouvèrent des dizaines de dessins de boucles, qui correspondaient à des vraies personnes qui avaient vraiment existé, et s'étaient enlacées de manières particulièrement étonnantes.
— Oh, regarde celui-là ! *Homme de 95 ans dont tous les proches sont morts.* Ça c'est un nœud compliqué !



Homme de 95 ans dont tous les proches sont morts

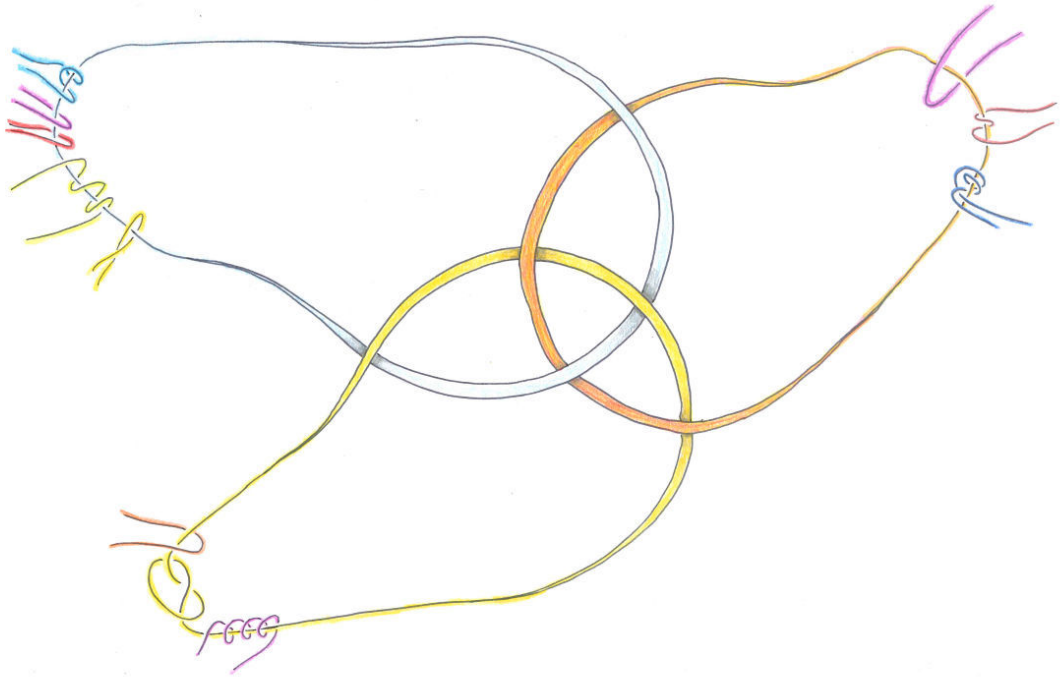
— Et celui-là ! *Dix-huit frères et sœurs.*



Dix-huit frères et sœurs

— Waouh ! Chaque boucle est enlacée avec chaque autre, et pourtant ça fait pas un gros paquet de nœuds.
— Regardez, là-bas : il y a une image manquante...
Sur une des pages du livre, l'image avait été découpée.
— Que dit le texte ?
— *Trois amis inséparables, non enlacés entre eux.* Ehhh, c'est pas possible ça !
Les trois enfants réfléchirent.
— Ben non, c'est pas possible. Si ils sont inséparables, c'est qu'ils sont enlacés.
Ils réfléchirent encore.
— C'est sûr, c'est pas possible. Si ils ne sont pas enlacés, alors on peut les séparer.
Ils décidèrent finalement de retourner voir la maîtresse. Ils la trouvèrent en train de dessiner à son bureau avec, sur le nez, une paire de lunettes semblables à celles qu'elle leur avait prêtées. Ils lui montrèrent la page dont l'image avait été découpée, et le texte incompréhensible qui l'accompagnait.
La maîtresse regarda le livre un instant, puis leva les yeux vers les trois enfants et éclata de rire.
— Vous alors, vous êtes extraordinaires !
— Hein ? Comment ? Pourquoi ?

— Il manque une image et hop ! vous la reconstruisez !
— Hein ? Quoi ? De quoi ?
— Regardez-vous ! L'image manquante, elle est dans l'entrelacs que vous formez avec vos trois boucles !
Lou, Elena et Johann mirent les lunettes à tour de rôle et regardèrent leurs trois boucles. Indubitablement, elles étaient liées, d'une certaine manière. Pourtant, la boucle de Lou ne s'enlaçait pas avec celle de Johann, ni avec celle d'Elena, et les boucles de Johann et Elena ne s'enlaçaient pas entre elles non plus.



Vous l'aurez deviné, ils devinrent amis, pour la vie.

Annexe A

Illustrations du conte *Lune* par des enfants de 8 ans

FIGURE A.1 – Représentation simplifiée de la lune, et reproduction fidèle de l'expérience de modélisation.

FIGURE A.2 – Reproduction complexe et précise de la lune selon les éléments du conte, avec intégration dans un paysage.

FIGURE A.3 – Tentative de reproduction complexe de la lune selon les éléments du conte, avec intégration dans un paysage.

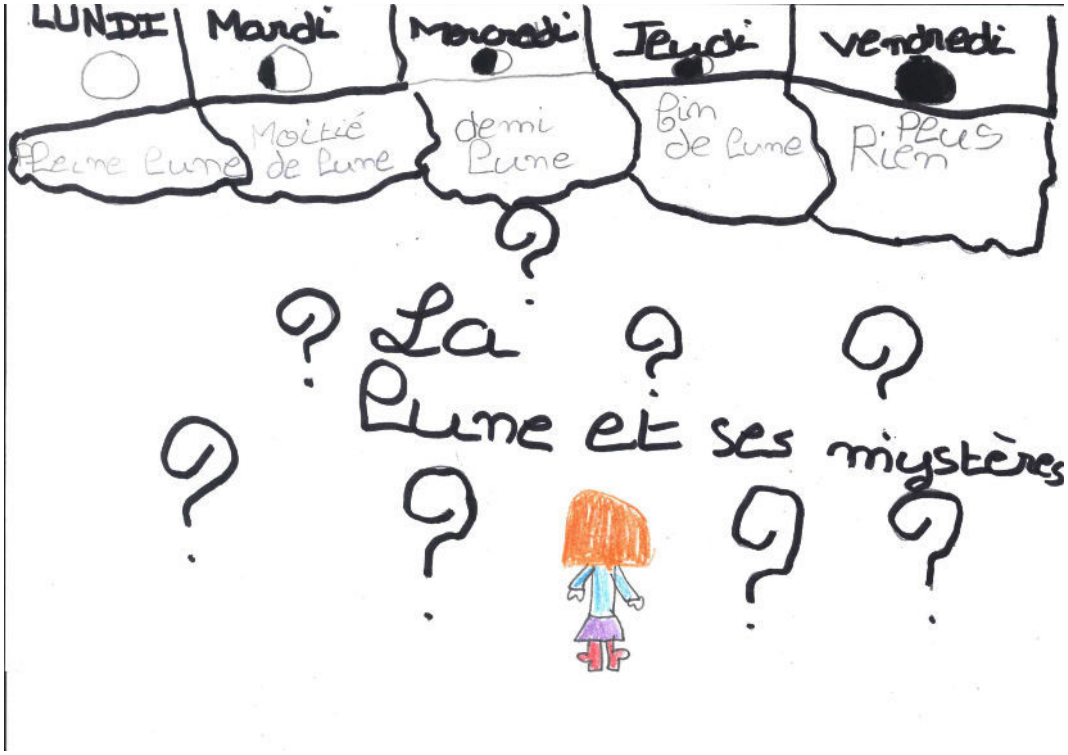


FIGURE A.4 – Un tableau des phases de la lune.

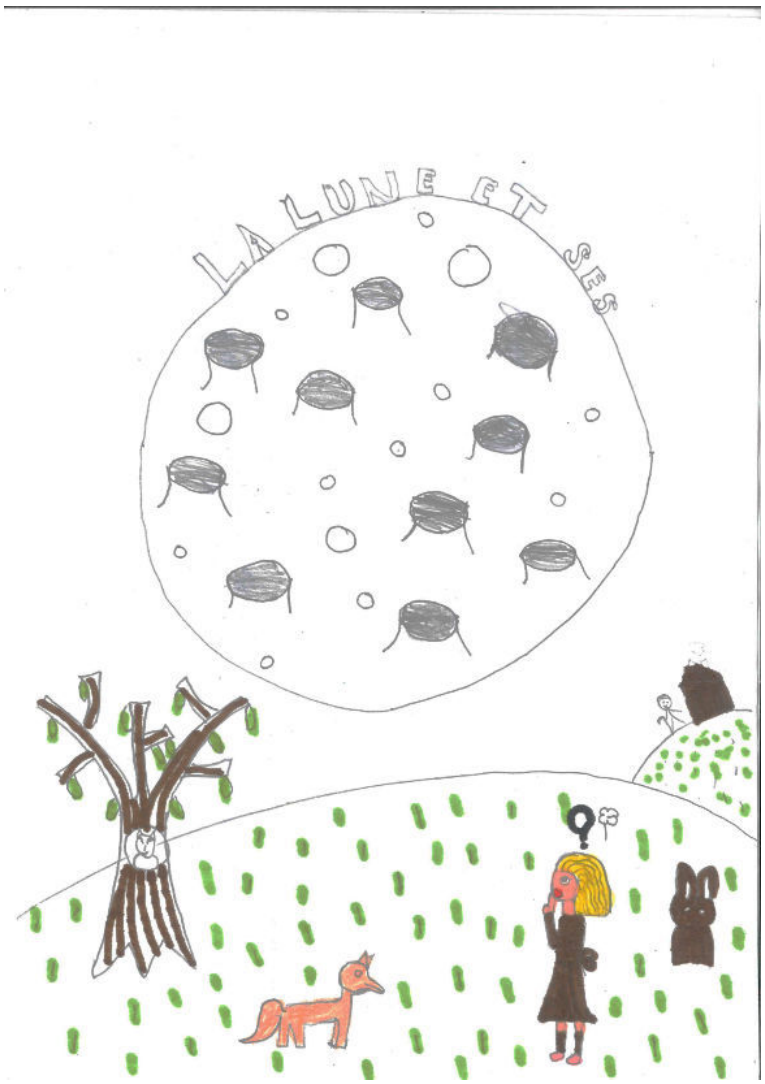


FIGURE A.5 – Une représentation détaillée de la lune, n'intégrant pas les éléments du conte.

FIGURE A.6 – Représentation de la lune selon les éléments du conte, avec ajout de relief.

FIGURE A.7 – Bon sens de la perspective, mais pas sollicité pour la représentation de la lune.

Annexe B

Illustrations du conte *Lune* par des enfants de 5 ans

FIGURE B.1 – Représentation de la lune comme d'un disque avec un croissant d'ombre. La compréhension géométrique de l'élève est peut-être bonne, mais l'imprécision du trait ne permet pas de l'affirmer.

FIGURE B.2 – Représentation relativement juste de la lune comme d'un disque avec un fin croissant d'ombre.

FIGURE B.3 – Représentation relativement juste, quoique très imprécise, de la lune comme d'un disque avec un croissant d'ombre.

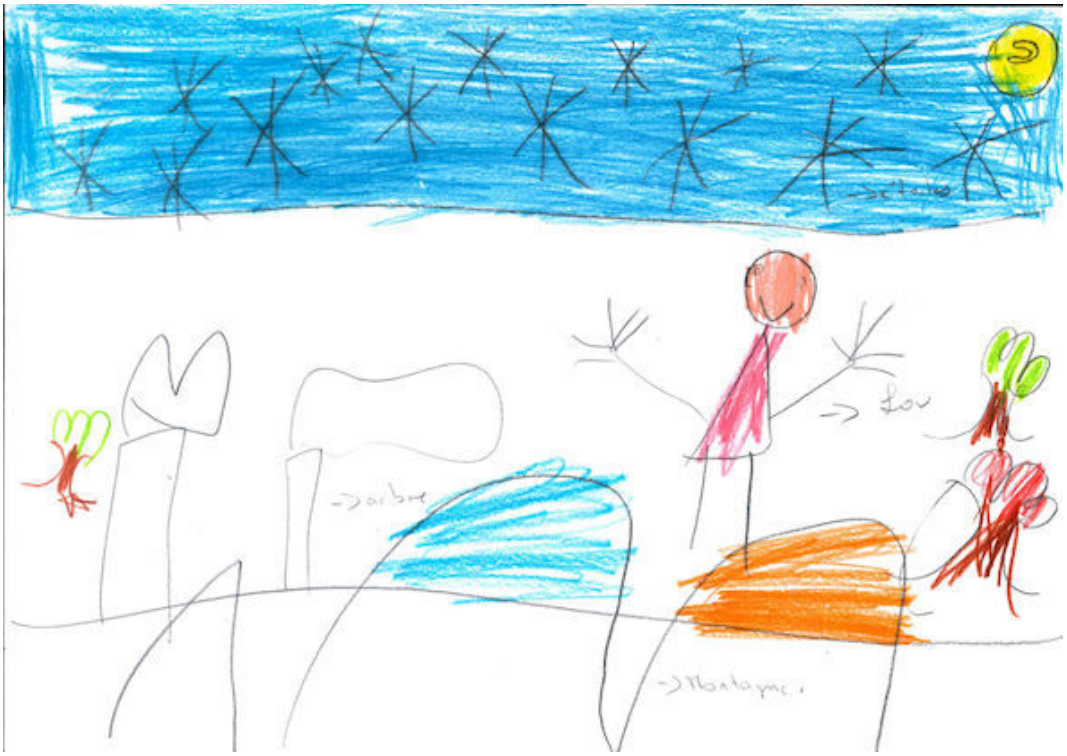


FIGURE B.4 – Tentative de représentation de la lune avec un croissant à l'intérieur d'un disque.

FIGURE B.5 – Tentative de représentation de la lune avec un croissant à l'extérieur d'un disque.

FIGURE B.6 – Dessin figurant Lou, le vieil homme, et la boule mi-blanche, mi-noire peinte par Lou pour modéliser la lune.

FIGURE B.7 – Dessin figurant Lou et le vieil homme, chacun tenant un des objets servant à modéliser la lune – la boule blanche et le carton troué, respectivement.

Annexe C

Les questionnaires remplis par les collégiens – un exemple

Checkpoints

Tu es

- ◯ un garçon
- ⊗ une fille

En quelle classe es-tu ?

En 6ème.

Checkpoint 1 – Pari : peux-tu deviner ce lien secret ?

Dans les trois images "les fils s'enlacent".

Checkpoint 2 – Opinion personnelle : d'après toi, ce conte

- ⊗ est intéressant
- ⊗ est émouvant
- ◯ est ennuyeux
- ◯ aide à comprendre des idées mathématiques
- ◯ est trop compliqué
- ⊗ donne envie d'en savoir plus
- ◯ n'a rien à faire dans une conférence de mathématiques
- ◯ autre :

Checkpoint 3 – À toi de jouer : dessine les anneaux borroméens !

Checkpoint 4 – Pari : combien de fois la boucle blanche s'enlace-t-elle avec la boucle verte ?

⊗ 1

Checkpoint 5 – À toi de jouer : représente le sens de vissage d'une vis droite !

Checkpoint 6 – Opinion personnelle : qu'as-tu préféré dans l'exposé :

- ⊗ le conte
- ◯ le tour de magie
- ◯ la définition de l'enlacement
- ◯ le vissage
- ◯ la feuille de checkpoints
- ◯ autre :

Pourquoi ?

Parce que ce conte m'a plus, il est originale et intéressant.

Annexe D

Retours des collégiens

Ci-dessous sont présentés les retours des collégiens sur la conférence construite autour du conte *Liens invisibles*.

À la question *D'après toi, ce conte...*, les réponses s'organisent comme suit :

	3F	3G	3NB	4F	4G	5F	5G	5NB	6F	6G
est intéressant	2	9	1	35	13	24	10	1	9	2
est émouvant	3	3	1	20	11	11	2		6	
est ennuyeux	1	2		4	4		4			1
aide à comprendre des idées mathématiques		2		3	7	4	6		1	
est trop compliqué		1		2	1	1	2			
donne envie d'en savoir plus	2	4	1	17	11	18	7	1	8	1
n'a rien à faire dans une conférence de mathématiques	1	2		4	2		3		2	3

À la question *Qu'as-tu préféré dans l'exposé ?* les réponses s'organisent comme suit :

	3F	3G	3NB	4F	4G	5F	5G	5NB	6F	6G
le conte	3	5	1	28	9	25	8	1	10	3
le tour de magie	2	6	1	19	14	15	14		3	2
la définition de l'enlacement	1		1	6	4	6	5		3	
le vissage		2	1	3	3	6	1		1	2
la feuille de checkpoint	1	1	1	8	6	5	4		1	1
autre	1	2	1	3	1					

autres éléments préférés : le sujet, le diaporama, les remerciements au public, l'oratrice, les explications, l'humour.

Annexe E

Retours des lycéens sur la *soirée contes*

Ci-dessous sont présentés les retours des lycéens sur la *soirée contes*, articulée autour des contes *Liens invisibles* et *Conte tout droit*.

> Assez sympa comme soirée, ça m'a permis de découvrir les maths d'une autre manière. Je ne pensais pas du tout que l'on pouvait intégrer les maths dans un conte, ça m'a surprise. Vous ne pouvez pas faire mieux, continuez comme ça car j'ai bien aimé.
>
> — *fille ; les maths : c'est difficile, je ne suis pas faite pour ça, c'est un peu ennuyeux, je n'aime pas beaucoup*

> C'est intéressant car elle mêle tous les sujets... la vie quotidienne, le fantastique et les mathématiques. Bien...
>
> — *fille ; les maths : c'est intéressant, je ne suis pas faite pour ça, j'aime – seulement quand je comprends*

> J'ai trouvé l'idée très intéressante, et on est tous happés dans l'histoire que vous contez, votre façon de parler et de regarder nous emmène dans un autre univers. J'ai trouvé les histoires enfantines et parfois cliché mais cela s'explique si le but est de rendre simple et intéressant les maths. Je pense que ça pourrait être encore plus intéressant avec un peu plus de poésie. Merci pour cette soirée et je vous souhaite de poursuivre en conteuse.
>
> — *fille ; les maths : c'est facile, je ne suis pas faite pour ça, c'est ennuyeux, je me sens à l'aise avec*

> Très bien. Conte agréable à écouter.
>
> — *fille ; les maths : c'est difficile, je ne suis pas faite pour ça, j'aime – mais tout dépend du sujet*

> Très beaux contes, et très belle façon de les raconter. La fin du premier conte semblait abrupte mais évidente et belle. C'était magnifique, j'ai passé un très bon moment.

— fille ; les maths : c'est intéressant, je me sens à l'aise avec

C'était très intéressant ça a donné une bonne ambiance et on apprend quand même des choses. J'étais calme.

— fille ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, je me sens à l'aise avec

Je me suis sentie concernée par le premier conte, les deux sont très intéressants et très bien illustrés, le deuxième conte est mon préféré, je suis psychorigide et les œuvres liées aux traits m'ont fascinée. J'ai mal compris les fils liés et enchaînés.

— fille ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec, j'aime quand j'ai tout compris

J'ai adoré cette soirée. J'adore les histoires et j'étais captivée par votre imagination et votre façon de raconter le conte. Je me suis un peu reconnue dans le personnage de Lou j'étais beaucoup dans les sentiments, la personnalité du personnage. J'ai été étonnée dans les formes courbes formées uniquement par des droites. J'ai trouvé la première histoire très belle et enfantine.

— fille ; les maths : c'est intéressant, j'aime

Soirée agréable car malgré le côté enfantin des contes, réel intérêt pour l'aspect mathématique.

— fille ; les maths : [c'est facile, c'est intéressant c'est difficile] ← ça dépend des chapitres, j'aime

C'était super ! Félicitations !!! Les dessins sont très beaux, cela permet de voir les maths différemment. Encore bravo !

— fille ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

J'ai apprécié le fait d'apprendre/découvrir les maths sous une autre forme. Je me suis sentie « hypnotisée » par les deux contes.

— fille ; les maths : c'est intéressant, c'est difficile, j'aime

J'ai trouvé ça bien, très intéressant de mélanger conte et mathématiques. J'ai pu découvrir un côté des maths que je ne connaissais pas et qui m'a beaucoup plu. Je me suis sentie très bien, merci.

— fille ; les maths : j'aime

Très bien, très bonne diction et histoire. Je me suis sentie apaisée. Super contes ! Premier conte : je me suis un peu emmêlée sur les histoires de liens.

— fille ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, j'aime

Ces contes sont superbes. Ils sont très reposants et doux. La diction était agréable et reposante.

— fille ; les maths : c'est intéressant, c'est difficile, j'aime

J'ai adoré l'ambiance, et les contes étaient très intéressants et les maths étaient bien intégrées et expliquées dans les contes.

— fille ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

Très relaxant. Bien, c'était très intéressant.

— fille ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec, ça n'est ni facile ni compliqué : cela dépend des thèmes abordés en classe

Cela m'a fait repenser à mon enfance tout en utilisant notre intelligence et réflexion de maintenant.

— garçon ; les maths : c'est intéressant, je ne suis pas fait pour ça

Je me suis senti hypnotisé ! Moi-même, je ne sais pas vers quoi je vais m'orienter dans la vie et l'idée de conteur m'était venue à l'esprit. Ce mélange entre du théâtre, de l'imagination et l'histoire narrée est magique et envoûtant ! J'adore ce que vous faites et je vous supporte pour vos prochains contes !

— garçon ; les maths : c'est difficile, je ne suis pas fait pour ça, je n'aime pas,

C'était assez intéressant.

— garçon ; les maths : c'est ennuyeux, je me sens à l'aise avec

C'était incroyable ! OKLM [a] je me suis senti. C'est une expérience à vivre.

— garçon ; les maths : c'est ennuyeux

Plutôt hypnotisant, relaxant. C'était très intéressant de voir le lien entre les droites et les courbes, entre les maths et les boucles.

— garçon ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

Très intéressant, ça fait chaud au cœur.

a. [Wikipédia – OKLM : Abréviation de « o kalm »pour au calme, née sur internet et popularisée par le rappeur Booba lors de la sortie de son single OKLM en 2014.]

— garçon ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec, j'adore c'est super intéressant et j'aime beaucoup la prof

C'était sympa, intéressant et je me suis senti bien au cours de cette soirée.

– garçon ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

C'est une très belle soirée avec vous, une femme très passionnée par son domaine. Les paroles étaient simples mais dégageaient quelque chose de très profond. Super soirée.

– garçon ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

J'ai trouvé ça beau.

— garçon ; les maths : j'aime, je me sens à l'aise avec

J'ai été très intéressé par ces contes. Le premier conte montre bien la vie de certaines personnes. De plus, le deuxième montre l'infinité de possibilités avec des droites. Continuez à écrire des contes car ils sont très bien.

— garçon ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

Bien.

— garçon ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

Les contes sont très intéressants et le lien avec les mathématiques également.

— garçon ; les maths : c'est facile, c'est intéressant, j'aime

Bravo pour vos contes ! J'ai beaucoup aimé le deuxième car il n'était pas imaginaire.

— garçon ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

Ça m'a fait revenir en enfance tout en faisant marcher mes méninges.

— garçon ; les maths : c'est intéressant, c'est difficile

Cette soirée contes était vraiment très intéressante. Je me suis senti très bien et très à l'écoute.

— garçon ; les maths : c'est intéressant, c'est difficile, je me sens à l'aise avec

Soirée bien.

— genre non binaire ; les maths : c'est intéressant, j'aime

C'était bien, j'ai bien aimé les histoires ; plus la première. J'ai été très concentrée et à fond dans l'histoire.

— genre non binaire ; les maths : je ne suis pas fait·e pour ça, j'aime

Très intéressant, de très beaux contes. Félicitations. Juste dommage pour ceux qui étaient à l'arrière et ne voyaient pas les images.

— genre non binaire ; les maths : c'est intéressant, j'aime, je me sens à l'aise avec

Annexe F

Visites de l'exposition virtuelle

Alpha

Profil : Femme, ∼25 ans. Rapport aux maths : n'a pas fait de maths depuis 10 ans, a l'impression d'avoir tout oublié et de ne plus rien savoir. Peu attirée par les mathématiques, ressenties comme déconnectées de sa réalité. Intéressée par l'existence de connexions entre les mathématiques et des questions qu'elle se pose.

Attentes avant de commencer la visite : « Mieux comprendre le ciel, retrouver le plaisir du jeu des maths que j'avais quand j'étais plus jeune et que j'ai complètement perdu, apprendre des choses qui vont m'enrichir et me dépayser. ».

Critères attendus : « Que ce soit pédagogique, intuitif, beau, ludique, scénarisé. Qu'il n'y ait pas de mots compliqués (je vais paniquer si il y a des mots que je ne comprends pas dès la première phrase). Qu'il y ait des liens avec d'autres disciplines »

Résumé de la visite Alpha est entrée dans la partie dynamique chaotique, dont le thème lui semblait plus familier. Elle a visité toutes les pages dans l'ordre, attentivement, en sautant ou en interrompant quelques éléments qui ne l'intéressaient pas. Elle s'est dite agréablement surprise et s'est montrée extrêmement enthousiaste. Elle s'est arrêtée à la fin de la partie, après 2h de visite, en disant qu'elle mettrait un onglet dans son navigateur dans l'idée de revenir et continuer la visite, mais qu'elle ne prendrait probablement jamais le temps de revenir.

Points remarquables

— Alpha a exprimé le besoin d'avoir quelques garanties sur la légitimité des concepteurs de l'exposition et des personnes interviewées à présenter cette exposition.

[En arrivant sur le site, elle est directement allée sur la page *Informations*]« J'ai envie d'être sûre de la légitimité. Je n'y connais rien en maths, je veux être sûre qu'on ne va pas me raconter n'importe quoi. »

[Sur la page *Chaos*, pendant l'interview d'Étienne Ghys, présenté comme « mathématicien »] « C'est quoi un mathématicien ? Tout le monde peut être mathématicien ? Qu'est-ce qui me prouve que ce mec-là il sait de quoi il parle ? »

— Les éléments qui ont véritablement intéressé Alpha sont ceux qui apportent un éclairage mathématique à des questions plus générales, et ceux qui présentent les mathématiciens et les mathématiques sous un jour plus humain.

[Après l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Chaos*] « Trop cool. Ça fait écho à des questions que je me suis déjà posées quand j'étais petite. »

[Après l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Le chaos se cache un peu*] « J'ai l'impression d'avoir compris, et ça m'a amusée de voir que la définition du chaos dépend du point de vue et de la perception. Ça rend le truc plus humain. J'ai toujours vu les maths comme quelque chose de figé, des équations... »

[Après l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Effet papillon*]« Ça me parle vachement. Ça commence à devenir vertigineux. Ce qui semble organisé est une somme de petits chaos. »

[En lisant la citation de Poincaré sur la page *Tout est possible*] « Oh, choupi ! J'aime bien quand on me parle des hommes derrière. Ça me fait voir que c'est une quête, un métier d'aventuriers et pas de mecs enfermés dans des labos. »

[En lisant le commentaire du troisième personnage sur la page *Cœur à cœur*]« C'est hyper intéressant la question de la spiritualité, de la foi. Moi intuitivement je me dirais que les mathématiciens sont des gens qui veulent prouver que Dieu n'existe pas, et ça n'a pas l'air d'être le cas. »

[À propos de la page *Cœur à cœur*]« J'aurais aimé avoir cette page ou un lien qui m'y mène en tout début. J'y serais allée de manière hyper intuitive en première page. »

[Après avoir écouté l'audio de Poincaré sur la page *Un scientifique dans la cité*]« C'est passionnant, et c'est trop bien, je suis trop contente. Ça m'a donné envie de le partager et de le réécouter. C'est plus général que les maths, c'est une question qu'on se pose tous : pourquoi est-ce qu'il y a des idées qui arrivent ? C'est l'une des plus belles définitions de l'intuition que j'aie entendues. »

— Elle a clairement changé d'état d'esprit au cours de sa visite. Elle est arrivée sur le site avec de fortes appréhensions, et a d'abord été sensible à ce qui la mettait en confiance – notamment des éléments de forme – puis elle s'est approprié le sujet et a cherché à vraiment comprendre ce qui était présenté, en rentrant dans une logique d'économie d'énergie pour se concentrer sur l'essentiel.

[En lisant le texte d'accueil de l'exposition] « C'est joli de parler de ça comme d'une promenade. Ça me parle vachement et ça me fait descendre en pression d'un coup. »

[Sur la page *Chaos*, à propos du petit personnage et de son commentaire] « C'est top le petit être vert qui m'explique. Ça faisait beaucoup, je savais pas quoi retenir, du coup le petit bonhomme qui m'aide, il tombe à pic. » [Plus généralement, à propos de ces petits personnages et de leurs commentaires] « Au début je lisais, et après moins. C'est une super idée. Ça donne un côté hyper rassurant ; chaque fois que je les lisais ça synthétisait ma pensée. C'est rassurant et ça cadre. Quand je me suis sentie plus confiante je les ai moins lus. »

[Sur la page *Deux soleils dans notre ciel*, en sautant l'audio de Flammarion] « Ça va encore m'emmener loin du sujet. Je suis rentrée dans une logique de « je veux comprendre le chaos ». Tout ce qui est à côté, je verrai peut-être plus tard, mais pour l'instant je me concentre sur ce que je suis en train d'apprendre. »

[À la fin de la page *Deux soleils dans notre ciel*, en voyant des propositions de parcours autour des biographies] « Les biographies des scientifiques, c'est exactement ce que je pensais vouloir trouver avant d'arriver sur le site, mais maintenant ce n'est plus ce dont j'ai envie ; j'ai envie d'apprendre ce que c'est que le chaos. »

[À propos de l'esthétique générale du site] « L'esthétique est très importante pour moi. C'est très beau ; les illustrations sont vraiment belles, c'est hyper intuitif. J'avais très peur que ça soit hyper noir ; toute cette allégorie autour du Petit Prince ça m'a libérée. »

— Alpha a montré une très faible tolérance aux formules et aux mots techniques, se sentant mise en difficulté dès qu'ils apparaissaient, même lorsqu'ils n'étaient pas nécessaires à la compréhension globale. En même temps, elle a regretté qu'il n'y ait pas plus de formules ou d'équations, qui lui auraient permis de reconnaître dans l'exposition virtuelle les mathématiques telles qu'elles les a connues au lycée.

[À la lecture du premier paragraphe de la première page visitée, la page *Chaos*, où il est question de « système dynamique chaotique »] « Là d'un coup je me sens con. Il faut que je relise cette phrase. Bon, du coup j'ai compris, mais il a fallu que je dépasse la première phrase qui m'a un peu braquée. »

[En regardant les simulations sur la page *Effet papillon*] « Ça m'intéresse pas trop. Je trouve ça joli, je comprends l'idée, mais je ne suis pas assez aguerrie pour comprendre exactement ce qui se passe. »

[En regardant les simulations sur la page *Tout est possible !*] « Comme ça commence à donner les valeurs des masses, j'ai l'impression qu'il faut commencer à calculer, se dire des choses du style « là, c'est plus lourd, donc ça va plus vite », et ça va me demander beaucoup plus d'énergie que de lire des textes ou d'écouter des vidéos. »

« J'aurais aimé quelque chose qui fasse le lien avec les maths que je connais, que j'ai vues au lycée. Des fois je me dis qu'il y a les vraies maths, et les maths de Marie. Ca pourrait être trop bien d'avoir de temps en temps un petit encart *Ce que font les matheux* avec des dérivées, des équations, qui montrent que c'est bien les mêmes maths. Ça réconcilierait l'adolescente que j'ai été avec les maths, d'apprendre que les dérivées que j'ai apprises, et ben ça sert à ça, ou ça. »

— Elle a été dérangée par le fait de ne pas comprendre certains éléments, notamment parce qu'elle n'a pas l'habitude de ne pas comprendre, et parce qu'elle a été encouragée tout au long de sa visite par un discours qu'elle comprenait et qui l'intéressait.

« Quand je ne comprenais pas, ça me gênait ; c'est rare que je me retrouve confrontée à des choses que je ne comprends pas. Et comme votre exposition est tellement pédagogique, c'est encore plus surprenant. »

[En regardant le diaporama sur la page *Pas de calcul*[a]] « Ça me fait une drôle d'impression. Comme c'est dit qu'on ne va pas comprendre, je me mets un challenge, et je me concentre. Tu parles beaucoup plus vite que dans la vidéo précédente. Je me dis qu'il y a plusieurs niveaux dans cette expo, et qu'il faut aussi donner à manger à des gens qui comprennent beaucoup mieux. Mais ça, c'est pas pour moi, je me sens un peu exclue. Ça me laisse une impression négative. J'aurais préféré que ce soit écrit « niveau avancé ». Là, c'est dit sans être dit. Vous me prévenez que je vais pas comprendre, j'enfreins vos conseils, et là ça me confirme que vous êtes intelligents, que vous connaissez le niveau que je suis capable de suivre, que vous avez raison. »

— Elle a exprimé le regret que ne soient présentées que des découvertes passées, et qu'on n'aborde pas les enjeux actuels de la recherche mathématique.

« J'aurais aimé voir des mathématiciens modernes. Là, l'impression que ça me donne, c'est que les mathématiques sont le fondement de notre société, mais aussi que c'est une science morte. Je rêverais d'une page qui présente les grandes questions des mathématiciens d'aujourd'hui, leurs quêtes, les thèses qui ont révolutionné les mathématiques. On parle toujours d'hier, j'aimerais qu'on me parle de demain. »

— Alpha n'a pas été déçue lorsque ce qu'elle voyait ne correspondait pas à ce à quoi elle s'attendait.

a. Le texte précédant ce diaporama spécifie qu'il ne s'agit pas d'expliquer quoi que ce soit, mais de donner à voir les notions et les images avec lesquelles travaillent les mathématiciens qui étudient le problème à trois corps restreint.

« Ce n'est pas embêtant que ça n'ait pas entièrement répondu à mes attentes a priori ; j'adore être surprise. »

Bravo

Profil : Homme, ∼20 ans. Rapport aux maths : à l'aise, a envie d'apprendre des choses intéressantes, cherche à retrouver un bon rapport prof-élève, a envie de réfléchir par lui-même.

Attentes avant de commencer la visite : « apprendre des choses, que ce soit accessible, que je comprenne, en ressortir avec deux ou trois choses que je ne savais pas, qu'on me pose des problèmes, qu'on me fasse réfléchir. »

Critères attendus : « la simplicité (pas de grands textes à lire, langage efficace), site agréable et un peu joli. »

N'avait encore jamais visité d'exposition virtuelle.

Résumé de la visite Bravo a pris le temps en arrivant sur le site d'en comprendre la structure pour pouvoir le visiter « dans l'ordre ». Il a commencé par la partie *Deux astres en tête à tête*, et a suivi le parcours. Il a parcouru environ les trois quarts de l'exposition, presque exhaustivement, en sautant quelques parties qu'il a survolées rapidement et qui ne l'intéressaient pas. Au bout d'environ 4 heures (il a visité l'exposition en deux temps), il est parti en disant « Je m'arrête ici, je reviendrai peut-être, peut-être pas. Je commence à fatiguer. »

Points remarquables

— Bravo ne s'intéresse pas aux biographies (il a sauté les pages sur Kepler et sur Newton, la partie sur Flammarion), ni généralement aux faits et aux anecdotes (les noms des étoiles doubles et la distance qui les sépare de la terre, par exemple, ne l'intéressent pas). Il s'intéresse aux idées, à leur histoire et à comment elles se relient à ce qu'il connaît déjà, à son quotidien, et les unes aux autres.

[En regardant la vidéo sur le principe fondamental de la dynamique] « Tout ça je connais, ce qui m'intéresse c'est la manière dont c'est expliqué, pour pouvoir restructurer mes connaissances et pouvoir moi-même l'expliquer. »

[Pendant le quizz sur l'ellipse] « Je trouve ça cool de jeter un regard sur mon quotidien et d'y voir des maths. Les équations m'intéressent moins. »

[En regardant la vidéo montée avec le logiciel Stellarium] « La vidéo montre plein de choses du quotidien qu'on ne peut pas voir. Ça apporte une vision différente sur quelque chose qu'on connaît déjà ; c'est plus intéressant encore que les choses qu'on ne connaît pas. »

— Il s'est impliqué autant que possible (en répondant mentalement aux questions posées, en faisant le quizz, en mobilisant ses propres connaissances pour les confronter à ce qu'il lisait) et a regretté de ne pas pouvoir participer plus.

[En répondant au quizz] « Ah c'est trop cool les quizz ! J'aime pas quand on m'explique des trucs, j'aime bien quand on me pose des problèmes. »

[En découvrant la page *Paradoxe de l'attraction*] « C'est bien le mot « paradoxe » ; en plus il y a une question, ça va être un problème. C'est cool d'avoir un chapitre qui commence par une question. »

[En lisant le premier paragraphe de la page *Deux soleils dans notre ciel*] « J'aime bien la dernière question. J'aime bien qu'on m'interpelle, pour me demander mon rapport avec ce qu'on est en train d'étudier, me demander comment je ferais, ce que j'en pense, etc.

— Bravo n'a pas du tout aimé l'entrée du site, qui ne permet pas d'en appréhender rapidement la structure globale, et l'a obligé à avancer à l'aveugle. Il n'a pas aimé le fait que les parties soient toutes indépendantes et que la navigation soit aussi libre ; il aurait préféré que la structure des informations soit apparente.

  [À propos des bloc dépliants sur la page *Vive l'ellipse !*] « J'aime bien ça. C'est très pédagogique, j'aime bien les trucs pédagogiques. Il y a un plan, tu vois en un seul coup d'oeil tout ce que tu viens d'apprendre. C'est mieux que les diaporamas. »

— Il n'a en général pas aimé les discours des mathématiciens sur les mathématiques, qu'il a ressentis comme des tentatives de l'impressionner en lui vantant la beauté des mathématiques. Exception : les discours à la première personne, où s'expriment des opinions personnelles. Il n'a pas lu les commentaires des petits personnages.

  [En regardant la vidéo d'Étienne Ghys sur le problème à deux corps] « Là, j'ai peur, j'ai envie qu'on m'explique des maths et pas la philo sur les maths, que je connais déjà. J'aime pas quand on me parle des maths en essayant de me montrer comment c'est beau. »

  [Après la vidéo d'Étienne Ghys sur l'effet papillon] « Je suis agréablement surpris. Je pensais qu'on allait encore me vanter l'effet papillon, qui est un des exemples sexy des maths. Quand il a dit *c'est l'une des rares notions mathématiques qui soient passées dans le grand public*, ça m'a intéressé, ça rejoint ce que je ressens et ça change de ce qu'on entend d'habitude. »

— Bravo a apprécié la diversité des supports. Il déplore que les interviews ne soient pas plus accompagnées d'images.

  « Le fait de changer de style et de support permet d'aérer le cerveau. »

  [Après l'interview d'Étienne Ghys sur le problème à deux corps] « Ça ne sert à rien de voir sa tête pendant trois minutes. Une vidéo ça sert à avoir de jolies images, sinon autant un texte. »

  [En voyant les images qui accompagnent la vidéo d'Alain Chenciner sur le problème à trois corps] « Ah voilà ! J'aime bien ça. »

  [En regardant la vidéo montée avec le logiciel Stellarium] « C'est super quand tu as une voix off et des images. »

— Il a semblé assez peu sensible aux aspects personnels. Il a sauté les biographies, a exprimé une nette préférence pour les vidéos avec des images et une voix en off par rapport aux interviews filmées ; il n'a pas aimé la page *Fictions* (« Ça m'a un peu saoulé, on a trop parlé d'autre chose que de maths »). Il a cependant trouvé, la première fois qu'il l'a vu, qu'Alain Chenciner avait « l'air sympa », et s'est réjoui de découvrir une deuxième vidéo avec lui.

— Pour Bravo, le contrat implicite, qu'il a spontanément qualifié de *pédagogique*, était assez clair : « J'attends que ça soit agréable, accessible et pédagogique. Pédagogique : on me dit de quoi on va parler et pourquoi. Le contrat : je passe du temps sur ton site internet, tu vas passer du temps à être pédagogue. Tu me dis de quoi on va parler, et tu en parles. Tu me mets en confiance, pour que je n'aie pas à me poser de question. Le contrat pédagogique : fais-moi confiance et je vais bien te mener. C'est important d'éviter toute expérience désagréable. Si je commence à être suspicieux, je vais être moins disponible. » À deux reprises, Bravo a relevé de telles « expériences désagréables » :

  — [À la lecture d'une phrase que sa construction rendait ambiguë] « Ce que j'attends, c'est que la lecture soit vraiment simple et que les efforts de lecture ne soient que sur les mathématiques. »

  — [En s'apercevant sur la page *Tout est possible* qu'il avait déjà vu sur d'autres pages les trajectoires présentées] « La plupart sont les mêmes que précédemment. C'est pas très

grave. Mais maintenant je vais être suspicieux pour la suite. Ça me prend de l'attention de me demander si j'ai déjà vu ça, et où. »

Il a néanmoins réagi positivement à quelques surprises, notamment sur la page *Fictions* : « J'aime bien ce qui sort des maths, mais il ne faut pas qu'on me prévienne. Je suis là pour les maths, donc si tu me dis ça ne va pas être des maths ça ne m'intéresse pas, mais finalement je suis content quand on parle de maths et que ça diverge un peu. Mais un peu seulement. »

Charlie

Profil : Femme, ∼50 ans. Rapport aux maths : se souvient qu'elle aimait les maths à l'école et que c'était facile. Est intimidée par cette matière qu'elle n'a pas étudiée de manière très approfondie. Maintenant ça ne l'intéresse plus ; léger complexe d'avoir perdu ce goût pour l'abstraction.

Attentes avant de commencer la visite : « Apprendre et comprendre des choses nouvelles. »

Critères attendus : « De la pédagogie ; que je ne sois pas mise en difficulté. Si je me sens nulle ça ne va pas me plaire. »

Charlie n'a jamais visité d'exposition virtuelle ; elle n'aime pas lire de textes longs sur un écran, elle n'utilise internet que lorsqu'elle est obligée, en imprimant les informations qui l'intéressent.

Résumé de la visite Charlie a parcouru le site sans suivre aucun parcours, au gré de ses envies. Elle a semblé se repérer assez bien dans le site, et ce mode de navigation semblait lui convenir. Elle a visité un peu plus de la moitié des pages (toute la partie *Dynamique chaotique* et deux pages dans l'autre partie), en lisant tous les textes et en sautant régulièrement les vidéos et les audios qui ne l'intéressaient pas. Elle a tenu à terminer la partie qu'elle avait presque entièrement parcourue avant de quitter l'exposition en disant « Je fatigue. »

Points remarquables

— Dès le portail d'entrée, elle a été attirée par la partie *Dynamique chaotique*, qui lui paraissait « plus intéressante, colorée, fantaisiste ». Mais comme elle lui paraissait aussi plus compliquée, elle s'est dirigée d'abord vers la partie *Deux astres en tête à tête*, qui lui semblait « calme et plus rassurante ». Elle s'est ensuite dirigée vers une page dont le titre lui semblait plus simple (« Je clique sur 2 [Deux équations], ça va être plus simple que 3 »). Puis rapidement elle est allée sur les pages qui l'attiraient le plus.

  « Au début, je vais dans l'univers calme, qui me semble rassurant, je commence par ce qui me semble simple, puis petit à petit je vais vers les pages qui m'attirent plus. »

— Elle a été particulièrement sensible au fait que l'exposition respecte son rythme et son intelligence, ne la mette pas en situation d'incompréhension, aborde des thèmes ou pose des questions qu'elle puisse s'approprier.

  [En regardant les trois vidéos sur les équations de Newton]« Je n'aime pas les vidéos, ce n'est pas ma culture ; ça va soit trop vite, soit trop lentement. Je préfère lire, je vais plus à mon rythme. »

  [Lors de la vidéo sur la page *Pas de calcul*] « C'est trop rapide, ça n'a aucun sens pour moi. Je suis larguée. Je ne comprends rien. Bon, je continue. Je suis larguée. J'ai l'impression que c'est censé être une évidence, je ne comprends rien, je me sens idiote, je zappe. »

  [En butant sur un terme mathématique non défini sur la page *Stroboscope*] « *Application de premier retour*, c'est quoi ? Je suis censée savoir ce que c'est ? On en a parlé ? Ça me stresse, et ça rend ma lecture chaotique. »

[En regardant l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Le chaos se cache un peu*] « J'aime bien les questions, elles sont un peu naïves, je peux me les approprier. C'est agréable quand je peux me sentir un peu intelligente. »

[À la lecture du premier paragraphe de la page *Tout est possible*] « Le style parlé dans un texte écrit, c'est un peu nunuche. J'ai l'impression qu'on me prend pour une idiote. »

[À la fin de la visite] « J'aime bien Étienne Ghys, il parle lentement, il dit des trucs que je comprends, il a l'air sympa. Il me fait me sentir intelligente.

— Charlie a recherché la présence de visages tout au long de la visite. Elle a apprécié les informations bibliographiques, a cherché des informations sur les concepteurs du site, s'est attachée à la figure d'Étienne Ghys. Il est intéressant de noter qu'elle n'a pas du tout apprécié les textes de la page *Fictions*, où s'exprime pourtant une vision du monde très personnelle, mais pas écrite à la première personne, et pas présentée comme telle.

[En remarquant que le compte Viméo des vidéos du site était au nom d'Olga Paris-Romaskevich] « Je veux voir qui est Olga. Je suis plus intéressée par les gens que par les maths. »

[En regardant l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Fictions*] « Ça me touche de voir ces questionnements sur un tel site, cette rencontre d'une pensée différente de la mienne. »

[En arrivant sur la page *Effet papillon*, qui ne lui faisait a priori pas envie]« Ah oui je vais aller voir cette page, il y a une vidéo de mon copain Étienne Ghys ! »

[En lisant les textes de la page *Fictions*] « Je ne m'attendais pas à ça, à cette philosophie à la noix avec laquelle je ne suis pas d'accord. »[A plusieurs moments de la lecture]« Je conteste. »[En lisant le commentaire du personnage sur l'art] « Ça me paraît très abstrait, tout ça. Je ne suis pas d'accord. L'aspect soi-disant philosophique de cette page ne me rejoint pas du tout. Ça me donne une vision géométrique de l'art à laquelle je n'adhère pas. Je me sens extérieure à ce qui est dit là, ça me gave. »

— Ce qui l'intéressait le plus était l'éclairage que pouvaient apporter les mathématiques sur des notions ou des questions par lesquelles elle se sentait concernée (les notions d'ordre et de chaos, la liberté et le déterminisme...)

[En regardant l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Fictions*] « Ça m'intéresse drôlement, ça. J'aime beaucoup, j'adore, à plusieurs points de vue. Ça aborde des domaines qui m'intéressent, c'est un pont entre une pensée mathématique et un partage humain. C'est intéressant, il transpose les choses à un niveau personnel, et explique pourquoi les mathématiques sont intéressantes. »

[En lisant la citation de Poincaré sur la page *Pas de calcul*] « J'aime bien cette idée paradoxale : le fait qu'on ne puisse pas calculer ouvre d'autres pistes pour résoudre le problème. Ce qui m'intéresse, c'est de trouver un parallèle entre les problématiques et démarches des mathématiciens, et mes propres problématiques. »

[Avant d'écouter l'audio de Poincaré sur l'intuition, dans la page *Un scientifique dans la cité*] « Je suis très intéressée d'entendre parler du rôle de l'intuition. » [Au bout d'1/3 de l'extrait]« C'est bien de l'avoir mis, mais ça m'ennuie un peu, c'est dit dans des termes qui ne me disent rien. J'aimerais un éclairage moderne. »

[En lisant le premier paragraphe de la page *Effet papillon*] « Ça avait l'air intéressant, mais je suis déçue. C'est un peu tordu comme histoire, c'est trop improbable. Ça n'est pas une bonne illustration... Il aurait fallu écrire une histoire où on puisse se projeter, un vrai exemple. Ça m'intéresserait beaucoup. »

[En arrivant sur la page *Chaos*]« Ça m'intéresse la notion de chaos. La Biodanza [b] lie le chaos à la

b. La Biodanza est une activité de développement personnel et relationnel que Charlie pratique depuis plusieurs années.

créativité. Ça m'intéresse philosophiquement, humainement, ces considérations mathématiques sur le chaos. »

— Charlie a également été intéressée par les invitations à la rêverie. En arrivant sur la page d'entrée de la partie *Dynamique chaotique*, elle a immédiatement été attirée par le titre *Deux soleils dans notre ciel*, et a commencé à s'interroger sur comment ça serait, et à imaginer ce monde. Une fois sur la page, elle a ignoré ce qui risquait de la sortir de sa rêverie. « Je ne suis pas attirée par la vidéo, j'ai commencé à imaginer mon monde ». Puis elle s'est dirigée vers les pages qui lui semblaient continuer dans l'imaginaire (*Tout est possible*, puis *Fictions*).

— Charlie a beaucoup aimé regarder les simulations de trajectoires, en s'interrogeant sur ce qu'elle voyait.

  « Je suis fascinée par la boule verte qui accélère en passant près de la boule orange. Je peux rester longtemps devant cette vidéo. C'est rigolo, c'est sympa, c'est joli. C'est pas régulier, c'est intéressant. Pourquoi est-ce que ce n'est pas régulier ? C'est la Lune autour de la Terre... C'est quoi comme périodicité ? La planète qui tourne autour des deux soleils : la trajectoire va se refermer ? Ah non, tiens ! [Je lui demande pourquoi ça lui plaît autant] Ça me fait rêver. J'attends de voir si ça revient à son point de départ. [Attend longtemps, jusqu'à la collision de deux corps]. Houlala !! Ah oui, c'est chaotique ! »

Delta

Profil : Homme, ∼30 ans. Rapport aux maths : malgré de grandes facilités, est intimidé par cette matière qu'il n'a pas étudiée de manière très approfondie (il a quand même entamé une licence de maths...). Veut comprendre en détail, par lui-même.

Attentes avant de commencer la visite : « Comprendre des choses sur la manière de fonctionner des astres, leurs trajectoires, comment ils interagissent les uns avec les autres. Comme c'est une exposition, j'attends qu'on m'expose d'abord quelque chose de concret, et ensuite seulement la théorie qu'il y a derrière. »

Critères attendus : « Aller rapidement dans le vif du sujet, mais avec de la matière. Des images, qui rendent la visite plus accessible aux non-mathématiciens. Des exemples et des applications. Que l'exposition aille des exemples vers les mathématiques, des faits vers la théorie. Que ce soit un peu ludique. »

Résumé de la visite Delta est entré lentement, en essayant de trouver le début de l'exposition pour la parcourir dans l'ordre, ce qui lui semblait particulièrement important pour une exposition mathématique. Il a visité la totalité de l'exposition, exhaustivement, principalement sans moi (nous n'avions pas le temps de le faire ensemble). Il m'a communiqué ses retours par téléphone quelques jours plus tard.

Points remarquables

— Delta appréhendait un peu d'être rapidement « largué » d'un point de vue mathématique. Il a été rassuré par l'esthétique du site, et notamment l'image d'accueil, qui lui a fait penser que l'exposition allait être accessible au non-mathématicien qu'il était, puis en voyant les équations de Newton, qu'il avait déjà rencontrées au cours de sa scolarité : « Je connais ça. Ça me rappelle ma prime enfance. Ça me conforte dans l'idée que ça m'est accessible, puisque je l'ai déjà fait. »

— Il a apprécié le quizz, et regretté qu'il n'y en ait pas plus. « J'aime beaucoup, c'est interactif, ça me fait réfléchir sur les objets de la vie quotidienne, ça m'intéresse plus que les objets ma-

thématiques. » « Dommage qu'il n'y ait pas eu plus de quizz, j'ai été bien accroché. C'est bien d'être actif, impliqué. »

— Delta a été particulièrement sensible à la dimension humaine, à la présentation des personnalités et histoires des scientifiques, aux apports d'un point de vue mathématique à des questions générales qui le concernent.

  « Ce que je retiens de l'ensemble de l'exposition : principalement des éléments d'autobiographie, par exemple Poincaré et l'affaire Dreyfus, l'erreur de Poincaré. C'est super de montrer que les mathématiciens sont aussi des gens avec des histoires, pas seulement des esprits. »

  « J'ai adoré les considérations mathématico-philosophiques, c'est super intéressant que les mathématiques puissent nous faire changer de point de vue sur le monde, sur la vie. C'est assez éloigné de la vision qu'on peut avoir des maths, 2+3 et compagnie. Moi c'est ce qui m'intéresse. Ça ne m'intéresse pas de ressortir de l'exposition en calculant mieux. Ce qui j'apprécie, c'est d'avoir des idées nouvelles, des points de vue nouveaux sur des sujets qui m'intéressent. »

— Il a beaucoup aimé les simulations de trajectoires, qu'il a longuement observées, en essayant de comprendre ce qu'il voyait, de deviner ce qui allait se passer. Il s'est spontanément interrogé sur la manière dont ces trajectoires étaient calculées, et sur les éjections à l'infini qui se produisaient parfois, qui lui semblaient contraires à son intuition physique.

— Il a particulièrement apprécié les explications de formules, et notamment le fait qu'on montre les quantités qui sont proportionnelles entre elles, et celles qui sont inversement proportionnelles.

  [Après la vidéo sur l'équation de la gravitation] « J'aime bien l'explication détaillée de l'équation de la gravitation, terme par terme. Souvent on élude, là c'est bien que ça soit détaillé, on comprend en détail avec très peu de bagage mathématique. À l'école on passe souvent vite sur les formules, ici chaque terme est expliqué, mis en perspective, ça prend vie. »

Echo

Profil : Femme, ∼25 ans. Rapport aux maths : a une bonne image des mathématiques, mais un rapport personnel difficile. Les mathématiques étaient la matière difficile de sa scolarité, qu'elle a abandonnée dès qu'elle a pu.

Attentes avant de commencer la visite : « Comprendre des choses sans que ce soit pénible. »

Critères attendus : « Quelque chose de visuel, avec du texte mais aussi des illustrations. »

Résumé de la visite Echo a visité l'exposition dans l'ordre, en commençant par la partie *Deux astres en tête à tête*, qu'elle pensait être la première. En un peu moins de deux heures, elle a parcouru l'ensemble de l'exposition, en se concentrant principalement sur les textes et en lançant très peu de vidéos ou d'audios.

Points remarquables

— La taille apparente de l'exposition et la quantité de contenu sur chaque page a d'emblée conduit Echo à se placer dans une optique d'économie d'énergie. Elle a dès le début sauté tout ce qui lui paraissait optionnel pour la compréhension globale (interviews, biographies, citations en audio...) pour se concentrer sur le texte.

  [En arrivant sur la page d'entrée de la partie *Deux astres en tête à tête*] « Il y a beaucoup de choses, je sais pas trop où cliquer. »

  [En survolant la première page de sa visite, *Paradoxe de l'attraction*] « Les pages sont longues : je me dis *Oh mon Dieu j'arriverai jamais à tout lire.* »[Toujours sur cette première page, à

propos de l'enregistrement du conte] « C'est sympa qu'il y ait des trucs à écouter, ça peut servir de ressources. Je vais pas l'écouter maintenant, ça paraît trop long de tout faire. »

[En sautant la page biographique sur Kepler] « Je n'ai pas envie de lire la vie de Kepler, je veux rentrer tout de suite dans le vif du sujet. » [Puis celle sur Newton] « Comme c'est un peu long, la biographie détaillée d'une personne c'est du bonus. J'ai plutôt envie d'avoir l'explication substantielle. »

— Au niveau des formats qu'elle a préférés : elle a lu attentivement tous les textes des pages qu'elle a visitées, elle a regardé quelques simulations, elle a lancé le diaporama sur les lois de Kepler et quelques vidéos, mais aucune interview ni aucun audio.

« Je ne suis pas une grande fan de vidéos. Je préfère écouter en faisant autre chose, mais pas regarder. Je regarde jamais les contenus interactifs. Je préfère lire. »

[En lançant la première vidéo de sa visite : l'évolution des orbites du système solaire sur plusieurs millions d'années, sur la page *Le chaos se cache un peu*] « Je ne suis pas une grande fan d'entendre les personnes parler, par contre une simulation ça me donne plus envie de voir comment ça va se passer. Une personne qui parle risque de rentrer dans le détail, une simulation ça va être plus facile à appréhender. »

[Après avoir regardé la vidéo de dessin en timelapse sur la page *Stroboscope*] « Je l'ai regardée en entier parce que c'était court et dynamique, visuel et marrant. »

— Les éléments qui ont semblé l'intéresser le plus étaient les considérations autour des mathématiques : sur l'intuition, la recherche, l'activité mathématiques... Elle s'est également montrée intéressée par les informations concrètes, par exemple sur l'existence d'étoiles doubles, les applications du problème à trois corps au lancement des satellites, ou les simulations du futur du système solaire conduisant à des collisions.

« Toute cette exposition, c'était un prétexte pour montrer ce que sont les maths et le travail des chercheurs, c'était le fil rouge, l'exposition parallèle, l'expo dans l'expo. C'était intéressant, c'est même la partie dont je me rappellerai le plus. »

[En lisant le texte sur les formules mathématiques, sur la page *Le ciel en deux formules*]« J'aime bien tous les passages où on parle des mathématiques (l'intuition, la recherche, les formules. . .) ».

— La visite de l'exposition virtuelle a semblé remettre en cause l'image que Echo se faisait des mathématiques et des mathématiciens, comme une science inatteignable, pratiquée par des gens qui ne doutent pas et ne se trompent pas.

« Cette expo, ça donne une image moins obscure des maths. Et puis le fait de voir que les chercheurs ils galèrent, ils font comme ils peuvent, ils cherchent plein de trucs qu'ils trouvent pas, ça les rend plus proches, plus accessibles, ça les descend de leur piédestal. »

[Sur la page *Pourquoi deux ?*, en lisant le paragraphe à propos de la modélisation] « J'aime bien, ça donne une image des mathématiques moins carrée que ce que j'imaginais. Ils peuvent se planter, ils font comme ils peuvent... Ça les rend plus proches du quotidien, moins inatteignables. »

[À propos de la page *Coeur à coeur*] « J'aime bien cette page où on te parle des mathématiciens d'un point de vue plus philosophique. C'est intéressant, ça peut intéresser des gens comme moi, mais très matheux, mais qui s'intéressent à plein de choses différentes. J'aime bien le côté *les maths peuvent t'aider à réfléchir sur des questions existentielles.* »

— Elle est passée rapidement et sans gêne apparente sur les passages plus techniques, qu'elle ne comprenait pas.

[En arrivant à la troisième loi de Kepler, sur le diaporama de la page *Les trois lois de Kepler*] « Oh là... je laisse tomber, trop compliqué ! »

[En lisant la page *Tout est possible*, en regardant le diaporama de la page *Pas de calcul* et en lisant le deuxième paragraphe de la page *Stroboscope*] « Bon, je comprends pas trop... »

[À la fin de sa visite] « J'avais peur que ce soit trop obscur et de rien comprendre ; globalement j'ai pu comprendre pas mal de trucs et aller jusqu'au bout. C'était intéressant. Ça fait vraiment expo, tu es immergé dans le parcours jusqu'à la fin, tu te laisses porter. »

India

Profil : Femme, ∼50ans. Rapport aux maths : pas d'appréhension, mais peu d'intérêt.

Attentes avant de commencer la visite : « Du plaisir, une meilleure compréhension des étoiles. »

Critères attendus : « compréhensible, accessible, beau. Puisque le sujet est le ciel, j'attends de la beauté et de la poésie. »

Est abonnée à des blogs culturels qui lui envoient régulièrement par email des articles à lire en cinq minutes sur des sujets variés, avec en fin de texte des références vers des vidéos ou des articles (également grand public) sur le même sujet. Apprécie ce format court, avec la possibilité de creuser un peu si le sujet l'intéresse.

Résumé de la visite India est entrée rapidement et un peu au hasard, elle a parcouru partiellement un tiers des pages de façon un peu aléatoire, en déplorant de ne pas réussir à s'orienter correctement dans l'exposition. elle est partie au bout d'une demi-heure, en disant « J'arrive pas à naviguer sur ce site, j'en ai marre, je m'en vais. »

Points remarquables

— Elle a bien accroché avec les titres, les thèmes proposés et les questions posées, mais s'est montrée assez systématiquement déçue par les explications. Elle a lu rapidement, parfois sans remarquer la présence des vidéos, avec l'envie manifeste d'avoir des réponses claires, simples et concises dès la première lecture.

[À propos des interviews d'Étienne Ghys sur la page *Fictions* et celle d'Alain Chenciner sur la page *Chorégraphies*] « Les vidéos des mathématiciens, ça m'intéresse pas trop. On voit que c'est pas des pros de la comm', ils mettent 2h à dire un truc. »

[Après la lecture des textes de Jessica Masseti sur l'étude qualitative des systèmes dynamiques]« Les problèmes de départ sont intéressants et faciles à comprendre, mais ce qui suit derrière ne répond pas à la question. Je reste sur ma faim. J'attendais une réponse, une illustration. Je suis souvent déçue par la façon dont ça se termine. »

[En parcourant la galerie cinéma de la page *Fictions*]« Ça m'amuserait de voir comment l'art peut influencer les maths, mais quand je vois ça je comprends pas pourquoi. »

— L'aspect mathématique semble pour India plus rebutant qu'autre chose. Dans le titre *Les mathématiques du ciel*, elle est attirée par le ciel, mais pas par les mathématiques. Sur le portail d'entrée, elle dit à propos de l'image de *Dynamique chaotique* : « Ça fait plus penser à des maths, je préfère l'autre. »

— Elle contemple longuement les simulations de trajectoires, en lisant les informations correspondantes. « C'est joli, j'aime bien. »

Juliett

Profil : Femme, ∼25 ans. Rapport aux maths : mauvais pendant sa scolarité, les a redécouvertes autrement pendant sa formation à l'ESPE[c] (notamment à travers la didactique), a retrouvé de l'intérêt et s'est débarrassée d'une partie de ses appréhensions.

Attentes avant de commencer la visite : « avoir des explications, découvrir de nouvelles choses, pouvoir expérimenter plein de petits jeux variés ».

Critères attendus : « Que ce soit clair, ludique et beau. »

Résumé de la visite Juliett a visité l'exposition complètement librement, en survolant beaucoup et en allant directement vers les éléments qui l'intéressaient. En un peu plus d'heure, elle a survolé les deux tiers des pages.

Points remarquables

— Juliett s'est trouvée avoir durant sa visite une patience et une capacité d'attention limitées. Elle a lu les textes souvent en diagonale, s'est systématiquement dirigée vers les éléments qui lui paraissaient nouveaux (audios, vidéos, quizz, simulations), en sautant ceux qui ressemblaient à quelque chose qu'elle avait déjà vu ; elle a sauté les textes dont elle pensait déjà connaître le contenu. Elle a reconnu au bout de quelques pages se sentir un peu saturée d'informations, et avoir envie de papillonner à la recherche d'éléments attirants.

« J'ai aimé la diversité des supports, des types de contenus, des tons. C'est le truc le plus important parce que mon attention n'est pas illimitée, et je me lasse vite. »

« Le fait que ça soit extrêmement complet, avec beaucoup de choses à explorer, trop d'information, m'a vite saoulée, lassée. »

[En arrivant sur la première page de sa visite, *Newton, ses pommes et ses péchés*] « Je lis les textes en diagonale et je vois ce qui peut attirer vraiment mon œil. »

[Après le quizz de la page *Vive l'ellipse !*, deuxième page visitée] « Pas envie de lire le reste, j'ai envie de voir si il y a d'autres formats que textes, audios et quizz). »

[Juste après, en arrivant sur la page *Et si trois ?*] « Ah, il y a une vidéo ! Je vais la regarder direct, sans lire le texte. »

[À propos du dernier paragraphe de la page *Effet papillon*] « Comme j'ai passé beaucoup de temps sur le problème à trois corps je n'ai pas envie de lire le texte. »

[En arrivant sur la page *Tout est possible*] « Je sature, et comme j'ai déjà vu des simulations, je vais aller ailleurs. Je vais voir s'il reste des éléments sur le site qui m'attirent. »

— Elle a fait très facilement des connexions personnelles entre ce qu'elle voyait et ses propres expériences, ce qui lui a permis d'accéder avec peu d'information au sentiment de compréhension. Elle a apprécié que le contenu de l'exposition ne soit pas simpliste, mais a passé rapidement sur les éléments qu'elle ne comprenait pas facilement.

[Pendant l'interview d'Alain Chenciner sur la page *Et si trois ?*] « J'adore, ça me parle directement dans ce que j'observe dans la vie et ce que je dessine, ça me rappelle la géométrie, et tout ce dont j'ai besoin pour dessiner : comprendre la perspective, comprendre les formes... » [Après la vidéo] « Il y a des pans énormes qui m'ont échappé, mais j'aime bien cette impression d'avoir quand même appris quelque chose »

[Pendant l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Le chaos se cache un peu*] « J'aime bien que le problème soit abordé par un spécialiste qui simplifie son discours, mais que son discours ne soit pas simpliste. Qu'il accepte la complexité du problème et qu'il nous partage cette complexité. »

c. Les écoles supérieures du professorat et de l'éducation, ou ESPE, forment les professeurs des écoles.

[À propos de la présence d'informations qu'elle ne comprenait pas] « Ça m'a dérangée, et j'ai préféré abandonner plutôt que de m'acharner. Ça m'a fait passer plus rapidement d'un sujet à l'autre. »

[À propos du fait qu'elle n'ait pas suivi le parcours proposé] « Ça ne m'a pas dérangée, je n'ai pas eu l'impression qu'il me manquait des informations. »

— Les éléments qui ont intéressé Juliett étaient principalement : ce qui apportait un point de vue nouveau sur des choses qu'elle connaissait et qui l'intéressaient déjà, les considérations d'ordre philosophique, et ce qui lui permettait de se faire une image globale sur les mathématiques.

[En arrivant sur la page *Paradoxe de l'attraction*] « J'aime bien qu'il y ait un pont avec d'autres matières, d'autant plus que j'ai pas mal étudié les contes. »

[En lisant les textes de la page *Chorégraphies*] « J'aime bien ce vocabulaire qui me parle, les planètes qui dansent ça me parle. »

[Dès le début de l'interview d'Étienne Ghys sur la page *Le chaos se cache un peu*] « Ça j'adore. Dans la philosophie, et dans ma vision du monde, ça m'intéresse beaucoup la complexité cachée du monde, à laquelle on n'a pas accès. Le fait de partir de problèmes concrets (le vent, etc) pour aborder cette complexité, ça m'intéresse beaucoup. »

[En arrivant sur la page *Cœur à cœur*] « C'est encore une nouvelle manière d'aborder les maths, ça m'intéresse. Ça me parle totalement en terme de philosophie, c'est une manière pour moi de redécouvrir les mathématiques en tant qu'adulte, à travers la philosophie. »

[En voyant le galerie cinéma de la page *Cœur à cœur*] « J'aime bien. En plus c'est des références que j'aime bien, ça me donne envie de les revoir en faisant le lien avec les mathématiques. »

« Cette exposition m'a conforté dans la nouvelle image que j'ai des mathématiques : beaucoup plus intéressantes et passionnantes que l'image que j'en avais au lycée, et avec la possibilité de faire des ponts avec d'autre matières. »

— Elle a apprécié lorsque les explications mathématiques étaient reliées à des éléments concrets, et s'est sentie mise en difficulté dès qu'il y avait des équations.

[Sur la page *Vive l'ellipse !*]« J'aime beaucoup qu'il y ait des schémas ; c'est beaucoup plus court, et j'aime bien. L'équation je vais pas lire, quand je vois l'équation j'ai pas envie de lire. »

[En répondant au quizz de la page *Vive l'ellipse !*]« J'aime beaucoup, comprendre avec des exemples concrets ce qu'est une ellipse. Moi j'ai besoin de l'aspect concret pour comprendre les mathématiques. » [En voyant l'équation du 4e degré]« En voyant la complexité du dessin, je me sens pas du tout à la hauteur. J'ai l'impression que même si j'avais lu le paragraphe sur l'équation de l'ellipse, je n'aurais pas eu les capacités de répondre à cette question. » [Pendant l'exemple du glacier dans l'interview d'Étienne Ghys, sur la page *Le chaos se cache un peu*] « Le fait qu'il parle de choses que je connais, que j'ai pu observer, ça clarifie les choses. »

Oscar

Profil : Homme, ∼25 ans. Rapport aux maths : aisance, mais peu d'intérêt.

Attentes avant de commencer la visite : « Apprendre des choses sans y passer trop de temps. Pas forcément des maths ; plutôt de la culture générale, d'ordre mathématique. »

Critères attendus : « Que ce soit ludique, pédagogique, simple et beau (épuré et synthétique). Qu'il y ait différents niveaux de lecture ; que je trouve facilement des choses adaptées à mon niveau de compréhension. Si je sens que c'est chargé, ça va me faire peur et me mettre dehors direct. »

Résumé de la visite Oscar a commencé sa visite dans l'ordre, en lisant tout et en regardant tout. Puis a sauté de plus en plus de choses : textes, media ou pages entières dont le titre ne l'inspirait pas.

Il a terminé sa visite au bout d'environ 1h30, après avoir parcouru la moitié des pages (réparties entre les deux parties).

Points remarquables

— Oscar s'est régulièrement plaint de l'absence d'un guide. Il a exprimé le besoin de savoir où il se trouve dans l'exposition, le besoin d'identifier ce dont il va s'agir avant de se lancer dans une lecture plus approfondie, ainsi que le besoin d'être rassuré.

[En arrivant sur la page *Les trois lois de Kepler*, la deuxième dans son parcours] « Mon ressenti depuis le début, c'est : *Je suis où ?* Je me demande un peu où je suis. Je ne comprends pas quel est le thème général. Où en suis-je par rapport à mon thème ? Du coup je suis obligé de faire l'effort de rentrer vraiment dans le texte pour comprendre. »

[Sur la même page, en écoutant l'extrait audio] « Je trouve ça trop cool du son comme ça. J'aimerais une voix audio qui me parle à l'entrée de la page, comme un audio guide. Ou un texte qui me tranquillise en arrivant sur la page. *Voilà où tu es, voilà ce qu'on va voir.* »

[Sur la page *Newton*] « Le démarrage de la page Newton me permet mieux de comprendre qui c'est. Ça manque dans Kepler : un petit paragraphe *T'inquiète, je sais que tu sais pas qui c'est.* La page Newton est beaucoup plus accueillante. »

[En arrivant sur la page d'accueil de la partie Chaos] « Le ressenti c'est plus *Merde, y'en a beaucoup et je sais pas où aller* que *Ah c'est cool je peux aller où je veux.* »

[Après avoir écouté l'interview d'Étienne Ghys, sur la page Chaos] : « J'aimerais qu'il soit mon guide, plutôt qu'un expert dans une petite boîte. J'attends un guide, il commence comme un conférencier : « On peut vulgariser le chaos, mais pas trop ». Je suis un peu déçu. Il y a pas quelqu'un qui veut me dire ce que c'est que le chaos ? Je sais pas où je suis, je sais pas ce qu'on va m'expliquer, ce qu'on va me montrer. »

[À la fin de la visite, en réponse à la question *Est-ce que la présence d'humains dans une exposition mathématique est importante pour toi ?*] « J'ai besoin qu'on ne me laisse pas seul avec les concepts mathématiques. J'ai besoin d'une voix qui me guide, qui me fasse des commentaires, etc.

— Oscar s'est montré plus intéressé par les media que par les textes. Il a déploré de ne pas pouvoir facilement sauter des textes pour pouvoir se concentrer sur les media, sans perdre d'information importante. Il aurait aimé que soient séparés les textes généraux d'introduction au sujet, et les textes plus détaillés. À la fin de sa visite, il a exprimé le souhait d'avoir accès en un coup d'oeil à tous les media de l'exposition (extraits audios, vidéos, simulations, quizz...) afin de voir tout ce qui pouvait l'intéresser sans avoir à parcourir l'intégralité de l'exposition.

[À propos des blocs dépliants sur la page *Vive l'ellipse !*] « Ça j'aime bien. C'est ce que j'avais envie de voir à la page d'avant. Quand le texte est rangé, j'ai l'impression que je ne suis pas obligé de le lire, mais quand je clique j'ai vachement plus envie de lire. »

[En voyant la vidéo sur la page *Deux astres en tête à tête*] « J'ai envie de sauter le texte pour arriver à cette vidéo, mais du coup je comprends pas comment cette vidéo est rattachée au reste. »

[À la fin de la visite] « Le truc que j'ai eu du mal à appréhender, c'est les zones de textes. Si je lis tout ça me parasite, mais si je saute j'ai l'impression que je ne vais pas comprendre. On ne sait pas si c'est du texte général illustré par une vidéo, ou si c'est un commentaire de la vidéo. Quels sont les textes, simples, que j'ai besoin de lire pour comprendre, et quels sont les textes pour creuser, plus techniques mais que je ne suis pas obligé de lire ? »

— Oscar a analysé l'importance des premières pages dans le déroulement de sa visite, et le fait qu'elles déterminent son implication et le rythme auquel il effectuera la visite.

« Au début je suis respectueux, scolaire. Je rentre par la porte entrée et je vais dans l'ordre, puis je prends de plus en plus de liberté. Pour moi, les premières pages sont particulièrement à soigner ; elles déterminent la vitesse à laquelle je parcours le site. Si je commence à sauter des vidéos, des audios ou des textes, ça se systématise. »

— Oscar a exprimé le besoin de pouvoir anticiper sur ce qu'il allait lire ou voir afin de s'approprier par avance le sujet et d'être plus réceptif aux informations relatives à ce sujet. En particulier, il n'a pas souhaité visiter les pages dont le titre, trop peu explicite, ne lui permettait pas d'identifier le thème. En général, il s'est montré peu réceptif aux informations portant sur un objet ou une personne qui lui étaient totalement inconnus.

[À propos du quizz sur la page *Vive l'ellipse !*] Ça m'implique activement, plus qu'une vidéo ou un texte. Il y a d'abord la question puis la réponse, plutôt qu'une réponse dont je ne connais pas la question. Ça serait bien que ce quizz arrive plus tôt dans la page, ça me fait apprivoiser l'ellipse. Je me pose des questions sur l'ellipse, j'en vois plein. Si j'avais eu le quizz la première fois que l'on m'a parlé d'ellipse, après ça aurait été plus mes copines les ellipses.

[Sur la page *Newton*] « Newton je vois un peu ce qu'il fait, donc j'ai plus d'intérêt pour comprendre qui c'est. »

[Au moment de s'arrêter] « Je m'arrête là. Les autres titres ne m'inspirent pas. Je comprends pas de quoi ça va parler. Je préfère les titres avec une problématique un peu claire. »

— Il a trouvé que l'exposition manquait d'éléments ludiques ou interactifs, et que ceux qu'il y avait auraient mérité d'être placés en porte d'entrée, plutôt qu'en illustration. « Les éléments ludiques manquaient un peu. Il y avait le quizz et les simulations, mais c'était pas des portes d'entrée. Je m'attendais plus à un truc où on commence par s'amuser et ensuite on comprend ; c'était l'inverse. »

— Oscar s'est montré sensible à l'esthétique générale de l'exposition, dont les variations l'ont perturbé. Il a également interprété le fait que l'ensemble de l'exposition soit illustré comme un signe que le contenu était original, et donc créé et pensé pour lui et adapté à son niveau.

L'esthétique générale du site fait partie des choses qui m'ont un peu perdu. J'aime beaucoup les premières images qui sont posées, hyper vives, colorées, avec des personnages et un univers extraterrestres... Du coup, ce qui ramenait au réel m'a un peu gêné (Kepler et le timbre, par exemple, ou Étienne à côté d'un extraterrestre. . .). L'aller-retour entre un univers fantastique et la réalité n'est pas évident. Il y avait tellement de couleurs que ça m'a donné l'idée que là où il y aurait des couleurs ça serait les endroits intéressants.

Je trouve ça agréable que tout soit illustré. Symboliquement, ça veut dire qu'on ne m'a pas copié-collé du texte et qu'on a fait l'effort de me le rendre accessible. C'est comme une garantie que le texte va être compréhensible pour moi.

Romeo

Profil : Homme, ∼50 ans. Rapport aux maths : a aimé les mathématiques à l'école, manifeste une forte attirance pour les mathématiques. A envie de comprendre de nouvelles idées mathématiques, tout en acceptant d'avance et sans inquiétude qu'il ne va peut-être pas comprendre.

Attentes avant de commencer la visite : « Apprendre, comprendre ».

Critères attendus : « Une volonté perceptible des concepteurs de l'exposition de ne pas m'exclure, de se mettre à mon niveau, de m'aider à aller vers là où ils veulent que j'aille. »

Résumé de la visite La visite de Romeo a été un peu particulière. Il ne s'est pas simplement placé dans le rôle du visiteur qui explicite ce qu'il fait et ce qu'il ressent ; il a également régulièrement adopté une posture de critique et conseiller vis-à-vis de nos choix esthétiques et ergonomiques concernant le site internet et la navigation – il a lui-même créé plusieurs sites internet à destination d'un grand public.

Il s'est d'emblée dirigé vers la partie qui l'intéressait le plus (*Dynamique chaotique*) et vers la page qui l'attirait le plus (*Deux soleils dans notre ciel*), puis a continué sa navigation en suivant les suggestions thématiques, jusqu'à arriver en début de parcours et suivre le parcours proposé. Il s'est intéressé à tous les textes et tous les média, tout en n'hésitant pas à zapper pour continuer sa visite lorsqu'il pensait avoir saisi le propos. Il a visité environ 1/3 de l'exposition, mais aurait poursuivi si nous n'avions dû nous arrêter, par manque de temps.

Points remarquables

— Romeo a été à la fois sensible à l'esthétique générale du site et à l'atmosphère qu'elle dégageait, et à la fois légèrement hostile à l'idée qu'on allait lui présenter du *joli* ou du *poétique*, alors qu'il était là pour lire de la science. L'impression que j'en ai est qu'il était très sensible à l'esthétique, la beauté et la poésie de ce qu'il voyait, mais qu'il se méfiait de l'éventualité qu'on sacrifie à des considérations esthétiques le contenu scientifique ou, pire, qu'on lui donne à voir du *joli* en lieu et place du *mathématique* qu'il attendait.

  [À propos du style des illustrations] « C'est un peu gnan-gnan, alors que votre site n'est pas du tout gnan-gnan. Et puis ça vieillit votre site. »

  [À propos des bandeaux obliques qui contiennent le titre sur chaque page] « C'est une très bonne idée, cette pente, ça renvoie quelque chose de dynamique. »

  [En lisant la première page sur laquelle il est arrivé] « C'est quoi cette police ? Elle est très bien choisie, ça fait un peu littéraire, mais sobre à la fois. »

  [En arrivant sur la page d'entrée de la partie *Dynamique chaotique*] « J'aime beaucoup la mosaïque ; le dessin me fait chier. Je me dis « ça, c'est un truc pour ados, on leur met un peu de dessin ». Ça fait pas très sérieux. Je ne suis pas fana de ces grands dessins. Ça fait référence au Petit Prince ; ça promet quelque chose d'ambivalent, un objet bâtard entre science et poésie. »

  [À propos de la mise en page qui laisse peu de place au texte] « Je suis pas là pour que ça soit joli ! Le souci du *joli* des webmasters – ils sont tous graphistes – ne m'intéresse pas. Je suis là pour lire. »

— Romeo a eu deux attitudes complètement différentes selon qu'il suive ou non le sens du parcours. Lorsqu'il se déplaçait seul dans l'exposition, il se dirigeait vers les titres qui semblaient lui promettre quelque chose de spécifique qui l'attirait, et était déçu lorsque le contenu ne correspondait pas à ses attentes. Lorsqu'il suivait le parcours proposé, il se laissait guider, ouvert à ce qu'il allait découvrir, sans attente particulière.

  [En voyant le titre *Deux soleils dans notre ciel* sur la page d'entrée de la partie] « Deux soleils dans notre ciel, ça m'accroche, parce que c'est spéculatif, on va jouer à un jeu. En plus j'aime bien la science-fiction. J'y vais. »

  [À la fin de la vidéo sur les calendriers.] « Je suis déçu. La vidéo est très intéressante, mais elle ne répond à mes attentes sur cette page. Je voulais une vidéo qui me montre un ciel avec deux soleils. Finalement ce n'est que notre monde... Moi j'était motivé par le côté spéculatif de cette page précise ! »

  [Pendant la vidéo de Jacques Laskar sur la trajectoire de collision, dont l'image de fin l'avait fortement attiré] « On m'a promis une collision de planètes... C'est pas drôle, c'est chiant. Ça dure deux minutes, sans commentaires, sans son. Faut aimer l'ascèse... »

[À la fin de la visite, en réponse à la question *Est-ce que les contenus correspondaient à ce à quoi tu t'attendais (en lisant le titre, à la manière dont était annoncée la vidéo) ? Si non, est-ce que c'était gênant ?*] « Ça correspondait, sauf pour la vidéo des deux soleils. Là, c'était gênant ; les promesses non tenues, c'est terrible. Quand je ne savais pas trop à quoi m'attendre, c'était bon. Moi j'aime beaucoup quand on me dit pas trop ce que je vais voir. A partir du moment où j'ai compris que c'était une visite, bah je visite ! »

— Il s'est montré très enthousiaste quant aux simulations de trajectoires, d'une part parce que ça lui permettait d'interagir et de jouer, et d'autre part parce qu'elles lui fournissaient une illustration immédiate de la nature des trajectoires des astres de notre monde.

[En apercevant les simulations sur la page *Effet papillon*]« Ah, là c'est flash, je peux interagir et faire joujou, c'est génial. »

[En réponse à la question *T'es-tu rendu compte que tu ne pouvais réellement rien décider ?*] « Non, mon expérience c'était de pouvoir jouer, de pouvoir interagir. C'est ça la magie, moi j'ai rien contre la magie. C'est pas grave. Évidemment que tout a été calculé avant, pour que ça soit sûr de marcher, de me montrer ce qu'il y a à voir. La force d'un site web, c'est l'interactivité. Sur cette page particulière tu es un démiurge, tu es Dieu, tu vas assister à un drame intergalactique. C'est fascinant. »

[En regardant les simulations sur la page *Tout est possible*] Là, c'est Soleil-Terre-Lune. J'avais jamais pensé que la lune, qui tourne autour de la terre qui tourne autour du soleil, tourne aussi autour du soleil. Une illustration graphique et tout est clair. C'est super pédagogique : on a la preuve que certaines conditions créent des trajectoires chaotiques ! C'est génial. Ca m'intéresse beaucoup plus que les chorégraphies, qui sont certes de jolies images, mais qui ne me disent rien sur mon monde.

— La présence humaine sensible tout au long de l'exposition était importante pour lui.

[Après avoir écouté plusieurs audios] « C'est un vrai plus de ce site : dans les extraits audios c'est vous qui lisez. Vous nous parlez. On est invités. Vous nous prenez par la main et vous nous parlez. C'est comme une conférence. Ça fait partie du plaisir des choses. »

[En lançant une interview d'Alain Chenciner, puis d'Étienne Ghys.] « Il est sympathique ce type ». « Il a l'air vraiment gentil ; il y a quelque chose dans son sourire, dans ses yeux... »

[À propos de la galerie ciné sur la page *Cœur à cœur*] « Ça, c'est bien, c'est une bonne idée. C'est comme une pause café, un peu d'humanité dans un site très informatif, ça fait du bien. »

— La présence d'éléments qu'il n'a pas aimés n'a pas importuné Romeo.

« C'est comme dans une expo de peinture : dans telle salle, je n'aime pas tel peintre, je passe à la salle suivante. Bon, si au bout de cinq salles je n'aime rien, je me dis que cette expo n'est pas pour moi et je m'en vais. »

Tango

Profil : Homme, ∼50 ans. Rapport aux maths : aisance avec les objets et raisonnements mathématiques, mais peu de curiosité pour l'abstraction pure.

Attentes avant de commencer la visite : « comprendre et découvrir des choses, voir des trucs plaisants, agréables, ludiques. »

Critères attendus : « Que ce soit pédagogique, didactique. Que ce soit aussi beau, ou ludique, ou poétique, ou humoristique. Bref, qu'il y ait quelque chose de particulier qui en fasse plus qu'un simple exposé, quelque chose qui donne du plaisir. »

Résumé de la visite Tango a visité l'intégralité de la partie *Deux astres en tête-à-tête* qui lui semblait plus simple et dont l'image lui a paru plus jolie. Il a visité toutes les pages dans l'ordre, en écoutant tous les audios et en regardant toutes les vidéos, ce qui lui a pris environ trois heures. Il a tenu à terminer la partie, puis est allé sur la page *Effet papillon*, dont le titre l'interpellait, et a survolé très rapidement le reste de l'exposition.

Points remarquables

— Les éléments que Tango a préférés correspondent presque tous à du contenu mathématique précis et détaillé.

« Ce que j'ai préféré : le diaporama sur les trois lois de Kepler, j'ai vraiment retenu des choses. J'ai beaucoup aimé la page sur les ellipses et le quizz, la page sur Newton et les trois vidéos sur les équations de Newton. J'ai pas mal aimé aussi les simulations. C'est moins important parce que j'ai moins appris de choses. »

— Tango a manifesté des réticences en arrivant sur la page *Le ciel en deux formules*, et il a finalement beaucoup apprécié les vidéos d'explication sur les équations de Newton.

[En arrivant sur la page] « J'ai failli sauter cette page, avec les formules ça me gonfle. J'ai vu qu'il y avait des vidéos alors je reste pour regarder les vidéos. »

[À la fin de la première des trois vidéos] « C'est très pédagogique, très didactique, et drôle en même temps. J'ai révisé quelque chose que je connaissais vaguement, et j'ai appris quelque chose : j'avais jamais pensé que les balances fonctionnaient avec l'équation gravitationnelle ! C'est agréable à voir et intéressant. »

[À la fin des trois vidéos] « Je les trouve super ces trois vidéos, notamment la première, qui est parfaite. La dernière aussi est super ! Tu devrais faire des émissions télé. C'est agréable à regarder, on prend du plaisir à regarder ces vidéos. »

[À propos de la page *Le ciel en deux formules*]« Je n'avais pas envie a priori, j'étais content a posteriori. J'avais peur d'avoir à lire un texte avec des équations, ça me gonflait. Je suis un auditif et pas un visuel, c'est mille fois plus intéressant pour moi d'avoir quelqu'un qui m'explique les équations. J'avais peur d'une page de maths avec des formules ; j'ai trouvé des vidéos super. »

— Malgré cette appétence pour les idées mathématiques, il a exprimé très clairement son manque d'intérêt pour l'abstraction pure, sans lien apparent avec le réel.

[En sautant l'interview d'Alain Chenciner à propos du huit] « Ça ne m'intéresse pas. Le mec il ne me passionne pas, en plus comme on dit que le huit n'existe pas, il va nous expliquer comment il l'a trouvé, ça ne m'intéresse pas. »

[Après l'interview d'Étienne Ghys sur l'effet papillon] « Je suis un peu déçu, j'aurais aimé avoir plus d'exemples scientifiques et concrets de l'effet papillon. »

— Il a bien aimé les commentaires des personnages, qu'il a clairement identifiés comme méta-mathématiques, mais n'a par contre pas beaucoup apprécié les interviews des mathématiciens, qu'il a jugées trop longues et trop vagues.

« J'aimais bien le style des personnages, ça faisait un peu BD. C'était des commentaires un peu en recul, à un niveau différent, un niveau méta. J'aime bien ce genre de choses, ça fait un fil rouge d'une page à l'autre, même sur des pages qui n'ont rien à voir on a l'impression d'être en terrain connu. »

[Après la vidéo d'Étienne Ghys sur la page *Pourquoi deux ?*]« Je suis un peu déçu. La vidéo est longue par rapport au contenu ; j'aurais pu avoir l'essentiel en une minute. »

— Il s'est montré très intéressé par les simulations, qu'il a longuement observées, en essayant d'anticiper ce qui allait se passer, en se posant des questions sur ce qu'il voyait. Même si elles étaient très réduites, il a apprécié les possibilités d'interaction qui lui étaient proposées.

[En comparant deux trajectoires] « La seule différence c'est que dans l'une le gros corps rouge bouge et dans l'autre non ! » [Sur une autre] « Ah, c'est la lune ça ! C'est joli hein ! J'attends de voir si ça se raccorde... bon, la verte elle va se raccorder, mais la violette ? Ah non, ça se décale un peu ! » [En augmentant la vitesse] « Et ça se décale encore un peu du même intervalle ! Ah j'ai compris ! » [Deux soleils] « Ah ça boucle pas ! Qu'est-ce qui se passe ? Ça diverge ou ça revient ? » [Suivante] « Houlala, c'est n'importe quoi ! Houlalalala c'est du délire intégral... Oh !!! ils sont partis tous les deux ! Le jouet il est cassé, je suis trop triste ! » [Suivante] « Elle est belle celle-là ! Je sens qu'elle va partir la verte... » [Attend assez longtemps de voir l'évolution, puis s'en va] « C'est génial ce truc, ça te permet de visualiser ce qui passe, et c'est bien de pouvoir jouer sur la vitesse, de pouvoir modifier les paramètres. » [*Ça te permet de comprendre ou c'est récréatif ?*] « C'est récréatif, et même si ça ne me permet pas de comprendre, ça me permet de percevoir, de toucher du doigt le caractère chaotique du système. »

— La présence d'éléments qui l'ont moins intéressé (certains textes, certaines vidéos, les illustration) ne l'a pas dérangé. Par contre, il s'est montré importuné par les évocations d'idées ou de notions qui étaient peu ou pas expliquées.

« Globalement, j'ai eu ce à quoi je m'attendais. Parfois j'étais un peu déçu, mais c'est pas grave. Il y avait des choses intéressantes dans chaque chapitre. C'est équilibré, il y en a pour tous les goûts. Chaque chapitre est équilibré. Ceux qui cherchent des maths dures, ceux qui cherchent de l'histoire, ceux qui cherchent du poétique, tout le monde y trouve son compte. »

[En lisant le paragraphe sur le modèle de Kepler] « Je suis un peu perplexe sur cette histoire de modèle de Kepler. Les trois lois j'ai appris quelque chose, le modèle c'est perturbant. Je comprends pas vraiment ce que ça veut dire... on ouvre une page qu'on ne creuse pas, je trouve ça un peu frustrant. »

[À la fin de la vidéo sur l'équation du mouvement] « Le seul truc que je comprends pas c'est l'exemple de la balançoire. Il faudrait aller plus lentement sur le calcul de la résultante. Je viens de comprendre, c'était trop rapide. »

[À la fin de la visite] « Les vidéos ou les textes qui me plaisaient moins ne m'ont pas gêné. Ce qui m'a plus gêné, ce n'était pas ce qui ne m'intéressait pas, c'est les notions qui étaient introduites que je ne comprenais pas et que je n'avais pas les moyens de creuser. Ce qui est négatif c'est ce qui est à moitié expliqué, que je n'ai pas les moyens de comprendre ou qui me demanderait un gros effort personnel. Je m'attends à être mené par la main. Je ne m'attends pas à être planté et qu'on me dise *Tiens il y a un truc, démerde-toi avec ça.* »

— Tango a apprécié qu'il y ait un parcours à suivre, mais il a exprimé quelques regrets quant à l'ordre de visite choisi.

[En lisant le diaporama sur les lois de Kepler] « C'est ce que je préfère de tout ce que j'ai vu jusqu'ici. J'aurais bien aimé le voir plus tôt. »

[À la fin de sa visite]« J'ai bien aimé qu'il y ait un parcours, même si moi je ne l'aurais pas fait dans le même sens. J'aurais tendance à mettre d'abord les résultats, et ensuite expliquer comment on est arrivés là. J'aurais commencé par les simulations qui sont intéressantes et attirantes. « On est arrivés là, et voilà comment on a fait », ça marche beaucoup mieux. »

— Bien qu'il ait tenu à suivre le parcours, Tango s'est montré attiré par certains titres, qui ont piqué sa curiosité.

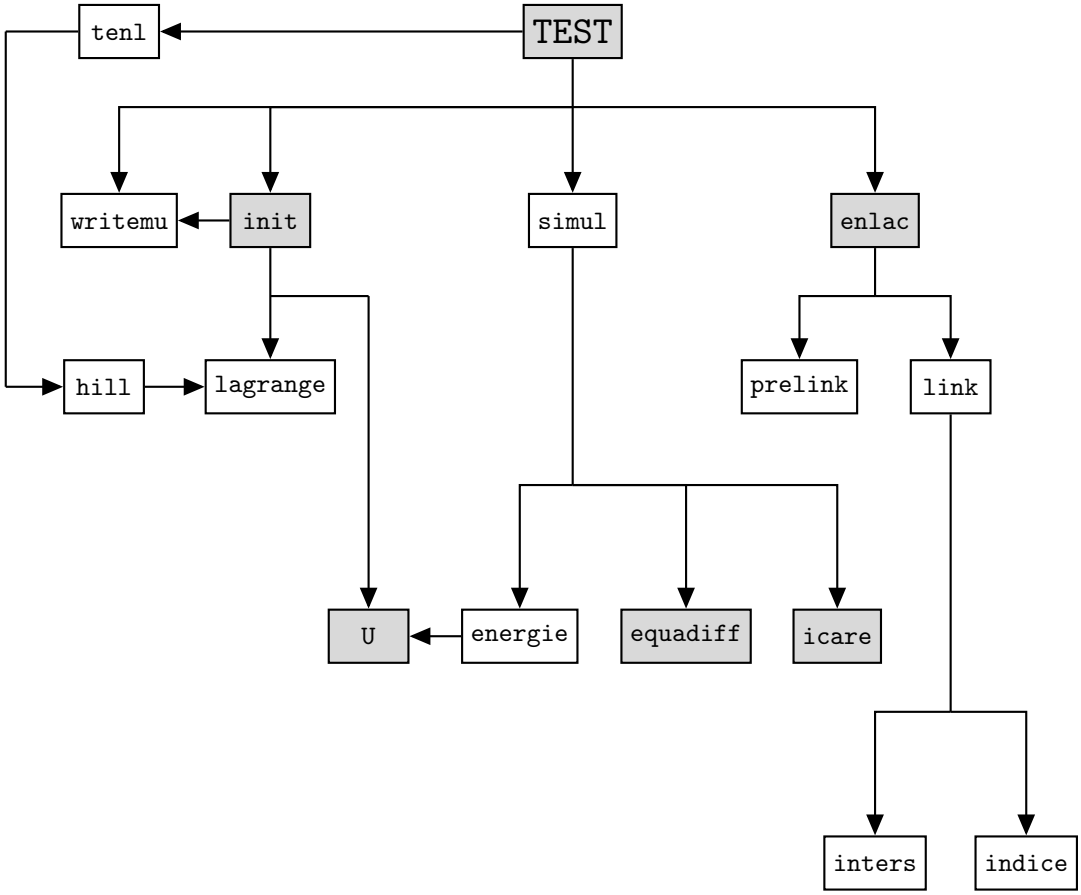
[En parlant des bannières qui apparaissent lorsqu'on clique sur *S'échapper du parcours*] « J'ai

bien aimé les bannières que j'ai vues par hasard, ça donnait envie. Je trouverais ça bien de faire apparaître les bannières par défaut. Ça donne envie.

[Un peu avant la fin de la partie *Deux astres en tête à tête*] « Si j'étais chez moi, j'arrêterais à la fin de la partie. Peut-être que je reviendrais dans la dynamique chaotique un autre jour, ou pas. Ah si, je reviendrais peut-être, parce que j'ai vu qu'il y avait l'effet papillon, ça m'intéresse de savoir ce que c'est que l'effet papillon. »

Annexe G

Organigramme du programme



En gris, les scripts ou fonctions qui appellent la fonction `mu`.

`TEST` [script] : programme principal ;

`init` [script] : tire au hasard – pour la mesure de Liouville – les conditions initiales des trajectoires ;

`simul` [script] : intègre les trajectoires à partir des conditions initiales calculées précédemment par `init` ;

`enlac` [script] : calcule les enlacements des trajectoires calculées par `simul` ;

`writemu` [fonction de μ] : écrit dans la fonction `mu` – la valeur de μ ;

`mu` [fonction sans argument] : contient la valeur de μ ;

`tenl` [fonction de μ, δ] : calcule le taux d'enlacement moyen dans le niveau d'énergie (μ, δ), en fonction de quoi est fixé le temps d'intégration ;

`hill` [fonction de μ, δ] : calcule les courbes bordant les composantes connexes de la région de Hill (μ, δ) ;

`lagrange` [fonction de μ] : calcule les cinq points de Lagrange pour le système correspondant à μ ;

`U` [fonction de μ et d'une position] : calcule l'opposé du potentiel en la position, pour le système correspondant à μ.

`equadiff` [fonction de la position] : contient l'équation différentielle du système ;

`energie` [fonction d'une trajectoire] : calcule l'énergie au cours de la trajectoire (pour vérifier sa conservation) ;

`icare` [fonction de la position] : signale à l'intégrateur que la distance à la primaire est trop petit – l'intégrateur interrompt alors le calcul ;

`prelink` [fonction d'une trajectoire] : pré-calcul pour `link` — rend les données relatives à la trajectoire (argument des vitesses, indices pour lesquels cet argument s'annule) dont `link` aura besoin ;

`link` [fonction des données de sortie de `prelink`] : calcule les quatre termes de l'enlacement ;

`inters` [fonction de deux trajectoires] localise les points d'intersection des deux courbes ;

`indice` [fonction d'une courbe et d'un point] : calcule l'indice de la courbe par rapport au point.

`visu` [fonction sans argument] : interface utilisateur pour afficher les données. Ouvre une figure, cherche des fichiers de données calculés et sauvergardés, propose à l'utilisateur d'en sélectionner un. Offre diverses possibilités d'affichage des trajectoires.

Annexe H

Code du programme

Script principal TEST

```
% script TEST.m :
% evaluation de l'enlacement dans le PCR3C en variant masses et energies

N=2; % nombre d'orbites pour chaque valeur des parametres

for mu=[.1] % (faire mu>.5 ?)
    writemu(mu); %...
    for delta=[.05] % ecart negatif a l'energie du point de Lagrange L1

        TT=50*ceil(10/sqrt(tenl(mu,delta))); % temps d'integration
            adapte au taux d'enlacement

        disp(['mu=',num2str(mu),'  delta=',num2str(delta),'  N=',num2str
            (N),'  TT=',num2str(TT)])

                % nom du fichier de donn\'ees
                num=0;
                nom1=['mu',num2str(mu),'d',num2str(delta),'N',num2str(N)
                    ,'TT',num2str(TT),'_rel'];

                while exist(['RES/',nom1,num2str(num),'.mat'])==2
            num=num+1;
        end

        nom1=['RES/',nom1,num2str(num),'.mat'];

        init % initialisations

        simul % simulation des trajectoires (parallele)

        if ~exist('RES','dir')
```

```
            warning('creation du repertoire ''RES''')
            mkdir('RES')
        end

        clear k po num

        save(nom1)

        enlac % calcul des enlacements (parallele)

        clear Q A I

    end
end
```

Script init

```
% script init.m :
% initialisation des parametres du pb circ. restr. des 3 corps
% calcul de N conditions initiales avec tirage d'Archimede -> Liouville
% parametres a definir avant "init" : (avec exemples)
% mu=.2; parametre donnant les masses et positions des 2 corps
   principaux
% delta=.05; % ecart negatif a l'energie critique du point de Lagrange
   L1
% N=20; % nombre de conditions initiales calculees (aleatoires)

writemu(mu);

[H0,c]=hill(mu,delta); % calcul du contour de la region de Hill (U>c)
E0=-c;

% on commence par le choix des N points initiaux
% tires au hasard dans la composante de E<E0 qui contient -mu

xmin=min(real(H0{2})); xmax=max(real(H0{2}));
ymin=min(imag(H0{2})); ymax=max(imag(H0{2}));

k=0;
Z0=zeros(1,N);
while k<N
   po=xmin+rand*(xmax-xmin)+1i*(ymin+rand*(ymax-ymin));
   if U(po)>c % test suffisant pour c > U(L1)
       k=k+1;
       Z0(k)=po;
   end
end
```

```
% puis les vitesses initiales avec arguments uniformes aussi
% --> matrice complexe 2xN de conditions initiales
Z0=[Z0;sqrt(2*(U(Z0)-c)).*exp(2i*pi*rand(1,N))];

%plot(Z0(1,:),'bo')
%plot([1 0;1 .05]*Z0,'r') % affichage des points et de leurs vitesses
```

Script simul

```
% script simul.m :
% integration non vectorisee des trajectoires issues de Z0
% (permet des trajectoires de longueurs differentes et en principe
%  moins de pas intermediaires)
% conditions initiales dans Z0 matrice 2xN complexe (calculee par init)
% temps final TT
% resultats :
% Z tableau 1xN de trajectoires de phase
% Tf vecteur ligne des temps finaux (=TT si ode n'est pas tombe sur une
   singularite)
% ER vecteur ligne des erreurs max en energie

options=odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-10,'Events',@icare);
% ode vise |er(i)|<max(atol,|y(i)|*rtol)
% trop_pres arrete l'integration si la trajectoire passe a distance <1e
   -7 du corps
N=size(Z0,2);
ER=zeros(1,N);
Tf=zeros(1,N);
Z=cell(1,N);
tic
parfor k=1:N     % boucle parallele %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
   [Ts,Z{k}] = ode113(@equadiff,[0 TT],Z0(:,k),options);
   Tf(k)=max(Ts); % temps final atteint par ode113 (Tf<=TT)
   Z{k}=Z{k}.'; % inconstance lignes/colonnes de ode ...
   % Si Tf est vraiment trop petit (<TT/10)
   if Tf(k)<TT/10,disp('temps final < 10% du temps vise'),end
   ER(k)=feval(@(X)max(abs(X-X(1))),energie(Z{k})); % erreur max en
      energie sur la trajectoire
   decim=1; % pour info/compatibilite
   disp(['k=',num2str(k),' Tf=',num2str(Tf(k)),' L=',num2str(size(Z{k
      },2)),' decim=',num2str(decim),' ER=',num2str(ER(k))])
end
toc

% nettoyage
clear Ts ans
```

Script enlac

```
% script enlac.m :
% calcul des enlacements mutuels des n trajectoires Q{1} ... Q{n}
% calculees auparavant
% version separant les contributions des 4 termes + parallelisme

[Q,I,A]=prelink(cellfun(@(X) single(X(1,:)),Z,'Unif',0)); % precalcul
   pour link3
% en simple precision pour economiser la memoire
% effet secondaire : les enlacements de longues trajectoires ne sont
   plus (demi-) entiers

clear Z

ENLr=zeros(N,N,4);
ENL=zeros(N,N);

pctRunOnAll warning('off')

tic
for j=1:N-1
    for k=j+1:N

        ENLr(j,k,:)=link(Q{j},I{j},A{j},Q{k},I{k},A{k},-mu);
        ENL(j,k)=sum(ENLr(j,k,:));

        save(nom1,'ENLr','ENL','-append');

                if ENL(j,k)>=0
                fprintf('+')
                else
                        fprintf('-')
                end

    end
    fprintf('\n')
end
tps_tot=toc
```

Fonction writemu

```
function writemu(x)
% writemu(x)
% ecrit le fichier mu.m pour que l'appel a la fonction mu() retourne la
% valeur x
chaine1='function x=mu,x=';
```

```
chaine2=';end';
fic=fopen('mu.m','w');
fwrite(fic,[chaine1,num2str(x),chaine2]);
fclose(fic);
```

Fonction mu

```
function x=mu,x=0.1;end
```

Fonction tenl

```
function t=tenl(mu,delta)
% t=tenl(mu,delta)
% taux moyen d'enlacement pour les trajectoires de parametres mu,delta
% integrale de U-c sur la composante de U>c qui contient la primaire 1
% divisee par pi fois l'aire au carre de cette composante
[h,c]=hill(mu,delta);
h=h{2}; % courbe bord de la composante de U>c qui nous interesse
args={min(real(h)),max(real(h)),min(imag(h)),max(imag(h)),'AbsTol',1e-4,
    'RelTol',1e-4};
t= integral2(@(x,y) max(0,U(x+1i*y,mu)-c),args{:});
aire=sum(imag(h).*diff(real([h;h(1)])));
t=t/(pi*aire^2);
```

Fonction hill

```
function [H,c] = hill(mu,delta,varargin)
% H = hill(mu,delta,varargin)
% calcule le niveau U=U(L1)+delta avec U=|q|^2/2+(1-mu)/|q+mu|+mu/|q+mu
    -1|
% et le dessine si nargin>2 (avec superposition dans la figure courante
% si l'argument optionnel est non nul)
% H contient entre 0 et 3 courbes (les composantes connexes du niveau)

% Newton pour trouver des points sur U=c
% (par ex sur l'axe reel ou sur Re=1/2-mu)
function z=newton(z0,nit,c,d) % d vecteur donnant la direction de la
    recherche, nit le nombre d'iterations
     z=z0;
     for i=1:nit
         z=z-d*(v(z)-c)./real(d'*vp(z));
     end
end % newton

%%%%%%%% fonctions anonymes pour newton et eviter "global mu" ou pire
```

```
% oppose du potentiel de Hill
v=@(x) abs(x).^2/2 + (1-mu)./abs(x+mu) + mu./abs(x-1+mu);

% gradient de v , complexe
vp=@(x) x - (1-mu).*(x+mu)./abs(x+mu).^3 - mu.*(x+mu-1)./abs(x-1+mu).^3;

L=lagrange(mu);
C=v(L);
if (mu<=.5 && any(diff(C)>1e-12)) || (mu>.5 && any(diff(C([1 3 2]))>1e
    -12)), warning('lagrange fait des siennes...'); end
tol=1e-6;

c=C(1)+delta;

% figure;hold on;axis equal;
% plot([-mu 1-mu],[0 0],'or') % primaires en rouge
% plot(real(L),imag(L),'og') % points de Lagrange en vert

if c<C(4)
    warning('region de Hill=tout')
elseif c<C(3) % 2 composantes autour de L4 L5
    z0=[ 1/2-mu+1i 1/2-mu-1i ];
    while max(abs(v(z0)-c))>tol
        z0=newton(z0,1,c,1i);
    end
elseif c<C(2) % une seule composante en forme de pince
    z0=(L(3)-mu)/2;
    while abs(v(z0)-c)>tol
        z0=newton(z0,1,c,1);
    end
elseif c<C(1) % 2 composantes emboitees
    z0=[ L(3)-1 , (L(2)+1-mu)/2 ];
    while max(abs(v(z0)-c))>tol
        z0=newton(z0,1,c,1);
    end
else % trois composantes
    z0=[ L(3)-1 , (L(3)-3*mu)/4 , (L(2)+3*(1-mu))/4 ];
    % premiere = exterieure, deuxieme = autour -mu, troisieme = autour
       de 1-mu
    while max(abs(v(z0)-c))>tol
        z0=newton(z0,1,c,1);
    end
end

% construction des contours de Hill
for k=1:size(z0,2)
  z=z0(k);
```

```
  H{k}=z;
  h=.03*(1-mu)^(1/3)/max(1,abs(vp(z))^2); % un pas raisonnable
  test=0;
  val=1;
  while test==0
    %plot(z,'b.');drawnow
    z1=z+h*1i*vp(z);
    z1=newton(z1,3,c,vp(z1));
    H{k}=[H{k};z1];
    val1=real((z-z0(k))'*(z1-z));
    test=(val*val1<0)&(abs(z-z0(k))<2*h*abs(vp(z)));
    % test=1 si on est proche du point initial et qu'on s'en eloigne
    % *et* s'en approche dans deux pas successifs
    z=z1;val=val1;
  end
end

if nargin>2
    if varargin{1}==0 % nouvelle fenetre
        %figure('WindowStyle','modal','OuterPosition',[0 0 1300 750])
        figure('OuterPosition',[0 0 1300 750])
        axis equal
        hold on
    end
    for k=1:size(z0,2)
        plot(real(H{k}),imag(H{k})) % regions de hill
    end
    plot([-mu 1-mu],[0 0],'or') % primaires en rouge
    plot(real(L),imag(L),'og') % points de lagrange en vert
end

end  % de la fonction hill
```

Fonction lagrange

```
function [L,C]=lagrange(mu)
% [L,C]=lagrange(mu)
% calcul des points de Lagrange et de leurs energies
%(ordonnes par U decroissant, i.e. energie croissante)

L4=1/2-mu+1i*sqrt(3)/2;
L5=conj(L4);

% fonction (vectorisee) telle que g(x)=x donne L1,L2,L3
function y=g(x)
    y=(1-mu)*sign(x+mu)./(x+mu).^2+mu*sign(x-1+mu)./(x-1+mu).^2;
end
```

```
% et sa derivee (pour newton)
function y=gp(x)
    y=-2*((1-mu)./abs(x+mu).^3+mu./abs(x-1+mu).^3);
end

% newton (vectorise)
x=[-mu+1/2 1-mu/2 -2*mu]; % points de depart pour L1 L2 L3 :   L3  -mu
   L1  -mu+1  L2
while max(abs(g(x)-x))>1e-12
    x=x-(x-g(x))./(1-gp(x));
end
L=[x L4 L5];

if nargout==2, C=U(L,mu); end

end
```

Fonction U

```
function u=U(z,var)
% u=U(z,var)
% oppose du potentiel de Hill (z complexe)
% si var n'est pas fourni, il est pris dans mu.m
if nargin==1, var=mu; end
u=abs(z).^2/2 + (1-var)./abs(z+var) + var./abs(z+var-1);
```

Fonction equadiff

```
function dy = equadiff(~, x)
% dy=equadiff(~,x)
% equation differentielle du PCR3C
% x vecteur complexe 2x1 (ou 2Nx1)
dy = x;
q=x(1:2:end);
qp=x(2:2:end);
dy(1:2:end) = qp; %  p = qp + i q
dy(2:2:end) = - 2i*qp + q - mu*(q+mu-1)./abs(q+mu-1).^3 - (1-mu)*(q+mu)
   ./abs(q+mu).^3;
```

Fonction energie

```
function E = energie(Z)
% E = energie(Z)
% energie le long d'une ou plusieurs trajectoires dans l'espace des
   phases (avec temps horizontal)
Q=Z(1:2:end,:); % positions
```

```
QP=Z(2:2:end,:); % vitesses
E=abs(QP).^2/2-U(Q); % energies
```

Fonction icare

```
function [val,ist,dir]=icare(~,z)
% [val,ist,dir]=trop_pres(t,z)
val=1e7*abs(z(1)+mu)-1;
ist=1;
dir=[];
```

Fonction prelink

```
function [Q,I,A] = prelink(Q,tol)
% [Q,I,A] = prelink(Q,tol)
% prend en argument un tableau 1xn de trajectoires Q{i}
% (vecteurs lignes complexes de longueurs differentes)
% et en option une tolerance (0 par defaut) pour la fermeture de la
   trajectoire
% en sortie
% Q tableau des Q{i} refermees si necessaire
% I tableau des vecteurs des indices (pour chaque traj) o\`u l'angle de
   la vitesse traverse 0
% A tableau des vecteurs des angles dans (-pi,pi) des vitesses
% On n'utilise meme pas la vitesse sortant de l'algo. d'integration...
if nargin<2,tol=0;end
n=size(Q,2);
I=cell(1,n);
A=cell(1,n);
parfor k=1:n
    [Q{k},I{k},A{k}] = prelink0(Q{k},tol)
end

function [Q,I,A] = prelink0(Q,tol)
% prend en argument UNE trajectoire (vecteur ligne complexe)
% et en option une tolerance (0 par defaut) pour la fermeture de la
   trajectoire
% en sortie
% Q est refermee si necessaire
% I vecteur des indices pour lesquels l'angle de la vitesse traverse 0
% A vecteur des angles dans (-pi,pi) des vitesses
if nargin<2,tol=0;end
if abs(Q(1)-Q(end))>tol  % on referme la trajectoire seulement si
   necessaire
    Q = [Q Q(1)];
end
```

```
V = diff(Q); % derivee approchee
V= [V V(1)]; % l'angle de la tangente peut traverser 0 au point initial
A= angle(V); % angle(0)=0 ...
I = find( A(1:end-1).*A(2:end) < 0 & abs(A(1:end-1)-A(2:end)) < pi );
```

Fonction link

```
function lk = link(q1, i1, a1, q2, i2, a2, c,robust)
% lk = link3rel_par(q1, i1, a1, q2, i2, a2, c,robust)
% calcule separement les quatre termes de la formule d'enlacement
% prend en argument 2x la sortie de prelink : deux trajectoires (
   vecteurs
% ligne), les vecteurs des angles des vitesses correspondant, deux
   vecteurs d'indices
% (correspondant aux points juste avant que l'argument de la vitesse s'
   annule), et la
% position de la primaire (-mu en pratique)
% calcul parallelise des termes 1 a 3 (sur 4)

if nargin<8,robust=1;end

lk=zeros(1,4);

l=0;
q1i1p=q1(i1+1);
a1i1p=a1(i1+1);
parfor k=1:numel(i1) % parallelisation
    % en tous les points de la premiere traj ou l'arg de la vitesse s'
       annule
    l=l-indice(q2,q1i1p(k))*sign(a1i1p(k));
    % indice de la 2e courbe par rapport au point * signe de la fibre ?
end
lk(1)=l;

l=0;
q2i2p=q2(i2+1);
a2i2p=a2(i2+1);
parfor k=1:numel(i2) %symetrique
    l=l-indice(q1,q2i2p(k))*sign(a2i2p(k));
end
lk(2)=l;

% points d'intersection des deux courbes  %%%%%%%%%%%% PARALLELISATION
[I1,I2]=inters(real(q1), imag(q1), real(q2), imag(q2),robust);

if size(I1,1)>0    % si intersection (test surement pas necessaire)
    s = sin(a2(I2)-a1(I1)) > 0; % vecteur booleen true=1 si croist
```

```
        direct, false=0 sinon.
    % croisement direct <-> difference des angles in [0,pi] <-> sin>0
    t=trigo(a1(I1), a2(I2), 0);
    lk(3)=sum( s & t )-sum( ~s & t ); % simule le signe des croisements
        avec des booleens
    % c'est plus efficace a la fois en temps et en memoire
end

lk(4)=indice(q1,c)*indice(q2,c)/2; % terme RP^3

%%%%%%%%%%%% fonctions locales %%%%%%%%%%%%%%

% ordre trigo
function t = trigo(a1,a2,a3)
t = ((a1<a2) & (a2<a3)) | ((a2<a3) & (a3<a1)) | ((a3<a1) & (a1<a2));
end

end
```

Fonction indice

```
function ind = indice(q,c)
% ind = indice(q,c) indice d'une courbe fermee q autour d'un point c
% q vecteur ligne complexe (ou plusieurs lignes -- vectorisation)
% c nombre complexe
% ind vecteur ligne, entier si q est fermee (q(:,end)=q(:,1))
q= q.'; % transposition
(q(2:end,:)-c)./(q(1:end-1,:)-c);
ind = sum(angle(ans))/(2*pi);
```

Fonction visu

```
function fig=visu
% interface de visualisation des fichiers contenant des donnees
% prealablement calculees (dans le sous-repertoire RES)

fig = figure('Visible','on','Units','normalized','Position'
    ,[0,0.01,1,0.9],'WindowButtonDownFcn',@gf);

    % fonction principale de l'interface
    function gf(varargin)

        [fic,chem]=uigetfile('RES/mu*.mat');
        if fic~=0
            ff=fullfile(chem,fic);
            load(ff,'Z','mu','delta','N','TT','Tf','H0');
```

```
clf
hold on
axis equal
title(replace(ff,'_','\_'));
th=1/max(20,N); % taille horizontale
tv=.025;  % taille verticale
for k=1:N % boutons de selection des trajectoires
   individuelles : une trajectoire peut etre affichee ou
   non
         %  et si affichee on peut choisir la portion
            initiale a visualiser (nombre de points)
    plot(Z{k}(1,:),'Visible','off','ZDataSource',num2str(k))
        ; % dessin initial 2d (et invisible)
    t(k)=uicontrol(fig,'Style','edit','UserData',{k},'Units'
        ,'normalized','Position',[(k-1)*th tv th tv],...
        'FontSize',8,'String',num2str(size(Z{k},2)),'
           Callback',@tronc);  % nombre de points a
           dessiner (tout par defaut)
    v(k)=uicontrol(fig,'Style','togglebutton','Units','
        normalized','Position',[(k-1)*th 0 th tv],...
        'String',num2str(k),'Value',0,'Callback',@visib); %
           choix des trajectoires affichees
end
ax=gca;
ax.Children=ax.Children(N:-1:1); % enfants dans l'ordre des
   dessins (matlab choisit l'ordre inverse...)

writemu(mu);
Y=cell(1,N);
for k=1:N
    Y{k}=projt0(Z{k}); % pre-calcul des projections 3d des
        trajectoires
end

% boutons de controle

invs=uicontrol(fig,'Style','togglebutton','Units','
   normalized','Position',[.95 .05 .05 .05],'String','Inv
   Sel','Value',0,'Callback',@invsel);

d3=uicontrol(fig,'Style','togglebutton','Units','normalized'
   ,'Position',[.95 .1 .05 .05],'String','3D','Value',0,'
   Callback',@p3d);

comp=uicontrol(fig,'Style','togglebutton','Units','
   normalized','Position',[.95 .15 .05 .05],'String','
```

```
        SelCompl','Value',0,'Callback',@selcomp);

    axeq=uicontrol(fig,'Style','pushbutton','Units','normalized'
        ,'Position',[.95 .2 .05 .05],'String','AxisEqual','
        Callback',@(~,~)axis('equal'));

    racc=uicontrol(fig,'Style','slider','Units','normalized','
        Position',[.95 .4 .01 .5],'Value',1,'Callback',@raccglob
        );


end % if fic~0

% fonctions auxiliaires appelees par les boutons de controle

function selcomp(~,~)
     % selection/deselection des trajectoires ayant atteint le
         temps TT
     for k=1:N
        v(k).Value = xor(Tf(k)==TT , v(k).Value);
        visib(v(k));
     end
end

function invsel(~,~)
    % inverse la selection courante (utile?)
    for k=1:N
        v(k).Value=1-v(k).Value;
        visib(v(k));
   end
end

function raccglob(source,~)
    % reglage simultane du nombre de points de toutes les
        trajectoires
    % la proportion retenue est donnee par la position du
        curseur
    for k=1:N
        t(k).String=num2str(round(source.Value*size(Z{k},2)));
        tronc(t(k));
    end
end

function p3d(~,~)
    % affichage des trajectoires en trois dimensions
    etat={ax.Children.Visible};
    cla
```

```
        for k=1:N
            if d3.Value==1
                p3(Y{k}(:,1:str2num(t(k).String)),'Visible',etat{k})
                    ;
                view(3);
            else
                plot(Z{k}(1,1:str2num(t(k).String)),'Visible',etat{k
                    });
                view(2)
                axis fill
            end
        end
        ax=gca;
        ax.Children=ax.Children(N:-1:1); % ordre inverse enfants/
            dessins
    end

    function []=p3(X,varargin)
        % dessin en 3d de X de taille 3 x N , avec options
        plot3(X(1,:),X(2,:),X(3,:),varargin{1:nargin-1})
        axis equal
    end

    function tronc(source,~)
        % troncature individuelle d'une trajectoire
        k=source.UserData{1};
        L=min([str2num(source.String),size(Z{k},2)]);
        % on peut entrer "Inf" dans le champ k pour selectionner
            toute la trajectoire
        source.String=num2str(L);
        col=ax.Children(k).Color;
        vis=ax.Children(k).Visible;
        delete(ax.Children(k));
        if d3.Value==0
            plot(Z{k}(1,1:L),'Color',col,'Visible',vis)
        else
            p3(Y{k}(:,1:L),'Color',col,'Visible',vis)
        end
        ax.Children(1:k)=ax.Children([2:k 1]);
    end

    function visib(source,~)
        % action du bouton qui rend visible ou non une trajectoire
        val={'off';'on'};
        col={'k';'r'}; % couleur du numero de trajectoire
        k=str2num(source.String);
        ax.Children(k).Visible=val{1+source.Value};
```

```
            source.ForegroundColor=col{1+source.Value};
        end

        function y=projt0(z)
            % "projection" de z=(q,qp) \in (C-{-mu})xC dans un tore
                plein de R^3 ;
            % quand z est sur J=const avec J=|qp|^2/2-U(q), ca donne un
                plongement
            % interieur au tore de revolution a distance pi/4 du cercle
                unite horizontal
            a=angle(z(2,:));
            b=atan(abs(z(2,:)))/2; % pi/4 ~ 0.78 < 1
            c=(z(1,:)+mu)./abs(z(1,:)+mu).*( 1 - b.*cos(a) );
            y=[real(c) ; imag(c) ; b.*sin(a)];

        end

    end % function gf(varargin)


end % function visu
```

Fonction inters

```
function [iout,jout,x0,y0] = inters(x1,y1,x2,y2,robust)
% [iout,jout,x0,y0] = inters_par(x1,y1,x2,y2,robust)
%
% Intersections de courbes polygonales (x1,y1) (x2,y2)
% x1,y1,x2,y2 vecteurs reels
% robust = 1 par defaut
% iout,jout indices des segments qui s'intersectent
% x0,y0 coordonnees des points d'intersection
%
% Version minimalement modifiee pour respecter l'ordre et le format des
    arguments
% de sortie de la version anterieure, en conservant l'option "robuste"
% et en ajoutant la parallelisation du calcul des "vraies intersections"
%
% ROBUST (optional) set to 1 or true means to use a slight variation of
    the
% algorithm that might return duplicates of some intersection points,
    and
% then remove those duplicates. The default is true, but since the
% algorithm is slightly slower you can set it to false if you know that
% your curves don't intersect at any segment boundaries. Also, the
    robust
% version properly handles parallel and overlapping segments.
```

```
%

% Version: 1.12, 27 January 2010
% Author: Douglas M. Schwarz
% Email: dmschwarz=ieee*org, dmschwarz=urgrad*rochester*edu
% Real_email = regexprep(Email,{'=','*'},{'@','.'})

% Theory of operation:
%
% Given two line segments, L1 and L2,
%
% L1 endpoints: (x1(1),y1(1)) and (x1(2),y1(2))
% L2 endpoints: (x2(1),y2(1)) and (x2(2),y2(2))
%
% we can write four equations with four unknowns and then solve them.
   The
% four unknowns are t1, t2, x0 and y0, where (x0,y0) is the intersection
    of
% L1 and L2, t1 is the distance from the starting point of L1 to the
% intersection relative to the length of L1 and t2 is the distance from
   the
% starting point of L2 to the intersection relative to the length of L2.
%
% So, the four equations are
%
% (x1(2) - x1(1))*t1 = x0 - x1(1)
% (x2(2) - x2(1))*t2 = x0 - x2(1)
% (y1(2) - y1(1))*t1 = y0 - y1(1)
% (y2(2) - y2(1))*t2 = y0 - y2(1)
%
% Rearranging and writing in matrix form,
%
% [x1(2)-x1(1) 0 -1 0; [t1; [-x1(1);
% 0 x2(2)-x2(1) -1 0; * t2; = -x2(1);
% y1(2)-y1(1) 0 0 -1; x0; -y1(1);
% 0 y2(2)-y2(1) 0 -1] y0] -y2(1)]
%
% Let's call that A*T = B. We can solve for T with T = A\B.
%
% Once we have our solution we just have to look at t1 and t2 to
   determine
% whether L1 and L2 intersect. If 0 <= t1 < 1 and 0 <= t2 < 1 then the
   two
% line segments cross and we can include (x0,y0) in the output.
%
% In principle, we have to perform this computation on every pair of
   line
```

```
% segments in the input data. This can be quite a large number of pairs
   so
% we will reduce it by doing a simple preliminary check to eliminate
   line
% segment pairs that could not possibly cross. The check is to look at
   the
% smallest enclosing rectangles (with sides parallel to the axes) for
   each
% line segment pair and see if they overlap. If they do then we have to
% compute t1 and t2 (via the A\B computation) to see if the line
   segments
% cross, but if they don't then the line segments cannot cross. In a
% typical application, this technique will eliminate most of the
   potential
% line segment pairs.

% Extra function by James Ashton, Canberra, Australia
% Keeping this as a separate function means Matlab can automatically
% free up all the temporary space once we're done.
    function [i2,j2] = bBoxOverlaps()

        % recursive function for searching in sub-rectangles
           %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        function [i3,j3] = quadtree(bb1, in1, bb2, in2, bb,
           outerprobsize)
            nn1 = numel(in1);
            nn2 = numel(in2);
            probsize = nn1 * nn2;
            % If there are many intersections to consider, divide the
            % rectangle under consideration into four equal smaller
            % rectangles and solve for each separately. Don't divide if
            % doing so isn't reducing the problem (many long overlapping
                lines).
            if (probsize > 1e6 && probsize < outerprobsize)  %%%%%%%%
               AJUSTEMENT 3000 -> 1e6 %%%%%%%%
                midx = (bb(1) + bb(3)) * 0.5;
                midy = (bb(2) + bb(4)) * 0.5;
                bb = [bb midx midy];

                ix1 = find(bb1(:,1) <= midx & bb1(:,2) <= midy);
                ix2 = find(bb2(:,1) <= midx & bb2(:,2) <= midy);
                [i3, j3] = quadtree(bb1(ix1,:), in1(ix1), bb2(ix2,:),
                   in2(ix2), bb([1 2 5 6]), probsize);

                ix1 = find(bb1(:,3) >= midx & bb1(:,2) <= midy);
                ix2 = find(bb2(:,3) >= midx & bb2(:,2) <= midy);
                [i4, j4] = quadtree(bb1(ix1,:), in1(ix1), bb2(ix2,:),
```

```
            in2(ix2), bb([5 2 3 6]), probsize);
        i3 = [i3;i4];
        j3 = [j3;j4];

        ix1 = find(bb1(:,1) <= midx & bb1(:,4) >= midy);
        ix2 = find(bb2(:,1) <= midx & bb2(:,4) >= midy);
        [i4, j4] = quadtree(bb1(ix1,:), in1(ix1), bb2(ix2,:),
            in2(ix2), bb([1 6 5 4]), probsize);
        i3 = [i3;i4];
        j3 = [j3;j4];

        ix1 = find(bb1(:,3) >= midx & bb1(:,4) >= midy);
        ix2 = find(bb2(:,3) >= midx & bb2(:,4) >= midy);
        [i4, j4] = quadtree(bb1(ix1,:), in1(ix1), bb2(ix2,:),
            in2(ix2), bb([5 6 3 4]), probsize);
        i3 = [i3;i4];
        j3 = [j3;j4];
    else
        [i3,j3] = find(...
            repmat(bb1(:,1),1,nn2) <= repmat(bb2(:,3).',nn1,1) &
                ...
            repmat(bb1(:,3),1,nn2) >= repmat(bb2(:,1).',nn1,1) &
                ...
            repmat(bb1(:,2),1,nn2) <= repmat(bb2(:,4).',nn1,1) &
                ...
            repmat(bb1(:,4),1,nn2) >= repmat(bb2(:,2).',nn1,1)
                ...
            );
        i3 = reshape(in1(i3),[],1);
        j3 = reshape(in2(j3),[],1);
    end
end % quadtree
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% find the bounding boxes of each segment
% each bbox row will have: [minx, miny, maxx, maxy]
bbox1 = horzcat(...
    min(x1(1:end-1), x1(2:end)), ...
    min(y1(1:end-1), y1(2:end)), ...
    max(x1(1:end-1), x1(2:end)), ...
    max(y1(1:end-1), y1(2:end)) ...
    );
indx1 = 1:n1; % keep a list of the segment indexes
del = find(isnan(dxy1(:,1)));
bbox1(del,:) = [];
indx1(del) = [];
```

```
        bbox2 = horzcat(...
            min(x2(1:end-1), x2(2:end)), ...
            min(y2(1:end-1), y2(2:end)), ...
            max(x2(1:end-1), x2(2:end)), ...
            max(y2(1:end-1), y2(2:end)) ...
            );
        indx2 = 1:n2;
        del = find(isnan(dxy2(:,1)));
        bbox2(del,:) = [];
        indx2(del) = [];

        % find the overall bounding box where potential overlaps might
        % occur.
        minx = max(min(bbox1(:,1)),min(bbox2(:,1)));
        miny = max(min(bbox1(:,2)),min(bbox2(:,2)));
        maxx = min(max(bbox1(:,3)),max(bbox2(:,3)));
        maxy = min(max(bbox1(:,4)),max(bbox2(:,4)));

        [i2,j2] = quadtree(bbox1, indx1, bbox2, indx2, [minx miny maxx
           maxy], inf);

    end  % bBoxOverlaps
       %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


% Input checks.
narginchk(2,5);
% Adjustments when fewer than five arguments are supplied.
switch nargin
    case 2
        robust = true;
        x2 = x1;
        y2 = y1;
        self_intersect = true;
    case 3
        robust = x2;
        x2 = x1;
        y2 = y1;
        self_intersect = true;
    case 4
        robust = true;
        self_intersect = false;
    case 5
        self_intersect = false;
end

% x1 and y1 must be vectors with same number of points (at least 2).
```

```
if sum(size(x1) > 1) ~= 1 || sum(size(y1) > 1) ~= 1 || ...
        length(x1) ~= length(y1)
    error('X1 and Y1 must be equal-length vectors of at least 2 points.'
       )
end
% x2 and y2 must be vectors with same number of points (at least 2).
if sum(size(x2) > 1) ~= 1 || sum(size(y2) > 1) ~= 1 || ...
        length(x2) ~= length(y2)
    error('X2 and Y2 must be equal-length vectors of at least 2 points.'
       )
end

% Force all inputs to be column vectors.
x1 = x1(:);
y1 = y1(:);
x2 = x2(:);
y2 = y2(:);

% Compute number of line segments in each curve and some differences we'
   ll
% need later.
n1 = length(x1) - 1;
n2 = length(x2) - 1;
xy1 = [x1 y1];
xy2 = [x2 y2];
dxy1 = diff(xy1);
dxy2 = diff(xy2);

% Determine the combinations of i and j where the rectangle enclosing
   the
% i'th line segment of curve 1 overlaps with the rectangle enclosing the
% j'th line segment of curve 2.

[i, j] = bBoxOverlaps();

% Find segments pairs which have at least one vertex = NaN and remove
   them.
% This line is a fast way of finding such segment pairs. We take
% advantage of the fact that NaNs propagate through calculations, in
% particular subtraction (in the calculation of dxy1 and dxy2, which we
% need anyway) and addition.
% At the same time we can remove redundant combinations of i and j in
   the
% case of finding intersections of a line with itself.
if self_intersect
    % lastpoly code by James Ashton, Canberra, Australia
    % for closed polygons, don't test the first and last segments
```

```
    lastpoly = isnan(dxy1(:,1)); % find polygon separators
    firstpoly = find(~lastpoly & [true;lastpoly(1:end-1)]); % first
        segment of each poly
    lastpoly = find(~lastpoly & [lastpoly(2:end);true]); % last segment
        of each poly
    % not a polygon (not closed) if first and last points aren't
        identical
    remove = x1(firstpoly) ~= x1(lastpoly+1) | y1(firstpoly) ~= y1(
        lastpoly+1);
    firstpoly(remove) = [];
    lastpoly(remove) = [];
    polyidx = (1:n1)';
    polyidx(lastpoly) = firstpoly; % create a lookup array to find the
        first segment given the last segment
    remove = isnan(sum(dxy1(i,:) + dxy2(j,:),2)) | j <= i + 1 | polyidx(
        j) == i;
else
    remove = isnan(sum(dxy1(i,:) + dxy2(j,:),2));
end
i(remove) = [];
j(remove) = [];

% Initialize matrices. We'll put the T's and B's in matrices and use
   them
% one column at a time. AA is a 3-D extension of A where we'll use one
% plane at a time.
n = length(i);
T = zeros(4,n);
AA = zeros(4,4,n);
AA([1 2],3,:) = -1;
AA([3 4],4,:) = -1;
AA([1 3],1,:) = dxy1(i,:).';
AA([2 4],2,:) = dxy2(j,:).';
B = -[x1(i) x2(j) y1(i) y2(j)].';

% Loop through possibilities. Trap singularity warning and then use
% lastwarn to see if that plane of AA is near singular. Process any such
% segment pairs to determine if they are colinear (overlap) or merely
% parallel. That test consists of checking to see if one of the
   endpoints
% of the curve 2 segment lies on the curve 1 segment. This is done by
% checking the cross product
%
% (x1(2),y1(2)) - (x1(1),y1(1)) x (x2(2),y2(2)) - (x1(1),y1(1)).
%
% If this is close to zero then the segments overlap.
```

```
% If the robust option is false then we assume no two segment pairs are
% parallel and just go ahead and do the computation. If A is ever
   singular
% a warning will appear. This is faster and obviously you should use it
% only when you know you will never have overlapping or parallel segment
% pairs.

if robust
    overlap = false(n,1);
    warning_state = warning('off','MATLAB:singularMatrix');
    % Use try-catch to guarantee original warning state is restored.
    try
        lastwarn('')
        dxy1i=dxy1(i,:);
        xy1i=xy1(i,:);
        xy2j=xy2(j,:);
        parfor k = 1:n   %%%%%%%% PARALLELISATION
            T(:,k) = AA(:,:,k)\B(:,k);
            [~,last_warn] = lastwarn;
            lastwarn('')
            if strcmp(last_warn,'MATLAB:singularMatrix')
                % Force in_range(k) to be false.
                T(:,k) = NaN*T(:,k);
                % Determine if these segments overlap or are just
                    parallel.
                overlap(k) = rcond([dxy1i(k,:);xy2j(k,:) - xy1i(k,:)]) <
                     eps;
            end
        end
        warning(warning_state)
    catch err
        warning(warning_state)
        rethrow(err)
    end
    % Find where t1 and t2 are between 0 and 1 and return the
       corresponding
    % x0 and y0 values.
    in_range = (T(1,:) >= 0 & T(2,:) >= 0 & T(1,:) <= 1 & T(2,:) <= 1)
        .';
    % For overlapping segment pairs the algorithm will return an
    % intersection point that is at the center of the overlapping region
        .
    if any(overlap)
        ia = i(overlap);
        ja = j(overlap);
        % set x0 and y0 to middle of overlapping region.
        T(3,overlap) = (max(min(x1(ia),x1(ia+1)),min(x2(ja),x2(ja+1))) +
```

```
            ...
            min(max(x1(ia),x1(ia+1)),max(x2(ja),x2(ja+1)))).'/2;
        T(4,overlap) = (max(min(y1(ia),y1(ia+1)),min(y2(ja),y2(ja+1))) +
            ...
            min(max(y1(ia),y1(ia+1)),max(y2(ja),y2(ja+1)))).'/2;
        selected = in_range | overlap;
    else
        selected = in_range;
    end
    xy0 = T(3:4,selected).';
    % Remove duplicate intersection points.
    [xy0,index] = unique(xy0,'rows');
    x0 = xy0(:,1).';
    y0 = xy0(:,2).';
    %
    sel_index = find(selected);
    sel = sel_index(index);
    iout = i(sel).';
    jout = j(sel).';


else % non-robust option

    parfor k = 1:n  %%%%%%%%%%%%%  PARALLELISATION
        [L,U] = lu(AA(:,:,k));
        T(:,k) = U\(L\B(:,k));
    end

    % Find where t1 and t2 are between 0 and 1 and return the
       corresponding
    % x0 and y0 values.
    in_range = (T(1,:) >= 0 & T(2,:) >= 0 & T(1,:) < 1 & T(2,:) < 1);
    iout = i(in_range).';
    jout = j(in_range).';


    x0 = T(3,in_range);
    y0 = T(4,in_range);

end

% Plot the results (useful for debugging).
% plot(x1,y1,x2,y2,x0,y0,'ok');
end
```

Annexe I

Résultats numériques du calcul d'enlacement

Le tableau ci-dessous compile les résultats de l'ensemble des simulations numériques effectuées. Chaque ligne correspond à un couple de paramètres (rapport de masses `mu`, énergie `E0` = énergie du premier point de Lagrange − `delta`), et contient le nombre `nbenl` de couples de trajectoires dont l'enlacement a été calculé, le minimum et le maximum des valeurs obtenues (`enlmin` et `enlmax`, respectivement), ainsi que la moyenne `enlmoy` des valeurs – à comparer avec le taux d'enlacement `tenl`, valeur théorique définie à la fin du chapitre 6 en fonction de (`mu`; `delta`).

mu	delta	E0	enlmin	enlmax	enlmoy	tenl	nbenl
0.01	0.001	-1.5848	0.044688	0.50142	0.13641	0.18366	190
0.05	0.05	-1.7602	0.12727	1.0051	0.4228	0.35255	1002
0.05	0.1	-1.8102	0.16171	1.0238	0.41459	0.40702	190
0.05	0.15	-1.8602	0.18485	1.114	0.43915	0.46353	577
0.05	0.2	-1.9102	0.23143	1.2238	0.501	0.52242	190
0.05	0.25	-1.9602	0.2607	1.3227	0.57628	0.58402	625
0.05	0.3	-2.0102	0.32007	1.4985	0.69626	0.64856	171
0.05	0.35	-2.0602	0.33111	1.5481	0.74451	0.71617	596
0.05	0.4	-2.1102	0.44441	1.6458	0.95285	0.78697	190
0.05	0.45	-2.1602	0.43538	1.7545	0.9124	0.86107	577
0.05	0.5	-2.2102	0.48111	1.6094	0.91583	0.93861	171
0.1	0.001	-1.7995	0.14122	1.0831	0.40445	0.38961	866
0.1	0.01	-1.8085	0.14658	1.0911	0.34332	0.40153	892
0.1	0.05	-1.8485	0.17425	1.1578	0.39241	0.45126	786
0.1	0.1	-1.8985	0.20524	1.217	0.51279	0.51388	948
0.1	0.15	-1.9485	0.24948	1.3026	0.53924	0.57872	625
0.1	0.2	-1.9985	0.29186	1.4666	0.62804	0.64643	957
0.1	0.25	-2.0485	0.36077	1.5293	0.7076	0.71726	541
0.1	0.3	-2.0985	0.40807	1.7233	0.87044	0.79141	588
0.1	0.35	-2.1485	0.47224	1.7325	0.89485	0.86914	568
0.1	0.4	-2.1985	0.49441	1.8661	0.954	0.9505	549
0.1	0.45	-2.2485	0.56716	1.9891	1.0836	1.0356	568
0.1	0.5	-2.2985	0.61878	2.1112	1.1417	1.1247	976

0.1	1	-2.7985	1.489	3.5378	2.3216	2.2535	533
0.15	0.05	-1.9084	0.23808	1.1155	0.57798	0.53055	325
0.15	0.15	-2.0084	0.32381	1.4406	0.63502	0.67378	378
0.15	0.25	-2.1084	0.47415	1.6439	0.91531	0.82943	406
0.15	0.35	-2.2084	0.54531	1.9757	0.98942	1.0001	378
0.15	0.45	-2.3084	0.66966	2.1814	1.2787	1.1872	435
0.2	0.001	-1.9033	0.22144	1.2569	0.46926	0.52154	685
0.2	0.01	-1.9123	0.24165	1.3658	0.54993	0.53676	704
0.2	0.05	-1.9523	0.26932	1.2922	0.52708	0.59925	929
0.2	0.1	-2.0023	0.31328	1.392	0.63835	0.67747	857
0.2	0.15	-2.0523	0.36021	1.5941	0.71101	0.75836	786
0.2	0.2	-2.1023	0.41736	1.6976	0.81927	0.84276	667
0.2	0.25	-2.1523	0.51341	1.7925	0.90636	0.93118	694
0.2	0.3	-2.2023	0.55281	1.9485	0.9826	1.0238	515
0.2	0.35	-2.2523	0.63514	2.1411	1.2386	1.1208	541
0.2	0.4	-2.3023	0.70609	2.2419	1.2864	1.2225	596
0.2	0.45	-2.3523	0.78562	2.3342	1.3711	1.3291	549
0.2	0.5	-2.4023	0.85778	2.5035	1.3684	1.4405	722
0.2	1	-2.9023	1.9829	4.0518	2.8353	2.8553	532
0.25	0.05	-1.9853	0.34242	1.5328	0.78999	0.66091	378
0.25	0.15	-2.0853	0.41154	1.7767	0.73973	0.83628	406
0.25	0.25	-2.1853	0.57969	1.9179	1.0492	1.0271	378
0.25	0.35	-2.2853	0.73799	2.4668	1.2494	1.2368	351
0.25	0.45	-2.3853	0.85874	2.3816	1.3938	1.467	406
0.3	0.001	-1.9611	0.31059	1.5285	0.68452	0.62269	463
0.3	0.01	-1.9701	0.29872	1.4582	0.6008	0.64139	478
0.3	0.05	-2.0101	0.34461	1.5752	0.67115	0.71731	720
0.3	0.1	-2.0601	0.4067	1.5997	0.82247	0.81195	459
0.3	0.15	-2.1101	0.47069	1.7774	0.8795	0.90987	606
0.3	0.2	-2.1601	0.5394	1.922	1.0032	1.0122	514
0.3	0.25	-2.2101	0.63276	1.9509	1.207	1.1197	504
0.3	0.3	-2.2601	0.71955	2.1858	1.2801	1.2324	577
0.3	0.35	-2.3101	0.7975	2.4625	1.4422	1.3508	559
0.3	0.4	-2.3601	0.91102	2.5716	1.4568	1.4748	596
0.3	0.45	-2.4101	0.96552	2.7063	1.6335	1.6051	596
0.3	0.5	-2.4601	1.0792	2.6385	1.6922	1.7417	497
0.3	1	-2.9601	2.4686	4.9046	3.4312	3.4886	532
0.35	0.05	-2.0281	0.38549	1.5386	0.68652	0.7697	351
0.35	0.15	-2.1281	0.52478	1.6558	0.91918	0.98062	351
0.35	0.25	-2.2281	0.66894	2.2065	1.2328	1.2111	300
0.35	0.35	-2.3281	0.87555	2.4777	1.5136	1.4657	406
0.35	0.45	-2.4281	1.1188	2.6698	1.8671	1.7466	300
0.4	0.001	-1.9915	0.34165	1.6741	0.67861	0.70471	1852
0.4	0.01	-2.0005	0.34781	1.5935	0.70806	0.72733	635
0.4	0.05	-2.0405	0.403	1.7672	0.82433	0.81838	510
0.4	0.1	-2.0905	0.50008	1.8712	0.87094	0.9317	727
0.4	0.15	-2.1405	0.56435	2.001	1.1961	1.0496	436

0.4	0.2	-2.1905	0.66799	2.1129	1.1551	1.173	686
0.4	0.25	-2.2405	0.75575	2.2726	1.2658	1.3031	471
0.4	0.3	-2.2905	0.85288	2.5484	1.4651	1.4399	549
0.4	0.35	-2.3405	0.98431	2.6236	1.6326	1.5839	522
0.4	0.4	-2.3905	1.0678	2.8962	1.6426	1.7354	577
0.4	0.45	-2.4405	1.1796	2.9555	1.763	1.8949	478
0.4	0.5	-2.4905	1.3178	3.2309	2.0286	2.0626	861
0.4	1	-2.9905	3.1606	5.7194	4.1835	4.2346	514
0.45	0.05	-2.0476	0.44928	1.7158	0.92724	0.86439	406
0.45	0.15	-2.1476	0.68157	2.04	1.1636	1.1181	378
0.45	0.25	-2.2476	0.83329	2.5042	1.3743	1.3974	325
0.45	0.35	-2.3476	1.0573	2.8761	1.8176	1.7082	351
0.45	0.45	-2.4476	1.3476	3.1424	2.0037	2.0537	406
0.5	0.001	-2.001	0.38004	1.6589	0.79958	0.77148	376
0.5	0.01	-2.01	0.39751	1.7137	0.75432	0.79877	393
0.5	0.05	-2.05	0.46388	1.8138	0.86511	0.9081	846
0.5	0.1	-2.1	0.55921	2.029	0.99622	1.0448	672
0.5	0.15	-2.15	0.65523	2.2535	1.2948	1.1939	522
0.5	0.2	-2.2	0.77884	2.3315	1.3445	1.3374	397
0.5	0.25	-2.25	0.8872	2.5507	1.4013	1.4962	577
0.5	0.3	-2.3	1.018	2.8165	1.7241	1.6642	483
0.5	0.35	-2.35	1.1716	2.9247	1.8909	1.8419	596
0.5	0.4	-2.4	1.2972	3.204	2.0047	2.0294	526
0.5	0.45	-2.45	1.4756	3.4717	2.1719	2.2282	515
0.5	0.5	-2.5	1.6146	3.6851	2.4475	2.4376	551
0.5	1	-3	4.0302	6.8275	5.293	5.1926	444
0.6	0.001	-1.9915	0.41422	1.7138	0.72987	0.82399	528
0.6	0.01	-2.0005	0.42924	1.7997	0.87497	0.85727	584
0.6	0.1	-2.0905	0.68987	2.1318	1.1992	1.1577	562
0.6	0.2	-2.1905	0.90788	2.6214	1.4537	1.5218	573
0.6	0.3	-2.2905	1.2186	2.9739	1.8444	1.9324	406
0.6	0.5	-2.4905	2.0284	4.2619	2.9184	2.926	631
0.6	1	-2.9905	5.1706	8.3865	6.4991	6.6046	444
0.7	0.001	-1.9611	0.42761	1.8782	0.75869	0.8613	460
0.7	0.01	-1.9701	0.4625	1.9278	0.86725	0.90316	427
0.7	0.1	-2.0601	0.74459	2.3877	1.3757	1.2831	479
0.7	0.2	-2.1601	1.0875	2.8509	1.5985	1.7545	307
0.7	0.3	-2.2601	1.5409	3.5648	2.2889	2.3022	406
0.7	0.5	-2.4601	2.7048	5.069	3.6595	3.664	343
0.7	1	-2.9601	7.2542	11.132	8.9913	8.9663	380
0.8	0.001	-1.9033	0.43007	1.9143	0.90502	0.88042	316
0.8	0.01	-1.9123	0.4718	1.8836	0.85864	0.93594	381
0.8	0.05	-1.9523	0.63824	2.2298	1.1138	1.1605	136
0.8	0.1	-2.0023	0.84804	2.5617	1.3952	1.4537	522
0.8	0.2	-2.1023	1.381	3.3926	2.1474	2.1299	462
0.8	0.3	-2.2023	2.1032	4.4017	3.1076	2.9355	378
0.8	0.5	-2.4023	3.851	6.7811	5.0396	5.0822	443

0.8	1	-2.9023	11.98	16.676	14.389	14.079	380
0.9	0.01	-1.8115	0.52017	1.8759	0.88633	0.95848	196
0.9	0.1	-1.9015	1.1538	3.0078	1.7493	1.8233	850
0.9	0.2	-2.0015	2.1985	4.6136	3.0545	3.105	324
0.9	0.3	-2.0985	3.7239	6.4676	4.8462	4.7895	378
0.9	0.5	-2.3015	8.1018	12.008	9.9135	9.6703	307
0.9	1	-2.8015	30.407	36.778	33.634	33.455	171

Bibliographie

[1] Peters Albers et al. « Global Surfaces of Section in the Planar Restricted Three-Body Problem ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 204.1 (2012), p. 273, 284.

[3] Vladimir I. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir - Moscou, 1976.

[4] Vladimir I. Arnold. « The asymptotic Hopf invariant and its applications. Selected translations ». In : *Selecta Math. Soviet.* (1986).

[5] Michèle Artigue. « Synergies entre activités périscolaires et scolaires : le potentiel didactique des jeux "mathématiques" ». In : *Conférence donnée au colloque organisé par la Commission inter-IREM Pop'Math à Toulouse* (2015).

[8] George D. Birkhoff. « The restricted problem of three bodies ». In : *Rend. Circ. Mat. Palermo* 39.1 (1914), p. 265–334.

[9] Alain Chenciner. « Poincaré and the Three-Body Problem ». In : *Séminaire Poincaré (Bourbaphy)* XVI (2012), p. 45, 133.

[10] Alain Chenciner. « The planar circular restricted three body problem in the lunar case ». In : *Minicourse at the Chern Institute of Mathematics, Nankai University* (2014).

[14] Dennis De Turck et Herman Gluck. « The Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space, » in : *Journal of Mathematical Physics* 49 (2008).

[15] Pierre Dehornoy. « Geodesic flow, left-handedness, and templates ». In : *Algebraic and Geometric Topology* 15 (2015), p. 1525, 1597.

[19] Anna Florio. « Torsion and Linking number for a surface diffeomorphism ». In : *arXiv:1801.07751* (2018).

[20] David Fried. « Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps ». In : *Topology* 22 (1983), p. 299, 303.

[21] Jean-Marc Gambaudo et Étienne Ghys. « Enlacements asymptotiques ». In : *Topology 36* (1997).

[23] Étienne Ghys. « The internet and the popularization of mathematics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014* IV (2014), p. 1187–1202.

[24] Étienne Ghys. « Right handed vector fields and the Lorenz attractor ». In : *Japanese Journal of Mathematics* (2009).

[25] Gerald A. Goldin et al. *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education*. ICMI-13 Topical Surveys. Springer Open, 2013.

[28] Markku S. Hannula. « Attitude toward mathematics: Emotions, expectations and values ». In : *Educational Studies in Mathematics* 49.2 (2002), p. 25–46.

[31] David Hilbert. « Mathematische Probleme ». In : *Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900* (Göttingen, 1900).

[32] Geoffrey Howson, Jean-Pierre Kahane et Henry Pollak. *The Popularization of Mathematics*. ICMI Study Series. Cambridge University Press, 1990.

[33] Umberto Hryniewicz et Pedro Salomão. « Global Surfaces of Section for Reeb Flows in Dimension Three and Beyond ». In : *arXiv:1712.01925* (2017).

[35] Wang Sang Koon et al. « Dynamical Systems, the Three Body Problem, and Space Mission Design ». In : *International Conference on Differential Equations, Berlin* (1999), p. 1167, 1181.

[36] Nicholaas H. Kuiper. « Locally projective spaces of dimension one ». In : *Michigan Math. J.* 2.2 (1953), p. 95, 97.

[37] Martin Kummer et Richard C. Churchill. « The Annular Twist Mapping of the Restricted Three-Body Problem ». In : *Journal of Dynamics and Differential Equations* 9.2 (1997), p. 249, 268.

[39] Laszló Lovász. « Trends in Mathematics : How they could Change Education? »

[41] Welington de Melo et Sebastian van Strien. *One-Dimensional Dynamics*. Springer, 1983. Chap. 1.

[43] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*. 3e éd. Princeton University Press, 2006. Chap. Appendix C, p. 234.

[45] Nicolas Pelay. « Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique ». Thèse de doct. Université Claude Bernard - Lyon 1, 2011.

[48] Henri Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. T. 3. Gauthier-Villars, Paris, 1899. Chap. XXVII.

[49] Henri Poincaré. « Sur un théorème de géométrie ». In : *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 33 (1912), p. 375–407.

[52] Collectif Révoluscience. « Manifeste Révoluscience ». In : *Groupe Traces* (2010).

[53] David Ruelle. « Rotation numbers for diffeomorphisms and flows ». In : *Ann Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique.* (1985).

[55] Douglas Schwarz et James Ashton. « Intersections ». Fonction Matlab. L'amélioration de J. Ashton se trouve dans un commentaire du 25 mai 2017.

Objets et initiatives de diffusion des mathématiques

[2] Aurélien Alvarez, Étienne Ghys et Jos Leys. « Dimensions ». Film.

[6] Jean-Baptiste Aubin et al. « Magimatique 2.0 ». Exposition à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon.

[7] Simon Beck. *Snow Art*. S-Editions, 2014.

[11] Joël Cohen, Guillaume Geoffroy et Lionel Berardini Elena et Marty. « La tournée de π ». Spectacle musical.

[12] Salvador Dalí. « Corpus hypercubus ». Tableau.

[13] Salvador Dalí. « Queue d'aronde ». Tableau.

[16] Laurent Deschamps. « Au bout du conte ». Spectacle de conte.

[17] ElJj. « Les mathématiques de Futurama ». Article de blog.

[18] femmes&mathématiques et Animath. « Filles et maths ». Projet associatif.

[22] Philippe Geluck. *Le Chat*. Casterman, 1986-2017.

[26] Matt Groening et David X. Cohen. « Futurama ». Série télévisée.

[27] Denis Guedj. *Le théorème du perroquet*. Seuil, 1998.

[29] Vi Hart. « Vihart ». Chaîne Youtube.

[30] Vi Hart et Nicky Case. « Parable of Polygones ». Article interactif.

[34] Daniel Justens. *La mathématique du Chat*. Delagrave, 2013.

[38] L'Île Logique. « Pilouface ». Duo clown.

[40] Institut Camille Jordan Lyon 1 et UMPA ENS de Lyon. « MathαLyon ». Exposition mobile.

[42] Christian Mercat. « De beaux entrelacs ». In : *Images des Mathématiques* (2009).

[44] Vincenzo Natali. « Cube ». Film.

[46] Sylvie Pic. « The Anatomy of Melancholy ». Série de tableaux.

[47] Collectif Playground et MSRI. « The Anatomy of Melancholy ». Événement.

[50] Patrick Popescu-Pampu. « De la topographie à la géométrie I ». In : *Images des Mathématiques* (2016).

[51] Patrick Popescu-Pampu. « La dualité de Poincaré ». In : *Images des Mathématiques* (2012).

[54] François Sauvageot. « One Math Show ». Spectacle seul en scène.

[56] Compagnie Terraquée. « Il est rond mon ballon ? » Pièce de théâtre.

[57] Compagnie Terraquée. « Pi, le nombre à deux lettres ». Pièce de théâtre.

[58] Tadashi Tokieda. « Borromean Ribbons ». Vidéo.

[59] Tadashi Tokieda. « Tadashi's Toys ». Chaîne Youtube.

[60] Cédric Villani. *Théorème vivant*. Grasset, 2012.

[61] Bernard Weber. *Le jour des fourmis*. Albin Michel, 1992.

[62] Bernard Weber. *Les fourmis*. Albin Michel, 1991.