



HAL
open science

Introduction de pièces déformables dans l'analyse de tolérances géométriques de mécanismes hyperstatiques

Doriane Gouyou

► **To cite this version:**

Doriane Gouyou. Introduction de pièces déformables dans l'analyse de tolérances géométriques de mécanismes hyperstatiques. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Bordeaux, 2018. Français. NNT : 2018BORD0343 . tel-02043650

HAL Id: tel-02043650

<https://theses.hal.science/tel-02043650>

Submitted on 21 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR
SPÉCIALITÉ : MECANIQUE

Par Doriane GOUYOU

**Introduction de pièces déformables dans l'analyse de tolérances
géométriques de mécanismes hyperstatiques**

Sous la direction de : Denis TEISSANDIER

Co-encadrants : Vincent DELOS et Yann LEDOUX

Soutenue le 04/12/2018

Membres du jury :

M. Jean-Marc LINARES , Professeur des Universités, Aix Marseille Université	Président du jury
M. Nabil ANWER , Professeur des Universités, Université Paris Sud	Rapporteur
M. Alain DAIDIÉ , Professeur des Universités, Institut Clément Ader, INSA Toulouse	Rapporteur
M. Denis TEISSANDIER , Professeur des Universités, Université de Bordeaux	Directeur de thèse
M. Vincent DELOS , Ingénieur Recherche, CNRS	Co-encadrant
M. Yann LEDOUX , Maître de Conférences, Université de Bordeaux	Co-encadrant
M. Baptiste HALLOUIN , Ingénieur R&D, Safran Helicopter Engines	Invité
M. Gérald SENGER , Ingénieur R&D, Safran Helicopter Engines	Invité

Remerciements

C'est un grand plaisir pour moi de proposer à la communauté ce manuscrit. Le travail dont il découle et qui s'est déroulé sur quatre années n'aurait pu aboutir sans le support qui m'a été apporté par les personnes citées ci-dessous. Elles ont été selon les périodes des appuis scientifiques sources de connaissances, des soutiens, des amis.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Denis TEISSANDIER et mes co-encadrants, Yann LEDOUX et Vincent DELOS, pour leur aide. Je suis ravie d'avoir travaillé avec eux car, outre l'apport scientifique, ils ont toujours été là pour me conseiller et m'épauler pendant ces quatre dernières années.

Je remercie également Mathieu DUTILH et Baptiste HALLOUIN, mes encadrants de thèse chez Safran Helicopter Engines, pour leur aide et leur soutien. Ces quatre années passées à leurs côtés m'ont permis de travailler sur un sujet scientifique passionnant tout en développant mes connaissances sur l'entreprise et les technologies des turbomoteurs en général. Ils m'ont permis de comprendre les enjeux qui poussent l'entreprise à développer des connaissances scientifiques.

Un grand merci à Nabil ANWER et Alain DAIDIÉ pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs sur mon manuscrit et à Jean-Marc LINARES pour avoir accepté de présider le jury devant lequel j'ai soutenu ma thèse. Leurs questions et remarques sur le manuscrit et lors de la soutenance m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle.

Je tiens également à remercier particulièrement Gérald SENGER, qui a impulsé et entretient la dynamique autour de cet axe de recherche chez SafranHE. Nos discussions et ses conseils ont pour sûr enrichi mes travaux.

Merci beaucoup à Fabrice IPARRAGUIRE et Christophe VOISIN qui ont œuvré pour le bon déroulement de la partie expérimentale de ma thèse et, sans qui, je n'aurais pas eu de données à exploiter...

Je remercie tous mes collègues de SafranHE pour leur accueil, leur bonne humeur et leur soutien. Ces quatre années au cours desquelles j'ai été intégrée à leur équipe furent un plaisir et un honneur !

Mes derniers remerciements vont à Vincent qui m'a soutenu et supporté dans tout ce que j'ai entrepris.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I. Modélisation d'un mécanisme hyperstatique.....	7
I.1. Introduction.....	7
I.2. Modélisation d'assemblages de pièces infiniment rigides.....	8
I.2.1. Définition et paramétrage des écarts dans un assemblage	8
I.2.1.1. Ecart géométrique d'une pièce	8
I.2.1.2. Relations entre les écarts géométriques de deux surfaces potentiellement en contact... ..	13
I.2.1.3. Relations entre les écarts géométriques d'un système mécanique	17
I.2.2. Analyse d'un mécanisme hyperstatique	18
I.2.2.1. Espace de Faisabilité	20
I.2.2.2. U.P.E.L (Union Pondérée d'Espaces de Liberté)	22
I.2.2.3. Domaine	22
I.2.2.4. Modèle T-map	24
I.2.2.5. Polyèdre et Polytope.....	26
I.3. Prise en compte des écarts de forme des surfaces dans la modélisation des contacts. 26	
I.4. Modélisation d'un assemblage composé de pièces déformables	27
I.4.1. Déformations issues de sollicitations externes au système	27
I.4.2. Déformations issues de sollicitations internes au système	33
I.5. Synthèse.....	36
Chapitre II. Analyse de tolérances par la méthode des polytopes	39
II.1. Introduction.....	39
II.2. Définition et paramétrage d'un ensemble de contraintes	40
II.2.1. Ensemble de contraintes géométriques d'une surface	40
II.2.2. Ensemble de contraintes de contact	44
II.2.3. Caractérisation d'un ensemble de contraintes par un polytope en HV-description	46
II.2.4. Précision du calcul des contraintes	49
II.3. Etude d'une chaîne de cotes par des opérations sur les polytopes	52
II.3.1. Architecture en parallèle	52
II.3.2. Architecture en série	53
II.3.3. Moyens de calcul utilisés.....	58
II.4. Conformité d'un assemblage	58
II.4.1. Respect d'une Condition de Montage	58
II.4.2. Respect d'une Condition Fonctionnelle.....	58
II.5. Analyse de tolérances du mécanisme	59
II.5.1. Analyse au pire des cas.....	60
II.5.2. Analyse statistique	60
II.5.2.1. Démarche.....	60
II.5.2.2. Détermination d'un intervalle de confiance	61
II.6. Analyse des interférences de montage	63

II.7. Synthèse.....	67
Chapitre III. Modélisation des déformations dans les assemblages hyperstatiques avec interférences de montage.....	69
III.1. Introduction.....	69
III.2. Définition et paramétrage des écarts de situation dans un assemblage avec interférences.....	70
III.2.1. Ecart de situation élastiques.....	70
III.2.2. Ecart de situation entre deux pièces après assemblage.....	74
III.2.3. Position relative entre deux surfaces potentiellement en contact.....	76
III.3. Efforts de contact dans un assemblage avec interférences.....	77
III.3.1. Efforts résultants des écarts de situation élastiques.....	77
III.3.2. Définition de l'état d'équilibre de l'assemblage.....	80
III.4. Protocole de simulation.....	83
III.5. Conformité d'un assemblage.....	88
III.5.1. Respect de la Condition de Montage.....	88
III.5.2. Respect d'une Condition Fonctionnelle.....	88
III.6. Analyse de tolérances statistique d'un système déformable.....	89
III.7. Synthèse.....	91
Chapitre IV. Application au cas d'étude.....	93
IV.1. Présentation du système étudié.....	93
IV.2. Analyse fonctionnelle du système.....	94
IV.2.1. Structure topologique du mécanisme.....	94
IV.2.2. Choix des spécifications.....	95
IV.2.2.1. Respect de la Condition de Montage.....	95
IV.2.2.2. Respect de la Condition Fonctionnelle.....	97
IV.3. Analyse de tolérances.....	98
IV.3.1. Détermination de l'ajustement pion / alésage.....	98
IV.3.2. Détermination des tolérances de localisation.....	107
IV.3.2.1. Analyse au pire des cas.....	107
IV.3.2.2. Analyse statistique.....	109
IV.3.2.2.1. Paramétrage des écarts de fabrication des pièces.....	109
IV.3.2.2.2. Lois de distribution des écarts de fabrication.....	111
IV.3.2.2.3. Protocole de simulation.....	114
IV.3.2.2.4. Résultats de l'analyse statistique.....	122
IV.3.2.3. Comparaison des deux méthodes d'analyse de tolérances.....	124
Conclusion.....	125
Perspectives.....	127
Bibliographie.....	130
Annexes.....	137

Table des illustrations

Figure 0.1 – Logigramme d’une analyse de tolérances statistique	3
Figure I.1 – Modèle nominal de la pièce i	8
Figure I.2 – Skin Model de la pièce i	8
Figure I.3 – Association des surfaces de substitution au Skin Model	9
Figure I.4 – Ecart géométrique (écarts de situation et de dimension)	10
Figure I.5 – Classes de surfaces usuelles (Homri, 2014)	12
Figure I.6 – Définition d’un élément de contact	13
Figure I.7 – Exemple de liaisons les plus couramment utilisées (Homri, 2014)	14
Figure I.8 – Définition du type de contact (Dantan, 2000)	15
Figure I.9 – Ajustements arbre / alésage	16
Figure I.10 – Définition du jeu dans un contact unilatéral	16
Figure I.11 – Représentation d’une pièce par un graphe (Pierre, 2011)	17
Figure I.12 – Graphe topologique d’un système mécanique composé de deux pièces (Pierre, 2011)	18
Figure I.13 – Entrées / Sorties des logiciels AnaTol et MECAMaster (Homri, 2014)	19
Figure I.14 – Variables du modèle pour différents types de surface (Gupta & Turner, 1993)	20
Figure I.15 – Tolérances de localisation et de parallélisme (Turner, 1993)	21
Figure I.16 – Espace de Faisabilité (Homri, 2014)	21
Figure I.17 – Modélisation des variations géométriques et déplacements d’une liaison (Mansuy, 2012)	23
Figure I.18 – Exemple du tolérancement d’une surface plane par deux spécifications (Mansuy, 2012)	24
Figure I.19 – Tolérancement d’une surface plane (Mujezinovic, et al., 2004)	25
Figure I.20 – T-MAP du tolérancement d’une surface plane	25
Figure I.21 – Interférences entre des cylindres en contact (Homri, et al., 2016)	26
Figure I.22 – Skin Model Shapes (Schleich & Wartzack, 2015)	27
Figure I.23 – Etapes de récupération des informations sur les déformations des pièces (Ting, et al., 2016)	28
Figure I.24 – Etude de l’assemblage d’un arbre dans un alésage (Ting, et al., 2016)	28
Figure I.25 – Déformation de l’arbre (a) et de l’alésage (b) sous des effets de sollicitations thermique, mécanique et gravitationnelle (Ting, et al., 2016)	29
Figure I.26 – Modélisation des pièces par des graphes (Pierre, 2011)	30
Figure I.27 – Evolution du polytope de contact de la situation de vie de référence, a et b, vers la situation de vie thermomécanique, c et d (Pierre, 2011)	31
Figure I.28 – Assemblage équivalent avec le concept de surface écart (Grandjean, 2013)	31
Figure I.29 – Mise en position des pièces en solide infiniment rigide en fonction de la direction des efforts de serrage (Grandjean, 2013)	32
Figure I.30 – Mise en position des pièces avec le modèle d’érosion (Grandjean, 2013)	32
Figure I.31 – Etude de l’assemblage de deux pièces avec écarts de forme et déformation (Guo, et al., 2016)	33
Figure I.32 – Etude de l’assemblage d’un système hyperstatique composé de deux liaisons pivot glissant (Pezzuti, et al., 2005)	34
Figure I.33 – Recherche de l’inclinaison du pion pour supprimer l’interférence de montage (Pezzuti, et al., 2005)	34
Figure I.34 – Résultat de l’étude statistique (Pezzuti, et al., 2005)	35
Figure I.35 – Système étudié (Rouetbi, et al., 2017)	35
Figure I.36 – Modélisation par un modèle poutre (Rouetbi, et al., 2017)	36

Figure II.1 – Contraintes géométriques d’une surface quelconque (Teissandier, 1995).....	41
Figure II.2 – Illustration de demi-espaces associés à un hyperplan dans \mathbb{R}^3 (Homri, 2014)	42
Figure II.3 – Déplacement non borné suivant x_4 et adjonction de demi-espaces bouchons associés (Homri, 2014)	43
Figure II.4 – Génération de polytope géométrique par tirage de Monte Carlo suivant une loi normale	44
Figure II.5 – Élément de contact entre les surfaces 1,j et 2,j.....	45
Figure II.6 – a. Modèle CAO, b. H-description d’un polytope, c. V-description d’un polytope, d. HV-description d’un polytope.....	47
Figure II.7 – Caractérisation d’un ensemble de contraintes par un polytope en HV-description	49
Figure II.8 – Interpénétration non détectée entre un pion et un alésage.....	50
Figure II.9 – Comparaison des contraintes de contact linéarisées et quadratiques.....	50
Figure II.10 – Variation de volume d’un polytope résultant en fonction du nombre de points de discrétisation.....	51
Figure II.11 - Abaque pour choisir le nombre de points de discrétisation en fonction du jeu local maximal .	52
Figure II.12 – Propagation des écarts dans une architecture en parallèle	53
Figure II.13 – Modélisation de l’accumulation des écarts comme une somme de polytopes (Teissandier, et al., 1999)	54
Figure II.14 – Simplification d’un polytope issu d’une somme de Minkowski (Arroyave-Tobón, 2017)	55
Figure II.15 – Somme des polytope par la méthode des projections (Arroyave-Tobón, 2017).....	57
Figure II.16 – Test d’inclusion des polytopes (Teissandier, 2012)	59
Figure II.17 – Logigramme de simulation statistique d’un mécanisme hyperstatique.....	61
Figure II.18 – Evolution de b/P en fonction du nombre de tirage réalisés et de P	62
Figure II.19 – Division d'un polytope résultant vide en deux ensembles non-vides	63
Figure II.20 – Retouche locale pour supprimer les interférences de montage	66
Figure III.1 – Représentation des écarts élastiques d’une surface par un graphe.....	71
Figure III.2 – Opérateurs des écarts de situation élastiques et de fabrication.....	71
Figure III.3 – Ecart de situation élastique des surfaces par type de liaison en 2d	72
Figure III.4 – Représentation des déplacements élastiques sur un graphe des contacts.....	73
Figure III.5 – Paramètres d’étude des déformations de deux surfaces potentiellement en contact	74
Figure III.6 – Déplacements de corps rigides des surfaces	75
Figure III.7 – Position relative entre les surfaces potentiellement en contact.....	76
Figure III.8 – Plus petit vecteur séparant deux surfaces.....	77
Figure III.9 – Choix des degrés de liberté des nœuds au centre de l’élément de contact (exemple d’une liaison Linéaire Annulaire).....	78
Figure III.10 – Simulation des efforts de contact.....	81
Figure III.11 – Efforts appliqués sur les surfaces en fonction de la configuration de contact	82
Figure III.12 – Procédé de simulation d’un assemblage avec déformation	83
Figure III.13 – a. Ecart de situation issus de la fabrication, b. Retour aux localisations nominales, c. Efforts résultants	84
Figure III.14 – a. Direction des déplacements imposés, b. Déplacements imposés, c. Nouveaux efforts appliqués aux nœuds maîtres	86
Figure III.15 – Correction des interpénétrations (exemple de correction de 2,je seule)	87
Figure III.16 – Analyse de tolérances statistique d’un système déformable	91
Figure IV.1 – Liaison par bride	93
Figure IV.2 – Condition fonctionnelle	94

Figure IV.3 – Graphe des contacts du système.....	95
Figure IV.4 – Assemblage avec interférences.....	96
Figure IV.5 – Dessin de définition des pièces.....	97
Figure IV.6 – Zone de tolérance limitant les écarts de situation de la surface 1,7.....	100
Figure IV.7 – Polytope résultant PR	101
Figure IV.8 – Zones de tolérance associée à la Condition Fonctionnelle.....	102
Figure IV.9 – Ecart de diamètre de la surface 1,7 par rapport à sa géométrie nominale.....	103
Figure IV.10 – Comparaison de deux polytopes fonctionnels avec et sans écart de dimension.....	104
Figure IV.11 – Comparaison du polytope au pire des cas et du polytope fonctionnel en 2d.....	105
Figure IV.12 – Gabarits au minimum de matière.....	107
Figure IV.13 – Gabarits au maximum de matière.....	108
Figure IV.14 – Paramétrage des écarts géométriques des pions et des alésages.....	110
Figure IV.15 – Densité de probabilité d’une loi normale.....	112
Figure IV.16 – Paramétrage des défauts de parallélisme des axes par rapport au plan de bride A.....	114
Figure IV.17 – Etude statistique d’un assemblage hyperstatique avec prise en compte des déformations.....	115
Figure IV.18 – Contraintes de contact d’une liaison pion / alésage dans \mathbb{R}^2	117
Figure IV.19 – Polytope opérante d’un couple pion / alésage dans \mathbb{R}^3	118
Figure IV.20 – Détermination du polytope résultant de la bride (Gouyou, et al., 2016).....	119
Figure IV.21 – Construction d’un nœud maître à partir d’une surface.....	120
Figure IV.22 – Réduction du modèle avec un super-élément – exemple sur la pièce 1.....	120
Figure IV.23 – Zone dont la déformation est analysée après assemblage – exemple de la pièce 1.....	121
Figure IV.24 – Critère d’acceptation d’un assemblage avec interférences.....	122
Figure IV.25 – Taux d’assemblages réalisables en fonction des tolérances de localisation des pions et des alésages.....	123
Figure 0.1 – Intégration des écarts de forme des surfaces.....	127

Tableaux

Tableau IV-1 – Géométries nominales des pièces	94
Tableau IV-2 – Paramétrage des écarts de fabrication des pions ($j \in \mathbf{1, \dots, 5}$)	110
Tableau IV-3 – Paramétrage des écarts de fabrication des alésages ($j \in \mathbf{1, \dots, 5}$).....	110
Tableau IV-4 – Paramétrage des écarts de fabrication du cylindre 1,7 de la pièce 1.....	111
Tableau IV-5 – Paramétrage des écarts de fabrication du cylindre 2,7 de la pièce 2.....	111
Tableau IV-6 – Résultats des analyses au pire des cas et statistique de solides infiniment rigides	124
Tableau IV-7 – Résultats des analyses statistiques de solides infiniment rigides et déformables	124

Notations

Ecart de fabrication	
i, j	Surface de substitution j de la pièce i ($1 \leq j \leq j_{max}$), ($i = 1$ ou $i = 2$)
i, j_n	Surface nominale j de la pièce i
$d_{i,j} = D_{i,j} - D_{i,j_n}$	Ecart de dimension de la surface j de la pièce i , $D_{i,j}$ est le diamètre réel de la surface i, j et D_{i,j_n} est le diamètre nominal de la surface i, j .
$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{N-i_1,j_1/i_2,j_2} \\ = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i_1,j_1/i_2,j_2} \\ \mathbf{t}_{N-i_1,j_1/i_2,j_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$	<p>Torseur des petits déplacements des écarts de situation de la surface i_1, j_1 par rapport à la surface i_2, j_2 au point N.</p> <p>Les composantes de $\mathbf{r}_{i_1,j_1/i_2,j_2}$ sont les écarts de rotation.</p> <p>Les composantes de $\mathbf{t}_{N-i_1,j_1/i_2,j_2}$ sont les écarts de translation au point N.</p> <p>Si $i_1 = i_2$, les écarts de situation sont des écarts géométriques entre deux surfaces d'une même pièce.</p> <p>Si $i_1 \neq i_2$, les écarts de situation sont des écarts entre deux surfaces potentiellement en contact.</p>
$i, 0$	Repère lié au modèle CAO de la pièce i .
Contraintes de contact	
E_c	Elément de contact, défini par une surface, une ligne ou un point.
N_k	$k^{\text{ème}}$ point de discrétisation de E_c .
\mathbf{n}_k	Vecteur unitaire normal à un élément de contact au point N_k .
d_k	Distance locale entre deux surfaces au point N_k suivant \mathbf{n}_k .
Jeu_j	Jeu local entre deux surfaces $1, j$ et $2, j$ (dans le cas particulier de surfaces cylindriques).
$\bar{H}_k^+(j)$	Demi-espace des contraintes de contact entre deux surfaces $1, j$ et $2, j$ au point de discrétisation N_k .
$P_{i,j}$	Polytope géométrique de la surface i, j .
P_j	Polytope des contraintes de contact entre les surfaces $1, j$ et $2, j$.
P_R	Polytope résultant des contraintes de contact entre les pièces 1 et 2.

Simulation statistique	
$\{EG_{i,j}(p)\};$ $1 \leq p \leq p_{max}$	Ensemble des p_{max} Ecarts Géométriques de la surface i,j générés par tirage de Monte Carlo.
$AR\%$	Assembly Rate : taux d'assemblages sans interférence dans une population de p_{max} assemblages.
$FR\%$	Functional Rate : taux d'assemblages respectant la condition fonctionnelle dans une population de p_{max} assemblages.
Simulation au pire des cas	
MMR	Maximal Material Requierement (condition au maximum de matière).
LMR	Least Material Requierement (condition au minimum de matière).
Déformation	
K_{Si}	Matrice de raideur du super-élément de la pièce i .
U_{Si}	Liste des vecteurs des écarts de situation de tous les nœuds maîtres de la pièce i .
Q_{Si}	Liste des vecteurs des efforts de tous les nœuds maîtres de la pièce i .

Introduction

Contexte

Dans un contexte de plus en plus concurrentiel, de nombreux outils d'aide à la conception sont développés pour aider les industriels à fabriquer des produits de qualité à des coûts et dans des délais raisonnables. Quels que soient les moyens employés, les assemblages fabriqués présenteront toujours des écarts à la géométrie nominale souhaitée. Certains écarts sont plus critiques que d'autres car ils touchent à des conditions d'intégrité, de performance, d'esthétisme... qui sont importantes pour la satisfaction du client, ce sont les Conditions Fonctionnelles (CF) du produit. Des tolérances sont utilisées pour limiter les écarts influents sur ces conditions.

Une analyse du système est alors réalisée pour identifier les surfaces ayant un impact sur les Conditions Fonctionnelles. Des spécifications sont ensuite imposées pour indiquer quelles variations dimensionnelles ou géométriques doivent être maîtrisées sur chacune de ces surfaces. Enfin, des tolérances sont associées à ces spécifications pour indiquer les écarts limites à la géométrie nominale acceptables.

Il est primordial de bien choisir ces tolérances pour plusieurs raisons. Elles doivent bien sûr garantir le respect de toutes les Conditions Fonctionnelles du produit mais aussi l'interchangeabilité des pièces pour éviter les opérations d'appairage sur les nouveaux assemblages ou en maintenance qui sont souvent chronophages et coûteuses. Elles doivent aussi être définies en fonction des capacités des moyens de production. En effet des tolérances difficilement atteignables généreront un taux de pièces non-conformes important menant à des coûts supplémentaires en analyse et retouche, allant parfois jusqu'au rebut des pièces.

Les analyses de tolérances peuvent être réalisées au pire des cas pour garantir la conformité de 100% des assemblages produits ou au travers d'études statistiques. Les études statistiques permettent d'accepter qu'un faible pourcentage des populations produites soit non conforme. Cette pratique mène à des tolérances plus larges qu'au pire des cas et donc à des coûts de production plus faibles. Cependant elle est souvent plus difficile à mettre en œuvre et plus gourmande en temps de calcul (Dantan & Qureshi, 2009).

La majorité des méthodes développées s'adresse à l'analyse de systèmes isostatiques (Anselmetti, 2006; Söderberg & Lindkvist, 2001) car elles sont simples à réaliser. Dans ces travaux nous sommes intéressés à l'analyse de tolérances de systèmes hyperstatiques. L'utilisation de liaisons hyperstatiques est fréquente en industrie, en particulier dans les domaines de l'aéronautique, du spatial et de la physique nucléaire. Un mécanisme est hyperstatique si une ou plusieurs mobilités du système sont supprimées plusieurs fois. Cette redondance de contacts a deux avantages principaux :

- D'un point de vue géométrique, elle rend la conception plus robuste aux écarts de fabrication des pièces,
- D'un point de vue mécanique, elle permet de mieux répartir les transferts de charges dans la liaison.

Cependant, un mécanisme hyperstatique est plus complexe à analyser qu'un système isostatique car, contrairement à ce dernier, la hiérarchisation des contacts entre les surfaces de la liaison dépend des écarts de fabrication des pièces.

De plus, la faisabilité de l'assemblage d'un système hyperstatique n'est pas garantie. En effet, en fonction des écarts de fabrication des pièces, un assemblage hyperstatique peut présenter des interférences de montage. Si ces interférences sont élevées, le montage ne sera pas réalisable. Afin de limiter le niveau d'interférences dans un assemblage et faciliter l'assemblage, les jeux locaux entre toutes les surfaces de la liaison doivent être les plus grands possibles.

Plusieurs critères peuvent être définis pour statuer sur la montabilité d'un mécanisme. Nous pouvons, par exemple, fixer un effort de montage ou un niveau de contrainte limite admissible. La faisabilité de l'assemblage fait partie des Conditions Fonctionnelles à respecter, cependant pour des raisons de clarté, nous avons choisi de ne pas l'inclure dans ce terme et de l'appeler Condition de Montage.

Le respect des autres Conditions Fonctionnelles du système doit ensuite être vérifié. Dans ces travaux, nous avons étudié le respect de conditions géométriques (position, orientation et forme) dans un mécanisme hyperstatique. En général, il est intéressant de réduire les jeux locaux dans les liaisons afin de limiter les déplacements relatifs entre les pièces, et ainsi favoriser le respect d'une Condition Fonctionnelle de position et / ou d'orientation. Cependant, des jeux faibles risquent de générer des interférences de montage et donc des déformations dans les pièces. En fonction des interférences et des raideurs des pièces, ces déformations peuvent se propager dans des zones fonctionnelles et également nuire au fonctionnement du système.

Ainsi, les jeux dans les liaisons hyperstatiques ne doivent pas être trop faibles afin de ne pas trop déformer les pièces ou empêcher le montage, ni trop grands afin de ne pas dégrader la qualité du positionnement entre les pièces. Toute la difficulté de l'analyse de tolérances d'un système hyperstatique est donc de trouver le meilleur compromis pour satisfaire toutes ces fonctions.

Contribution de la thèse

La plus grande contribution de ces travaux de thèse est de proposer une méthode d'analyse de tolérances complète d'un système hyperstatique pouvant à la fois traiter les assemblages avec et sans interférence. Dans le premier cas, nous modéliserons les déformations des pièces lors de l'assemblage. Dans le second cas, l'assemblage sera simulé en infiniment rigide. Le logigramme de la méthode proposée est représenté sur la Figure 0.1.

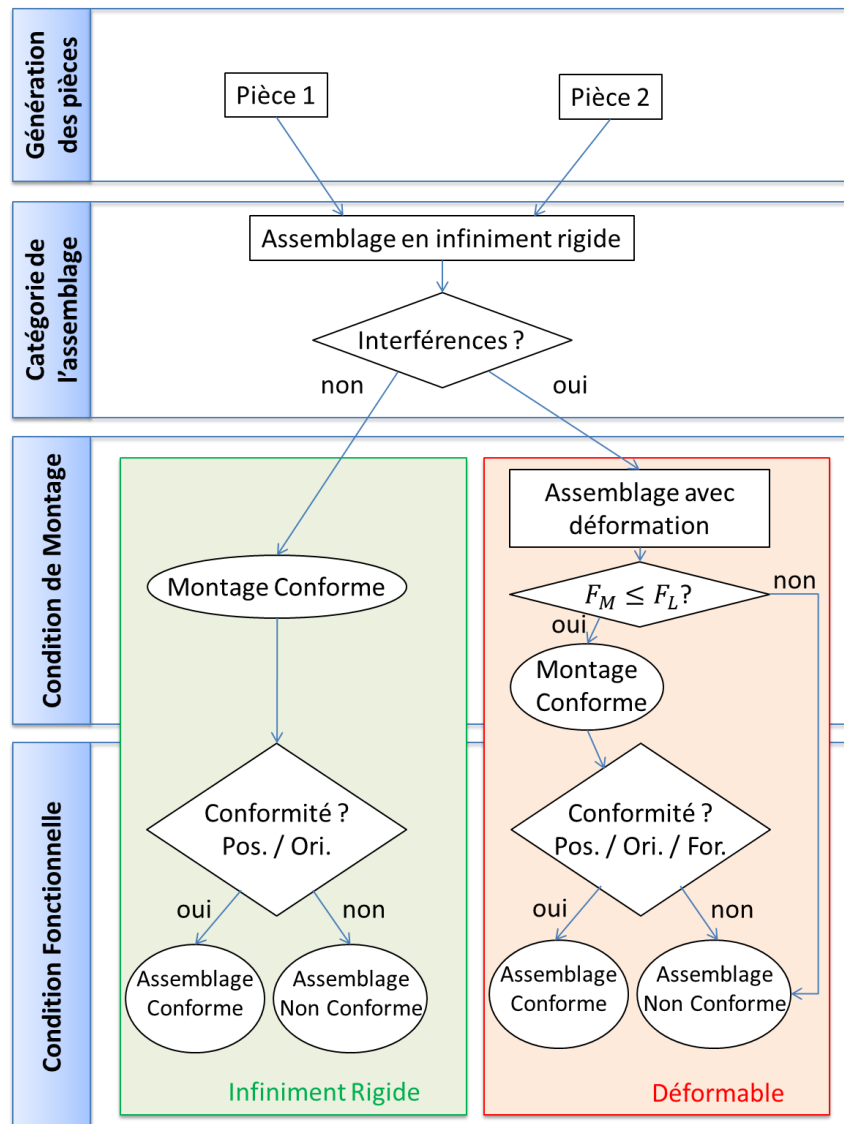


Figure 0.1 – Logigramme d'une analyse de tolérances statistique

Cette méthode est divisée en quatre grandes étapes :

- **Etape 1 : Génération des pièces par tirage aléatoire**
Deux pièces, présentant des écarts de fabrication, sont générées par des tirages de Monte Carlo selon les distributions des populations réelles produites.
- **Etape 2 : Catégorie de l'assemblage**
Les assemblages générés sont catégorisés en deux groupes : les assemblages avec interférences et les assemblages sans interférence (Gouyou, et al., 2017). Les assemblages avec interférences seront analysés avec un modèle prenant en compte les raideurs des pièces. Les assemblages sans interférence seront analysés par la méthode des polytopes en hypothèse de solides infiniment rigides (Teissandier, et al., 1999).
Afin de déterminer dans quelle catégorie se place chaque assemblage généré, le polytope résultant de la liaison est déterminé par des opérations sur des ensembles de contraintes (Gouyou, et al., 2017). Si le polytope résultant de la liaison est vide, l'assemblage présente des interférences de montage. Sinon l'assemblage est réalisable avec jeu.
- **Etape 3 : Condition de Montage**
Si aucune interférence n'est détectée, la Condition de Montage est respectée.
Si l'assemblage présente des interférences de montage une autre approche est appliquée. Une réduction du modèle est réalisée en utilisant des super-éléments. L'assemblage est ensuite simulé avec un solveur itératif qui permet de déterminer rapidement l'état d'équilibre du système après montage.
A l'issue de la simulation un effort de montage, F_M , est estimé. Si cet effort est supérieur à un effort limite, F_L , l'assemblage est déclaré non réalisable.
- **Etape 4 : Condition Fonctionnelle**
Si l'assemblage est réalisable sans interférence, le polytope résultant de la liaison est ensuite comparé au polytope fonctionnel du système. L'inclusion du polytope résultant dans le polytope fonctionnel signifie que l'assemblage est conforme en position et en orientation. A l'inverse, si cette inclusion n'est pas vérifiée, l'assemblage est non conforme (Homri, 2014).
Si l'assemblage présente des interférences, la propagation des déformations dans les pièces est analysée afin de vérifier le respect de la condition fonctionnelle en position, orientation et forme.

Dans ces travaux, nous ne considérons pas les écarts de forme des surfaces en contact issus des procédés de fabrication, cependant nous analysons les déformations générées sur des surfaces par l'opération d'assemblage.

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une thèse CIFRE dont l'objectif est de mettre à disposition des bureaux d'étude un outil pour réaliser des analyses de tolérances statistiques d'assemblages hyperstatiques. Dans ce contexte industriel, il était très important de trouver un bon compromis entre la qualité des résultats obtenus et les temps de calculs faibles.

Un cas d'étude académique est présenté dans le Chapitre IV afin de démontrer l'efficacité de la méthode pour réaliser des analyses de tolérances de mécanismes hyperstatiques. Nous avons pu montrer que la prise en compte des raideurs des pièces dans l'analyse de tolérances de systèmes hyperstatiques permettait d'élargir les dimensions des zones de tolérances et donc de réduire les coûts de production. De plus, les temps de calcul sont suffisamment faibles (dans cet exemple, quelques secondes pour chaque assemblage) pour réaliser des études statistiques dans des temps acceptables pour un industriel.

Enfin, une corrélation de nos calculs avec des mesures expérimentales est présentée dans le Chapitre V pour vérifier que nos résultats sont représentatifs des assemblages réels.

Organisation du document

Ce document est divisé en cinq chapitres :

- Chapitre I :
Dans ce chapitre, les travaux existants sur l'analyse de tolérances et la modélisation d'assemblages sont présentés. Nous débutons cette partie par les modélisations d'assemblages de solides infiniment rigides. Les études prenant en compte les écarts de forme des surfaces et les déformations des pièces sont ensuite présentées.
- Chapitre II :
Le Chapitre II est dédié à l'analyse des assemblages par la méthode des polytopes. Dans cette partie, nous présentons entre autres une méthode pour détecter les interférences de montage entre deux pièces et pour vérifier le respect de la Condition Fonctionnelle des assemblages sans interférence.
- Chapitre III :
Le Chapitre III présente la méthode de modélisation des assemblages avec déformation. Afin de statuer sur la faisabilité de l'assemblage, l'effort de montage est estimé. Enfin, le respect de la Condition Fonctionnelle est vérifié.
- Chapitre IV :
Les méthodes d'analyse présentées dans les deux chapitres précédant sont appliquées à l'étude d'une bride composée de cinq pions. Cette étude nous permet de mettre en évidence l'efficacité et la rapidité de l'approche proposée.
- Chapitre V (confidentiel) :
Les résultats obtenus par simulation sont confrontés à des mesures réalisées sur des assemblages réels. Une analyse de tolérances est ensuite réalisée sur ces assemblages.

Chapitre I. Modélisation d'un mécanisme hyperstatique

I.1. Introduction

Toutes les pièces fabriquées présentent des écarts à leur géométrie nominale. De même deux pièces fabriquées ne sont jamais strictement identiques d'un point de vue géométrique. Ces écarts sont dimensionnels ou géométriques.

Dans cette partie, nous présentons une modélisation des écarts des surfaces d'une pièce puis des écarts de situation entre deux surfaces potentiellement en contact.

Dans un premier temps les solides sont considérés comme infiniment rigides, les déformations locales des surfaces en contact (pression de Hertz) sont négligées ainsi que les déformations globales des structures des pièces. Les écarts de forme des surfaces sont également négligés et nous faisons l'hypothèse que les écarts restent dans le domaine des petits déplacements (les rotations sont linéarisées).

Nous nous intéresserons ensuite aux écarts de forme des surfaces et aux déformations dans les assemblages. Plus précisément à leurs impacts sur le fonctionnement d'un produit et sur la montabilité des assemblages hyperstatiques.

I.2. Modélisation d'assemblages de pièces infiniment rigides

I.2.1. Définition et paramétrage des écarts dans un assemblage

I.2.1.1. Écarts géométriques d'une pièce

Afin d'identifier les écarts de fabrication par rapport à la géométrie nominale, les surfaces réelles sont modélisées par des surfaces de substitution (Ballot & Bourdet, 1996; ISO5459, 2011). Une surface de substitution est une surface idéale (géométriquement parfaite) du même type que la surface nominale dont elle caractérise un état particulier, ainsi une surface nominalement cylindrique sera modélisée par une surface de substitution cylindrique et une surface nominalement plane sera modélisée par une surface de substitution plane. Trois modélisations différentes sont couramment utilisées en tolérancement : le modèle nominal (Figure I.1), le Skin Model (voir Figure I.2) et le modèle des surfaces de substitution (voir Figure I.3).

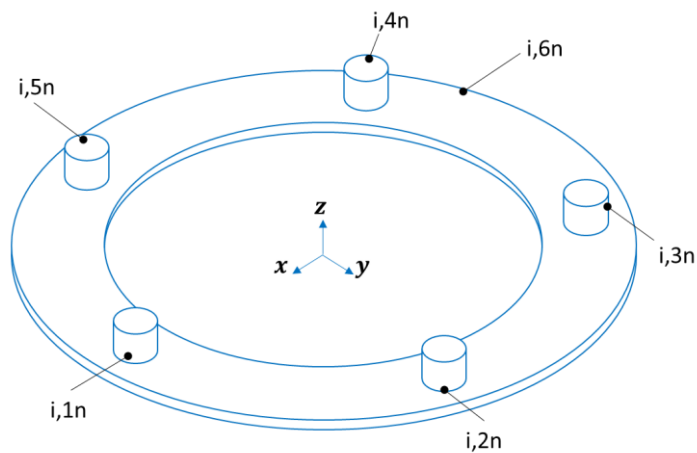


Figure I.1 – Modèle nominal de la pièce i

Le modèle nominal est le modèle issu de la CAO, il est géométriquement parfait par définition. La Figure I.1 représente la géométrie nominale d'une pièce i composée d'une surface plane $i,6n$ et de cinq surfaces cylindriques i,jn ($j \in \{1, \dots, 5\}$). Dans la suite, l'indice n sera utilisé pour désigner des éléments nominaux des pièces.

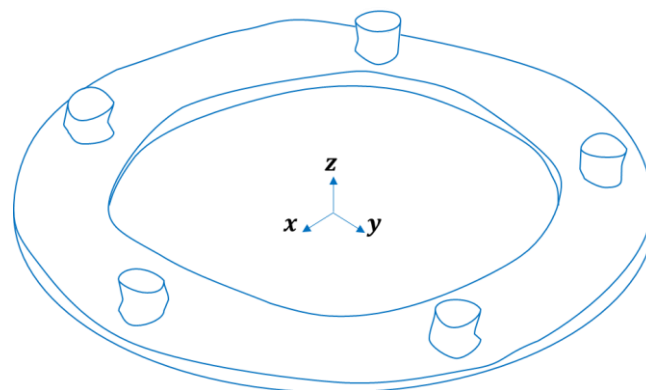


Figure I.2 – Skin Model de la pièce i

Le Skin Model donne une représentation des surfaces réelles de la pièce en incluant des écarts de fabrication. Cette représentation sert de support graphique à l'expression des spécifications géométriques (Dantan, et al., 2008). Des opérations, appliquées au Skin Model ou à la surface réelle, sont utilisées pour identifier les caractéristiques de la surface réelle. Elles sont divisées en six classes : partition, extraction, filtration, collection, association et construction (Mathieu & Ballu, 2007; Srinivasan, 2003; Dantan, et al., 2008; ISO17450, 2011).

Une surface de substitution est obtenue par une opération d'association. Cette opération est utilisée pour ajuster un(des) élément(s) idéal(aux) à un(des) élément(s) non idéal(aux), selon des règles spécifiques appelées critères (Charpentier, 2012). Différents processus peuvent être utilisés, comme par exemple :

- Minimiser la somme des carrés des distances entre chaque point de l'élément non idéal et l'élément idéal,
- Minimiser la plus grande distance entre chaque point de l'élément non idéal et l'élément idéal (min max ou Tchebychev).

Sur la Figure I.3, des surfaces de substitutions ont été associées au Skin Model de la pièce i . Une surface de substitution est notée i,j ; i étant le numéro de la pièce et j le numéro de la surface. Les surfaces i,j ($j \in \{1, \dots, 5\}$) sont des cylindres parfaits et la surface $i,6$ est un plan.

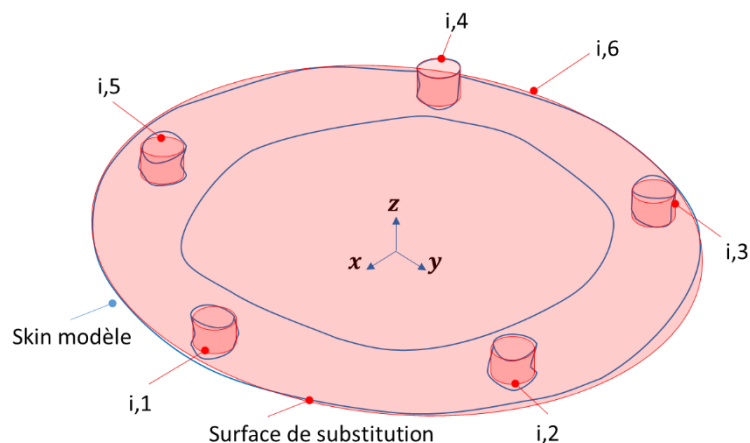


Figure I.3 – Association des surfaces de substitution au Skin Model

Les écarts de situation définissent les écarts de position et d'orientation des éléments de situation de la surface de substitution par rapport aux éléments de la surface nominale utilisée en référence (Clément, et al., 1994) et (Ballu, et al., 2010). Les éléments de situation d'une surface sont utilisés pour définir une référence spécifiée dans (ISO5459, 2011).

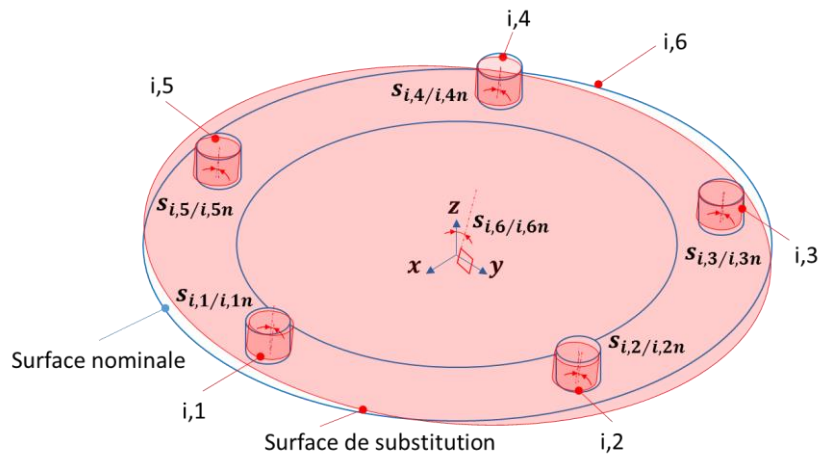


Figure I.4 – Ecarts géométriques (écarts de situation et de dimension)

Sur la Figure I.4, $s_{i,j/i,jn}$ ($j \in \{1, \dots, 6\}$) est un opérateur de l'espace affine 3d qui définit les positions relatives entre deux surfaces. Chaque opérateur peut être exprimé au travers d'une matrice (Turner, 1990; Sodhi & Turner, 1994; Chase, et al., 1997), d'un tenseur métrique (Serré, et al., 2010), d'un torseur cinématique (Whitney & Adams, 2001) ou d'un torseur des petits déplacements (Bourdet & Clément, 1988).

Quel que soit l'outil mathématique choisi, d'après la relation de Chasles, les écarts de situation entre deux surfaces peuvent être définis par :

$$s_{i,1/i,2} = s_{i,1/i,1n} + s_{i,1n/i,2n} + s_{i,2n/i,2} \text{ avec } (s_{i,2n/i,2} = -s_{i,2/i,2n}) \quad (I-1)$$

Les écarts géométriques entre deux surfaces nominales $i,1n$ et $i,2n$ sont par définition nuls. La relation (I-1) peut donc être simplifiée de la façon suivante :

$$s_{i,1/i,2} = s_{i,1/i,1n} + s_{i,2n/i,2} = s_{i,1/i,0} + s_{i,0/i,2} \quad (I-2)$$

$i,0$ est un référentiel quelconque associé au modèle CAO de la pièce i .

Considérons que les écarts de situation $s_{i,1/i,2}$ sont modélisés par un torseur des petits déplacements $[s_{i,1/i,2}]$.

Dans le système de référence (x, y, z) , on a :

$$[s_{i,1/i,2}] = \begin{bmatrix} r_{i,1/i,2} \\ t_{N-i,1/i,2} \end{bmatrix} \text{ avec } r_{i,1/i,2} \begin{bmatrix} r_{i,1/i,2x} \\ r_{i,1/i,2y} \\ r_{i,1/i,2z} \end{bmatrix} \text{ et } t_{N-i,1/i,2} \begin{bmatrix} t_{N-i,1/i,2x} \\ t_{N-i,1/i,2y} \\ t_{N-i,1/i,2z} \end{bmatrix} \quad (I-3)$$

Dans le système de référence (x, y, z) , les 6 composantes de $[s_{i,1/i,2}]$ sont les écarts de situation entre les surfaces $i,1$ et $i,2$. Plus précisément :

- Les composantes de $r_{i,1/i,2}$ sont les écarts de rotation de la surface $i,1$ par rapport à la surface $i,2$;
- Les composantes de $t_{N-i,1/i,2}$ sont les écarts de translation exprimés au point N de la surface $i,1$ par rapport à la surface $i,2$.

Par analogie, considérons que $\mathbf{s}_{i,1/i,0}$ et $\mathbf{s}_{i,0/i,2}$ sont respectivement modélisés par les torseurs de petits déplacements $[\mathbf{s}_{i,1/i,0}]$ et $[\mathbf{s}_{i,0/i,2}]$.

D'après l'équation (I-2), les écarts de situation entre deux surfaces d'une pièce peuvent être exprimés en fonction des écarts par rapport au référentiel $i,0$ de la pièce. Il vient :

$$[\mathbf{s}_{i,1/i,2}] = [\mathbf{s}_{i,1/i,0}] + [\mathbf{s}_{i,0/i,2}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{i,1/i,2} = \mathbf{r}_{i,1/i,0} + \mathbf{r}_{i,0/i,2} \\ \mathbf{t}_{N-i,1/i,2} = \mathbf{t}_{N-i,1/i,0} + \mathbf{t}_{N-i,0/i,2} \end{bmatrix} \quad (I-4)$$

La différence entre le diamètre de la surface de substitution, noté $D_{i,1}$, et le diamètre de la surface nominale, noté $D_{i,1n}$, est l'écart de dimension de la surface cylindrique noté $d_{i,1}$:

$$d_{i,1} = D_{i,1} - D_{i,1n} \quad (I-5)$$

Si les écarts de forme des surfaces sont négligées, les écarts de situation et de dimension définissent les Ecart Géométriques (EG) d'une pièce.

Dans le cas général, $EG_{i,j}$ définit l'ensemble des Ecart Géométriques de la surface i,j :

$$EG_{i,j} = \{[\mathbf{s}_{i,j/i,0}]; d_{i,j}\} \quad (I-6)$$

Les écarts, laissant une surface i,j globalement invariante, caractérisent la classe d'invariance de la surface. Il est impossible de limiter ces écarts par une spécification par zone. Les composantes du torseur $[\mathbf{s}_{i,j/i,0}]$ correspondant à des degrés d'invariances sont donc non bornées.

Les écarts, ne laissant pas une surface invariante (écarts de situation), représentent les écarts de fabrication. Si une surface est géométriquement parfaite, c'est-à-dire qu'elle ne présente aucun écart à sa géométrie nominale $i,0$, ses écarts de situation sont nuls.

La Figure I.5 présente les principaux types de surfaces utilisées selon leurs classes d'invariance. Ainsi dans le cas particulier d'une surface cylindrique d'axe \mathbf{y} , les écarts de rotation r_y et de translation t_{N-y} sont non bornés car ils correspondent aux degrés d'invariance de la surface. Les écarts de rotation, r_x et r_z , et les écarts de translation, t_{N-x} et t_{N-z} , sont les écarts de situation des surfaces (écarts de fabrication).

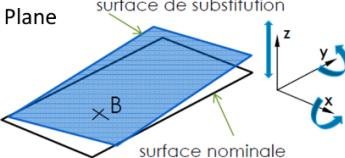
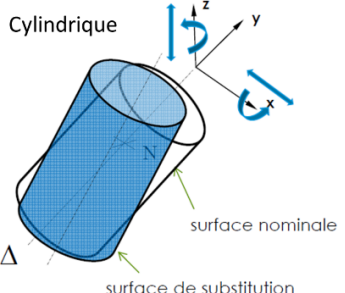
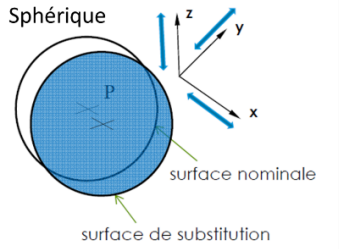
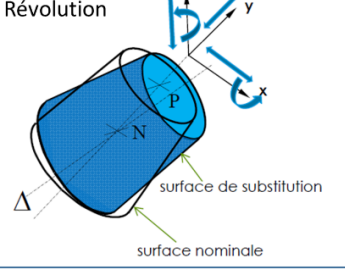
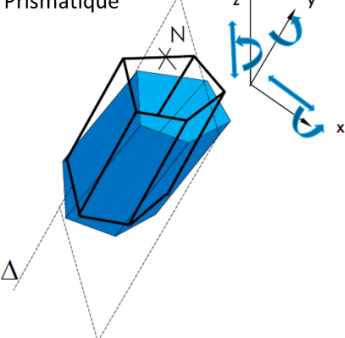
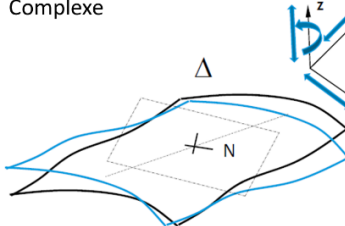
Classes des surfaces	Degrés d'invariance	Ecarts de situation	Éléments de situation
<p>Plane</p> 	<p>3 : r_z, t_{B-x} et t_{B-y}</p>	<p>3 : r_x, r_y et t_{B-z}</p>	<p>Le plan lui-même</p>
<p>Cylindrique</p> 	<p>2 : r_y et t_{N-y}</p>	<p>4 : r_x, r_z, t_{N-x} et t_{N-z}</p>	<p>Le droite Δ, axe du cylindre</p>
<p>Sphérique</p> 	<p>3 : r_x, r_y et r_z</p>	<p>3 : t_{P-x}, t_{P-y} et t_{P-z}</p>	<p>Le point P, centre de la sphère</p>
<p>Révolution</p> 	<p>1 : r_y</p>	<p>5 : r_x, r_z, t_{N-x}, t_{N-y} et t_{N-z}</p>	<p>La droite Δ et un point situé sur cette droite ; par exemple, le point P</p>
<p>Prismatique</p> 	<p>1 : t_{N-y}</p>	<p>5 : r_x, r_y, r_z, t_{N-x} et t_{N-z}</p>	<p>La droite Δ suivant la direction de l'extrusion, et un plan contenant Δ</p>
<p>Complexe</p> 	<p>aucun</p>	<p>6 : r_x, r_z, r_z, t_{N-x}, t_{N-y} et t_{N-z}</p>	<p>Plan, droite Δ et point N</p>

Figure I.5 – Classes de surfaces usuelles (Homri, 2014)

I.2.1.2. Relations entre les écarts géométriques de deux surfaces potentiellement en contact

Une liaison mécanique existe entre deux pièces 1 et 2 si, et seulement si, il y a contact entre des surfaces de ces pièces lors du fonctionnement normal du système. Un élément de contact est l'élément constitué de l'ensemble des points de contact possibles entre ces surfaces. L'élément de contact résulte de l'intersection entre deux surfaces potentiellement en contact dans la configuration particulière où les deux surfaces sont confondues et sans jeu (Homri, 2014). La Figure I.6 présente un exemple d'élément de contact dans le cas particulier d'une liaison arbre / alésage en 2d.

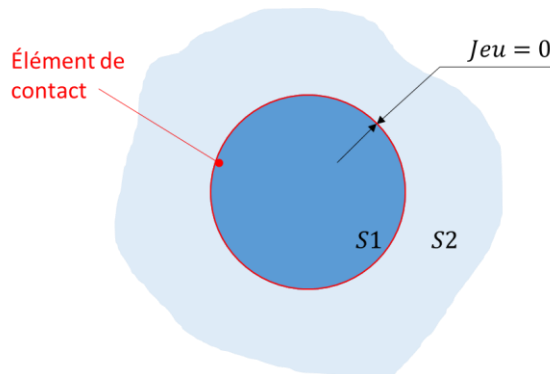


Figure I.6 – Définition d'un élément de contact

Les écarts de fabrication des pièces se propagent dans un système mécanique par l'intermédiaire des liaisons. Les mobilités (degrés d'invariance) d'une liaison absorbent les défauts entre deux pièces en contact, tandis que les degrés de liaison propagent les défauts entre deux pièces en contact.

Une liaison peut être définie au travers de cinq caractéristiques (Dufaure & Teissandier, 2008) :

- Type de liaisons : Appui Plan, Pivot Glissant, Rotule...
- Élément(s) de situation : plan, droite ou point,
- Type de contact : fixe, glissant ou flottant,
- Jeu : jeu minimal ou maximal, Jeu_{min} et Jeu_{max} ,
- Direction de contact forcé : optionnelle.

Les types de liaisons proposés (Appui Plan, Pivot Glissant...) correspondent aux liaisons définies dans (ISO3952-1, 1995) en fonction des types de surfaces en contact. La Figure I.7 décrit les liaisons élémentaires les plus couramment utilisées en conception mécanique.

De façon analogue aux surfaces élémentaires, les éléments de situation des contacts positionnent la liaison dans l'espace. Ils définissent ainsi les directions des degrés de mobilité (Dufaure & Teissandier, 2008; Ballu, et al., 2010). Par exemple, l'élément de situation d'une liaison Appui Plan est un plan (l'élément de contact), d'une liaison Rotule est un point (centre de la sphère de contact)... Ces éléments sont détaillés sur la Figure I.7.

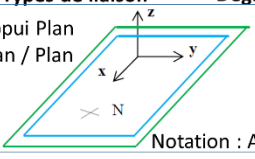
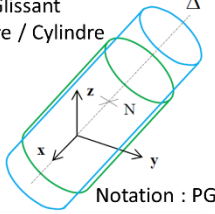
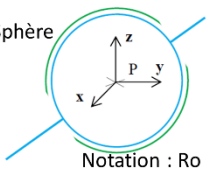
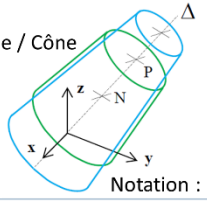
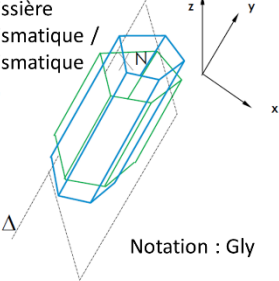
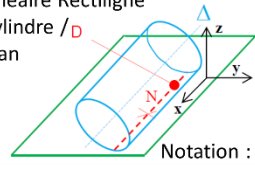
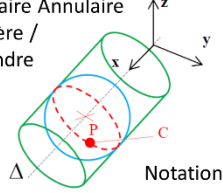
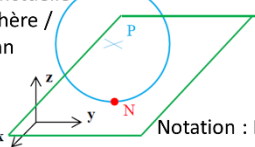
Types de liaison	Degrés d'invariance	Degrés de liaison	Éléments de contact	Éléments de situation
<p>Appui Plan Plan / Plan</p>  <p>Notation : APz</p>	<p>3 : r_z, t_{N-x} et t_{N-y}</p>	<p>3 : r_x, r_y et t_{N-z}</p>	<p>Plan de normale z</p>	<p>Plan de normale z</p>
<p>Pivot Glissant Cylindre / Cylindre</p>  <p>Notation : PGx</p>	<p>2 : r_x et t_{N-x}</p>	<p>4 : r_y, r_z, t_{N-y} et t_{N-z}</p>	<p>Cylindre d'axe x</p>	<p>Le droite Δ de direction x</p>
<p>Rotule Sphère / Sphère</p>  <p>Notation : Ro</p>	<p>3 : r_x, r_y et r_z</p>	<p>3 : t_{P-x}, t_{P-y} et t_{P-z}</p>	<p>La sphère de centre P</p>	<p>Le point P, centre de l'élément de contact</p>
<p>Pivot Ex : Cône / Cône</p>  <p>Notation : Pix</p>	<p>1 : r_x</p>	<p>5 : r_y, r_z, t_{N-x}, t_{N-y} et t_{N-z}</p>	<p>Surface de révolution Ex : cône</p>	<p>La droite Δ, axe de l'élément de contact et le point P de l'axe</p>
<p>Glissière Prismatique / Prismatique</p>  <p>Notation : Gly</p>	<p>1 : t_{N-y}</p>	<p>5 : r_x, r_z, r_z t_{N-x} et t_{N-z}</p>	<p>Surface prismatique</p>	<p>La droite Δ suivant la direction de l'extrusion de l'élément de contact, et un plan passant par Δ</p>
<p>Linéaire Rectiligne Cylindre / D Plan</p>  <p>Notation : LRzx</p>	<p>4 : r_x, r_z t_{N-x} et t_{N-y}</p>	<p>2 : r_y et t_{N-z}</p>	<p>Droite D</p>	<p>Plan de normale z, droite Δ parallèle à la direction x</p>
<p>Linéaire Annulaire Sphère / Cylindre</p>  <p>Notation : LAx</p>	<p>4 : r_x, r_y, r_z et t_{P-x}</p>	<p>2 : t_{P-y} et t_{P-z}</p>	<p>Cercle C</p>	<p>P (centre de l'élément de contact) Δ (axe du cylindre)</p>
<p>Ponctuelle Sphère / Plan</p>  <p>Notation : Poz</p>	<p>5 : r_x, r_y, r_z t_{N-x} et t_{N-y}</p>	<p>1 : t_{P-y}</p>	<p>Point N</p>	<p>Plan de normale z Point N (point de contact)</p>

Figure I.7 – Exemple de liaisons les plus couramment utilisées (Homri, 2014)

La nature du contact influence le comportement de la liaison. La Figure I.8 illustre le comportement d'une liaison dans les trois configurations suivantes (Dantan, 2000; Dantan, et al., 2005) :

- Contact fixe : aucun déplacement n'est possible (les degrés de liberté sont supprimés),
- Contact glissant : les déplacements correspondant aux différents degrés de liberté sont possibles, mais les surfaces restent en contact permanent l'une sur l'autre. Le jeu de la liaison est nul,
- Contact flottant : les déplacements correspondant aux différents degrés de liberté sont possibles, et les autres déplacements sont limités par un jeu.

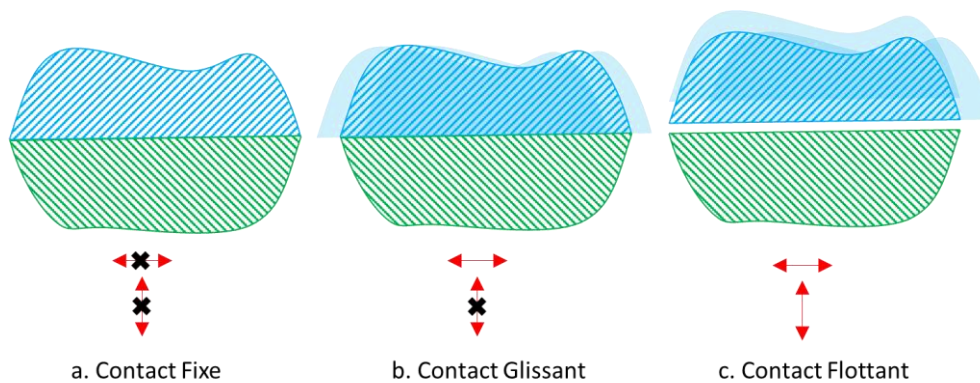


Figure I.8 – Définition du type de contact (Dantan, 2000)

Les contacts dans les liaisons Pivot Glissant, Rotule, Pivot, Glissière et Linéaire Annulaire sont dit bilatéraux. Pour ce type de contact, différents ajustements peuvent être choisis pour définir le jeu dans la liaison. Le jeu correspond à la différence entre la dimension de l'alésage et la dimension de l'arbre (ISO286-1, 2010). L'ajustement choisi peut être de trois types différents :

- Ajustement avec jeu : $Jeu_{min} > 0$, le contact est flottant (Figure I.9a),
- Ajustement avec serrage : $Jeu_{max} < 0$, le contact est fixe (Figure I.9b),
- Ajustement incertain : $Jeu_{min} \leq 0$ et $Jeu_{max} \geq 0$, le contact est flottant ou fixe (Figure I.9c).

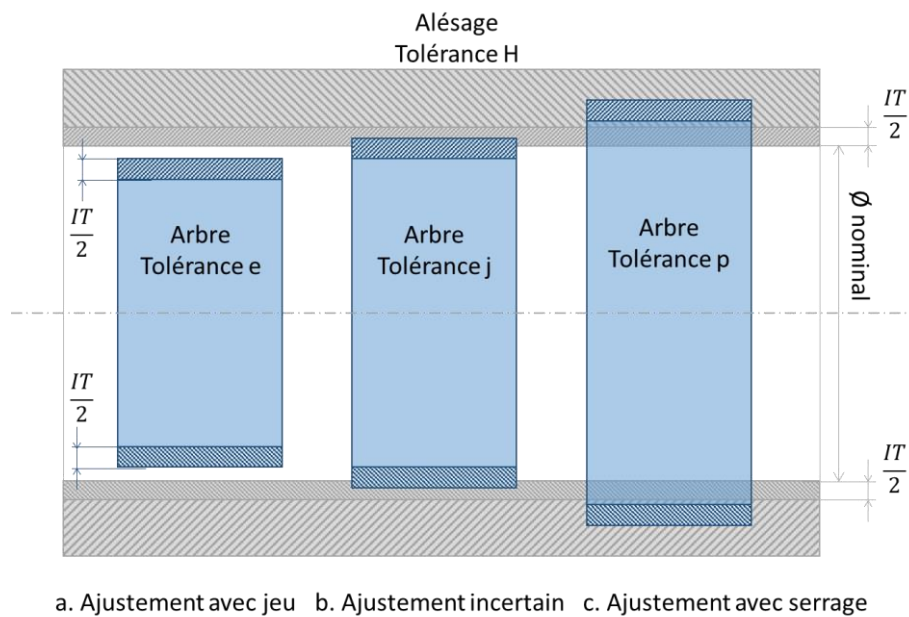


Figure I.9 – Ajustements arbre / alésage

Les contacts dans les liaisons Appui Plan, Linéaire Rectiligne et Ponctuelle sont dit unilatéraux. Le jeu est la distance entre les deux surfaces potentiellement en contact (voir Figure I.10). Le jeu local peut être :

- $Jeu_{min} > 0$, le contact est flottant,
- $Jeu_{min} = 0$, le contact est glissant ou fixe.

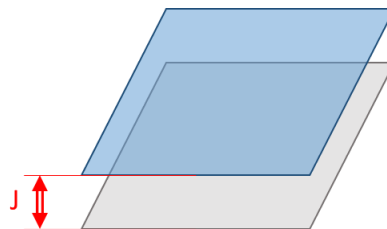


Figure I.10 – Définition du jeu dans un contact unilatéral

Remarque : en hypothèse de solides infiniment rigides, un jeu négatif n'est pas possible.

Dans la suite, des notations sont utilisées pour désigner les liaisons. Elles sont définies en fonction de leur type et de l'orientation des éléments de situation. Par exemple, une liaison Appui Plan dont l'élément de situation est un plan perpendiculaire à l'axe z , sera notée APz (voir Figure I.7).

De la même façon que pour les surfaces, les écarts de situation entre deux surfaces potentiellement en contact peuvent être définis par un torseur de petits déplacements.

Considérons la liaison entre deux surfaces 1,1 et 2,1 appartenant respectivement aux pièces 1 et 2. Les écarts de situation $s_{1,1/2,1}$ sont modélisés par un torseur des petits déplacements $[s_{1,1/2,1}]$. Dans une base (x, y, z) , ce torseur s'exprime en un point M par la relation suivante :

$$[s_{1,1/2,1}] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,1/2,1} \\ \mathbf{t}_{M-1,1/2,1} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{r}_{1,1/2,1} = \begin{pmatrix} r_{1,1/2,1x} \\ r_{1,1/2,1y} \\ r_{1,1/2,1z} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{t}_{M-1,1/2,1} = \begin{pmatrix} t_{M-1,1/2,1x} \\ t_{M-1,1/2,1y} \\ t_{M-1,1/2,1z} \end{pmatrix}$$

Si la liaison étudiée possède des degrés de mobilité, les composantes du torseur $[s_{1,1/2,1}]$ correspondant à ces mobilités sont non bornées.

De même, les composantes correspondant aux écarts de situation de la liaison sont bornées par le jeu local entre les surfaces en contact. Si ce jeu est nul, les écarts de situation seront également nuls.

I.2.1.3. Relations entre les écarts géométriques d'un système mécanique

Les relations entre les écarts de situation d'un mécanisme complet résultent d'une structure topologique. Cette structure peut être illustrée par un graphe (Berge, 1967). Dans le cadre du tolérancement, ce graphe sert de support pour décrire la structure du mécanisme et visualiser les chaînes de cotes (Ballu & Mathieu, 1999).

Ce graphe n'est pas orienté, il représente les écarts relatifs des surfaces. Il est constitué de sommets et d'arêtes et il existe toujours au moins un chemin pour aller d'un sommet à un autre.

La Figure I.11 représente un graphe d'une pièce i (grand cercle) comprenant j_{max} surfaces i,j (petits cercles). L'ensemble des surfaces nominales i,jn sont regroupées et représentées en un seul petit cercle $i,0$, représentant un repère associé au modèle nominal de la pièce i (Teissandier, et al., 1999).

Une arête connectée à un sommet désigné par $i,0$ caractérise les écarts géométriques d'une surface par rapport au modèle CAO.

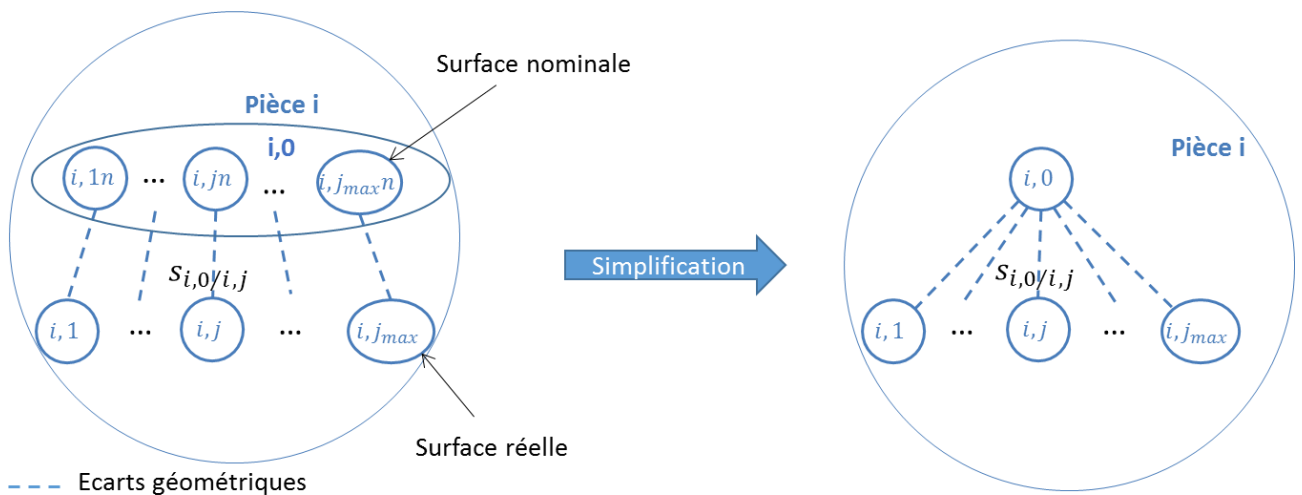


Figure I.11 – Représentation d'une pièce par un graphe (Pierre, 2011)

La Figure I.12 illustre le graphe d'un système mécanique composé de deux pièces.

Une arête reliant deux sommets $1,j$ et $2,j$ avec $j \neq 0$ caractérise les variations de situation entre deux surfaces potentiellement en contact. Les pièces 1 et 2 sont simultanément en contact par j_{max} liaisons entre les surfaces $1,j$ et $2,j$.

La recherche des cycles indépendants permet de déterminer les relations qui caractérisent les lois de comportement géométrique d'un mécanisme (Ballot & Bourdet, 1996). Un cycle est une chaîne finie d'arêtes qui part d'un sommet et aboutit au même sommet (noté C sur la Figure I.12). Un mécanisme existe (peut être assemblé) si, et seulement si, chaque cycle est satisfait. L'existence de cette structure topologique est une traduction mathématique de l'existence du système mécanique défini sur la Figure I.12. Chaque cycle est caractérisé en s'appuyant sur la relation de Chasles.

En utilisant des torseurs de petits déplacements, l'ensemble des cycles est satisfait si, et seulement si, le système (I-7) est respecté :

$$\{[s_{1,0/2,0}] = \cap_{j=1}^{j_{max}} ([s_{1,0/1,j}] + [s_{1,j/2,j}] + [s_{2,j/2,0}])\} \quad (I-7)$$

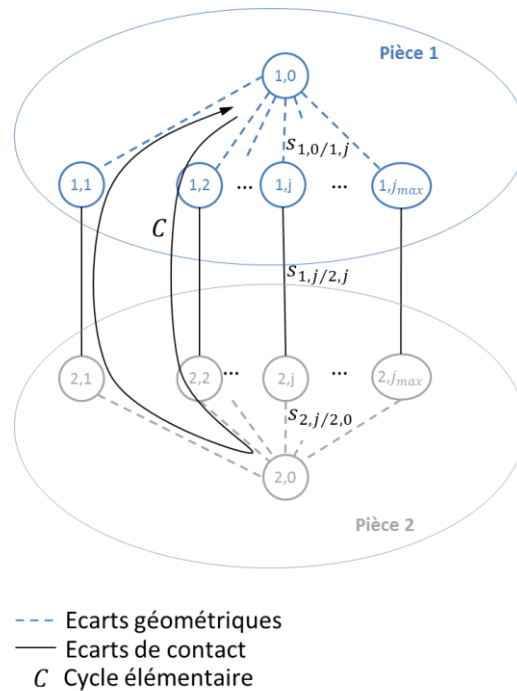


Figure I.12 – Graphe topologique d'un système mécanique composé de deux pièces (Pierre, 2011)

I.2.2. Analyse d'un mécanisme hyperstatique

Comme nous l'avons dit précédemment, un système hyperstatique est caractérisé par la redondance de ses contacts. Cette redondance rend difficile l'analyse de ce type de mécanisme, car le respect d'une Condition Fonctionnelle ne peut pas être vérifié en définissant une relation linéaire simple entre les écarts géométriques des surfaces et les écarts de situation des liaisons.

D'après (Le Borzec & Lotterie, 1975), le degré d'hyperstatisme, h , d'un mécanisme peut être déterminé grâce à la relation (I-8).

$$h = Ns - 6 * (p - 1) + m \quad (I-8)$$

Avec :

- Ns : somme des degrés de liaison du mécanisme
- p : nombre de pièces
- m : degré de mobilité du mécanisme

Si h est nul, le système est isostatique. Il n'y a aucune redondance dans la suppression des degrés de mobilité.

Si h est positif, le système est hyperstatique. Au moins un degré de mobilité d'une pièce est supprimé plusieurs fois.

En fonction des écarts de fabrication des surfaces, le système peut alors présenter des interférences pouvant empêcher l'assemblage. L'étude d'un système hyperstatique se réalise donc en deux temps. Tout d'abord, il faut s'assurer que le mécanisme pourra être assemblé (soit que la structure topologique du système existe). Ensuite, si l'assemblage est possible, le respect de la Condition Fonctionnelle de position ou d'orientation peut être vérifié.

Plusieurs stratégies existent pour étudier un système hyperstatique (Pierre, 2011; Teissandier, 2012). La première consiste à modifier le mécanisme en supprimant tous les contacts redondants pour se ramener ainsi à un système isostatique. Pour choisir quels degrés de liaison seront relaxés, des hypothèses sont faites sur les prépondérances des contacts. Les logiciels AnaTole développé par DPS et Airbus (Marguet, et al., 2003) et MECAmaster développé par MECAmaster Sarl (Clozel & Rance, 2010) fonctionnent sur ce principe (voir Figure I.13). D'autres méthodes suggèrent au concepteur de ne définir que des architectures isostatiques en choisissant des types de mise en position prédéfinis (Söderberg & Lindkvist, 2001; Anselmetti, 2006; Spensieri, et al., 2009).

Ces approches sont pertinentes si des contacts prépondérants peuvent être définis.



Figure I.13 – Entrées / Sorties des logiciels AnaTole et MECAmaster (Homri, 2014)

La seconde stratégie consiste à décomposer le système hyperstatique en un ensemble de sous-systèmes isostatiques en testant toutes les configurations de mise en position possible des pièces.

Afin de minimiser le nombre de sous-ensembles étudiés, seules les configurations les plus critiques au regard d'une exigence fonctionnelle peuvent être considérées. Si aucune configuration n'est plus critique qu'une autre, elles devront toutes être testées. Cette stratégie est détaillée dans les travaux de (Ballot, et al., 2003; Costadoat, 2010).

Cette approche permet de formaliser un écart fonctionnel par une simple fonction linéaire, cependant il y aura autant de fonctions linéaires que de configurations. Dans une architecture fortement hyperstatique, le nombre de configurations peut croître rapidement et devenir rédhibitoire.

Enfin l'analyse par ensemble de contraintes consiste à caractériser l'ensemble des déplacements possibles entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme. Ces ensembles de contraintes proviennent des spécifications géométriques et de contact des pièces. Différentes approches formalisent ces ensembles, comme par exemple : les espaces de faisabilité (Turner, 1993), les U.P.E.L., (Teissandier, 1995), les domaines (Giordano & Duret, 1993), les T-Maps (Mujezinovic, et al., 2004), les polyèdres (Roy & Li, 1999) et les polytopes (Teissandier, et al., 1999).

Les approches par ensembles de contraintes permettent de déterminer les écarts entre deux surfaces suivants les six degrés de liberté en même temps dans des assemblages isostatiques et hyperstatiques.

I.2.2.1. Espace de Faisabilité

(Turner, 1987) fut le premier à parler d'Espace de Faisabilité dans sa thèse de 1987. Ce concept s'appuie sur le modèle variationnel présenté par (Turner & Wozny, 1987) dans le but de modéliser à partir d'une géométrie nominale, une pièce fabriquée avec des défauts. Ce modèle utilise la représentation CAO de la pièce dans laquelle chaque surface nominale peut varier. Ces variations sont pilotées par un ensemble de variables indépendantes décrites en fonction du type de surface (voir Figure I.14) (Gupta & Turner, 1993).

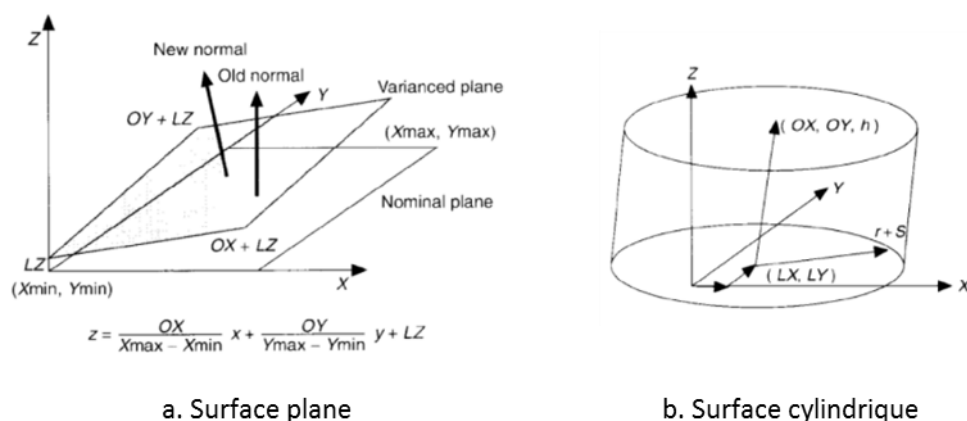


Figure I.14 – Variables du modèle pour différents types de surface (Gupta & Turner, 1993)

Après association des spécifications géométriques au modèle (Figure I.15a.), chacune est exprimée comme un ensemble de contraintes définissant une zone de faisabilité de l'espace des variables du modèle (Turner, 1993).

Le paramétrage et les contraintes associées aux tolérances sont illustrés en Figure I.15b. M_1 et M_2 sont les variables du modèle qui contrôlent respectivement la position et l'orientation de la surface plane tolérancée. T_1 et T_2 sont les variables de tolérance associées à la tolérance de localisation. T_3 est la variable de tolérance associée à la tolérance de parallélisme.

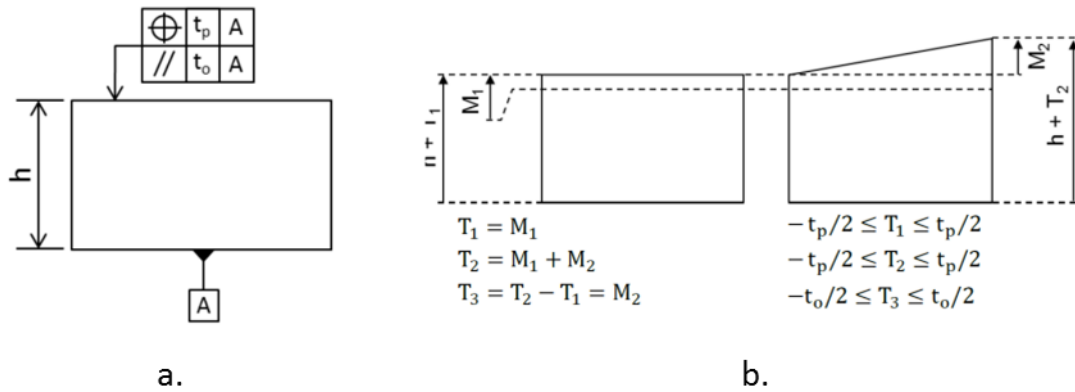


Figure I.15 – Tolérances de localisation et de parallélisme (Turner, 1993)

Les Espaces de Faisabilité associés à chaque tolérance sont illustrés ci-dessous :

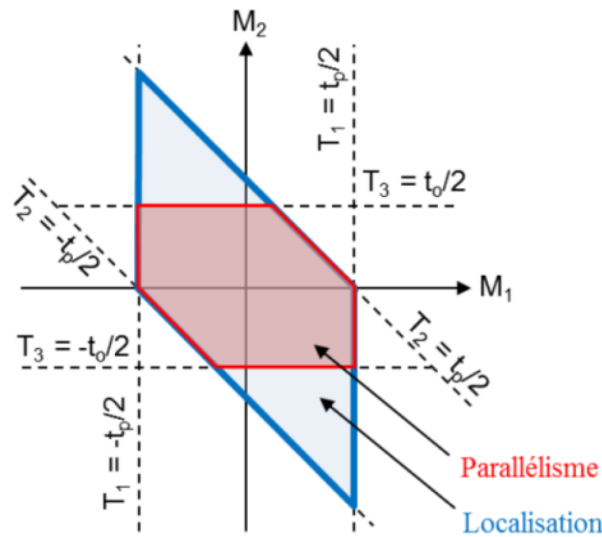


Figure I.16 – Espace de Faisabilité (Homri, 2014)

De la même manière, une tolérance de forme peut être représentée. La surface doit être discrétisée en un nombre fini de points auxquels sont associées les variables M_i . Un exemple est donné dans (Turner, 1993).

I.2.2.2. U.P.E.L (Union Pondérée d'Espaces de Liberté)

Le concept d'Union Pondérée d'Espaces de Liberté (UPEL) est issu des travaux du laboratoire I2M (anciennement LMP) de l'université de Bordeaux. Il a été introduit en 1991 par Y. Couétard et développé par D. Teissandier dans sa thèse de doctorat (Teissandier, 1995; Teissandier, et al., 1998). Le concept utilise une modélisation basée sur les torseurs des petits déplacements qui caractérise la position relative d'une surface fabriquée par rapport à sa position nominale ou la position relative entre deux surfaces de deux pièces différentes potentiellement en contact (les défauts de forme des surfaces sont négligés).

Une UPEL est un ensemble de six intervalles centrés sur « zéro ». Chacun d'eux caractérise les bornes de déplacements admissibles entre deux surfaces idéales (de formes parfaites), à l'intérieur desquels peuvent varier les composantes du torseur des petits déplacements. Ce torseur des petits déplacements modélise l'orientation et la position relatives entre les deux surfaces idéales, dans une base donnée et en un point donné. Dans ce modèle, les déplacements sont considérés comme indépendants.

Afin de prendre en compte les chaînes de cotes tridimensionnelles, un assemblage est décomposé en pièces, puis les pièces sont décomposées en surfaces fonctionnelles. (Teissandier, 1995) a défini cinq types de surfaces fonctionnelles : le plan, le cylindre, le cône, la sphère et le tore.

Deux types d'UPEL sont distingués : les UPEL de Liaison Interne et les UPEL de Liaison Externe. L'UPEL de Liaison Interne modélise les petits déplacements relatifs entre une surface fabriquée et sa surface nominale en négligeant les défauts de forme. L'UPEL de Liaison Externe modélise les petits déplacements relatifs entre deux surfaces en contact de deux pièces différentes. Les petits déplacements relatifs entre deux surfaces quelconques sont déterminés à l'aide d'opérations d'Union et d'Intersection.

La modélisation des limites des déplacements n'est pas assez fine pour représenter les dépendances entre les différentes composantes de déplacement. Depuis l'étude des UPEL a été abandonnée dans le laboratoire I2M au profit des polytopes (introduits dans la partie I.2.2.5). Les UPEL sont des boîtes englobantes des polytopes.

I.2.2.3. Domaine

À la même époque, un modèle sous forme de Domaine, basé sur les torseurs de petits déplacements, a été introduit par (Giordano & Duret, 1993) au laboratoire SYMME (anciennement LMéca) à Annecy. Ce modèle est utilisé dans de nombreux travaux de recherche, essentiellement dans ce laboratoire annécien, pour faire de l'analyse de tolérances de mécanismes tridimensionnels.

a) Torseur écart et torseur jeu

Les déplacements dans une liaison sont modélisés par les torseurs écart et jeu (Figure I.17). Un torseur écart modélise un petit déplacement (ou une variation géométrique) d'un élément géométrique par rapport à son nominal. Un torseur jeu modélise un déplacement relatif possible

entre deux surfaces potentiellement en contact. Le torseur écart et le torseur jeu se présentent sous la forme suivante :

$$T = \begin{Bmatrix} \rho_x & \varepsilon_x \\ \rho_y & \varepsilon_y \\ \rho_z & \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

Avec :

- ρ_x, ρ_y et ρ_z les composantes de rotation,
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_z les composantes de translation.

Les composantes de petits déplacements du torseur écart correspondant aux degrés d'invariance de l'élément géométrique et aux degrés de liberté de la zone de tolérance sont fixées à 0 (composantes non mesurables).

Celles du torseur jeu correspondant aux degrés de liberté de la liaison ne sont pas limitées.

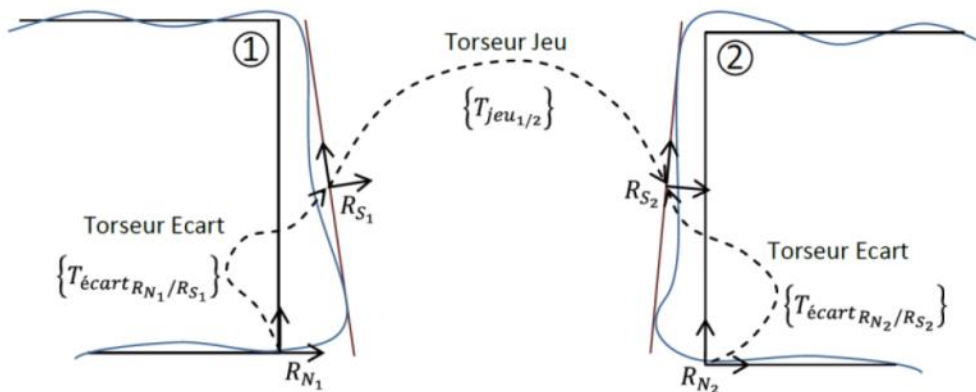


Figure I.17 – Modélisation des variations géométriques et déplacements d'une liaison (Mansuy, 2012)

b) Domaine écart et domaine jeu

On distingue le domaine écart et le domaine jeu. Le domaine écart, caractérisé par l'ensemble des torseurs écarts, permet de modéliser les variations géométriques d'un élément géométrique par rapport à son nominal à l'intérieur de sa zone de tolérance. Le domaine jeu, caractérisé par l'ensemble des torseurs jeux, permet de modéliser les déplacements relatifs possibles entre deux surfaces de deux pièces potentiellement en contact conformes à la condition de non interférence.

Dans le cas général, le domaine est présenté dans un espace de dimension six des déplacements. Les limites du domaine écart sont issues de l'écriture des inéquations traduisant le fait qu'un élément tolérancé doit rester dans une zone de tolérance tandis que le domaine jeu est issu des inéquations traduisant la non-interpénétration des surfaces en contact.

Un des intérêts de la notion de domaine est qu'il est possible d'associer une représentation graphique jusqu'à trois variables de déplacements.

La Figure I.18a illustre l'exemple du tolérancement d'une surface plane par deux spécifications géométriques (localisation t_l et orientation t_o) avec $t_o < t_l$. Les torseurs écarts pour la localisation et l'orientation sont respectivement :

$$T_{loc} = \begin{pmatrix} \rho_x & 0 \\ \rho_y & 0 \\ 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$T_{ori} = \begin{pmatrix} \rho_x & 0 \\ \rho_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les inéquations correspondantes à ces spécifications sont :

- Pour la localisation : $-\frac{t_l}{2} \leq \pm \frac{b}{2} \rho_x \pm \frac{a}{2} \rho_y + \varepsilon_z \leq \frac{t_l}{2}$
- Pour l'orientation : $\pm \frac{b}{2} \rho_x \pm \frac{a}{2} \rho_y \leq \frac{t_o}{2}$

Le domaine écart, défini par l'intersection de l'ensemble de ces inéquations, est représenté en Figure I.18b.

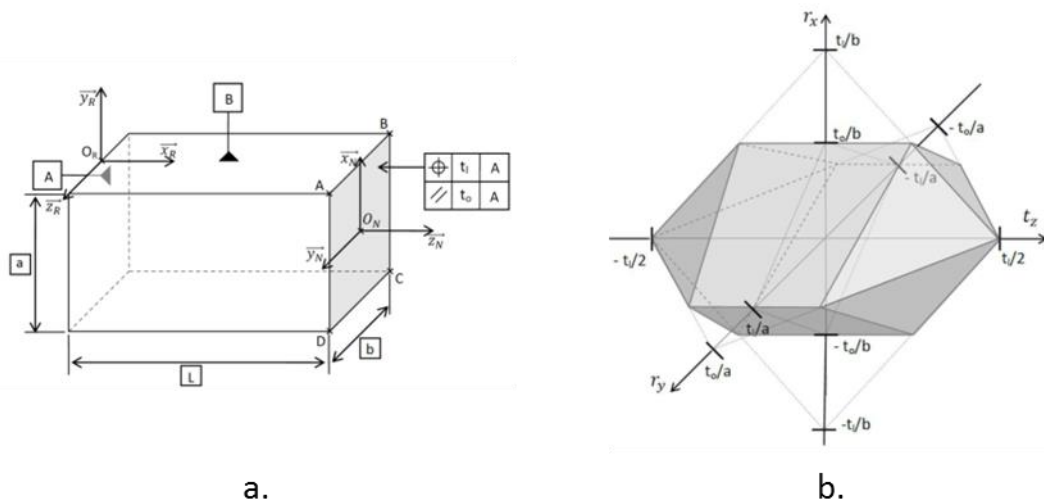


Figure I.18 – Exemple du tolérancement d'une surface plane par deux spécifications (Mansuy, 2012)

I.2.2.4. Modèle T-map

Le modèle T-MAP a été développé par J. K. Davidson et J. J. Shah de l'université d'Arizona au début des années 2000 (Davidson, et al., 2002). Un T-MAP est une représentation géométrique, dans un espace euclidien, des écarts possibles d'un élément tolérancé dans une zone de tolérance. La dimension n ($n \leq 6$) de cet espace dépend des degrés de liaison de l'élément tolérancé.

Le T-MAP se base sur la théorie des coordonnées barycentriques (Coxeter, 1989) qui permet de définir le n -simplexe de base associé à l'espace euclidien de dimension n . Les $n+1$ points de base σ_i du simplexe correspondent alors à $n+1$ configurations caractéristiques de l'élément tolérancé dans sa

zone de tolérance. Chaque point de base σ_i est associé à une masse λ_i . Le centre de gravité σ des points de base σ_i est défini pour tout point O : $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \overrightarrow{O\sigma} = \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i \cdot \overrightarrow{O\sigma_i})$.

Les masses λ_i sont les coordonnées barycentriques de σ . Il est possible de définir des coordonnées barycentriques normalisées avec : $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Prenons l'exemple d'une surface nominale plane représentée sur la Figure I.19a. Le T-MAP associé au tolérancement de la surface est défini dans un espace 3D. Quatre points de base ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$) sont donc nécessaires pour définir le 3-simplexe de base (Figure I.19b) dont les dimensions sont :

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_4 = t \text{ et } \sigma_3\sigma_4 = t\sqrt{2}$$

Les masses $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 sont respectivement affectées aux points $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et σ_4 .

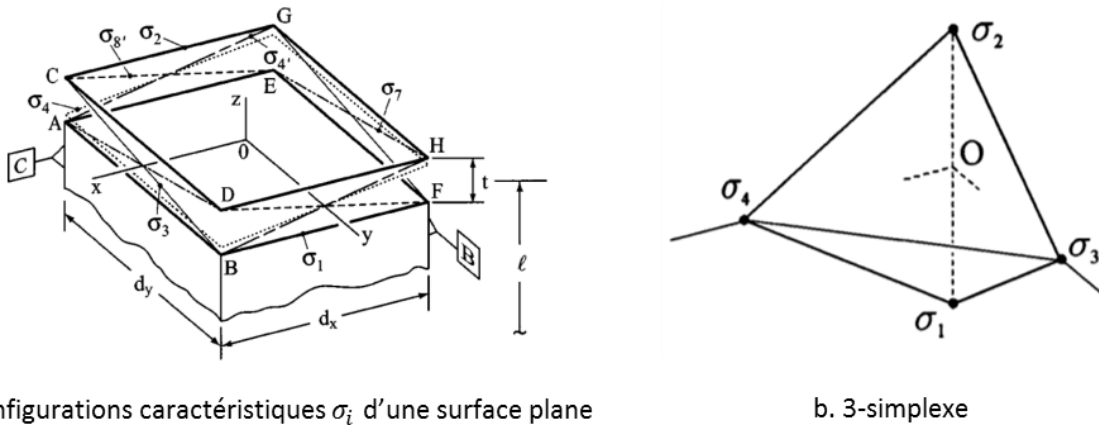


Figure I.19 – Tolérancement d'une surface plane (Mujezinovic, et al., 2004)

Le T-MAP est illustré en Figure I.20. Le repère (O, p', q', s) est orthonormé indirect. L'axe s représente les variations de la surface plane selon l'axe z . Les axes p' et q' représentent les variations d'orientation (rotations) respectivement autour des axes x et y .

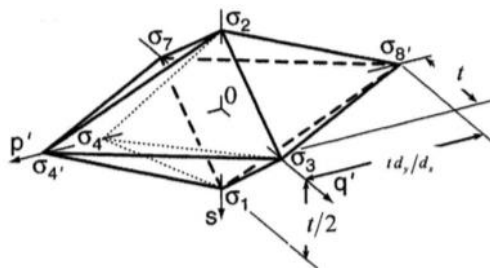


Figure I.20 – T-MAP du tolérancement d'une surface plane

Le principal avantage de ce modèle est que tous les points du T-MAP ont des coordonnées de même dimension homogène à une longueur. Cela assure la robustesse des résolutions numériques. Cependant, il n'existe pas de méthode générique pour définir un T-MAP pour tout type de surface.

I.2.2.5. Polyèdre et Polytope

Les spécifications de forme (Roy & Li, 1998), de position et d'orientation (Roy & Li, 1999) peuvent être modélisées par des polyèdres. Les variations géométriques des surfaces sont caractérisées par des contraintes, qui sont déterminées en des points particuliers des surfaces. Ces points doivent toujours rester à l'intérieur d'une zone de tolérance lorsqu'il y a un cumul de spécifications géométriques (Homri, 2014).

En 1999, (Teissandier, et al., 1999) introduisent le concept de polytope pour l'analyse de tolérances. Un polytope est un polyèdre borné. La topologie des polytopes, plus simple que celle des polyèdres, et leur linéarité par morceaux ont motivé leur utilisation en analyse de tolérances (Homri, 2014). Nous reviendrons plus en détail sur l'utilisation des polytopes en analyse de tolérances dans le Chapitre II de ce manuscrit.

I.3. Prise en compte des écarts de forme des surfaces dans la modélisation des contacts

Comme présenté auparavant, une surface de substitution est une surface, du même type que la surface nominale, définie à partir du Skin Model par une opération d'association. La surface de substitution est un filtre qui sépare les écarts de forme des autres écarts des surfaces (Hong & Chang, 2002; Ameta, et al., 2011). Cette simplification permet de diminuer le niveau de détails du modèle et donc de simplifier l'analyse de tolérances du mécanisme.

Cependant, si les écarts de forme de deux surfaces potentiellement en contact ne sont pas négligeables devant le jeu local, cette simplification peut mener à une mauvaise représentation de l'assemblage et donc à des choix de tolérances inadéquats (Schleich & Wartzack, 2015). Dans l'exemple de la liaison pion (C2) / alésage (C1) de la Figure I.21, les écarts de forme des surfaces en contact engendrent une interpénétration des surfaces (Homri, et al., 2016). Cette interférence n'aurait pas été détectée si les écarts de forme des surfaces avaient été filtrés par des opérations d'association de surfaces de substitution.

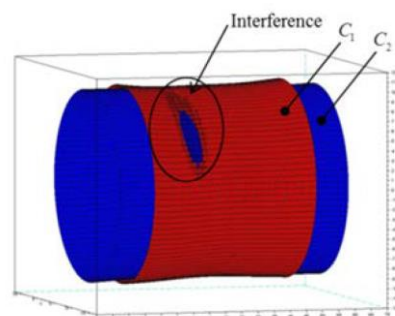


Figure I.21 – Interférences entre des cylindres en contact (Homri, et al., 2016)

Afin d'inclure les écarts de forme dans les modèles d'analyse de tolérances, le concept de Skin Model Shapes a été développé. Le Skin Model Shapes est une réalisation particulière du Skin Model comprenant les écarts géométriques générés par les procédés de fabrication et d'assemblage (Schleich, et al., 2014). Le Skin Model complet requière une description infinie pour considérer tous les types d'écarts géométriques de l'échelle macroscopique à microscopique (Anwer, et al., 2013;

Zhang, et al., 2013). Le Skin Model Shapes est un modèle discrétisé du Skin Model complet. La Figure I.22 montre un exemple de modélisation d'un assemblage avec des Skin Model Shapes.

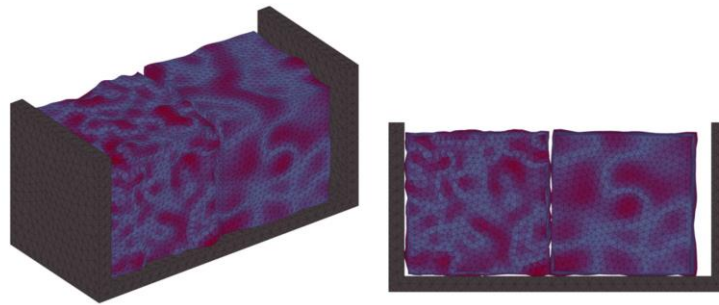


Figure I.22 – Skin Model Shapes (Schleich & Wartzack, 2015)

I.4. Modélisation d'un assemblage composé de pièces déformables

Les raideurs des pièces sont souvent négligées dans les analyses de tolérances. Cependant de nombreux travaux montrent que l'hypothèse de solides infiniment rigides n'est pas toujours pertinente. Dans cette partie nous allons présenter certaines de ces études en distinguant deux catégories (Mazur, et al., 2011) :

- Les analyses prenant en compte des déformations issues de sollicitations externes au système étudié (effet thermomécanique, effet gravitationnel, éléments de fixation...),
- Les analyses des déformations issues des contacts entre les surfaces du système.

I.4.1. Déformations issues de sollicitations externes au système

Des sollicitations externes au système, telles que les effets thermomécaniques, gravitationnels, les éléments de fixation... peuvent générer des déformations non négligeables sur un système mécanique.

Nous pouvons ainsi citer les travaux de (Benichou & Anselmetti, 2010) qui modélisent les variations géométriques induites par les écarts de température d'un mécanisme en se focalisant sur les assemblages isostatiques qui ne présentent pas d'interférence.

De la même manière, (Ting, et al., 2016) prennent en compte les écarts issus des effets thermiques mais aussi gravitationnels ou issus d'un chargement externe. Tout d'abord, les surfaces des pièces sont discrétisées. Les écarts de situation des surfaces en chaque point de discrétisation sont ensuite déterminés. Ces écarts sont le cumul des écarts de fabrication et des écarts issus de sollicitations externes au système. Ils sont exprimés à l'aide de torseurs Jacobien sous forme de vecteurs translation et rotation. Le logigramme de leur analyse est présenté sur la Figure I.23.

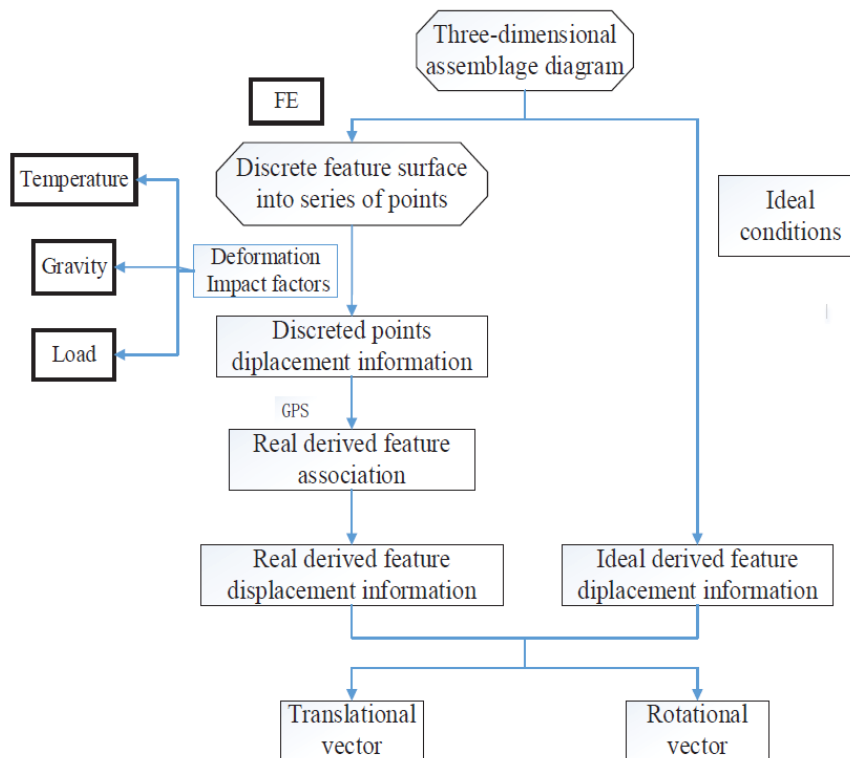


Figure I.23 – Etapes de récupération des informations sur les déformations des pièces (Ting, et al., 2016)

Cette approche a été appliquée à l'analyse de l'assemblage d'un arbre avec un alésage. La Figure I.24 présente les géométries nominales des pièces. Seules les déformations des éléments 1 et 2 ont été prises en compte. La Figure I.25 présente les géométries de ces deux éléments après application des écarts de fabrication et des chargements externes sur les surfaces.

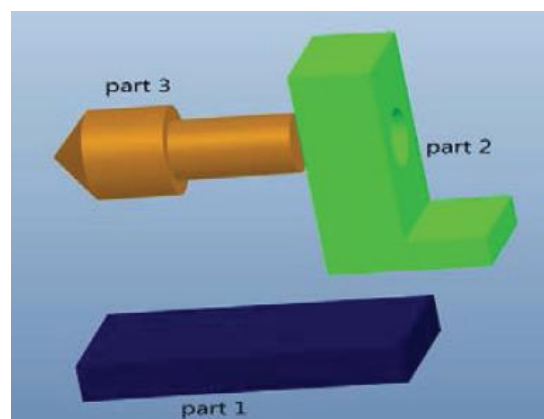


Figure I.24 – Etude de l'assemblage d'un arbre dans un alésage (Ting, et al., 2016)

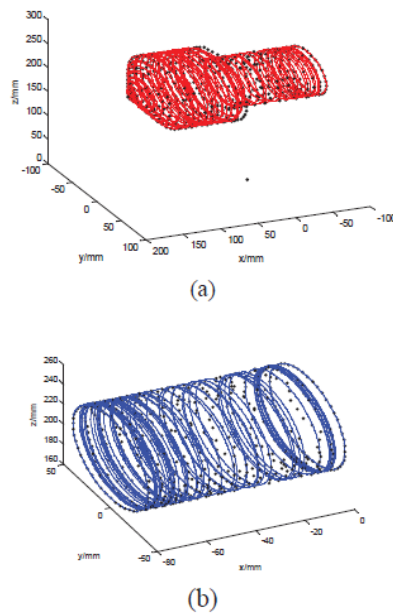


Figure 1.25 – Déformation de l'arbre (a) et de l'alésage (b) sous des effets de sollicitations thermique, mécanique et gravitationnelle (Ting, et al., 2016)

En utilisant les deux éléments de la Figure 1.25, les auteurs peuvent déterminer l'espace des déplacements possibles entre les deux surfaces sous sollicitations externes.

Cependant les auteurs n'intègrent pas les déformations issues des contacts potentiels entre l'arbre et l'alésage. De plus ils ne considèrent pas le cas où les surfaces sont en interférence.

(Pierre, 2011) propose également de prendre en compte les déformations induites par des effets thermomécaniques mais dans des systèmes hyperstatiques. Les écarts géométriques des surfaces issus de ces effets sont déterminés avec un logiciel de calcul par éléments finis. Ces écarts sont calculés sur la géométrie nominale des pièces. Les écarts de fabrication au pire des cas des surfaces sont ensuite ajoutés.

La Figure 1.26a montre le graphe d'une pièce composée de n surfaces dans une étude avec des solides infiniment rigides.

La Figure 1.26b montre le même graphe avec les écarts i,j_th calculé pour une situation de vie thermomécanique donnée. Ces écarts sont définis par les arêtes reliant les sommets $i,0$ et i,j_th ($j \in \{1; \dots; n\}$). Les écarts de fabrication sont représentés par les arêtes reliant les sommets i,j_th et i,j .

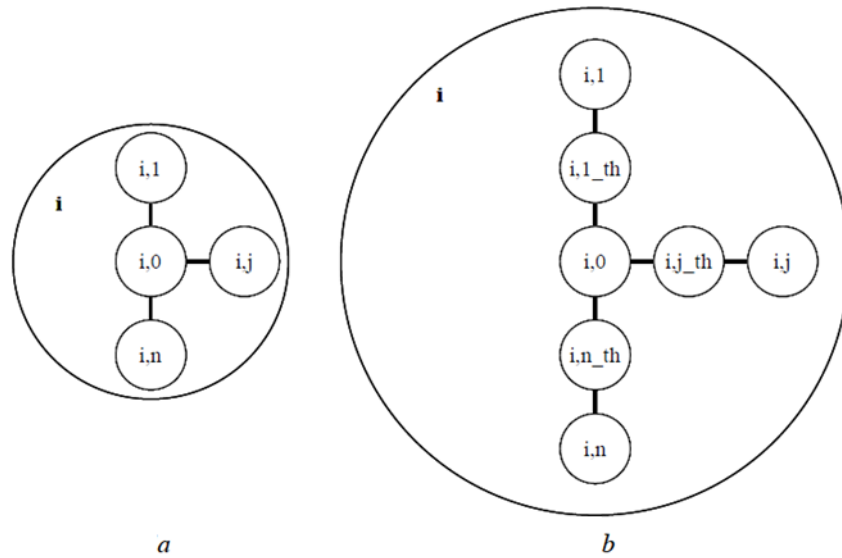


Figure I.26 – Modélisation des pièces par des graphes (Pierre, 2011)

Cette méthode permet à l'auteur de caractériser l'espace des déplacements possibles entre deux surfaces dans un environnement à chaud. Le premier exemple d'application présenté est l'assemblage d'un arbre dans un alésage.

La Figure I.27a présente les géométries des pièces sans déformation thermique. L'espace des déplacements correspondant est présenté sur la Figure I.27b. Cet espace est délimité par quatre demi-espaces issus des contraintes de contact calculées aux quatre coins de l'arbre.

La Figure I.27c présente les géométries des pièces avec l'arbre soumis à une déformation thermique. Le nouvel espace des déplacements obtenu est présenté sur la Figure I.27d. Il est délimité par sept demi-espaces issus des contraintes de contact calculées sur les sept points de l'enveloppe convexe de l'arbre.

Si l'espace des déplacements résultant est vide, un calcul par éléments finis est réalisé pour modéliser l'assemblage complet avec interférences.

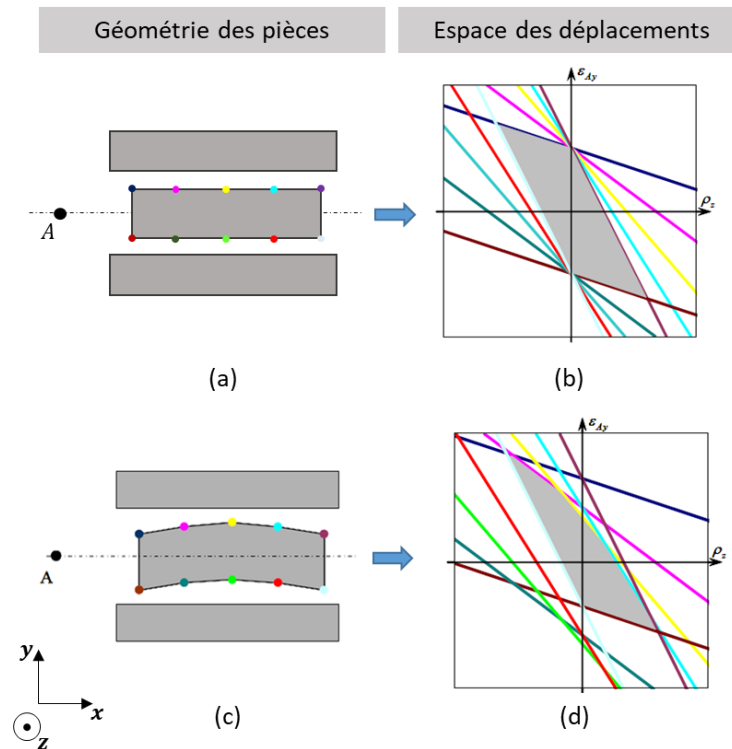


Figure I.27 – Evolution du polytope de contact de la situation de vie de référence, a et b, vers la situation de vie thermomécanique, c et d (Pierre, 2011)

D'autres études ont été réalisées sur les déformations induites par le serrage de boulons lorsque les surfaces en contact présentent des écarts de forme.

Par exemple, (Grandjean, 2013) étudie l'influence des écarts de forme sur les performances d'assemblage au regard du respect d'exigences fonctionnelles. Il met en évidence l'influence de ces écarts sur le respect d'une Condition Fonctionnelle de position entre deux pièces maintenues par un ensemble de boulons. L'auteur utilise le concept de surface écart pour identifier les zones de contact. Cette approche consiste à reporter l'ensemble des défauts des surfaces sur une seule (voir Figure I.28).

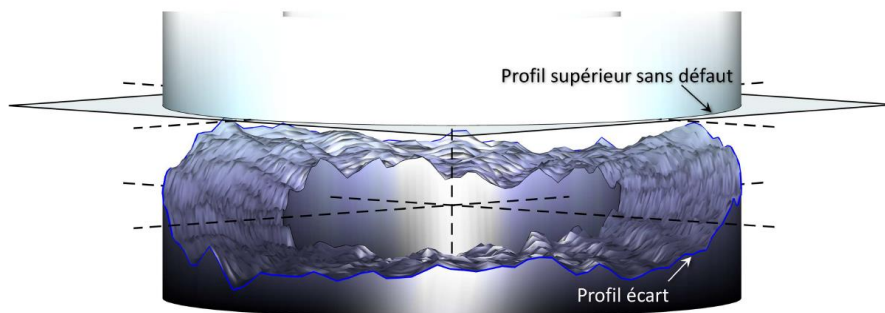


Figure I.28 – Assemblage équivalent avec le concept de surface écart (Grandjean, 2013)

Un assemblage équivalent est alors obtenu où l'ensemble des facettes de contact potentielles est donné par les caractéristiques de la surface convexe de cette surface. La facette de contact est définie en fonction de la direction des efforts de serrage appliqués sur l'assemblage pour identifier une position d'équilibre (voir Figure I.29). À partir de cette position, les déformations plastiques locales induites par le serrage des pièces sont modélisées via un modèle d'érosion (voir Figure I.30). La position finale des surfaces est déterminée par une procédure d'optimisation et les écarts résultants sont quantifiés par un torseur.

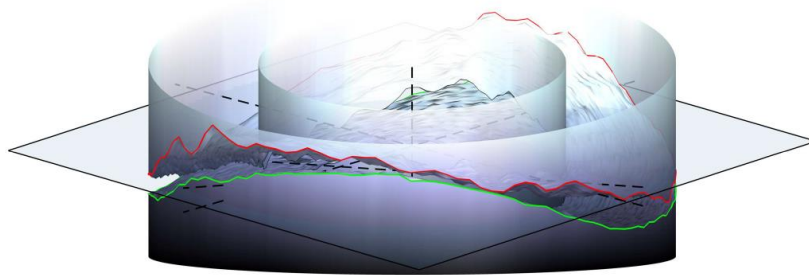


Figure I.29 – Mise en position des pièces en solide infiniment rigide en fonction de la direction des efforts de serrage (Grandjean, 2013)

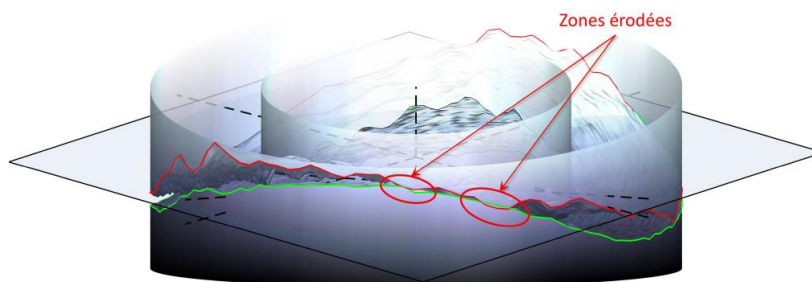


Figure I.30 – Mise en position des pièces avec le modèle d'érosion (Grandjean, 2013)

Ainsi la position relative entre les deux pièces n'est pas imposée arbitrairement, elle est déterminée via un calcul d'optimisation visant à minimiser les écarts de situation entre les deux surfaces avant application des efforts de serrage.

Cependant, même si cette méthode est pertinente lorsque l'effet des déformations locales des surfaces en contact est prépondérant sur les déformations globales des pièces, elle ne peut plus être appliquée si la raideur globale des pièces est faible devant la raideur locale des éléments de contact.

La raideur globale des pièces est prise en compte dans une analyse réalisée par (Guo, et al., 2016). Ils étudient un assemblage de deux pièces présentées sur la Figure I.31. Les pièces sont maintenues en position par un système de boulons qui n'est pas représenté sur la figure.

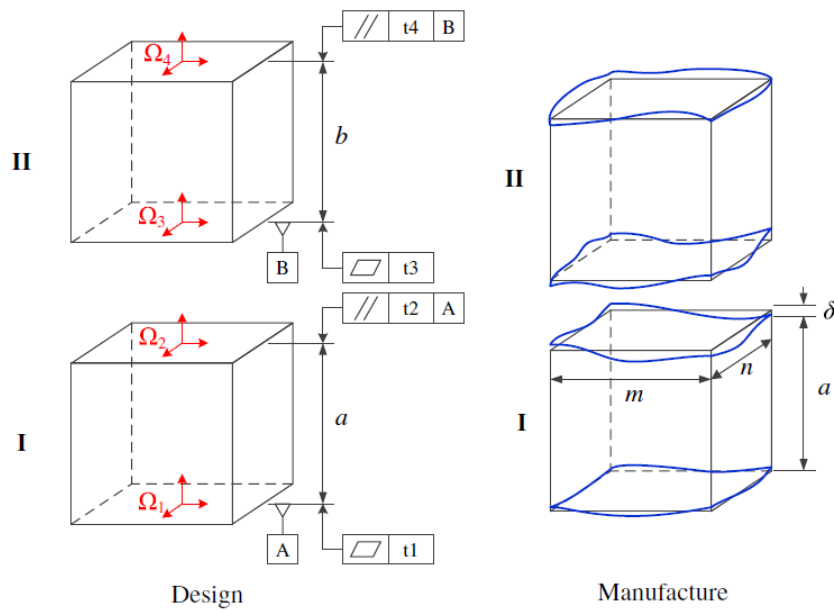


Figure I.31 – Étude de l'assemblage de deux pièces avec écarts de forme et déformation (Guo, et al., 2016)

Afin de prendre en compte la raideur globale des pièces, les auteurs réalisent une réduction de modèle en utilisant la Méthode des Coefficients d'Influence (MIC) introduite par (Liu, et al., 1995). Cette méthode permet d'établir une relation linéaire entre les écarts de forme des surfaces et les déformations dues à l'assemblage. Cette procédure suppose que les déformations restent dans le domaine élastique et que le matériau est isotrope (Guo, et al., 2016).

De plus, pour réaliser ces calculs, la surface opposée à la zone de montage a été bloquée sur chaque pièce afin d'éviter tout déplacement de corps rigides. Ceci suppose donc que les pièces soient suffisamment massives pour garantir que les déformations ne se propageront pas à ces surfaces. Enfin, contrairement à l'étude précédente, les positions relatives entre les pièces ne peuvent pas évoluer en fonction des écarts de forme des surfaces.

Enfin des outils ont été développés pour réaliser des analyses de tolérances sur des assemblages déformables. Nous pouvons, par exemple citer (Söderberg, et al., 2006) et (Falgarone, et al., 2016) qui incorporent des techniques d'éléments finis. Cette analyse peut être utilisée pour simuler le comportement d'assemblages flexibles composés de pièces souples. Ces outils permettent aux pièces et aux assemblages souples d'être évalués en étudiant leur robustesse géométrique. Les outils d'analyse permettent aux concepteurs d'évaluer et d'améliorer les différents types de mise en position, les serrages avec la prise en compte des déformations des pièces. Le principal point négatif de ces outils est que la position relative et les points de contact entre les pièces doivent être imposés par l'utilisateur.

I.4.2. Déformations issues de sollicitations internes au système

D'autres travaux ont été menés sur l'analyse des interférences de montage dans un mécanisme hyperstatique. L'objectif des auteurs est de statuer sur la montabilité du système en fonction des écarts de fabrication des surfaces. Le critère de validation de montabilité peut être de différente

nature, dans les articles que nous allons présenter les auteurs utilisent des valeurs limites de contraintes ou d'efforts admissibles.

Ainsi (Pezzuti, et al., 2005) propose de prendre en compte les déformations induites pendant l'assemblage d'un système hyperstatique composé de deux liaisons pivot glissant en parallèle présenté sur la Figure I.32.

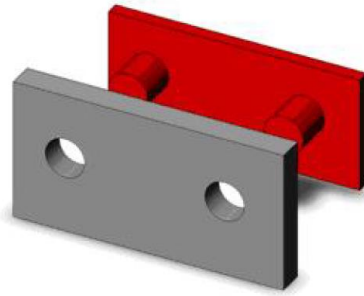


Figure I.32 – Etude de l'assemblage d'un système hyperstatique composé de deux liaisons pivot glissant (Pezzuti, et al., 2005)

Les deux plaques sont supposées infiniment rigides, seule l'inclinaison des pions est modélisée par un modèle poutre (voir Figure I.33). La contrainte induite dans un pion en fonction de son inclinaison par rapport à son support est ensuite déterminée grâce à un calcul analytique.

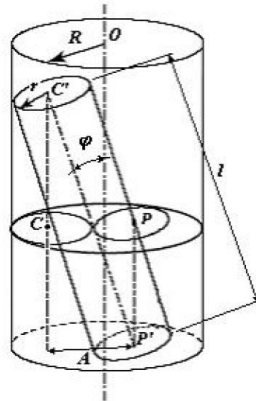


Figure I.33 – Recherche de l'inclinaison du pion pour supprimer l'interférence de montage (Pezzuti, et al., 2005)

Pour un assemblage donné, l'ensemble des solutions n'engendrant pas des contraintes supérieures à la limite imposée sont retenues. Parmi toutes ces solutions, la solution finale est celle minimisant l'énergie de déformation. Les auteurs ont ensuite réalisé une étude statistique par tirage de Monte Carlo permettant de prévoir les taux d'assemblages réalisables en infiniment rigide, avec déformation ou non acceptable (voir Figure I.34).

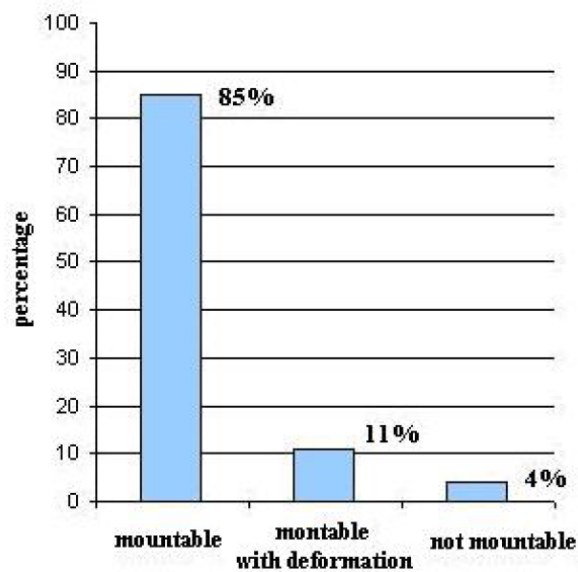


Figure I.34 – Résultat de l'étude statistique (Pezzuti, et al., 2005)

Cette étude permet de réaliser une analyse statistique avec des temps de calcul très faibles cependant son application est limitée à des cas très simple où les éléments déformables sont modélisés par des poutres. De plus l'auteur fixe la position relative entre les deux pièces. Si les mouvements entre les deux pièces étaient laissés libres, les contraintes dans les pions après montage seraient sûrement plus faibles et ainsi le taux de montage avec déformation plus élevé.

(Rouetbi, et al., 2017) proposent un modèle pour estimer l'effort d'assemblage d'un mécanisme hyperstatique composé de deux pièces. Les paramètres d'entrée de leur modèle sont les écarts de fabrication des pièces.

Le mécanisme étudié est l'assemblage d'un alésage et d'un arbre divisé en plusieurs sections. Les deux pièces sont représentées sur la Figure I.35.

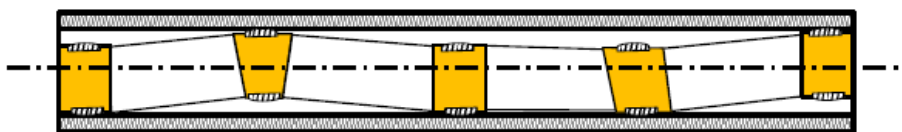


Figure I.35 – Système étudié (Rouetbi, et al., 2017)

L'arbre est modélisé par une poutre avec différentes sections. Il est ensuite inséré dans l'alésage. Ce dernier est infiniment rigide avec des contacts élastiques ponctuels au niveau de chaque zone potentiel de contact. Les écarts de fabrication de l'arbre et de l'alésage sont modélisés en imposant des conditions limites de déplacement δ_i sur la poutre. La modélisation du système est présentée sur la Figure I.36.

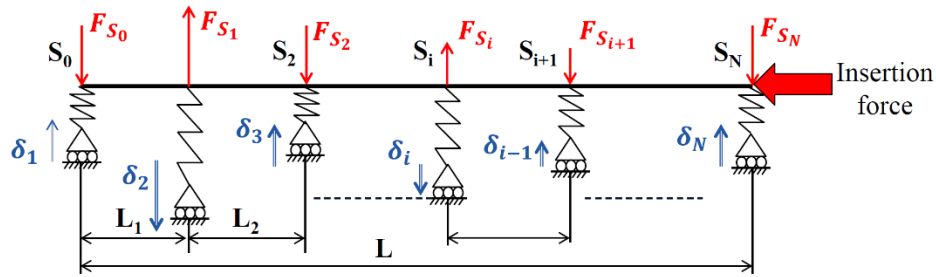


Figure I.36 – Modélisation par un modèle poutre (Rouetbi, et al., 2017)

Un « effort de montage » est ensuite estimé en déterminant l'effort nécessaire pour séparer les pièces après assemblage. Cet effort est calculé en utilisant les lois de Coulomb :

$$F_{insertion} = \mathbf{f} \times \mathbf{T} \times \boldsymbol{\delta} \quad (I-9)$$

Avec :

- \mathbf{f} : vecteur des coefficients de frottement au niveau de chaque point de contact,
- \mathbf{T} : matrice de raideur de l'arbre,
- $\boldsymbol{\delta}$: vecteur des écarts de fabrication de l'arbre et de l'alésage.

La raideur de l'arbre n'étant pas la même dans toutes les directions, la pire configuration pour l'assemblage ne correspond pas forcément à la configuration où la valeur de l'interférence est la plus élevée.

Les auteurs proposent donc de tester toutes les configurations possibles d'écarts de fabrication, autorisés par les définitions des pièces, pour déterminer laquelle mènera au plus grand effort de montage. Grâce à cette approche, ils sont capables de fixer des tolérances en faisant un compromis entre respecter un effort limite de montage et ne pas atteindre des coûts de fabrication trop élevés.

I.5. Synthèse

L'objectif de nos travaux est de développer une méthode pour réaliser des analyses de tolérances statistiques (par tirage de Monte Carlo) de systèmes hyperstatiques, avec ou sans interférence, dans des temps très courts.

Nous avons choisi de traiter ce problème en deux temps : d'un côté les assemblages avec jeu (sans interférence) et de l'autre les assemblages avec interférences.

L'analyse des assemblages sans interférence sera réalisée par la méthode des polytopes qui possède les avantages et les inconvénients suivant (Homri, 2014) :

- Les contraintes de contact sont linéarisées (Teissandier, et al., 1999; Homri, et al., 2013; Homri, et al., 2015). Cela simplifie les calculs des sommes et des intersections des écarts mais engendre aussi une imprécision (Arroyave-Tobón, et al., 2017). Cette linéarisation nous permet d'atteindre des temps de calcul très courts.
- La méthode de calcul, utilisée dans ces travaux, repose sur les deux définitions des polytopes : H-description (ensemble des demi-espaces) et V-description (ensemble des sommets) ; appelée HV-description ou double description (Ziegler, 1995). L'utilisation simultanée de ces deux définitions permet de conserver les liens topologiques entre les sommets et les facettes des polytopes qui correspondent respectivement aux déplacements extrémaux entre les deux surfaces du mécanisme étudié et aux contraintes de contact. Nous reviendrons sur cette propriété plus loin dans ce manuscrit.
- Les polytopes étant par définition des ensembles bornés, des demi-espaces bouchons doivent être utilisés pour borner les écarts de situation des surfaces correspondant à des degrés d'invariance (Homri, 2014).
- Les polytopes étant convexes et bornés, nous pourrions vérifier la satisfaction d'une Condition Fonctionnelle en testant l'inclusion du polytope du mécanisme dans le polytope fonctionnel.

Pour l'analyse des assemblages avec interférences, nous allons mettre en place un modèle qui permet de simuler les déformations des pièces pendant l'assemblage.

Afin de réaliser nos calculs dans des temps très courts, nous reprendrons la proposition de (Guo, et al., 2016) en réduisant la taille du système analysé. Cependant, nous ne pouvons pas appliquer directement leur approche car des Conditions Limites sont imposées pour bloquer les déplacements et empêcher les déformations des pièces loin de la zone d'assemblage. Dans notre cas, il est important de laisser libre les déplacements relatifs entre les pièces car dans un système hyperstatique, la hiérarchisation des contacts dépend des écarts de fabrication des pièces. Ainsi pour chaque nouvel assemblage simulé, les contacts et la mise en position entre les pièces sont uniques. Dans la suite, nous réaliserons une réduction de chaque pièce aux éléments de contact par la méthode des super-éléments. Cependant, au lieu de manipuler leurs matrices de souplesse des pièces comme (Guo, et al., 2016), nous manipulerons les matrices de raideur afin de ne pas avoir besoin d'imposer de conditions pour bloquer les pièces. Cette approche sera détaillée dans le Chapitre III.

La Condition de Montage sera vérifiée en appliquant la méthode proposée par (Rouetbi, et al., 2017) qui consiste à définir un effort limite au-delà duquel l'assemblage est considéré non réalisable.

Enfin nous utiliserons l'approche du Skin Model Shapes pour analyser les propagations des déformations dans les pièces qui sont induites par l'assemblage. En effet, les déformations des pièces qui permettent de réaliser l'assemblage peuvent générer des déplacements et des déformations de surfaces loin de la zone d'assemblage. Afin de vérifier que cela ne nuit pas au respect des Conditions

Fonctionnelles de l'assemblage, les surfaces fonctionnelles seront discrétisées en un nombre fini de nœuds et le déplacement de chaque nœud dû au montage sera calculé. Cette approche nous permettra de vérifier facilement le respect d'une Condition Fonctionnelle d'un assemblage avec déformation.

Chapitre II. Analyse de tolérances par la méthode des polytopes

II.1. Introduction

Dans cette partie, nous allons expliquer comment appliquer la méthode des polytopes dans une analyse de tolérances.

Un polytope géométrique caractérise les écarts géométriques entre deux surfaces d'une même pièce. Un polytope de contact caractérise les écarts entre deux surfaces potentiellement en contact. La propagation de ces écarts au travers du mécanisme est ensuite déterminée en réalisant des opérations sur ces ensembles au travers d'intersections et de sommes de Minkowski.

L'analyse du polytope résultant du mécanisme permet ensuite de conclure sur le respect d'une Condition de Montage et d'une Condition Fonctionnelle.

A la fin de ce chapitre, nous présenterons une méthode générique d'analyse de tolérances statistique d'un mécanisme hyperstatique.

Dans toute cette partie, les hypothèses suivantes sont faites :

- Les pièces sont infiniment rigides, nous ne considérons ni les déformations locales des surfaces en contact (pression de Hertz), ni les déformations globales des structures des pièces.
- Les écarts de forme des surfaces sont négligeables devant les jeux locaux des surfaces potentiellement en contact.
- Les écarts géométriques et de contact sont suffisamment faibles pour travailler en hypothèse de petits déplacements (les rotations sont linéarisées).

II.2. Définition et paramétrage d'un ensemble de contraintes

Afin de maîtriser les écarts géométriques des surfaces, trois types de spécifications sont utilisées (Charpentier, 2012) :

- Spécification dimensionnelle (ISO14405-1, 2010; ISO14405-2, 2011),
- Spécification par zone (ISO1101, 2017; ISO5459, 2011),
- Spécification par gabarit (ISO2692, 2014).

Une spécification dimensionnelle permet de limiter les écarts dimensionnels d'une surface et une spécification par zone limite les écarts de situation d'une surface.

Une spécification par gabarit est une condition sur une dimension définie par une caractéristique au moyen d'opérations sur des éléments géométriques, identifiés à partir du Skin Model. Un gabarit génère une interdépendance entre la dimension et la géométrie d'une surface. Comme exemple de spécification par gabarit, nous pouvons citer l'exigence du minimum de matière (modificateur \textcircled{L}) et du maximum de matière (modificateur \textcircled{M}). Elles sont généralement utilisées pour garantir, respectivement, des exigences de jeu maximal et de jeu minimal.

II.2.1. Ensemble de contraintes géométriques d'une surface

Considérons l'exemple d'une surface nominale $i,0$ présenté dans (Teissandier, 1995) et appartenant à la classe des surfaces complexes (Hervé, 1975). La Zone de Tolérance ZT est construite en réalisant deux décalages de la surface nominale des valeurs d_{inf} et d_{sup} selon le principe défini par (Requicha, 1983). Pour être conforme à la définition, la surface de substitution i,j , associée à la surface réelle, doit être incluse dans la Zone de Tolérance ZT (voir Figure II.1). La surface $i,0$ est discrétisée en k_{max} points de discrétisation N_k . La condition d'inclusion de la surface i,j dans la Zone de Tolérance s'écrit alors :

$$i, 1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_k \in i, 0 : d_{inf} \leq \mathbf{t}_{N_k-i,j/i,0} \cdot \mathbf{n}_k \leq d_{sup} \quad (II-1)$$

Avec :

- N_k : point de discrétisation de la surface $i,0$
- $\mathbf{t}_{N_k-i,j/i,0}$: vecteur écart en translation de la surface i,j par rapport à sa géométrie nominale $i,0$ au point N_k
- \mathbf{n}_k : vecteur unitaire, normal à la surface $i,0$ au point N_k , et orienté côté extérieur matière

L'équation (II-1) permet de garantir l'inclusion de tout point N_k dans la Zone de tolérance au pire des cas.

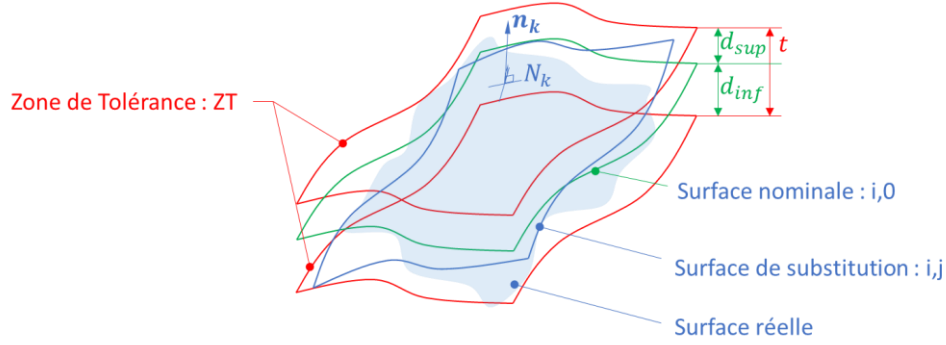


Figure II.1 – Contraintes géométriques d'une surface quelconque (Teissandier, 1995)

Les contraintes géométriques d'une surface peuvent être exprimées en tout point M de l'espace euclidien en utilisant la propriété des champs des petits déplacements (Bourdet & Clément, 1988; Ballot & Bourdet, 1996) :

$$\mathbf{t}_{N_k-i,j/i,0} = \mathbf{t}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{i,j/i,0} \quad (II-2)$$

Avec $\mathbf{r}_{i,j/i,0}$: vecteur écart en rotation de la surface i,j par rapport à sa géométrie nominale $i,0$.

Il vient :

$$(II-1) \text{ et } (II-2) \rightarrow i,j \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_k \in i,0 : d_{inf} \leq (\mathbf{t}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_k \leq d_{sup} \quad (II-3)$$

La relation (II-3) peut se diviser en deux inégalités :

$$(II-3) \rightarrow i,j \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_k \in i,0 : \begin{cases} d_{inf} \leq (\mathbf{t}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_k \\ (\mathbf{t}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_k \leq d_{sup} \end{cases} \quad (II-4)$$

Nous définissons les composantes des vecteurs suivants dans la base (x, y, z) :

$$\mathbf{t}_{M-i,j/i,0} \begin{pmatrix} t_{M-i,j/i,0x} \\ t_{M-i,j/i,0y} \\ t_{M-i,j/i,0z} \end{pmatrix}, \mathbf{N}_k \begin{pmatrix} x_{Nk} \\ y_{Nk} \\ z_{Nk} \end{pmatrix}, \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \mathbf{n}_k \begin{pmatrix} n_{kx} \\ n_{ky} \\ n_{kz} \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{r}_{i,j/i,0} \begin{pmatrix} r_{i,j/i,0x} \\ r_{i,j/i,0y} \\ r_{i,j/i,0z} \end{pmatrix}$$

Les inéquations de la relation (II-4) permettent de décrire la H-description d'un polyèdre de \mathbb{R}^6 (Ziegler, 1995). k_{max} demi-espaces \bar{H}_{2k-1}^+ et \bar{H}_{2k}^+ sont définis avec $1 \leq k \leq k_{max}$.

$$(II-4) \rightarrow \begin{cases} \bar{H}_{2k-1}^+ : -(\mathbf{t}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_k \leq -d_{inf} \\ \bar{H}_{2k}^+ : (\mathbf{t}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_k \leq d_{sup} \end{cases} \quad (II-5)$$

On pose :

$$\bar{H}_l^+ : (-1)^l \cdot (b_l(j) + a_{l1}(j) \cdot x_1 + a_{l2}(j) \cdot x_2 + a_{l3}(j) \cdot x_3 + a_{l4}(j) \cdot x_4 + a_{l5}(j) \cdot x_5 + a_{l6}(j) \cdot x_6) \geq 0 \quad (II-6)$$

Avec :

$$a_{l1} = (z_{Nk} - z_M) \cdot n_{ky} - (y_{Nk} - y_M) \cdot n_{kz} \quad x_1 = r_{i,j/i,0x}$$

$$a_{l2} = (x_{Nk} - x_M) \cdot n_{kz} - (z_{Nk} - z_M) \cdot n_{kx} \quad x_2 = r_{i,j/i,0y}$$

$$a_{l3} = (y_{Nk} - y_M) \cdot n_{kx} - (x_{Nk} - x_M) \cdot n_{ky} \quad x_3 = r_{i,j/i,0z}$$

$$a_{l4} = -n_{kx} \quad x_4 = t_{M-i,j/i,0x}$$

$$a_{l5} = -n_{ky} \quad x_5 = t_{M-i,j/i,0y}$$

$$a_{l6} = -n_{kz} \quad x_6 = t_{M-i,j/i,0z}$$

$$b_l = d_l \text{ avec } \begin{cases} d_l = d_{sup} \text{ si } l = 2k \\ d_l = d_{inf} \text{ si } l = 2k - 1 \end{cases}$$

\bar{H}_l^+ est un demi-espace ouvert positif qui représente l'espace possible des déplacements du point N_k appartenant à la surface i,j par rapport à $i,0$ suivant le vecteur \mathbf{n}_k .

En opposition, \bar{H}_l^- est un demi-espace ouvert négatif qui représente l'espace des déplacements du point N_k de la surface i,j par rapport à $i,0$ suivant le vecteur \mathbf{n}_k en dehors de la Zone de Tolérance :

$$\bar{H}_l^- : (-1)^l \cdot (b_l(j) + a_{l1}(j) \cdot x_1 + a_{l2}(j) \cdot x_2 + a_{l3}(j) \cdot x_3 + a_{l4}(j) \cdot x_4 + a_{l5}(j) \cdot x_5 + a_{l6}(j) \cdot x_6) \leq 0 \quad (II-7)$$

Ces demi-espaces sont représentés sur la Figure II.2 avec :

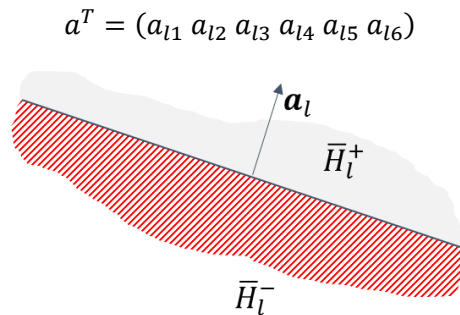


Figure II.2 – Illustration de demi-espaces associés à un hyperplan dans \mathbb{R}^3 (Homri, 2014)

L'intersection des $2 \cdot k_{max}$ demi-espaces \bar{H}_l^+ définit le polyèdre géométrique P de \mathbb{R}^6 de la surface $1,j$.

$$P = \bigcap_{l=1}^{2 \cdot k_{max}} \bar{H}_l^+ \quad (II-8)$$

Les variables x_d ($1 \leq d \leq 6$) sont les écarts de situation de la surface i,j par rapport à sa géométrie nominale $i,0$.

a_{ld} ($1 \leq l \leq 2.k_{max}$ et $1 \leq d \leq 6$) dépendent uniquement de la géométrie nominale de la pièce i .

b_l ($1 \leq l \leq 2.k_{max}$) dépend de la dimension de la zone de tolérance associée à la surface i,j .

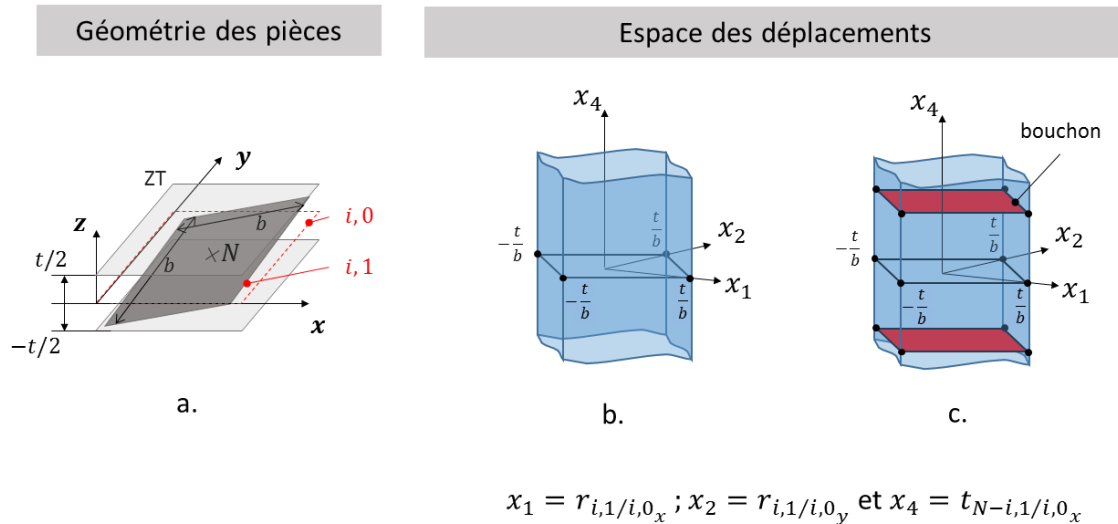
Le polytope géométrique de la surface i,j sera nommé dans la suite $P_{i,j}$ avec :

$$P_{i,j} = \bigcap_{l=1}^{2.k_{max}} \bar{H}_l^+(j) \text{ et}$$

$$\bar{H}_l^+(j) : b_l(j) + a_{l1}(j).x_1 + a_{l2}(j).x_2 + a_{l3}(j).x_3 + a_{l4}(j).x_4 + a_{l5}(j).x_5 + a_{l6}(j).x_6 \geq 0 \text{ (II-9)}$$

Un polytope géométrique est défini comme un polyèdre géométrique borné. Le polyèdre, P , défini par l'équation (II-8) est généralement non borné, car la surface étudiée possède souvent des degrés d'invariance (Clément, et al., 1998). Ce polyèdre n'est donc pas un polytope de \mathbb{R}^6 .

(Homri, et al., 2015) proposent de borner ce polyèdre en ajoutant deux demi-espaces bouchons par degrés de liberté.



$$x_1 = r_{i,1/i,0_x}; x_2 = r_{i,1/i,0_y} \text{ et } x_4 = t_{N-i,1/i,0_x}$$

Figure II.3 – Déplacement non borné suivant x_4 et adjonction de demi-espaces bouchons associés (Homri, 2014)

Sur la Figure II.3a la surface nominale plane S_1 est contrainte par deux plans distants d'une valeur t et perpendiculaires à l'axe z . L'écart de S_1 par rapport à sa géométrie nominale est non borné en translation suivant x . Le polyèdre géométrique de la surface S_1 est donc non borné suivant t_{N-x} (Figure II.3b) et deux demi-espaces bouchons sont ajoutés pour définir le polytope géométrique de S_1 . Ces demi-espaces bouchons sont représentés en rouge sur la Figure II.3c, la valeur du coefficient C choisie est suffisamment grande pour que ces demi-espaces ne modifient pas les résultats de l'analyse de tolérances.

Le polytope $P_{i,j}$ défini par l'équation (II-9) correspond à l'ensemble des écarts géométriques de la surface i,j autorisés par sa tolérance. Ce polytope est utilisé pour réaliser des analyses de tolérances au pire des cas.

Dans une analyse statistique, lorsque les écarts géométriques des surfaces sont issus de tirages de Monte Carlo, le polytope géométrique $P_{i,j}$ est un sommet de \mathbb{R}^6 (un polytope de dimension 0) dont les coordonnées sont égales aux écarts de situation de la surface définis par l'opérateur $s_{i,j/i,0}$.

Pour chaque tirage, $P_{i,j}$ est alors défini par :

$$P_{1,j} = \begin{pmatrix} t_{M-i,j/i,0_x} \\ t_{M-i,j/i,0_y} \\ t_{M-i,j/i,0_z} \\ r_{i,j/i,0_x} \\ r_{i,j/i,0_y} \\ r_{i,j/i,0_z} \end{pmatrix} \quad (II-10)$$

Reprenons l'exemple de la surface plane de la Figure II.3. Le polytope de $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_6)$ au pire des cas est représenté sur la Figure II.4. Des polytopes géométriques générés par tirages de Monte Carlo sont des sommets inclus dans le polytope au pire des cas. La répartition de ces tirages dépend du type de lois de distribution utilisées. Par exemple, si nous utilisons une loi normale, la densité de la population sera plus grande au centre du polytope au pire des cas et plus faible vers ses frontières (voir Figure II.4).

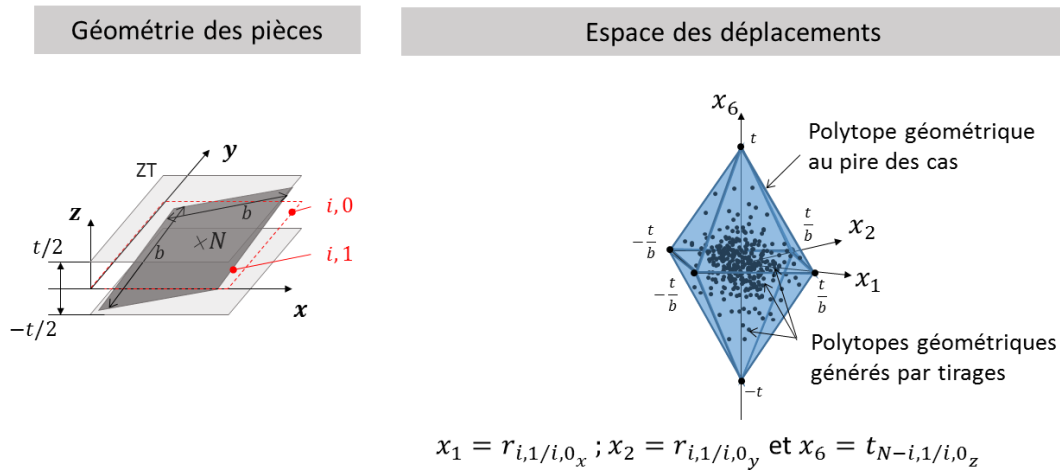


Figure II.4 – Génération de polytope géométrique par tirage de Monte Carlo suivant une loi normale

II.2.2. Ensemble de contraintes de contact

Les conditions de non-interférence des surfaces potentiellement en contact sont caractérisées par des contraintes de contact. La définition générale d'un ensemble de contraintes de contact peut être exprimée par :

$$\forall N_k \in E_c: t_{N_k-1,j/2,j} \cdot \mathbf{n}_k \leq d_k \quad (II-11)$$

Avec :

- E_c : élément de contact pouvant être défini par une surface, une ligne ou un point,
- N_k : point de discrétisation d'un élément de contact E_c ,
- $\mathbf{t}_{N_k-1,j/2,j}$: vecteur écart en translation de la surface 1,j par rapport à la surface 2,j au point N_k ,
- \mathbf{n}_k : vecteur unitaire, normal au plan tangent à l'élément de contact E_c , et orienté côté extérieur matière de la surface 1,j,
- d_k : distance locale au point N_k suivant le vecteur \mathbf{n}_k entre les surfaces 1,j et 2,j (voir Figure II.5).

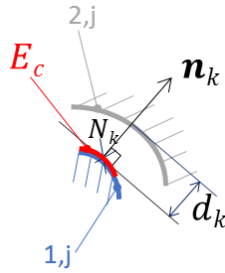


Figure II.5 – Élément de contact entre les surfaces 1,j et 2,j

Comme dit dans la partie I.2.1.2, un élément de contact est l'élément composé de tous les points possibles de contact entre les deux surfaces.

En utilisant le torseur des petits déplacements, l'équation (II-11) peut être écrite pour tout point M de l'espace Euclidien (Bourdet, Mathieu, Lartigue, & Ballu, 1996) :

$$\forall N_k \in E_c: (\mathbf{t}_{M-1,j/2,j} + \mathbf{N}_k \mathbf{M} \times \mathbf{r}_{1,j/2,j}). \mathbf{n}_k \leq d_k \quad (II-12)$$

Où :

- $\mathbf{r}_{1,j/2,j}$: vecteur rotation de la surface 1,j par rapport à la surface 2,j,
- $\mathbf{t}_{M-1,j/2,j}$: vecteur translation de la surface 1,j par rapport à la surface 2,j au point M .

Comme pour les contraintes géométriques, nous définissons les composantes des vecteurs suivants dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$:

$$\mathbf{t}_{M-1,j/2,j} \begin{pmatrix} t_{M-1,j/2,j_x} \\ t_{M-1,j/2,j_y} \\ t_{M-1,j/2,j_z} \end{pmatrix}, \mathbf{N}_k \begin{pmatrix} x_{Nk} \\ y_{Nk} \\ z_{Nk} \end{pmatrix}, \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \mathbf{n}_k \begin{pmatrix} n_{kx} \\ n_{ky} \\ n_{kz} \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{r} \begin{pmatrix} r_{1,j/2,j_x} \\ r_{1,j/2,j_y} \\ r_{1,j/2,j_z} \end{pmatrix}$$

L'équation (II-12) permet de décrire la H-description d'un polyèdre de \mathbb{R}^6 (Ziegler, 1995). k_{max} demi-espaces \bar{H}_k^+ sont définis avec $1 \leq k \leq k_{max}$ et leur intersection permet de construire le polyèdre P de \mathbb{R}^6 .

$$P = \bigcap_{k=1}^{k_{max}} \bar{H}_k^+ \quad (II-13)$$

Avec :

$$\bar{H}_k^+ : b_k(j) + a_{k1}(j).x_1 + a_{k2}(j).x_2 + a_{k3}(j).x_3 + a_{k4}(j).x_4 + a_{k5}(j).x_5 + a_{k6}(j).x_6 \geq 0$$

$$a_{k1} = (z_{Nk} - z_M).n_{ky} - (y_{Nk} - y_M).n_{kz} \quad x_1 = r_{1,j/2,j_x}$$

$$a_{k2} = (x_{Nk} - x_M).n_{kz} - (z_{Nk} - z_M).n_{kx} \quad x_2 = r_{1,j/2,j_y}$$

$$a_{k3} = (y_{Nk} - y_M).n_{kx} - (x_{Nk} - x_M).n_{ky} \quad x_3 = r_{1,j/2,j_z}$$

$$a_{k4} = -n_{kx} \quad x_4 = t_{M-1,j/2,j_x}$$

$$a_{k5} = -n_{ky} \quad x_5 = t_{M-1,j/2,j_y}$$

$$a_{k6} = -n_{kz} \quad x_6 = t_{M-1,j/2,j_z}$$

$$b_k = d_k$$

Les variables x_d ($1 \leq d \leq 6$) sont les écarts de situation de 1,j par rapport à 2,j.

a_{kd} ($1 \leq k \leq k_{max}$ et $1 \leq d \leq 6$) dépendent uniquement des géométries nominales des pièces 1 et 2.

b_k ($1 \leq k \leq k_{max}$) dépend des écarts dimensionnels des surfaces 1,j et 2,j. Si l'analyse est réalisée au pire des cas, b_k est calculé à partir des tolérances dimensionnelles des surfaces. Pour une analyse stochastique, elle est déterminée à partir d'écarts issus de tirages de Monte Carlo.

Le polytope de contact entre les surfaces 1,j et 2,j est nommé P_j avec :

$$P_j = \bigcap_{k=1}^{k_{max}} \bar{H}_k^+(j) \text{ et}$$

$$\bar{H}_k^+ : b_k(j) + a_{k1}(j).x_1 + a_{k2}(j).x_2 + a_{k3}(j).x_3 + a_{k4}(j).x_4 + a_{k5}(j).x_5 + a_{k6}(j).x_6 \geq 0$$

De façon analogue aux polytopes géométriques (cf partie II.2.1) deux demi-espaces bouchons, par degré de liberté de la liaison (Clément, Rivière, Serré, & Valade, 1998), sont ajoutés au polyèdre P_j pour borner le système (Lazhar Homri et al., 2015).

II.2.3. Caractérisation d'un ensemble de contraintes par un polytope en HV-description

Un polytope de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n qui, d'après le théorème de Minkowski-Weyl, peut être présenté de façon équivalente comme un H-polytope ou un V-polytope (Fukuda & Rosta, 1994; Ziegler, 1995; Fukuda, 2004; Weibel, 2007).

Un H-polytope de \mathbb{R}^n est l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés de \mathbb{R}^n (voir Figure II.6b). Les parties II.2.1 et II.2.2 ont permis de montrer le calcul d'un H-polytope.

Un V-polytope de \mathbb{R}^n est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de \mathbb{R}^n (voir Figure II.6c). Grâce au logiciel Politopix, il est possible de déterminer la V-description d'un polytope à partir de sa H-description en utilisant un algorithme de troncature. Cet algorithme permet d'identifier les générateurs de chaque facette d'un polytope résultant d'opérations d'intersection (Delos &

Teissandier, 2015b; Teissandier et al., 1999; Ziegler, 1995). Inversement, la H-description d'un polytope peut être obtenue à partir de sa V-description en utilisant l'enveloppe convexe des points.

Ces deux définitions sont équivalentes et peuvent être utilisées séparément pour décrire la topologie d'un polytope. Dans la suite, nous utiliserons une définition duale des polytopes appelée HV-description qui regroupe la H et la V-description (voir Figure II.6d). C'est cette définition qui permet de conserver la traçabilité entre les sommets et les demi-espaces d'un polytope.

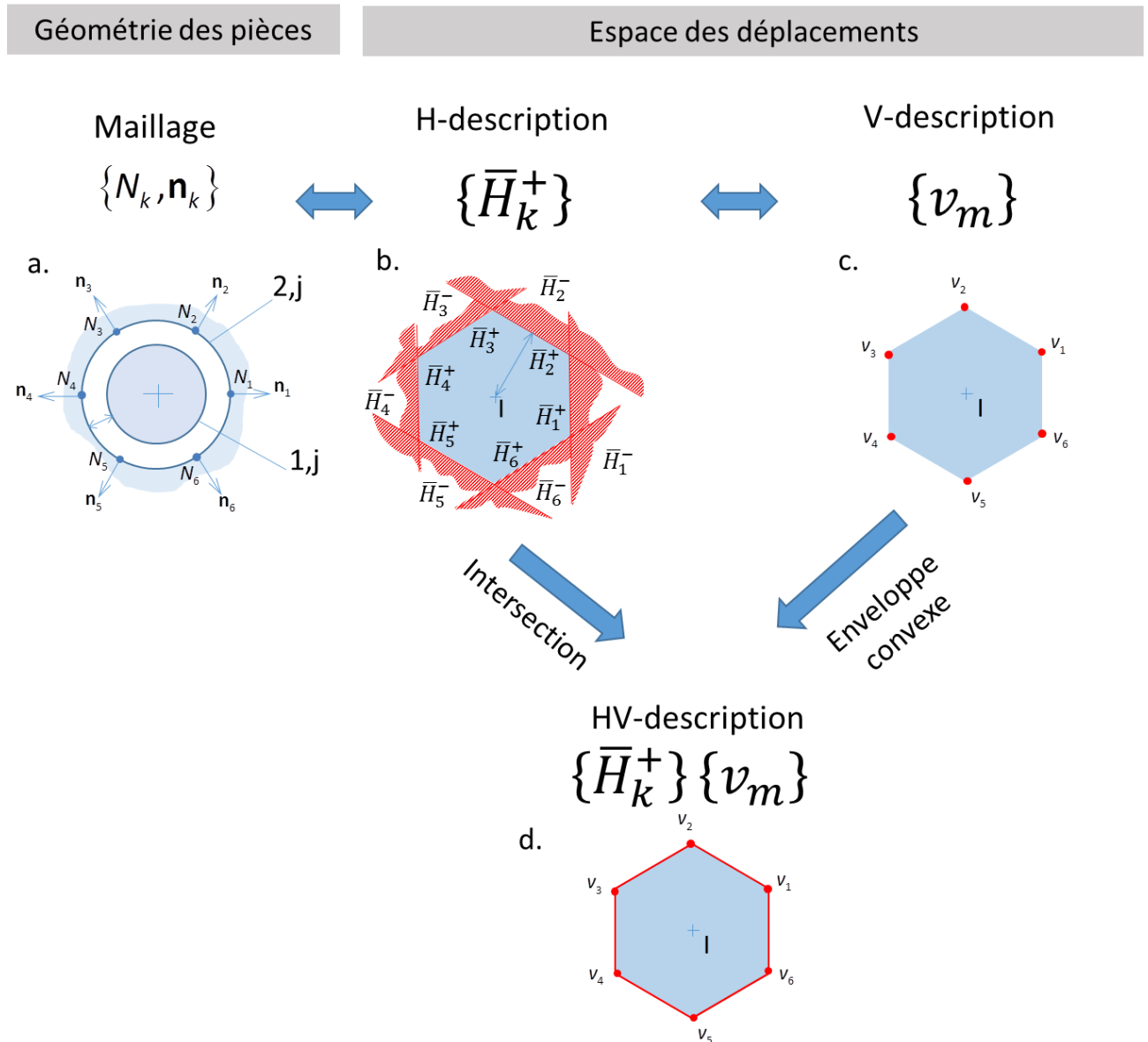


Figure II.6 – a. Modèle CAO, b. H-description d'un polytope, c. V-description d'un polytope, d. HV-description d'un polytope

La Figure II.7 présente la méthode que nous utilisons pour caractériser une HV-description. Comme montré dans la section II.2.2, dans un premier temps, les éléments de contact sont discrétisés en k points (Figure II.7a).

En chaque point de discrétisation N_k , une contrainte de contact est calculée suivant le vecteur directeur \mathbf{n}_k normal à l'élément de contact. Chaque contrainte correspond à un demi-espace dans l'espace des déplacements. L'ensemble de ces demi-espaces caractérise la H-description du polytope (Figure II.7b).

L'ensemble des sommets du polytope est ensuite déterminé à partir de la H-description. Nous obtenons ainsi la HV-description du polytope (Figure II.7c).

La HV-description permet de caractériser avec précision les écarts de situation entre deux surfaces potentiellement en contact. Les écarts de situation extrémaux entre deux surfaces correspondent aux coordonnées des sommets du polytope. Chaque sommet est généré par l'intersection de plusieurs demi-espaces. Puisque nous utilisons une définition duale des polytopes, nous savons exactement quels demi-espaces génèrent chaque sommet.

Sur l'exemple de la Figure II.7d nous mettons en évidence un sommet v_1 généré par l'intersection de deux demi-espaces. Ces deux demi-espaces \bar{H}_1^+ et \bar{H}_2^+ (Figure II.7e) sont issus de deux contraintes de contact calculées aux points N_1 et N_2 suivant les vecteurs \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 (Figure II.7f). Les écarts de situation décrits par le sommet v_1 apparaissent lorsque les surfaces sont en contact entre les points N_1 et N_2 . Cette propriété peut, par exemple, être exploitée pour analyser les assemblages qui ne respectent pas une condition de position ou d'orientation entre deux surfaces. A partir de la HV-description, nous pouvons déterminer avec précision quelles sont les positions relatives entre les pièces qui génèrent des non-conformités. Il est alors plus facile de connaître les zones à retoucher pour obtenir un assemblage conforme.

La traçabilité de la HV-description est également utile dans l'analyse et la correction des interférences de montage. Nous montrerons un exemple d'application dans la partie II.6 située à la fin de ce chapitre.

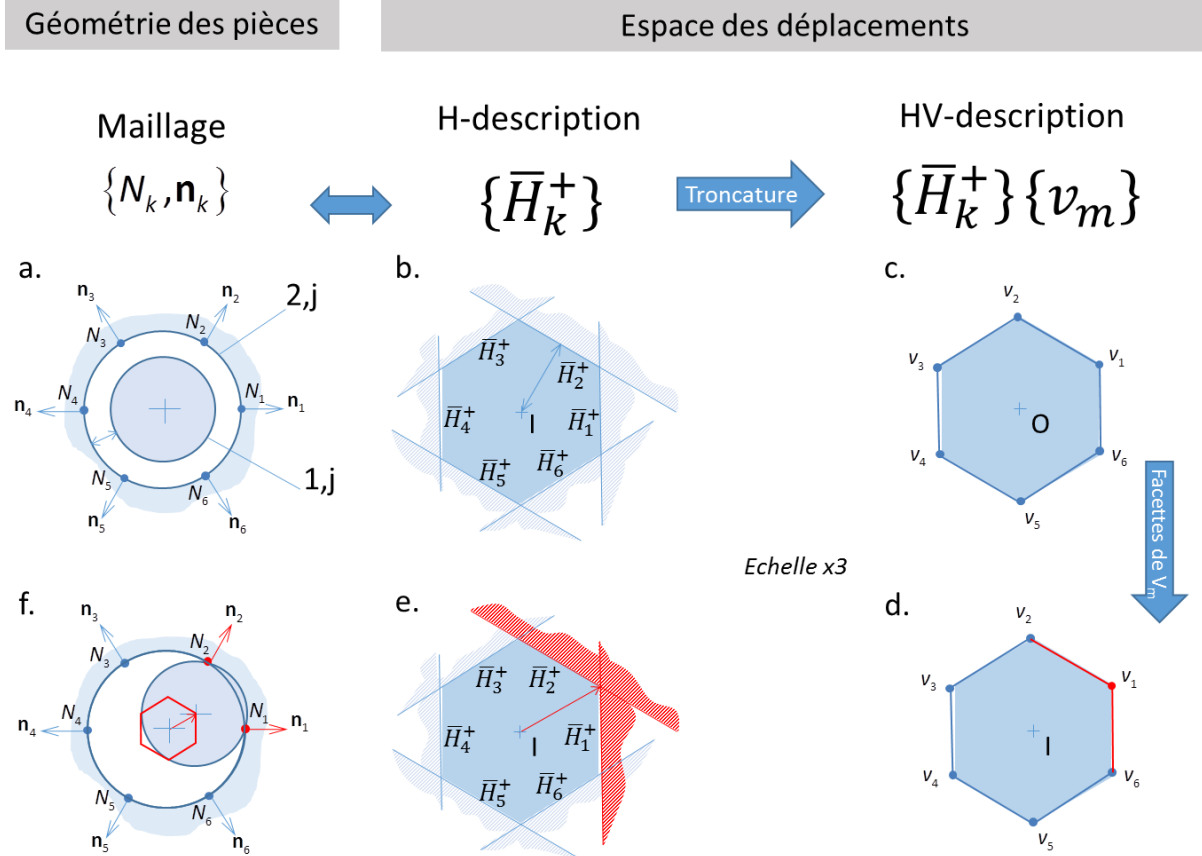


Figure II.7 – Caractérisation d'un ensemble de contraintes par un polytope en HV-description

II.2.4. Précision du calcul des contraintes

Afin de faciliter la mise en œuvre des opérations sur les ensembles de contraintes, celles-ci sont linéarisées. Pour cela, les contraintes sont caractérisées en un nombre fini de points. Cette discrétisation impacte la précision de la simulation des conditions de non-interférence et de position / orientation entre deux surfaces. Plus la discrétisation est fine, plus les résultats seront précis. Cependant si le nombre de points est trop important, les temps de calcul seront très élevés pour un gain en précision incohérent avec les capacités des moyens de production et des moyens de mesures disponibles.

Dans cette partie, nous allons présenter une approche pour déterminer le nombre de points de discrétisation juste nécessaire pour atteindre une précision donnée. Cette approche est présentée sur le cas particulier d'une liaison linéaire annulaire entre un arbre et un alésage mais nous pourrions reconduire cette analyse sur d'autres types de liaison. Les écarts géométriques des surfaces sont issus de tirages de Monte Carlo.

Dans le cas d'une liaison linéaire annulaire, la discrétisation de l'élément de contact retarde la détection du contact entre deux surfaces (voir Figure II.8). Le polytope de la liaison caractérise un espace de déplacements supérieur à l'espace non discrétisé.

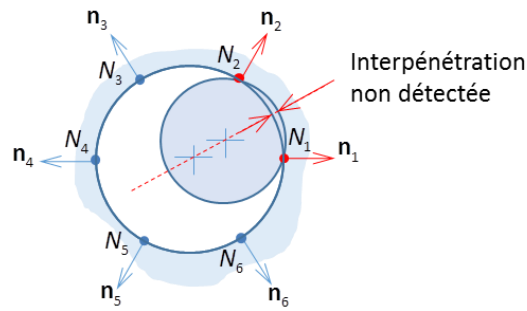


Figure II.8 – Interpénétration non détectée entre un pion et un alésage

L'erreur commise correspond au coefficient de déflexion entre les contraintes de contact quadratiques (sans discrétisation) et les contraintes linéarisées (avec discrétisation). La Figure II.9a montre l'élément de contact d'une liaison linéaire annulaire discrétisé en six points equirépartis et la Figure II.9b présente les contraintes calculées sur les mêmes éléments sans discrétisation (Giordano, et al., 1992) Le coefficient de déflexion, c_d , entre les deux ensembles est représenté sur la Figure II.9c.

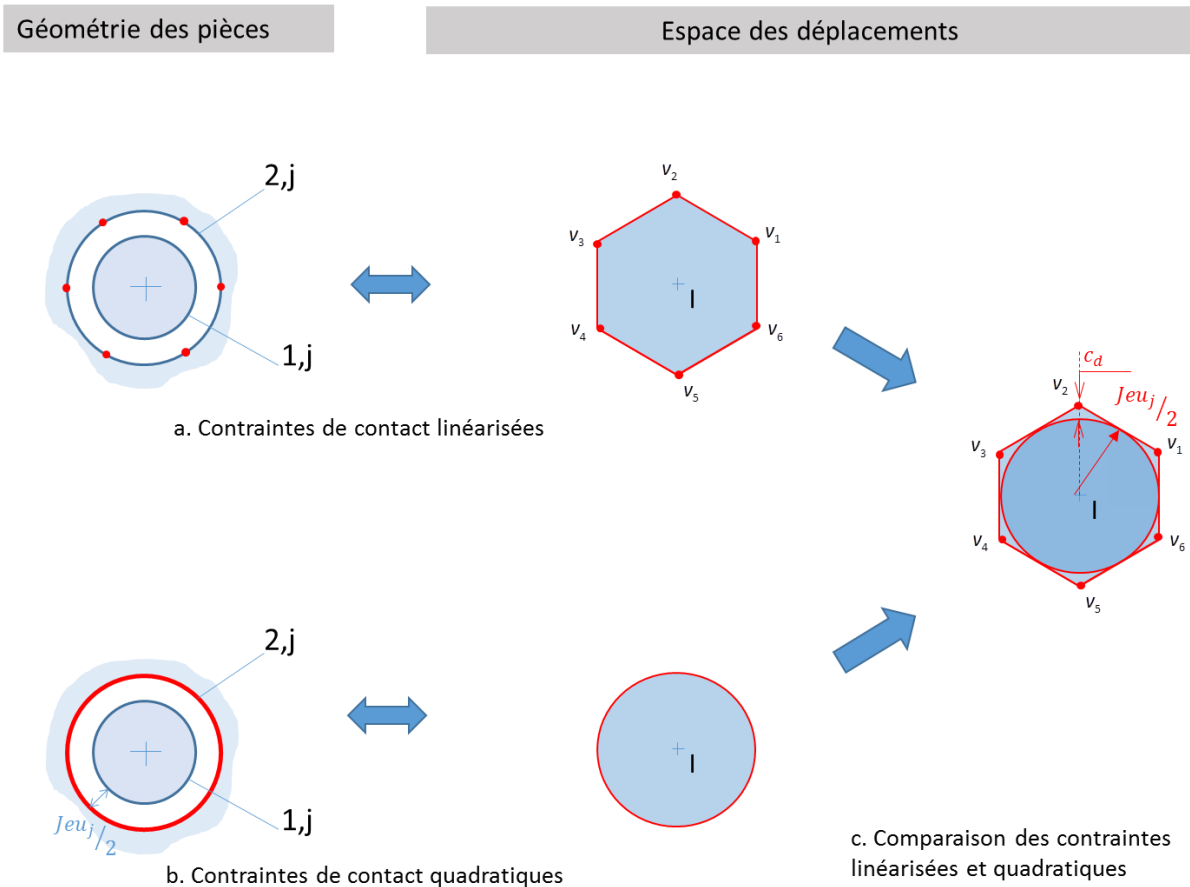


Figure II.9 – Comparaison des contraintes de contact linéarisées et quadratiques

Les contraintes de contact linéarisées (calculées avec discrétisation) sont circonscrites aux contraintes de contact quadratiques (sans discrétisation). Plus le nombre de points de discrétisation est faible, plus le volume du polytope sera grand (voir Figure II.10). Il est alors possible de conclure

qu'un assemblage est réalisable sans interférence, alors qu'en réalité des interférences sont présentes.

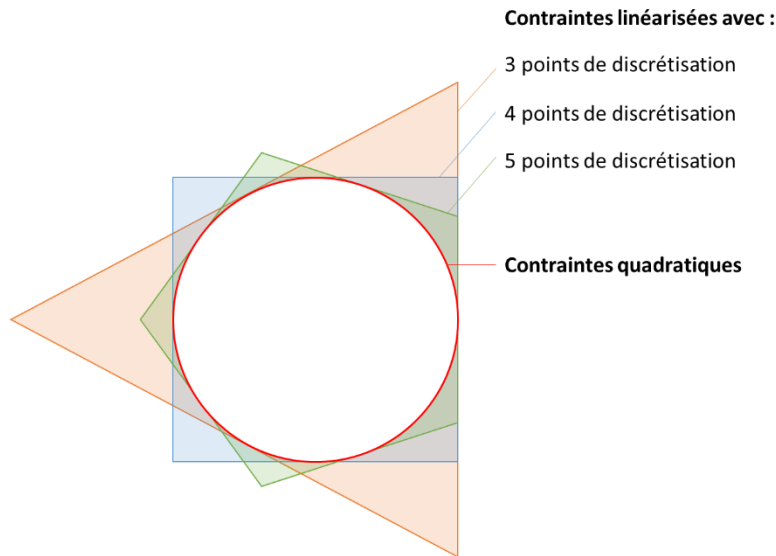


Figure II.10 – Variation de volume d'un polytope résultant en fonction du nombre de points de discrétisation

De plus, la discrétisation a un impact sur la précision de l'analyse du respect d'une condition fonctionnelle. Reprenons l'exemple de la Figure II.9, l'objectif est de maîtriser le déplacement de l'arbre par rapport à l'alésage. L'extrémum de ce déplacement est donné par le sommet le plus éloigné de l'origine des déplacements I . Plus le nombre de points de discrétisation est faible, plus les sommets sont éloignés de l'origine des déplacements ; la valeur calculée peut alors être très éloignée du jeu réel.

La relation entre le jeu, le coefficient de déflexion et le nombre de points de discrétisation est donnée par l'équation (II-15).

$$\frac{Jeu_j(\theta_j, c_d)}{2} = c_d \cdot \frac{\cos(\theta_j)}{1 - \cos(\theta_j)} \quad (II-14)$$

$$\theta_j = \frac{\pi}{n_d}, \text{ d'où :}$$

$$(II-14) \rightarrow \frac{Jeu_j(n_d, c_d)}{2} = c_d \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n_d}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n_d}\right)} \quad (II-15)$$

Cette équation peut être modifiée pour obtenir le nombre de points de discrétisation en fonction du jeu local et de l'approximation maximale acceptée :

$$(II-15) \rightarrow n_d(Jeu_j, c_d) = \frac{\pi}{\text{AcOS}\left(\frac{Jeu_j/(2 \cdot c_d)}{1 + Jeu_j/(2 \cdot c_d)}\right)} \quad (II-16)$$

La Figure II.11 est un exemple d'abaque construit avec l'équation (II-15). Il peut être utilisé, pour une liaison linéaire annulaire, afin de déterminer le nombre de points de discrétisation en fonction du jeu local et de l'approximation maximale acceptée.

Nous faisons l'hypothèse que les moyens de production utilisés pour produire les pièces 1 et 2 ont une précision de $10\mu m$ et que les moyens de contrôle industriels ont une précision d' $1\mu m$ et nous choisissons de réaliser des calculs dix fois plus précis que ces valeurs, soit $10^{-4}mm$.

Pour un ajustement $\emptyset 6g6D6$, correspondant à un jeu local maximum de $50\mu m$, le nombre de points de discrétisation à utiliser est de 36 (voir Figure II.11).

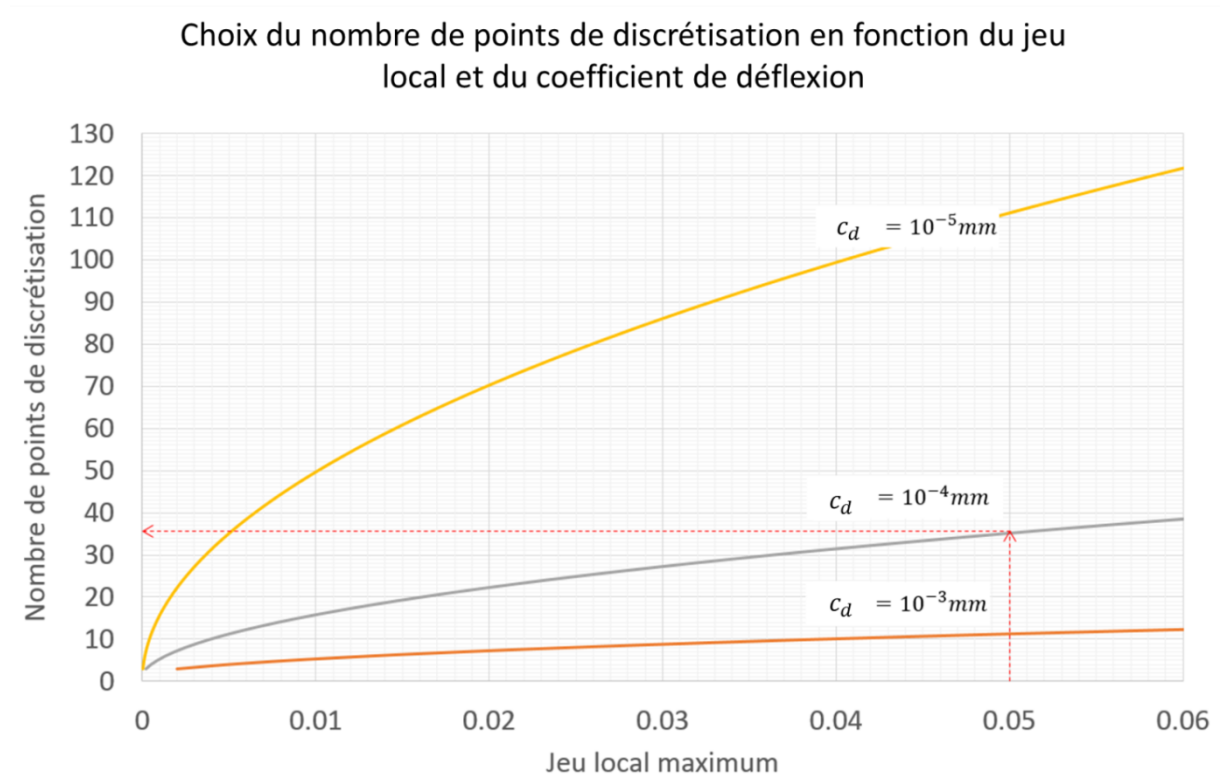


Figure II.11 - Abaque pour choisir le nombre de points de discrétisation en fonction du jeu local maximal

Dans la suite, nous choisirons le nombre de points de discrétisation en fonction de la précision souhaitée. Les temps de calcul résultants seront ensuite donnés pour information.

II.3. Etude d'une chaîne de cotes par des opérations sur les polytopes

Dans les parties précédentes, les écarts géométriques des surfaces et les écarts de contact entre deux surfaces potentiellement en contact ont été définis. Afin de déterminer les écarts entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme, nous allons analyser la propagation de ces écarts à travers les pièces et les liaisons. Pour cela, deux types d'opérations sont utilisés en fonction des types d'architecture : les intersections et les sommes de Minkowski.

II.3.1. Architecture en parallèle

La propagation des écarts dans des liaisons en parallèle peut être calculée par des opérations d'intersection sur les ensembles de contraintes.

Prenons l'exemple de l'assemblage de deux pièces en contact par cinq liaisons linéaires présenté sur la Figure II.12. Dans cet exemple les écarts géométriques des surfaces ont été générés par tirage de Monte Carlo. Dans un premier temps, tous les polytopes opérands des cinq liaisons entre les surfaces $1,j$ et $2,j$ ($j \in \{1; \dots; 5\}$) sont calculés en un même point O . Soit P_j le polytope des écarts géométriques et de contact des surfaces $1,j$ et $2,j$.

Le polytope, P_R , décrivant les écarts de situation entre les pièces 1 et 2, correspond à l'intersection des cinq polytopes opérands (Teissandier, 2012; Gouyou, et al., 2016) :

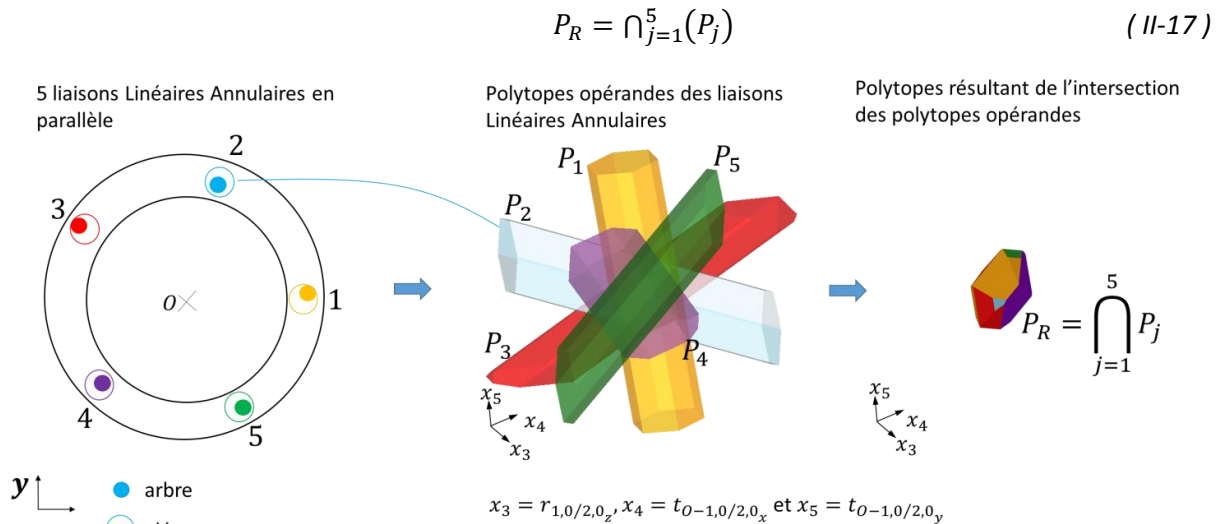


Figure II.12 – Propagation des écarts dans une architecture en parallèle

II.3.2. Architecture en série

L'accumulation des écarts dans une chaîne de liaisons en série peut être calculée par des sommes de Minkowski sur les ensembles de contraintes (Fleming, 1988; Srinivasan, 1993). Si une chaîne est composée de liaisons en série, l'espace des déplacements possibles entre les deux extrémités de la chaîne peut être calculé en réalisant la somme de toutes les contraintes géométriques et les contraintes de contact de la chaîne étudiée (voir Figure II.13).

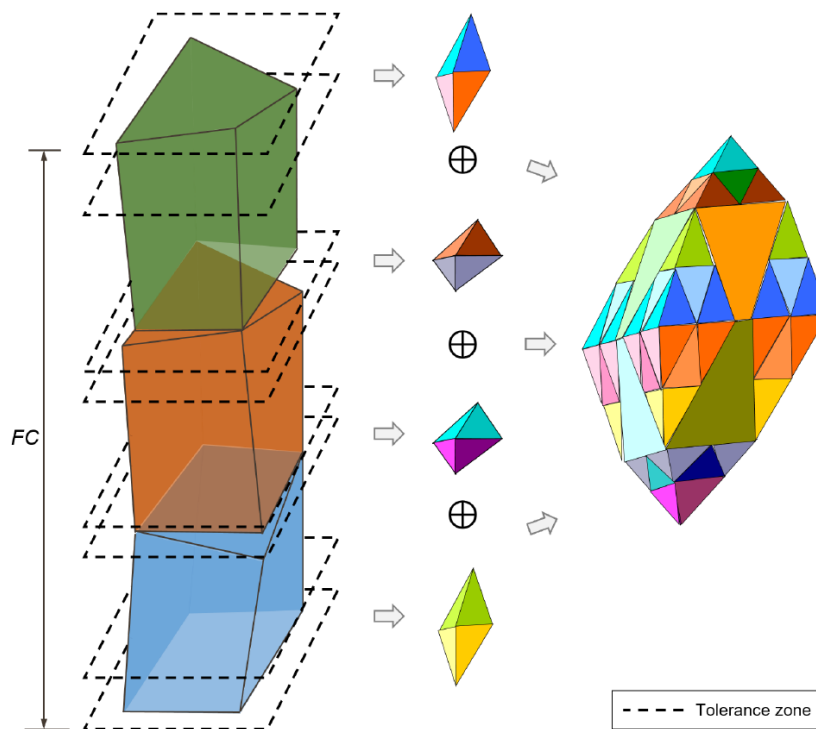


Figure II.13 – Modélisation de l’accumulation des écarts comme une somme de polytopes (Teissandier, et al., 1999)

Soient P_1 et P_2 , deux polytopes opérandes, caractérisant les écarts géométriques et les écarts de contact deux pièces en série. La somme de Minkowski de ces polytopes est :

$$P_1 \oplus P_2 = \{a + b, a \in P_1, b \in P_2\} \quad (II-18)$$

Comme nous l’avons dit auparavant, lorsque les ensembles de contraintes caractérisant les écarts géométriques et les écarts de contact des surfaces sont non bornés, des demi-espaces bouchons sont ajoutés aux polyèdres opérandes pour former des polytopes. Ces demi-espaces sont nécessaires pour réaliser des opérations sur les ensembles de contrainte mais n’ont aucun impact sur le résultat de l’analyse.

Lors des opérations de sommes de Minkowski, le nombre de ces demi-espaces bouchons peut augmenter de façon exponentielle. (Arroyave-Tobón, 2017) a montré que ces demi-espaces avaient un impact très important sur les temps de calcul. Il a donc proposé deux méthodes pour réduire leur impact :

- Somme avec contrôle de la génération des demi-espaces bouchons,
- Somme sans demi-espace bouchon par polyèdres prismatiques.

a) Somme avec contrôle des demi-espaces bouchons

Il existe une infinité de possibilités pour générer un polytope à partir d’un polyèdre. Afin de limiter le nombre de calcul sur des données inutiles et ainsi diminuer les temps de simulation, nous souhaitons manipuler des polytopes les plus simples possibles avec peu de demi-espaces bouchons.

L'utilisation d'opérandes, avec un nombre minimal de demi-espaces bouchons, ne garantit pas que leur somme génère également un polytope avec un nombre minimal de demi-espaces bouchons.

C'est pourquoi (Arroyave-Tobón, et al., 2017) propose de simplifier le polytope résultant après chaque somme. L'objectif est de générer un polytope avec un nombre minimal de demi-espaces bouchons contenant la topologie du polyèdre qu'il représente. Ceci peut être réalisé en retirant tous les demi-espaces bouchons du polytope résultant et en réalisant une opération d'intersection avec un hypercube de très grande dimension. Le polytope ainsi obtenu a une géométrie plus simple que le polytope initial sans altération de la topologie du polyèdre auquel il est associé.

Par exemple, sur la Figure II.14 le polytope de gauche est le résultat d'une somme de Minkowski. Le polytope de droite est équivalent d'un point de vue fonctionnel à celui de gauche mais il a une géométrie plus simple puisqu'il ne possède que deux demi-espaces bouchons contre six pour le premier. Il générera donc des temps de calcul plus faible s'il est utilisé dans une nouvelle opération d'intersection ou de somme.

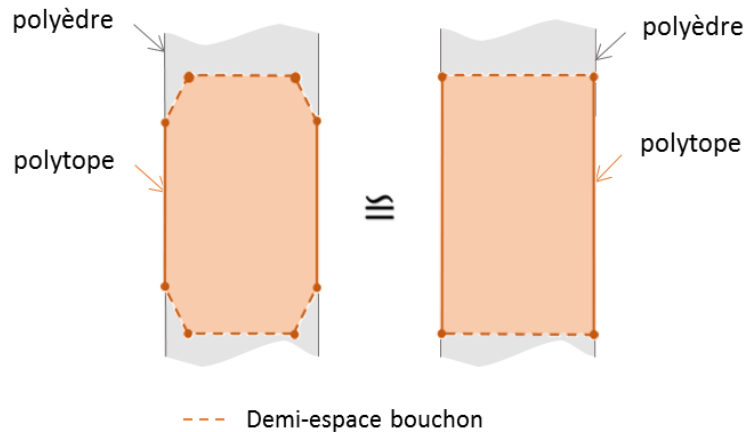


Figure II.14 – Simplification d'un polytope issu d'une somme de Minkowski (Arroyave-Tobón, 2017)

b) Somme dans une base de projection

La seconde méthode consiste à réaliser une somme de polyèdres dans le sous-espace de \mathbb{R}^n commun aux deux polyèdres opérandes.

(Arroyave-Tobón, 2017) a montré qu'un polyèdre pouvait être défini comme la somme d'un polytope P et d'une droite Δ . Par exemple, les polyèdres Γ_1 et Γ_2 , présentés sur la Figure II.15a, peuvent être définis par les relations :

$$\Gamma_1 = P_1 \oplus \Delta_1 \tag{II-19}$$

$$\Gamma_2 = P_2 \oplus \Delta_2 \tag{II-20}$$

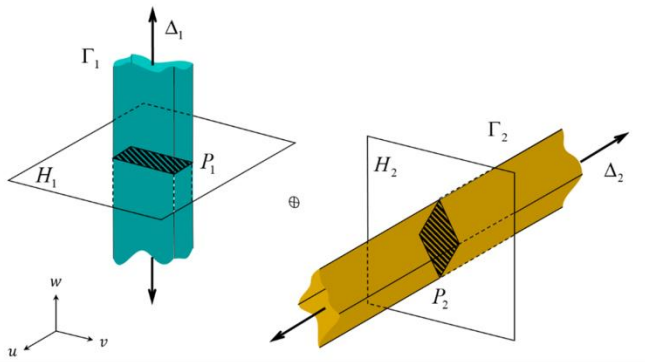
Les polytopes P_1 et P_2 sont définis par l'intersection des polyèdres Γ_1 et Γ_2 avec les hyperplans H_1 et H_2 . Ces hyperplans sont respectivement orthogonaux aux droites Δ_1 et Δ_2 .

La Figure II.15b représente le sous-espace commun aux polyèdres Γ_1 et Γ_2 . Ce sous-espace correspond à l'intersection de H_1 et H_2 , soit $H_1 \cap H_2$.

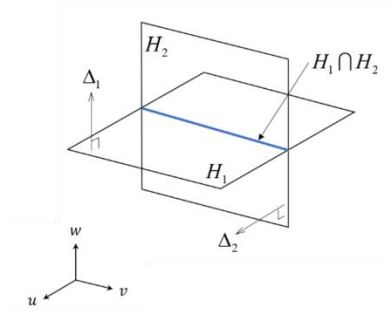
Afin de calculer la somme de Γ_1 et Γ_2 , les polytopes P_1 et P_2 sont projetés dans le sous-espace $H_1 \cap H_2$ (voir Figure II.15c) et leur somme est calculée (voir Figure II.15d). Enfin, le polytope résultant de cette somme, P_{12} , est ajouté aux droites Δ_1 et Δ_2 afin d'obtenir le polyèdre Γ_{12} (voir Figure II.15e). Ce polyèdre correspond au résultat de la somme de Γ_1 et Γ_2 .

Cette approche est plus rapide que la méthode faisant appel à des demi-espaces bouchons (Homri, 2014), car elle permet de réaliser une somme de polytopes dans un sous-espace restreint. Dans l'exemple de la Figure II.15, la somme est réalisée dans \mathbb{R}^1 au lieu de \mathbb{R}^3 .

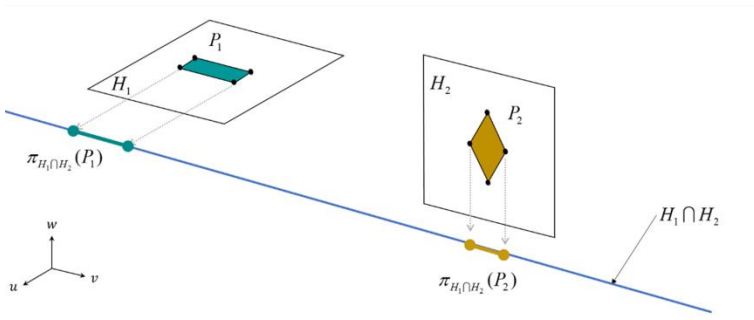
Dans la suite nous utiliserons cette approche pour réaliser toutes nos sommes de Minkowski.



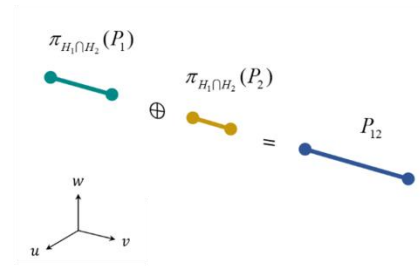
a) Étape 1 : décomposition des polyèdres



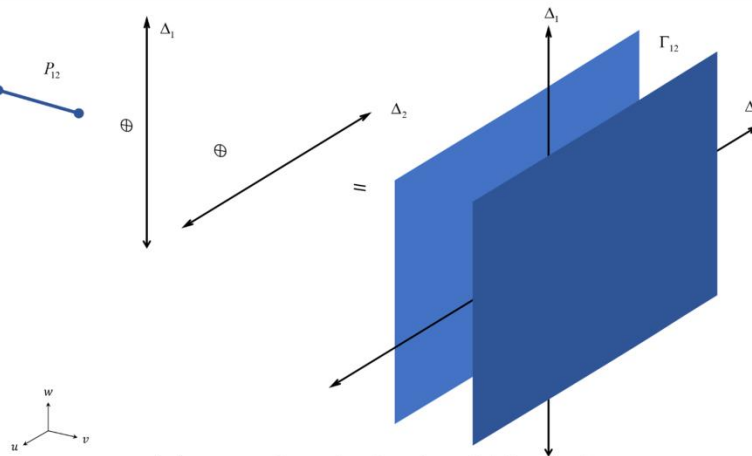
b) Étape 2 : calcul du sous-espaces commun



c) Étape 3 : projections des polytopes



d) Étape 4 : somme des projections



e) Étape 5 : détermination du polyèdre résultant

Figure II.15 – Somme des polytope par la méthode des projections (Arroyave-Tobón, 2017)

II.3.3. Moyens de calcul utilisés

Tous les calculs sur des ensembles de contraintes sont réalisés avec le logiciel politopix, disponible en open source (Delos & Teissandier, 2018), sur un cluster composé de trois types de machine :

- Bi processeur 6 cœurs Intel 3,3GHz avec 96Go de RAM
- Bi processeur 8 cœurs Intel 2,9GHz avec 128Go de RAM
- Bi processeur 12 cœurs Intel 2,5GHz avec 256Go de RAM

Avec :

- Réseau d'interconnexion Infiniband FDR.
- Puissance totale du Cluster : 30 Tflops.

II.4. Conformité d'un assemblage

II.4.1. Respect d'une Condition de Montage

Un mécanisme hyperstatique, composé de deux pièces 1 et 2 (voir Figure I.12), peut présenter des interférences de montage en fonction des écarts de fabrication de ses surfaces. Le système présente des interférences de montage si le polytope résultant de la liaison est vide. Ainsi un mécanisme peut être assemblé sans interférence si, et seulement si :

$$P_R \neq \{\emptyset\} \quad (II-21)$$

P_R est le polytope résultant de la liaison entre les pièces 1 et 2. L'équation (II-21) est la H-description de ce polytope (Ziegler, 1995).

Pour les assemblages hyperstatiques, suivant les écarts de fabrication des pièces, l'assemblage pourra potentiellement être réalisé avec interférences de contact. La modélisation par ensemble de contraintes permet de détecter ces interférences. Si le polytope résultant de la liaison est non vide, les pièces peuvent s'assembler sans interférence.

II.4.2. Respect d'une Condition Fonctionnelle

Si le mécanisme peut être assemblé sans interférence, le polytope résultant du système, P_R , est non-vide. Il décrit l'ensemble des écarts relatifs possibles entre les pièces 1 et 2. Les sommets de P_R correspondent aux positions extrêmes de la pièce 1 par rapport à la pièce 2. Un polytope étant un ensemble convexe, l'étude de la V-description d'un polytope permet ainsi de vérifier le respect d'une Condition Fonctionnelle (CF).

CF est une Condition Fonctionnelle de position et/ou d'orientation relative entre les pièces 1 et 2. Toute Condition Fonctionnelle peut être définie par un polyèdre P_F en suivant la méthode présentée dans la section II.2.2. Ainsi, la Condition Fonctionnelle d'un mécanisme est respectée si, et seulement si, le polytope résultant P_R du mécanisme est inclus dans le polyèdre fonctionnel P_F (Homri, et al., 2013; Arroyave-Tobón, et al., 2017).

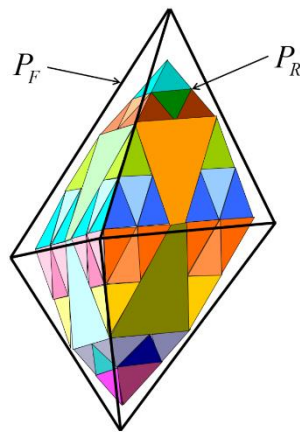


Figure II.16 – Test d'inclusion des polytopes (Teissandier, 2012)

II.5. Analyse de tolérances du mécanisme

L'analyse de tolérances peut être réalisée soit au pire des cas soit au travers d'une analyse statistique (Chase & Parkinson, 1991; Hong & Chang, 2002; Nigam & Turner, 1995; Roy, et al., 1991). L'analyse au pire des cas (ou déterministe) consiste à sélectionner des tolérances telles que 100% des assemblages produits soient conformes. Elle considère les combinaisons les plus défavorables de chaque tolérance au regard des Conditions de Montage ou des Conditions Fonctionnelles du système. De ce fait, le tolérancement au pire des cas peut mener à des tolérances très resserrées et donc augmenter les coûts de production (Hong & Chang, 2002; Nigam & Turner, 1995; Roy, et al., 1991; Jeang, 1994).

L'analyse de tolérances statistique permet de maîtriser le taux d'assemblages non conformes, d'élargir les tolérances et donc de diminuer les coûts de production (Nigam & Turner, 1995). L'objectif de cette méthode est d'estimer la distribution d'une population considérant les lois de distributions des écarts de fabrication de toutes les surfaces contributrices. Afin de réaliser des analyses plus précises, l'idéal est de disposer des lois de distribution des écarts de fabrication des pièces réelles produites (Dantan & Qureshi, 2009).

Lorsque cette distribution ne peut pas être définie sous forme analytique, une approche stochastique peut être utilisée. La plus courante est la méthode par tirage de Monte Carlo (Chase, et al., 1995; Yang, et al., 2013; Qureshi, et al., 2012). Les écarts de fabrication, géométriques et / ou dimensionnels, des surfaces influentes sur la chaîne étudiée sont générés par tirage aléatoire suivant des lois de distribution prédéfinies. Ces lois sont soit issues de campagnes de mesures réalisées sur des populations réelles soit issues d'hypothèses faites sur la définition. La propagation des écarts est ensuite calculée pour obtenir la distribution de la loi de sortie.

Nous proposons deux méthodes d'analyse qui sont décrites ci-après. La première consiste à réaliser l'analyse de tolérances au pire des cas d'un système. La seconde est l'analyse de tolérances statistique d'un assemblage.

II.5.1. Analyse au pire des cas

Au pire des cas, une Condition de Montage est vérifiée en calculant le polytope caractérisant les écarts entre les gabarits au maximum de matière des deux pièces. Si ce polytope est non vide, 100% des assemblages produits pourront s'assembler sans interférence.

De façon analogue, une Condition Fonctionnelle est vérifiée en calculant le polytope caractérisant les écarts entre les gabarits au minimum de matière des deux pièces. Si ce polytope est inclus dans le polytope fonctionnel, 100% des assemblages produits sont conformes.

Un exemple d'application de cette méthode est présenté sur le cas d'étude du Chapitre IV.

II.5.2. Analyse statistique

II.5.2.1. Démarche

L'étude statistique d'un système hyperstatique composé de deux pièces 1 et 2 peut être décrite par le procédé général présenté sur la Figure II.17.

Les données d'entrée sont les écarts de dimension ($d_{1,j}$ et $d_{2,j}$) et de situation ($[s_{1,j/1,0}]$ et $[s_{2,j/2,0}]$) des surfaces respectives des pièces 1 et 2. Ces écarts sont générés par tirage de Monte Carlo suivant des lois de distribution qui sont idéalement issues de l'analyse des populations réelles produites.

En d'autres termes, l'application de la méthode de Monte Carlo nous permet de générer p_{max} pièces telles que :

$$\{EG_{1,j}(p)\} = \{[s_{1,j/1,0}(p)]; d_{1,j}(p)\}, 1 \leq j \leq j_{max}, 1 \leq p \leq p_{max} \quad (II-22)$$

$$\{EG_{2,j}(p)\} = \{[s_{2,j/2,0}(p)]; d_{2,j}(p)\}, 1 \leq j \leq j_{max}, 1 \leq p \leq p_{max} \quad (II-23)$$

Les données de sortie sont le taux de montage, AR% (Assembly Rate) et le taux de respect de la Condition Fonctionnelle, FR% (Functional Rate).

AR% est le taux d'assemblages réalisés sans interférence de contact parmi une population de p_{max} assemblages. Les p_{max} assemblages sont générés aléatoirement à partir d'une population de p_{max} pièces 1 et p_{max} pièces 2.

La méthode pour déterminer si les assemblages peuvent être réalisés sans interférence de contact est détaillée dans la partie II.2.2 et II.3.1.

FR% est le taux d'assemblages réalisés sans interférence et respectant la Condition Fonctionnelle parmi les p_{max} assemblages générés.

Nous considérons qu'un assemblage ne pouvant pas être réalisé ne répond pas à la Condition Fonctionnelle du mécanisme. Dans tous les cas, on a donc :

$$FR\% \leq AR\% \quad (II-24)$$

La méthode générale pour vérifier qu'un assemblage donné respecte une Condition Fonctionnelle est détaillée dans la partie II.4.2.

```

Entrée :  $\{EG_{1,j}(p)\}, \{EG_{2,j}(p)\}, 1 \leq p \leq p_{max}, 1 \leq j \leq j_{max}$ 
Sortie : AR% des pièces 1 et 2
           FR% des pièces 1 et 2

AR% = 0% ; FR% = 0%
for p = 1 to pmax
  if (PR ≠ ∅) then
    PAS D'INTERFERENCE DE CONTACT entre les pièces 1 et 2
    AR% = AR% + 1/pmax

    if (Condition sur [s1,0/2,0] = TRUE) then
      CF RESPECTÉE
      FR% = FR% + 1/pmax
    else
      CF NON RESPECTÉE
    end if
  end if
else
  INTERFERENCE DE CONTACT entre les pièces 1 et 2
end if
next p

```

Figure II.17 – Logigramme de simulation statistique d'un mécanisme hyperstatique

II.5.2.2. Détermination d'un intervalle de confiance

Lorsque les taux de respect de la Condition de Montage et de la Condition Fonctionnelle sont calculés, nous définissons des intervalles de confiance sur les résultats obtenus.

Soit \tilde{P} la fonction de défaillance de la condition étudiée (Condition de Montage ou Condition Fonctionnelle). La variance de la valeur \tilde{P} s'exprime de la façon suivante (Dumas, 2014) :

$$Var[\tilde{P}] \approx \frac{1}{N_{MC}-1} \tilde{P}(1 - \tilde{P}) \quad (II-25)$$

Avec N_{MC} : nombre d'assemblage généré par tirage de Monte Carlo.

La qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance dépend donc de l'ordre de grandeur de la probabilité et du nombre de réalisations. Il est donc important d'accompagner chaque estimation \tilde{P} par son intervalle de confiance afin d'avoir une information sur le niveau de précision de la probabilité (Dumas, 2014; Cvetko, et al., 1998; Germain, 2007). En faisant l'hypothèse que la dispersion de \tilde{P} suit une loi normale, l'intervalle de confiance à 99.8% de l'estimation est donnée par :

$$\tilde{P} - 3.09\sqrt{Var[\tilde{P}]} \leq P \leq \tilde{P} + 3.09\sqrt{Var[\tilde{P}]} \quad (II-26)$$

Soit :

$$\tilde{P} \left(1 - 3.09 \sqrt{\frac{1-\tilde{P}}{(N_{MC}-1).\tilde{P}}} \right) \leq P \leq \tilde{P} \left(1 + 3.09 \sqrt{\frac{1-\tilde{P}}{(N_{MC}-1).\tilde{P}}} \right) \quad (II-27)$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$\tilde{P} - b \leq P \leq \tilde{P} + b \quad (II-28)$$

Avec $b = 3.09 \sqrt{Var[\tilde{P}]}$

Dans la suite, nous donnerons toujours un résultat accompagné de son intervalle de confiance sous la forme $\tilde{P} \pm b$. La valeur prise par b dépend de la valeur à encadrer et du nombre de tirages de Monte Carlo réalisés. La Figure II.18 montre l'évolution de b/\tilde{P} par rapport au nombre de tirages et à la valeur de \tilde{P} . Ces courbes montrent que :

- A iso valeur de \tilde{P} , plus le nombre de tirages est important, plus la dimension de l'intervalle de confiance est faible.
- Plus la valeur de \tilde{P} est faible, plus le rapport entre la dimension de son intervalle de confiance et elle-même (b/\tilde{P}) est important. Autrement dit, il faudra d'autant plus de tirages que la probabilité à estimer est en bout de distribution.

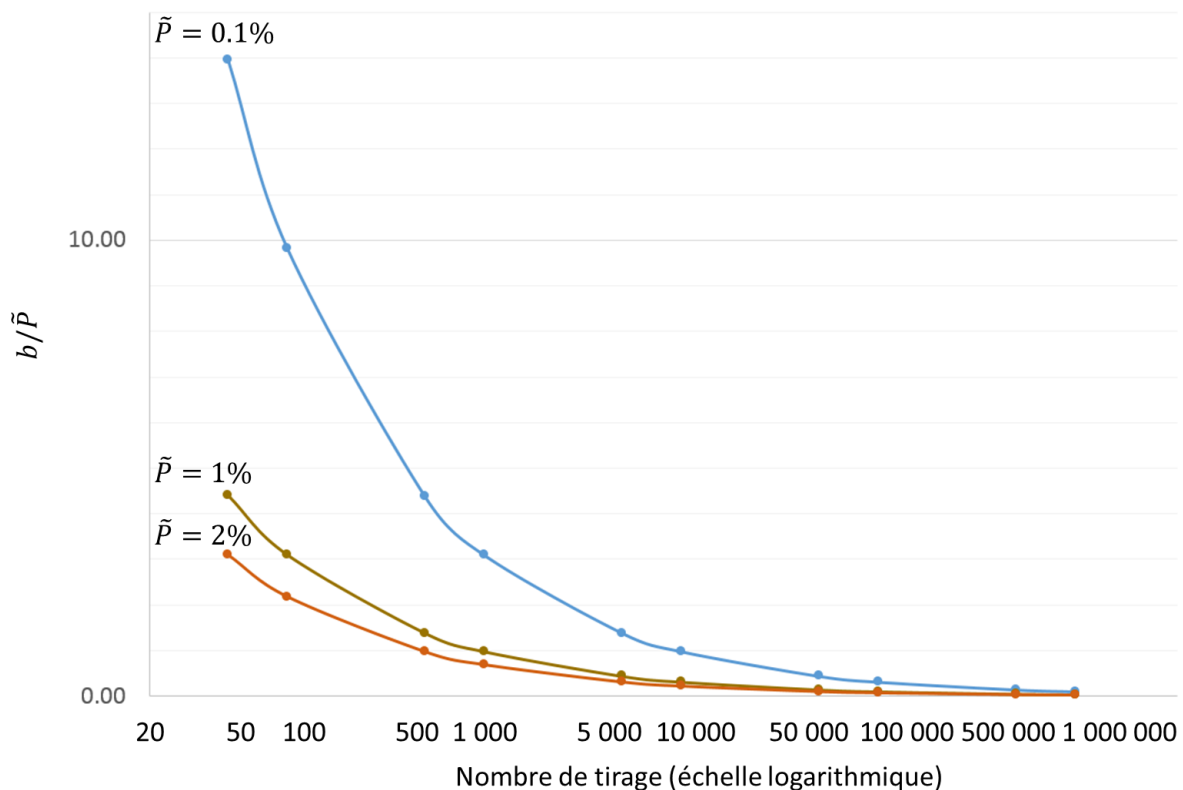


Figure II.18 – Evolution de b/\tilde{P} en fonction du nombre de tirage réalisés et de \tilde{P}

II.6. Analyse des interférences de montage

Dans cette partie, une méthode d'analyse des interférences de montage est présentée. Cette méthode peut être utilisée dans deux cas distincts :

- Si un assemblage ne peut pas être réalisé, nous pouvons déterminer avec précision quelles zones doivent être retouchées pour supprimer les interférences et permettre l'assemblage.
- Nous pouvons aussi quantifier la valeur de l'interférence de montage et, si celle-ci est faible, conclure que l'assemblage est réalisable sans réaliser une analyse avec déformation.

Prenons l'exemple de l'assemblage d'un arbre dans un perçage non circulaire (voir Figure II.19). Quel que soit la position de la surface 1,j par rapport à la surface 2,j, les surfaces sont en interférence.

Nous faisons l'hypothèse que le polytope résultant P_R de la liaison, entre les surfaces 1,j et 2,j, peut toujours être analysé comme l'intersection de deux sous-ensembles non vides, P_A et P_B (voir Figure II.19).

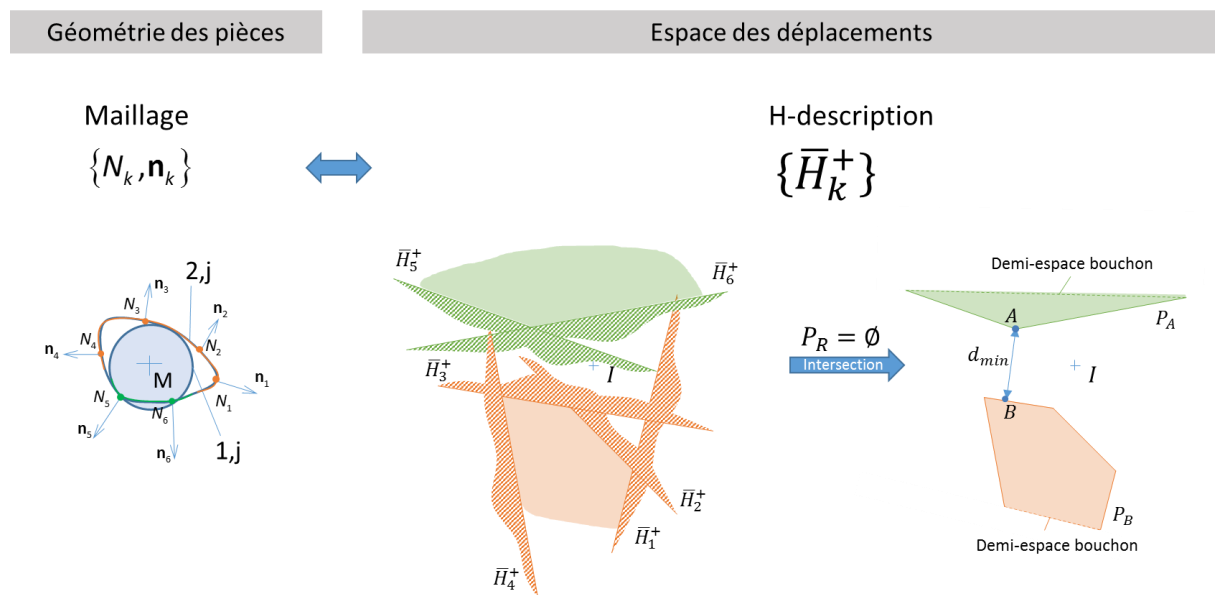


Figure II.19 – Division d'un polytope résultant vide en deux ensembles non-vides

L'objectif est de quantifier la valeur de l'interférence.

Les écarts de fabrication des surfaces 1,j et 2,j (écarts de dimension et de situation par rapport au modèle CAO) affectent uniquement le second membre b_k ($1 \leq k \leq k_{max}$) du demi-espace \bar{H}_k^+ .

Une variation du paramètre b_k impose une translation du demi-espace \bar{H}_k^+ dans l'espace affine de dimension 6.

Déterminons les translations minimums à apporter aux demi-espaces \bar{H}_k^+ pour garantir une intersection non-vide. Ces translations dépendent de la distance minimum séparant les deux sous-ensembles non-vides. Elles dépendent donc de la distance minimum, d_{min} , entre les deux sous-ensembles non vide (voir Figure II.19). Cette distance peut être déterminée en utilisant le programme Polytope Distance de CGAL (Schonherr, 2002).

Afin de déterminer d_{min} , le programme Polytope Distance réalise une optimisation quadratique sur les sommets des polytopes.

Considérons V_A et V_B les ensembles des sommets respectifs des polytopes P_A et P_B . Ces ensembles sont les V-descriptions des polytopes P_A et P_B .

$V_A = \{v_i | i \in \{1, \dots, r\}\}$ et $V_B = \{v'_i | i \in \{1, \dots, s\}\}$ avec r le nombre de sommets du polytope P_A et s le nombre de sommet du polytope P_B .

Considérons $x^* = \{x_i^* | i \in \{1, \dots, n\}\}$ une solution optimale au système :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{respectant} \end{array} \begin{cases} x^T C^T C x \\ \sum_{i=1}^r x_i = 1 \\ \sum_{i=r+1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

Avec $n = r + s$ et $C = \{v_1, \dots, v_r, -v'_1, \dots, -v'_s\}$.

Soient A et B , deux points appartenant respectivement aux polytopes P_A et P_B , et générant la plus petite distance entre P_A et P_B , d_{min} . Ces points sont montrés sur la Figure II.19.

Ils sont déterminés en utilisant les valeurs positives x_i^* , à savoir :

$$v = \{v_i \in V_A | x_i^* > 0\}$$

$$v' = \{v'_i \in V_B | x_{r+i}^* > 0\}$$

A et B sont une combinaison convexe des sommets des polytopes P_A et P_B dans la base $(r_{1,0/2,0_x}, r_{1,0/2,0_y}, r_{1,0/2,0_z}, t_{M-1,0/2,0_x}, t_{M-1,0/2,0_y}, t_{M-1,0/2,0_z})$:

$$A = \sum_{i=1}^r x_i^* \cdot v_i$$

$$B = \sum_{i=1}^s x_{r+i}^* \cdot v'_i$$

Les points A et B sont localisés sur les frontières des polytopes P_A et P_B . Dans \mathbb{R}^6 , chaque point peut être porté par un sommet, une arête ou une facette.

Grâce à la traçabilité des polytopes, présentée dans la partie II.2.3, il est possible de déterminer quels demi-espaces génèrent chaque sommet, arête et facette d'un polytope. Chaque demi-espace correspond à un point de discrétisation. Il est alors possible de connaître avec précision la zone de contact qui est à l'origine de l'interférence.

Le point A est généré par l'intersection de deux demi-espaces, \bar{H}_5^+ et \bar{H}_6^+ .

Le point B est généré par l'intersection de quatre demi-espaces, \bar{H}_1^+ , \bar{H}_2^+ , \bar{H}_3^+ et \bar{H}_4^+ .

Les composantes du vecteur \mathbf{AB} indiquent l'amplitude et la direction des modifications sur la surface 1,j et/ou la surface 2,j pour supprimer les interférences. Ce vecteur caractérise la translation minimale à imposer aux demi-espaces \bar{H}_k^+ pour obtenir une intersection non-vide.

La suppression des interférences de montage consiste à annuler la norme du vecteur \mathbf{AB} .

Cela peut être réalisé en modifiant les écarts de situation des surfaces, par exemple, en retouchant localement la surface 2,j sur la portion reliant les points de discrétisation 5 et 6 (zone identifiée grâce au point A). Cette retouche est présentée sur la Figure II.20. La surface 2,j est usinée de tel sorte que les points N_5 et N_6 soient translatés suivants le vecteur \mathbf{AB} .

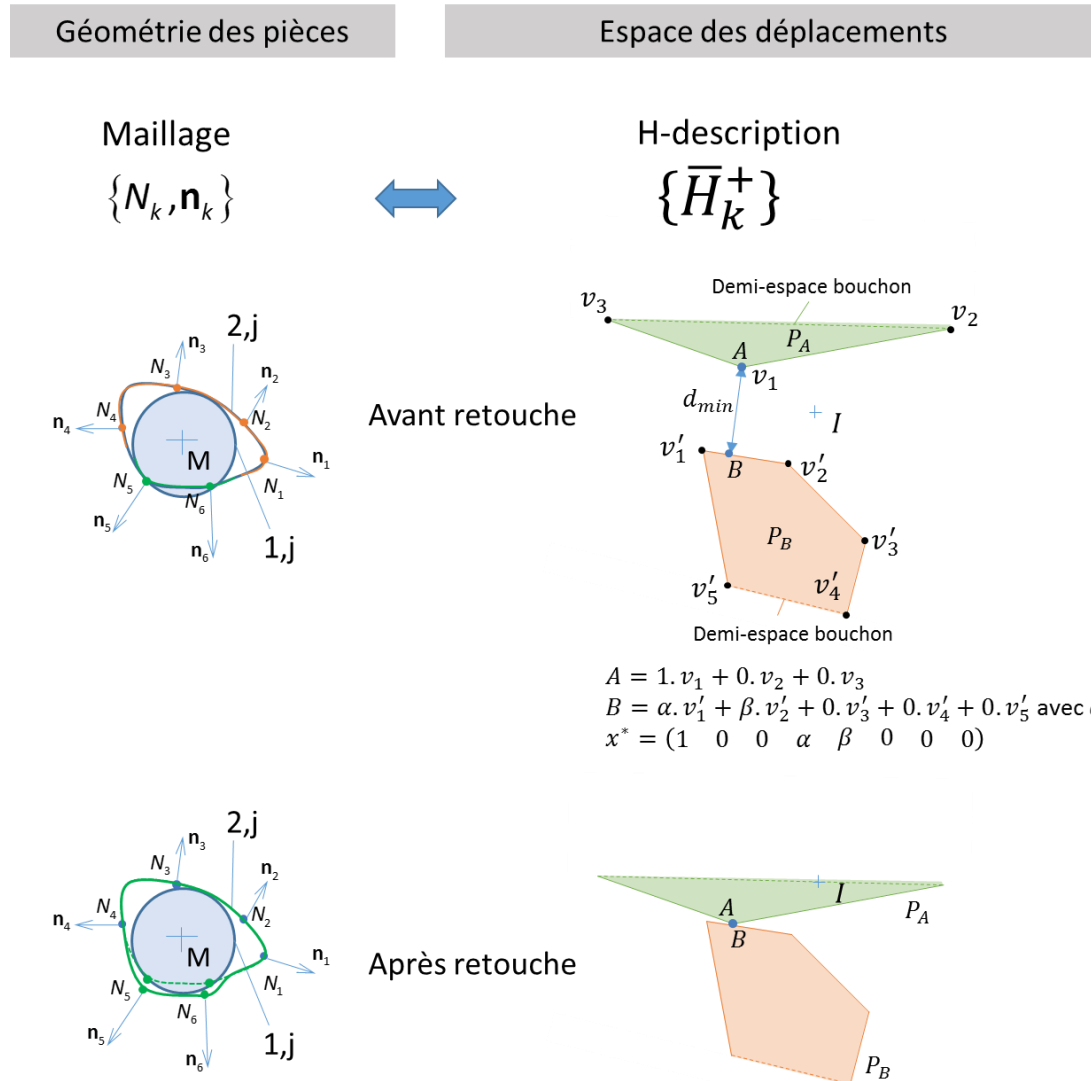


Figure II.20 – Retouche locale pour supprimer les interférences de montage

Dans l'analyse de pièces réelles produites, cette approche permet d'identifier avec précision les zones des surfaces qui sont responsables des interférences de montage. La localisation, l'amplitude et la direction des corrections à apporter peuvent être déterminées. Cette méthode peut être utilisée pour quantifier la valeur des interférences entre deux surfaces et corriger des surfaces pour permettre l'assemblage sans interférence.

S'il est constaté que certaines interférences se présentent de façon récurrente, cette méthode peut être utilisée pour régler la gamme de fabrication et éviter que ce type de défauts ne réapparaisse.

Si le polytope résultant n'est pas divisible en deux sous-ensembles non vides cela signifie qu'il faudra retoucher plusieurs surfaces dans différentes directions pour rendre l'assemblage possible. La stratégie consiste à garder le plus grand groupe de surfaces pouvant s'assembler sans interférence et à déterminer quelles corrections apporter successivement aux autres surfaces pour supprimer les

interférences de montage. Si un grand nombre de surfaces sont à retoucher, il peut être plus intéressant de reprendre proprement toutes les surfaces.

Enfin, dans le cadre d'une analyse de tolérances statistique, cette approche pourrait permettre de statuer sur la montabilité des assemblages avec interférences. En effet, si l'interférence de montage est très faible, nous pourrions considérer que l'assemblage est possible sans simuler les déformations des pièces. La simulation des déformations serait alors réalisée uniquement pour les assemblages avec beaucoup d'interférences. Cependant, certains points doivent être améliorés avant de pouvoir utiliser cette propriété. Tout d'abord, nous devons définir une valeur d'interférence limite pour chaque type d'assemblage (en fonction des raideurs des pièces) à partir de laquelle une simulation des déformations est nécessaire. Ensuite nous devons développer une approche générique permettant d'estimer la valeur de l'interférence pour tous les assemblages, même ceux qui ne sont pas réductibles en seulement deux sous-ensembles non vides.

Ces problèmes n'ont pas été adressés dans ces travaux. Ainsi, lors d'une analyse statistique, les assemblages présentant des interférences de montage sont toujours analysés en modélisant les déformations dans les pièces.

II.7. Synthèse

Dans cette partie, nous avons montré comment définir le polytope géométrique d'une surface défini au pire des cas ou d'une surface dont les défauts ont été générés par tirages de Monte Carlo. Le polytope de contact entre deux surfaces potentiellement en contact a ensuite été caractérisé.

Au pire des cas les écarts d'une surface et les écarts de liaison sont définis par des polytopes de dimension inférieure ou égale à 6.

Lors d'une analyse statistique, les écarts de liaison entre les surfaces sont définis de façon analogue au pire des cas mais les écarts de dimension sont générés par tirages de Monte Carlo. Les polytopes géométriques des surfaces ont une topologie plus simple qu'au pire des cas, puisqu'ils sont des sommets de dimension zéro.

Ainsi au pire des cas, nous réalisons un seul calcul par mécanisme. Cependant, lors d'une analyse statistique, chaque calcul individuel est plus rapide à réaliser car les topologies des polytopes géométriques sont plus simples. Nous montrerons dans le cas d'étude du Chapitre IV que nous obtenons des temps de calcul acceptables pour un industriel malgré l'utilisation d'une méthode de Monte Carlo.

Dans un mécanisme hyperstatique quelconque composé de deux pièces, le polytope résultant du mécanisme est obtenu en réalisant l'intersection de toutes les liaisons élémentaires entre les deux pièces. Si cette intersection est non vide, l'assemblage est réalisable sans interférence. Sinon l'assemblage présente des interférences et est déclaré non réalisable (hypothèse de solides infiniment rigides).

Si un assemblage présente des interférences, les corrections minimales à apporter au système, pour permettre l'assemblage, peuvent être quantifiées en calculant la distance minimale séparant les

polytopes opérands. La traçabilité sur les opérations d'intersection des polytopes nous permet ensuite de déterminer avec précision la zone devant être retouchée.

La définition duale des polytopes (HV-description) permet de garder le lien entre les sommets et facettes d'un polytope ; et les contraintes de contact définies en chaque point de discrétisation de l'élément de contact.

La conformité de l'assemblage au regard d'une exigence fonctionnelle peut ensuite être vérifiée en comparant le polytope résultant du mécanisme et le polytope fonctionnel (caractérisant les écarts maximaux autorisés).

La discrétisation des éléments induit une approximation sur la caractérisation des écarts entre les surfaces. Cette approximation est maîtrisée en choisissant le pas de discrétisation en fonction du coefficient de déflexion par rapport à l'élément non discrétisé.

Chapitre III. Modélisation des déformations dans les assemblages hyperstatiques avec interférences de montage

III.1. Introduction

Dans la partie précédente, nous avons montré qu'en fonction des écarts de fabrication de ses surfaces de contact, un mécanisme hyperstatique peut présenter des interférences de montage. Dans une analyse de tolérances classique, en hypothèse de solides infiniment rigides, ces assemblages sont déclarés non réalisables et donc non conformes. Cependant si ces interférences sont faibles, l'assemblage est possible en déformant le mécanisme.

Le taux d'assemblage réel est donc potentiellement supérieur à celui estimé dans une analyse faisant l'hypothèse de solides infiniment rigides. La prise en compte des raideurs des pièces permet ainsi d'élargir davantage les tolérances (Gouyou, et al., 2017; Pezzuti, et al., 2005; Rouetbi, et al., 2017).

L'analyse de tolérances de mécanismes déformables prend en compte d'autres problèmes négligés par les approches classiques. En effet, lorsqu'un assemblage est réalisé avec déformations, celles-ci ne se limitent pas forcément à la zone d'assemblage. Elles peuvent se propager à l'ensemble du système et impacter le respect de Conditions Fonctionnelles de forme, d'orientation, de position et / ou de dimension des surfaces. Lorsqu'on accepte qu'une partie des pièces produites présentent des interférences au montage, il est important de s'être assuré dès la conception que les déformations induites ne nuiront pas au bon fonctionnement du produit.

L'objectif de cette analyse est donc de définir des tolérances les plus larges possibles, pour diminuer les coûts de production, tout en respectant la Condition de Montage et la Condition Fonctionnelle de l'assemblage.

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle approche pour modéliser l'assemblage d'un système hyperstatique présentant des interférences de montage.

Dans un premier temps, une réduction du modèle est réalisée en utilisant des super-éléments. Cette réduction nous permet de réduire le périmètre de l'étude aux liaisons générant un hyperstatisme. Les écarts de fabrication des surfaces de contact sont ensuite importés. L'assemblage des pièces est alors simulé grâce au solveur que nous avons développé.

A l'issue du calcul, l'effort nécessaire pour réaliser l'assemblage considéré est estimé. Cet effort est ensuite comparé à un effort limite au-delà duquel l'assemblage est considéré non réalisable sans détérioration des pièces.

Enfin, si l'assemblage est possible, la propagation des déformations hors de la zone d'assemblage est caractérisée. Ces déformations sont étudiées dans des zones spécifiques qui jouent un rôle dans le respect des Conditions Fonctionnelles du produit. Cette dernière étape permet de conclure sur la conformité de l'assemblage.

L'approche que nous allons présenter repose sur les hypothèses suivantes :

1. Les écarts de forme des surfaces en contact sont négligeables devant les jeux locaux.
2. Pendant la résolution, les effets de frottement entre les surfaces en contact sont négligés. Cette hypothèse rend le résultat obtenu indépendant de la mise en position initiale des pièces (qui n'est pas connue a priori). Après simulation de l'assemblage, un effort de montage est estimé en utilisant les lois de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0.15.
3. Les seuls efforts appliqués sur les pièces sont les efforts générés par les contacts entre elles.
4. Les déformations sont dans le domaine des petits déplacements (les rotations sont linéarisées).
5. Les déformations locales des surfaces en contact sont négligeables (l'effet de la pression de Hertz est négligé).
6. Les matériaux utilisés sont homogènes et isotropes.
7. Les déformations des pièces restent dans le domaine élastique.
8. Les contacts entre les surfaces sont ponctuels.
9. La résolution des interférences de montage est réalisée en dimension 2.

Les hypothèses 4 à 8 nous permettent de définir un super-élément pour chaque pièce dont les nœuds maîtres sont définis aux centres des éléments de contact.

D'après les hypothèses 8 et 9, seules les liaisons Linéaires Annulaires (avec un jeu strictement positif) et les liaisons ponctuelles sont considérées.

III.2. Définition et paramétrage des écarts de situation dans un assemblage avec interférences

III.2.1. Ecart de situation élastiques

Les écarts de situation élastiques d'une surface sont des écarts de situation dus à des déformations élastiques des pièces. Ces écarts apparaissent uniquement si, dans un système hyperstatique, l'assemblage présente des interférences de montage.

Considérons la Figure III.1 modélisant une pièce i constituée de j_{max} surfaces en liaison hyperstatique avec une seconde pièce (non représentée sur la figure).

La Figure III.1a représente une pièce composée de j_{max} surfaces présentant des écarts de fabrication par rapport à sa géométrie nominale. Les arêtes reliant un sommet i,j à un sommet $i,0$ correspondent aux écarts géométriques des surfaces issus des procédés de fabrication.

La Figure III.1b représente une pièce composée de j_{max} surfaces présentant des écarts par rapport à sa géométrie nominale dus aux procédés de fabrication et à des déformations élastiques. Comme précédemment, les arêtes reliant un sommet i,j à un sommet $i,0$ correspondent aux écarts géométriques des surfaces issus des procédés de fabrication. Les arêtes reliant un sommet i,j à un sommet i,j_e correspondent aux écarts géométriques des surfaces issus des déformations des pièces (écarts de situation élastiques).

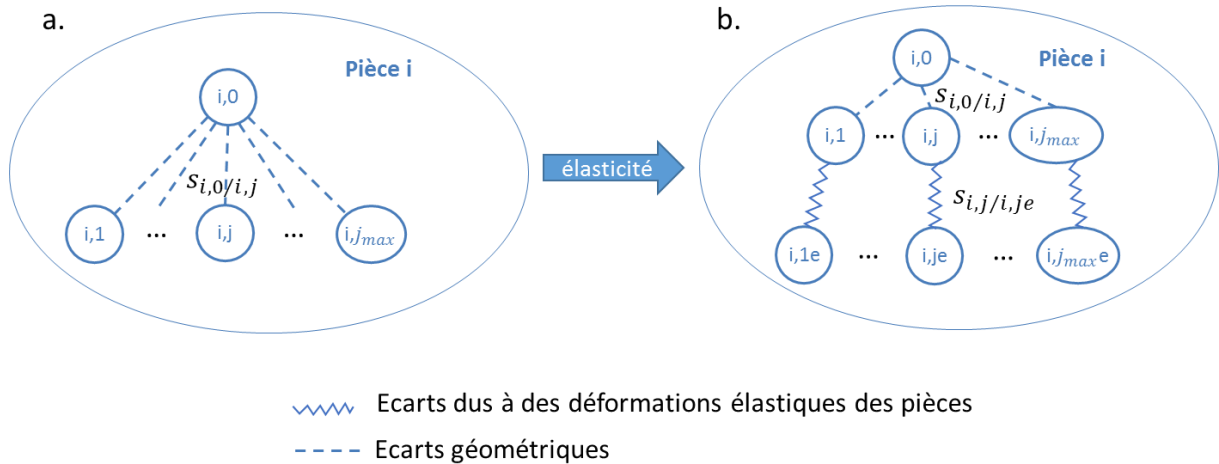


Figure III.1 – Représentation des écarts élastiques d'une surface par un graphe

Cette modélisation est semblable à celle proposée par (Pierre, 2011) qui introduit des écarts de situation issus de dilatations thermiques.

L'opérateur $s_{i,j/i,0}$ ($= -s_{i,0/i,j}$) correspond aux écarts de fabrication de la surface i,j par rapport à sa géométrie nominale $i,0$ (voir Figure III.2).

L'opérateur $s_{i,je/i,j}$ ($= -s_{i,j/i,je}$) correspond aux écarts issus de déformations élastiques des pièces. Il représente les écarts de situation de la surface i,j après déformation par rapport à sa situation avant déformation (voir Figure III.2).

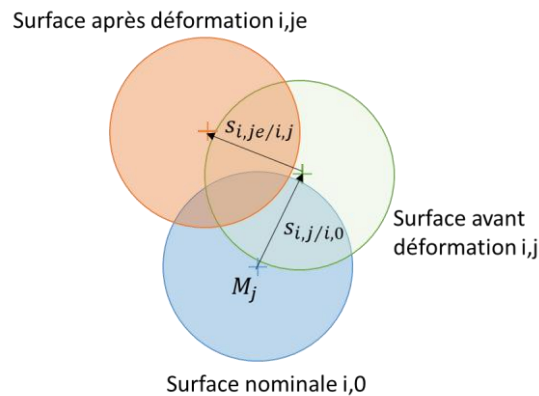


Figure III.2 – Opérateurs des écarts de situation élastiques et de fabrication

D'après la relation de Chasles, les écarts de situation entre la surface après déformation i,je et sa géométrie nominale $i,0$, sont définis par :

$$s_{i,je/i,0} = s_{i,je/i,j} + s_{i,j/i,0} \quad (III-1)$$

En modélisant ces trois écarts de situation par des torseurs de petits déplacements, il vient :

$$[s_{i,je/i,0}] = [s_{i,je/i,j}] + [s_{i,j/i,0}] \Rightarrow \begin{bmatrix} r_{i,je/i,0} \\ t_{M_j-i,je/i,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{i,je/i,j} \\ t_{M_j-i,je/i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{i,j/i,0} \\ t_{M_j-i,j/i,0} \end{bmatrix} \quad (III-2)$$

Pour rappel, par hypothèse les déformations locales des surfaces en contact sont négligées. Les écarts de dimension des surfaces en contact ne sont donc pas impactés par ces déformations.

Les écarts géométriques d'une surface i,j présentant des écarts élastiques, $EG_{i,je}$, sont alors définis par la relation :

$$EG_{i,je} = \{[s_{i,je/i,0}]; d_{i,j}\} \quad (III-3)$$

Comme dit au début de cette section, les écarts de situation élastiques sont générés par des contacts entre des surfaces dans un système hyperstatique avec interférences. Ces écarts sont donc du même type que les écarts de la liaison à laquelle ils participent. La liste des écarts de situation élastiques des surfaces par type de liaison est donnée sur la Figure III.3. Ces écarts sont définis au centre de la liaison et le plan de l'étude est (x, y) .

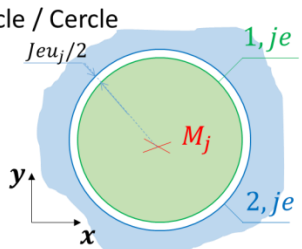
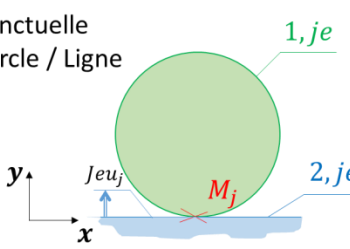
Types de liaison	Ecarts de situation élastique de chaque surface
Linéaire Annulaire Cercle / Cercle 	2 : t_{M_j-x} et t_{M_j-y}
Ponctuelle Cercle / Ligne 	1 : t_{M_j-y}

Figure III.3 – Ecarts de situation élastique des surfaces par type de liaison en 2d

Ainsi pour une liaison Linéaire Annulaire, les écarts de situation élastiques des surfaces sont des écarts en translation dans le plan de l'étude (suivant x et y).

Pour une liaison Ponctuelle, les écarts de situation élastiques sont des écarts de translation suivant la normale à l'élément de contact. Dans l'exemple de la Figure III.3, cette normale est définie suivant l'axe y .

La Figure III.4 illustre le graphe d'un système mécanique composé de deux pièces déformables. Dans la partie I.2.1.3, nous avons montré que l'assemblage de deux pièces est réalisable si et seulement si tous les cycles du système peuvent être satisfaits en même temps.

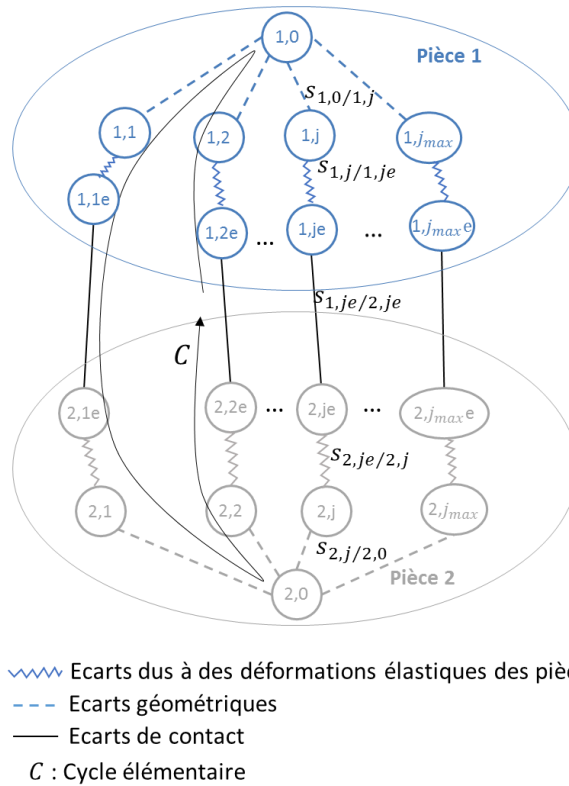


Figure III.4 – Représentation des déplacements élastiques sur un graphe des contacts

En utilisant des torseurs de petits déplacements, l'ensemble des cycles élémentaires du système déformable est défini par :

$$\{[s_{1,0/2,0}] = \bigcap_{j=1}^{j_{max}} ([s_{1,0/1,j}] + [s_{1,j/1,je}] + [s_{1,je/2,je}] + [s_{2,je/2,j}] + [s_{2,j/2,0}])\} \quad (III-4)$$

La Figure III.5 schématise les écarts de situation entre les surfaces 1,je et 2,je après montage dans le cas particulier d'une liaison Linéaire Annulaire en 2d.

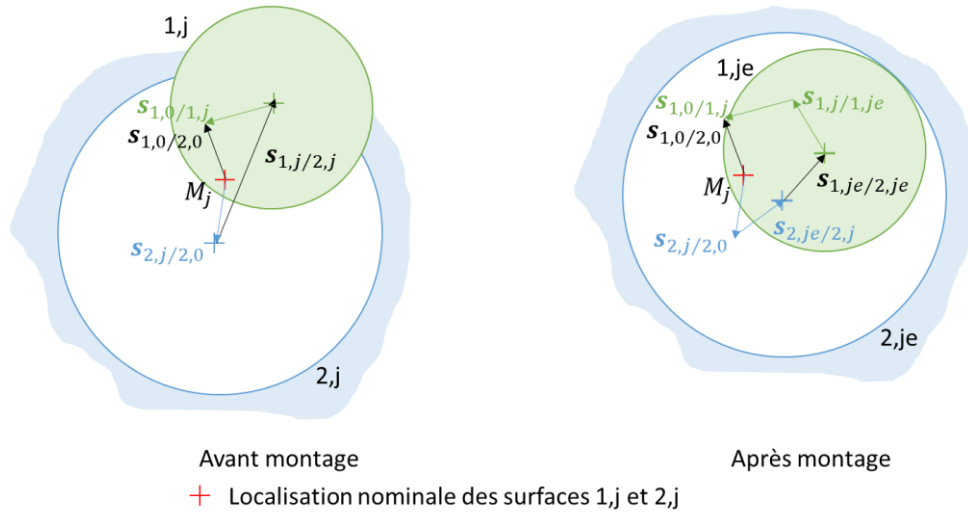


Figure III.5 – Paramètres d'étude des déformations de deux surfaces potentiellement en contact

En imposant que les torseurs de petits déplacements induits par les déformations, $[s_{1,j/1,je}]$ et $[s_{2,je/2,j}]$, soient nuls, nous retrouvons l'équation (III-7) décrivant la structure topologique d'un mécanisme en solides infiniment rigides :

$$(III-4) \rightarrow \{ [s_{1,0/2,0}] = \cap_{j=1}^{j_{max}} ([s_{1,0/1,j}] + [s_{1,je/2,je}] + [s_{2,j/2,0}]) \} \quad (III-5)$$

Si la relation (III-5) a au moins une solution alors l'assemblage est réalisable sans interférence et donc sans déformation (cf partie Chapitre II).

Si la relation (III-5) n'est pas satisfaite, l'assemblage présente des interférences de montage. Les torseurs $[s_{1,j/1,je}]$ et $[s_{2,je/2,j}]$, de l'équation (III-4), nous permettent alors de modéliser les déformations des pièces et de trouver une solution fermant tous les cycles élémentaires en même temps malgré les interférences de montage.

III.2.2. Ecart de situation entre deux pièces après assemblage

Afin de résoudre le système (III-4), nous imposons pendant toute l'étude que les référentiels 1,0 et 2,0 soient confondus. L'opérateur $s_{1,0/2,0}$ est donc nul. La relation (III-4) devient :

$$(III-4) \rightarrow \{ [0] = \cap_{j=1}^{j_{max}} ([s_{1,0/1,j}] + [s_{1,j/1,je}] + [s_{1,je/2,je}] + [s_{2,je/2,j}] + [s_{2,j/2,0}]) \} \quad (III-6)$$

C'est dans cette configuration que seront déterminés les déplacements élastiques à imposer aux surfaces 1,je et 2,je pour satisfaire le système (III-6). Nous allons montrer que cette décision n'a aucune incidence sur le résultat de la simulation.

Les déplacements élastiques cumulent des déplacements de corps rigides, $s_{i,j/i,jr}$, et des déplacements issus de déformations des pièces, $s_{i,jr/i,je}$ (voir Figure III.6a), tels que :

$$\forall j \in \{1; \dots; j_{max}\}, s_{i,j/i,je} = s_{i,j/i,jr} + s_{i,jr/i,je} \quad (III-7)$$

Les écarts de situations de i,je par rapport à la géométrie nominale $i,0$ peuvent donc être exprimés par rapport aux écarts de fabrication, $s_{i,0/i,j}$, aux déplacements de corps rigides et aux déplacements issus de déformations :

$$\forall j \in \{1; \dots; j_{max}\}, s_{i,0/i,je} = s_{i,0/i,j} + s_{i,j/i,jr} + s_{i,jr/i,je} \quad (III-8)$$

Les déplacements de corps rigides ne génèrent par définition aucune déformation, ils sont donc les mêmes pour toutes les surfaces. Ainsi au lieu d'être définis sur chaque surface d'une pièce, ces déplacements peuvent être exprimés par rapport au référentiel de la pièce $i,0$ (voir Figure III.6b).

Soit $s_{i,0/i,0r}$ l'opérateur décrivant le déplacement de corps rigide de la pièce i . On a :

$$\forall j \in \{1; \dots; j_{max}\}, s_{i,j/i,jr} = s_{i,0/i,0r} \quad (III-9)$$

L'équation (III-8) devient :

$$s_{i,0/i,j} = s_{i,0/i,0r} + s_{i,0r/i,j} + s_{i,j/i,je} \quad (III-10)$$

L'opérateur $s_{i,0r/i,j}$ correspond aux écarts de fabrication de la surface i,j et $s_{i,j/i,je}$ correspond aux déplacements issus de déformations.

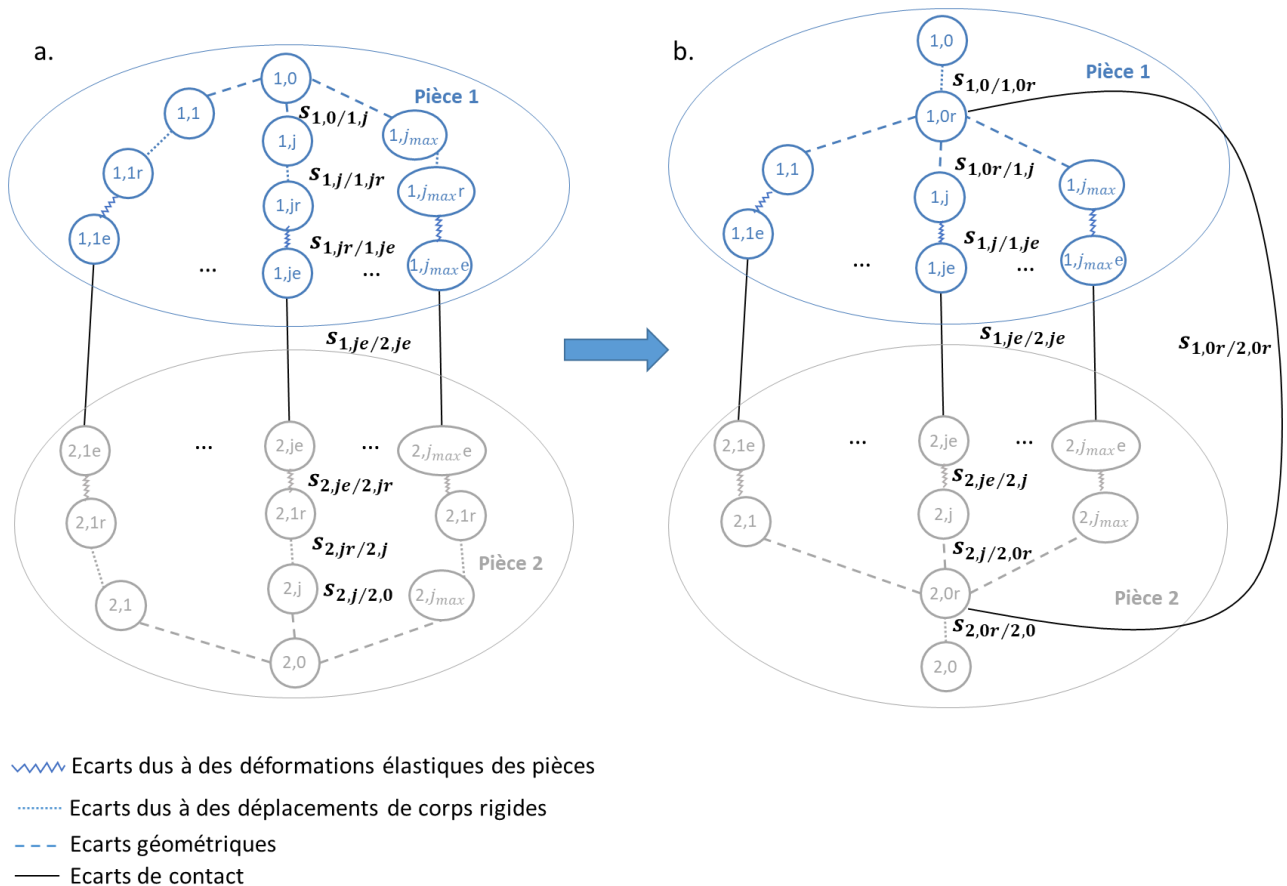


Figure III.6 – Déplacements de corps rigides des surfaces

$s_{1,0/1,0r}$ et $s_{2,0/2,0r}$ dépendent uniquement de la valeur initiale de l'opérateur $s_{1,0/2,0}$. A l'issue de la résolution, de nouveaux référentiels $1,0r$ et $2,0r$ sont associés aux pièces par la méthode des

moindres carrés. L'opérateur final $s_{1,0r/2,0r}$ est alors totalement indépendant de l'opérateur $s_{1,0/2,0}$ initialement choisi. Nous pouvons donc imposer que $s_{1,0/2,0}$ soit nul sans impacter le résultat obtenu.

III.2.3. Position relative entre deux surfaces potentiellement en contact

Il existe trois catégories distinctes pour décrire la position relative entre deux surfaces 1,je et 2,je potentiellement en contact :

- Interpénétration : le jeu minimal entre les surfaces est strictement inférieur à zéro (voir Figure III.7a),
- Contact : le jeu minimal entre les surfaces est nul (voir Figure III.7b),
- Jeu : le jeu minimal entre les surfaces est strictement positif (voir Figure III.7c).

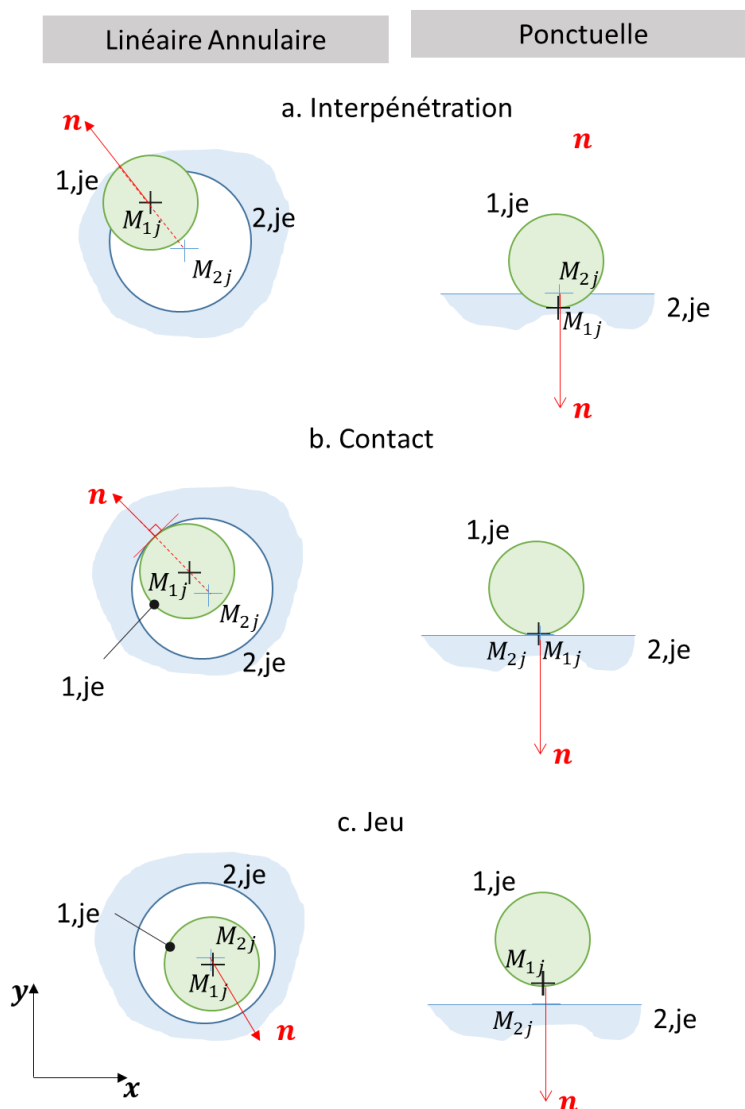


Figure III.7 – Position relative entre les surfaces potentiellement en contact

Pour déterminer quelle est la position relative entre deux surfaces, nous déterminons le plus petit écart, e_j , entre les surfaces 1,je et 2,je. Cet écart est représenté sur la Figure III.8. e_j est défini suivant le vecteur \mathbf{n} , vecteur unitaire normal au plan tangent à l'élément de contact et orienté côté extérieur matière de la surface 1,je.

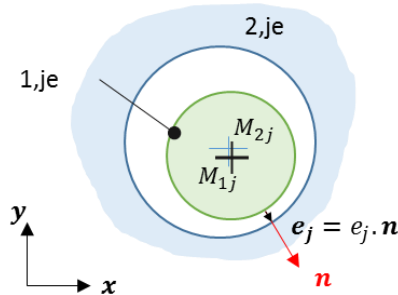


Figure III.8 – Plus petit vecteur séparant deux surfaces

Dans le cas d'une liaison Linéaire Annulaire, la distance entre les deux surfaces 1,je (arbre) et 2,je (alésage) est comparée au jeu local. Ce jeu est la différence entre les diamètres :

$$Jeu_j = D_{2,je} - D_{1,je} \quad (III-11)$$

L'écart e_j est alors défini par la relation :

$$e_j = \frac{Jeu_j}{2} - \mathbf{M}_{2j} \mathbf{M}_{1j} \cdot \mathbf{n} \quad (III-12)$$

Pour une liaison Ponctuelle, la distance entre les deux surfaces est comparée à zéro et l'écart e_j est défini par :

$$e_j = -\mathbf{M}_{2j} \mathbf{M}_{1j} \cdot \mathbf{n} \quad (III-13)$$

Ainsi, pour chaque couple de surfaces 1,je et 2,je, les surfaces sont :

- En interpénétration si e_j est négatif.
Les composantes du vecteur \mathbf{e}_j indiquent quels déplacements minimaux imposer à la surface 1,je ou à la surfaces 2,je pour supprimer l'interpénétration. Le vecteur \mathbf{e}_j est visible sur la Figure III.8 et est défini par la relation :

$$\mathbf{e}_j = e_j \cdot \mathbf{n}$$

- En contact si e_j est nul.
- Assemblées avec jeu si e_j est positif.

III.3. Efforts de contact dans un assemblage avec interférences

III.3.1. Efforts résultants des écarts de situation élastiques

Les déplacements des surfaces i,je, issus de déformations, génèrent des efforts dans les pièces. Ces efforts sont déterminés en utilisant une matrice de raideur, nommée \mathbf{K}_{si} .

Cette matrice lie les efforts appliqués sur les surfaces i,je et les déplacements (écarts de situation élastiques) qui leur sont imposés :

$$\mathbf{Q}_{si} = \mathbf{K}_{si} \mathbf{U}_{si} \quad (III-14)$$

Avec :

- \mathbf{Q}_{si} : liste des efforts générés sur les surfaces de la pièce i

$$\left(\mathbf{Q}_{si} = \left\{ q_{ext \rightarrow i,1e_x}; q_{ext \rightarrow i,1e_y}; \dots; q_{ext \rightarrow i,je_x}; q_{ext \rightarrow i,je_y}; \dots; q_{ext \rightarrow i,j_{max}e_x}; q_{ext \rightarrow i,j_{max}e_y} \right\} \right)$$
- \mathbf{U}_{si} : liste des écarts de situation élastiques des surfaces de la pièce i

$$\left(\mathbf{U}_{si} = \left\{ u_{i,1e_x}; u_{i,1e_y}; \dots; u_{i,je_x}; u_{i,je_y}; \dots; u_{i,j_{max}e_x}; u_{i,j_{max}e_y} \right\} \right)$$

La matrice \mathbf{K}_{si} correspond à la matrice de raideur de la pièce i dont les nœuds sont définis aux centres des liaisons. C'est une matrice de super-élément qui permet de restreindre le périmètre de l'étude aux centres des liaisons tout en prenant en compte la rigidité de la pièce complète (Chateaneuf, 2010). Ces matrices sont déterminées à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis. Dans le cas d'étude présenté dans le Chapitre IV, nous avons utilisé le logiciel Ansys (Moaveni, 2011).

Dans un premier temps, un maillage complet de la pièce est réalisé. La matrice de raideur \mathbf{K}_i associé au maillage complet est définie. La relation liant les déplacements de tous les nœuds du maillage, \mathbf{U}_i , et les efforts générés sur ces nœuds, \mathbf{Q}_i , est :

$$\mathbf{K}_i \mathbf{U}_i = \mathbf{Q}_i \quad (III-15)$$

Pour chaque surface i,je ($j \in \{1, \dots, j_{max}\}$) potentiellement en contact avec une surface de l'autre pièce, un nœud M_{ij} est ensuite associé au maillage de la surface et positionné au centre de la liaison. L'ensemble des nœuds M_{ij} définissent les nœuds maîtres du super-élément et pilotent les déplacements des surfaces. Les degrés de liberté (ddl) de chaque nœud sont du même type que les écarts de situation élastiques de la surface sélectionnée (voir Figure III.3). Ainsi dans l'exemple de l'arbre de la Figure III.9 réalisant une liaison Linéaire Annulaire d'axe z avec un alésage (non représenté sur la figure), seuls deux degrés de liberté seront activés par nœud : les translations suivant x et y (voir Figure III.9c).

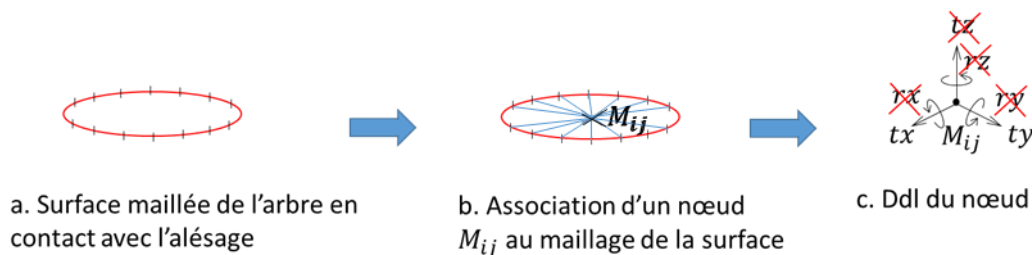


Figure III.9 – Choix des degrés de liberté des nœuds au centre de l'élément de contact (exemple d'une liaison Linéaire Annulaire)

Le système (III-15) est ensuite divisé en deux parties : la première concerne les degrés de liberté retenus (nœuds maîtres) du super-élément notés \mathbf{U}_{ri} (ddl des nœuds M_{ij}) et la seconde concerne les degrés de liberté condensés (éliminés) \mathbf{U}_{ci} . La relation (III-15) devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ri} \\ \mathbf{Q}_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rc} \\ \mathbf{K}_{cr} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{ri} \\ \mathbf{U}_{ci} \end{bmatrix} \quad (III-16)$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$(III-16) \rightarrow \mathbf{Q}_{ri} = \mathbf{K}_{rr}\mathbf{U}_{ri} + \mathbf{K}_{rc}\mathbf{U}_{ci} \quad (III-17)$$

$$(III-16) \rightarrow \mathbf{Q}_{ci} = \mathbf{K}_{cr}\mathbf{U}_{ri} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{U}_{ci} \quad (III-18)$$

L'équation (III-18) permet d'écrire :

$$(III-18) \rightarrow \mathbf{U}_{ci} = \mathbf{K}_{cc}^{-1}(\mathbf{Q}_{ci} - \mathbf{K}_{cr}\mathbf{U}_{ri}) \quad (III-19)$$

En utilisant l'équation (III-19), l'équation (III-17) devient :

$$(III-17) \text{ et } (III-19) \rightarrow \mathbf{Q}_{ri} = \mathbf{K}_{rr}\mathbf{U}_{ri} + \mathbf{K}_{rc}(\mathbf{K}_{cc}^{-1}(\mathbf{Q}_{ci} - \mathbf{K}_{cr}\mathbf{U}_{ri})) \quad (III-20)$$

$$(III-20) \rightarrow (\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{cr})\mathbf{U}_{ri} = \mathbf{Q}_{ri} - \mathbf{K}_{rc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{Q}_{ci} \quad (III-21)$$

Le système d'équilibre du super-élément est donc réduit à :

$$(III-21) \rightarrow \mathbf{K}_{Si}\mathbf{U}_{Si} = \mathbf{Q}_{Si} \quad (III-22)$$

Avec : $\mathbf{K}_{Si} = (\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{rc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{K}_{cr})$ et $\mathbf{Q}_{Si} = \mathbf{Q}_{ri} - \mathbf{K}_{rc}\mathbf{K}_{cc}^{-1}\mathbf{Q}_{ci}$.

Remarque : l'équation (III-22) correspond à l'équation (III-14).

Dans le cadre de ces travaux, nous avons choisi de n'imposer aucune condition limite aux nœuds condensés du système. Les termes de la liste \mathbf{Q}_{ci} seront donc toujours nuls. Ce choix est justifié par la volonté de laisser libre les déplacements des pièces l'une par rapport à l'autre et de ne pas empêcher les déformations des surfaces même loin de la zone d'assemblage. Les efforts de la liste \mathbf{Q}_{Si} sont donc égaux aux efforts générés sur les nœuds maîtres :

$$\mathbf{Q}_{Si} = \mathbf{Q}_{ri}$$

On remarque également que cette condensation n'est réalisable que si \mathbf{K}_{cc}^{-1} est inversible. Ceci est vrai seulement si les degrés de liberté de tous les nœuds maîtres permettent de bloquer les six degrés de liberté de la pièce. Dans le cas contraire, des degrés de liberté ou des nœuds fictifs seront déclarés pour permettre d'accéder aux matrices de raideur des super-éléments. Les déplacements correspondant à ces degrés de liberté seront ensuite laissés libres dans la résolution (les efforts appliqués seront nuls).

Cette démarche est réalisée sur la géométrie nominale des pièces. En effet, les écarts de fabrication étant faibles (inférieur à $0.1mm$), ils ne modifieront pas la raideur des pièces. Pour chaque nouvel assemblage, avec écarts de fabrication, il n'est pas utile de caractériser à nouveau les matrices de raideur des pièces.

III.3.2. Définition de l'état d'équilibre de l'assemblage

Dans un assemblage avec déformation, l'état d'équilibre est atteint lorsque le principe fondamental de la statique est respecté sur chaque pièce et au niveau de chaque contact. Ces conditions sont définies par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1): \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{j_{max}} (\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je}) = \mathbf{0} \\ \sum_{j=1}^{j_{max}} (\mathbf{m}_{O-ext \rightarrow 1,je}) = \mathbf{0} \end{array} \right. \\ (2): \forall j \in \{1, \dots, j_{max}\}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je} + \mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je} = \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{M_j-ext \rightarrow 1,je} + \mathbf{m}_{M_j-ext \rightarrow 2,je} = \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (III-23)$$

Avec :

- Equilibre d'une pièce : système (1)
 - $\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je}$: effort généré sur la surface 1,je,
 - $\mathbf{m}_{O-ext \rightarrow 1,je}$: moment généré sur la surface 1,je calculé au point O , centre de l'assemblage.

- Equilibre dans une zone de contact : système (2)
 - $\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}$: effort généré sur la surface 2,je,
 - $\mathbf{m}_{M_j-ext \rightarrow 1,je}$: moment généré sur la surface 1,je calculé au point M_j (centre de l'élément de contact),
 - $\mathbf{m}_{M_j-ext \rightarrow 2,je}$: moment généré sur la surface 2,je calculé au point M_j (centre de l'élément de contact).

Pour rappel, aucune condition limite n'est imposée sur les nœuds condensés des super-éléments afin de ne pas bloquer les déplacements relatifs des pièces. Des conditions limites seront uniquement imposées sur les nœuds maîtres des super éléments mais nous les ferons varier pendant la résolution. En effet, nous ne pouvons pas figer définitivement les positions des éléments de contact (position des nœuds maîtres) puisque notre objectif est de déterminer quels sont leurs écarts de situation après assemblage. Dans ces conditions, il n'est pas possible d'inverser les matrices \mathbf{K}_{S1} et \mathbf{K}_{S2} . Afin de ne pas avoir besoin d'inverser ces matrices, nous avons choisi de simuler l'assemblage en pilotant les déplacements appliqués sur les surfaces des pièces et non les efforts appliqués sur ces mêmes surfaces.

Ainsi, les efforts calculés correspondent aux efforts générés par les déformations des pièces et sont obtenus par la relation (III-14). Ces efforts sont ensuite traduits en effort de contact. Par exemple, pour deux surfaces 1,je et 2,je en contact, l'effort généré sur la surface 1,je par son déplacement représente l'effort de contact de la surface 2,je sur 1,je, et inversement (voir Figure III.10).

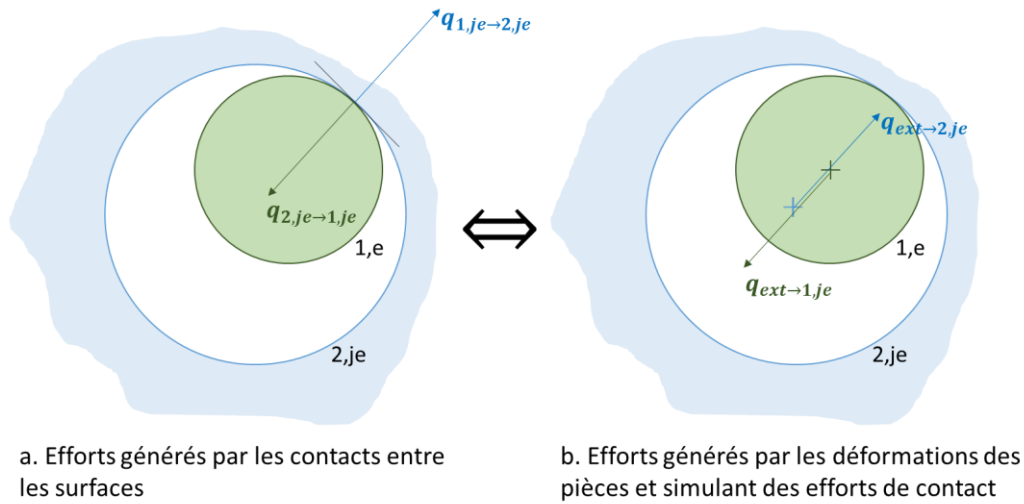


Figure III.10 – Simulation des efforts de contact

A cause de ce choix de modélisation, des conditions doivent être ajoutées à la relation (III-23) pour vérifier ces équilibres :

- Si dans une zone potentielle de contact, deux surfaces ne sont pas en contact (distance entre les surfaces inférieure au jeu local), les efforts générés sur ces surfaces sont nuls (voir Figure III.11a).

$$\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je} = \mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je} = \mathbf{0} \quad (III-24)$$

- Si les surfaces sont en contact (distance entre les surfaces est égale au jeu local), les efforts sont égaux et colinéaires au vecteur \mathbf{n} (voir Figure III.11b). De plus l'orientation de ces efforts tend à empêcher l'interpénétration des surfaces.

$$\frac{\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je}}{\|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je}\|} \cdot \mathbf{n} = -1 \text{ et } \frac{\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}}{\|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}\|} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (III-25)$$

$$\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je} + \mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je} = \mathbf{0} \quad (III-26)$$

Les efforts issus des déformations simulent alors les efforts générés par les contacts et les relations (III-24), (III-25) et (III-26) permettent de respecter le système (2) de la relation (III-23).

De plus, la résolution étant pilotée en déplacement, à chaque étape, les déplacements de tous les nœuds du système sont imposés. L'équilibre statique de chaque pièce (condition (1) du système (III-23)) sera donc toujours respecté et n'est pas à vérifier.

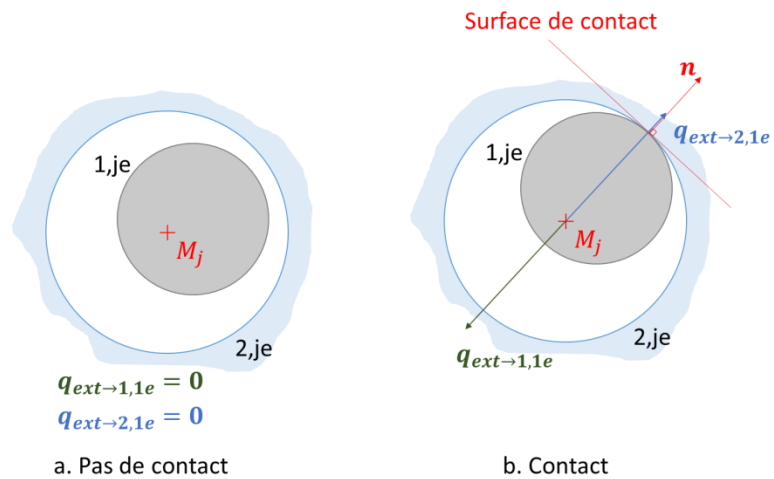


Figure III.11 – Efforts appliqués sur les surfaces en fonction de la configuration de contact

Finalement, l'état d'équilibre est atteint si, pour tous les couples de surfaces 1,je et 2,je ($j \in \{1; \dots; j_{max}\}$):

- Si les surfaces sont en contact :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je} + \mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je} = \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}}{\|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}\|} \cdot \mathbf{n} = 1 \end{cases} \quad (III-27)$$

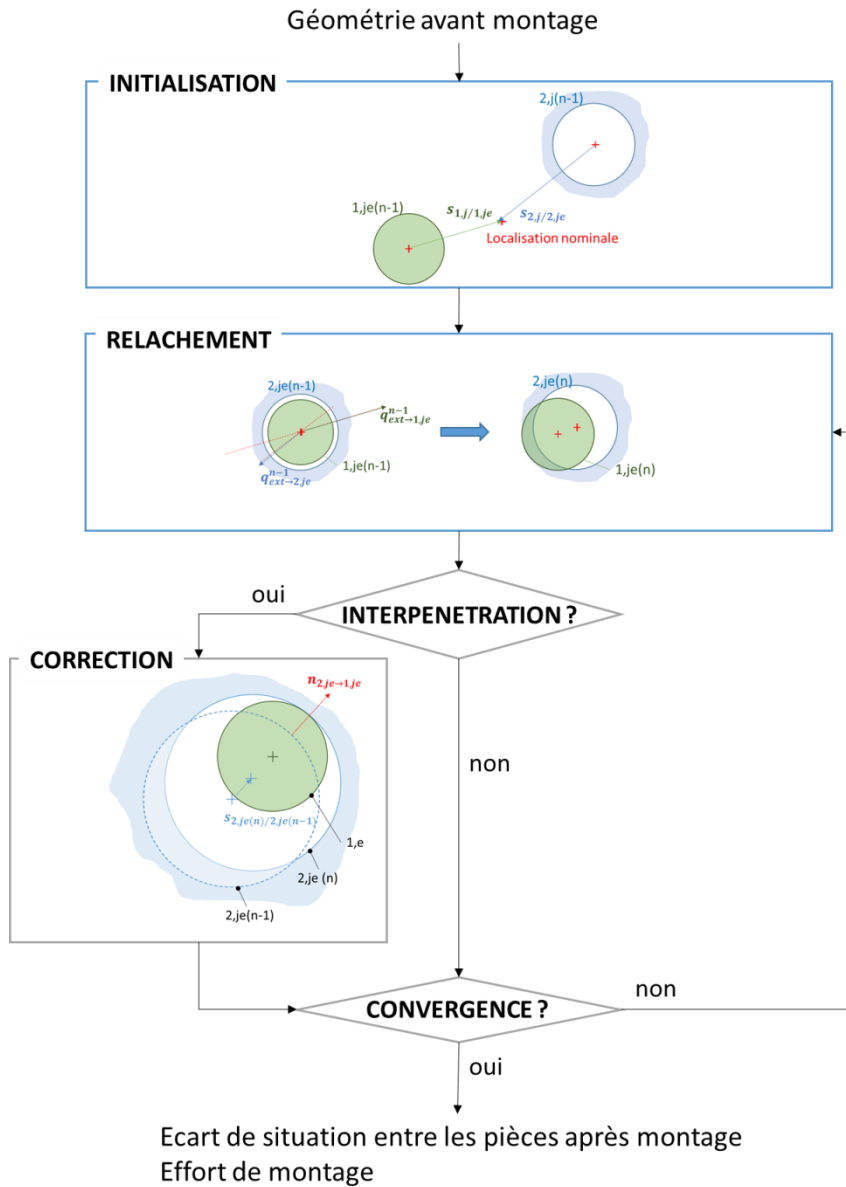
- Si les surfaces ne sont pas en contact :

$$\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je} = \mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je} = \mathbf{0} \quad (III-28)$$

Avec j_{max} : le nombre de surfaces.

III.4. Protocole de simulation

La résolution du système est réalisée par un calcul itératif en cinq étapes distinctes présentées sur la Figure III.12 et décrites dans cette partie.



- Gestion des pièces séparément
- Gestion des interactions entre les pièces

Figure III.12 – Procédé de simulation d'un assemblage avec déformation

a) Initialisation du système à résoudre

Afin de faciliter la convergence du calcul, nous devons débiter la résolution à partir d'une configuration où aucune surface n'est en interpénétration. Des déplacements sont donc imposés sur

chaque surface pour les ramener à leurs positions nominales respectives (voir Figure III.13a et Figure III.13b), tels que :

$$\forall j \in \{1, \dots, j_{max}\}, [s_{1,je/1,j}] = -[s_{1,j/1,0}] \quad (III-29)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, j_{max}\}, [s_{2,je/1,j}] = -[s_{2,j/2,0}] \quad (III-30)$$

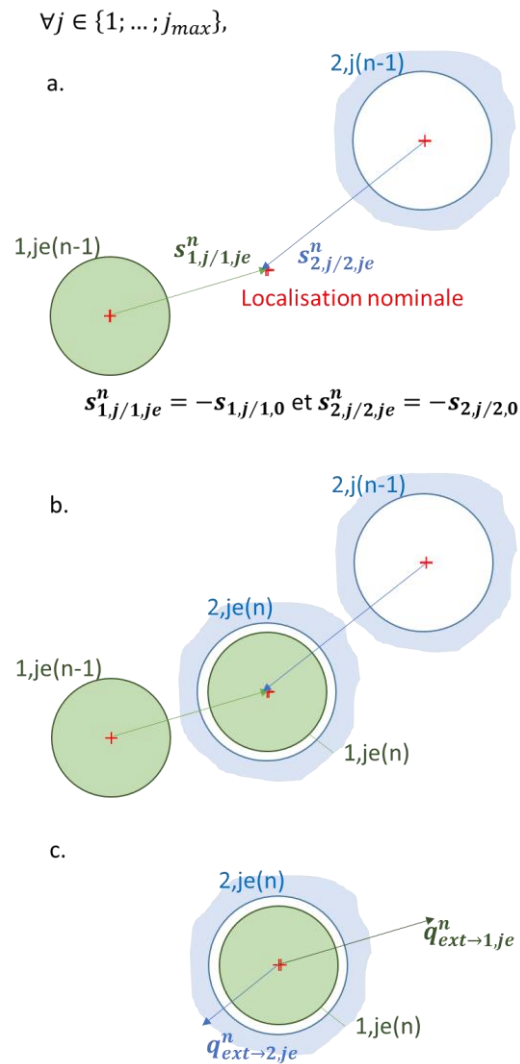


Figure III.13 – a. Ecart de situation issu de la fabrication, b. Retour aux localisations nominales, c. Efforts résultants

Les efforts générés par ces écarts élastiques sont obtenus en appliquant la relation (III-14). Ces efforts correspondent aux efforts nécessaires pour maintenir les pièces dans cet état de déformation et sont représentés sur la Figure III.13c.

b) Relâchement des surfaces

Dans cette étape, nous allons imposer des déplacements aux surfaces 1,je et 2,je, d'un pas p , qui simulent un relâchement de ces surfaces. Ces déplacements sont proportionnels aux efforts qui retiennent les surfaces.

Après différents essais, nous avons choisi un pas permettant un bon compromis entre précision et vitesse de convergence :

$$p = 1.10^{-3}mm \quad (III-31)$$

Remarque : si entre plusieurs itérations, le système oscille entre deux configurations ne correspondant pas à l'état d'équilibre statique, le pas de calcul est automatiquement divisé par deux.

Plus l'effort pour maintenir une surface est important plus cette surface sera relâchée. Au contraire, si l'effort nécessaire pour la maintenir dans cette position est faible, celle-ci est proche de sa position à l'état d'équilibre et son relâchement doit donc être plus faible.

Ainsi, pour toutes les surfaces i,je ($i \in \{1; 2\}, j \in \{1; \dots; j_{max}\}$), les normes des efforts appliqués sur ces surfaces sont calculées. Cette opération nous permet de déterminer les efforts (Q_{1max} et Q_{2max}) maximaux appliqués respectivement aux surfaces de la pièce 1 et de la pièce 2.

$$\forall i \in \{1; 2\}, Q_{imax} = \max_{j \in \{1, \dots, j_{max}\}} (\|q_{ext \rightarrow i,je}\|) \quad (III-32)$$

Pour chaque surface i,je , des déplacements sont ensuite imposés (voir Figure III.14), tels que :

$$\forall i \in \{1; 2\}, \forall j \in \{1; \dots; j_{max}\}, \begin{cases} t_{M_{j-i,je/i,j_x}}^n = t_{M_{j-i,je/i,j_x}}^{n-1} - \frac{q_{ext \rightarrow i,je_x}}{Q_{imax}} \cdot p \\ t_{M_{j-i,je/i,j_y}}^n = t_{M_{j-i,je/i,j_y}}^{n-1} - \frac{q_{ext \rightarrow i,je_y}}{Q_{imax}} \cdot p \end{cases} \quad (III-33)$$

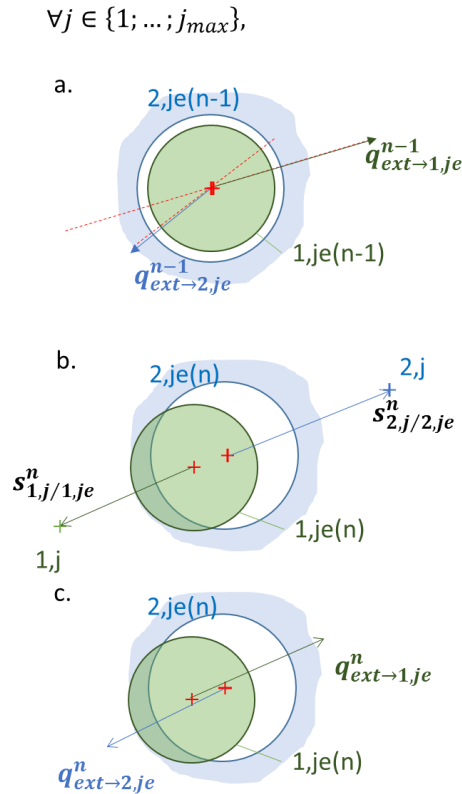


Figure III.14 – a. Direction des déplacements imposés, b. Déplacements imposés, c. Nouveaux efforts appliqués aux nœuds maîtres

Les efforts nécessaires pour maintenir ces nouveaux écarts élastiques sont obtenus en appliquant la relation (III-14) et sont représentés sur la Figure III.14c.

c) Détection des interpénétrations des surfaces

Après chaque relâchement des surfaces, nous examinons l'assemblage afin de vérifier qu'aucune surface de la pièce 1 n'est en interpénétration avec une surface de la pièce 2.

Cette étape est réalisée en appliquant la méthode présentée dans la partie III.2.3. La distance, d_j , entre les surfaces 1,je et 2,je est calculée et permet de savoir si les deux surfaces sont en interpénétration.

d) Correction des interpénétrations

Considérons qu'à l'étape précédente, une interpénétration a été détectée entre les surfaces 1,je et 2,je.

Comme expliqué dans la partie III.2.3, les composantes du vecteur e_j (voir Figure III.7) dont la norme correspond à la distance e_j indiquent quels déplacements minimaux sont à imposer aux surfaces pour corriger les interpénétrations (voir Figure III.15).

On pose :

$$e_j = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

Ces déplacements peuvent être imposés en totalité à la surface 1,je ou à la surface 2,je. Afin de faciliter la convergence des calculs, il est plus intéressant de partager le déplacement à réaliser entre les deux surfaces au prorata des efforts qui leur sont appliqués (par analogie avec la méthode appliquée à l'étape « Relâchement des surfaces »).

Pièce 1 :

$$\forall j \in \{1; \dots; j_{max}\}, \text{ si } P_j \cap P_0 = \emptyset, \begin{cases} t_{M_{j-1,je/1,j_x}}^n = t_{M_{j-1,je/1,j_x}}^{n-1} + \frac{|q_{ext \rightarrow 2,je_x}|}{|q_{ext \rightarrow 1,je_x}| + |q_{ext \rightarrow 2,je_x}|} \cdot e_x \\ t_{M_{j-1,je/1,j_y}}^n = t_{M_{j-1,je/1,j_y}}^{n-1} + \frac{|q_{ext \rightarrow 2,je_y}|}{|q_{ext \rightarrow 1,je_y}| + |q_{ext \rightarrow 2,je_y}|} \cdot e_y \end{cases} \quad (III-34)$$

Pièce 2 :

$$\forall j \in \{1; \dots; j_{max}\}, \text{ si } P_j \cap P_0 = \emptyset, \begin{cases} t_{M_{j-2,je/2,j_x}}^n = t_{M_{j-2,je/2,j_x}}^{n-1} - \frac{|q_{ext \rightarrow 1,je_x}|}{|q_{ext \rightarrow 1,je_x}| + |q_{ext \rightarrow 2,je_x}|} \cdot e_x \\ t_{M_{j-2,je/2,j_y}}^n = t_{M_{j-2,je/2,j_y}}^{n-1} - \frac{|q_{ext \rightarrow 1,je_y}|}{|q_{ext \rightarrow 1,je_y}| + |q_{ext \rightarrow 2,je_y}|} \cdot e_y \end{cases} \quad (III-35)$$

Les efforts nécessaires pour générer ces nouveaux écarts élastiques sont obtenus en appliquant la relation entre la matrice de raideur K_{Si} et les déplacements U_{Si} (relation (III-14)).

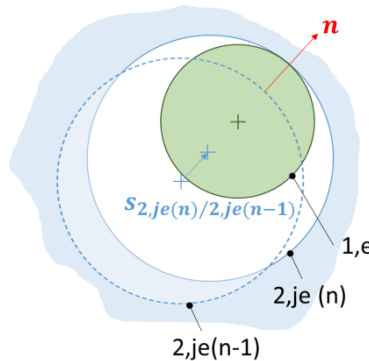


Figure III.15 – Correction des interpénétrations (exemple de correction de 2,je seule)

e) Contrôle de la convergence

Dans un premier temps, nous appliquons la méthode présentée dans la partie III.2.3 pour déterminer quel couple de surfaces 1,je / 2,je sont en contact ou non. Pour chaque surface en contact, la normale de contact, n , est ensuite caractérisée (voir partie II.2.3).

Une fois ce travail réalisé, nous pouvons vérifier que dans chaque zone potentielle de contact entre deux surfaces :

- S'il n'y a pas contact, les efforts appliqués sur les deux surfaces au centre de la zone sont nuls (cf relation (III-28)),
- S'il y a contact, les efforts appliqués sur les deux surfaces au centre de la zone satisfont la relation (III-27).

En appliquant la relation (III-14), nous pouvons ensuite déterminer les efforts nécessaires pour générer ces déplacements de nœuds.

Nous considérons que les relations (III-27) et (III-28) sont satisfaites si, pour tous les couples de surfaces 1,je / 2,je :

- Si les surfaces sont en contact :

$$(III-27) \rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je} + \mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}\| \leq 1N \\ \frac{\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}}{\|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}\|} \cdot \mathbf{n} > 0.9999 \end{cases} \quad (III-36)$$

- Si les surfaces ne sont pas en contact :

$$(III-28) \rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je}\| \leq 1N \\ \|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 2,je}\| \leq 1N \end{cases} \quad (III-37)$$

Si tel est le cas, la résolution s'arrête. Sinon nous continuons les itérations.

III.5. Conformité d'un assemblage

III.5.1. Respect de la Condition de Montage

Lorsque l'état d'équilibre est atteint, l'effort nécessaire pour réaliser l'assemblage, F_M , est estimé. L'assemblage est réalisable si cet effort n'est pas supérieur à un effort limite F_L . F_L représente l'effort maximal admissible pour assembler les pièces.

L'effort de montage F_M est déduit des efforts locaux de liaison à partir d'un modèle de Coulomb avec un coefficient de frottement c_f de 0.15 (Rouetbi, et al., 2017). Le problème étant plan et les contacts entre les surfaces ponctuels, nous pouvons appliquer la relation suivante :

$$F_M = c_f \cdot \sum_{j=1}^{j_{max}} (\|\mathbf{q}_{ext \rightarrow 1,je}\|) \quad (III-38)$$

Avec j_{max} : nombre de liaisons entre les pièces.

III.5.2. Respect d'une Condition Fonctionnelle

Nous étudions ici les propagations des déformations dans les pièces, afin de reconstruire les repères de chacune et vérifier le respect d'une Condition Fonctionnelle de position, orientation et / ou forme.

La méthode d'analyse développée permet de modéliser l'assemblage de deux pièces en se focalisant sur les zones potentiellement en contact. Lorsque l'état d'équilibre est atteint, nous pouvons facilement remonter aux déformations de n'importe quelles zones des pièces.

Pour cela, de nouvelles matrices de raideur de super-éléments sont générées pour chaque pièce. Ces matrices relient les déplacements des nœuds définis aux centres des liaisons et des nœuds définis dans les zones dont nous voulons connaître la déformée. Les degrés de liberté de ces

nouveaux nœuds sont de dimension 6 (3 translations et 3 rotations). Le système d'équilibre de ce nouveau super-élément s'écrit :

$$\mathbf{F}'_{Si} = \mathbf{K}'_{Si} \mathbf{U}'_{Si} \quad (III-39)$$

Ce système est ensuite divisé en deux parties. La première concerne les déplacements des surfaces des liaisons, \mathbf{U}_{Si} , qui ont été déterminés dans la partie III.4. La seconde concerne les déplacements de nœuds libres, notés \mathbf{U}_{Li} , qui traduisent les déplacements des nœuds des surfaces spécifiées par la Condition Fonctionnelle.

Ainsi pour chaque pièce, on obtient la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{Si} \\ \mathbf{Q}_{Li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SSi} & \mathbf{K}_{SLi} \\ \mathbf{K}_{LSi} & \mathbf{K}_{LLi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Si} \\ \mathbf{U}_{Li} \end{bmatrix} \quad (III-40)$$

Avec :

- \mathbf{Q}_{Si} : liste des efforts appliqués aux nœuds associés aux surfaces de contact de la pièce i.
- \mathbf{Q}_{Li} : liste des efforts appliqués aux nœuds associés aux surfaces libres de la pièce i dont nous voulons connaître les déplacements. Puisqu'aucune contrainte n'est appliquée sur ces surfaces, les efforts de cette liste sont nuls.
- \mathbf{U}_{Si} : liste des déplacements appliqués aux nœuds associés aux surfaces de contact de la pièce i (déterminés dans la partie III.4).
- \mathbf{U}_{Li} : liste des déplacements appliqués aux nœuds associés aux surfaces libres de la pièce i. Les composantes de cette liste sont les inconnues du problème.

Déterminons les composantes de la liste \mathbf{U}_{Li} :

$$(III-40) \rightarrow \forall i \in \{1; 2\}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{Si} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{SSi} & \mathbf{K}_{SLi} \\ \mathbf{K}_{LSi} & \mathbf{K}_{LLi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{Si} \\ \mathbf{U}_{Li} \end{bmatrix} \quad (III-41)$$

$$(III-41) \rightarrow \forall i \in \{1; 2\}, [\mathbf{0}] = [\mathbf{K}_{LSi} \mathbf{U}_{Si} + \mathbf{K}_{LLi} \mathbf{U}_{Li}] \quad (III-42)$$

$$(III-42) \rightarrow \forall i \in \{1; 2\}, [\mathbf{U}_{Li}] = [\mathbf{K}_{LLi}]^{-1} [-\mathbf{K}_{LSi} \mathbf{U}_{Si}] \quad (III-43)$$

\mathbf{K}_{LLi} est inversible car les déplacements de corps rigide ont été bloqués en imposant les positions des nœuds reliés aux surfaces i, j ($j \in \{1, \dots, j_{max}\}$).

La relation (III-43) permet de déterminer par un calcul direct l'ensemble des déplacements des nœuds libres de la pièce i. A partir des positions de ces nœuds, nous pouvons ensuite vérifier le respect d'une Condition Fonctionnelle de position, d'orientation et / ou de forme. Un exemple sera présenté dans le Chapitre IV.

III.6. Analyse de tolérances statistique d'un système déformable

L'analyse de tolérances statistique d'un système hyperstatique composé, de deux pièces 1 et 2 déformables, peut être décrite par le procédé général présenté sur la Figure III.16.

Comme dans la partie II.5, les données d'entrée sont les écarts géométriques $GD_{1,j}$ et $GD_{2,j}$, des surfaces respectives des pièces 1 et 2, générés par tirage de Monte Carlo.

Les données de sortie sont le taux de montage, AR% (Assembly Rate) et le taux de respect de la Condition Fonctionnelle, FR% (Functional Rate).

AR% est le taux d'assemblages réalisés sans interférence ou avec un effort d'assemblage, F_M , inférieur à F_L parmi une population de p_{max} assemblages. Les p_{max} assemblages sont générés aléatoirement à partir d'une population de p_{max} pièces 1 et p_{max} pièces 2.

La méthode, pour déterminer si les assemblages peuvent être réalisés, est détaillée dans les parties II.4.1 et III.5.1.

FR% est le taux d'assemblages réalisables et respectant la Condition Fonctionnelle parmi les p_{max} assemblages générés.

Comme dans le Chapitre II, nous considérons qu'un assemblage ne pouvant être réalisé ne répond pas à la Condition Fonctionnelle du mécanisme. Dans tous les cas, on a donc :

$$FR\% \leq AR\% \quad (III-44)$$

La méthode générale pour vérifier qu'un assemblage donné respecte une Condition Fonctionnelle est détaillée dans les parties II.4.2 et III.5.2.

```

Entrée :  $\{EG_{1,j}(p)\}, \{EG_{2,j}(p)\}, 1 \leq p \leq p_{max}, 1 \leq j \leq j_{max}$ 
Sortie : AR% des pièces 1 et 2
           FR% des pièces 1 et 2

AR% = 0% ; FR% = 0%
for p = 1 to pmax
  if (PR ≠ ∅) then
    PAS D'INTERFERENCE DE CONTACT entre les pièces 1 et 2
    AR% = AR% + 1/pmax

    if (Condition sur [s1,0/2,0] = TRUE) then
      CF RESPECTÉE
      FR% = FR% + 1/pmax
    else
      CF NON RESPECTÉE
    end if

  else
    if (F ≤ Fmax) then
      PAS D'INTERFERENCE DE CONTACT entre les pièces 1 et 2
      AR% = AR% + 1/pmax

      if (Condition sur [s1,0/2,0] = TRUE) then
        CF RESPECTÉE
        FR% = FR% + 1/pmax
      else
        CF NON RESPECTÉE
      end if

    else
      ASSEMBLAGE NON REALISABLE
    end if
  end if
next p

```

Figure III.16 – Analyse de tolérances statistique d'un système déformable

III.7. Synthèse

Une méthode d'analyse des assemblages hyperstatiques avec interférences a été présentée. Les déformations des pièces permettant l'assemblage sont modélisées par des écarts de situation élastiques des surfaces.

Une réduction du modèle aux surfaces de contact est réalisée par la méthode des super-éléments. Un seul calcul sur la géométrie nominale de chaque pièce est effectué pour déterminer les matrices de raideur de chaque super-élément à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis.

Un solveur itératif détermine ensuite la valeur des écarts de situation élastiques de chaque surface afin qu'à l'issue de l'analyse aucune surface ne soit en interférence et que l'équilibre statique du système soit respecté. Cette réduction est réalisée en quelques secondes seulement (voir le cas

d'application présenté dans le Chapitre IV), permettant ainsi de réaliser des études statistiques dans des temps compatibles avec un besoin industriel.

De plus, les contacts entre les surfaces ne sont pas forcés. Ainsi la mise en position relative entre les pièces est libre. A l'issue de la résolution, il est ainsi possible de trouver que certaines surfaces ne sont pas en contact.

Chapitre IV. Application au cas d'étude

IV.1. Présentation du système étudié

Nous allons appliquer les concepts présentés dans les paragraphes précédents à l'analyse d'une bride composée de deux pièces. La mise en position des pièces est assurée par un contact plan / plan et cinq liaisons pion / alésage. Les pièces sont ensuite maintenues en position par un ensemble de quinze boulons (voir Figure IV.1). Ces liaisons sont souvent utilisées dans les domaines de l'aéronautique, du spatial, de la physique nucléaire...

La pièce portant les pions est la pièce 1 et la pièce portant les alésages est la pièce 2.

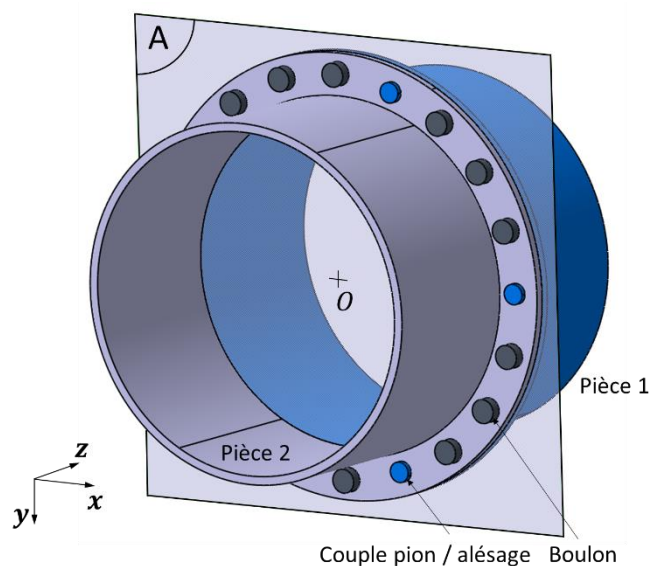


Figure IV.1 – Liaison par bride

L'objectif de l'étude est de déterminer quelles spécifications et quelles tolérances doivent être imposées pour respecter la Condition Fonctionnelle de forme en Zone Commune de 0.11mm (voir Figure IV.2). Ce cas d'étude est un exemple académique pour montrer l'application de notre méthode sur un modèle concret. Un cas d'étude industriel est présenté dans le Chapitre Confidentiel de ce manuscrit.

Les géométries nominales des pièces sont représentées sur la Figure IV.2 et détaillées dans le Tableau IV-1.

Les surfaces $1,j$ et $2,j$ ($j \in \{1, \dots, 5\}$) sont respectivement les pions et les alésages. Les surfaces 1,6 et 2,6 sont nominalement planes. Enfin, les surfaces 1,7 et 2,7 sont nominalement cylindriques.

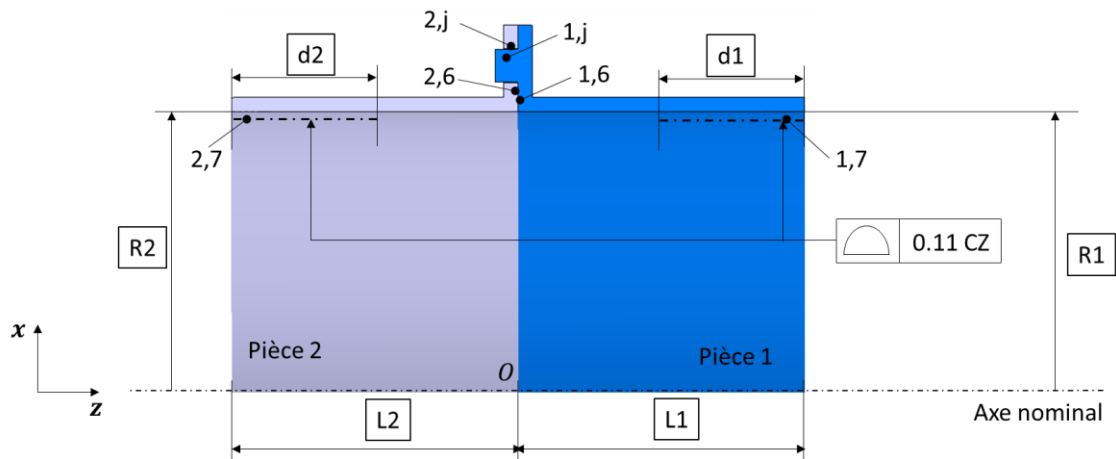


Figure IV.2 – Condition fonctionnelle

Tableau IV-1 – Géométries nominales des pièces

Description	Notation	Valeur
Rayon théorique d'implantation des pions et des alésages	R_{th}	$R_{th} = 58mm$
Angles théoriques d'implantation des pions et des alésages	θ_{th_j} avec $1 \leq j \leq 5$	$\begin{cases} \theta_{th_1} = 0^\circ \\ \theta_{th_2} = 72^\circ \\ \theta_{th_3} = 144^\circ \\ \theta_{th_4} = 216^\circ \\ \theta_{th_5} = 288^\circ \end{cases}$
Diamètre nominal des pions et des alésages	D_n	$D_n = 6mm$
Longueur des pièces	$L1 = L2 = L$	$L = 50mm$
Rayon des surfaces cylindriques	$R1 = R2 = R$	$R = 50mm$
Longueur des portées fonctionnelles	$d1 = d2 = d$	$d = 25mm$

IV.2. Analyse fonctionnelle du système

Nous allons réaliser une analyse fonctionnelle du système afin de déterminer quels cycles sont influents sur la Condition Fonctionnelle et ainsi quelles spécifications doivent être imposées pour garantir son respect.

IV.2.1. Structure topologique du mécanisme

La Figure IV.3 présente le graphe des contacts du mécanisme étudié.

Le contact plan 1,6 / plan 2,6 est modélisé par une liaison Appui Plan.

Les contacts pion 1,j / alésage 2,j (avec $j \in \{1; \dots; 5\}$) sont modélisés par des liaisons Linéaires Annulaires. Nous avons choisi ce type de modèle car les épaisseurs des brides (2mm) sont faibles par rapport aux diamètres des pions et des alésages (6 mm).

Ainsi l'orientation de la pièce 1 par rapport à la pièce 2, autour des axes x et y , est assurée par la liaison Appui Plan. Les couples pions / alésages limitent uniquement les déplacements de la pièce 1 par rapport à la pièce 2 dans le plan de la bride, soit en translation suivant les axes x et y ainsi qu'en rotation autour de l'axe z .

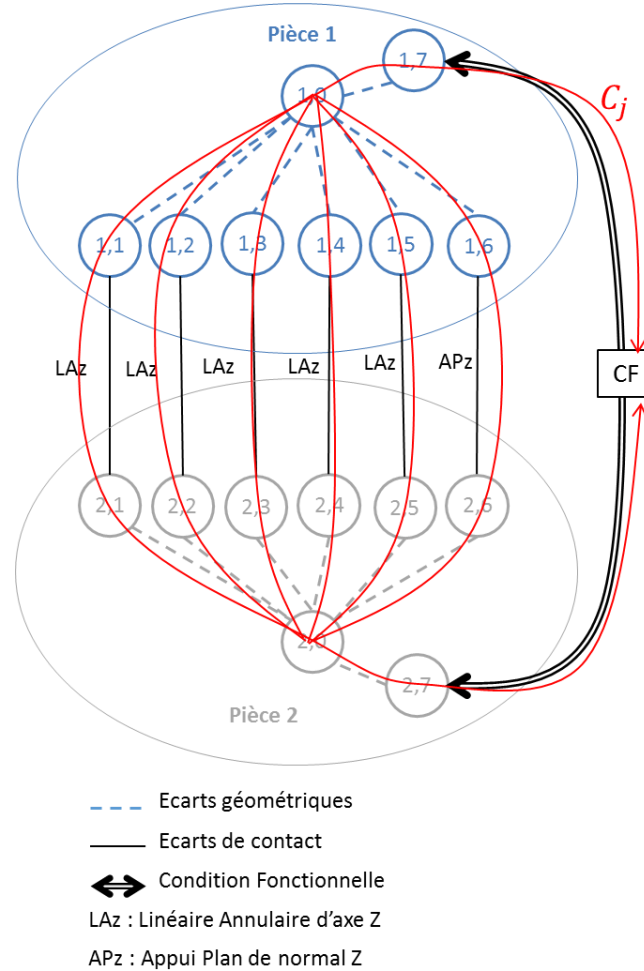


Figure IV.3 – Graphe des contacts du système

Les cycles influents (C_j) sur la Condition Fonctionnelle (CF) sont représentés sur la Figure IV.3. Comme décrit dans la partie I.2.1.3, chaque cycle est caractérisé en s'appuyant sur la relation de Chasles et l'ensemble de ces cycles est défini par la relation (IV-1).

$$\{[s_{1,7/2,7}] = [s_{1,7/1,0}] + \bigcap_{j=1}^6 ([s_{1,0/1,j}] + [s_{1,j/2,j}] + [s_{2,j/2,0}]) + [s_{2,0/2,7}]\} \quad (IV-1)$$

IV.2.2. Choix des spécifications

IV.2.2.1. Respect de la Condition de Montage

En utilisant l'équation (I-8), nous pouvons déterminer le degrés d'hyperstatisme de ce système.

Une liaison Linéaire Annulaire est une liaison de degré 2, et une liaison Appui Plan est une liaison de degré 3 (voir Figure I.7). De plus, le mécanisme ne présente aucune mobilité ($m = 0$).

D'où :

$$\begin{cases} Ns = 5 * 2 + 3 = 13 \\ p = 2 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow hs = 13 - 6 * (2 - 1) + 0 = 7 \quad (IV-2)$$

Le système est donc hyperstatique de degré sept. Cela signifie qu'en fonction des écarts de fabrication des surfaces, toutes les boucles topologiques du mécanisme ne pourront peut-être pas être satisfaites en même temps. Dans ce cas, des interférences empêcheront d'assembler les pièces sans interférence. Si ces interférences sont trop grandes, le mécanisme ne pourra pas être assemblé.

La Figure IV.4 montre un exemple d'assemblage avec interférences, quel que soit la position relative de la pièce 1 par rapport à la pièce 2, les pièces ne pourront pas être assemblées sans générer des déformations dans les pièces. Seuls les éléments de la bride sont représentés.

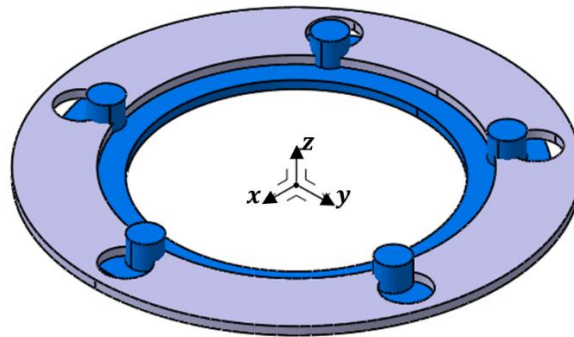
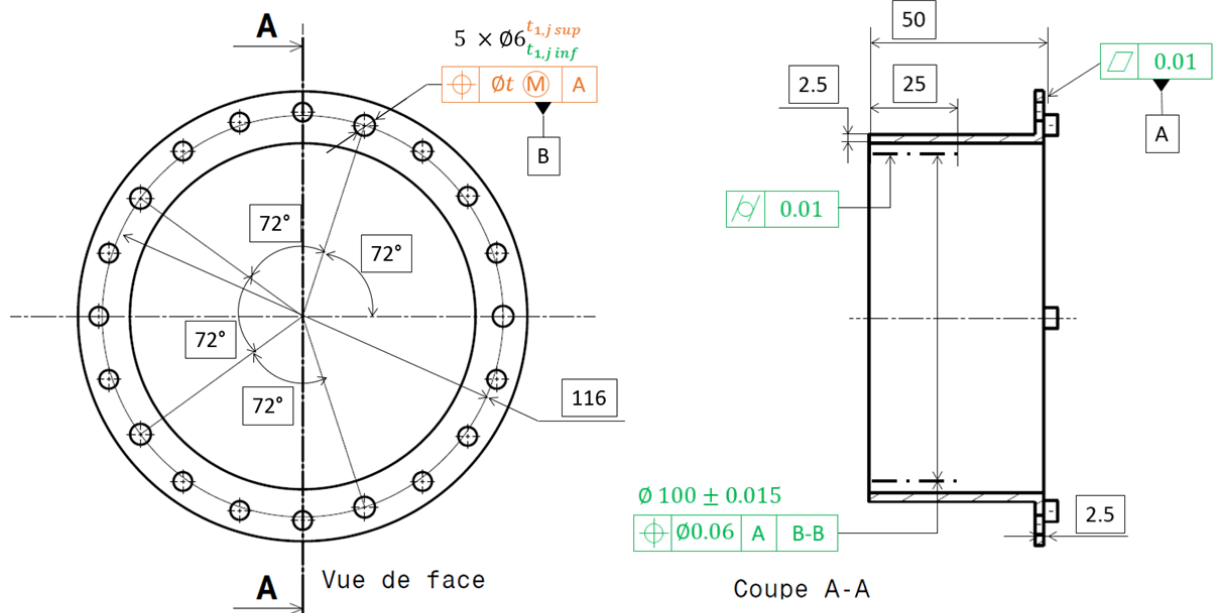


Figure IV.4 – Assemblage avec interférences

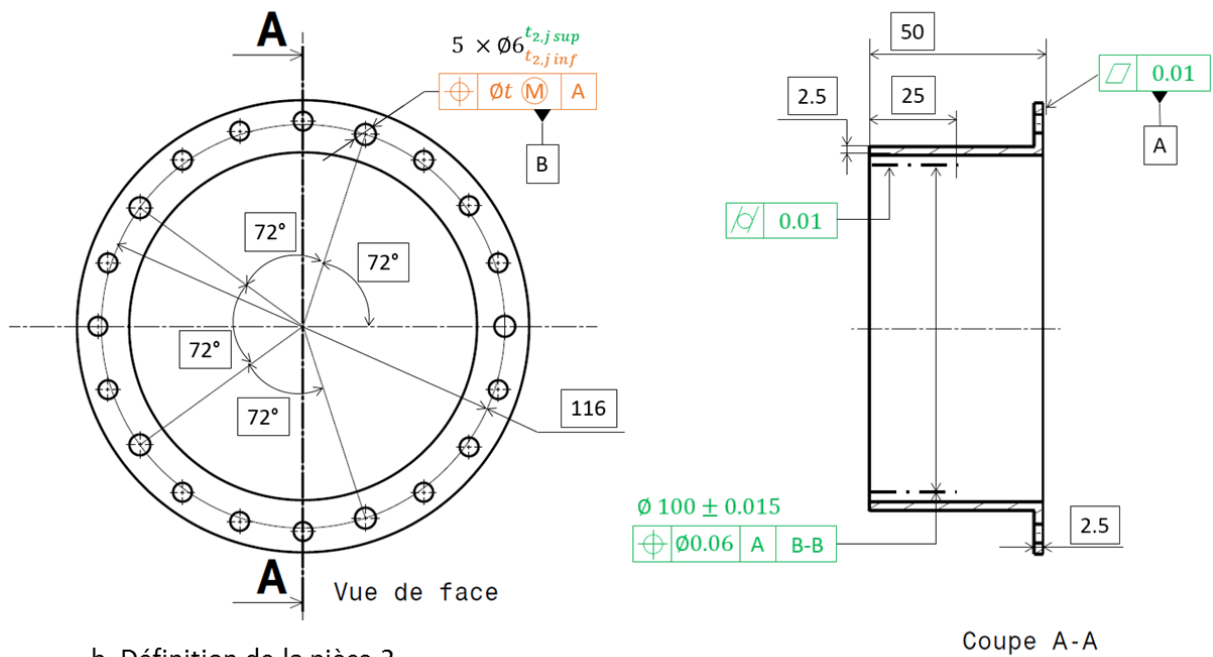
Cet hyperstatisme est provoqué par la redondance des liaisons pions / alésages. Pour garantir l'assemblage des pièces, des spécifications sont ajoutées afin de maîtriser :

- La position relative des pions entre eux.
- La position relative des alésages entre eux.
- Le jeu minimal dans la bride au travers de l'ajustement pion / alésage.

Ces spécifications sont représentées en orange sur la Figure IV.5.



a. Définition de la pièce 1



b. Définition de la pièce 2

Figure IV.5 – Dessin de définition des pièces

IV.2.2.2. Respect de la Condition Fonctionnelle

La Condition Fonctionnelle contraint en déplacement ($t_{0-1,7/2,7_x}$ et $t_{0-1,7/2,7_y}$) et en orientation ($r_{1,7/2,7_x}$ et $r_{1,7/2,7_y}$) les surfaces 1,7 et 2,7.

Des spécifications sont mises en place pour limiter les écarts influents sur le respect de la Condition Fonctionnelle.

Ces spécifications limitent :

- Les écarts de dimension et de situation des surfaces 1,7 et 2,7 par rapport aux surfaces de la bride.
- Le jeu maximal dans la bride au travers de l'ajustement pion / alésage.

L'ensemble de ces spécifications sont représentées en vert sur la Figure IV.5. L'ajustement pion / alésage sera choisi pour garantir le respect de la Condition Fonctionnelle, les autres spécifications vertes sont fixes, elles seront prises en compte dans l'analyse de tolérances mais ne seront pas optimisées.

Des spécifications de forme sont imposées sur certaines surfaces fonctionnelles mais ne sont pas prises en compte dans cette étude.

IV.3. Analyse de tolérances

Dans cette partie nous allons comparer plusieurs méthodes d'analyse de tolérances afin de déterminer les ajustements des pions et des alésages ainsi que les tolérances associées aux localisations de leurs centres.

En production, les diamètres des pions et des alésages sont souvent plus faciles à respecter que des localisations. Nous allons donc imposer un ajustement pion / alésage permettant de garantir le respect de la Condition Fonctionnelle pour 100% des assemblages produits.

Dans un second temps, nous optimiserons la valeur t des deux tolérances de localisation des pions et des alésages. Notre objectif est de choisir les tolérances les plus larges possibles pour faciliter la production et réduire les coûts tout en respectant la Condition de Montage.

Pour choisir la valeur t des tolérances, trois types d'analyse seront comparés :

- Analyse au pire des cas,
- Analyse statistique en hypothèse de solides infiniment rigides,
- Analyse statistique avec déformation.

Afin de limiter la taille de l'analyse, nous fixons les conditions suivantes :

- Les tolérances associées aux localisations des pions et des alésages ont la même valeur t ,
- Les diamètres des pions sont de qualité 6,
- Les diamètres des alésages sont de qualité 8.

IV.3.1. Détermination de l'ajustement pion / alésage

L'analyse de tolérances au pire des cas va nous permettre de déterminer quel ajustement pion / alésage choisir afin de respecter la Condition Fonctionnelle du mécanisme pour 100% des assemblages produits.

Dans un premier temps, nous allons calculer le polytope PR des écarts de situation de la surface 1,7 par rapport à la surface 2,7 en considérant que la bride est parfaite (le jeu dans la liaison est nul et les localisations des pions et des alésages sont centrées sur leurs localisations nominales). Un polytope géométrique caractérise uniquement les écarts de situation des surfaces. Afin de prendre en compte les écarts dimensionnels des surfaces, ceux-ci sont intégrés au polytope fonctionnel PF .

Dans un second temps, nous allons donc caractériser un polytope fonctionnel PF qui intègre les écarts de dimension des surfaces 1,7 et 2,7 au pire des cas (nous reviendrons sur cette partie plus loin).

Comme expliqué dans la partie II.4.2, si $PR \subset PF$ l'assemblage est conforme. L'écart de dimension entre le polytope résultant PR et le polytope fonctionnel PF nous donnera finalement le jeu maximal pion / alésage à ne pas dépasser pour respecter la Condition Fonctionnelle dans 100% des cas.

a) Définition du polytope résultant du système PR

D'après la relation (IV-1), les écarts de situation de la surface 1,7 par rapport à la surface 2,7 résultent du cumul de trois composantes :

$$PR = P_{1,7/1,0} \oplus P_{1,0/2,0} \oplus P_{2,0/2,7} \quad (IV-3)$$

Où :

- $P_{1,7/1,0}$ et $P_{2,0/2,7}$ dépendent uniquement des spécifications de localisation des surfaces 1,7 et 2,7. Les tolérances associées à ces spécifications ne sont pas optimisées dans cette étude. Ces deux polytopes sont donc constants.
- $P_{1,0/2,0}$ est le polytope de la liaison par bride, il dépend des ajustements pions / alésages et des écarts de localisation de leurs centres respectifs.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous considérons dans un premier temps que la liaison par bride ne génère aucun écart de situation. Le polytope $P_{1,0/2,0}$ est donc un sommet confondu avec l'origine des déplacements. $P_{1,0/2,0}$ n'a aucun impact sur le résultat de la somme de Minkowski (IV-3).

Ainsi, l'équation (IV-3) devient :

$$PR = P_{1,7/1,0} \oplus P_{2,0/2,7} \quad (IV-4)$$

Commençons par définir le polytope $P_{1,7/1,0}$.

La Figure IV.6 représente la zone de tolérance de localisation limitant les écarts de situation de la surface 1,7 par rapport à la bride. Pour rappel le diamètre de cette zone de tolérance est fixé à 0.060mm. Les écarts de forme des surfaces étant négligés, il suffit de garantir l'inclusion des deux extrémités, N_1 et N_2 , de l'axe du cylindre 1,7 dans la zone de tolérance pour garantir l'inclusion de l'axe complet.

Les extrémités de la zone de tolérance sont discrétisées en k points et les conditions sur les écarts de situation des points N_1 et N_2 sont définies, en chaque point de discrétisation, par :

$$\forall k \in \{1, \dots, k_{max}\} \begin{cases} -0.030 \text{ mm} \leq \mathbf{t}_{N_1} \cdot \mathbf{n}_{1k} \leq 0.030 \text{ mm} \\ -0.030 \text{ mm} \leq \mathbf{t}_{N_2} \cdot \mathbf{n}_{2k} \leq 0.030 \text{ mm} \end{cases} \quad (IV-5)$$

Avec :

- \mathbf{t}_{N_j} : les écarts de translation du point N_j ($j \in \{1; 2\}$) par rapport au référentiel de la bride,
- \mathbf{n}_{jk} : le vecteur normal à l'axe de la bride orienté suivant le point de discrétisation k .

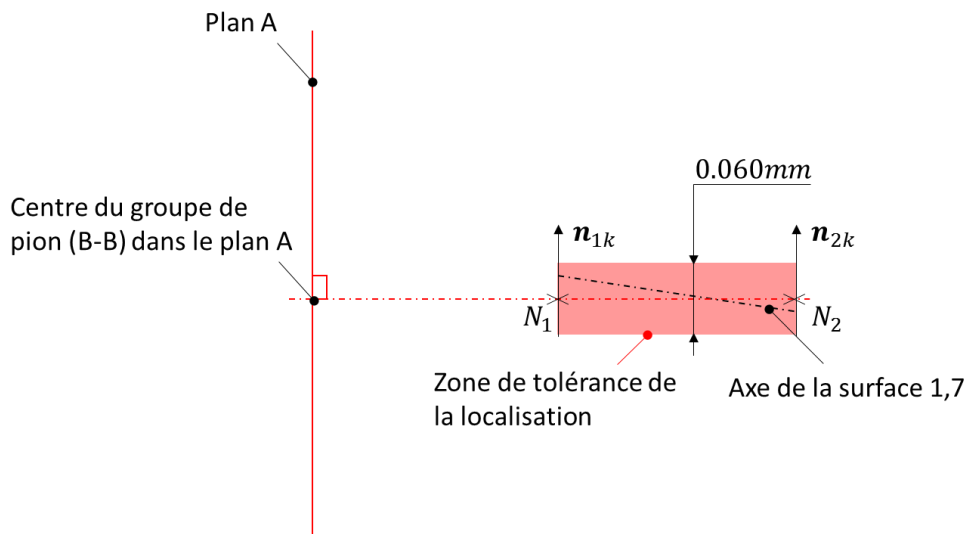
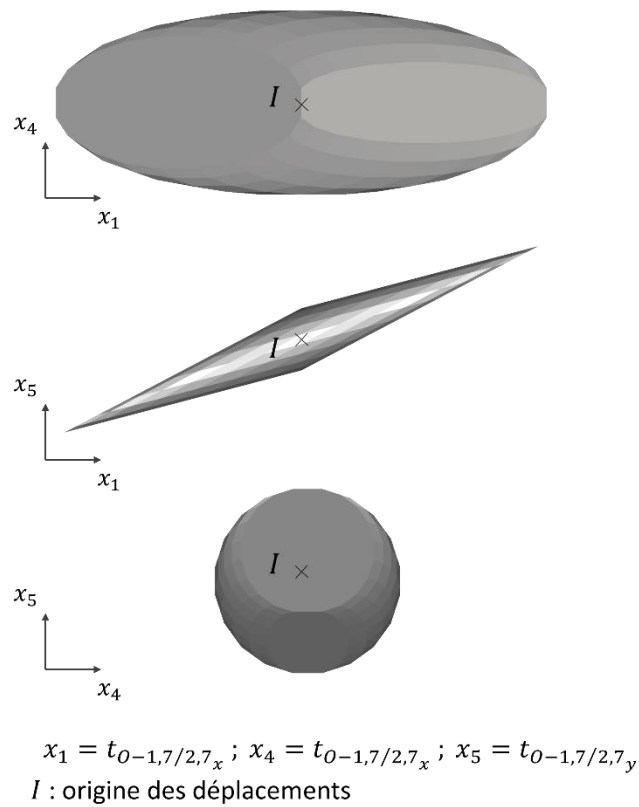


Figure IV.6 – Zone de tolérance limitant les écarts de situation de la surface 1,7

Les mêmes contraintes sont définies sur l'axe de la surface 2,7. Les H-descriptions des polytopes $P_{1,7/1,0}$ et $P_{2,7/2,0}$, décrivant les écarts de situation des axes 1,7 et 2,7 au pire des cas, sont données en Annexe 1 et en Annexe 2.

Le polytope résultant du système PR est ensuite déterminé en appliquant la relation (IV-3). Ce polytope est déterminé dans $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_4, x_5)$. La Figure IV.7 représente des projections dans (x_1, x_4) , (x_1, x_5) et (x_4, x_5) .

Figure IV.7 – Polytope résultant *PR*

b) Définition du polytope fonctionnel *PF*

Dans le cas de tolérances en zone commune, chaque surface possède une zone de tolérance qui peut être modélisée par un polytope en appliquant la méthode présentée dans le Chapitre II. Ces zones sont visibles en rouge sur la Figure IV.8. Le polytope fonctionnel du système est ensuite obtenu en calculant la somme de Minkowski des deux polytopes opérands (Arroyave-Tobón, 2017).

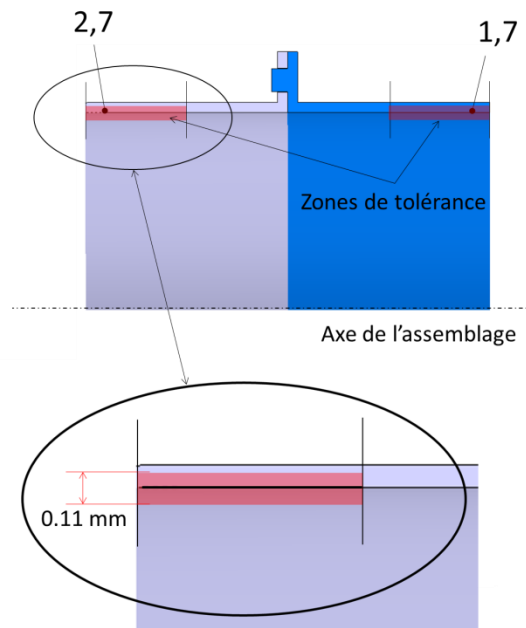


Figure IV.8 – Zones de tolérance associée à la Condition Fonctionnelle

Soit $PF_{1,7}$ le polytope fonctionnel bornant les écarts de situation de la surface 1,7.

Soit $PF_{2,7}$ le polytope fonctionnel bornant les écarts de situation de la surface 2,7.

Ainsi, le polytope fonctionnel PF du mécanisme est défini par la relation :

$$PF = PF_{1,7} \oplus PF_{2,7} \quad (IV-6)$$

Nous allons uniquement calculer le polytope fonctionnel $PF_{1,7}$. Le polytope $PF_{2,7}$ pourra être déterminé en suivant la même démarche.

La Figure IV.9 représente la Zone de Tolérance dans laquelle doit être incluse la surface 1,7. Cette zone est délimitée par les bornes t_{inf} et t_{sup} , avec :

- t_{inf} : la tolérance inférieure de la Condition Fonctionnelle ($t_{inf} = -0.055 \text{ mm}$).
- t_{sup} : la tolérance supérieure de la Condition Fonctionnelle ($t_{sup} = 0.055 \text{ mm}$).

Une partie de la Zone de Tolérance est consommée par l'écart dimensionnel de la surface (représenté en rouge sur la Figure IV.9). Au pire des cas, cet écart varie entre d_{inf} et d_{sup} :

- d_{inf} : la tolérance inférieure de dimension de la surface 1,7 ($d_{inf} = -0.015 \text{ mm}$).
- d_{sup} : la tolérance supérieure de dimension de la surface 1,7 ($d_{sup} = 0.015 \text{ mm}$).

La zone restante, en bleu sur la figure, correspond aux écarts de situation admissibles au pire des cas.

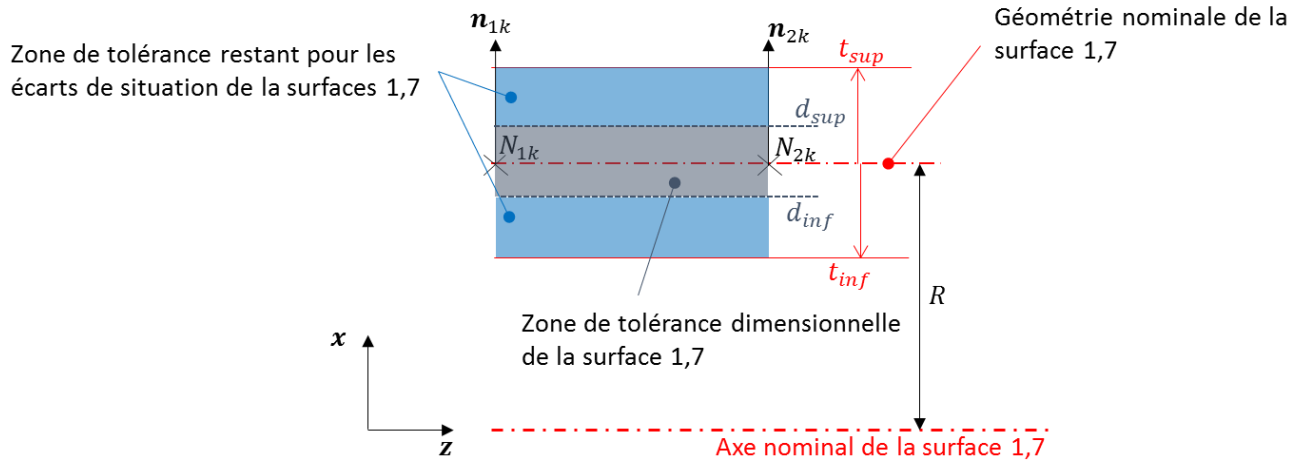


Figure IV.9 – Ecart de diamètre de la surface 1,7 par rapport à sa géométrie nominale

Les écarts de forme étant négligés, seules les positions des points situés sur les deux cercles aux extrémités de la surface 1,7 sont caractérisées. Chacun de ces cercles est ensuite discrétisé en k_{max} points. Les points situés sur le cercle 1 sont nommés N_{1k} et les points situés sur le cercle 2 sont nommés N_{2k} . Les contraintes de déplacement appliquées à ces points, prenant en compte l'écart de dimension de la surface, sont définies par les relations :

$$\forall k \in \{1; \dots; k_{max}\}, \begin{cases} t_{inf} - \frac{d_{inf}}{2} \leq \mathbf{t}_{N_{1k}} \cdot \mathbf{n}_{1k} \leq t_{sup} - \frac{d_{sup}}{2} \\ t_{inf} - \frac{d_{inf}}{2} \leq \mathbf{t}_{N_{2k}} \cdot \mathbf{n}_{2k} \leq t_{sup} - \frac{d_{sup}}{2} \end{cases} \quad (IV-7)$$

Avec :

- $\mathbf{t}_{N_{jk}}$: les écarts de translation du point N_{jk} ($j \in \{1; 2\}$) par rapport à la géométrie nominale de la surface 1,7.
- \mathbf{n}_{jk} : le vecteur normal à la surface 1,7 au point de discrétisation N_{jk} ($j \in \{1; 2\}$).

La H-description du polytope $PF_{1,7}$ est donnée en Annexe 3. Elle a été calculée en appliquant la relation (IV-7).

La H-description du polytope $PF_{2,7}$ est obtenue de la même façon (voir Annexe 4).

Après détermination des polytopes $PF_{1,7}$ et $PF_{2,7}$, nous pouvons calculer le polytope fonctionnel PF en appliquant la relation (IV-6). Ce polytope a été déterminé dans $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, x_4, x_5)$ et sa projection dans $\mathbb{R}^2(x_4, x_5)$ est représentée sur la Figure IV.10 en rouge. L'enveloppe grise autour de ce polytope correspond au polytope fonctionnel calculé sans écart de dimension. Le volume entre ces deux polytopes (en gris clair sur la figure) montre l'espace consommé par les écarts de dimension au pire des cas. PF représente alors le volume de déplacement admissible pour les écarts de situations entre les surfaces 1,7 et 2,7 après montage.

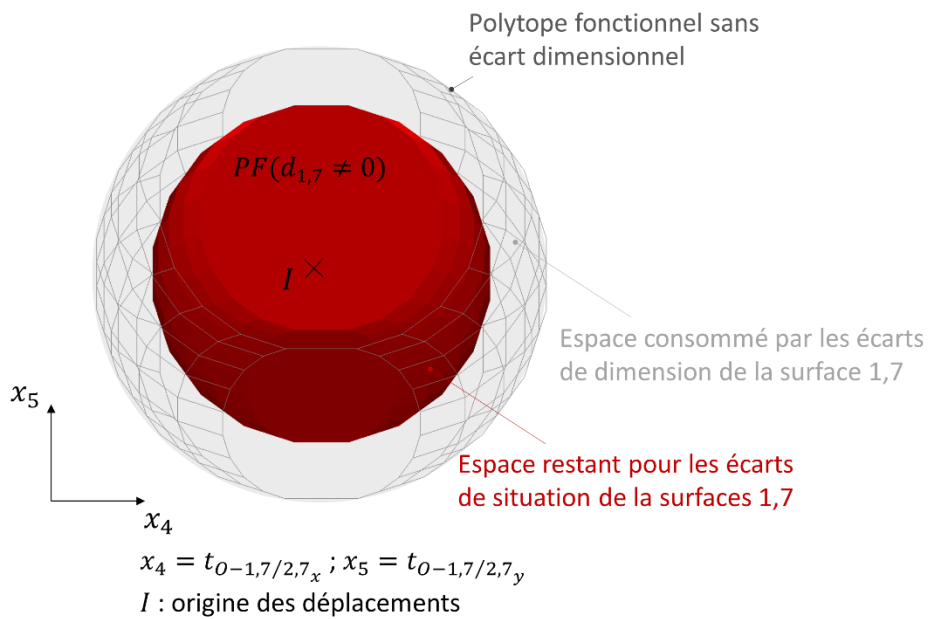


Figure IV.10 – Comparaison de deux polytopes fonctionnels avec et sans écart de dimension

c) Choix de l'ajustement pion / alésage

Dans la section a) le polytope PR caractérisant le cumul des écarts de situation des surfaces 1,7 et 2,7 au pire des cas a été calculé.

Dans la section b) nous avons déterminé le polytope fonctionnel PF du système caractérisant la limite des écarts de situation entre les surfaces 1,7 et 2,7 à ne pas dépasser pour respecter la Condition Fonctionnelle.

Les projections de PR et PF , dans $\mathbb{R}^2(x_4, x_5)$, sont représentées respectivement en gris et en bleu sur la Figure IV.11. Nous pouvons déjà constater que PR est inclus dans PF . Les tolérances imposées aux surfaces 1,7 et 2,7 permettent donc de respecter la Condition Fonctionnelle au pire des cas.

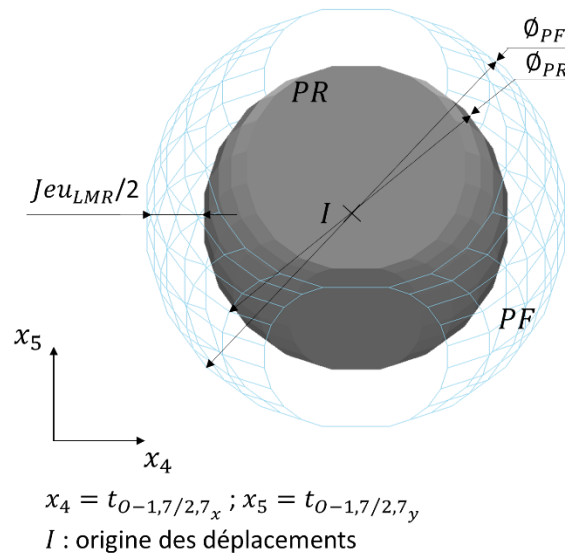


Figure IV.11 – Comparaison du polytope au pire des cas et du polytope fonctionnel en 2d

L'écart de dimension entre PR et PF est noté Jeu_{LMR} . Il correspond au jeu maximal pion / alésage à ne pas dépasser pour respecter la condition fonctionnelle.

Dans \mathbb{R}^2 , les projections de ces polytopes sont des cercles (discrétisés).

Soit ϕ_{PR} le diamètre du polytope PR dans $\mathbb{R}^2 (x_4, x_5)$. ϕ_{PR} correspond au cumul des tolérances appliquées aux surfaces 1,7 et 2,7.

$$\phi_{PR} = 0.060 + 0.060 = 0.120mm \quad (IV-8)$$

Soit ϕ_{PF} le diamètre du polytope PF en 2d. ϕ_{PF} est égale à deux fois la valeur de la condition fonctionnelle appliquée sur les surfaces 1,7 et 2,7 moins les écarts de dimension de ces surfaces au pire des cas :

$$\phi_{PF} = 2 \times 0.11 - 2 \times 0.030 = 0.160mm \quad (IV-9)$$

La relation (IV-10) permet de déterminer la valeur maximale de Jeu_{LMR} à ne pas dépasser pour que PR soit inclus dans PF :

$$Jeu_{LMR} < \phi_{PF} - \phi_{PR} \quad (IV-10)$$

Soit :

$$Jeu_{LMR} < 0.040mm \quad (IV-11)$$

Le jeu au minimum de matière Jeu_{LMR} (LMR : Least Material Requirement) correspond au jeu résultant entre la pièce 1 et la pièce 2 dans leurs états au minimum de matière. Ce jeu est obtenu en utilisant des gabarits au minimum de matière représentés sur la Figure IV.12.

Le gabarit de la pièce 1 est composé de cinq cercles de diamètre $D_{1,j LMR}$ localisés sur les centres nominaux des pions. Le gabarit de la pièce 2 est composé de cinq cercles de diamètre $D_{2,j LMR}$

localisés sur les centres nominaux des alésages. Les diamètres des gabarits sont définis par les relations suivantes (ISO2692, 2014) :

$$D_{1,j LMR} = (D_n + d_{1,j inf})$$

$$D_{2,j LMR} = (D_n + d_{2,j sup})$$

Avec :

- D_n : le diamètre nominal des pions et des alésages ($D_n = 6mm$),
- $d_{1,j inf}$: la borne inférieure de la spécification géométrique des diamètres des pions,
- $d_{2,j sup}$: la borne supérieure de la spécification géométrique des diamètres des alésages.

$$Jeu_{LMR} = D_{2,j LMR} - D_{1,j LMR} \quad (IV-12)$$

$$(IV-11) \text{ et } (IV-12) \rightarrow D_{2,j LMR} - D_{1,j LMR} < \phi_{PF} - \phi_{PR} \quad (IV-13)$$

$$D_{2,j LMR} - D_{1,j LMR} < 0.040mm \quad (IV-14)$$

Afin de garantir le respect de la Condition Fonctionnelle au pire des cas, l'ajustement pion / alésage choisi doit garantir un jeu maximal inférieur à $40\mu m$.

Pour rappel, la qualité des pions est fixée à 6 et la qualité des alésages à 8.

Ainsi nous pouvons par exemple choisir un ajustement $\emptyset 6f6G8$:

$$\emptyset 6f6 \Leftrightarrow \emptyset 6_{-18}^{-10} \quad (IV-15)$$

$$\emptyset 6G8 \Leftrightarrow \emptyset 6_{+4}^{+22} \quad (IV-16)$$

Le jeu au minimum de matière est alors de $40\mu m$.

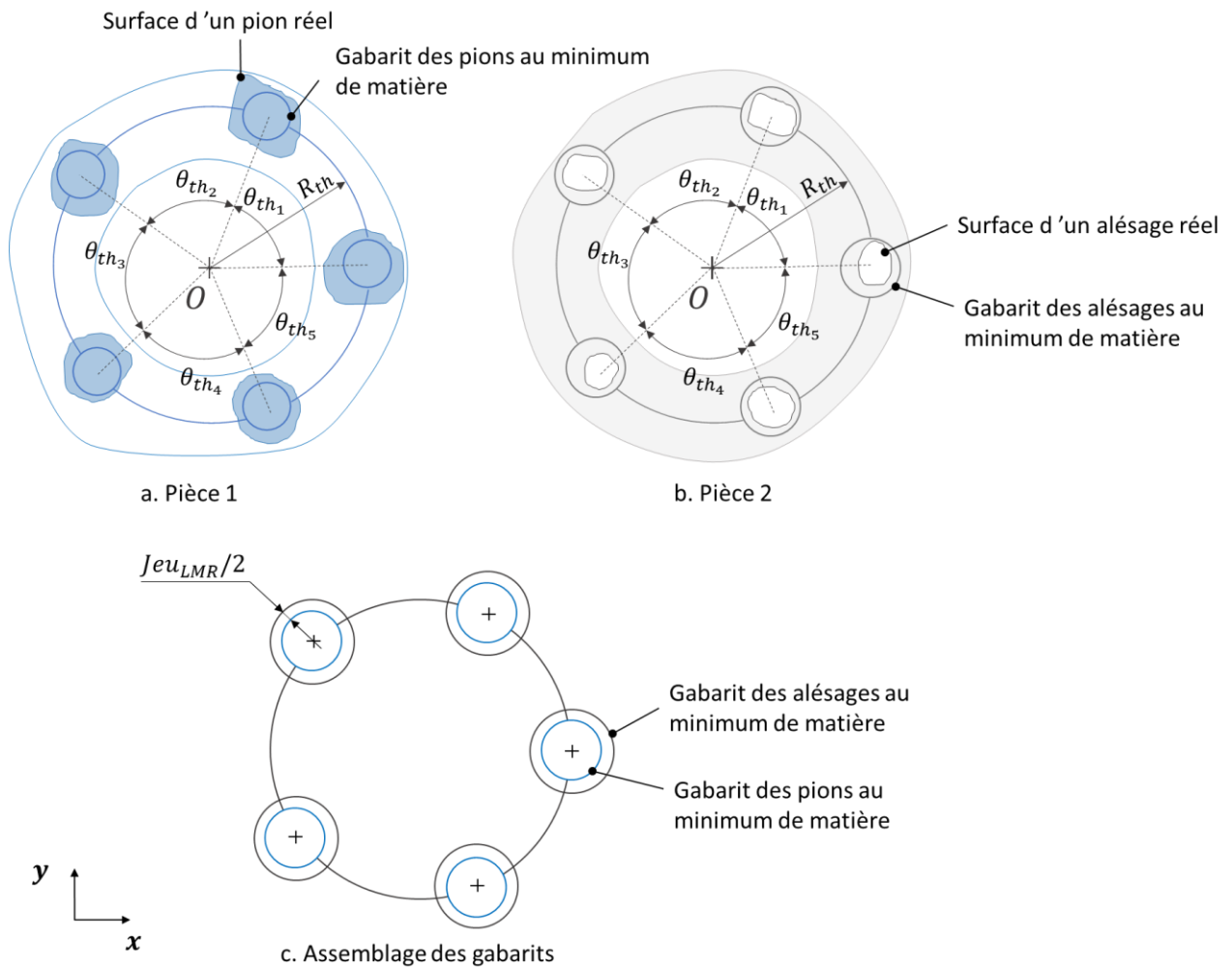


Figure IV.12 – Gabarits au minimum de matière

IV.3.2. Détermination des tolérances de localisation

IV.3.2.1. Analyse au pire des cas

L'ajustement pion / alésage étant fixé, nous allons maintenant déterminer quelle tolérance de localisation, t , doit être appliquée aux pions et aux alésages pour garantir le respect de la Condition de Montage. Une première approche consiste à garantir que 100% des assemblages produits s'assembleront sans interférence.

La condition d'interférence de montage des pièces 1 et 2 est directement exprimée à l'aide des gabarits au maximum de matière. Les conditions de conformité des pièces 1 et 2 reposent sur l'inclusion des surfaces potentiellement en contact dans les gabarits au maximum de matière respectivement associés aux spécifications de localisation des pièces 1 et 2.

Le gabarit de la pièce 1 est composé de cinq cercles de diamètre $D_{1,j MMR}$ localisés sur les centres nominaux des pions. Le gabarit de la pièce 2 est composé de cinq cercles de diamètre $D_{2,j MMR}$

localisés sur les centres nominaux des alésages. Les diamètres des gabarits sont définis par les relations suivantes (ISO2692, 2014) :

$$D_{1,j MMR} = (D_n + d_{1,j sup}) + t$$

$$D_{2,j MMR} = (D_n + d_{2,j inf}) - t$$

Avec :

- D_n : le diamètre nominal des pions et des alésages ($D_n = 6mm$),
- $d_{1,j sup}$: la borne supérieure de la spécification géométrique des diamètres des pions ($d_{1,j sup} = -0.010mm$),
- $d_{2,j inf}$: la borne inférieure de la spécification géométrique des diamètres des alésages ($d_{2,j inf} = 0.004mm$),
- t : la dimension des zones de tolérance de localisation au maximum de matière des pions et des alésages.

Les gabarits associés aux pièces 1 et 2 sont représentés respectivement en Figure IV.13a et Figure IV.13b.

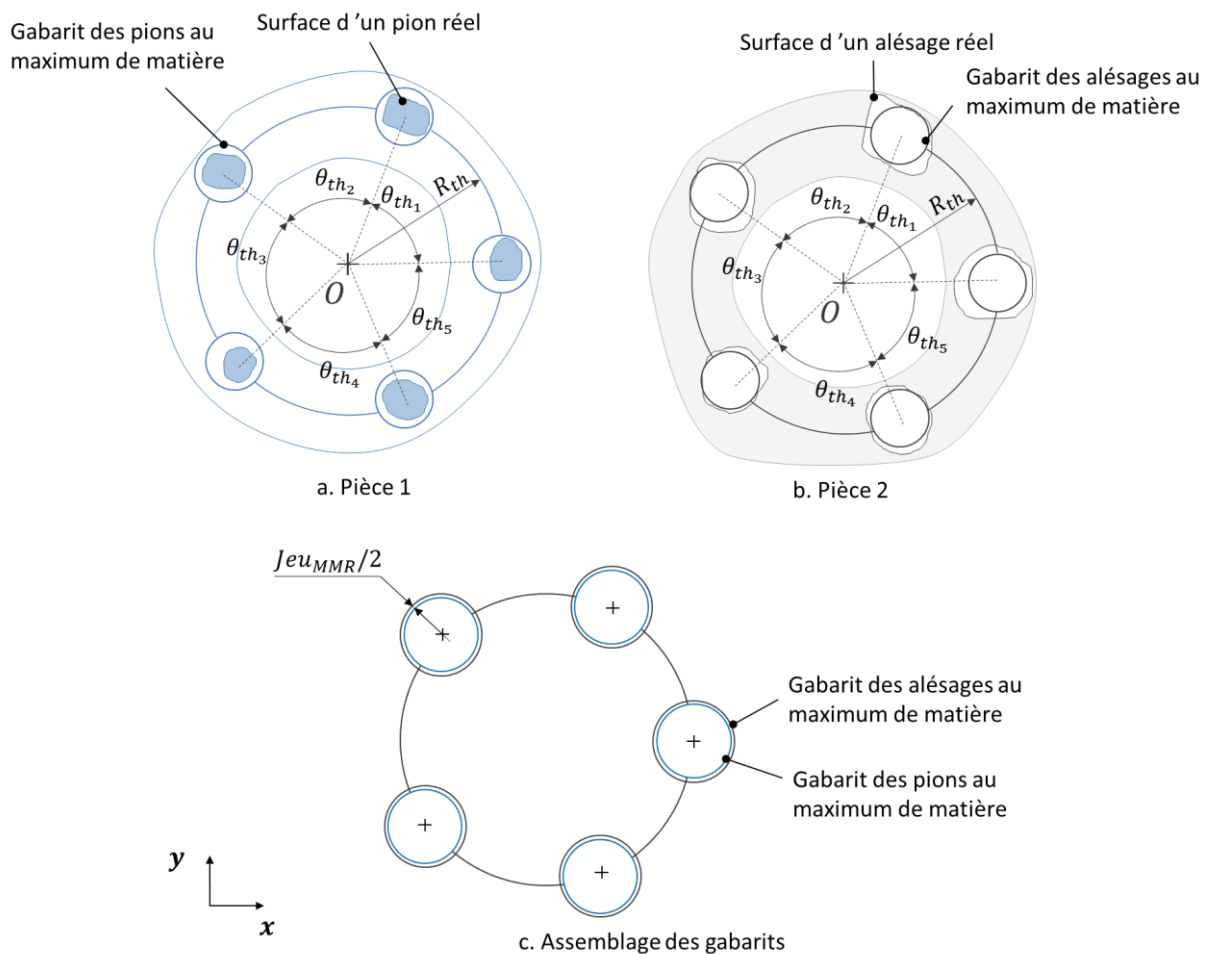


Figure IV.13 – Gabarits au maximum de matière

Le montage des pièces est garanti sans interférence, si le gabarit des pions est inclus dans le gabarit des alésages, soit si tous les jeux locaux entre les cercles des gabarits pions 1,j /alésages 2,j sont strictement positifs (voir Figure IV.13c).

Ces jeux locaux étant égaux, il suffit de vérifier la condition de non-interférence sur une seule paire de pion et d'alésage. Ceci consiste à vérifier que le jeu au maximum de matière soit strictement positif :

$$Jeu_{MMR} > 0 \quad (IV-17)$$

$$D_{2,j MMR} - D_{1,j MMR} > 0 \quad (IV-18)$$

$$(D_n + d_{2,j inf} - t) - (D_n + d_{1,j sup} + t) > 0 \quad (IV-19)$$

$$t < \frac{d_{2,j inf} - d_{1,j sup}}{2} \quad (IV-20)$$

$$t < \frac{0.014}{2} \quad (IV-21)$$

$$t < 0.007mm \quad (IV-22)$$

Afin que 100% des pièces produites soient assemblées sans interférence, les axes des pions et des perçages doivent être contenus dans des zones de tolérance de diamètre $7\mu m$.

IV.3.2.2. Analyse statistique

Dans cette partie nous allons déterminer au travers d'une analyse statistique, quelles tolérances de localisation des pions et des alésages choisir pour garantir le respect de la condition d'assemblage pour 99% des assemblages produits.

IV.3.2.2.1. Paramétrage des écarts de fabrication des pièces

a) *Écarts de fabrication des pions et des alésages*

Les liaisons pions / alésages étant modélisées par des liaisons linéaires annulaires, les écarts d'orientation des pions et des alésages sont négligés. Seuls les écarts de position et de dimension sont exprimés. Les axes des pions et des alésages sont ainsi considérés parallèles au plan de bride A. Les pions et les alésages peuvent donc être représentés par des cercles projetés dans le plan de bride.

Le Figure IV.14, le Tableau IV-2 et le Tableau IV-3 regroupent l'ensemble des écarts de dimension et de situation des pions et des alésages. Les écarts de dimension sont les écarts de diamètre respectifs des pions et des alésages. Les écarts de situation sont les écarts en translation suivant les axes x et y des centres des pions et des alésages.

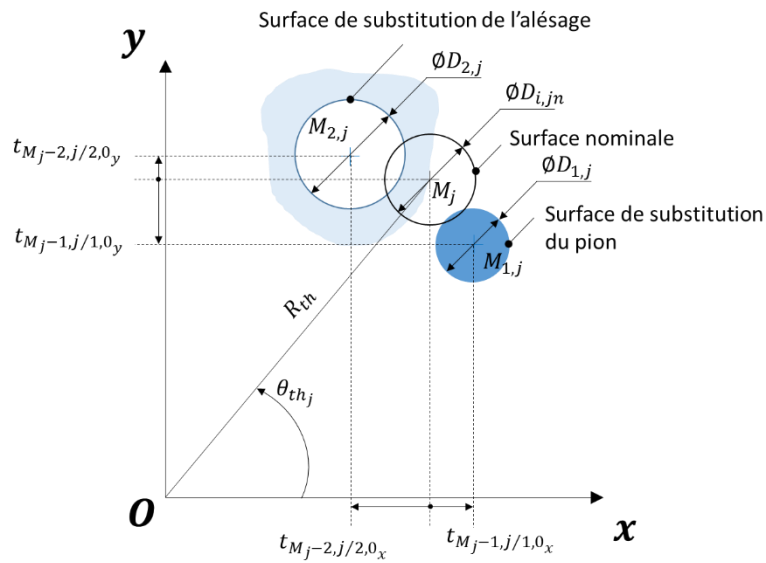


Figure IV.14 – Paramétrage des écarts géométriques des pions et des alésages

Tableau IV-2 – Paramétrage des écarts de fabrication des pions ($j \in \{1, \dots, 5\}$)

Diamètre réel	$D_{1,j}$
Ecart de localisation suivant l'axe x au point M_j	$t_{M_{j-1,j}/1,0_x}$
Ecart de localisation suivant l'axe y au point M_j	$t_{M_{j-1,j}/1,0_y}$

Tableau IV-3 – Paramétrage des écarts de fabrication des alésages ($j \in \{1, \dots, 5\}$)

Diamètre réel	$D_{2,j}$
Ecart de localisation suivant l'axe x au point M_j	$t_{M_{j-2,j}/2,0_x}$
Ecart de localisation suivant l'axe y au point M_j	$t_{M_{j-2,j}/2,0_y}$

b) Écarts de fabrication des surfaces cylindriques 1,7 et 2,7 par rapport aux surfaces de la bride

Seuls trois types d'écart participent aux défauts des surfaces 1,7 et 2,7 :

- Ecart de diamètre du cylindre par rapport à son diamètre nominal,
- Ecart de perpendicularité de l'axe du cylindre par rapport au plan A de la bride,
- Ecart de position de l'axe du cylindre par rapport à la référence |A|B-B|.

Pour rappel, les écarts de cylindricité des surfaces sont négligés par hypothèse.

Les paramètres associés à ces écarts sont présentés dans les Tableau IV-4 et Tableau IV-5.

Tableau IV-4 – Paramétrage des écarts de fabrication du cylindre 1,7 de la pièce 1

Diamètre du cylindre réel	$D_{1,7}$
Ecart d'orientation de l'axe du cylindre 1,7 par rapport au plan A autour de l'axe x	$r_{1,7/1,0_x}$
Ecart d'orientation de l'axe du cylindre 1,7 par rapport au plan A autour de l'axe y	$r_{1,7/1,0_y}$
Ecart de localisation suivant l'axe x de l'axe du cylindre 1,7 au point O	$t_{0-1,7/1,0_x}$
Ecart de localisation suivant l'axe y de l'axe du cylindre 1,7 au point O	$t_{0-1,7/1,0_y}$

Tableau IV-5 – Paramétrage des écarts de fabrication du cylindre 2,7 de la pièce 2

Diamètre du cylindre réel	$D_{2,7}$
Ecart d'orientation de l'axe du cylindre 2,7 par rapport au plan A autour de l'axe x	$r_{2,7/2,0_x}$
Ecart d'orientation de l'axe du cylindre 2,7 par rapport au plan A autour de l'axe y	$r_{2,7/2,0_y}$
Ecart de localisation suivant l'axe x de l'axe du cylindre 2,7 au point O	$t_{0-2,7/2,0_x}$
Ecart de localisation suivant l'axe y de l'axe du cylindre 2,7 au point O	$t_{0-2,7/2,0_y}$

IV.3.2.2.2. Lois de distribution des écarts de fabrication

Dans un contexte industriel, une analyse de tolérances doit toujours être couplée à une caractérisation des capacités des moyens de production. Une caractérisation rigoureuse de ces capacités permet de définir les lois de distributions des écarts de fabrication des pièces réelles produites.

Les assemblages simulés reflèteront alors les assemblages réellement produits et les résultats de l'analyse de tolérances nous donneront des indications sur les performances réelles des assemblages.

L'exemple de ce manuscrit étant fictif, aucune donnée de production n'est disponible. Des hypothèses arbitraires ont donc été faites à partir des définitions des pièces.

Les lois utilisées sont des lois normales centrées sur la Tolérance, T , et avec un écart-type σ égal à la dimension de la tolérance divisé par 6 (voir Figure IV.15).

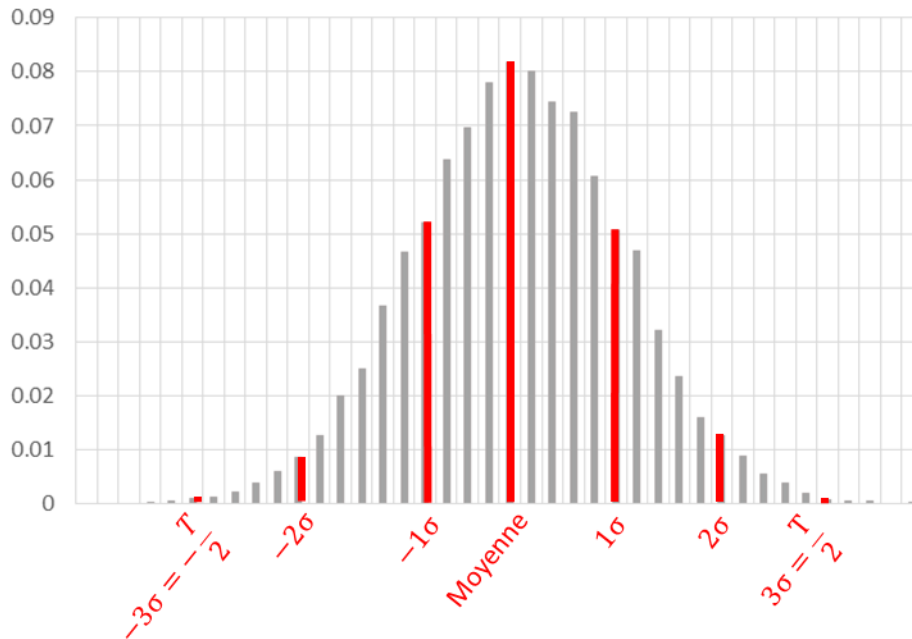


Figure IV.15 – Densité de probabilité d'une loi normale

Nous allons maintenant énumérer toutes les lois de distribution des écarts de fabrication qui seront utilisées dans la suite.

a) Génération des écarts de fabrication des pions et des alésages

Les dispersions autour des diamètres nominaux des pions et des alésages suivent des lois normales telles que :

- $D_{1,j}$ → distribution normale : $\mathcal{N}(5.986 ; 0.001\ 33)$
- $D_{2,j}$ → distribution normale : $\mathcal{N}(6.013 ; 0.003)$

Les localisations des perçages recevant les pions (pièce 1) et des alésages (pièce 2) sont directement liées à la précision en localisation suivant les axes x et y de la machine à usiner. C'est pourquoi les écarts de localisation des pions et des alésages suivent deux lois normales indépendantes suivant les axes x et y telles que :

- Dispersion des écarts de localisation du centre des pions :
 - $t_{M_j-1,j/1,0_x}$ → distribution normale suivant l'axe x : $\mathcal{N}\left(0; \frac{t}{6}\right)$
 - $t_{M_j-1,j/1,0_y}$ → distribution normale suivant l'axe y : $\mathcal{N}\left(0; \frac{t}{6}\right)$
- Dispersion des écarts de localisation du centre des alésages :
 - $t_{M_j-2,j/2,0_x}$ → distribution normale suivant l'axe x : $\mathcal{N}\left(0; \frac{t}{6}\right)$
 - $t_{M_j-2,j/2,0_y}$ → distribution normale suivant l'axe y : $\mathcal{N}\left(0; \frac{t}{6}\right)$

Avec t : la dimension de la zone de tolérance de localisation des centres des pions et des alésages à déterminer.

b) Génération des écarts de fabrication des cylindres 1,7 et 2,7

Pour rappel, les valeurs des tolérances de forme positionnée des surfaces 1,7 et 2,7 ne sont pas optimisées dans cette étude.

Les variations des diamètres des cylindres par rapport à leurs diamètres nominaux suivent des lois normales. Ainsi, on a :

- $d_{1,7} \rightarrow$ distribution normale : $\mathcal{N}(0; 0.005)$
- $d_{2,7} \rightarrow$ distribution normale : $\mathcal{N}(0; 0.005)$

Les distributions des écarts de position (localisation par rapport à la référence |A|B-B|) et d'orientation (perpendicularité par rapport au plan A) couvrent chacune la moitié de la tolérance de localisation.

De la même façon que pour les localisations des centres des pions et des alésages, nous faisons l'hypothèse que les dispersions en position des centres des cylindres sont le résultat de deux dispersions suivant les axes x et y . Il vient :

- Dispersion de l'écart de position de l'axe de la surface 1,7 au point $M_{1,7}$:
 - $t_{M_{1,7}-1,7/1,0_x} \rightarrow$ distribution normale suivant l'axe x : $\mathcal{N}(0; 0.003\ 333)$
 - $t_{M_{1,7}-1,7/1,0_y} \rightarrow$ distribution normale suivant l'axe y : $\mathcal{N}(0; 0.003\ 333)$
- Dispersion de l'écart de position de l'axe de la surface 2,7 au point $M_{2,7}$:
 - $t_{M_{2,7}-2,7/2,0_x} \rightarrow$ distribution normale suivant l'axe x : $\mathcal{N}(0; 0.003\ 333)$
 - $t_{M_{2,7}-2,7/2,0_y} \rightarrow$ distribution normale suivant l'axe y : $\mathcal{N}(0; 0.003\ 333)$

Avec $M_{1,7}$ et $M_{2,7}$ les centres respectifs des surfaces 1,7 et 2,7.

Les distribution des écarts de perpendicularité, $p_{1,7}$ et $p_{2,7}$, suivent des lois normales et leurs orientations, $\alpha_{1,7}$ et $\alpha_{2,7}$, suivent des lois uniformes. Les paramètres $p_{1,7}$ et $\alpha_{1,7}$ sont représentés sur la Figure IV.16.

- Distribution de l'écart de perpendicularité de l'axe de la surface 1,7 par rapport au plan A :
 - $p_{1,7} \rightarrow$ distribution normale : $\mathcal{N}(0; 0.003\ 333)$
 - $\alpha_{1,7} \rightarrow$ distribution uniforme : $\mathcal{U}(0; 2\pi)$
- Distribution de l'écart de perpendicularité de l'axe de la surface 2,7 par rapport au plan A :
 - $p_{2,7} \rightarrow$ distribution normale : $\mathcal{N}(0; 0.003\ 333)$
 - $\alpha_{2,7} \rightarrow$ distribution uniforme : $\mathcal{U}(0; 2\pi)$

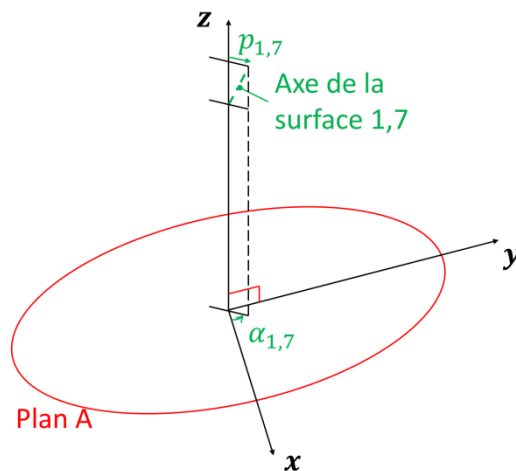


Figure IV.16 – Paramétrage des défauts de parallélisme des axes par rapport au plan de bride A

IV.3.2.2.3. Protocole de simulation

Dans cette partie, nous allons détailler le protocole de simulation pour réaliser l'analyse de tolérances statistiques du mécanisme étudié (voir Figure IV.17).

Les données d'entrée sont :

- La Condition Fonctionnelle à respecter : tolérance de forme de $0.11mm$ en zone commune entre les surfaces 1,7 et 2,7,
- Le taux d'assemblages conformes à atteindre : $FR\% \geq 99\%$. Pour rappel un assemblage non réalisable est comptabilisé comme un assemblage non conforme,
- Les lois de distribution des écarts de toutes les surfaces participant au respect de la Condition Fonctionnelle,
- Les matrices des super-éléments associées aux pièces (le calcul de ces matrices est décrit plus loin).

Le résultat obtenu est le taux d'assemblage conforme, $FR\%$, atteint pour les tolérances testées.

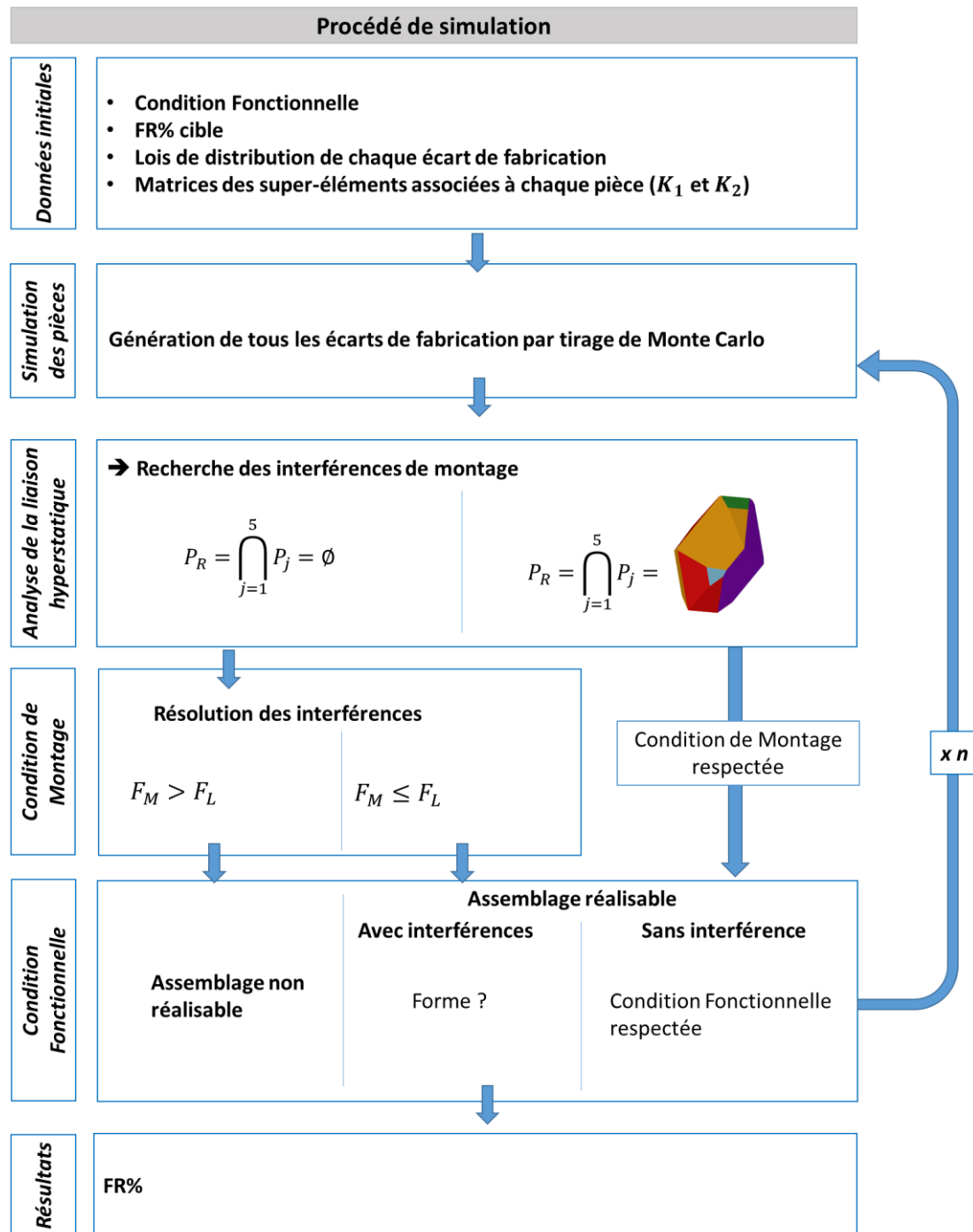


Figure IV.17 – Etude statistique d'un assemblage hyperstatique avec prise en compte des déformations

Le protocole de simulation se décompose en quatre grandes étapes qui seront reproduites n fois (n étant le nombre d'assemblages simulés).

La première consiste à générer des écarts de fabrication par tirage de Monte Carlo suivant les lois de distribution présentées dans la partie IV.3.2.2.2.

La liaison hyperstatique est ensuite analysée pour déterminer si l'assemblage généré présente des interférences de montage ou non (voir section a) de cette partie).

Si des interférences sont détectées, une simulation de l'assemblage avec déformation est réalisée. Si l'effort de montage estimé est inférieur à l'effort limite admissible, la Condition de Montage est respectée. Sinon l'assemblage est déclaré non conforme (voir section b) de cette partie).

Une analyse des propagations des déformations aux surfaces 1,7 et 2,7 est ensuite réalisée afin de vérifier que les déformations induites par l'assemblage ne nuisent pas au respect de la Condition Fonctionnelle du système (cf section b)).

Si l'assemblage ne présente pas d'interférence, la Condition de Montage est respectée ainsi que la Condition Fonctionnelle puisqu'elle est garantie au pire des cas (cf partie IV.3.1).

A l'issue de la simulation, un intervalle de confiance est calculé autour du taux d'assemblages non conformes. Si la dimension de cet intervalle est trop grande, de nouveaux assemblages sont simulés jusqu'à atteindre la précision souhaitée.

a) Analyse de la liaison hyperstatique

Dans cette partie, nous allons montrer comment vérifier si l'assemblage présente des interférences de montage. Ces interférences peuvent être générées par les écarts de fabrications des éléments de liaison de la bride.

Comme expliqué dans la partie II.4.1, l'assemblage peut être réalisé sans interférence si le polytope résultant de la liaison hyperstatique (ici la bride) est non vide.

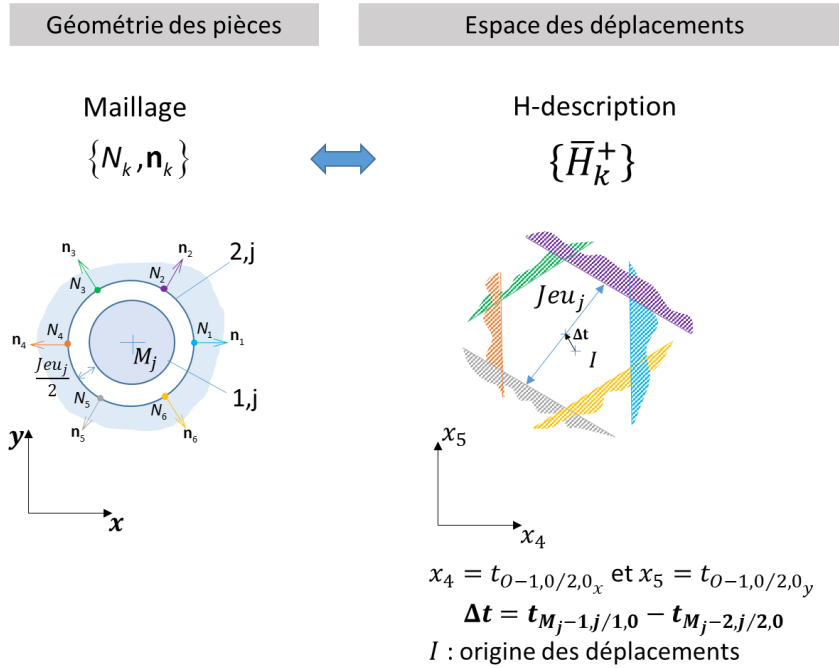
D'après le graphe des contacts de la Figure IV.3, le polytope résultant de la bride est défini par l'intersection des six polytopes opérands correspondant aux cinq liaisons linéaires annulaires et à la liaison appui plan.

Le polytope correspondant à l'intersection des cinq liaisons Linéaires / Annulaires est appelé $P_{1,0/2,0-LA}$.

Le polytope correspondant à la liaison Appui Plan sera appelé $P_{1,0/2,0-AP}$. La liaison appui plan ne participe pas à l'hyperstatisme de la liaison par bride, il n'est donc pas caractérisé dans cette partie.

De plus, par hypothèse les écarts de forme des surfaces planes des pièces 1 et 2 sont négligés et les plans sont maintenus plaqués par les quinze boulons (le jeu de la liaison Appui Plan est nul). L'étude peut donc être réalisée dans \mathbb{R}^3 en considérant uniquement les déplacements dans le plan de la bride (rotation autour de l'axe z et translations suivant les axes x et y).

$\bar{H}_k^+(j)$ est le demi-espace de dimension 3 de la contrainte de contact calculée au point de discrétisation k du couple pion / alésage j (voir Figure IV.18).


 Figure IV.18 – Contraintes de contact d'une liaison pion / alésage dans \mathbb{R}^2

En reprenant l'équation (II-13) présentée dans la partie II.2.2, nous pouvons écrire :

$$\bar{H}_k^+(j) : b_k(j) + a_{k3}(j) \cdot x_3 + a_{k4}(j) \cdot x_4 + a_{k5}(j) \cdot x_5 \geq 0 \quad (IV-23)$$

Avec :

$\mathbf{OM}_j = R_{th} \cos(\theta_{th_j}) \mathbf{x} + R_{th} \sin(\theta_{th_j}) \mathbf{y}$ et $\mathbf{n}_k = \cos(\varphi_k) \mathbf{x} + \sin(\varphi_k) \mathbf{y}$ (O étant le centre de la bride et M_j le centre de la liaison pion / alésage j).

$$a_{k3}(j) = R_{th} \cdot \cos(\theta_{th_j}) \cdot \sin(\varphi_k) - R_{th} \cdot \sin(\theta_{th_j}) \cdot \cos(\varphi_k) = -R_{th} \cdot \sin(\varphi_k - \theta_{th_j})$$

$$a_{k4}(j) = -\cos(\varphi_k)$$

$$a_{k5}(j) = -\sin(\varphi_k)$$

$$b_k(j) = \frac{Jeu_j}{2} + \cos(\varphi_k) \cdot (t_{M_{j-2,j/2,0_x}} - t_{M_{j-1,j/1,0_x}}) + \sin(\varphi_k) \cdot (t_{M_{j-2,j/2,0_y}} - t_{M_{j-1,j/1,0_y}})$$

$$x_3 = r_{1,0/2,0_z}, x_4 = t_{0-1,0/2,0_x} \text{ et } x_5 = t_{0-1,0/2,0_y}$$

Les variables x_d ($d \in \{3; 4; 5\}$) sont les écarts de situation de 1,0 par rapport à 2,0 ; elles sont les inconnues du problème.

a_{k3} ($1 \leq k \leq k_{max}$) dépend uniquement du rayon et des angles théoriques d'implantation des pions et des alésages.

b_k ($1 \leq k \leq k_{max}$) dépend des écarts de localisation du pion 1,j et de l'alésage 2,j, du jeu local (Jeu_j) entre le pion et l'alésage. Ces écarts sont générés par tirage de Monte Carlo.

Comme précédemment, le polytope opérande P_j qui caractérise les contraintes de contact entre le pion 1,j et l'alésage 2,j résulte de l'intersection des k_{max} demi-espaces $\bar{H}_k^+(j)$.

La Figure IV.18 montre l'intersection du polytope de contact de liaison pion 1,j / alésage 2,j, exprimé au centre de la bride, avec le plan $r_{1,0/2,0_z} = 0$.

La dimension du polytope est liée au jeu local, Jeu_j , entre le pion 1,j et l'alésage 2,j.

L'écart, entre le centre du polytope et l'origine des déplacements I , dépend des écarts de localisation des centres des pions et des alésages dans les repères respectifs 1,0 et 2,0.

La rotation du pion par rapport à l'alésage n'étant pas bornée suivant l'axe z , deux demi-espaces bouchons sont ajoutés pour borner ce déplacement.

La Figure IV.19 montre le même polytope de contact du couple pion / alésage illustré sur la Figure IV.18 avec la composante de rotation $r_{1,0/2,0_z}$. Le polytope en filaire est calculé au centre de la liaison pion / alésage (point M_j), la mobilité en rotation autour de l'axe z est alors bien visible.

Afin de réaliser des opérations d'intersection et de somme de Minkowski, tous les polytopes opérandes doivent être exprimés au même point de calcul. Notre objectif étant de définir les déplacements possibles entre les centres des deux pièces, les polytopes seront tous exprimés au point O , centre de la bride.

Sur la Figure IV.19, on remarque que le polytope calculé au point O est incliné par rapport au polytope calculé au centre de la bride. Ceci est dû à la dépendance linéaire entre les rotations et les translations instaurées dans l'équation (II-12). Cette inclinaison varie en fonction de la géométrie nominale des pièces, c'est-à-dire en fonction de l'angle et du rayon d'implantation théoriques du couple pion / alésage.

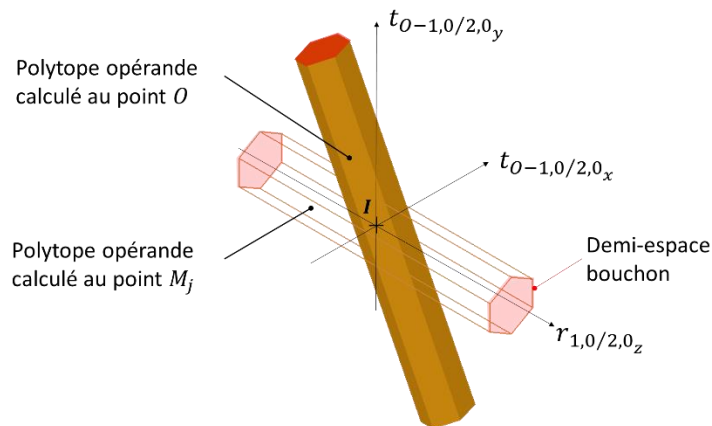


Figure IV.19 – Polytope opérande d'un couple pion / alésage dans \mathbb{R}^3

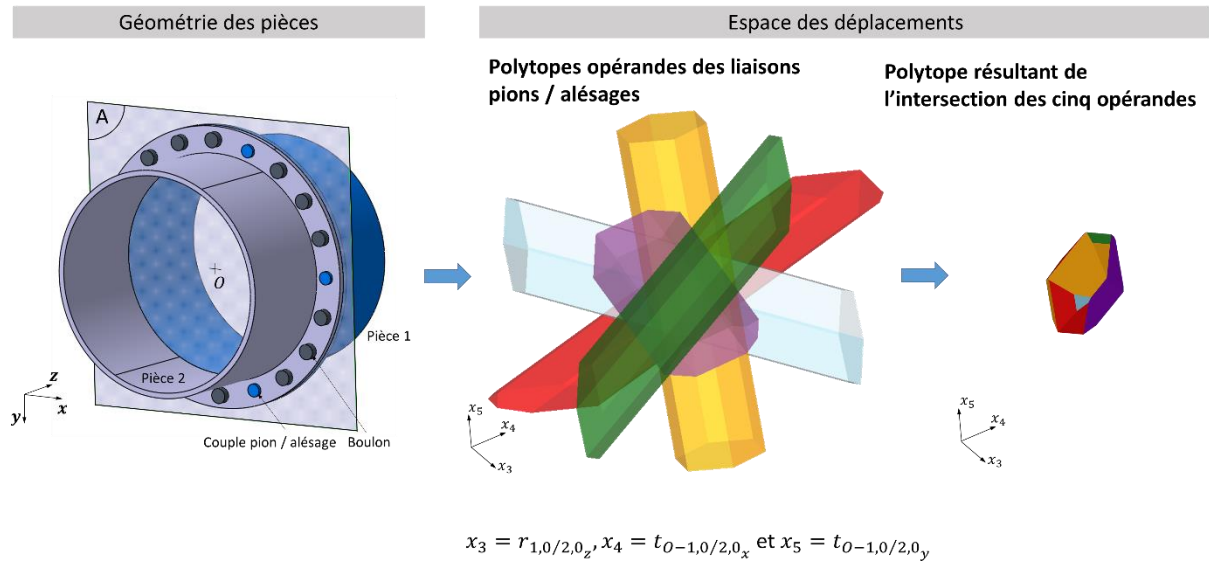


Figure IV.20 – Détermination du polytope résultant de la bride (Gouyou, et al., 2016)

Après caractérisation des espaces des déplacements possibles entre chaque pion et chaque alésage, l'espace des écarts possibles entre les deux pièces est déterminé en calculant l'intersection de tous les polytopes opérands (Teissandier, 2012; Gouyou, et al., 2017). Cet espace est décrit par le polytope résultant de la liaison $P_{1,0/2,0-LA}$ (voir Figure IV.20) :

$$P_{1,0/2,0-LA} = \bigcap_{j=1}^5 (P_j) = \bigcap_{j=1}^5 \left(\bigcap_{k=1}^{k_{max}} \bar{H}_k^+(j) \right) \quad (IV-24)$$

Si le polytope résultant de la bride est non vide, l'assemblage des deux pièces est possible. Une analyse de l'assemblage en prenant en compte les déformations n'est donc pas nécessaire.

Si le polytope résultant est l'ensemble vide, une analyse de l'assemblage avec déformation est réalisée (voir partie b)).

b) Analyse des assemblages avec interférences

Dans cette partie, nous allons analyser les assemblages présentant des interférences de montage en appliquant la méthode décrite dans la partie Chapitre III.

Dans un premier temps les super-éléments des deux pièces sont déterminés. Des nœuds sont associés aux surfaces de contact des pions et des alésages (voir Figure IV.21 et Figure IV.22). Ces nœuds peuvent être pilotés en translation dans le plan de la bride (x, y) . Le degré de liberté suivant z est utilisé car, comme nous l'avons indiqué dans la partie Chapitre III, pour déterminer des matrices de raideur nous avons besoin de contrôler les six degrés de liberté (ddl) de chaque pièce. Les translations suivant l'axe z sont donc utilisées mais elles seront laissées libres dans la résolution.

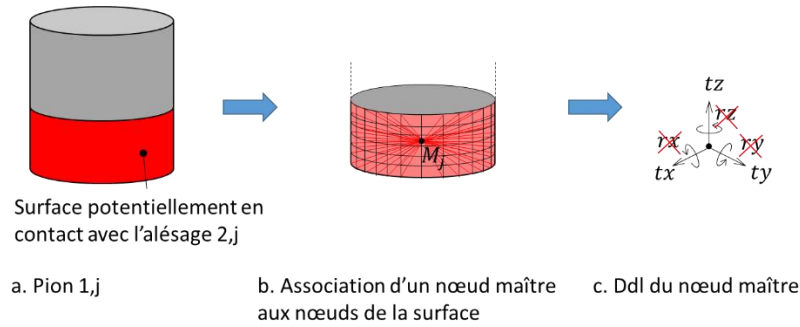


Figure IV.21 – Construction d'un nœud maître à partir d'une surface

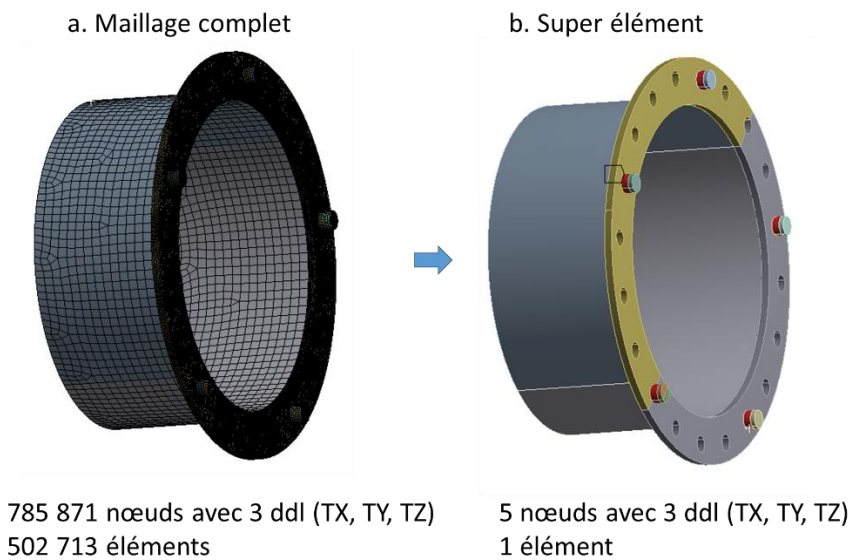


Figure IV.22 – Réduction du modèle avec un super-élément – exemple sur la pièce 1

Remarque : les pièces sont en acier de module d'Young $E = 210\,000\text{MPa}$ et de coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

Nous pouvons ensuite utiliser ces matrices pour simuler l'assemblage de toutes les pièces générées par tirage de Monte Carlo.

Pour chaque nouvel assemblage simulé, les écarts de fabrication des pions et des alésages générés sont importés. La réalisation de l'assemblage avec déformation est ensuite simulée en appliquant le protocole présenté dans la partie Chapitre III.

En utilisant la relation (III-38), l'effort de montage est estimé.

Si l'effort de montage estimé est inférieur à 100N, l'assemblage est déclaré réalisable sans dégradation des pièces. L'étude se poursuit alors avec l'analyse du respect de la Condition Fonctionnelle. Si l'effort est supérieur au 100N autorisé, l'assemblage est déclaré non conforme. Ici l'effort limite, F_L , a été choisi arbitrairement. Afin d'analyser des pièces réelles, une campagne d'essais de montage pourrait, par exemple, être réalisée pour déterminer expérimentalement la valeur limite admissible.

Si la Condition de Montage est respectée, nous vérifions ensuite le respect de la Condition Fonctionnelle en appliquant la méthode décrite dans la partie III.5.2.

Sur chaque pièce, 72 nœuds maîtres sont définis sur les cercles limitant les surfaces 1,7 et 2,7 (voir Figure IV.2). Ces cercles sont représentés sur la Figure IV.23 pour la pièce 1. La surface ne présentant pas d'écart de forme avant assemblage, nous n'avons pas défini de nœuds à l'intérieur de la surface (les déformations dues au montage ne devraient pas générer d'ondulation suivant l'axe z).

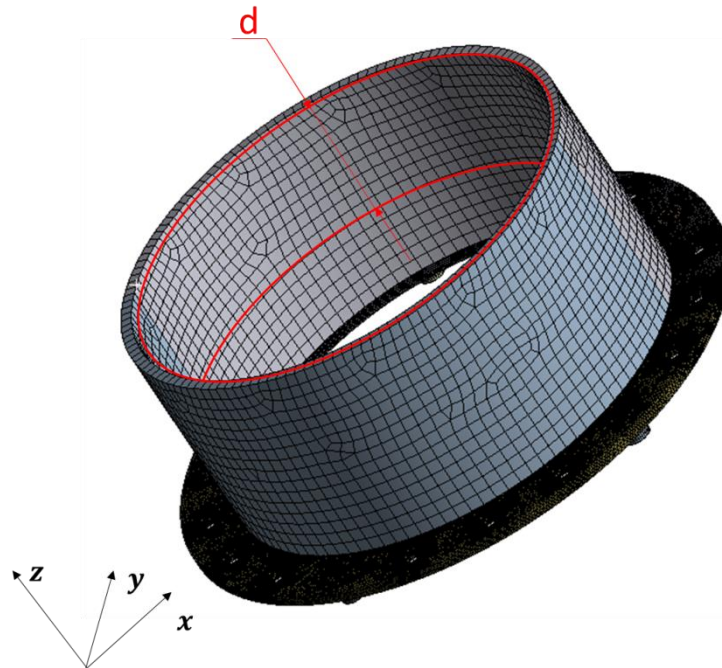


Figure IV.23 – Zone dont la déformation est analysée après assemblage – exemple de la pièce 1

Les matrices de raideur des super-éléments associés aux pièces 1 et 2 dont les nœuds maîtres sont définis aux centres des éléments de contact et sur les zones présentées en Figure IV.23 sont calculées.

Les écarts de situation élastiques des centres des pions et des alésages, après montage, sont ensuite importés ainsi que les écarts géométriques des nœuds définis sur les cercles de la Figure IV.23. Ces écarts sont des défauts de localisation, de perpendicularité et de diamètre générés par tirage de Monte Carlo à partir des lois de distribution de la partie IV.3.2.2.2.

Les déplacements élastiques des nœuds définis sur les surfaces 1,7 et 2,7 sont déterminés en appliquant la relation (III-43).

Un cylindre des moindres carrés est ensuite associé à l'ensemble de ces nœuds (voir Figure IV.24).

Deux cylindres sont définis à partir du cylindre des moindres carrés en imposant des offsets sur ce dernier de :

- $-\frac{CF}{2} = -0.055mm$ pour le cylindre intérieur (C_i)
- $\frac{CF}{2} = 0.055mm$ pour le cylindre extérieur (C_e)

L'assemblage respecte la Condition Fonctionnelle si tous les nœuds associés aux surfaces 1,7 et 2,7 sont inclus dans le volume borné par C_i et C_e .

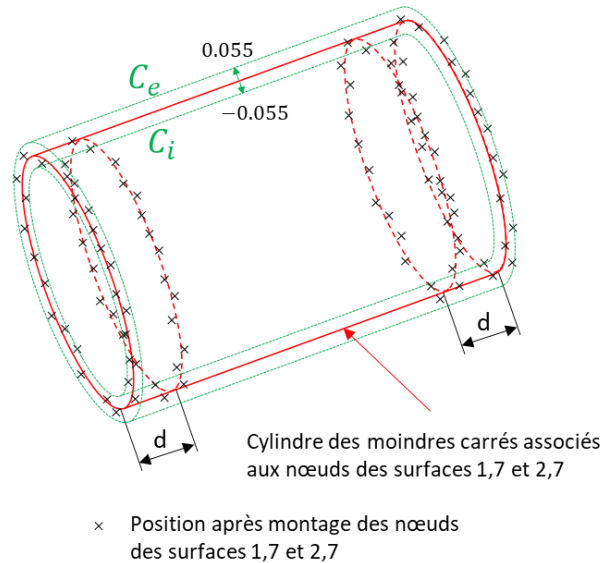


Figure IV.24 – Critère d'acceptation d'un assemblage avec interférences

IV.3.2.2.4. Résultats de l'analyse statistique

La Figure IV.25 montre le taux d'assemblage réalisable, AR%, en fonction de l'évolution des tolérances de localisation des pions et des alésages. Les données en bleu représentent le taux d'assemblages réalisés sans interférence sur les 1 000 assemblages simulés. Les données en orange représentent le taux d'assemblages réalisés avec interférences et ayant un effort de montage inférieur à 100N.

Le taux de montage total réalisable est ensuite donné sur la ligne « Total ».

En hypothèse de solides infiniment rigides, une tolérance de $30\mu m$ pour les localisations des pions et des alésages permet de garantir un taux d'assemblage réalisable de 100%.

En modélisant les déformations des pièces, la tolérance de localisation des pions et des alésages peut être élargie jusqu'à $40\mu m$ avec un taux d'assemblages réalisables de 99.9%.

Le taux d'assemblage non réalisable est alors de 0.1% avec un intervalle de confiance à 99.8% de $\pm 0.3\%$.

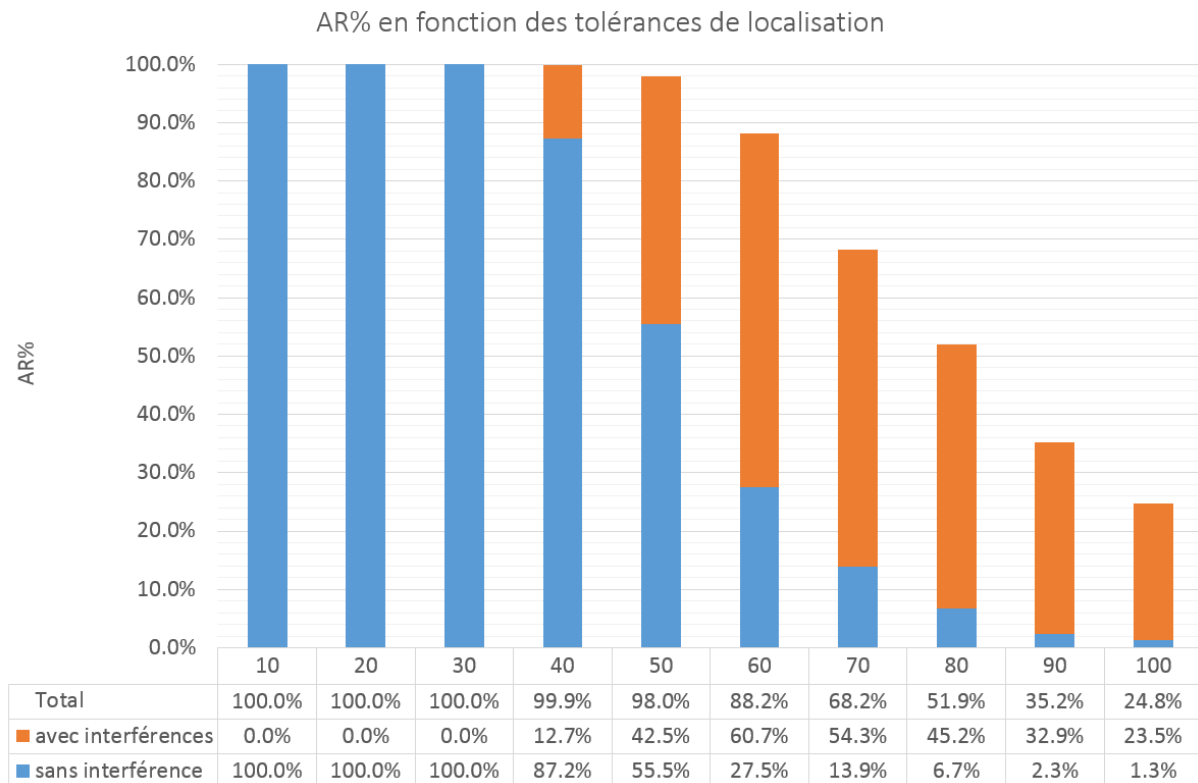


Figure IV.25 – Taux d'assemblages réalisables en fonction des tolérances de localisation des pions et des alésages

L'ajustement pion / alésage choisi, dans la partie IV.3.1, garantit uniquement le respect de la Condition Fonctionnelle pour les assemblages réalisables sans interférence. Pour les autres, si les interférences de montage sont très élevées devant la raideur des pièces, celles-ci risquent de générer des déformations sur les surfaces 1,7 et 2,7 lors de l'assemblage et donc de nuire au respect de la Condition Fonctionnelle.

Lorsque les déformations des pièces sont prises en compte dans l'analyse, nous pouvons, en plus du taux de montage, contrôler le taux de respect de la Condition Fonctionnelle.

Dans cet exemple, chaque assemblage conforme au regard de la Condition de Montage respecté aussi la Condition Fonctionnelle. Pour chaque tolérance de localisation testée, le taux de respect de la Condition de Montage, AR%, est donc égal au taux de respect de la Condition Fonctionnelle, FR%. Ainsi, dans ce cas particulier, si un assemblage est réalisable la Condition Fonctionnelle est toujours respectée.

Si les raideurs de pièces étaient plus faibles, nous aurions pu obtenir des configurations où les interférences n'empêchent pas l'assemblage des pièces mais génèrent, pendant la phase de montage, des déformations nuisibles au respect de la Condition Fonctionnelle.

Pour information, le temps de simulation total a été de 6h 3min 54s avec en moyenne des temps de calcul de :

- 0.02s pour les assemblages sans interférence (méthode de calcul du Chapitre II),
- 3.12s pour les assemblages avec interférences (méthode de calcul du Chapitre III).

IV.3.2.3. Comparaison des deux méthodes d'analyse de tolérances

Le Tableau IV-6 regroupe les tolérances de localisation obtenues lors d'une analyse au pire des cas ou statistique avec des solides infiniment rigides. En réalisant une analyse de tolérances statistique, nous avons réussi à augmenter les tolérances de plus de 300% par rapport au résultat obtenu au pire des cas. Passant ainsi de tolérances très difficilement atteignables à des tolérances réalisables par des moyens de production conventionnels.

Tableau IV-6 – Résultats des analyses au pire des cas et statistique de solides infiniment rigides

Analyse au pire des cas	Analyse statistique
$7\mu m$	$30\mu m$

Le Tableau IV-7 regroupe les résultats d'analyses statistiques réalisées avec des ensembles infiniment rigides ou des ensembles déformables. Le gain entre ces deux analyses est de 25%. Plus les pièces sont souples, plus l'écart entre le résultat obtenu par une analyse en solides infiniment rigides et une analyse en solides déformables sera important. Inversement, plus les pièces sont rigides, plus cet écart sera faible. Dans le cas de pièces souples, il est très important de prendre en compte les déformations des pièces dans l'analyse de tolérances, non seulement pour augmenter les tolérances mais aussi pour vérifier que les déformations induites par les interférences de montage ne nuisent au respect de la Condition Fonctionnelle.

Tableau IV-7 – Résultats des analyses statistiques de solides infiniment rigides et déformables

Infiniment Rigide	Déformable
$30\mu m$	$40\mu m$

Conclusion

L'utilisation de mécanismes hyperstatiques est fréquente en industrie, en particulier dans les domaines de l'aéronautique, du spatial et de la physique nucléaire. Ces mécanismes permettent de mieux répartir les contraintes dans les liaisons et sont plus robustes aux écarts de fabrication des pièces. Cependant, il est plus complexe de réaliser l'analyse de tolérances d'un mécanisme hyperstatique que d'un mécanisme isostatique.

Lors du choix des tolérances, le concepteur doit prendre en compte deux contraintes contradictoires qui sont spécifiques à ce type de système. Il souhaitera limiter le jeu dans la liaison pour garantir le respect d'une Condition Fonctionnelle. Cependant si ce jeu est trop faible, l'assemblage des pièces ne sera pas réalisable.

Dans ces travaux de thèse, nous avons présenté une méthode complète d'analyse de tolérances des mécanismes hyperstatiques. Deux types d'analyse de tolérances ont été proposées : au pire des cas et statistique.

L'analyse au pire des cas consiste à simuler le mécanisme dans la pire configuration pour le respect d'une Condition de Montage ou le respect d'une Condition Fonctionnelle, de position ou d'orientation entre deux surfaces. Cette analyse permet de garantir que 100% des assemblages produits seront conformes. Dans ce type d'analyse, les pièces sont considérées comme infiniment rigides, un assemblage est donc réalisable s'il ne présente aucune interférence de montage. Cependant nous avons montré sur notre cas d'application qu'elle mène à des tolérances difficilement atteignables et donc à des coûts de production très élevés.

En réalisant une analyse statistique, nous acceptons qu'un faible pourcentage des assemblages produits soit non conforme. En contrepartie, les tolérances choisies sont plus larges et ainsi les coûts de production sont réduits. Cette approche permet d'analyser les assemblages hyperstatiques présentant ou non des interférences de montage.

Tout d'abord, l'ensemble des écarts de fabrication des pièces sont générés par tirage de Monte Carlo en utilisant des lois de distribution à l'image des populations réelles produites. Ensuite, pour chaque assemblage généré, le polytope résultant de la liaison hyperstatique est calculé afin de déterminer si l'assemblage est réalisé avec ou sans interférence.

Si l'assemblage ne présente pas d'interférence, le polytope résultant de la liaison est non vide et représente l'ensemble des écarts de situation possibles entre deux pièces. Ce polytope permet donc de statuer sur la conformité de l'assemblage.

Si l'assemblage présente des interférences de montage, une autre méthode est appliquée pour simuler les déformations induites par l'assemblage. Un super-élément est défini pour chaque pièce et sa matrice de raideur est calculée à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis. Ces matrices sont définies, une seule fois, sur les géométries nominales des pièces. Pour chaque nouvel assemblage, généré par tirage de Monte Carlo et présentant des interférences, un calcul itératif est réalisé pour déterminer la position relative des pièces, après montage. Un effort de montage est

estimé à partir des efforts de contact entre les surfaces. Aucun contact n'est imposé entre les surfaces de liaison, de plus la mise en position des pièces l'une par rapport à l'autre est laissée libre. Ces données varient en fonction des écarts de fabrication et des raideurs des pièces.

Dans un assemblage avec interférences, les déformations générées par l'assemblage des pièces peuvent se propager aux surfaces fonctionnelles. C'est pourquoi nous proposons une méthode d'analyse des propagations des déformations dans les pièces. Cette méthode permet de reconstruire les repères associés aux deux pièces puis de vérifier le respect d'une Condition Fonctionnelle de position, d'orientation et / ou de forme.

Cette approche complète permet d'analyser tout type d'assemblage, qu'il soit hyperstatique ou non, en acceptant ou non des interférences, mais surtout en caractérisant avec précision les assemblages produits d'un point de vue montabilité et fonctionnement.

Les temps de simulation sont de quelques secondes par assemblage, ce qui nous permet de réaliser des analyses stochastiques.

Une corrélation des résultats obtenus par calcul avec des résultats expérimentaux est proposée dans le chapitre confidentiel.

Cette méthode a été implémentée dans un outil utilisé par les bureaux d'études. Celui-ci a déjà été utilisé en conception, pour comparer les performances de plusieurs types de liaison et choisir des tolérances atteignables par la production et répondant aux besoins fonctionnels.

Il a également permis d'analyser les conséquences de non-conformités sur la montabilité et la performance de mise en position de systèmes hyperstatiques.

Les principales plus-values de cet outil sont de réaliser des analyses stochastiques dans des temps très faibles et de traiter les assemblages hyperstatiques avec ou sans interférence, alors que les méthodes généralement proposées sont soit exclusivement dédiées aux assemblages avec jeu, soit aux assemblages avec interférences.

Perspectives

a) Perspectives à court terme

Dans notre étude, nous avons fait plusieurs hypothèses simplificatrices pour l'analyse des déformations. Dans de futurs travaux, les déformations locales des surfaces en contact pourraient être modélisées ainsi que les déformations plastiques des pièces en utilisant par exemple un modèle d'érosion tel que le propose (Grandjean, 2013) et qui est décrit dans la partie I.4.1.

Les écarts de forme des surfaces en contact pourraient également être ajoutés à l'analyse s'ils ne sont pas négligeables devant les jeux locaux. Dans l'exemple du Chapitre IV, nous pourrions facilement intégrer les écarts de forme des pions et des alésages. Il suffirait de discrétiser leurs surfaces pour obtenir une représentation simplifiée de leurs écarts de forme (Skin Model Shapes), les valeurs des jeux locaux ne seraient alors plus axisymétriques (Figure 0.1a), mais varieraient en fonction de la direction du contact analysé (Figure 0.1b).

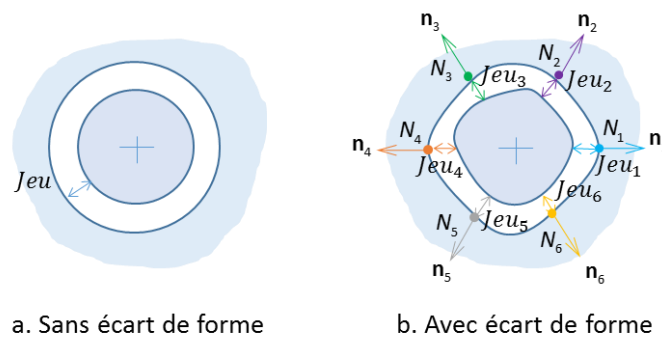


Figure 0.1 – Intégration des écarts de forme des surfaces.

Ensuite, la méthode d'analyse des assemblages avec déformations devra être étendue à l'étude de mécanismes composés de plus de deux pièces, par exemple en modélisant un assemblage de brides composées d'une pièce avec des pions et de deux pièces ou plus avec des alésages. Le modèle présenté dans le Chapitre III est, en théorie, compatible avec l'analyse de ces assemblages cependant cette option n'a pas été implémentée dans un outil. De plus, nous faisons l'hypothèse que les pions sont infiniment rigides et que seul les structures globales des pièces se déforment. Cependant plus le nombre de pièces montées sur un même pion est élevé, plus le pion est grand et plus il est souple. La flexion du pion due aux contacts avec les différents alésages n'est alors peut être plus négligeable. Pour modéliser cette flexion, nous pourrions intégrer plusieurs nœuds maîtres sur la hauteur du pion, un à hauteur de chaque nouvelle pièce empilée sur celui-ci. Ces nœuds nous permettraient de définir des positions différentes pour chaque section du pion et ainsi de modéliser sa déformation.

Dans nos travaux, nous nous sommes exclusivement intéressés à l'assemblage des pièces à froid. Nous pourrions également prendre en compte des effets thermomécaniques en intégrant les travaux de (Pierre, 2011). La plus-value de notre approche serait dans l'analyse des assemblages avec interférences. En effet, dans ses travaux (Pierre, 2011) analyse les assemblages avec interférences en utilisant systématiquement un logiciel de calcul par éléments finis. La méthode développée dans le

Chapitre III, permettrait d'obtenir des résultats équivalents mais avec des temps de calcul plus faibles.

Enfin, l'analyse statistique pourrait être améliorée en appliquant des méthodes visant à limiter le nombre de tirages de Monte Carlo. Nous pourrions, par exemple, réaliser des échantillonnages par hypercube latin (Stein, 1987). Cette méthode consiste à optimiser la répartition des tirages de Monte Carlo afin de couvrir l'ensemble du domaine avec un nombre de tirages réduit.

b) Perspectives à plus long terme

A la fin du Chapitre II, nous avons présenté une méthode pour quantifier les interférences de montage en calculant la distance séparant les polytopes. Actuellement, cette approche est applicable uniquement aux assemblages modélisables par deux polytopes non vides. Nous pourrions l'étendre à l'analyse des autres cas pour quantifier les interférences de tout type d'assemblage. Si les interférences sont faibles, l'assemblage sera déclaré réalisable sans mener une analyse avec déformation. Les écarts de situation entre les pièces sont alors nuls et aucune déformation ne se propage aux surfaces fonctionnelles des pièces. Afin d'utiliser cette méthode, il faudra quantifier pour chaque type d'assemblage, une valeur limite d'interférence au-delà de laquelle la modélisation des déformations sera indispensable. Cette valeur limite dépendra des raideurs des pièces utilisées. La principale difficulté est que lorsque le nombre de polytope est supérieur à deux, il existe plusieurs distances séparant ces polytopes et à partir desquelles il faut définir une seule valeur d'interférence de montage pour prendre une décision.

Nous pourrions ensuite étendre notre modèle avec déformation à l'analyse des liaisons en série. Deux stratégies peuvent être utilisées, la première consiste à faire l'hypothèse que les déformations issues d'un assemblage ne se propagent pas au suivant, chaque assemblage peut ainsi être traité indépendamment des autres. Cette hypothèse pourra sûrement se vérifier sur des pièces très raides. Si ce n'est pas le cas une nouvelle méthode de modélisation, prenant en compte les propagations des déformations d'un assemblage à l'autre devra être mise en place. Cette deuxième approche est beaucoup plus complexe à mettre en œuvre puisqu'il faut prendre en compte la séquence d'assemblage des pièces et que chaque nouvel assemblage réalisé peut venir modifier l'équilibre des précédents. De plus, la gamme d'assemblage sera un paramètre supplémentaire à optimiser pour respecter la Condition Fonctionnelle.

La recherche de l'ensemble optimal des tolérances, garantissant un bon fonctionnement du mécanisme tout en minimisant les coûts de production, pourrait également être optimisée. Par exemple, à l'issue de chaque analyse statistique, nous pourrions rechercher quels sont les contributeurs majoritaires à la Condition Fonctionnelle et les modifier en priorité. La méthode présentée dans les travaux de (Delos, et al., 2017), qui permet de conserver la traçabilité des générateurs dans les sommes de Minkowski, pourrait être utilisée pour identifier quels écarts de fabrication ont généré des assemblages non conformes. Cependant, parmi tous les écarts identifiés, cette méthode ne permet pas encore de chiffrer la contribution réelle de chacun. Si nous parvenons à chiffrer ces contributions, nous pourrions rapidement déterminer quelles tolérances restreindre pour respecter les conditions du système, ou au contraire, quelles tolérances peuvent être relâchées pour réduire les coûts de production.

Une autre perspective serait de ne plus réaliser de tirages de Monte Carlo mais de manipuler des polytopes opérands probabilistes. La probabilité de montage ou de respect d'une Condition Fonctionnelle serait alors obtenue en un seul calcul sur ces polytopes.

De plus, au lieu de réaliser des analyses de tolérances en testant beaucoup de configurations différentes, nous pourrions développer une approche pour mener des synthèses de tolérances, afin de déterminer sans itération quelles tolérances appliquées pour respecter une Condition Fonctionnelle donnée.

La principale difficulté pour les deux derniers points que nous avons cités réside dans les opérations d'intersection des polytopes. Par exemple, il n'existe aujourd'hui aucune méthode pour estimer une probabilité de montage en calculant l'intersection de polytopes probabilistes.

Bibliographie

- Ameta, G., Serge, S. & Giordano, M., 2011. Comparison of spatial math models for tolerance analysis: tolerance-maps, deviation domain, and TTRS. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 11(2), p. 021004.
- Anselmetti, B., 2006. Generation of functional tolerancing based on positioning features. *Computer-Aided Design*, 38(8), pp. 902-919.
- Anwer, N., Balu, A. & Mathieu, L., 2013. The skin model, a comprehensive geometric model for engineering design. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 62(1), pp. 143-146.
- Arroyave-Tobón, S., 2017. Polyhedral models reduction in geometric tolerance analysis. *Manuscrit de Doctorat*.
- Arroyave-Tobón, S., Teissandier, D. & Delos, V., 2017. Tolerance analysis with polytopes in HV-description. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 17(4), p. 041011.
- Ballot, E. & Bourdet, P., 1996. Geometrical behavior laws for computer-aided tolerancing. *Computer-Aided Tolerancing*, pp. 119-131.
- Ballot, E., Bourdet, P. & Thiébaud, F., 2003. Determination of relative situations of parts for tolerance computation. *Geometric Product Specification and Verification: Integration of Functionality*, pp. 63-72.
- Ballu, A. & Mathieu, L., 1999. Choice of functional specifications using graphs within the framework of education. *Global Consistency of Tolerances*, pp. 197-206.
- Ballu, A., Mathieu, L. & Legoff, O., 2010. Representation of mechanical assemblies and specifications by graphs. *Geometric tolerancing of products*, pp. 87-110.
- Benichou, S. & Anselmetti, B., 2010. Thermal dilatation in functional tolerancing. 46(11).
- Berge, C., 1967. *Theorie des graphes et ses applications: 2e ed.*. s.l.:Dunod.
- Bourdet, P. & Clément, A., 1988. A study of optimal-criteria identification based on the small-displacement screw model. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 37(1), pp. 503-506.
- Charpentier, F., 2012. *Mémento de spécification géométrique des produits - Les normes ISO*. s.l.:SCEREN-CNDP.
- Chase, K. W., Gao, J. & Magleby, S. P., 1995. General 2-D tolerance analysis of mechanical assemblies with small kinematic adjustments. *Journal of Design and Manufacturing*, Volume 5, pp. 263-274.
- Chase, K. W., Magleby, S. P. & Gao, J., 1997. Tolerance analysis of two-and three-dimensional mechanical assemblies with small kinematic adjustments. *Advanced tolerancing techniques*, Volume 5.
- Chase, K. W. & Parkinson, A. R., 1991. A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies. *Research in Engineering design*, 3(1), pp. 23-37.
- Chateaufneuf, A., 2010. *Comprendre les éléments finis*. Ellipses éd. Paris: s.n.
- Clément, A., Rivière, A., Serré, P. & Valade, C., 1998. The TTRSs: 13 constraints for dimensioning and tolerancing. *Geometric design tolerancing: theories, standards and applications*, pp. 122-131.
- Clément, A., Rivière, A. & Temmerman, M., 1994. *Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques: Théorie et pratique*. Yvry-Sur-Seine Cedex (ISBN 2-85330-132-9): PYC Edition.
- Clozel, P. & Rance, P.-A., 2010. MECAMaster: a tool for assembly simulation from early design, industrial approach. *Geometric tolerancing of products*, pp. 241-273.

- Costadoat, R., 2010. Contribution à la recherche de spécifications pour la gestion des variations géométriques au plus tôt dans le cycle de conception. *Manuscrit de Doctorat - École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan*.
- Coxeter, H. S. M., 1989. Introduction to geometry - second edition. *Wiley, New York*.
- Cvetko, R., Chase, K. W. & Maleby, S. P., 1998. New metrics for evaluating Monte Carlo tolerance analysis of assemblies. *Proceedings of the ASME international mechanical engineering conference and exposition*.
- Dantan, J.-Y., 2000. Synthèse des spécifications géométriques: modélisation par Calibre à Mobilités Internes. *Thèse de doctorat - Bordeaux 1*.
- Dantan, J.-Y., Ballu, A. & Mathieu, L., 2008. Geometrical product specifications-model for product life cycle. *Computer-Aided Design*, 40(4), pp. 493-501.
- Dantan, J.-Y., Mathieu, L., Ballu, A. & Martin, P., 2005. Tolerance synthesis : quantifier notion and virtual boundary. *Computer-Aided Design*, 37(2), pp. 231-240.
- Dantan, J.-Y. & Qureshi, A.-J., 2009. Worst-case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and Monte Carlo simulation. *Computer-Aided Design*, 41(1), pp. 1-12.
- Davidson, J. K., Mujezinovic, A. & Shah, J. J., 2002. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces. *Journal of mechanical design*, 124(4), pp. 609-622.
- Delos, V. & Teissandier, D., 2018. *PolitoCAT and Politopix*. [En ligne] Available at: <https://www.i2m.u-bordeaux.fr/politopix>
- Delos, V., Teissandier, D. & Arroyave-Tobon, S., 2017. How to trace the significant information in tolerance analysis with polytopes. *Advances on Mechanics, Design Engineering and Manufacturing*, pp. 1003-1012.
- Dufaure, J. & Teissandier, D., 2008. A tolerancing framework to support geometric specifications traceability. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 36(9-10), pp. 894-907.
- Dumas, A., 2014. Développement de méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-contraints. *Manuscrit de Doctorat - ParisTech*.
- Falgarone, H., Thiébaud, F., Coloos, J. & Mathieu, L., 2016. Variation simulation during assembly of non-rigid components. Realistic assembly simulation with ANATOLEFLEX software.. *Procedia CIRP*, Volume 43, pp. 202-207.
- Fleming, A., 1988. Geometric relationships between toleranced features. *Artificial Intelligence*, 37(1-3), pp. 403-412.
- Fukuda, K., 2004. From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes. *Journal of Symbolic Computation*, 38(4), pp. 1261-1272.
- Fukuda, K. & Rosta, V., 1994. Combinatorial face enumeration in convex polytopes. *Computational Geometry*, 4(4), pp. 191-198.
- Germain, F., 2007. Tolérancement statistique tridimensionnel, intégration en CFAO. *Manuscrit de thèse - Université de Savoie*.
- Giordano, M. & Duret, D., 1993. Clearance space and deviation space. Application to three dimensional chain of dimensions and positions.. *Proceedings of 3rd CIRP Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, pp. 179-196.

- Giordano, M., Duret, D. & Tichadou, S., 1992. Clearance space in volumic dimensioning. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 41(1), pp. 565-568.
- Gouyou, D., Ledoux, Y., Teissandier, D. & Delos, V., 2017. Tolerance analysis of overconstrained and flexible assemblies by polytopes and finite element computations: application to a flange.. *Research in Engineering Design*, pp. 1-12.
- Gouyou, D., Teissandier, D. & Delos, V., 2016. Tolerance analysis by polytopes: application to assembly interferences diagnosis. *Procedia CIRP*, Volume 43, pp. 52-57.
- Grandjean, J., 2013. Influence des défauts de forme sur les performances d'assemblages: application aux prothèses totales de hanche. *Thèse de doctorat - Grenoble*.
- Guo, J. et al., 2016. Integration of geometric variation and part deformation into variation propagation of e-D assemblies. *International Journal of Production Research*, 54(19), pp. 5708-5721.
- Gupta, S. & Turner, J. U., 1993. Variational Solid Modeling for Tolerance Analysis. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(3), pp. 64-74.
- Hervé, J.-M., 1975. La géométrie du groupe des déplacements appliquée à l'analyse cinématique des mécanismes. *Thèse de doctorat - Université de Paris IV*.
- Homri, L., 2014. Stratégies de mise en oeuvre des polytopes en analyse de tolérance. *Manuscrit de thèse - Université de Bordeaux*.
- Homri, L., Dantan, J.-Y. & Lévassieur, G., 2016. Comparison of optimization techniques in a tolerance analysis approach considering form defects. *Procedia CIRP*, Volume 43, pp. 184-189.
- Homri, L., Teissandier, D. & Ballu, A., 2013. Tolerancing analysis by operations on polytopes. *Design and Modeling of Mechanical Systems*, pp. 597-604.
- Homri, L., Teissandier, D. & Ballu, A., 2015. Tolerance analysis by polytopes: Taking into account degrees of freedom with cap half-spaces. *Computer-Aided Design*, Volume 62, pp. 112-130.
- Hong, Y. S. & Chang, T. C., 2002. A comprehensive review of tolerancing research. *International Journal of Production Research*, 40(11), pp. 2425-2459.
- ISO1101, 2017. Spécification géométrique des produits (GPS) — Tolérancement géométrique — Tolérancement de forme, orientation, position et battement.
- ISO14405-1, 2010. Spécification géométrique des produits (GPS) -- Tolérancement dimensionnel -- Partie 1: Tailles linéaires.
- ISO14405-2, 2011. Spécification géométrique des produits (GPS) -- Tolérancement dimensionnel -- Partie 2: Dimensions autres que tailles linéaires.
- ISO17450, 2011. Spécification géométrique des produits (GPS) -- Concepts généraux.
- ISO2692, 2014. Spécification géométrique des produits (GPS) -- Tolérancement géométrique -- Exigence du maximum de matière (MMR), exigence du minimum de matière (LMR) et exigence de réciprocité (RPR).
- ISO286-1, 2010. *Spécification géométrique des produits (GPS) -- Système de codification ISO pour les tolérances sur les tailles linéaires -- Partie 1: Base des tolérances, écarts et ajustements*, s.l.: s.n.
- ISO3952-1, 1995. Schémas cinématiques - Symboles graphiques - Partie 1.

- ISO5459, 2011. Spécification géométrique des produits (GPS) -- Tolérancement géométrique -- Références spécifiées et systèmes de références spécifiées.
- Jeang, A., 1994. Tolerance design: choosing optimal tolerance specifications in the design of machined parts. *Quality and reliability engineering international*, 10(1), pp. 27-35.
- Le Borzec, R. & Lotterie, J., 1975. *Principes de la théorie des mécanismes: à l'usage des étudiants du premier cycle d'Enseignement supérieur, des classes préparatoires à l'ENSAM et à l'ENSAT, des IUT, des classes de BTS*. s.l.:Dunod.
- Liu, S. C., Lee, H. W. & Hu, S. J., 1995. Variation simulation for deformable sheet metal assemblies using mechanistic models. *Transactions-North American manufacturing research institution of SME*, pp. 235-240.
- Mansuy, M., 2012. Aide au tolérancement tridimensionnel: modèle des domaines. *Thèse de doctorat - Université de Grenoble*.
- Marguet, B., Falgarone, H. & Chevassus, N., 2003. AnaTole: un outil d'analyse 3d des variations géométriques pour la conception de produit aéronautique. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, 18(1), pp. 113-122.
- Mathieu, L. & Ballu, A., 2007. A model for a coherent and complete tolerancing process. *Models for computer aided tolerancing in design and manufacturing*, pp. 35-44.
- Mazur, M., Leary, M. & Subic, A., 2011. Computer Aided Tolerancing (CAT) platform for the design of assemblies under external and internal forces. 43(6).
- Moaveni, S., 2011. Finite element analysis theory and application with ANSYS, 3/e.. *Pearson Education India*.
- Mujezinovic, A., Davidson, J. K. & Shah, J. J., 2004. A new mathematical model for geometric tolerances as applied to polygonal faces. *Journal of mechanical design*, 126(3), pp. 504-518.
- Nigam, S. D. & Turner, J. U., 1995. Review of statistical approaches to tolerance analysis. *Computer-Aided Design*, 27(1), pp. 6-15.
- Pezzuti, E., Piscoto, G., Ubertini, A. & Valentini, P. P., 2005. Investigation on pin-hole connection in flexible assembly. *In XVII congresso di Ingegneria Grafica INGEGRAF 2005*.
- Pierre, L., 2011. Intégration du comportement thermomécanique des pièces dans l'analyse des spécifications géométriques: application à une turbine de moteur d'hélicoptère. *Manuscrit de Doctorat*.
- Pillet, M., 1995. Appliquer la maîtrise statistique des processus. *Éditions d'Organi*.
- Qureshi, A.-J. et al., 2012. A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimization and monte carlo simulation. *Computed Aided Design*, 44(2), pp. 132-142.
- Requicha, A. A., 1983. Toward a theory of geometric tolerancing. *The International Journal of Robotics Research*, 2(4), pp. 45-60.
- Rouetbi, O., Pierre, L., Anselmetti, B. & Denoix, H., 2017. ISO Tolerancing of hyperstatic mechanical systems with deformation control. *Advances on Mechanics, Design Engineering and Manufacturing*, pp. 991-1000.
- Roy, U. & Li, B., 1998. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects—I. Form tolerances. *Computer-Aided Design*, 30(2), pp. 151-161.
- Roy, U. & Li, B., 1999. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II.: Size, orientation and position tolerances. *Computer-aided design*, 31(4), pp. 273-285.

- Roy, U., Liu, C. R. & Woo, T. C., 1991. Review of dimensioning and tolerancing: representation and processing. *Computer-aided design*, 23(7), pp. 466-483.
- Schleich, B., Anwer, N., Mathieu, L. & Wartzack, S., 2014. Skin model shapes: A new paradigm shift for geometric variations modelling in mechanical engineering. *Computer-Aided Design*, Volume 50, pp. 1-15.
- Schleich, B. & Wartzack, S., 2015. Approaches for the assembly simulation of skin model shapes. *Computer-Aided Design*, Volume 65, pp. 18-33.
- Schönherr, S., 2002. Quadratic programming in geometric optimization: theory, implementation and applications.
- Serré, P., Rivière, A. & Clément, A., 2010. Parametric Specification of Mechanisms. *Geometric tolerancing of products*, pp. 183-205.
- Söderberg, R. & Lindkvist, L., 2001. Automated seam variation and stability analysis for automotive body system. *Proc. of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, pp. 255-264.
- Söderberg, R., Lindkvist, L. & Dahlström, S., 2006. Computer Aided Robustness Analysis for Compliant (non-rigid) Assemblies. *Journal of Engineering Design*, 17(5), pp. 411-428.
- Sodhi, R. & Turner, J. U., 1994. Towards modelling of assemblies for product design. *Computer-Aided Design*, 26(2), pp. 85-97.
- Spensieri, D. et al., 2009. A method to optimize geometric quality and motion feasibility of assembly sequences. *Product Lifecycle Management: Geometric Variations*, pp. 191-208.
- Srinivasan, V., 1993. The role of sweeps in tolerancing semantics. *Manufacturing Review*, Volume 6, pp. 275-275.
- Srinivasan, V., 2003. An integrated view of geometrical product specification and verification. *Geometric Product Specification and Verification: Integration of Functionality*, pp. 1-11.
- Stein, M., 1987. Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling. *Technometrics*, 29(2), pp. 143-151.
- Teissandier, D., 1995. L'union pondérée d'espaces de liberté: un nouvel outil pour la cotation fonctionnelle tridimensionnelle. *Manuscrit de Doctorat - Bordeaux 1*.
- Teissandier, D., 2012. Contribution à l'analyse des tolérances géométriques d'un système mécanique par des polyèdres. *Mémoire d'Habilitation - Université Bordeaux 1*.
- Teissandier, D., Couétard, Y. & Gérard, A., 1998. Three-dimensional functional tolerancing with proportioned assemblies clearance volume (UPEL: Unions pondérées d'espaces de liberté): application to setup planning. *Geometric Design Tolerancing: Theories, Standards and Applications*, pp. 171-182.
- Teissandier, D., Delos, V. & Couétard, Y., 1999. Operations on polytopes : application to tolerance analysis. *Global Consistency of Tolerances*, pp. 425-434.
- Ting, L., Yanlong, C., Jing, W. & Jiangxin, Y., 2016. Assembly error calculation with consideration of part deformation. *14th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, Volume 43, pp. 58-63.
- Turner, J. U., 1987. Tolerances in computer-aided geometric design. *Thèse de Doctorat - Department of Computer and System Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute*.
- Turner, J. U., 1990. Relative positioning of parts in assemblies using mathematical programming. *Computer-Aided Design*, 22(7), pp. 394-400.

- Turner, J. U., 1993. A feasibility space approach for automated tolerancing. *Journal of Engineering for Industry*, 115(3), pp. 341-346.
- Turner, J. U. & Wozny, M. J., 1987. Tolerances in Computer-Aided Geometric Design. *The visual computer*, 3(4), pp. 214-226.
- Weibel, C., 2007. Minkowski sums of polytopes. *Manuscrit de Doctorat - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*.
- Whitney, D. E. & Adams, J. D., 2001. Application of screw theory to constraint analysis of mechanical assemblies joined by features. *Journal of Mechanical Design*, 123(1), pp. 26-32.
- Yang, J., Wang, J., Wu, Z. & Anwer, N., 2013. Statistical tolerancing based on variation of point-set. *Procedia CIRP*, Volume 10, pp. 9-16.
- Zhang, M., Anwer, N., Stokinger, A. & Wartzack, S., 2013. Discrete shape modeling for skin model representation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, 227(5), pp. 672-680.
- Ziegler, G. M., 1995. Lectures on polytopes. *Springer Science & Business Media*, Volume 152.

Annexes

Annexe 1 – Définition du polytope $P_{1,7}$

La tolérance de localisation appliquée sur la surface 1,7 est de 0.060mm.

Les déplacements des points N_{3k} et N_{4k} sont donc bornés tel que :

$$\begin{cases} \forall N_{3k} \in ZT, -0.030 \leq \mathbf{t}_{N_{3k}-1,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.030 \\ \forall N_{4k} \in ZT, -0.030 \leq \mathbf{t}_{N_{4k}-1,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.030 \end{cases} \quad (0-1)$$

Avec :

$$\mathbf{n}_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{0-1,7} = \begin{pmatrix} t_{0-1,7x} \\ t_{0-1,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{1,7} = \begin{pmatrix} r_{1,7x} \\ r_{1,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_{3k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -(L-d) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathbf{N}_{4k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -L \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{2\pi}{k_{max}}$$

En appliquant les relations (II-5) et (II-6), on en déduit que le polytope $P_{1,7}$ est défini par l'intersection de $4 \times k_{max}$ demi-espace, $\bar{H}_{1,7-p}^+$, de $\mathbb{R}^4 (r_{1,7x}, r_{1,7y}, t_{0-1,7x}, t_{0-1,7y})$:

$$\bar{H}_{1,7-p}^+ : b_p + a_{p1} \cdot x_1 + a_{p2} \cdot x_2 + a_{p4} \cdot x_4 + a_{p5} \cdot x_5 \geq 0$$

Si $p = 4k - 3$:

$$b_p = 0.030$$

$$a_{p1} = -(L-d) \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7x}$$

$$a_{p2} = (L-d) \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha \cdot x_4 = t_{0-1,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha \cdot x_5 = t_{0-1,7y}$$

Si $p = 4k - 2$:

$$b_p = 0.030$$

$$a_{p1} = -L \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7x}$$

$$a_{p2} = L \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha \cdot x_4 = t_{0-1,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha \cdot x_5 = t_{0-1,7y}$$

Si $p = 4k - 1$:

$$b_p = -0.030$$

$$a_{p1} = -(L - d). \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7_x}$$

$$a_{p2} = (L - d). \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7_y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-1,7_x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-1,7_y}$$

Si $p = 4k$:

$$b_p = -0.030$$

$$a_{p1} = -L. \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7_x}$$

$$a_{p2} = L. \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7_y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-1,7_x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-1,7_y}$$

Annexe 2 : Définition du polytope $P_{2,7}$

La tolérance de localisation appliquée sur la surface 2,7 est de 0.060mm.

Les déplacements des points N_{1k} et N_{2k} sont donc bornés tel que :

$$\begin{cases} \forall N_{1k} \in ZT, -0.030 \leq \mathbf{t}_{N_{1k}-2,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.030 \\ \forall N_{2k} \in ZT, -0.030 \leq \mathbf{t}_{N_{2k}-2,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.030 \end{cases} \quad (0-2)$$

Avec :

$$\mathbf{n}_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{O-2,7} = \begin{pmatrix} t_{O-2,7x} \\ t_{O-2,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{2,7} = \begin{pmatrix} r_{2,7x} \\ r_{2,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_{1k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -(L-d) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathbf{N}_{2k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -L \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{2\pi}{k_{max}}$$

En appliquant les relations (II-5) et (II-6), on en déduit que le polytope $PF_{2,7}$ est défini par l'intersection de $4 \times k_{max}$ demi-espace, $\bar{H}_{2,7-p}^+$, de $\mathbb{R}^4 (r_{2,7x}, r_{2,7y}, t_{O-2,7x}, t_{O-2,7y})$:

$$\bar{H}_{2,7-p}^+ : b_p + a_{p1} \cdot x_1 + a_{p2} \cdot x_2 + a_{p4} \cdot x_4 + a_{p5} \cdot x_5 \geq 0$$

Si $p = 4k - 3$:

$$b_p = 0.030$$

$$a_{p1} = (L-d) \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7x}$$

$$a_{p2} = -(L-d) \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha \cdot x_4 = t_{O-2,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha \cdot x_5 = t_{O-2,7y}$$

Si $p = 4k - 2$:

$$b_p = 0.030$$

$$a_{p1} = L \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7x}$$

$$a_{p2} = -L \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha \cdot x_4 = t_{O-2,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha \cdot x_5 = t_{O-2,7y}$$

Si $p = 4k - 1$:

$$b_p = -0.030$$

$$a_{p1} = (L - d). \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7x}$$

$$a_{p2} = -(L - d). \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-2,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-2,7y}$$

Si $p = 4k$:

$$b_p = -0.030$$

$$a_{p1} = L. \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7x}$$

$$a_{p2} = -L. \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-2,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-2,7y}$$

Annexe 3 : Définition du polytope $PF_{1,7}$

La zone de tolérance borne les déplacements des points N_{3k} et N_{4k} tel que :

$$\begin{cases} \forall N_{3k} \in ZT, -0.055 \leq \mathbf{t}_{N_{3k}-1,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.055 \\ \forall N_{4k} \in ZT, -0.055 \leq \mathbf{t}_{N_{4k}-1,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.055 \end{cases} \quad (0-3)$$

Avec :

$$\mathbf{n}_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{0-1,7} = \begin{pmatrix} t_{0-1,7x} \\ t_{0-1,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{1,7} = \begin{pmatrix} r_{1,7x} \\ r_{1,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, N_{3k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -(L-d) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$N_{4k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -L \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{2\pi}{k_{max}}$$

En appliquant les relations (II-5) et (II-6), on en déduit que le polytope $PF_{1,7}$ est défini par l'intersection de $4 \times k_{max}$ demi-espace, $\bar{H}_{1,7-p}^+$, de $\mathbb{R}^4 (r_{1,7x}, r_{1,7y}, t_{0-1,7x}, t_{0-1,7y})$:

$$\bar{H}_{1,7-p}^+ : b_p + a_{p1} \cdot x_1 + a_{p2} \cdot x_2 + a_{p4} \cdot x_4 + a_{p5} \cdot x_5 \geq 0$$

Si $p = 4k - 3$:

$$b_p = 0.055$$

$$a_{p1} = -(L-d) \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7x}$$

$$a_{p2} = (L-d) \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha \cdot x_4 = t_{0-1,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha \cdot x_5 = t_{0-1,7y}$$

Si $p = 4k - 2$:

$$b_p = 0.055$$

$$a_{p1} = -L \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7x}$$

$$a_{p2} = L \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha \cdot x_4 = t_{0-1,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha \cdot x_5 = t_{0-1,7y}$$

Si $p = 4k - 1$:

$$b_p = -0.055$$

$$a_{p1} = -(L - d). \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7_x}$$

$$a_{p2} = (L - d). \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7_y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-1,7_x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-1,7_y}$$

Si $p = 4k$:

$$b_p = -0.055$$

$$a_{p1} = -L. \sin \alpha \quad x_1 = r_{1,7_x}$$

$$a_{p2} = L. \cos \alpha \quad x_2 = r_{1,7_y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-1,7_x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-1,7_y}$$

Annexe 4 : Définition du polytope $PF_{1,7}$

La zone de tolérance borne les déplacements des points N_{1k} et N_{2k} tel que :

$$\begin{cases} \forall N_{1k} \in ZT, -0.055 \leq \mathbf{t}_{N_{1k}-2,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.055 \\ \forall N_{2k} \in ZT, -0.055 \leq \mathbf{t}_{N_{2k}-2,7} \cdot \mathbf{n}_k \leq 0.055 \end{cases} \quad (0-4)$$

Avec :

$$\mathbf{n}_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{0-2,7} = \begin{pmatrix} t_{0-2,7x} \\ t_{0-2,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_{2,7} = \begin{pmatrix} r_{2,7x} \\ r_{2,7y} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_{1k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -(L-d) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathbf{N}_{2k}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} -R \cos \alpha \\ -R \sin \alpha \\ -L \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{2\pi}{k_{max}}$$

En appliquant les relations (II-5) et (II-6), on en déduit que le polytope $PF_{2,7}$ est défini par l'intersection de $4 \times k_{max}$ demi-espace, $\bar{H}_{2,7-p}^+$, de $\mathbb{R}^4 (r_{2,7x}, r_{2,7y}, t_{0-2,7x}, t_{0-2,7y})$:

$$\bar{H}_{2,7-p}^+ : b_p + a_{p1} \cdot x_1 + a_{p2} \cdot x_2 + a_{p4} \cdot x_4 + a_{p5} \cdot x_5 \geq 0$$

Si $p = 4k - 3$:

$$b_p = 0.055$$

$$a_{p1} = (L-d) \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7x}$$

$$a_{p2} = -(L-d) \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-2,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-2,7y}$$

Si $p = 4k - 2$:

$$b_p = 0.055$$

$$a_{p1} = L \cdot \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7x}$$

$$a_{p2} = -L \cdot \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-2,7x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-2,7y}$$

Si $p = 4k - 1$:

$$b_p = -0.055$$

$$a_{p1} = (L - d). \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7_x}$$

$$a_{p2} = -(L - d). \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7_y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-2,7_x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-2,7_y}$$

Si $p = 4k$:

$$b_p = -0.055$$

$$a_{p1} = L. \sin \alpha \quad x_1 = r_{2,7_x}$$

$$a_{p2} = -L. \cos \alpha \quad x_2 = r_{2,7_y}$$

$$a_{4p} = \cos \alpha x_4 = t_{0-2,7_x}$$

$$a_{5p} = \sin \alpha x_5 = t_{0-2,7_y}$$

Introduction de pièces déformables dans l'analyse de tolérances géométriques de mécanismes hyperstatiques

Résumé

Les mécanismes hyperstatiques sont souvent utilisés dans l'industrie pour garantir une bonne tenue mécanique du système et une bonne robustesse aux écarts de fabrication des surfaces. Même si ces assemblages sont très courants, les méthodologies d'analyse de tolérances de ces mécanismes sont difficiles à mettre en œuvre.

En fonction de ses écarts de fabrication, un assemblage hyperstatique peut soit présenter des interférences de montage, soit être assemblé avec jeu. Dans ces travaux de thèse, nous avons appliqué la méthode des polytopes afin de détecter les interférences de montage. Pour un assemblage donné, le polytope résultant du mécanisme est calculé. Si ce polytope est non vide, l'assemblage ne présente pas d'interférence. Si ce polytope est vide, l'assemblage présente des interférences de montage. En fonction du résultat obtenu, deux méthodes d'analyse distinctes sont proposées.

Si l'assemblage est réalisable sans interférence le polytope résultant du mécanisme permet de conclure sur sa conformité au regard de l'exigence fonctionnelle. Si l'assemblage présente des interférences de montage, une analyse prenant en compte la raideur des pièces est réalisée. Cette approche est basée sur une réduction de modèle avec des super-éléments. Elle permet de déterminer rapidement l'état d'équilibre du système après assemblage. Un effort de montage est ensuite estimé à partir de ces résultats pour conclure sur la faisabilité de l'assemblage. Si l'assemblage est déclaré réalisable, la propagation des déformations dans les pièces est caractérisée pour vérifier la conformité du système au regard de l'exigence fonctionnelle.

La rapidité de mise en œuvre de ces calculs nous permet de réaliser des analyses de tolérances statistiques par tirage de Monte Carlo pour estimer les probabilités de montage et de respect d'une Condition Fonctionnelle.

Mots clés : Analyse de tolérances géométriques, Simulation stochastique, Probabilité de défaillance, Mécanismes hyperstatiques, Interférences de montage, Déformations élastiques.

Introduction of flexible parts in tolerance analysis of over-constrained mechanisms

Abstract

Over-constrained mechanisms are often used in industries to ensure a good mechanical strength and a good robustness to manufacturing deviations of parts. The tolerance analysis of such assemblies is difficult to implement.

Indeed, depending on the geometrical deviations of parts, over-constrained mechanisms can have assembly interferences. In this work, we used the polytope method to check whether the assembly has interferences or not. For each assembly, the resulting polytope of the mechanism is computed. If it is non empty, the assembly can be performed without interference. If not, there is interferences in the assembly. According to the result, two different methods can be implemented.

For an assembly without interference, the resulting polytope enables to check directly its compliance. For an assembly with interferences, a study taking into account the stiffness of the parts is undertaken. This approach uses a model reduction with super elements. It enables to compute quickly the assembly with deformation. Then, an assembly load is computed to conclude on its feasibility. Finally, the spreading of deformation through the parts is calculated to check the compliance of the mechanism.

The short computational time enables to perform stochastic tolerance analyses in order to provide the rates of compliant assemblies.

Key words: Geometrical tolerance analysis, Stochastic simulation, Failure rate, Over-constrained mechanisms, Assembly interferences, Elastic deformations.